

MC
112.935/3

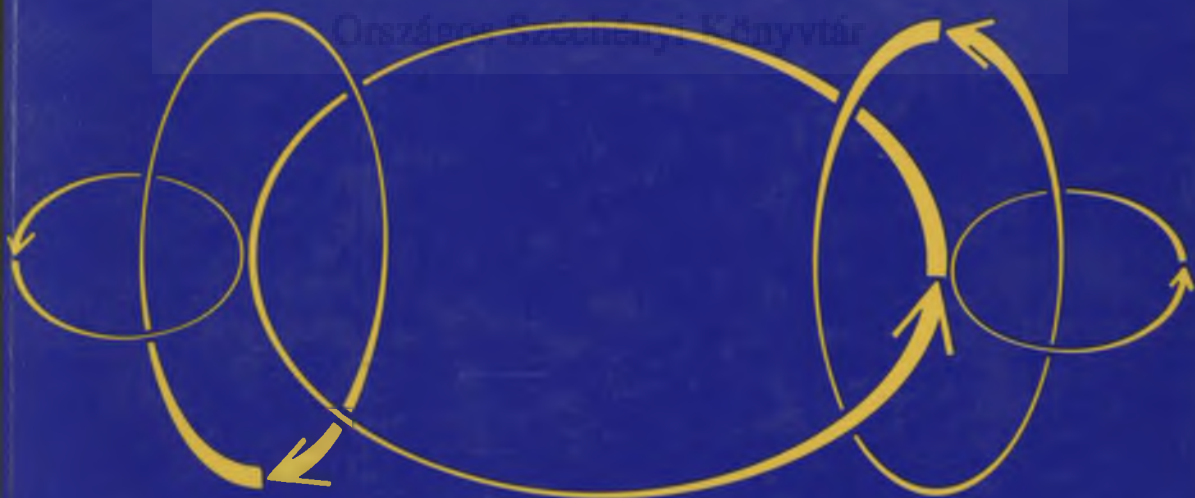
Baranyi Károly

A FIZIKAI GONDOLKODÁS ISKOLÁJA

Feladat –
megoldások

3

Országos Széchényi Könyvtár



Akadémiai Kiadó • Budapest

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

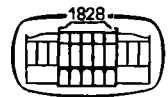
Baranyi Károly

A fizikai gondolkodás iskolája

3. kötet

Feladatmegoldások

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár



Akadémiai Kiadó · Budapest 1992

Lektorálta:

**Halmi György
Matolcsi Tamás**

**Az ábrákat rajzolta:
Olgyay Gézáné**

HC 112.935 | 3

16.815

1992

Országos Széchenyi Könyvtár

**ISBN 963 05 6095 X III. kötet
ISBN 963 05 5840 8 (összkiadás)**

**Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest
Első kiadás: 1992**

© Banyai Károly, 1992

**Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítást,
a nyilvános előadás, a rádió- és televíziózást,
valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.**

Printed in Hungary

Tartalom

V. rész

Feladatmegoldások

I. Feladatcsoport: egyenes vonalú mozgások	9	XI. Feladatcsoport: folyadékok	156
II. Feladatcsoport: forgómozgás	31	XII. Feladatcsoport: gázok	169
III. Feladatcsoport: térbeli mozgások, hajítások, körmozgás, relatív mozgás	36	XIII. Feladatcsoport: hőtágulás	179
IV. Feladatcsoport: Newton-törvények	48	XIV. Feladatcsoport: az ideális gázok hőtana	181
V. Feladatcsoport: munkatétel, energiamérleg	78	XV. Feladatcsoport: reális gázok, halmazállapot-változások	200
VI. Feladatcsoport: a körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás dinamikája	87	XVI. Feladatcsoport: statisztikus mechanika	204
VII. Feladatcsoport: gravitáció	110	XVII. Feladatcsoport: elektrosztatika	208
VIII. Feladatcsoport: pontrendszerek, tömegközéppont	115	XVIII. Feladatcsoport: egyenáram	227
IX. Feladatcsoport: merev testek mozgása	119	XIX. Feladatcsoport: mágneses tér	250
X. Feladatcsoport: rugalmas testek, a rugalmas deformáció terjedése	153	XX. Feladatcsoport: elektromágneses indukció	256
		XXI. Feladatcsoport: váltakozó áramú körök	266
		XXII. Feladatcsoport: elektromágneses tér	270
		XXIII. Feladatcsoport: optika	273
		XXIV. Feladatcsoport: relativitáselmélet	284
		XXV. Feladatcsoport: mikrofizika	295
		Függelék	298

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

V. rész

Feladatmegoldások

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

I. Feladatcsoport: egyenes vonalú mozgások

I/1. A mozgás grafikonjának az egyenlete:

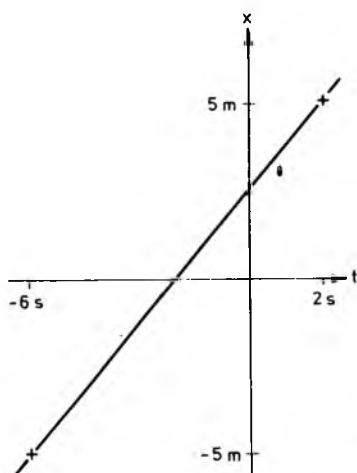
$$x = vt + x_0.$$

A 2 s időpontban a test az 5 m koordinátájú helyen van, a -6 s időpontban pedig -5 m koordinátával jellemzett helyen (I. 1. ábra):

$$5 = v \cdot 2 + x_0,$$

$$-5 = v \cdot (-6) + x_0.$$

Innen $v = 5/4$ m/s, és $x_0 = 2,5$ m, itt van a test a $t_0 = 0$ s időpontban.



I. 1.
ábra

I/2. A mozgást leíró függvény:

$$x(t) = vt + x_0.$$

Az (1 s, 6 m) és a (6 s, 4 m) pontok rajta vannak a függvény grafikonján (I. 2. ábra):

$$6 = v \cdot 1 + x_0,$$

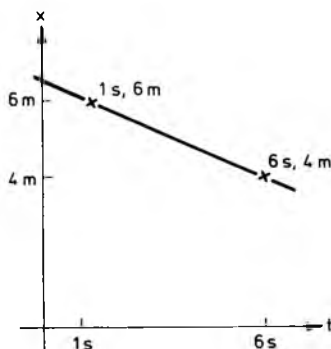
$$4 = v \cdot 6 + x_0.$$

Innen $v = -0,4$ m/s, és $x_0 = 6,4$ m, itt van a test a $t_0 = 0$ s időpontban. Jelöljük t -vel azt az időpontot, amikor a test áthalad az origón:

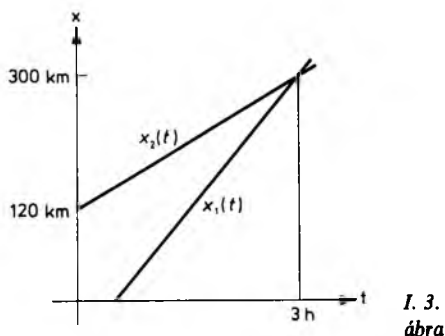
$$0 = vt + x_0,$$

$$0 = -0,4t + 6,4,$$

$$t = 16 \text{ s}.$$



I. 2.
ábra



I. 3.
ábra

I/3. A két mozgás helyfüggvénye (I. 3. ábra):

$$x_1(t) = 120(t - 0,5), \quad t \geq 0,5;$$

$$x_2(t) = 60t + 120, \quad t \geq 0.$$

Abban a t_1 időpontban, amikor a két autó találkozik:

$$x_2(t_1) = x_1(t_1),$$

vagyis

$$60t_1 + 120 = 120(t_1 - 0,5).$$

Innen $t_1 = 3$ óra és $x_1(3) = x_2(3) = 300$ km.

Az A várostól mérve ilyen messze éri utól a gyorsabb autó a lassúbbat.

I/4. A mozgások hely-idő grafikonja az I. 4. ábrán látható. A sebesség a grafikon meredeksége. Az első test esetén:

$$v_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} = 0,66 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a második test esetén:

$$v_2 = \operatorname{tg} \beta = \frac{2 - (-6)}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

I/5. A koordináta-rendszer függőleges tengelye megfelel az országútnak. Az A város az origóban van, a B város az $x_0 = 120$ km koordinátájú helyen. A három jármű mozgása egy-egy egyenessel ábrázolható (I. 5. ábra). A mozgásokat leíró

függvények:

$$x_1(t) = 90t,$$

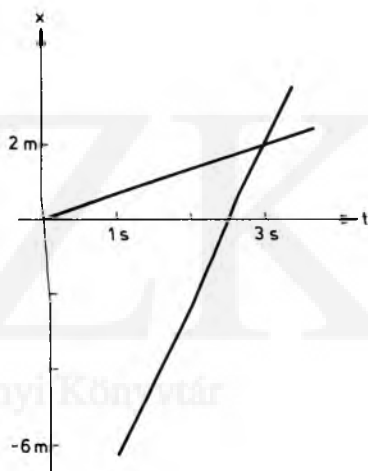
$$x_2(t) = 60t,$$

$$x_3(t) = -100t + 120.$$

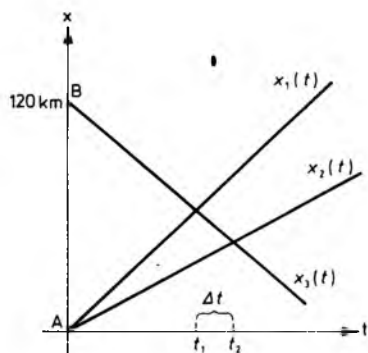
A motoros a t_1 időpontban találkozik az első autóval, a t_2 időpontban a második autóval:

$$x_1(t_1) = x_3(t_1),$$

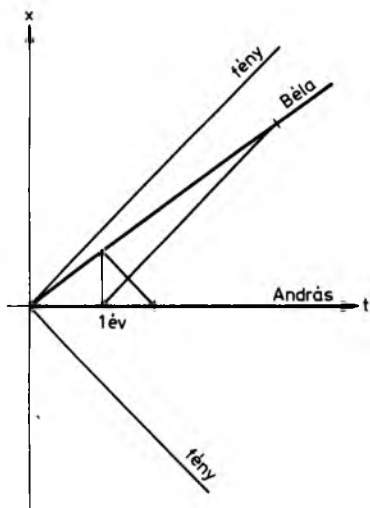
$$x_2(t_2) = x_3(t_2).$$



I. 4.
ábra



I. 5.
ábra



I. 6.
ábra

Részletesen:

$$90t_1 = -100t_1 + 120,$$

$$60t_2 = -100t_2 + 120.$$

Innen $t_1 = 0,632$ óra, $t_2 = 0,75$ óra. A két időpont különbsége:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0,118 \text{ óra} \approx 7 \text{ perc}.$$

I/6. Az I. 6. ábrán vázoltuk a két úrhajó grafikonját, ezek az origóban metszik egymást. Látható, hogy a Béla úrhajójának a sebessége a fénysebesség 0,8-szorosa, fényév/év-ben mérve: 0,8 fényév/év. A két fényjel grafikonját is megrajzoltuk. Ezek kezdőpontja a síkon ugyanazon a függőleges egyenesen van. Szemléletünknek is megfelel ez: a két gyermek együtt öregszik, amikor az egyik 1 éves, akkor a másik is pont annyi.

Megjegyzés: A fényév távolságegység, az a távolság, amelyet a fény 1 év = 365 24 3600 másodperc alatt megtesz. 1 fényév = $9,5 \cdot 10^{15}$ méter. A fényév meglehetősen gyakori mértékegység a csillagászatban és az elméleti fizikában is.

I/7. Az ábrán Δt^* -gal jelöltük azt az időintervallumot, amíg a vasutas hallja a hangot. Az I. 7. ábra alapján

$$\Delta t^* + T = \Delta t,$$

a vonat sebessége:

$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{x}{\Delta t},$$

a hangjel sebessége:

$$\operatorname{tg} \beta = c = \frac{x}{T}.$$

Innen

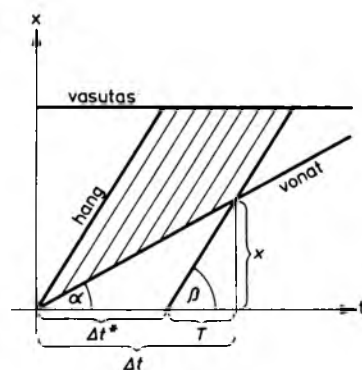
$$\Delta t^* = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \right) = 4,68 \text{ s}.$$

I/8. Tegyük fel, hogy a vonat akkor kezd fűtyülni, amikor éppen elhalad az állomás mellett. Az ábrán Δt^* -gal jelöljük azt az időintervallumot, amíg az utas hallja a hangot. Az I. 8. ábra alapján

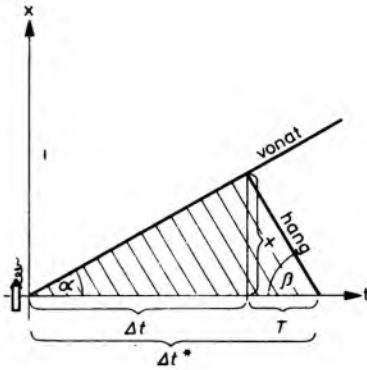
$$\Delta t^* = T + \Delta t,$$

a vonat sebessége:

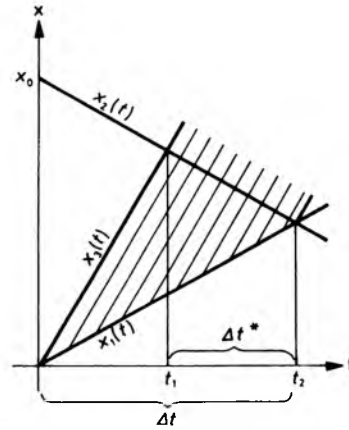
$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{x}{\Delta t},$$



I. 7.
ábra



I. 8.
ábra



I. 9.
ábra

a hangjel sebessége:

$$\operatorname{tg} \beta = c = \frac{x}{T}.$$

Innen

$$\Delta t^* = \Delta t \left(1 + \frac{v}{c} \right) = 5,31 \text{ s.}$$

I/9. A két autó és a hangjel grafikonja az I. 9. ábrán látható. Az autók a t_2 időpontban találkoznak. Úgy választjuk meg a kezdetben köztük lévő távolságot, hogy a hangjel éppen a t_2 időpontban fejeződjék be, és a 0 s időpontban kezdődjék. A hangjel eleje a t_1 időpontban találkozik a szembe jövő autóval. A feladatunk a $t_2 - t_1 = \Delta t^*$ időintervallum hosszának meghatározása. A hangelet kibocsájtó autó mozgását az

$$x_1(t) = v_1 t, \quad t \geq 0,$$

a szembe haladó autó mozgását az

$$x_2(t) = v_2 t + x_0, \quad t \geq 0,$$

és a hangjel elejének a mozgását az

$$x_3(t) = ct, \quad t \geq 0$$

függvény írja le. A t_1 és t_2 időpontok értel-

mezése szerint:

$$x_2(t_1) = x_3(t_1),$$

$$x_1(t_2) = x_2(t_2).$$

Részletesen:

$$v_2 t_1 + x_0 = c t_1,$$

$$v_2 t_2 + x_0 = v_1 t_2.$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$v_2 t_2 - v_2 t_1 = v_1 t_2 - c t_1,$$

és

$$(c - v_2) t_1 = (v_1 - v_2) t_2,$$

innen

$$t_1 = t_2 \frac{v_1 - v_2}{c - v_2}.$$

De $\Delta t^* := t_2 - t_1$, és legyen $\Delta t := t_2$, ekkor

$$\begin{aligned}\Delta t^* &= t_2 \left(1 - \frac{v_1 - v_2}{c - v_2} \right) = t_2 \frac{c - v_1}{c - v_2} \\ &= \Delta t \frac{c - v_1}{c - v_2} = 5 \frac{320 - 30}{320 - (-20)} = 4,26 \text{ s}.\end{aligned}$$

Megjegyzés: Ha $v_2 = 0$, akkor az őrház felé közeledő vonat esetét kapjuk. Ha emellett még $v_1 < 0$, akkor az őrháztól távolodó vonat esetéről van szó.

A grafikus megoldás egy másik kivitelezése a következőképpen képzelhető el (lásd az I. 9. ábra alsó részét):

$$\Delta t = T + \Delta t^*,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = v_1 = \frac{x_1}{\Delta t},$$

$$\operatorname{tg} \beta = c = \frac{x_1 + x_2}{T},$$

$$\operatorname{tg} \gamma = v_2 = \frac{x_2}{\Delta t^*}.$$

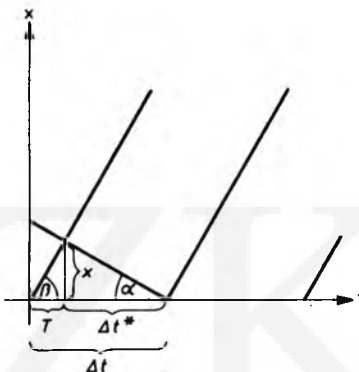
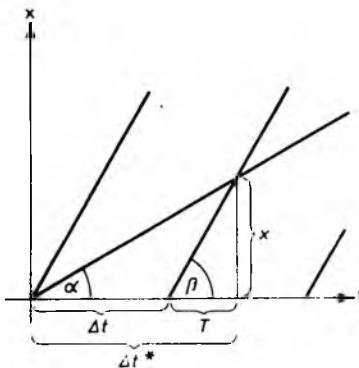
Innen a fenti eredményt kapjuk, azonban most $v_2 = 20 \text{ m/s-t}$ kell helyettesíteni (az előbb $v_2 = -20 \text{ m/s}$ volt, ezzel kifejeztük a sebesség előjelét).

I/10. A távolodó megfigyelő Δt^* ideig hallja a hangközöket. Az első hangjelet a 0 s időpontban észleli, a másodikat a Δt^* időpontban. Ekkor az I. 10. ábra felső része alapján

$$\Delta t^* = \Delta t + T,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{x}{\Delta t^*},$$

$$\operatorname{tg} \beta = c = \frac{x}{T}.$$



I. 10. ábra

Innen

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t}{1 - \frac{v}{c}} = 1,032 \text{ s}.$$

Okoskodhatnánk a következőképpen is. A második koppanás mozgását leíró függvény:

$$x_1(t) = c(t - \Delta t), \quad t \geq \Delta t.$$

A megfigyelő mozgását az

$$x_2(t) = vt, \quad t \geq 0$$

függvény írja le. Ekkor a Δt^* időpontban

$$x_1(\Delta t^*) = x_2(\Delta t^*),$$

$$c(\Delta t^* - \Delta t) = v\Delta t^*.$$

Innen

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Ha a megfigyelő közeledik, akkor legjobb, ha a második koppanás indulásakor érkezik meg; az *I. 10. ábra* alsó része alapján

$$\Delta t^* + T = \Delta t,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{x}{\Delta t^*},$$

$$\operatorname{tg} \beta = c = \frac{x}{T}$$

Innen

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t}{1 + \frac{v}{c}} = 0,969 \text{ s}.$$

I/11. Az autóbuszokat Δt időközönként indítják, és a szembejövőkkel a biciklis Δt_1 időközönként találkozik. A buszok megfeleltethetők az előző feladat koppanásainak, a Δt_1 pedig

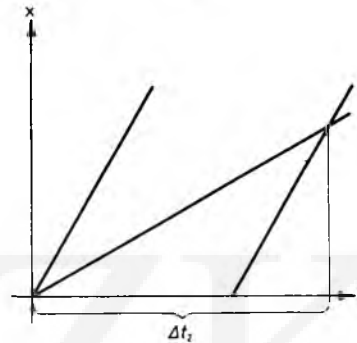
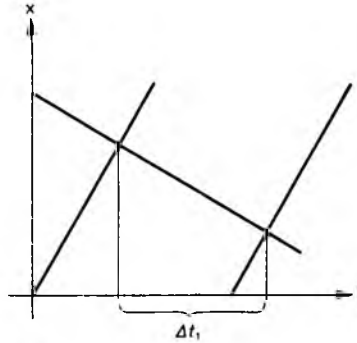
$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{1 + \frac{v}{c}} = 22,5 \text{ perc} = 0,375 \text{ óra},$$

ahol v a kerékpáros, c a buszok sebessége. Az egy irányba haladó buszok a megfigyelővel egy irányba haladó hangjeleknek felelnek meg, Δt_2 időközönként hagyják el a kerékpárost:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Az első egyenletbe helyettesítve:

$$0,375 = \frac{0,5}{1 + \frac{20}{c}}.$$



I. 11. ábra

Így $c = 60 \text{ km/h}$. A második egyenletből $\Delta t_2 = 0,75 \text{ h} = 45 \text{ perc}$ (*I. 11. ábra*).

I/12. A mozdony mozgását leíró függvény:

$$x_1(t) = 20t + 800,$$

az utolsó kocsi hely-idő függvénye:

$$x_2(t) = 20t.$$

Az egy irányba haladó autó a $t_0 = 0 \text{ s}$ időpontban a vonat végével együtt az origóban volt. A mozgását leíró függvény (*I. 12. ábra*):

$$x_3(t) = 30t.$$

Legyen t_1 az az időpont, amikor az autó elmegy a mozdony mellett: $x_3(t_1) = x_1(t_1)$, vagyis

$$20t_1 + 800 = 30t_1,$$

innen $t_1 = 80 \text{ s}$.

Ha az autó szembehalad a vonattal, akkor úgy jutunk legkönnyebben eredményre, ha a $t_0 = 0$ s időpontban találkozik a mozdony és az autó, az autó mozgását leíró függvény most:

$$x_3(t) = -30t + 800.$$

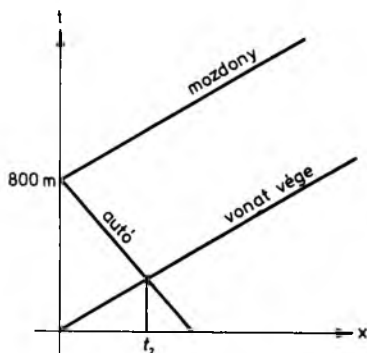
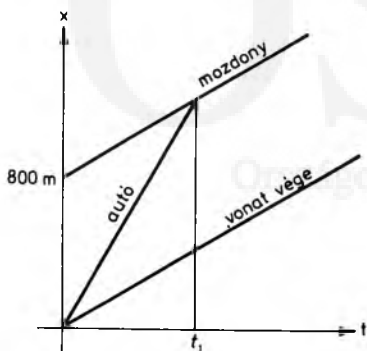
A vonat végével a t_2 időpontban találkozik, akkor

$$-30t_2 + 800 = 20t_2.$$

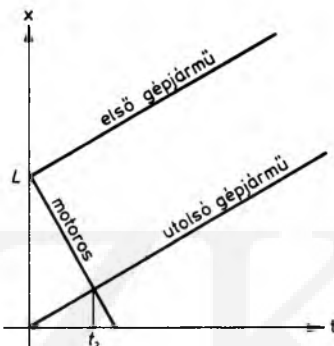
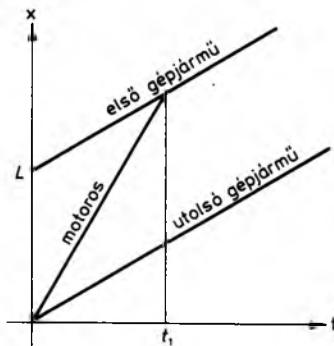
Innen $t_2 = 16$ s.

I/13. A gépjárműoszlop hossza legyen L , a sebessége v_1 . A motoros $v_2 = 30$ m/s sebességgel mozog. Ha egy irányban mozognak, akkor t_1 ideig mozognak egymás mellett, szembe pedig t_2 ideig. A t_1 időpontra vonatkozó egyenlőség (I. 13. ábra):

$$v_2 t_1 = v_1 t_1 + L.$$



I. 12.
ábra



I. 13.
ábra

Behelyettesítve:

$$30 \cdot 120 = v_1 \cdot 120 + L.$$

A t_2 időpontra vonatkozó egyenlőség (a motoros sebessége most $v_2^* = -v_2$):

$$v_2^* t_2 + L = v_1 t_2.$$

Behelyettesítve

$$-30 \cdot 60 = v_1 \cdot 60 - L.$$

Tehát

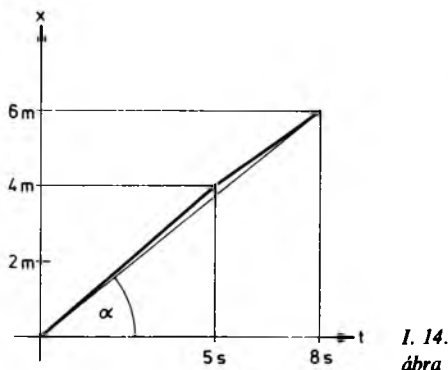
$$v_1 \cdot 120 + L = 3600,$$

$$v_1 \cdot 60 - L = -1800.$$

A két egyenletet összeadva:

$$v_1 \cdot 180 = 1800,$$

innen $v_1 = 10$ m/s, és $L = 2400$ m.



I/14. Az I. 14. ábráról leolvasható, hogy a test elmozdulása $s_1 + s_2 = 4 + 2 = 6$ m. Az eltelt idő $t_1 + t_2 = 5 + 3 = 8$ s. Az átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{6 \text{ m}}{8 \text{ s}} = \frac{3}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a grafikon kezdő- és végpontját összekötő egyenes meredeksége!

I/15. Mivel a t_1 idő alatt megtett út $v_1 t_1$, és a t_2 idő alatt megtett út $v_2 t_2$, az átlagsebesség:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \\ &= \frac{10 \cdot 4 + 22 \cdot 3}{7} = 15,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

I/16. Az első szakasz megtételéhez szükséges idő s_1/v_1 , a másodikhoz s_2/v_2 . Az átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{10}{\frac{4}{2} + \frac{6}{1}} = \frac{10}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

I/17. Az átlagsebesség értelmezése alapján

$$\bar{v} = \frac{\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$2,5 = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{v_2}},$$

ahonnan $v_2 = 3,3$ m/s.

I/18. Az átlagsebesség értelmezése szerint

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}.$$

Itt most s_2 az ismeretlen, ha $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 40$ km/h és $s_1 + s_2 = 100$ km. Legyen $x := s_2$. Tehát

$$77 = \frac{100}{\frac{100-x}{80} + \frac{x}{40}}.$$

A számolást elvégezve: $x = 3,9$ km. A sebességkorlátozás mintegy 4 km hosszú útra vonatkozik.

I/19. Az egyenletesen változó mozgást leíró

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0,$$

$$v(t) = at + v_0$$

függvényekben most a kezdősebesség nulla, és a kezdőhelyet az indulás helyének választjuk. Tehát: ha az autó s úton gyorsul fel, akkor

$$s = \frac{a}{2} t^2,$$

$$v = at.$$

Itt ismeretlen az a és a t . Ha az első egyenletet osztjuk a másodikkal, akkor

$$\frac{s}{v} = \frac{t}{2},$$

innen $t = 20$ s. Ha az első egyenletet a második négyzetével osztjuk, akkor

$$\frac{s}{v^2} = \frac{1}{2a}.$$

Innen:

$$a = \frac{v^2}{2s} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

I/20. A v_0 és az x_0 paraméterek most is nullák. Az

$$s = \frac{a}{2} t^2,$$

$$v = at$$

egyenletrendszerben s és t az ismeretlen. A második egyenletből

$$t = \frac{55,5}{2,5} = 22,2 \text{ s}$$

(hiszen $v = 200 \text{ km/h} = 55,5 \text{ m/s}$). Az első egyenletből: $s = 617 \text{ m}$.

I/21. Az

$$s = \frac{1,2}{2} t^2,$$

$$20 = 1,2 \cdot t$$

egyenletrendszerből $t = 16,6 \text{ s}$, $s = 166,6 \text{ m}$.

I/22. A

$$h = \frac{g}{2} t^2,$$

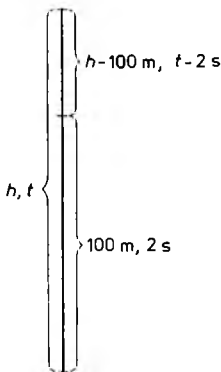
$$v = gt$$

egyenletek alapján: $t = 15/10 = 1,5 \text{ s}$, és $h = 11,2 \text{ m}$. (A másodfokú függvény most sem tartalmazza a $v_0 t$ és az x_0 tagokat.)

I/23. Az

$$s = 50 = \frac{g}{2} t^2,$$

$$v = gt$$



*I. 15.
ábra*

egyenletrendszer megoldása: $t = \sqrt{10} \text{ s}$,
 $v = 31,6 \text{ m/s}$.

I/24. Az egész útra

$$h = \frac{g}{2} t^2.$$

A 100 m-rel rövidebb felső szakaszt $t - 2$ másodperc alatt tette meg a test (*I. 15. ábra*):

$$h - 100 = \frac{g}{2} (t - 2)^2.$$

A két egyenletből

$$\frac{g}{2} t^2 - \frac{g}{2} (t - 2)^2 = 100.$$

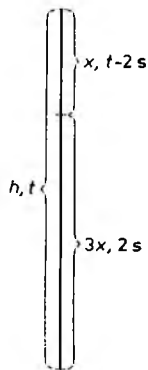
Mindkét oldalt $g/2$ -vel osztva és g értékét behelyettesítve:

$$t^2 - (t - 2)^2 = 20.$$

A négyzetreemelést elvégezve és összevonva:

$$4t - 4 = 20,$$

tehát $t = 6 \text{ s}$, és $h = 180 \text{ m}$. Ekkor valóban 4 másodperc alatt megtett út 80 m, a hátra-maradó 2 másodpercre 100 méter jut.



I. 16.
ábra

I/25. A négyzetes összefüggés az esés kezdetétől mért távolságokra (I. 16. ábra):

$$h = 4x = \frac{g}{2} t^2,$$

$$x = \frac{g}{2} (t-2)^2.$$

Innen

$$\frac{g}{2} t^2 = 4 \frac{g}{2} (t-2)^2,$$

egyszerűsítve

$$\frac{1}{4} t^2 = (t-2)^2,$$

átalakítás után

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{t-2}{t} \right)^2,$$

gyököt vonva

$$0,5 = \frac{t-2}{t}.$$

Így $t = 4$ s, $h = 80$ m.

I/26. A teljes esési magasságra a

$$h = \frac{g}{2} t^2$$

összefüggés érvényes. Ha az utolsó 2 másodpercben $3x$ utat tett meg a test, akkor

az utolsó előtti 1 másodpercben x -et tett meg. Az esés első $t-3$ másodperce alatt $h-4x$ utat, az első $t-2$ másodperc alatt $h-3x$ utat tett meg a test (I. 17. ábra):

$$h-4x = \frac{g}{2} (t-3)^2,$$

$$h-3x = \frac{g}{2} (t-2)^2.$$

A három egyenlet alapján:

$$\frac{g}{2} t^2 - 4x = \frac{g}{2} (t-3)^2,$$

$$\frac{g}{2} t^2 - 3x = \frac{g}{2} (t-2)^2.$$

Az első egyenlet 3-szorosát vonjuk ki a második 4-szereséből:

$$\frac{4g}{2} t^2 - \frac{3g}{2} t^2 = \frac{4g}{2} (t-2)^2 - \frac{3g}{2} (t-3)^2.$$

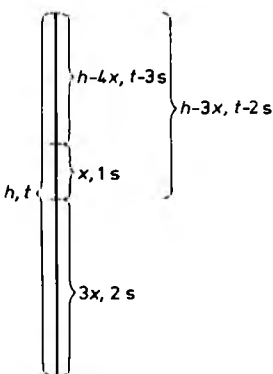
Innen

$$4t^2 - 3t^2 = 4(t-2)^2 - 3(t-3)^2,$$

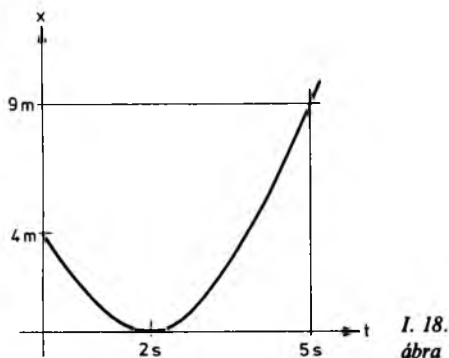
$$t^2 = t^2 + 2t - 11,$$

$$t = 5,5 \text{ s}.$$

Így a test 151,25 m magasról esik. Az utolsó 2 másodpercben 90 métert, az utolsó 3 másodpercben 120 métert tett meg.



I. 17.
ábra



I/27. Legyen a szakaszok hossza x_1, x_2, x_3 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 45 \text{ m.}$$

A teljes esési időt a

$$h = 45 = \frac{g}{2} t^2$$

egyenletből kiszámíthatjuk: $t = 3 \text{ s}$. Ennek a harmada alatt esik a test x_1 utat:

$$x_1 = \frac{g}{2} \left(\frac{t}{3} \right)^2 = 5 \text{ m,}$$

kétharmada alatt $x_1 + x_2$ távolságot tesz meg:

$$x_1 + x_2 = \frac{g}{2} \left(\frac{2t}{3} \right)^2.$$

Így $x_2 = 15 \text{ m}$, és végül $x_3 = 25 \text{ m}$.

I/28. A $t_0 = 0 \text{ s}$ időpontban a test a 4 m koordinátájú helyen van (I. 18. ábra):

$$x(0) = \frac{a}{2} \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + x_0 = 4.$$

Így $x_0 = 4 \text{ m}$, ami egyébként nyilvánvaló is. A test az origóba a 2 s időpontban érkezik:

$$x(2) = 0 = \frac{a}{2} \cdot 2^2 + v_0 \cdot 2 + 4,$$

és itt előjelet vált a sebesség:

$$v(2) = 0 = a \cdot 2 + v_0.$$

Ebből a két egyenletből $v_0 = -4 \text{ m/s}$ és $a = 2 \text{ m/s}^2$. Az 5 s időpontban a test az

$$x(5) = \frac{2}{2} \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 4 = 9 \text{ m}$$

koordinátájú helyen van. A megtett út

$$s(5) = 4 + 9 = 13 \text{ m.}$$

I/29. Nyilvánvaló, hogy $x_0 = 0$. A gyorsulást és a kezdősebességet a

$$9 = a \cdot 3 + v_0,$$

$$12 = a \cdot 6 + v_0$$

egyenletrendszerből határozzuk meg: $a = 1 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 6 \text{ m/s}$. Innen

$$x(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 22,5 \text{ m,}$$

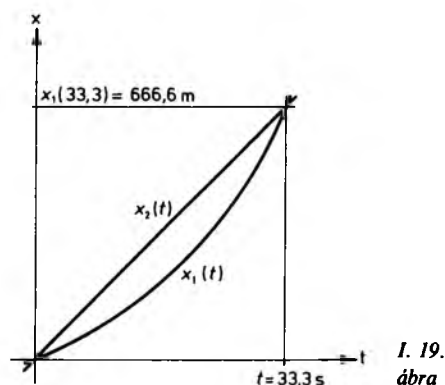
$$x(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 = 54 \text{ m.}$$

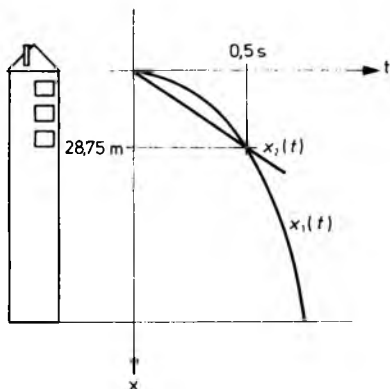
A test 3 s és 6 s között nem fordul meg, ezért $s = x(6) - x(3) = 31,5 \text{ m}$.

I/30. A két mozgás grafikonja az I. 19. ábrán látható. A mozgást leíró függvények:

$$x_1(t) = \frac{a}{2} t^2,$$

$$x_2(t) = v_2 t.$$





I. 20.
ábra

Ha a t időpontban találkoznak, akkor

$$\frac{a}{2} t^2 = v_2 t,$$

$$\frac{1,2}{2} t^2 = 20 t.$$

Innen a $t=0$ s megoldás mellett $t=33,3$ s. Ennyi idő alatt éri utól a gyorsabb autó a lassúbbat; eddig mindkettő megtesz

$$x_1(33,3) = x_2(33,3) = 666,6 \text{ m}$$

utat.

I/31. A két mozgás grafikonja az I. 20. ábrán látható. A mozgásokat leíró függvények:

$$x_1(t) = \frac{g}{2} t^2 \quad t \geq 0,$$

$$x_2(t) = v_2 t \quad t \geq 0.$$

A távolságot az ejtés helyétől lefelé mérjük. Abban a t időpontban, amikor a két test találkozik:

$$5t^2 = 2,5t,$$

$$t = 0,5 \text{ s}.$$

Így $x_1(0,5) = x_2(0,5) = 1,25$ m. A lift és a test $30 - 1,25 = 28,75$ m magasan találkozik.

I/32. A két test mozgását leíró függvény (I. 21. ábra):

$$x_1(t) = 2,5t, \quad t \geq 0,$$

$$x_2(t) = 30 - \frac{g}{2} t^2, \quad t \geq 0.$$

Ha a t időpontban találkoznak, akkor

$$x_1(t) = x_2(t),$$

$$2,5t = 30 - 5t^2,$$

$$5t^2 + 2,5t - 30 = 0,$$

így

$$t = \frac{-2,5 + 24,6}{10} = 2,21 \text{ s}.$$

Ebben a pillanatban a testek

$$x_1(2,21) = x_2(2,21) = 5,5 \text{ m}$$

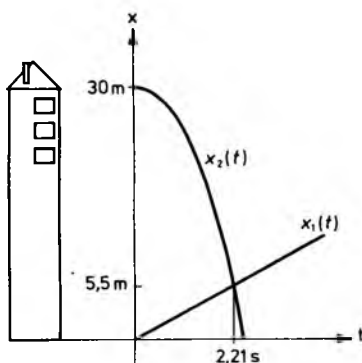
magasan vannak a talaj felett.

I/33. A vontató mozgását leíró függvény:

$$x_1(t) = 5t + 45, \quad t \geq 0,$$

az autó pedig így mozog:

$$x_2(t) = -\frac{2,5}{2} t^2 + 20t, \quad t \geq 0.$$



I. 21.
ábra

Ha ütköznek, akkor van olyan t időpont, amikor az

$$x_1(t) = x_2(t)$$

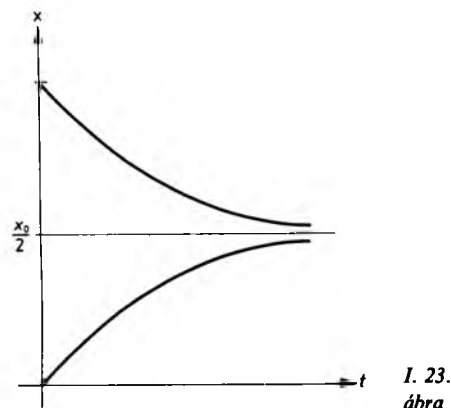
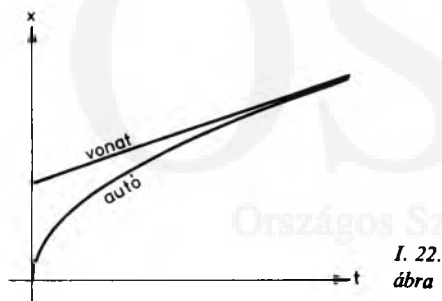
egyenlőség teljesül:

$$-\frac{2,5}{2}t^2 + 20t = 5t + 45,$$

$$\frac{2,5}{2}t^2 - 15t + 45 = 0,$$

$$t^2 - 12t + 36 = 0.$$

Innen $t = 6$ s. A másodfokú egyenletnek egyetlen megoldása van, a diszkriminánsa nulla. Így a parabola és az egyenes csak érinti egymást. Ez azt jelenti, hogy egymást érinti a két jármű, de nagyobb baj nem történik (I. 22. ábra).



I/34. Tegyük fel, hogy fékezéskor x_0 távol voltak. A két jármű grafikonja szimmetrikus az $x = x_0/2$ egyenletű egyenesre (I. 23. ábra). Elég ezért az egyik vonat mozgását vizsgálni, például azt, amelyiknek a grafikonja az origóból indul:

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 15t.$$

A t_1 időpontban a vonat sebessége nulla:

$$v(t_1) = 0 = -1t_1 + 15.$$

Innen $t_1 = 15$ s. Ennyi ideig fékeznek a vonaton. Ebben a pillanatban a vonat az $x_0/2$ helyen van, ha elkerülték az ütközést:

$$x(15) = \frac{x_0}{2},$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 15^2 + 15 \cdot 15 = \frac{x_0}{2}.$$

Innen $x_0 = 225$ m. Ennyi volt köztük kezdetben a távolság, ha éppen elkerülik az összeütközést.

I/35. Legyen $t_0 = 0$ s az az időpont, amikor az első test indul. Ekkor az 5 s időpontban a két test sebessége megegyezik:

$$a_1 \cdot 5 = a_2(5 - 2),$$

mert a második 2 s-mal kevesebb ideig mozog. Másrészt abban a t időpontban, amikor a két test ugyanazon koordinátájú helyen van:

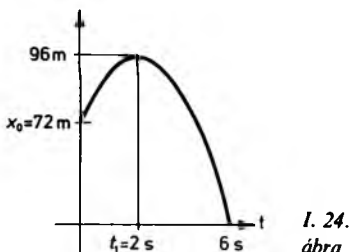
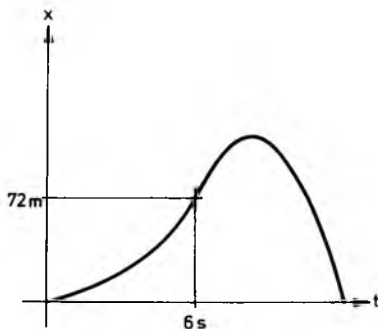
$$\frac{a_1}{2}t^2 = \frac{a_2}{2}(t-2)^2.$$

A két egyenletet osszuk el egymással:

$$\frac{t^2}{5} = \frac{(t-2)^2}{3}.$$

Innen $t = 8,87$ s.

I/36. A mozgás két egyenletesen változó mozgásból tevődik össze. A két mozgás grafikonja egy-egy parabola, amely közös



érintővel csatlakozik egymáshoz (I. 24. ábra). Az első konvex, mert a hozzá tartozó mozgás során a test felgyorsul. A második parabola konkáv, hiszen a test sebessége csökken. Nyilvánvaló, hogy a sebesség negatívra vált, hiszen a test visszaér az origóba. A mozgás első szakaszának végén a test az

$$x_0 = \frac{4}{2} \cdot 6^2 = 72 \text{ m}$$

koordinátájú helyen van, és szert tesz

$$v_0 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ m/s}$$

sebességre. Ezt a helyet és sebességet örökli a második mozgás. A feladat *átfogalmazható* a következőképpen: Egy test az $x_0 = 72 \text{ m}$ helyről indul, a kezdősebessége 24 m/s . Az origón a $t = 6 \text{ s}$ időpontban halad át. Mekkora az origótól mért legnagyobb távolsága, vagyis hol fordult meg a test? Világos tehát, hogy

$$x(6) = 0 = \frac{a}{2} \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 + 72.$$

Innen $a = -12 \text{ m/s}^2$. A test abban a t_1 időpontban fordul meg, amikor

$$v(t_1) = 0 = -12t_1 + 24,$$

tehát $t_1 = 2 \text{ s}$. Ekkor a test az

$$x(2) = \frac{-12}{2} \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 72 = 96 \text{ m}$$

koordinátájú helyen van.

I/37. A test sebességgrafikonja az I. 25. ábrán látható. A grafikon alatti terület a megtett úttal egyenlő:

$$s = \frac{4+6}{2} \cdot 5 = 25 \text{ m}.$$

Az átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{25}{6} = 4,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

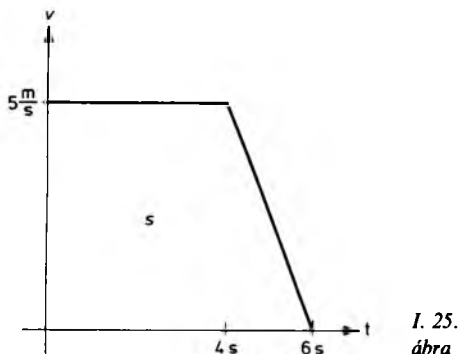
és az átlaggyorsulás:

$$\bar{a} = \frac{v(6) - v(0)}{6 - 0} = \frac{-5}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A mozgás második szakaszában a gyorsulás:

$$a = \frac{0 - 5}{2} = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

I/38. A mozgás sebességgrafikonja az I. 26. ábrán látható. A vonat által megtett út



most is a trapéz területével egyenlő:

$$20\,000 = \frac{900 + 1100}{2} v.$$

Innen a legnagyobb sebesség: $v = 20$ m/s.
Az átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{20\,000}{1100} = 18,18 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

I/39. A lassuló test sebességgrafikonját szemléltettük az I. 27. ábrán. A megállásig hátra lévő utat s -sel jelöltük. Ekkor az s területű háromszög hasonló az $s + 100$ területű nagy háromszöghöz. A hasonló háromszögek területének az aránya egyenlő az oldalak arányának a négyzetével:

$$\frac{s}{s+100} = \left(\frac{v_0}{5}\right)^2.$$

Innen

$$\frac{s}{s+100} = \frac{1}{25},$$

$$s = 4,16 \text{ m}.$$

I/40. Az I. 28. ábrán látható háromszögek területének aránya:

$$\frac{70 \text{ cm}}{80 \text{ cm}} = \frac{v^2}{800^2}.$$

Innen $v = 748$ m/s. Az első 10 cm úton a test sebessége 52 m/s-mal csökken.

I/41. A három függvény:

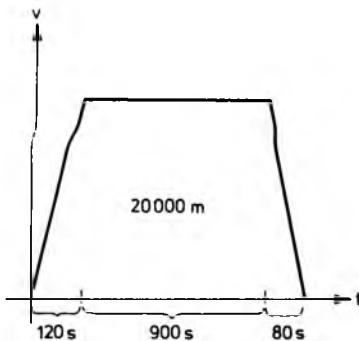
$$x(t) = 8t^4 - 24t^3 + 6t - 3,$$

$$v(t) = 32t^3 - 72t^2 + 6,$$

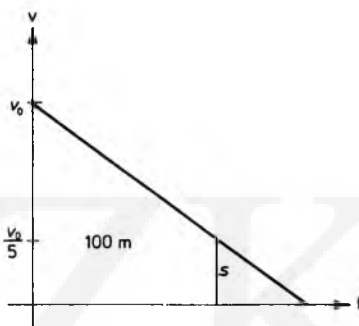
$$a(t) = 96t^2 - 144t.$$

Behelyettesítve:

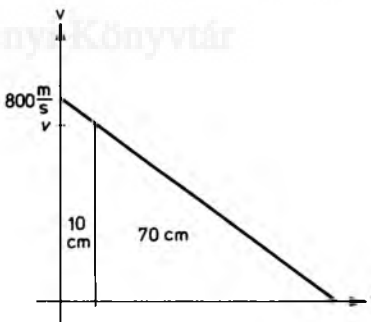
$$x(1) = -13 \text{ m}, v(1) = -34 \text{ m/s}, \text{ és } a(1) = -48 \text{ m/s}^2.$$



I. 26.
ábra



I. 27.
ábra



I. 28.
ábra

A test koordinátája a $t = 1$ s-ban negatív, -13 m. A sebessége kisebb nullánál, abban a pontban tehát az érintő meredeksége negatív, az érintő „lefelé lejt”. A gyorsulás is negatív, a grafikon (lokálisan) az érintő alatt van. A mozgás grafikonja a $t = 1$ s

időpont környezetében az I. 29. ábrán látható módon viselkedik.

Megjegyzés. A vázolt módszerrel gyorsan áttekinthetjük a mozgások tulajdonságait, a sebesség és a gyorsulás előjelét. Az ábrán szemléltettük a négy alapesetet.

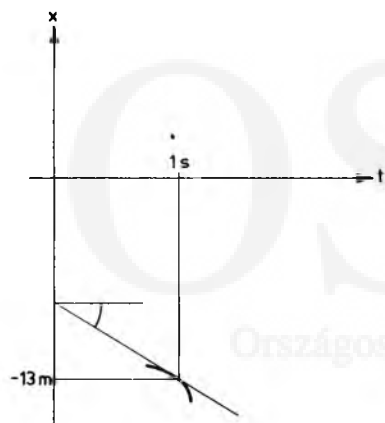
I/42. Az I. 30. ábrán bejelöltük a megnevezett intervallumot.

I/43. A hely-, sebesség- és gyorsulásfüggvény a t időpontban:

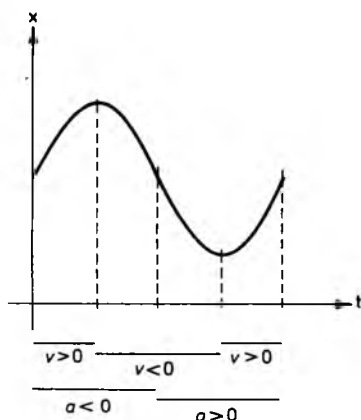
$$x(t) = 8 \sin(2\pi \cdot 12t + \pi/3),$$

$$v(t) = 8 \cdot 2\pi \cdot 12 \cos(2\pi \cdot 12t + \pi/3),$$

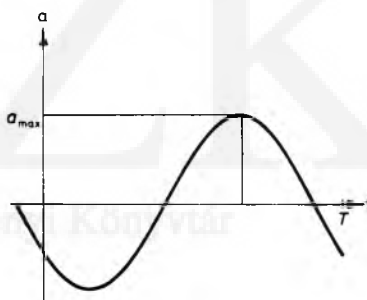
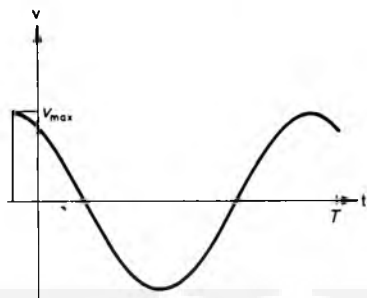
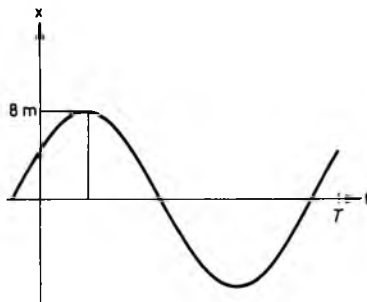
$$a(t) = -8 \cdot (2\pi \cdot 12)^2 \sin(2\pi \cdot 12t + \pi/3).$$



I. 29. ábra



I. 30. ábra



I. 31. ábra

A három függvény grafikonját látjuk az I. 31. ábrán. A függvényekből leolvasható, hogy a körfrekvencia, a frekvencia és a periódusidő rendre:

$$\omega = 2\pi \cdot 12 \frac{1}{s},$$

$$f = 12 \frac{1}{s} = 700 \frac{1}{\text{min}},$$

$$T = \frac{1}{12} s.$$

A mozgás legnagyobb sebessége:

$$v_{\max} = 8 \cdot 2\pi \cdot 12 = 603 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

és a legnagyobb gyorsulás:

$$a_{\max} = 8 \cdot (2\pi \cdot 12)^2 = 45\,480 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A test kitérése a 0,01 s időpontban:

$$\begin{aligned} x(0,01) &= 8 \sin(2\pi \cdot 12 \cdot 0,01 + \pi/3) = \\ &= 8 \sin(0,754 + 1,047) = \\ &= 8 \sin(1,801). \end{aligned}$$

Ha kalkulátorral számolunk, akkor állítjuk át a zsebszámológépet radiánban történő számolásra. Ekkor

$$\sin(1,801) = 0,973,$$

így

$$x(0,01) = 7,78 \text{ m}.$$

Számolhatunk természetesen fokban is, a táblázatok különben ezt teszik lehetővé. Ilyenkor átszámítjuk a radiánban mért 1,801 szöget fokra, a következő arányosság alapján:

$$\frac{\alpha}{\alpha^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}.$$

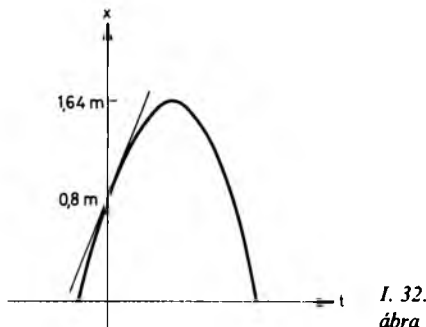
Tehát

$$\alpha^\circ = 1,801 \frac{180^\circ}{\pi} = 103,2^\circ.$$

Ekkor

$$\sin \alpha^\circ = \sin(103,2^\circ) = 0,9736.$$

I/44. Az I. 32. ábrán jól látszik, hogy a $t=0$ időpontban a kitérés pozitív (0,8 m), a sebesség is, $v=5,76$ m/s, mert a grafikon érintője fölfelé emelkedik. A gyorsulás ekkor negatív, a grafikont az érintő fölülről érinti. Leolvasható az is, hogy a $-\varphi = \alpha_0$



kezdőfázis 0 és $\pi/2$ közé esik. A körfrekvencia könnyen meghatározható a harmonikus rezgőmozgás karakterisztikus egyenletéből:

$$-\omega^2 x(0) = a(0),$$

$$-\omega^2 \cdot 0,8 = -12,8.$$

Innen $\omega = 4$ 1/s. Az amplitudót a másik nevezetes összefüggésből kapjuk:

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2,$$

$$A = 1,64 \text{ m}.$$

A kezdőfázist a

$$\sin(-\varphi) = \frac{x(0)}{A} = \frac{0,8}{1,64}$$

egyenletből kapjuk:

$$-\varphi \approx 0,5.$$

A mozgást leíró függvény tehát

$$x(t) = 1,64 \sin(4t + 0,5).$$

I/45. A 0 időpontbeli gyorsulás:

$$a(0) = -\omega^2 x(0) = -4 \cdot 10 = -40 \text{ cm/s}^2.$$

Az amplitudó az

$$A^2 = 10^2 + \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

egyenlőségéből: $A = 14,14 \text{ cm}$. A kezdőfázis a

$$\sin(-\varphi) = \frac{10 \text{ cm}}{14,14 \text{ cm}}$$

egyenletből:

$$-\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Így a mozgást leíró függvény (a kitérést cm-ben mérve):

$$x(t) = 14,14 \sin(2t + \pi/4).$$

I/46. A mozgás grafikonja az I. 33. ábrán látható, a kezdeti kitérése negatív (tehát a gyorsulása pozitív), a sebesség nagyobb nullánál, mert az $x(0) = -10 \text{ cm}$ helyen az érintő fölfelé mutat és alulról érinti a grafikont. A kezdőfázis $-\pi/2$ és 0 közé esik. Az amplitudó az

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

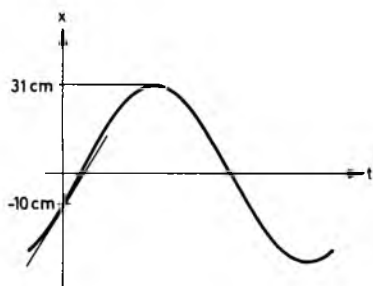
nevezetes egyenlőségéből:

$$A = 0,31 \text{ m}.$$

A kezdőfázis:

$$\sin(-\varphi) = \frac{-10 \text{ cm}}{31 \text{ cm}} = -0,316,$$

$$-\varphi = -0,32.$$



I. 33.
ábra

A mozgást leíró függvény

$$x(t) = 0,31 \sin(3t - 0,32).$$

Megjegyzés: Képzeljünk el egy A sugarú kört. A középpontja legyen egy derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjában. A koordináta-rendszer vízszintes tengelyére a rezgőmozgás sebességének és a körfrekvenciának a hányadosát, a függőleges tengelyére a kitérését mérjük. A $-\varphi$ szöghelyzetből induló, ω szögsebességgel forgó, A hosszúságú vektor vízszintes vetülete $\frac{v}{\omega}$, függőleges vetülete x . A kezdeti kitérés és a kezdeti sebesség egyaránt lehet pozitív vagy negatív előjelű vagy nulla. A kezdőfázis meghatározásához az I. 34. ábra segítséget nyújt. Ha például, mint a példánkban $x(0) < 0$ és $v(0) > 0$, akkor $-\pi/2 < -\varphi < 0$.

I/47. Az amplitudó

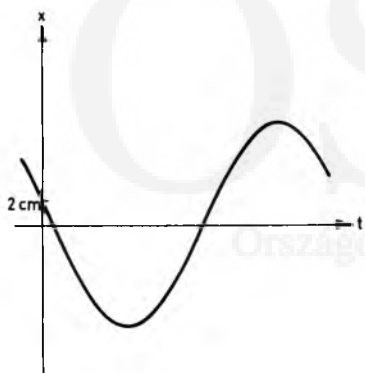
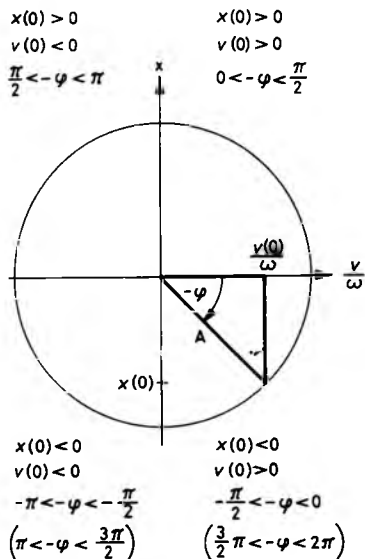
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(2 \cdot 10^{-2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{500}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 10^{-4} + \frac{3}{500}} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 10^{-4} + \frac{60}{10000}} = \\ &= \sqrt{64 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^{-2} = 8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

A mozgás grafikonja az I. 35. ábrán látható. A kezdeti kitérés $x(0) = 2 \text{ cm} > 0$, a kezdeti sebesség $v = -\sqrt{3} \text{ m/s} < 0$, ezért a kezdőfázisra $\pi/2 < -\varphi < \pi$ teljesül. A

$$\sin(-\varphi) = \frac{2}{8} = 0,25$$

egyenletből

$$\begin{aligned} -\varphi_1 &= 0,2526 + k \cdot 2\pi \quad (k=0, \\ &\pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$



vagy

$$-\varphi_2 = \pi - 0,2526 + k \cdot 2\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

hiszen a $\sin x = c$ (ahol c egy állandó és $|c| \leq 1$) típusú egyenleteknek egy perióduson belül kivételes esetektől eltekintve két megoldása van. Mivel már előre láttuk, hogy a kezdőfázist a $\pi/2$ és π között kell

keresnünk, a φ_2 szolgáltatja a megoldást:

$$-\varphi = \pi - 0,2526 + 0 \cdot 2\pi,$$

$$-\varphi = 2,88.$$

A mozgást leíró függvény:

$$x(t) = 8 \sin(\sqrt{500}t + 2,88).$$

Most vizsgáljuk meg, hogy melyik $t > 0$ időpontban lesz a kitérés ismét 2 cm. Meg kell tehát oldani az

$$x(t) = 2$$

egyenletet:

$$2 = 8 \sin(\sqrt{500}t + 2,88),$$

$$0,25 = \sin(\sqrt{500}t + 2,88).$$

Innen vagy

$$0,2526 \pm 2k\pi = \sqrt{500}t + 2,88 \quad (k=0,$$

$$1, 2, \dots),$$

vagy

$$\pi - 0,2526 \pm 2k\pi = \sqrt{500}t + 2,88 \quad (k=0,$$

$$1, 2, \dots).$$

A keresett időpont kisebb, mint a periódusidő, nagyobb mint a periódusidő fele:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{500}} = 0,280 \text{ s}.$$

A keresett megoldás az első sorozatból a $k=1$ helyettesítéssel adódik:

$$0,2526 + 2\pi = \sqrt{500}t + 2,88,$$

$$t = 0,1635 \text{ s}.$$

Valóban

$$0,140 < 0,1635 < 0,280.$$

Másként is okoskodhatunk: a mozgás gra-

fikonjáról leolvasható, hogy a keresett t időtartam a periódusidő felének és két, t_1 -gyel jelölt időtartam összege:

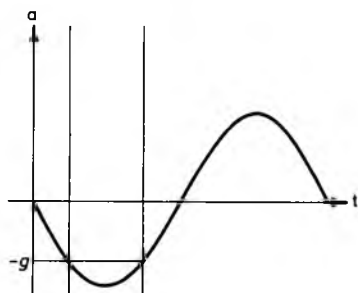
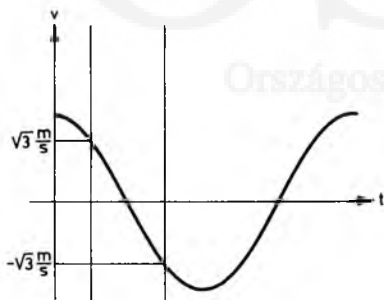
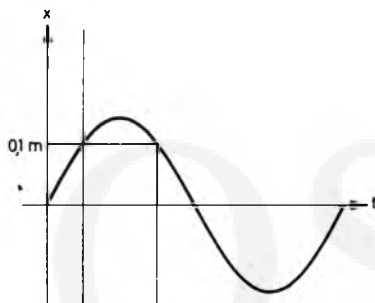
$$t = \frac{T}{2} + 2t_1,$$

ahol t_1 az az időpont, amikor

$$2 = 8 \sin \sqrt{500} t_1$$

először teljesül:

$$t_1 = 0,011 \text{ s.}$$



I. 36.
ábra

I/48. A mozgás grafikonjáról (I. 36. ábra) leolvasható, hogy az $a = -g$ feltételnek egyensúlyi helyzet fölött felel meg egy kitérés, ehhez a kitéréshez két azonos nagyságú, ellentétes előjelű sebesség tartozik. A gyorsulás tehát az egyensúlyi helyzet fölött — vagy fölfelé, vagy lefelé haladva — egyezik meg a nehézségi gyorsulással. Az $a = -g$ gyorsuláshoz tartozó kitérés

$$a = -g = -\omega^2 x$$

alapján:

$$x = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm.}$$

A sebességet az

$$0,1^2 + \frac{v^2}{10^2} = 0,2^2$$

egyenletből kapjuk:

$$v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

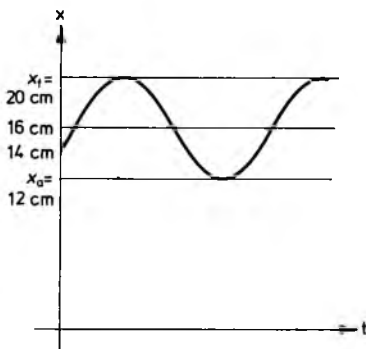
I/49. Tegyük fel, hogy

$$x(0) = 14 \text{ cm,}$$

$$v(0) = 288 \text{ cm/s.}$$

Ekkor a mozgás helyfüggvénye (I. 37. ábra):

$$x(t) = 4 \sin(\omega t - \varphi) + 16.$$



I. 37.
ábra

Vonjuk le $x(t)$ -ből 16 cm-t:

$$y(t) := x(t) - 16.$$

(y a kitérést jelöli.) Ekkor

$$y(t) = 4 \sin(\omega t - \varphi).$$

Világos, hogy $y(0) = -2$ cm és $v(0) = 288$ m/s. A körfrekvencia az

$$A^2 = y^2 + \frac{v^2}{\omega^2}$$

alapján:

$$\omega = \sqrt{\frac{v^2}{A^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{288^2}{4^2 - 2^2}} = 83,1 \frac{1}{s}.$$

A periódusidő: $T = 0,075$ s. A -2 cm és a 2 cm kitérések az amplitúdó felével egyenlő nagyságúak. A test tehát -2 cm helyről $T/12 = 0,0063$ s alatt ér az origóba, innen $T/12$ idő alatt a 2 cm kitérésű helyre, végül további $2T/12 = 0,0126$ s alatt éri el az $y = 4$ cm koordinátájú felső holtpontot. Összesen tehát a felső holtpont eléréséig

$$\frac{4T}{12} = \frac{T}{3} = 0,0252 \text{ s}$$

idő telt el.

I/50. Az összetartozó hely- és a sebesség-adatok kielégítik a Pithagorasz-féle összefüggést:

$$40^2 + \frac{60^2}{\omega^2} = A^2,$$

$$20^2 + \frac{100^2}{\omega^2} = A^2.$$

Innen:

$$40^2 + \frac{60^2}{\omega^2} = 20^2 + \frac{100^2}{\omega^2},$$

$$40^2 - 20^2 = \frac{100^2 - 60^2}{\omega^2},$$

$$\omega^2 = \frac{100^2 - 60^2}{40^2 - 20^2} = \frac{160 \cdot 40}{60 \cdot 20} = 5,33,$$

$$\omega = 2,3 \text{ 1/s}.$$

Visszahelyettesítve:

$$A^2 = 20^2 + \frac{100^2}{2,3^2} = 2275,$$

$$A = 47,7 \text{ cm}.$$

Az egyensúlyi helyzetben

$$v_{\max} = A\omega = 110 \text{ cm/s}$$

sebességgel halad át.

I/51. A rezgés amplitúdója 12 cm és a 6 cm koordinátájú helyről indul a rezgés, vagyis $x(0) = 6$ cm, ezért a kezdőfázis a

$$\sin(-\varphi) = \frac{6}{12}$$

egyenlet alapján:

$$-\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

A $t = 0,2$ s időpontban $x(0,2) = 12$ cm, ezért a

$$12 = 12 \sin(\omega \cdot 0,2 + \pi/6)$$

egyenlet alapján:

$$\omega = \frac{2\pi}{6 \cdot 0,2} = 5,23 \frac{1}{s}.$$

Így a mozgást leíró függvény:

$$x(t) = 12 \sin(5,23t + \pi/6).$$

A maximális gyorsulás:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 329 \text{ cm/s}^2.$$

I/52. A legnagyobb sebesség:

$$v_{\max} = A\omega = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

és a legnagyobb gyorsulás:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 14,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Innen $\omega = 12 \text{ 1/s}$ és $A = 0,1 \text{ m}$. Az amplitúdó és a körfrekvencia tehát ismert. Az

$$a = -\omega^2 x,$$

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2$$

egyenlőségek alapján:

$$\frac{a^2}{\omega^4} + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2.$$

Így egyrészt

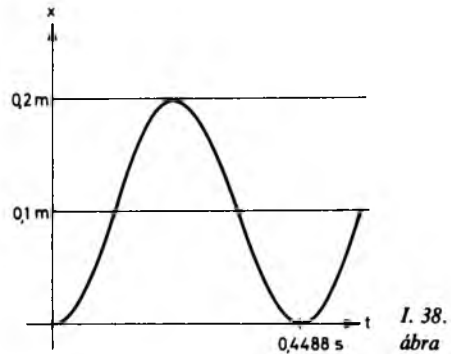
$$\frac{10^2}{12^4} + \frac{v^2}{12^2} = 0,1^2,$$

innen $v = 0,86 \text{ m/s}$, másrészt

$$\frac{a^2}{12^4} + \frac{0,8^2}{12^2} = 0,1^2,$$

tehát $a = 10,73 \text{ m/s}^2$.

I/53. A mozgás grafikonja a 0 időpontban az origón halad át: $x(0) = 0$, és a sebessége is nulla: $v(0) = 0$, a gyorsulás azonban pozitív, a grafikon az érintő fölött halad (I. 38. ábra). Ennek a feltételnek csak a koszinuszfüggvény (-1) -szerese tesz eleget, ha annyival fölfelé toljuk, hogy a grafi-



konja fölülről érintse a „t tengelyt”. Világos tehát, hogy

$$T = 0,4488 \text{ s}$$

és

$$\omega = 14 \text{ 1/s}.$$

A legnagyobb gyorsulásból az amplitudót meghatározzuk:

$$A\omega^2 = 19,6 \text{ m/s}^2,$$

így

$$A = 0,1 \text{ m}.$$

A mozgást leíró függvények:

$$x(t) = -0,1 \cos(14t) + 0,1,$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = 0,1 \cdot 14 \sin(14t),$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = 0,1 \cdot 14^2 \cos(14t).$$

II. Feladatcsoport: forgómozgás

II/1. Az egyenletes forgómozgás szögsebessége:

$$\omega = 244 \text{ 1/s}.$$

Innen

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,0257 \text{ s}.$$

A fordulatszám:

$$f = \frac{1}{T} = 38,8 \frac{1}{\text{s}}.$$

A 12 s alatt az elfordulás szöge (radiánban mérve) $\alpha = \omega t = 244 \cdot 12 = 2928$. A körbefordulások száma:

$$N := \frac{2928}{2\pi} = 466.$$

II/2. Az óra nagy- és kismutatójának a szögsebessége adott:

$$\omega_N = \frac{2\pi}{3600} \frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_K = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} \frac{1}{\text{s}}.$$

Ebben a feladatcsoportban az óramutatók járásának irányát választjuk pozitív forgásiránynak. 12 óra után t idő múlva a két

mutató

$$\alpha_N = \omega_N t,$$

$$\alpha_K = \omega_K t$$

szöget zár be a függőlegessel. Ha a t időpontban merőlegesek egymásra, akkor

$$\alpha_N - \alpha_K = \frac{\pi}{2}.$$

Innen

$$\omega_N t - \omega_K t = \frac{\pi}{2},$$

vagyis

$$t \left(\frac{2\pi}{3600} - \frac{1}{12} \frac{2\pi}{3600} \right) = \frac{\pi}{2},$$

$$t \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{3600\pi}{2\pi \cdot 2} = \frac{3600}{4},$$

$$t \frac{11}{12} = \frac{3600}{4},$$

$$t = 981,81 \text{ s} = 16,36 \text{ perc},$$

valóban valamivel több mint negyed óra múlva következik ez be.

II/3. 1 óra után t idővel a két mutató

$$\alpha_N = \omega_N t,$$

$$\alpha_K = \omega_K t + \frac{\pi}{6}$$

szöget zár be a függőlegessel. Tehát abban a t időpontban, amikor először fedik egymást

$$\alpha_N = \alpha_K.$$

Így

$$\omega_N t = \omega_K t + \frac{\pi}{6},$$

$$(\omega_N - \omega_K)t = \frac{\pi}{6},$$

$$\frac{2\pi}{3600} \left(1 - \frac{1}{12}\right) t = \frac{\pi}{6},$$

$$t = \frac{3600 \cdot 12}{12 \cdot 11} = 327 \text{ s} = 5,45 \text{ perc}.$$

II/4. 3 óra 10 perckor a nagymutató $\pi/3$ szöget zár be a függőlegessel, a kismutató pedig $\pi/2$ -nél annnyival többet, amennyit 10 perc, azaz 600 másodperc alatt elfordul; tehát $\pi/2 + 600\omega_K$ a kismutató függőlegessel bezárt egyik szöge. 3 óra 10 perc után t idővel a két mutató

$$\alpha_N = \omega_N t + \frac{\pi}{3},$$

$$\alpha_K = \omega_K t + \frac{\pi}{2} + 600 \omega_K$$

szöget zár be a függőlegessel. Amikor a mutatók fedik egymást, akkor

$$\alpha_N - \alpha_K = 0,$$

vagy

$$\alpha_N - \alpha_K = 2\pi,$$

vagy általában

$$\alpha_N - \alpha_K = 2k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Amikor először fedik egymást,

$$\omega_N t_1 + \frac{\pi}{3} = \omega_K t_1 + \frac{\pi}{2} + 600 \frac{2\pi}{12 \cdot 3600}.$$

Innen

$$t_1 \frac{2\pi}{3600} \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 600 \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} + \frac{2\pi}{12},$$

és

$$t_1 \frac{11}{3600} = \frac{7}{6},$$

így

$$t_1 = 381,81 \text{ s} = 6,36 \text{ perc}.$$

A második találkozás időpontja legyen most t_2 . Ekkor

$$t_2 \cdot \frac{2\pi}{3600} \frac{11}{12} = \frac{600 \cdot 2\pi}{12 \cdot 3600} + \frac{2\pi}{12} + 2\pi.$$

Így

$$t_2 \cdot \frac{11}{3600} = \frac{7}{6} + 12,$$

ebből

$$t_2 = 4309 \text{ s} = 1 \text{ óra } 11,8 \text{ perc}.$$

II/5. 12 óra 5 perckor a két mutató a 12 órának megfelelő helyzettel $\omega_K \cdot 5 \cdot 60$, illetve $\pi/6$ szöget zár be. Indulás után t idő múlva a 12 órának megfelelő helyzettel bezárt szög:

$$\alpha_N = -\omega_N t + \frac{\pi}{6},$$

$$\alpha_K = \omega_K t + 300 \omega_K.$$

Ha a t_1 időpontban fedik először egymást, akkor

$$\alpha_N = \alpha_K,$$

$$-\omega_N t_1 + \frac{\pi}{6} = \omega_K t_1 + 300 \frac{2\pi}{12 \cdot 3600},$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{12 \cdot 12} = (\omega_K + \omega_N) t_1,$$

$$\frac{2\pi}{12} \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{2\pi}{3600} \left(1 + \frac{1}{12}\right) t_1,$$

$$\frac{2\pi}{12} \frac{11}{12} = \frac{2\pi}{3600} \frac{13}{12} t_1,$$

$$\frac{11}{12} = \frac{13}{3600} t_1.$$

Így $t_1 = 253,8 \text{ s} = 4,23 \text{ perc}$.

Legyen most t_2 az az időpont, amikor először merőlegesek egymásra. Ekkor

$$\alpha_K - \alpha_N = \frac{\pi}{2},$$

$$(\omega_K + \omega_N) t_2 + 300 \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2\pi}{3600} \left(\frac{1}{12} + 1\right) t_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{12 \cdot 12},$$

$$\frac{2\pi}{3600} \cdot \frac{13}{12} t_2 = \frac{6\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} - \frac{1}{12} \cdot \frac{2\pi}{12},$$

$$\frac{13}{3600} t_2 = 4 - \frac{1}{12} = \frac{47}{12},$$

$$t_2 = 1084,6 \text{ s} = 18,0 \text{ perc}.$$

II/6. A két mutató t idővel az indulás után

$$\alpha_N = \beta_N \frac{t^2}{2} + \omega_N t,$$

$$\alpha_K = \beta_K \frac{t^2}{2} + \omega_K t$$

szöget zár be a 12 órainak megfelelő függőleges helyzettel. A teljes nap ($24 \text{ óra} = 24 \cdot 3600 \text{ másodperc}$) alatt a nagymutató 24 teljes kört és még $2\pi/60$ radiánt fordult el, ennyi felel meg ugyanis az 1 perces sietésnek. Tehát

$$24 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{60} = \frac{\beta_N}{2} (24 \cdot 3600)^2 + \\ + \frac{2\pi}{3600} \cdot 24 \cdot 3600.$$

Innen

$$\frac{2\pi}{60} = \frac{\beta_N}{2} (24 \cdot 3600)^2,$$

$$\beta_N = \frac{2 \cdot 2\pi}{60 \cdot 24^2 \cdot 3600^2} = \frac{2\pi}{2,239 \cdot 10^{11} \text{ s}^2}.$$

Úgyanígy a kismutatóra:

$$2 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{60 \cdot 12} = \frac{\beta_K}{2} (24 \cdot 3600)^2 + \\ + \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} \cdot 24 \cdot 3600,$$

$$\frac{2\pi}{60 \cdot 12} = \frac{\beta_K}{2} (24 \cdot 3600)^2,$$

$$\beta_K = \frac{2 \cdot 2\pi}{60 \cdot 12 \cdot 24^2 \cdot 3600^2} = \frac{\beta_N}{12},$$

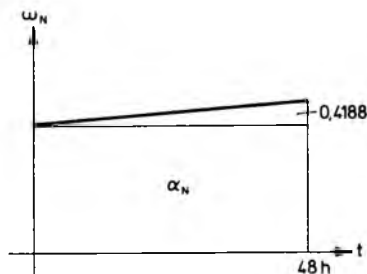
mint amire számítottunk is. 48 óra = $48 \cdot 3600 \text{ s}$ alatt a nagymutató

$$\alpha_N = \frac{\beta_N}{2} (48 \cdot 3600)^2 + \frac{2\pi}{3600} (48 \cdot 3600)$$

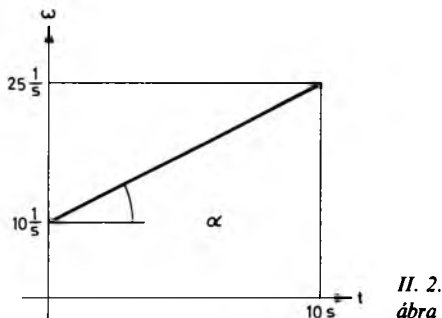
szöget fordul el, tehát $\alpha_N = 302,011$ radián (II. 1. ábra). Ebben a $2\pi \cdot 48,066$ -szor van meg. A nagymutató a fölfelé mutató függőlegessel $0,4188$ radiánban kifejezett szöget zár be. Ennek

$$t' = 3600 \frac{\alpha}{2\pi} = 240 \text{ s} = 4 \text{ perc}$$

felel meg, az óra most már 4 percet siet.



II. 1. ábra



II. 2. ábra

II/7. A szögsebesség-idő függvény grafikonjáról (II. 2. ábra) leolvashatjuk a szöggyorsulást, ez a grafikon meredeksége, és az elfordulás szögét, ez meg a görbe alatti terület, tehát

$$\beta = \frac{25 - 10}{10} = 1,5 \frac{1}{s^2},$$

$$\alpha = \frac{25 + 10}{2} \cdot 10 = 175.$$

A körülfordulások száma:

$$N = \frac{175}{2\pi} = 27,8.$$

II/8. A kezdeti szögsebesség:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 60 \text{ 1/s}.$$

A szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{0 - 120\pi}{20} = -18,8 \frac{1}{s^2}.$$

Az elfordulás szöge:

$$\alpha = \frac{120\pi}{2} \cdot 20 = 1200\pi.$$

Megállásig tehát $1200\pi/2\pi = 600$ fordulatot tesz meg a kerék. Legyen az első másodpercben az elfordulás szöge α_1 (II. 3. ábra), ekkor

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha} = \left(\frac{19}{20}\right)^2,$$

így $\alpha_1 = 117\pi$, az első másodpercben 58,5 fordulatot tesz meg a kerék. Legyen most α_2 az utolsó másodpercben az elfordulás szöge, ekkor

$$\frac{\alpha_2}{\alpha} = \left(\frac{1}{20}\right)^2,$$

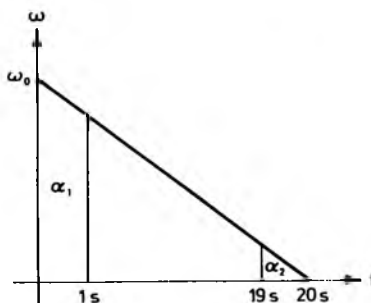
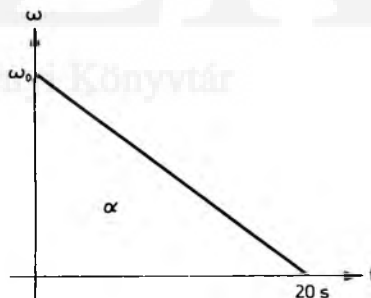
$$\alpha_2 = 3\pi,$$

tehát az utolsó másodpercben 1,5-öt fordult a kerék.

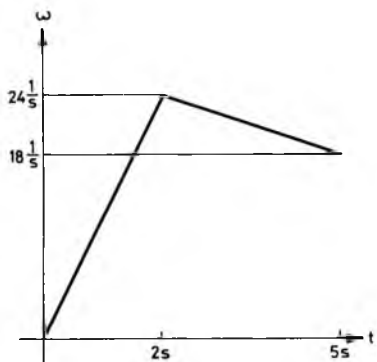
II/9. A kerék szögsebessége 2 másodpercig 12 1/s^2 szöggyorsulással nő, a második másodperc végén 24 1/s a szögsebesség. Ezután csökken a szögsebesség, 3 másodpercig -2 1/s^2 szöggyorsulással; a csökkenés mértéke 6 1/s (II. 4. ábra).

II/10. A szögsebességvektor a kezdeti szögsebesség és a βt szögsebesség-változás összege:

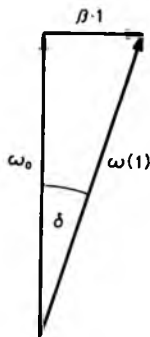
$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t,$$



II. 3. ábra



II. 4.
ábra



II. 5.
ábra

így a szögsebességvektor hossza 11 1/s lesz, állása nem változik. A forgás síkja és iránya változatlan marad, de a fordulatszám nő.

II/11. A sebességvektor az eredetihez képest elfordul (II. 5. ábra). Az elfordulás szöge legyen δ , ekkor

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta \cdot 1}{\omega_0} = 0,1,$$

tehát $\delta = 5,7^\circ$. A szögsebességvektor hossza is megnő:

$$\begin{aligned} \omega &= |\omega_0 + \beta \cdot 1| = \sqrt{10^2 + 1^2} = \\ &= \sqrt{101} = 10,05 \text{ 1/s.} \end{aligned}$$

A forgás síkja tehát megbillen $5,7^\circ$ -kal, és a fordulatszám igen kis mértékben, $0,5\%$ -kal nő.

III. Feladatcsoport: térbeli mozgások, hajítások, körmozgás, relatív mozgás

III/1. A pont helyvektora a t időpontban az

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t = (2, 1) + (1, -2)t = (2+t, 1-2t)$$

vektor (III. 1. ábra). Behelyettesítéssel nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{r}(1) = (3, -1),$$

$$\mathbf{r}(2) = (4, -3),$$

$$\mathbf{r}(3) = (5, -5).$$

Az elmozdulásvektor az 1 s és 3 s között:

$$\Delta \mathbf{r} = (5-3, -5-(-1)) = (2, -4).$$

III/2. A test elmozdulása a t_0 és t_1 időpontok között:

$$\Delta \mathbf{r} = (2 \cdot 2,5; 3 \cdot 2,5^2; 2,5-1) -$$

$$-(2 \cdot 1; 3 \cdot 1^2; 1-1) = (3; 15,75; 1,5).$$

A sebességvektor az

$$\mathbf{r}(t) = (2t; 3t^2; t-1)$$

helyvektor deriváltja:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) = (2; 6t; 1),$$

a gyorsulásvektort a sebességvektor deriváltjaként kapjuk:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t) = (0; 6; 0).$$

III/3. A test helyvektora (III. 2. ábra):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \\ &= (12 + 12 \cos 30^\circ \cdot t; 8 + 12 \sin 30^\circ \cdot t - 5t^2) = \\ &= (12 + 6\sqrt{3}t; 8 + 6t - 5t^2). \end{aligned}$$

A $t = 1,2$ s időpontban az

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(1,2) &= \\ &= (12 + 6\sqrt{3} \cdot 1,2; 8 + 6 \cdot 1,2 - 5 \cdot 1,2^2) = \\ &= (24,5; 8). \end{aligned}$$

helyen van. A sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (6\sqrt{3}; 6 - 10t)$$

és az 1,2 s időpontban:

$$\mathbf{v}(1,2) = (6\sqrt{3}; 6 - 12) = (10,4; -6).$$

A test akkor ér földet, amikor a hely-idő függvény második koordinátája nulla:

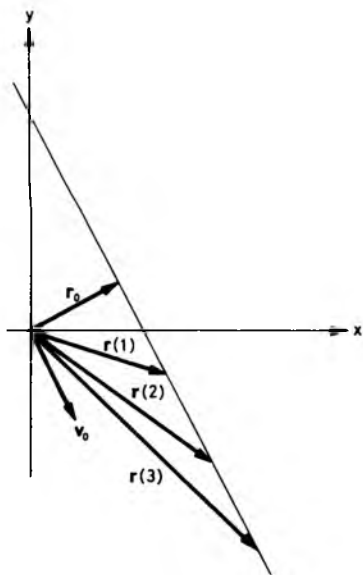
$$8 + 6t - 5t^2 = 0,$$

innen $t = 2$ s. Ekkor a mozgás első koordinátája:

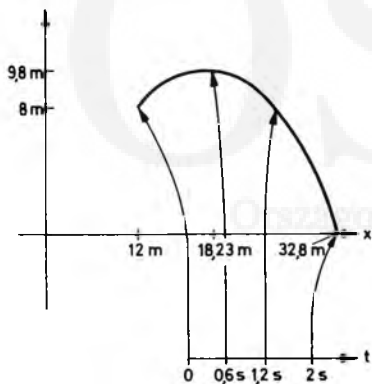
$$x(2) = 12 + 6\sqrt{3} \cdot 2 = 32,8 \text{ m.}$$

A pálya csúcán a sebesség második komponense nulla:

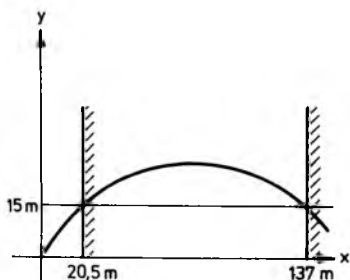
$$6 - 10t = 0,$$



III. 1.
ábra



III. 2.
ábra



III. 3.
ábra

a pálya csúcsára tehát a $t = 0,6$ s időpontban ér. Ekkor a test az

$$\mathbf{r}(0,6) = (18,23; 9,8)$$

helyen van. A pályacsúcs koordinátái tehát 18,23 méter és 9,8 méter.

III/4. A mozgás két koordinátafüggvénye (III. 3. ábra):

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

Behelyettesítve:

$$x = 40 \cos 40^\circ \cdot t,$$

$$y = 15 = 40 \sin 40^\circ \cdot t - 5 t^2.$$

A második egyenletből:

$$t = 4,47 \text{ s} \quad \text{vagy} \quad t = 0,67 \text{ s}.$$

Ezeket figyelembe véve

$$x = 137 \text{ m} \quad \text{vagy} \quad x = 20,5 \text{ m}.$$

A függőleges egyenes az elhajítás helyétől 20,5 méter vagy 137 méter távol van. Ekkor az elhajított test 15 méter magasan ütközik az egyenesbe.

III/5. A két koordinátafüggvénybe helyettesítünk:

$$x = 50 \cos 30^\circ \cdot t,$$

$$10 = 50 \sin 30^\circ \cdot t - 5 t^2.$$

Innen $t_1 = 4,56$ s, $t_2 = 0,43$ s, és $x_1 = 197$ m, $x_2 = 18,6$ m.

III/6. A két koordinátafüggvénybe helyettesítve

$$80 = 50 \cos 30^\circ \cdot t,$$

$$y = 50 \sin 30^\circ \cdot t - 5 t^2.$$

Innen $t = 1,85$ s, és így $y = 29,1$ m.

III/7. A koordinátafüggvényekbe he-

lyettesítünk:

$$40 = v_0 \cos 30^\circ \cdot t,$$

$$20 = v_0 \sin 30^\circ \cdot t - 5t^2.$$

A második egyenlet mindkét oldalához adjunk $5t^2$ -et, ezután osszuk el a két egyenletet egymással:

$$\frac{20 + 5t^2}{40} = \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Innen $t = 0,786$ s. Az első egyenletbe visszahelyettesítve

$$v_0 = 58,76 \text{ m/s}$$

kezdősebességet kapunk.

III/8. A mozgás koordinátafüggvényei (III. 4. ábra):

$$x = v_0 \cos 30^\circ \cdot t,$$

$$y = y_0 + v_0 \sin 30^\circ \cdot t - \frac{g}{2} t^2,$$

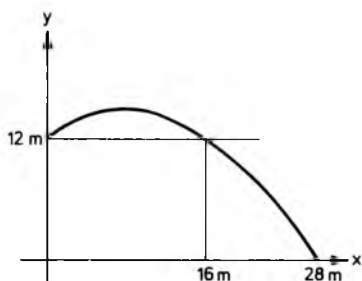
ahol $y_0 = 12$ m. A feltétel szerint, ha $x = 16$ m, akkor a hozzá tartozó $y = 12$ m:

$$16 = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t,$$

$$12 = 12 + v_0 \frac{1}{2} t - 5t^2.$$

A másodikból

$$\frac{1}{2} v_0 t = 5t^2,$$



III. 4. ábra

tehát

$$t = \frac{v_0}{10},$$

ezt beírva az elsőbe:

$$16 = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_0}{10},$$

a kezdősebesség: $v_0 = 13,6$ m/s. Amikor a test földet ér, akkor $y = 0$:

$$0 = 12 + 13,6 \cdot \frac{1}{2} t - 5t^2,$$

innen $t = 2,37$ s. A test

$$x = 13,6 \cos 30^\circ \cdot 2,37 = 28 \text{ m}$$

távol ér földet.

III/9. A pálya csúcán

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

ahol a feltétel szerint $t = 8$ s. Innen

$$v_0 \sin \alpha = 80.$$

Másrészt a hajítás pályacsúcsának a koordinátája:

$$y_{\text{csúcs}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{80^2}{2g} = 320 \text{ m}.$$

III/10. A hajítás pályacsúcsának koordinátái:

$$x_{\text{csúcs}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha = \frac{87,7}{2} = 43,8 \text{ m},$$

$$y_{\text{csúcs}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\frac{y_{\text{csúcs}}}{x_{\text{csúcs}}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2},$$

ebből

$$y_{\text{csúcs}} = \frac{x_{\text{csúcs}}}{2} = 21,9 \text{ m}.$$

III/11. A test akkor esik le, amikor

$$v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = 0.$$

Innen

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Másrészt a pályacsúcs magassága:

$$y_{\text{csúcs}} = 30 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Innen

$$v_0 \sin \alpha = \sqrt{2gy_{\text{csúcs}}} = 24,5 \text{ m/s},$$

vagyis

$$t = \frac{2 \cdot 24,5}{g} = 4,89 \text{ s}.$$

A pályacsúcs koordinátáinak hányadosa:

$$\frac{y_{\text{csúcs}}}{x_{\text{csúcs}}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

így $\alpha \approx 70^\circ$, és (például)

$$y_{\text{csúcs}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

alapján: $v_0 = 26 \text{ m/s}$.

III/12. Vizsgáljuk az első test mozgását. Amikor az első $\alpha = 30^\circ$ szöget bezáró irányban elhajítva a pálya csúcsára ér, akkor

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0.$$

Így

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{200 \cdot 0,5}{10} = 10 \text{ s}.$$

Ekkor a másik test koordinátái:

$$x_2(10) = v_0 \cos \beta \cdot 10 =$$

$$= 200 \cos 60^\circ \cdot 10 = 1000 \text{ m},$$

$$y_2(10) = v_0 \sin \beta \cdot 10 - \frac{g}{2} \cdot 10^2 = 1232 \text{ m},$$

itt β a második hajítás szöge, $\beta = 60^\circ$. Ebben a pillanatban a második test sebessége:

$$v_{x2}(10) = v_0 \cos \beta = 100 \text{ m/s},$$

$$v_{y2}(10) = v_0 \sin \beta - g \cdot 10 = 73 \text{ m/s}.$$

A második test sebességének függőleges koordinátája pozitív, vagyis a test így felfelé emelkedik. Amikor az első földet ér, vagyis amikor

$$v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = 0,$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 20 \text{ s}.$$

Ekkor a második test koordinátái:

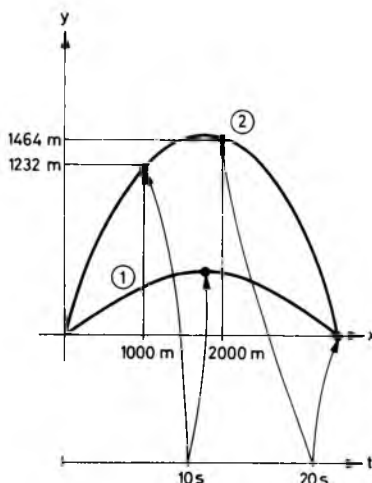
$$x_2(20) = 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 = 2000 \text{ m},$$

$$y_2(20) = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20 - 5 \cdot 20^2 = 1464,1 \text{ m}.$$

A sebesség második koordinátája:

$$v_{y2}(20) = -26,8 \text{ m/s},$$

tehát a második test is áthalad a pályája legmagasabb pontján (III. 5. ábra).



III. 5.
ábra

Megjegyzés: Érdekes összehasonlítani a két mozgást! A két test ugyanazon a helyen esik a talajra; hiszen

$$\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\beta,$$

mert

$$\sin(2 \cdot 30^\circ) = \sin(2 \cdot 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

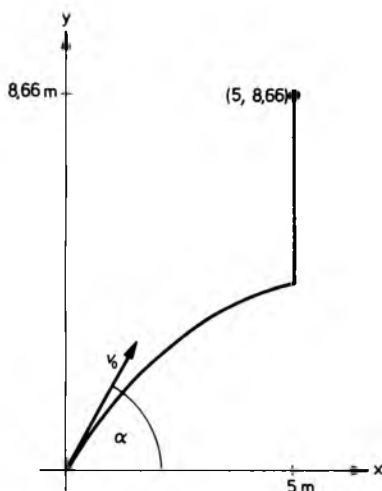
A pályák csúcsai így ugyanazon a függőleges egyenesen egymás alatt (fölött) vannak. Az első test pályájának a legmagasabb pontja kb. 500 méter magasan, a másodiké kb. 1500 méter magasan. Láttuk, amikor az első a pályája csúcsára ér, a második még a felszálló ágon mozog.

III/13. Tegyük fel, hogy a hajítás az origóból indul. Ekkor a hajítás koordinátái (III. 6. ábra):

$$x_1(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y_1(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

A szabadon eső test az (5 m, 8,66 m) pont-



III. 6.
ábra

ból indul, ezért a koordinátái:

$$x_2(t) = 5,$$

$$y_2(t) = 8,66 - \frac{g}{2} t^2.$$

Ha a két test összeütközik, akkor valamely t időpontban

$$x_1(t) = x_2(t),$$

$$y_1(t) = y_2(t),$$

vagyis

$$v_0 \cos \alpha \cdot t = 5,$$

$$v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = 8,66 - \frac{g}{2} t^2.$$

Innen $\tan \alpha = 8,66/5$. Ebből $\alpha = 60^\circ$.

III/14. A két test pályája a III. 7. ábrán látható. A vízszintesen kilőtt test koordinátái:

$$x_1(t) = v_0 t,$$

$$y_1(t) = 3 - \frac{g}{2} t^2,$$

a második test koordinátái pedig:

$$x_2(t) = 2,$$

$$y_2(t) = 8t - \frac{g}{2} t^2.$$

Ha a t időpontban összeütköznek, akkor

$$x_1(t) = x_2(t),$$

$$y_1(t) = y_2(t).$$

Ekkor

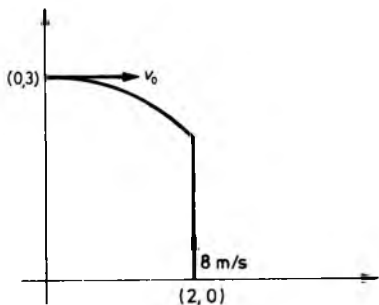
$$v_0 t = 2,$$

$$8t - \frac{g}{2} t^2 = 3 - \frac{g}{2} t^2.$$

Innen

$$\frac{v_0 t}{8t} = \frac{2}{3},$$

vagyis $v_0 = 5,33 \text{ m/s}$.



III. 7.
ábra

III/15. Mivel

$$\omega_N = \frac{2\pi}{3600} \frac{1}{s},$$

ezért

$$v = r\omega_N = \frac{2\pi}{3600} \cdot 1,2 = 0,00209 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

A pontnak érintő irányú gyorsulása nulla, a centripetális gyorsulása:

$$a = r\omega^2 \approx 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2.$$

III/16. A Föld sugara: $R = 6370 \text{ km}$, a szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600},$$

így

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{24 \cdot 3600} = \frac{40\,000\,000}{24 \cdot 3600} = 463 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A gyorsulás v^2/R nagyságú, $a = 0,0336 \text{ m/s}^2$, és a Föld középpontja felé mutat. Ennyi a gyorsulása a Föld felületén az Egyenlítőn nyugvó testnek. Ha a testet magára hagyjuk, akkor nyilvánvalóan $a = 9,81 \text{ m/s}^2$.

III/17. A teljes kör megtétele után az eredő gyorsulás nagyságának és a kezdeti

gyorsulás nagyságának a hányadosa legyen x :

$$a_{cp}^2 + a_e^2 = (xa_e)^2,$$

$$a_{cp}^2 = a_e^2(x^2 - 1),$$

legyen $x^2 - 1 = y^2$, ekkor

$$r^2 \omega^4 = r^2 \beta^2 y^2,$$

$$\frac{\omega^4}{\beta^2} = y^2,$$

illetve $\omega = \beta t$ miatt

$$\beta^2 t^4 = y^2.$$

Vonjunk gyököt és osszuk el mindkét oldalt 2-vel:

$$\frac{\beta t^2}{2} = \frac{y}{2},$$

ami nyilvánvalóan a teljes körülfordulás szöge: 2π . Így

$$\frac{\beta t^2}{2} = \frac{y}{2} = 2\pi.$$

Tehát $y = 4\pi$, vagyis $x = \sqrt{16\pi^2 + 1}$, függetlenül a pálya sugarától és a végsebességtől. Másrészt

$$s = 2\pi r = \frac{vt}{2},$$

innen $t = 25,1 \text{ s}$.

III/18. A szöggyorsulás az

$$a_t = r\beta$$

összefüggésből:

$$\beta = \frac{1,6}{50} = 0,032 \frac{1}{s^2}.$$

A szögsebesség indulás után 1,5 s-mal:

$$\omega = 0,032 \cdot 1,5 = 0,048 \text{ 1/s}.$$

A sebesség:

$$v = r\omega = 2,4 \text{ m/s},$$

és a centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = 0,1152 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az eredő gyorsulás nagysága (III. 8. ábra):

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = 1,604 \text{ m/s}^2,$$

vagyis még alig nagyobb az érintő irányú gyorsulásnál. Az eredő gyorsulás az érintővel 4° -os szöget zár be, ugyanis

$$\cos 4^\circ = \frac{1,6}{1,604}.$$

III/19. A kerületi pontok középponthez viszonyított sebessége: $v = r\omega$. A legfelső pont a középponthez képest $r\omega$ sebességgel mozog vízszintesen, a legalsó $-r\omega$ sebességgel szintén vízszintes irányban. A középpont $v_0 = 4 \text{ m/s}$ sebességgel mozog a talajhoz viszonyítva. Így a legfelső pont sebessége (a talajról nézve) $v_A := v_0 + r\omega$, a legalsóé pedig $v_B := v_0 - r\omega$. Tekintve, hogy a legalsó pont áll,

$$v_B = v_{\text{talaj}} = 0,$$

(mert a talaj áll), tehát

$$v_0 = r\omega.$$

Innen

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{4}{0,2} = 20 \frac{1}{\text{s}}.$$

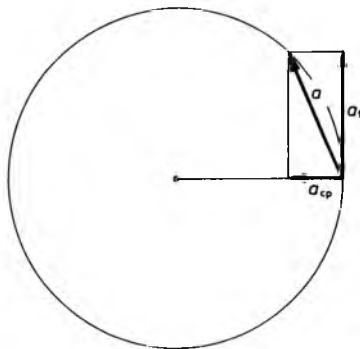
Az A pont sebessége:

$$v_A = v_0 + r\omega = 8 \text{ m/s}.$$

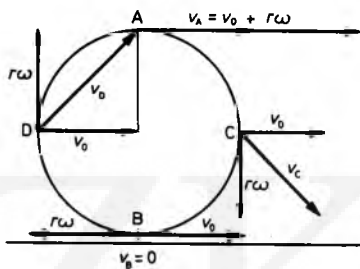
A C pont és a D pont sebessége egyaránt

$$v = \sqrt{v_0^2 + r\omega^2} = \sqrt{2v_0^2} = \sqrt{2} v_0 = 5,65 \text{ m/s}$$

nagyságú, iránya a III. 9. ábrán látszik.



III. 8. ábra



III. 9. ábra

III/20. A legfelső pont, illetve a legalsó pont sebessége:

$$v_A = v_0 + r\omega = 3 + 0,2 \cdot 10 = 5 \text{ m/s},$$

$$v_B = v_0 - r\omega = 3 - 0,2 \cdot 10 = 1 \text{ m/s}.$$

A kerék csúszik a talajon, a talajjal érintkező pontja a középponttal azonos irányban mozog a talajon.

III/21. A legfelső pont sebessége:

$$v_A = v_0 + r\omega = 1 + 0,2 \cdot 10 = 3 \text{ m/s},$$

a legalsó pont pedig

$$v_B = v_0 - r\omega = 1 - 0,2 \cdot 10 = -1 \text{ m/s}$$

sebességgel mozog, tehát a középponthez képest hátrafelé.

III/22. Most $\omega = -10 \text{ 1/s}$, mert a kerék hátrafelé forog. A legfelső és a legalsó pont

sebessége:

$$v_A = v_0 + r\omega = 1 + 0,2(-10) = -1 \text{ m/s},$$

$$v_B = v_0 - r\omega = 1 - 0,2(-10) = 3 \text{ m/s}.$$

III/23. A kerék legfelső és legalsó pontjának sebessége:

$$v_A = v_0 + r\omega = 5 + 0,2 \cdot 10 = 7 \text{ m/s},$$

$$v_B = v_0 - r\omega = 5 - 0,2 \cdot 10 = 3 \text{ m/s}.$$

A lap v_L sebessége megegyezik v_B -vel, tehát a kerék legalsó pontja 0 sebességgel mozog a lapon, a legfelső pont sebessége a laphoz képest $v_A - v_L = 4 \text{ m/s}$, míg a korong középpontja $v_0 - v_L = 5 - 3 = 2 \text{ m/s}$ sebességgel halad a mozgó lapról nézve.

III/24. A kerék kerületi sebessége: $v = r\omega$, a középpontjának kerületi sebessége az $R - r = 1,4 \text{ m}$ sugarú pályán: $v_0 = 2,8 \text{ m/s}$. A kerék A pontjának sebessége:

$$v_A = v_0 - r\omega.$$

Ez azonban megegyezik a körpálya A' pontjainak a nulla sebességeivel, mert a kerék tapad. Tehát

$$v_{A'} = v_A,$$

így

$$v_0 = r\omega,$$

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{2,8}{0,1} = 28 \frac{1}{s},$$

ugyanúgy, mintha sík talajon gördülne (III. 10. ábra).

III/25. A III. 11. ábráról látható, hogy

$$\omega_{\text{ember}} = \omega_{\text{korong}} + \omega_{\text{rel}},$$

ahol $\omega_{\text{korong}} < 0$, $\omega_{\text{ember}} > 0$, $\omega_{\text{rel}} > 0$. De

$$\omega_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{4}, \omega_{\text{ember}} = \frac{2\pi}{5},$$

így

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{4} + \omega_{\text{korong}},$$

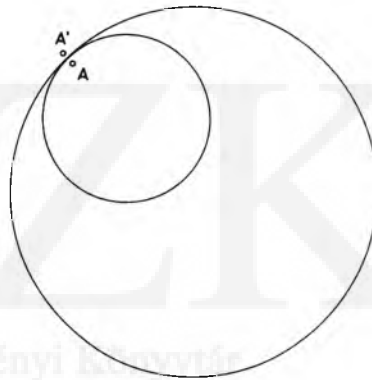
$$\omega_{\text{korong}} = 2\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2\pi}{-20} = -\frac{\pi}{10} \frac{1}{s}.$$

III/26. Legyen v a relatív sebesség, v_0 a mozgólépcső sebessége, ekkor

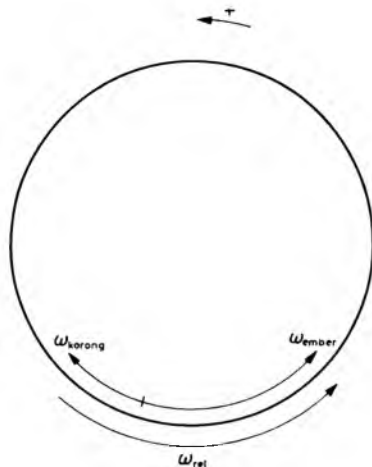
$$(v_0 + v)60 = l,$$

$$(v_0 + 2v)45 = l,$$

ahol l a megtett út. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi idő alatt ér le az ember,



III. 10. ábra



III. 11. ábra

ha áll a lépcsőn, azaz ha a sebessége v_0 . Ez az idő $t = l/v_0$, és az alábbi gondolatmenettel kapjuk meg:

szorozzuk most be a fenti két egyenlet bal oldalát:

$$v_0 \cdot 60 + v \cdot 60 = l,$$

$$v_0 \cdot 45 + v \cdot 90 = l.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel:

$$180v_0 + 180v = 3l,$$

$$90v_0 + 180v = 2l.$$

Innen

$$90v_0 = l,$$

így

$$\frac{l}{v_0} = t = 90 \text{ s}.$$

Ennyi ideig tart az út, ha az utas áll a lépcsőn.

