# MATHEMATIKAI

ÉS

# CSILLAGÁSZATI FÖLDRAJZ.

A

# TUDOMÁNYOS FÖLDRAJZ

# KÉZIKÖNYVEI.

A M. KIR. VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISTER ÚR TÁMOGATÁSÁVAL

SZERKESZTI

DR LÓCZY LAJOS.



1829

ELSŐ KÖTET:

DR KÖVESLIGETHY RADÓ

## MATHEMATIKAI ÉS CSILLAGÁSZATI FÖLDRAJZ.

BUDAPEST
KIADJA KOGUTOWICZ ÉS TÁRSA MAGYAR FÖLDRAJZI INTÉZETE
1899.

# A MATHEMATIKAI
ÉS
# CSILLAGÁSZATI FÖLDRAJZ
# KÉZIKÖNYVE.

A M. KIR. VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISTER ÚR MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

DR KÖVESLIGETHY RADÓ,

A BUDAPESTI KIR. TUD. EGYETEMEN A KOSMOGRAPHIA NY. RK. TANÁRA,
A M. TUD. AKADÉMIA LEV. TAGJA

320 SZÖVEGKÖZTI RAJZZAL.



BUDAPEST
KIADJA KOGUTOWICZ ÉS TÁRSA MAGYAR FÖLDRAJZI INTÉZETE
1899.

HORNYÁNSZKY VIKTOR CS. ÉS KIR. UDV. KÖNYVNYOMDÁJA, BUDAPEST.

# SZERKESZTŐI ELŐSZÓ.

FELSŐBB oktatásunknak egyik legnagyobb baja az, hogy tudományos földrajzi kézikönyvek irodalmunkban nincsenek. Ezen a hiányon segítendők, a Nagyméltóságú magyar kir. vallás- és közoktatásügyi Minister ur támogatásával oly könyvek sorát indítjuk meg, a melyekből a középiskolai tanárjelöltek és középiskolai tanárok a feladataikhoz szükséges alapos tudást a mai tudományos igények szerint elsajátíthatják.

Szolgáljanak azonban e könyvek mindenekelőtt az egyetemi előadások kompendiumául, de ne pótolják, se ne helyettesítsék soha az egyetemi előadások látogatását és még kevésbbé a seminariumi gyakorlatok munkáját. Nem előadási jegyzetekül tekintendők e kézikönyvek, hanem mint olyanok, melyek a tudomány mai állása szerint ismertetik a földrajznak számos, látszólag heterogén részeit, a melyek azonban mégis mind okozatos és szerves kapcsolatban vannak egymással.

A tudományos földrajz kézikönyveit egyelőre két kötettel kezdjük meg:

Az I. kötet: A mathematikai és csillagászati földrajzot, dr. KÖVESLIGETHY RADÓ, egyet. ny. rk. tanártól;

a II. kötet: A fizikai földrajzot, dr. LÓCZY LAJOS, ny. r. tanártól foglalja magában.

Egy III. kötet pedig, ha a vállalkozás életrevalónak bizonyul, a földrajz és a földrajzi fölfedezések történetét fogja tartalmazni.

A munka kiadását és forgalomba hozását Kogutowicz és Társa magyar földrajzi intézete vállalta el.

Budapest, 1899. február hó 15-én.

DR LÓCZY LAJOS,
ny. r. tanár,
a budapesti kir. tudomány-egyetem földrajzi intézetének és seminariumának e. i. igazgatója.

# A SZERZŐ ELŐSZAVA.

Azon érdeklődésnél fogva, melyet a geographiai tudományok csillagász és physikus körökben ébreszteni képesek voltak, oly hatalmas lépést tettek az exakt tudományok felé és gondolatmenetük úgy, mint nyelvezetük már annyira mathematikai és természettudományi modorú, hogy kettős csalódás éri az ifjút, a ki magát e pályára szánva odahagyja a középiskolát ama reményben, hogy szerzett mathematikai és physikai ismereteit ezentúl büntetlenül elfelejtenie szabadságában áll. Egyrészt az egyetem, másrészt még fokozottabb mértékben az újabb irodalom és az önálló buvárkodás ösztöne oly igényekkel van a geographiával foglalkozó iránt, melyeknek megfelelni csak úgy tud, ha legalább is a középiskolai exakt tananyagot lelkiismeretesen megismétli — és sok esetben tovább is fejleszti.