III/27. A hajó sebessége a parthoz képest v_{PH} , és északi irányú, a folyó a parthoz képest v_{PF} sebességgel halad, míg a hajó vízhez viszonyított sebessége v_{FH} . Világos, hogy

$$v_{PF} + v_{FH} = v_{PH},$$

vagyis, ha a folyó parthoz viszonyított sebességéhez hozzáadjuk a hajó folyóhoz viszonyított sebességét, akkor a hajó sebességét kapjuk a partról nézve. Ez utóbbi nagysága és iránya adott. A *III. 12. ábra* szerint koszinusztételt alkalmazva:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = 0,125,$$

így

$$\alpha = 82,8^\circ.$$

Az északi iránytól mérve kelet felé — közel a keleti irányhoz — $82,8^\circ$ fokkal folyik a folyó. (A feladatnak még három más megoldása is van. Ezek abból adódnak, hogy a v_{PF} és a v_{FH} vektorok a vektorhármasságban felcserélhetők, valamint a függőlegesre tükrözhetők az ábrán.)

III/28. Legyen $l = 8 \text{ km} = 8000 \text{ m}$, a folyó sebessége: $c = 3 \text{ m/s}$, a csónak sebessége állóvízben: $v = 4 \text{ m/s}$. Ekkor a vízzel egy irányban haladva

$$t_1(v + c) = l,$$

a másik irányban

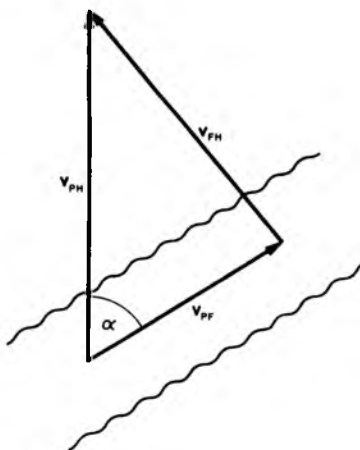
$$t_2(v - c) = l.$$

Az összes idő:

$$t_1 + t_2 = t = \frac{l}{v + c} + \frac{l}{v - c},$$

$$t = \frac{2lv}{v^2 - c^2} = \frac{2l}{v} \frac{1}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \approx$$

$$\approx 9140 \text{ s} \approx 2,54 \text{ óra}.$$



*III. 12.
ábra*

Mivel

$$1 - \frac{c^2}{v^2} < 1,$$

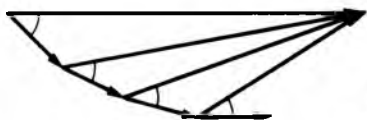
ezért

$$\frac{2l}{v} < t,$$

ami azt jelenti, hogy a folyón hosszabb ideig tart a távolság oda-vissza megtétele, mint állóvízben. Az egyik irányban nem segít annyit, mint amennyit ront a másik irányban. Ha például $v=c$, akkor vissza sem ér a hajó.

III/29. A feladat megoldásában lényeges ötlet az, hogy a vonatkoztatási rendszert rögzítsük a kulacshoz. Nos, a kulacs kiestt. Mit „lát”? „Látja”, hogy távolodik a híd, és távolodik a halász. A halász gyorsabban. A halász hátát fél óráig látja, mert a halász fél óra múlva fordul meg. A halász hasát is fél óráig látja, hiszen a víz a kulacs szempontjából áll. A kulacs nézőpontjából tehát a halász fél óráig oda, fél óráig vissza evez az állóvízben. Így egy óráig vannak távol. Ez idő alatt a híd 5 km-t tett meg. A híd sebessége a kulacshoz (a vízhez) viszonyítva 5 km/h. A víz sebessége a hídhöz képest 5 km/h.

III/30. A fecskétől a fészekhez mutató vektor minden pillanatban 30° -os szöget zár be a pálya érintőjével, a sebességvektorral (*III. 13. ábra*). (Az ilyen görbét logaritmikus spirálisnak nevezik.) Hasonló a helyzet a legelső pontban szóba került példához. A forgó világítótornyból nézve a közeledő hajó fénye spirális pályán mozog.



III. 13.
ábra

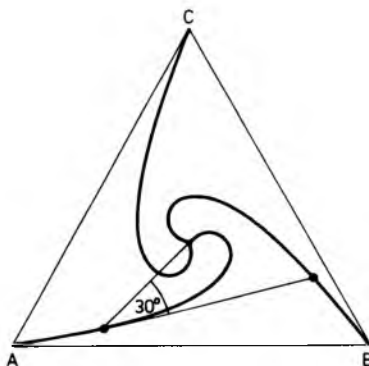
Hogyan tudnánk visszavezetni a feladatot erre a példára? Gondoljuk el, hogy a fészekben ülő fecskegyerek nyakába távcsövet akasztunk. Ezzel kíséri nyomon az anyját, mindig utána fordulva. A kis fecske azt észleli, hogy amikor az anyja 100 méterre van, hirtelen lassabban közeledik: az eddigi 10 m/s helyett $10 \cos 30^\circ = 8,66$ m/s a közeledés sebessége. Egyúttal azt is tapasztalja, hogy a távcsőben eddig anyja mindkét fülét látta, mostantól azonban félprofilba fordul és már csak az egyiket látja. A kezdetben mérhető 100 méter távolságot egyenes vonalú, egyenletes mozgással, 8,66 m/s sebességgel,

$$t = \frac{100 \text{ m}}{8,66 \text{ m/s}} = 11,54 \text{ s}$$

idő alatt teszi meg. (Még egyszer: a kis fecske egyenes vonalú mozgásnak észleli az anyja mozgását, ha a távcsővel utána fordul.) A megtett út — a pályagörbe hossza —:

$$s = v \cdot t = 10 \cdot 11,54 = 115,4 \text{ m}.$$

III/31. Lényegében az előző feladatról van szó (*III. 14. ábra*). A bogarak a háromszög középpontjához viszonyítva az előttük járó bogarat 30° -kal jobbra látják.



III. 14.
ábra

A három bogár pályája a középpontra csavarodó spirális. Ha a középpontba olyan megfigyelőt ültetünk, aki állandóan utánafordul a bogaraknak, akkor ezeket $10 \cos 30^\circ = 8,66$ cm/s sebességgel közeledőknek észleli. A bogarak egyenes vonalú, egyenletes mozgással mozognak a középpont felé (és közben az eredeti háromszög elfordul). A bogarak a csúcstól a középpontig terjedő $\sqrt{3}/3$ m = 57,73 cm hosszú szakaszt

$$\frac{57,73}{8,66} = 6,66 \text{ s}$$

idő alatt teszik meg. Egyszerre érnek a középpontba. Mindegyik bogár $6,66 \cdot 10 = 6,6$ cm utat tesz meg a találkozásig. Ilyen hosszú egy-egy spirál: ezeknek a görbeszakaszoknak a hossza $2/3$ része a háromszög oldalhosszának.

III/32. A két gyalogos a légy feltűnése után

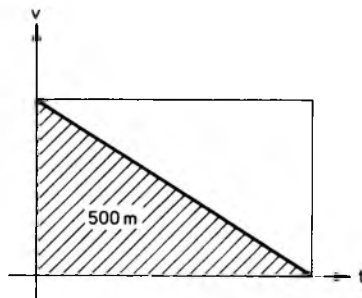
$$\frac{15000}{2 \cdot 2,5} = 3000 \text{ s,}$$

azaz 50 perc múlva találkozik. Eközben a légy sebességének a nagysága állandó: $v = 4$ m/s. A légy által megtett út a pályájának hossza (annyiszor számolva az egyenes szakaszait, ahányszor a légy végigmozog rajta):

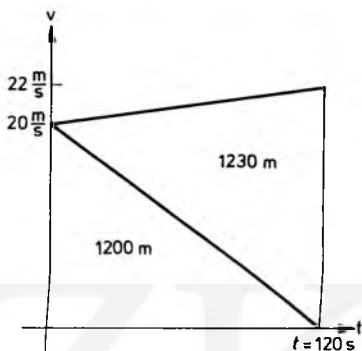
$$s = 3000 \cdot 4 = 12000 \text{ m} = 12 \text{ km}.$$

III/33. Nyilvánvalóan 500 méterre. A lassuló kocs sebességgrafikonja alatti terület 500 méter. Az egyenletesen mozgó rész sebességének a grafikonja a vízszintes egyenes. Az alatta lévő terület kétszerese a háromszög területének, tehát 1000 méter. A két terület különbsége a relatív elmozdulás (III. 15. ábra).

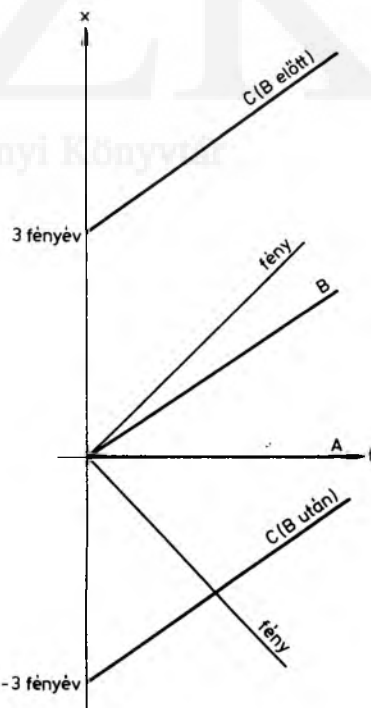
III/34. A két rész sebességének grafikon-



III. 15.
ábra



III. 16.
ábra



III. 17.
ábra

ját látjuk a *III. 16. ábrán*. Az alsó háromszög területe a leszakadt rész által megtett út:

$$1200 = \frac{20t}{2},$$

innen $t = 120 \text{ s} = 2 \text{ perc}$. A felső háromszög területe azt jelenti, hogy mennyivel több utat tett meg az első a hátsó részhez képest:

$$s = \frac{22 \cdot 120}{2} = 1320 \text{ m}.$$

A trapéz területe különben a mozdony által megtett út 120 másodperc alatt:

$$s_1 = \frac{20 + 22}{2} \cdot 120 = 2520 \text{ m},$$

ami persze az 1200 méter és az 1320 méter összege.

III/35. A *III. 17. ábrán* látható, hogy az A űrhajó grafikonja egybeesik az időtengellyel, a B űrhajóé pedig az origón átmenő, 0,8 fényév/év meredekségű egyenes. A $t = 0$ időpontban, amikor A és B találkozott, elindítunk két fényjelet. Ezek grafikonját is megrajzoltuk. A C űrhajó B-hez képest nyugalomban van, ez azt jelenti, hogy a sebessége megegyezik B sebességével. A grafikonon ez abban tükröződik, hogy B és C grafikonja párhuzamos egyenes. (Két megoldás is van: vagy B előtt halad, vagy B után 3 fényévvel.)

IV. Feladatcsoport: Newton-törvények

IV/1. Newton II. törvénye:

$$F = ma.$$

A mozgás egyenletesen gyorsuló, ezért

$$s = \frac{a}{2} t^2,$$

$$v = at.$$

E három egyenlet három ismeretlent tartalmaz, ezek: F , a , v . A második egyenletből $a = 0,3 \text{ m/s}^2$. Így

$$F = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ N}.$$

(A harmadik egyenletből: $v = 0,6 \text{ m/s}$.)

IV/2. Newton II. törvénye:

$$F = ma,$$

a mozgást kinematikailag az

$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t = \frac{v + v_0}{2} t,$$

$$v = at + v_0$$

egyenlőségek jellemzik. Behelyettesítve:

$$F = 2a,$$

$$100 = \frac{2+2,6}{2} t,$$

$$2,6 = at + 2.$$

Innen $t = 43,47 \text{ s}$, $a = 0,0138 \text{ m/s}^2$, és $F = 0,0276 \text{ N}$.

IV/3. Newton II. törvénye (a IV. 1. ábra alapján):

$$F - mg = ma.$$

A kinematikai egyenletek pedig:

$$x = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t,$$

$$v = at + v_0.$$

Behelyettesítve:

$$140 - 100 = 10a,$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot 3^2 + (-4)3,$$

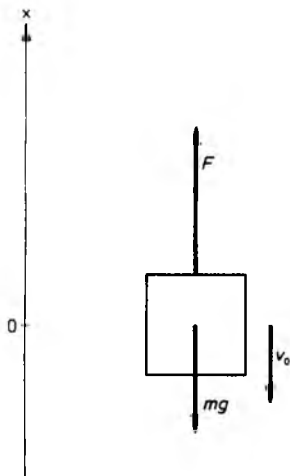
$$v = a \cdot 3 - 4.$$

Innen $a = 4 \text{ m/s}^2$ (fölfelé irányul), a test az origó felett van $x = 6$ méterre. Itt a sebessége 8 m/s , tehát már pozitív a sebesség (fölfelé mozog), a test sebessége az első három másodpercben előjelet váltott, legyen ennek az időpontja t_1 . Ebben a pillanatban

$$0 = 4t_1 - 4,$$

tehát $t_1 = 1 \text{ s}$. Ekkor a test

$$x_1 = \frac{4}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2 \text{ m}$$



IV. 1.
ábra

koordinátájú helyen van, vagyis az origó alatt 2 méterre. A megtett út:

$$s = 2 \cdot 2 + 6 = 10 \text{ m.}$$

IV/4. Newton II. törvénye:

$$K - mg = ma,$$

a test mozgása egyenes vonalú, egyenletesen változó, kezdősebesség nélkül, így

$$s = \frac{a}{2} t^2,$$

$$v = at.$$

Behelyettesítve:

$$K - 1000 = 100a,$$

$$1,8 = \frac{a}{2} \cdot 3^2,$$

$$v = a \cdot 3.$$

Innen $a = 0,4 \text{ m/s}^2$, és fölfelé mutat. A test sebessége a gyorsítási szakasz végén

$$v = 1,2 \text{ m/s.}$$

A kötelet feszítő erő:

$$K = 1040 \text{ N.}$$

IV/5. Irányítsuk most a koordináta-rendszer függőleges tengelyét lefelé. A mozgás sebesség-idő grafikonját látjuk a IV. 2. ábrán. Az első szakasz végén a testnek

$$v = 0,6 \cdot 2 = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebessége van, és megtesz a test

$$h_1 := \frac{0,6}{2} \cdot 2^2 = 1,2 \text{ m}$$

utat. Az első 1,2 métert és az utolsó 3 métert levonjuk a 20 méterből, akkor az egyenletesen mozgó test által megtett utat kapjuk: $20 - (1,2 + 3) = 15,8 \text{ m}$. Ezt az utat $1,2 \text{ m/s}$ sebességgel teszi meg, tehát $13,16$ másodpercig tart. Az utolsó 3 méter hosszú út a jobb oldali háromszög területe:

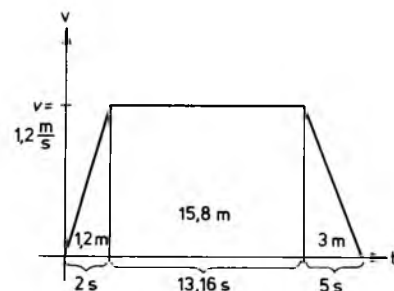
$$3 = \frac{1,2t}{2},$$

innen $t = 5 \text{ s}$. A test tehát $2 + 13,16 + 5 = 20,16$ másodperc alatt ér földet. A test átlagsebessége nyilvánvalóan

$$\frac{20}{20,16} = 0,99 \text{ m/s.}$$

A mozgás első szakaszában $a_1 = 0,6 \text{ m/s}^2$, lefelé mutat, tehát pozitív. Newton II. törvénye alapján:

$$mg - K_1 = ma_1,$$



IV. 2.
ábra

így $K = m(g - a_1) = 940 \text{ N}$. A középső szakaszon a gyorsulás nulla, ezért $K_2 = mg = 1000 \text{ N}$ a kötél erő. A harmadik szakaszon

$$a_3 = \frac{-1,2}{5} = -0,24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Így, ha a kötél erő K_3 -mal jelöljük:

$$mg - K_3 = ma_3,$$

tehát

$$K_3 = m(g - a_3) = 1024 \text{ N}.$$

IV/6. A három testre írjuk fel Newton II. törvényét (IV. 3. ábra). Kezdjük a felső testtel:

$$mg - N_1 = ma = 0,$$

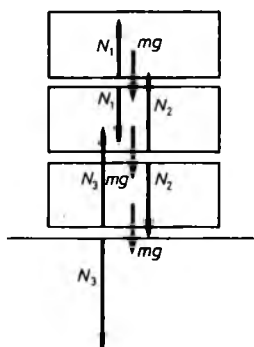
a második testre:

$$mg + N_1 - N_2 = ma = 0,$$

és a harmadik testre:

$$mg + N_2 - N_3 = ma = 0.$$

Így $N_1 = 10 \text{ N}$, $N_2 = 20 \text{ N}$, $N_3 = 30 \text{ N}$. A test 10 N erőt fejt ki B-re, a B ugyanannyit fölfelé A-ra. A B test 20 N erőt fejt ki C-re, és C ugyanannyit B-re. Végül a C test 30 N erővel nyomja a talajt, a talaj pedig ugyan-



IV. 3.
ábra

ennyivel a C testet. Így a három test mindegyike nyugalomban van.

IV/7. A IV. 4. ábra szerint jelöljük be a testek között ható erőket. Az erő-ellenerő párokat ugyanazzal a betűvel jelöljük. Newton II. törvénye rendre:

$$F - F_1 = ma,$$

$$F_1 - F_2 = ma,$$

$$F_2 = ma.$$

(Figyelembe vettük azt a természetes tényt, hogy a három test gyorsulása azonos.) Adjuk össze a három egyenletet:

$$F = 3ma,$$

innen $a = 4 \text{ m/s}^2$, és így $F_1 = 8 \text{ N}$, $F_2 = 4 \text{ N}$. Az A test a B testre 8 N erőt fejt ki, ennek ellenerejét B fejt ki A-ra, a B test a C testre 4 N erőt fejt ki, ennek ellenerejét fejt ki a B testre.

IV/8. Newton II. törvénye a két testre:

$$F - K = m_1 a,$$

$$K = m_2 a.$$

Összeadva:

$$F = (m_1 + m_2) a,$$

így

$$a = 4 \text{ m/s}^2, \text{ és } K = m_2 a = 8 \text{ N}.$$

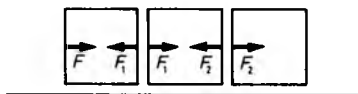
IV/9. Newton II. törvénye a három testre (IV. 5. ábra):

$$F - K_1 = m_1 a,$$

$$K_1 - K_2 = m_2 a,$$

$$K_2 = m_3 a,$$

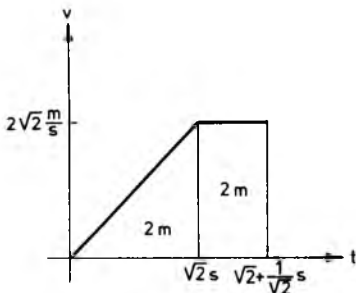
ahol K_1 a jobb oldali kötelet, és K_2 a bal oldali kötelet feszítő erő. A három egyenle-



IV. 4.
ábra



IV. 5.
ábra



IV. 6.
ábra

tet összeadva:

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a,$$

$$a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Így $K_2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ N}$, $K_1 = 36 - 8 \cdot 2 = 20 \text{ N}$.

IV/10. Newton II. törvénye a két test mozgására:

$$m_1 g - K = m_1 a,$$

$$K = m_2 a.$$

A két egyenletet összeadva:

$$m_1 g = (m_1 + m_2)a.$$

Tehát $a = 4 \text{ m/s}^2$, és $K = m_2 a = 24 \text{ N}$.

IV/11. Newton II. törvénye:

$$m_1 g - K = m_1 a,$$

$$K = m_2 a,$$

a két testre addig érvényes, amíg az m_1 tömegű test földet nem ér. Innen $a = 2 \text{ m/s}^2$ és $K = 16 \text{ N}$. A test 2 méter úton t idő alatt v sebességre gyorsul fel:

$$2 = \frac{2}{2} t^2,$$

$$v = 2t,$$

tehát $t = \sqrt{2} \text{ s}$, $v = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$. Ekkor az m_1 tömegű test földet ér, az m_2 tömegű pedig

egyenletesen mozog, a hátra lévő 2 m hosszú utat a csigáig $2\sqrt{2} \text{ m/s}$ sebességgel teszi meg (IV. 6. ábra).

IV/12. Válasszuk pozitív irányúnak az óramutató járásával megegyező irányt^(*). Ekkor

$$m_1 g - K_1 = m_1 a,$$

$$K_1 - K_2 = m_2 a,$$

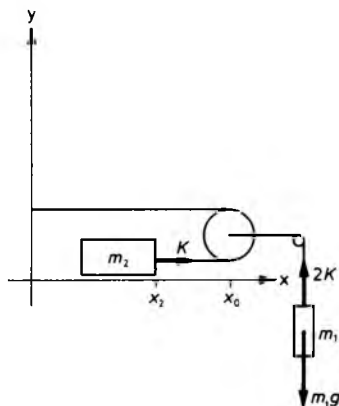
$$K_2 - m_3 g = m_3 a,$$

ahol K_1 a jobboldali, a K_2 a bal oldali kötélben ható erő. Összeadjuk a három egyenletet:

$$m_1 g - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a.$$

Tehát $a = 1,25 \text{ m/s}^2$, a három test az óramutató járásának megfelelő körüljárás szerint mozog. Az első egyenletből: $K_1 = 26,25 \text{ N}$, a harmadik egyenletből: $K_2 = 22,5 \text{ N}$.

(*) Ez a szemléletes kifejezés azt jelenti, hogy a bal oldali test mozgásának irányát akkor tekintjük pozitívnak, ha fölfelé mozog, az asztalon mozgó testét akkor, ha jobbra mozog, míg a jobb oldaliét akkor, ha lefelé mozog. Ez az igen gyakori előjelválasztás nem mondható következetesnek, ennek ellenére néha mi is élünk ezzel a lehetőséggel.



IV. 7.
ábra

IV/13. Ha a talajon mozgó testre K erő hat, akkor az m_1 tömegű testre $2K$ kötél erő hat (IV. 7. ábra). A csigára ható erők eredője ugyanis nulla. Newton II. törvénye:

$$m_1 g - 2K = m_1 a_1,$$

$$K = m_2 a_2.$$

Szemléletesen nyilvánvaló, hogy

$$a_2 = 2a_1,$$

de indokolhatjuk is a következőképpen. A mozgó csiga távolsága az y tengelytől legyen x_0 , az m_2 tömegű testé x_2 . Ekkor a fonál hossza:

$$l = 2x_0 - x_2,$$

innen

$$0 = 2a_0 - a_2.$$

Az pedig magától értetődik, hogy a csiga gyorsulása és az m_1 tömegű test gyorsulása megegyezik (a másik kötel nyújthatatlansága miatt). Behelyettesítve:

$$30 - 2K = 3a_1,$$

$$K = 2a_2,$$

$$a_2 = 2a_1.$$

Innen

$$30 - 2K = 3a_1,$$

$$2K = 8a_1,$$

$$30 = 11a_1,$$

így

$$a_1 = \frac{30}{11} = 2,73 \text{ m/s}^2,$$

$$a_2 = 5,46 \text{ m/s}^2,$$

$$K = 10,92 \text{ N}.$$

IV/14. A Newton törvények (a IV. 8. ábra alapján):

$$F - N - K = Ma, \quad (1)$$

$$K = m_2 a_2, \quad (2)$$

$$N = m_1 a, \quad (3)$$

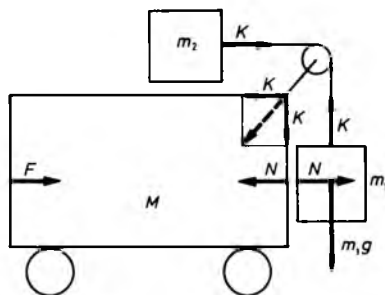
$$m_1 g - K = m_1 a_1, \quad (4)$$

ahol a az asztal vízszintes gyorsulása, a_1 az m_1 tömegű test függőleges irányú gyorsulása, és a_2 az m_2 tömegű test gyorsulása. Nyilvánvaló, hogy

$$a_2 = a + a_1. \quad (5)$$

Helyettesítsük az (5) egyenletből a_2 -t (2)-be, majd adjuk össze (2)-t és (4)-et; ekkor

$$m_1 g = m_2 a + (m_1 + m_2) a_1.$$



IV. 8.
ábra

Behelyettesítve:

$$10 = 2a + 3a_1. \quad (6)$$

Másrészt adjuk össze az (1) és (3) egyenleteket és a (4) egyenlet (-1) -szeresét:

$$F - m_1 g = Ma + m_1 a - m_1 a_1.$$

Behelyettesítve:

$$10 = 3a - a_1. \quad (7)$$

A (7) egyenlet 3-szorosát adjuk össze a (6) egyenlettel:

$$40 = 11a,$$

innen

$$a = \frac{40}{11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A többi ismeretlent egyszerű visszahelyettesítéssel kapjuk:

$$a_1 = 3 \frac{40}{11} - 10 = \frac{10}{11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_2 = \frac{50}{11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

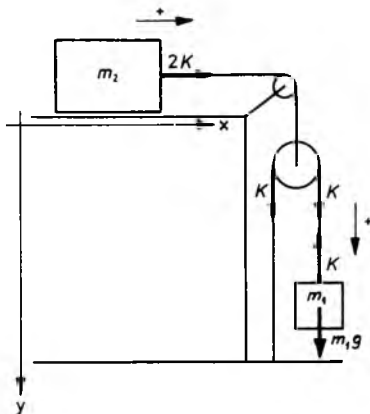
$$N = \frac{40}{11} \text{ N},$$

$$K = \frac{100}{11} \text{ N}.$$

IV/15. Ha az m_1 tömegű testre K kötélerő hat, akkor az asztalon mozgó testre $2K$ (IV. 9. ábra). Jelöljük a_1 -gyel az m_1 tömegű test függőleges gyorsulását, a_2 -vel pedig az m_2 tömegű test vízszintes gyorsulását. A Newton-törvények:

$$m_1 g - K = m_1 a_1,$$

$$2K = m_2 a_2.$$



IV. 9.
ábra

A két test gyorsulása közötti kapcsolat:

$$a_1 = 2a_2.$$

(Ezt a IV.13. feladat megoldásánál vázolt gondolatmenethez hasonlóan igazolhatjuk.) Behelyettesítve:

$$10 - K = a_1,$$

$$2K = 2a_2,$$

$$a_1 = 2a_2.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$K = \frac{10}{3} \text{ N}, \quad a_1 = \frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_2 = \frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

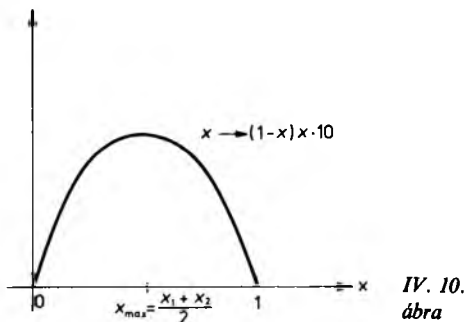
IV/16. Legyen a csészébe tett sörét tömege x , a kocsiba tett sörét így $1 - x$ kg tömegű lesz. Newton II. törvénye a két testre:

$$xg - K = xa,$$

$$K = (1 - x)a.$$

Innen $xg = a$, tehát

$$K = (1 - x)xg.$$



Vizsgáljuk az $x \rightarrow (1-x)x \cdot 10$ függvényt (IV. 10. ábra). Két gyöke van: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. A konkáv függvénynek a két gyök között az $(x_1 + x_2)/2$ helyen van maximuma. Így a maximum:

$$x_{\max} = 0,5,$$

a sörétet tehát fele-fele arányban kell elosztani. A fonalat feszítő erő $K_{\max} = 2,5 \text{ N}$.

IV/17. Fektesük a koordináta-rendszer x tengelyét a lejtőre (merőlegesen a lejtő alapélére, lásd a IV. 11. ábra felső részét). Ekkor a test az origóból indul a tengely pozitív fele irányában. Az origótól mért távolsága a t időpontban:

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t,$$

és a sebessége:

$$v(t) = at + v_0$$

(mindaddig persze, amíg vissza nem ér). A lejtőn surlódás nélkül csúszó test gyorsulása:

$$a = -g \sin \alpha = -5 \text{ m/s}^2,$$

amit Newton II. törvényéből kapunk. A mozgás grafikonja a IV. 11. ábra alsó részén látható, az origón átmenő konkáv parabola. A test akkor ér vissza, amikor

$$x(t) = 0,$$

tehát

$$-\frac{5}{2} t^2 + 10t = 0,$$

$$t = 4 \text{ s}.$$

Ennek az időnek a fele, $t_1 = 2 \text{ s}$ kell ahhoz, hogy a test megálljon. Ekkor a test

$$x_{\max} = -\frac{5}{2} \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 10 \text{ m}$$

magasan van a lejtőn mérve. (A függőlegesen mért magasság $x_{\max} \sin 30^\circ = 5 \text{ m}$).

IV/18. Válasszuk meg a pozitív irányt az óramutató járásával ellentétes irányban. Ekkor

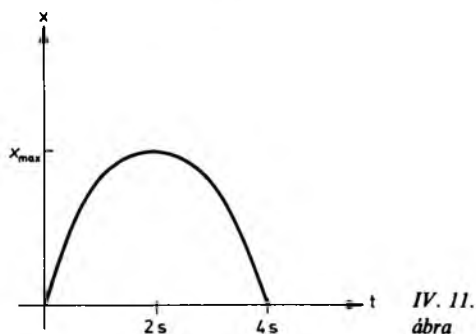
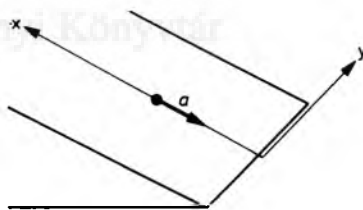
$$K - m_1 g \sin \alpha = m_1 a,$$

$$m_2 g - K = m_2 a.$$

Behelyettesítve:

$$K - 7,07 = a$$

$$20 - K = 2a.$$



A két egyenletet összeadva:

$$12,9 = 3a,$$

$$a = 4,3 \text{ m/s}^2,$$

$$K = 11,4 \text{ N}.$$

(Figyelemre méltó: az m_1 tömegű test akkor gyorsulással mozog fölfelé a lejtőn, amekkorával kötélnélkül lefelé mozogná.)

IV/19. Legyen most is a pozitív irány ellentétes az óra mutatójának járásával. Ekkor

$$K - m_1 g \sin \alpha = m_1 a,$$

$$m_2 g \sin \beta - K = m_2 a.$$

Behelyettesítve:

$$K - 40 = 8a,$$

$$42,4 - K = 6a.$$

A két egyenletből

$$a = 0,17 \text{ m/s}^2.$$

A két test kis gyorsulással pozitív irányba mozog. A kötél erő:

$$K = 41,4 \text{ N}.$$

IV/20. A *IV. 12. ábra* alapján testre ható erők lejtő irányú komponenseinek összege:

$$mg \sin \alpha + F \cos \beta = ma,$$

a lejtőre merőleges komponensek összege:

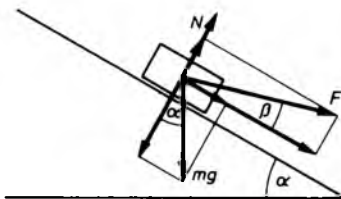
$$N + F \sin \beta - mg \cos \alpha = 0.$$

Behelyettesítjük az adatokat:

$$40 + 11,6 = 8a,$$

$$N + 3,1 - 69,3 = 0.$$

$$\text{Innen } a = 6,45 \text{ m/s}^2 \text{ és } N = 66,2 \text{ N}.$$



IV. 12. ábra

IV/21. A két test mozgását az

$$m_1 g - K = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - K = m_2 a_2$$

Newton-egyenletek írják le olyan koordináta-rendszerben, amelynek az x tengelye lefelé mutat. A két gyorsulás összege 0, mert a fonál nyújthatatlan:

$$a_1 + a_2 = 0.$$

Az adatokat behelyettesítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$30 - K = 3a_1,$$

$$20 - K = 2a_2,$$

$$a_1 + a_2 = 0.$$

Innen

$$10 - \frac{K}{3} = a_1,$$

$$10 - \frac{K}{2} = a_2,$$

$$20 - K \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0,$$

így

$$K = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ N},$$

$$a_1 = 2 \text{ m/s}^2; \text{ és } a_2 = -2 \text{ m/s}^2.$$

A két test távolsága akkor 0,8 m, amikor az első test által lefelé megtett út 0,4 m.

Legyen ez az időpont t , ekkor

$$0,4 = \frac{2}{2} t^2,$$

$$t = 0,63 \text{ s},$$

és az elért sebesség $1,26 \text{ m/s}$, az első test ezzel a sebességgel mozog lefelé, a második ugyanennyivel fölfelé.

IV/22. A testek mozgását a IV. 13. ábrán látható koordináta-rendszerben az

$$m_1 g - K = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - 2K = m_2 a_2,$$

$$m_3 g - K = m_3 a_3$$

Newton-egyenletek írják le. A gyorsulások között az

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$$

kényszeregyenlet teremt kapcsolatot. Adatokkal:

$$30 - K = 3a_1,$$

$$40 - 2K = 4a_2,$$

$$20 - K = 2a_3,$$

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0.$$

Innen

$$10 - \frac{K}{3} = a_1,$$

$$20 - K = 2a_2,$$

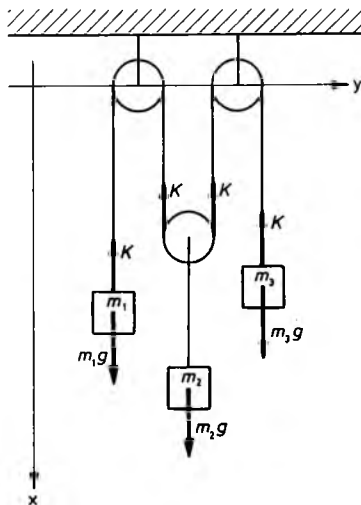
$$10 - \frac{K}{2} = a_3.$$

Így

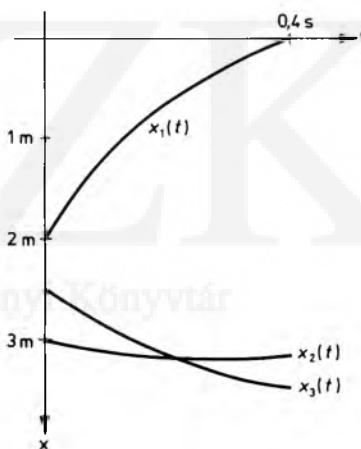
$$40 - K \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} \right) = 0,$$

$$K = 21,81 \text{ N}.$$

$$\text{Visszahelyettesítve: } a_1 = 2,72 \text{ m/s}^2, \quad a_2 =$$



IV. 13.
ábra



IV. 14.
ábra

$= -0,91 \text{ m/s}^2$, $a_3 = -0,91 \text{ m/s}^2$. A sebességek között is érvényben van a $v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$ kényszeregyenlet. A kezdősebességre alkalmazva:

$$-5,45 + 2 \cdot 0,91 + v_3(0) = 0.$$

Innen $v_3(0) = 3,63 \text{ m/s}$, vagyis kezdetben a harmadik test lefelé irányuló, $3,63 \text{ m/s}$ kezdősebességgel mozog. A hely-idő függvé-

nyek (IV. 14. ábra):

$$x_1(t) = \frac{2,72}{2} t^2 - 5,45t + 2,$$

$$x_2(t) = -\frac{0,91}{2} t^2 + 0,91t + 3,$$

$$x_3(t) = \frac{-0,91}{2} t^2 + 3,63t + 2,5.$$

Ezekben a távolságok méterben, a sebességek m/s-ban, a gyorsulások m/s²-ban vannak megadva. Ezek a függvények addig vannak értelmezve, amíg valamelyik test felér az origóhoz.

IV/23. A testek mozgását leíró Newton-egyenletek:

$$m_1g - 2K = m_1a_1,$$

$$m_2g - K = m_2a_2,$$

$$m_3g - K = m_3a_3.$$

A gyorsulások között az

$$a_1 + a_0 = 0,$$

$$-2a_0 + a_2 + a_3 = 0$$

kényszeregyenletek vannak érvényben, ahol a_0 a csiga gyorsulása. Így

$$20 - 2K = 2a_1,$$

$$20 - K = 2a_2,$$

$$10 - K = a_3,$$

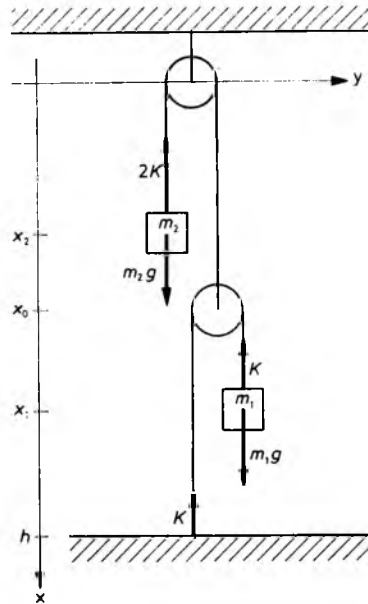
$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Osszuk el a második egyenletet 2-vel, majd adjuk össze az első hármat:

$$40 - K \left(2 + \frac{1}{2} + 1 \right) = 0.$$

Innen $K = 11,43$ N, $a_1 = -1,42$ m/s², $a_2 = 4,28$ m/s², $a_3 = -1,42$ m/s².

IV/24. A testek mozgását a IV. 15. ábrán



IV. 15. ábra

látható koordináta-rendszerben az

$$m_1g - K = m_1a_1,$$

$$m_2g - 2K = m_2a_2$$

Newton-egyenletek írják le. A két fonál hossza állandó:

$$x_2 + x_0 = l_1,$$

$$h - x_0 + x_1 - x_0 = l_2,$$

így a gyorsulások között a következő kapcsolat van:

$$a_2 + a_0 = 0,$$

$$-2a_0 + a_1 = 0,$$

vagyis

$$a_1 + 2a_2 = 0.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$20 - K = 2a_1,$$

$$20 - 2K = 2a_2.$$

Innen: $K = 12$ N, $a_1 = 4$ m/s², és $a_2 = -2$ m/s².

IV/25. Ha a második (a hosszabb) kötélben K erő hat, akkor az első kötél $2K$ erőt fejt ki az m_1 tömegű testre. A testek mozgását három Newton-egyenlet írja le (IV. 16. ábra):

$$m_1 g - 2K = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - K = m_2 a_2,$$

$$m_3 g - K = m_3 a_3.$$

Az első kötél hossza:

$$x_1 + x_0 = l_1,$$

a második kötéle pedig

$$x_2 - x_0 + h - x_0 + h + x_3 = l_2.$$

Így a gyorsulások között fennálló kényszer-egyenletek:

$$a_1 + a_0 = 0,$$

$$a_2 - 2a_0 + a_3 = 0,$$

vagyis

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Behelyettesítünk:

$$40 - 2K = 4a_1,$$

$$50 - K = 5a_2,$$

$$30 - K = 3a_3,$$

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Innen

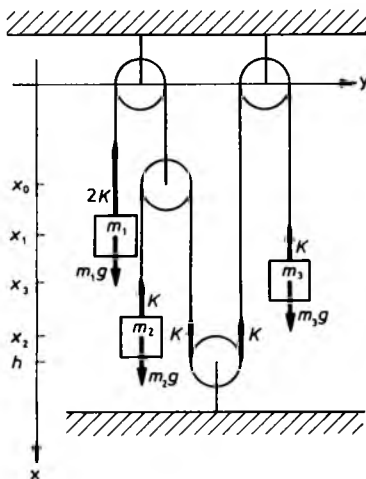
$$40 = K \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right),$$

így

$$K = 26 \text{ N}, \quad a_1 = -3 \text{ m/s}^2, \quad a_2 = 4,8 \text{ m/s}^2,$$

és végül $a_3 = 1,3 \text{ m/s}^2$. Az első test fölfelé gyorsul (a kezdősebesség nulla, tehát fölfelé mozog). A megtett út:

$$s = 0,5 = \frac{3}{2} t^2,$$



IV. 16.
ábra

így $t = 0,577 \text{ s}$. Eközben a második test $0,8$ méter, a harmadik $0,22$ méter utat tett meg lefelé.

IV/26. Az 5 méter magasról eső test

$$5 = \frac{g}{2} t^2,$$

$$v = gt$$

alapján $v = 10 \text{ m/s}$ sebességgel ütközik a testhez. A fonál merev, ezért az ütközésben mindhárom test részt vesz. Az impulzus-mérleg:

$$0,1 \cdot 10 = 2,1 u,$$

ahol a három test u sebességgel mozog az ütközés után:

$$u = 0,476 \text{ m/s}.$$

Alkalmazzuk most a testek további mozgására Newton II. törvényét:

$$10 - K = a_1,$$

$$11 - K = 1,1 a_2,$$

$$a_1 + a_2 = 0.$$

Innen

$$20 = K \left(1 + \frac{1}{1,1} \right), \quad K = 10,47 \text{ N},$$

tehát

$$a_1 = -0,47 \text{ m/s}^2, \quad a_2 = 0,47 \text{ m/s}^2.$$

Ezután a jobb oldali test

$$s = \frac{0,47}{2} \cdot 1^2 + 0,47 \cdot 1 = 0,71 \text{ m}$$

utat tett meg lefelé, a másik ugyanannyit fölfelé, tehát a két test távolsága 1 másodperc múlva 1,42 méter.

IV/27. A mozgást az

$$1 \cdot 10 - K = a_1,$$

$$1,2 \cdot 10 - K = 1,2 a_2,$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

egyenletek írják le, amíg a nagyobb tömegű test földet nem ér. Ekkor

$$20 = K \left(\frac{1}{1,2} + 1 \right),$$

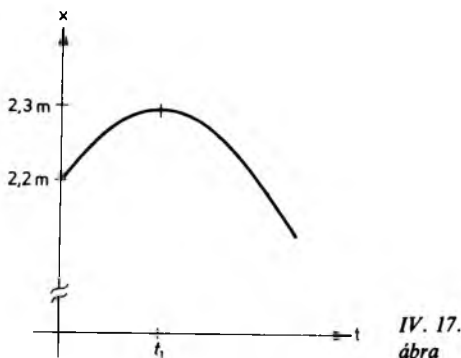
így $K = 10,90 \text{ N}$, $a_1 = -0,9 \text{ m/s}^2$, és $a_2 = 0,9 \text{ m/s}^2$. Ha a nagyobb tömegű test t idő alatt ér földet, akkor

$$1,2 = \frac{0,9}{2} t^2,$$

$$t = 1,62 \text{ s},$$

és a test $v = 1,62 \cdot 0,90 = 1,46 \text{ m/s}$ sebességgel ér földet. A másik test ekkor 2,2 m magasan van a talaj fölött, és fölfelé irányuló $1,46 \text{ m/s}$ nagyságú sebességgel (lefelé irányuló $-g$ gyorsulással) emelkedik. Irányítsuk most a koordináta-rendszer x tengelyét fölfelé (IV. 17. ábra). Ekkor a test talajtól mért távolsága t idővel azután, hogy az első földet ért:

$$x(t) = -5t^2 + 1,46t + 2,2,$$



és a sebessége:

$$v(t) = -10t + 1,46.$$

A test a pálya csúcsára ér abban a t_1 időpontban, amikor $v(t_1) = 0$:

$$0 = -10t_1 + 1,46,$$

tehát $t_1 = 0,146 \text{ s}$. Ekkor a test a talaj fölött $x(0,146) = 2,3 \text{ m}$ magasan van. A könnyebb test még 10 cm-t emelkedik azután, hogy a fonál meglazul.

IV/28. Legyen a macska tömege $m_1 = 4 \text{ kg}$, a gyorsulása pedig a_1 , a rúd tömege $m_2 = 6 \text{ kg}$, gyorsulása a_2 , és az ellensúly tömege $m_3 = 10 \text{ kg}$, a gyorsulása a_3 . Tegyük fel, hogy a macska a rúdhoz képest a gyorsulással mozog. Az a tehát a relatív gyorsulás abszolút értéke:

$$a_{\text{rel}} = -a.$$

Ekkor

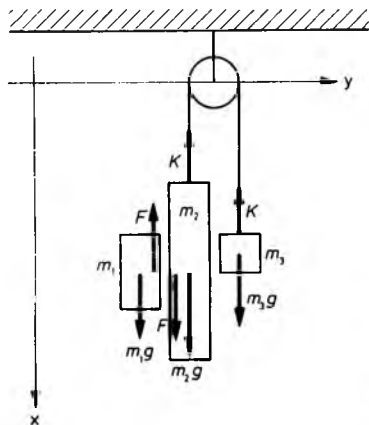
$$2 = \frac{a}{2} t^2. \quad (1)$$

A három testre vonatkozó Newton-egyenletek (IV. 18. ábra):

$$m_1 g - F = m_1 a_1, \quad (2)$$

$$m_2 g - K + F = m_2 a_2, \quad (3)$$

$$m_3 g - K = m_3 a_3, \quad (4)$$



IV. 18.
ábra

és

$$a_3 = -a_2. \quad (5)$$

Továbbá: a macska gyorsulása a talajhoz képest megegyezik a macska rúdhoz viszonyított gyorsulásának és a rúd talajhoz viszonyított gyorsulásának az összegével:

$$a_1 = a_{rel} + a_2 = -a + a_2 \quad (6)$$

Behelyettesítve:

$$40 - F = 4a_1, \quad (2')$$

$$60 - K + F = 6a_2, \quad (3')$$

$$100 - K = 10a_3. \quad (4')$$

A (2') és (3') egyenletet összeadva:

$$100 - K = 4a_1 + 6a_2.$$

A (4') egyenletből (5) felhasználásával:

$$100 - K = -10a_2.$$

Innen

$$4a_1 + 6a_2 = -10a_2,$$

vagyis

$$a_1 + 4a_2 = 0.$$

Vessük össze a (6)-ból kapott

$$a_2 - a_1 = a$$

egyenlőséggel, ekkor

$$a_2 = \frac{a}{5},$$

$$a = 5a_2.$$

Írjuk ezt az (1)-be:

$$2 = \frac{5a_2}{2} t^2,$$

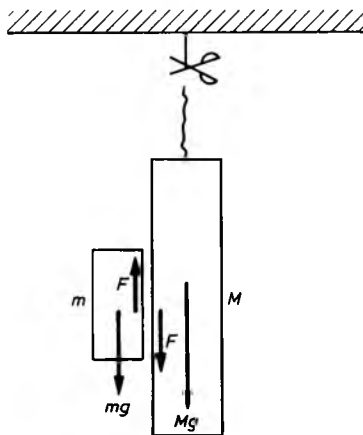
majd osszuk el 5-tel:

$$0,4 = \frac{a_2}{2} t^2,$$

ami a rúd elmozdulása, és (mert $a_2 > 0$) ami megegyezik a rúd által (lefelé) megtett úttal. Ugyanennyit tett meg az ellensúly fölfelé. A macska 2 métert tett meg fölfelé haladva a rúdon, de a rúd 0,4 métert tett meg lefelé. A macska tehát 1,6 métert tett meg fölfelé (a talajhoz viszonyítva).

IV/29. A macska F erőt fejt ki a rúdra, a rúd ennek ellenerejét a macskára (IV. 19. ábra). Legyen a macska tömege m , a rúd M . Ekkor

$$mg - F = 0,$$



IV. 19.
ábra

mert a macska áll a talajhoz képest,

$$Mg + F = Ma,$$

ahol a a rúd gyorsulása. A rúdra ható erő az Mg nehézségi erővel együtt lefelé hat, mert a macska lefelé tapossa a rudat. A két egyenletet adjuk össze:

$$(m + M)g = Ma,$$

tehát

$$a = \frac{m + M}{M} g = 17,5 \text{ m/s}^2.$$

IV/30. A test nyugalomban van, ezért a rá ható erők eredője nulla. A testre vízszintes irányban csak a talaj fejthetne ki erőt (a surlódási erőt), de mert nincs más erő, amely a talaj mentén hatna, ezért a surlódási erő nulla. Röviden és vázlatosan:

$$a = 0, \quad F = S, \quad F = ma \Rightarrow S = 0.$$

IV/31. A test és a lejtő között fellépő surlódási erő vagy

$$S = \mu mg \cos \alpha = 20,78 \text{ N},$$

vagy

$$S = mg \sin \alpha = 20 \text{ N}.$$

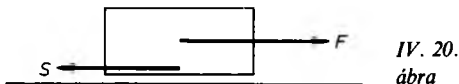
Az első eset akkor valósul meg, ha a test csúszik a lejtőn, a második akkor, ha tapad a test. Mivel a kezdősebesség nulla, és $\text{tg } \alpha < \mu$, ($\text{tg } 30^\circ = 0,57 < 0,6$), a test valóban tapad: így $S = mg \sin \alpha = 20 \text{ N}$.

IV/32. A test és a talaj között a sebességgel ellentétes irányú, $S = \mu mg = 0,6 \cdot 40 = 24 \text{ N}$ nagyságú surlódási erő lép fel. (Ha a sebesség iránya pozitív, akkor

$$-S = -24 \text{ N} = 4a,$$

$a = -6 \text{ m/s}^2$.) Ez azt jelenti, hogy a test lassul.

IV/33. A testre pozitív irányba F , nega-



IV. 20.
ábra

tív irányba S hat (IV. 20. ábra):

$$F - S = ma.$$

Tegyük fel, hogy a test csúszik. Ekkor $S = \mu mg = 24 \text{ N}$. Így

$$20 - 24 = 4a,$$

innen $a = -1 \text{ m/s}^2$. Ez azonban nem lehetséges, ha $v(0) = 0$. Különben $v(t) < 0$ ($t > 0$) lenne, így az $S > 0$ következik be. Ekkor azonban $a < 0$ nem lehetséges. Tehát $a = 0$. Így $F - S = 0$, vagyis $S = F = 20 \text{ N}$. Ha $F = 48 \text{ N}$, akkor a csúszást feltéve $a = 6 \text{ m/s}^2$, tehát $v(t) = 6 \cdot t \geq 0$, $t \geq 0$ vagyis a feltételezés beigazolódik.

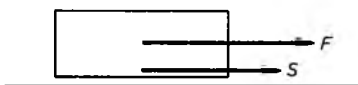
IV/34. Newton II. törvénye:

$$F - S = ma.$$

A test csúszik, tehát $S = \mu mg = 24 \text{ N}$. Ha $F = 20 \text{ N}$, akkor $a = -1 \text{ m/s}^2$. A test lassul, és 10 másodperc alatt a sebesség 0-ra csökken, majd megáll. Ezután $a = 0$, és $S = 20 \text{ N}$. A test tapadni fog. Ha $F = 48 \text{ N}$, akkor $a = 6 \text{ m/s}^2$. A test növekvő sebességgel mozog, és például 10 s múlva a sebesség: $v = 10 + 6 \cdot 10 = 70 \text{ m/s}$.

IV/35. A test csúszik, tehát $S = \mu mg = 24 \text{ N}$. Iránya a sebességgel ellentétes irányú: a húzóerővel megegyező irányban hat (IV. 21. ábra). Newton II. törvénye:

$$F + S = ma,$$



IV. 21.
ábra

behelyettesítve:

$$20 + 24 = 4a,$$

tehát $a = 11 \text{ m/s}^2$, így a test lassul: a sebessége $10/11 = 0,9 \text{ s}$ múlva nulla lesz. Ezután a test nyugalomban marad, mert a 20 N erő nem elég nagy ahhoz, hogy megmozdítsa a testet. Ha a húzóerő 48 N , akkor

$$48 + 24 = 4a,$$

$$a = 18 \text{ m/s}^2.$$

A test most $10/18 = 0,55 \text{ s}$ múlva megáll, most azonban elmozdul az F irányába 6 m/s^2 gyorsulással.

IV/36. A testre ható erők lejtővel párhuzamos összetevőinek összege a lejtő menti gyorsulást szolgáltatja (IV. 22. ábra):

$$mg \sin \alpha - S = ma,$$

de mert a test csúszik,

$$S = \mu mg \cos \alpha.$$

Így

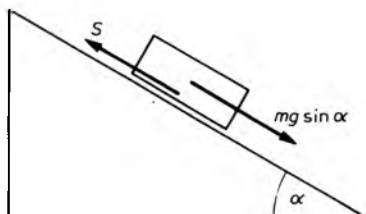
$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma,$$

vagyis

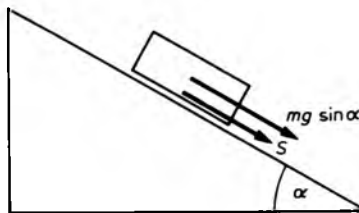
$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = a$$

Behelyettesítve: $a = 3,26 \text{ m/s}^2$. Az elmozdulás-idő függvény:

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t,$$



IV. 22.
ábra



IV. 23.
ábra

a feltétel szerint valamely $t \geq 0$ időpontban:

$$\frac{a}{2} t^2 + v_0 t = 4,$$

$$\frac{3,26}{2} t^2 + 2t - 4 = 0.$$

Innen $t = 1,06 \text{ s}$. Ebben a pillanatban a sebesség:

$$v(1,06) = 3,26 \cdot 1,06 + 2 = 5,45 \text{ m/s}.$$

A test tehát növekvő sebességgel halad a lejtőn.

IV/37. A testre ható erők eredőjének lejtő irányú összetevője a test impulzusának időegységre eső megváltozásával egyenlő (IV. 23. ábra):

$$mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = ma,$$

ebből

$$a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 5,86 \text{ m/s}^2.$$

A gyorsulás lefelé mutat. Válasszuk ezt az irányt pozitívnak. A kezdősebesség iránya a lejtő teteje felé mutat, tehát negatív: $v_0 = -10 \text{ m/s}$. A test fölfelé haladva akkor áll meg, amikor

$$v(t) = v_0 + at = 0,$$

$$-10 + 5,86t = 0,$$

tehát

$$t = 1,7 \text{ s}.$$

A test elmozdulása fölfelé mozogva:

$$x(1,7) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t = \frac{5,86}{2} 1,7^2 - 10 \cdot 1,7,$$

$$x(1,7) = -8,5 \text{ m}.$$

A fölfelé megtett út: 8,5 m. Ha a test elindul lefelé, akkor

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 4,1 \text{ m/s}^2$$

gyorsulással mozog. A gyorsulás pozitív, tehát a test valóban elindul lefelé. Az elindulási helyig 8,5 méter utat tesz meg. Ha ehhez t_1 idő szükséges, akkor

$$8,5 = \frac{4,1}{2} t_1^2,$$

$$t_1 = 2,0 \text{ s}.$$

Így a fölfelé indított test 3,7 másodperc alatt ér vissza az elindulás helyére. A súrlódási erő $\mu mg \cos \alpha = 3,46 \text{ N}$ nagyságú, akár fölfelé csúszik a test, akár lefelé. Az iránya azonban a sebességgel ellentétes irányú.

IV/38. Legyen a lefelé mutató irány pozitív. A fölfelé mozgó test gyorsulása:

$$a_1 = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

a lefelé csúszó test gyorsulása:

$$a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Az nyilvánvaló, hogy $a_1 > 0$, vagyis a fölfelé mozgó test lefelé gyorsul. Az a_2 is pozitív (lefelé mutat), mert a test a feltétel szerint elindul lefelé. Ha egy test valamilyen negatív kezdősebességről $a_1 > 0$ gyorsulással lelassul, és t_1 idő alatt megáll, akkor a megtett út:

$$s = \frac{a_1}{2} t_1^2. \quad (1)$$

Ugyanennyi úton $a_2 > 0$ gyorsulással t_2

ideig mozog a test:

$$s = \frac{a_2}{2} \cdot t_2^2.$$

Így

$$\frac{a_1}{2} t_1^2 = \frac{a_2}{2} t_2^2,$$

tehát

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)},$$

vagyis

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\operatorname{tg} \alpha + \mu}.$$

Az adatokat figyelembe véve:

$$\frac{2^2}{3,5^2} = \frac{0,577 - \mu}{0,577 + \mu},$$

$$0,326 = \frac{0,577 - \mu}{0,577 + \mu},$$

$$0,1885 + 0,326\mu = 0,577 - \mu,$$

$$1,326\mu = 0,388,$$

$$\mu = 0,3.$$

Megjegyzés: Az (1) összefüggést alá kell támasztanunk! A fölfelé csúszó test a t_1 időpontban megáll, akkor

$$0 = a_1 t_1 + v_1$$

$$v_1 = -a_1 t_1 < 0.$$

Az elmozdulás:

$$x(t_1) = \frac{a_1}{2} t_1^2 + (-a_1 t_1) t_1,$$

$$x(t_1) = -\frac{a_1}{2} t_1^2.$$

Az elmozdulás abszolút értéke az út:

$$s = \frac{a_1}{2} t_1^2.$$

IV/39. A lejtőn fölfelé csúszó test gyorsulása:

$$a_1 = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

a lefelé mozgó test pedig

$$a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

gyorsulással mozog. A $v_1 < 0$ sebességről $a_1 > 0$ gyorsulással lelassuló test s utat tesz meg megállásáig, akkor

$$v_1^2 = 2a_1 s. \quad (1)$$

A lefelé csúszó test s úton, v_2 sebességgel gyorsul fel:

$$v_2^2 = 2a_2 s. \quad (2)$$

A két egyenlőségéből

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Másként írva:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu}.$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \mu}{\frac{\sqrt{3}}{3} - \mu}.$$

Innen $\mu = 0,48$.

Megjegyzés: Az (1) összefüggést indokolni kell! Amikor a test megáll:

$$a_1 t + v_1 = 0,$$

$$t_1 = -\frac{v_1}{a_1}.$$

Az elmozdulás:

$$x\left(-\frac{v_1}{a_1}\right) = \frac{a_1}{2}\left(-\frac{v_1}{a_1}\right)^2 + v_1\left(-\frac{v_1}{a_1}\right).$$

Innen

$$x\left(-\frac{v_1}{a_1}\right) = -\frac{v_1^2}{2a_1}.$$

A megtett út az elmozdulás abszolút értéke:

$$s = \left| -\frac{v_1^2}{2a_1} \right|.$$

IV/40. Nyugalom esetén a test gyorsulása nulla. A súrlódási erő nagysága kisebb vagy egyenlő, mint $\mu mg \cos \alpha = 6,9 \text{ N}$:

$$|s| \leq 6,9 \text{ N}.$$

A súrlódási erő fölfelé és lefelé is mutathat. Ha fölfelé hat, akkor

$$F - mg \sin \alpha + S = 0.$$

Ekkor

$$S = mg \sin \alpha - F \leq 6,9,$$

így

$$F \geq mg \sin \alpha - 6,9 = 13,1 \text{ N}.$$

Abban az esetben, ha a súrlódási erő lefelé hat, akkor

$$F - mg \sin \alpha - S = 0.$$

Ekkor

$$S = F - mg \sin \alpha \leq 6,9,$$

így

$$F \leq mg \sin \alpha + 6,9 = 26,9 \text{ N}.$$

Ha tehát olyan fölfelé irányuló F erővel hatunk a testre, amelynek a nagysága 13,1 N és 26,9 N közé esik, akkor a test nyugalomban van. Ha 26,6 N-nál nagyobb fölfelé irányuló erőt fejtünk ki, akkor a test fölfelé elindul, míg ha ez az erő kisebb, mint 13,1 N, akkor a testet nem képes megtartani nyugalomban, vagyis az elindul lefelé.

IV/41. A testre ható erők vízszintes összetevőinek az összege:

$$F \cos \alpha - S = ma,$$

a függőleges összetevőinek összege:

$$F \sin \alpha + N - mg = 0.$$

Ha a test csúszik, akkor $S = \mu N$. Ekkor azonban teljesülni kell az $a > 0$ feltételnek. A másik lehetséges esetben, tehát amikor a test nyugalomban van $a = 0$, de ekkor ellenőrizni kell az $S \leq \mu N$ feltétel teljesülését. Tegyük fel, hogy a test csúszik. Mivel

$$N = mg - F \sin \alpha = 29,7 \text{ N},$$

és

$$S = \mu N = 5,94 \text{ N},$$

ezért

$$F \cos \alpha - S = 28,19 - 5,94 = 22,2 \text{ N}.$$

Így

$$a = \frac{22,2}{4} = 5,56 \text{ m/s}^2.$$

Mivel $a > 0$, az ellentétes hipotézist nem kell megvilágítani.

IV/42. A talajra merőleges N nyomóerővel a nehézségi erő és az F függőleges ösz-

szetevője tart egyensúlyt (IV. 24. ábra):

$$mg + F \cos \alpha = N.$$

A testet az F erő talajjal párhuzamos összetevőjének és a súrlódási erőnek az eredője gyorsítja:

$$F \sin \alpha - S = ma.$$

Tegyük fel, hogy a test megcsúszik, tehát, hogy $a > 0$, ekkor $S = \mu N$:

$$F \sin \alpha - \mu(mg + F \cos \alpha) = ma > 0,$$

de ez azt jelenti, hogy

$$F(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) > \mu mg.$$

Mivel azonban

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \mu \cos \alpha &= \sin 10^\circ - 0,2 \cos 10^\circ = \\ &= -0,023 < 0, \end{aligned}$$

ezért

$$F \cdot (-0,023) > 8.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy pozitív F erővel (tehát a feltételezés szerinti irányú erővel) a testet nem lehet elmozdítani. Minél nagyobb erővel húzzuk a testet, annál nagyobb a talajjal párhuzamos erőkomponens, de annál nagyobb a súrlódási erő is, mert a nyomóerő is megnő.

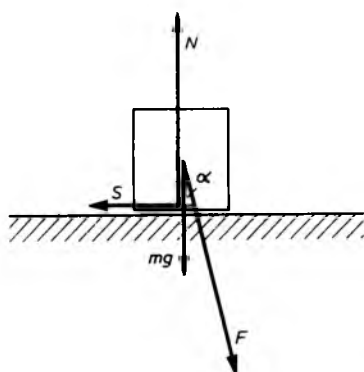
IV/43. Newton II. törvénye a kocsira helyezett test mozgására:

$$F - S = m_1 a_1,$$

a kocs mozgására pedig:

$$S = m_2 a_2,$$

ahol m_1 a test, m_2 a kocs tömege. Ha a test megcsúszik, akkor $S = \mu m_1 g$. Ekkor azonban $a_1 > a_2$. Ha ezzel szemben a test tapad a kocsin, akkor $a_1 = a_2$, de ebben az esetben az $S \leq \mu m_1 g$ feltételnek teljesülni kell. Tegyük fel először, hogy a test tapad, ek-



IV. 24.
ábra

kor

$$F - S = m_1 a,$$

$$S = m_2 a.$$

Itt a -val a közös gyorsulást jelöltük. A két egyenlet összege:

$$F = (m_1 + m_2) a,$$

tehát

$$a = \frac{25}{5} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$S = m_2 a = 10 \text{ N}.$$

Mivel azonban $\mu m_1 g = 6 \text{ N}$, a test nem tapad, a feltevésünket el kell vetnünk. A kocsira helyezett test tehát elmozdul a kocsin:

$$F - S = m_1 a_1,$$

$$S = m_2 a_2,$$

de $S = 6 \text{ N}$, így

$$25 - 6 = 3a_1,$$

$$6 = 2a_2,$$

tehát $a_1 = 6,3 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 3 \text{ m/s}^2$.

IV/44. Newton II. törvénye a két test mozgására:

$$S = m_1 a_1,$$

$$F - S = m_2 a_2.$$

Ha a test megcsúszik, akkor $S = \mu m_1 g$, és ilyenkor ellenőrizni kell az $a_2 > a_1$ feltételt.

Ha azonban a test tapad a kocsin, akkor $a_1 = a_2$ (jelöljük a közös gyorsulást ebben az esetben a -val), és meg kell vizsgálni, hogy teljesül-e az $S \leq \mu m_1 g$ feltétel. Vizsgáljuk meg az első esetet. Ekkor $S = \mu m_1 g = 9 \text{ N}$, így

$$9 = 3a_1,$$

$$25 - 9 = 4a_2,$$

tehát $a_1 = 3 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 4 \text{ m/s}^2$, és valóban $a_2 > a_1$, tehát a test tényleg csúszik.

IV/45. A Newton-törvények:

$$F - S = m_1 a_1,$$

$$S = m_2 a_2.$$

Tegyük fel, hogy a test megcsúszik a kocsin: $S = \mu m_1 g = 15 \text{ N}$. Ekkor

$$F - S = 15 - 15 = m_1 a_1,$$

így $a_1 = 0$, és $15 = 10a_2$ alapján $a_2 = 1,5 \text{ m/s}^2$, ami nyilván lehetetlen. Ezért a tapadás valósul meg:

$$F - S = m_1 a,$$

$$S = m_2 a.$$

Innen

$$F = (m_1 + m_2) a,$$

tehát

$$a = 1 \text{ m/s}^2 \quad \text{és} \quad S = m_2 a = 10 \text{ N},$$

valóban kisebb, mint $\mu m_1 g = 15 \text{ N}$.

IV/46. A IV. 25. ábra szerint a Newton-törvények:

$$S_1 = m_1 a_1,$$

$$F - S_1 - S_2 = m_2 a_2.$$

Három eset valósulhat meg:

1. Az alsó test csúszik, és megcsúszik rajta a felső:

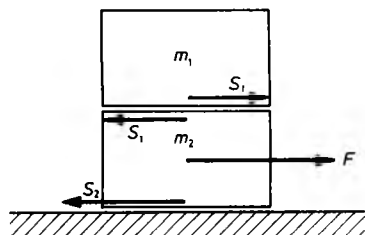
$$S_1 = \mu_1 m_1 g = 12 \text{ N},$$

$$S_2 = \mu_2 (m_1 + m_2) g = 20 \text{ N}.$$

Ekkor teljesülni kell az $a_1 < a_2$, $a_1 > 0$ feltételeknek.

2. Ha a két test összetapadva mozog, akkor $a_1 = a_2 =: a$, és

$$S_2 = \mu_2 (m_1 + m_2) g = 20 \text{ N}.$$



IV. 25.
ábra

Ekkor teljesülni kell az $a > 0$, $S_1 \leq \mu_1 m_1 g$ feltételeknek.

3. Ha a két test nyugalomban van, akkor

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = 0,$$

de ekkor ellenőrizni kell az $S_1 \leq \mu_1 m_1 g$ és az $S_2 \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g$ feltételeket.

Tegyük fel, hogy a harmadik eset valósul meg. Ekkor

$$S_1 = m_1 0 = 0,$$

$$9 - S_1 - S_2 = m_2 0 = 0.$$

Így $S_2 = 9 \text{ N} < 20 \text{ N}$, és $S_1 = 0 < 12 \text{ N}$. A feltételezés helyes volt. Ezért természetesen a másik két hipotézist nem kell megvizsgálni.

IV/47. A dinamika alaptörvénye a két test mozgására (IV. 26. ábra):

$$m_1 g \sin \alpha - S_1 = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$m_2 g \sin \alpha - S_2 + S_1 = m_2 a_2, \quad (2)$$

$$N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$N_2 - N_1 - m_2 g \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

Négy eset valósulhat meg.

1. Mindkét test nyugalomban van. Ekkor

$$a_1 = 0, \quad (5)$$

$$a_2 = 0, \quad (6)$$

és teljesülni kell az

$$S_1 \leq \mu_1 N_1, \quad (7)$$

$$S_2 \leq \mu_2 N_2 \quad (8)$$

feltételeknek. Az (1)–(8) összfüggésekből:

$$S_1 = m_1 g \sin \alpha \leq \mu m_1 g \cos \alpha,$$

$$S_2 = m_2 g \sin \alpha + m_1 g \sin \alpha \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha.$$

Innen

$$\mu_1 \geq \tan \alpha, \quad \mu_2 \geq \tan \alpha.$$

Ez a feltétele annak, hogy a két test tapadjon! Adatokkal:

$$\mu_1 \geq 0,5773, \quad \mu_2 \geq 0,5773.$$

2. Ha a felső test csúszik, de az alsó áll, akkor

$$S_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha, \quad (9)$$

$$a_2 = 0, \quad (10)$$

és teljesülni kell az

$$a_1 \geq 0, \quad (11)$$

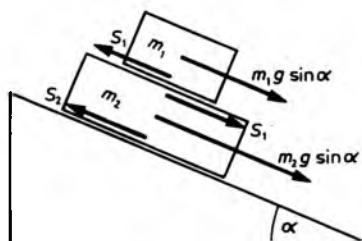
$$S_2 \leq \mu_2 N_2 \quad (12)$$

feltételeknek. Ebben az esetben (1), (9) és (11) alapján:

$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) \geq 0,$$

és így

$$\mu_1 \leq \tan \alpha = 0,5773.$$



IV. 26.
ábra

Másrészt (12) feltételből (3) és (4) felhasználásával:

$$S_2 \leq \mu_2 N_2 = \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha. \quad (13)$$

A (2), (9) és (10) alapján:

$$S_2 = m_2 g \sin \alpha + \mu_1 m_1 g \cos \alpha, \quad (14)$$

tehát (13) és (14) egybevetésével azt kapjuk, hogy

$$m_2 g \sin \alpha + \mu_1 m_1 g \cos \alpha \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha.$$

Innen

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mu_1 \leq \mu_2,$$

és az adatok behelyettesítésével:

$$0,1924 + 0,666 \mu_1 \leq \mu_2.$$

3. Ha a két test összetapadva, együtt csúszik, akkor

$$a_1 = a_2 =: a, \quad (15)$$

$$S_2 = \mu_2 (N_1 + N_2) = \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha, \quad (16)$$

és teljesülnie kell az

$$a > 0, \quad (17)$$

$$S_1 \leq \mu_1 m_1 g \cos \alpha \quad (18)$$

feltételeknek. A (15) és (16) összefüggést (1)-be és (2)-be behelyettesítve:

$$m_1 g \sin \alpha - S_1 = m_1 a,$$

$$m_2 g \sin \alpha + S_1 -$$

$$- \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha = m_2 a.$$

Adjuk össze a két egyenletet:

$$(m_1 + m_2) g \sin \alpha -$$

$$- \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha = (m_1 + m_2) a,$$

tehát

$$a = g (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha). \quad (19)$$

Innen a (17) feltétel figyelembevételével:

$$\mu_2 < \operatorname{tg} \alpha$$

adódik. Másrészt (19) és (1) alapján:

$$\begin{aligned} S_1 &= m_1 g \sin \alpha - m_1 g (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) = \\ &= \mu_2 m_1 g \cos \alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

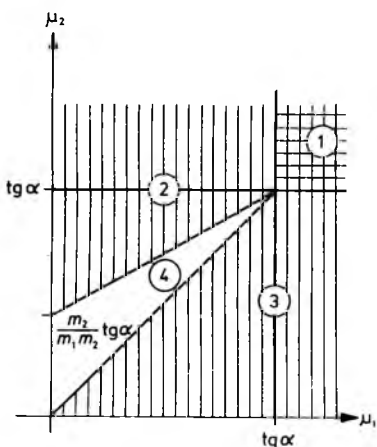
Ezt összevetve a (18) feltétellel:

$$\mu_2 m_1 g \cos \alpha \leq \mu_1 m_1 g \cos \alpha,$$

tehát

$$\mu_2 \leq \mu_1.$$

4. A három esetet részletesen megvizsgáltuk, ezzel meghatároztuk a negyedik feltételét is. A IV. 27. ábrán feltüntettük a három esetnek megfelelő feltételeket. Olyan koordináta-rendszert használtunk, melynek a vízszintes tengelyén a μ_1 , a függőleges tengelyén a μ_2 súrlódási együttható szerepel. Ekkor a pozitív síknegyed egyes tartományait megfeleltethetjük a részproblémák megoldásának. Ha az első három részfeladat megoldását szolgáltató síkrészt megadtuk, akkor ezzel kijelöltük a negyedikét is. Oldjuk meg most azonban a



IV. 27. ábra

negyedik részfeladatot is, mintha ezzel kezdtük volna a feladat vizsgálatát.

Ha a két test külön-külön mozog, akkor

$$S_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha, \quad (21)$$

$$S_2 = \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha, \quad (22)$$

és teljesülni kell az

$$a_1 > a_2, \quad (23)$$

$$a_2 > 0 \quad (24)$$

feltételeknek. Helyettesítsük be (21)-et és (22)-t az (1) és (2) mozgásegyenletekbe:

$$m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha = m_1 a_1,$$

$$m_2 g \sin \alpha + \mu_1 m_1 g \cos \alpha - \\ - \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha = m_2 a_2.$$

Ezekből a gyorsulások a következők:

$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha), \quad (25)$$

$$a_2 = g \sin \alpha + \\ + \left(\mu_1 \frac{m_1}{m_2} - \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) g \cos \alpha. \quad (26)$$

A (23) feltétel ennek felhasználásával így írható fel:

$$g \sin \alpha - \mu_1 g \cos \alpha > g \sin \alpha + \\ + \mu_1 \frac{m_1}{m_2} g \cos \alpha - \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} g \cos \alpha,$$

$$\mu_2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} g \cos \alpha > \mu_1 g \cos \alpha +$$

$$+ \mu_1 \frac{m_1}{m_2} g \cos \alpha,$$

$$\mu_2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} > \mu_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right),$$

$$\mu_2 > \mu_1.$$

Másrészt a (24) feltételből következik, hogy

$$g \sin \alpha + \mu_1 \frac{m_1}{m_2} g \cos \alpha > \\ > \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} g \cos \alpha,$$

vagyis

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \tan \alpha + \mu_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} > \mu_2.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$0,1924 + 0,666 \mu_1 > \mu_2.$$

IV/48. A felső testre vonatkozó dinamikai egyenletek (IV. 28. ábra):

$$S_1 - K \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$K \sin \alpha + N_1 - m_1 g = 0. \quad (2)$$

Az alsó testre:

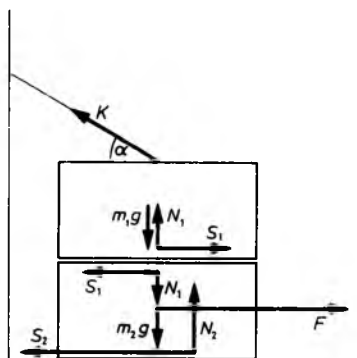
$$F - S_1 - S_2 = m_2 a_2, \quad (3)$$

$$N_1 + m_2 g - N_2 = 0. \quad (4)$$

Az alsó test mindkét felületénél csúszás lép fel:

$$S_1 = \mu_1 N_1, \quad (5)$$

$$S_2 = \mu_2 N_2. \quad (6)$$



IV. 28.
ábra

Az a_2 gyorsulást nullának tekinthetjük, mert elég ha lassan, egyenletesen húzzuk ki az alsó testet a felső alól; tehát

$$a_2 = 0. \quad (7)$$

Oldjuk meg az (1)–(7) egyenletrendszer! (1)-ből fejezzük ki $K \cos \alpha$ -t, a (2)-ből $K \sin \alpha$ -t, osszuk el az így kapott két egyenletet egymással! Helyettesítsük ezután S_1 helyére $\mu_1 N_1$ -et! Ekkor egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$\frac{m_1 g - N_1}{\mu_1 N_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Innen

$$N_1 = \frac{m_1 g}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \mu_1} = \frac{40}{1,23} = 32,5 \text{ N}.$$

Ebből egyrészt (5) alapján:

$$S_1 = \mu_1 N_1 = 13 \text{ N},$$

másrészt (4) alapján:

$$N_2 = m_2 g + N_1 = 92,5 \text{ N},$$

és (6) szerint:

$$S_2 = \mu_2 N_2 = 18,5 \text{ N}.$$

Végül (3) és (7) felhasználásával:

$$F = S_1 + S_2 = 31,5 \text{ N}.$$

IV/49. A dinamika alaptörvénye a IV. 29. ábra alapján:

$$K + K \cos \alpha - S = ma, \quad (1)$$

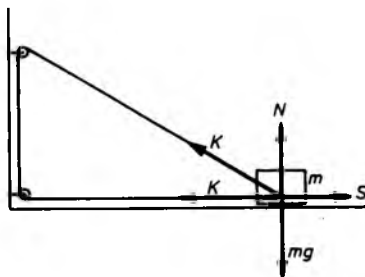
$$K \sin \alpha + N - mg = 0. \quad (2)$$

A szán csúszik, ezért

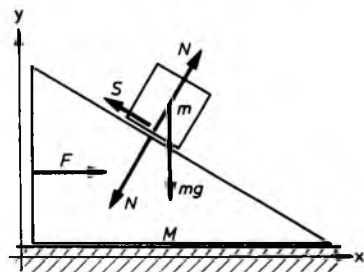
$$S = \mu N, \quad (3)$$

de feltehetően kicsi a gyorsulása, mert elég, ha lassan mozdul meg a szán:

$$a = 0. \quad (4)$$



IV. 29. ábra



IV. 30. ábra

A (2) és a (3) egyenlőségéből:

$$S = \mu mg - \mu K \sin \alpha.$$

Ezt és (4)-et az (1)-ben figyelembe véve:

$$K(1 + \cos \alpha + \mu \sin \alpha) = \mu mg,$$

innen: $K = 20,87 \text{ N}$.

IV/50. Válasszuk meg a koordináta-rendszert az IV. 30. ábrán látható módon. A test nyugszik a lejtőn, ezért a gyorsulásuk egyenlő. A testre ható tapadási súrlódási erő iránya felfelé is, lefelé is mutathat. Az ábrán felfelé mutató súrlódási erőt jelöltük be. Newton II. törvénye a két test mozgására:

$$N \sin \alpha - S \cos \alpha = ma, \quad (1)$$

$$N \cos \alpha + S \sin \alpha - mg = 0, \quad (2)$$

$$F - N \sin \alpha + S \cos \alpha = Ma. \quad (3)$$

A tapadás feltétele:

$$S \leq \mu N. \quad (4)$$

Szorozzuk meg a (1) egyenletet $\sin \alpha$ -val, a (2) egyenletet $\cos \alpha$ -val, majd adjuk össze az így kapott egyenleteket. Ekkor — figyelembe véve, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ —, azt kapjuk, hogy

$$N = ma \sin \alpha + mg \cos \alpha.$$

Szorozzuk meg ezután az (1) egyenletet $\cos \alpha$ -val, a (2) egyenletet $\sin \alpha$ -val, és vonjuk ki a két egyenletet egymásból, ekkor

$$S = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha.$$

Mivel határesetben $S = \mu N$, ezért

$$mg \sin \alpha - ma \cos \alpha = \mu(ma \sin \alpha + mg \cos \alpha).$$

Innen

$$a = 4,51 \text{ m/s}^2.$$

Ha ennél az értéknél kisebb a lejtő gyorsulása, akkor a test lecsúszik róla.

Adjuk most össze az (1) és a (3) egyenleteket. Ekkor

$$F = (m + M)a,$$

innen $F = 22,55 \text{ N}$. Legalább ekkora erőt kell a lejtőre kifejteni, hogy a test ne csúszék le róla.

Tegyük fel most, hogy a lejtőt olyan nagy erővel toljuk, hogy (bár a test nyugalomban van hozzá képest), a testre ható súrlódási erő lefelé mutat, a lejtő alja felé. Ekkor az (1), (2) és a (3) egyenletekben a súrlódási erő előjelét ellentétesre változtatjuk. A fenti gondolatmenetet értelemszerűen módosítva megismételjük. Azt kapjuk, hogy a lejtő nem gyorsulhat nagyobb gyorsulással, mint $7,18 \text{ m/s}^2$, mert különben a test fölfelé kezd csúszni rajta. Ez azt jelenti, hogy a lejtőre legfeljebb $5 \cdot 7,18 = 35,9 \text{ N}$ erőt fejthetünk ki.

IV/51. A közös végsebességet jelölje u , ekkor az impulzusmegmaradás miatt:

$$mv_0 = (m + M)u. \quad (1)$$

A kocsin csúszó testre csak a súrlódási erő hat:

$$-\mu mg = ma_t,$$

ennek az ellenereje gyorsítja fel a kocsit az u sebességre:

$$\mu mg = Ma_K. \quad (2)$$

Ha a csúszás t ideig tart, akkor

$$a_K t = u. \quad (3)$$

Ennyi idő alatt a test

$$s = \frac{v_0 t}{2} \quad (4)$$

távolságot csúszik a kocsi felületén. Az adatokat behelyettesítve:

$$u = \frac{16}{14} = 1,14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_K = \frac{24}{10} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

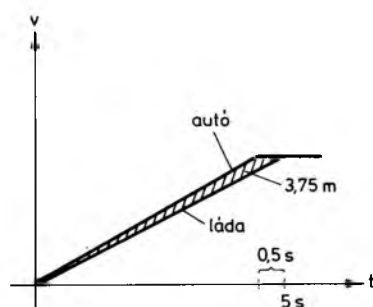
$$t = \frac{1,14}{2,4} = 0,47 \text{ s},$$

$$s = 0,95 \text{ m}.$$

IV/52. Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15}{4,5} = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a láda gyorsulása pedig $\mu g = 3 \text{ m/s}^2$. A láda



IV. 31. ábra

sebessége 5 s múlva éri el az autó sebességét. A láda 0,5 s-mal hosszabb ideig gyorsul, mint az autó. Így a rakfelülethez viszonyított elmozdulás (IV. 31. ábra):

$$\frac{0,5 \cdot 15}{2} = 3,75 \text{ m}.$$

IV/53. A leszakadó rész t idő alatt megáll, akkor a IV. 32. ábra alapján

$$s_2 = \frac{v_0 t}{2}. \quad (1)$$

Így $t = 80$ s. Ez idő alatt az első rész

$$v_1 = v_0 + a_1 t \quad (2)$$

sebességre gyorsul fel. A két vonatrész közötti távolság a t időpontban:

$$s = \frac{v_1 t}{2}, \quad (3)$$

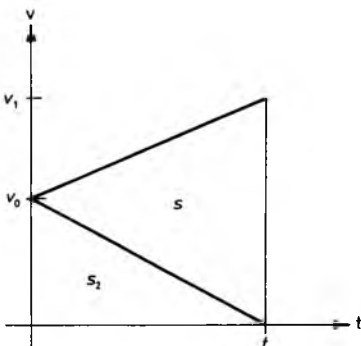
így

$$s = \frac{(v_0 + a_1 t) t}{2}. \quad (4)$$

A gyorsulást Newton II. törvénye segítségével határozzuk meg. A vonat első részére az

$$F - \mu m_1 g = m_1 a_1 \quad (5)$$

formában érvényes a dinamika alaptörvé-



IV. 32.
ábra

nye, ahol F a mozdony húzóereje. A hátul haladó részre:

$$-\mu m_2 g = m_2 a_2. \quad (6)$$

És végül az egész vonatra, még a szétszakadás előtt:

$$F - \mu(m_1 + m_2)g = 0, \quad (7)$$

hiszen a vonat ekkor még nem gyorsul. Az (5), (6), (7) egyenletekből

$$\mu m_2 g = m_1 a_1,$$

$$-\mu m_2 g = m_2 a_2.$$

Innen

$$a_2 = -\mu g = -0,1 \text{ m/s}^2 \text{ és}$$

$$a_1 = \frac{\mu m_2 g}{m_1} = 0,02 \text{ m/s}^2.$$

A (2) és (4) egyenletbe helyettesítve:

$$v_1 = 21,6 \text{ m/s},$$

$$s = \frac{21,6 \cdot 80}{2} = 864 \text{ m}.$$

IV/54. Tegyük fel, hogy a két test együtt csúszik. Ekkor

$$m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha + F = m_1 a,$$

$$m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha - F = m_2 a,$$

ahol F a két test között fellépő erő, $F \geq 0$.

Adjuk össze a két egyenletet:

$$(m_1 + m_2)g \sin \alpha -$$

$$-(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g \cos \alpha =$$

$$= (m_1 + m_2)a,$$

és így

$$g \sin \alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha = a.$$

Tehát $a = 2,7 \text{ m/s}^2$ és $F = 1,15 \text{ N} > 0$.

IV/55. Az esés és az emelkedés magasságának az aránya állandó:

$$\frac{6}{10} = 0,6 =: q (= \varepsilon^2).$$

Az esési és emelkedési magasságok mértani sorozatot alkotnak, $q=0,6$ hányadossal. A 15. ütközésig 15 esés és 14 emelkedés következik be. Így

$$s_{1e} = 10 \frac{q^{15} - 1}{q - 1} \approx 25 \text{ m},$$

$$s_{fel} = 6 \frac{q^{14} - 1}{q - 1} \approx 15 \text{ m}.$$

Az összes út 40 méter. Az esési idők is mértani sorozatot alkotnak, hiszen

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\frac{g}{2} t_2^2}{\frac{g}{2} t_1^2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} = q,$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{q} = \sqrt{0,6} = 0,775.$$

A 10 méter utat $\sqrt{2}$ s alatt, a 6 méter utat $\sqrt{1,2}$ s idő alatt teszi meg a test, tehát

$$t_{1e} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{0,6^{15}} - 1}{\sqrt{0,6} - 1} = 6,14 \text{ s},$$

$$t_{fel} = \sqrt{1,2} \frac{\sqrt{0,6^{14}} - 1}{\sqrt{0,6} - 1} = 4,72 \text{ s}.$$

Összesen

$$t = 10,86 \text{ s}.$$

IV/56. Milyen magasról ejtettük volna a testet, ha 10 méter magasan 5 m/s a sebessége? Ha h_0 magasról, akkor

$$h_0 - 10 = \frac{g}{2} t^2, \quad 5 = gt$$

alapján $t = 0,5$ s és $h_0 = 11,25$ m. Ha a test $h_0 = 11,25$ m magasról esik, akkor — egyrészt — $h_1 = 10$ m magasan 5 m/s a sebessége — másrészt $h_1 = 10$ m magasra emelkedik:

$$\frac{h_1}{h_0} = 0,88 =: q.$$

Ha a kezdősebesség $h_1 = 10$ m magasan 8 m/s lenne, akkor felfoghatjuk úgy, hogy H_0 magasról esett:

$$H_0 - 10 = \frac{g}{2} t_1^2, \quad 8 = gt_1$$

alapján $t_1 = 0,8$ s és $H_0 = 13,2$ m. Innen

$$\frac{H_1}{H_0} = 0,88,$$

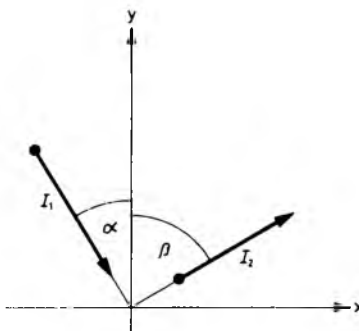
tehát $H_1 = 11,61$ m magasra emelkedik.

IV/57. Használjuk a IV. 33. ábrán látható koordináta-rendszert. Az ütközés előtti impulzus legyen $\mathbf{I}_1 = (I_{1x}, I_{1y})$, az ütközés utáni impulzus $\mathbf{I}_2 = (I_{2x}, I_{2y})$, az impulzusváltozás $\Delta \mathbf{I} = (\Delta I_x, \Delta I_y)$. Így

$$\Delta I_x = I_{2x} - I_{1x} = mv_2 \sin \beta - mv_1 \sin \alpha,$$

$$\Delta I_y = I_{2y} - I_{1y} = mv_2 \cos \beta - mv_1 \cos \alpha.$$

A falra merőleges erőlökhés egyenlő ΔI_y -nal (Newton II. törvénye szerint), és a fallal párhuzamos erőlökhés — ismét Newton II.



IV. 33. ábra

törvénye alapján — ΔI_x -szel egyenlő. Másrészt a surlódás tulajdonságai alapján

$$\Delta I_x = -\mu \Delta I_y.$$

Tehát

$$\begin{aligned} mv_2 \sin \beta - mv_1 \sin \alpha = \\ = \mu(mv_1 \cos \alpha - mv_2 \cos \beta), \end{aligned}$$

innen

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\mu \cos \beta + \sin \beta}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{0,4 \cos 55^\circ + \sin 55^\circ}{0,4 \cos 45^\circ + \sin 45^\circ} = 1,06.$$

IV/58. A IV. 34. ábrán látható koordináta-rendszerben felírva az impulzuszámítást:

$$(m + M)u - mv \cos \alpha = -\mu \Delta I^\perp,$$

$$0 - (-mv \sin \alpha) = \Delta I^\perp,$$

ahol $\Delta I^\perp$ a lejtőre merőleges erőlöket. (Feltesszük, hogy a test a lejtőn elindul fölfelé, azaz koordináta-rendszerünkben $u > 0$.)

Innen

$$(m + M)u = mv \cos \alpha - \mu mv \sin \alpha.$$

Behelyettesítve:

$$4,2u = 0,2 \cdot 10 \cos 15^\circ - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 10 \sin 15^\circ,$$

így $u = 0,423 \text{ m/s} > 0$, tehát feltevésünk he-

lyes volt. A test gyorsulása:

$$a = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -5,5 \text{ m/s}^2$$

(lefelé mutat). Így az együtt mozgó két test

$$t = \frac{0,423}{5,5} = 0,077 \text{ s}$$

ideig mozog és

$$s = \frac{ut}{2} = 0,0162 \text{ m} = 1,6 \text{ cm}$$

utat tesz meg.

IV/59. A h magasból eső test $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{80} \text{ m/s}$ sebességgel esik a nyugvó deszkára. Az impulzuszámítást a IV. 35. ábrán látható koordináta-rendszerre vonatkoztatva — feltéve, hogy a két test elindul lefelé —

$$(m + M)u - mv \sin \alpha = -\mu \Delta I^\perp \quad \text{és}$$

$$0 - (-mv \cos \alpha) = \Delta I^\perp.$$

Innen

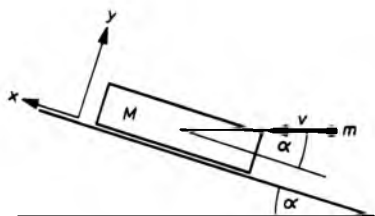
$$(m + M)u - mv \sin \alpha = -\mu mv \cos \alpha,$$

vagyis

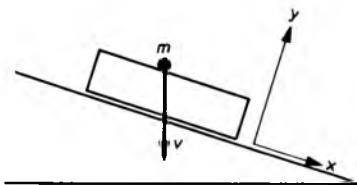
$$(m + M)u = mv(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < 0,$$

mert $\text{tg } \alpha < \mu$. A test tehát nem indul el lefelé. Ha egy deszka tapad a lejtőn, akkor bármilyen nagy függőleges irányú ütés éri, továbbra is nyugalomban van. Mivel $u = 0$, ezért $\Delta I^\perp = -mv \sin \alpha = 0,447 \text{ N s}$,

$$\Delta I^\perp = mv \cos \alpha = 0,774 \text{ N s}.$$



IV. 34.
ábra



IV. 35.
ábra

IV/60. Az impulzusról:

$$(m + M)u - Mv_0 = -\mu \Delta I^\perp,$$

$$0 - (-mv) = \Delta I^\perp,$$

ahol $\Delta I^\perp$ a talaj által kifejtett merőleges erőlkedés. Az m tömegű test h magasról esik, ezért $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{80}$ m/s. Innen — az adatokat is behelyettesítve —

$$5u - 4v_0 = -\mu \Delta I^\perp,$$

$$0 - (-1\sqrt{80}) = \Delta I^\perp.$$

Így

$$5u - 4v_0 = -0,1\sqrt{80}.$$

A talajon csúszó deszka gyorsulása:

$$a = -\mu g = -1 \text{ m/s}^2.$$

Ha az u kezdősebességgel megtett út $s = 0,8$ m, akkor

$$u^2 = 2\mu g s = 1,6 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

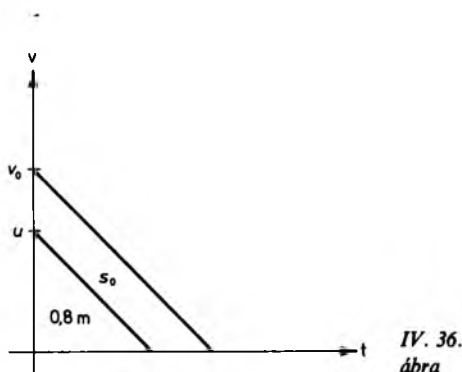
Tehát

$$5 \cdot \sqrt{1,6} - 4v_0 = -0,1 \cdot \sqrt{80},$$

ebből

$$v_0 = 1,8 \text{ m/s}.$$

A v_0 kezdősebességgel megtett s_0 út és az u



kezdősebességgel megtett $0,8$ m út aránya (IV. 36. ábra):

$$\frac{s_0}{0,8} = \frac{v_0^2}{u^2},$$

így

$$s_0 = 0,8 \frac{1,8^2}{1,6} = 1,62 \text{ m}.$$

A két út különbsége $0,82$ méter.

IV/61. Az impulzusról:

$$Mu - Mv_0 = -\mu \Delta I^\perp,$$

$$mv - (-mv) = \Delta I^\perp,$$

ahol $\Delta I^\perp$ a talaj által kifejtett merőleges erőlkéssel egyenlő. Az m tömegű test h magasságról esik, ezért $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{80}$ m/s. A rugalmas ütközés miatt $\Delta I^\perp$ kétszerese a rugalmatlan esetben látottaknak. Helyettesítsük be az adatokat:

$$4u - 4v_0 = -0,1 \cdot 2 \cdot \sqrt{80}.$$

Ha az u kezdősebességgel megtett út $s = 0,8$ m, akkor

$$u^2 = 2\mu g s,$$

és a v_0 kezdősebességgel megtett út (s_0), valamint az s aránya:

$$\frac{s_0}{0,8} = \frac{v_0^2}{u^2}.$$

Így egyrészt $u^2 = 1,6 \text{ m}^2/\text{s}^2$, másrészt $v_0 = 1,71 \text{ m/s}$, és végül $s_0 = 1,46 \text{ m}$. Az út-különbség $0,66$ méter.

IV/62. Az impulzusról:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

és

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1,$$

mert az ütközési szám 1, hiszen az ütközés tökéletesen rugalmas. Az adatokkal:

$$4 \cdot 8 + 6 \cdot 6 = 4u_1 + 6u_2,$$

$$u_1 - u_2 = -2.$$

Innen $u_2 = 7,6 \text{ m/s}$, és $u_1 = 5,6 \text{ m/s}$.

IV/63. Az impulzusmérleg:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

és

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$4 \cdot 8 + 6 \cdot (-6) = 4u_1 + 6u_2,$$

$$u_1 - u_2 = -6 - 8 = -14,$$

tehát $u_2 = 5,2 \text{ m/s}$, $u_1 = -8,8 \text{ m/s}$. Mindkét test sebessége ellentétesre változik.

IV/64. Az impulzusmérleg:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

és

$$u_1 - u_2 = \varepsilon(v_2 - v_1).$$

Helyettesítsünk be:

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot u_2,$$

$$3 - u_2 = \varepsilon(2 - 4).$$

A két egyenletben két ismeretlen van; a megoldás: $u_2 = 4 \text{ m/s}$, és $\varepsilon = 0,5$. Az ütközés tehát nem rugalmas és nem rugalmatlan. Alkalmazzuk most a kapott eredményt arra az esetre, amikor a második golyó szembe halad az elsővel. Legyenek most is az ütközés előtti sebességek v_1 , v_2 , és az ütközés utáni sebességek u_1 , u_2 . Tehát (adatokkal):

$$2 \cdot 4 + 1(-3) = 2u_1 + 1u_2,$$

$$u_1 - u_2 = 0,5(-3 - 4).$$

Így

$$u_1 - u_2 = -3,5,$$

$$5 = 2(u_2 - 3,5) + u_2,$$

$$5 = 3u_2 - 7.$$

Innen $u_2 = 4 \text{ m/s}$, $u_1 = 0,5 \text{ m/s}$.

IV/65. Az impulzusmérleg:

$$(M + m)v_0 = Mu_1 + mu_2,$$

tehát

$$5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 + mu_2.$$

Innen $u_2 = 0$, a test tehát a talajhoz képest áll, a kocsi elválva szabadon esik. A kocsihoz viszonyítva -5 m/s sebességgel mozog.

IV/66. Az impulzusmegmaradás törvényét háromszor írjuk fel:

$$(M + 3m) \cdot 0 = (M + 2m)u_1 + mw,$$

$$(M + 2m)u_1 = (M + m)u_2 + m(u_1 + w),$$

$$(M + m)u_2 = Mu_3 + m(u_2 + w).$$

A kocsit talajhoz viszonyított sebességéhez hozzáadjuk a kis test kocsihoz viszonyított sebességét, akkor a test talajhoz viszonyított $u_1 + w$, $u_2 + w$ sebességét kapjuk.) Az adatokat figyelembe véve $w = -10 \text{ m/s}$ az első test kilövésekor:

$$13 \cdot 0 = 12u_1 + w,$$

$$u_1 = \frac{10}{12} = 0,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A második test kilövésekor:

$$12 \cdot \frac{10}{12} = 11u_2 + \left(\frac{10}{12} - 10\right),$$

$$u_2 = \frac{120 + 110}{11 \cdot 12} = 1,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A harmadik test kilövésekor:

$$11 \frac{230}{11 \cdot 12} = 10u_3 + \left(\frac{230}{11 \cdot 12} - 10 \right),$$

$$u_3 = 2,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

IV/67. Az impulzusmegmaradás törvényét felhasználva (IV. 37. ábra):

$$10(100, 0) = 4(200 \cos 45^\circ, 200 \sin 45^\circ) + 6(v \cos \alpha, v \sin \alpha).$$

Koordinátáként:

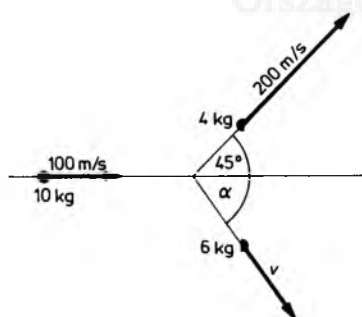
$$1000 = 800 \frac{\sqrt{2}}{2} + 6v \cos \alpha,$$

$$0 = 800 \frac{\sqrt{2}}{2} + 6v \sin \alpha.$$

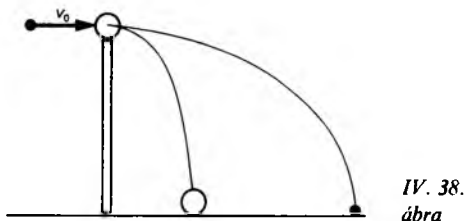
Innen

$$434,3 = 6v \cos \alpha,$$

$$565,6 = 6v \sin \alpha,$$



IV. 37.
ábra



IV. 38.
ábra

vagyis

$$72,38 = v \cos \alpha,$$

$$94,28 = v \sin \alpha.$$

A két utóbbi egyenletből:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,3; \quad \alpha = 52,5^\circ,$$

$$v = 118,8 \text{ m/s}.$$

IV/68. Az impulzusmegmaradás törvénye érvényes a két test kölcsönhatására:

$$2 \cdot 0 + 0,02 \cdot 200 = 2u_1 + 0,02u_2.$$

Nilvánvaló, hogy a két test egyszerre ér földet (IV. 38. ábra):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{1,2} = 1,095 \text{ s}$$

idő alatt. Ez idő alatt a lövedék vízszintesen mérve 90 m-t tesz meg, így

$$u_2 = \frac{90}{1,095} = 82,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A golyó sebessége azután, hogy a lövedék átfúródik rajta: $u_1 = 1,18 \text{ m/s}$. A vízszintes elmozdulása $t = 1,095 \text{ s}$ alatt:

$$1,095 \cdot 1,18 = 1,3 \text{ m}.$$

V. Feladatcsoport: munkatétel, energiamérleg

V/1. Newton II. törvénye:

$$F - mg = ma = 0.$$

A testen végzett munka:

$$W_1 = Fs \cos 0^\circ,$$

az előző egyenlet felhasználásával:

$$W_1 = mgs \cos 0^\circ = mgs.$$

A nehézségi erő munkája:

$$W_2 = mgs \cos 180^\circ = -mgs.$$

A teljesítmény:

$$P_1 = Fv = mgv = \frac{mgs}{t}.$$

Adatokkal: $W_1 = 40 \text{ J}$, $W_2 = -40 \text{ J}$, $P_1 = 50 \text{ W}$.

V/2. Newton II. törvénye:

$$F - mg = ma. \quad (1)$$

A mozgást kinematikailag az

$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t, \quad (2)$$

$$v = at + v_0 \quad (3)$$

egyenlőségek jellemzik. A nehézségi erő munkája:

$$W_1 = -mgs, \quad (4)$$

az általunk kifejtett erő munkája:

$$W_2 = Fs. \quad (5)$$

A (2) egyenlőségéből $a = 5,5 \text{ m/s}^2$, az (1) alapján $F = 2(5,5 + 10) = 31 \text{ N}$, így $W_1 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ J}$, $W_2 = 31 \cdot 2 = 62 \text{ J}$. A (3) egyenlőségéből a végsebesség $v(0,8) = 4,7 \text{ m/s}$. A nehézségi erő, illetve az emelőerő teljesítménye (V. 1. ábra):

$$\begin{aligned} P_1 &= -mgv = \\ &= -20(5,5t + 0,3) = -110t + 6, \end{aligned}$$

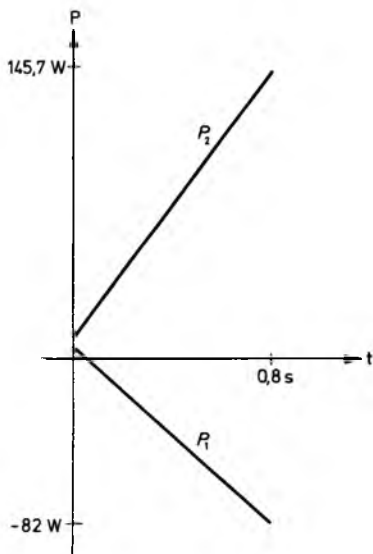
$$\begin{aligned} P_2 &= Fv = \\ &= 31(5,5t + 0,3) = 170,5t + 9,3. \end{aligned}$$

A nehézségi erő teljesítménye a mozgás végén -82 watt , az emelőerő teljesítménye az utolsó pillanatban $145,7 \text{ watt}$.

V/3. A három erő munkája:

1. A munkát úgy számítjuk, hogy az erővektor koordinátáit megszorozzuk az elmozdulásvektor megfelelő koordinátaival, és az így kapott szorzatokat összegezzük. Az $mgs \sin \alpha \cdot s$ -ben a $\sin \alpha$ felfogható úgy is, mint a nehézségi erő és az elmozdulás közötti szög koszinusza:

$$\begin{aligned} W_G &= (mg \sin \alpha, -mg \cos \alpha) (s, 0) = \\ &= mgs \sin \alpha \cdot s. \end{aligned}$$



V. 1.
ábra

2. $W_N = (0, N)(s, 0) = 0$.

Ez abból is látszik, hogy a nyomóerő merőleges a lejtőre.

3. $W_S = (-\mu mg \cos \alpha, 0)(s, 0) = -\mu mg \cos \alpha \cdot s$.

Itt a negatív előjel úgy is felfogható, mint a súrlódási erő és az elmozdulás közötti szög koszinuszainak a kifejezése. Adatokkal:

$$W_G = 20 \text{ J}, W_N = 0, W_S = -7 \text{ J}.$$

V/4. A lejtőn fölfelé mozgó test gyorsulása lefelé mutat; $a = 6,73 \text{ m/s}^2$. A test elmozdulása:

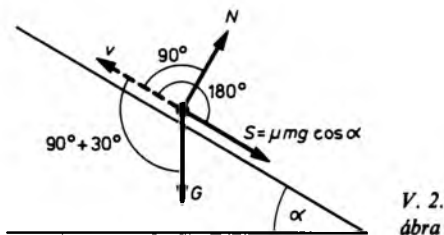
$$x = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t,$$

és sebessége:

$$v = at + v_0.$$

Innen

$$t = \frac{-1 - (-3)}{6,73} = 0,3 \text{ s}.$$



V. 2.
ábra

Az elmozdulás: $x = -0,6 \text{ m}$. A nehézségi erő munkája (V. 2. ábra):

$$W_G = mg \sin \alpha \cdot s(-1) = -20 \text{ J},$$

ahol $s = |x|$. Másként is felfoghatjuk:

$$W_G = mgs \cos(90^\circ + 30^\circ) = -20 \text{ J}.$$

A súrlódási erő munkája:

$$W_S = \mu mg \cos \alpha \cdot s(-1) = -3,46 \text{ J}.$$

A nyomóerő munkája nulla.