Ezen gondolatnak iparkodtam kifejezést adni, midőn a kiterjedt anyagot teljesen mathematikai alapon tárgyalom, melyet azonban csak kivételes esetekben kellett a középiskolai niveau fölé emelnem. Az anyag kiválasztásában a bevezetésben adott — inkább szűkkörűnek látszó — definitióból indultam ki, a mely a könyv terjedelmét tárgyunkhoz nem tartozó csillagászati és kosmographiai részletekkel csökkenteni engedte. Terjedelme e megszorítás mellett is annyira megnövekedett, hogy függelékéül szánt táblagyűjteménye közléséről egyelőre le kellett mondanunk.

A mi a csillagászatból ily kiválasztás után még megmaradt, azt nélkülözhetetlennek tartom; a történésznek azért.

mert a chronologiai rendszereknek alapja és históriai időadatok megállapításában irányadó; a geographusra nézve azért, mert a mechanikai világfelfogás előkészítője és fundamentuma. E tárgyon át jutunk el ama fontos vonzási problemákhoz és a földmágnesség tanához, a melyek nélkül a jövőben önállóan kutató geologust gondolni sem tudok. E téren a kezdő több helyen fontos új kutatásokra buzdítást, útmutatást és kiindulási alapot fog találni.

A csillagászati geographia ép oly kevéssé befejezett tudomány, mint más, de mégis annyira fejlődött már, hogy egészét felölelő kézikönyvben önállóságot hiában fogunk keresni. A forrásokat, a melyekből az egyes fejezetekben merítettem, lehetőség szerint lelkiismeretesen neveztem meg s itt csak annyit kell az egészre vonatkozólag megjegyeznem, hogy általában Dr. Th. Epstein, Geonomie (mathematische Geographie) gestützt auf Beobachtung und elementare Berechnung: Wien 1888, és Dr. Siegmund Günther, Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie, Stuttgart 1884—85 czímű tankönyvekre, mint legjobbakra támaszkodtam. A térképvetítés tanában a geographus igényeit legjobban szolgáló dr. Karl Zöppritz, Leitfaden der Kartenentwurfslehre; Leipzig 1884 czímű munkáját tekintettem irányadónak.

---

Kedves kötelességet teljesítek, midőn dr. Wlassics Gyula m. kir. vallás- és közoktatásügyi Minister úr ő Nagyméltóságának hálás köszönetet mondok, hogy az 1896 őszén befejezett kézirat megjelenését kitüntető megbizásával lehetségessé tette, sőt kegyes gondoskodását odáig is kiterjeszteni szives volt, hogy majdnem kivétel nélkül új rajzokkal kisérhettem.

A munkát megírni élvezet volt, de további sorsáról gondoskodni, teher. Egy egész munkaerőt igénylő terhet rótt magára a legnagyobb szeretetreméltósággal és buzgalommal Lóczy Lajos tanár úr, midőn megjelenhetését kieszközölte, a rajzoknak — melyekért Kintzig F. műegyetemi hallgató úrnak vagyok lekötelezettje — készítését vezette, és a munkának correcturaíveit olvasni kegyes volt. De nem csupán e technikai körülményekre terjeszkedett figyelmessége: számos becses

útmutatást köszönhetek neki a könyv minden részében, különösen a távol kelet chronologiájára nézve. Fogadja mindezekért legmelegebb köszönetemet s ama benső óhajomat, hogy e hálát önzetlen fáradságáért minden hallgatónk révén is lelje meg.

Coradi G. Zürichben szives volt a curveometereinek és planimetereinek clichéit rendelkezésünkre bocsájtani és megengedni, hogy az ezek elméletét tárgyaló értekezést felhasználhassam. Egynéhány, különösen műszerekre vonatkozó clichét köszönhetek báró Eötvös Loránd és Hopp Ferencz uraknak, a Pallas irodalmi és nyomdai részvénytársaságnak és a Természettudományi Társulatnak.

A tartalom- és szójegyzék készítésének fáradságát Borosnyay Károly tanárjelölt úr volt szives magára vállalni; a munka csinos kiállítása Hornyánszky Viktor cs. és kir. udvari könyvnyomdász úr ízlését dicséri, a ki egyébként is a legnagyobb előzékenységgel engedett minden óhajomnak.

Czélt értem, ha könyvemet félig ama szeretettel olvassák, a mely szeretettel megírtam.

Budapest, 1899, januárius hóban.

A SZERZŐ.