V/5. Newton II. törvénye:

$$F = ma.$$

A teljesítmény:

$$P = Fv,$$

így

$$P = ma \cdot v = ma \cdot a \cdot t = ma^2 t.$$

A gyorsulás

$$a = \frac{30}{10} = 3 \text{ m/s}^2,$$

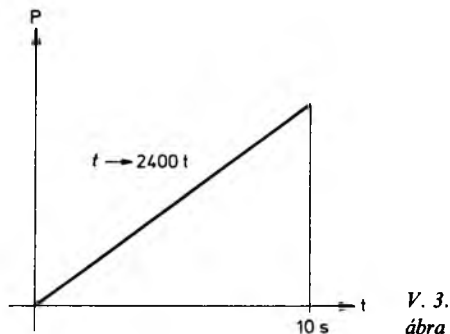
tehát

$$P = 2400 \text{ t}$$

(V. 3. ábra). Az átlagteljesítmény:

$$\bar{P} = \frac{2400 \cdot 10}{2} = 12 \text{ kW}.$$

V/6. Az emelkedés maximális magassága h_0 . A mozgási energia megváltozása a



V. 3.
ábra

nehézségi erő munkájával egyenlő:

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh_0,$$

tehát

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 80 \text{ m}.$$

Alkalmazzuk újra a munkatételt:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh.$$

Innen

$$v^2 - v_0^2 = -2gh,$$

$$h = \frac{25^2 - 40^2}{-20} = 48,75 \text{ m},$$

és végül, harmadszorra is:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh_1,$$

tehát $v_1 = 37,4 \text{ m/s}$.

V/7. A munkatételt alkalmazzuk. A test mozgási energiájának a megváltozása egyenlő a nehézségi erő munkájával:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg(40 - 30),$$

tehát $v = 14,14 \text{ m/s}$. A másik kérdésre vála-

szolva:

$$\frac{1}{2}m \cdot 20^2 - 0 = mg(40 - h),$$

tehát $h = 20 \text{ m}$. Másként is okoskodhatunk: a test helyzeti és mozgási energiájának összege a mechanikai energia. A mechanikai energia megváltozása nulla, hiszen a testre nem hat (a nehézségi erő mellett más) erő. Így

$$mgh_0 + 0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2.$$

A számolás ugyanúgy keresztülvihető, mint az előbb.

V/8. Alkalmazzuk a munkatételt:

$$\text{a) } \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgs_1,$$

innen $s_1 = 50 \text{ m}$.

$$\text{b) } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgs_2,$$

és így $s_2 = 48 \text{ m}$.

V/9. A munkatétel:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W - \mu mgs.$$

Innen $W = 131 \text{ J}$.

V/10. A munkatétel a fába megállásig befűrődő golyóra:

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -F \cdot 0,15,$$

és 5 cm mélységben:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -F \cdot 0,05.$$

Itt F a fa által kifejtett fékezőerőt jelenti. Világos, hogy

$$\frac{v_0^2 - v^2}{v_0^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

és

$$v^2 = \frac{2}{3} v_0^2,$$

tehát

$$v = 408,2 \text{ m/s}.$$

V/11. A munkatételt írjuk fel a fölfelé mozgásra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \\ = -\mu m g \cos \alpha \cdot s - m g \sin \alpha \cdot s, \end{aligned}$$

és a lefelé mozgásra is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \\ = m g \sin \alpha \cdot s - \mu m g \cos \alpha \cdot s. \end{aligned}$$

Innen, a két egyenlőséget rendezve és egymással osztva:

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\operatorname{tg} \alpha + \mu}.$$

Behelyettesítve:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \mu}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \mu}, \quad \mu = 0,46.$$

V/12. A munkatételt alkalmazzuk. A súrlódási erő munkája a két szakaszon a helyzeti energia csökkenésével egyenlő, hiszen a kezdeti és a végső mozgási energia nulla:

$$\begin{aligned} -m g \sin \alpha \cdot (l_1 + l_2) = \\ = -\mu_1 m g \cos \alpha \cdot l_1 - \mu_2 m g \cos \alpha \cdot l_2. \end{aligned}$$

Osszuk el az egyenlőséget $m g \cos \alpha \cdot l_2$ -vel,

és szorozzuk meg (-1) -gyel:

$$\operatorname{tg} \alpha \left(\frac{l_1}{l_2} + 1 \right) = \frac{\mu_1 l_1}{2} + \mu_2,$$

$$(\operatorname{tg} \alpha - \mu_1) \frac{l_1}{l_2} = \mu_2 - \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\mu_2 - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu_1} = 0,59.$$

V/13. A lefelé mozgó autó nem gyorsul:

$$m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha = 0.$$

Ha az autó fölfelé mozog, akkor

$$F - m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha = 0,$$

hiszen most sem gyorsul az autó. (Itt F a motor által kifejtett húzóerőt jelenti.) Vonzuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$F - 2m g \sin \alpha = 0.$$

A motor teljesítménye:

$$P = F v = 2m g \sin \alpha \cdot v = 33400 \text{ W}.$$

V/14. Legyen az autó által kifejtett húzóerő F_1 , ha az autó fölfelé megy. Ekkor

$$F - \mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha = 0.$$

Ha az autó lefelé megy, akkor az autó által kifejtett húzóerőt F_2 -fel jelölve:

$$F_2 + m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha = 0.$$

Mivel a feltétel miatt

$$F_1 v_1 = F_2 v_2,$$

ezért

$$\begin{aligned} (\mu m g \cos \alpha + m g \sin \alpha) v_1 = \\ = (\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha) v_2, \end{aligned}$$

és innen $-m g \cos \alpha$ -val osztva —

$$(\mu + \operatorname{tg} \alpha) v_1 = (\mu - \operatorname{tg} \alpha) v_2.$$

Ebből kifejezzük μ -t:

$$\mu = \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} \operatorname{tg} \alpha,$$

és behelyettesítünk:

$$\mu = 0,35.$$

Ha sík úton halad, akkor a húzóerő:

$$F_3 = \mu mg.$$

A teljesítmény:

$$p = \mu mgv,$$

de a motor teljesítménye változatlan:

$$\mu mgv = (\mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha) v_1.$$

Ebből

$$v = \frac{(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) v_1}{\mu}.$$

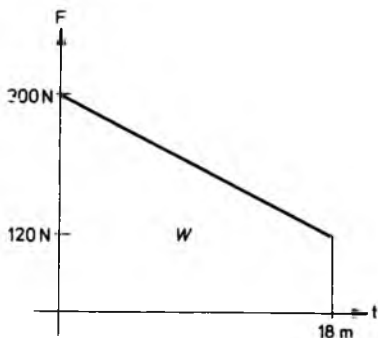
Az adatokkal:

$$v = \frac{(0,35 \cos 5^\circ + \sin 5^\circ) 15}{0,35}.$$

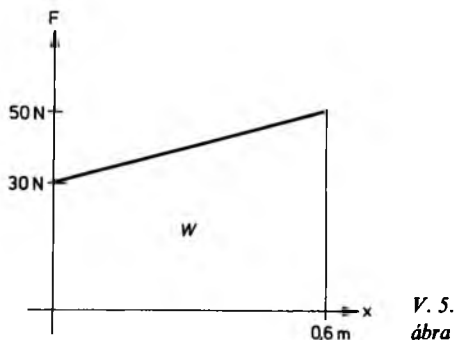
Innen $v = 18,68 \text{ m/s}$.

V/15. A munka megegyezik az erő-elmozdulás grafikon alatti területtel (V. 4. ábra):

$$W = \frac{300 + 120}{2} 18 = 3780 \text{ J}.$$



V. 4. ábra



V. 5. ábra

V/16. Ha a test x -szel elmozdul, akkor

$$F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g = 0,$$

ahol $m_1 + m_2 = m = 10 \text{ kg}$, és $m_2/m = x/l$ tehát

$$m_1 = m - m \frac{x}{l} = m \left(1 - \frac{x}{l} \right),$$

$$m_2 = m \frac{x}{l} = \frac{10x}{0,6}.$$

Így

$$F = \mu_1 mg \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \mu_2 mg \frac{x}{l}.$$

Innen látszik, hogy az $F(x)$ függvény grafikonja egyenes (V. 5. ábra). Ha $x=0$, akkor

$$F = \mu_1 mg = 30 \text{ N},$$

ha $x=l$, akkor

$$F = \mu_2 mg = 50 \text{ N}.$$

A végzett munka:

$$W = \frac{50 + 30}{2} 0,6 = 24 \text{ J}.$$

V/17. A munkatételt alkalmazzuk először az első testre az ütközésig. Ezután leírjuk az ütközés folyamatát, és majd is-

mét a munkatételt alkalmazzuk, az a) esetben a második test mozgására, a b) esetben az első test mozgásának második szakaszára (V. 6. ábra):

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s, \quad (1)$$

ahol v_1 az első test ütközés előtti sebessége. Az ütközés folyamatát leíró egyenletek:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (2)$$

$$-v_1 = u_1 - u_2. \quad (3)$$

Az a) esetben:

$$\frac{1}{2} m_2 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = -\mu m_2 g s, \quad (4)$$

a b) esetben pedig

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = -\mu m_1 g s. \quad (5)$$

Az a) eset megoldása az (1), (2), (3), (4), a b) eset megoldása az (1), (2), (3), (5) egyenletrendszerből adódik. A megoldás menete az a) esetben: (4)-ből meghatározzuk u_2 -t ($u_2 = \sqrt{2}$ m/s), (2)-ből és (3)-ból kiküszöböljük u_1 -et, és kiszámoljuk v_1 -et ($v_1 = 1,23$ m/s); és ezt helyettesítjük (1)-be, így $v_0 = 1,87$ m/s. A b) esetben teljesen hason-

lón okoskodunk; itt $v_0 = \sqrt{100}$ m/s = 10 m/s.

V/18. Az m_1 tömegű test v_1 sebességgel érkezik az m_2 tömegű testhez, ezt a sebességet a munkatételből határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 v^2 - 0 &= \\ &= m_2 g \sin \alpha \cdot s - \mu_2 m_2 g \cos \alpha \cdot s. \end{aligned} \quad (1)$$

A tökéletesen rugalmas ütközésre:

$$m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (2)$$

$$u_1 - u_2 = v_2. \quad (3)$$

Az (1) egyenlőségből $v_2 = 5$ m/s (kerekítve). A (2), (3) egyenletrendszer alapján $u_1 = 10/3 = 3,3$ m/s, és $u_2 = -5/3 = -1,6$ m/s. Az első test lefelé kezd mozogni 3,3 m/s kezdősebességgel. Ha s_1 úton áll meg, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 &= \\ &= m_2 g \sin \alpha \cdot s_1 - \mu_1 m_1 g \cos \alpha \cdot s_1, \end{aligned} \quad (4)$$

és így $s_1 = 5,24$ m. A második test fölfelé kezd mozogni, ha s_1 úton áll meg, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 &= \\ &= -m_2 g \sin \alpha \cdot s_2 - \mu_2 m_2 g \cos \alpha \cdot s_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Innen $s_2 = 0,24$ m.

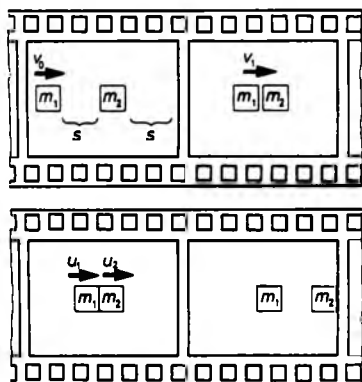
V/19. Az m_2 tömegű test v_2 sebességgel rendelkezik az ütközés előtt, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 &= \\ &= m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha. \end{aligned}$$

Innen $v_2 = 5$ m/s (kerekítve). Az ütközés tökéletesen rugalmatlan:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

tehát $u = 5/3$ m/s. A két test összetapadva



V. 6.
ábra

lefelé mozog. Együttes tömegüket jelöljük M -mel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \cdot 0^2 - \frac{1}{2} M u^2 &= \\ &= M g \sin \alpha \cdot s - \mu_1 m_1 g \cos \alpha \cdot s - \\ &- \mu_2 m_2 g \cos \alpha \cdot s. \end{aligned}$$

Ennek alapján:

$$s = 1,3 \text{ m}.$$

Ennyi utat tesz meg a két összetapadt test lefelé a lejtőn.

V/20. A feladat három részből áll.

1. A kitérített inga mozgása, erre a munkatételt írjuk fel:

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g l = 0. \quad (1)$$

$$\text{ebből } v = \sqrt{2gl} = \sqrt{20} \text{ m/s}.$$

2. A rugalmas ütközésre az impulzus- és az energiamérleget írjuk fel:

$$m v = m u + m_1 u_1, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2. \quad (3)$$

A (3) egyenlet helyett szerepelhetne az $u - u_1 = -v$ egyenlőség is. A (2) és a (3) alapján

$$u_1 = \frac{2\sqrt{20}}{3} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3. Ezután — ha a test s úton áll meg —

$$0 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = -\mu m_1 g s,$$

és innen

$$s = 2,2 \text{ m}.$$

Ha $m_1 = m$, akkor $u_1 = v = \sqrt{20} \text{ m/s}$, és $s = 5 \text{ m}$.

V/21. A mozgás most is három szakaszból áll:

1. A mozgás első részére a munkatétel:

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g l = 0,$$

$$\text{innen } v = \sqrt{2gl} = \sqrt{20} \text{ m/s}.$$

2. Az ütközés rugalmas, ezért

$$m v = m u + m_1 u_1,$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2,$$

és ebből:

$$u_1 = \frac{2\sqrt{20}}{3} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3. A mozgás harmadik szakasza vízszintes hajítás:

$$x = u_1 t,$$

$$h = \frac{g}{2} t^2.$$

Innen $t = 0,49 \text{ s}$, és $x = 1,47 \text{ m}$.

V/22. A mozgás első szakaszára az energiamérleget alkalmazzuk:

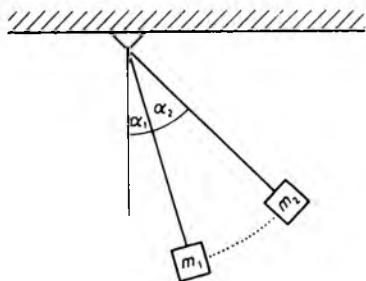
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - m_1 g l = 0.$$

Innen $v_1 = \sqrt{2gl} = \sqrt{20} \text{ m/s}$. Az ütközés rugalmas, ezért

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Ebből $u_1 = \sqrt{20}/3 \approx 1,5 \text{ m/s}$, $u_2 = 4\sqrt{20}/3 \approx 6 \text{ m/s}$. (Ez azt jelenti, hogy az ütközés után mindkét test „jobbra” lendül ki.) Az egyik test α_1 , a másik α_2 szöggel tér ki (V. 7. ábra), ekkor



V. 7.
ábra

$$0 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = -m_1 g(l - l \cos \alpha_1),$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = -m_2 g(l - l \cos \alpha_2),$$

hiszen a nehézségi erő $s_1 = l - l \cos \alpha_1$ és $s_2 = l - l \cos \alpha_2$ úton végez munkát. Innen $\alpha_1 = 27,45^\circ$, $\alpha_2 = 140,3^\circ$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az m_2 tömegű test beleütközik a „plafonba”.

V/23. A két test ütközése rugalmatlan:

$$mv = (m + M)u.$$

A két test együttes mozgására alkalmazzuk az energiamérleget. A mechanikai energia állandó. Legyen a helyzeti energia nulla szintje a felfüggesztési ponton átmenő sík, ekkor

$$\frac{1}{2} (m + M)u^2 - (m + M)gl =$$

$$= -(m + M)gl \cos \alpha.$$

Innen

$$u^2 = 2gl(1 - \cos \alpha),$$

$$u = 1,167.$$

Az impulzusmérleg alapján $v = 24,5$ m/s.

V/24. Az inga mozgására az energiamérleget írjuk fel:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgl.$$

(1)

Az ütközést leíró egyenletek:

$$mv = mu_1 + 2mu, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mu_1^2 + \frac{1}{2} 2mu^2. \quad (3)$$

Az ütközés után a $2m$ tömegű test u kezdősebességgel csúszni kezd a kocsin (V. 8. ábra). A sebessége lecsökken w -re, a kocsi sebessége nulláról megnő w -re. Eközben — t idő alatt — a test l -lel hosszabb utat tesz meg, mint a kocsi, tehát

$$2mu = (2m + 3m)w, \quad (4)$$

és

$$l = \frac{ut}{2}. \quad (5)$$

A kocsi gyorsulása:

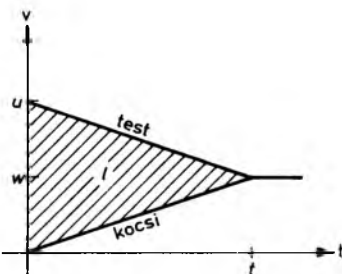
$$a_k = \frac{w}{t}. \quad (6)$$

Newton II. törvénye alapján pedig

$$\mu \cdot 2mg = 3ma_k. \quad (7)$$

Az (1)–(7) egyenletrendszerből kiküszöböljük a „felesleges” ismeretleneket. A megoldás stratégiája a következő: Az (5) és (6) egyenletekből kiejtjük a t -t, majd w -t helyettesítjük (4)-be. Ekkor a következőt kapjuk:

$$2a_k l = uw = 0,4u^2,$$



V. 8.
ábra

vagyis

$$u^2 = 5a_k l.$$

A (2) egyenletből u_1 -et behelyettesítjük (3)-ba:

$$v^2 = (v - 2u)^2 + 2u^2.$$

Innen $4uv = 6u^2$, illetve $4v = 6u$. Emeljük ezt az egyenlőséget négyzetre, majd helyettesítsük be (1)-ből v^2 -et, és az $u^2 = 5a_k l$ -et:

$$32gl = 180a_k l.$$

Vegyük figyelembe a (7) egyenlőséget:

$$32g = 120\mu g,$$

innen

$$\mu = \frac{32}{120} = 0,26.$$

V/25. A mechanikai energia megválto-

zása egyenlő a testre ható közegellenállási erő munkájával:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \right) = w_{\text{közeg}},$$

behelyettesítve:

$$\frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 5^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 100^2 + 150 \cdot 10 \cdot 1000 \right) = w_{\text{közeg}},$$

$$w_{\text{közeg}} = -2248125 \text{ J}.$$

Megjegyzések:

1. Természetesen nincs jelentősége annak, hogy a kezdősebesség vízszintes. Bármilyen irányú lehetne. Az energiának ugyanis nincs iránya.
2. A munka negatív: a test mechanikai energiája csökken.

VI. Feladatcsoport: a körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás dinamikája

VI/1. Legyen a helyzeti energia nulla szintje a fonál felfüggesztési pontjában. Ekkor az energiamérleg:

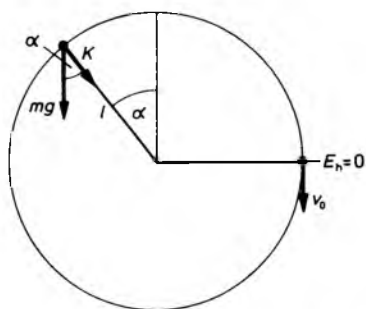
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl \cos \alpha, \quad (1)$$

ahol α a függőlegessel bezárt szög (VI. 1. ábra). A bal oldalon az indulási helyzetre jellemző energia, a jobb oldalon a függőlegessel α szöget bezáró helyzetre jellemző energia szerepel. Ebben a helyzetben a testre ható erők sugár irányú összetevőinek az eredője:

$$K + mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l}. \quad (2)$$

Amikor $\alpha = 0$, a kötélmeglazul, $K = 0$. Tehát a (2)-ből

$$lmg \cos \alpha = mv^2.$$



VI. 1.
ábra

Ezt 2-vel osztva, és (1)-be helyettesítve:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgl \cos \alpha + mgl \cos \alpha,$$

$$v_0^2 = 3mgl \cos \alpha,$$

$$v_0 = \sqrt{15} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ebben a helyzetben a test sebessége

$$v = \sqrt{lg \cos \alpha} = \sqrt{5} \text{ m/s}.$$

Ekkor a fonál meglazul, és a test a vízszintessel $\alpha = 60^\circ$ -os szöget bezáró irányban elhajított testként mozog; a kezdősebessége 5 m/s. A hajítás maximális emelkedési magassága az elhajítás helyétől mérve:

$$\frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha = 0,1875 \text{ m},$$

vagyis a kör középpontja fölé

$$l \cos \alpha + \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha = 0,6875 \text{ m}$$

magasra emelkedik a test. Induláskor a kötélerő — Newton II. törvénye alapján — :

$$K_0 = m \frac{v_0^2}{l} = 15 \text{ N}.$$

VI/2. A test mechanikai energiája állandó; az indulási helyzetben, és a pálya csúcán megegyezik:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl. \quad (1)$$

A legfelső helyzetre vonatkozó Newton-törvény (VI. 2. ábra):

$$K + mg = m \frac{v^2}{l}.$$

Az, hogy éppen körpályát ír le, azt jelenti, hogy a körpálya legmagasabb pontján $K=0$, tehát

$$v = \sqrt{lg} = \sqrt{10} \text{ m/s},$$

ezt (1)-be helyettesítve:

$$v_0^2 = gl + 2gl = 3gl,$$

$$v_0 = \sqrt{30} \text{ m/s}.$$

A kötélrő a legmagasabb pontban nulla, a centripetális erőt a nehézségi erő biztosítja. A legalsó pontban

$$K_L - mg = \frac{mv_L^2}{l},$$

és

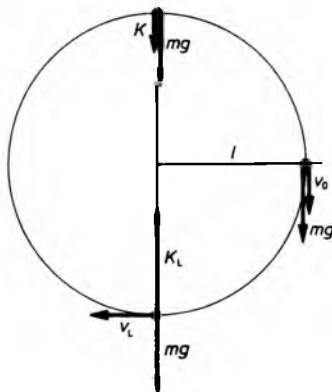
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_L^2 + mg(-l)$$

alapján egyrészt $v_L = \sqrt{50} \text{ m/s}$, másrészt $K_L = 60 \text{ N}$. A fonál vízszintes helyzetében a kötélrő biztosítja a centripetális erőt:

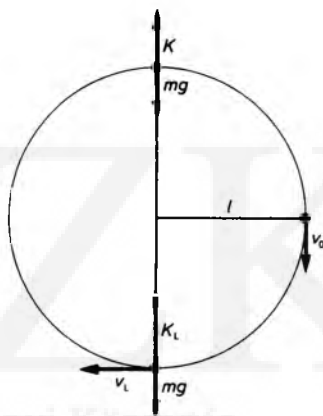
$$K_0 = \frac{mv_0^2}{l} = 30 \text{ N}.$$

VI/3. A rúd végén mozgó test éppen átlendül a felső holtpontra, akkor ott a sebessége nulla (VI. 3. ábra):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl.$$



VI. 2.
ábra



VI. 3.
ábra

Innen $v_0 = \sqrt{2gl} = \sqrt{20} \text{ m/s}$. A legfelső pontban a testre ható erők eredője nulla, hiszen a centripetális gyorsulás nulla:

$$mg + K_F = 0,$$

tehát

$$K_F = -10 \text{ N}.$$

Az alsó pontban a sebesség az

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_L^2 + mg(-l)$$

energiamérleg alapján $v_L = \sqrt{40} \text{ m/s}$.

Így alul

$$K_L - mg = \frac{mv_L^2}{l},$$

$$K_L = 50 \text{ N}.$$

VI/4. A rúd addig lendül a kör közép-pontján átmenő vízszintes sík fölé (VI. 4. ábra), amíg a mozgási energia el nem fogy:

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgl \cos \alpha,$$

innen

$$\cos \alpha = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4},$$

tehát $\alpha = 41,4^\circ$. A test a helyzeti energia nulla szintje fölé

$$l \cos \alpha = \frac{3}{4} l = 0,75 \text{ m}$$

magasra emelkedik. Amikor a test elindul, a rúd a középpont felé mutató centripetális erőt fejt ki:

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{l} = 15 \text{ N}.$$

Amikor a test megáll, a centripetális erő már nulla:

$$mg \cos \alpha + K_1 = 0,$$

így

$$K_1 = -mg \cos \alpha = -7,5 \text{ N}.$$

A rúd sugár irányában kifelé mutató erőt fejt ki a testre.

VI/5. Az energiamérleg:

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + mgl \cos \alpha,$$

itt a jobb oldalon a mozgási és a helyzeti energia összege szerepel, amikor a test helyzeti energia nulla szintje felett van, és a függőlegessel α szöget zár be. Newton II. törvénye erre a helyzetre (VI. 5. ábra):

$$K + mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{l}.$$

Ha a fonál meglazul, akkor $K=0$, tehát

$$lmg \cos \alpha = mv^2,$$

és így

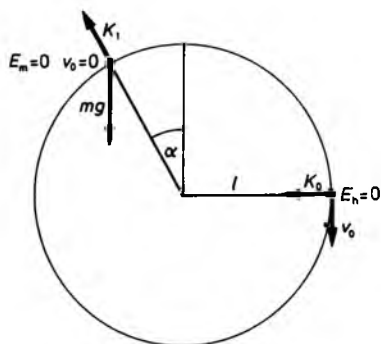
$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mgl \cos \alpha + mgl \cos \alpha.$$

Egyszerűsítve, behelyettesítve:

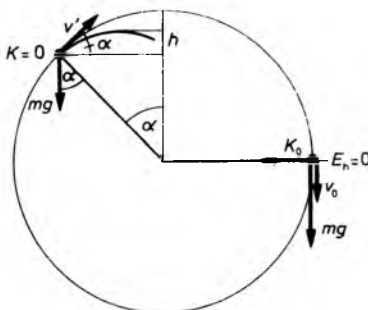
$$v_0^2 = 3gl \cos \alpha,$$

tehát

$$\cos \alpha = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,66.$$



VI. 4.
ábra



VI. 5.
ábra

Innen $\alpha = 48,18^\circ$. A fonál $48,18^\circ$ szöget zár be a függőlegessel, amikor megfeszül. Ekkor a test a kör közepe felett $l \cos \alpha = 0,66 \text{ m}$ magasan van, és ferde (α szögű, $v = \sqrt{gl \cos \alpha} = \sqrt{20/3} = 2,58 \text{ m/s}$ sebességgű) hajítással folytatja az útját. A kör középe fölé összesen

$$l \cos \alpha + \frac{gl \cos \alpha}{2g} \sin^2 \alpha = 0,85 \text{ m}$$

magasra emelkedik. A kötélerő induláskor:

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{l} = 20 \text{ N}.$$

VI/6. Legyen a helyzeti energia nulla szintje (most is) a kör középpontján átmenő vízszintes síkon. Ekkor az energiamérleg — a VI. 6. ábra szerint —

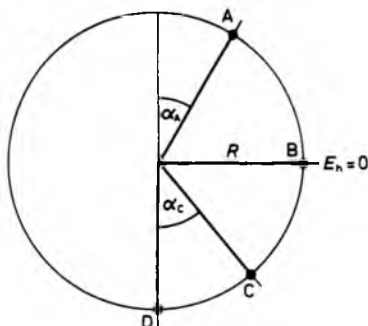
$$\frac{1}{2} mv_A^2 + mgR \cos \alpha_A = \frac{1}{2} mv_B^2 + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} mv_C^2 - mgR \cos \alpha_C =$$

$$= \frac{1}{2} mv_D^2 - mgR.$$

Innen

$$v_B = 4,61 \text{ m/s}, v_C = 5,95 \text{ m/s}, v_D = 6,42 \text{ m/s}.$$



VI. 6.
ábra

A test centripetális gyorsulását a K kényszererő és a nehézségi erő sugár irányú összetevőjének az összege szolgáltatja:

$$K + mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Az A pontban ($\alpha = 30^\circ$, $v = 2 \text{ m/s}$, tehát $K_A = -4,6 \text{ N}$, a kényszererő a pálya külső oldala felé mutat. A B pontban ($\alpha = 90^\circ$, $v = 4,61 \text{ m/s}$) $K_B = 21,25 \text{ N}$. Az erő most már befelé mutat. A C pontban ($\alpha = 135^\circ$, $v = 5,95 \text{ m/s}$) $K_C = 42,47 \text{ N}$, és végül a D pontban ($\alpha = 180^\circ$, $v = 6,42 \text{ m/s}$), $K_D = 51,21 \text{ N}$.

VI/7. Ha a tömegpont $R\pi/4$ méter utat tett meg, akkor a gömb középpontjából induló helyvektorra

$$\alpha = \frac{\frac{R\pi}{4}}{R} = \frac{\pi}{4}$$

(radiánban mért) szöggel, vagyis 45° -kal fordult el. Ebben a helyzetben v sebességgel mozog a pont, ezért

$$mg \cos \alpha - K = \frac{mv^2}{R},$$

és

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgR \cos \alpha = mgR.$$

Innen

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \alpha),$$

és

$$K = mg \cos \alpha - \frac{2mgR(1 - \cos \alpha)}{R},$$

tehát

$$K = 3mg \cos \alpha - 2mg = mg(3 \cos \alpha - 2).$$

Behelyettesítve:

$$v = \sqrt{20(1 - \sqrt{2}/2)} = 2,42 \text{ m/s},$$

$$K = 1,21 \text{ N}.$$

A test akkor válik el a gömbtől, amikor $K=0$, azaz $3 \cos \alpha - 2 = 0$. Innen $\cos \alpha = 2/3$, tehát $\alpha = 0,841$ (radiánban). Ekkor $s = R\alpha = 0,841 \text{ m}$. Ennyi utat tesz meg, amíg elválnak a gömbtől.

VI/8. A test lényegében ugyanúgy mozog, mint egy $R=1 \text{ m}$ hosszú, egyik végén rögzített kötél (VI. 7. ábra). A félgömb pereméről indítva a testet, a sebessége még nulla, így a centripetális gyorsulása is, a tangenciális gyorsulása pedig megegyezik g -vel. Kezdetben a test és a fal között nem lép fel erő. A legelső helyzetben a sebesség a munkatételből határozható meg:

$$0 = \frac{mv^2}{2} - mgR,$$

tehát $v_L = \sqrt{2gR} = \sqrt{20} \text{ m/s}$. Itt a testre ható erők eredője:

$$K_L - mg = \frac{mv^2}{R}.$$

Innen $K_L = 30 \text{ N}$. Az $R\pi/3$ útnak $\pi/3$ (radiánban mért) szög felel meg, ez azt jelenti, hogy $\alpha = 60^\circ$ -os helyzetig mozdult el, amíg megtett $R\pi/3$ utat. Erre a helyzetre New-

ton II. törvénye:

$$K_1 - mg \cos 30^\circ = \frac{mv^2}{R},$$

és a sebességet az energiámérlegből határozzuk meg:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgR \cos 30^\circ,$$

$$v = 4,16 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$K_1 = 3mg \cos 30^\circ \approx 26 \text{ N}.$$

A szögsebesség $\omega = v/R$, a szöggyorsulás $\beta = a/R$, ahol a az érintő irányú gyorsulás. Induláskor $\omega_0 = 0 \text{ 1/s}$, $\beta_0 = g/R = 10 \text{ 1/s}^2$, legalul $\omega_L = \sqrt{20}/1 \text{ 1/s}$, és mert az érintő irányú gyorsulás lent nulla, $\beta_L = 0 \text{ 1/s}^2$, végül a közbülső ($\alpha = 30^\circ$ -hoz tartozó) helyzetben $\omega_1 = 4,16/1 = 4,16 \text{ 1/s}$, és $\beta_1 = 5/1 = 5 \text{ 1/s}^2$, mert az érintő irányú gyorsulás $g \sin 30^\circ = 5 \text{ m/s}^2$.

VI/9. Newton II. törvénye a pálya tetején mozgó testre:

$$mg + K_F = m \frac{v^2}{R},$$

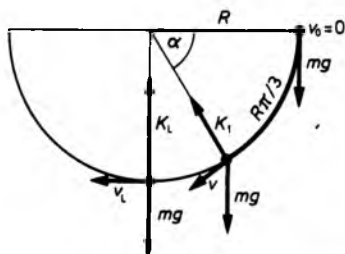
a pálya alján pedig

$$K_L - mg = m \frac{v^2}{R}.$$

Innen $K_F = 2400 \text{ N}$, és $K_L = 4000 \text{ N}$. A gyorsulása a pálya minden pontján (!) $v^2/R = 40 \text{ m/s}^2$, és állandóan a körpálya középpontja felé mutat. (A pilótára ható kényszererő a pálya felső pontján háromszorosa, a pálya alsó pontján ötszöröse a pilótára ható nehézségi erőnek.)

VI/10. Az autóra ható erők eredője ma -val egyenlő:

$$mg - K = m \frac{v^2}{R}.$$



VI. 7.
ábra

Amíg az autó az úttesten van, $K > 0$, tehát

$$\frac{mv^2}{R} < mg,$$

és így

$$v < \sqrt{gR} = \sqrt{1000} = 31,6 \text{ m/s} = 114 \text{ km/h}.$$

114 km/h sebességnél gyorsabban nem mehet az autó a híd tetején.

VI/11. Tegyük fel, hogy a test feljut a pálya legmagasabb pontjára. Ez azt jelenti, hogy itt valamilyen v sebességgel mozog. Ezt a sebességet a munkatételből határozzuk meg:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 2R.$$

Innen $v = \sqrt{2g(h - 2R)} = 10 \text{ m/s}$. Írjuk fel Newton II. törvényét a körpálya legfelső pontján mozgó testre:

$$K + mg = \frac{mv^2}{R}.$$

Innen $K = 10 \text{ N}$. Mivel $K > 0$, a test valóban végighalad a körpályán.

VI/12. Newton II. törvénye:

$$S = mr\omega^2,$$

mivel a testet a súrlódási erő tartja a körpályán. A tapadás feltétele:

$$S \leq \mu N = \mu mg,$$

így

$$mr\omega^2 \leq \mu mg,$$

tehát

$$\frac{r\omega^2}{g} \leq \mu,$$

azaz

$$0,12 \leq \mu.$$

VI/13. Newton II. törvénye:

$$S = m \frac{v^2}{R},$$

és a tapadás feltétele:

$$S \leq \mu mg,$$

így

$$v \leq 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

VI/14. Az autó tömege $m = 1000 \text{ kg}$. Newton II. törvénye az erők vízszintes és függőleges komponenseire:

$$N \sin \alpha + S \cos \alpha = m \frac{v^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - S \sin \alpha - mg = 0.$$

A két egyenletben két ismeretlen van, fejezzük ki ezeket és helyettesítsük be az adatokat:

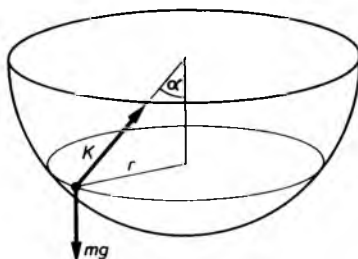
$$N = m \frac{v^2}{R} \sin \alpha + mg \cos \alpha = 11411 \text{ N},$$

$$S = \frac{mv^2}{R} \cos \alpha - mg \sin \alpha = 7127 \text{ N}.$$

A tapadás feltétele: $S \leq \mu N$ teljesül, hiszen $\mu N = 10270 \text{ N} \geq 7127 \text{ N}$.

VI/15. A feladatot három lépésben oldjuk meg.

1. Newton II. törvénye az erő függőle-



VI. 8.
ábra

ges és vízszintes komponenseire (VI. 8. ábra):

$$N \cos \alpha - mg = 0,$$

$$N \sin \alpha = m r \omega^2,$$

$$r = R \sin \alpha.$$

Innen

$$N \sin \alpha = m R \sin \alpha \cdot \omega^2,$$

$$N = m R \omega^2,$$

$$m R \omega^2 \cos \alpha = mg.$$

Tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \alpha}} = \frac{2\pi}{T}.$$

Mivel

$$\sin \alpha = \frac{0,6}{1}, \quad \cos \alpha = 0,8,$$

így

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,8}} = 3,53 \frac{1}{s}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,77 \text{ s}.$$

2. $N = m R \omega^2 = 0,125 \text{ N}.$

3. A mechanikai energia megváltozása:

$$\left(\frac{1}{2} m \cdot 0^2 - mgR \right) - \left(\frac{1}{2} m v^2 - mgR \cos \alpha \right) = W_{\text{súrl.}}$$

Innen

$$W_{\text{súrl.}} = mgR(\cos \alpha - 1) -$$

$$- \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = -0,0425 \text{ J}.$$

VI/16. Newton II. törvényét a

$$K \sin \alpha = m r \omega^2,$$

$$K \cos \alpha - mg = 0$$

egyenletek fejezik ki, és érvényes az

$$r = l \sin \alpha$$

geometriai jellegű egyenlőség. Mivel

$$\cos \alpha = \frac{mg}{K} = \frac{10}{100} = 0,1,$$

innen $\alpha = 84,3^\circ$, és mert

$$K \sin \alpha = m l \sin \alpha \cdot \omega^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m l}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \frac{1}{s},$$

a periódusidő pedig

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,628 \text{ s}.$$

VI/17. A feltétel szerint

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g l \cos \alpha = 0,$$

és

$$K \sin \alpha = \frac{m v^2}{r},$$

$$K \cos \alpha = mg,$$

$$r = l \sin \alpha$$

alapján

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g l \sin \alpha}.$$

Innen v -t az energiamérlegbe helyettesítve, és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2},$$

tehát $\alpha = 54,7^\circ$. Így $v = \sqrt{2gl \cos \alpha} = 3,4 \text{ m/s}$, és mert $r = l \sin \alpha = 0,81 \text{ m}$, tehát $\omega = 4,16 \text{ 1/s}$ és a periódusidő $T = 1,5 \text{ s}$.

VI/18. Mivel $\sin \alpha = r/l = 0,1$; ezért $\sin \alpha \approx \alpha$. Ilyen esetben a kúpinga keringési ideje megegyezik az l hosszú fonálinga lengésidejével:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \text{ s}.$$

Az $r = 0,1 \text{ m}$ sugarú körpályán a sebesség:

$$v = \frac{2r\pi}{T} = 0,314 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A fonálerő függőleges összetevője a nehézségi erőt kompenzálja:

$$mg = K \cos \alpha,$$

ebből $K \approx 10 \text{ N}$.

VI/19. Newton II. törvényét a

$$K \sin \alpha = m r \omega^2,$$

$$K \cos \alpha = mg$$

egyenletekkel vesszük figyelembe. Az

$$r = d + L \sin \alpha$$

egyenlet a geometriai kapcsolatokat fejezi ki. Így $r = 1,5 + 3 \cdot 0,5 = 3 \text{ m}$. Ezért

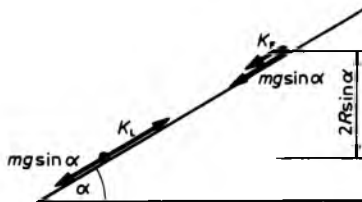
$$K \cdot 0,5 = 30 \cdot 3 \omega^2,$$

$$K \cdot 0,866 = 300.$$

A két egyenlet megoldása: $K = 346,4 \text{ N}$, és $\omega = 1,387 \text{ 1/s}$. A gyerek sebessége $v = 4,161 \text{ m/s}$.

VI/20. A pálya legfelső pontjában (VI. 9. ábra):

$$K_F + mg \sin \alpha = \frac{mv_F^2}{r}, \quad (1)$$



VI. 9. ábra

a legsó pontjában:

$$K_L - mg \sin \alpha = \frac{mv_L^2}{r}. \quad (2)$$

Az energiamérleg:

$$\frac{1}{2} mv_L^2 = \frac{1}{2} mv_F^2 + 2mgr \sin \alpha. \quad (3)$$

Az (1), (2), (3) egyenletrendszerben v_L , v_F és K_L az ismeretlen. Behelyettesítve:

$$30 + 5 = v_F^2,$$

$$K_L - 5 = v_L^2,$$

$$v_L^2 = v_F^2 + 20.$$

Innen $v_F = 5,9 \text{ m/s}$, $K_L = 60 \text{ N}$, és $v_L = 7,4 \text{ m/s}$.

Ha $s = \pi r/6$, akkor a fonál 30° -kal fordul el.

Az energiamérleg:

$$\frac{1}{2} mv^2 + mg(r - r \cos 30^\circ) \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} mv_F^2 + 2mgr \sin 30^\circ.$$

Ebből

$$v^2 = 53,66 \text{ (m/s)}^2.$$

Newton II. törvénye alapján

$$K - mg \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{mv^2}{r}$$

Ebből

$$K = 58 \text{ N}.$$

VI/21. A Newton II. törvényét kifejező egyenletek:

$$K_F + mg \sin \alpha = \frac{mv_F^2}{R},$$

$$K_L - mg \sin \alpha = \frac{mv_L^2}{R}$$

és a munkatétel:

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \left(\frac{1}{2}mv_F^2 + 2mgR \sin \alpha \right) =$$

$$= -\mu mg \cos \alpha \cdot s,$$

ahol $s = R\pi$ a félkörön megtett út. Behelyettesítve:

$$30 + 5 = v_F^2,$$

$$v_F^2 = 35 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

$$v_L^2 = v_F^2 + 4 \cdot 10 \cdot 1 \sin 30^\circ -$$

$$- 0,36 \cdot 2 \cdot 10\pi \cos 30^\circ,$$

$$v_L^2 = 35 + 20 - 19,58 = 35,4 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Így

$$K_L = mg \sin \alpha + \frac{mv_L^2}{R} = 40,41 \text{ N}.$$

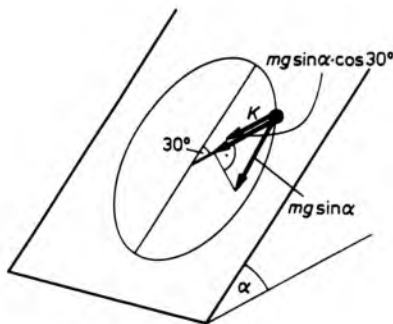
Ha $s = R\pi/6$, akkor a fonál 30° -kal fordul el. Az energiamérleg:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(R + R \cos 30^\circ) \sin 30^\circ -$$

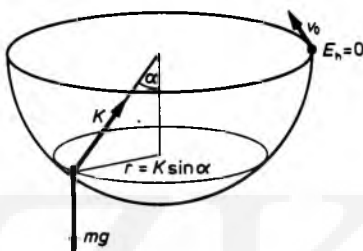
$$- \left(\frac{1}{2}mv_F^2 + 2mgR \sin 30^\circ \right) =$$

$$= -\mu mg \cos 30^\circ \cdot \frac{R\pi}{6}.$$

Innen $v = \sqrt{33} = 5,75 \text{ m/s}$. A K kötélerő mellett a nehézségi erő lejtő irányú komponensének a $\cos 30^\circ$ -szorosa biztosítja a



VI. 10. ábra



VI. 11. ábra

centripetális erőt (VI. 10. ábra):

$$K + mg \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{mv^2}{R},$$

$$K = 28,7 \text{ N}.$$

VI/22. A fonál és a test kúpingaként kering (VI. 11. ábra):

$$K \sin \alpha = \frac{mv^2}{r},$$

$$K \cos \alpha = mg,$$

innen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{rg}.$$

Másrészt az energiamérleg:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos \alpha,$$

és

$$r = L \sin \alpha.$$

Ezekből az egyenletekből:

$$\frac{1}{2} v_0^2 = gL \cos \alpha = \frac{1}{2} v^2,$$

$$v_0^2 + 2gL \cos \alpha = rg \tan \alpha,$$

$$\frac{v_0^2}{Lg} \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

$$3 \cos^2 \alpha + \frac{v_0^2}{Lg} \cos \alpha - 1 = 0.$$

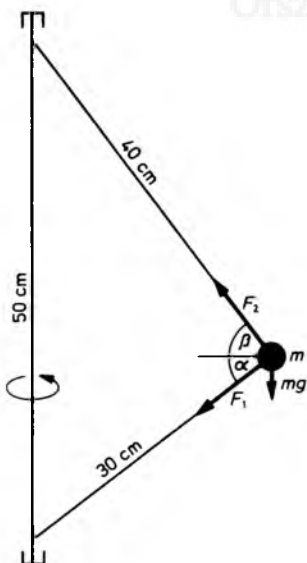
Így $\cos \alpha = 0,56$, és $\alpha = 55,8^\circ$. A keringési idő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \alpha}{g}} = 1,5 \text{ s}.$$

VI/23. Newton II. törvénye (a VI. 12. ábra alapján):

$$F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2,$$

$$-F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta - mg = 0.$$



VI. 12.
ábra

Mivel $50^2 = 30^2 + 40^2$, ezért a két fonál derékszöget alkot, és $\sin \alpha = 4/5$, $\sin \beta = 3/5$, $\cos \alpha = 3/5$, $\cos \beta = 4/5$. A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a körpálya sugara:

$$r = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,5},$$

így $r = 0,24 \text{ m}$. Behelyettesítve:

$$\frac{4}{5} + F_2 \cdot \frac{3}{5} = 0,02 \cdot 0,24 \omega^2,$$

$$-\frac{3}{5} + F_2 \cdot \frac{4}{5} = 0,2.$$

Innen

$$3F_2 + 4 = 0,024 \omega^2,$$

$$4F_2 - 3 = 1.$$

Így $F_2 = 1 \text{ N}$, $\omega = 17 \text{ 1/s}$, és $v = 0,4 \text{ m/s}$.

Az energiámérleg felírásához válasszuk meg a helyzeti energia nulla szintjét abban a pontban, ahová a felső fonalat a tengelyen rögzítettük. Ekkor

$$(0 - mgl) - \left(\frac{1}{2} mv^2 - mgl \cos \alpha \right) = W,$$

ahol $l = 0,4 \text{ m}$. Tehát

$$mgl(\cos \beta - 1) - \frac{1}{2} mv^2 = W,$$

$$W =$$

$$= 0,02 \cdot 10 \cdot 0,4 \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) - \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot 0,4^2 =$$

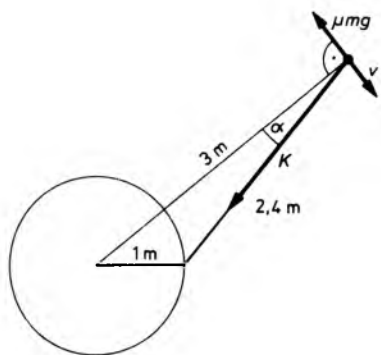
$$= -0,0176 \text{ J}.$$

VI/24. Newton II. törvénye (a VI. 13. ábra alapján):

$$K \cos \alpha = m\omega^2,$$

$$K \sin \alpha - \mu mg = 0.$$

Az α szöget a koszinusztétel segítségével



VI. 13.
ábra

határozzuk meg:

$$1^2 = 2,4^2 + 3^2 - 2 \cdot 2,4 \cdot 3 \cos \alpha,$$

így $\cos \alpha = 0,955$, és $\alpha = 17,1^\circ$. A két dinamikai egyenletből:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu g}{r \omega^2},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r \operatorname{tg} \alpha}} = 1,08 \frac{1}{s}.$$

A test sebessége:

$$v = \sqrt{\frac{r \mu g}{\operatorname{tg} \alpha}} = 3,2 \frac{m}{s}.$$

VI/25. Newton II. törvénye az érintő irányú gyorsulásra:

$$S_t = m r \beta,$$

és a centripetális gyorsulásra:

$$S_r = m r (\beta t)^2.$$

Itt S_t a súrlódási erő érintő irányú összetevője, S_r pedig a középpont felé mutató összetevő (VI. 14. ábra). A test akkor csúszik meg, amikor

$$S = \sqrt{S_t^2 + S_r^2} = \mu m g.$$

Másként

$$(m r \beta)^2 + (m r \beta^2 t^2)^2 = \mu^2 m^2 g^2.$$

Így

$$m^2 r^2 \beta^2 (1 + \beta^2 t^4) = \mu^2 m^2 g^2,$$

és

$$t^4 = \frac{\mu^2 g^2}{r^2 \beta^4} - \frac{1}{\beta^2}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \sqrt[4]{10,11} = 1,78 s.$$

VI/26. Newton II. törvénye a centripetális gyorsulásra:

$$K \sin \alpha = m r \omega^2,$$

a függőleges gyorsulásra:

$$K \cos \alpha - m g = m a.$$

Emellett érvényben van az

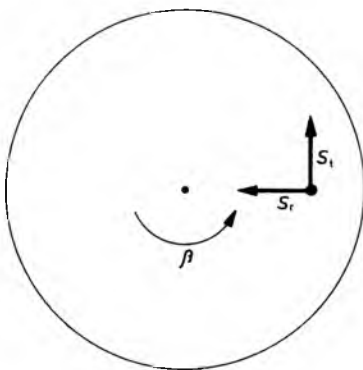
$$r = L \sin \alpha$$

geometriai jellegű összefüggés (VI. 15. ábra). Világos, hogy $r = 0,5$ m, és

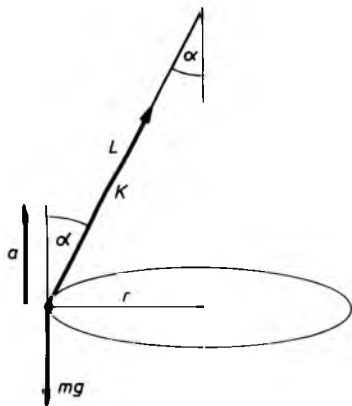
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \omega^2}{a + g},$$

ebből

$$\omega = \sqrt{14 \frac{\sqrt{3}}{3}} = 4 \frac{1}{s}$$



VI. 14.
ábra



VI. 15.
ábra

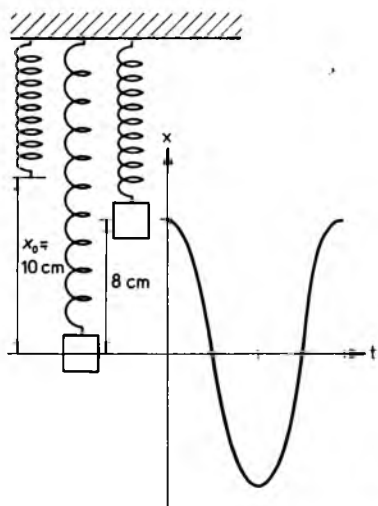
és

$$T = 2\pi/\omega = 1,57 \text{ s.}$$

A kötelet feszítő erő: $K \approx 16 \text{ N}$.

VI/27. Az amplitudó 8 cm, hiszen ez a szélső helyzet ($v=0$) és az egyensúlyi helyzet ($a=0$) távolsága. Egyensúlyi helyzetben (VI. 16. ábra):

$$mg = Dx_0,$$



VI. 16.
ábra

ahol $x_0 = 0,1 \text{ m}$, és így

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = 10 \frac{1}{\text{s}}.$$

Ha a kezdeti kitérés pozitív, akkor a kezdőfázis $-\varphi = \alpha_0 = \pi/2$, hiszen az

$$x(t) = A \sin(\omega t + \pi/2)$$

függvény helyettesítési értéke a $t=0$ időpontban pozitív: $x(0) = A$. A rugó legnagyobb megnyúlása a 18 cm, a legkisebb 2 cm.

VI/28. A körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \frac{1}{\text{s}}.$$

Az amplitudó az

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

alapvető összefüggésből:

$$8^2 + \left(\frac{60}{10}\right)^2 = A^2,$$

$$A = 10 \text{ cm}.$$

A VI. 17. ábráról látszik, hogy

$$-\varphi = \alpha_0 \in [0, \pi/2],$$

$$\sin(-\varphi) = \frac{8}{10} = 0,8,$$

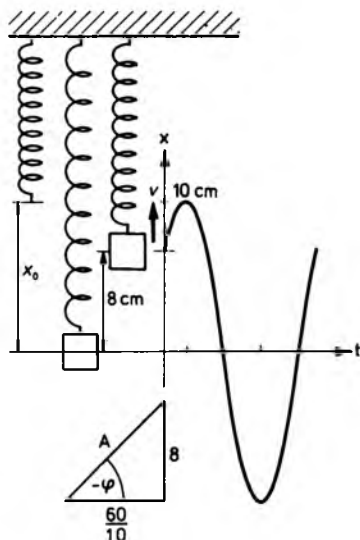
így $-\varphi = 0,9273$. A mozgást leíró függvény:

$$x(t) = 10 \sin(10t + 0,9273).$$

Egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása:

$$x_0 = \frac{mg}{D} = 10 \text{ cm}.$$

A rugó legnagyobb megnyúlása 20 cm, a legkisebb nulla.



VI. 17.
ábra

VI/29. Az egyensúlyi helyzetig a rugó

$$x_0 = \frac{mg}{D} = 10 \text{ cm}$$

-t nyúlik meg. A körfrekvencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = 10 \frac{1}{\text{s}}.$$

Az amplitudó az

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

egyenlőség alapján (VI. 18. ábra):

$$(-6)^2 + \left(\frac{80}{10}\right)^2 = A^2,$$

$$A = 10 \text{ cm}.$$

A kezdőfázisra most $-\varphi = \alpha_0 \in [-\pi/2, 0]$ teljesül, hiszen $x(0) < 0$ és $v(0) > 0$. Mivel

$$\sin(-\varphi) = \frac{-6}{10} = -0,6,$$

ezért $-\varphi_1 = -0,64$ és $\varphi_2 = \pi + 0,64 = 3,78$. A két gyök közül a másodikat választjuk,

mert ennek a koszinusza negatív. Így a mozgást leíró függvény:

$$x(t) = 10 \sin(10t + 3,78).$$

A rugó legnagyobb megnyúlása most is 20 cm, a legkisebb megnyúlás pedig nulla.

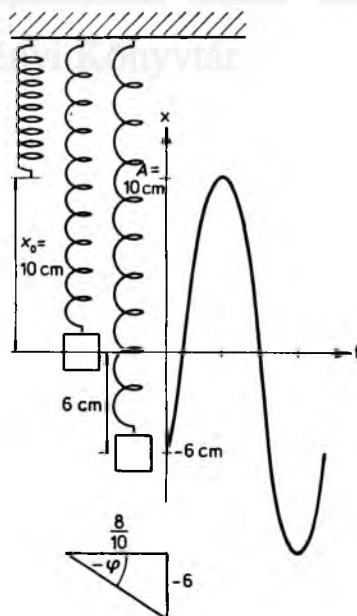
VI/30. A két test

$$x_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{D} = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ m}$$

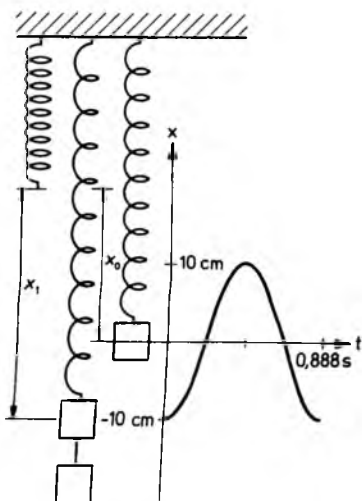
-rel (30 cm-rel) nyújthatja meg a rugót (VI. 19. ábra). Ha csak a felső test függ a rugón, akkor az egyensúlyi helyzetéig

$$x_0 = \frac{m_1 g}{D} = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ m}$$

-rel (20 cm-rel) nyúlt meg a rugó. A létrejövő rezgésnek ez az egyensúlyi helyzete. Az amplitudó $x_1 - x_0 = 10 \text{ cm}$, hiszen a rezgés az alsó szélsőhelyzetből indul. A körfrek-



VI. 18.
ábra



VI. 19.
ábra

vencia és a rezgésidő:

$$\omega = \sqrt{\frac{100}{2}} = \sqrt{50} \frac{1}{s},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 0,888 \text{ s}.$$

A test $t = 0,444$ s múlva áll meg a felső holtponthoz. Eközben a szabadon eső test lefelé

$$s = \frac{g}{2} \cdot 0,444^2 = 1 \text{ m},$$

a rugón rezgő test az alsó holtponthoz a felső holtponthoz 20 cm utat tett meg. A két test távolsága így 1,2 méter.

VI/31. A két test

$$x_1 = \frac{80}{200} = 0,4 \text{ m}$$

-rel nyújtja meg a rugót (VI. 20. ábra). Ha csak a felső testet függesztjük a rugóra, akkor a megnyúlás

$$x_0 = \frac{50}{200} = 0,25 \text{ m}.$$

A fonál elégetése után a felső test az alsó holtponthoz (kezdősebesség nélkül) indul fölfelé. A rezgés amplitúdója 15 cm, a körfrekvencia pedig

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = \sqrt{40} \frac{1}{s}.$$

A periódusidő: $T = 1$ s. A mozgást leíró függvény:

$$x(t) = -0,15 \cos\left(\sqrt{40} t\right),$$

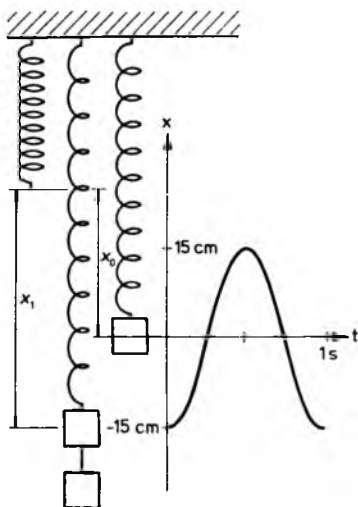
hiszen az alsó holtponthoz induló rezgést a $(-1) \cdot \cos$ függvény írja le. A kitérés persze így is írható:

$$x(t) = 0,15 \sin\left(\sqrt{40} t - \pi/2\right).$$

Mivel $t = 0,33$ s kisebb, mint egy fél periódusidő, a test éppen közeledik a felső holtponthoz.

$$\begin{aligned} x(0,33) &= 0,15 \sin\left(\sqrt{40} \cdot 0,33 - \pi/2\right) = \\ &= 0,074 \text{ m}, \end{aligned}$$

a test egyensúlyi helyzet felett van 0,074 méterrel, (7,4 cm-rel). Eközben a másik



VI. 20.
ábra

test megtett

$$s = \frac{g}{2} 0,33^2 = 0,534 \text{ m}$$

utat. A két test távolsága $0,534 + 0,074 = 0,608 \text{ m}$.

VI/32. Az 1 kg tömegű test

$$x_1 = \frac{10}{10} = 1 \text{ m}$$

-rel nyújtja meg a rugót, a két test együtt pedig

$$x_2 = \frac{1,12 \cdot 10}{10} = 1,12 \text{ m}$$

-rel. A két test együtt rezeg a rugón

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{1,12}} = 3 \frac{1}{\text{s}}$$

körfrekvenciával. Az ütközés lefolyása után

$$v(0) = \frac{0,12 \cdot 25}{1,12} = 2,68 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

fölfelé irányuló sebességgel kezdődik a rezgés, az egyensúlyi helyzet fölött $x(0) = x_2 - x_1 = 0,12 \text{ m}$ -rel (VI. 21. ábra). Az amplitudó az

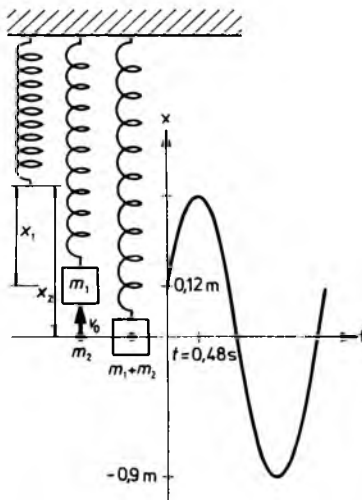
$$A^2 = x(0)^2 + \left(\frac{v(0)}{\omega} \right)^2$$

összefüggés alapján:

$$A^2 = 0,12^2 + \left(\frac{2,68}{3} \right)^2,$$

$$A = 0,90 \text{ m}.$$

Az amplitudó 90 cm . A test az ütközés pillanatában az egyensúlyi helyzet felett volt 12 cm -rel, ezért az első megállásig 78 cm utat tett meg. Jelöljük t -vel azt az időpontot, amikor a test megáll. Ekkor a



VI. 21. ábra

kitérés éppen A :

$$x(t) = A = A \sin(3t - \varphi)$$

ahol $-\varphi = 0,13$, hiszen kis szögekre érvényes a $\sin \alpha \approx \alpha$ közelítés, és

$$\sin(-\varphi) = \frac{12}{90} = 0,13.$$

Tehát

$$A = A \sin(3t + 0,13),$$

így A -val egyszerűsítve:

$$3t + 0,13 = \pi/2,$$

$$t = 0,48 \text{ s}.$$

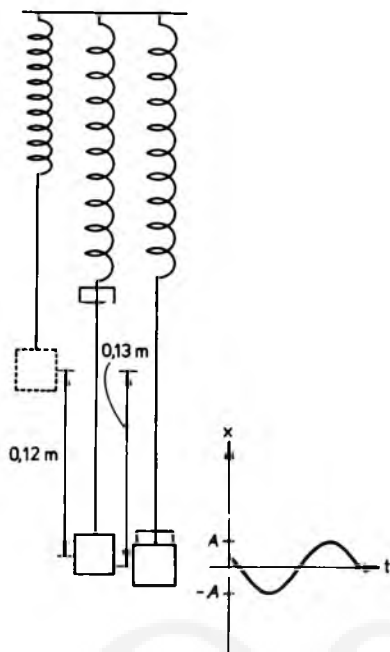
VI/33. Az $m_1 = 1,2 \text{ kg}$ tömegű test

$$x_1 = \frac{m_1 g}{D} = 0,12 \text{ m}$$

-rel nyújtja meg a rugót. A két test együttes egyensúlyi helyzetében a rugó megnyúlása

$$x_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{D} = 0,13 \text{ m}.$$

A gyűrű 15 cm magasról esik, így $v_0 = \sqrt{3} \text{ m/s}$ sebességgel érkezik az alatta



VI. 22.
ábra

lévő testhez. Az ütközés rugalmatlan, ezért az ütközés után

$$v = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} = 0,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességgel lefelé kezdenek mozogni, a közös rezgés egyensúlyi helyzete fölött 12 cm-rel (VI. 22. ábra). A rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} = 8,77 \frac{1}{\text{s}}.$$

Az amplitúdó az

$$A^2 = 0,01^2 + \left(\frac{0,13}{8,77}\right)^2$$

egyenlőségéből: $A = 0,017 \text{ m} = 1,7 \text{ cm}$.

VI/34. Az $m = 200 \text{ g}$ tömegű test $x_0 = mg/D = 0,01 \text{ m}$ -rel, azaz 1 cm -rel nyújtja meg a rugót. A test tehát 71 cm -rel van a mennyezet alatt (VI. 23. ábra). Ha a testet 10 cm -rel a mennyezet alatt elenged-

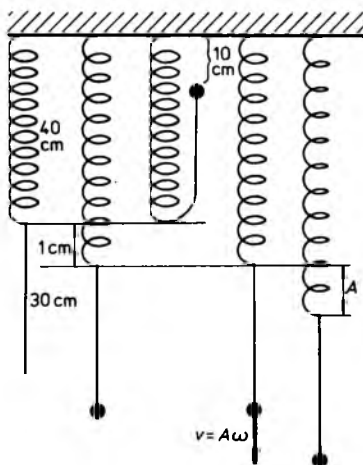
jük, akkor 60 cm -t esik, majd további 1 cm út megtétele után halad át az egyensúlyi helyzetben. A szabadesés végén a sebessége: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{12} = 3,46 \text{ m/s}$. A rezgés tehát $\omega = \sqrt{D/m} = \sqrt{1000} \text{ 1/s}$ körfrekvenciával az egyensúlyi helyzet fölött 1 cm -rel, lefelé irányuló $3,46 \text{ m/s}$ sebességgel kezdődik. Ebből az amplitúdó meghatározható:

$$A^2 = 0,01^2 + \left(\frac{3,46}{\sqrt{1000}}\right)^2$$

$$A = 0,11 \text{ m},$$

vagyis 11 cm -es amplitúdóval rezeg a test. (Természetesen teljes rezgés nem jön létre, mert a fonal meglazul, amikor a test az egyensúlyi helyzet fölé kerül 1 cm -rel.) A rugó legnagyobb megnyúlása $x_0 + A = 12 \text{ cm}$, így a legnagyobb hossza 52 cm . A test az alsó holtpontra áll meg először. Eddig megtesz lefelé először is 1 cm -t, amíg eléri az egyensúlyi helyzetet, azután pedig az egyensúlyi helyzetből eléri az alsó holtpontot. Ennek a periódusidő negyede felel meg:

$$\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = 0,0496 \text{ s}.$$



VI. 23.
ábra

Az első szakaszt — az 1 cm-t — annyi idő alatt teszi meg, amennyi ahhoz kell, hogy az egyensúlyi helyzetből a test elérje az 1 cm-es kitérést, tehát

$$1 \text{ cm} = 11 \text{ cm} \sin(\sqrt{1000} t),$$

innen $t = 0,0028$ s. A rugó megfeszítése után tehát

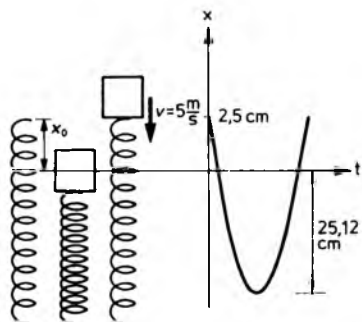
$$0,0496 + 0,0028 = 0,0524 \text{ s}$$

múlva áll meg először a test.

VI/35. Ha a testet ráhelyeznének a rugóra, akkor $x_0 = mg/D = 1/40 = 0,025$ méterrel (2,5 cm-rel) nyomná össze (VI. 24. ábra). A rugóra eső test 2,5 cm-t tesz meg, amíg eléri az egyensúlyi helyzetét. Az egyensúlyi helyzeten a legnagyobb sebességgel halad át, nagyobb, mint amivel akkor rendelkezett, amikor a rugóhoz hozzáért a szabadesés végén. Az egyensúlyi helyzet fölött lefelé mozogva a 2,5 cm-es úton még lefelé gyorsul. Az egyensúlyi helyzeten áthaladva A út megtétele után áll meg. Hogy mekkora ez az út (az amplitudó), az a kezdeti sebességtől függ:

$$A^2 = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}. \quad (1)$$

A szabadesés végén $v = \sqrt{2gh} = 5$ m/s. A körfrekvencia: $\omega = \sqrt{D/m} = 20$ 1/s és a



VI. 24.
ábra

kezdeti kitérés 0,025 méter. Így

$$A^2 = 0,025^2 + \left(\frac{5}{20}\right)^2,$$

tehát $A = 0,2512 \text{ m} = 25,12 \text{ cm}$. A test az egyensúlyi helyzetet a szabadesés után annyi idő alatt éri el, amennyi ahhoz kellene, hogy az egyensúlyi helyzetből elérje a 2,5 cm-es kitérést, tehát

$$0,025 = 0,2512 \sin(20t),$$

innen $t = 0,005$ s. Két ilyen kis időszakot és egy fél periódusidőt kell venni, hogy megkapjuk, mennyi ideig érintkezik a test a rugóval. Világos, hogy

$$\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = 0,1570,$$

így a keresett időszak: $0,1570 + 2 \cdot 0,005 = 0,1670$ s hosszú.

Megjegyzés. Az (1) összefüggés helyett alkalmazhattuk volna az energiamérleget is. Ha a rezgés egyensúlyi helyzetében választjuk meg a helyzeti energia nulla szintjét, akkor

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = \frac{1}{2}D(x+A)^2 - mgA.$$

Ez az egyenlet A -ra egy vegyes másodfokú egyenlet.

VI/36. A feladatot három lépésben oldjuk meg.

1. A két rugó ilyen elrendezése párhuzamos kapcsolást jelent. Ezért $\omega = \sqrt{2D/m} = \sqrt{50}$ 1/s. A testet a szélső helyzetéből engedjük el, ezért $A = 10$ cm. A rezgés legnagyobb sebessége $A\omega = 0,7071$ m/s. A legnagyobb gyorsulás $A\omega^2 = 5$ m/s².
2. Ha az egyensúlyi helyzettől $x = 2$ cm-

re a test v sebességgel mozog, akkor

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2,$$

$$0,02 + \frac{v^2}{50} = 0,1^2,$$

$$v = 0,6928 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3. Mivel a rezgő test az amplitudó „belső” felét a periódusidő 12-ed része alatt teszi meg, a külső részt pedig 6-od része alatt, azaz a szélső helyzetből indulva 5 cm-t

$$\frac{T}{6} = \frac{2\pi}{6\omega} = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3\sqrt{50}} = 0,1480 \text{ s}$$

idő alatt tesz meg.

VI/37. A körfrekvencia: $\omega = \sqrt{2D/m} = \sqrt{80} = 8,94 \text{ 1/s}$. A körfrekvenciát nem befolyásolja az, hogy a rugók meg vannak feszítve. Szélső helyzetben mindkét rugó nyújtva van, a jobb oldali 8 cm-rel, a bal oldali 32 cm-rel. A rugók „széthúzzák” a testet, a jobb oldali jobbra, a bal oldali balra. A két rugóerő: a jobb oldali:

$$D(0,2 - 0,12) = D \cdot 0,08 = 6,4 \text{ N},$$

a bal oldali pedig

$$D(0,2 + 0,12) = D \cdot 0,32 = 25,6 \text{ N}.$$

Az eredő erő balra mutat és $19,2 \text{ N}$ nagyságú. A test $A\omega = 0,12 \sqrt{80} = 1,07 \text{ m/s}$ sebességgel halad át az egyensúlyi helyzetben.

VI/38. Tegyük fel, hogy a két test nyugalomban van. Jelöljük ekkor l_1 -gyel a két test tömegközéppontjainak az m_1 tömegű testtől mért távolságát. Ekkor

$$l_1 m_1 = (l - l_1) m_2,$$

ahol l a két test távolsága nyugalomban,

vagyis a rugó nyújtatlan hossza. Innen

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = 0,6 \text{ m}.$$

Ha a két testet eltávolítva egyszerre hagyjuk magára, akkor a tömegközéppont áll. Itt gondolatban ketté is vághatjuk a rugót. Az egyik rész l_1 hosszúságú és D_1 direkción erejű. A másik rész $l_2 = 0,4 \text{ m}$ hosszúságú, és a direkción ereje pedig legyen D_2 . A két test együtt rezeg,

$$\omega = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}}$$

körfrekvenciával. Mivel azonban

$$\frac{D_1}{D} = \frac{l}{l_1},$$

$$D_1 = \frac{D l}{l_1} = 333,3 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

Így

$$\omega = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{333,3}{2}} = 12,9 \frac{1}{\text{s}}.$$

A két rezgés amplitúdójainak az összege $A_1 + A_2 = 0,2 \text{ m}$, másrészt $m_1 A_1 \omega = m_2 A_2 \omega$, hiszen az egyensúlyi helyzetüket egyszerre éri el, és az összes impulzus nulla. Így

$$2A_1 = 3A_2,$$

$$A_1 + A_2 = 0,2.$$

Innen

$$2A_1 - 3A_2 = 0,$$

$$2A_1 + 2A_2 = 0,4.$$

Kivonjuk a két egyenletet egymásból: $A_2 = 0,08 \text{ m}$, és $A_1 = 0,12 \text{ m}$.

VI/39. A körfrekvencia: $\omega = \sqrt{D/m} = 10 \text{ 1/s}$. Ha a rugóról levágunk 40 cm

hosszú részt, akkor 60 cm hosszú marad. Ha ennek a maradéknak a direkciós ereje D_1 , akkor

$$\frac{D_1}{D} = \frac{l}{l_1},$$

így $D_1 = 333,3 \text{ N/m}$, és $\omega_1 = \sqrt{D_1/m} = 12,9 \text{ 1/s}$.

VI/40. A rugó két részének a direkciós ereje D_1 és D_2 , akkor

$$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} = \frac{1}{D}.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget $4\pi^2 m$ -mel. Ekkor

$$T_1^2 + T_2^2 = T^2,$$

tehát

$$T = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ s}.$$

VI/41. A rugón rezgő test periódusideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}},$$

így

$$T_1 = \frac{46}{50} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}},$$

$$T_2 = \frac{40}{50} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{D}}.$$

Innen:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{40^2}{46^2} = \frac{m_1}{m},$$

tehát

$$m_1 = 50 \left(\frac{40}{46} \right)^2 = 37,8 \text{ kg}.$$

VI/42. Ugyanúgy, mint az előző feladat-

nál:

$$\frac{8}{30} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}},$$

$$\frac{12}{30} = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_1}{D}},$$

tehát

$$\frac{12^2}{8^2} = \frac{m+m_1}{m} = \frac{1+m_1}{1},$$

így $m_1 = 1,25 \text{ kg}$.

VI/43. A kocsival együtt mozgó test harmonikus rezgőmozgást végez $\omega = \sqrt{80} \text{ 1/s}$ körfrekvenciával. A test mindaddig nem csúszik meg, amíg

$$A\omega^2 \leq \mu g,$$

tehát

$$A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

VI/44. A rugóval éppen érintkező test sebessége a létrejövő fél periódusnyi rezgőmozgás maximális sebessége, ha a test nem csúszik meg a kocsin. Ekkor ugyanis $\omega = \sqrt{80} \text{ 1/s}$. A tapadás feltétele:

$$A\omega^2 \leq \mu g.$$

Innen $A \leq 5 \text{ cm}$, tehát

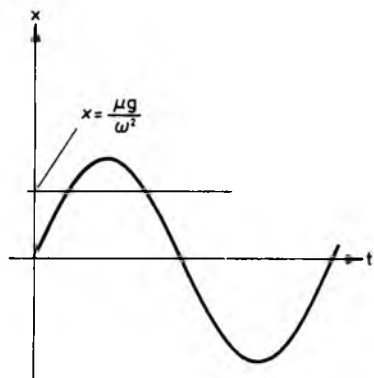
$$v_0 \leq A\omega \leq 0,05 \sqrt{80} = 0,45 \text{ m/s}.$$

VI/45. A VI. 25. ábrán látható a mozgás grafikonja. $A\omega = 0,6 \text{ m/s}$, ahol $\omega = \sqrt{80} \text{ 1/s}$, így $A = 0,067 \text{ m}$. A test megcsúszik, ha

$$A\omega^2 > \mu g,$$

ez teljesül, hiszen $5,36 > 4$. Ha a test a rezgés egyensúlyi helyzetétől x távolságra van, amikor megcsúszik, akkor

$$x\omega^2 = \mu g.$$



VI. 25.
ábra

Innen $x = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$. (Ezután a kocsi a helyezett test már nem harmonikus rezgést végez. A kocsi igen, de a körfrekvenciája megváltozik. Az általunk vizsgált mozgás grafikonja az ábrán megvastagítva látható.) A test sebessége a csúszás határán

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2$$

alapján

$$v = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Ekkor a rugó összenyomódása: $A - x = 1,7 \text{ cm}$.

VI/46. Newton II. törvénye a felső holt-ponton megforduló testre:

$$mg - 0,2 = m\omega^2,$$

ahol $\omega = 2\pi \cdot 2 = 4\pi = 12,56 \text{ 1/s}$. Így $A = 6,2 \text{ cm} = 0,062 \text{ m}$. Ha $A = 1,5 \cdot 0,062 = 0,093 \text{ m}$, akkor $A\omega^2 > g$, tehát a test elválk a dugattyútól. A nyomóerő akkor nulla, amikor a rezgés gyorsulása egyenlő a szabadesés gyorsulásával:

$$-g = -A\omega^2 \sin \omega t,$$

vagyis

$$-g = -\omega^2 x,$$

tehát az egyensúlyi helyzet fölött

$$x = \frac{10}{12,56^2} = 0,063 \text{ m},$$

azaz 6,3 cm magasan válik el. Ekkor a test sebessége

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \quad (1)$$

alapján

$$0,063^2 + \frac{v^2}{12,56^2} = 0,093^2,$$

tehát $v = 0,86 \text{ m/s}$. Ezután a test

$$h = \frac{v^2}{2g} = 0,037 \text{ m} = 3,7 \text{ cm}$$

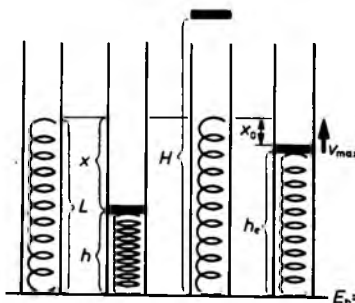
magasra emelkedik.

Megjegyzés. Az (1) kinematikai egyenlőség helyett az energia megmaradását felírni helytelen lépés lenne. A test energiája nem állandó. A kényszererő teljesítménye ugyanis nem nulla.

VI/47. Írjuk fel az energiamérleget! Legyen a helyzeti energia nulla szintje a cső alján (VI. 26. ábra), ekkor

$$mgh + \frac{1}{2} Dx^2 = mgH,$$

$$1 \cdot 10 \cdot 0,1 + \frac{1}{2} 80 \cdot 0,3^2 = 1 \cdot 10H.$$



VI. 26.
ábra

Így $H = 0,46 \text{ m} = 46 \text{ cm}$. A test legnagyobb sebességét is az energiamérleg segítségével határozzuk meg. Ki kell azonban előbb számolni, hogy milyen magasan van a test egyensúlyi helyzete a cső aljához képest. A rugóra helyezett test

$$x_0 = \frac{mg}{D} = 0,125 \text{ m}$$

-rel nyomja össze a rugót. Az egyensúlyi helyzet tehát $h_e = 27,5 \text{ cm}$ -rel van a talaj felett. Ekkor

$$mgh + \frac{1}{2} Dx^2 = mgh_e + \frac{1}{2} Dx_0^2 + \frac{1}{2} mv_{\max}^2.$$

Adatokkal:

$$1 \cdot 10 \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 0,3^2 = 1 \cdot 10 \cdot 0,275 + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 0,125^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_{\max}^2.$$

Ebből $v_{\max} = 1,56 \text{ m/s}$. Ennél kisebb az a sebesség, amivel elhagyja a rugót. Alkalmazzuk ismét az energiamérleget:

$$mgh + \frac{1}{2} Dx^2 = mgL + \frac{1}{2} mv_0^2,$$

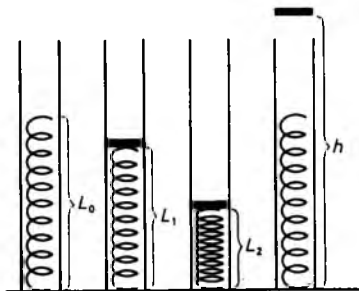
ahol $L = 0,4 \text{ m}$, a rugó erőmentes hossza. Behelyettesítünk és rendezzük az egyenletet:

$$1 + 3,6 - 0,4 \cdot 10 = \frac{v_0^2}{2},$$

$$v_0 = 1,09 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

VI/48. Legyen $L_0 = 20 \text{ cm}$, $L_1 = 15 \text{ cm}$, $L_2 = 8 \text{ cm}$. Az emelkedés magassága a cső aljához képest pedig legyen h . Ekkor a VI. 27. ábra alapján:

$$\frac{1}{2} D(L_0 - L_2)^2 + mgL_2 = mgh.$$



VI. 27. ábra

Osszuk el az egyenlőséget m -mel, és vegyük észre, hogy

$$D(L_0 - L_1) = mg,$$

tehát

$$\frac{D}{m} = \frac{g}{L_0 - L_1}.$$

Így

$$\frac{1}{2} \frac{g}{L_0 - L_1} (L_0 - L_2)^2 + gL_2 = gh.$$

Az adatokat behelyettesítve (és g -vel egyszerűsítve):

$$\frac{1}{2} \frac{(0,2 - 0,08)^2}{0,2 - 0,15} + 0,08 = h,$$

és ezért $h = 0,224 \text{ m}$.

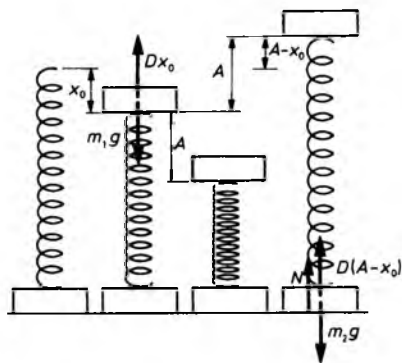
VI/49. A felső test

$$x_0 = \frac{m_1 g}{D} = 0,01 \text{ m}$$

-rel nyomja össze a rugót. Így $D = 1000 \text{ N/m}$. Ha az egyensúlyi helyzetből A -val lenyomjuk a felső testet, akkor az egyensúlyi helyzet fölé emelkedik A -val, feltéve, hogy az alsó test a talajon marad. Ekkor $N \geq 0$. Newton II. törvénye (VI. 28. ábra):

$$m_2 g - N - D(A - x_0) = 0,$$

hiszen a rugó megnyúlása ekkor $A - x_0$.



VI. 28.
ábra

Ebből

$$N = m_2g - D(A - x_0) \geq 0$$

így

$$m_2g \geq D(A - x_0),$$

innen $A \leq 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$. Ha az egyensúlyi helyzetből 3 cm-nél nagyobb mértékben lenyomjuk a testet, akkor felemelkedve, az alsó is felemelkedik.

VI/50. Írjuk fel Newton II. törvényét a két testre a köté elvágása előtti és utáni állapotra (VI. 29. ábra):

$$m_1g + Dx - K = 0,$$

$$m_2g - Dx = 0,$$

$$m_1g + Dx = m_1a_1,$$

$$m_2g - Dx = m_2a_2,$$

hiszen az erőkben csak annyi változás van, hogy a kötél erő megszűnik. Így

$$a_2 = 0, \quad a_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} g = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Figyeljünk fel arra, hogy a feladathoz eddig nem volt szükség a rugó és a fonál adataira. Legyen l a fonál hossza, L a rugó nyújtatlan hossza, és x_0 a rugó megnyúlása:

$$m_2g = Dx_0.$$

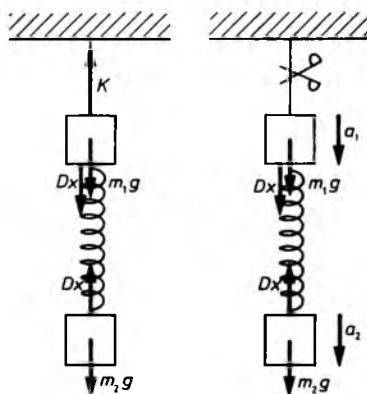
A feladat második részéhez írjuk fel a helyzeti és a rugalmas energia összegét:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} Dx_0^2 - m_1gl - m_2g(L + l + x_0) = \\ &= \frac{1}{2} D \left(\frac{m_2g}{D} \right)^2 - m_1gl - \\ &- m_2g \left(L + l + \frac{m_2g}{D} \right) = \\ &= \frac{1}{2D} (m_2g)^2 - \frac{(m_2g)^2}{D} - m_1gl - \\ &- m_2g(L + l) = \\ &= - \left(\frac{(m_2g)^2}{2D} - m_1gl - m_2g(L + l) \right) = \\ &= - \frac{20^2}{80} - 10 \cdot 0,1 - 20 \cdot 0,4 = -14 \text{ J}. \end{aligned}$$

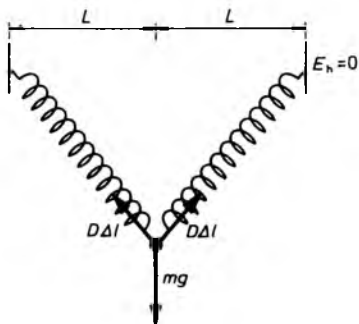
VI/51. A feladat megoldása három lépésben történik.

1. Legyen L a rugó hossza nyújtatlan állapotban, irányítás ereje D , és a test tömegét jelöljük m -mel. A testre ható két rugóerő egyaránt

$$D\Delta l = D(L\sqrt{2} - L) = 62,5 \text{ N}.$$



VI. 29.
ábra



VI. 30.
ábra

Newton II. törvénye a VI. 30. ábra alapján:

$$2D\Delta l \cos 45^\circ - mg = ma,$$

$$\text{ebből } a = 34 \text{ m/s}^2.$$

2. A rugók vízszintes helyzetében a test elválk a rugóktól, csak a nehézségi erő hat tovább, a test lefelé gyorsul g -vel.
3. A test emelkedési magasságát az energiamérlegből határozzuk meg. Legyen a helyzeti energia nulla szintje a rugók rögzítési pontja. Ekkor

$$2 \cdot \frac{1}{2} D(L\sqrt{2} - L)^2 - mgL = mgh,$$

$$h = 0,43 \text{ m}.$$

A test a rugók rögzítési pontja fölé 4,3 cm-re emelkedik.

VI/52. A megoldás most is három lépésből áll.

1. A centripetális erőt a rugalmas erő szolgáltatja:

$$D(L - L_0) = m L \omega^2,$$

ahol $L_0 = 50 \text{ cm}$. Behelyettesítve:

$$400(L - 0,5) = 6 \cdot L \cdot 4,71^2.$$

Innen

$$L(400 - 6 \cdot 4,71^2) = 200,$$

$$\text{így } L = 0,75 \text{ m}.$$

2. A rendszer összes energiája:

$$E = 2 \left(\frac{1}{2} D(L - L_0)^2 + \frac{1}{2} m(L\omega)^2 \right) =$$

$$= 100 \text{ J}.$$

3. (1) alapján

$$L = \frac{DL_0}{D - m\omega^2}.$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$D - m\omega^2 > 0$$

feltételnek teljesülni kell. Ha

$$D = m\omega^2,$$

vagyis

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8,16 \text{ 1/s},$$

akkor a testek nem maradnak körpályán.

VII. Feladatcsoport: gravitáció

VII/1. A fellépő vonzóerő:

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{10 \cdot 10}{10^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

A két test gyorsulása kezdetben:

$$a = 6,67 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}^2.$$

Amíg 1 – 1 cm-t megtesznek, ezt a gyorsulást elfogadjuk állandónak. Ekkor az

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

összefüggésből:

$$0,01 = \frac{6,67 \cdot 10^{-12}}{2} t^2,$$

így $t = 5,47 \cdot 10^4 \text{ s} = 15,21 \text{ óra}$. Egyébként a két test $3,65 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ sebességre gyorsul fel.

VII/2. A gömb tömege

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho = 20\,943\,951 \text{ kg} \approx 21 \cdot 10^6 \text{ kg}.$$

A felületére helyezett 1 kg tömegű testre

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 1}{100} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

gravitációs erőt fejt ki. A gömb felülete ugyanakkora nyomóerővel kompenzálja a gravitációs erőt.

VII/3. Az üreges gömb tömege

$$m = \frac{4\pi}{3} (10^3 - 4^3) \cdot 5000 = 19,6 \cdot 10^6 \text{ kg}.$$

A gömb felületén $4\pi fm = \chi$ számú erővonal halad át, ezek egyenletes sűrűséggel döfik a gömb felületét, ezért a térerősség:

$$T = \frac{4\pi fm}{4r^2\pi} = \frac{fm}{r^2}.$$

Így az 1 kg tömegű testre ható gravitációs erő:

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{19,6 \cdot 10^6 \cdot 1}{100} = 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Figyeljünk fel arra, hogy ez az erő pontosan annyival kevesebb, mint az előző feladat megoldásaként kapott $1,4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$, mint amekkora erőt a 4 m sugarú gömb tömege — egy pontba egyesítve — 10 m távolságból az 1 kg tömegű testre kifejtene.

VII/4. Az $R = 10 \text{ m}$ sugarú, $21 \cdot 10^6 \text{ kg}$ tömegű tömör gömb — mint láttuk — akkora erőt fejt ki, mintha egyetlen pontba egyesítenénk, és ez a pont 10 m távolságra lenne az 1 kg tömegű testtől. Így $F = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$. Ez az erő két részre bontható. Képzeljük el, hogy betöltjük az üre-

get. Ehhez

$$m_1 = \frac{4 \cdot 4^3 \pi}{3} 5000 = 1,34 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

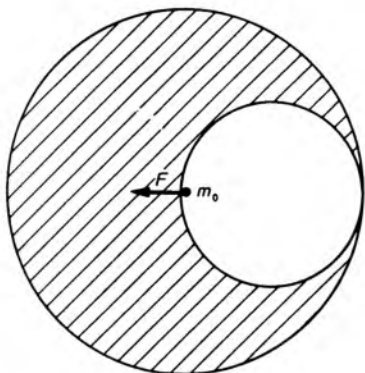
tömegű anyag „kell”. Az üregbe hordott m_1 tömegű anyag az üreg középpontjába egyesíthető. Ez 16 m-re van az $m_0 = 1 \text{ kg}$ tömegű pontszerű testtől. Az általa kifejtett erő $F_1 = 0,035 \cdot 10^{-5} \text{ N}$. Az F és F_1 erők különbségét éppen az üreges gömb fejti ki: $F - F_1 = 1,362 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

Megjegyzés: Két elvet használunk:

1. A gravitációs erő szabaderő, additív.
2. Gömb alakú forrástömeg egy *rajta kívüli* tömegpontra akkora erőt fejt ki, mintha a gömb a közepébe lenne egyesítve.

Nem használjuk azonban fel — mert nem igaz —, hogy egy kiterjedt pontrendszer akkora gravitációs erőt fejt ki, mintha a tömegközéppontjába egyesítenénk az összes tömegét, és ez a pont fejtené ki a hatást.

VII/5. Az üreg falára az $m_0 = 1 \text{ kg}$ tömegű pontszerű test által kifejtett erő egyenlő nagy (és megegyező irányú) az m_0 tömegű testre ható gravitációs erővel. Ezt úgy számoljuk, hogy az $R = 10 \text{ m}$ sugarú gömb által kifejtett F erőből levonjuk az $r = 5 \text{ m}$ sugarú tömör gömb által kifejtett gravitációs erőt (*VII. 1. ábra*). $F = 0$, hiszen a



VII. 1.
ábra

tömör gömb közepén nem hat erő. Ezért az üreges gömb által kifejtett erő megegyezik annak a testnek a hatásával, amelyet az üreg betöltésével kapunk. Az üregbe

$$\frac{4 \cdot 5^3 \pi}{3} \cdot 5000 = 2,62 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

tömeg „hordható”. Tehát a testre

$$F_2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2,62 \cdot 10^6}{25} = 6,98 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

gravitációs erő hat.

VII/6. Az A pontnál az m_0 tömegű testre ható erőt úgy kapjuk, hogy az O pontba egyesített

$$m = \frac{4 \cdot 10^3 \pi}{3} \cdot 5000 = 21 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

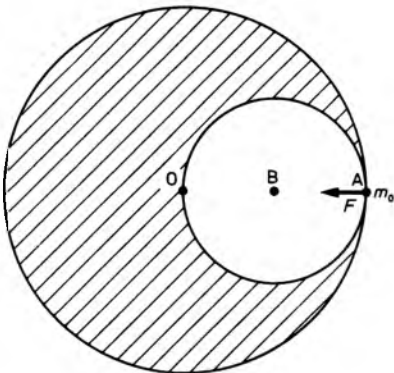
tömeg által kifejtett erőből levonjuk a B pontba egyesített

$$m_B = \frac{4 \cdot 5^3 \pi}{3} 5000 = 2,6 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

tömeg által kifejtett erőt (*VII. 2. ábra*).

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 1}{10^2} - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{2,6 \cdot 10^6 \cdot 1}{5^2} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

A test gyorsulása itt $7 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$.



VII. 2.
ábra

VII/7. A gömb felületére helyezett $m_0 = 1$ kg tömegű testre

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 1}{100} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

erő hat, a lyukba ejtett test gyorsulása ezért $a = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$. Ez a legnagyobb gyorsulása a 10 méter amplitúdóval rezgő testnek:

$$1,4 \cdot 10^{-5} = 10\omega^2.$$

Így $\omega = 1,183 \cdot 10^{-3} \text{ 1/s}$, ezért $T = 5309 \text{ s}$. A gömb középpontján

$$v_{\max} = 10 \cdot 1,183 \cdot 10^{-3} = 0,01183 \text{ m/s} = 1,183 \text{ cm/s}$$

sebességgel halad át. A középponttól 9 m távolságban a sebesség az

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2$$

összefüggés alapján számolható:

$$900^2 + \left(\frac{v}{1,183 \cdot 10^{-3}} \right)^2 = 1000^2,$$

ebből

$$v = 0,5 \text{ cm/s}.$$

A rezgő test összes energiája

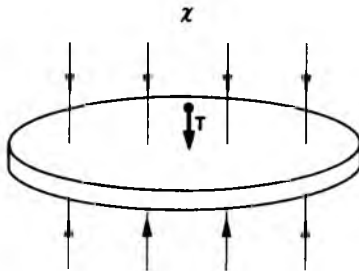
$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

A középponttól 9 méter távol a mozgási energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

A kettő különbsége a helyzeti energia:

$$E_{\text{pot}} = 5,42 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$



VII. 3. ábra

VII/8. A korong tömege $r^2 \pi f d \rho$, ahol d a korong vastagsága (VII. 3. ábra). A korong felületét dőfő fluxust a felülettel (a korong köralakú lapjainak a felületével) osztjuk:

$$T = \frac{\chi}{A} = \frac{4\pi r^2 \pi d}{2r^2 \pi} = 2\pi d = 2,09 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ekkora gyorsulással mozog a pontszerű test.

VII/9. Newton II. törvénye alapján:

$$\frac{fMm}{r^2} = m r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2,$$

ahol M a bolygó és m a hold tömege. Így

$$M = \frac{r^3 \cdot 4\pi^2}{f T^2} = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Lehetséges, hogy ez a bolygó a Föld és a holdja a Hold.

VII/10. Jelöljük a Nap tömegét M -mel, ekkor

$$M = \frac{4\pi^2}{f} \frac{r^3}{T^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

VII/11. A Hold felületének 1 m^2 -nagyságú részét dőfő gravitációs fluxus:

$$T = \frac{4\pi f m}{4r^2 \pi} = \frac{f m}{r^2} = 1,58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az $m_0 = 10$ kg tömegű testre ható gravitációs erő:

$$F = 15,8 \text{ N.}$$

Ekkora erőt fejt ki a Hold felszínére a nyugvó test. Ha feldobjuk a testet, akkor $1,58 \text{ m/s}^2$ gyorsulással esik vissza: t idő alatt a sebessége 0-ra csökken; így

$$t = \frac{10}{1,58} = 6,3 \text{ s.}$$

Az emelkedési magassága

$$\frac{vt}{2} = 31,5 \text{ m.}$$

VII/12. Az A pontba helyezett $m_0 = 1$ kg tömegű testre ható erő (VII. 4. ábra):

$$F_A = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7,17 \cdot 10^{22} \cdot 1}{(59 \cdot 6370000)^2} =$$

$$= 3,38 \cdot 10^{-5} \text{ N.}$$

A B pontba helyezett testre ható erő:

$$F_B = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7,17 \cdot 10^{22} \cdot 1}{(6,1 \cdot 6370000)^2} =$$

$$= 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ N.}$$

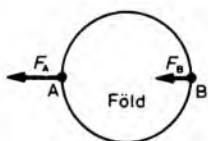
A két erő különbsége okozza az ár-ápolj jelenségét.

VII/13. A Föld közepétől $6370 + 1000$ km távolságban a térerősség:

$$T = \frac{fM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,976 \cdot 10^{24}}{7370000^2} =$$

$$= 7,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

Hold



VII. 4.
ábra

ez hozzávetőlegesen 74 százaléka a Föld felszínén észlelt nehézségi gyorsulásnak.

VII/14. A gravitációs tér által végzett munka:

$$W = fMm \left(\frac{1}{6370000} - \frac{1}{6470000} \right),$$

és $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $m = 10 \text{ kg}$. Ekkor $W = 9,67 \cdot 10^6 \text{ J}$.

VII/15. A gravitációs tér által végzett munka:

$$W = fMm \left(\frac{1}{7570000} - \frac{1}{6370000} \right),$$

ahol M a Föld tömege, $m = 1000 \text{ kg}$. Így

$$W = -10^{10} \text{ J.}$$

VII/16. Legyen $r = 7200 \cdot 10^3 \text{ m}$ és $m = 200 \text{ kg}$, $M = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Ekkor

$$E_{\text{pot}} = \frac{fMm}{r} = -11 \cdot 10^9 \text{ J,}$$

$$E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} \frac{fMm}{r} = 5,5 \cdot 10^9 \text{ J,}$$

$$E_{\text{összes}} = -5,5 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

VII/17. A bolygó tömege: $M = 21 \cdot 10^6 \text{ kg}$. Az első kozmikus sebesség Newton II. törvénye alapján:

$$\frac{fMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{fM}{r}} = 1,18 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,18 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A második kozmikus sebesség:

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{fM}{r}} = 1,67 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

VII/18. A mesterséges égitest szögsebessége megegyezik a Föld tengely körüli for-

gásainak a szögsebességével:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{1}{s} = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}.$$

Így

$$f \frac{Mm}{r^2} = m r \omega^2,$$

innen $r = 42\,100$ km (!). A Föld felszíne felett $35\,730$ km kering a műhold.

A $42\,100$ km sugarú pályán keringő műhold energiája:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{f M m}{R} = -9,45 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Indulás előtt a helyzeti energia:

$$E_0 = -\frac{f M m}{r} = -1,25 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

A munka:

$$W = E - E_0 = 1,15 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

VIII. Feladatcsoport: pontrendszerek, tömegközéppont

VIII/1. A diszkrét pontrendszer értelmezése alapján (VIII. 1. ábra):

$$x_0 = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8} =$$

$$= \frac{16}{36} = 0,44 \text{ m},$$

$$y_0 = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0,5}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8} =$$

$$= \frac{24}{36} = 0,66 \text{ m}.$$

VIII/2. A három vonaldarab tömegét

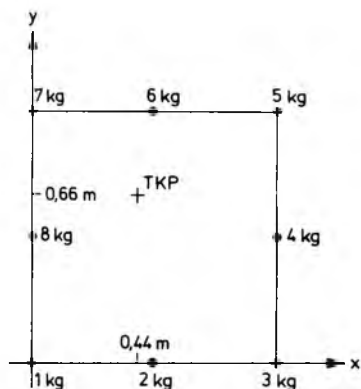
egyesítsük a középpontjukba. Ekkor — VIII. 2. ábrán látható koordináta-rendszerben:

$$x_0 = \frac{15 \cdot 0 + 10 \cdot 5 + 8 \cdot 4}{15 + 10 + 8} = \frac{82}{33} = 2,48 \text{ cm},$$

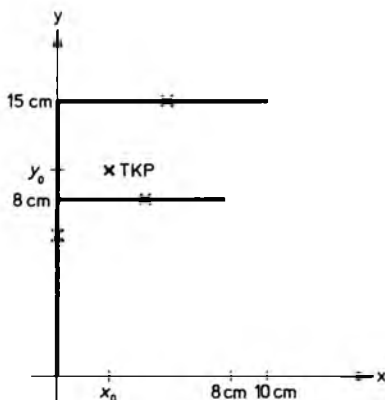
$$y_0 = \frac{15 \cdot 7,5 + 8 \cdot 8 + 10 \cdot 15}{15 + 10 + 8} = \frac{326,5}{33} = 9,89 \text{ cm}.$$

VIII/3. A háromszöglemez 4 kg tömegét a geometriai súlypontba egyesítjük. Ennek a pontnak a koordinátái:

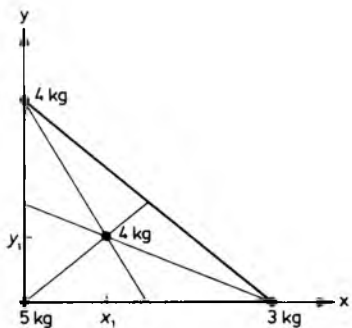
$$x_1 := 2 \cdot \frac{2}{3} = 1,33, \quad y_1 := 1,5 \cdot \frac{2}{3} = 1.$$



VIII. 1.
ábra



VIII. 2.
ábra



VIII. 3.
ábra

Ezzel 4 pontból álló diszkrét pontrendszer tömegközéppontját számoljuk (VIII. 3. ábra):

$$x_0 = \frac{5 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1,33}{5 + 3 + 4 + 4} = \frac{17,3}{16} = 1,08 \text{ dm},$$

$$y_0 = \frac{5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{5 + 3 + 4 + 4} = 1 \text{ dm}.$$

VIII/4. A lyukas körlemez tömegközéppontja a VIII. 4. ábrán látható koordináta-rendszerben legyen x_1 . Világos, hogy $x_1 < 0$. Ha visszahelyezzük a kivágott lapot, akkor ennek a tömegközéppontja az $x_2 = 6 \text{ cm}$ helyen lesz. Így a rendszer tömegközéppontja az $x_0 = 0$ pont lesz:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

A tömeg arányos a síkidom területével, és az arányossági tényezőt 1-nek is választhatjuk:

$$m_1 + m_2 = R^2 \pi = 10^2 \pi,$$

$$m_2 = r^2 \pi = 4^2 \pi,$$

$$m_1 = (10^2 - 4^2) \pi,$$

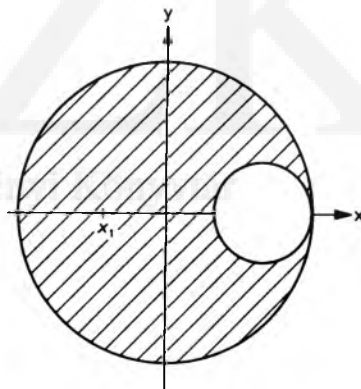
tehát

$$x_0 = 0 = \frac{(10^2 - 4^2) \pi x_1 + 4^2 \pi x_2}{10^2 \pi}.$$

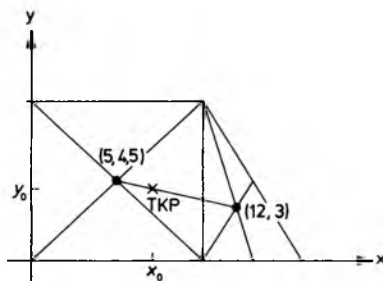
Innen

$$x_1 = -\frac{16 \cdot 6}{84} = -\frac{96}{84} = -1,14 \text{ cm}.$$

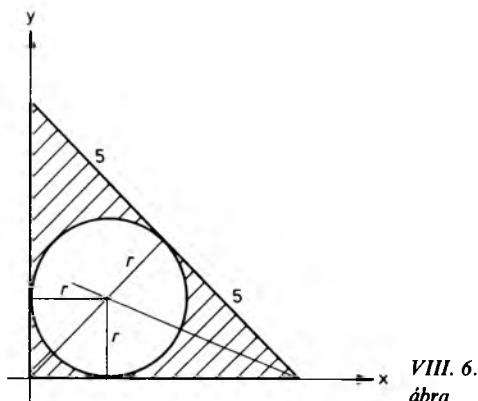
VIII/5. Többféleképpen eljárhatunk. A lényeg az, hogy a trapézt két síkidomra bontsuk (vagy egy téglalap és egy háromszög, vagy két háromszög). A két idom tömegét a geometriai középpontba egyesítjük, és így két pontból álló diszkrét pontrendszer tömegközéppontját számoljuk. Osszuk két részre a trapézt a VIII. 5. ábrán látható módon. A téglalap tömegközéppontja: (5; 4,5), a háromszög súlypontja



VIII. 4.
ábra



VIII. 5.
ábra



pedig a $(10+2; 3)$ pontban van. Az egyes alakzatok területe (= tömege): 90 és 27. Így

$$x_0 = \frac{5 \cdot 90 + 12 \cdot 27}{117} = 6,6 \text{ cm},$$

$$y_0 = \frac{4,5 \cdot 90 + 3 \cdot 27}{117} = 4,15 \text{ cm}.$$

VIII/6. A VIII. 6. ábrán látható koordináta-rendszert használjuk. Világos, hogy a tömegközéppont két koordinátája egyenlő. A háromszög befogói: $a = 10\sqrt{2}/2 = 7,071 \text{ cm}$. A kör középpontjának a koordinátái $(r, r) = (2,071; 2,071)$. Ez könnyen látható abból, hogy az ábra szerint

$$\frac{r}{5} = \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right).$$

A kör területe $r^2\pi = 13,47 \text{ cm}^2$, a háromszög területe $\frac{1}{2} \left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25 \text{ cm}^2$. A két terület különbsége $11,5 \text{ cm}^2$. Ez a lyukas háromszög területe. A háromszög súlypontjának mindkét koordinátája:

$\frac{10}{3} \frac{\sqrt{2}}{2}$. Jelöljük a lyukas háromszög tömegközéppontjainak az első koordinátáját x_0 -al. Ekkor — a terület és a

tömeg arányosságát felhasználva —

$$\frac{10}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{13,5 \cdot 2,071 + 11,5 \cdot x_0}{25}.$$

Innen $x_0 = 2,69 \text{ cm}$.