# TARTALOM.

Lap

*VI fejezet. Empirikus képletek.*



*VII. fejezet. Infinitesimális számítás.*



*VIII. fejezet. Függvények és ábrázolásuk.*



*IX. fejezet. Differentiatio.*



*X. fejezet. Integratio.*



*XI. fejezet. Mechanikai integratio.*



*XII. fejezet. Curveometer és planimeter.*



*XIII. fejezet. Közelítő rectificatio és quadratura.*



*XIV. fejezet. Geometriai helymeghatározás.*



## II. szakasz. A napi mozgás.

*I. fejezet. Az éggömb.*



*II. fejezet. Az álló csillagok napi mozgása.*

# SAJTÓHIBÁK.

52. lapon a czimben *ábrázolása* helyett *ábrázolásuk.*

122. » az 58. ábrában olvass 90 + i helyett 90 + c-t.
A vízszintes kör pólusa P-vel jelölendő meg,

127. » 16. sor felülről *keszülék* helyett *készülék.*

155. » 6 » alulról *ugyanak* » *ugyancsak*

164. » 6. » » *tartalmával* helyett *tartamával.*

250. » 10. » » *apogeum* » *apogaeum.*

293. » 8. » felülről *ephemesisekben* » *ephemerisekben.*

423. » a czimfeliratban *föld* helyett *Föld.*

443. » 9. sor felülről *protype* helyett *prototype.*

621. » 11. » » *számara* » *számára.*

621. » 7. » alulról *rugos* » *rúgós.*

634. » 11. » felülről *egyen-* » *egyenlet.*

659. » 14. » alulról *jelemezze* » *jellemezze.*

779. » 8. » felülről *atlractive* » *attractive.*

802. » a 266 ábrában az A′P egyenesen álló *C* helyett olv. *C′.*

816. » a 4. sor után felülről olvasd e megjegyzést: *A Budapest horizontjára vetített hálózat északi felét adja az 55. ábra.*

839. » a 300. ábrában az *ab′* vonal helyett olv. *a′b′.*

843. » a 303. » a jobboldali 80° parallelkör az aequatorhoz közelebb képzelendő.

845. » a 304. » *gomb* helyett olv. *gömb.*

# BEVEZETÉS.

A csillagászati földrajz, vagy miként azt az astronomia mellé állítva nevezhetnők, a geonomia, a Föld tetszőleges pontjainak a térben való szabatos helymeghatározásának tana.

A Földnek egyetlen, fölötte nagy közelítéssel változatlannak tekinthető környezete a csillagos ég. És mivel minden helymeghatározás kiindulási pontja utolsó elemzésben valamely változatlan szerkezet egy pontja, természetes, hogy a mi czéljainkra is az égi testek képezik a szükséges nyugvó eredetet. Csakhogy e változatlanság a csillagok legtöbbjének csak relativ helyzetére, constellatiójára vonatkozik; az ég egészében látszó mozgásokat végez a Föld körül, melyek, mint később látni fogjuk, megszokott időmértékünkkel élve, naponként és évenként ismétlődnek. Ha helymeghatározásainkat e mozgások mellett is az éghez akarjuk kötni, e mozgásokat tanulmányoznunk okvetetlenül szükséges. Az éggömb látszó napi és a Nap látszó évi mozgása adják a Föld irányítását az éghez képest és pontos helyét a bolygórendszer terén belül, míg a Nap sajátos mozgása a Föld helyét a világürben is ismerteti. A Hold futása a Föld körül — eltekintve annak érdekes geofizikai következményeitől — kiváló módszert nyujt az absolut, helyhez nem kötött idő meghatározására és így a csillagos ég minden látszó vagy való mozgása a csillagászati földrajz alapvető tanaihoz tartozik.

Minden mozgás tanulmányozásának egyik faktora a hely-, másik faktora az időmeghatározás, úgy hogy mindkét problemát egymás mellett egyenlő nyomatékkal szokás tárgyalni; folytonosságában azonban nem szokás az időt ugyanazon egységekben olvasni, és ennélfogva tárgyunknak a naptár elmélete is nagyjában alkotó részét képezi.