VIII/7. Képzeli el, hogy kezdetben a koordináta-rendszer origójában van az első autó (VIII. 7. ábra). Ekkor a rendszer tömegközéppontjának a koordinátája:

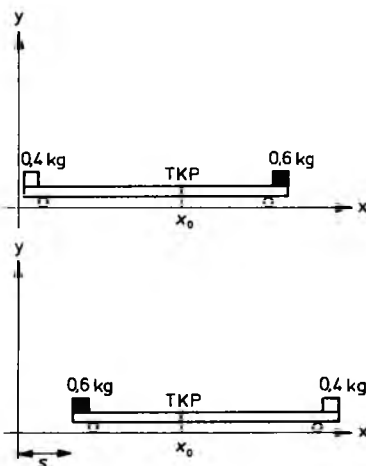
$$x_0 = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m \frac{l}{2}}{m_1 + m_2 + m}.$$

Ezután a két autó helyet cserél, és közben a deszka is elmozdul, mondjuk s -sel. Ekkor az m_2 tömegű autó az s helyen lesz, az m_1 tömegű pedig az $l+s$ helyen. A rendszer tömegközéppontja most is x_0 :

$$x_0 = \frac{m_1(l+s) + m_2 s + m \left(\frac{l}{2} + s\right)}{m_1 + m_2 + m}.$$

Így

$$m_2 l + m \frac{l}{2} = m_1(l+s) + m_2 s + m \left(\frac{l}{2} + s\right).$$



VIII. 7. ábra

Behelyettesítve:

$$0,6 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 =$$

$$= 0,4(1+s) + 0,6s + 1(0,5+s),$$

$$1,1 = 0,9 + 2s,$$

$$s = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}.$$

VIII/8. Az impulzusmegmaradás törvénye szerint:

$$0 = mv + m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Fontoljuk meg, hogy az m_1 tömegű autó v_1 sebessége $v + 0,2$, vagyis a deszka sebességének és a kocsis deszkához viszonyított sebességének az összege. Hasonlóan $v_2 = v - 0,15$, mert ez a második autó balra mozog a deszkán. Így

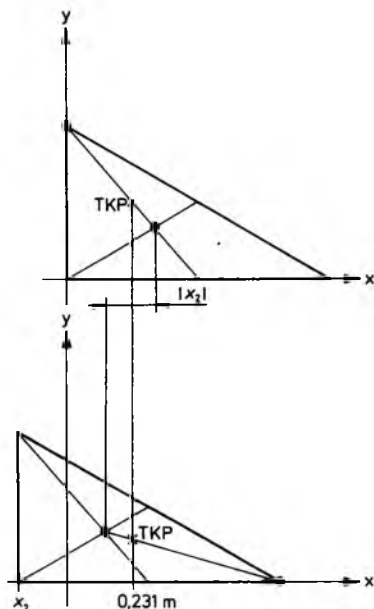
$$0 = 1v + 0,4(v + 0,2) + 0,6(v - 0,15),$$

$$0,01 = 2v,$$

$$v = 0,005 \text{ m/s} = 0,5 \text{ cm/s}.$$

A két autó talajhoz viszonyított sebessége: $v_1 = 20,5 \text{ cm/s}$, $v_2 = -14,5 \text{ cm/s}$. Az első autóhoz viszonyítva a második 35 cm/s sebességgel közeledik. Ez megegyezik a deszkához viszonyított sebességek különbségével. Jelöljük s -sel a deszka elmozdulását abban a pillanatban, amikor a két autó találkozik. Ekkor $s = vt$, ahol t a két autó találkozásáig eltelt idő. A két autó a deszka felületén összesen $l = 1 \text{ m}$ utat tett meg: $0,2t + 0,15t = l$, tehát $t = 2,85 \text{ s}$. Így $s = 0,014 \text{ m} = 1,4 \text{ cm}$.

VIII/9. A lejtő és a test együttes tömegközéppontja csak függőlegesen mozdul el, vízszintesen nem, hiszen nem hat olyan külső erő, aminek vízszintes komponense lenne. A lejtő tömegközéppontja a VIII. 8. ábrán látható koordináta-rendszerben $0,5/3 \text{ m}$ magasan van, a vízszintes komponense $0,5\sqrt{3}/3 \text{ m}$ helyen van. A lejtő és a



VIII. 8. ábra

ráhelyezett test tömegközéppontja:

$$x_0 = \frac{1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{0,5\sqrt{3}}{3}}{5} = 0,231 \text{ m},$$

$$y_0 = \frac{1 \cdot 0,5 + 4 \cdot \frac{0,5}{3}}{5} = 0,233 \text{ m}.$$

Ha a test lecsúszik, akkor — mondjuk — az x_1 helyen éri el a talajt. A lejtő x_2 -vel mozdul el balra; $x_2 < 0$. Eközben a tömegközéppont vízszintes koordinátája $0,231 \text{ m}$ marad:

$$x_0 = \frac{1x_1 + 4\left(\frac{0,5\sqrt{3}}{3} + x_2\right)}{5} = 0,231 \text{ m}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt 5-tel, és vegyük figyelembe, hogy $x_1 - x_2 = 1 \text{ m}$. Így

$$1 + x_2 + 4 \cdot \frac{0,5\sqrt{3}}{3} + 4x_2 = 1,155,$$

és ezért $x_2 = -0,2 \text{ m}$.

IX. Feladatcsoport: merev testek mozgása

IX/1. Az $m_1 = 1$ kg tömegű testre a nehézségi erő mellett a K kötél erő hat. A korongot a kötél erő ellenerejének a forgatónyomatéka forgatja (IX. 1. ábra):

$$m_1 g - K = m_1 a$$

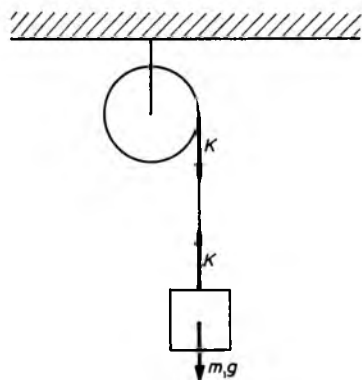
$$Kr = \Theta \beta = \frac{mr^2}{2} \beta.$$

A második egyenletet az $a = r\beta$ kényszer-egyenletet figyelembe véve így írhatjuk:

$$K = \frac{ma}{2},$$

tehát

$$m_1 g - \frac{ma}{2} = m_1 a,$$



IX. 1.
ábra

így

$$m_1 g = a \left(m_1 + \frac{m}{2} \right),$$

$$a = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$K = \frac{ma}{2} = 7,1 \text{ N}.$$

A test sebessége

$$t = \frac{1}{2,8} = 0,35 \text{ s}$$

múlva lesz 1 m/s. Ekkor a szögsebesség:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{0,2} = 5 \frac{1}{\text{s}}.$$

A korong tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{mr^2}{2} = \frac{5 \cdot 0,2^2}{2} = 0,1 \text{ kg m}^2,$$

így a sajátperdület:

$$N_s = \Theta \omega = 0,5 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

és a forgási energiája:

$$E_f = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = 1,25 \text{ J}.$$

A hengerre ható kötél-erő munkája:

$$W_1 = M\alpha = Kr\alpha = Ks,$$

ahol s a korongról letekeredő fonál hossza,

$$s = \frac{a}{2} t^2,$$

hiszen pontosan ennyi utat tett meg a test lefelé, $s = 0,175$ m. Így $W_1 = 7,1 \cdot 0,175 = 1,25$ J. A testre ható kötél-erő

$$W_2 = -Ks = -1,25$$

J munkát végez.

IX/2. Legyen az elmozdulás akkor pozitív, ha a test lefelé mozdul el. A forgást akkor tekintjük pozitívnak, ha egyirányú az óra mutatójának a mozgásával (IX. 2. ábra). A dinamikai egyenletek és a kényszer egyenletek:

$$m_1 g - K_1 = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - K_2 = m_2 a_2,$$

$$K_1 R - K_2 r = \Theta \beta,$$

$$a_1 = R\beta,$$

$$a_2 = -r\beta.$$

Behelyettesítünk és figyelembe vesszük, hogy

$$\Theta = \frac{mR^2}{2} = 0,1125 \text{ kg m}^2,$$

ekkor

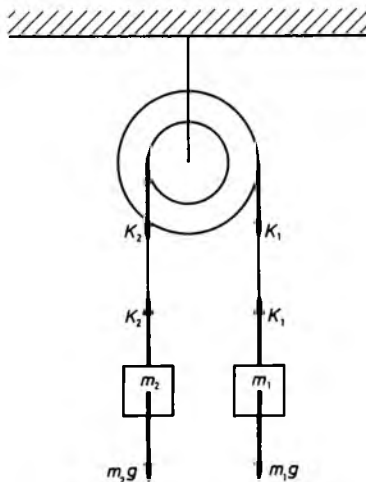
$$100 - K_1 = 10a_1 = 10 \cdot 0,15\beta,$$

$$50 - K_2 = 5a_2 = -5 \cdot 0,1\beta,$$

$$K_1 \cdot 0,15 - K_2 \cdot 0,1 = 0,1125\beta.$$

Szorozzuk meg most az első egyenletet 0,15-tel, a másodikat $(-0,1)$ -gyel, ezután adjuk össze a három egyenletet:

$$10 = (0,225 + 0,05 + 0,1125)\beta.$$



IX. 2.
ábra

Így $\beta = 25,8 \text{ 1/s}^2$, és $a_1 = 3,87 \text{ m/s}^2$, $a_2 = -2,58 \text{ m/s}^2$. Tegyük fel, hogy t idő múlva a testek távolsága $0,3$ m. Ennyi idő alatt az egyik test, illetve a másik test által megtett út:

$$s_1 = \frac{3,87}{2} t^2, \quad s_2 = \frac{2,58}{2} t^2.$$

A két út összege $0,3$ m:

$$\left(\frac{3,87}{2} + \frac{2,58}{2} \right) t^2 = 0,3.$$

Innen $t = 0,3$ s. Ekkor a korong $\omega = \beta t = 7,74 \text{ 1/s}$ szögsebességgel forog, az egyik test sebessége $1,18 \text{ m/s}$ és lefelé halad, a másik test sebessége $-0,78 \text{ m/s}$, felfelé mozog. A mennyezetet

$$K' = K_1 + K_2 + mg$$

nagyságú erő húzza. Mivel

$$K_1 = m_1(g - a_1) = 61,3 \text{ N},$$

$$K_2 = m_2(g - a_2) = 62,9 \text{ N}.$$

$$\text{Így } K' = 224,2 \text{ N}.$$

IX/3. A IX. 3. ábra alapján a dinamikai egyenletek és a kényszerfeltételek:

$$m_1 g - K_1 = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - K_2 = m_2 a_2,$$

$$K_1 R + K_2 r = \Theta \beta = \frac{m R^2}{2} \beta,$$

$$a_1 = R \beta,$$

$$a_2 = r \beta.$$

Behelyettesítünk:

$$3 - K_1 = 0,3 \cdot a_1 = 0,3 \cdot 0,15 \beta,$$

$$4 - K_2 = 0,4 \cdot a_2 = 0,4 \cdot 0,1 \beta,$$

$$K_1 \cdot 0,15 + K_2 \cdot 0,1 = \frac{10}{2} \cdot 0,15^2 \beta.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 0,15-tel, a másodikat 0,1-gyel, és adjuk össze a három egyenletet: azt kapjuk, hogy $\beta = 6,9 \text{ 1/s}^2$, és ebből $a_1 = 1,0 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 0,69 \text{ m/s}^2$. A kötélerők pedig: $K_1 = 2,7 \text{ N}$, $K_2 = 3,7 \text{ N}$.

IX/4. A IX. 4. ábra alapján dinamikai egyenletek és a kényszerfeltétel:

$$mg - K = ma,$$

$$Kr = \Theta \beta = \frac{mr^2}{2} \beta,$$

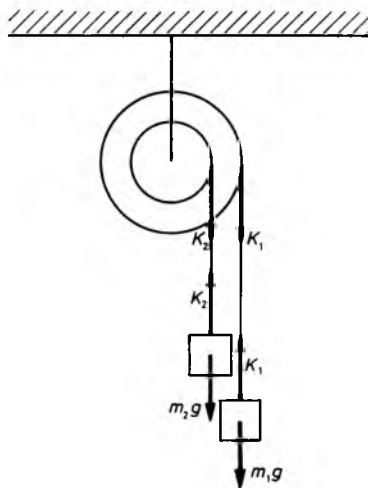
$$a = r \beta.$$

Behelyettesítünk és a harmadik egyenletből β -t a második egyenletbe helyettesítjük:

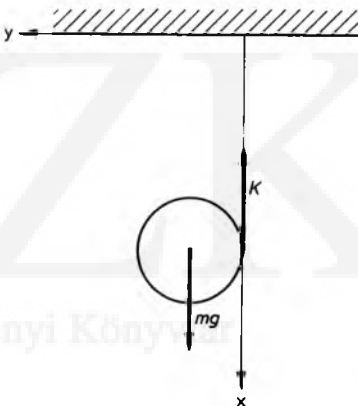
$$10 - K = a,$$

$$K = \frac{a}{2}.$$

A két egyenletet összeadjuk, így $a = 6,6 \text{ m/s}^2$, $K = 3,3 \text{ N}$, valamint $\beta = 66 \text{ 1/s}^2$. A $t = 0,2 \text{ s}$ időpontban a szögsebesség $\omega = 13,2 \text{ 1/s}$, a korong sebessége pedig $v = 1,32 \text{ m/s}$. A sa-



IX. 3. ábra



IX. 4. ábra

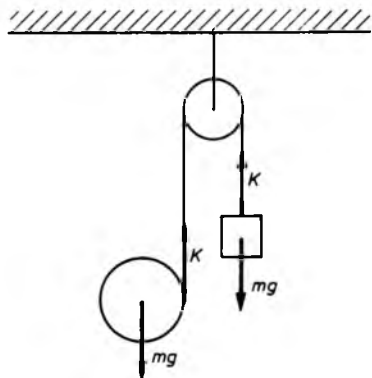
játperdület:

$$N_s = \Theta \omega = 0,005 \cdot 13,2 = 0,066 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

a pályaperdület:

$$N_p = mrv_0 = 1 \cdot 0,1 \cdot 1,32 = 0,132 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

A kötélerő által végzett munka nulla, hiszen annak a pontnak, ahol a kötélerő hat, a sebessége nulla. Így a korong összes (helyzeti, mozgási, forgási) energiája állandó.



IX. 5.
ábra

IX/5. Írjuk fel a dinamikai egyenleteket és a gyorsulások kapcsolatát kifejező kényszer egyenletet (IX. 5. ábra):

$$mg - K = ma_1,$$

$$mg - K = ma_2,$$

$$Kr = \theta\beta,$$

$$a_1 + a_2 = r\beta.$$

Behelyettesítünk:

$$10 - K = a_1,$$

$$10 - K = a_2,$$

$$K = 0,05\beta,$$

$$a_1 + a_2 = 0,1\beta.$$

Az első két egyenlet alapján $a_1 = a_2$, tehát $\beta = 2a_1/0,1$, így $K = a_1$, $a_1 = a_2 = 5 \text{ m/s}^2$, $K = 5 \text{ N}$, $\beta = 100 \text{ 1/s}^2$. A két test egymás mellett, azonos sebességgel és azonos gyorsulással mozog. Az 1 m utat $t = \sqrt{0,4} \text{ s} = 0,63 \text{ s}$ alatt teszik meg, mert

$$1 = \frac{a_1}{2} t^2 = \frac{5}{2} 0,4.$$

A két test sebessége egyaránt 3,16 m/s.

IX/6. A IX. 6. ábra alapján dinamikai egyenletek és a két kényszerfeltétel:

$$m_1 g - K_1 = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$K_1 + mg - K = ma, \quad (2)$$

$$KR - K_1 r = \theta\beta = \frac{mR^2}{2} \beta, \quad (3)$$

$$a = R\beta, \quad (4)$$

$$a_1 = R\beta - r\beta. \quad (5)$$

Behelyettesítve

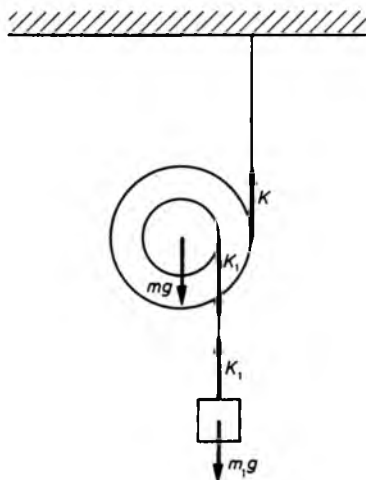
$$10m_1 - K_1 = m_1 a_1 = m_1(0,12 - 0,1)\beta, \quad (6)$$

$$K_1 + 10 \cdot 1,5 - K = 1,5a = 1,5 \cdot 0,12\beta, \quad (7)$$

$$K \cdot 0,12 - K_1 \cdot 0,1 = 0,0108\beta. \quad (8)$$

Tegyük fel, hogy az ismeretlen tömegű test kezdetben l_1 , a korong középpontja l távolságra volt a mennyezettől. Világos, hogy $l_1 - l = 0,8 \text{ m}$. A két test koordinátája a $t = 1 \text{ s}$ időpontban:

$$x_1 = l_1 + \frac{a_1}{2} t^2, \quad x = l + \frac{a}{2} t^2.$$



IX. 6.
ábra

A két test távolsága: $x_1 - x = 0,5$ m, vagyis

$$\left(l_1 + \frac{a_1}{2} t^2\right) - \left(l + \frac{a}{2} t^2\right) = 0,5,$$

$$(l_1 - l) + \left(\frac{a_1}{2} t^2 - \frac{a}{2} t^2\right) = 0,5,$$

$$\frac{1}{2} (a_1 - a) t^2 = -0,3,$$

$$a_1 - a = -0,6. \quad (9)$$

Vonjuk ki most az (5) és a (4) egyenleteket egymásból, és vessük a kapott eredményt össze (9)-cel:

$$-0,6 = -0,1\beta,$$

tehát $\beta = 6 \text{ 1/s}^2$. Ebből $a_1 = 0,12 \text{ m/s}^2$, $a = 0,72 \text{ m/s}^2$. Térjünk most vissza a (6), (7), (8) egyenletekhez. A (8) egyenlet 10-szeresét adjuk hozzá a (7) egyenlethez:

$$0,2K + 10m_1 = 1,728. \quad (10)$$

A (8) egyenlet 10-szeresét vonjuk ki a (6) egyenlethez:

$$10m_1 - 1,2K = m_1 0,12 - 0,648. \quad (11)$$

Most a (10) egyenlet 6-szorosát adjuk a (11) egyenlethez:

$$70m_1 = 9,72 + 0,12m_1.$$

Innen

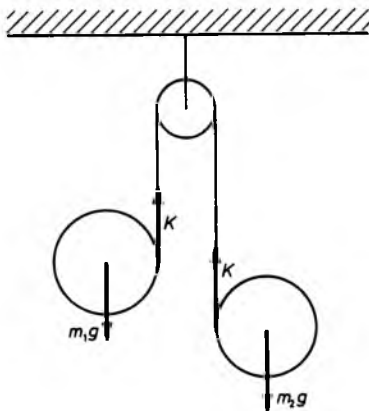
$$m_1 = 0,139 \text{ kg}.$$

A testek elmozdulása 1 s alatt:

$$\Delta x_1 = \frac{0,12}{2} 1^2 = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm};$$

$$\Delta x = \frac{0,72}{2} 1^2 = 0,36 \text{ m} = 36 \text{ cm}.$$

Mindkettő lefelé mozog, ezért a korong helyzeti energiája $1,5 \cdot 10 \cdot 0,36 = 5,4 \text{ J}$ -al csökken, a másik test helyzeti energiája



IX. 7. ábra

$0,139 \cdot 10 \cdot 0,06 = 0,083 \text{ J}$ -al lesz kisebb mint induláskor volt. A két test sebessége $v_1 = 0,12 \text{ m/s}$, $v = 0,72 \text{ m/s}$, a korong szögsebessége pedig 6 1/s . Így a mozgási energiák:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,139 \cdot 0,12^2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ J},$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,72^2 = 0,389 \text{ J},$$

és a forgási energia

$$E_{\text{forg}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0108 \cdot 6^2 = 0,1944 \text{ J}.$$

IX/7. Írjuk fel a dinamikai egyenleteket és a kényszerfeltételt (IX. 7. ábra):

$$m_1 g - K = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$m_2 g - K = m_2 a_2, \quad (2)$$

$$K r_1 = \Theta_1 \beta_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} \beta_1, \quad (3)$$

$$K r_2 = \Theta_2 \beta_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \beta_2, \quad (4)$$

$$a_1 + a_2 = r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2. \quad (5)$$

Helyettesítsük be az adatokat és rendezzük

a (3) és (4) egyenleteket.

$$10 - K = a_1,$$

$$12 - K = 1,2a_2,$$

$$\frac{2K}{1} = r_1\beta_1,$$

$$\frac{2K}{1,2} = r_2\beta_2.$$

Adjuk össze a két utóbbi egyenletet:

$$\left(2 + \frac{2}{1,2}\right)K = a_1 + a_2.$$

Az előző két egyenlet:

$$10 - K = a_1,$$

$$10 - \frac{K}{1,2} = a_2.$$

Ezt a két egyenletet is összeadjuk:

$$20 - K\left(1 + \frac{1}{1,2}\right) = a_1 + a_2.$$

Tehát

$$20 = 3\left(1 + \frac{1}{1,2}\right)K.$$

Így $K = 3,63$ N, ezért $a_1 = 6,4$ m/s², $a_2 = 7$ m/s², $\beta_1 = 72,6$ 1/s², $\beta_2 = 75,6$ 1/s². Ha a második korong t idő alatt tesz meg 0,4 méter utat, akkor

$$0,4 = \frac{7}{2}t^2,$$

azaz $t = 0,34$ s. Ez idő alatt az első test

$$s = \frac{6,4}{2} \cdot 0,34^2 = 0,37$$

utat tesz meg. Mindkét test helyzeti energiája csökken: az első testé 3,7 J-lal, a másik testé 4,8 J-lal. A két test sebessége és szögsebessége: $v_1 = 2,18$ m/s, $v_2 = 2,38$ m/s,

$\omega_1 = 24,7$ 1/s, $\omega_2 = 25,8$ 1/s. A mozgási és a forgási energiák:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_1\omega_1^2 =$$

$$= 2,37 + 1,53 = 3,9$$
 J,

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\omega_2^2 = 3,4 + 1,273 =$$

$$= 4,67$$
 J.

A helyzeti energiák összegének a csökkenése egyenlő a mozgási és a forgási energiák összegének a növekedésével.

IX/8. A dinamikai törvények (IX. 8. ábra):

$$F - S = ma,$$

$$Sr = \Theta\beta.$$

A tapadás miatt

$$a = r\beta,$$

de ekkor teljesülni kell annak, hogy

$$S \leq \mu mg.$$

Behelyettesítve:

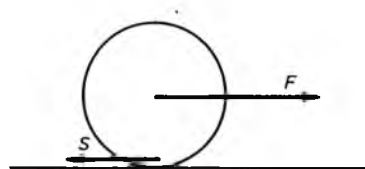
$$12 - S = 1a,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1a.$$

Így

$$12 = \frac{3}{2}a,$$

tehát $a = 8$ m/s². Ekkor $S = 4$ N, másrészt



IX. 8. ábra

$4 \leq \mu 10$, tehát $0,4 \leq \mu$. Vagyis a súrlódási együtthatónak 0,4-nél nagyobbak vagy ezzel egyenlőnek kell lennie. A szöggyorsulás:

$$\beta = a/r = 80 \text{ 1/s}^2.$$

IX/9. Írjuk fel a mozgást leíró dinamikai egyenleteket:

$$F - S = ma,$$

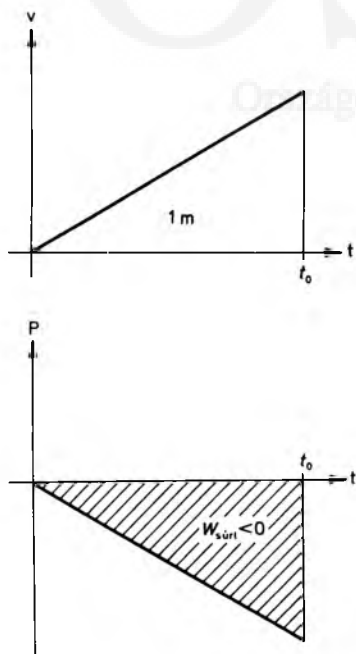
$$Sr = \Theta \beta,$$

most azt sejtjük, hogy a test csúszik, ezért $S = \mu mg = 2 \text{ N}$. Így

$$12 - 2 = 1a$$

$$2 \cdot 0,1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1^2 \beta,$$

tehát $a = 10 \text{ m/s}^2$, $\beta = 40 \text{ 1/s}^2$. Valóban $a > r\beta$, a korong tényleg csúszik. Ha a korong tengelye t_0 idő alatt tett meg 1 m-t,



IX. 9. ábra

akkor (IX. 9. ábra):

$$s = 1 \text{ m} = \frac{10}{2} t_0^2,$$

$$t_0 = \sqrt{0,2} \text{ s} \approx 0,45 \text{ s}.$$

A kerék talajjal érintkező pontjának sebessége: $v = v_{\text{kp}} - r\omega$, azaz a középpont sebességéből ki kell vonni a kerületi sebességet:

$$v(t) = at - r\beta t = (a - r\beta)t \geq 0, \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

A súrlódási erő teljesítménye:

$$\begin{aligned} P(t) &= -\mu mg(a - r\beta)t = \\ &= -2(10 - 4)t = -12t. \end{aligned}$$

A súrlódási erő munkája így

$$W_s = \frac{-12t_0 \cdot t_0}{2} = -1,2 \text{ J}.$$

A húzóerő munkája:

$$W_F = 12 \cdot 1 = 12 \text{ J}.$$

A korongon végzett munka így 10,8 J. Ez egyenlő a mozgási és a forgási energia növekedésével:

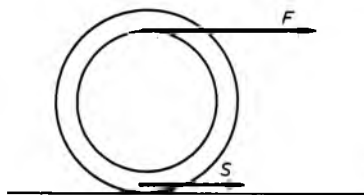
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 &= \\ &= \frac{1}{2} ma^2 t^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mr^2 \beta^2 t^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 \cdot 0,2 + \frac{1}{4} \cdot 0,1^2 \cdot 40^2 \cdot 0,2 = \\ &= 10,8 \text{ J}. \end{aligned}$$

IX/10. Az impulzusra és az impulzusmomentumra vonatkozó Newton-törvények (IX. 10. ábra):

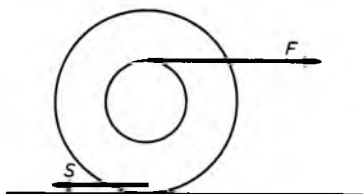
$$F + S = ma, \quad (1)$$

$$Fr - SR = \Theta \beta. \quad (2)$$

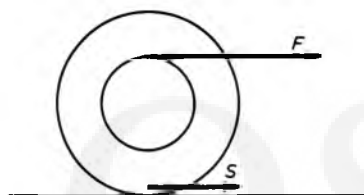
Tegyük fel, hogy a korong tapad. Ez azt



IX. 10.
ábra



IX. 11.
ábra



IX. 12.
ábra

jelent, hogy $a = R\beta$, de ekkor utólag majd ellenőrizni kell az $S \leq \mu mg$ feltétel teljesülését. Helyettesítsük be az adatokat:

$$30 + S = 5a,$$

$$F \cdot 0,3 - S \cdot 0,4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,4^2 \frac{a}{0,4},$$

így

$$30 + S = 5a,$$

$$30 \cdot 0,3 - S \cdot 0,4 = a.$$

Szorozzuk meg most az így kapott második egyenletet 5-tel, és tegyük egyenlővé a bal oldalakat:

$$30 + S = 1,5 \cdot 30 - 2S,$$

$$3S = 15 \text{ N},$$

$$S = 5 \text{ N}.$$

Mivel $\mu mg = 7,5 \text{ N}$, S kisebb, mint μmg . Ez azt jelenti, hogy a korong valóban tapad. Így

$$30 + 5 = 5a,$$

tehát $a = 7 \text{ m/s}^2$, és mert

$$a = R\beta,$$

ezért $\beta = 17,5 \text{ 1/s}^2$.

IX/11. Tegyük fel, hogy a kerékre ható súrlódási erő balra mutat (IX. 11. ábra), ekkor

$$F - S = ma, \quad (1)$$

és

$$Fr + SR = \Theta \beta = \frac{mR^2}{2} \beta. \quad (2)$$

Tegyük fel azt is, hogy a korong tapad, ekkor

$$a = R\beta. \quad (3)$$

A feladat megoldásához hozzátartozik az $S \leq \mu mg$ feltétel ellenőrzése. A második egyenletbe helyettesítsük a (3)-ból β -t, majd fejezzük ki az így kapott egyenletből ma -t. Vegyük figyelembe az (1) egyenletet, ekkor

$$S = \frac{F}{3} \left(1 - \frac{2r}{R} \right) = 4,16 \text{ N}.$$

Ez valóban nem nagyobb $\mu mg = 7,5 \text{ N}$ -nál. Visszahelyettesítve (1)-be és (3)-ba: $a = 4,16 \text{ m/s}^2$, $\beta = 10,41 \text{ 1/s}^2$.

IX/12. Az impulzus és a impulzusmomentum mérlegegyenlete (IX. 12. ábra):

$$F + S = ma, \quad (1)$$

$$Fr - SR = \Theta \beta. \quad (2)$$

Tegyük fel, hogy a korong tapad, azaz

$$a = R\beta. \quad (3)$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$S = \frac{F}{3} \left(\frac{2r}{R} - 1 \right) = 0.$$

Ami azt jelenti, hogy a korong valóban tapad, bár nem lép fel súrlódási erő. Így

$$a = \frac{F}{m} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \beta = \frac{a}{R} = 12,5 \frac{1}{\text{s}^2}.$$

Nyilvánvaló, hogy a korong középpontja egyenletesen gyorsul, így

$$l = \frac{5}{2} t^2$$

alapján $t = \sqrt{0,4} = 0,63$ s. A korong szögsebessége ekkor $\omega = \beta t = 7,9$ 1/s, a sebessége pedig $v = at = 3,16$ m/s. A sajátperdület:

$$N_s = \Theta \omega = \frac{1}{2} m R^2 \omega = 0,4 \cdot 7,9 = 3,16 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

a pályaperdület pedig:

$$N_p = R m v = 6,32 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Megjegyzés: Az összes perdület:

$$N = 9,48 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Nyilvánvaló, hogy

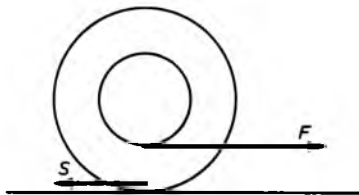
$$\Delta N = 9,48 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

hiszen $N(0) = 0$. Ez a perdületnövekedés az F erő forgatónyomatéból származik:

$$F(r + R)\Delta t = \Delta N,$$

$$25 \cdot 0,6 \sqrt{0,4} = 9,48.$$

A talajon lévő vonatkoztatási ponthoz viszonyítva az F karja $r + R$.



IX. 13. ábra

IX/13. A dinamika alapegyenlet (IX. 13. ábra):

$$F - S = ma, \quad (1)$$

$$SR - Fr = \Theta \beta. \quad (2)$$

Tegyük fel, hogy a korong tapad:

$$a = R\beta. \quad (3)$$

Az (1), (2), (3) egyenletrendszerből:

$$S = \frac{F}{3} \left(\frac{2r}{R} + 1 \right) = 16,7 \text{ N},$$

ez azonban nagyobb, mint $\mu mg = 15$ N, vagyis a korong nem tapad. Akkor viszont csúszik, tehát

$$S = \mu mg = 15 \text{ N}. \quad (4)$$

Az (1), (2), (4) egyenletekből:

$$a = 1 \text{ m/s}^2,$$

$$\beta = 0.$$

Az az érdekes eset következik be, hogy a korong úgy halad, hogy közben nem forog.

IX/14. A dinamikai egyenletek:

$$F - S = ma, \quad (1)$$

$$SR - Fr = \Theta \beta. \quad (2)$$

Tegyük fel most, hogy a korong csúszik:

$$S = \mu mg. \quad (3)$$

Az (1), (2), (3) egyenletrendszerből $S = 12,5 \text{ N}$, $a = 2,5 \text{ m/s}^2$, és $\beta = 0$, hiszen $SR = Fr$. Ismét az az érdekes eset fordul elő, hogy a korong anélkül halad, hogy forogna.

IX/15. A súrlódási erő nem lép fel, ezért a korong szögsebessége nulla. A testre ható egyetlen erő gyorsítja a korongot:

$$F = ma,$$

innen $a = 10 \text{ m/s}^2$.

IX/16. A súrlódási erő most is nulla. A dinamikai egyenletek:

$$F = ma,$$

$$FR = \Theta \beta.$$

Innen egyrészt $a = 2 \text{ m/s}^2$, másrészt $\beta = 26,6 \text{ 1/s}^2$. (Nyilvánvaló, hogy $a < r\beta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, vagyis a korong „kipörög”. Ha

súrlódás fellépne, akkor ez azt eredményezné, hogy a gyorsulás növekedne, a szöggyorsulás csökkenne.

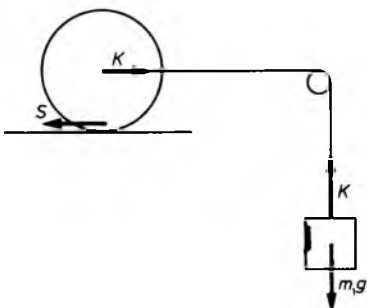
IX/17. Írjuk fel a Newton-törvényeket és a kényszeregyenlet (IX. 14. ábra):

$$m_1 g - K = m_1 a,$$

$$K - S = ma,$$

$$Sr = \Theta \beta,$$

$$a = r\beta.$$



IX. 14. ábra

Innen

$$5 - K = 0,5a,$$

$$K - S = 2a,$$

$$S = \frac{2a}{2} = a.$$

Adjuk össze a három egyenletet:

$$5 = 3,5a,$$

ebből

$$a = 1,42 \text{ m/s}^2,$$

továbbá

$$\beta = \frac{a}{r} = 7,14 \frac{1}{\text{s}^2}, \quad S = 1,42 \text{ N}.$$

Teljesülni kell az $S \leq \mu mg$ feltételnek:

$$1,42 \leq 20\mu,$$

$$0,07 \leq \mu.$$

Világos, hogy ha a korong t idő alatt tesz meg $0,4$ métert, akkor

$$0,4 = \frac{1,42}{2} t^2,$$

így $t = \sqrt{0,56} = 0,75 \text{ s}$. A korong sebessége ekkor: $v = at = 1,42 \cdot 0,75 = 1,06 \text{ m/s}$, és a szögsebessége: $\omega = \beta t = 7,14 \cdot 0,75 = 5,34 \text{ 1/s}$. A mozgási energiája:

$$\frac{1}{2} mv^2 \approx 1,13 \text{ J},$$

a forgási energiája pedig:

$$\frac{1}{2} \Theta \omega^2 \approx 0,57 \text{ J}.$$

A korong energiája $1,7 \text{ J}$ -al nő. Ennyi munkát végzett a korong középpontjában ható kötél-erő. A test helyzeti energiája $0,5 \cdot 10 \cdot 0,4 = 2 \text{ J}$ -al csökken, a mozgási

energiája

$$\frac{1}{2}mv^2 \approx 0,3 \text{ J}$$

-lal nő, az összes energiaváltozás $-1,7 \text{ J}$. Ennyi munkát végzett a testre ható kötél-erő.

IX/18. A mozgást leíró egyenletek a IX. 15. ábra alapján:

$$m_1g - K = m_1a_1, \quad (1)$$

$$K + S = m_2a_2, \quad (2)$$

$$KR - SR = \Theta\beta, \quad (3)$$

$$a_2 = R\beta, \quad (4)$$

$$a_1 = a_2 + R\beta. \quad (5)$$

A (3)-ból R -rel osztva és

$$\Theta = \frac{1}{2}m_2R^2, \quad \beta = \frac{a_2}{R}$$

figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$K - S = \frac{m_2a_2}{2}.$$

Adjuk ezt a (2) egyenlethez:

$$2K = \frac{3}{2}m_2a_2,$$

vagyis

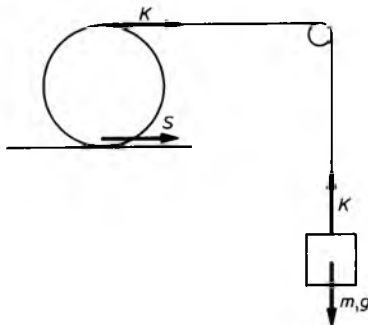
$$K = \frac{3}{4}m_2a_2. \quad (6)$$

Írjuk be ezt az (1) egyenletbe, és vegyük figyelembe, hogy az (5) és a (4) egyenlőségek

$$a_1 = 2a_2, \quad (7)$$

ekkor a_2 -re a következő egyenletet kapjuk:

$$m_1g - \frac{3}{4}m_2a_2 = 2m_1a_2. \quad (8)$$



IX. 15. ábra

Ebből $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$, így a (7) alapján $a_1 = 4 \text{ m/s}^2$, továbbá $S = 1 \text{ N}$, ezért $\mu \geq 0,05$.

Az m_1 tömegű test 1 m utat $t = \sqrt{0,5} = 0,7071 \text{ s}$ alatt teszi meg, mert

$$1 = \frac{4}{2}(\sqrt{0,5})^2.$$

A korong sebessége: $v = 1,41 \text{ m/s}$, a szögsebessége: $\omega = 7,07 \text{ 1/s}$. A mozgási energia:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = 2 \text{ J},$$

a forgási energia:

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = 1 \text{ J},$$

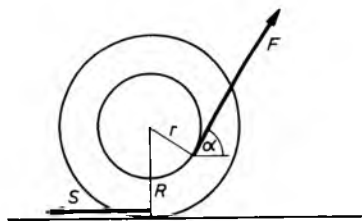
ugyanis $\Theta = 0,04 \text{ kg m}^2/\text{s}$. Ennyi munkát végzett a korong peremén ható kötél-erő. A súrlódási erő munkája nulla, mert az a pont, amelyre a súrlódási erő hat, áll.

IX/19. A Newton-egyenletek (kettő a korongra ható erők függőleges és vízszintes komponenseire, egy pedig a forgatónyomatékok összegére — a IX. 16. ábra alapján):

$$N - mg + F \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$F \cos \alpha - S = ma, \quad (2)$$

$$SR - Fr = \Theta\beta, \quad (3)$$



IX. 16.
ábra

a tapadás miatt:

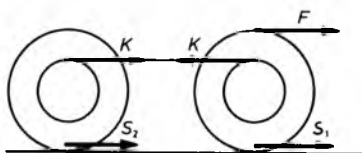
$$a = R\beta. \quad (4)$$

Behelyettesítve és a számolást elvégezve érdekes eredményt kapunk: a test gyorsulása nulla, és mert $v(0) = 0$, a test áll. Statikai szempontból egyensúlyi állapot áll fenn. A súrlódási erő $S = 5$ N. Az $S \leq \mu N$ feltételből: $\mu \geq 0,16$. Ez a statikai egyensúly és a tapadás feltétele.

IX/20. A feladat megoldását szolgáltató egyenletrendszer azonos a IX/19. feladat (1) — (4) egyenletrendszerével. Most azonban $\alpha = 45^\circ$. Az adatokat behelyettesítve és a számolást elvégezve azt kapjuk, hogy $a = 0,345 \text{ m/s}^2$, $\beta = 0,8625 \text{ 1/s}^2$, $S = 5,69$ N és a μ -re teljesülni kell a $\mu \geq 0,173$ feltételnek.

IX/21. A feladat csekély mértékű módosítása a IX/19. és IX/20. feladatoknak. Most $\alpha = 75^\circ$. A IX/19. feladat megoldásánál látott (1) — (4) egyenletek most is érvényben vannak. Az adatok behelyettesítése után és a számolást elvégezve azt kapjuk, hogy $a = -0,4 \text{ m/s}^2$. Ez azt jelenti, hogy a korong hátrafelé mozog, a súrlódási erő elhúzza.

IX/22. A dinamikai törvények a IX. 17. ábra alapján:



IX. 17.
ábra

$$F + S_1 - K = ma, \quad (1)$$

$$K + S_2 = ma, \quad (2)$$

$$FR - S_1 R - Kr = \Theta \beta, \quad (3)$$

$$Kr - S_2 R = \Theta \beta. \quad (4)$$

A kényszerfeltételt egyrészt azzal vettük figyelembe, hogy a két test gyorsulása és a két test szöggyorsulása azonos, másrészt a tapadás feltétele:

$$a = R\beta. \quad (5)$$

Az adatokat behelyettesítjük és az egyenletrendszert megoldjuk. A gondolatmenetünk vázlatosan a következő. Először (5) alapján: $ma = 5 \cdot 0,2\beta = \beta$. Így (1)-be és (2)-be helyettesítve majd összeadva:

$$20 + S_1 + S_2 = 2\beta. \quad (6)$$

A (3) és a (4) egyenleteket összeadva, egyszerűsítve:

$$20 - S_1 - S_2 = mR\beta = \beta. \quad (7)$$

A (6) és a (7) egyenleteket összeadva:

$$40 = 3\beta,$$

tehát $\beta = 13,3 \text{ 1/s}^2$, és $a = 2,6 \text{ m/s}^2$. A (2) és a (4) egyenletekből egyszerűen kapható, hogy $S_2 = 0,8$ N, így egyrészt (6)-ból $S_1 = 5,8$ N, másrészt pl. (4)-ből $K = 12,5$ N.

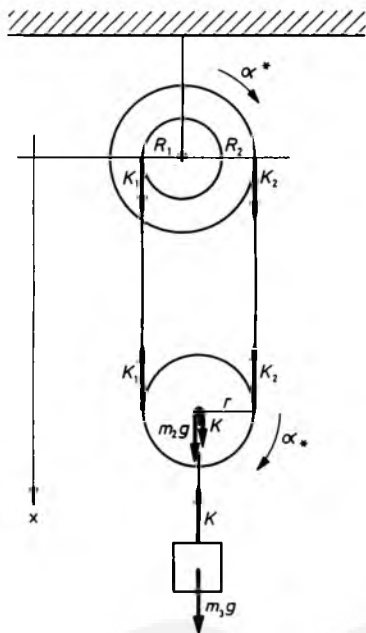
IX/23. A felső kettős korong kisebbik sugara legyen R_1 , a nagyobbik R_2 , a mozgó csiga sugara r . Ekkor

$$2r = R_1 + R_2.$$

A felső henger szöggyorsulását β^* -gal, az alsóét β_* -gal fogjuk jelölni. Ezen túl a IX. 18. ábra jelöléseit felhasználva a dinamikai egyenletek:

$$m_2 g + K - K_1 - K_2 = m_2 a, \quad (1)$$

$$m_3 g - K = m_3 a, \quad (2)$$



IX. 18.
ábra

$$K_2 R_2 - K_1 R_1 = \Theta^* \beta^*, \quad (3)$$

$$K_1 r - K_2 r = \Theta_* \beta_*. \quad (4)$$

A kényszeregyenletek felállítása a feladat legnehezebb része. Legyen a mozgó csiga középpontjának a koordinátja x , ez kezdetben l_0 . Tegyük fel, hogy a felső henger elfordul α^* -gal, az alsó α_* -gal. Így

$$x = l_0 + R_2 \alpha^* - r \alpha_*,$$

a jobb oldali kötel hossza a felső kerékről letekeredő, és az alsóra rátekeredő fonálhossz különbségével nő. Ugyanaz a másik oldalon is:

$$x = l_0 + r \alpha_* - R_1 \alpha^*,$$

azaz a bal oldali függőleges kötélag hossza az alsó kerékről leváló $r \alpha_*$ fonálhossz és a felső kisebbik kerékre feltekeredő $R_1 \alpha^*$ ívhossz különbsége. Ebből a két geometriai jellegű összefüggésből az

$$a = R_2 \beta^* - r \beta_*, \quad (5)$$

$$a = r \beta_* - R_1 \beta^*. \quad (6)$$

kényszeregyenletekhez jutunk. Behelyettesítjük az adatokat. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$20 + K - K_1 - K_2 = 2a, \quad (7)$$

$$30 - K = 3a, \quad (8)$$

$$K_2 \cdot 0,4 - K_1 \cdot 0,3 = 0,8 \beta^*, \quad (9)$$

$$K_1 \cdot 0,35 - K_2 \cdot 0,35 = 0,1225 \beta_*, \quad (10)$$

$$a = 0,4 \beta^* - 0,35 \beta_*, \quad (11)$$

$$a = 0,35 \beta_* - 0,3 \beta^*. \quad (12)$$

A (7) és a (8) egyenletek összege:

$$50 - K_1 - K_2 = 5a. \quad (13)$$

A (11) és (12) egyenletekből

$$\beta^* = \beta_* = 20a$$

adódik. Ezt az egyenlőséget felhasználva a (9), (10), (13) egyenletrendszer megoldása:

$$a = 0,13 \text{ m/s}^2, \quad K_1 = 25 \text{ N}, \quad K_2 = 24 \text{ N},$$

ezért

$$\beta^* = \beta_* = 2,6 \text{ 1/s}^2.$$

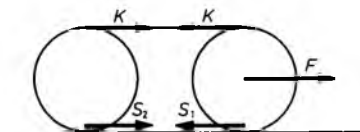
IX/24. Az impulzus és az impulzusmomentum mérlegegyenletei (IX. 19. ábra):

$$F - S_1 - K = ma, \quad (1)$$

$$K + S_2 = ma, \quad (2)$$

$$S_1 r - Kr = \Theta \beta, \quad (3)$$

$$Kr - S_2 r = \Theta \beta, \quad (4)$$



IX. 19.
ábra

hiszen a két test gyorsulása és szöggyorsulása azonos, ez azért van így, mert mindkét test tapad, vagyis

$$a = r\beta. \quad (5)$$

Helyettesítsünk be az (1) — (4) egyenletekbe, és vegyük figyelembe az (5) egyenletet. Ekkor

$$24 - S_1 - K = 4a, \quad (6)$$

$$K + S_2 = 4a, \quad (7)$$

$$S_1 - K = 2a, \quad (8)$$

$$K - S_2 = 2a. \quad (9)$$

Adjuk össze a négy egyenletet:

$$24 = 12a,$$

így

$$a = 2 \text{ m/s}^2, \quad \beta = 10 \text{ 1/s}^2.$$

A (6) és a (8) egyenleteket vonjuk ki egymásból:

$$24 - 2S_1 = 2a,$$

tehát $S_1 = 10 \text{ N}$. Másrészt a (7) és a (9) egyenletek különbsége:

$$2S_2 = 2a, \quad S_2 = 2 \text{ N}.$$

A tapadás feltétele az, hogy fennálljanak az

$$S_1 \leq \mu mg,$$

$$S_2 \leq \mu mg$$

feltételek:

$$10 \leq \mu \cdot 20,$$

$$2 \leq \mu \cdot 20,$$

tehát $0,5 \leq \mu$ és $0,1 \leq \mu$. A súrlódási együttható $0,5$ -nél nem lehet kisebb, mert különben legalább az egyik test megcsúszik.

IX/25. A testre ható erők függőleges komponenseinek az összege nulla:

$$F + N - mg = 0. \quad (1)$$

A testre vízszintesen egyetlen erő hat, bal kéz felé mutató irányba:

$$-S = ma. \quad (2)$$

A súrlódási erő pozitív irányba, az F erő negatív irányba forgat (IX. 20. ábra):

$$Sr - Fr = \Theta\beta. \quad (3)$$

A tapadás azt jelenti, hogy

$$a = r\beta. \quad (4)$$

Természetesen teljesülni kell az $S \leq \mu N$ feltételnek. Helyettesítsük be az adatokat! A (3) és a (4) egyenletekből:

$$S - 12 = 2a,$$

a (2) egyenlet pedig:

$$-S = 4a.$$

Adjuk össze ezt a két egyenletet:

$$-12 = 6a,$$

tehát $a = -2 \text{ m/s}^2$, $\beta = 10 \text{ 1/s}^2$. A (2) egyenlőségéből

$$S = 8 \text{ N}.$$

Mivel (1)-ből a nyomóerő $N = 28 \text{ N}$, tehát

$$8 \leq \mu \cdot 28,$$

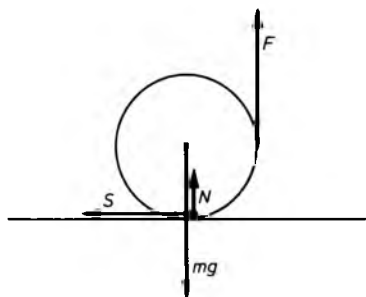
vagyis a tapadás feltétele: $\mu \geq 0,29$.

IX/26. A fonálon függő testre ható erők eredője:

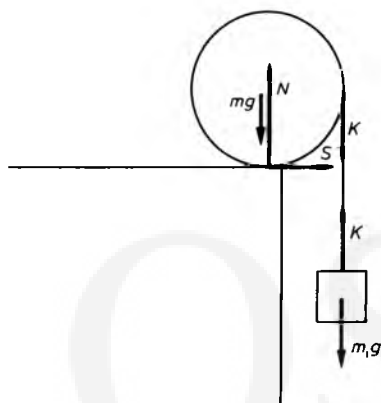
$$m_1 g - K = m_1 a_1, \quad (1)$$

a korongra vízszintesen a súrlódási erő hat:

$$S = ma, \quad (2)$$



IX. 20.
ábra



IX. 21.
ábra

függőleges erők eredője nulla:

$$N - mg - K = 0.$$

A korongot az óra mutatójának járásával egy irányban — ezt tekintjük pozitív irányúnak — a K kötél erő, ellentétes irányban a súrlódási erő forgatja (IX. 21. ábra):

$$Kr - Sr = \Theta\beta. \quad (3)$$

A tapadás feltétele az, hogy

$$a = r\beta. \quad (4)$$

Legyen A az a pont, ahol a fonál elválik a korongtól. Ennek a pontnak a gyorsulása $\sqrt{a^2 + r^2\beta^2} = \sqrt{2}a$ nagyságú és a vízszintessel 45° -os szöget zár be. Ennek a gyorsulásnak a függőleges összetevője a_1 -gyel

egyenlő, tehát

$$\sin 45^\circ \cdot \sqrt{2}a = a_1$$

$$a = a_1 = r\beta. \quad (5)$$

Az (1) — (5) egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

$$S = 5,71 \text{ N}.$$

IX/27. A dinamikai törvények (IX. 22. ábra):

$$m_2g - K_2 = m_2a_2, \quad (1)$$

$$K_1 - m_1g = m_1a_1, \quad (2)$$

$$K_2 - K_1 - S = ma, \quad (3)$$

$$K_2r + SR - K_1R = \Theta\beta. \quad (4)$$

A kényszerfeltételek:

$$a = R\beta, \quad (5)$$

$$a + r\beta = a_2, \quad (6)$$

$$a + R\beta = a_1. \quad (7)$$

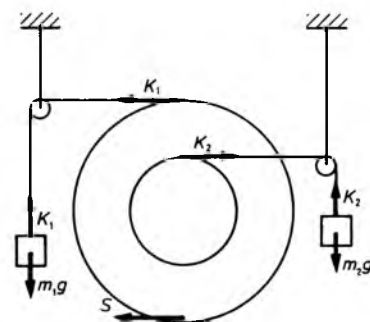
Behelyettesítjük az adatokat és figyelembe vesszük az (5), (6), (7) egyenleteket:

$$50 - K_2 = 1,75\beta, \quad (8)$$

$$K_1 - 30 = 1,2\beta, \quad (9)$$

$$K_2 - K_1 - S = 1\beta, \quad (10)$$

$$0,75K_2 - K_1 + S = 0,5\beta. \quad (11)$$



IX. 22.
ábra

Adjuk össze a (8), (9), (10) egyenleteket:

$$20 - S = 3,95\beta. \quad (12)$$

Szorozzuk meg a (8) egyenletet 0,75-tel:

$$-0,75K_2 + 37,5 = 1,3125\beta. \quad (13)$$

Adjuk össze a (9), (12), (13) és (11) egyenleteket:

$$27,5 = 6,9625\beta,$$

innen $\beta = 3,95 \text{ 1/s}^2$, így $a = 0,79 \text{ m/s}^2$. A korong 0,2 m-t $t = 0,71 \text{ s}$ idő alatt tesz meg, hiszen

$$0,2 = \frac{0,79}{2} t^2.$$

A korong sebessége ekkor $v = 0,56 \text{ m/s}$, és a szögsebesség $\omega = 2,8 \text{ 1/s}$. Így a korong energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = 1,176 \text{ J}.$$

IX/28. A gömb mozgására vonatkozó dinamikai törvények:

$$mg \sin \alpha - S = ma, \quad (1)$$

$$N - mg \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$Sr = \Theta\beta. \quad (3)$$

Tegyük fel, hogy a gömb tapadva gördül. Ekkor

$$a = r\beta, \quad (4)$$

és ellenőrizni kell az $S \leq \mu N$ feltétel teljesülését. A (3) és a (4) egyenletek alapján:

$$S = \frac{2}{5}ma.$$

Helyettesítsük (1)-be:

$$mg \sin \alpha = \frac{7}{5}ma.$$

Így

$$a = \frac{5g \sin \alpha}{7},$$

és ezért

$$S = \frac{2}{7}mg \sin \alpha.$$

A tapadás feltétele alapján

$$\frac{2}{7}mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha,$$

$$\text{vagyis } \frac{2}{7} \tan \alpha \leq \mu,$$

$$0,16 \leq \mu.$$

Ez nem teljesül a feladatban, ezért a (4) egyenlet helyett az

$$S = \mu mg \cos \alpha = 2,6 \text{ N}$$

egyenlőséget használjuk, tehát (1)-ből:

$$10 - 2,6 = 2a$$

$$a = 3,7 \text{ m/s}^2,$$

és (3)-ból:

$$2,6 = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot 0,2\beta,$$

$$\beta = 16,25 \text{ 1/s}^2.$$

Ha a korong t idő alatt megtesz 1,5 m utat, akkor

$$1,5 = \frac{3,7}{2} t^2,$$

tehát $t = 0,9 \text{ s}$. Ezért $v = 3,33 \text{ m/s}$, és $\omega = 14,63 \text{ 1/s}$. A mozgási és a forgási energia növekedése

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = 11,1 + 3,42 = 14,52 \text{ J}.$$

A helyzeti energia csökkenése:

$$mgs \sin \alpha = 20 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 15 \text{ J}.$$

Az összes energia tehát csökken: a csúszó súrlódási erő $-0,48 \text{ J}$ munkát végzett.

IX/29. Egy lejtőn mozgó tömör gömb nem csúszik meg, ha

$$\frac{2}{7} \tan \alpha \leq \mu.$$

Mivel $0,16 \leq 0,18$, alkalmazhatjuk az előző feladat megoldásakor felírt (1), (2), (3), (4) egyenleteket:

$$10 - S = 2a,$$

$$S = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot 0,2\beta,$$

$$a = 0,2\beta,$$

így

$$10 - S = 2a,$$

$$S = \frac{4}{5} a,$$

tehát $10 = 2,8a$, vagyis $a = 3,57 \text{ m/s}^2$ és $\beta = 17,85 \text{ 1/s}^2$. Figyeljünk fel arra, hogy az előző feladat eredményeihez képest milyen változásokat eredményez a súrlódási együttható „növekedése”: a gyorsulás kis mértékben csökken, a szöggyorsulás kissé nő. Ha a test most t idő alatt teszi meg az $1,5 \text{ m}$ utat, akkor $t = 0,91 \text{ s}$.

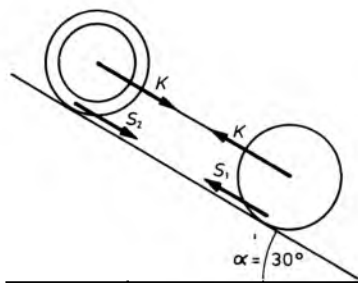
IX/30. A két test mozgását leíró dinamikai egyenletek (IX. 23. ábra):

$$mg \sin \alpha - S_1 - K = ma, \quad (1)$$

$$mg \sin \alpha - S_2 + K = ma, \quad (2)$$

$$S_1 r = \Theta_1 \beta = \frac{mr^2}{2} \beta, \quad (3)$$

$$S_2 r = \Theta_2 \beta = mr^2 \beta, \quad (4)$$



IX. 23. ábra

és a tapadás miatt:

$$a = r\beta. \quad (5)$$

Helyettesítsük az (5)-ből β -t a (3) és a (4) egyenletekbe, egyszerűsítsünk, majd adjuk össze a négy egyenletet. Ekkor $a = 2,85 \text{ m/s}^2$, és $\beta = 14,28 \text{ 1/s}^2$, ezért $S_1 = 5,7 \text{ N}$, $S_2 = 11,4 \text{ N}$. Mivel az $S_1 \leq \mu mg \cos \alpha$ és az $S_2 \leq \mu Mg \cos \alpha$ feltételeknek egyszerre teljesülni kell, ezért

$$11,4 \leq \mu \cdot 40 \cos 30^\circ,$$

$$0,33 \leq \mu.$$

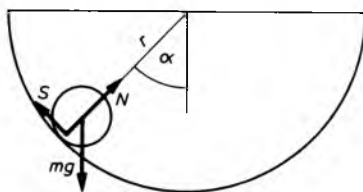
Ez a feltétele annak, hogy mindkét kerék tapadjon.

IX/31. A mozgásegyenletek (IX. 24. ábra) a középpont érintő irányú gyorsulására, a középpont centripetális gyorsulására és a szöggyorsulására:

$$mg \sin \alpha - S = ma \quad (1)$$

$$N - mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R - r}. \quad (2)$$

$$Sr = \Theta \beta. \quad (3)$$



IX. 24. ábra

Az energiamérleg (az $\alpha_0 = 60^\circ$ és az α helyzetben összehasonlítva az energiákat):

$$mg(R-r)(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2, \quad (4)$$

ahol

$$\Theta = \frac{2}{5}mv^2.$$

A tapadás feltétele:

$$a = r\beta, \quad (5)$$

$$v = r\omega. \quad (6)$$

Az (1) — (6) egyenletrendszert megoldva:

$$S = \frac{2}{7}mg \sin \alpha,$$

$$N = \frac{1}{7}mg(17 \cos \alpha - 10 \cos \alpha_0).$$

A tapadás feltétele az, hogy

$$S \leq \mu N$$

teljesüljön minden $\alpha \leq 60^\circ$ esetén. A gömb azonban nem csúszott meg, ha az α_0 helyzetben tapad, vagyis ha $\alpha = \alpha_0$, akkor

$$\frac{2}{7}mg \sin \alpha_0 \leq$$

$$\leq \mu \cdot \frac{1}{7}mg(17 \cos \alpha_0 - 10 \cos \alpha_0),$$

$$\frac{2}{7} \sin \alpha_0 \leq \mu \cos \alpha_0,$$

$$\frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha_0 \leq \mu,$$

$$0,49 \leq \mu.$$

Ez az eredmény összhangban van az előző három feladatban kapott eredményekkel.

IX/32. Az O pont körüli forgásra írjuk fel az impulzumérleget (IX. 25. ábra):

$$mg \frac{L}{2} \sin \alpha = \Theta \beta, \quad (1)$$

ahol

$$\Theta = \frac{mL^2}{3}.$$

Így

$$mg \sin \alpha \cdot \frac{L}{2} = \frac{mL^2}{3} \beta,$$

tehát

$$\beta = \frac{3g \sin \alpha}{2L} = 3,75 \frac{1}{s^2}.$$

A rúd középpontjainak a rúdra merőleges gyorsulása:

$$a_1 = \frac{L}{2} \beta = 3,75 \frac{m}{s^2}.$$

A rúd középpontja körpályán mozog, ezért a centripetális gyorsulást is számításba kell venni:

$$a_{cp} = \frac{L}{2} \omega^2 = 1\omega^2.$$

Az ω -t az energiamérlegből határozzuk meg:

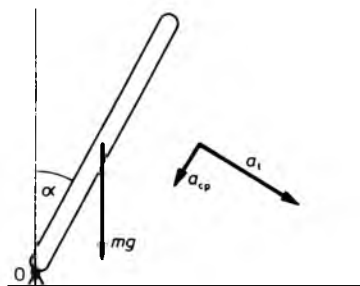
$$\frac{1}{2} \Theta \omega^2 = mg \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha),$$

vagyis

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} mL^2 \omega^2 = mg \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha),$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \alpha) = 2 \frac{1}{s^2}.$$

Így $a_{cp} = 2 \text{ m/s}^2$. A gyorsulásvektor nagysága $7,76 \text{ m/s}^2$, ezért az eredő 31 N . Ha az



IX. 25.
ábra

eredő a rúddal δ szöget zár be, akkor

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{7,5}{2},$$

vagyis $\delta = 75^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a függőlegessel $75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ szöget zár be. Így az eredő vízszintes és függőleges komponense egyaránt 22 N. A csuklóerő függőleges komponensét jelöljük Q_y -nal, ekkor

$$Q_y = 40 - 22 = 18 \text{ N},$$

a csuklóerő vízszintes összetevője 22 N. A csukló által kifejtett erő nagysága 28, 42 N, iránya a vízszintessel mintegy 40° -os szöget zár be, ugyanis

$$\operatorname{tg} 40^\circ \approx \frac{18}{28,4}.$$

IX/33. A rúd szöggyorsulása — amikor a függőlegessel $\alpha = 45^\circ$ szöget zár be — az

$$mg \sin \alpha \frac{L}{2} = \frac{mL^2}{3} \beta$$

egyenletből számolható: $\beta = 5,3 \text{ l/s}^2$. A rúd közepének érintő irányú gyorsulása:

$$a_t = \frac{L}{2} \beta = 5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A centripetális gyorsuláshoz az energia-mérlegből meghatározzuk ω^2 -et:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} mL^2 \omega^2 = mg \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha),$$

így $\omega^2 = 4,4 \text{ l/s}^2$. A centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{L}{2} \omega^2 = 4,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Legyen a gyorsulás vízszintes összetevője a_x , ekkor (IX. 26. ábra)

$$a_x = a_t \sin 45^\circ - a_{cp} \sin 45^\circ = -1,23 \text{ m/s}^2,$$

és ha a függőleges komponens a_y , akkor

$$a_y = a_t \cos 45^\circ + a_{cp} \cos 45^\circ = 4,98 \text{ m/s}^2.$$

Newton II. törvényét írjuk fel, hogy a súrlódási erőt és a nyomóerőt meghatározzuk:

$$-S = ma_x,$$

$$mg - N = ma_y.$$

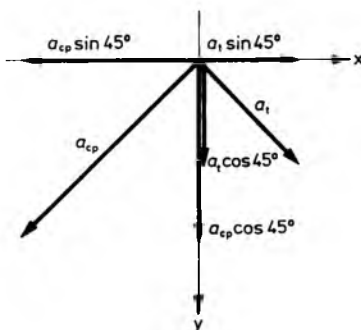
Így $S = 4,95 \text{ N}$, $N = 20 \text{ N}$. A feladat szerint a rúd 45° -os helyzetben még éppen tapad; tehát az

$$a_t = \frac{L}{2} \beta$$

mellett határesetben érvényben van az

$$S = \mu N$$

egyenlőség. Ebből $\mu = S/N = 0,246$.



IX. 26.
ábra

IX/34. Tegyük fel, hogy a henger nyugalmi helyzetében a rugó megnyúlása x_0 . Ekkor — a IX. 27. ábra alapján —

$$mg \sin \alpha - Dx_0 = 0, \quad (1)$$

és a súrlódási erő nulla, mert a hengerre ható forgatónyomaték nulla. Innen $x_0 = 0,38$ m. Tegyük fel, hogy a hengert lefelé kitérítettük az egyensúlyi helyzetéből:

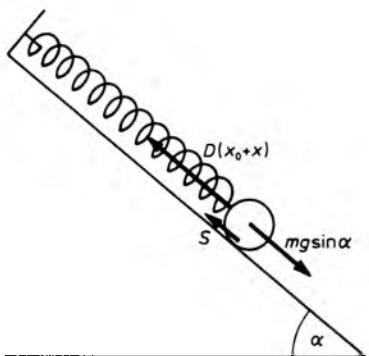
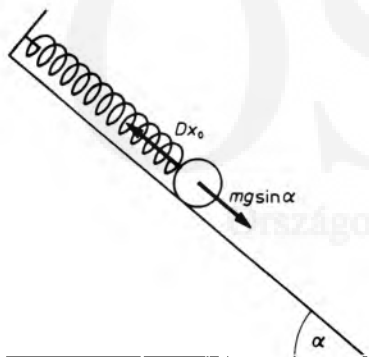
$$mg \sin \alpha - S - D(x_0 + x) = ma, \quad (2)$$

és

$$SR = \Theta \beta. \quad (3)$$

A tapadás miatt:

$$a = R\beta. \quad (4)$$



IX. 27.
ábra

Vonjuk ki (2)-ből (1)-et:

$$S - Dx = ma. \quad (5)$$

A (3) alapján

$$S = \frac{mR}{2} \frac{a}{R} = \frac{ma}{2}.$$

ezt (5)-be helyettesítve

$$-Dx = \frac{3}{2} ma,$$

így

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{3m}} = 3,33 \frac{1}{s}.$$

Ha az amplitúdó $A = 0,15$ m, akkor a maximális sebesség $0,5$ m/s, a legnagyobb gyorsulás $1,66$ m/s². Így S legnagyobb értéke:

$$S_{\max} = \frac{ma_{\max}}{2} = 1 \text{ N}.$$

A nyomóerő $mg \cos \alpha = 9,19$ N. A tapadás miatt

$$S \leq \mu N,$$

tehát: $\mu \geq 0,108$.

IX/35. Az energiamérleg alapján

$$mg \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2,$$

ahol

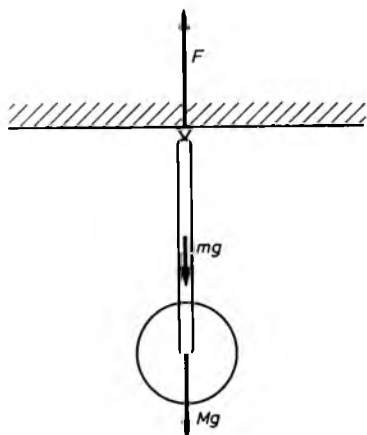
$$v = \frac{L}{2} \omega$$

a középpont sebessége;

$$\Theta = \frac{mL^2}{12}.$$

Innen

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 3,87 \frac{1}{s}.$$



IX. 28.
ábra

A középpont sebessége:

$$\frac{L}{2} \omega = 3,87 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a kezdetben a talajon lévő pont végig a talajon mozog, a végsebessége 0, a másik végponté $2 \cdot 3,87 = 7,74 \text{ m/s}$. Világos, hogy a tömegközéppont függőlegesen mozog, mert vízszintes erő nem hat.

IX/36. Newton II. törvénye a IX. 28. ábra szerint

$$F - mg - Mg = m \frac{l}{2} \omega^2 + ML \omega^2.$$

A szögsebességet az energiamérlegből határozzuk meg:

$$\frac{1}{2} \Theta \omega^2 = mg \frac{l}{2} + MgL.$$

Ezt figyelembe véve

$$\omega = \sqrt{\frac{Lg(2M+m)}{\Theta}}$$

és

$$F = (m+M)g + \frac{(2M+m)^2 L^2 g}{2}.$$

a) Ha a korong szabadon elfordulhat, akkor

$$\Theta = ML^2 + \frac{mL^2}{3},$$

a rúd tehetetlenségi nyomatékához hozzáadódik egyetlen pontban egyeztetett tömegű korong tehetetlenségi nyomatéka. Behelyettesítve $\Theta = 0,586 \text{ kg m}^2$, $\omega = 11,67 \text{ 1/s}$, és $F = 645,5 \text{ N}$.

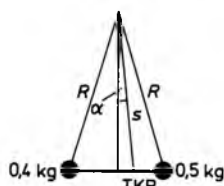
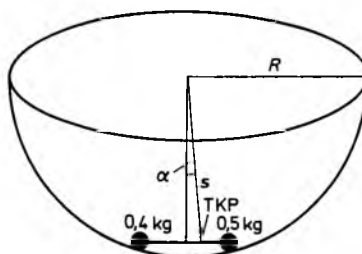
b) Ha a korong elfordulását megakadályozzuk, akkor

$$\Theta = ML^2 + \frac{mL^2}{3} + \frac{MR^2}{2},$$

a Steiner-tételt felhasználva. Tehát $\Theta = 0,66 \text{ kg m}^2$, $\omega = 10,95 \text{ 1/s}$, és $F = 540 \text{ N}$.

IX/37. Vegyük észre, hogy a félgömbben mozgó kis „súlyzó” lényegében egy fizikai inga. A fizikai inga lengésideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}},$$



IX. 29.
ábra

ahol

$$\Theta = m_1 R^2 + m_2 R^2 = 0,9 \cdot 0,3^2 = 0,081 \text{ kg m}^2,$$

$$m = m_1 + m_2 = 0,9 \text{ kg},$$

és s a súlyzó tömegközéppontjának a gömb közepétől mért távolsága, a IX. 29. ábra alapján $s = 29,58 \text{ cm}$. Így $T = 0,110 \text{ s}$, $\omega = 56,78 \text{ 1/s}$. Az α szög könnyen meghatározható: $\alpha = 0,56^\circ = 9,78 \cdot 10^{-3} \text{ radián}$. Az az ív, amely a rezgés amplitúdójának felel meg: $\alpha A = 2,93 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,93 \text{ mm}$. Így $A\omega = 0,166 \text{ m/s}$, és $A\omega^2 = 9,46 \text{ m/s}^2$.

IX/38. A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \frac{mr^2}{2} + md^2 = \frac{0,4 \cdot 0,1^2}{2} + 0,4 \cdot 0,5^2 = 0,102 \text{ kg m}^2,$$

így

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,102}{2}} = 1,42 \text{ s}.$$

IX/39. A tehetetlenségi nyomatékot a felfüggesztési pontra számoljuk:

$$\Theta = m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 (l)^2 = 3,24 \text{ kg m}^2,$$

ahol $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $l = 1,2 \text{ m}$. A súlypont és a felfüggesztési pont távolsága:

$$s = \frac{m_1 l/2 + m_2 l}{m_1 + m_2} = 1 \text{ m}.$$

Így a lengésideő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}.$$

ahol $m = m_1 + m_2$, ezért

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{3,24}{30 \cdot 1}} = 2 \text{ s},$$

$$f = 0,5 \text{ Hz}.$$

IX/40. Tegyük fel, hogy a cső megcsúszik a lejtőn. Ekkor $S = mg \cos \alpha = 2,6 \text{ N}$, így

$$mg \sin \alpha - S = 12,4 = 3a,$$

$$\text{vagyis } a = 4,13 \text{ m/s}^2. \text{ Másrészt}$$

$$Sr = \Theta \beta$$

alapján

$$2,6 = 3 \cdot 0,1 \beta,$$

$$\beta = 8,6 \text{ 1/s}^2.$$

Mivel $a > r\beta$, a cső valóban megcsúszik. A lejtőn 3 méter utat tesz meg. Ehhez t idő szükséges:

$$3 = \frac{4,13}{2} t^2,$$

$$t = 1,20 \text{ s}.$$

A korong ez idő alatt $v_0 = 4,98 \text{ m/s}$ sebességre tesz szert, és $\omega_0 = 10,44 \text{ 1/s}$ szögsebességre. Ezzel érkezik a lejtő aljához. Itt a talajjal érintkező pontjának sebessége $v_0 - r\omega_0 = 3,93 \text{ m/s}$. A cső legalsó pontjának a sebessége előre mutat. A súrlódási erő tehát hátra. A súrlódási erő most $S_1 = \mu mg = 3 \text{ N}$. Ekkor a dinamikai egyenletek:

$$-S_1 = ma_1,$$

$$S_1 r = \Theta \beta_1.$$

Innen $a_1 = -1 \text{ m/s}^2$, $\beta_1 = 10 \text{ 1/s}^2$. A cső mindaddig lassul, amíg $v > r\omega$. Amikor tapadni kezd, vagyis amikor

$$v = r\omega,$$

attól a pillanattól kezdve a súrlódási erő megszűnik. Ez a t_1 időpontban következik be,

$$v_0 + a_1 t = r(\omega_0 + \beta_1 t_1),$$

$$4,98 - 1t_1 = 0,1(10,44 + 10t_1),$$

$$4,98 - 1,044 = 2t_1,$$

$$t_1 = 1,97 \text{ s.}$$

A végsebesség:

$$v_0 + a_1 t_1 = 4,98 - 1,97 \approx 3 \text{ m/s.}$$

Megjegyzés: A cső a lejtő aljától mérve

$$s = \frac{v + v_0}{2} t = 7,8 \text{ m}$$

távolságban kezd tapadni.

IX/41. A mozgásegyenletek:

$$-S = ma,$$

$$Sr = \Theta \beta,$$

és a csúszás miatt $S = \mu mg$. Így

$$a = -\mu g = -1 \text{ m/s}^2,$$

$$\beta = \frac{\mu g}{r} = 10 \frac{1}{\text{s}^2}.$$

A cső mindaddig csúszik, amíg a legalsó pontjának a sebessége nem nulla. Akkor kezd tapadni, amikor $v - r\omega = 0$ (IX. 30. ábra):

$$v_0 + at = r(\omega_0 + \beta t) = 0,$$

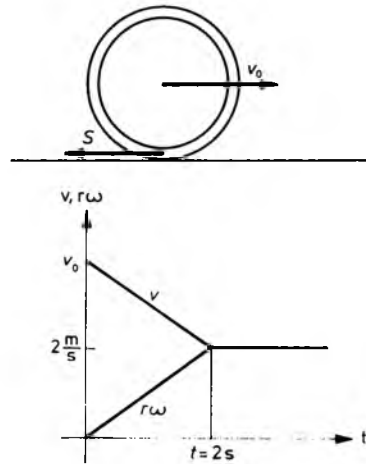
$$4 - 1t = 0,1 \cdot 10t,$$

$$t = 2 \text{ s.}$$

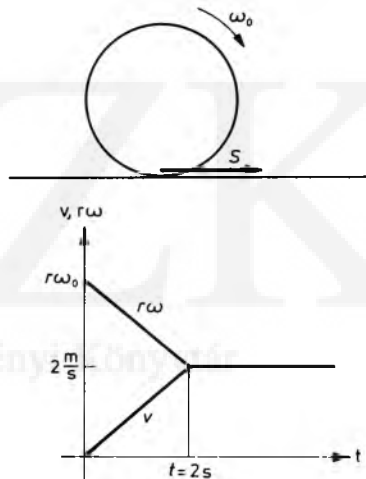
Ezért

$$x = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t = \frac{-1}{2} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 6 \text{ m}$$

utat tesz meg, amíg tapadni kezd.



IX. 30.
ábra



IX. 31.
ábra

IX/42. A kerék legalsó pontjának a kezdeti sebessége: $v_0 - r\omega_0 = 0 - 0,1 \cdot 40 = -4 \text{ m/s}$, ezért a súrlódási erő jobbra mutat (IX. 31. ábra). A dinamika alaptörvénye a haladó és a forgó mozgásra:

$$S = ma,$$

$$-Sr = \Theta \beta,$$

és $S = \mu mg$, hiszen a cső biztosan csúszik. Így $a = \mu g = 1 \text{ m/s}^2$, $\beta = -\mu g/r = -10 \text{ 1/s}^2$.

A cső abban a t pillanatban kezd tapadni, amikor a legalsó pont sebessége nulla:

$$0 = v - r\omega = (v_0 + at) - r(\omega_0 + \beta t),$$

$$0 = 1t - 0,1(4 - 10t),$$

$$t = 2 \text{ s}.$$

Ezért

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 \text{ m}, \quad v = 1 \cdot 2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

IX/43. A gömb talajjal érintkező pontjának a sebessége induláskor $v_0 - r\omega_0 > 0$, ezért a súrlódási erő balra mutat (IX. 32. ábra):

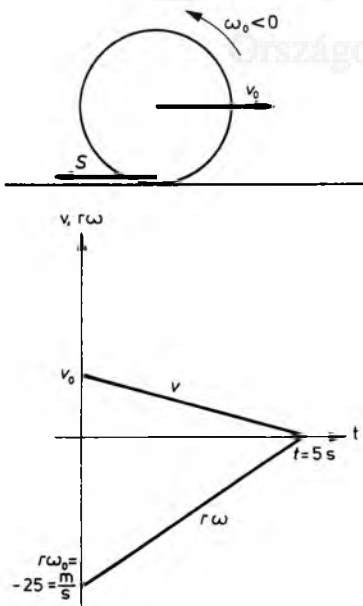
$$-S = ma,$$

$$Sr = \Theta \beta,$$

$$\Theta = \frac{2}{5} mr^2,$$

és

$$S = \mu mg.$$



IX. 32.
ábra

Ezek alapján $S = 0,2 \cdot 40 = 8 \text{ N}$, és $a = -2 \text{ m/s}^2$, $\beta = 50 \text{ 1/s}^2$. A gömb abban a t időpontban kezd tapadni, amikor

$$v - r\omega = 0,$$

azaz

$$v_0 + at = r(\omega_0 + \beta t),$$

$$10 - 2t = 0,1(\omega_0 + 50t).$$

Ekkor azonban a sebesség is nulla, felhasználva a feladat feltételeit:

$$v_0 + at = 10 - 2t = 0,$$

tehát $t = 5 \text{ s}$. Így $\omega_0 = -250 \text{ 1/s}$. A gömb

$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t = \frac{-2}{2} \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 = 25 \text{ m}$$

utat tesz meg megállásig. Az elfordulás szöge radiánban:

$$\alpha = \frac{\omega_0 t}{2} = -6,25.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a korong visszafelé forog. Nyilvánvaló, hogy

$$N = \frac{625}{2\pi} = 99,5$$

fordulatot tesz meg, amíg megáll.

IX/44. A mozgásegyenletek:

$$-S = ma,$$

$$Sr = \Theta \beta,$$

és a csúszás miatt

$$S = \mu mg.$$

A gömb csúszva visszatér az elindulás helyére, ezért abban a t pillanatban, amikor

$$v_0 + at = r(\omega_0 + \beta t)$$

teljesül, akkor az elindulás helyétől mért távolság:

$$x(t) = 0 = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t.$$

A számolást elvégezve azt kapjuk, hogy $a = -2 \text{ m/s}^2$, $\beta = 50 \text{ 1/s}^2$, $t = 10 \text{ s}$, $\omega_0 = -600 \text{ 1/s}$.

IX/45. A mozgásegyenletek:

$$S = ma,$$

$$-Sr = \Theta \beta,$$

és a csúszás miatt

$$S = \mu mg.$$

Ezért $a = 2 \text{ m/s}^2$, $\beta = -50 \text{ 1/s}^2$. Abban a t időpontban, amikor a csúszás megszűnt:

$$v_0 + at - r(\omega_0 + \beta t) = 0,$$

akkor azonban a gömb $v = 14 \text{ m/s}$ sebességre gyorsul fel, tehát

$$14 = 2t,$$

$$t = 7 \text{ s},$$

$$2 \cdot 7 = 0,1(\omega_0 + 50 \cdot 7),$$

$$\omega_0 = -210 \text{ 1/s}.$$

A gömb az indulás helyétől

$$x(7) = \frac{2}{2} \cdot 7^2 = 49 \text{ m}$$

távolságra kezd tapadni. Ezután a megszerzett sebességgel egyenletesen mozog.

IX/46. A mozgásegyenlet (IX. 33. ábra):

$$-Sr = \Theta \beta,$$

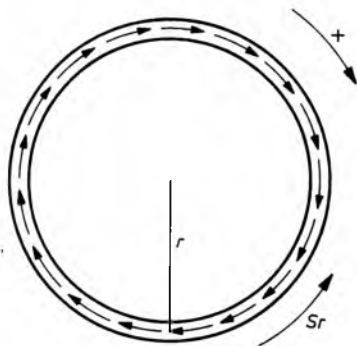
ahol a csúszás miatt

$$S = \mu mg.$$

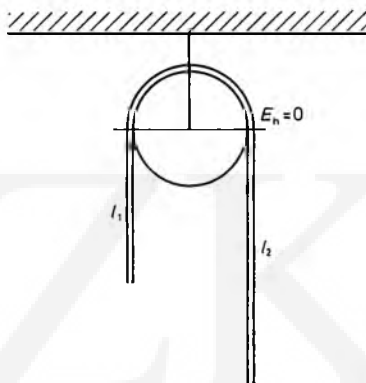
Így $\beta = 0,66 \text{ 1/s}^2$. A gyűrű kezdeti szögsebessége: $\omega_0 = 2\pi \cdot 12 = 24\pi = 75,4 \text{ 1/s}$. A forgó test abban a t pillanatban áll meg, amikor

$$\omega_0 + \beta t = 0,$$

vagyis $t = 113 \text{ s}$ telik el amíg a forgás megszűnik. A súrlódási erő által végzett mun-



IX. 33. ábra



IX. 34. ábra

ka:

$$W = -Sr = -mgr \frac{\beta}{2} t^2 = -63,8 \text{ J}.$$

Ennyivel csökkent a gyűrű forgási energiája:

$$0 - \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = -63,8 \text{ J}.$$

IX/47. Az energiamérleget alkalmazzuk. Válasszuk meg a helyzeti energia nulla szintjének a korong középpontját (IX. 34. ábra). A kezdeti energia:

$$E_1 = -m_1 g \frac{l_1}{2} - m_2 g \frac{l_2}{2} + E_0.$$

Itt E_0 a korongon fekvő félkörnyi kötél helyzeti energiája. A későbbi energia:

$$E_2 = m_3 g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 + E_0,$$

és $v = r\omega$. Az energiamérleg:

$$E_1 = E_2.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} -2,5 \cdot 10 \cdot 2,5 - 1,5 \cdot 10 \cdot 0,15 + E_0 = \\ = -4 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} (8 + 0,628) \cdot 0,2^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot 0,08 \omega^2 + E_0. \end{aligned}$$

Innen $75 = 0,2 \cdot 125 \omega^2$, $\omega = 18,78$ 1/s, és $T = 0,33$ s.

IX/48. A perdületmegmaradás tétele alapján:

$$\Theta_1 \omega_1 + \Theta_2 \omega_2 = (\Theta_1 + \Theta_2) \omega.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 6,02^2 (-20) = \\ = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,2^2 \right) \omega. \end{aligned}$$

Így azt kapjuk, hogy $\omega = 0$ 1/s, vagyis a két korong teljesen lefékezi egymást.

Megjegyzés: Az elveszett mozgási energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 \cdot 12^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,2^2 (-20)^2 = 38,4 \text{ J}. \end{aligned}$$

Az alsó korong által kifejtett súrlódási erő:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 \cdot 12^2 = -14,4 \text{ J},$$

a felső az alsón

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,2^2 \cdot 20^2 = -24 \text{ J}$$

munkát végez.

IX/49. A hengerek tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

A feladat megoldását a munkatétel alkalmazásával állítjuk elő (IX. 35. ábra):

1. eset:

$$F s = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \Theta \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2,$$

és tapadás miatt

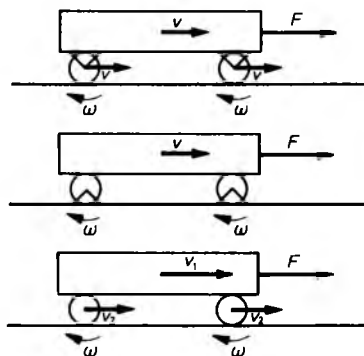
$$v = R \omega.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 1 = 1(0,1 \omega^2) + 5 \cdot 10^{-3} \omega^2 + \\ + (0,1 \omega)^2, \\ \omega = 15,49 \text{ 1/s}, \\ v = 0,1 \cdot 15,49 = 1,55 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

2. eset:

$$F s = 2 \cdot \frac{1}{2} \Theta \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2,$$



IX. 35. ábra

és a tapadás miatt itt is

$$v = R\omega.$$

Behelyettesítve: $\omega = 20 \text{ 1/s}$, $v = 2 \text{ m/s}^2$.

3. eset:

$$Fs = 2 \cdot \frac{1}{2}mv_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2.$$

Itt a tapadás miatt

$$2v_2 = v_1,$$

$$2R\omega = v_1.$$

Behelyettesítve:

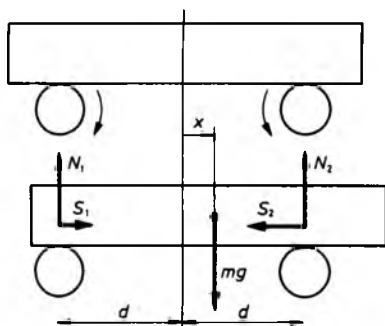
$$v_1 = 4,84 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 2,44 \text{ m/s}, \quad \omega = 24,5 \text{ 1/s}.$$

IX/50. Tegyük fel, hogy a deszka középpontját x -szel jobbra (pozitív irányba) kitértettük (IX. 36. ábra). Vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak ebben a helyzetben, és hogyan érvényesül Newton II. törvénye. A hengerek függőleges nyomóerőket fejtenek ki, jelöljük ezeket N_1 -gyel és N_2 -vel. A két nyomóerő a nehézségi erőt kompenzálja:

$$N_1 + N_2 = mg. \quad (1)$$

A bal oldali test $S_1 = \mu N_1$, a jobb oldali pedig $-S_2 = -\mu N_2$ erőt fejt ki. Ez utóbbi balra (negatív irányba) hat, ezért láttuk el negatív előjellel. A két vízszintes erő eredő-



IX. 36.
ábra

je nem nulla:

$$S_1 - S_2 = ma,$$

vagyis

$$N_1 - N_2 = ma. \quad (2)$$

A deszkára ható erők forgatónyomatékának az összege azonban zérus:

$$N_1(d+x) - N_2(d-x) = 0, \quad (3)$$

ahol $2d$ a két henger tengelyének a távolsága. Ez utóbbi egyenletből az

$$(N_1 - N_2)d = -(N_1 + N_2)x$$

egyenletet kapjuk. Vegyük figyelembe az (1) és a (2) egyenletet:

$$\frac{ma}{\mu}d = -mgx.$$

Ebből

$$a = -\frac{\mu g}{d}x, \quad (4)$$

ez pedig a harmonikus rezgőmozgás karakterisztikus egyenlete. A deszka harmonikus rezgőmozgást végez, a körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 10}{0,7}} = 1,69 \frac{1}{s},$$

és $T = 3,72 \text{ s}$. Ha a rezgés amplitúdója 10 cm , mint a feladatban szerepel, akkor

$$a_{\max} = A\omega^3 = 0,28 \text{ m/s}^2, \quad v_{\max} = 0,169 \text{ m/s}.$$

Ha a kitérés 8 cm , akkor a gyorsulás $-0,08\omega^2 = 0,23 \text{ m/s}^2$, ebben a helyzetben a sebesség — az ismert összefüggés alapján —

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2,$$

$$0,08^2 + \frac{v^2}{2,85} = 0,1^2,$$

$$v = 0,10 \text{ m/s}.$$

A (3) egyenlőségből, ha a kitérés A ,

$$N_1 - N_2 = -\frac{mgA}{d},$$

másrészt

$$N_1 + N_2 = mg.$$

A két egyenlet összege

$$2N_1 = mg \left(1 - \frac{A}{d}\right),$$

így $N_1 = 17,1$ N, $N_2 = 22,8$ N. A két súrlódási erő tehát

$$S_1 = 3,42 \text{ N}, \quad S_2 = 4,57 \text{ N}.$$

A súrlódási erő legkisebb értéke 3,42 N, a legnagyobb értéke 4,57 N.

IX/51. Tegyük fel, hogy a rudat kitértettük α szöggel. Ekkor

$$-mg \frac{l}{2} \sin \alpha - Dl^2 \alpha = \frac{ml^2 \beta}{3}$$

— a rugalmas erő ugyanis $Dl\alpha$, a forgatónyomatéka pedig $Dl^2\alpha$. Felhasználjuk a $\sin \alpha \sim \alpha$ közelítést:

$$-\left(mg \frac{l}{2} + Dl^2\right) \alpha = \frac{ml^2 \beta}{3},$$

és átrendezés után:

$$-\frac{3}{2} \frac{mg + 2Dl}{ml} \alpha = \beta.$$

Ez a harmonikus rezgőmozgás alapegyenlete. Ebből

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{mg + 2Dl}{ml}} = 4,74 \frac{1}{s},$$

és $T = 1,32$ s.

IX/52. A korong egyensúlyi állapotában a bal oldali rugó Δl_1 -gyel meg van nyújtva: $\Delta l_1 = 10$ cm. Jelöljük Δl_2 -vel ekkor a másik

rugó megnyúlását. Az egyensúly feltétele:

$$-D_1 \Delta l_1 r + D_2 \Delta l_2 R = 0. \quad (1)$$

Másrészt, ha α -val jobbra elfordítjuk a korongot, és magára hagyjuk a rendszert:

$$-D_1(\Delta l_1 + r\alpha) + D_2(\Delta l_2 - R\alpha) = \Theta \beta. \quad (2)$$

A két egyenlet különbségéből:

$$-D_1 r^2 \alpha - D_2 R^2 \alpha = \Theta \beta,$$

és mert

$$\Theta = \frac{mR^2}{2},$$

ezért

$$-(D_1 r^2 + D_2 R^2) \alpha = \frac{1}{2} mR^2 \beta.$$

Innen

$$-2 \frac{D_1 r^2 + D_2 R^2}{mR^2} \alpha = \beta.$$

Ez a harmonikus rezgőmozgás alapegyenlete, ezért

$$\omega = \sqrt{2 \frac{D_1 r^2 + D_2 R^2}{mR^2}} = \sqrt{8,84} = 2,97 \text{ 1/s}.$$

és $T = 2,11$ s.

IX/53. Az m_1 tömegű test $r_1 = l_1 \sin \alpha$ sugarú körpályán mozog. A rúd vége által a testre kifejtett erő vízszintes és függőleges összetevőjét jelöljük P_x -szel, illetve P_y -nal. Ekkor (IX. 37. ábra):

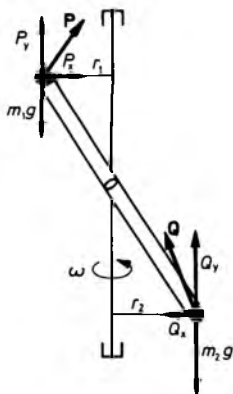
$$P_x = m_1 l \sin \alpha \cdot \omega^2, \quad (1)$$

$$m_1 g - P_y = 0. \quad (2)$$

Az m_2 tömegű testre $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)$ erőt fejt ki a rúd:

$$Q_x = m_2 l_2 \sin \alpha \cdot \omega^2, \quad (3)$$

$$m_2 g - Q_y = 0. \quad (4)$$



IX. 37.
ábra

A rúdra ható erők forgatónyomatéka a csuklóra vonatkozóan nulla:

$$P_x l_1 \cos \alpha + P_y l_1 \sin \alpha + Q_x l_2 \cos \alpha - Q_y l_2 \sin \alpha = 0. \quad (5)$$

P_x -et, P_y -t, Q_x -et, Q_y -t behelyettesítve (5)-be:

$$m_1 l_1 \sin \alpha \cdot \omega^2 l_1 \cos \alpha + m_1 g l_1 \sin \alpha + m_2 l_2 \sin \alpha \cdot \omega^2 l_2 \cos \alpha = m_2 g l_2 \sin \alpha.$$

Innen

$$(m_1 l_1 + m_2 l_2) \omega^2 \cos \alpha = (m_2 l_2 - m_1 l_1) g,$$

$$\cos \alpha = \frac{m_2 l_2 - m_1 l_1}{m_1 l_1 + m_2 l_2} \frac{g}{\omega^2}.$$

Behelyettesítve:

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 0,8 - 2 \cdot 0,6}{2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,8} \cdot \frac{10}{16} = 0,2083,$$

$$\alpha = 78^\circ.$$

IX/54. A feladat szépsége abban van, hogy világosan mutatja a mechanikai megmaradási tételek alkalmazását, azt, hogy az impulzus és az energia megmaradása ($\mu=0$, $\varepsilon=1$) mellett az impulzuszómomentum megmaradására is szükség van, különben a feladatot nem tudjuk megoldani.

Az impulzusmegmaradást a

$$m_0 v_0 = m_0 u_0 + m u \quad (1)$$

egyenlet fejezi ki, ahol m_0 a kis test tömege, v_0 a sebessége ütközés előtt, u_0 a sebessége ütközés után, valamint u az m tömegű rúd sebessége az ütközés után.

Az energia megmaradása most így fejezhető ki:

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 u_0^2 + \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2, \quad (2)$$

ahol $\Theta = mL^2/12$, a rúd tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő tengelyre nézve, ω pedig a szögsebessége.

Most három ismeretlenünk van: u_0 , u , ω . Kényszerfeltétel felírására nincs lehetőség. Harmadik egyenletünk a perdület megmaradásának a tétele. Válasszuk meg a vonatkoztatási rendszer tengelyét úgy, hogy a tömegpont impulzusmomentuma (ütközés előtt és után is) nulla legyen:

$$m_0 v_0 \cdot 0 = m_0 u_0 \cdot 0 + m u L/2 + \Theta \omega. \quad (3)$$

Figyelemre méltó, hogy az (1) egyenletben a kiterjedt testnek a mozgásmennyisége egyetlen tag, mu , a (2) egyenletben a rúd összes mozgási energiája két tagból áll, a tömegközéppontba egyesítve képzeltek tömeg mozgási energiájából és a tömegközépponthoz viszonyított mozgás energiájából, ez a forgási energia. Hasonló a helyzet a forgás mennyiségével. Az energiához hasonlóan a perdületet sem lehet „belegyömöszölni” a tömegközéppontba. Helyettesítsük be az adatokat:

$$1 \cdot 10 = 1 u_0 + 2 u,$$

$$100 = u_0^2 + 2 u^2 + \frac{1}{6} \omega^2,$$

$$0 = 0 + u + \frac{1}{6} \omega.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$u = u_0 = \frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \omega = -20 \frac{1}{\text{s}}.$$

Külön érdekessége a feladatnak — az adatok speciális választása miatt —, hogy a kis test sebessége megegyezik a rúd tömegközéppontjának a sebességével a tömegpont ütközés után a tömegközéppont „alatt” mozog. Közben a rúd elfordul, a forgás periódusideje: $T = 0,314 \text{ s}$. A forgó rúd egy fél fordulat után — most a másik végével — nekiütközik a mozgó pontnak. Ekkor az előbbi ütközés időbeli tükörképe zajlik le. A rúd megáll, a kis test pedig 10 m/s sebességgel halad.

IX/55. A testre ható erők eredője nulla:

$$K_1 + K_2 - m_1 g - m_2 g - mg = 0,$$

és ugyanígy a forgatónyomatékok eredője is. Írjuk fel a forgatónyomaték-egyensúlyt a bal oldali végpontra (IX. 38. ábra):

$$m_1 g k_1 + mg \frac{l}{2} + m_2 g k_2 - K_2 l = 0.$$

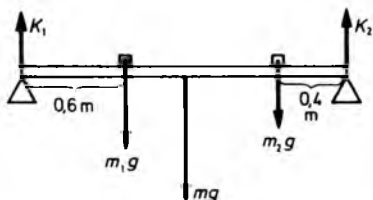
Behelyettesítjük az adatokat:

$$K_1 + K_2 = 450,$$

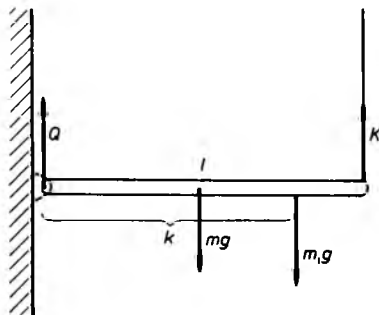
$$K_2 \cdot 2 = 150 \cdot 0,6 + 100 \cdot 1 + 200 \cdot 1,6.$$

$$\text{Így } K_2 = 255 \text{ N}, K_1 = 195 \text{ N}.$$

IX/56. Jelöljük a csukló által kifejtett erőt Q -val, a kötélrőt K -val. Az erőegyen-



IX. 38.
ábra



IX. 39.
ábra

súlyt az

$$mg + m_1 g - K - Q = 0$$

egyenlőség fejezi ki. A forgatónyomaték-egyensúlyt a csukló körüli forgásra írjuk fel (IX. 39. ábra):

$$mg \frac{l}{2} + m_1 g k - Kl = 0.$$

Behelyettesítve:

$$100 = K + Q,$$

$$130 = K \cdot 2.$$

$$\text{Így } K = 65 \text{ N}, Q = 35 \text{ N}.$$

IX/57. Az erőegyensúlyt kifejező egyenlőségeket írjuk fel a testre ható három erő vízszintes és függőleges összetevőire:

$$K_2 \sin \beta - K_1 \sin \alpha = 0,$$

$$K_2 \cos \beta + K_1 \cos \alpha - mg = 0.$$

Mivel $\sin \beta = \cos \alpha$, $\cos \beta = \sin \alpha$, ezért

$$7 \cos \alpha - 4 \sin \alpha = 0,$$

$$7 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = mg.$$

Ebből következik, hogy $\tan \alpha = 1,75$, $\alpha = 60,25^\circ$ és $\beta = 29,75^\circ$. A test tömege: $m = 0,8 \text{ kg}$.

IX/58. Legyen az első erő x tengely irányú, a másik y tengely irányú. Ekkor — a

harmadik erőt $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ -nal jelölve —

$$20 - F_x = 0,$$

$$35 - F_y = 0,$$

és

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 40,3 \text{ N}.$$

Jelöljük a harmadik tengely vízszintessel bezárt szögét α -val, ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{35}{20}, \quad \alpha = 60,25^\circ.$$

IX/59. Az erőegyensúlyt a

$$K_1 \sin 30^\circ - K_2 \sin 40^\circ = 0,$$

$$K_1 \cos 30^\circ + K_2 \cos 40^\circ = 100$$

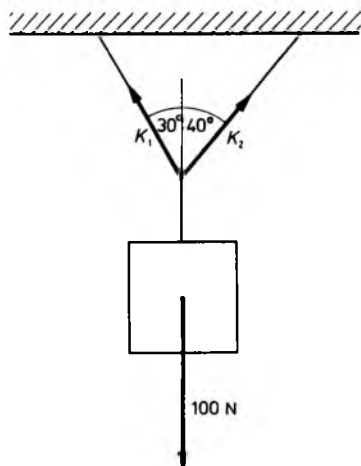
egyenletek fejezik ki (IX. 40. ábra). Szorozzuk meg az első egyenletet $\cos 40^\circ$ -kal, a másodikat $\sin 40^\circ$ -kal. Ezután adjuk össze a kapott egyenleteket:

$$K_1 \cdot 0,9397 = 100 \cdot 0,6427,$$

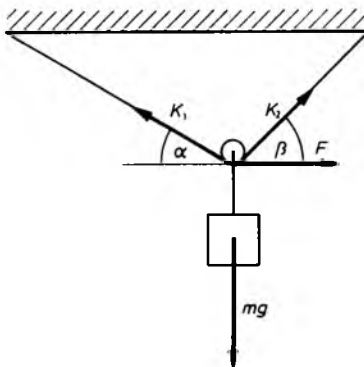
$$K_1 = 68,4 \text{ N},$$

ezután a K_2 az első egyenletből:

$$K_2 = 53,2 \text{ N}.$$



IX. 40.
ábra



IX. 41.
ábra

IX/60. A IX. 41. ábrán $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$. A vízszintes és a függőleges erőkomponensekre érvényes dinamikai egyenletek:

$$K \cos \alpha - (K \cos \beta + F) = 0,$$

$$K \sin \alpha + K \sin \beta - mg = 0,$$

Innen

$$K = \frac{mg}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{100}{\sin 40^\circ + \sin 60^\circ} = 66,27 \text{ N},$$

és

$$F = K(\cos \alpha - \cos \beta) = 17,63 \text{ N}.$$

Innen $\alpha = 10^\circ$, valamint $K = 86,3 \text{ N}$.

IX/61. Az erőegyensúlyt kifejező egyenlőségek (IX. 42. ábra):

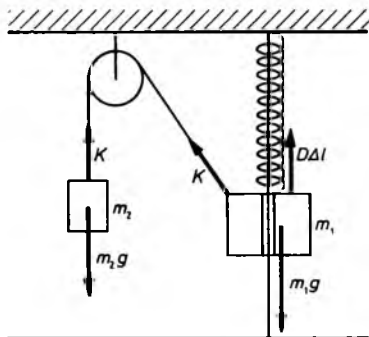
$$m_1 g - K = 0$$

$$K \cos \alpha + D \Delta l - m_2 g = 0.$$

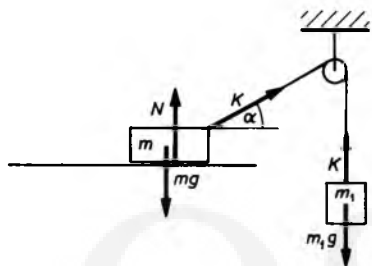
Behelyettesítve az adatokat:

$$50 \cos \alpha + 120 = 160,$$

$$\text{ezért } \alpha = 36,8^\circ.$$



IX. 42.
ábra



IX. 43.
ábra

IX/62. A két test nyugalomban van (IX. 43. ábra), ezért

$$\begin{aligned} m_1 g - K &= 0, \\ K \cos \alpha - S &= 0, \\ N + K \sin \alpha - m_2 g &= 0, \end{aligned}$$

és a tapadás miatt

$$S \leq \mu N,$$

így

$$\begin{aligned} K \cos \alpha &\leq \mu(m_2 g - K \sin \alpha), \\ K &= 15 \text{ N}. \end{aligned}$$

Ezért $m_1 = 1,5 \text{ kg}$.

IX/63. A testre ható erők egyensúlyát a

$$K \cos \alpha - S = 0, \quad (1)$$

$$K \sin \alpha + N - m_2 g = 0, \quad (2)$$

$$K - m_1 g = 0 \quad (3)$$

egyenletek írják le. A forgatónyomaték-egyensúlyt a támasz körüli forgásra írjuk fel (IX. 44. ábra).

$$m_2 g \frac{l}{2} - Kl \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

Az adatokat figyelembe véve:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot 10 \cos 30^\circ &= S, \\ m_1 \cdot 10 \sin 30^\circ + N &= 100, \\ 100 \cdot 0,75 &= m \cdot 1,5 \cdot 0,5. \end{aligned}$$

Innen $m_1 = 10 \text{ kg}$. Figyelemre méltó, hogy a feladat megoldásához a (4) forgatónyomaték egyensúly elég. Az (1) és (2) egyenletekből az N és S kényszererőket határozhatjuk meg: $N = 50 \text{ N}$, és $S = 86,6 \text{ N}$.

IX/64. A testre ható erők vízszintes és függőleges komponenseinek az egyensúlyát a

$$Q_x - N = 0,$$

$$Q_y - mg = 0$$

egyenletek fejezik ki, a forgatónyomaték-egyensúlyt a csuklóra írjuk fel (IX. 45. ábra):

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha - Nl \sin \alpha = 0.$$

A számításokat elvégezve:

$$N = 20 \text{ N}, \quad Q_x = 20 \text{ N}, \quad Q_y = 40 \text{ N}.$$

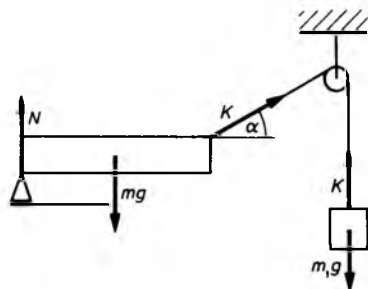
A csukló által kifejtett erő nagysága $Q = 44,7 \text{ N}$. Ez az erő $\alpha = 63,4^\circ$ szöget zár be a vízszintessel.

IX/65. Az egyensúlyt leíró egyenletek (IX. 46. ábra):

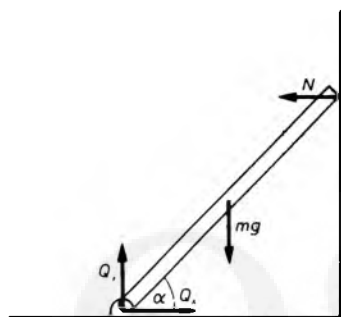
$$K \sin 20^\circ - F \sin 30^\circ + Q_x = 0,$$

$$K \cos 20^\circ + Q_y - mg - F \cos 30^\circ = 0,$$

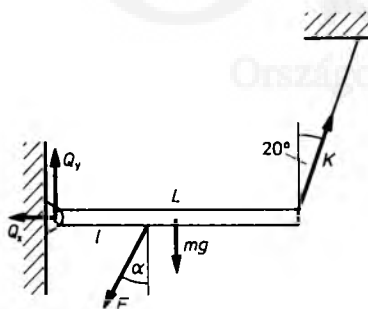
$$F \cos 30^\circ \cdot k + mg \frac{l}{2} - K \cos 20^\circ \cdot l = 0.$$



IX. 44.
ábra



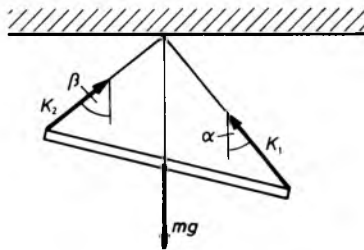
IX. 45.
ábra



IX. 46.
ábra

(A forgatónyomaték-egyensúlyt a csukló körüli forgásra írtuk fel.) A számolást elvégezve:

$$K = 40,4 \text{ N}, \quad Q_y = 32,0 \text{ N}, \\ Q_x = 6,1 \text{ N}, \quad Q_y = 46,6 \text{ N}.$$



IX. 47.
ábra

IX/66. Nyilvánvaló, hogy a két fonál merőleges egymásra. Ezért $\alpha = 90^\circ - \beta$, és

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75, \quad \alpha = 36,87^\circ.$$

A rúd egyensúlyi helyzetében a tömegközéppontja a felfüggesztési pont alatt van. Az egyik fonál $\alpha_1 = \alpha$ szöget zár be a függőlegessel, a másik ugyanígy $\beta_1 = \beta$ szöget zár be a függőlegessel. Az erőegyensúlyt kifejező egyenlőségek (IX. 47. ábra):

$$K_2 \sin \beta - K_1 \sin \alpha = 0,$$

$$K_2 \cos \beta + K_1 \cos \alpha - mg = 0,$$

és mivel $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\cos \alpha = 0,8$, $\sin \alpha = 0,6$:

$$K_2 \cdot 0,8 - K_1 \cdot 0,6 = 0,$$

$$K_2 \cdot 0,6 + K_1 \cdot 0,8 = 30.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével: $K_2 = 18 \text{ N}$ és $K_1 = 24 \text{ N}$.