De a földfelület meghatározandó pontjait sem állapítjuk meg teljesen önkényes módon. Meghatározott fekvésű, nemcsak a könnyű és czélszerű észlelhetés kellékeit kielégítő, hanem szabálytalan alakú Föld esetén is könnyen általánosítható két koordináta-síkot választunk, melyeknek metszési élében fekszik a meghatározandó pont. Ezt azután egy harmadik felülettel, rendesen a földfelülettel vagy ezzel párhuzamosan haladó lappal metszve, egyértelműen állítjuk elő a kivánt pontot jellemző három számadatot. Más szóval, a Földet geometriai helymeghatározásra alkalmas koordináta hálóval borítjuk. Ha a történeti fejlődés egy szakának vagy a megkivánt pontosság mértékének megfelelőleg a Földnek ideális gömb- vagy sphaeroidalakot tulajdonítunk, ezen koordinátaháló könnyen megállapítható geometriai alakzat; ha azonban az újabb és legszabatosabb definitio értelmében a földalak geometriai megérthetésétől eltekintünk, a helymeghatározás koordináta-vonalai is bonyolódott alakot és értelmezést vesznek fel. De a helymeghatározás minden közelítésében könnyen beláthatólag a Föld alakja és méretei fontos szerepet játszanak és természetes, hogy ennek beható tanulmányozása elől nem térhetünk ki. A történeti fejlődéshez híven először a Föld ideális alakját tárgyaljuk, mely a legtöbb esetben teljesen kielégítő pontosságot szolgáltat és csak azután térünk át a Föld valóságos alakjának megbeszélésére, miként ez ma, a legpontosabb módszerek segítségével meghatározható.

A Föld való alakjának úgy meghatározása, mint értelmezése a kezdőre okvetlenül idegen, mondhatnám transcendens benyomást tehet. A meghatározás többé nem geometriai, hanem mechanikai és azért az erre vonatkozó fejezeteinket a mechanika bennünket érdeklő alapelveivel, a tömegvonzási jelenségekkel és a potentiál-elmélettel vezetjük be, hogy lépésenként a geoid fogalmához emelkedhessünk. A nehézségi erő felismerése már magában véve is indokolja, hogy hosszasabban tárgyaljuk a bolygók mozgásait. A tárgy nehézsége és első pillanatra mutatkozó idegenszerűsége mellett didaktikailag megbecsülhetetlen, ha ezen fejezet után foglalkozunk a földmágnesség tanával, mely különben már azért is tartozik joggal a csillagászati földrajz keretébe, mivel mágneses helymeghatározások részben használatban is vannak, de elvileg legalább elgondolhatók. A mágneses meghatározások és a Föld alakjának megmérésére szolgáló modern módszerek úgy a számításban, mint a gyakorlati kivitelben tökéletesen azonosak és a Föld alakjának képletes előállítása tökéletesen összeesik a földmágnesség mathematikai elméletével. Fölötte fontos, hogy a földalak meghatározásában szereplő elég nehéz mérési módszerek és számítások új elnevezések alatt, új czélt szolgálva, de alakilag teljesen azonosan ismételhetők.

A megejtett helymeghatározások graphikusan is tüntethetők fel glóbusok és térképek alakjában és természetes, hogy ezen szemléltető segédeszközökkel tisztán mechanikailag minden problema megoldható, mely a földrajzi és csillagászati helymeghatározás keretébe tartozik. A glóbusok tisztán csak a Föld ideális gömbalakját tüntetik fel; a térképek addig, míg kis méretekben állnak elő, a Földet szintén csak mint gömböt ábrázolhatják és ennélfogva már jóval előbb tárgyalhatók. De nagyszabású térképekben a Föld gömbi eltérése már észlelhető és ezért czélszerű, ha a térképek készítésével csak e helyen foglalkozunk.

A megállapított sorrend, melynél az egész tárgy természetes és szoros kapcsolatba jut, nézetem szerint tan- vagy kézikönyv számára mindenesetre helyes. Nem helyes egyszersmind az előadásokra is, különösen nem, ha ezeket párhuzamos seminariumi gyakorlatok kisérik.

Itt fődolog, hogy az egyszer elsajátítottat gyakorlatilag gyorsan felhasználni tanuljuk; nem volna czélszerű, a térképvetítést végig halasztani, midőn ez a Föld ideális alakjának megbeszélése után teljesen eszközölhető és nem volna okadatolt az a törekvés, hogy az idő- és helymeghatározást függővé tegyük az égitestek látszó és való mozgásainak megkülönböztetésétől. Ily módon az előadásban némi ismétlés helyenkint természetesen ki nem kerülhető, de bizonyos, hogy ez az előadásnak csak előnyére válik.