IX/67. Az erőegyensúlyt a

$$Q_x - K \sin 45^\circ = 0$$

$$Q_y + K \cos 45^\circ - mg = 0$$

egyenletek fejezik ki. A forgatónyomatékokat számítsuk a csukló körüli forgásra (IX. 48. ábra):

$$Kl \sin (75^\circ - 45^\circ) = mg \frac{l}{2} \sin 75^\circ.$$

Innen K könnyen számítható: $K = 29 \text{ N}$, és $Q_x = 20,5 \text{ N}$, $Q_y = 9,5 \text{ N}$. A csukló által

kifejtett erő 22,6 N nagyságú és a vízszintessel 24,8°-os szöget zár be.

IX/68. Határozzuk meg az *L* betű súlypontját (*IX. 49. ábra*)!

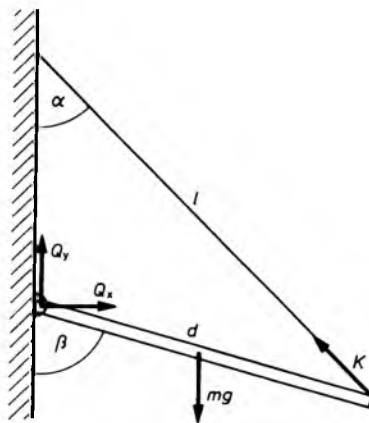
$$x_0 = \frac{0,1 \frac{0,1}{2} + 0,18 \cdot 0}{0,28} = 0,01785,$$

$$y_0 = \frac{0,18 \frac{0,18}{2}}{0,28} = 0,05785.$$

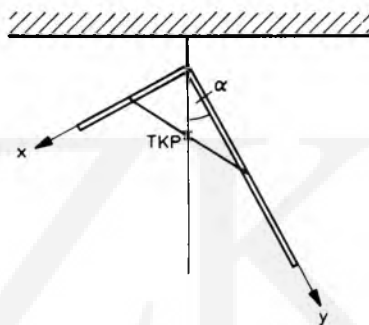
Ha az origóból a súlypont felé mutató vektor α szöget zár be a függőlegessel, akkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,01785}{0,05785} = 0,3086,$$

tehát $\alpha = 17,15^\circ$. Ha most az *L* betűt a derékszögnél fogva felfüggesztjük, akkor a tömegközéppont a felfüggesztési pont alatt lesz, az *L* betű egyensúlyi helyzetében. A hosszabbik oldal a függőlegessel tehát $17,15^\circ$ szöget zár be.



IX. 48. ábra



IX. 49. ábra

X. Feladatcsoport: rugalmas testek, a rugalmas deformáció terjedése

X/1. Hooke törvénye szerint:

$$\Delta l_A = \frac{1}{E} \frac{Fl}{A} = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \frac{200 \cdot 2}{2} = 10^{-3} \text{ m},$$

az acélszál megnyúlása 1 mm. A réz megnyúlása

$$\begin{aligned} \Delta l_R &= \frac{1}{1,2 \cdot 10^5} \frac{200 \cdot 2}{2} = \\ &= 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,6 \text{ mm}. \end{aligned}$$

A két szál „sorba kötve” összesen 2,6 mm-rel nyúlik meg, hiszen mindkét szálra 200 N erő feszíti és a megnyúlások összeadódnak. Vizsgáljuk meg most a „párhuzamosan kapcsolt” szálakat. A megnyúlásuk azonos, a két szálra feszítő erők összege 200 N, tehát

$$F = F_A + F_R = \frac{\Delta l A E_A}{l} + \frac{\Delta l A E_R}{l},$$

$$\frac{Fl}{A} \frac{1}{E_A + E_R} = \Delta l.$$

Így

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{3,2 \cdot 10^5} \frac{200 \cdot 2}{2} = \\ &= 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,625 \text{ mm} \end{aligned}$$

a kettős szál megnyúlása.

X/2. Az acélszál legnagyobb megnyúlása legyen Δl . Ekkor F erő feszíti a szálra:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{Fl}{A}.$$

A Δl megnyúlás az energiamérlegből számolható:

$$mg(l + \Delta l) = \frac{1}{2} EA l \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2.$$

Ez $\Delta l/l$ -re másodfokú egyenlet, szokásos formában felírva:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 - \frac{mg}{AE} \frac{\Delta l}{l} - \frac{mg}{EA} = 0,$$

a megoldóképletből

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{mg}{AE} + \sqrt{\left(\frac{mg}{AE} \right)^2 + \frac{2mg}{EA}}.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{20}{2 \cdot 10^5} + \sqrt{\left(\frac{20}{2 \cdot 10^5} \right)^2 + \frac{40}{2 \cdot 10^5}},$$

így $\Delta l = 14 \text{ mm}$, és $F = 2,8 \cdot 10^3 \text{ N}$.

X/3. A longitudinális deformáció terjedési sebessége:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^{11}}{8900}} = 3672 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

X/4. A hullám terjedési sebessége: $c = 340 \text{ m/s}$, — ez közvetlenül leolvasható. Az is világos, hogy $\omega = 2000 \text{ 1/s}$, így

$$T = \frac{2\pi}{2000} = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

ezért $\lambda = cT = 1,068 \text{ m}$. A rezgés amplitúdója: $A = 0,6 \text{ cm}$.

X/5. A hullám kiterjedése az x helyen a t időpontban:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

az adatokat figyelembe véve:

$$y(0,05; 0,012) =$$

$$= 0,2 \sin 2\pi \cdot 440 \left(0,012 - \frac{0,05}{340} \right) =$$

$$= 0,2 \sin 32,76 = 0,195 \text{ mm}.$$

X/6. Mivel $a_{\max} = A\omega^2$, a körfrekvencia: $\omega = 50 \text{ 1/s}$, a frekvencia: $f = 7,95 \text{ 1/s}$. A rezgő pontok legnagyobb sebessége $v_{\max} = A\omega = 2,5 \text{ m/s}$. A hullámhossz: $\lambda = cT = c/f = 5 \text{ m}$.

X/7. Mivel $v_{\max} = A\omega = 4 \text{ m/s}$, és $a_{\max} = A\omega^2 = 160 \text{ m/s}^2$, ezért $A = 0,1 \text{ m}$, és $\omega = 40 \text{ 1/s}$. A feladatban adott, hogy $\lambda = 1,57 \text{ m}$, ezért

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

X/8. A $c = \lambda/T = \lambda f$ egyenlőség alapján $f = 10 \text{ 1/s}$, ezért $\omega = 2\pi f = 62,8 \text{ 1/s}$, így

$$v_{\max} = A\omega = 9,42 \text{ m/s},$$

$$a_{\max} = A\omega^2 = 592 \text{ m/s}^2.$$

X/9. Az

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

kinematikai egyenlőség alapján az x he-

lyen rezgő pont az origóhoz képest $2\pi x/\lambda$ fáziskéséssel rezeg. Az x_1 és az x_2 pontok rezgése közötti fáziskülönbség:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi f \frac{x_2 - x_1}{c}.$$

A mi esetünkben:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{16 - 12}{300} \cdot 2,5 = 0,21 \approx 12^\circ.$$

X/10. Kioltás akkor következik be, amikor az útkülönbség (*X. 1. ábra*):

$$s_2 - s_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Az útkülönbséget az A_1 hullámforrástól mért s távolsággal fejezzük ki:

$$(L - s) - s = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

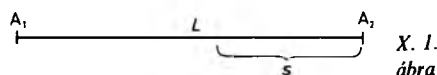
$$L - 2s = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

$$s = \frac{1}{2} \left(L - (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \right).$$

A hullámhossz: $\lambda = c/f = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$. Ezért

$$s = \frac{1}{2} (40 - (2k + 1)5).$$

k	s	$L - s$
0	17,5 cm	22,5 cm
1	12,5 cm	27,5 cm
2	7,5 cm	32,5 cm
3	2,5 cm	37,5 cm
-1	22,5 cm	17,5 cm
-2	27,5 cm	12,5 cm
-3	32,5 cm	7,5 cm
-4	37,5 cm	2,5 cm



X/11. A két hullámot egyaránt az

$$y(x, t) = 3 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,3} - \frac{x}{27} \right)$$

kitérésfüggvény írja le. Az interferencia eredményeként $y_1(x_1, t) + y_2(x_2, t)$ eredő hullám jön létre. Az elágazási pont így rezeg:

$$y(0, t) := 2A \cos 2\pi \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \times$$

$$\times \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right).$$

Az elágazási pont rezgésének amplitúdója:

$$A^* = \left| 2 \cdot 3 \cos 2\pi \frac{27}{2,27} \right| = 6 \text{ cm},$$

tehát teljes erősítés van. Így

$$y(0, t) = 6 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - 1,5 \right),$$

$$t \geq 0,3 \cdot 1,5 = 0,45 \text{ s}.$$

Az elágazási ponttól x távolságra lévő pont rezgését az

$$y(x, t) = 6 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,3} - 1,75 - \frac{x}{90} \right)$$

függvény írja le, azután, hogy a hullámálapot elérte ezt a helyet.

X/12. Mindkét végén rögzített kötélen akkor alakulnak ki állóhullámok, ha

$$L = k \frac{\lambda}{2}.$$

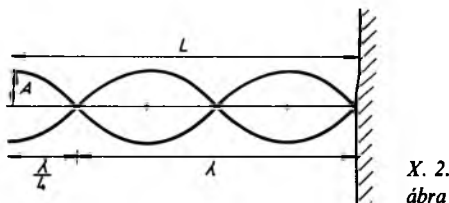
Így

$$6 = k \frac{cT}{2} = k \frac{c}{2f},$$

tehát $f = kc/12$. A kötélen $f = 0,25 \text{ 1/s}$; $0,5 \text{ 1/s}$; $0,75 \text{ 1/s}$; 1 1/s ; ... frekvenciájú rezgés esetén alakul ki állóhullám.

X/13. Két csomópont alakulhat ki, ha

$$\lambda + \frac{\lambda}{4} = L$$



X. 2. ábra

(X. 2. ábra). Innen

$$\lambda = 2,8 \text{ m}.$$

A kötélen haladó és a végeről visszavert hullám kitérése a hullámforrástól x távolságban a t időpontban:

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) -$$

$$- A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2L - x}{\lambda} \right) =$$

$$= 2A \sin 2\pi \frac{L - x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

A 26 cm-re rezgő pont amplitúdója tehát:

$$A^* := 2 \cdot 12 \sin 2\pi \frac{350 - 26}{280} =$$

$$= 24 \sin 7,27 = 20 \text{ cm}.$$

X/14. Mivel

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

$$\sin \beta = \frac{c_2 \sin \alpha}{c_1} = 0,7207,$$

ezért $\beta = 46,11^\circ$. Másrészt $c_1 = \lambda_1 f$ és $c_2 = \lambda_2 f$ alapján

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

tehát a hullámhossz úgy változik, mint a terjedés sebessége, és $\lambda_1 = 1,5 \text{ m}$, $\lambda_2 = 5,2 \text{ m}$.

XI. Feladatcsoport: folyadékok

XI/1. A Bernoulli-törvényt és a folyadék összenyomhatatlanságát felhasználva:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 ,$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 .$$

Behelyettesítve egyrészt $v_2 = 16$ m/s, másrészt

$$\frac{1}{2} 1000 \cdot 16 + 2 \cdot 10^5 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 16^2 + p_2 ,$$

tehát $p_2 = 0,8 \cdot 10^5$ Pa.

XI/2. A folyadék összenyomhatatlansága miatt

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 . \quad (1)$$

A Bernoulli-törvény:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 . \quad (2)$$

Az áramló folyadék nyomását a külső nyomással összekapcsoló egyenletek:

$$p_1 = p_0 + \rho gh , \quad (3)$$

$$p_2 = p_0 + \rho gx . \quad (4)$$

[A (3) és (4) egyenletek is a Bernoulli-törvény speciális eseteit fejezik ki.] Az (1)

egyenletből: $v_2 = 2$ m/s. A (2)-be behelyettesítünk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 0,25 + 1000 \cdot 10 \cdot 0,8 = \\ = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 4 + 1000 \cdot 10 \cdot x , \end{aligned}$$

tehát $x = 0,61$ m.

XI/3. Ha az edényben y_0 magasan van a víz, és a talaj felett y magasan a kiömlőnyílás, akkor Bernoulli törvénye alapján

$$p_0 + \rho g y_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y + p_0 ,$$

hiszen egyrészt a folyadék felszínén is, és a kiömlő folyadékban is azonos a nyomás a külső levegő nyomásával, másrészt az edény nagy mérete miatt a folyadékfelszín mozdulatatlannak tekinthető. Így a kiömlési sebesség $v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$. A kiömlő folyadék részecskéi vízszintes hajítást végeznek:

$$x = vt ,$$

$$y = \frac{g}{2} t^2 ,$$

ezért

$$x = v \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{2g(y - y_0)} \sqrt{\frac{2y}{g}},$$

$$x = 2\sqrt{y(y_0 - y)}.$$

Ha

$$y = 1 \text{ m, akkor } x = 4 \text{ m,}$$

$$y = 2 \text{ m, akkor } x = 4,9 \text{ m,}$$

$$y = 3 \text{ m, akkor } x = 4,9 \text{ m,}$$

$$y = 4 \text{ m, akkor } x = 4 \text{ m.}$$

XI/4. A kocsiból Δt idő alatt kiáramló Δm tömegű víz $\Delta I = \Delta mv$ impulzusra tesz szert. A folyadékra ható erő:

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} v.$$

Ennek az erőnek az ellenereje hat a kocsira. A kiáramló folyadék térfogata: $\Delta V = Av\Delta t$, tömege: $\Delta m = \rho\Delta V = \rho Av\Delta t$. Így $F = \rho Av^2$.

A kiömlő víz sebessége: $v = \sqrt{2gh}$, és végül

$$F = \rho A \cdot 2gh = 2Ah\rho g.$$

Adatokkal:

$$F = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 = 0,4 \text{ N.}$$

A kocsi gyorsulása kezdetben: $a = 0,1 \text{ m/s}^2$.

XI/5. A lapot Δt idő alatt $\Delta V = Av\Delta t$ térfogatú, $\Delta m = \rho Av\Delta t$ tömegű víz éri el. A szállított impulzus: $\Delta mv = \rho Av^2\Delta t$. A víz-sugár impulzusa nullára csökken, mert szétterül a hasábon, ezért az impulzusváltozás:

$$\Delta I = \rho Av^2\Delta t,$$

illetve a kifejtett erő:

$$F = \rho Av^2.$$

Ekkora erő hat a hasábra is:

$$A\rho v^2 = m_{\text{hasáb}}a.$$

Adatokkal (m-ben, kg-ban számolva):

$$10^{-4} \cdot 1000 \cdot 15^2 = 1a,$$

$$\text{így } a = 22,5 \text{ m/s}^2.$$

XI/6. Bernoulli törvényét alkalmazzuk:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2.$$

A víz sebessége az alsó vízszintes szakaszon is 1 m/s , hiszen az

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

egyenlőség alapján $v_1 = v_2$. Ezért

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Behelyettesítve:

$$10^5 + 1000 \cdot 10 \cdot 1 = p_2,$$

$$\text{tehát } p_2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

XI/7. A második vízszintes szakaszon a sebesség 4 m/s . Bernoulli törvénye szerint (adatokat behelyettesítve):

$$\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1^2 + 1000 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 10^5 =$$

$$= \frac{1}{2} 1000 \cdot 4^2 + p_2,$$

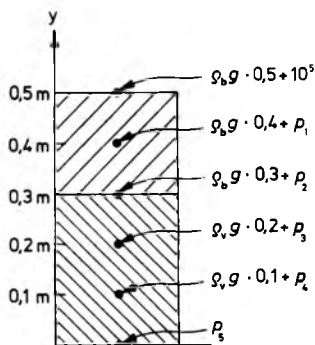
$$\text{így } p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

XI/8. A feladat megoldását Bernoulli törvényére vezetjük vissza. A folyadék bármely két pontjában a $\rho gy + p$ mennyiség azonos értékű (*XI. 1. ábra*):

$$\rho gy_1 + p_1 = \rho gy_2 + p_2.$$

1. A benzin felszíne alatt 1 dm mélyen és a benzin felszínén:

$$\rho_{\text{bg}} \cdot 0,4 + p_1 = \rho_{\text{bg}} \cdot 0,5 + 10^5,$$



XI. 1.
ábra

így

$$p_1 = \rho_b g (0,5 - 0,4) + 10^5 = \\ = 1,008 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

2. A benzin felszíne alatt 2 dm mélyen és a benzin felszínén:

$$\rho_b g \cdot 0,3 + p_2 = \rho_b g \cdot 0,5 + 10^5 , \\ \text{ezért}$$

$$p_2 = \rho_b g (0,5 - 0,3) + 10^5 = \\ = 1,016 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

3. A víz felszíne alatt 1 dm mélyen és a víz felszínén:

$$\rho_v g \cdot 0,2 + p_3 = \rho_v g \cdot 0,3 + p_2 , \\ \text{tehát}$$

$$p_3 = \rho_v g (0,3 - 0,2) + 1,016 \cdot 10^5 = \\ = 1,024 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

4. A víz felszíne alatt 2 dm mélyen és a víz felszínén:

$$\rho_v g \cdot 0,1 + p_4 = \rho_v g \cdot 0,3 + p_2 , \\ p_4 = \rho_v g (0,3 - 0,1) + 1,016 \cdot 10^5 = \\ = 1,032 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

5. A víz legalsó és legfelső pontjaira:

$$p_5 = \rho_v g \cdot 0,3 + p_2 = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

Az edény aljára a víz

$$F = 1,04 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} = 1040 \text{ N}$$

erőt fejt ki. Ez egyrészt a folyadék súlya, összesen 40 N, másrészt a folyadék feletti levegő nyomásából származó erő. Az edény aljára felülről lefelé ható erő egy részét azonban általában kompenzálja az alaplagra ható kívülről fölfelé ható ugyan-csak 1000 N nagyságú erő. Ezért az edény súlya mellett csak 40 N erőt kell valamilyen kényszererőnek kompenzálni.

XI/9. A folyadék sűrűsége állandó, ezért

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 ,$$

másrészt Bernoulli törvénye alapján:

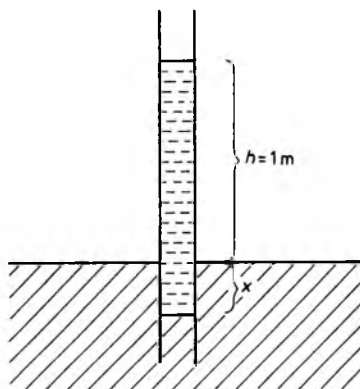
$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h + p_0 .$$

Így $v_2 = 2,08 \text{ m/s}$, és $A_2 = 0,226 \text{ cm}^2$. Az átmérő 0,536 cm.

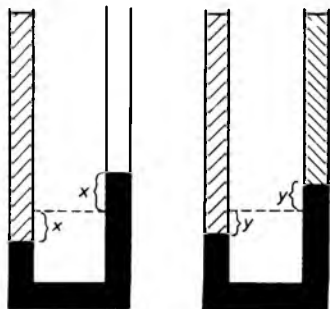
XI/10. A cső belsejében és a külső oldalán a higanyszintek különbségét jelöljük x -szel (XI. 2. ábra). Ekkor

$$p_0 + (h + x) \rho_v g = p_0 + x \rho_{Hg} g ,$$

ha a nyomásegyensúlyt az ábrán jelölt síkra írjuk fel. Ebből $x = 0,079 \text{ m}$, és a vízoszlop hossza 1,079 méter.



XI. 2.
ábra



XI. 3.
ábra

XI/11. A bal oldali szárban x -szel lejjebb, a jobb oldali szárban x -szel feljebb ment a higanyszint. Ezért

$$p_0 + (l + x)\rho_v g = p_0 + \rho_{Hg} g \cdot 2x.$$

Behelyettesítve:

$$0,7 \cdot 10^3 + x \cdot 10^3 = 1,36 \cdot 10^4 \cdot 2x,$$

ezért

$$x = 0,0267 \text{ m} = 2,67 \text{ cm},$$

a vízoszlop hossza 72,67 cm.

A nyomásegyensúlyt a XI. 3. ábrán látható síkra írjuk fel:

$$p_0 + \rho_v g(l + y) = p_0 + \rho_v g(l - y) + \rho_{Hg} g \cdot 2y.$$

Behelyettesítve:

$$0,7 \cdot 10^3 + y \cdot 10^3 =$$

$$= 0,7 \cdot 900 - 900y + 1,36 \cdot 10^4 \cdot 2y,$$

$$y = 0,0027 \text{ m}.$$

A vízoszlop hossza most 0,7027 méter, az olajoszlop hossza pedig 0,6972 méter. Ha olajat öntünk a bal oldali szárba, akkor valamicske víz kifolyik a jobb oldali szárból.

XI/12. A nyomásegyensúly a víz betöltése után (XI. 4. ábra):

$$p_0 + \rho_v g \cdot 0,5 = p_0 + \rho_{Hg} g \cdot 2x,$$

$$\text{ezért } x = 0,0183 \text{ m}.$$

Ha az olajat is betöltöttük, akkor

$$p_0 + \rho_v g \cdot 0,5 =$$

$$= p_0 + \rho_{Hg} g \cdot 2y + \rho_v g(0,7 - y),$$

$$10\,000 \cdot 0,5 =$$

$$= 136\,000 \cdot 2y + 9000 \cdot 0,7 - 9000y,$$

$$- 1,3 \cdot 10^3 = 263 \cdot 10^3 y,$$

$$y = -0,005 \text{ m} = -5 \text{ mm}.$$

Ez azt jelenti, hogy az olaj betöltése közben a vízoszlop $18,3 + 5 \text{ m} = 23,3 \text{ mm}$ -t emelkedik. A betöltött olajoszlop $70,5 \text{ cm}$ hosszú. A vízoszlop hossza nem változik, hiszen csak $2,33 \text{ cm}$ -t mozdul el fölfelé.

A higany kezdeti helyzeti energiája a cső aljához képest:

$$E_1 = A \cdot 2l \rho g \frac{l}{2}.$$

A víz és az olaj betöltése után:

$$E_2 = A(l + y)\rho g \frac{l + y}{2} + A(l - y)\rho g \frac{l - y}{2} =$$

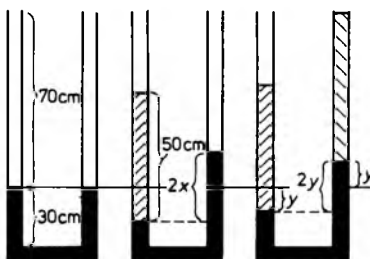
$$= \frac{A \rho g}{2} ((l + y)^2 + (l - y)^2) = A \rho g (l^2 + y^2).$$

Az energiaváltozás:

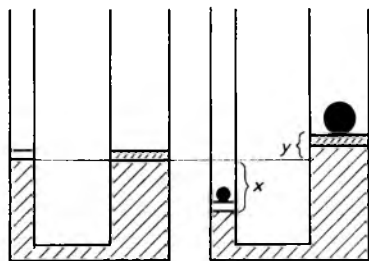
$$\Delta E = A \rho g (l^2 + y^2 - l^2) = A \rho g y^2 =$$

$$= 10^{-4} \cdot 136\,000 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 0,00034 \text{ J}.$$

XI/13. Tegyük fel, hogy a bal oldali szárban lefelé mozdul a dugattyú x -szel, a



XI. 4.
ábra



XI. 5.
ábra

jobb oldali szárban fölfelé y -nal (XI. 5. ábra), ekkor

$$A_1 x = A_2 y. \quad (1)$$

A bal oldali dugattyú alatt a nyomás p_1 , a jobb oldali alatt p_2 , akkor

$$p_1 = p_2 + (x + y) \rho g. \quad (2)$$

Ugyanakkor a bal oldali dugattyúra ható erők egyensúlyt tartanak:

$$G_1 + A_1 p_0 = A_1 p_1, \quad (3)$$

és ugyanez a helyzet a jobb oldali dugattyú esetén is:

$$G_2 + A_2 p_0 = A_2 p_2. \quad (4)$$

A számolást elvégezve, (3) és (4)-ből:

$$p_1 = 1,20 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$p_2 = 1,167 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Ezeket az eredményeket a (2)-be helyettesítve és (1)-et figyelembe véve:

$$1,2 \cdot 10^5 = 1,167 \cdot 10^5 + \left(\frac{3}{2} y + y \right) 10^4,$$

és ezért $y = 0,132 \text{ m} = 13,2 \text{ cm}$, valamint $x = 0,198 \text{ m} = 19,8 \text{ cm}$.

Ha a dugattyúk helyzete nem változik, akkor $p_1 = p_2$ a (2) egyenlőségben; a (3) és a (4) egyenlőségek alapján pedig

$$\frac{G_1}{A_1} = \frac{G_2}{A_2}.$$

Innen

$$m_2 = \frac{m_1 A_2}{A_1} = 1,2 \text{ kg}.$$

XI/14. Jelöljük a higany kezdeti magasságát a két szárban l -lel, a vízoszlop betöltése után a bal oldali szárban legyen a higanyoszlop x magas, a jobb oldali szárban y (XI. 6. ábra). Ekkor

$$A_1 l + A_2 l = A_1 x + A_2 y. \quad (1)$$

A csőszárak legsó pontjaiban azonos a nyomás:

$$p_0 + h_{Q_v} g + x \rho_{Hg} g = p_0 + y \rho_{Hg} g. \quad (2)$$

Az (1) alapján

$$\begin{aligned} 10^{-4} x + 2 \cdot 10^{-4} y &= \\ &= 10^{-4} \cdot 0,3 + 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0,3, \\ x + 2y &= 0,9. \end{aligned}$$

a (2)-ből

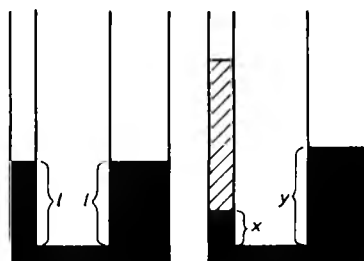
$$0,7 + 13,6x = 13,6y.$$

Így

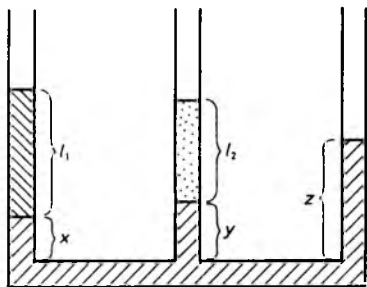
$$0,7 + 13,6(0,9 - 2y) = 13,6y,$$

és $y = 0,317 \text{ m}$, $x = 0,266 \text{ m}$.

XI/15. A vízoszlop hossza kezdetben $l = 30 \text{ cm}$. Az olaj és a benzin betöltése után az egyes szárakban x , y , z magasan van a



XI. 6.
ábra



XI. 7.
ábra

víz (XI. 7. ábra). Világos, hogy

$$x + y + z = 3l. \quad (1)$$

A három ágban legalul azonos a nyomás:

$$p_0 + \rho_0 g l_1 + \rho_v g x = p_0 + \rho_b g l_2 + \rho_v g y, \quad (2)$$

$$p_0 + \rho_0 g l_1 + \rho_v g x = p_0 + \rho_v g z. \quad (3)$$

A (2)-ből és (3)-ból az adatokat behelyettesítve:

$$4,5 + 10x = 3,2 + 10y, \quad (4)$$

$$4,5 + 10x = 10z, \quad (5)$$

valamint (1)-ből:

$$x + y + z = 0,9. \quad (6)$$

A (6) egyenlőségből x -et kifejezve és (4)-be, (5)-be helyettesítve, rendezve

$$10,3 = 20y + 10z, \quad (7)$$

$$13,5 = 10y + 20z. \quad (8)$$

Innen $y = 0,236$ m, $z = 0,557$ m. Visszahe-lyettesítve (6)-ba:

$$x = 0,106 \text{ m}.$$

XI/16. Használjuk most a XI. 8. ábrán látható jelöléseket. Ekkor

$$p_0 + \rho_b g l + \rho_v g l = p_0 + \rho_v g l + \rho_{Hg} g x,$$

$$p_0 + \rho_b g l + \rho_v g l = p_0 + \rho_0 g l + \rho_{Hg} g y,$$

$$p_0 + \rho_b g l + \rho_v g l = p_0 + \rho_{Hg} g z.$$

Innen:

$$\rho_b l = \rho_{Hg} x, \quad x = 0,0058 \text{ m} = 5,8 \text{ mm};$$

$$\rho_b l + \rho_v l = \rho_0 l + \rho_{Hg} y, \quad y = 0,0066 \text{ m} = 6,6 \text{ mm};$$

$$\rho_b l + \rho_v l = \rho_{Hg} z, \quad z = 0,0139 \text{ m} = 13,9 \text{ mm}.$$

Ha a bal oldali szárban u magas most a higanyoszlop, akkor

$$u + u + x + u + y + u + z = 400,$$

$$4u + x + y + z = 400,$$

így $u = 93,4$ mm, ezért az első szárban 93,4 mm, a másodikban 99,2 mm, a harmadikban 100 mm, a negyedikben 107,3 mm magas a higanyoszlop.

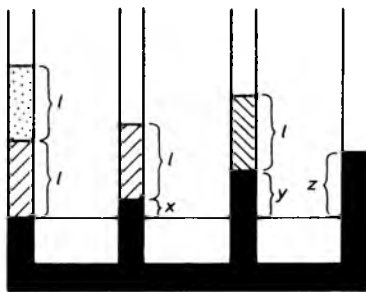
XI/17. Az úszás feltétele:

$$A h \rho_1 g = A x \rho_v g,$$

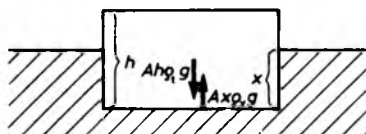
vagyis a testre ható nehézségi erővel a felhajtóerő tart egyensúlyt (XI. 9. ábra). In-
nen

$$10 \cdot 0,7 = x \cdot 1,$$

ezért $x = 7$ cm. A hasáb 7 cm mélyen merül a vízbe.



XI. 8.
ábra



XI. 9.
ábra

XI/18. Az erőegyensúlyt kifejező egyenlőség (XI. 10. ábra):

$$Ah\rho_1g + G = Ax\rho_2g.$$

Behelyettesítve:

$$2 \cdot 1 \cdot 0,7 \cdot 10 + 5 = 2x \cdot 1 \cdot 10,$$

innen $x = 0,95 \text{ dm} = 9,5 \text{ cm}$.

XI/19. A hasábra ható erők egyensúlyát az

$$Ah\rho_1g + K = Ax\rho_2g$$

egyenlőség, a vízbe merülő test egyensúlyát az

$$mg = K + V_k\rho_2g$$

egyenlőség fejezi ki. Emellett az

$$m = V_k\rho_k$$

egyenlőség is érvényben van (XI. 11. ábra). Ekkor

$$V_k = 0,089 \text{ dm}^3 = 89 \text{ cm}^3,$$

ezért $K = 4,1 \text{ N}$, végül $x = 0,905 \text{ dm} = 9,05 \text{ cm}$.

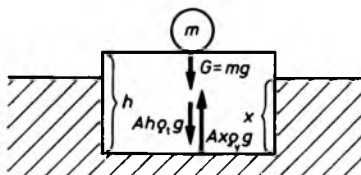
XI/20. Tegyük fel, hogy a hasáb x mélyen a vízbe merül, és a benzinnél kiemelkedik, tehát a benzin nem lepi el (XI. 12. ábra). Ekkor az erőegyensúlyt kifejező egyenlőség:

$$Ah\rho_1g = Ax\rho_2g + Ad\rho_2g.$$

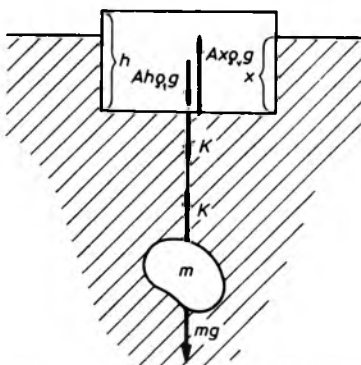
Így

$$1 \cdot 0,7 = x \cdot 1 + 0,875 \cdot 0,8,$$

és ezért $x = 0$. A hasáb alsó lapja éppen érinti a víz felszínét és a felső lapja pedig 12,5 mm-re van a benzin felszíne felett. Ha további benzint öntünk az edénybe, akkor a benzinnel úszás viszonyai nem változnak, de a hasáb alsó lapja elemelkedik a víz felszínétől. A benzin szintjének emelkedésével emelkedik a hasáb is.



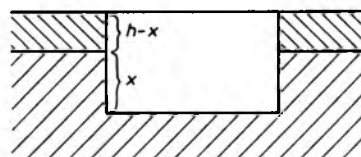
XI. 10. ábra



XI. 11. ábra



XI. 12. ábra

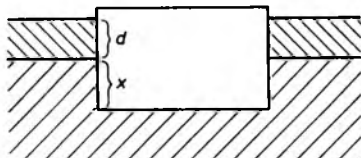


XI. 13. ábra

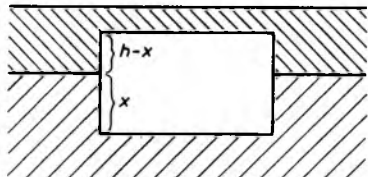
XI/21. Az egyensúly feltétele, hogy a nehézségi erő és a két tagból álló felhajtóerő megegyezzen (XI. 13. ábra):

$$Ah\rho_1g = Ax\rho_2g + A(h-x)\rho_2g.$$

(A jobb oldali első tagot formálisan a víznek tulajdonítjuk, a másodikat a benzinnel rendeljük. Tudjuk: a felhajtóerő a



XI. 14.
ábra



XI. 15.
ábra

hasáb alsó lapjára kifejtett és felső lapjára ható erők különbsége.) Behelyettesítve:

$$1 \cdot 0,9 = x \cdot 1 + (1 - x) \cdot 0,8,$$

innen $x = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}$. A vízbe 5 cm mélyen merül a hasáb és a benzin vastagsága is 5 cm. (Könnyen látható, hogy ha nem rétegezzünk benzint a vízre, akkor a hasáb 9 cm-re merül a vízbe.)

XI/22. Az erőegyensúlyt kifejező egyenlet a XI. 14. ábra alapján:

$$Ah\rho_1g = Ax\rho_vg + Ad\rho_bg.$$

Adatokkal:

$$1 \cdot 0,9 = x \cdot 1 + 0,3 \cdot 0,8$$

és ezért $x = 0,66 \text{ dm} = 6,6 \text{ cm}$. A benzin felszíne fölé 4 mm-rel emelkedik a hasáb.

XI/23. Az erőegyensúly:

$$Ah\rho_1g = Ax\rho_vg + A(h - x)\rho_bg,$$

feltéve, hogy a hasáb fedőlapját ellepi a benzin (XI. 15. ábra). Behelyettesítünk:

$$1 \cdot 0,9 = x \cdot 1 + (1 - x) \cdot 0,8.$$

Innen $x = 0,5 \text{ dm}$. A benzinbe merülő rész is 5 cm magas. A hasáb felső lapja 3 cm-rel van a benzin felszíne alatt. További benzint öntve az edénybe sem a vízben, sem a benzinben úszás geometriai viszonyai nem változnak.

XI/24. Az erőegyensúly feltétele kezdetben:

$$Ah\rho_1g + K_0 = Ax_0\rho_vg, \quad (1)$$

ahol $K_0 = 0$. Így

$$x_0 = h \frac{\rho_1}{\rho_v} = 0,7 \text{ dm} = 7 \text{ cm}.$$

Tegyük fel, hogy annyi vizet öntünk az edénybe, hogy a vízszint $x \leq 3 \text{ cm}$ -rel emelkedik. Ekkor

$$Ah\rho_1g + K = A(x_0 + x)\rho_vg. \quad (2)$$

Vonjuk ki ebből (1)-et:

$$K = Ax\rho_vg = 20x,$$

ahol $[x] = \text{dm}$. Így x arányos K -val. Ha $x > 3 \text{ cm}$ -nél, akkor a felhajtóerő már nem nő (XI. 16. ábra):

$$Ah\rho_1g + K = Ah\rho_vg. \quad (3)$$

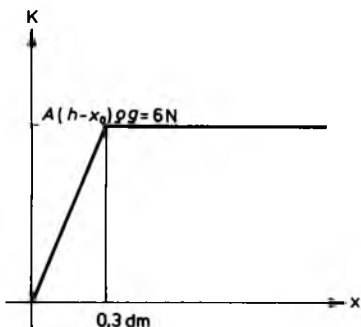
Vonjuk ki ebből (1)-et:

$$K = A(h - x_0)\rho_vg.$$

XI/25. Az erőegyensúly kezdetben így fejezhető ki:

$$Ah\rho_1g = Ax_0\rho_vg, \quad (1)$$

hiszen a rugó által kifejtett erő még nulla. Így $x_0 = 21 \text{ cm}$. Tegyük fel, hogy ezután x -szel nő a folyadék felszíne, és éppen elle-



XI. 16.
ábra

pi a hasáb felső lapját. Ekkor

$$Ahq_v g + D\Delta l = Ahq_v g. \quad (2)$$

Innen

$$\Delta l = \frac{Ah(q_v - q_t)g}{D} = 0,09 \text{ m}.$$

Világos, hogy

$$x = (h - x_0) + \Delta l = (30 - 21) + 9 = 18 \text{ cm}.$$

A rugalmas erő:

$$F = D\Delta l = 100 \cdot 0,09 = 9 \text{ N}.$$

XI/26. A rugó kezdeti megnyúlása nulla (XI. 17. ábra). Ezért

$$A_1 h q_t g = A_1 x_0 q_v g,$$

$$x_0 = 21 \text{ cm}.$$

Legyen a rugó nyújthatatlan hossza L_0 , ekkor, ha a feltétel szerint teleöntöttük az edényt:

$$A_1 h q_t g + D(L - L_0) = A_1 h q_v g.$$

Így $L = L_0 + 9 \text{ cm}$. A víz kezdeti térfogata:

$$V_1 = A_2(L_0 + x_0) - A_1 x_0,$$

a végső állapotban pedig

$$V_2 = A_2(L + h) - A_1 h.$$

A térfogatok különbsége:

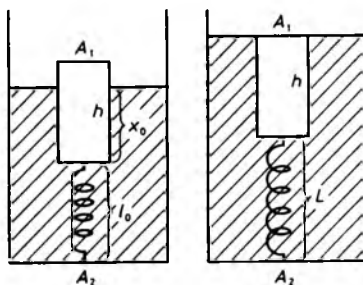
$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= A_2[(L - L_0) + (h - x_0)] - \\ &\quad - A(h - x_0) = 2(0,9 + 2,1) - 10,9 = \\ &\quad = 2,7 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

A hasáb helyzeti energiája

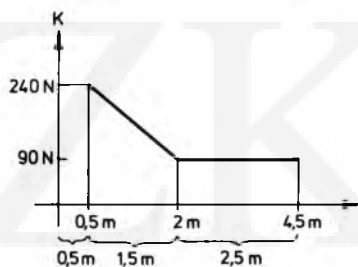
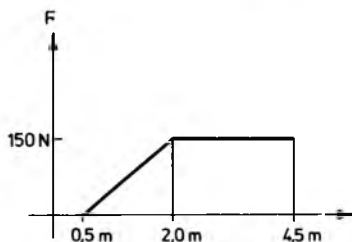
$$Ahq_v g(L - L_0)$$

-lal, azaz 1,89 J-lal nőtt.

XI/27. A XI. 18. ábrán látjuk a felhajtóerő és a kötélérő grafikonját. A felhajtóerő mindaddig természetesen nulla, amíg a ha-



XI. 17. ábra



XI. 18. ábra

sáb a víz felszíne felett van. A maximális értéke:

$$ALq_v g = 15 \cdot 10 = 150 \text{ N}.$$

A kötélérő kezdetben megegyezik a test súlyával:

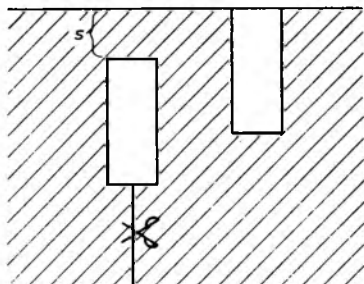
$$ALq_t g = 15 \cdot 16 = 240 \text{ N},$$

és végül a súly és a felhajtóerő különbségével:

$$AL(q_t - q_v)g = 15 \cdot 6 = 90 \text{ N}.$$

A felhajtóerő munkája:

$$W_F = \frac{150(2,5 + 4)}{2} = 487,5 \text{ J}.$$



XI. 19.
ábra

A kötélrő munkája:

$$W_K = -(240 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot \frac{240 + 90}{2} + 2,5 \cdot 90) = -592,5 \text{ J},$$

hiszen az erő és az elmozdulás ellentétes előjelű.

XI/28. A munkatétel alapján oldjuk meg a feladatot. A helyzeti energia nulla szintje legyen a víz felszíne (XI. 19. ábra). Ekkor a felhajtóerő munkája a mechanikai energia megváltoztatásával egyenlő:

$$AL\varrho_v g \cdot s = \frac{1}{2} AL\varrho_i v^2 - (-AL\varrho_i g s),$$

így $v = 2,24 \text{ m/s}$.

XI/29. Írjuk fel az egyensúly feltételét:

$$AL\varrho_i g - Ax_0\varrho_v g = 0. \quad (1)$$

Ebből $x_0 = 1,6 \text{ m}$. A rúd $1,6 \text{ méter}$ mélyen merül a vízbe, ha magára hagyjuk és úgy úszik. A vízből $L - x_0 = 0,4 \text{ méter}$ emelkedik ki.

Ha a rúd az egyensúlyi helyzetéhez képest x -szel mélyebben van, akkor

$$AL\varrho_i g - A(x_0 + x)\varrho_v g = AL\varrho_i a. \quad (2)$$

Vonjuk ki most (1)-ből a (2) egyenlőséget:

$$-Ax\varrho_v g = AL\varrho_i a. \quad (3)$$

Innen

$$-\frac{\varrho_v g}{\varrho_i L} x = a, \quad (4)$$

ami nem más, mint a harmonikus rezgőmozgás alapegyenlete, és ezért

$$\omega = \sqrt{\frac{\varrho_v g}{\varrho_i L}} = 2,5 \frac{1}{s}. \quad (5)$$

A rúd harmonikus rezgőmozgást végez $T = 2\pi/\omega = 2,51 \text{ s}$ periódusidővel és $0,4 \text{ méter}$ amplitúdóval. A test $T/2 = 1,25 \text{ s}$ idő múlva áll meg először — a felső holtponton. A test maximális sebessége: $A\omega = 1 \text{ m/s}$, és maximális gyorsulása: $A\omega^2 = 2,5 \text{ m/s}^2$. (Itt A -val jelöltük a rezgés amplitúdóját.) Ha a rúd felső vége 20 cm emelkedik ki a vízből, akkor az

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2$$

egyenlőség alapján a sebessége:

$$v = 0,86 \text{ m/s}.$$

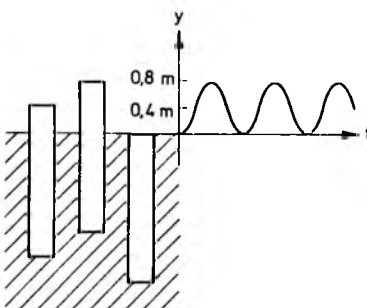
A gyorsulás ebben a pillanatban

$$a = -\omega^2 x = -1,25 \text{ m/s}^2.$$

Ha a rudat elengedjük, akkor a felső vége állandóan a víz felszíne fölött van, kivéve amikor éppen megfordul az alsó holtponton. A rúd felső vége a t időpontban a víz felszíne felett

$$x(t) = -A \cos \omega t + A = 0,4(1 - \cos 2,5t)$$

méter magasan van (XI. 20. ábra).



XI. 20.
ábra

XI/30. A feladatot a munkatétel segítségével oldjuk meg. A helyzeti energia nulla szintje legyen most is a víz felszíne (XI. 21. ábra). Ekkor

$$V_{Q_1}gy - V_{Q_1}g(-h) = V_{Q_1}gh,$$

így

$$y = h \frac{Q_v - Q_1}{Q_1} = 1 \cdot \frac{1 - 0,5}{0,5} = 1 \text{ m}.$$

A víz felszínén csak mozgási energiával rendelkezik:

$$\frac{1}{2} V_{Q_1}v^2 - V_{Q_1}g(-h) = V_{Q_1}gh,$$

ezért

$$v = \sqrt{\frac{2(Q_v - Q_1)gh}{Q_1}} = 4,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

XI/31. A golyó a víz felszínéig szabadon esik. A víz felszínét

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m/s}$$

sebességgel éri el. A vízben a nehézségi erő mellett a felhajtóerő hat:

$$V_{Q_1}g - v_{Q_v}g = v_{Q_1}a,$$

$$a = \frac{(Q_1 - Q_v)g}{Q_1} = \frac{0,9 - 1}{0,9} \cdot 10 = -1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A test tehát fölfelé gyorsul. A víz felszínétől mért távolság a t időpontban:

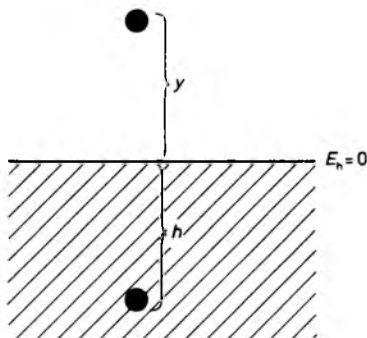
$$x(t) = \frac{-1,1}{2} t^2 + 4,47t,$$

és a sebességfüggvény:

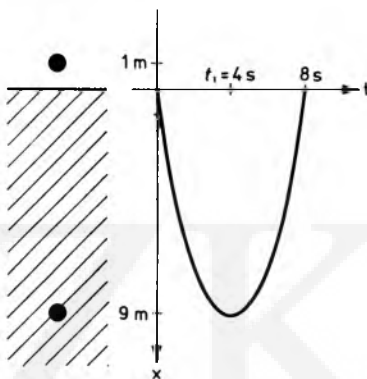
$$v(t) = -1,1t + 4,47.$$

A test lassul, és megáll, sebessége a

$$t_1 := \frac{4,47}{1,1} = 4 \text{ s}$$



XI. 21. ábra



XI. 22. ábra

időpontban nulla, ekkor megfordul a test és újabb t_1 idő alatt eléri a víz felszínét. A t_1 időpontban a víz felszíne alatt

$$x(t_1) = x(4) = \frac{-1,1}{2} \cdot 4^2 + 4,47 \cdot 4 = 9 \text{ m}$$

mélyen van (XI. 22. ábra).

XI/32. A víz felszínét $v_0 = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m/s}$ sebességgel éri el a test. A vízbe merülő testre a nehézségi erő és a felhajtóerő eredője hat:

$$v_{Q_1}g - v_{Q_v}g = v_{Q_1}a,$$

ezért $a = 0,9 \text{ m/s}^2$. A test egyre nagyobb sebességgel mozog a vízben. A t időpontban a sebesség:

$$v(t) = 0,9t + 4,47,$$

és akkor a víz felszíne alatt van

$$x(t) = \frac{0,9}{2} t^2 + 4,47t$$

méter mélységben. Ha $x = 1$ m, azaz

$$1 = \frac{0,9}{2} t^2 + 4,47t,$$

akkor $t = 0,22$ s. Ebben a pillanatban a sebesség: $v(0,22) = 4,67$ m/s.

XI/33. A három higanyrészre (a két függőlegesre és a vízszintesre) felírjuk Newton II. törvényét. A bal oldali könyöknél legyen a higany nyomása p_1 , a jobb oldalánál p_2 (XI. 23. ábra). Ekkor egyrészt

$$Ap_1 = Ap_0 + Ah_1 \rho g, \quad (1)$$

$$Ap_2 = Ap_0 + Ah_2 \rho g, \quad (2)$$

és

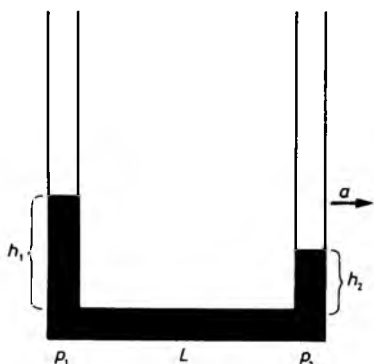
$$p_1 A - p_2 A = AL \rho a, \quad (3)$$

másrészt

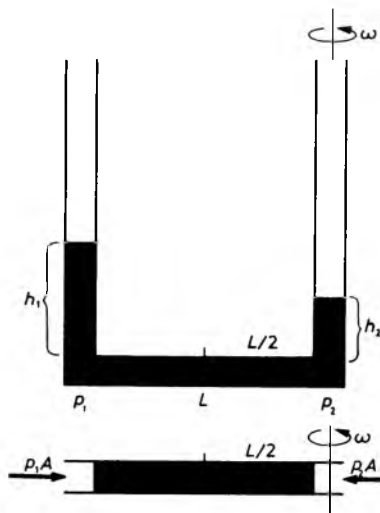
$$h_1 + h_2 = 2h, \quad (4)$$

és

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 - h_2}{L}. \quad (5)$$



XI. 23.
ábra



XI. 24.
ábra

Az (1), (2), (3) egyenlőség alapján

$$\frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{a}{g}.$$

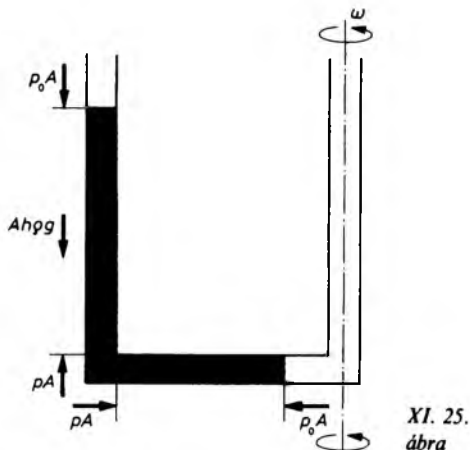
Így $h_1 - h_2 = 0,6$ m és $h_1 + h_2 = 0,6$ m. Ezért $h_1 = 0,6$ m, és $h_2 = 0$, vagyis csak a bal oldali és a vízszintes szárban van higany. A higany szinteket összekötő egyenes $\alpha \approx 50,2^\circ$ -os szöget zár be a vízszintessel.

XI/34. Newton II. törvényét alkalmazzuk a három higanyszakaszra. A két függőleges szakasz függőleges irányban nem gyorsul. A „külső” függőleges szár centripetálisan gyorsul, azonban a centripetális erőt a cső fala biztosítja. A vízszintes szakasz tömegközppontja $L/2$ sugarú pályán körmozgást végez. A külső könyökben legyen a nyomás p_1 , a belsőben p_2 (XI. 24. ábra). Ekkor

$$Ap_1 = Ap_0 + Ah_1 \rho g,$$

$$Ap_2 = Ap_0 + Ah_2 \rho g,$$

$$p_1 A - p_2 A = AL \rho \frac{L}{2} \omega^2.$$



XI. 25. ábra

Így

$$Ah_1 q g - Ah_2 q g = ALq \frac{L}{2} \omega^2,$$

$$\frac{2(h_1 - h_2)g}{L^2} = \omega^2,$$

behelyettesítve:

$$\frac{2 \cdot 0,2}{0,5^2} \cdot 10 = \omega^2,$$

$$\omega = 4 \text{ 1/s.}$$

XI/35. A függőleges szár alján legyen a nyomás p (XI. 25. ábra). A mozgásegyenletek a higany függőleges és vízszintes szakaszára:

$$pA = p_0 A + Ahqg,$$

$$pA - p_0 A = Alq \left(L - \frac{l}{2} \right) \omega^2,$$

ahol $l = 0,3$ m, a vízszintes szárban lévő higany hossza. Innen

$$Ahqg = Alq \left(L - \frac{l}{2} \right) \omega^2,$$

$$hg = l \left(L - \frac{l}{2} \right) \omega^2.$$

Behelyettesítve:

$$0,8 \cdot 10 = 0,3(0,50 - 0,15)\omega^2,$$

ezért

$$\omega = 8,73 \text{ 1/s,} \quad f = 1,4 \text{ 1/s.}$$

A higany energiája a nyugalmi állapotban, ha a helyzeti energia nulla szintje a cső vízszintes szakaszánál van:

$$E_1 = 2Ah_0 q g \frac{h_0}{2} = Aqgh_0^2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 136000 \cdot 0,3^2 = 0,61 \text{ J.}$$

Forgás közben az energia három tagból áll:

$$E_2 = Ahqg \frac{h}{2} + Ahq \frac{L\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{Alq l^2}{12} + Alq \left(L - \frac{l}{2} \right)^2 \right] \omega^2.$$

Az első tag a függőleges szárban lévő higanyoszlop helyzeti energiája, a második ugyanennek a függőleges szárnak a mozgási energiája. A harmadik tag a vízszintes szár mozgási energiája. Ezt forgási energia formájában írtuk fel. Alkalmazzunk kellett azonban Steiner tételét: a vízszintes higanyszál tehetetlenségi nyomatékát transzformálni kell, a tömegközéppontja $L - l/2 = 0,35$ m távolságra van a forgástengelytől. Behelyettesítve:

$$E_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 136000 \frac{0,8^2}{2} + 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8 \cdot 13600 \cdot \frac{0,5 \cdot 8,73^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 13600 \cdot 0,3^3}{12} + 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3 \cdot 13600 \cdot 0,35^2 \right) 8,73^2 = 2,176 + 10,362 + 1,010 = 13,548 \text{ J.}$$

Az energiakülönbség 12,936 J.

XII. Feladatcsoport: gázok

XII/1. A Boyle—Mariotte-törvény szerint

$$10^5(5 - V) = 0,5 \cdot 10^5(9 - V),$$

ahol V a vattacsomó térfogata. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $V = 1 \text{ cm}^3$.

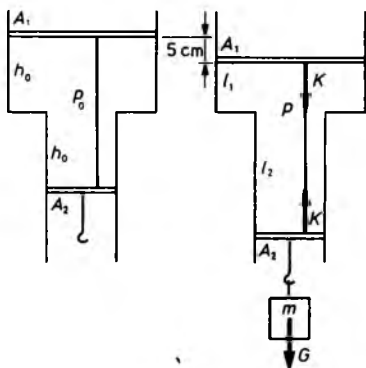
XII/2. Az alsó dugattyú megterhelése után mindkettő nyugalomba kerül (XII. 1. ábra). A két dugattyú egyensúlyára vonatkozó mozgásegyenletek:

$$p_0 A_1 + K = p A_1, \quad (1)$$

$$p A_2 + G = p_0 A_2 + K. \quad (2)$$

A Boyle—Mariotte-törvény:

$$p_0(A_1 h_0 + A_2 h_0) = p(A_1 l_1 + A_2 l_2). \quad (3)$$



XII. 1.
ábra

Nilvánvaló, hogy $l_1 = 10 \text{ cm}$, $l_2 = 20 \text{ cm}$. A (3) egyenletből p könnyen meghatározható:

$$10^5 \cdot (200 \cdot 15 + 100 \cdot 15) =$$

$$= p(200 \cdot 10 + 100 \cdot 20),$$

$$p = 1,125 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Az (1) egyenlőségből

$$0,125 \cdot 10^5 \cdot 0,02 = K,$$

$$K = 250 \text{ N}.$$

A (2) egyenlet szolgáltatja a megoldást:

$$G = -0,125 \cdot 10^5 \cdot 0,01 + 250 = 125 \text{ N},$$

ezért $m = 12,5 \text{ kg}$.

XII/3. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$A l_0 p_0 = A l p,$$

a higanycseppre ható erők egyensúlyát kifejező egyenlőség (XII. 2. ábra):

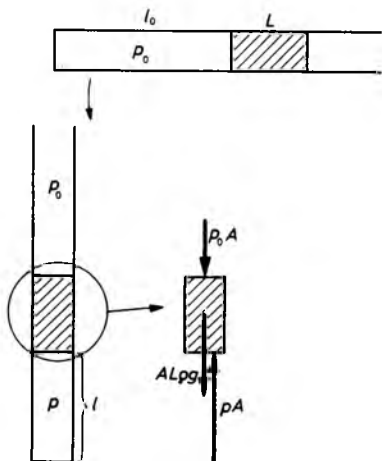
$$p_0 A + A L \rho g = p A.$$

Behelyettesítve:

$$0,4 \cdot 10^5 = p l,$$

$$10^5 + 0,1 \cdot 13\,600 \cdot 10 = p,$$

és így $l = 0,352 \text{ m} = 35,2 \text{ cm}$.



XII. 2.
ábra

XII/4. A Boyle—Mariotte-törvény és a higanyra ható erők egyensúlya:

$$Al_0 p_0 = Alp,$$

$$pA + AL\rho g = p_0 A.$$

A számolást elvégezve $l = 0,462 \text{ m} = 46,2 \text{ cm}$.

XII/5. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$Al_0 p_0 = Alp,$$

az erőegyensúly pedig így önthető formába (XII. 3. ábra):

$$pA = p_0 A + AL\rho g \sin \alpha.$$

Behelyettesítve és a számolást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$p = 111\,778 \text{ Pa}, \quad l = 0,357 \text{ m}.$$

XII/6. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$Al_0 p_0 = Alp.$$

A higany most nincs egyensúlyban (XII. 4. ábra); a mozgásegyenlet:

$$pA - AL\rho g - p_0 A = ALqa.$$

Behelyettesítjük az adatokat:

$$p = 0,1 \cdot 13\,600 \cdot 5 + 0,1 \cdot 13\,600 \cdot 10 + 10^5,$$

$$p = 120\,400 \text{ Pa},$$

és

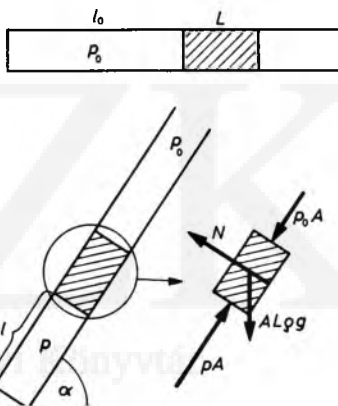
$$l = \frac{0,4 \cdot 10^5}{120\,400} = 0,332 \text{ m}.$$

XII/7. A Boyle—Mariotte-törvény:

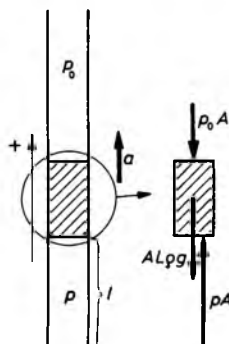
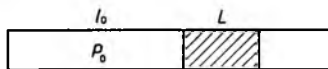
$$Al_0 p_0 = Alp,$$

és Newton II. törvénye a higanyra:

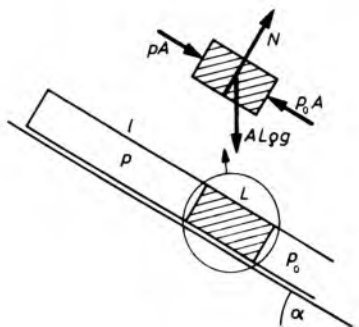
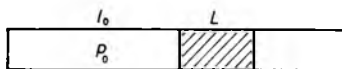
$$p_0 A + AL\rho g - pA = ALqa.$$



XII. 3.
ábra



XII. 4.
ábra



XII. 5.
ábra

Behelyettesítünk, és a számolás elvégzése után azt kapjuk, hogy $p = 106\,800 \text{ Pa}$ és $l = 0,374 \text{ m}$.

XII/8. A Boyle—Mariotte-törvény és Newton II. törvénye a higany mozgására alkalmazva:

$$Al_0 p_0 = Alp,$$

$$p_0 A - AL\varrho g - pA = ALqa.$$

Az adatokat figyelembe véve: $p = 72800 \text{ Pa}$, $l = 0,55 \text{ m} = 55 \text{ cm}$.

XII/9. A Boyle—Mariotte-törvény és a higanyra vonatkozó mérlegegyenlet:

$$Al_0 p_0 = Alp,$$

$$pA + AL\varrho g - p_0 A = ALqa.$$

Behelyettesítve: $p = 10^5 \text{ Pa}$ és $l = 0,4 \text{ m}$.

XII/10. A Boyle—Mariotte-törvény:

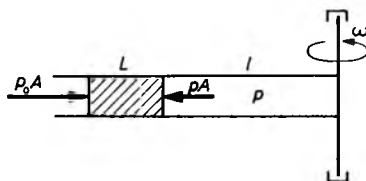
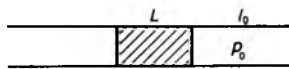
$$Al_0 p_0 = Alp.$$

Newton II. törvénye a lejtő mentén gyorsuló higanyra (XII. 5. ábra):

$$pA + AL\varrho g \sin \alpha - p_0 A = ALqa,$$

ahol

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) > 0,$$



XII. 6.
ábra

mert $\tan \alpha > \mu$. Könnyen kiszámolható, hogy $a = 3,3 \text{ m/s}^2$,

$$p = 0,1 \cdot 13600 \cdot 3,3 -$$

$$- 0,1 \cdot 136000 \cdot 0,5 + 10^5 = 97688 \text{ Pa},$$

$$l = 0,41 \text{ m}.$$

XII/11. A Boyle-Mariotte-törvény a csőben elzárt gázra:

$$Al_0 p_0 = Alp.$$

A higanyszálat a külső és a belső nyomásból származó erő gyorsítja (XII. 6. ábra):

$$p_0 A - pA = AL\varrho \left(l + \frac{L}{2} \right) \omega^2.$$

Világos, hogy $p = 0,727 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, és ezért

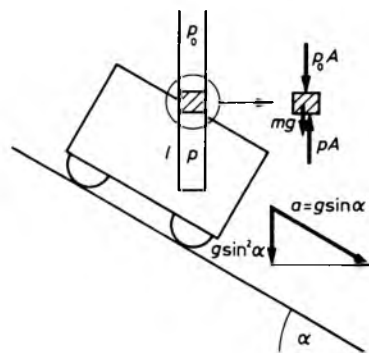
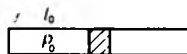
$$0,2727 \cdot 10^5 = 1360(0,55 + 0,05)\omega^2,$$

$$\omega = \sqrt{33,42} = 5,78 \text{ 1/s}.$$

XII/12. A lejtőn gyorsuló test lejtő irányú gyorsulása $g \sin \alpha$. Ennek a függőleges összetevője $g \sin \alpha \sin \alpha = g \sin^2 \alpha$ nagyságú. A higanyra függőleges irányban a külső és a belső nyomásból származó erő hat és természetesen a nehézségi erő (XII. 7. ábra):

$$p_0 A + AL\varrho g - pA = AL\varrho g \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

és érvényben van a Boyle—Mariotte-tör-



XII. 7.
ábra

vény:

$$Al_0 p_0 = Alp. \quad (2)$$

Az (1) egyenletből:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + Lqg(1 - \sin^2 \alpha) = p_0 + Lqg \cos^2 \alpha = \\ &= 10^5 + 0,1 \cdot 136000 \cdot \frac{3}{4} = \\ &= 1,102 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

A (2)-ből: $l = 0,363 \text{ m} = 36,3 \text{ cm}$.

XII/13. A higany lejtőre merőleges gyorsulása nulla, ezért

$$p_0 A - pA + ALqg \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

és érvényben van a Boyle—Mariotte-törvény is:

$$Al_0 p_0 = Alp. \quad (2)$$

Az (1)-ből:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + Lqg \cos \alpha = 10^5 + 0,1 \cdot 136000 \cdot \frac{3}{2} = \\ &= 1,117 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \end{aligned}$$

ezért a (2)-ből: $l = 0,358 \text{ m}$.

XII/14. A XII. 8. ábra szerint

$$x + y = l_1 + l_2 = 0,9 \text{ m}, \quad (1)$$

és a két gázra a Boyle—Mariotte-törvény két állítást jelent:

$$Al_1 p = A x p_1, \quad (2)$$

$$Al_2 p = A y p_2. \quad (3)$$

A függőleges csőben a higany nyugalomban van:

$$p_1 A - ALqg - p_2 A = 0. \quad (4)$$

Így (2) és (3) egyenlőségekből p_1 -et és p_2 -t a (4)-be helyettesítve:

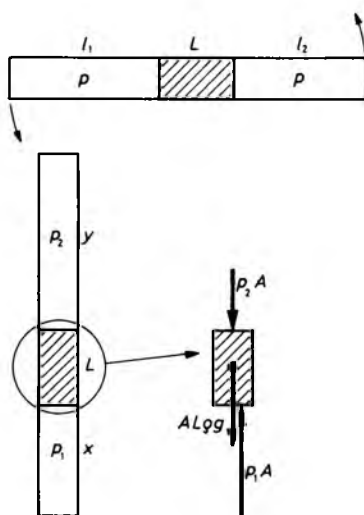
$$\frac{l_1 p}{x} - \frac{l_2 p}{y} = Lqg.$$

Az adatokat figyelembe véve:

$$\frac{0,5}{0,4} - \frac{0,4}{0,5} p = 13600,$$

$$p = 0,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

XII/15. Ha az 50 cm-es rész kerül alulra, akkor a két gázra és a higanyra (és a cső



XII. 8.
ábra

hosszára) vonatkozó egyenletek (XII. 9. ábra):

$$Al_1 p = A x p_1, \quad (1)$$

$$Al_2 p = A y p_2, \quad (2)$$

$$p_2 A - AL \varrho g - p_1 A = 0, \quad (3)$$

$$x + y = l_1 + l_2. \quad (4)$$

A feladat szerint $l_1 = 0,4$ m, $l_2 = 0,5$ m, továbbá $x = l_1 + 0,12 = 0,52$ m és $y = l_2 - 0,12 = 0,38$ m. Behelyettesítve és a számolást elvégezve azt kapjuk, hogy $p = 24\,897$ Pa.

Ha a 40 cm-es rész kerül alulra, akkor az előző egyenlőségek lényegében ugyanúgy érvényben vannak, csak a (3) egyenlet módosul a következőképpen:

$$p_1 A - AL \varrho g - p_2 A = 0. \quad (5)$$

Az (1), (2), (4), (5) egyenletekben ismeretlenek: p_1, p_2, x, y . Az (5) alapján:

$$\left(\frac{0,4}{x} - \frac{0,5}{y} \right) \cdot 24\,879 = 13\,600.$$

Tegyük fel, hogy a higany z -vel mozdul lefelé, ekkor $x = 0,4 - z$, $y = 0,5 + z$, így

$$\frac{0,4}{0,4 - z} - \frac{0,5}{0,5 + z} = 0,5466,$$

$$0,9z = 0,5466 \cdot 0,2 - 0,1z - z^2,$$

$$1,6464z = 0,2 - 0,1z - z^2,$$

$$z^2 + 1,7464z - 0,2 = 0,$$

$$z = 0,1078 \text{ m} = 10,7 \text{ cm},$$

$$x = 0,292 \text{ m}, \quad y = 0,6078 \text{ m}.$$

XII/16. Az elzárt gáz nyomásával kezdetben a külső levegő nyomása és az $l/2$ magas higanyoszlop nyomása tart egyensúlyt. A cső elfordítása után a gáz megváltozott nyomásának és a higanyoszlop nyomásának az összege a légköri nyomással



XII. 9. ábra

egyenlő (XII. 10. ábra):

$$p_1 = p_0 + \frac{l}{2} \varrho g, \quad (1)$$

$$p_2 + (l - x) \varrho g = p_0, \quad (2)$$

és a Boyle—Mariotte-törvény:

$$A \frac{l}{2} p_1 = A x p_2. \quad (3)$$

Az (1) egyenletből: $p_1 = 154\,400$ Pa, a (3) egyenletből: $p_2 = 61\,760/x$. A (2) egyenletben ezt figyelembe véve:

$$\frac{61\,760}{x} + (0,8 - x) \cdot 136\,000 = 10^5,$$

$$0,61\,760 + (0,8 - x)x \cdot 1,36 = x,$$

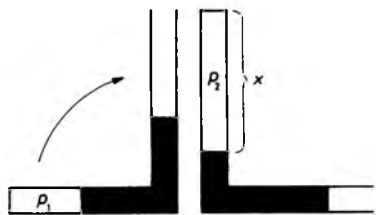
$$0,61\,760 + 1,088x - 1,36x^2 = x,$$

$$1,36x^2 - 0,088x - 0,6176 = 0,$$

$$x = \frac{0,088 + \sqrt{0,088^2 + 4 \cdot 1,36 \cdot 0,6176}}{2,72} =$$

$$= 0,7 \text{ m}.$$

A higany mintegy 30 cm-t mozdul el, és a zárt függőleges szárban 10 cm magas lesz a higanyoszlop magassága.



XII. 10.
ábra

XII/17. A Boyle—Mariotte-törvényt és a nyomások egyensúlyát kifejező egyenletek (XII. 11. ábra):

$$p_1 A \frac{l}{2} = p_2 A x,$$

$$p_1 + \frac{l}{2} \rho g = p_0,$$

$$p_0 + x \rho g = p_2.$$

Azt kapjuk, hogy

$$p_1 = 45\,600 \text{ Pa}, \quad p_2 = \frac{18\,240}{x},$$

ezért

$$10^5 + 136\,000x = \frac{18\,240}{x},$$

$$1,36x^2 + x - 0,1824 = 0,$$

és végül $x = 0,15 \text{ m}$.

XII/18. A két bezárt gázra a Boyle—Mariotte-törvényt kifejező két egyenlet (XII. 12. ábra):

$$A \frac{l}{2} p_1 = A x p_3, \quad (1)$$

$$A \frac{l}{2} p_2 = A y p_4, \quad (2)$$

és a nyomásegyensúlyt leíró két egyenlet:

$$p_1 = p_2 + \frac{l}{2} \rho g, \quad (3)$$

$$p_4 = p_3 + (l - x) \rho g. \quad (4)$$

(1)-ből és (2)-ből:

$$p_3 = \frac{0,4 p_1}{0,55}; \quad p_4 = \frac{0,4 p_2}{0,25}.$$

(4)-be helyettesítve ezt a két képletet:

$$\frac{0,4 p_2}{0,25} = \frac{0,4 p_1}{0,55} - 0,25 \cdot 136\,000.$$

Innen

$$2,2 p_2 = p_1 + 46\,750.$$

Most felhasználjuk a (3) egyenlőséget is:

$$2,2 p_2 = p_2 + 54\,400 + 46\,750,$$

$$1,2 p_2 = 101\,150 \text{ Pa},$$

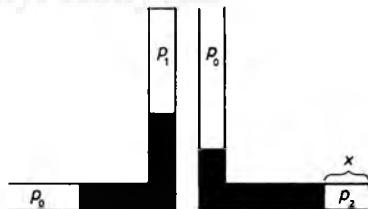
$$p_2 = 84\,292 \text{ Pa}.$$

Ezután egyszerű visszahelyettesítéssel:

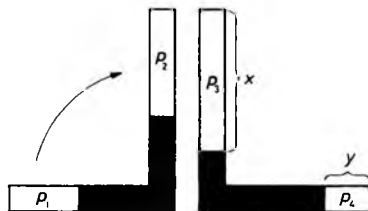
$$p_1 = 138\,692 \text{ Pa},$$

$$p_3 = 100\,867 \text{ Pa},$$

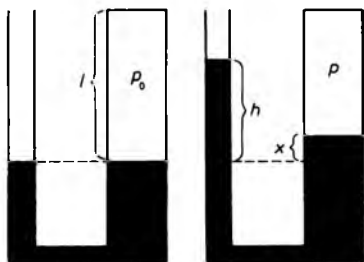
$$p_4 = 134\,867 \text{ Pa}.$$



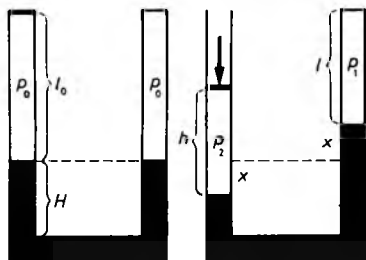
XII. 11.
ábra



XII. 12.
ábra



XII. 13.
ábra



XII. 14.
ábra

XII/19. A zárt szárban — mondjuk — x -szel emelkedik a higanyszint (XII. 13. ábra). Ekkor

$$p_0 + h\varrho g = p + x\varrho g.$$

A zárt szárban a gáz kezdeti és végső állapotát a Boyle—Mariotte-törvény kapcsolja össze:

$$p_0 A l = p A (l - x).$$

Behelyettesítve és a két egyenletet összeadva az

$$1,36x^2 - 2,083x + 0,204 = 0$$

másodfokú egyenlethez juthatunk. Ebből a fizikailag számba jövő megoldás: $x = 0,105 \text{ m} = 10,5 \text{ cm}$. A csőbe öntött higany térfogata $30 + 10,5 \cdot 5 = 82,5 \text{ cm}^3$, tömege $1,122 \text{ kg}$.

XII/20. A XII. 14. ábra alapján a két környezettől elzárt gázra a

$$A l_0 p_0 = A l p_1,$$

$$A l_0 p_0 = A h p_2$$

formában érvényes a Boyle—Mariotte-törvény. A két szárban a nyomások egyenlőségét a bal oldali folyadékszintre írjuk fel:

$$p_2 = p_1 + 2x\varrho g.$$

Így egyrészt

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{l_0 p_0}{0,7 - x} + 2x\varrho g = \\ &= \frac{0,7 \cdot 10^5}{0,55} + 2 \cdot 0,15 \cdot 136\,000 = \\ &= 1,68\,072 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \end{aligned}$$

másrészt

$$h = \frac{p_0 l_0}{p_2} = 0,41 \text{ m}.$$

A higany helyzeti energiájának megváltozása:

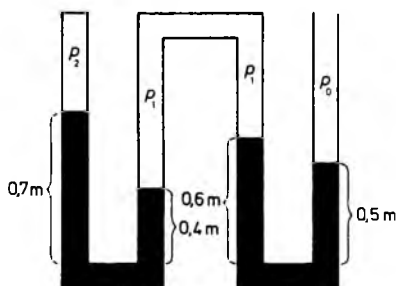
$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 = A(H - x)\varrho g \frac{H - x}{2} + \\ &+ A(H + x)\varrho g \frac{H + x}{2} - 2AH\varrho g \frac{H}{2}, \end{aligned}$$

ahol $H = 30 \text{ cm}$, a higany kezdeti magassága. Behelyettesítve:

$$\Delta E = 0,305 \text{ J}.$$

XII/21. Egyrészt

$$p_0 + 0,5\varrho g = p_1 + 0,6\varrho g,$$



XII. 15.
ábra

másrészt

$$p_1 + 0,4 \rho g = p_2 + 0,7 \rho g.$$

Innen $p_1 = 86\,400$ Pa és $p_2 = 45\,600$ Pa (XII. 15. ábra).

XII/22. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$p_0 A \frac{l}{2} = p A (l - x),$$

a csőben maradt víz egyensúlyát az

$$A p_0 = p A + A x \rho g$$

egyenlőség fejezi ki (XII. 16. ábra). Innen

$$10^5 = p + 10\,000 x = \frac{0,5 \cdot 10^5}{1 - x} + 10\,000 x,$$

$$1 = \frac{0,5}{1 - x} + 0,1 x.$$

Ebből a fizikailag értelmezhető megoldás: $x = 0,475$ m, vagyis 47,5 cm hosszú víoszlop maradt a csőben.

XII/23. A probléma megoldását szolgáló két egyenlet:

$$A l_0 p_0 = A (h + x) p,$$

$$p_0 + x \rho g = p.$$

A két egyenletet összeadva az

$$x^2 + 10,55 x - 4,5 = 0$$

másodfokú egyenlethez juthatunk. Ebből a fizikailag értelmezhető megoldás: $x = 0,41$ m, vagyis a csőbe 4 cm hosszú víoszlop nyomul be (XII. 17. ábra).

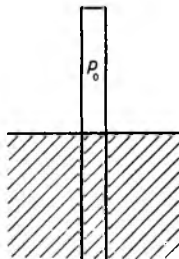
XII/24. A Boyle—Mariotte törvény:

$$A l_0 p_0 = A l p,$$

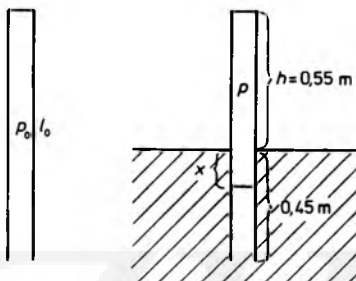
és a nyomások egyenlősége a csőbe felnyomuló víz felszínén és ugyanezen a síkon a csővön kívül (XII. 18. ábra):

$$p = p_0 + (h + l) \rho g.$$

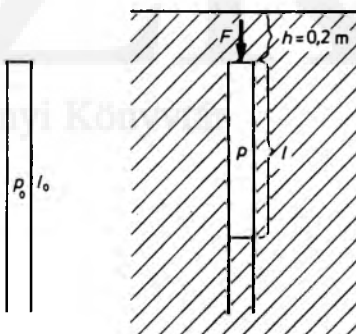
Az adatokat behelyettesítve és a két egyen-



XII. 16. ábra



XII. 17. ábra



XII. 18. ábra

letet összevonva az

$$l^2 + 10,2 l - 10 = 0$$

másodfokú egyenletet — vagy egy ezzel ekvivalens másikat — kapunk, ebből az $l = 0,9$ m megoldás származik. Ebből pedig $V = 90$ cm³ és $p = 1,11 \cdot 10^5$ Pa adódik. A

cső felső lapjára ható erők egyensúlyban vannak:

$$F + (p_0 + h\rho g)A = pA,$$

és így $F = 0,9 \text{ N}$.

XII/25. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$Al_0 p_0 = Alp. \quad (1)$$

A dugattyúra ható erők eredője nulla:

$$Ap = A[p_0 + (h+l)\rho g], \quad (2)$$

és a felső lapra kifejtett erők eredője is zérus (XII. 19. ábra):

$$F + (p_0 + h\rho g)A = pA. \quad (3)$$

Az (1) és (2) egyenleteket összevonjuk:

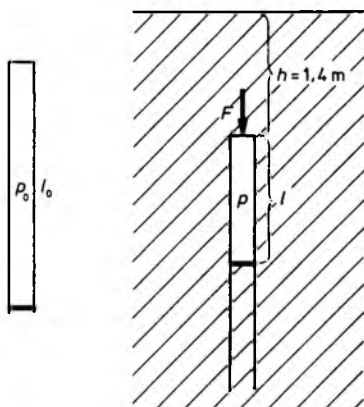
$$10^5 + (1,4 + l) \cdot 10^4 = \frac{0,4 \cdot 10^5}{l}.$$

Innen

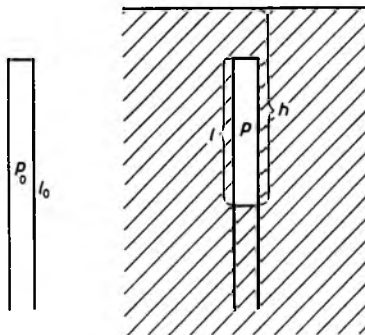
$$l^2 + 11,4l - 4 = 0,$$

és $l = 0,34 \text{ m} = 34 \text{ cm}$. A csőbe zárt levegő térfogata 170 cm^3 , nyomása $1,17 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. A csőre kifejtett erő:

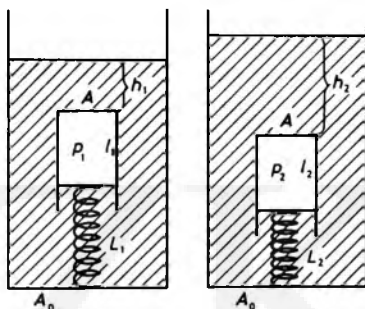
$$F = 1,17 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} - 1,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 1,5 \text{ N}.$$



XII. 19. ábra



XII. 20. ábra



XII. 21. ábra

XII/26. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$Al_0 p_0 = Alp.$$

A nyomásegysúly a csőbe nyomult víz felszínénél (XII. 20. ábra):

$$p = p_0 + h\rho g.$$

A csőre ható erők egyensúlyát az

$$mg + [p_0 + \rho g(h-l)]A = pA$$

egyenlet fejezi ki. Behelyettesítéssel:

$$p = 10^5 + 0,4 \cdot 10000 = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$l = \frac{0,2 \cdot 10^5}{1,04 \cdot 10^5} = 0,1923 \text{ m},$$

vagyis a csőben $7,7 \text{ mm}$ hosszú víoszlop van. Másrészt az erőegysúlyt kifejező egyenletből $mg = 0,38 \text{ N}$, ezért $m = 38 \text{ g}$.

XII/27. A Boyle—Mariotte-törvény:

$$Al_1 p_1 = Al_2 p_2 . \quad (1)$$

A henger felső lapjára ható erők eredője nulla, kezdetben és később is (XII. 21. ábra):

$$(p_0 + h_1 \rho g) A = p_1 A , \quad (2)$$

$$(p_0 + h_2 \rho g) A = p_2 A , \quad (3)$$

a dugattyúra ható erők eredője is nulla:

$$p_1 A + D(L_1 - L_0) = [p_0 + (h_1 + l_1) \rho g] A , \quad (4)$$

$$p_2 A + D(L_2 - L_0) = [p_0 + (h_2 + l_2) \rho g] A . \quad (5)$$

A víz térfogata kezdetben és végül

$$V_1 = A_0(h_1 + l_1 + L_1) - Al_1 , \quad (6)$$

$$V_2 = A_0(h_2 + l_2 + L_2) - Al_2 . \quad (7)$$

Az edénybe öntött víz mennyisége

$$\Delta V = V_2 - V_1 . \quad (8)$$

A (2) és a (3) egyenletből:

$$p_1 = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Pa} , \quad p_2 = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

Így (1) alapján: $l_2 = 0,196 \text{ m}$. Ezután a (4) és (5) egyenletbe helyettesítsünk be:

$$0,01 \cdot 1,02 \cdot 10^5 + 0,04 \cdot D =$$

$$= (10^5 + 0,4 \cdot 10^4) \cdot 0,01 ,$$

$$0,01 \cdot 1,04 \cdot 10^5 + (L_2 - 0,12) D =$$

$$= [10^5 + (0,4 + 0,196) \cdot 10^4] \cdot 0,01 .$$

Ebből egyrészt $D = 500 \text{ N/m}$, másrészt

$L_2 = 0,1592 \text{ m}$. A víz térfogata kezdetben:

$$V_1 = 0,02(0,2 + 0,2 + 0,16) - 0,01 \cdot 0,2 =$$

$$= 9,2 \text{ dm}^3 ,$$

és a víz rátöltése után:

$$V_2 = 0,02(0,4 + 0,196 + 0,1592) -$$

$$- 0,01 \cdot 0,196 = 13,144 \text{ dm}^3 ,$$

így $\Delta V = 3,944 \text{ dm}^3 \approx 4 \text{ liter}$ vizet öntöttünk a hengerbe. A bezárt levegő térfogata előbb 2 dm^3 , a végállapotban $1,96 \text{ dm}^3$. A gáz térfogata tehát csökkent, és a dugattyú is lejjebb került, a rugó megnyúlása csökkent.

XII/28. Mutatja-e az erőmérő a higany súlyát vagy csak az üvegcsőét? A cső felső lapjára ható erők eredője nulla: felfelé hat az erőmérő által kifejtett K erő, lefelé a cső súlya és a felső lapra ható — a külső levegő nyomásából származó — $p_0 A$ erő. A cső végére belülről nem hat erő, mert belül nincs levegő, belül vákuum van. Így

$$K = p_0 A + G . \quad (1)$$

A higany nyomása a cső alján — a külső higanyfelszín magasságában — $p = h \rho g$. Ez megegyezik a külső levegő nyomásával:

$$p_0 = h \rho g . \quad (2)$$

Helyettesítsük ezt (1)-be:

$$K = A h \rho g + G = 10 + 2 = 12 \text{ N} .$$

Az erőmérő méri a cső súlyát és a higany súlyával egyenlő nagyságú erőt, a cső feletti külső levegő súlyát.

XIII. Feladatcsoport: hőtágulás

XIII/1. A sűrűség a hőmérséklet növekedésével csökken:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha \Delta t} = \frac{7,16}{1 + 3 \cdot 2,94 \cdot 10^{-5} \cdot 82} = 7,10 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

XIII/2. A higanyszint elmozdulása és a hőmérséklet-növekedés arányos egymással:

$$\frac{4,8}{12} = \frac{t}{100},$$

innen $t = 40^\circ \text{C}$.

XIII/3. Az alumínium hosszának a növekedése:

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t = 30 \cdot 2,4 \cdot 10^{-5} \cdot 15 = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

A relatív hosszváltozás:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

XIII/4. Az üvegedény térfogata a köbös hőtágulási törvény szerint változik:

$$V = V_0(1 + 3\alpha \Delta t) = 120(1 + 3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \cdot 80) = 120,26 \text{ cm}^3.$$

XIII/5. A test felülete az $A = A_0 \cdot 2\alpha \Delta t$, a térfogata a $V = V_0 3\alpha \Delta t$ törvény szerint változik. A feladat szerint $V = V_0 \cdot 0,018$. Így $3\alpha \Delta t = 0,018$, tehát $2\alpha \Delta t = (2/3) \cdot 0,018 = 0,012$. Ezért $A = A_0 \cdot 0,012$, a felület tehát 1,2%-kal nő.

XIII/6. Az úszás feltétele:

$$Ah\rho_v g = Ax\rho_{Hg}g.$$

A higanyba merülő rész és a test teljes magasságának az aránya:

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} &= \frac{\rho_v}{\rho_{Hg}} = \frac{\frac{\rho_{ov}}{1 + 3\alpha \cdot 100}}{\frac{\rho_{oHg}}{1 + \beta \cdot 100}} = \\ &= \frac{\rho_{ov}}{\rho_{oHg}} \frac{1 + \beta \cdot 100}{1 + 3\alpha \cdot 100} = \frac{\rho_{ov}}{\rho_{oHg}} \frac{1,018}{1,0036} = \\ &= \frac{\rho_{ov}}{\rho_{oHg}} \cdot 1,014 = 0,578, \end{aligned}$$

ugyanis

$$\frac{\rho_{ov}}{\rho_{oHg}} = 0,57.$$

A hőmérséklet emelkedése után a higanyba a test magasságának 57,8%-a merül.

XIII/7. Tegyük fel először, hogy a két szalag szabadon tágulhat a hőhatásnak ki-

téve. Ekkor

$$\Delta l_r = l_0 \alpha_r \Delta t, \quad (1)$$

$$\Delta l_a = l_0 \alpha_a \Delta t, \quad (2)$$

Gondoljuk el ezután, hogy az acélszalagot még megnyújthatjuk úgy, hogy a hossza Δl -el változik, a rézszalagokat pedig „összenyomjuk” Δl hosszúságúra.

$$\Delta l - \Delta l_a = \frac{1}{E_a} l_0 \frac{F_a}{A_a}, \quad (3)$$

$$\Delta l_r - \Delta l = \frac{1}{E_r} l_0 \frac{F_r}{A_r}. \quad (4)$$

Továbbá az erőegyensúly miatt

$$F_a = 2F_r. \quad (5)$$

A keresztmetszet arányos a lemez vastagságával, ezért $A_a = 2A_r$. A (3) és (4) hányadosa:

$$\frac{\Delta l - \Delta l_a}{\Delta l_r - \Delta l} = \frac{E_r}{E_a} = \frac{1}{1,2}.$$

Innen

$$\Delta l = \frac{\Delta l_r + 1,2\Delta l_a}{2,2}.$$

Az (1) és (2) alapján:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l_0 \frac{\alpha_r + 1,2\alpha_a}{2,2} \Delta t = \\ &= 2000 \frac{1,8 \cdot 10^{-5} + 1,2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-5}}{2,2} \cdot 50 = \end{aligned}$$

$$= 1,4 \text{ mm}.$$

XIII/8. Az üvegedény térfogata 80 °C-on:

$$\begin{aligned} V_{\bar{u}} &= 100(1 + 3 \cdot 0,9 \cdot 10^{-5} \cdot 80) = \\ &= 100,216 \text{ cm}^3, \end{aligned}$$

a vaskocka térfogata 80 °C-on:

$$V_v = 27(1 + 3 \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 80) = 27,071 \text{ cm}^3.$$

A folyadék térfogata 0 °C-on 73 cm³, 80 °C-on

$$V_a = 73(1 + 1,1 \cdot 10^{-3} \cdot 80) = 79,424 \text{ cm}^3.$$

A rendelkezésre álló térfogatokban $V_{\bar{u}} - V_v$, ez kevesebb, mint V_a . A kiömlő folyadék térfogata:

$$V_a - (V_{\bar{u}} - V_v) \approx 6,279 \text{ cm}^3.$$

XIII/9. Tegyük fel, hogy V az edénybe önthető petróleum térfogata 0 °C-on. Ekkor a 10 dm³ térfogatú vaskanna és a V térfogatú petróleum ugyanarra a térfogatra tágul, ha a hőmérséklet 40 °C-ra emelkedik:

$$10(1 + 3 \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 40) = V(1 + 10^{-3} \cdot 40),$$

$$\text{így } V = 9,628 \text{ cm}^3.$$

XIII/10. Világos, hogy

$$x - y = 3 \text{ dm},$$

és a t hőmérsékleten:

$$x(1 + \alpha_r t) - y(1 + \alpha_a t) = 3 \text{ dm}.$$

Innen

$$(x - y) + (x\alpha_r - y\alpha_a)t = 3,$$

ezért

$$x\alpha_r - y\alpha_a = 0.$$

Ebből

$$x = \frac{\alpha_a}{\alpha_r} y = \frac{2,4}{1,6} y = 1,5 y,$$

így

$$1,5y - y = 3 \text{ dm},$$

$$y = 6 \text{ dm}, \quad x = 9 \text{ dm}.$$

XIV. Feladatcsoport: az ideális gázok hőtana

XIV/1. Az általános gáztörvényt írjuk fel a kezdeti és a végső állapotra:

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1,$$

$$p_2 V = \frac{0,75 m}{M} R (T_1 - 10).$$

Osszuk el a két egyenletet egymással:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{0,75 \cdot 290}{300},$$

$$p_2 = 0,725 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

XIV/2. Az általános gáztörvény egyik formája:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{p}{\rho T} = \text{áll},$$

ezért

$$\frac{10^5}{716 \cdot 273} = \frac{1,5 \cdot 10^5}{\rho \cdot 293}$$

$$\rho = 1000 \text{ g/m}^3.$$

XIV/3. A

$$\rho = \frac{p_1 M_1}{R T_1} = \frac{p_2 M_2}{R T_2}$$

állítás alapján

$$\frac{6 \cdot 10^5 \cdot 2}{283} = \frac{1,6 \cdot 10^5 \cdot 32}{T_2},$$

$$T_2 = 1207 \text{ K}.$$

XIV/4. Az általános gáztörvényből:

$$\rho = \frac{p M}{R T} = \frac{10^5 \cdot 29}{8,31 \cdot 303} = 1151 \frac{\text{g}}{\text{m}^3},$$

a levegő (átlagos) molekulatömege ugyanis 29 g.

XIV/5. Az általános gáztörvényt alkalmazzuk a kezdeti és a végső állapotra. Az adatokat is figyelembe vesszük:

$$150 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \frac{m_1}{32} 8,31 \cdot 331,$$

$$50 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \frac{m_2}{32} 8,31 \cdot 291.$$

Így $m_1 = 1745 \text{ g}$, $m_2 = 662 \text{ g}$. A tartályból 1083 g gázt engedtek ki.

XIV/6. Az általános gáztörvény a kezde-

ti és a végső állapotra:

$$10^5 V = \frac{1000}{M} 8,31 \cdot 300,$$

$$1,1 \cdot 10^5 V = \frac{m}{M} 8,31 \cdot 350.$$

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$1,1 = \frac{m}{1000} \frac{350}{300},$$

$$m = 943 \text{ g}.$$

A tartályból 57 g gázt kell kiengedni.

XIV/7. Az általános gáztörvény a kezdeti állapotban a két gázra, és a keveredés utáni állapotra (*XIV. 1. ábra*):

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1,$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT.$$

A két gáz összes belső energiája állandó:

$$\frac{f}{2} p_1 V_1 + \frac{f}{2} p_2 V_2 = \frac{f}{2} p(V_1 + V_2).$$

p_1, V_1	p_2, V_2
T_1	T_2
m_1	m_2

$p, V_1 + V_2$
T
$m_1 + m_2$

*XIV. 1.
ábra*

Ebből $p = 2,33 \text{ atm}$. Az első három egyenlőség alapján

$$p(V_1 + V_2) = \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) T,$$

és innen $T = 304 \text{ K}$.

XIV/8. A két gáz nyomása kezdetben is és a melegítés végén is azonos. Jelöljük ezt p -vel. Ekkor — az adatokat is figyelembe véve — az egyesített gáztörvény:

$$\frac{p_0 \cdot 3}{273} = \frac{p V_1}{303}, \quad (1)$$

$$\frac{p_0 \cdot 4}{273} = \frac{p V_2}{293}, \quad (2)$$

és

$$V_1 + V_2 = 7 \text{ dm}^3. \quad (3)$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

$$\frac{1 \cdot 3}{273} \cdot 303 = p V_1,$$

$$\frac{1 \cdot 4}{273} \cdot 293 = p V_2.$$

Adjuk össze a két egyenletet és használjuk fel a (3) egyenlőséget:

$$\frac{3 \cdot 303 + 4 \cdot 293}{273} = p \cdot 7,$$

tehát $p = 1,088 \text{ atm}$. Innen V_1 és V_2 meghatározható: $V_1 = 3,05 \text{ dm}^3$ és $V_2 = 3,95 \text{ dm}^3$.

XIV/9. A bal oldali tartályba töltött gázra alkalmazzuk a gáztörvényt:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} RT_0,$$

$$p(V_0 - \Delta V) = \frac{m/2}{M} RT_0.$$

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\frac{p(V_0 - \Delta V)}{p_0 V_0} = \frac{1}{2}.$$

A jobb oldali gázra egyszerűen a Boyle—Mariotte-törvényt kell alkalmaznunk:

$$p_0 V_1 = p(V_1 + \Delta V).$$

Behelyettesítünk:

$$2p(3 - \Delta V) = p_0 \cdot 3,$$

$$p(2 + \Delta V) = p_0 \cdot 2.$$

Osszuk el a két egyenletet egymással:

$$2 \frac{3 - \Delta V}{2 + \Delta V} = \frac{3}{2},$$

$$\Delta V = \frac{6}{7} = 0,857 \text{ dm}^3,$$

viSSHelyettesítve: $p = 1,54 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

XIV/10. Az általános gáztörvényt alkalmazzuk a kezdeti és a végső állapotra (az adatokat is figyelembe véve):

$$p_0 \cdot 0,6 = \frac{m}{29} \cdot 8,31 \cdot 320,$$

$$p_0 V = \frac{0,66m}{29} \cdot 8,31 \cdot 270.$$

Osszuk el a két egyenlőséget egymással:

$$\frac{V}{0,6} = 0,66 \frac{270}{320},$$

ezért $V = 0,3375 \text{ m}^3 = 337,5 \text{ liter}$.

XIV/11. Az általános gáztörvény a kezdeti és a végső állapotra (az adatokat behelyettesítve):

$$6 \cdot 10^6 V = \frac{m}{28} \cdot 8,31 \cdot 300,$$

$$pV = \frac{0,8m}{28} \cdot 8,31 \cdot 310.$$

Innen

$$p = 6 \cdot 10^6 \cdot 0,8 \frac{310}{300} = 4,96 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

XIV/12. Az általános gáztörvény:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT,$$

az adatokat behelyettesítve:

$$p \cdot 0,2 = \left(\frac{160}{32} + \frac{84}{28} \right) \cdot 8,31 \cdot 320,$$

$$p = 1,06 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

XIV/13. Az általános gáztörvényt a

$$pV = NkT$$

formában használjuk fel:

$$10^{-11} \cdot 10^{-6} = N \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 270,$$

ezért $N = 2684$. Ebben az igen ritka térben cm^3 -ként még több, mint 2500 molekula van a térrészben.

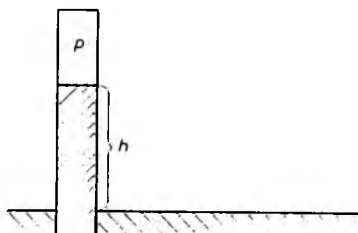
XIV/14. A külső higany felszínén a nyomás megegyezik ebben a szintben a cső belsejében kialakuló nyomással (*XIV. 2. ábra*):

$$p_0 = p + h\rho g,$$

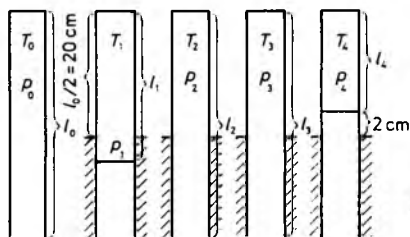
ahol p a higany feletti gáz nyomása, így $p = 1,013 \cdot 10^5 - 0,63 \cdot 136\,000 = 15\,600 \text{ Pa}$. Az általános gáztörvény szerint:

$$0,156 \cdot 10^5 \cdot 37 \cdot 10^{-6} = \frac{m}{29} \cdot 8,31 \cdot 300,$$

ezért $m = 0,0067 \text{ g}$. A gáznak ezt az állapotot



*XIV. 2.
ábra*



XIV. 3. ábra

tát vetjük össze a normálállapottal:

$$\frac{1 \cdot 10^5 \cdot V}{273} = \frac{0,156 \cdot 10^5 \cdot 37 \cdot 10^{-6}}{300}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $V = 5,26 \text{ cm}^3$.

XIV/15. A XIV. 3. ábráról leolvasható a kísérlet története. Írjuk fel az általános gáztörvényt az egyes állapotokra:

$$p_0 A l_0 = \frac{m}{M} R T_0, \quad (1)$$

$$p_1 A l_1 = \frac{m}{M} R T_1, \quad (2)$$

$$p_2 A l_2 = \frac{m}{M} R T_2, \quad (3)$$

$$p_3 A l_3 = \frac{m_1}{M} R T_3, \quad (4)$$

$$p_4 A l_4 = \frac{m_1}{M} R T_4. \quad (5)$$

A feladat alapján világos, hogy $T_0 = T_1 = T_4$ és $l_2 = l_3 = l_0$.

$$p_1 = p_0 + \left(l_1 - \frac{l_0}{2} \right) \rho g, \quad (6)$$

$$p_2 = p_0 + \frac{l_0}{2} \rho g, \quad (7)$$

$$p_3 = p_2, \quad (8)$$

$$p_4 + h \rho g = p_0, \quad (9)$$

$$l_4 + h = \frac{l_0}{2}. \quad (10)$$

Az (1) egyenletből: $m = 4,65 \text{ g}$, a (9)-ből: $p_4 = 97\,280 \text{ Pa}$, és (10)-ből: $l_4 = 18 \text{ cm}$. Osszuk el a (4) egyenletet az (1) egyenlettel:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{p_4 l_4}{p_0 l_0},$$

ezért $m_1 = 2,03 \text{ g}$. Az eltávozott gáz tömege:

$$m - m_1 = 2,62 \text{ g}.$$

A (7)-ből és (8)-ból: $p_2 = p_3 = 127\,200 \text{ Pa}$. Osszuk el a (4) egyenlőséget az (5) egyenlőséggel:

$$\frac{p_3 l_3}{p_4 l_4} = \frac{T_3}{T_4}.$$

Innen

$$T_3 = \frac{127\,200 \cdot 0,4 \cdot 300}{97\,280 \cdot 0,18} = 872 \text{ K}.$$

A T_2 hőmérsékletet is könnyen meghatározhatjuk; osszuk el a (3) és (4) egyenlőségeket:

$$1 = \frac{m}{m_1} \frac{T_2}{T_3},$$

$T_2 = 1997 \text{ K}$. Ezen a hőmérsékleten távozik az első buborék. A további melegítés során a hőmérséklet csökken.

XIV/16. Az általános gáztörvényt a

$$pV = NkT$$

formában használjuk. Az adatokat behelyettesítve:

$$40 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = N \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300.$$

Tehát $N = 9,66 \cdot 10^{24}$ számú molekula van a tartályban. Ez mintegy $16,1 \text{ mol}$ gázt jelent. A gáz tömege: $m = 16,1 \cdot 17 = 273,7 \text{ g}$. A gáz összes energiája:

$$E = \frac{6}{2} pV = 3 \cdot 40 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 120\,000 \text{ J}.$$

Az egyetlen molekulára jutó energia:

$$\frac{E}{N} = 1,242 \cdot 10^{-20} \text{ J.}$$

Ennek az energiának fele jut a mozgási, és fele a forgási energiára:

$$6,211 \cdot 10^{-21} = \frac{1}{2} mv^2,$$

és mert egyetlen molekula tömege:

$$m_* = 2,83 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 2,83 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

a molekulák (átlagos) sebessége: $v = 662 \text{ m/s}$.

Az energia arányos a hőmérséklettel. Ha a hőmérséklet $12/300 = 0,04 = 4\%$ -kal nő, ilyen arányban változik a gáz energiája, és így változik egyetlen molekula energiája is:

$$0,04 \cdot 12 \cdot 42 \cdot 10^{-20} = 5 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

-al nő.

XIV/17. Az egyetlen molekulára jutó energia:

$$\frac{3}{2} kT = \frac{2400}{4 \cdot 10^{23}} = 6 \cdot 10^{-21} \text{ J},$$

így $T = 290 \text{ K}$. A tartályban

$$n = \frac{4 \cdot 10^{23}}{6 \cdot 10^{23}} = \frac{2}{3} \text{ mol}$$

gáz van, és mert 1 mol gáz tömege 4 g, a gáz tömege 2,66 g. A gáz nyomása:

$$p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT = \frac{1}{V} NkT = 10^5 \text{ Pa}.$$

XIV/18. A molszámot jelöljük most is n -nel. Ekkor

$$pV = nRT,$$

ezért $n = 4 \text{ mol}$. A tartályban $N_A n = N = 2,4 \cdot 10^{24}$ molekula van. A részecs-

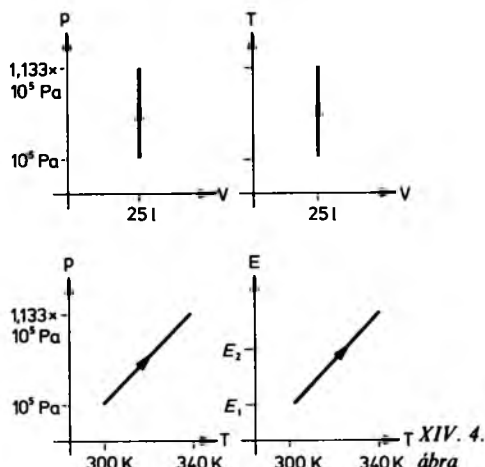
kék összes mozgási energiája:

$$E = \frac{3}{2} pV = 15000 \text{ J},$$

az egy molekulára jutó energia pedig $6,2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

XIV/19. A gáz térfogata $0,025 \text{ m}^3 = 25$ liter. A melegítés végén $1,133 \text{ atm} = 1,133 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ lesz a gáz nyomása. Rögzített térfogat mellett a folyamat pályája a nyomás- és a hőmérséklettel párhuzamosan halad. A hőmérséklet és a nyomás most arányosak, ezért a folyamat grafikonja a lineáris függvény leszükítése: a $(300 \text{ K}, 10^5 \text{ Pa})$ és $(340 \text{ K}, 1,133 \cdot 10^5 \text{ Pa})$ pontokat összekötő szakasz. Fontos, hogy a két pontra fektetett egyenes áthalad az origón! Az energia és a hőmérséklet arányosak, ezért a folyamatot egy egyenes szakasz szemlélteti (XIV. 4. ábra).

XIV/20. A gáz nyomása 10^5 Pa . Állandó nyomás esetén a térfogat arányos a hőmérséklettel, a különböző térfogatokhoz és hőmérsékletekhez ugyanaz a nyomás tartozik. A nyomás — bármely mennyiség függvényében ábrázoljuk — állandó. Az



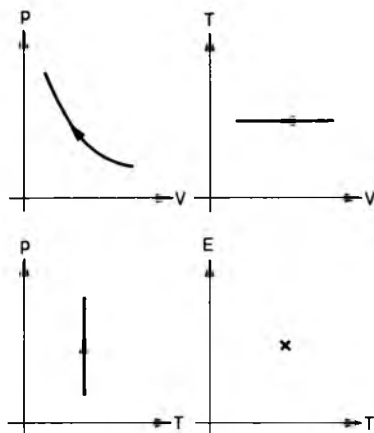
energia arányos a hőmérséklettel (XIV. 5. ábra).

XIV/21. A folyamatot ábrázoló görbe a p — V síkon egy hiperbolaág egy része, mert állandó hőmérséklet esetén p és V fordítottan arányosak egymással. Ekkor a folyamat a T — V és p — T koordináta-rendszerben egy-egy egyenes szakasszal ábrázolható, míg az E — T koordináta-rendszerben egyetlen pont, hiszen T is, és E is állandó (XIV. 6. ábra).

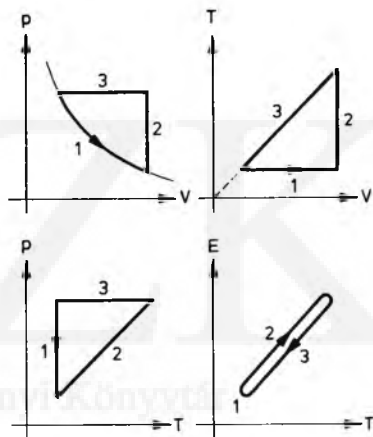
XIV/22. A T — V koordináta-rendszerben a folyamat első szakaszában T állandó, és V nő, majd V állandó, és T nő, a harmadik szakaszban mindkettő csökken, egymással arányosak, ezért a harmadik szakasz meghosszabbítása az origón áthalad.

A p — T koordináta-rendszerben a hőmérséklet állandó az első szakaszon, és a nyomás csökken, majd a nyomás és a hőmérséklet egymással arányosan nő addig, amíg a gáz a kezdeti nyomást el nem éri. Ezután a folyamat állandó nyomású harmadik szakasszal zárul.

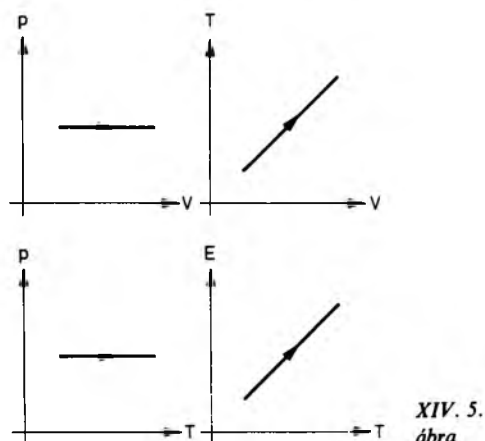
Az E — T koordináta-rendszerben a folyamat első szakaszának egy pont felel meg. Ezután a hőmérséklet és a nyomás egymással arányosan megnő, a harmadik



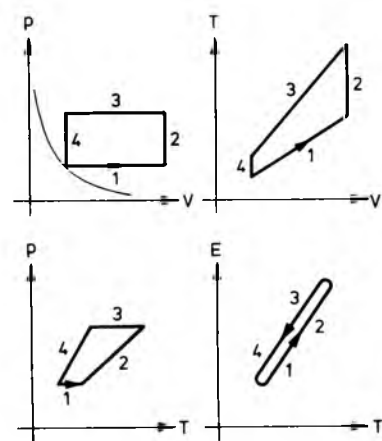
XIV. 6. ábra



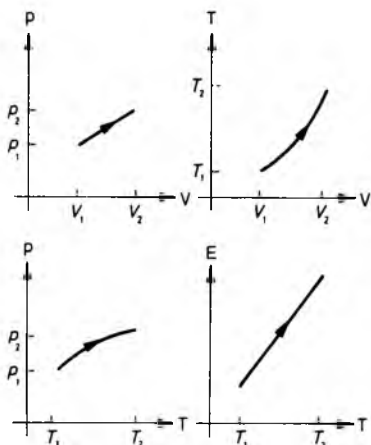
XIV. 7. ábra



XIV. 5. ábra



XIV. 8. ábra



XIV. 9. ábra

szakaszban pedig visszatér az izotermának megfelelő ponthoz (XIV. 7. ábra).

XIV/23. A körfolyamatot ábrázoló pályákat szemlélteti a XIV. 8. ábra.

XIV/24. Az egyenes szakasz meredeksége (XIV. 9. ábra):

$$\frac{0,5 \cdot 10^5}{15,7 \cdot 10^{-3}} = 3,18 \cdot 10^6 \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}.$$

Az összetartozó nyomás és térfogat közötti kapcsolat:

$$p = 3,18 \cdot 10^6 V + 28\,630. \quad (1)$$

Az általános gáztörvény alapján:

$$(31,8V + 0,2863) V \cdot 10^5 = RT$$

$$10^5 (3,8V^2 + 0,0344V) = T. \quad (2)$$

Az (1)-ből fejezzük ki V -t:

$$V = 2,6 \cdot 10^{-5} p - 0,748, \quad (3)$$

és ezt az általános gáztörvénybe helyettesítve:

$$p(2,6 \cdot 10^{-5} p - 0,748) = 8,31 T,$$

$$3,1 \cdot 10^{-6} p^2 - 0,9p = T.$$

XIV/25. Izotermikus folyamatban a gáz

által felvett hő:

$$Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

és az általános gáztörvény szerint

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT,$$

ezért

$$Q = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 10^5 \cdot 10^{-3} \ln 2,7 = 100 \text{ J}.$$

XIV/26. A gázon végzett munka izotermikus állapotváltozás során:

$$W = - \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = - \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

hiszen $p_1 V_1 = p_2 V_2$, ezért

$$W = \frac{23,3}{29} \cdot 8,31 \cdot 300 \ln \frac{1}{7,4} = 4000 \text{ J}.$$

XIV/27. Állandó térfogaton végbemenő folyamatoknál

$$\Delta E = Q = \frac{f}{2} (p_2 - p_1) V =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 1,3 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 9750 \text{ J}.$$

XIV/28. Az állandó térfogaton felvett hő:

$$Q = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = \frac{f}{2} \frac{p_1 V}{T_1} (T_2 - T_1),$$

mert $p_1 V = \frac{m}{M} RT_1$, behelyettesítve:

$$Q = \frac{5}{2} \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{300} \cdot 40 = 2000 \text{ J}.$$

XIV/29. Az izochor folyamatban felvett hő:

$$Q = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1),$$

ezért

$$Q = \frac{3}{2} \frac{40}{4} \cdot 8,31 \cdot 40 = 4986 \text{ J}.$$

XIV/30. Világos, hogy

$$2500 = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot \Delta T,$$

ezért $\Delta T = 120 \text{ K}$.

XIV/31. A gázzal közölt hő: $Q = 5 \cdot 60 \cdot 10 = 3000 \text{ J}$. Állandó térfogaton ennyivel nőtt a gáz belső energiája. A kezdeti állapot hőmérsékletét az általános gáztörvényből határozzuk meg:

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1,$$

vagyis

$$1,7 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \frac{30}{44} \cdot 8,31 T_1,$$

és ezért $T_1 = 300 \text{ K}$. A későbbi hőmérsékletet az

$$E = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$$

egyenlőség alapján határozzuk meg. (A szén-dioxid 3 atomos gáz, ezért $f=6$, használjuk ezt az értéket, annak ellenére, hogy a CO_2 -molekula lényegében lineáris.) Tehát

$$3000 = \frac{6}{2} \frac{30}{44} \cdot 8,31 (T_2 - 300),$$

így $T_2 = 476,5 \text{ K}$.

XIV/32. Az állandó térfogaton felvett hő:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{f}{2} (p_2 - p_1) V = \frac{f}{2} (3p - p) V = \\ &= \frac{f}{2} 2pV = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 5000 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ennyi hőre van szükség a gáz nyomásának megháromszorozásához.

XIV/33. Állandó nyomáson végbemenő állapotváltozás során a gáz belső energiájának a megváltozása:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p (V_2 - V_1),$$

a munka:

$$W = -p(V_2 - V_1),$$

és végül — az első főtételből — a hő:

$$Q = \frac{f+2}{2} p (V_2 - V_1).$$

Így $\Delta E = 1000 \text{ J}$, $W = -400 \text{ J}$, $Q = 1400 \text{ J}$.

XIV/34. A folyamat állandó nyomáson megy végbe, ezért

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} \frac{p V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{6}{2} \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{300} \cdot 40 = 1200 \text{ J}, \\ W &= -\frac{p V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = \\ &= -\frac{10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{300} \cdot 40 = -400 \text{ J}, \end{aligned}$$

és az első főtételt felhasználva:

$$Q = \frac{f+2}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = 1400 \text{ J}.$$

XIV/35. Izobár folyamatokban:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{6}{2} \frac{85}{17} \cdot 8,31 \cdot 60 = 7479 \text{ J}, \\ W &= -\frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = \\ &= -\frac{85}{17} \cdot 8,31 \cdot 60 = -2493 \text{ J}, \end{aligned}$$

$$Q = \frac{f+2}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = 9972 \text{ J}.$$

XIV/36. Állandó, 10^5 Pa nyomáson:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 10^5 (-12 \cdot 10^{-6}) = -3 \text{ J},$$

$$W = -p(V_2 - V_1) =$$

$$= -10^5 (-12 \cdot 10^{-6}) = 1,2 \text{ J},$$

$$Q = \frac{f+2}{2} p(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 10^5 (-12 \cdot 10^{-6}) = -4,2 \text{ J}.$$

XIV/37. Mivel izobár folyamat esetén

$$\Delta E = \frac{f}{2} (-W) = -1000 \text{ J},$$

$$Q = \frac{f+2}{2} (-W) = -1400 \text{ J},$$

a belső energia 1000 J-lal csökken, a gáz 1400 J hőt ad le.

XIV/38. A dugattyúra ható erők egyensúlya:

$$p_0 A + G = pA,$$

adatokkal:

$$10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} + 400 = p \cdot 2 \cdot 10^{-2},$$

így $p = 1,2 \cdot 10^5$ Pa. A gázzal állandó nyomáson közölt hő:

$$Q = 10 \text{ watt} \times 120 \text{ s} = 1200 \text{ J},$$

másrészt

$$Q = \frac{f+2}{2} p(V_2 - V_1),$$

ezért

$$1200 = \frac{7}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^5 (V_2 - 8 \cdot 10^{-3}),$$

és

$$V_2 = 0,0108 \text{ m}^3.$$

A gáz térfogata $10,8 \text{ dm}^3$ -re tágul, vagyis a dugattyú 14 cm-t emelkedik. A gázon végzett munka:

$$W = -p(V_2 - V_1) =$$

$$= -1,2 \cdot 10^5 \cdot 2,8 \cdot 10^{-3} = -336 \text{ J}.$$

A belső energia megváltozása:

$$\Delta E = W + Q = 864 \text{ J}.$$

A végállapot hőmérsékletét a

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

egyenlőségből kapjuk: $T_2 = 378 \text{ K}$.

XIV/39. Izobár folyamat esetén

$$W = -p(V_2 - V_1),$$

ezért

$$1500 = -15 \cdot 10^5 (V_2 - 30 \cdot 10^{-3}),$$

így $V_2 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 29 \text{ liter}$. A gáz hőhatással összefüggő energiaváltozása — izobár folyamat esetén —:

$$Q = \frac{f+2}{2} (-W) = -\frac{7}{2} \cdot 1500 = -5250 \text{ J},$$

és a teljes belsőenergia-változás:

$$\Delta E = W + Q = -3750 \text{ J}.$$

A végállapot hőmérsékletét a

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

(Gay-Lussac I.) törvényből határozhatjuk meg: $T_2 = 264 \text{ K}$.

XIV/40. Az izobár folyamatban felvett hő:

$$Q = \frac{f+2}{2} p(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 10^5 (12 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10^{-3}) = 700 \text{ J}.$$

A gázon végzett munka:

$$W = -p(V_2 - V_1) = -200 \text{ J}$$

és

$$\Delta E = W + Q = 500 \text{ J}.$$

A végállapot hőmérséklete: $T_2 = 336 \text{ K}$, az egyesített gáztörvény alapján.

XIV/41. Adiabtikus folyamatról van szó, ezért

$$\begin{aligned} \Delta E = W &= \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1 = \\ &= \frac{5}{2} (10^5 V_2 - 2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}). \end{aligned}$$

Határozzuk meg a gáz térfogatát a végső állapotban; a Poisson-egyenlet:

$$p_2 V_2^\kappa = p_1 V_1^\kappa, \quad \kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Így

$$1 \cdot V_2^{1,4} = 2 \cdot 4^{1,4},$$

ezért $V_2 = 6,5 \text{ dm}^3$. Így tehát $W = -375 \text{ J}$.

XIV/42. Adiabtikus folyamatban a gáz belső energiájának a megváltozása:

$$\begin{aligned} \Delta E = W &= \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{3}{2} \frac{200}{4} \cdot 8,31 \cdot 60 = 37400 \text{ J}. \end{aligned}$$

XIV/43. Mivel a fal hőszigetelést biztosít, ezért

$$\begin{aligned} W = \Delta E &= \frac{f}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{f}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{3}{2} \frac{10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{300} (-40) = -800 \text{ J}. \end{aligned}$$

XIV/44. A Poisson-egyenlet alapján

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad \kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} = 1,7.$$

Így

$$1 \cdot 30^{1,7} = p_2 15^{1,7},$$

ezért $p_2 = 2^{1,7} = 3,2 \text{ atm}$. Továbbá az egyesített gáztörvényt felhasználva

$$\begin{aligned} \frac{p_1 V_1}{T_1} &= \frac{p_2 V_2}{T_2}, \\ \frac{1 \cdot 30}{270} &= \frac{3,2 \cdot 15}{T_2}, \end{aligned}$$

$$T_2 = 432 \text{ K}.$$

A gázon végzett munka megegyezik a belső energia megváltozásával:

$$W = \Delta E = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = 2700 \text{ J}.$$

XIV/45. Adiabtikus folyamatról van szó, ezért

$$W = \frac{f}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1)$$

alapján

$$274 = \frac{3}{2} \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{273} (T_2 - 273),$$

tehát $T_2 = 372,7 \text{ K}$. Így az egyesített gáztörvény és a Poisson-egyenlet két ismeretlent tartalmaz:

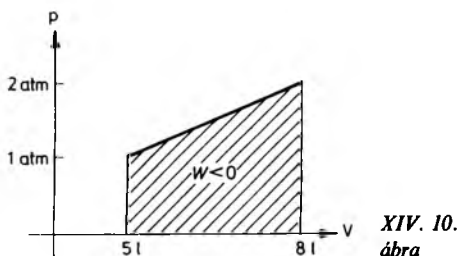
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad \kappa = \frac{5}{3}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$p_2 V_2 = 682,6,$$

$$p_2 V_2^{5/3} = 14,62.$$



A két egyenletet elosztva egymással:

$$V_2^{2/3} = 0,0214,$$

$$V_2 = 0,0214^{3/2} = 0,0031 \text{ m}^3 = 3,1 \text{ liter},$$

$$\text{és } p_2 = 2,18 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

XIV/46. A gázon végzett munka a XIV. 10. ábrán látható trapéz területével megegyező nagyságú (de mert a gáz térfogata növekedett, ezért ennek -1 -szeresével egyenlő):

$$\begin{aligned} W &= -\frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \\ &= -\frac{3 \cdot 10^5}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = -450 \text{ J}, \end{aligned}$$

az energia megváltozása:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1 = \\ &= \frac{5}{2} (2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3} - 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 2750 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázzal

$$Q = \Delta E - W = 3200 \text{ J}$$

hőt közöltünk. A végállapot hőmérséklete az egyesített gáztörvény alapján: $T_2 = 873,5 \text{ K}$.

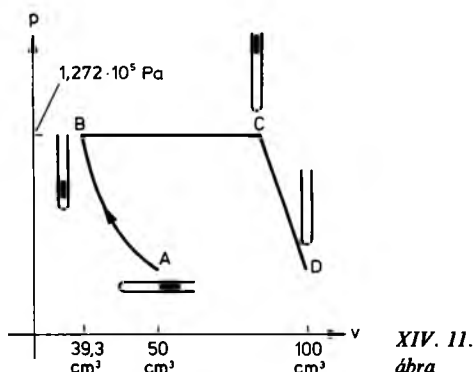
XIV/47. A függőleges helyzetű csőben a gáz nyomása $p = p_0 + L \rho g = 1,272 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, az izotermikusan összenyomott gáz térfo-

gata $39,3 \text{ cm}^3$. Ekkor kezdjük a melegítést. A folyamat első szakasza állandó nyomáson megy végbe, amíg a higany felső szintje eléri a cső nyitott végét, ezután a nyomás a térfogat növekedésével arányosan csökken (XIV. 11. ábra). A belső energia megváltozása:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} p_D V_D - \frac{f}{2} p_B V_B = \\ &= \frac{f}{2} p_D V_D - \frac{f}{2} p_A V_A = \\ &= \frac{5}{2} \cdot 10^5 (100 \cdot 10^{-6} - 50 \cdot 10^{-6}) = \\ &= 12,5 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázon végzett munka a BCD görbe alatti területtel egyenlő (pontosabban a terület -1 -szeresével, mivel a gáz tágult):

$$\begin{aligned} W &= -\left(p_B (V_C - V_B) + \frac{p_C + p_D}{2} (V_D - V_C) \right) = \\ &= -\left(1,272 \cdot 10^5 \cdot 40,7 \cdot 10^{-6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{10^5 + 1,272 \cdot 10^5}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \right) = \\ &= -7,448 \text{ J}. \end{aligned}$$



A gázzal közölt hő a melegítés BCD szakaszában:

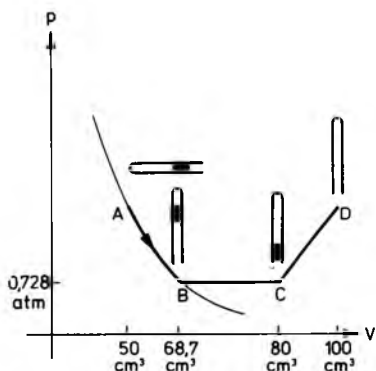
$$Q = \Delta E - W = 19,948 \text{ J}.$$

XIV/48. A függőleges helyzetű csőben a gáz nyomása $0,728 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ lesz, a gáz $68,7 \text{ cm}^3$ -re tágul. Ekkor elkezdődik a melegítés. A bezárt levegő még $11,3 \text{ cm}^3$ -rel tágul, állandó nyomáson, majd a higany lassan távozik a cső alján. Eközben további 20 cm^3 -rel tágul a gáz, a nyomás pedig a térfogatváltozással arányosan 10^5 Pa -ra nő. A belső energia megváltozása: a B és D állapotok között (XIV. 12. ábra):

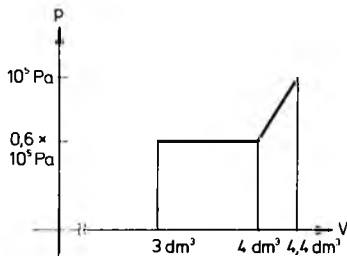
$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{5}{2} p_D V_D - \frac{5}{2} p_B V_B = \\ &= \frac{5}{2} \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 12,5 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázon végzett munka a BCD görbe alatti terület – 1-szeresével egyenlő:

$$\begin{aligned} W &= - \left(p_B (V_C - V_B) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_C + p_D}{2} (V_D - V_C) \right) \\ W &= - \left(0,728 \cdot 10^5 \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,728 \cdot 10^5}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \right) = -2,55 \text{ J}. \end{aligned}$$



XIV. 12. ábra



XIV. 13. ábra

A gázzal közölt hő a B és a D állapotok között:

$$Q = \Delta E - W = 15,05 \text{ J}.$$

XIV/49. A dugattyúra ható erők eredője nulla:

$$pA + G = p_0 A,$$

vagyis

$$p + \frac{400}{0,01} = 10^5,$$

a gáz nyomása tehát $p = 60\,000 \text{ Pa}$. A rugó megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{400}{100} = 4 \text{ cm}.$$

A gáz melegítés közben eleinte állandó nyomáson tágul, eközben a dugattyú 10 cm -t mozdul el, a térfogat 1 dm^3 -rel nő. Ezután a test leér a talajra, és a dugattyú további 4 cm elmozdulása közben megszűnik a nyomóerő, a gáz nyomása a térfogat növekedéssel arányosan 10^5 Pa nyomásra nő (XIV. 13. ábra). A gáz energiájának a megváltozása csak a kezdeti és a végső állapottól függ:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{5}{2} \cdot 10^5 \cdot 4,4 \cdot 10^{-3} - \\ &\quad - \frac{5}{2} \cdot 0,6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 650 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázon végzett munka:

$$W = - \left(0,6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} + \frac{1,6 \cdot 10^5}{2} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \right) = -92 \text{ J}.$$

A gázzal közölt hő:

$$Q = \Delta E - W = 742 \text{ J}.$$

Az egyesített gáztörvényt a kezdeti és a végső állapotra alkalmazzuk:

$$\frac{0,6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{300} = \frac{10^5 \cdot 4,4 \cdot 10^{-3}}{T},$$

így a végállapot hőmérséklete: $T = 733 \text{ K}$.

XIV/50. A melegítés végén a dugattyúra ható erők egyensúlyban vannak:

$$pA = D\Delta l + p_0 A,$$

ezért

$$p = 10^5 (\Delta l + 1).$$

A térfogat $A\Delta l$ -al nő:

$$V = V_0 + A\Delta l = 0,1 + 0,1 \Delta l = 0,1 (1 + \Delta l)$$

(m^3 -ben). Az egyesített gáztörvénybe helyettesítve:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T},$$

$$\frac{10^5 \cdot 0,1}{273} = \frac{10^5 \cdot 0,1 (1 + \Delta l)^2}{373},$$

ebből

$$\Delta l = \sqrt{\frac{373}{273}} - 1 = 0,168 \text{ m}.$$

A dugattyú $16,8 \text{ cm}$ -t mozdul el. A végállapotban:

$$p = 10^5 (0,168 + 1) = 1,168 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$V = 0,1 (1 + 0,168) = 0,1168 \text{ m}^3.$$

A belső energia megváltozása:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{f}{2} \frac{p_0 V_0}{T_0} (T - T_0) = \\ &= \frac{5}{2} \frac{10^5 \cdot 0,1}{273} \cdot 100 = 9157,5 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázon végzett munka:

$$\begin{aligned} W &= - \frac{p_0 + p}{2} (V - V_0) = \\ &= - \frac{10^5 + 1,178 \cdot 10^5}{2} \cdot 16,8 \cdot 10^{-3} = \\ &= -1821 \text{ J}. \end{aligned}$$

A gázzal közölt hő:

$$Q = \Delta E - W = 10978,5 \text{ J}.$$

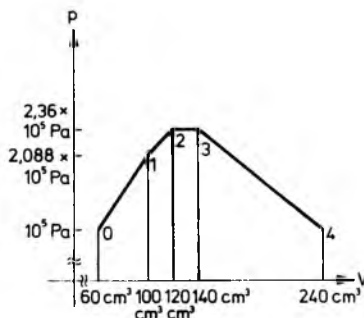
XIV/51. A gáz állapotváltozásait a *XIV. 14. ábrán* követhetjük nyomon. A gáz a kezdeti állapotban $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ nyomású és $V_0 = 60 \text{ cm}^3$ térfogatú. Az 1 indexszel jelölt állapotban, amikor a jobb oldali szárban a higany eléri a jobb oldali könyököket, a gáz nyomása:

$$p_1 = p_0 + 0,8 \cdot 136\,000 = 2,088 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

a térfogat pedig

$$V_1 = 100 \text{ cm}^3.$$

A melegítés folyamatában a következő



XIV. 14. ábra

fontos pont az, amikor a bal oldali szárban a cső nyitott végét eléri a higany. Ekkor

$$p_2 = 2,36 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$V_2 = 120 \text{ cm}^3.$$

Ettől kezdve a higany a melegítésnek megfelelően távozik a cső nyitott végén. A nyomás egy kis szakaszon állandó marad, amíg a cső vízszintes szárában a higany a bal oldali könyökig mozdul el. Ekkor tehát

$$p_3 = 2,36 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$V_3 = 140 \text{ cm}^3.$$

Innen kezdve a térfogat egyenletesen nő, a nyomás csökken, mindaddig, míg a higany véglegesen nem távozik. Ekkor

$$p_4 = 10^5 \text{ Pa}, \quad V_4 = 240 \text{ cm}^3.$$

A belső energia megváltozása:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p_4 V_4 - \frac{f}{2} p_0 V_0 =$$

$$= 2,5 \cdot 10^5 (240 - 60) \cdot 10^{-6} = 45 \text{ J}.$$

A munkát 3 trapéz és 1 téglalap területéből számoljuk:

$$\begin{aligned} W = & - \left(\frac{10^5 + 2,088 \cdot 10^5}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-6} + \right. \\ & + \frac{2,088 \cdot 10^5 + 2,36 \cdot 10^5}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} + \\ & + 2,36 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} + \\ & \left. + \frac{2,36 \cdot 10^5 + 10^5}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \right) = \\ & = -32,144 \text{ J}. \end{aligned}$$

Így a gázzal közölt hő:

$$Q = \Delta E - W = 77,144 \text{ J}.$$

XIV/52. A gáz nyomása, amikor az első

buborék távozni készül:

$$p = p_0 + 0,4 \cdot 136\,000 = 1,544 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

térfogata pedig

$$V = 2,2 \cdot 10^{-3} + 40 \cdot 10^{-6} = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A végállapot hőmérséklete az egyesített gáztörvényből:

$$\frac{10^5 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3}}{273} = \frac{1,544 \cdot 10^5 \cdot 2,24 \cdot 10^{-3}}{T},$$

így $T = 428 \text{ K}$. A gáz belső energiájának megváltozása:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p V - \frac{f}{2} p_0 V_0 =$$

$$= 2,5 (1,544 \cdot 2,24 - 2,2) \cdot 100 = 314,6 \text{ J}.$$

A gázon végzett munka:

$$W = - \frac{p_0 + p}{2} (V - V_0) =$$

$$= - \frac{10^5 + 1,544 \cdot 10^5}{2} 40 \cdot 10^{-6} = -5,1 \text{ J}.$$

A gázzal közölt hő:

$$Q = \Delta E - W = 319,7 \text{ J}.$$

XIV/53. Tegyük fel, hogy a higany felszíne x -szel emelkedik. (Mérjük x -et méterben!) Ekkor a nyomás:

$$p = p_0 - x \cdot 136\,000 = 10^5 (1 - 1,36x),$$

és a térfogat Ax -szel csökken:

$$V = 2,23 \cdot 10^{-3} - x \cdot 10^{-4} =$$

$$= 10^{-5} (223 - 10x).$$

Így az egyesített gáztörvényből:

$$\frac{10^5 \cdot 2,23 \cdot 10^{-3}}{273} =$$

$$= \frac{10^5 (1 - 1,36x) \cdot 10^{-5} (223 - 10x)}{263},$$

ezért

$$214,8 = (1 - 1,36x)(223 - 10x),$$

$$13,6x^2 - 313,28x + 8,2 = 0,$$

$$x = \frac{313,28 \pm \sqrt{313,28^2 - 4 \cdot 8,2 \cdot 13,6}}{2 \cdot 13,6}.$$

A fizikailag értelmezhető megoldás: $x = 0,026 \text{ m} = 2,6 \text{ cm}$. Így $V = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $p = 0,964 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. A gáz belső energiája csökken:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p V - \frac{f}{2} p_0 V_0 = -22,5 \text{ J}.$$

A gázon végzett munka pozitív:

$$W = -\frac{p+p_0}{2}(V-V_0) = 0,98 \text{ J}.$$

A gázzal közölt hő:

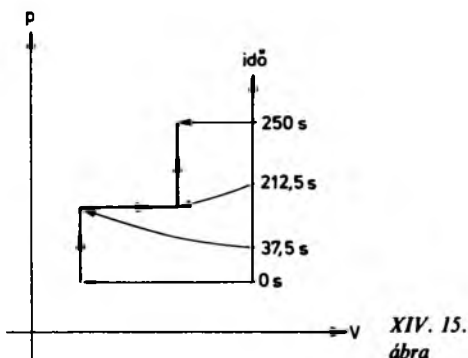
$$Q = \Delta E - W = -23,48 \text{ J},$$

vagyis a gáz ad le hőt.

XIV/54. A folyamat pályája a *XIV. 15. ábrán* látható. A folyamat első szakasza állandó térfogaton megy végbe, mindaddig, amíg a gáz nyomása el nem éri a

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

értéket. Ezután — ezen a nyomáson — a



gáz tágul, míg a térfogata 10 dm^3 lesz. Ezután ezen a térfogaton növekszik a nyomása, feltéve, hogy a melegítő még be van kapcsolva. Valóban, tegyük fel, hogy a melegítő még akkor is üzemel, amikor a dugattyú elérte a felső gyűrűt. Jelöljük a melegítés végén a gáz nyomását p -vel. A gáz belső energiájának a megváltozása:

$$\Delta E = \frac{f}{2} p \cdot 10 \cdot 10^{-3} - \frac{f}{2} 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}.$$

A gázon végzett munka:

$$W = -1,25 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = -500 \text{ J}.$$

A gázzal közölt hő:

$$Q = 250 \text{ s} \times 10 \text{ W} = 2500 \text{ J},$$

és mivel

$$Q = \Delta E - W,$$

ezért

$$2,5(10p - 6 \cdot 10^5)10^{-3} + 500 = 2500.$$

Innen $p = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. A feltevésünk helyes volt: a melegítő még be van kapcsolva; a nyomás nagyobb, mint $1,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. A végállapot hőmérsékletét az egyesített gáz-törvényből számolhatjuk:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p V}{T},$$

$$\frac{10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{300} = \frac{1,4 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{T}.$$

Innen $T = 700 \text{ K}$. Meg kell határoznunk a gáz állapotjelzőit még két állapotban. Egyszer, amikor a dugattyú elhagyja az első gyűrűt, másodszor amikor a második gyűrű megállítja a mozgását. Az általános gáz-törvényből:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

$$T_1 = 375 \text{ K}.$$

A folyamatnak ez a szakasza izochor; a felvett hő megegyezik a belső energia növekedésével:

$$Q_1 = \frac{f}{2} (p_1 - p_0) V_0 =$$

$$= 2,5 \cdot 0,25 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 375 \text{ J}.$$

A 10 wattos melegítő 37,5 s alatt ad le annyi hőt. A melegítő bekapcsolása után 37,5 másodperc múlva kezd a dugattyú emelkedni. A gáz hőmérséklete legyen T_2 akkor, amikor a dugattyú eléri a felső gyűrűt.

Ekkor

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_2}$$

$$T_2 = 625 \text{ K}.$$

A folyamat második szakasza izobár, ezért a felvett hő:

$$Q = \frac{f+2}{2} \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1750 \text{ J}.$$

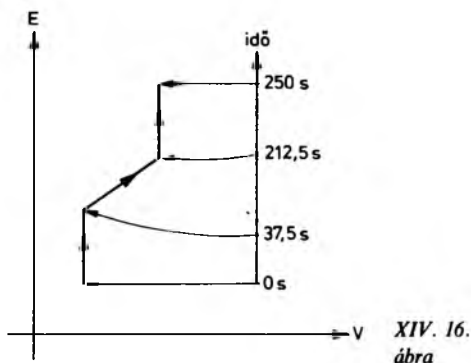
A folyamatnak ez a második szakasza 175 másodpercig tart, tehát a melegítés kezdete után 212,5 másodperc múlva állítja meg az emelkedő dugattyút a felső gyűrű. A folyamat ábrázolásáról látszik, hogy valóban célszerű a p - V síkon a folyamatokat ábrázoló görbéket pályaként fel fogni. A gáz kezdeti állapotában a belső energia:

$$E_0 = \frac{5}{2} p_0 V_0 = 1500 \text{ J},$$

a melegítés kezdete után 37,5 másodperccel:

$$E_1 = \frac{5}{2} \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 1875 \text{ J}$$

a kapcsoló bekapcsolása után 212,5 má-



sodperc múlva:

$$E_2 = \frac{5}{2} \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3125 \text{ J},$$

és végül a melegítés végén:

$$E = \frac{5}{2} \cdot 1,4 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3500 \text{ J}.$$

Az energia—térfogat koordináta-rendszerben is ábrázoltuk a folyamat pályáját. Ezt látjuk a XIV. 16. ábrán.

XIV/55. Az A folyamatra:

$$\Delta E_A = -200 + 800 = 600 \text{ J},$$

a B folyamatra:

$$\Delta E_B = -150 + Q_B,$$

de $\Delta E_A = \Delta E_B$, ezért $Q_B = 750 \text{ J}$. A C folyamatban az energiaváltozás:

$$\Delta E_C = -\Delta E_A = -600 \text{ J},$$

tehát

$$-600 = W_C - 700,$$

így $W_C = 100 \text{ J}$.

XIV/56. Mivel

$$c_p = \frac{f+2}{2} \frac{R}{M},$$

$$c_v = \frac{f}{2} \frac{R}{M},$$

vagyis

$$1,955 = \frac{f+2}{2} \frac{8,31}{M},$$

$$1,466 = \frac{f}{2} \frac{8,31}{M},$$

így a két egyenlőség hányadosából:

$$1,333 = \frac{f+2}{f},$$

és innen $f=6$. Visszahelyettesítve: $M = 17$ g. Az ammóniagáz megfelel a feltételeknek.

XIV/57. Mivel $f=5$ és

$$c_V = \frac{f}{2} \frac{R}{M} = 0,716,$$

ezért $M=29$ g. (A levegő megfelel a feltételeknek.) Így

$$c_p = \frac{f+2}{2} \frac{R}{M} = 3,5 \frac{8,31}{29} = 1,0029 \frac{\text{J}}{\text{gK}}.$$

XIV/58. Az entrópiaváltozás:

$$\Delta S = \frac{f}{2} \frac{m}{M} R \ln \left[\left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{v}{v_0} \right)^\kappa \right],$$

ahol

$$\kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Mivel

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M} R,$$

ezért

$$\Delta S = \frac{f}{2} \frac{pV}{T} \ln \left[\left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{V}{V_0} \right)^\kappa \right].$$

$$\Delta S = \frac{5}{2} \frac{2,7 \cdot 10^5 \cdot 5}{300} \ln (2,7 \cdot 5^{1,4}) =$$

$$= 11\,250 \ln 25,69 = 36\,523 \text{ J/K}.$$

Most $S_0=0$, ezért $S=\Delta S=36\,523 \text{ J/K}$.

XIV/59. Az entrópiaváltozás a

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{m}{M} R \ln \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{f}{2}} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{f+2}{2}} \right] = \\ &= \frac{m}{M} R \ln \left[\left(\frac{pV}{p_0 V_0} \right)^{\frac{f}{2}} \left(\frac{V}{V_0} \right) \right] \end{aligned}$$

alakban is felírható. Izoterm folyamatban $pV=p_0 V_0$, ezért

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V}{V_0}.$$

(Ezt a formulát ismertük, ez adta az ötletet az entrópia értelmezéséhez.) Tehát

$$\Delta S = \frac{28}{29} \cdot 8,31 \ln \frac{5}{2} = 7,35 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

XIV/60. Az entrópiaváltozás:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{m}{M} R \ln \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{f}{2}} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{f+2}{2}} \right] = \\ &= \frac{m}{M} R \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{f}{2}}, \end{aligned}$$

mert $V=V_0$, de Gay-Lussac II. törvénye alapján

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0},$$

vagyis

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{m}{M} R \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{f}{2}} = \frac{pV}{T} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{f}{2}} = \\ &= \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{300} \ln \left(\frac{350}{300} \right)^{2,5} = \\ &= 18,5 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \end{aligned}$$

XIV/61. Legyen az 1 m^3 térfogatú és 1 atm nyomású gáz entrópiája nulla. Ekkor keverés előtt az egyik gáz entrópiája

($\kappa = 1,4$):

$$S_1 = \frac{5}{2} \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 2}{300} \ln(3 \cdot 2^{1,4}) = 10\,345 \frac{\text{J}}{\text{K}},$$

és a másik gázé:

$$S_2 = \frac{5}{2} \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 1}{300} \ln(4 \cdot 1^{1,4}) = 4621 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

A rendszer entrópiája keverés előtt:

$$S = S_1 + S_2 = 14\,966 \text{ J/K}.$$

A fal eltávolítása után kialakul valamely közös p nyomás. Az energia megmaradása miatt:

$$\frac{f}{2} p_1 V_1 + \frac{f}{2} p_2 V_2 = \frac{f}{2} p (V_1 + V_2),$$

ebből

$$p = \frac{10}{3} \text{ atm} = 3,33 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Az egyesített gáz entrópiája:

$$S_* = \frac{5}{2} \frac{3,33 \cdot 10^5 \cdot 3}{300} \ln(3,33 \cdot 3^{1,4}) = 22\,850 \text{ J/K}.$$

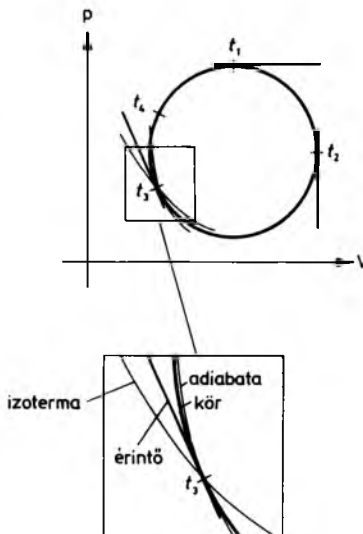
Az entrópia 1,53-szorosára nőtt,

$$\Delta S = 7884 \text{ J/K}.$$

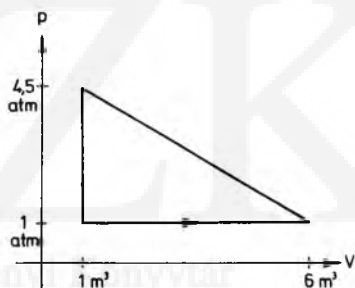
(A feladatból is látszik: a kiegyenlítődési tendencia együtt jár az entrópia növekedésével.)

XIV/62. A XIV. 17. ábra alapján a következőket állapíthatjuk meg:

1. A t_1 időpontban a körfolyamat pályáját az izobár folyamatot ábrázoló egyenes érinti, ezért $\Delta E_1 > 0$, $W_1 < 0$, $Q_1 > 0$.
2. A t_2 időpontban a folyamat közelítőleg csökkenő nyomású izochor folya-



XIV. 17. ábra



XIV. 18. ábra

mat: ezért E csökken: $\Delta E_2 < 0$, $W_2 = 0$, $Q_2 < 0$.

3. A t_3 időpontban — amennyire az ábráról leolvasható — a körfolyamat pályáját érintő egyenes egy izoterma felett és egy adiabata alatt halad, így $Q < 0$, de $\Delta E_3 > 0$, mert $W_3 > 0$.
4. A t_4 időpontban a gázzal közölt hőteljesítmény pozitív, az időegység alatt végzett munka negatív (a gáz éppen tágul), tehát $Q_4 > 0$ és $W_4 < 0$, és a gáz energiája nő $\Delta E_4 > 0$.

XIV/63. A körfolyamat termikus hatásfoka a háromszög területének és a trapéz

területének az aránya (XIV. 18. ábra):

$$\eta = \frac{\frac{1,5 \cdot 5}{2}}{\frac{2,5+1}{2} \cdot 5} = \frac{1,5}{3,5} = 0,43.$$

XIV/64. Az entalpiára vonatkozó állapotegyenlet:

$$H = \frac{f+2}{2} pV = \frac{f+2}{2} \frac{m}{M} RT,$$

ezért kezdetben:

$$H_1 = \frac{5}{2} \frac{50}{4} 8,31 \cdot 273 = 70\,894 \text{ J}.$$

Ha a rendszer állandó nyomáson felvett 7000 J hőt, akkor

$$H_2 = 70\,844 + 7000 = 77\,894 \text{ J},$$

hiszen izobár folyamatban

$$\Delta H = Q.$$

XV. Feladatcsoport: reális gázok, halmazállapot-változások

XV/1. A gőz térfogata 6 dm^3 . A 100°C -os gőz sűrűsége: $\rho = 0,5977 \text{ kg/m}^3$, így az elforrzott víz tömege:

$$m = 0,006 \cdot 0,5977 = 3,586 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 3,586 \text{ g}.$$

Az energia megváltozása:

$$\Delta E = L_f m = 2256374 \cdot 3,586 \cdot 10^{-3} = 8091 \text{ J}.$$

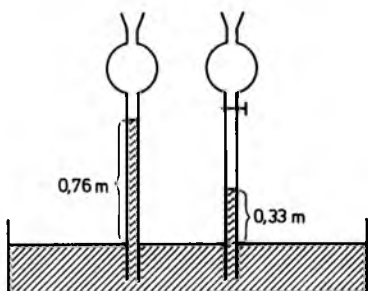
A környezet által végzett munka:

$$W = -p_0 \Delta V = -10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = -600 \text{ J}.$$

Így

$$Q = \Delta E - W = 8691 \text{ J}.$$

XV/2. A higany felett az éter „elforr” a légtiszta térben. Közben a nyomás nő, a higanyoszlop lejjebb süllyed (XV. 1. ábra).



XV. 1. ábra

A külső levegő nyomásával a higany feletti térrészben lévő etiléter nyomása és a higanyoszlop súlyából származó nyomás tart egyensúlyt:

$$p + h\rho g = p_0.$$

A telített etiléter nyomása 57894 Pa , ezért $136000 h = 1,033 \cdot 10^5 = 57894$, tehát $h = 0,333 \text{ m}$. Ha a csövet lejjebb nyomjuk a higanyba, akkor a higany feletti térrészben a nyomás nem változik, tehát a higanyoszlop magassága sem. A higany feletti térrész térfogata csökken. Ez azzal jár, hogy az etiléter egy része lecsapódik, kondenzálódik és összegyűlik a higany felszínén.

XV/3. Legyen a víz térfogata V_v , a gőzé V_g , a víz sűrűsége ρ_v , a gőzé ρ_g . Ekkor

$$\rho_g V_g + \rho_v V_v = 15 \text{ kg},$$

$$V_g + V_v = 18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A két egyenletben két ismeretlen van, az egyenletrendszer megoldva:

$$V_v = 15,027 \text{ liter}, \text{ és } V_g = 2,973 \text{ liter}.$$

A víz tömege $14,99995 \text{ kg}$, a gőzé $5,1433 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 5,1433 \cdot 10^{-2} \text{ g} \approx 5 \text{ mg}$.

A gőz

$$\frac{5,1433 \cdot 10^{-3}}{18} = 2,857 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

menyiségű, ez $1,714 \cdot 10^{21}$ számú gőzmolekulát jelent. A 15 kg víz és gőz

$$\frac{15000}{18} = 833,3 \text{ mol}$$

menyiségű, ez azt jelenti, hogy a tartályban összesen $5 \cdot 10^{26}$ számú H_2O molekula van. Ebből mindössze $1,714 \cdot 10^{21}$ van a gőztérben.

XV/4. Kezdetben

$$\rho_g V_g + \rho_v V_v = 5 \text{ kg},$$

$$V_g + V_v = 0,02 \text{ m}^3,$$

így

$$V_v = 0,004025 \text{ m}^3 = 4,025 \text{ liter},$$

$$V_g = 15,975 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 15,975 \text{ liter},$$

$$m_v = 1,805 \text{ kg}, \quad m_g = 3,195 \text{ kg}.$$

Ha a térfogat 12,5 literre csökken, akkor az egyenletrendszer második egyenlete módosul:

$$\rho_g V_g + \rho_v V_v = 5,$$

$$V_g + V_v = 0,0125.$$

Ekkor

$$V_v = 10,0644 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10,0644 \text{ liter},$$

$$V_g = 2,435 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2,435 \text{ liter}.$$

Ezért $m_v = 4,5128 \text{ kg}$ és $m_g = 0,4871 \text{ kg}$. A tartály térfogata $7,5 \text{ dm}^3$ -rel csökkent, ez azt eredményezte, hogy a benne lévő mintegy 16 liter térfogatú és 3,2 kg tömegű gőz nagy része lecsapódik, alig marad 2,4 liter (vagyis kevesebb, mint 0,5 kg).

XV/5. A halmazállapot-változással kapcsolatos feladatok megoldásakor tartjuk magunkat ahhoz a megállapodáshoz, hogy a 0°C -os jég energiája a belső energia nulla szintje.

a) A 0°C -os jég energiája 0 J,

b) a 3 kg 0°C -os víz energiája $mL_o = 3 \cdot 80 \text{ kcal} = 240 \text{ kcal}$, ennyi energiát kell adni a 0°C -os jégnek, hogy 0°C -os víz legyen,

$$\text{c) } E = 2 \cdot 80 + 2 \cdot 1 \cdot 10 = 180 \text{ kcal},$$

$$\text{d) } E = 7 \cdot 80 + 7 \cdot 1 \cdot 90 = 1190 \text{ kcal},$$

$$\text{e) } E = 10 \cdot 80 + 10 \cdot 1 \cdot 100 = 10 \cdot 180 = 1800 \text{ kcal},$$

$$\text{f) } E = 4 \cdot 80 + 4 \cdot 1 \cdot 100 + 4 \cdot 540 = 4 \cdot 720 = 2880 \text{ kcal},$$

$$\text{g) } E = 1 \cdot 80 + 1 \cdot 1 \cdot 100 + 1 \cdot 540 + 1 \cdot 0,33 \cdot 20 = 726,6 \text{ kcal}.$$

$$\text{h) } E = 5 \cdot 0,5(-20) = -50 \text{ kcal}.$$

XV/6. A belső energia 1 kg-ra jutó része $91,7 \text{ kcal} = 383\,933 \text{ J}$. Ez $11,7 \text{ kcal}$ -al több, mint 80 kcal kg-onként (80 kcal/kg az olvadáshő), vagyis az anyag folyékony halmazállapotban van, és a hőmérséklete $11,7^\circ\text{C}$.

XV/7. A belső energia 1 kg-ra jutó része 60 kcal . Ez kisebb, mint 80 kcal , ezért az egyensúlyban lévő rendszer víz és jég keveréke 0°C -on. Ezért

$$210 = m \cdot 80,$$

vagyis $m = 2,625 \text{ kg}$ 0°C -os víz és $0,875 \text{ kg}$ 0°C -os jég van a rendszerben.

XV/8. Az 1 kg-ra jutó belső energia 234 kcal . Ez 54 kcal -al nagyobb, mint 1 kg 100°C -os víz energiája. Az egyensúlyi állapotban lévő rendszerben 100°C -os víz és 100°C -os gőz keveréke van:

$$959,4 = 4,1 \cdot 80 + 4,1 \cdot 1 \cdot 100 + m \cdot 540,$$

innen

$$221,4 = 540 m,$$

ezért $m = 0,41 \text{ kg}$ vízgőz és $3,69 \text{ kg}$ tömegű víz van a rendszerben.

XV/9. A víz szilárd halmazállapotban van, és

$$-20 = 2 \cdot 0,5 \cdot t,$$

ezért a jég -20°C -os.

XV/10. Az összes belső energia:

$$E = 1 \cdot 80 + 1 \cdot 1 \cdot 10 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot (-10) = 88,5 \text{ kcal}.$$

Így az 1,3 kg tömegű víz összes belső energiája 88,5 kcal. Ebből 1 kg-ra jutó rész: 68 kcal. A rendszerben 0 °C víz és jég keveréke van az egyensúlyi állapot beállásakor. Tehát

$$88,5 = m \cdot 80,$$

innen $m = 1,1$ kg. A rendszerben 1,1 kg tömegű víz, és 0,2 kg tömegű jég van. A jég felmelegszik és egyharmada elolvad, azon az áron, hogy az 1 kg tömegű víz hőmérséklete 10 °C-kal csökken.

XV/11. A rendszer összes belső energiája:

$$E = 0,2 \cdot 0,5 \cdot (-20) + 0,3 \cdot 80 + 0,1(80 + 100) = 40 \text{ kcal}.$$

Ennek 1 kg-ra jutó része 66,67 kcal, a rendszer az egyensúly beállta után 0 °C-os víz és jég keveréke, tehát

$$40 = m \cdot 80,$$

azaz $m = 0,5$ kg. A rendszerben 500 g víz, és 100 g jég van.

XV/12. Számoljuk össze az összes belső energiát (most cal-ban és g-ban számolunk):

$$E = 40 \cdot 0,5 \cdot (-20) + 0 + 20 \cdot 80 + 30(80 + 50 \cdot 1) + 40(80 + 1 \cdot 100) + 10(80 + 100 + 540) = 19\,500 \text{ cal}.$$

Az 1 g-ra jutó rész: 130 cal. A sokféle anyag keveredése után csak víz lesz a rendszerben:

$$19\,500 = 150(80 + 1 \cdot t)$$

ezért a közös végső hőmérséklet $t = 50$ °C.

XV/13. A rendszer összes belső energiája:

$$E = 40 \cdot 0 + 10(80 + 100 + 540) = 7200 \text{ cal}.$$

Ennek 1 g-ra jutó része 144 cal, ez kisebb, mint az 1 g tömegű 100 °C-os gőz energiája, nagyobb mint a 0 °C víz energiája, a rendszer tehát 0 °C és 100 °C közötti hőmérsékleten vizet tartalmaz az egyensúly beállta után, tehát

$$7200 = 50(80 + 1 \cdot t),$$

innen $t = 64$ °C.

XV/14. A rendszer összes belső energiája:

$$E = 100 \cdot 0,5 \cdot (-30) + 50(80 + 100 + 540 + 0,33 \cdot 20) = 34\,830 \text{ cal}.$$

Az 1 g-ra jutó belső energia 232,2 cal, amely 180 cal és 720 cal közé esik. A rendszer hőmérséklete 100 °C és víz és gőz keverékét tartalmazza. Ezért

$$34\,830 = 150(80 + 100) + m \cdot 540,$$

innen $m = 14,5$ g. Ennyi gőz van a rendszerben egyensúlyi állapotban, a víz tömege 135,5 g.

XV/15. Az energiamérleg most a következő formában írható fel:

$$0 + 0 + 0,5 \cdot 80 + m(80 + 100 + 540) = 0,04 \cdot 40 + (m + 1)(80 + 40).$$

A bal oldalon az első 0 az edény kezdeti energiáját jelenti, a második a 0 °C hőmérsékletű jég energiája. A jobb oldali első tag a 40 °C-os edény energiája. A J/°C-ban adott hőkapacitást átszámítottuk kcal/°C-ra. Könnyen látható, hogy $m = 0,136$ kg.

XV/16. Az energiamérleg:

$$0,2 \cdot 0,09 \cdot 25 + 0,5(80 + 1 \cdot 25) + 0 = 0,2 \cdot 0,09 \cdot t + 0,6(80 + t),$$

innen $t = 8$ °C.

XV/17. Jelöljük a hőkapacitást C -vel, ekkor

$$C \cdot 20 + 200(80 + 20) + 150(80 + 30) = \\ = C \cdot 22 + 350(80 + 22),$$

így

$$C = 400 \frac{\text{cal}}{^{\circ}\text{C}}.$$

XV/18. Az energiamérleg:

$$5 \cdot 0,09 \cdot 300 + m(80 + 1 \cdot 20) = \\ = 5 \cdot 0,09 \cdot 30 + m(80 + 1 \cdot 30),$$

és ezért $m = 12,15 \text{ kg}$.

XV/19. Számoljunk most J -ban. Legyen x a jég tömege kezdetben. Ekkor az energiamérleg:

$$400 \cdot 0 + 0,5 \cdot 333\,704 + x \cdot 0 + \\ + 0,1(333\,704 + 4187 \cdot 100 + 2\,256\,374) = \\ = 400 \cdot 75 + (0,6 + x)(333\,704 + 4187 \cdot 75),$$

innen

$$6943\,930 = 647\,729x + 418\,637,4.$$

Így $x = 10 \text{ kg}$.

XVI. Feladatcsoport: statisztikus mechanika

XVI/1. Tekintsük a Pascal-féle háromszög hatodik sorát:

1 6 15 20 15 6 1.

A bal oldali tartályban 2 részecske 15-féleképpen, 3 részecske 30-féleképpen és 4 részecske ismét 15-féleképpen lehet. Ehhez a makroállapothoz $15 + 20 + 15 = 50$ mikroállapot tartozik. Ennek a makroállapotnak az entrópiája:

$$S = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 50 = 5,4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

A szóban lévő makroállapot valószínűsége

$$\frac{50}{64} = 0,78125 \approx 78\%.$$

XVI/2. A Pascal-féle háromszög 100. sora így kezdődik:

1 100,

és így végződik:

100 1.

Az egyik vagy a másik tartályban 0 vagy 1 részecske

$$1 + 100 + 100 + 1 = 202$$

-féle módon valósulhat meg. Ennek a makroállapotnak a valószínűsége

roállapotnak a valószínűsége

$$\frac{202}{2^{100}} = \frac{202}{1,2676 \cdot 10^{30}} = 1,6 \cdot 10^{-28}.$$

Tegyük fel, hogy egy filmfelvevővel másodpercenként 50 felvételt készítünk a gázzól. Ekkor a 2^{100} felvétel elkészítéséhez $8 \cdot 10^{20}$ évre (!) lenne szükség. Ennyi ideig kellene ülni a vetítővászon előtt, hogy a 202 mikroállapot bekövetkezzék. Másként fogalmazva: hozzávetőlegesen $4 \cdot 10^{18}$ évig kell várnunk a „moziban”, hogy a filmvásznon egyetlen pillanatfelvétel „feltűnjön”, amelyen valamelyik térrész majdnem kiürül, valamelyik részben 0 vagy 1 részecske van. Ezt az egyetlen „képet” különben sem érzékelnénk. Ezért van az, hogy lényegében az egyenletes vagy közel egyenletes eloszlást észleljük.

XVI/3. A mikroállapotok száma

$$\frac{Y_2}{Y_1} = (1 + 0,1)^{100} = 13\,780$$

-szeresére nő. Az entrópiánövekedés:

$$\begin{aligned} \Delta S &= k \ln \frac{Y_2}{Y_1} = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 13\,780 = \\ &= 1,31 \cdot 10^{-22} \text{ J/K}. \end{aligned}$$

XVI/4. A mikroállapotokat ábrázoljuk az alábbi táblázatban:

I.	1	1	2	1	2	0	0	3	0	0
II.	1	2	1	0	0	1	2	0	3	0
III.	1	0	0	2	1	2	1	0	0	3

A harmadik oszlop például azt jelenti, hogy az első atomon 2, a másodikon 1 energiaadag van, a harmadik atomnak nincs energiája. Három elemi makroeloszlás:

1. a három atomnak 1-1 energiaadagja van,
2. 1 atomnak, 1, 1 atomnak 2, és 1 atomnak 0 energiaadagja van,
3. 1 atomnak 3 energiaadagja van és 2 atomnak nincs energiája.

Összesen 10 mikroeloszlás valósulhat meg, egyenlő valószínűséggel. Az első makroeloszlás valószínűsége $1/10$, a másodiké $6/10$, a harmadiké $3/10$. A rendszer entrópiája az első makroállapotban: $S_1 = -k \ln 1 = 0$, a második makroállapotban:

$$S_2 = k \ln 6 = 2,47 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Ennyivel nőtt tehát a rendszer entrópiája. (Ebből látszik egyébként, hogy a legegyszerűsebb eloszlás egyáltalán nem a legvalószínűbb, valószínűtlenebb, mint az a makroeloszlás, amikor az összes energia egyetlen atomon van.)

XVI/5. A Pascal-féle háromszög 8. sora (a 7. alapján!)

1 8 28 56 70 56 28 8 1.

Az összes lehetséges mikroállapotok száma $1 + 8 + 28 + \dots + 8 + 1 = 256$. Az a makroállapot, hogy a tartály két egyenlő rekeszében 4-4 atom van 70 mikroeloszlással valósulhat meg. A makroállapot valószínűsége $70/256 = 0,273 \approx 27\%$, és entró-

piája:

$$S_1 = k \ln Y_1 = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 70 = 5,86 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Tekintsük most azt a makroeloszlást, amely abban különbözik az előzőtől, hogy az egyik rekeszben 3, a másikban 5 atom van. Ez $2 \cdot 56 = 112$ mikroeloszlással valósulhat meg. Ennek az állapotnak a valószínűsége $112/256 = 0,4375 \approx 44\%$. A rendszer entrópiája ebben a makroállapotban:

$$S_2 = k \ln Y_2 = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 112 = 6,51 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Az entrópiánövekedés: $\Delta S = 6,5 \cdot 10^{-24} \text{ J/K} > 0$. A rendszer entrópiája nő, ha kimozdul a legegyszerűsebb állapotból.

Tekintsük most a harmadik makroeloszlást: az egyik vagy a másik rekeszben 2 atom van. Ekkor a másikban 6 atom tartózkodik. Ez $2 \cdot 28 = 56$ mikroállapottal valósulhat meg. Ennek az állapotnak a valószínűsége $56/256 = 0,218 \approx 22\%$, és az entrópiája:

$$S_3 = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 56 = 5,55 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

A harmadik makroállapotba már ritkábban kerül a rendszer.

XVI/6. Támaszkodjunk az okoskodásunkban is a Pascal-háromszög 8. sorára. Az a makroállapot, hogy minden részecske a bal oldali rekeszben van, egyetlen mikroállapottal adható meg. Ennek az állapotnak az entrópiája

$$S_1 = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 1 = 0.$$

Azzal a makroállapottal már foglalkoztunk, amikor a részecskék a legegyszerűsebben oszlanak meg. Ez 70-féleképpen fordulhat elő. A makroállapot entrópiája:

$$S_2 = 1,38 \cdot 10^{-23} \ln 70 = 5,86 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

A rendszer entrópiája $5,86 \cdot 10^{-23}$ J/K-nel nőtt a kiegyenlítődési folyamatban.

XVI/7. Az A rendszer energiaeloszlását már láttuk, most ismétéljük meg:

I_A. 1 1 2 1 2 0 0 3 0 0

II_A. 1 2 1 0 0 1 2 0 3 0

III_A. 1 0 0 2 1 2 1 0 0 3

A B rendszer energiaeloszlása:

I_B. 5 0 0 4 1 4 1 0 0

3 2 3 2 0 0 3 1 1 2 2 1

II_B. 0 5 0 1 4 0 0 1 4

2 3 0 0 3 2 1 3 1 2 1 2

III_B. 0 0 5 0 0 1 4 4 1

0 0 2 3 2 3 1 1 3 1 2 2

Az A rendszer 10 mikroállapottal, és 3 makroállapottal írható le. A B rendszer 21 mikroállapottal rendelkezik, és ezek 5 makroeloszlásba egyesíthetők. A hőmérsékletet így értelmeztük a statisztikus fizikában:

$$T := \frac{e}{k \ln \frac{n+r}{r+1}},$$

ahol n az atomok száma, r a makroállapotok száma, e pedig az energiaadagok nagysága.

Így

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\ln \frac{3+5}{5+1}}{\ln \frac{3+3}{3+1}} = \frac{\ln \frac{8}{6}}{\ln \frac{6}{4}} = 0,71.$$

Így $T_B \cdot 0,71 = T_A$, vagyis a B test hőmérséklete nagyobb: egy atomra átlagosan több energia jut a B testnél. Egyesítsük mindkét rendszernél a 3, illetve az 5 mak-

roállapotot egy-egy makroállapottá. Ekkor az A testet jellemző makroállapot entrópiája:

$$S_A = k \ln 10 = 3,18 \cdot 10^{-23} \text{ J/K},$$

és a B testé pedig:

$$S_B = k \ln 21 = 4,20 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Az egyesített rendszer összes lehetséges mikroállapotainak a száma 210, és a rendszer összes entrópiája:

$$S_1 = 7,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Ha a B rendszer egyetlen energiaadagot átad az A testnek, akkor mindkét rendszernek 4 adag energiája van, az energiaeloszlásuk megegyezik; az A és B rendszeré is ez:

I. 4 0 0 3 3 1 3 0 0 2 1 1 2 0 2

II. 0 4 0 1 0 0 0 1 3 1 2 1 2 2 0

III. 0 0 4 0 1 3 1 3 1 1 1 2 0 2 2

Az A rendszer és a B rendszer is 15 állapottal és 4 makroállapottal rendelkezik. Az A és a B rendszer entrópiája:

$$S_A = S_B = k \ln 15 = 3,73 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

és az egyesített rendszer entrópiája az energiaadag átadása után:

$$S_2 = 7,47 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Az entrópia tehát egyetlen adag energia átadása közben $9,4 \cdot 10^{-25}$ J/K-nel nő. Kiegyenlítődés közben az A test hőmérséklete nő, a B test hőmérséklete csökken:

$$\frac{T_{A \text{ később}}}{T_{A \text{ korábban}}} = \frac{\ln \frac{3+3}{3+1}}{\ln \frac{3+4}{4+1}} = 1,20,$$

$$\frac{T_{B \text{ később}}}{T_{B \text{ korábban}}} = \frac{\ln \frac{3+5}{5+1}}{\ln \frac{3+4}{4+1}} = 0,855.$$

XVI/8. Mivel

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{1}{e} kQ \ln \frac{n+r}{r+l},$$

ezért $\Delta S = 5 \cdot 10^{-20} \text{ J/K}$.

XVI/9. A hőmérséklet statisztikus értelmezése szerint:

$$T = \frac{e}{k \ln \frac{n+r}{r+l}} = \frac{1,53 \cdot 10^{-21}}{1,38 \cdot 10^{-23} \ln \frac{30}{21}} = 310 \text{ K}.$$

(Nagyjából ezt az eredményt kapnánk, ha e -nek a felével számolnánk és r helyett $2r$ -et helyettesítenénk a képletbe.)

XVI/10. A rendszer entrópiát csak hőhátással vesz fel, a munkavégzés nem változtatja meg az entrópiát. Tehát

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{1}{300} = 3,33 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Ha a rendszerben emellett nem lép fel belső kiegyenlítődési folyamat, akkor a rendszer entrópiája $3,33 \cdot 10^{-3} \text{ J/K}$ -nel változik meg.

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár

XVII. Feladatcsoport: elektrosztatika

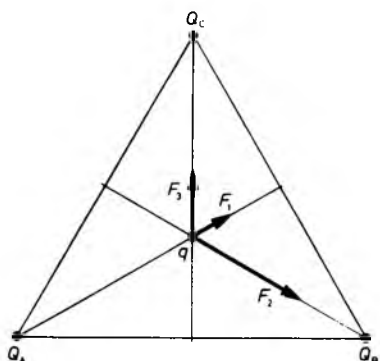
XVII/1. A Coulomb-féle erőtvény:

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{20^2} = 4500 \text{ N},$$

a két testre egyenlő nagy erő hat, a gyorsulásuk is azonos: 3000 m/s^2 .

XVII/2. Helyezzük el a háromszöget a *XVII. 1. ábrán* látható módon. A háromszög középpontja $r = 5,77$ méterre van a háromszög csúcsaitól. A q töltésű testre ható — a Q_A töltés által kifejtett — F_1 erő nagysága:

$$F_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6} \cdot 10^{-7}}{5,77^2} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ N},$$



XVII. 1. ábra

és az az F_2 erő, amelyet a Q_B töltésű test kifejt:

$$F_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-7}}{5,77^2} = 54 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

A harmadik töltés által kifejtett erőt jelöljük F_3 -mal. Az AB oldalra merőleges erők eredője nulla:

$$F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ + F_3 = 0,$$

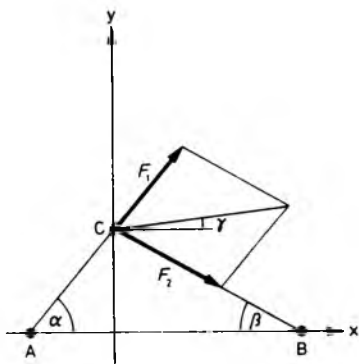
$$27 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 - 54 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 + F_3 = 0,$$

és így $F_3 = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ N}$. Ismét a Coulomb-törvényt alkalmazva:

$$13,5 \cdot 10^{-6} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-7} Q_C}{5,77^2},$$

ezért $Q_C = -5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

XVII/3. Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy az első tengelye az AB szakaszon fekjűdjön, a második tengely a C csúcson menjen át (*XVII. 2. ábra*). Ekkor tehát $\alpha = 45^\circ$ és $\beta = 31^\circ$. Az AC távolság $r_1 = 4,24 \text{ m}$, és a BC távolság $r_2 = 5,83 \text{ m}$. A C pontba helyezett töltésre az A-beli töltés $F_1 = 10^{-2} \text{ N}$ nagyságú erőt fejt ki. A B-beli töltéstől származó erő: $F_2 = 3,17 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ nagyságú. A C-beli töltött testre ható eredő elektromos erő AB-vel párhuzamos



XVII. 2. ábra

összetevője:

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = \\
 &= 10^{-2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3,17 \cdot 10^{-3} \cos 31^\circ = \\
 &= 9,78 \cdot 10^{-3} \text{ N},
 \end{aligned}$$

és az AB szakaszra merőleges összetevő:

$$F_y = F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta = 5,44 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Az eredő elektromos erő $11,19 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ nagyságú, és mert

$$\frac{F_y}{F_x} = 0,556 = \tan \gamma,$$

$\gamma = 29^\circ$ -os szöget zár be az x tengellyel.

XVII/4. Helyezzük el a négyzetet a XVII. 3. ábrán látható módon a derékszögű koordináta-rendszerben. A négy töltés $\sqrt{2}/2 = 0,7071 \text{ m}$ távolságra van az origótól. Az origóba helyezett töltésre ható négy erő nagysága:

$$F_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{0,5} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ N},$$

$$F_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0,5} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ N},$$

és

$$F_3 = 27 \cdot 10^{-2} \text{ N}, \quad F_4 = 36 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

A testre ható erők x irányú komponenseinek az összege:

$$F_x = 27 \cdot 10^{-2} - 9 \cdot 10^{-2} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ N},$$

az y irányú komponensek összege pedig:

$$F_y = 36 \cdot 10^{-2} - 18 \cdot 10^{-2} \text{ N} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Az eredő erő 45° -os szöget zár be az x tengellyel és $0,25 \text{ N}$ nagyságú.

XVII/5. Írjuk fel a három test egyensúlyának a feltételét! A gyűrűre ható erők összege nulla (XVII. 4. ábra):

$$-F_1 + mg + F_2 = 0, \quad (1)$$

a felső rögzített testre:

$$K_1 + m_1 g - K - F + F_1 = 0, \quad (2)$$

ahol F a két rögzített test között fellépő erő, és végül az alsó rögzített testre:

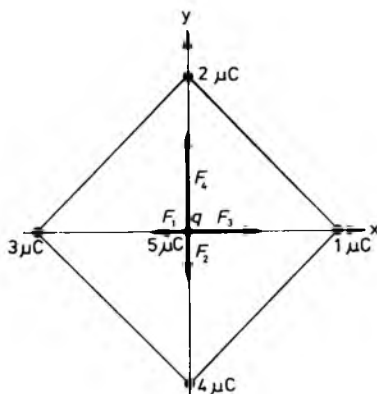
$$m_2 g + F - F_2 - K_1 = 0. \quad (3)$$

Az (1), (2) és (3) egyenlőségek mellett a Coulomb-féle erőtvénnyt használjuk:

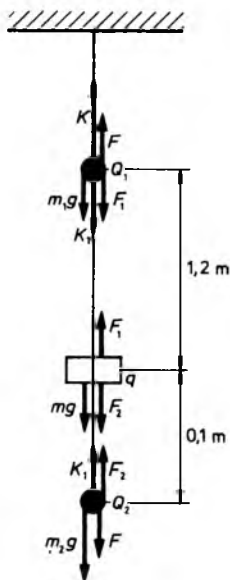
$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{l^2},$$

$$F_1 = k \frac{Q_1 Q}{l_1^2}, \quad (4)$$

$$F_2 = k \frac{Q_2 Q}{l_2^2}.$$



XVII. 3. ábra



XVII. 4.
ábra

Adjuk össze az (1), (2), (3) egyenleteket:

$$m_0g + m_1g + m_2g - K = 0, \quad (5)$$

tehát a felső kötelet a három test súlya húzza. A testek között fellépő elektromos erők összege nulla (belső erők!). Így $K = 1$ N. Most az (1) alapján:

$$0,1 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 \cdot 10^{-5}}{1,2^2} - 9 \cdot 10^9 \frac{Q_2 \cdot 10^{-5}}{0,1^2},$$

és mert $Q_2 = Q_1$, ezért

$$0,1 = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} Q_1 \left(\frac{1}{1,2^2} - \frac{1}{0,1^2} \right),$$

és innen $Q_1 = -11,18 \cdot 10^{-9}$ C. Az alsó kötelet feszítő erő (3) alapján: $K_1 = 0,5$ N.

XVII/6. A Q_1 töltéssel ellátott pontszerű test által kifejtett elektromos erő:

$$F_1 = k \frac{Q_1 q}{x^2},$$

és a Q_2 töltéssel rendelkező kis test

$$F_2 = k \frac{Q_2 q}{y^2}$$

nagyságú erőt fejt ki a gyűrűre. A csúszó test akkor van egyensúlyban, ha a két elektromos erő eredője merőleges a körpályára, vagyis sugár irányú. Az eredő hatásvonalára tehát átmegy a kör középpontján (XVII. 5. ábra). Így

$$\frac{F_2}{F_1} = \tan \alpha,$$

másrészt

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

De

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \frac{x^2}{y^2},$$

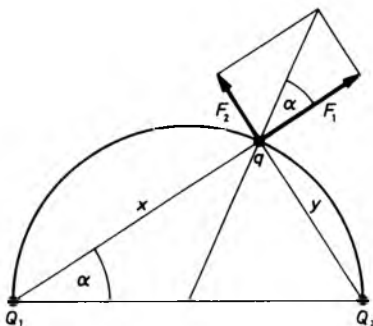
ezért

$$\tan \alpha = \frac{Q_2}{Q_1} \frac{1}{\tan^2 \alpha},$$

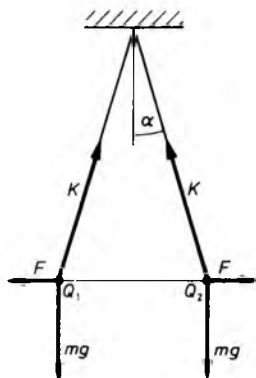
így

$$\tan \alpha = \sqrt[3]{\frac{Q_2}{Q_1}} = \sqrt[3]{\frac{1,92}{5,77}} = 0,69,$$

ezért $\alpha = 34,7^\circ$.



XVII. 5.
ábra



XVII. 6.
ábra

XVII/7. A két test között fellépő elektromos erő:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

A két test egyensúlyi helyzete teljesen azonos módon jellemezhető. A jobb oldali testre írjuk fel Newton II. törvényét előbb a vízszintes, azután a függőleges összetevőkre (XVII. 6. ábra):

$$F - K \sin \alpha = 0,$$

$$mg - K \cos \alpha = 0.$$

Innen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg},$$

azaz

$$mg \operatorname{tg} \alpha = F.$$

Behelyettesítve és figyelembe véve, hogy

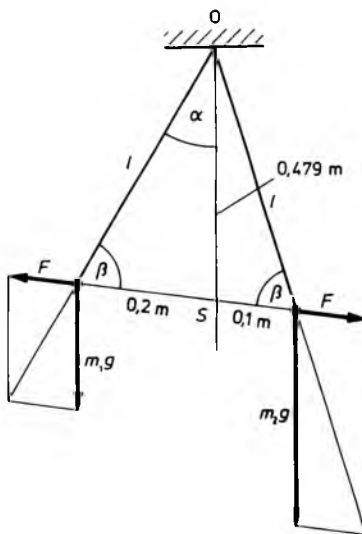
$$\sin \alpha = \frac{0,1}{0,5} = 0,2,$$

ezért $\alpha = 11,53^\circ$ és $\operatorname{tg} \alpha = 0,204$, azt kapjuk, hogy

$$4,08 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^9 \frac{0,8 \cdot 10^{-6} Q_2}{0,2^2},$$

$$\text{tehát } Q_2 = 22,7 \cdot 10^{-9} \text{ C.}$$

XVII/8. A fonalak nem helyezkednek el szimmetrikusan a függőleges egyenesre vonatkozóan (XVII. 7. ábra). A két test tömege ugyanis nem azonos. A fonalak elhelyezkedését az határozza meg, hogy a két test tömegközéppontja a felfüggesztési pont alatt van, a felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenesen helyezkedik el. Az S tömegközéppont 20 cm és 10 cm hosszú szakaszra osztja az $r = 30$ cm hosszú szakaszt. Tekintsük át először az ábrát geometriai szempontból. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögére: $\cos \beta = 15/50$, ebből $\beta = 72,54^\circ$. Az OS szakaszt koszinusztétel segítségével határozzuk meg: ennek a szakasznak a hossza 0,477 m, az α szöget ezután a szinusztétel segítségével: $\alpha = 23,52^\circ$. Térjünk rá a feladat dinamikai szempontú vizsgálatára! Az erőegyensúly helyett írjuk fel a 2 g tömegű testre ható forgatónyomatékok egyensúlyát. Vonatkoztassuk a forgatónyomatékot a felfüggesztési pontra. (Ez a választás azzal az előnnyel jár, hogy a kötélerő forgatónyomatékával nem kell számolnunk.)



XVII. 7.
ábra

Az elektromos erő fogatónyomatéka $Fl \sin \beta$, a nehézségi erő forgatónyomatéka pedig $m_1gl \sin \alpha$. Így

$$Fl \sin \beta = m_1gl \sin \alpha,$$

azaz

$$F = \frac{0,02 \sin 23,47^\circ}{\sin 72,54^\circ} = 8,34 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Másrészt a Coulomb-törvény alapján

$$8,34 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q^2}{0,3^2},$$

innen $Q = 2,88 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

XVII/9. A kezdeti töltések ellentétes előjelűek. Legyen Q_1 és Q_2 a két töltés nagysága. Ekkor

$$1,8 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 Q_2}{0,2^2}.$$

Ha a két töltött részecskét összeérintjük, akkor az összes töltés $|Q_1 - Q_2|$, és mindkét testnek $|Q_1 - Q_2|/2$ töltése lesz, ha ismét szétválasztjuk a két testet; ekkor

$$0,9 = 9 \cdot 10^9 \frac{\left(\frac{Q_1 - Q_2}{2}\right)^2}{0,1^2}.$$

A két egyenlőség alapján

$$Q_1 Q_2 = 8 \cdot 10^{-12},$$

$$(Q_1 - Q_2)^2 = 4 \cdot 10^{-12}.$$

Legyen $Q_1 > Q_2$. Ekkor

$$Q_1 - Q_2 = 2 \cdot 10^{-6},$$

és

$$Q_1 = Q_2 + 2 \cdot 10^{-6},$$

$$(Q_2 + 2 \cdot 10^{-6})Q_2 = 8 \cdot 10^{-12}.$$

Innen $Q_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, és $Q_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

XVII/10. A Q töltéssel rendelkező test

0,5 m távol van a kör síkjától. A keringő testre ható erők vízszintes összetevőinek összege a centripetális erőt adja, a függőleges összetevők eredője pedig nulla (XVII. 8. ábra):

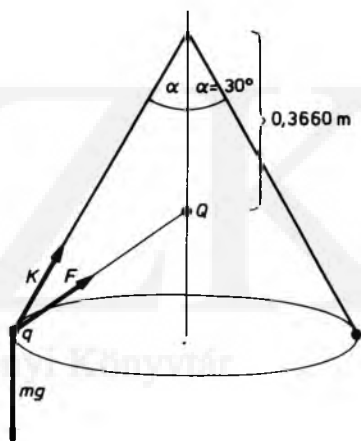
$$F \sin 45^\circ + K \sin \alpha = m\omega^2 r,$$

$$F \cos 45^\circ + K \cos \alpha - mg = 0,$$

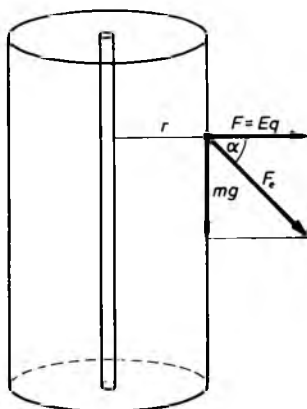
és

$$F = k \frac{Qq}{(r\sqrt{2})^2}.$$

Az elektromos erőt behelyettesítve az első két egyenletbe, a K kényszererőt az egyen-



XVII. 8.
ábra



XVII. 9.
ábra

lő együttthatók módszerével kiküszöböljük. Azt kapjuk, hogy $T = 1,44s$.

XVII/11. A rúdtól r távolságban az elektromos térerősség (XVII. 9. ábra):

$$E = 2k \frac{Q}{L} \frac{1}{r} = 2k\sigma \frac{1}{r},$$

így az elektromos erő:

$$F = 2k\sigma \frac{1}{r} q = 0,06 \text{ N},$$

és taszító erő, vízszintes irányú. A nehézségi erő: $mg = 0,1 \text{ N}$. A két erő eredője $F_e = 0,117 \text{ N}$ nagyságú, és ha iránya a vízszintessel α szöget zár be, akkor $\tan \alpha = 1,667$, ezért $\alpha = 59^\circ$. Ha a testet magára hagyjuk, akkor a kezdeti gyorsulása a vízszintessel 59° -os szöget zár be, és a nagysága $11,7 \text{ m/s}^2$.

XVII/12. A faltól r távolságra az elektromos térerősség:

$$E = 2\pi k \frac{Q}{L} = 2\pi k\sigma,$$

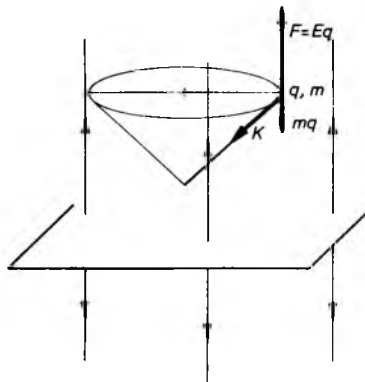
független a távolságtól. A fonál nyilvánvalóan 30° -os szöget zár be a függőlegessel. A testre ható erők eredőjének vízszintes összetevője:

$$Eq - K \sin 30^\circ = 0,$$

és a függőleges összetevők összege:

$$mg - K \cos 30^\circ = 0.$$

Innen egyrészt $q = 10^{-6} \text{ C}$, másrészt $K = 0,115 \text{ N}$. Ha a köté elszakad, a testre az állandó nehézségi erő és a (fal közelében) szintén állandó elektromos erő hat. A két erő merőleges egymásra és a fonál eredeti irányába mutat, a függőlegessel 30° -os szöget zár be. Az eredő nagysága $0,115 \text{ N}$. A test állandó gyorsulással mozog a faltól távolodva lefelé, a függőlegessel 30° -os szöget bezáró irányban. A gyorsulás nagy-



XVII. 10. ábra

sága $11,5 \text{ m/s}^2$. A test 1 másodperc alatt $5,75$ méter utat tesz meg. A felfüggesztési ponttól $6,75$ méter távol van, hiszen kezdetben már 1 méter volt a távolság, a sebessége ekkor $11,5 \text{ m/s}$.

XVII/13. Newton II. törvénye a mozgás vízszintes és függőleges összetevőire (XVII. 10. ábra):

$$mg - Eq + K \cos \alpha = 0,$$

$$K \sin \alpha = mr\omega^2,$$

ahol

$$r = l \sin \alpha,$$

és

$$E = 2\pi k\sigma = 5,655 \cdot 10^4 \text{ N/C}.$$

Az elektromos erő: $F = 0,1131 \text{ N}$, és nagyobb, mint a nehézségi erő. Ezért a körpálya síkja a fonál rögzítési pontja felett van. Behelyettesítve: $\alpha = 80,85^\circ$, és a kerületi síkja $1,359$ méter magasan van a síklap felett!

XVII/14. Tegyük fel, hogy $U(3) = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} U(r) &= kQ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Így (XVII. 11. ábra)

$$U(1,2) = 45 \text{ kV},$$

$$U(6) = -15 \text{ kV},$$

$$U(100) = -29,1 \text{ kV}.$$

Ha $U(\infty) = 0$, akkor

$$U(r) = kQ \frac{1}{r},$$

ezért

$$U(1,2) = 75 \text{ kV},$$

$$U(3) = 30 \text{ kV},$$

$$U(6) = 15 \text{ kV},$$

$$U(100) = 900 \text{ V}.$$

XVII/15. Az $U(\infty) = 0$ megállapodás-hoz tartjuk magunkat; ekkor

$$U(r) = kQ \frac{1}{r}.$$

Tehát $U(10) = -9000 \text{ V}$. Az első test elektromos helyzeti energiája $9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$, a másodiké $-9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

XVII/16. A potenciál:

$$U = k \frac{Q_1}{r_1} + k \frac{Q_2}{r_2},$$

ahol például r_1 a próbatöltés távolsága a Q_1 töltésű testtől. Így a két töltést összekötő szakasz felezőpontjában

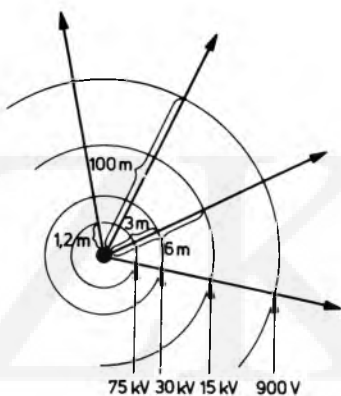
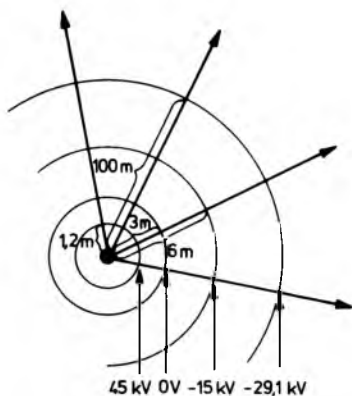
$$U_1 = k \frac{10^{-5}}{2} + k \frac{-1,2 \cdot 10^{-5}}{2} = -9000 \text{ V}.$$

A másik pontban pedig

$$U_2 = k \frac{10^{-5}}{4} + k \frac{-1,2 \cdot 10^{-5}}{5} = 900 \text{ V}.$$

XVII/17. A pontszerű elektromos állapotú testek által létrehozott potenciál:

$$U = k \frac{Q_A}{r_1} + k \frac{Q_B}{r_2} + k \frac{Q_C}{r_3} + k \frac{Q_D}{r_4}.$$



XVII. 11. ábra

Az első esetben: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 3,53 \text{ m}$, ezért

$$U_1 = k \frac{10^{-5}}{3,53} - k \frac{10^{-6}}{3,53} + k \frac{5 \cdot 10^{-6}}{3,53} - k \frac{2 \cdot 10^{-6}}{3,53} = \frac{9 \cdot 10^9}{3,53} 1,2 \cdot 10^{-5} = 30,5 \text{ kV}.$$

A második esetben: $r_1 = r_2 = 2,5 \text{ m}$ és $r_3 = r_4 = 5,6 \text{ m}$, ezért

$$U_2 = k \frac{10^{-5}}{2,5} - k \frac{10^{-6}}{2,5} + k \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5,6} - k \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5,6} = 37,2 \text{ kV}.$$

XVII/18. A háromszög középpontja $r = 2\sqrt{3}/3$ méterre van a csúcsoktól. Ekkor

$$U = 0 = k \frac{Q_1}{r} + k \frac{Q_2}{r} + k \frac{Q_3}{r}.$$

Innen

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

$$\text{tehát } Q_3 = -7 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

XVII/19. Az elektromos tér munkája:

$$W_E = q(U_1 - U_2),$$

ez most

$$W_E = q \left(k \frac{Q}{r_1} - k \frac{Q}{r_2} \right)$$

formában írható, mert a pontszerű test potenciálja:

$$U = k \frac{Q}{r}.$$

Így

$$W = 3375 \cdot 10^{-5} = 3,375 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

A mozgási energia megváltozása:

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - 0 = 5 \cdot 10^{-3}.$$

A munkatétel szerint

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = q \left(\frac{kQ}{r_1} - \frac{kQ}{r_2} \right) + W.$$

Ez alapján az általunk végzett munka:

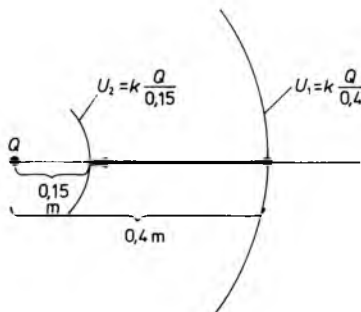
$$W = -2,875 \cdot 10^{-2} \text{ J.}$$

XVII/20. Az elektromos tér munkája:

$$W = q(U_1 - U_2) =$$

$$= kQq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -0,136 \text{ J.}$$

Mivel a feladat szerint a mozgási energia



XVII. 12. ábra

megváltozása nulla, az általunk végzett munka 0,136 J.

XVII/21. Az elektromos helyzeti energia (XVII. 12. ábra):

$$kQq \frac{1}{r} = -0,225 \text{ J.}$$

A munkatétel szerint

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = q(U_1 - U_2),$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} v^2 =$$

$$= -10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{0,4} - \frac{1}{0,15} \right),$$

$$v = 8,66 \text{ m/s.}$$

XVII/22. A munkatétel szerint

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = qkQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$\text{innen } q = -2,9 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

XVII/23. A télerősség nagysága $2\pi k\sigma = 565486 \text{ N/C}$, a részecske gyorsulása $11,3 \text{ m/s}^2$. A lemeztől mért távolság a t időpontban:

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0 =$$

$$= \frac{11,3}{2} t^2 + 1,6t + 0,04,$$

és a sebesség

$$v(t) = at + v_0 = 11,3t + 1,6.$$

Abban a t időpontban, amikor a lemeztől mért távolság 80 cm:

$$0,8 = \frac{11,3}{2} t^2 + 1,6t + 0,04,$$

innen $t = 0,25$ s és $v = 4,4$ m/s.

A sebességet a munkatétel segítségével is megkapjuk. A lemeztől x távolságra a potenciál:

$$U(x) = -2\pi k\sigma x,$$

így az energiamérleg:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 2\pi k\sigma qx = \frac{1}{2} mv_0^2 - 2\pi k\sigma qx_0,$$

behelyettesítve és rendezve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 0,05 v^2 &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 1,6^2 + 2\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6} \cdot 0,76. \end{aligned}$$

Innen is azt kapjuk, hogy $v = 4,4$ m/s.

XVII/24. Egyensúlyi helyzetben a testre ható három erő eredője nulla. Abban a B pontban, amelyhez az α szög tartozik (XVII. 13. ábra), az erőegyensúly:

$$Eq - K \sin \alpha = 0,$$

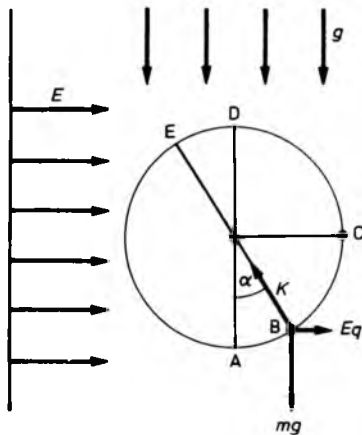
$$mg - K \cos \alpha = 0,$$

és ezért

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Eq}{mg} = \frac{2\pi k\sigma q}{mg} = 1,13,$$

innen $\alpha = 48,5^\circ$. Az E pont és a B pont egy átmérő két végpontja, ezért az E-hez is az α szög tartozik. A testre ható erők sugár irányú komponensei:

$$K + mg \cos \alpha + Eq \sin \alpha = m \frac{v_E^2}{l}.$$



XVII. 13. ábra

Az E pontban a test sebessége ebből az egyenletből: $v_E = 4,12$ m/s. Legyen az elektromos potenciál és a gravitációs potenciál nulla a kör középpontjában; ezért az energiamérleg az E pontbeli és az A-beli energia összehasonlítására:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_E^2 + 2\pi k\sigma ql \sin \alpha + mgl \cos \alpha &= \\ &= \frac{1}{2} mv_A^2 + mg(-l). \end{aligned}$$

Behelyettesítünk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 17,03 + 0,5654 \sin 48,5^\circ + \\ + 0,5 \cos 48,5^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 0,05 v_A^2 - 0,5. \end{aligned}$$

Így $v_A = 8,19$ m/s. Az E és B pontokban is megegyezik az energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_E^2 + 2\pi k\sigma ql \sin \alpha + mgl \cos \alpha &= \\ &= \frac{1}{2} mv_B^2 - 2\pi k\sigma ql \sin \alpha - mgl \cos \alpha, \end{aligned}$$

innen $v_B = 8,79$ m/s. Az E és C pontok

energiája is azonos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_E^2 + 2\pi k\sigma ql \sin \alpha + mgl \cos \alpha = \\ = \frac{1}{2}mv_C^2 - 2\pi k\sigma ql, \end{aligned}$$

ezért $v_C = 8,35$ m/s. És végül a D pontban a v_D sebességet az

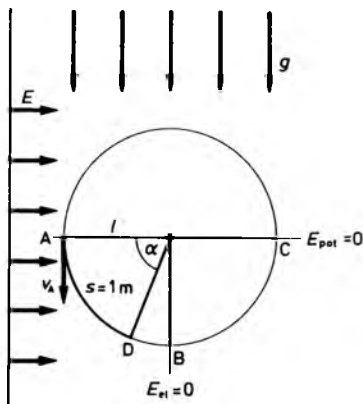
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_B^2 + 2\pi k\sigma ql \sin \alpha + mgl \cos \alpha = \\ = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgl \end{aligned}$$

energiamérleget kifejező egyenletből határozzuk meg: $v_D = 5,21$ m/s.

XVII/25. Legyen az elektromos potenciál és a gravitációs potenciál nulla szintje a kötél rögzítési pontja (XVII. 14. ábra). A D ponthoz 75° szög tartozik, hiszen radiánban, illetve fokban:

$$\alpha = \frac{1,31 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1,31;$$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ \alpha}{\pi} = 75^\circ.$$



XVII. 14. ábra

Az energiamérleget a következő egyenlőségek fejezik ki:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_A^2 + Eql = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgl = \\ = \frac{1}{2}mv_C^2 - Eql = \\ = \frac{1}{2}mv_D^2 + Eql \cos 75^\circ - mgl \sin 75^\circ. \end{aligned}$$

Itt $Eq = 2\pi k\sigma q = 0,5654$ N. Így $v_B = 6,7$ m/s, $v_C = 6,9$ m/s és $v_D = 6,3$ m/s.

XVII/26. A csepp térfogata: $V = 4,1887 \cdot 10^{-18} \text{ dm}^3$, tömege: $m = 3,77 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$. Az erőegyensúlyt az

$$Eq = mg$$

egyenlőség fejezi ki, innen

$$E = 235,6 \text{ N/C},$$

ebből a feszültség:

$$U = Ed = 2,356 \text{ V}.$$

A kapacitás:

$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d} = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F},$$

ezért

$$Q = CU = 2 \cdot 10^{-11} \text{ C}.$$

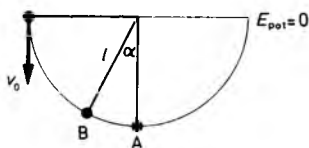
XVII/27. A lemezek közötti tér erőssége:

$$E = \frac{1000 \text{ V}}{0,2 \text{ m}} = 5000 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Az energiamérleg alkalmazásához válaszszuk meg most is az elektromos és a gravitációs potenciál nulla szintjének a fonál rögzítési pontját (XVII. 15. ábra). Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgl - Eql = \\ = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgl \cos \alpha - Eql \cos \alpha. \end{aligned}$$

+++++



XVII. 15. ábra

Innen

$$v_A = \sqrt{403,2} \text{ m/s}, \quad v_B = \sqrt{402,7} \text{ m/s}.$$

XVII/28. A lemezek közötti térerősség: $E = 5000 \text{ N/C}$. A kupinga gömbjére ható három erő függőleges komponensei egyenúlyban vannak:

$$mg + Eq - K \cos \alpha = 0.$$

A vízszintes komponens a centripetális erőt szolgáltatja:

$$K \sin \alpha = \frac{mv^2}{r},$$

és $r = l \sin \alpha$. Innen $v = 0,68 \text{ m/s}$, és $K = 0,011 \text{ N}$.

XVII/29. A testre ható erők eredőjének függőleges összetevője nulla:

$$mg - Eq - K \cos \alpha = 0,$$

mert most az elektromos erő fölfelé mutat. És mert $mg = 0,005 \text{ N}$, $Eq = 5000 \cdot 10^{-6} = 0,005 \text{ N}$, ezért $K \cos \alpha = 0$, tehát $\alpha = 90^\circ$. A fonál a lemezekkel párhuzamosan forog körbe (XVII. 16. ábra): a körpálya sugara $r = l = 8 \text{ cm}$, így a kötél erő biztosítja a centripetális erőt:

$$K = m \frac{v^2}{r} = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

XVII/30. A lemezek közötti tér erőssége:

$$E = \frac{\Psi}{A} = \frac{4\pi kQ}{A} \approx 10\,000 \frac{\text{N}}{\text{C}}. \quad (1)$$

(A két lemez közötti feszültség 2000 V .) Az inga gömbje a felfüggesztési pont fölött kering; a függőleges erőkomponensek összege nulla:

$$Eq - mg - K \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

a vízszintes összevető pedig a centripetális erőt biztosítja:

$$K \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}. \quad (3)$$

Most is érvényes ezen kívül az

$$r = l \sin \alpha \quad (4)$$

geometriai jellegű összefüggés is. A (3) és (4) egyenlőség alapján

$$K \sin^2 \alpha = \frac{mv^2}{l},$$

az adatokat behelyettesítve:

$$K \sin^2 \alpha = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,08} = 6,25 \cdot 10^{-3}. \quad (5)$$

A (2) és (1) alapján

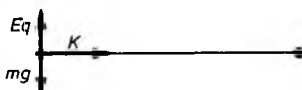
$$K \cos \alpha = 0,005. \quad (6)$$

Az (5) és (6) egyenlőséget elosztva egymással, és figyelembe véve a Pithagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 1,25,$$

innen

$$\cos^2 \alpha + 1,25 \cos \alpha - 1 = 0,$$



XVII. 16. ábra

és így $\cos \alpha = 0,55$, $\alpha = 56,63^\circ$. A felső lemeztől mért távolság:

$$10 - l \cos \alpha = 10 - 4,4 = 5,6 \text{ cm}.$$

XVII/31. A lemezek közötti térerősség: $E = 5000 \text{ N/C}$. A részecskére ható erők eredője $mg + Eq = 0,01 \text{ N}$ nagyságú, és függőlegesen lefelé mutat. A részecske gyorsulása: $a = 20 \text{ m/s}^2$, az alsó lemez felé mutat. Ha a 8 cm -es elmozduláshoz t idő szükséges, akkor

$$0,08 = \frac{20}{2} t^2,$$

azaz $t = 0,089 \text{ s}$. A lemezek élével párhuzamos 1 m utat $v = 1/0,089 = 11,18 \text{ m/s}$ sebességgel teszi meg.

XVII/32. A mozgás első szakaszára a munkatételt alkalmazzuk (XVII. 17. ábra):

$$\frac{1}{2} mv^2 = qU_1. \quad (1)$$

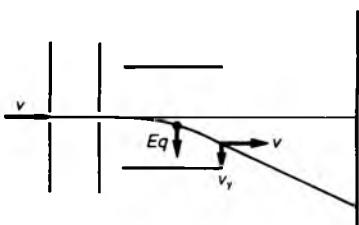
Innen $v = 1,87 \cdot 10^7 \text{ m/s}$. A vízszintes lemezek között a térerősség:

$$E = \frac{80}{0,2} = 400 \frac{\text{N}}{\text{C}}, \quad (2)$$

a részecske gyorsulása:

$$a = \frac{Eq}{m} = \frac{400 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 7 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A test tömege olyan kicsiny, hogy a nehéz-



XVII. 17. ábra

ségi erő elhanyagolható. A lemezek élei mentén mért 1 m utat az elektron

$$t = \frac{1}{1,87 \cdot 10^7} = 5,33 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

idő alatt teszi meg. Ez idő alatt

$$s = \frac{a}{2} t^2 = \frac{7 \cdot 10^{13}}{2} (5,33 \cdot 10^{-8})^2 = 0,10 \text{ m}$$

-t esik. A lemez szélét mintegy érintve hagyja el a második kondenzátor terét. A mozgás közben szert tesz $v_y = at = 3,75 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ sebességre. Mivel

$$\frac{v_y}{v} = 0,2 = \tan \alpha,$$

ezért $\alpha = 11,3^\circ$, az elektron a vízszintessel $11,3^\circ$ -os szögben hagyja el az elektromos teret. Az ernyőig hátra lévő utat újabb $5,33 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ idő alatt teszi meg, ez alatt függőlegesen $3,75 \cdot 10^6 \cdot 5,33 \cdot 10^{-8} = 0,2 \text{ m}$ -t „esik”.

XVII/33. A részecske vízszintes elmozdulására: $0,8 = 1,8 \cdot 10^7 t$. Innen $t = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Ennyi ideig mozog a részecske becsapódásáig. Közben 10 cm -t esik:

$$0,1 = \frac{a}{2} (4,4 \cdot 10^{-8})^2,$$

azaz $a = 10^{14} \text{ m/s}^2$. A részecske tömege igen kicsiny, a gyorsulást az Eq elektromos erő magyarázza:

$$Eq = ma,$$

innen $E = 568 \text{ N/C}$, és így a vízszintes lemezpár feszültsége $113,6 \text{ V}$. Másrészt

$$E = \frac{4\pi kQ}{A}$$

alapján $Q = 5,02 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

XVII/34. Mivel a kondenzátor energiája így is kifejezhető: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU^2$, tehát

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} U^2,$$

vagyis $U = 816 \text{ V}$.

XVII/35. A kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d} = 8,84 \cdot 10^{-11} \text{ F}.$$

A lemezek közötti feszültség: $U = Q/C = 11\,312 \text{ V}$. A térerősség: $E = U/d = 11,3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$. A felhalmozódó energia:

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 5,65 \cdot 10^{-3} \text{ J},$$

az energiasűrűség: 565 J/m^3 . A lemezek eltávolításakor végzett munka az energiasűrűség és a térfogatnövekedés szorzata:

$$W = 565 \cdot 0,01 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 2,82 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

A lemezek között ható erő: $F = 565 \cdot 0,01 = 5,65 \text{ N}$.

XVII/36. A két fegyverzettel rendelkező gömbkondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{1}{k} \frac{Rr}{R-r} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{0,13 \cdot 0,1}{0,03} = 4,81 \cdot 10^{-11} \text{ F}.$$

Ha a két gömbre 10^{-6} C , illetve -10^{-6} C töltést viszünk, akkor a gömbök között

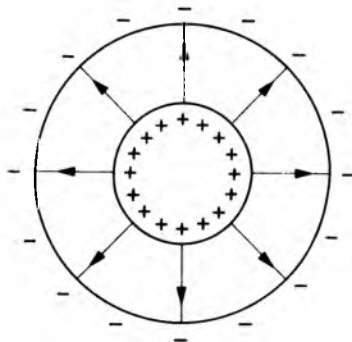
$$U = \frac{Q}{C} = 20,8 \text{ kV}$$

feszültség alakul ki (XVII. 18. ábra).

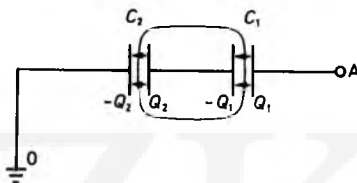
XVII/37. A lemezeken kialakuló töltéeloszlást a XVII. 19. ábrán feltüntettük. A töltés megmaradás miatt

$$-Q_1 + Q_2 = 0,$$

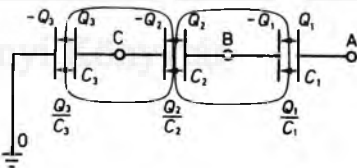
azaz $Q_2 = Q_1 =: Q (= 10^{-7} \text{ C})$. Az A és O



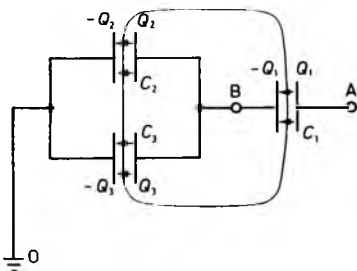
XVII. 18. ábra



XVII. 19. ábra



XVII. 20. ábra



XVII. 21. ábra

pontok közötti feszültség — A-ból O-ba haladva a nyilak mentén —

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = U_{AO},$$

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = U_{AO}.$$

Így

$$U_{AO} = 10^{-7} \left(\frac{1}{10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} \right) = 0,15 \text{ V}.$$

A két kondenzátor energiája egyszerűen számolható:

$$E_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{(10^{-7})^2}{2 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ J},$$

$$E_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{(10^{-7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ J}.$$

XVII/38. A töltésmegmaradás miatt a *XVII. 20. ábra* alapján:

$$Q_1 = 3 \mu\text{C},$$

$$Q_2 - Q_1 = 2 \mu\text{C},$$

$$Q_3 - Q_2 = -1 \mu\text{C}.$$

Innen $Q_2 = 5 \mu\text{C}$, $Q_3 = 4 \mu\text{C}$. Így

$$U_{CO} = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{4 \mu\text{C}}{3 \mu\text{F}} = 1,33 \text{ V},$$

$$U_{BO} = \frac{Q_3}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \frac{5 \mu\text{C}}{2 \mu\text{F}} + 1,33 = 3,83 \text{ V},$$

$$\begin{aligned} U_{AO} &= \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \\ &= \frac{3 \mu\text{C}}{1 \mu\text{F}} + 3,83 = 6,83 \text{ V}. \end{aligned}$$

XVII/39. A töltésmegmaradást kifejező egyenletek (*XVII. 21. ábra*):

$$Q_1 = 4 \mu\text{C},$$

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 5 \mu\text{C}.$$

A zárt görbén a tér által végzett munka nulla:

$$\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} = 0,$$

ezért

$$Q_2 + Q_3 = 9 \mu\text{C},$$

$$\frac{Q_2}{2 \mu\text{F}} = \frac{Q_3}{3 \mu\text{F}}.$$

Ebből

$$Q_3 = \frac{27}{5} = 5,4 \mu\text{C},$$

$$Q_2 = 3,6 \mu\text{C}.$$

Az A és O pontok közötti feszültség két úton is számolható:

$$\begin{aligned} U_{AO} &= \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} = \\ &= 4 + 1,8 = 5,8 \text{ V}. \end{aligned}$$

A rendszer energiája:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_3^2}{2C_3} = \\ &= \frac{(4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 10^{-6}} + \frac{(3,6 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} + \\ &+ \frac{(5,4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 10^{-6} \left(\frac{16}{2} + \frac{3,6^2}{4} + \frac{5,4^2}{6} \right) = \\ &= 16,1 \cdot 10^{-6} \text{ J}. \end{aligned}$$

Figyeljünk fel arra, hogy az egyes kondenzátorok energiájának összege egyenlő a rendszer energiájával, akár soros, akár párhuzamos kapcsolásról van szó.

Így tehát

$$C_1 = \frac{C}{2}, \quad C_2 = C + \frac{C}{2} = \frac{3}{2}C,$$

$$C_3 = \frac{\frac{3}{2}CC}{\frac{3}{2}C + C} = \frac{\frac{3}{2}C}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}C,$$

$$C_4 = \frac{C}{2}, \quad C_5 = \frac{11}{10}C,$$

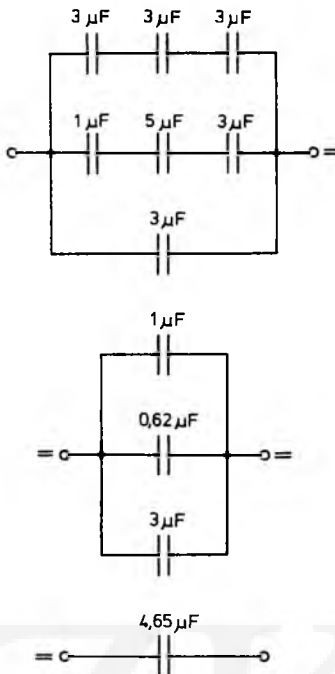
és végül

$$C_6 = \frac{\frac{11C}{10}C}{\frac{11C}{10} + C} = \frac{11}{21}C.$$

XVII/42. Három párhuzamosan kapcsolt kondenzátort helyettesítsük az eredőjünkkel; ezután a három ágba kiszámoljuk a „sorosan kapcsolt kapacitások” eredőjét, és végül a három párhuzamosan kapcsolt kondenzátort eggyel helyettesítjük; az eredő végül is $4,65 \mu\text{F}$ (XVII. 24. ábra).

XVII/43. Az A és B pontok közötti eredő kapacitás a három ág párhuzamosan kapcsolt kapacitásának az összege. A két szélső ág kapacitását azonban előbb meg kell határozni, itt két-két kondenzátor sorba van kapcsolva. A szélső ág kapacitása egyaránt $0,5 \mu\text{F}$, a három ág együttes kapacitása $C_e = 0,5 + 1 + 0,5 = 2 \mu\text{F}$.

Ha az eredőt a C és D pontok között számoljuk, akkor a középen elhelyezkedő kondenzátort elhagyjuk, ugyanis teljesen szimmetrikusan helyezkedik el. Bárhogyan kapcsolunk is feszültséget a C és a D pontok közé, a középen látható kondenzátor egyik lemeze sem lehet pozitívabb a másikonál. Ezen a kondenzátoron nem lesz töltés.



XVII. 24.
ábra

Ha elhagyjuk a kapcsolásból, akkor a két függőleges ágba két-két sorba kapcsolt kondenzátor marad, ezek eredője — egy-egy ágba — $0,5 \mu\text{F}$, a két párhuzamos ágba összesen $1 \mu\text{F}$.

Megjegyzés: ez a feladat jó példa arra, hogy a különben bonyolult kapcsolást a szimmetriák felismerésével visszavezetjük könnyen vizsgálható soros, illetve párhuzamos kapcsolásokra.

XVII/44. Az A és O pontok között a négy kondenzátor párhuzamos kapcsolásban van elrendezve, az eredő tehát $4 \mu\text{F}$. A B és O pontok között fémes összeköttetés van, a négy kondenzátor „kívül reked” a rendszerben; az eredő kapacitás itt tehát 0.

XVII/45. Az első kondenzátoron $Q_1 = 400 \mu\text{C}$, a másodikon $Q_2 = 300 \mu\text{C}$ töltés van.

a) Jelöljük a két kondenzátor töltését az összekapcsolás után q_1 -gyel, illetve q_2 -vel.

Ekkor a

$$Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2$$

egyenlőség a töltésmegmaradást fejezi ki, míg a

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = 0$$

összefüggés annak a kifejezése, hogy zárt görbén az elektromos tér munkája nulla. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $q_1 = 280 \mu\text{C}$, és $q_2 = 420 \mu\text{C}$. A két kondenzátoron egyaránt 140 V feszültség mérhető.

b) Ebben az esetben is jelöljük az ismeretlen töltéseket q_1 -gyel és q_2 -vel. A két alapvető egyenlet most:

$$Q_1 - Q_2 = q_1 + q_2,$$

és

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = 0.$$

Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $q_1 = 40 \mu\text{C}$, $q_2 = 60 \mu\text{C}$, és a feszültség 20 V.

XVII/46. A töltésmegmaradást a

$$C_1 U_1 = C_1 U + C_2 U$$

egyenlet fejezi ki, és ebben figyelembe vettük azt is, hogy a zárt görbén a tér munkája nulla, hiszen a jobb oldalon mindkét tagban azonos U szerepel. Ezzel jelöltük az összekapcsolás után kialakuló feszültséget. Tehát

$$2 \cdot 200 = 2 \cdot 50 + C_2 \cdot 50,$$

így $C_2 = 6 \mu\text{F}$. Összekapcsolás előtt az energia:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 = 0,04 \text{ J},$$

összekapcsolás után

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 50^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 50^2 = 0,01 \text{ J}$$

-ra csökken az energia. Ezt azzal magyarázzuk, hogy miközben töltés áramlik a kezdetben töltetlen kondenzátorra, az összekötő vezeték körül szimmetrikus elektromos tér keletkezik. Ennek az energiája a töltésáramlás befejeződésekor szétszóródik a környezetben.

XVII/47. A két kondenzátor töltése összekapcsolás előtt $1000 \mu\text{C}$, illetve $1200 \mu\text{C}$. A töltésmegmaradás elve szerint

$$-q_1 + q_2 = 1200 - 1000 = 200 \mu\text{C},$$

ahol q_1 és q_2 a két kondenzátor töltése összekapcsolás után (XVII. 25. ábra). Zárt görbén az elektromos tér munkája:

$$\frac{q_1}{10 \mu\text{F}} + \frac{q_2}{8 \mu\text{F}} = 0.$$

Innen $q_2 = 0,8(-q_1)$, tehát

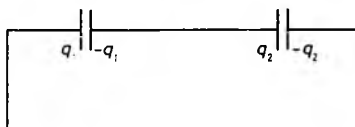
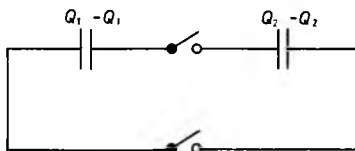
$$-q_1 + q_2 = -1,8q_1 = 200.$$

Ebből $q_1 = -111,1 \mu\text{C}$, és ezért $q_2 = 88,9 \mu\text{C}$. A C_1 kapacitású kondenzátor polaritása tehát ellentétesre fordul. A két kondenzátor feszültsége egyaránt 11,1 V.

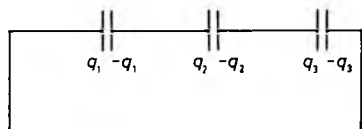
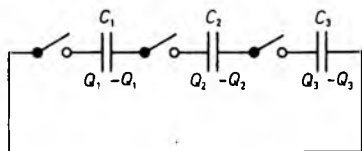
XVII/48. A három kondenzátor töltése az összekapcsolás előtt rendre $300 \mu\text{C}$, $300 \mu\text{C}$ és $250 \mu\text{C}$. A töltésmegmaradást a

$$-q_1 + q_2 = 0,$$

$$-q_2 + q_3 = -50 \mu\text{C}$$



XVII. 25. ábra



XVII. 26.
ábra

egyenletek, az elektrosztatika második alaptételét a

$$\frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{3} + \frac{q_3}{5} = 0$$

egyenlet fejezi ki (XVII. 26. ábra). Behelyettesítve, az egyenletrendszer megoldásaként azt kapjuk, hogy $q_3 = -40,3 \mu\text{C}$ (a harmadik kondenzátor polaritása tehát elletétesre változik), $q_2 = 9,7 \mu\text{C}$, $q_1 = 9,7 \mu\text{C}$.

XVII/49. A kezdetben töltetlen fémlemezben olyan töltéeloszlás alakul ki, amelynek elektromos tere helyettesíti a pontszerű töltés tükörképének a terét. A töltés 10 cm-re van a lemeztől, a tükörképétől 20 cm-re. A golyóra ható elektromos erő így

$$F = k \frac{q^2}{0,2^2},$$

másrészt a golyóra ható három erő eredője nulla:

$$K \sin \alpha = F,$$

$$K \cos \alpha = mg.$$

Így

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{F}{mg},$$

tehát $F = 0,0288 \text{ N}$. Ezért $q = 3,57 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

XVII/50. A két gömb töltése eredetileg $8,88 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ és $1,33 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Ha a két gömböt összekapcsoljuk, akkor azonos lesz a potenciáljuk:

$$k \frac{q_1}{r_1} = k \frac{q_2}{r_2},$$

azaz

$$\frac{q_1}{0,08} = \frac{q_2}{0,1},$$

továbbá a töltés megmaradása miatt

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 8,88 \cdot 10^{-10} + 1,33 \cdot 10^{-9} = \\ &= 2,22 \cdot 10^{-9} \text{ C}. \end{aligned}$$

Így — a számolást elvégezve — $q_2 = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ és $q_1 = 9,87 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, összekapcsolás után a két gömb feszültsége 111 volt lesz.

XVII/51. A gömbök töltése legyen q_1 és q_2 . Ekkor

$$q_1 + q_2 = 10^{-5} \text{ C},$$

másrészt a két gömb ekvipotenciális felület, azaz

$$k \frac{q_1}{0,02} = k \frac{q_2}{0,12},$$

így $q_2 = 6q_1$, azaz $7q_1 = 10^{-5} \text{ C}$, tehát $q_1 = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ és $q_2 = 8,57 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. A térerősség a két gömbön:

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} = 3,2 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} = 5,35 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

A kisebbik gömb felületén a térerősség hatszorosa a nagyobbik gömb felületén mérhető térerősségnek.

XVII/52. A két gömb töltése ($U = kQ/r$ alapján) $1,1 \cdot 10^{-12} \text{ C}$, azaz az összes töltés

$2,2 \cdot 10^{-12}$ C. Ha a két gömböt egyesítjük, akkor az összes töltés ennek a felületén oszlik el. Az egyesített csepp sugarát jelöljük R -rel, ekkor (mert a térfogatok összeadódnak):

$$\frac{4r^3\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4R^3\pi}{3},$$

azaz $R^3 = 2r^3$, vagyis $R = \sqrt[3]{2} \cdot 0,001 = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,26 \text{ mm}$. A gömb felületén a potenciál:

$$U = k \frac{Q}{R} = 15,7 \text{ V}.$$

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

XVIII. Feladatcsoport: egyenáram

XVIII/1. Az áramerősség-idő függvény a töltés-idő függvény deriváltja:

$$\dot{Q}(t) = J(t) = 2t + 1.$$

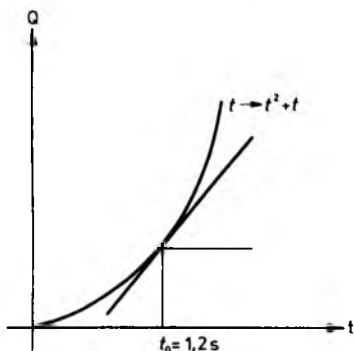
vagyis az áramerősség a t_0 időpontban $J(t_0) = 3,4$ A. (Ez a $Q(t)$ függvény grafikonjához a $Q(t_0)$ pontban húzott érintő meredeksége. (XVIII. 1. ábra).

XVIII/2. Az átáramlott töltés mennyisége az áramerősség-idő függvény grafikonja alatti terület:

$$Q = \frac{2+5}{2} \cdot 5 = 17,5 \text{ C.}$$

XVIII/3. A vezetőben folyó áram sűrűsége:

$$j = \frac{I}{A} = \frac{40}{5 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}.$$



XVIII. 1. ábra

A vezetőképesség:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = 10^6 \frac{1}{\Omega \text{m}}.$$

Ohm törvénye: $j = \sigma E$, így $E = 8 \text{ N/C}$.

XVIII/4. Ohm törvénye a

$$\Psi = \varrho I$$

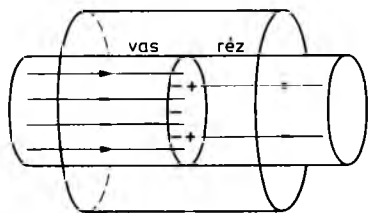
formában is kifejezhető. Tehát a vasvezetékben $\Psi_v = \varrho_v I = 2 \cdot 10^{-5} \Omega \text{m A}$, a rézvezetékben $\Psi_r = \varrho_r I = 3,56 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m A}$ az elektromos fluxus. A két vezetékben különböző a térerősség is:

$$E_v = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 0,166 \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

$$E_r = \frac{3,56 \cdot 10^{-7}}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 0,0029 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Megjegyzés: A két vezeték összeillesztésénél töltés halmozódik fel (XVIII. 2. ábra). A felületen végződik ugyanis a vasban haladó $\Psi_v = 2 \cdot 10^{-5} \Omega \text{mA}$ fluxus, és innen indul a rézvezeték $\Psi_r = 3,56 \cdot 10^{-7} \Omega \text{mA}$ fluxusa. A határfelületet körülölelő térfogatot $\Psi_v - \Psi_r = 19,644 \cdot 10^{-5} \Omega \text{mA}$ befelé haladó eredő fluxus dőfi. Gauss tétele szerint:

$$\Psi = \Psi_v - \Psi_r = 4\pi k Q,$$



XVIII. 2. ábra

innen $Q = -1,73 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, ennyi töltés halmozódik fel a határreteken. A töltés negatív, mert az eredő fluxus befelé mutat.

XVIII/5. A $\Psi = qI$ egyenlőség alapján $\Psi = 1,78 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ mA}$. A térerősség: $E = \Psi/A = 0,0089 \text{ N/C}$. A huzal két vége között $U = El = 0,0089 \text{ V}$ feszültség mérhető.

XVIII/6. Az elektromos térerősség:

$$E = qj = q \frac{I}{A} 10^{-6} \frac{1,2}{10^{-6}} = 1,2 \Omega \text{ mA}.$$

Gondolatban vigyünk $q = 1 \text{ C}$ töltést az A pontból az O pontba. A tér által végzett munka $W_{A \rightarrow O} = Eq l$, ahol l az AO távolságot jelenti. Így az A pont potenciálja:

$$U_A = El = q \frac{I}{A} l = 10^{-6} \frac{1,2}{10^{-6}} l = 1,2 \text{ V}.$$

Mivel a B és az O pontok távolsága $2l = 2 \text{ m}$, $U_B = 2,4 \text{ V}$; hasonlóan $U_C = 3,6 \text{ V}$, $U_D = 4,8 \text{ V}$. A potenciál tehát az áram irányába haladva csökken: az áram a magasabb potenciálú helyről az alacsonyabb potenciálú hely felé folyik (XVIII. 3. ábra).

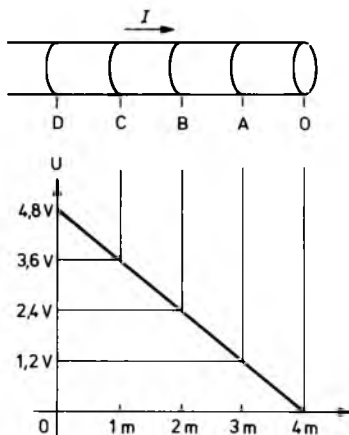
XVIII/7. A térerősség: $E = U/d = 10^7 \text{ V/m}$. Így

$$j = \frac{1}{\rho} E = 100 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{A}}{\text{dm}^2}.$$

Az átszivárgó áram: $jA = 1 \text{ A}$.

XVIII/8. Tegyük fel, hogy a vezeték térfogata nem változik. Ekkor

$$A_1 l_1 = A_2 l_2.$$



XVIII. 3. ábra

Ha tehát a keresztmetszet a felére csökken, akkor a vezető hossza megkétszereződik. Az ellenállás kezdetben:

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{A_1},$$

és később, a nyújtás után:

$$R_2 = \rho \frac{l_2}{A_2} = \rho \frac{2l_1}{\frac{A_1}{2}} = 4\rho \frac{l_1}{A_1}.$$

Így $R_2 = 4R_1$. Az ellenállás tehát négyszeresre változik. A második esetben az ellenállás 16-szorosára nő.

XVIII/9. Az egyes részek ellenállása 20Ω , az ellenállás ugyanis arányos a vezető hosszával. A párhuzamos kapcsolás most azt jelenti, hogy a vezetődarabok keresztmetszete összeadódik: négyszeres lesz. Az ellenállás és a keresztmetszet fordítottan arányos, ezért a 20Ω ellenállású vezetők párhuzamosan egymás mellé helyezve $20/4 = 5\Omega$ ellenállást képviselnek. Az ellenállás tehát végeredményben 16-od részére csökken.

XVIII/10. Legyen adott az α szög. Az A és a B pontok közötti ív hossza

$$2\pi r \frac{180^\circ + \alpha}{360^\circ} \quad \text{és} \quad 2\pi r \frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ},$$

az ellenállás pedig

$$R_1 := 36 \frac{180^\circ + \alpha}{360^\circ} = \frac{180^\circ + \alpha}{10} \Omega,$$

$$R_2 := 36 \frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ} = \frac{180^\circ - \alpha}{10} \Omega.$$

A két ív párhuzamosan van kapcsolva, ezért az eredő reciproka:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{10}{180^\circ + \alpha} + \frac{10}{180^\circ - \alpha}.$$

$$R = \frac{(180^\circ + \alpha)(180^\circ - \alpha)}{100 \left(\frac{180^\circ + \alpha}{10} + \frac{180^\circ - \alpha}{10} \right)} = \frac{(180^\circ + \alpha)(180^\circ - \alpha)}{10 \cdot 360^\circ},$$

vagyis

$$R = \frac{180^2 - \alpha^2}{3600}.$$

Ha $\alpha = 0^\circ$, akkor $R = 9\Omega$,

ha $\alpha = 30^\circ$, akkor $R = 8,75\Omega$,

ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $R = 6,75\Omega$,

ha $\alpha = 180^\circ$, akkor $R = 0\Omega$.

XVIII/11. Az elektromos teljesítmény:

$$P = UI = 3 \text{ W};$$

az elektromos munka:

$$W = UIt = 3600 = 1800 \text{ J}.$$

XVIII/12. A hálózati fogyasztókat párhuzamosan szokás kapcsolni, így mindegyik ellenállásra 220 V feszültség jut. Ezzel biztosítjuk azt, hogy egymástól függetlenül működjenek. A 100 wattos fogyasztón

$$I = \frac{P}{U} = \frac{100}{220} \text{ A} = 0,45 \text{ A}$$

folyik át üzemi állapotban. A 60 wattos fogyasztó $60/220 = 0,27 \text{ A}$ áramot vesz fel, a 25 wattos ellenállások áramfelvétele $25/220 = 0,1136 \text{ A}$. A hálózat teljes áramfelvétele:

$$I = 10 \cdot 0,4545 + 4 \cdot 0,2727 + 2 \cdot 0,1136 = 5,863 \text{ A}.$$

A hálózat védelmére 6 amperes biztosíték — szűken számolva — éppen megfelelő. Ajánlatosabb azonban 10 amperes biztosítékot alkalmazni.

XVIII/13. A két ellenállásra

$$U_1 = \sqrt{P_1 R_1} = \sqrt{3 \cdot 2700} = 90 \text{ V},$$

$$U_2 = \sqrt{P_2 R_2} = \sqrt{2 \cdot 5000} = 100 \text{ V}$$

feszültség kapcsolható. Ha a két ellenállást párhuzamosan kötjük, akkor legfeljebb 90 voltot kapcsolhatunk a rendszerre. És mivel a két ellenállás eredője

$$R = \frac{2700 \cdot 5000}{7700} = 1753 \Omega,$$

a rendszeren legfeljebb $90/1753 = 0,0513 \text{ A}$ folyhat át. Ekkor az egyik ellenálláson 3 watt, a másikon 1,62 watt elektromos teljesítményt ad le az elektromos tér.

XVIII/14. Az egyik ellenálláson

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{10}{100}} = 0,31 \text{ A},$$

a másikon

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{10}{200}} = 0,223 \text{ A}$$

folyhat át. Ha a két ellenállást sorba kötjük, akkor a rendszer kisebb áramot, 0,22 A-t vehet fel. Így a rendszerre

$$U = 0,223(100 + 200) = 67 \text{ V}$$

feszültség kapcsolható. A két ellenálláson

$I^2 \cdot 100 = 5 \text{ W}$, illetve $I^2 \cdot 200 = 10 \text{ W}$ teljesítményt ad le az elektromos tér.

XVIII/15. A névleges teljesítmény és az ellenállás kapcsolata:

$$P = \frac{U^2}{R},$$

vagyis

$$100 = \frac{220^2}{R}.$$

Ha a feszültséget felére csökkentjük, 220 voltból 110 volt, akkor a teljesítmény a negyedére csökken, 100 wattból 25 watt:

$$25 = \frac{110^2}{R}.$$

XVIII/16. Mivel $P = U^2/R$, ha $P_0 = 200 \text{ W}$, $U_0 = 220 \text{ V}$ és $U = U_0 \pm 0,05 U_0$, akkor a minimális és maximális teljesítmény:

$$P_{\min} = \frac{(U_0 - 0,05 U_0)^2}{R} = \frac{(0,95 U_0)^2}{R} =$$

$$= 0,9025 \frac{U_0^2}{R} =$$

$$= 0,9025 \cdot 200 = 180,5 \text{ W},$$

$$P_{\max} = \frac{(U_0 + 0,05 U_0)^2}{R} = \frac{1,05 U_0^2}{R} =$$

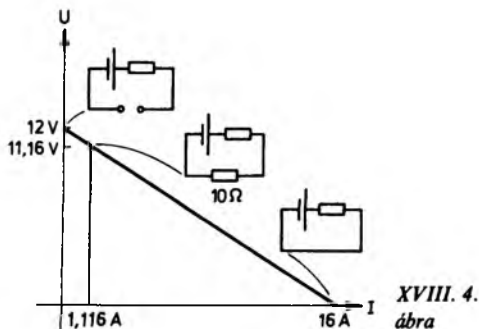
$$= 1,025 \cdot 200 = 220,5 \text{ W}.$$

A feszültség 5%-os ingadozása a teljesítmény mintegy 10%-os ingadozásával jár együtt. [A változás csak közelítőleg lineáris, addig érvényes, amíg az

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \approx 1 + 2x$$

állítás is érvényben van.]

XVIII/17. Ábrázoljuk a kapcsolcseszültség-áram függvényt! A függvény grafikon-



ja a XVIII. 4. ábrán látható egyenes, és adott két pontja a koordinátaival: (0 A, 12 V), (16 A, 0 V). A két pont koordinátái kielégítik az

$$U = -Ir + U_0$$

egyenletet:

$$12 = -0r + U_0,$$

$$0 = -16r + U_0.$$

Innen $U_0 = 12 \text{ V}$ és $r = 0,75 \Omega$. Ha a telep sarkait 10Ω -os külső ellenállással kötjük össze, akkor Ohm teljes áramkörre vonatkozó törvénye alapján:

$$12 = I(0,75 + 10),$$

azért most $I = 1,116 \text{ A}$ folyik az áramforrásból. A kapcsolcseszültség:

$$U = -1,116 \cdot 0,75 + 12 = 11,16 \text{ V}.$$

A kapcsolcseszültség most így is számolható:

$$U = IR = 1,116 \cdot 10 = 11,16 \text{ V}.$$

XVIII/18. A kapcsolcseszültség:

$$U = (U_0 - Ir)IR.$$

Ezért $18 = 50 I$, tehát $I = 0,36 \text{ A}$. Ohm törvénye a teljes áramkörre:

$$U_0 = I(R + r) = 0,36 \cdot 51 = 18,36 \text{ V}.$$

XVIII/19. A teljes áramkörre vonatkozó Ohm-törvény:

$$U_0 = I(r + R),$$

innen

$$3 = 1,25(r + 1,8),$$

ezért $r = 0,6 \Omega$. A telep teljesítménye: $P = 3 \cdot 1,25 = 3,75 \text{ W}$. A külső ellenállásra jutó teljesítmény: $P_1 = I^2 R = 2,81 \text{ W}$. A hatásfok

$$\eta = \frac{R}{r + R} = \frac{1,8}{2,4} = 0,75.$$

XVIII/20. A kapocsfeszültség:

$$U = U_0 - Ir = IR,$$

ezért

$$U_1 = U_0 - 1r = 1 \cdot 5,$$

$$U_2 = U_0 - 0,8r = 0,8 \cdot 7.$$

A két egyenlőséget vonjuk ki egymásból: $0,2r = 0,6$, tehát $r = 3 \Omega$, és $U_0 = 8 \text{ V}$.

XVIII/21. A kapocsfeszültség értelmezése alapján

$$90 = U_0 - 1r,$$

$$60 = U_0 - 2r.$$

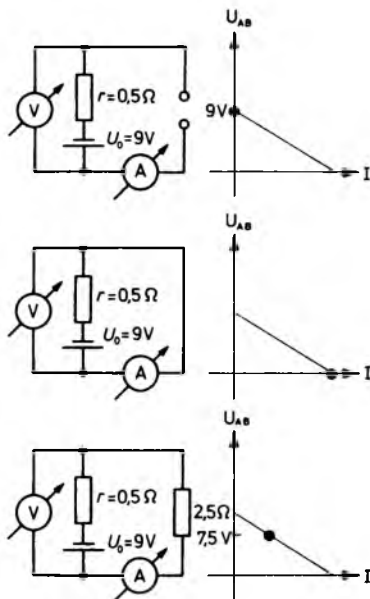
Innen $r = 30 \Omega$, és $U_0 = 120 \text{ V}$. Ha a 10 ohm terhelő ellenálláson I áramerősség folyik, akkor

$$120 = I(10 + 30),$$

ebből $I = 3 \text{ A}$, ezért $U = 3 \cdot 10 = 30 \text{ V}$ a kapocsfeszültség.

XVIII/22. Készítsünk három ábrát (XVIII. 5. ábra).

1. A kapcsoló 1. állásában az áramkör nyitott, áram nem folyik: $I_{\text{műszer}} = 0$. A belső ellenállásra jutó feszültség így nulla: $Ir = 0$. Az A és B pontok közötti feszültség ezért $U_{AB} = 9 \text{ V}$ — meg-



XVIII. 5. ábra

egyezik az elektromotoros erővel, tehát $U_{\text{műszer}} = U_0 = 9 \text{ V}$.

2. Ha a kapcsolót átállítjuk a 2. állásba, akkor a telep-t rövidre zártuk. Ohm törvénye a teljes áramkörre:

$$9 = I(0 + 0,5),$$

ezért $I = 18 \text{ A}$. Ekkora áramot mér az árammérő. A belső ellenálláson — az áram irányában — $Ir = 9 \text{ V}$ feszültség esik, így az A és B pontok között mért feszültség: $U_0 - Ir = 0 \text{ V}$!

3. A kapcsoló 3. állásában az áram átfolyik a $2,5 \text{ ohm}$ ellenálláson is:

$$9 = I(2,5 + 0,5),$$

tehát $I = 3 \text{ A}$. Ezt az áramot méri a műszer. Az A és a B pontok közötti feszültség:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= U_{\text{műszer}} = U_0 - Ir = \\ &= 9 - 3 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ V}. \end{aligned}$$

Az áramforrások törvényét szemléltető

egyenesen megjelöltük a három esetnek megfelelő pontokat.

XVIII/23. A telep 20 V feszültségéből 12 V esik az izzóra, így 8 V jut az (ún. előtét-) ellenállásra. Ha az izzón 12 V feszültség esetén 50 W a teljesítmény, akkor $I = P/U = 4,16$ A áram folyik az izzón. Ennyi áram folyik át az előtét-ellenálláson is. Az ellenállás ezért $R = 8/4,16 = 1,92 \Omega$ -os.

XVIII/24. Az R_1 és az R_2 ellenálláson megegyezik a telep teljesítménye, ha szorzatunk egyenlő a belső ellenállás négyzetével:

$$R_1 R_2 = r^2,$$

most ez azt jelenti, hogy

$$2,5 R_2 = 9,$$

tehát $R_2 = 3,6 \Omega$. A telep teljesítménye a két esetben:

$$P_1 = I_1 U_0 = \frac{U_0^2}{R_1 + r} = 26,18 \text{ W},$$

$$P_2 = I_2 U_0 = \frac{U_0^2}{R_2 + r} = 21,81 \text{ W}.$$

A két külső ellenálláson leadott teljesítmény mindkét esetben

$$P = I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2 = 11,9 \text{ W}.$$

Az első esetben a belső ellenállásra jutó teljesítményveszteség $26,18 - 11,9 = 14,28 \text{ W}$, a második esetben $9,91 \text{ W}$.

XVIII/25. A két ellenállás eredője:

$$R_* := R_1 + R_2 = 10 \Omega,$$

ha sorosan kapcsoljuk egymáshoz. A párhuzamos kapcsoláshoz tartozó eredő legyen R^* . Ekkor

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Innen

$$R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,6 \Omega.$$

(Jegyezzük meg: ha két ellenállást párhuzamosan kötünk, akkor az eredőjüket megkapjuk, ha a szorzatukat elosztjuk az összegükkel.) A belső ellenállás négyzete

$$r^2 = R_* R^*,$$

ezért $r = 4 \Omega$. A hatásfok az első, illetve a második esetben:

$$\eta_1 = \frac{1,6}{5,6} = 0,28,$$

$$\eta_2 = \frac{10}{14} = 0,71.$$

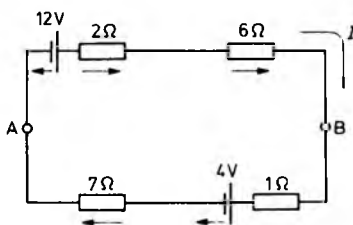
XVIII/26. A XVIII. 6. ábrán bejelöltük a két telepen a belső feszültség irányát. Az áramirányt a 12 voltos telep szabja meg: az óramutató járásával megegyező irányban folyik az áram. Az ellenállásokon eső feszültségek iránya is ez. A huroktörvény:

$$-12 + 2I + 6I + 1I + 4 + 7I = 0.$$

Innen $16 \cdot I = 8$, ezért $I = 0,5$ A. Az A pontból a B-be haladjunk a felső úton:

$$U_{AB} = -12 + 2 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 = -8 \text{ V}.$$

A feszültségesés negatív, vagyis a B pont felé haladva a feszültség nő: a B pont 8 V-tal magasabb potenciálon van, mint az A



XVIII. 6. ábra

pont. A két telep kapocsfeszültsége:

$$U_{k1} = 12 - 0,5 \cdot 2 = 11 \text{ V},$$

$$U_{k2} = 4 + 0,5 \cdot 1 = 4,5 \text{ V}.$$

XVIII/27. Először bejelöljük a telepek feszültségeit. Majd feltüntetjük az áramirányt, az óra mutatójának járásának megfelelő irányú. Ezután az ellenállásokra rárajzoljuk a feszültségesést jelölő nyilakat (XVIII. 7. ábra). Írjuk fel a huroktörvényt:

$$3I - 10 + I - 8 + I + 6I + 1I + 6 = 0.$$

(Kirchhoff második törvényét ellenállások és feszültségek konkrét értékével írtuk fel. Egyetlen elvi szempont sem szól amellett, hogy paraméteresen írjuk fel a törvényt és azután helyettesítsük be.) Tehát $I = 1 \text{ A}$. A feszültségesések:

$$U_{AB} = -6 - 1 = -7 \text{ V},$$

$$U_{AC} = -6 - 1 - 6 = -13 \text{ V},$$

$$U_{AD} = -6 - 1 - 6 - 1 + 8 = -6 \text{ V},$$

$$U_{AE} = -6 - 1 - 6 - 1 + 8 - 1 + 10 = 3 \text{ V}.$$

Nilvánvaló, hogy

$$U_{AB} = R_1 I = 3 \text{ V}.$$

XVIII/28. A szokásos előkészítő lépések után a XVIII. 8. ábra alapján felírjuk a huroktörvényt:

$$10I + 20I - 10 + 2I + 1I + 5 = 0,$$

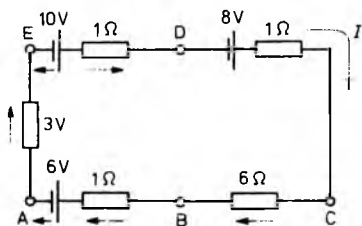
ezért $I = 5/33 = 0,151 \text{ A}$. Az A és B pont közötti feszültség:

$$U_{AB} = 20 \cdot 0,151 - 10 + 2 \cdot 0,151 = -6,66 \text{ V}.$$

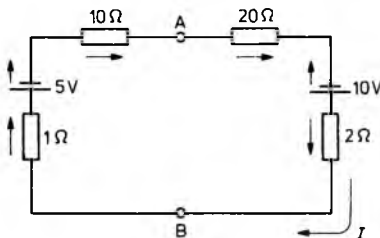
A B pont 6,66 voltal magasabb potenciálon van, mint az A pont.

XVIII/29. A XVIII. 9. ábrán látható A és B pontok közötti feszültség:

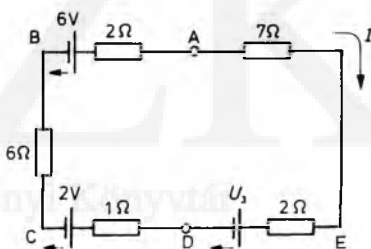
$$U_{AB} = 5 = 6 - 2I,$$



XVIII. 7. ábra



XVIII. 8. ábra

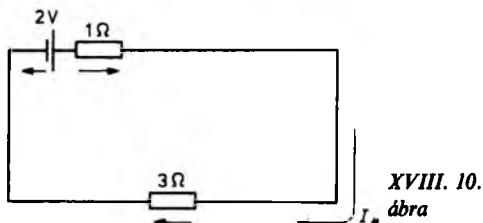
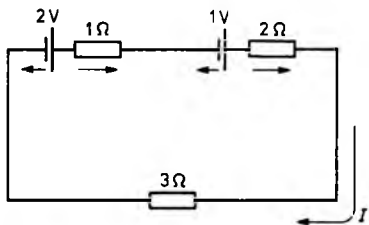


XVIII. 9. ábra

így $I = 0,5 \text{ A}$. A huroktörvényben egyetlen ismeretlen szerepel, a D és az E közé beiktatott telep U_3 elektromotoros ereje. A telep polaritását úgy jelöljük ki, hogy a pozitív pólusa az E pont felé nézzen. Ekkor

$$7I + 2I + U_3 + 1I + 2 + 6I - 6 + 2I = 0,$$

ezért $U_3 = -5 \text{ V}$. A D és az E pontok közé beiktatott telep elektromos ereje 5 V, polaritása ellentétes a bejelölt iránnyal: pozitív sarka valójában a D pont felé mutat.



XVIII. 10. ábra

XVIII/30. A XVIII. 10. ábra felső része alapján a huroktörvény:

$$-2 + 1I - 1 + 2I + 3I = 0,$$

ezért $I = 0,5$ A. A két telep kapcsolófeszültsége:

$$U_{k1} = 2 - 1 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ V},$$

$$U_{k2} = 1 - 2 \cdot 0,5 = 0 \text{ V}.$$

A második telep úgy működik, mintha rövidre zárnánk. A két telep teljesítménye:

$$P_1 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ W}, \quad P_2 = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ W}.$$

Az R ellenállásra jutó teljesítményt hasznos teljesítménynek tekintjük:

$$P = I^2 R = 0,5^2 \cdot 3 = 0,75 \text{ W}.$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{0,75}{1 + 0,5} = 0,5.$$

Távolítsuk el most a második telepet (XVIII. 10. ábra alsó része). Ekkor a huroktörvény az

$$1I_* - 2 + 3I_* = 0$$

egyenlőség fejezi ki, ahol I_* a második telep eltávolítása után a körben folyó áram. Így $I_* = 0,5$ A, ez azonban azt jelenti, hogy az áramkör árama nem változik. Nem változik azonban az első telep kapcsolófeszültsége, teljesítménye sem:

$$U_{k1} = 2 - 0,5 \cdot 1 = 1,5 \text{ V},$$

$$P_1 = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ W}.$$

A P ellenállásra jutó teljesítmény sem változik:

$$P = I^2 R = 0,75 \text{ W}.$$

A hatásfok azonban nem marad állandó:

$$\eta_* = \frac{0,75}{1} = 0,75.$$

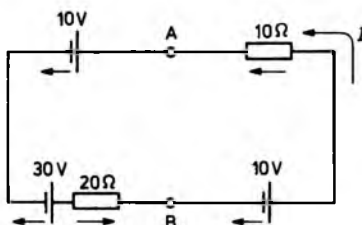
A rendszer hatásfoka nő.

XVIII/31. Ha a műszer ellenállása „végtelen nagy”, akkor az áramkörben nincs szerepe. Az áramkört ábrázoló vázlaton (XVIII. 11. ábra) nem szükséges a műszert feltüntetni. Jelöljük be a telepek üresjárás feszültségét, az áramirányt és az ellenállásokon erő feszültségeket. A huroktörvényt az

$$10 - 30 + 20I - 10 + 10I = 0$$

egyenlet fejezi ki. (A feszültségeket az A pontból kiindulva számoltuk össze.) Tehát: $I = 1$ A. Az A és B pontok közötti feszültség:

$$U_{AB} = 10 - 30 + 20 = -10 + 10 = 0 \text{ V}.$$



XVIII. 11. ábra

Az A és B pontok közé beiktatott műszer nulla feszültséget mutat.

XVIII/32. Az áramkörben nincs szerepe a feszültségmérő műszernek. Az a kérdés, hogy mit mutat a (végtelen nagy belső ellenállású) voltmérő, azonos azzal a kérdéssel, hogy mekkora a feszültség a műszer A és B bekötési pontjai között (XVIII. 12. ábra). A huroktörvény:

$$10 + 20I - 40 + 10I = 0,$$

így $I = 1$ A, és

$$U_{AB} = 10 + 20 = -10 + 40 = 30 \text{ V}.$$

XVIII/33. A huroktörvény:

$$2 - 8I + 5 - 6I = 0.$$

Így $I = 0,5$ A, és $U_{AB} = 2 - 0,5 \cdot 8 = -2$ V. A műszer 2 volt feszültséget mutat (XVIII. 13. ábra).

XVIII/34. Krichhoff második törvénye:

$$-30 + 2I + 3I + 1I + 18 = 0,$$

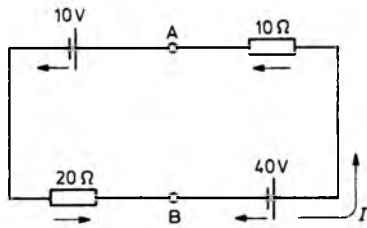
ezért $I = 2$ A. A 3 ohmos ellenálláson $3 \cdot 2 = 6$ V esik. Az A és B pontok között $U_{AB} = -30 + 4 = -26$ V feszültség van, a B pont magasabb potenciálú. Ha a két pont közé egy $10 \mu\text{F}$ -os kondenzátort iktatunk, akkor ez $260 \mu\text{C}$ töltéssel rendelkezik, a B pont felé eső lemez lesz pozitív (XVIII. 14. ábra).

XVIII/35. Jelöljük be telepeken az üresjárási feszültséget, az áramirányt (csak a külső keretben folyik áram), az ellenállásokon eső feszültségeket, a kondenzátorok töltését és a lemezek közötti feszültségcsökkenés irányát (XVIII. 15. ábra). Három huroktörvényt írunk fel:

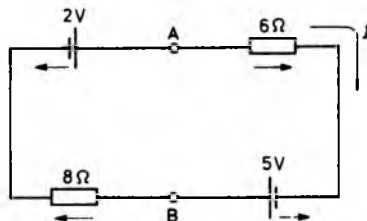
$$-30 + 2I + 3I + 1I + 18 = 0,$$

a jobb oldali hurokra:

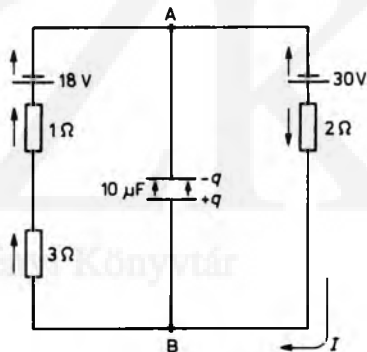
$$-30 + 2I + \frac{q_1}{2} = 0,$$



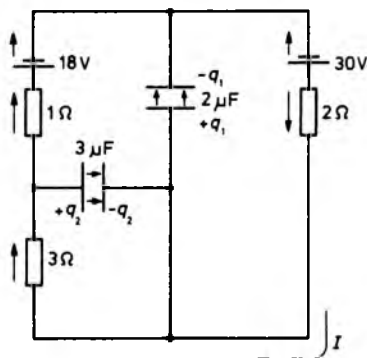
XVIII. 12. ábra



XVIII. 13. ábra



XVIII. 14. ábra



XVIII. 15. ábra

és a bal oldali alsó hurokra:

$$3I + \frac{q_2}{3} = 0.$$

Az első egyenletből $I = 2$ A. A második egyenletből $q_1 = 52 \mu\text{C}$, a harmadik egyenletből pedig $q_2 = -18 \mu\text{C}$. A második kondenzátor polaritása ellentétes a feltételezéssel: a pozitív lemeze jobbra esik. (A 3Ω -os ellenálláson most is 6 V esik.)

XVIII/36. Most is jelöljük be a telepek üresjárási feszültségeit, az áramirányt, az áramiránynak megfelelően az ellenállásokon eső feszültségeket, a kondenzátorok töltését, a kondenzátorok feszültségeit (XVIII. 16. ábra). Ezután írjuk fel a csomóponti törvénynek megfelelő töltésmegmaradást kifejező egyenletet:

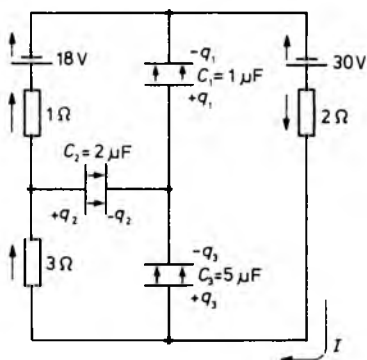
$$q_1 - q_2 - q_3 = 0. \quad (1)$$

és a huroktörvényt kifejező összefüggéseket:

$$-30 + 2I + 3I + 1I + 18 = 0, \quad (2)$$

$$-30 + 2I + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_1}{C_1} = 0, \quad (3)$$

$$3I + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} = 0. \quad (4)$$



XVIII. 16.
ábra

A (2) egyenletből $I = 2$ A. Helyettesítsünk be és rendezzük az (1), (3), (4) egyenleteket:

$$\frac{q_1}{1} + \frac{q_3}{5} = 26, \quad (5)$$

$$\frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{5} = -6. \quad (6)$$

Szorozzuk meg az (5) egyenletet 5-tel, a (6) egyenletet 10-zel. Ekkor

$$5q_1 + q_3 = 130, \quad (7)$$

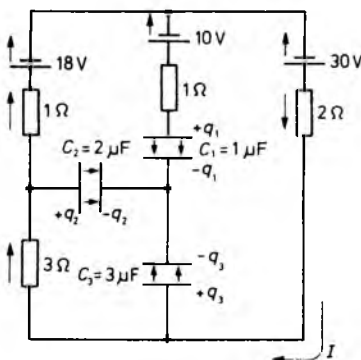
$$5q_2 - 2q_3 = -60. \quad (8)$$

Adjuk most össze az (1) egyenlet -5 -szörösét, a (8) egyenlet -1 -szeresét és a (7) egyenletet. Ekkor azt kapjuk, hogy $q_3 = 23,75 \mu\text{C}$. Visszahelyettesítve: $q_2 = -2,5 \mu\text{C}$, $q_1 = 21,25 \mu\text{C}$.

XVIII/37. A 10 V-os, 1Ω belső ellenállású telepen nem folyik áram. A belső ellenállására nem jut feszültség. A telep kapocsfeszültsége így 10 V. A huroktörvényt és a töltésmegmaradást kifejező egyenlőségek (XVIII. 17. ábra):

$$-q_1 - q_2 - q_3 = 0, \quad (1)$$

$$-30 + 2I + 3I + 1I + 18 = 0, \quad (2)$$



XVIII. 17.
ábra

$$-30 + 2I + \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1} + 10 = 0, \quad (3)$$

$$3I + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_2} = 0. \quad (4)$$

Figyeljünk fel arra, hogy a 10 voltos telep csak a (3) egyenletében kap szerepet. A négy egyenletből:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0,$$

$$-q_1 + \frac{q_3}{3} = 16,$$

$$\frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{3} = -6.$$

Innen

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0,$$

$$q_3 - 3q_1 = 48,$$

$$3q_2 - 2q_3 = -36.$$

Az első egyenlet kétszereséhez adjuk hozzá a harmadikat, ekkor

$$2q_1 + 5q_2 = -36.$$

Most adjuk össze a három egyenletet:

$$-2q_1 + 4q_2 = 12.$$

Az így kapott két egyenletet összeadjuk:

$$9q_2 = -24.$$

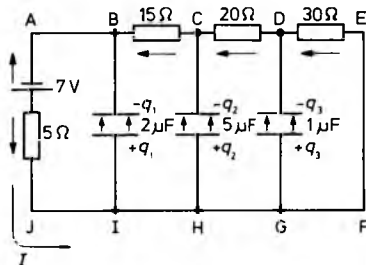
Így $q_2 = 2,66 \mu\text{C}$, visszahelyettesítve: $q_1 = -11,3 \mu\text{C}$, $q_3 = 14 \mu\text{C}$.

XVIII/38. Az elektromos „hálózatnak” csak a peremében folyik áram. A huroktörvény az *XVIII. 18. ábrán* látható AEFJ hurokra:

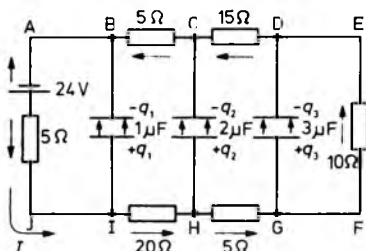
$$-15I - 20I - 30I - 5I + 7 = 0.$$

Az ABIJ hurokra:

$$-\frac{q_1}{2} - 5I + 7 = 0.$$



XVIII. 18. ábra



XVIII. 19. ábra

Az ACHJ hurokra:

$$-15I - \frac{q_2}{5} - 5I + 7 = 0.$$

Az ADGJ hurokra:

$$-15I - 20I - \frac{q_3}{1} - 5I + 7 = 0.$$

Mivel $I = 0,1 \text{ A}$, ezért $q_1 = 13 \mu\text{C}$, $q_2 = 25 \mu\text{C}$, és végül $q_3 = 3 \mu\text{C}$.

XVIII/39. Krichhoff második törvénye a *XVIII. 19. ábrán* látható AEFJ hurokra:

$$-5I - 15I - 10I - 5I - 20I - 5I + 24 = 0,$$

az ABIJ hurokra:

$$-\frac{q_1}{1} - 5I + 24 = 0,$$

az ACHJ hurokra:

$$-5I - \frac{q_2}{2} - 20I - 5I + 24 = 0,$$

a DEFG hurokra:

$$-10I + \frac{q_3}{3} = 0.$$

Az első egyenletből $I=0,4$ A. Így $q_1 = 22 \mu\text{C}$, $q_2 = 24 \mu\text{C}$, $q_3 = 12 \mu\text{C}$.

XVIII/40. Jelöljük be a *XVIII. 20. ábrán* a telep sarkai között a feszültséget, a kondenzátorlemezek töltését, a kondenzátorlemezek között fellépő feszültségesést. A huroktörvényt a

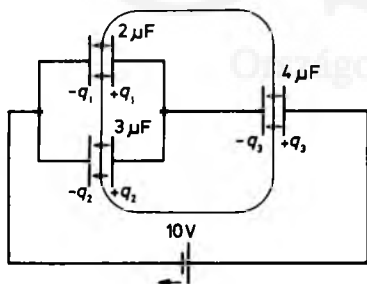
$$-10 + \frac{q_3}{4} + \frac{q_1}{2} = 0,$$

$$-10 + \frac{q_3}{4} + \frac{q_2}{3} = 0,$$

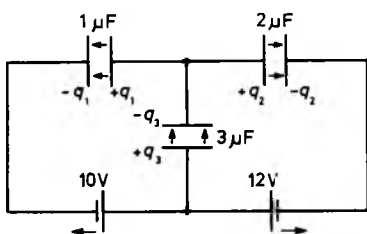
egyenlőségek fejezik ki. A töltésmegmaradás elve a

$$-q_3 + q_2 + q_1 = 0$$

formában fogalmazható meg. A három



XVIII. 20. ábra



XVIII. 21. ábra

egyenlet így alakítható át:

$$2q_1 + q_3 = 40,$$

$$4q_2 + 3q_3 = 120,$$

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0.$$

Szorozzuk meg most az első egyenletet 2-vel és adjuk hozzá a másodikhoz:

$$4(q_1 + q_2) + 5q_3 = 200$$

és mert $q_3 = q_1 + q_2$, ezért

$$4q_3 + 5q_3 = 200,$$

azaz $q_3 = 200/9 = 22,2 \mu\text{C}$. Visszahelyettesítve: $q_1 = 8,8 \mu\text{C}$, $q_2 = 13,3 \mu\text{C}$.

XVIII/41. A *XVIII. 21. ábrán* látható jelöléseket felhasználva két huroktörvényt írunk fel, és megfogalmazzuk a töltésmegmaradás elvét:

$$10 - \frac{q_1}{1} - \frac{q_3}{3} = 0,$$

$$12 - \frac{q_2}{2} - \frac{q_3}{3} = 0,$$

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0,$$

innen

$$3q_1 + q_3 = 30,$$

$$3q_2 + 2q_3 = 72,$$

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0.$$

Adjuk össze az első két egyenletet és vegyük figyelembe, hogy a harmadik alapján $q_3 = q_1 + q_2$.

$$3(q_1 + q_2) + 3q_3 = 102,$$

$$6q_3 = 102,$$

ezért $q_3 = 17 \mu\text{C}$, így — visszahelyettesítve — $q_1 = 4,3 \mu\text{C}$, $q_2 = 12,6 \mu\text{C}$. A kondenzátorokon mérhető feszültség: $U_1 = q_1/C_1 = 4,3 \mu\text{C}/1 \mu\text{F} = 4,3 \text{ V}$, $U_2 = 6,3 \text{ V}$, $U_3 = 5,6 \text{ V}$.

XVIII/42. Jelöljük be a *XVIII. 22. ábrán* a telep elektromotoros erejét, az áramirányt és az ellenállásokon eső feszültséget. A kondenzátorok lemezein kialakuló töltéseloszlást feltüntetve a lemezek között kialakuló feszültséget is ábrázoljuk. A töltésmegmaradást a

$$q_1 - q_2 = 0$$

egyenlőség fejezi ki, a vázlatosan ábrázolt zárt felületen belül az összes töltés nulla, ezért

$$q_1 = q_2 =: q,$$

vagyis a kondenzátorlemezek töltése azonos. Így a két huroktörvényt kifejező egyenlet:

$$-100 + 100I + 200I + 700I = 0,$$

$$-100 + 100I + \frac{q}{6} + \frac{q}{2} = 0.$$

Innen $I = 0,1$ A, és $q = 135 \mu\text{C}$.

XVIII/43. A huroktörvény alkalmazása a *XVIII. 23. ábrán* látható három hurokra:

$$-100 + 100I + 100I + 100I = 0,$$

$$700I - \frac{q_1}{6} = 0,$$

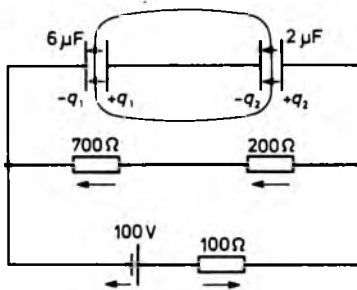
$$200I - \frac{q_2}{2} = 0.$$

Innen $I = 0,33$ A, $q_1 = 200 \mu\text{C}$, $q_2 = 66,67 \mu\text{C}$.

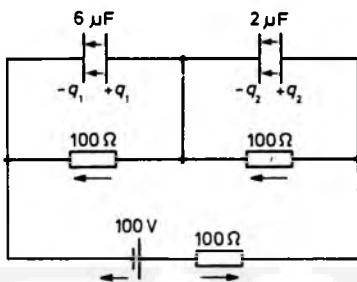
XVIII/44. Legyen először a kapcsoló nyitva (*XVIII. 24. ábra* a jelű része). Ekkor a töltésmegmaradás azt jelenti, hogy a két kondenzátor töltése azonos, jelöljük ezt q -val. Ezért — Kirchhoff második törvénye szerint —

$$-100 + 800I + 200I = 0,$$

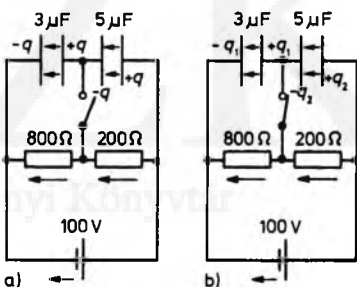
$$-100 + \frac{q}{3} + \frac{q}{5} = 0.$$



XVIII. 22. ábra



XVIII. 23. ábra



XVIII. 24. ábra

Innen egyrészt $I = 0,1$ A, másrészt $q = 187,5 \mu\text{C}$.

Ha a kapcsoló zárt (*XVIII. 24. ábra* b része), akkor a huroktörvényt a három hurokra írjuk fel:

$$-100 + 800I + 200I = 0,$$

$$800I - \frac{q_1}{3} = 0,$$

$$200I - \frac{q_2}{5} = 0.$$

Innen $I = 0,1 \text{ A}$, $q_1 = 240 \text{ } \mu\text{C}$, $q_2 = 100 \text{ } \mu\text{C}$. A két belső lemez össztöltése most $q_1 + (-q_2) = 140 \text{ } \mu\text{C}$. A kapcsoló zárása előtt ez nulla volt. Így a kapcsolón $140 \text{ } \mu\text{C}$ töltés áramlott a kondenzátor felé.

XVIII/45. Az A csomóponthoz befolyó I áram I_1 és I_2 erősségű ágakra oszlik (XVIII. 25. ábra):

$$I = I_1 + I_2.$$

A huroktörvény egyrészét

$$-42 + 1I + 6I_1 + 8I = 0,$$

és másrészt

$$-42 + 1I + 2I_2 + 8I = 0.$$

Így

$$9(I_1 + I_2) + 6I_1 = 42,$$

$$9(I_1 + I_2) + 2I_2 = 42,$$

és

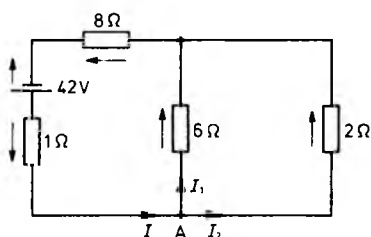
$$15I_1 + 9I_2 = 42,$$

$$9I_1 + 11I_2 = 42.$$

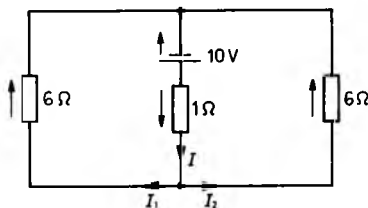
Az első egyenlet 11-szereséből vonjuk ki a második egyenlet 9-szeresét:

$$84I_1 = 84,$$

ezért $I_1 = 1 \text{ A}$, visszahelyettesítve: $I_2 = 3 \text{ A}$, $I = 4 \text{ A}$. A teljesítmények: $P_1 = 4^2 \cdot 8 = 128 \text{ W}$, $P_2 = 1^2 \cdot 6 = 6 \text{ W}$, $P_3 = 3^2 \cdot 2 =$



XVIII. 25. ábra



XVIII. 26. ábra

$= 18 \text{ W}$. A három ellenállásra összesen:

$$128 + 6 + 18 = 152 \text{ W}$$

teljesítmény jut. A teljesítmények összeadódhatnak, akár sorosan, akár párhuzamosan kapcsoltuk az ellenállásokat!

XVIII/46. A telepen átfolyó I áram két ágra válik, az egyik I_1 , a másik I_2 (XVIII. 26. ábra). Ezért

$$I = I_1 + I_2.$$

Kirchhoff II. törvénye a két hurokra:

$$-10 + 1I + 6I_1 = 0,$$

$$-10 + 1I + 6I_2 = 0.$$

Ez a két egyenlet — figyelembe véve a csomóponti törvényt — így alakul:

$$1(I_1 + I_2) + 6I_1 = 10,$$

$$1(I_1 + I_2) + 6I_2 = 10,$$

vagyis

$$7I_1 + I_2 = 10,$$

$$I_1 + 7I_2 = 10.$$

Innen $48I_2 = 60$, $I_2 = 1,25 \text{ A}$. Hasonlóan $I_1 = 1,25 \text{ A}$, ezért $I = 2,5 \text{ A}$.

XVIII/47. Az A pontba befolyó áram: az első telep felől I_1 , a második telep felől I_2 (XVIII. 27. ábra). A 10 ohm ellenálláson folyó áram I , ezért

$$I = I_1 + I_2.$$

A két hurokra vonatkozó Kirchhoff-féle második törvény:

$$10I + 2I_1 - 6 = 0,$$

$$10I + 2I_2 - 8 = 0.$$

Rendezzük ezt a két egyenletet és vegyük figyelembe Kirchhoff csomóponti törvényét:

$$12I_1 + 10I_2 = 6,$$

$$10I_1 + 12I_2 = 8.$$

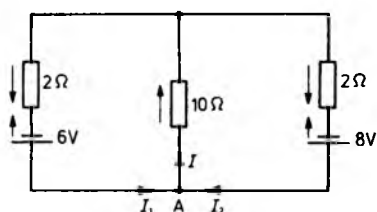
Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

$$I_2 = \frac{36}{44} = 0,81 \text{ A}, \quad I_1 = -0,18 \text{ A},$$

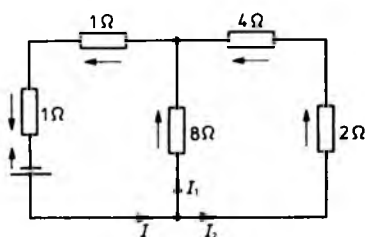
ezért $I = 0,636 \text{ A}$. Az első telepen a feltételezéssel ellentétes irányú áram folyik. Figyeljünk fel arra, hogy mindkét telep kapcsolófeszültsége $6,36 \text{ V}$, megegyezik az R ellenálláson eső feszültséggel.

XVIII/48. A telepen átfolyó áram az I_1 és I_2 ágakra oszlik (*XVIII. 28. ábra*):

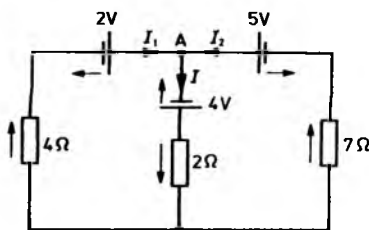
$$I = I_1 + I_2.$$



XVIII. 27. ábra



XVIII. 28. ábra



XVIII. 29. ábra

Felírjuk a két hurokra vonatkozó Kirchhoff-féle második törvényt:

$$1I - U + 8I_1 + 1I = 0,$$

$$I_2 2 + 4I_2 - 8I_1 = 0.$$

Negyedik egyenletnek tekintjük a

$$32 = 8I_1^2$$

egyenlőséget. Innen $I_1 = 2 \text{ A}$, ezért $I_2 = 16/6 = 2,66 \text{ A}$, $I = 4,66 \text{ A}$, $U = 25,34 \text{ V}$.

XVIII/49. A telepek feszültségét a *XVIII. 29. ábrán* látható módon bejelöljük. Tegyük fel, hogy az A pontba I_1 és I_2 folyik be, a függőleges ágon I folyik az ábra szerint. A Kirchhoff-törvények a két hurokra és a csomópontra:

$$2I + 4I_1 - 2 - 4 = 0,$$

$$2I + 7I_2 - 5 - 4 = 0,$$

$$I_1 + I_2 = I.$$

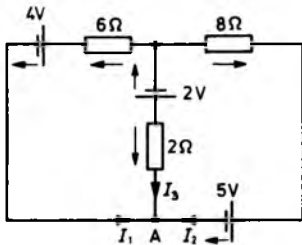
Innen

$$6I_1 + 2I_2 = 6,$$

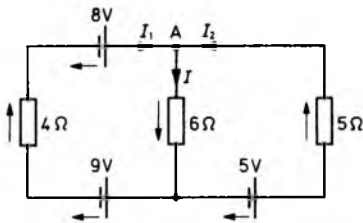
$$2I_1 + 9I_2 = 9.$$

Azt kapjuk, hogy $I_1 = 0,76 \text{ A}$, $I_2 = 0,84 \text{ A}$, $I = 1,56 \text{ A}$.

XVIII/50. A *XVIII. 30. ábrán* látható módon jelöljük be a telepeken az üresjárási feszültséget, és tegyük fel, hogy az A pontba befolyó áramok: I_1 , I_2 , I_3 . Mindhárom áramot úgy irányítjuk, hogy akkor pozitív az áram, ha a csomópontba befolyik. A



XVIII. 30.
ábra



XVIII. 31.
ábra

csomóponti törvény:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

a két hurokra vonatkozó egyenlet:

$$+5 - 8I_2 - 2 + 2I_3 = 0,$$

$$-2I_3 + 2 + 6I_1 + 4 = 0.$$

Innen

$$2I_1 + 10I_2 = 3,$$

$$8I_1 + 2I_2 = -6.$$

Eredményül azt kapjuk, hogy

$$I_1 = -\frac{33}{38} \text{ A}, \quad I_2 = \frac{18}{38} \text{ A}, \quad I_3 = \frac{15}{38} \text{ A}.$$

A csomópontba két áram folyik be, az I_1 iránya a feltételezéssel ellentétes: a 6Ω -os ellenálláson nem a 4 V -os telep felé folyik a $33/38 \text{ A}$ erősségű áram. A három ellenálláson $P_1 = 4,52 \text{ W}$, $P_2 = 1,77 \text{ W}$, $P_3 = 0,32 \text{ W}$ a teljesítmény.

XVIII/51. Tegyük fel, hogy az A-val jelölt csomópontba — XVIII. 31. ábra szerint — befolyik az I_1 és az I_2 erősségű

áram, és a 6Ω -os ellenálláson kifolyik az I erősségű áram. Ekkor a Kirchhoff-törvények az

$$I = I_1 + I_2,$$

$$6I - 5 + 5I_2 = 0,$$

$$6I + 9 + 4I_1 - 8 = 0$$

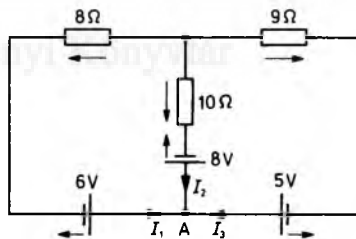
formát öltik. Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = -0,554 \text{ A}$, $I_2 = 0,756 \text{ A}$, $I = 0,203 \text{ A}$.

XVIII/52. Irányítsuk a XVIII. 32. ábrának megfelelően az áramerősségeket úgy, hogy mindegyik befolyik az A csomópontba. (A számolás eredményeként azt kapjuk, hogy ezek közül az áramok közül egy vagy kettő negatív lesz. Ezek kifelé folynak.) A Kirchhoff-törvények szerint

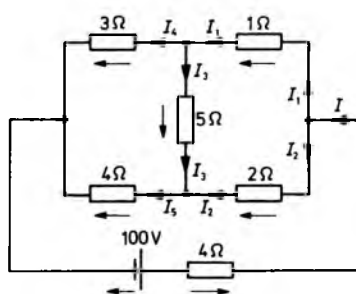
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$6 - 8I_1 + 10I_2 - 8 = 0,$$

$$5 - 9I_3 + 10I_2 - 8 = 0.$$



XVIII. 32.
ábra



XVIII. 33.
ábra

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = -0,033 \text{ A}$, $I_2 = 0,173 \text{ A}$, $I_3 = -0,140 \text{ A}$.

XVIII/53. A *XVIII. 33. ábrán* látható jelöléseknek megfelelően:

$$I = I_1 + I_2, \quad (1)$$

$$I_1 = I_3 + I_4, \quad (2)$$

$$I_5 = I_3 + I_2, \quad (3)$$

$$-100 + 4I + I_1 + 3I_4 = 0, \quad (4)$$

$$-100 + 4I + 2I_2 + 4I_5 = 0, \quad (5)$$

$$I_1 + 5I_3 - 2I_2 = 0. \quad (6)$$

Az (1), (2) és (3) egyenletek segítségével a (4) és (5) egyenletbe helyettesítjük I -t, I_4 -et és I_5 -öt! Ekkor rendezés után:

$$8I_1 + 4I_2 - 3I_3 = 100, \quad (7)$$

$$4I_1 + 10I_2 + 4I_3 = 100. \quad (8)$$

A (6) egyenletből fejezzük ki I_1 -t, és helyettesítsünk ezt be a (7) és a (8) egyenletbe:

$$20I_2 - 43I_3 = 100, \quad (9)$$

$$18I_2 - 16I_3 = 100. \quad (10)$$

A (9) egyenlet 16-szorosát vonjuk ki a (10) egyenlet 43-szorosából. Ekkor azt kapjuk, hogy

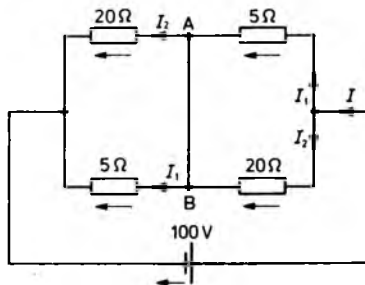
$$454I_2 = 2700,$$

így $I_2 = 5,94 \text{ A}$. Ezután egyszerű visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $I_3 = 0,440 \text{ A}$, $I_1 = 9,69 \text{ A}$, $I = I_1 + I_2 = 15,64 \text{ A}$, $I_4 = I_1 - I_3 = 9,25 \text{ A}$, $I_5 = I_2 + I_3 = 6,35 \text{ A}$. A feszültségek: $U_1 = 9,69 \text{ V}$, $U_2 = 11,9 \text{ V}$, $U_3 = 2,2 \text{ V}$, $U_4 = 27,75 \text{ V}$, $U_5 = 25,56 \text{ V}$.

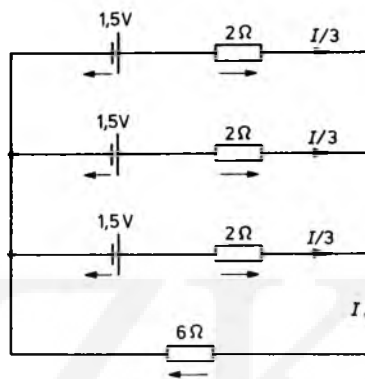
XVIII/54. Az R_1 ellenálláson folyó áramot jelöljük I_1 -gyel, az R_2 -n folyót I_2 -vel. Ekkor a huroktörvényt a *XVIII. 34. ábrán* látható két L alakú hurokra írjuk fel:

$$-100 + 20I_1 + 20I_1 = 0,$$

$$-100 + 5I_2 + 5I_2 = 0.$$



XVIII. 34. ábra



XVIII. 35. ábra

Innen $I_1 = 2,5 \text{ A}$, $I_3 = 10 \text{ A}$. Az A és a B pontok között tehát $I_2 - I_1 = 7,5 \text{ A}$ folyik „lefelé”.

XVIII/55. Mindegyik telepen azonos áram folyik át, az R ellenálláson átáramló harmada. Ezzel a csomóponti törvényt figyelembe vettük. A huroktörvényt most a

$$-1,5 + 2 \frac{I}{3} + 6I = 0$$

egyetlen egyenlet fejezi ki (*XVIII. 35. ábra*), hiszen a három telep teljesen szimmetrikus szerepet játszik! Így $I = 0,225 \text{ A}$. A telepek teljesítménye egyaránt

$$P = U_0 \frac{I}{3} = 1,5 \frac{0,225}{3} = 0,1125 \text{ W}.$$

A három telep együttes teljesítménye:

$$P_0 = 3 \cdot 0,1125 = 0,3375 \text{ W}.$$

Az ellenállásra jutó teljesítmény:

$$P_1 = 3 \cdot 0,225^2 = 0,30375 \text{ W}.$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{0,30375}{0,3375} = 0,9.$$

XVIII/56. A huroktörvény most a

$$-1,5 + 2I - 1,5 + 2I - 1,5 + 2I + 6I = 0$$

formában fogalmazható meg. Innen $I = 0,375 \text{ A}$. A telepek teljesítménye egyenként:

$$P = UI = 1,5 \cdot 0,375 = 0,5625 \text{ W},$$

a három telep összes teljesítménye:

$$P_0 = 1,6875 \text{ W}.$$

Az ellenállásra jutó teljesítmény:

$$P_1 = I^2 R = 0,8437 \text{ W}.$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{0,8437}{1,6875} = 0,5.$$

XVIII/57. Vegyük észre, hogy az első blokkban látható két ellenállás párhuzamosan van kapcsolva. Ennek a résznek az eredő ellenállása: $1/7 \Omega$. A rendszer eredője:

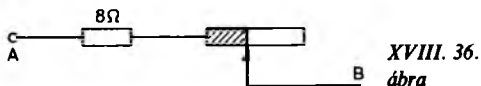
$$R_e = \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2} = 1,64 \Omega.$$

XVIII/58. A változtatható ellenállás csúszkától jobbra eső részét — a *XVIII. 36. ábrán* — akár el is távolíthatnánk. Ha R_x 2 és 10Ω között változhat, akkor az eredő $8 + 2 \Omega$ és $8 + 10 \Omega$ közötti értékeket veheti fel, tehát

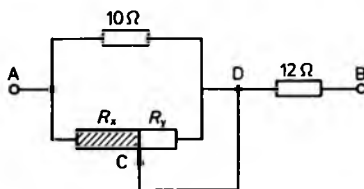
$$10 \Omega \leq R_e \leq 18 \Omega.$$

XVIII/59. Az R_x és R_y eredője:

$$R_e = R_x + R_y,$$



XVIII. 36. ábra



XVIII. 37. ábra

hiszen a két rész soros kapcsolással csatlakozik egymáshoz. Mivel $1 \Omega \leq R_x \leq 10 \Omega$ és $1 \Omega \leq R_y \leq 10 \Omega$ ezért

$$2 \Omega \leq R_e \leq 20 \Omega.$$

XVIII/60. Az R_x és az R_y részellenállások párhuzamosan kapcsolódnak egymáshoz. Az eredő reciproka:

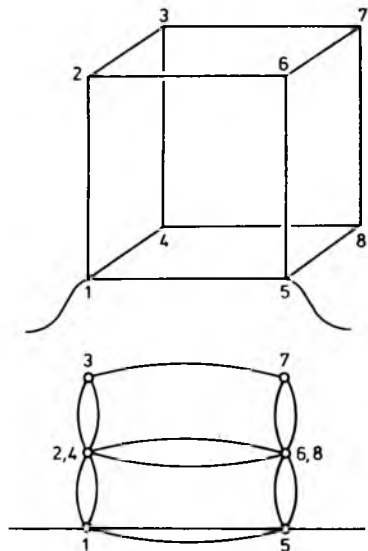
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y},$$

ezért az R_e legkisebb értéke $0,5 \Omega$. Ezt akkor kapjuk, ha $R_x = R_y = 1 \Omega$. Ha az $R_x = R_y = 10 \Omega$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor $R_e = 5 \Omega$, ez az eredő legnagyobb értéke.

XVIII/61. A csúszka R_x és R_y ellenállásokra osztja az R ellenállást. A *XVIII. 37. ábráról* látható, hogy a C és D pontok közötti potenciál különbsége nulla, ezért az R_y ellenállást kiiktatjuk. Ebből látszik, hogy az A és a B pontok közötti eredő ellenállás azonos R_1 és R_x párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének és R_2 -nek az összegével:

$$R_{AB} = \frac{R_x R_1}{R_x + R_1} + R_2.$$

$$R_e = \frac{R_x R_1}{R_x + R_1} + R_2.$$



XVIII. 38.
ábra

Az eredő értéke $12\ \Omega$ és $17\ \Omega$ között változik.

XVIII/62. Az R_1 és R_2 ellenállásokat az A és B pontok között rövidrezárással kiiktattuk. A két ellenállás két-két vége azonos potenciál van. Az eredő $R_e = R_3$.

XVIII/63. Az 1 pontból nézve a 2 és a 4 pontok azonos potenciálúak, az 5-ből nézve a 6 és a 8 pontok potenciálja azonos. A 2 és a 4, illetve a 6 és a 8 pontokat összekötjük vagy egy pontba összefogjuk, akkor a XVIII. 38. ábrán látható rendszert kapjuk. Lépésről-lépésre összevonva azt kapjuk, hogy $R_e = 10/12 = 0,83\ \Omega$.

XVIII/64. Az 5 és 8, valamint a 2 és a 3 pontok között nem folyik áram (XVIII. 39. ábra). (Ha például 8-ból 5-be folya áram, akkor 3-ból 2-be ugyanannyi folya. Az azt jelentené, hogy az 5 és 6 közötti, valamint a 2 és 3 közötti ellenálláson nagyobb áram folya, mint az 1 és 5, illetve 1 és 2 közötti szakaszon. Ez ellentmond az 5-2-3-8 síkra vonatkozó szimmetriának.) Az 5 és 8, a 2 és 3 közötti ellenállásokat most elhagyjuk. Fokozatosan összevo-

násokkal azt kapjuk, hogy $R_e = 3/4 = 0,75\ \Omega$.

XVIII/65. Ha a $1000\ \Omega$ ellenállású műszerre 5 V feszültség jut, akkor a sorbakapcsolt $1000 + 9000 = 10\,000\ \Omega$ ellenállásra 50 V kapcsolható. A műszer méréshatárát 10-szeresre terjesztettük ki.

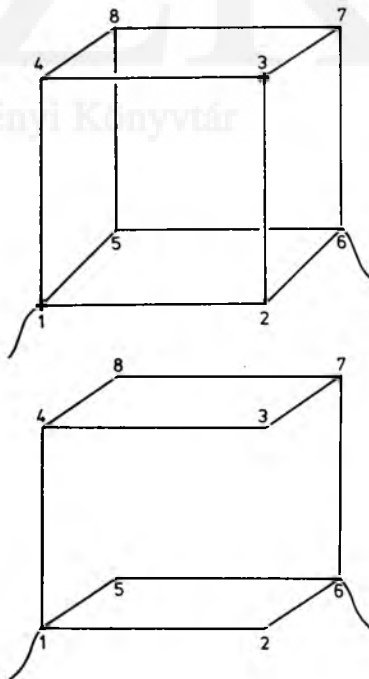
XVIII/66. A műszer ellenállásának és a sönt ellenállásának az eredője

$$\frac{0,02 \cdot 01}{0,12} = 0,016\ \Omega.$$

A $0,1\ \Omega$ ellenálláson 5 A folyhat át, akkor a rendszerre $0,1 \cdot 5 = 0,5\text{ V}$ feszültség kapcsolható. Ekkora a söntre jutó feszültség is. Az eredő ellenálláson átfolyó áram 30 A :

$$30 \cdot 0,016 \approx 5 \cdot 0,1\ \Omega.$$

A méréshatárt hatszorosra terjesztettük ki.



XVIII. 39.
ábra

XVIII/67. Az előtét-ellenállásra 395 V jut. A 395 V az előtét-ellenálláson ugyanakkora áramot hoz létre, mint az 5 V a műszer 1000 Ω ellenállásán. Így

$$\frac{395}{R} = \frac{5}{1000},$$

és innen $R = 79\,000\ \Omega$.

XVIII/68. A söntellenállásra 8 A jut. A műszerre eső feszültség azonos a söntre esővel:

$$8R_s = 2 \cdot 0,1,$$

tehát $R_s = 0,025\ \Omega$.

XVIII/69. Az előtét-ellenállásra jutó feszültség $60 - 0,05 = 59,95\text{ V}$. Az áramerősség a sorba kapcsolt ellenállásokon megegyezik:

$$\frac{59,95}{R_e} = \frac{0,050}{20\,000}.$$

Innen $R_e = 23\,980\ \text{k}\Omega = 23,98\ \text{M}\Omega$. A 15 mV az 50 mV-nak a 30%-a, ezért az előtét-ellenállás bekapcsolása után a 15 mV-nak megfelelő skálahelyzet $0,3 \cdot 60 = 18\text{ V}$ feszültséget jelent.

XVIII/70. A védőellenálláson $10 - 0,01$ A áram folyik át. A feszültség azonos a műszer ellenállásán és a söntön:

$$(10 - 0,01)R_s = 0,01 \cdot 0,01.$$

Innen $R_s = 10^{-5}\ \Omega$. A sönt alkalmazása esetén a 4 mA-es beosztásnak 4 A felel meg.

XVIII/71. Az ismert $P = U^2/R$ képlet alapján $U = 10^{-2}\text{ V}$. Ekkor a műszerünk egy igen érzékeny feszültségmérő. Ha 45 Ω -os előtét-ellenállást alkalmazunk, akkor ezen ugyanannyi áram folyik, mint a műszeren. Ezért

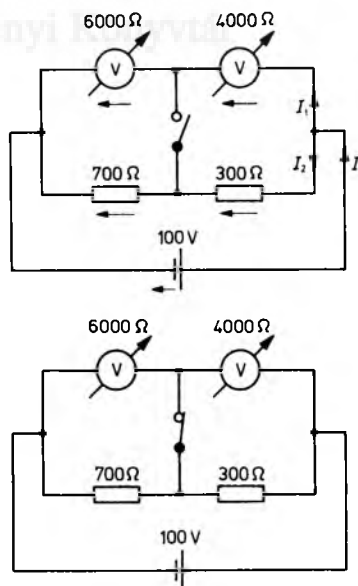
$$\frac{U_e}{45} = \frac{10^{-2}}{1}.$$

Az előtét-ellenállásra $45 \cdot 10^{-2}\text{ V}$ jut, a rendszerre $46 \cdot 10^{-2}\text{ V}$ feszültséget kapcsoltunk. A méréshatárt tehát 46-szorosára terjesztettük ki.

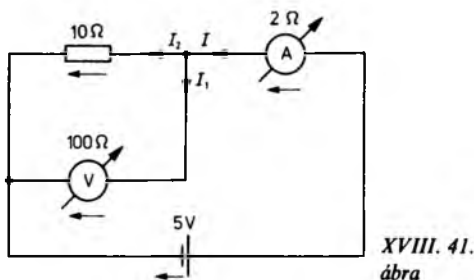
XVIII/72. A műszeren keresztül legfeljebb $I = \sqrt{P/R} = \sqrt{10^{-4}} = 0,01\text{ A}$ folyhat, hogy ne károsodjon az árammérő eszköz. Ennek az áramnak tízszerese folyhat át a védőellenálláson, hiszen a két ellenálláson megegyezik a feszültség. A rendszeren legfeljebb $11 \cdot 10^{-2}\text{ A}$ folyhat át. A méréshatár 11-szeresére nőtt.

XVIII/73. Az ampermérő (mindig és most is) a rajta átfolyó áramot méri. A feszültségmérő az ellenállására jutó feszültséget mutatja — és a vele párhuzamos árammérőre eső potenciálkülönbséget is. A két műszerről leolvasható mérési eredmények aránya az ampermérő ellenállása.

XVIII/74. A voltmérő (mindig és most is) az ellenállására eső feszültséget méri. Az árammérőről a rajta átfolyó áramot olvashatjuk le, és a vele sorba kapcsolt



XVIII. 40. ábra



voltmérőn átfolyó áramot is. Ezért a két érték aránya a feszültségmérő ellenállása.

XVIII/75. Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a kapcsoló nyitott (XVIII. 40. ábra). Kirchhoff törvényeit alkalmazzuk:

$$I = I_1 + I_2,$$

$$-U + I_2 R_1 + I_2 R_2 = 0,$$

$$-U + I_1 r_1 + I_1 r_2 = 0.$$

Csak a harmadik egyenletre van szükség. Ebből $I_1 = 0,01$ A. Az első műszer $I_1 r_1 = 40$ V, a második műszer $I_1 r_2 = 60$ V feszültséget mutat.

Ha a kapcsoló zárva van, akkor a következő módon járunk el. Kiszámoljuk a rendszer teljes ellenállását:

$$R = \frac{4000 \cdot 300}{4300} + \frac{6000 \cdot 700}{6700} = 279,0 + 626,8 = 905,9 \Omega.$$

A telepen átfolyó áram: $I = 0,110$ A. Az első műszer $I \cdot 279,0 = 30,8$ V feszültséget mutat, a másiktól $I \cdot 626,8 = 69,2$ V olvasható le.

XVIII/76. A csomóponti törvény és a huroktörvény XVIII. 41. ábra):

$$I = I_1 + I_2, \quad (1)$$

$$2I + 100I_1 - 5 = 0, \quad (2)$$

$$2I + 10I_2 - 5 = 0. \quad (3)$$

A (3) 10-szereséhez adjuk hozzá (2)-t és vegyük figyelembe (1)-et. Ekkor

$$122I = 55.$$

Innen $I = 0,4508$ A. Visszahelyettesítünk (2)-be:

$$100I_1 = 5 - 2I_1 = 4,09 \text{ V}.$$

A feszültségmérőről 4,09 V olvasható le. Mellékesen: a műszeren 0,0409 A áram folyik. Az árammérő az I áramot méri: $I = 0,4508$ A.

XVIII/77. A feszültségmérő 5 V feszültséget mér. (A műszeren 0,05 A folyik át.) Az ampermérőt tartalmazó ágba $I = 5/12 = 0,416$ A áramlik. Ez olvasható le a műszerről.

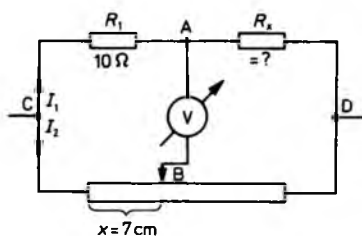
XVIII/78. A XVIII. 42. ábrán látható A és B pontok potenciálja azonos. A voltmérő 0 feszültséget jelez. Azt is jelzi, hogy az A és B között a műszeren átfolyó áram is nulla. A csúszka két részre osztja a változtatható ellenállást, ezek

$$q \frac{x}{A}, \quad q \frac{l-x}{A},$$

ahol $x = 7$ cm, $l - x = 13$ cm. Mivel $U_{CA} = U_{CB}$, és $U_{AD} = U_{BD}$, ezért ha a felső ágba I_1 , az alsóban I_2 áram folyik, akkor

$$I_1 R_1 = I_2 q \frac{x}{A},$$

$$I_1 R_x = I_2 q \frac{l-x}{A}.$$



XVIII. 42. ábra

Innen

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{l-x}{x},$$

és

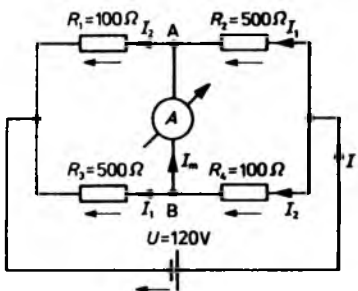
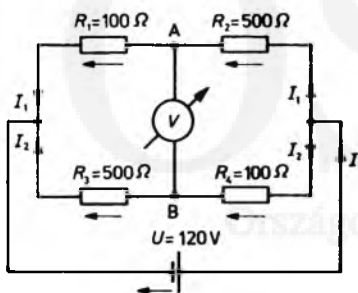
$$R_x = 10 \cdot \frac{13}{7} = 18,57 \Omega.$$

Megjegyzés: A feladatban szereplő kapcsolást Wheatstone-hidnak nevezik és ellenállásmérésre használják.

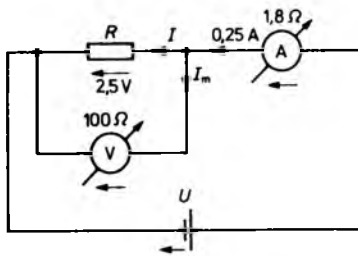
XVIII/79. a) Krichhoff második törvénye a **XVIII. 43. ábrán** látható két hurokra:

$$I_1 R_2 + I_1 R_1 - U = 0,$$

$$I_2 R_4 + I_2 R_3 - U = 0.$$



XVIII. 43. ábra



XVIII. 44. ábra

Innen — behelyettesítve — $I_1 = 0,2$ A, és $I_2 = 0,2$ A. Ezért $U_{AB} = I_1 R_1 - I_2 R_3 = 0,2 \cdot (-400) = -80$ V. A két pont közé kapcsolt ideális feszültségmérő 80 V-ot jelez.

b) Ha a műszer árammérő, akkor jelöljük a műszeren átfolyó áramot I_m -mel, az R_2 ellenálláson átfolyó áram legyen I_1 , az R_4 ellenálláson átfolyó pedig I_2 . Ekkor I_1 áram folyik át az R_3 ellenálláson, és I_2 az R_1 ellenálláson. A műszeren átfolyó áram I_1 és I_2 különbsége. Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az ábrán bejelölt két hurokra:

$$I_1 R_2 + I_2 R_1 = 120,$$

$$I_2 R_4 + I_1 R_3 = 120.$$

Innen $I_1 = 0,12$ A, és $I_2 = 0,6$ A. A műszer tehát $I_m := I_2 - I_1 = 0,48$ A erősségű áramot mér.

XVIII/80. A feszültségmérőn átfolyó áram

$$I_m = \frac{2,5}{100} = 0,025 \text{ A}$$

(**XVIII. 44. ábra**). Ezért az R ellenálláson $I = 0,25 - 0,025 = 0,225$ A folyik át. Az ellenállás két vége között 2,5 V a feszültség, tehát

$$R = \frac{2,5}{0,225} = 11,11 \Omega.$$

Az árammérő két bekötési pontja között

$1,8 \cdot 0,25 = 0,45$ V feszültség mérhető. A telep feszültsége ezért

$$U = 0,45 + 2,5 = 2,95 \text{ V}.$$

A műszerek bekapcsolása nélkül

$$\frac{2,95}{11,11} = 0,2655 \text{ A}$$

áramlik át az ellenálláson. A műszerek alkalmazásából származó hiba: $0,2656 - 0,25 = 0,0155$ A. Az ún. relatív hiba:

$$\frac{0,0155}{0,25} = 0,062.$$

A voltmérő és az ampermérő alkalmazása 6,2%-os mérési hibát eredményez.

XIX. Feladatcsoport: mágneses tér

XIX/1. A mágneses fluxus:

$$\Phi = BA = 0,1 \cdot 180 \cdot 10^{-4} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}.$$

Az iránytű tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{ml^2}{12} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2.$$

A forgatónyomaték:

$$M = pB \sin \alpha = p \cdot 0,05 \cdot 0,1 \cdot \sin \alpha.$$

Kis α szög esetén $\sin \alpha \approx \alpha$, ezért

$$M \approx p \cdot 0,005 \alpha.$$

Newton II. törvénye a forgásra vonatkozóan:

$$-p \cdot 0,005 \alpha = 2 \cdot 10^{-6} \beta,$$

hiszen a szögelfordulás ellentétes irányú a forgatónyomatékkal. Innen

$$-p \cdot 2500 \alpha = \beta.$$

Harmonikus rezgőmozgás jön létre, körfrekvenciája: $\omega = \sqrt{2500 p}$. Másrészt

$$\omega = 2\pi \frac{36}{40} = 5,65 \frac{1}{s}.$$

Innen

$$p = \frac{5,65^2}{2500} = 1,28 \cdot 10^{-2} \text{ C} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

XIX/2. A Rowland-féle kísérlet eredménye alapján a kerék közepén

$$B = \frac{k}{c^2} \frac{Q\omega}{R} = 9,42 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 9,42 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

XIX/3. A Biot—Savart-törvény szerint a körvezető Δs hosszú szakasza

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta s}{R^2}$$

„elemi” mágneses térrel járul hozzá az eredőhöz. A következő bármelyik szakasza ugyanolyan irányú mágneses térerősséget eredményez a kör közepén. A fenti képletben a $\sum \Delta s = 2R\pi$, ezért az eredő

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot 2R\pi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Innen $B = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ T}$.

XIX/4. A két egyenes vezető mágneses tere a kör közepén nulla, hiszen ha az egyenes vezetőnek kijelöljük egy Δs hosszú da-

rabját, akkor ez a rész az 0 pontban

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta s}{r^2} \sin 0^\circ = 0$$

mágneses térerősséggel járul hozzá az eredőhöz. Jelöljük most ki egy Δs hosszú szakaszt a köríven. Az ebben folyó áram mágneses tere a kijelölt pontban:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta s}{r^2} \sin 90^\circ.$$

Ezeknek a szakaszoknak az összege $\frac{3}{4} \cdot 2r\pi$, innen

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot 3r\pi}{2r^2} = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I}{2r} = 1,88 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

XIX/5. Ha a háromnegyed íven I_1 , a negyed íven I_2 áram folyik, akkor $I_1 \cdot 0,5 = I_2 \cdot 0,3$, és $I_1 + I_2 = 2,4$ A. Innen $I_1 = 0,9$ A, $I_2 = 1,5$ A. A háromnegyed köríven folyó I_1 áram

$$B_1 = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 I_1}{2r} = 8,48 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

erősségű — a papír síkjából kifelé mutató — mágneses teret hoz létre. A másik íven folyó I_2 áram ellentétes irányú,

$$B_2 = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I_2}{2r} = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

erősségű mágneses teret indukál. A kettő eredője

$$B = 3,77 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

nagyságú és a papír síkjából kifelé mutat.

XIX/6. Az első esetben a mágneses tér erőssége

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta s}{R_1^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sum \Delta s}{R_1^2} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2R_1\pi}{R_1^2} = \frac{\mu_0 I}{2R_1}. \end{aligned}$$

A második esetben

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\Delta s}{R_2^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sum \Delta s}{R_2^2} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2 \cdot 2R_2\pi}{R_2^2} = \frac{\mu_0 I}{R_2}, \end{aligned}$$

ebben az esetben ugyanis a Δs ív elemeinek összege a körkerület kétszerese. Behelyettesítés után: $B_1 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, $B_2 = 5,02 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. A mágneses térerősség értéke a második esetben négyszerese az elsőnek, hiszen $2R_2 = R_1$:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\frac{\mu_0 I}{R_2}}{\frac{\mu_0 I}{2R_1}} = 4.$$

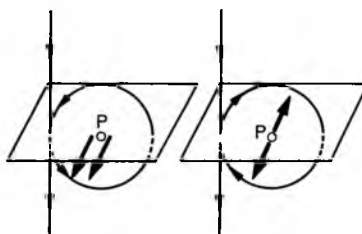
XIX/7. Alkalmazzuk a gerjesztési törvényt. Az egyenes vezetőre merőleges síkban egy 12 cm sugarú körön — egy erővonal mentén — körbehaladunk. Ekkor a mágneses tér egységnyi északi póluson végzett munkája:

$$\sum B \Delta s = B \cdot 2r\pi = \mu_0 I.$$

Innen

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r\pi} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

XIX/8. A kör középpontját jelöljük P-vel (*XIX. 1. ábra*). Ebben a pontban a mágneses tér erőssége a körvezető és az



*XIX. 1.
ábra*

egyenes vezető mágneses térerősségének az összege. Az első esetben a két vektor egy irányú, a második esetben ellentétes irányú (a P pontban a két vektor mindkét esetben párhuzamos). Az egyenes vezető mágneses terének erőssége a P pontban:

$$B_1 := \frac{\mu_0 I}{2r\pi},$$

a következőképpen ugyanitt:

$$B_2 := \frac{\mu_0 I}{2r}.$$

Az első esetben az eredő:

$$B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2r} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) = 8,28 \cdot 10^{-5} \text{ T},$$

a második esetben:

$$B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) = 4,28 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

XIX/9. Az egyenes vezető által létrehozott térerősség a kör P középpontjában

$$B_1 := \frac{\mu_0 I}{2r\pi},$$

a körvezetőé pedig:

$$B_2 := \frac{\mu_0 I}{2r}.$$

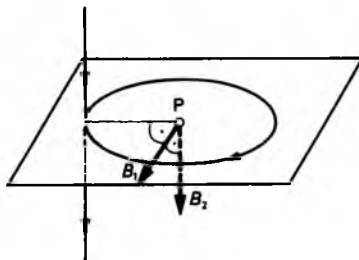
A két vektor merőleges egymásra, ezért az eredő nagysága:

$$\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

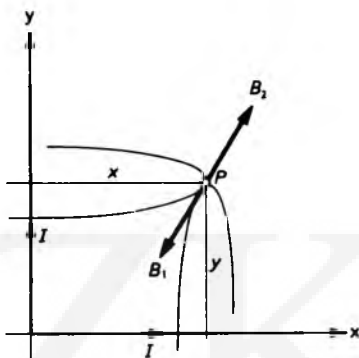
Jelöljük az eredő és a vezetőre merőleges sík szögét α -val. Ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_2}{B_1} = \pi,$$

ezért $\alpha = 72,3^\circ$. Ekkora szöget zár be az eredő térerősség az egyenes vezető által létrehozott térerősséggel (XIX. 2. ábra).



XIX. 2. ábra



XIX. 3. ábra

XIX/10. A két vezető síkjának P pontjában a két térerősség párhuzamos (XIX. 3. ábra). Ha a P pont az első síknegyedben van, akkor a két vektor ellentétes irányú. Az első vezető

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2y},$$

a második

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2x}$$

erősségű mágneses teret hoz létre a P pontban. Az eredő nagysága tehát

$$B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = 8,3 \cdot 10^{-7}.$$

XIX/11. A P_1 pontban az első vezető

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 0,3\pi} = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

a második

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 0,2\pi} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

nagyságú mágneses térerősséget hoz létre. A két vektor ellentétes irányú. Az eredő $6,6 \cdot 10^{-7} \text{ T}$ abszolút értékű vektor, és az ábrán a papírlap teteje felé mutat (XIX. 4. ábra).

A P_2 pontban a két vezető által létrehozott térerősség egyenlő nagy:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R \pi} = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

és merőleges egymásra, az eredő ezért $\sqrt{2} B = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ nagyságú, vízszintes irányú.

XIX/12. A P_1 pontban az első vezető

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 0,3\pi} = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

a második

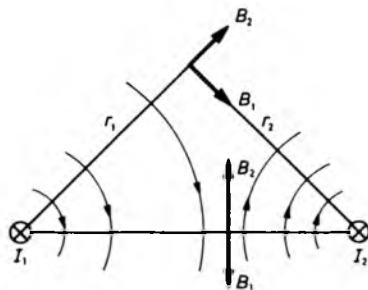
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot 0,2\pi} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

nagyságú térerősséget hoz létre (XIX. 5. ábra). A két vektor azonos irányú. Az eredő $3,33 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ abszolút értékű, a papírlap alja felé mutató vektor.

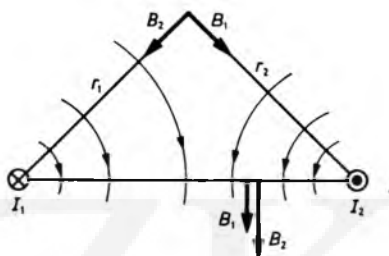
A P_2 pontban a két vezető által létrehozott térerősség egyenlő nagy:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2} \cdot 0,25\pi} = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

és merőleges egymásra. Ezért az eredő $\sqrt{2} B = 1,6 \cdot 10^{-6}$ nagyságú, és a papírlapon függőlegesen lefelé mutat.



XIX. 4. ábra



XIX. 5. ábra

XIX/13. A gerjesztési törvény alapján

$$Bl = \mu_0 IN,$$

így $B = 3 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ és $\Phi = BA = 3,78 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$.

XIX/14. A gerjesztési törvény szerint

$$Bl = \mu_r \mu_0 IN,$$

ahol a vezetőben folyó áram:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{UA_0}{\rho l} = \frac{540 \cdot 0,0005^2 \pi}{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 25} = 1000 \text{ A}.$$

A menetszám

$$\frac{25}{0,04\pi} = 199 \approx 200.$$

Így

$$B = \frac{200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 1000}{0,2} = 211,33 \text{ T}.$$

A fluxus:

$$\Phi = BA = 211,33 \cdot 0,02^2 \pi = 0,32 \text{ Vs}.$$

XIX/15. A két tekercs belsejében a mágneses térerősség:

$$B_1 = \frac{\mu_r \mu_0 IN}{l} = \frac{200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 600}{0,12} = 2,51 \text{ T},$$

illetve

$$B_2 = \frac{200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 450}{0,08} = 2,26 \text{ T}.$$

A két tekercs mágneses terének eredője $B_1 + B_2 = 4,77 \text{ T}$, ha a két tekercsben azonos irányban folyik az áram. Ekkor $\Phi = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$. Ha a két tekercsben ellentétes az áram iránya, akkor az eredő nagysága $B_1 - B_2 = 0,25 \text{ T}$. A fluxus ebben az esetben: $\Phi = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$.

XIX/16. A gerjesztési törvény alapján

$$B \cdot 2R\pi = \mu_0 IN,$$

és $\Phi = BA$, ezért

$$\Phi = \frac{\mu_0 IN}{2R\pi} A.$$

Innen

$$I = \frac{\Phi \cdot 2R\pi}{\mu_0 NA} = \frac{108 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0,42 \cdot \pi}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 3,5 \cdot 10^{-4}} = 6,48 \text{ A}.$$

XIX/17. A toroid belsejében a mágneses térerősség

$$B_T = \frac{\mu_0 I_T N}{2R\pi}$$

nagyságú, az egyenes vezetőtől R távolságra a térerősség nagysága

$$B_E = \frac{\mu_0 I_E}{2R\pi}.$$

Ha a két térerősség eredője nulla, akkor

$$B_T = B_E, \text{ vagyis}$$

$$\frac{\mu_0 I_T N}{2R\pi} = \frac{\mu_0 I_E}{2R\pi}.$$

Innen

$$I_T = \frac{I_E}{N} = \frac{300}{2000} = 0,15 \text{ A}.$$

XIX/18. A gerjesztési törvény szerint

$$H \cdot 2R\pi = IN,$$

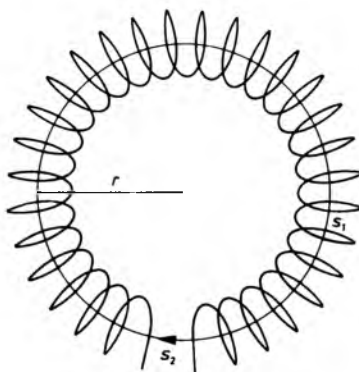
ebből a gerjesztettség: $H = 12732 \text{ A/m}$. A mágneses térerősség:

$$B = \mu_r \mu_0 H = 3,2 \text{ Vs/m}^2.$$

A fluxus:

$$\Phi = BA = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}.$$

XIX/19. A középvonalon haladó erővonal hossza $2r\pi = 1,256 \text{ m} = 1256 \text{ mm}$ (XIX. 6. ábra). A vasmagban haladó rész $s_1 = 1252 \text{ mm}$ hosszú, a levegőben $s_2 = 4 \text{ mm}$ hosszú. Az erővonalak önmagukba záródnak, forrásuk nincs, a légrésben ugyanakkora a mágneses fluxus, mint a vasmagban. (A légrés szélén az erővonalak szóródásától eltekinthetünk.) Legyen tehát a vasban H_1 a gerjesztettség, a levegőben



XIX. 6. ábra

H_2 . Ekkor a gerjesztési törvény szerint

$$H_1 s_1 + H_2 s_2 = IN.$$

Mivel azonban

$$H_1 = \frac{B}{\mu_r \mu_0}, \quad H_2 = \frac{B}{\mu_0},$$

ezért

$$\frac{B}{\mu_r \mu_0} s_1 + \frac{B}{\mu_0} s_2 = IN$$

tehát

$$B = \frac{\mu_0 IN}{\frac{s_1}{\mu_r} + s_2} = \frac{\mu_r \mu_0 IN}{s_1 + \mu_r s_2} = 1,96 \text{ T}.$$

A gerjesztettség a vasban $H_1 = 7797 \text{ A/m}$ és a légrésben $H_2 = 1,56 \cdot 10^6 \text{ A/m}$. A fluxus: $\Phi = BA = 5,88 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$. Figyeljünk fel arra, hogy a vasmagból átlépve — a felületnormális irányában — a térerősség folytonosan megy át, a gerjesztettség azonban ugrásszerűen megváltozik.

XIX/20. Használjuk a XIX. 7. ábra jelöléseit. Tegyük fel először, hogy $x > R$. Ekkor a gerjesztési törvény alapján

$$B \cdot 2x\pi = \mu_0 I,$$

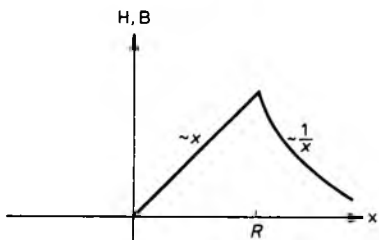
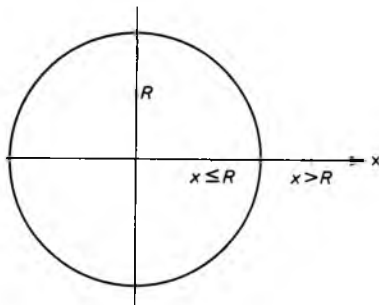
tehát

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x}, \quad H = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{x}.$$

Ha $0 \leq x \leq R$, akkor az x sugarú körlapon áthaladó áramot jelöljük I_x -szel. Az áram-sűrűség egyenletes, ezért

$$\frac{I_x}{I} = \frac{x^2 \pi}{R^2 \pi},$$

$$I_x = I \frac{x^2}{R^2}.$$



XIX. 7. ábra

Alkalmazzuk a gerjesztési törvényt az x sugarú körre:

$$B \cdot 2x\pi = \mu_r \mu_0 I_x = \mu_r \mu_0 I \frac{x^2}{R^2}.$$

Innen

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 I x}{2R^2 \pi}, \quad H = \frac{I x}{2R^2 \pi}.$$

A vezetőkívül:

$$B = 2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{x} \text{ T}, \quad H = \frac{1,59}{x} \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

A vezetőkön belül:

$$B = 6x \text{ T}, \quad H = 3978,8x \text{ A/m}.$$

Figyeljünk fel arra, hogy az erővonalakra merőleges irányban kilépve a vasból a levegőbe — sugár irányban — a gerjesztettség folytonosan, a mágneses térerősség ugrásszerűen változik.

XX. Feladatcsoport: elektromágneses indukció

XX/1. Az erővonalak irányában mozgó töltésre nem hat a mágneses erő, hiszen v és B szöge 0° .

XX/2. A részecskére ható erő $F = QvB$ nagyságú, tehát $F = 10^{-4}$ N. Newton II. törvénye szerint

$$QvB = m \frac{v^2}{r},$$

azaz

$$r = \frac{mv}{QB} = 10 \text{ m.}$$

XX/3. Newton II. törvényét és a Lorentz-féle erő törvényét felhasználva

$$QvB = m \frac{v^2}{r},$$

így

$$QB = m\omega,$$

tehát

$$T = \frac{2\pi m}{QB} = 1,78 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

XX/4. Newton II. törvényét és Lorentz-féle erő törvényét alkalmazzuk:

$$QvB = m \frac{v^2}{r}.$$

Innen

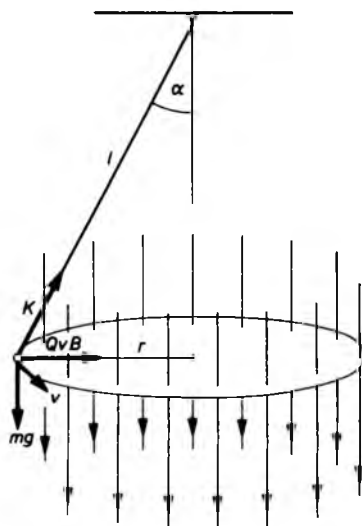
$$Q = \frac{mv}{Br} = \frac{10^{-13} \cdot 1000}{10^{-5} \cdot 1} = 10^{-5} \text{ C.}$$

XX/5. Newton II. törvénye a függőleges erőkomponensekre (XX. 1. ábra):

$$K \cos \alpha - mg = 0,$$

és a vízszintes összetevőkre:

$$K \sin \alpha + QvB = m r \omega^2.$$



XX. 1. ábra

Az első egyenletből $K=0,0115$ N. Mivel $\omega=2\pi/T=6,545$ 1/s, így $\omega^2=42,83$ 1/s². Továbbá: $r=l \sin \alpha=0,3 \cdot 0,5=0,15$ m, és $v=r\omega=0,15 \cdot 6,545=0,9817$ m/s. A második egyenletbe helyettesítve:

$$0,0115 \cdot 0,5 + 10^{-6} \cdot 0,9817 B = \\ = 10^{-3} \cdot 0,15 \cdot 42,83,$$

ebből

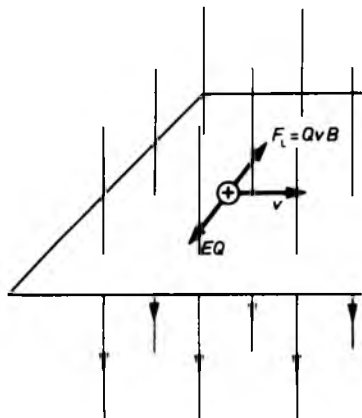
$$B = 687 \text{ Vs/m}^2 = 687 \text{ T}.$$

Ilyen erős mágneses tér van egy 2000 relatív permeabilitású, 2000 menetes, 15 cm hosszú tekercs vasmagjának a homlokfelületén, ha a tekercsben 20 A erősségű áram folyik.

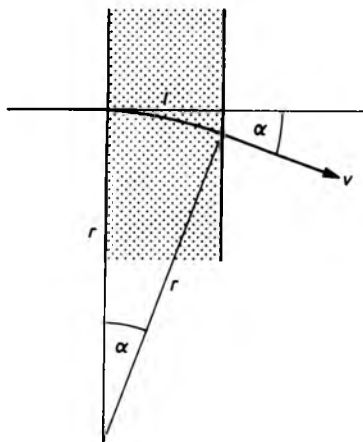
XX/6. A QvB nagyságú Lorentz-erőt EQ nagyságú ellentétes irányú elektromos erő kompenzálja. Tehát

$$E = vB = 1000 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1000 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Tegyük fel, hogy a mozgó töltés pozitív. Ekkor a jobbkéz-szabály szerint a Lorentz-erő Észak felé mutat, az elektromos tér iránya így Észak felől Dél felé irányul és vízszintes irányú (XX. 2. ábra).



XX. 2.
ábra



XX. 3.
ábra

XX/7. A részecske köríven mozog. A kör sugara:

$$r = \frac{mv}{QB} = 1 \text{ m}.$$

A mágneses sáv szélessége ennek századrésze. Ezért — a XX. 3. ábra szerint — a körív hossza egyenlőnek tekinthető a sáv szélességével. Így — a szöget radiánban mérve —

$$\alpha = \frac{l}{r} = 10^{-2}.$$

Átszámoljuk fokra:

$$\alpha^\circ = \alpha \frac{180^\circ}{\pi} = 0,57^\circ.$$

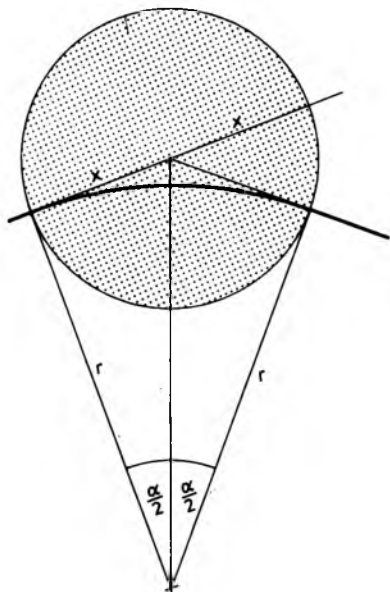
Az elterülés mértéke mintegy fél fok.

XX/8. A XX. 4. ábra alapján a pálya sugara:

$$r = \frac{x \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 10 \text{ cm}.$$

Newton II. törvénye a Lorentz-féle erő törvényt figyelembe véve:

$$QvB = m \frac{v^2}{r},$$



XX. 4.
ábra

így

$$B = \frac{mv}{Qr} = 10 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}.$$

A fluxus:

$$\Phi = BA = 10x^2\pi = 0,028 \text{ Vs}.$$

XX/9. Az erő mindegyik esetben QvB nagyságú, ahol B az áram által létrehozott mágneses tér erősségét jelöli:

$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 I.$$

Tehát $B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$, így $F = 4 \cdot 10^{-8} \text{ N}$. A mágnességtan „első” jobbkez-szabálya szerint a térerősség a papír síkjába mutat. A „második” jobbkez-szabály — a Lorentz-erőre vonatkozó — meghatározza az erő irányát. A XX. 5. ábrán feltüntettük a részecskére ható erőt mind a négy esetben.

XX/10. A két részecske között ható elektrosztatikus erő:

$$F_e = k \frac{Q^2}{r^2} = 0,9 \text{ N}.$$

A mágneses erő:

$$\begin{aligned} F_L &= QvB = Qv \frac{k}{c^2} \frac{Qv}{r^2} = \\ &= k \frac{Q^2}{r^2} \frac{v^2}{c^2} = 0,9 \frac{200\,000^2}{300\,000^2} = 0,4 \text{ N}. \end{aligned}$$

Az eredő erő:

$$F = F_e - F_L = 0,9 - 0,4 = 0,5 \text{ N}.$$

A két töltéssel együtt mozgó megfigyelő a Lorentz-féle erőt nem észleli, a nézőpontjából csak az elektromos erő hat.

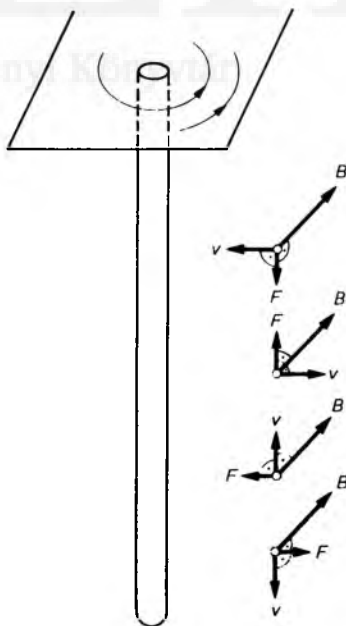
XX/11. Az elektromos erő:

$$F_e = k \frac{Q^2}{r^2} = 0,9 \text{ N}.$$

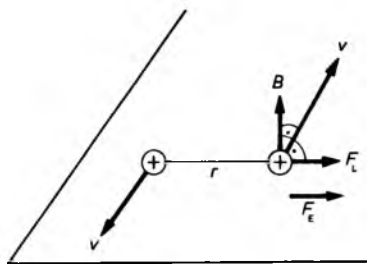
A mágneses erő most is

$$F_L = QvB = Qv \frac{k}{c^2} \frac{Qv}{r^2} = 0,1 \text{ N}$$

nagyságú, de azonos irányú az elektromos



XX. 5.
ábra



XX. 6.
ábra

erővel, az eredő erő (XX. 6. ábra):

$$F = k \frac{Q^2}{r^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \text{ N.}$$

XX/12. A vezetőre ható erő mágneses térben

$$F = BIl = 240 \text{ N}$$

nagyságú, iránya a XX. 7. ábrán látható.

XX/13. A légrés szélességét jelöljük x -szel. Ekkor a gerjesztési törvény szerint

$$\frac{B}{1000} (2r\pi - x) + Bx = \mu_0 IN.$$

Így $B = 8,71 \text{ Vs/m}^2$. A vezetőre ható erő:
 $F = BI, d = 0,7 \text{ N.}$

XX/14. Vizsgáljuk a rúdra ható forgatónyomatékok egyensúlyát a felfüggesztési pontra nézve (XX. 8. ábra):

$$BIl \cdot L \cos \alpha =$$

$$= m_1 g L \sin \alpha + 2m_2 g \frac{L}{2} \sin \alpha,$$

ahol $m_1 = 0,01 \text{ kg}$, $m_2 = 0,004 \text{ kg}$, $l = 8 \text{ cm}$,
 $L = 30 \text{ cm}$. Tehát

$$B = \frac{(m_1 + m_2)gL \sin \alpha}{IlL \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)g}{Il} \operatorname{tg} \alpha = 0,23 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 0,23 \text{ T.}$$

XX/15. Használjuk a XX. 9. ábra jelöléseit! Ha vezetőn keresztül I (átlagos) áram folyik Δt időn át, akkor a vezetőre ható erőlkés:

$$F\Delta t = BIl\Delta t,$$

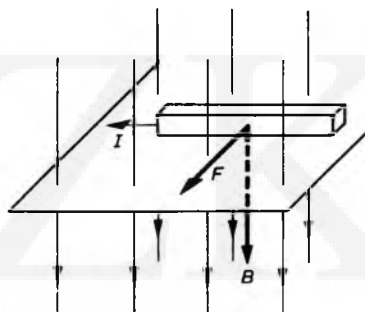
de $I\Delta t = Q$ az átfolyó töltés mennyisége, így

$$F\Delta t = BQl.$$

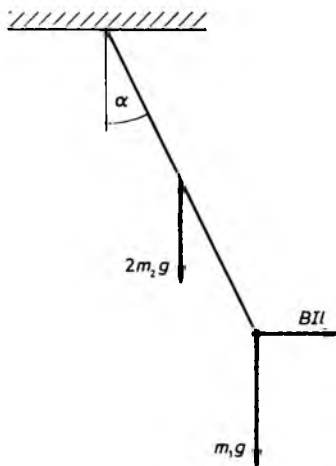
Másrészt Newton II. törvénye szerint

$$BQl = m(v - v_0) = mv,$$

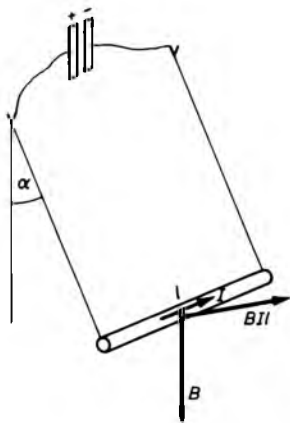
ha a nehézségi és a kötelerő gyorsító hatásától eltekintünk. A kondenzátor kisülése



XX. 7.
ábra



XX. 8.
ábra



XX. 9.
ábra

olyan gyorsan zajlik le, hogy a mágneses hatás erőlkésként, ütközésként éri a rudat. A rúdon igen gyorsan átáramlik a kondenzátoron felhalmozódott

$$Q = CU = 10^{-4} \cdot 6000 = 0,6 \text{ C},$$

töltés, ennek következményeként a rúd

$$v = \frac{3 \cdot 0,6 \cdot 0,25}{0,5} = 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességre tesz szert. A maximális kitérés szöge az energiamérlegből határozható meg:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgL = -mgL \cos \alpha.$$

Behelyettesítve: $\alpha = 23,2^\circ$.

XX/16. A mozgó rúd két vége között indukálódott Blv nagyságú feszültség elmentéses a telep elektromotoros erejével (XX. 10. ábra). Ohm törvénye:

$$I = \frac{U_0 - Blv}{R}.$$

A vezetőre ható erő ma -val egyenlő:

$$BIl = B \frac{U_0 - Blv}{R} l = ma.$$

Hosszú idő után a gyorsuló rúd sebessége olyan nagy lesz, hogy $U_0 = Blv$, ekkor $a = 0$. Ez a sebesség felső határa, tehát

$$v_* = \frac{U_0}{Bl} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A $t = 0$ időpontban, amikor $v = 0$,

$$\frac{BU_0 l}{R} = ma(0),$$

tehát $a(0) = 25 \text{ m/s}^2$. Ha a gyorsulás $0,2 \cdot 25 = 5 \text{ m/s}^2$, akkor

$$10 \frac{10 - 10 \cdot 0,2 \cdot v}{10} 0,2 = 0,08 \cdot 5,$$

és innen $v = 4 \text{ m/s}$.

XX/17. Használjuk a XX. 11. ábra jelöléseit! Newton II. törvénye:

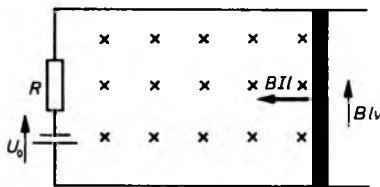
$$F - BI l = ma,$$

és

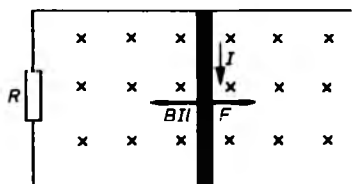
$$I = \frac{Blv}{R},$$

tehát

$$F - \frac{B^2 l^2 v}{R} = ma.$$



XX. 10.
ábra



XX. 11.
ábra

Ha a gyorsulás már nullának tekinthető, akkor

$$B^2 l^2 v = FR,$$

vagyis $v = 1$ m/s. A rúd maximális mozgási energiája

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0,05 \text{ J}.$$

A rúdon két erő végzett munkát. A húzóerő teljesítménye Fv ; a mágneses erőé $-B^2 l^2 v^2/R$. A két teljesítmény összege a rúd mozgási energiájának időegységre eső megváltozásával egyenlő:

$$Fv - \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = mav.$$

XX/18. Newton II. törvénye a XX. 12. ábra alapján:

$$mg \sin \alpha - BIl \cos \alpha = ma,$$

és

$$I = \frac{Blv \cos \alpha}{R},$$

mert a sebességvektor erővonalakra merőleges összetevője $v \cos \alpha$. Így

$$mg \sin \alpha - \frac{B^2 l^2 \cos^2 \alpha v}{R} = ma.$$

Ha hosszú idő múlva $a = 0$, akkor

$$v = \frac{mg \sin \alpha \cdot R}{B^2 l^2 \cos^2 \alpha},$$

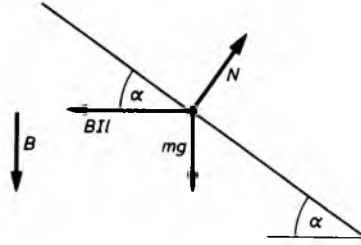
tehát $v = 1,67$ m/s.

XX/19. Az indukált feszültség megegyezik a kondenzátor feszültségével:

$$Blv = \frac{Q}{C},$$

azaz

$$CBlv = Q,$$



XX. 12. ábra

vagyis

$$CBlv = I.$$

Newton II. törvénye:

$$F - BIl = ma,$$

tehát

$$F - CB^2 l^2 a = ma,$$

és ezért $a = 2$ m/s². A rúd sebessége 1,2 s múlva 2,4 m/s, a kondenzátor töltése ekkor $Q = 2,4 \cdot 10^{-3}$ C. A kondenzátor energiája $\frac{Q^2}{2C} = 0,0288$ J. A rúdon végzett munka:

$$W = F \frac{a}{2} t^2 = 0,1 \cdot \frac{2}{2} \cdot 1,2^2 = 0,144 \text{ J}.$$

A rúd mozgási energiája

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0,1152 \text{ J}.$$

A végzett munka részben a kondenzátor lemezei között fellépő elektromos tér energiáját, részben a rúd mozgási energiáját növeli.

XX/20. Az indukált feszültség:

$$U = Bdv = 0,2 \text{ V}.$$

A lemezpár kapacitása:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d} = 8,84 \cdot 10^{-11} \text{ F}.$$

A lemezeken felhalmozódó töltés:

$$Q = CU = 1,76 \cdot 10^{-11} \text{ C.}$$

Az elektromos fluxus:

$$\Psi = 4\pi kQ = 2 \text{ Vm}^2.$$

XX/21. A korong bármely sugara egy körülfordulás alatt $r^2 \pi B$ mágneses fluxust „súrol”. Az indukált feszültség:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{r^2 \pi B}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{B\omega r^2}{2},$$

behelyettesítve:

$$U = 0,5 \cdot 2\pi \cdot 1000 \cdot 0,1^2 = 31,4 \text{ V.}$$

Az ellenálláson 3,14 A erősségű áram folyik.

XX/22. A feszültségek:

$$\text{a) } U = Blv_0 = 10 \text{ V,}$$

$$\text{b) } U = Blat = 5t \text{ V,}$$

$$\text{c) } U = Blv = BlA\omega \cos \omega t =$$

$$= 0,5 \frac{2\pi}{0,1} \cos \frac{2\pi}{0,1} t =$$

$$= 10\pi \cos(20\pi t).$$

(Itt A -val a rezgőmozgás amplitúdóját jeleltük.)

XX/23. Ha igen rövid Δt idő alatt a fluxus kismértékben, $\Delta\Phi$ -vel változik, akkor

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = U,$$

másrészt $U = IR$. Így — mert $\Delta Q = I\Delta t$ —

$$\Delta\Phi = IR\Delta t = QR.$$

A fluxusváltozás tehát arányos az átáramlott töltés mennyiségével. A mi esetünkben

a fluxusváltozás. $\Delta\Phi = BA = 0,05 \text{ Vs}$. Ezért az átáramló teljes töltés:

$$Q = \frac{BA}{R} = 5 \text{ C.}$$

XX/24. Homogén mágneses térben a vezetőkeretre ható forgatónyomaték nagysága:

$$M = IAB \sin \alpha,$$

ahol $\alpha = 90^\circ$, ha a keret párhuzamos az erővonalakkal; és $\alpha = 60^\circ$, ha a keret síkját 30° -kal elfordítjuk. Tehát

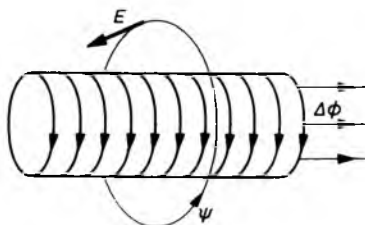
$$M_{\max} = 0,05 \text{ N m,}$$

$$M_{\alpha=60^\circ} = 0,043 \text{ N m.}$$

XX/25. A tekercs fluxusa:

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu_r \mu_0 \frac{INA}{l} = \\ &= 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{1} \cdot 0,1t = \\ &= 10^{-3} t. \end{aligned}$$

A tekercs körül elektromos tér keletkezik. Az indukált elektromos tér munkája egyetlen olyan zárt görbén, amely körülöleli a tekercset, az időegységre eső fluxusváltozással egyenlő. A tekercs szimmetriatengelyétől 10 cm távolságra haladunk körbe egy erővonal mentén a **XX. 13. ábrán** lát-



XX. 13.
ábra

ható módon:

$$\sum E \Delta s = E \cdot 2r\pi = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

$$E = \frac{1}{2r\pi} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 1,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

A részecskére ható erő:

$$F = Eq = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ N},$$

a gyorsulása pedig

$$a = \frac{F}{m} = 1,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A gyorsulás az erővonal érintőjének irányába mutat.

XX/26. A gerjesztési törvényből a mágneses térerősség:

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{IN}{l}.$$

A mágneses fluxus:

$$\Phi = BA = \mu_r \mu_0 \frac{IN}{l} A,$$

a fluxus időegységre eső megváltozása:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} =$$

$$= 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10000 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{1} 0,1 \approx$$

$$\approx 10^{-3} \text{ V}.$$

Az elektromos indukció törvénye szerint

$$\sum_C E \Delta s = E \cdot 2r\pi = 10^{-3},$$

így $E = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ N/C}$. A gyűrűre ható forgatónyomaték:

$$M = Eqr = 1,59 \cdot 10^{-10} \text{ N m}.$$

A gyűrű tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = mr^2 = 0,05 \cdot 0,1^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2.$$

A szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{M}{\Theta} = 3,18 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}^2}$$

ezért bekapcsolás után 10 másodperc múlva a szögsebesség $3,18 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$, a fodulat-szám pedig közelítőleg $5,06 \cdot 10^{-8} \text{ 1/s}$.

XX/27. A fluxus értelmezése és a gerjesztési törvény alapján:

$$\Phi = \mu_0 \frac{IN}{l} A,$$

az elektromos indukció törvénye szerint a mágneses fluxus időegységre eső megváltozása egyenlő az örvényerősséggel:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \sum_C E \Delta s = E \cdot 2r\pi.$$

Ebből egyrészt

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ V},$$

másrészt

$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

XX/28. A külső tekercs paramétereit jelöljük az 1-es indexszel, a belső tekercseit a 2-es indexszel. A belső tekercs fluxusa:

$$\Phi_2 = \mu_0 \frac{I_2 N_2 A_2}{l}.$$

A külső tekercs fluxusa megegyezik a belső tekercsével, hiszen minden erővonal, amely a belső tekercs belsejében halad, az a külső tekercsnek is a belsejében van, tehát

$$\Phi_1 = \Phi_2.$$

A mágneses tér fluxusának időegységre jutó megváltozása:

$$\dot{\Phi}_1 = \dot{\Phi}_2 = \mu_0 \frac{N_2 A_2}{l} \dot{I}_2.$$

Ez megegyezik az erővonalakat körülölő egyetlen görbén indukálódott körfeszültséggel. Ekkora feszültség keletkezik a külső tekercs minden egyes menetében. Az összes indukálódott feszültség:

$$U_1 = N_1 \dot{\Phi}_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l} \dot{I}_2 = \\ = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l} \frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

Adatokkal: $U_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ V}$.

XX/29. A külső tekercs fluxusa:

$$\Phi_1 = \mu_0 \frac{N_1 A_1 I_1}{l}.$$

A belső tekercs fluxusa $-\Phi_2$ — kisebb, mint Φ_1 , hiszen a külső belsejében haladó erővonalaknak csak egy része halad a belső tekercsben:

$$\Phi_2 = \mu_0 \frac{N_1 A_2 I_1}{l}.$$

A fluxus időegységre eső megváltozása egyenlő az erővonalakat körülölő egyetlen menetben — például belső tekercs egyetlen menetében — indukálódott körfeszültséggel:

$$\dot{\Phi} = \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} = \mu_0 \frac{N_1 A_2}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Ennek N_2 -szöröse a belső tekercsben keletkezett összes indukált feszültség:

$$U_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 2,68 \cdot 10^{-2} \text{ V}.$$

A belső tekercsben folyó áram: $I_2 = 2,68 \cdot 10^{-2} \text{ A}$.

XX/30. A tekercs fluxusa:

$$\Phi = \mu_r \mu_0 \frac{IN}{l} A,$$

a fluxus időegységre eső megváltozása:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

adatokkal:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 200 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{800 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{0,6} \frac{4,8}{1,6} = \\ = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

A tekercset körülölő egyetlen hurokban körbehaladva ekkora az indukált elektromos tér munkája (egységnyi pozitív töltésen), tehát

$$\sum_C E \Delta s = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

A két hurokban összesen $4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ körfeszültség indukálódik. Ez megegyezik a kondenzátoron felhalmozódott töltéseknek tulajdonítható feszültséggel:

$$4 \cdot 10^{-3} = \frac{Q}{C} = \left(\frac{Q}{100 \cdot 10^{-6}} \right).$$

Innen $Q = 4 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

XX/31. A tekercs fluxusa:

$$\Phi = BA = \mu_r \mu_0 \frac{NA}{l} I,$$

a fluxus időegységre eső megváltozása egyenlő a tekercs egyetlen menetében indukálódott elektromos erővel. Az összes indukált körfeszültség — az indukációs feszültség:

$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} N = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 3 \text{ V}.$$

XX/32. A fluxus időegységre eső megváltozása:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{0,6 \cdot 0,1^2 \pi}{1} = 0,0188 \text{ V}.$$

A körben indukálódott feszültség hatására

$$I = \frac{0,0188}{5} = 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

áram folyik a körben. Az egyik ellenállásra

$$IR_1 = 3,77 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ V},$$

a másik ellenállásra $7,54 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ feszültség jut. A hosszegységre jutó feszültség — az elektromos térerősség — az egyik esetben $3,6 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$, a másik esetben $2,4 \cdot 10^{-4} \text{ V/m}$.

XXI. Feladatcsoport: váltakozó áramú körök

XXI/1. A XXI. 1. ábra alapján egy-
részt

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t_1,$$

másrészt

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t_2.$$

Innen

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6},$$

vagyis

$$\frac{t_1}{T} = \frac{1}{12}, \quad \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{t_2}{T} = \frac{1}{8}.$$

A maximális érték felét a periódusidő 12-ed része alatt éri el ($t_1 = 1,67$ ms). Az effektív érték eléréséhez a periódusidő 8-ad része szükséges ($t_2 = 2,5$ ms).

XXI/2. A kapacitív ellenállás:

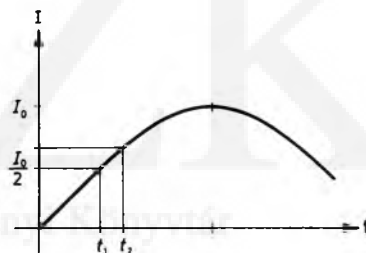
$$X_C = \frac{1}{C \cdot 2\pi f} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 314,15} = 318,3 \, \Omega.$$

Az áramerősség effektív értéke: $I_{\text{eff}} = 0,69$ A, a csúcserőteke 0,977 A. Az áram-

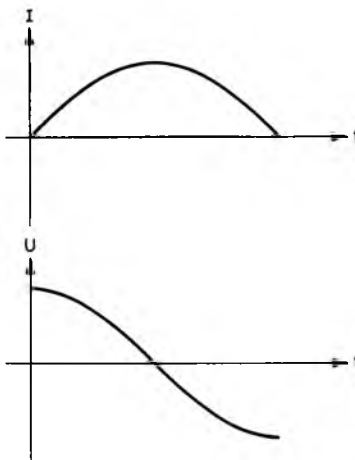
erősség és a feszültség grafikonját a XXI. 2. ábrán látjuk.

XXI/3. Az induktív ellenállás:

$$X_L = L\omega = 0,8 \cdot 2\pi \cdot 100 = 502 \, \Omega.$$



XXI. 1.
ábra



XXI. 2.
ábra

XXI/4. Pithagorasz tétele alapján (XXI.

3. ábra):

$$U_R = \sqrt{220^2 - 200^2} = 91,6 \text{ V.}$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U_R}{R} = 45,8 \text{ A.}$$

Az induktív ellenállás:

$$X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{200}{45,8} = 4,4 \Omega,$$

és így

$$L = \frac{X_L}{\omega} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

XXI/5. A tekercs ohmikus ellenállással is rendelkezik. Ez

$$r = \frac{6}{0,4} = 15 \Omega$$

nagyságú. A tekercs independenciája a hálózati ($\omega = 314 \text{ Hz}$) feszültségre kapcsolva:

$$Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{15^2 + 15,7^2} = 21,7 \Omega.$$

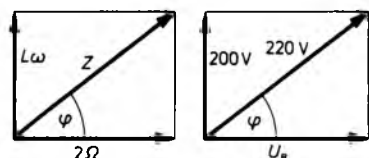
XXI/6. A fáziskülönbség tangense:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} = -\frac{1}{RC\omega} = -0,3981,$$

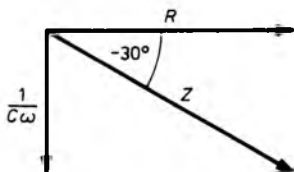
ezért $\varphi = -0,38$ (fokban számolva $-21,7^\circ$).

A impedancia:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2} = 861 \Omega,$$



XXI. 3. ábra



XXI. 4. ábra

az áramerősség effektív értéke: $I_{\text{eff}} = 0,255 \text{ A}$. Az izzóra jutó teljesítmény: $P = I^2 R = 52,22 \text{ W}$.

XXI/7. A XXI. 4. ábra szerint

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} = -\frac{1}{RC\omega}.$$

Behelyettesítve

$$\operatorname{tg}(-30^\circ) = -\frac{1}{50 \cdot 314 C},$$

$C = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ F}$. A fáziseltolódás megszűnik, ha a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

egyenlőségben a jobb oldali tört számlálója nulla, azaz ha

$$L\omega = \frac{1}{C\omega},$$

ebből

$$L = \frac{1}{C\omega^2} = \frac{1}{1,1 \cdot 10^{-4} \cdot 314^2} = 0,092 \text{ H.}$$

XXI/8. Az impedancia:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ &= \sqrt{40^2 + \left(0,4 \cdot 314 - \frac{1}{10^{-5} \cdot 314}\right)^2} \\ &= 197 \Omega. \end{aligned}$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{50}{197} = 0,254 \text{ A.}$$

A három elemen

$$U_{R \text{ eff}} = 10,15 \text{ V,}$$

$$U_{L \text{ eff}} = 32 \text{ V,}$$

$$U_{C \text{ eff}} = 81 \text{ V.}$$

effektív értékű feszültségek mérhetők. Figyelemre méltó, hogy az áramközi elemekben nagyobb feszültség jelenik meg, mint a generátoron.

XXI/9. Az áramerősség: $I = 0,2 \text{ A}$. Az impedancia: $Z = 1100 \Omega$. A fázistolódás szögét a koszinusztétel segítségével számolhatjuk. A XXI. 5. ábra bal oldala alapján:

$$180^2 = 100^2 + 220^2 - 2 \cdot 100 \cdot 220 \cos \varphi,$$

ebből

$$\cos \varphi = 0,590,$$

ezért

$$\varphi = 53,7^\circ, \sin \varphi = 0,80.$$

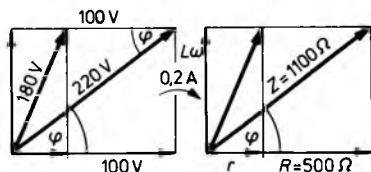
A XXI. 5. ábra jobb oldala alapján

$$\cos \varphi = \frac{r + 500}{1100},$$

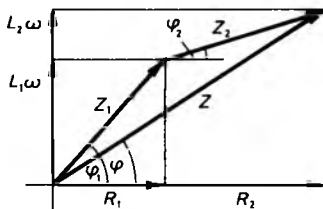
ezért $r = 149 \Omega$. Továbbá

$$\sin \varphi = \frac{L\omega}{1100},$$

és így $L = 2,8 \text{ H}$.



XXI. 5.
ábra



XXI. 6.
ábra

XXI/10. A hatásos (effektív) teljesítmény:

$$P_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi,$$

behelyettesítve

$$48 = 120 \cdot 4 \cos \varphi,$$

$$\text{tehát } \varphi = 84,3^\circ.$$

XXI/11. Az impedancia — a XXI. 6. ábra alapján —

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (L_1 \omega + L_2 \omega)^2} = 23,5 \Omega.$$

Az áramerősség: $I = 9,37 \text{ A}$. A két tekercs impedanciája külön-külön:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (L_1 \omega)^2} = 16,8 \Omega,$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (L_2 \omega)^2} = 8,6 \Omega.$$

A két tekercs kapcsolt feszültségmérők $U_1 = 157,4 \text{ V}$, $U_2 = 80,5 \text{ V}$ feszültséget mérnek.

XXI/12. A vasmagot körülölelő hurokban indukálódott 0,5 voltos körfeszültség a vasmagban „haladó” fluxus időegységre eső megváltozásával egyenlő:

$$0,5 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

A primer tekercs feszültsége:

$$U_1 = N_1 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

a szekunder tekercs feszültsége:

$$U_2 = N_2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Így $N_1 = 200$, $N_2 = 10\,000$.

XXI/13. Egyrészt

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2},$$

behelyettesítve:

$$\frac{120}{12} = \frac{200}{N_2},$$

így $N_2 = 20$.

Másrészt

$$\eta = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}.$$

és így

$$\eta = \frac{12 \cdot 4,5}{120 \cdot 0,5} = 0,9.$$

A transzformátor hatásfoka 90%.

XXI/14. A vezeték ellenállása:

$$R = \rho \frac{l}{A} = 0,017 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \frac{10\,000 \text{ m}}{20 \text{ mm}^2} = 8,5 \Omega.$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{10 \cdot 10^6}{100\,000} = 100 \text{ A}.$$

A vezetékre eső teljesítmény (a veszteség):

$$P = I^2 R = 8,5 \cdot 10^4 \text{ W}.$$

A fogyasztóhoz eljutó teljesítmény tehát $10^7 - 8,5 \cdot 10^4 = 9,915 \cdot 10^6 \text{ W}$, a generátor által leadott teljesítmény 99,11%-a. A hatásfok: 0,9911. Ha a generátor kapcsán 200 V lenne a feszültség, akkor

$$I = \frac{10^7}{220} = 45454,5 \text{ A} \approx 45,5 \text{ kA}$$

lenne. A veszteség ebben az esetben $P = I^2 R = 1,756 \cdot 10^{10} \text{ W}$ lenne. A generátor energiája a veszteségnek is csak kis részét fedezné. A hatásfok nulla lenne! Ha ragaszkodni szeretnénk a 220 V-hoz, akkor a vezeték keresztmetszetét kellene növelni. Mekkora legyen a vezeték keresztmetszete, hogy 220 V-os generátor 10 MW teljesítményéből csak $8,5 \cdot 10^4 \text{ W}$ jusson a vezetékre? A vezeték ellenállása kiszámítható:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{8,5 \cdot 10^4}{(45,5 \cdot 10^3)^2} = 4,11 \cdot 10^{-5} \Omega.$$

Ebből

$$A = \frac{\rho l}{R} = 4\,136\,253 \text{ mm}^2 = 4,14 \text{ m}^2.$$

A vezeték számított keresztmetszete irreálisan nagy.

XXII. Feladatcsoport: elektromágneses tér

XXII/1. A pozitív lemez töltésének időegységre eső megváltozása:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi k} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}.$$

Ez a töltésmegmaradás elve alapján a vezetékekben folyó árammal egyenlő:

$$I = \frac{1}{4\pi k} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}.$$

Így

$$I = \frac{1}{4\pi k} \frac{8 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{-6}} = 88,4 \text{ A}.$$

XXII/2. A kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{A}{d} = 1,38 \cdot 10^{-10} \text{ F}.$$

A feszültség:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{1,38 \cdot 10^{-10}} = 216\,000 \text{ V}.$$

A térrész elektromos energiája:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU^2 = 3,24 \text{ J}.$$

A teljes elektromos fluxus:

$$\Psi_0 = 4\pi k Q = 3,4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ m}^2.$$

Tekintsük a lemezek közötti térben azt a 8 cm sugarú körlemezt, amelynek a vezető a tengelye. Ezt a körlemezt

$$\Psi = \Psi_0 \frac{r^2}{10^2} = 0,64 \Psi_0 = 2,17 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ m}^2$$

elektromos fluxus dőfi, amely 10 μs alatt egyenletesen 0-ra csökken. Így

$$\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = -2,17 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Az $r = 8 \text{ cm}$ sugarú körlap peremén az óramutatóval ellentétes irányban körbehaladva a változó elektromos tér által indukált mágneses tér

$$B \cdot 2r\pi = -\frac{1}{c^2} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = -2,41 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

munkát végez egységnyi mágneses töltésen, ezért a mágneses térerősség nagysága:

$$B = 4,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

XXII/3. A kondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 2 \frac{1}{4\pi k} \cdot 15,7 = 2,77 \cdot 10^{-10} \text{ F}.$$

Mivel $Q_0 = CU_0$, ezért a lemezek töltése kezdetben: $Q_0 = 2,77 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Az elektro-

mos energia:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU_0^2 = 1,38 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

Ha a pozitív lemezről a t időpontban I erősségű áram szivárog a negatív lemezre, akkor a lemezek között a fluxusváltozás sebessége:

$$\dot{\Psi} = 4\pi k(\dot{Q}_0 - I) = -4\pi kI.$$

Az erővonalak a pozitív lemez felől a negatív felé mutatnak, elektromos fluxus megváltozása a negatív felől a pozitív felé. A 10 cm sugarú körlap peremén összegezzük a $B\Delta s$ szorzatokat. Maxwell IV. törvénye szerint

$$\sum_C B\Delta s = \mu_0(I + \varepsilon_0 \dot{\Psi}) =$$

$$= \mu_0(I - \varepsilon_0 4\pi kI) = 0,$$

mert $\varepsilon_0 \cdot 4\pi k = 1$. Az átszivárgó áram és a csökkenő elektromos fluxus mágneses tere „kioltja” egymást. A jelenség nem függ attól, hogy mekkora a szigetelőpapír ellenállása. Az áramerőssége kezdetben:

$$I_0 = \frac{U_0}{\varrho \frac{l}{A}} = \frac{1000}{3 \cdot 10^6 \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,12}} =$$

$$= 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

Ezután az áram erőssége exponenciálisan csökken.

XXII/4. A lemezek töltése az idő szinuszával arányosan változik:

$$Q = Q_0 \sin \omega t.$$

Innen

$$I = \dot{Q} = Q_0 \omega \cos \omega t.$$

A maximális áramerősség: $I_0 = Q_0 \omega$, tehát

$$I_0 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ A.}$$

Az eltolási áram:

$$\frac{1}{4\pi k} \dot{\Psi} = \dot{Q}.$$

Ennek a maximális értéke $1,25 \cdot 10^{-2} \text{ A}$.

XXII/5. A Thomson-féle képlet szerint

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7,07 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{s}}$$

Ha a kondenzátor maximális feszültsége 200 V, akkor a legnagyobb töltés: $Q_0 = 10^{-9} \cdot 200 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. A lemezek töltése:

$$Q = Q_0 \sin \omega t,$$

így

$$I = Q_0 \omega \cos \omega t = \frac{1}{4\pi k} \dot{\Psi},$$

ezért $I_0 = 1,41 \cdot 10^{-1} \text{ A}$. A maximális fluxus:

$$\Psi_0 = 4\pi k Q_0 = 2,26 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ m}^2.$$

XXII/6. A Thomson-féle képlet szerint

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} = 4 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$$

ezért $\nu = 6,366 \cdot 10^5 \text{ Hz}$. A hullámhossz:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 470,9 \text{ m.}$$

XXII/7. A frekvencia:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{600} = 500\,000 \text{ Hz,}$$

a körfrekvencia:

$$\omega = 2\pi\nu = 3\,141\,600 \text{ Hz.}$$

A Thomson-féle formula alapján:

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = 10^{-11} \text{ F.}$$

XXII/8. Mivel $E = Bc$, és az átlagos nyomás

$$\bar{p} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c} E_0 B_0,$$

ezért

$$\bar{p} = \frac{1}{\mu_0 c^2} E_0^2 = 2,21 \cdot 10^{-20} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

XXII/9. A felületre ható nyomás:

$$p = \frac{F}{A} = gc = \frac{1}{c} S = \frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} EB,$$

de mert $E = Bc$, ezért

$$p = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\mu_0} E^2 = \epsilon_0 E^2.$$

Így

$$F = pA = A\epsilon_0 E^2,$$

a maximális térerősség:

$$E_0 = \sqrt{\frac{F_{\max}}{A\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{F_{\max} 4\pi k}{A}} =$$

$$= 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

XXII/10. A térerősség maximális értéke:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-18} \cdot 4\pi k}{10}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Ha

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

akkor

$$E^2 = E_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{E_0^2}{2} - \frac{E_0^2}{2} \cos 2\omega t$$

(hiszen $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$). A térerősség négyzete így az első, kétszeres frekvenciával változik, mint a térerősség. Ha az első periódusideje $1,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, akkor körfrekvenciája $\omega^* := 3,5 \cdot 10^6 \text{ Hz}$. A térerősség

körfrekvenciája:

$$\omega = 1,75 \cdot 10^6 \text{ Hz}.$$

A Thomson-féle képlet szerint

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad C = \frac{1}{L\omega^2} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

XXII/11. Az energiasűrűség:

$$\varrho_s = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Az energiasűrűség maximális értéke:

$$\varrho_{s_0} := \frac{1}{4\pi k} E_0^2 = \frac{(5 \cdot 10^{-6})^2}{4\pi k} =$$

$$= 2,2 \cdot 10^{-22} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

Az energia maximális értéke:

$$S = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} =$$

$$= \frac{c}{4\pi k} E_0^2 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,13 \cdot 10^{11}} (5 \cdot 10^{-6})^2 =$$

$$= 6,63 \cdot 10^{-14} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Az impulzussűrűség:

$$g = \varrho_s \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\varrho_s}{c}.$$

Maximális értéke:

$$\frac{2,2 \cdot 10^{-22}}{3 \cdot 10^8} = 7,33 \cdot 10^{-31} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}.$$

XXII/12. Az energiafluxus az 5 km sugarú és a 12 km sugarú gömbfelületen is azonos, így az energiaáram sűrűsége a felülettel fordítottan arányos:

$$\frac{S}{10^{-6}} = \frac{5^2}{12^2},$$

$$S = 1,736 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2.$$

XXIII. Feladatcsoport: optika

XXIII/1. A XXIII. 1. ábra szerint

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,03}{2} \approx \sin \alpha,$$

de a kioltási irányokra

$$2k \frac{\lambda}{2} = d \sin \alpha \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

itt azonban $k=1$, tehát

$$\frac{\lambda}{d} = \sin \alpha = \frac{0,03}{2},$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \frac{0,03}{2} = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

Innen

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

XXIII/2. Az erősítés helyei olyan α irányokba vannak (XXIII. 2. ábra), amelyekre

$$\sin \alpha = \frac{2k+1}{d} \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Másrészt

$$\frac{x}{L} = \operatorname{tg} \alpha,$$

ezért

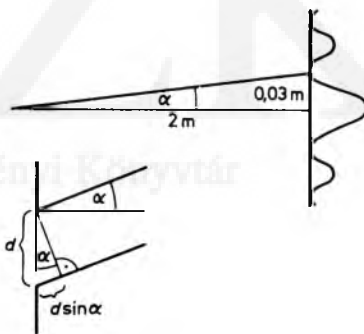
ha $k=0$, akkor $\alpha=1,07^\circ$, $x=1,87 \text{ cm}$,

ha $k=1$, akkor $\alpha=3,22^\circ$, $x=5,62 \text{ cm}$,

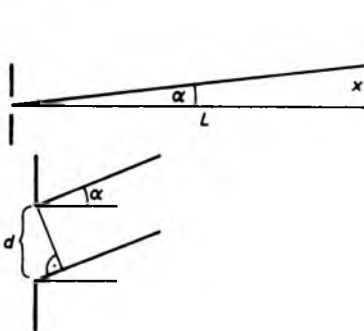
ha $k=2$, akkor $\alpha=5,37^\circ$, $x=9,38 \text{ cm}$,

ha $k=3$, akkor $\alpha=7,54^\circ$, $x=13,12 \text{ cm}$,

ha $k=4$, akkor $\alpha=9,71^\circ$, $x=16,87 \text{ cm}$.



XXIII. 1.
ábra



XXIII. 2.
ábra

XXIII/3. Az erősítés olyan irányokban következik be (XXIII. 3. ábra), amelyre

$$d \sin \alpha = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Mivel

$$\frac{X}{L} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha,$$

ezért

$$d \frac{X}{L} = 2 \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

így

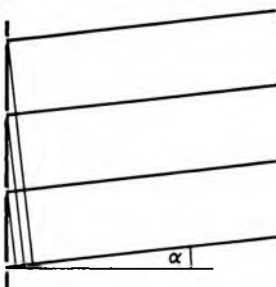
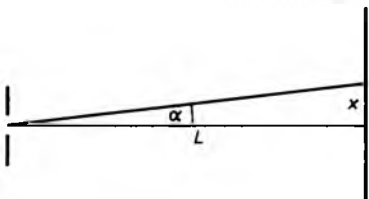
$$\lambda = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m, és } \nu = c/\lambda = 10^{15} \text{ Hz.}$$

XXIII/4. A Snellius—Descartes-törvény alapján

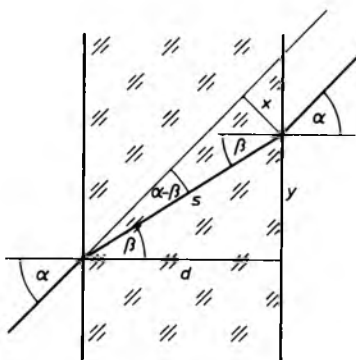
$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$1,5 = \frac{\sin 45^\circ}{\sin \beta},$$

$$\beta = 28^\circ, \text{ és } \alpha - \beta = 17^\circ.$$



XXIII. 3. ábra



XXIII. 4. ábra

A XXIII. 4. ábra alapján

$$\cos \beta = \frac{d}{s},$$

vagyis

$$\cos 28^\circ = \frac{5}{s},$$

ezért $s = 5,66 \text{ cm}$, és

$$\sin (\alpha - \beta) = \frac{x}{s},$$

vagyis

$$\sin 17^\circ = \frac{x}{5,65},$$

tehát $x = 1,65 \text{ cm}$. A beesési merőlegesek távolsága $y = 5 \operatorname{tg} 28^\circ = 2,66 \text{ cm}$.

XXIII/5. A törés törvénye:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin \beta} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c_{\text{vüz}}}{c_{\text{üveg}}} = \frac{\frac{c_{\text{lev}}}{c_{\text{üveg}}}}{\frac{c_{\text{lev}}}{c_{\text{vüz}}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8},$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{c_{\text{lev}}}{c_{\text{üveg}}} = \frac{3}{2}.$$

Ezért $\beta = 29^\circ$, $\gamma = 25,4^\circ$, $\delta = 40^\circ$. A levegőbe

kilépő fénysugár párhuzamos lesz a vízbe belépővel. A XXIII. 5. ábra alapján

$$y_1 = 15 \operatorname{tg} \beta = 15 \operatorname{tg} 29^\circ = 8,31 \text{ cm},$$

$$y_2 = 5 \operatorname{tg} \gamma = 5 \operatorname{tg} 25,4^\circ = 2,37 \text{ cm},$$

$$y = y_1 + y_2 = 10,68 \text{ cm},$$

$$z = 20 \operatorname{tg} \alpha = 16,78 \text{ cm},$$

$$z' = z - y = 6,10 \text{ cm},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{z},$$

ezért

$$x = 6,16 \cos 40^\circ = 4,67 \text{ cm}.$$

XXIII/6. A XXIII. 6. ábra alapján $\operatorname{tg} \beta = 1/5$, $\beta = 11,3^\circ$, $\alpha = 17,1^\circ$, $s = 5,1 \text{ cm}$, így $x = 0,515 \text{ cm}$.

XXIII/7. A törés törvényét alkalmazzuk:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin \beta_1} = 1,5, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = 1,5,$$

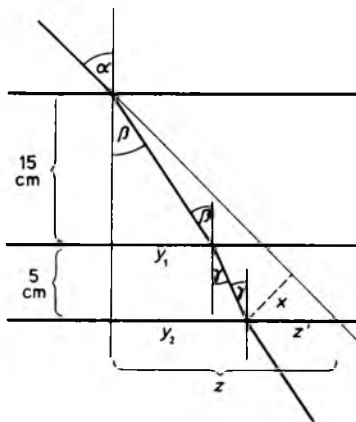
a XXIII. 7. ábra alapján pedig

$$\beta_1 + \beta_2 = 45^\circ.$$

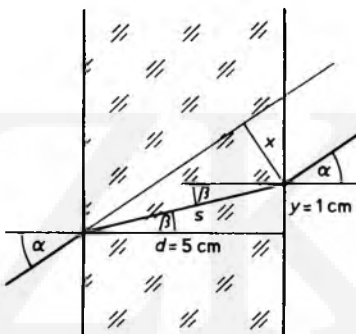
Így $\beta_1 = 35,26^\circ$, $\beta_2 = 9,74^\circ$, $\alpha_2 = 14,69^\circ$. Az eltérés mértéke:

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 29,7^\circ.$$

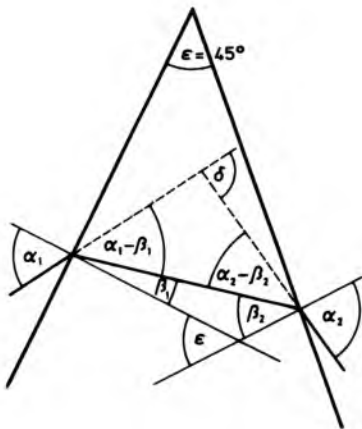
XXIII/8. A prizma első lapján átlépve a fénysugár kettéválik, a vörös fényre a törési szög $\beta_{1v} = 26,22^\circ$, a kék fényre $\beta_{1k} = 25,71^\circ$. A második lapra a sűrűbb közeg oldalán a két fénysugár $\beta_{2v} = 3,77^\circ$, $\beta_{2k} = 4,29^\circ$ beesési szöggel érkezik. A törési szögek $\alpha_{2v} = 6,04^\circ$, $\alpha_{2k} = 7,00^\circ$. A két kilépő fénysugár $\alpha_{2k} - \alpha_{2v} = 1^\circ$ -os szöget zár be egymással (XXIII. 8. ábra).



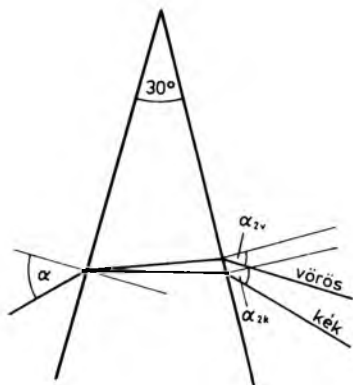
XXIII. 5. ábra



XXIII. 6. ábra



XXIII. 7. ábra



XXIII. 8.
ábra

XXIII/9. Mivel $\alpha_2 = \beta_2 = 0^\circ$, ezért $\beta_1 = \varepsilon$.
A törési törvény szerint azonban

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = 1,5,$$

tehát $\beta_1 = 28,12^\circ$. Így $\varepsilon = 28,12^\circ$.

XXIII/10. Megegedhető, hogy a fénykúp csúcsa eredetileg az üveglemez felületének a helyére essék (XXIII. 9. ábra). Vizsgáljuk a szimmetriatengelyben haladó és egy, a kúp palástján haladó fénysugár útját. Az üveglemezen áthaladva a P pontban metszik egymást. A törési törvény szerint $\beta = 10^\circ$. A beesési merőlegesek $\overline{Q_1 Q_2}$ távolsága $2(r - d \operatorname{tg} \beta) = 1,84 \text{ cm}$, mert $r = d \operatorname{tg} \alpha = 2,68 \text{ cm}$. Mivel a lemezen áthaladó fénysugár az eredeti iránnyal párhuzamos, ezért

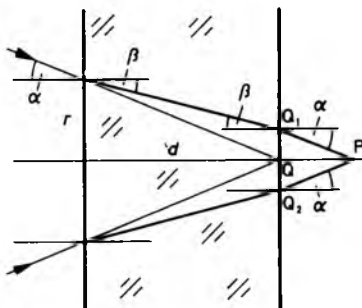
$$\overline{QP} = \overline{QQ_2} / \operatorname{tg} 15^\circ = 3,47 \text{ cm}.$$

A fénykúp csúcsa mintegy 3,5 cm-rel tolódik el.

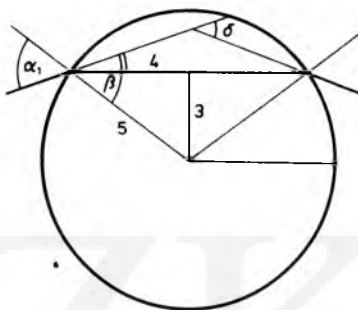
XXIII/11. A XXIII. 10. ábra alapján nyilvánvaló, hogy a gömbben haladó fénysugár 3 cm-re halad a középponttól. Mivel $\sin \beta = 3/5$, ezért

$$\sin \alpha = n \sin \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = 0,9,$$

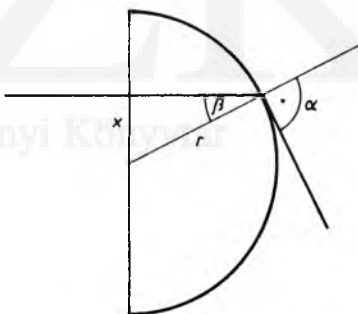
tehát $\alpha = 64,2^\circ$, $\beta = 36,9^\circ$, ezért a két ívvel jelölt szög $27,3^\circ$. Az eltérülés mértéke ennek a kétszerese: $\delta = 54,6^\circ$.



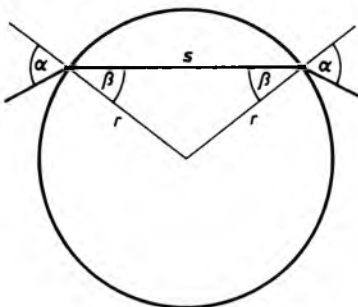
XXIII. 9.
ábra



XXIII. 10.
ábra



XXIII. 11.
ábra



XXIII. 12.
ábra

XXIII/12. A XXIII. 11. ábrán a határhelyzetben haladó fénysugarat láthatjuk. A középponthoz közelebb minden fénysugár kilép a gömbfelületen. Itt tehát $\alpha = 90^\circ$, $\sin \beta = 1/n$, másrészt $\sin \beta = x/r$, tehát $2/3 = x/5$, így $x = 3,3$ cm.

XXIII/13. A törési törvény szerint

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1,5} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$\beta = 28,12^\circ$, ezért

$$\cos \beta = 0,8819 = \frac{s}{2r},$$

ebből $s = 8,82$ cm. Ezt az utat $c/n = 2 \cdot 10^{10}$ cm/s sebességgel, $t = 4,4 \cdot 10^{-10}$ s alatt teszi meg a fény (XXIII. 12. ábra).

XXIII/14. Ez a „selejtés” plánparalel lemez valójában prizma (XXIII. 13. ábra). A törőszögét szeretnénk meghatározni.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1,5, \quad \text{és} \quad \alpha - \beta = 1^\circ.$$

Ebből

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \beta = \frac{\sin 1^\circ}{1,5 - \cos 1^\circ}.$$

Ezért $\beta \cong 2^\circ$.

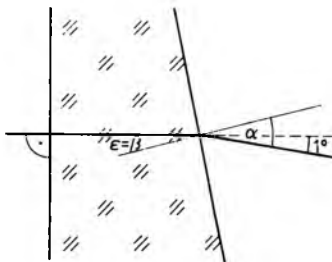
XXIII/15. Egyrészt $\sin \alpha = n \sin \beta$, másrészt $\alpha + \beta = 90^\circ$, tehát $\cos \beta = n \sin \beta$, $\beta = 33,7^\circ$, $\alpha = 56,3^\circ$ (XXIII. 14. ábra).

XXIII/16. A XXIII. 15. ábrán a teljes visszaverődés határhelyzetében haladó fénysugarat látjuk. Ezért

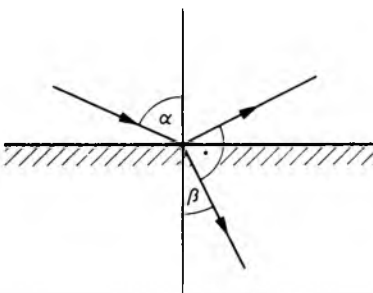
$$\frac{1}{\sin \beta} = n, \quad \tan \beta = \frac{r}{h},$$

így $r = 2,26$ m.

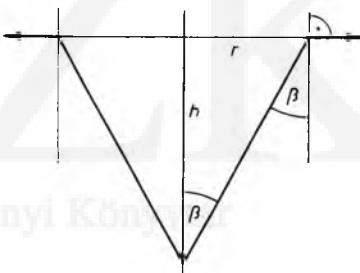
XXIII/17. A pénzdarab (P) látszólagos képe P' (XXIII. 16. ábra). Az α és β kis szögek, mert a fényképezőgép a pénz fölött



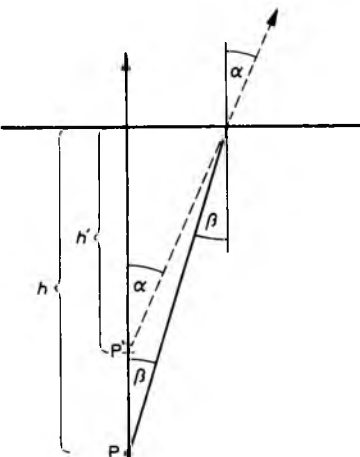
XXIII. 13. ábra



XXIII. 14. ábra



XXIII. 15. ábra



XXIII. 16. ábra

helyezkedik el:

$$\frac{x}{h} = \operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta, \quad \frac{x}{h'} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha,$$

így $n = h/h'$, tehát $h' = 1,5$ m. A fényképezőgépet $1,5 + 1 = 2,5$ m-re kell beállítani.

XXIII/18. A *XXIII. 17. ábra* alapján $\sin \alpha = x/R$, ahol x a látszólagos belső sugár, $\sin \beta = r/R$, ezért

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{x}{r} (=n).$$

tehát $x = 1,5 r$. $R - x = 1$ mm. Ezért $x = 49$ mm, $r = 49/1,5 = 32,6$ mm. A valóságos falvastagság 17,4 mm.

XXIII/19. Az A, B pontok képe valódi, a D ponté virtuális, a C pontról nem jön létre kép (*XXIII. 18. ábra*).

XXIII/20. Mindegyik pont képe virtuális. Ha egy pont közelebb van a szórólencséhez, mint a másik, akkor a képe is közelebb van (*XXIII. 19. ábra*).

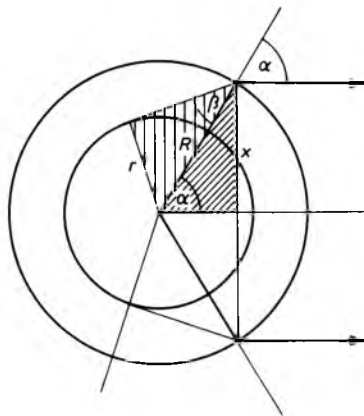
XXIII/21. A homorú tükör képalkotása domború lencsének felel meg (*XXIII. 20. ábra*).

1. az optikai tengellyel párhuzamos fénysugár a fókuszponton át verődik vissza.
2. az O pontba (optikai centrum) beeső fénysugár és a visszavert fénysugár szimmetrikus az optikai tengelyre.

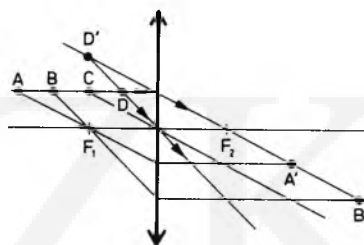
XXIII/22. A domború tükör képalkotása a szórólencse képalkotásának felel meg (*XXIII. 21. ábra*).

XXIII/23. A tükörrre merőleges fénysugár önmagába verődik vissza, ezért a pontok virtuális képei a tükörrre merőleges egyenesen vannak, a tükörhöz közelebbi pontok képei a tükörhöz közelebb kerülnek. (*XXIII. 22. ábra*).

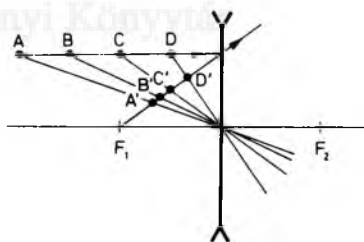
XXIII/24. A *XXIII. 23. ábrán* látható nyíl képe két félegyenes. Az egyik virtuális kép, a másik valódi. A fókuszponttól távo-



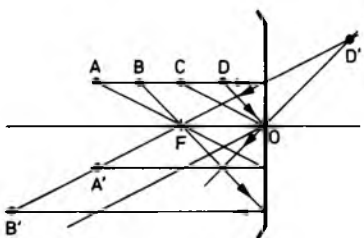
XXIII. 17. ábra



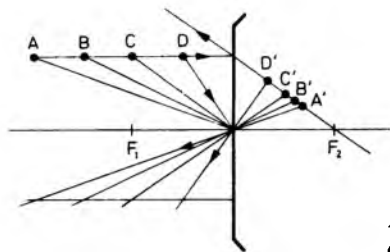
XXIII. 18. ábra



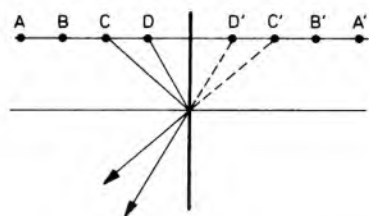
XXIII. 19. ábra



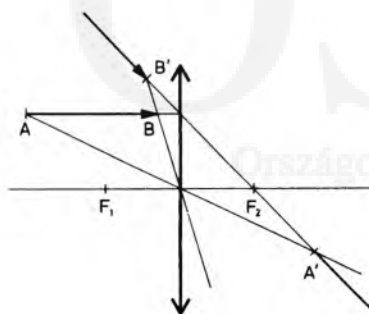
XXIII. 20. ábra



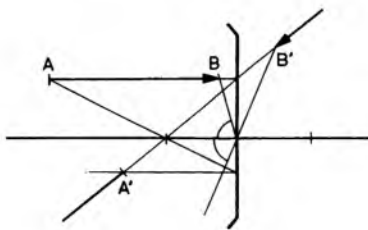
XXIII. 21.
ábra



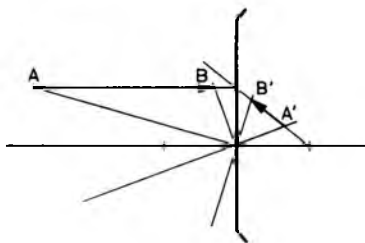
XXIII. 22.
ábra



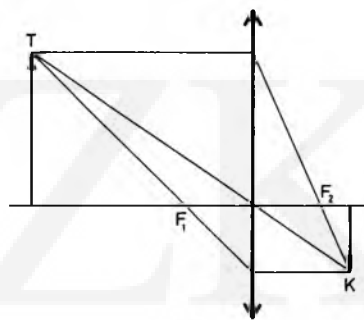
XXIII. 23.
ábra



XXIII. 24.
ábra



XXIII. 25.
ábra



labbi pontok képei valódi képek és az optikai tengely alatt láthatóak, a fókuszpont és a lencse közé eső pontok képei virtuálisak, ugyanazon az oldalon az optikai tengely fölött helyezkednek el. A nyíl képe a szórólencsére vonatkozóan virtuális, kicsinyített.

XXIII/25. A XXIII. 24. ábrán látható a nyíl képe mindkét esetben.

XXIII/26. A T nyíl hegyét és a K nyíl hegyét kössük össze! Az optikai tengellyel való metszéspont meghatározza a lencse helyét. A lencse fókuszait úgy kapjuk, hogy a T-ről, illetve K-ról az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarakat indítunk. Ezek a lencsén áthaladva kijelölik a fókuszpontok helyét (XXIII. 25. ábra).

XXIII/27. A szerkesztés menete a *XXIII. 26. ábrán* látható.

XXIII/28. A szerkesztés fő lépéseit a *XXIII. 27. ábrán* vázoltuk.

XXIII/29. A lencsét az X pontban éri el a fénysugár. Az O ponton át a PX egyenes-sel párhuzamosot húzunk (*XXIII. 28. áb-ra*). Ez az XQ egyenest az Y pontban met-szi. Az Y pont vetülete a jobb oldali fő-kuszpont. A bal oldalit ennek az eljárás-nak megismétlésével szerkeszthetjük meg. A fókusz távolság az

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{25} = \frac{1}{f}$$

egyenlőség alapján: $f = 9,375 \text{ cm}$.

XXIII/30. A háromszöglemez képe egy végtelenbe nyúló párhuzamosok közé eső sáv (*XXIII. 29. ábra*).

XXIII/31. A tárgy és a képtávolság ösz-szege 2 méter, és

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Ezért

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{2-t+t}{t(2-t)} = \frac{1}{f},$$

$$t^2 - 2t + 2f = 0,$$

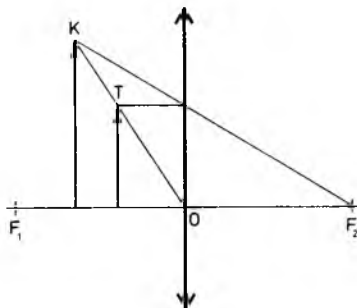
$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8f}}{2}.$$

A diszkrimináns nem lehet negatív, ezért

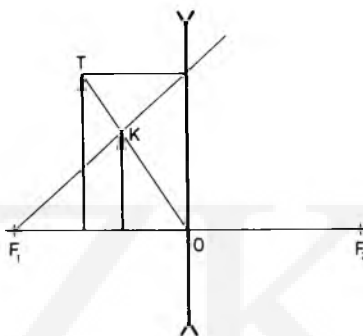
$$4-8f \geq 0,$$

$$f \leq 0,5 \text{ m}.$$

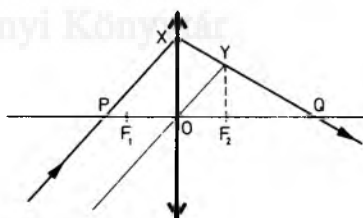
Ha $f = 0,5 \text{ m}$, akkor $t = k = 2f$, egyébként két olyan helyzet van, ahol a lencse éles képet ad, a két lencsehelyzet távolságát



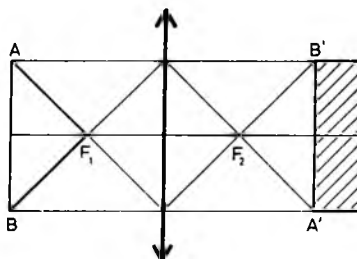
XXIII. 26. ábra



XXIII. 27. ábra



XXIII. 28. ábra



XXIII. 29. ábra

l-lél jelölve:

$$f = \frac{2^2 - l^2}{4 \cdot 2} = \frac{4 - l^2}{8}.$$

XXIII/32. $N = 3 = k/t$, $k + t = 1$. Innen $4t = 1$, $t = 25$ cm, $k = 75$ cm. Ezért

$$\frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,75} = \frac{1}{f},$$

tehát $f = 0,1875$ m. Ha

$$t_1 + k_1 = 0,8 \text{ m},$$

akkor

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{0,8 - t_1} = \frac{1}{0,1875},$$

és innen vagy $t_1 = 0,5$ m és $k_1 = 0,3$ m, vagy $t_1 = 0,3$ m és $k = 0,5$ m. A nagyítás vagy $5/3$, vagy $3/5$.

XXIII/33. A leképezési törvény alapján

$$\frac{1}{0,18} + \frac{1}{k} = \frac{1}{-0,12},$$

ezért $k = -0,072$ m. A nagyítás:

$$N = \frac{-0,072}{0,18} = -0,4.$$

A kép virtuális, a nagysága $0,10 \cdot 0,4 = 0,04$ m = 4 cm.

XXIII/34. A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{f},$$

$$f = 20 \text{ cm}.$$

Ismét alkalmazzuk a leképezési törvényt:

$$\frac{1}{22} + \frac{1}{k} = \frac{1}{20},$$

tehát ekkor $k = 220$ cm. A kép távolodik a lencsétől. Ha a tárgy távolság 38 cm, akkor $k = 42,2$ cm, a kép közeledik a lencséhez.

XXIII/35. Az első esetben:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f},$$

$$k_1 = 4t_1.$$

A második esetben:

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{f},$$

$$k_2 = 3t_2,$$

és

$$t_2 = t_1 + 2.$$

Az első két egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$\frac{5}{4} \frac{1}{t_1} = \frac{1}{f},$$

a második kettőből pedig

$$\frac{4}{3} \frac{1}{t_2} = \frac{1}{f}.$$

Innen

$$\frac{3}{4} t_2 = \frac{4}{5} t_1,$$

illetve

$$\frac{3}{4} (t_1 + 2) = \frac{4}{5} t_1,$$

tehát $t_1 = 30$ cm. Ezért $k_1 = 120$ cm, és $f = 24$ cm.

XXIII/36. A plánparalel üveglemez közelebb hozza a tárgyakat, ha merőlegesen átnézünk rajta. A d vastagságú üveglemez d/n -nek látszik. A 24 cm vastag üveglemez ezért $24/1,5 = 16$ cm vastagságként veendő figyelembe: „elcsal” $24 - 16 = 8$ cm-t. A kép úgy mozdul el, mintha a tárgyat 8 cm-rel közelebb vittük volna a lencséhez. Tehát kezdetben, az üveglemez nélkül — a

XXIII/40. Az első lencsétől k_1 távolságra jönne létre a kép, (XXIII. 31. ábra) így

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{8},$$

$$k_1 = 24 \text{ cm.}$$

Ez a létre nem jövő kép a második lencsétől 9 cm-re van. A második lencse leképe-

zési törvényébe $t_2 = 9$ cm-t helyettesítünk:

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{f_2},$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{-9},$$

$$k_2 = 3,9 \text{ cm.}$$

A második lencsétől 3,9 cm-re valódi kép keletkezik. A nagyítás mintegy kétszeres.

XXIV. Feladatcsoport: relativitáselmélet

XXIV/1. Az űrhajó utasai azt látják, hogy a fényjel (oda-vissza) 8 m utat tesz meg. Az űrhajó utasai

$$\Delta t' = \frac{8 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,66 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

időtartamot mérnek a fényjel kibocsátása és elnyelése között. A laboratórium megfigyelői szerint Δt idő telik el a két esemény között. Ez idő alatt az űrhajó $2 \cdot 10^8 \Delta t =: \Delta x$ utat tett meg. A fényjel — a laboratóriumban így látják (XXIV. 1. ábra) —

$$2\sqrt{4^2 + (10^8 \Delta t)^2}$$

utat tesz meg. A fény sebessége a laboratórium vonatkoztatási rendszeréből nézve is c . A fény $c\Delta t$ utat tesz meg, tehát

$$3 \cdot 10^8 \Delta t = 2\sqrt{4^2 + (10^8 \Delta t)^2},$$

$$9 \cdot 10^{16} \Delta t^2 = 4(16 + 10^{16} \Delta t^2),$$

$$(9 - 4) 10^{16} \Delta t^2 = 4 \cdot 16,$$

$$\Delta t = 3,57 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

A laboratóriumi megfigyelők

$$\frac{3,57}{2,66} = 1,34$$

-szer hosszabb, vagyis 34%-kal több időt mérnek, mint az űrhajóban utazó megfigyelők.

XXIV/2. Az űrhajó utasai

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c} = \frac{8 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,66 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

időt mérnek a fényjel kibocsátása és felfogása között. A laboratóriumi rendszer megfigyelői a szobát

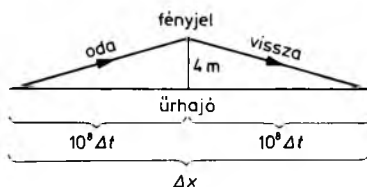
$$l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2,98 \text{ m}$$

hosszúnak mérik. A fényjel tükörig megtett útja:

$$c\Delta t_1 = 2,98 + v\Delta t_1,$$

ebből

$$\Delta t_1 = \frac{2,98}{c - v} = \frac{2,98}{10^8} = 2,98 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$



XXIV. 1. ábra

A tükörtől a fotocelláig megtett út:

$$c\Delta t_2 = 2,98 - v\Delta t_2,$$

$$(c + v)\Delta t_2 = 2,98,$$

ebből

$$\Delta t_2 = \frac{2,98}{5 \cdot 10^8} = 0,596 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

A teljes idő $3,577 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

XXIV/3. A cső hossza a csőhöz viszonyítva $l_0 = 2000 \text{ m}$, a részecskéhez viszonyítva $l = 0,2 \text{ m}$. Ekkor

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

innen

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = (3 \cdot 10^8 - 1,5) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(Felhasználtuk a kis abszolút értékű számokra érvényes

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

közelítő egyenlőséget.) A csőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben

$$\Delta t = \frac{l}{(3 \cdot 10^8 - 1,5)} = 6,66 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

A részecske koordináta-rendszerében

$$\Delta t' = \frac{l}{l_0} \Delta t = 6,66 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$$

XXIV/4. Az űrhajót a pilóta

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{16}{\sqrt{1 - 0,83^2}} =$$

$$= 28,9 \approx 29 \text{ m}$$

hosszának méri. A következő táblázatban összefoglaljuk a két esemény koordinátáit:

	Laboratóriumban		Űrhajóban	
Hely	$x_1 = 0$	$x_2 = ?$	$x'_1 = 0$	$x'_2 = 5 \text{ m}$
Idő	$t_1 = 0$	$t_2 = ?$	$t'_1 = 0$	$t'_2 = 0$

A Lorentz-transzformáció alkalmazásával:

$$t_2 = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,51 \cdot 10^{-8} \text{ s},$$

$$x_2 = \frac{x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 9,04 \text{ m}.$$

A laboratóriumi megfigyelők a két esemény között $2,51 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ időkülönbséget mérnek.

XXIV/5. A műon vonatkoztatási rendszerében a talaj távolsága a részecske születésekor l , a Földtől nézve l_0 . Ekkor

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

innen

$$l = 60 \cdot 10^3 \sqrt{1 - 0,9998^2} = 1200 \text{ méter}.$$

A földi megfigyelők szerint a műon

$$\frac{60\,000}{3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

ideig él. A műon azonban rövidebbnek észleli saját korát:

$$\frac{1200}{3 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

vagyis a sajátidő 50-szer kisebb a földi időnél.

XXIV/6. A Földről nézve $8 \cdot 10^{-4}$ évvel (= 7 órával) több, mint 8 évig tart az utazás. Az odafele mozgás saját ideje:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,056 \text{ év},$$

az űrhajóban mért teljes utazási idő:

$$\Delta t' = 0,113 \text{ év} = 41,3 \text{ nap}.$$

Az utazási idő a Földről nézve több, mint 8 évig tart, míg az utasok szerint csak 41,3 napig (XXIV. 2. ábra).

XXIV/7. Az A űrhajóból nézve az üldöző B űrhajó sebessége:

$$v = \frac{200\,000 - 100\,000}{1 - \frac{200\,000 \cdot 1\,000\,000}{(3 \cdot 10^5)^2}} = 77\,777 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

XXIV/8. A Lorentz-transzformációt alkalmazzuk (XXIV. 3. ábra):

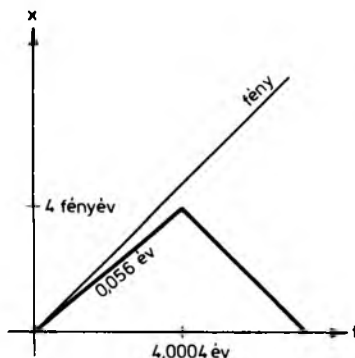
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10^6 - 2,5 \cdot 10^5 \cdot 4}{\sqrt{1 - \left(\frac{250\,000}{300\,000}\right)^2}} =$$

$$= 1,81 \cdot 10^6 \text{ km},$$

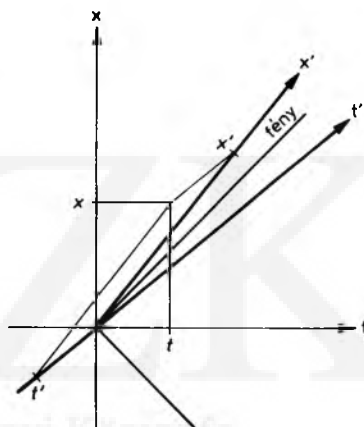
$$t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{\frac{-2,5 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^5)^2} \cdot 2 \cdot 10^6 + 4}{\sqrt{1 - \left(\frac{250\,000}{300\,000}\right)^2}} = -2,81 \text{ s}.$$

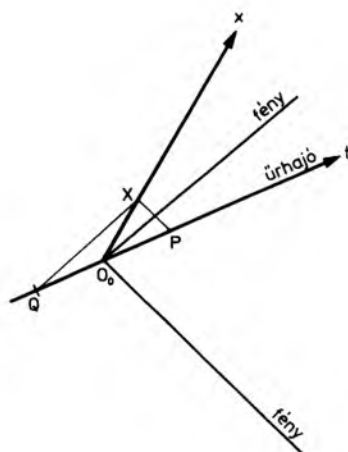
XXIV/9. Az űrhajó világvonalán a XXIV. 4. ábra szerint jelöljük ki egy-egy eseményt azonos távolságra O_0 -tól. Le-



XXIV. 2. ábra



XXIV. 3. ábra



XXIV. 4. ábra

gyen ez a két esemény P és Q; P-ből és Q-ból indítsunk egy-egy fényjelet. Ezek világvonala a kezdeti — O_0 -ból induló — fényjelek világvonalával párhuzamos. E két fényjel világvonala az X pontban metszi egymást. Ekkor az űrhajó világvonala megfelel az időtengelynek, az O_0X egyenes pedig a helytengelynek.

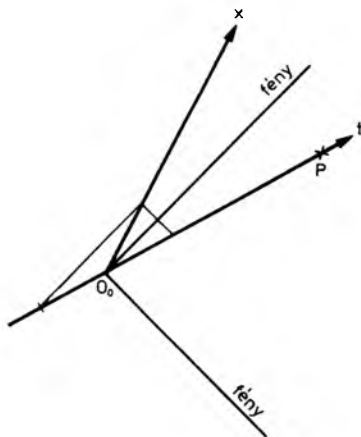
XXIV/10. Bárhogyan jelöljük ki a fénykúpon belül a P pontot — a P eseményt —, az O_0 és P esemény azonos helyűnek tekinthető. Másképpen: van olyan űrhajó, amelyből nézve a két robbanás ugyanott történik. Ennek az űrhajónak a világvonala az O_0P egyenes. Tekintsük ezt az egyenest t tengelynek. Az x tengely megszerkesztése a XXIV. 5. ábrán látható módon történik, pontosan úgy járunk el, mint az előző feladatnál.

XXIV/11. Bárhogyan is jelöljük ki a fénykúpon kívül a P pontot — a P eseményt —, az O_0 és a P esemény azonos idejűnek tekinthető. Másképpen: van olyan űrhajó, amelyből nézve a két robbanás ugyanakkor történik. Az űrhajó vonatkoztatási rendszerének x tengelye az O_0P egyenes. Az űrhajó világvonalát kell megrajzolnunk. Huzzunk két párhuzamost az O_0P egyenessel, XXIV. 6. ábra szerint, egyenlő távolságra az x tengelytől. Ezek a segédvonalak a két fényvilágvonalat az A és a B pontokban metszik. Az AB egyenessel párhuzamos, az origón átmenő egyenes megfelel az űrhajó világvonalának, tehát a t tengelynek.

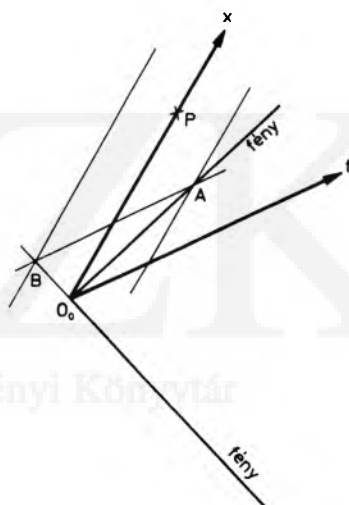
XXIV/12. András születésnapjának koordinátái: x, t . A saját idő értelmezése szerint

$$\tau^2 = t^2 - x^2$$

(itt $[t] = [\tau] = m!$). Rajzoljunk egy t átmérőjű kört és mérjük fel az átmérő egyik végpontjából x -et (XXIV. 7. ábra). Ekkor az



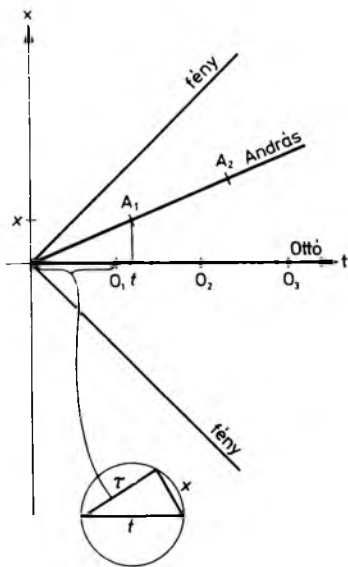
XXIV. 5.
ábra



XXIV. 6.
ábra

így kapott derékszögű háromszög harmadik oldala τ . Ezt a szakaszt kell felmérnünk az O űrhajó világvonalára, hogy O -t első születésnapját kapjuk. A τ hosszúságú szakaszt kétszer, háromszor felmérve az űrhajó világvonalára, a második, harmadik születésnapot kapjuk.

XXIV/13. Rajzoljuk meg hozzávetőlegesen az O_1 ponton áthaladó hiperbolát, amelynek az aszimptótái a fényjelek világvonalai. Ez a hiperbola az A űrhajó világ-



XXIV. 7.
ábra

vonalát András első születésnapjának megfelelő pontban metszi (XXIV. 8. ábra).

XXIV/14. A

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

összefüggés alapján:

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{t}\right)^2},$$

belyettesítve:

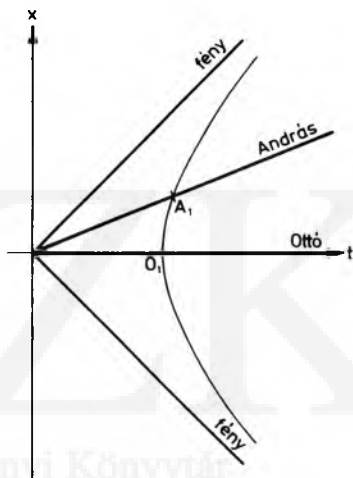
$$v = 3 \cdot 10^5 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1,2}\right)^2},$$

tehát

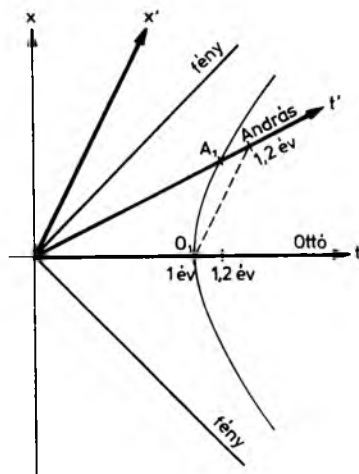
$$v = 1,66 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

A-ból nézve az O űrhajó mozog, ebből a rendszerből nézve Ottó egy éves születésnapja a $t = 1,2$ év (az A rendszeridejében mérve), mert az ennek megfelelő sajátidő a $\tau = 1$ év (XXIV. 9. ábra).

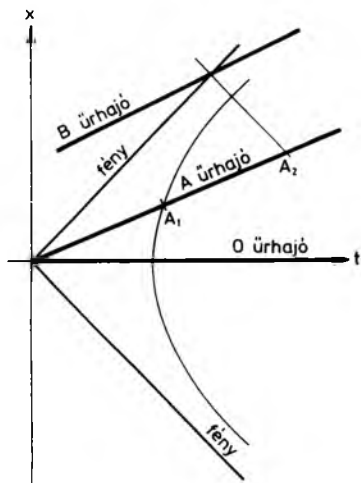
XXIV/15. Egy fényév távolságra van egymástól két űrhajó, ha az egyikről kibocsátott fényjel a másikról visszaverődve két év múlva ér vissza. A szerkesztés ezen alapul. Az origón balról jobbra keresztülhaladó fényvilágvonalat metszi a két év sajátidőhöz tartozó A_2 ponton áthaladó, a másik fényvilágvonallal párhuzamos egyenes (XXIV. 10. ábra). A metszésponton át az A űrhajó világvonalával párhuzamost húzunk. Ez a B űrhajó világvonala.



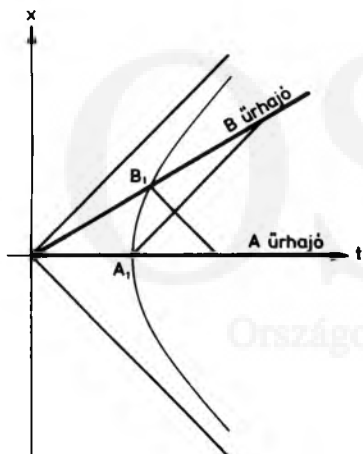
XXIV. 8.
ábra



XXIV. 9.
ábra



XXIV. 10.
ábra

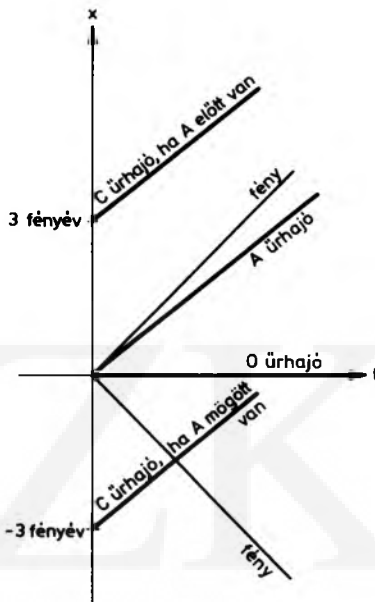


XXIV. 11.
ábra

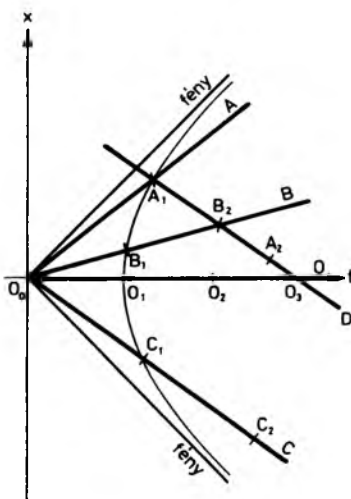
XXIV/16. A XXIV. 11. ábrán látható a két űrhajó világvonala (grafikonja), a két gyermek első születésnapját ábrázoló esemény és az ünnepi alkalommal felvillantott fényjelek világvonala.

XXIV/17. A XXIV. 12. ábrán a három űrhajó grafikonját látjuk. Az A és a B űrhajók világvonala párhuzamos, a két űrhajó távolsága A-ból nézve 3 fényév, O-ból mérve azonban kisebb ez a távolság.

XXIV/18. A XXIV. 13. ábrán látható az A, B, C, D, O űrhajók világvonala. Mivel párhuzamos világvonalaikon az azonos hosszúságú szakaszok azonos sajátidőknek felelnek meg: $\overline{O_0C_1} = \overline{A_1A_2}$. Bélával találkozok előbb András. Béla ekkor éppen



XXIV. 12.
ábra



XXIV. 13.
ábra

két éves, András azonban még csak ezután ünnepli két éves születésnapját. Szembetűnő, hogy amikor a D űrhajó elhalad O mellett, akkor Ottó három éves, de András alig múlt két éves.

XXIV/19. Az A űrhajó rendszerének a tengelyeit is feltüntettük a XXIV. 14. ábrán. A rúd elejének és a végének a világvonala az O űrhajó x tengelyét az x_1, x_2 pontokban metszi, $x_1 x_2 = L$ a rúd hossza O-ból nézve. Láttuk, hogy

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2,98 \text{ m.}$$

A rúd hossza O-ból nézve a nyugalmi hosszának mintegy 75%-a.

XXIV/20. A két esemény koordinátái az O űrhajó rendszerében (XXIV. 15. ábra):

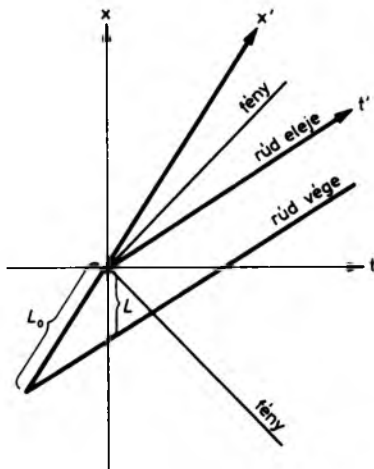
$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 + 0,8 \cdot 1}{0,6} = \frac{1,8}{0,6} = 3 \text{ fényév,}$$

$$x_2 = \frac{2 + 0,8 \cdot 1}{0,6} = 4,66 \text{ fényév,}$$

$$t_1 = \frac{\frac{0,8c}{c^2} 1 + 1}{0,6} = 3 \text{ év,}$$

$$t_2 = \frac{\frac{0,8c}{c^2} 2 + 2}{0,6} = 4,33 \text{ év.}$$

(Itt $[t] = \text{év}$, $[x] = \text{fényév}$ és ezért $c = 1 \text{ fényév/év} = 1$). Ez a feladat jól szemlélteti azt az állítást, hogy az egyik vonatkoztatási rendszerben azonos idejű robbanások a másik rendszerben nem azonos ide-



XXIV. 14. ábra

jűk. Az egyidejűség relatív. Figyeljünk fel arra, hogy

$$(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 1 \text{ év}^2,$$

vagyis a két robbanás nem lehet egymás oka, mert „térszerűen” vannak elválasztva.

(Ha két esemény koordinátáinak különbsége az egyik koordináta-rendszerben $\Delta t, \Delta x$, a másikban $\Delta t', \Delta x'$, akkor $([t] = [x])$ választás mellett)

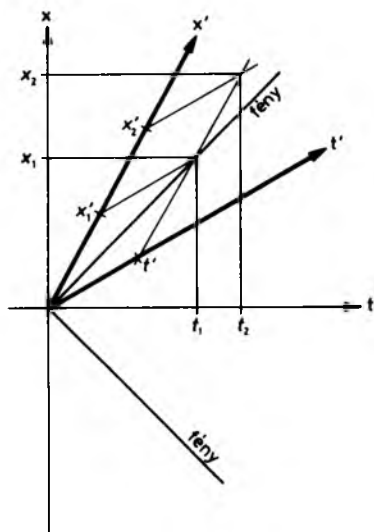
$$\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2,$$

és a

$$\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

mennyiség vagy pozitív, vagy negatív, vagy nulla. Ha ez a kifejezés pozitív, akkor azt mondjuk, hogy a két esemény „időszerűen” van elválasztva. Ekkor $\sqrt{\Delta t'^2 - \Delta x'^2}$ a két esemény közötti idő sajátidőben mérve, egy olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a két esemény ugyanott történik. Ha a fenti kifejezés negatív, akkor azt mondjuk, hogy az események térszerűen vannak elválasztva. Ekkor a

$$\Delta \sigma = \sqrt{-(\Delta t'^2 - \Delta x'^2)}$$



XXIV/21. Az egységnyi sajátidőre jutó elmozdulás (XXIV. 16. ábra):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = v \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Az első esetben

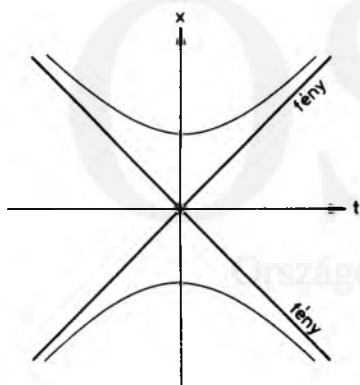
$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_1}{\Delta \tau} &= 10^5 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 1,06 \cdot 10^5 \text{ km/s} = \\ &= 1,06 \cdot 10^8 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Ha az időt méterben mérjük, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_1}{\Delta \tau} &= \beta \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \\ &= 0,3535. \end{aligned}$$

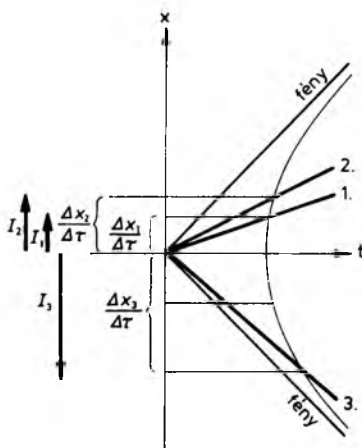
A második test esetén

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_2}{\Delta \tau} &= 1,2 \cdot 10^8 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,2}{3}\right)^2}} = \\ &= 1,31 \cdot 10^8 \text{ m/s,} \end{aligned}$$



XXIV. 15.
ábra

menyiséget *sajáttávolságnak* nevezzük, ez a két esemény távolsága olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a két esemény *ugyanakkor* történik. Az origótól egységnyi sajátávolságra lévő események a XXIV. 15. ábra alsó felén látható hiperbolákon helyezkednek el. Ha $\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$, akkor az események „fényyszerűen” vannak elválasztva. A két esemény fénysebességgel terjedő jellel összeköthető.)



XXIV. 16.
ábra

[t] = méter használata esetén

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta \tau} = \frac{1,2}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,2}{3}\right)^2}} = 0,4364.$$

A harmadik esetben

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta \tau} = -2,5 \cdot 10^8 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,5}{3}\right)^2}} =$$

$$= -4,52 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

ha az időt méterben mérjük, akkor

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta \tau} = -\frac{2,5}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,5}{3}\right)^2}} = -1,50.$$

Figyeljünk fel arra, hogy az egységnyi sajátidőre jutó elmozdulás nagyobb lehet a fénysebességnél, ugyanakkor az egységnyi rendszeridőre eső elmozdulás a fénysebességnél nagyobb nem lehet. A másik, amit tudatosítanunk kell a következő: ha az időt méterben mérjük, akkor a sebesség mértékegysége 1. A három test impulzusa:

$$I_1 = m_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta \tau} = 1,06 \cdot 10^8 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,3535 \text{ kg},$$

$$I_2 = m_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta \tau} = 1,38 \cdot 10^8 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,4364 \text{ kg},$$

$$I_3 = m_3 \frac{\Delta x_3}{\Delta \tau} = -4,52 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = -1,5 \text{ kg}.$$

XXIV/22. A test impulzusa, miközben az X űrhajóban mozog:

$$I_1 = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = mv_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} =$$

$$= 2,68 \cdot 10^{10} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 89,44 \text{ kg}.$$

Miután átszállt a Z űrhajóba:

$$I_2 = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = mv_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} =$$

$$= -1,06 \cdot 10^{10} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = -35,35 \text{ kg}.$$

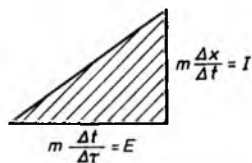
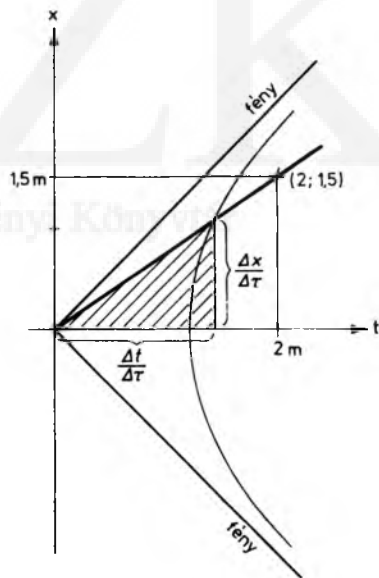
Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = -3,74 \cdot 10^{10} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= -124,79 \text{ kg}.$$

XXIV/23. A test sebessége:

$$\beta = \frac{1,5}{2} = 0,75 \frac{\text{méter}}{\text{méter}}.$$



XXIV. 17. ábra

A mozgó testtel együtt haladó óra

$$\Delta\tau = 2\sqrt{1-0,75^2} = 1,323 \text{ méter}$$

időt mér. Az egységnyi sajátidőre jutó elmozdulás (XXIV. 17. ábra):

$$\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \frac{1,5}{1,323} = 1,134,$$

ezért a test impulzusa

$$I = 2 \cdot 1,134 = 2,268 \text{ kg} = 2,268 c = 6,80 \cdot 10^8 \text{ kg m/s}.$$

Az egységnyi sajátidő alatt eltelt rendszeridő:

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{2}{1,323} = 1,51,$$

ezért a test energiája:

$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 2 \cdot 1,51 = 3,02 \text{ kg} = 3,02 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2,72 \cdot 10^{17} \text{ J}.$$

XXIV/24. A test impulzusa (XXIV. 18. ábra):

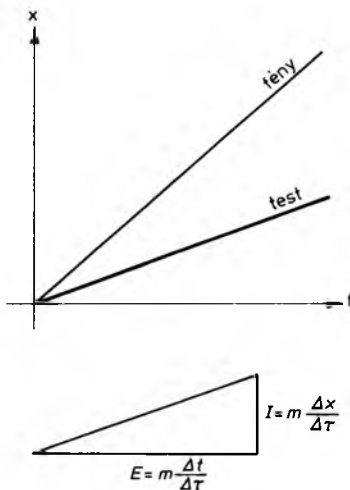
$$I = m \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 2 \cdot 0,5 \frac{1}{\sqrt{1-0,5^2}} = 1,154 \text{ kg},$$

az energiája:

$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 2 \frac{1}{\sqrt{1-0,5^2}} = 2,31 \text{ kg}.$$

A mozgási energia közelítőleg:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 = \frac{1}{2} m \beta^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 = 0,25 \text{ kg}.$$



XXIV. 18. ábra

A mozgási energiát pontosan úgy kapjuk, hogy E -ből levonjuk a nyugalmi energiát, $E_0 = mc^2$ -et, tehát $E_{\text{mozg}} = 2,31 - 2 = 0,31 \text{ kg}$. Számoljuk ki most ezeket a mennyiségeket konvencionális mértékegységekben:

$$I = mv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2 \cdot 1,5 \cdot 10^8 \frac{1}{\sqrt{1-0,5^2}} = 3,46 \cdot 10^8 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{\sqrt{1-0,5^2}} = 2,08 \cdot 10^{17} \text{ J},$$

$$E_{\text{mozg}} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-0,5^2}} - 1 = 3,21 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

Közelítőleg

$$E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} mv^2 = 2,25 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

XXIV/25. A test mozgási energiája az

$$E^2 = m^2 + I^2$$

egyenlőség alapján: $E = \sqrt{1,64} = 1,28 \text{ kg}$.

Az

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

összefüggésből $\beta = 0,468$, ezért $v = 0,468 \cdot 3 \cdot 10^5 = 140\,000$ km/s.

XXIV/26. Az $m^2 = E^2 - I^2$ összefüggés alapján $m = 0,6$ kg. A mozgási energia (pontosan):

$$E_{\text{mozg}} = E - m = 0,4 \text{ kg}.$$

A test sebessége az $I = \beta E$ egyenlőség alapján: $\beta = 0,8$, vagyis

$$v = 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

A hagyományos mértékegységeket használva, először is

$$E = 1 \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ J},$$

$$I = 0,8 \cdot c = 2,4 \cdot 10^8 \text{ kg m/s},$$

továbbá

$$m^2 c^4 = E^2 - I^2 c^2,$$

$$m^2 (3 \cdot 10^8)^4 =$$

$$= (9 \cdot 10^{16})^2 - (2,4 \cdot 10^8)^2 (3 \cdot 10^8)^2,$$

így $m^2 = 0,6$ kg. A mozgási energia közelítőleg

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = 0,3 \cdot (2,4 \cdot 10^8)^2 = 1,728 \cdot 10^{16} \text{ J},$$

pontosan

$$E_{\text{mozg}} = m c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = 3,6 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

Látható, hogy nagy sebességek esetén a mozgási energia

$$\frac{1}{2} m v^2$$

közelítése nagy hibát tartalmaz.

XXIV/27. A Lorentz-transzformációt alkalmazva:

$$I = \frac{I - \beta E}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0,8 - 0,7 \cdot 1}{0,714} = 0,1400 \text{ kg},$$

$$E = \frac{-\beta I + E}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-0,7 + 0,8 \cdot 1}{0,714} = 0,6161 \text{ kg}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$m^2 = E^2 - I^2 = (E')^2 - (I')^2 = 0,6^2,$$

így

$$m = 0,6 \text{ kg}.$$

XXV. Feladatcsoport: mikrofizika

XXV/1. Avogadro törvénye szerint 63,5 g rézben $6 \cdot 10^{23}$ számú atom van, így 1000 g tömegű réz $9,45 \cdot 10^{24}$ atomot tartalmaz. 1 kg tömegű réz térfogata

$$\frac{1}{8,96} = 0,1116 \text{ dm}^3 = 111,6 \text{ cm}^3.$$

Egyetlen rézatomra $1,18 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3$ térfogat jut.

XXV/2. Tegyük fel, hogy egy A keresztmetszetű huzalban v sebességgel mozognak az elektronok. A térfogategységre jutó elektronok száma legyen s , ekkor a vezeték keresztmetszetén átáramló töltés

$$Q := Ase,$$

időegység alatt pedig

$$I = A \frac{l}{t} se = A vse$$

töltés halad át a vezető keresztmetszetén. Innen

$$v = \frac{I}{Ase},$$

mivel azonban — az előző feladat szerint —

$$s = \frac{1}{1,18 \cdot 10^{-23}} = 8,47 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3},$$

$$v = \frac{4}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 8,47 \cdot 10^{22} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,0098 \frac{\text{cm}}{\text{s}}!$$

XXV/3. Faraday törvénye szerint

$$m = \frac{A}{ZeN_A} Q = \frac{1}{1 \cdot 96\,000} \cdot 5400 \cdot 4,5 = 0,253 \text{ g}.$$

A hidrogén molekulatömege 2 g, ezért

$$N = \frac{0,253}{2} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 7,59 \cdot 10^{22}$$

számú hidrogénmolekula keletkezik.

A 2 dm^3 térfogatú edényben összegyűlt gáz nyomása az általános gáztörvény alapján

$$p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT = \frac{1}{V} NkT = \frac{7,59 \cdot 10^{22} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,57 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

XXV/4. Az átáramlott töltés az egyik cellában a rezet, a másik cella katódján a hidrogént, az anódján az oxigént választja

ki. Tehát

$$Q = \frac{m_{\text{rész}}}{A_{\text{rész}} Z_{\text{rész}} \cdot 96\,500} = \frac{m_{\text{H}}}{A_{\text{H}} Z_{\text{H}} \cdot 96\,500},$$

innen

$$\begin{aligned} m_{\text{H}} &= m_{\text{rész}} \frac{A_{\text{H}} Z_{\text{H}}}{A_{\text{rész}} Z_{\text{rész}}} = \\ &= 10 \frac{1 \cdot 1}{63,5 \cdot 2} = 0,0787 \text{ g.} \end{aligned}$$

Ugyanígy a kivált oxigén tömege

$$\begin{aligned} m_{\text{O}} &= m_{\text{rész}} \frac{A_{\text{O}} Z_{\text{O}}}{A_{\text{rész}} Z_{\text{rész}}} = \\ &= 10 \frac{16 \cdot 2}{63,5 \cdot 2} = 2,52 \text{ g.} \end{aligned}$$

Az általános gáztörvényt a

$$pV = \left(\frac{m_{\text{H}}}{M_{\text{H}}} + \frac{m_{\text{O}}}{M_{\text{O}}} \right) RT$$

formában használjuk:

$$V = \frac{1}{10^5} \left(\frac{0,0787}{2} + \frac{2,52}{32} \right) \cdot 8,31 \cdot 300,$$

$$V = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 3 \text{ dm}^3.$$

XXV/5. Az elektron

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{I^2}{2m}$$

mozgási energiája az elektromos tér eU munkájával egyenlő:

Innen

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2meU} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100} = \\ &= 5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s.} \end{aligned}$$

A hullámhossz:

$$\lambda = \frac{h}{I} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{5,4 \cdot 10^{-24}} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

XXV/6. A fényelektromos egyenlet:

$$h\nu = \frac{1}{2} m v_0^2 + A,$$

ahol v_0 a kilépő elektronok sebessége.

Másrészt a munkatétel szerint

$$eU = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2,$$

innen

$$eU + h\nu - A = \frac{1}{2} m v^2,$$

behelyettesítés után

$$\begin{aligned} &1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 + 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 1,6 \cdot 10^{14} - \\ &- 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,87 = \frac{1}{2} 9,1 \cdot 10^{-31} v^2, \end{aligned}$$

ebből

$$v = 1,31 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1,31 \cdot 10^5 \text{ km/s,}$$

a fénysebesség 44%-a. A relativitás elmélete szerint

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

tényező 0,898, a klasszikus és a relativisztikus elmélet szerint az eltérés 10% körül van.

XXV/7. A fényelektromos egyenlet:

$$h\nu = \frac{1}{2} m v_0^2 + A,$$

behelyettesítve:

$$\begin{aligned} &6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 6,1 \cdot 10^{14} - \\ &- \frac{1}{2} 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{10} = A \end{aligned}$$

így

$$A = 3,63 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

XXV/8.

$$E_{\text{foton}} = 3,5 \cdot 10^{-20} + 3,3 \cdot 10^{-19} = \\ = 3,65 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

XXV/9. A Stefan—Boltzmann-törvény szerint

$$500 = \sigma \cdot 900^4,$$

$$p = \sigma \cdot 910^4.$$

Így

$$P = 500 \left(\frac{910}{900} \right)^4 = 522,6 \text{ W,}$$

a teljesítmény 22,6 watt-tal nő.

XXV/10. A lehetséges energiaértékek:

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2}{m} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2,$$

hiszen az impulzus megengedett értékei

$$I = \frac{h}{\lambda_n},$$

és a hullámhossz:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A legkisebb energia:

$$E_1 = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (10^{-10})^2} = 6 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

A negyedik energiaszintről az elsőre törté-

nő átmenetkor kisugárzott foton energiája:

$$h\nu = 6 \cdot 10^{-18} (4^2 - 1^2) = 9 \cdot 10^{-17} \text{ J.}$$

A frekvencia:

$$\nu = 1,359 \cdot 10^{17} \text{ Hz,}$$

a hullámhossz

$$\lambda = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ m.}$$

XXV/11. A hidrogénatomhoz tartozó elektron lehetséges energiája:

$$E_n = h\nu = -hR \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Az L héjról a K héjra történő átmenetnél kisugárzódó energia:

$$-hR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 10,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19},$$

az N héjról az L héjra történő átmenetkor

$$h\nu = -hR \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

a kisugárzott foton energiája. A két egyenlőséget osszuk el egymással:

$$\frac{h\nu}{10,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{-3}{16}}{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4},$$

$$h\nu = \frac{1}{4} \cdot 10,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19},$$

$$\nu = 6,16 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

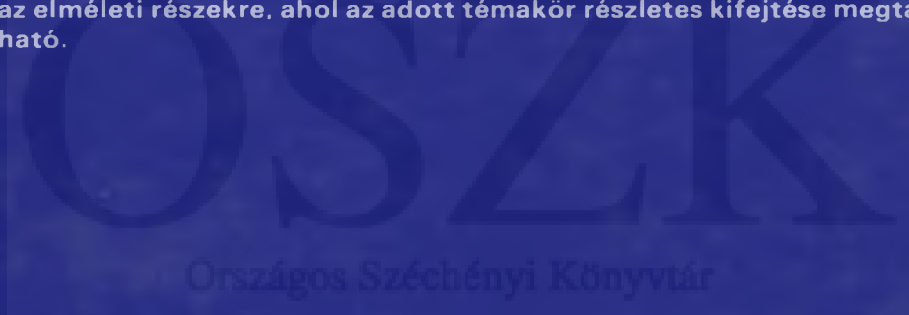
A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója
A nyomdai munkálatokat az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat végezte
Felelős vezető: Zöld Ferenc
Budapest, 1992
Nyomdai táskaszám: 20435
Felelős szerkesztő: Sente László
Műszaki szerkesztő: Szakács Sándorné
A fedéltervet készítette: Kiss Mihály
Kiadványszám: 2922
Megjelent 26,81 (A/5) ív terjedelemben

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

Felvételi vizsgára készülő diákoknak, középiskolásoknak, tanároknak, tanárjelölteknek és a gyermekeik tanulmányait értő figyelemmel kísérő szülők számára készült ez a nagyszabású, háromkötetes mű. Nem íróasztal mellett született, majd két évtizedes oktatómunka írásos eredménye, mely a diákokkal való együttgondolkodás során csiszolódott ki. A szerző az élő előadások nyomán bevonja a hallgatót-olvasót a fizikai gondolatmenetekbe, a fogalmak megalkotásába, saját tudásuk felnövekedésének szellemi folyamatába. Emellett utat mutat a tanultak alkalmazására: a fizika elméletét 300 részletesen tárgyalt problémán keresztül mutatja be, a kérdéskörökhöz 800 feladat is tartozik, a feladatok részletes megoldásával együtt. Mint középiskolai segédkönyv kiválóan alkalmas arra, hogy egyetemi felvételig készülőket vezérfonala legyen, és hasznos a tanároknak is: újfajta szemlélettel, hatásos, a gyakorlatban bevált módszerekkel ismerkedhetnek meg.

A 3. kötetben találja meg az olvasó az 1. és 2. kötetben kitűzött, a szerző által 25 feladatcsoportba rendezett 800 feladat részletes megoldását. A feladatok azt a célt szolgálják, hogy a fizika elméletét az olvasó jobban elsajátítsa, alkalmazásra képes tudásra tegyen szert. Szorosan kapcsolódnak azokhoz a problémákhoz, mintapéldákhoz, amelyeken keresztül a szerző az elméletet tárgyalta. A megoldások gyakran utalnak az elméleti részekre, ahol az adott témakör részletes kifejtése megtalálható.



Ara: I—III. kötet 1850,— Ft