# I. SZAKASZ.

# MATHEMATIKAI ELŐKÉSZÍTŐ.

**Mathematikai repertorium geographusok számára.**

A mennyiben a geographia igényt tart arra, hogy a természettudományok közé soroltassék, mindazon segédeszközökkel él, melyet az exakt tudományok alkalmaznak. Ezek közül különösen a mathematika és mechanika tanai azok, melyek elkerülhetetlenül szükségesek s melyek rövid ismétlése, sőt egyes pontokban tetemes kibővítése mindenekelőtt kivánatos.

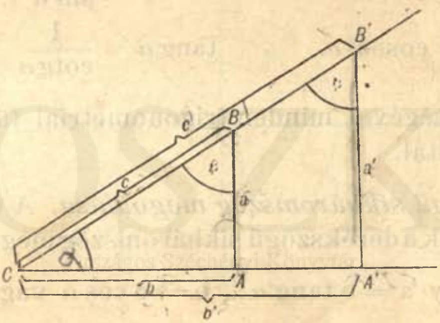
Geographus körökben a mathematika nem a legnagyobb népszerűségnek örvend, s innen van, hogy e tudományban a legfontosabb felfedezések nagyobbára mathematikusoktól, physikusoktól és csillagászoktól valók. Tán megszüntetheti némileg ezen visszás idegenkedést ama kijelentés, hogy a mathematika egyszerűen nyelvnek, még pedig a leglogikusabb nyelvnek fogható fel, mely minden e nyelven tett logikus kérdésre helyes feleletet is ad. Minthogy a feleletben természetszerűleg lényegileg több nem foglaltatik, mint a mennyi a kérdésben rejlik, legföljebb a kérdést formailag világítja meg jobban, nyilvánvaló, hogy tulajdonképen csak a kérdés helyes feltevése a dolog nehéz része; a felelet kifejtése már csak általánosan ismert mathematikai műveletek egymásutánjában áll. Azon mechanikai segédeszközök is, melyeket bizonyos feladatok megoldásában használunk, a pantograph, a curveometer, a planimeter és hasonlók, tulajdonképen egy-egy mathematikai gondolat kivitelére valók és ezért sokkal általánosabb hasznúak, mint nevük után vagy rendes alkalmazásuk után gondolnók.

A következő kis vezérfonal csak a legszükségesebbeket tartalmazza, melyekre támaszkodnunk kell, és korántsem elég azoknak, kik geographiával igazán tudományosan foglalkozni kivánnak. Óhajtandó volna, hogy komolyabb törekvés az analyzisre és mechanika tanulmányozására is fordítson gondot.

## I. FEJEZET.

## Goniometria és trigonometria.

Habár minden mathematikai, számolással elvégezhető gondolat szemléltethetőbben rajzban is megoldható, ez eljárás — különösen a pontosságra való tekintetből — mégis csak kor-




1. ábra. Goniometriai függvények és a derékszögű sikháromszög megoldása.

látoltabb alkalmazásnak örvend. A mennyiben minden síkidomnak alkotó eleme a háromszög, ennek számítva megoldásával foglalkozunk legelőször is.

*Goniometriai függvények.* Ha az $\alpha$ szög (1. ábra) egyik szárára az $AB = a$, $A'B' = a'$ merőlegeseket húzzuk, akkor a keletkező háromszögek hasonlósága folytán az $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, az $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$, a $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ viszonyok állandók, míg a szög ugyanaz marad. E viszonyok tehát a szöglet nagyságának mintegy mértékéül szolgálhatnak, s definitio folytán tehetünk:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}\,; \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{a}{b}\,; \quad \text{cotang}\,\alpha = \frac{b}{a}\,;$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}\,;\ \sec\alpha = \frac{c}{b},$$

hol a sinus $\alpha$, cosinus $\alpha$, tangens $\alpha$, cotangens $\alpha$, cosecans $\alpha$, secans $\alpha$ a hat trigonometriai szám vagy függvény nevét viseli. Látnivaló, hogy ezek egymástól nem függetlenek, a mennyiben egyetlenegynek az ismeretéből a többi öt kiszámítható. A gyakorlatban rendesen az első négyet szoktuk alkalmazni és az egyes szögletek számára táblázatosan összeállítani.

A felírt definitiókból következnek tüstént eme egyenletek:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{cotang}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha. \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$$

a melyek segítségével minden trigonometriai függvény kifejezhető a többi által.

*Derékszögű síkháromszög megoldása.* A definitióból tüstént következnek a derékszögű síkháromszög megoldásai (1. ábra):

$$a = c\sin\alpha \text{ vagy } a = b\operatorname{tang}\alpha\,;\quad b = c\cos\alpha \text{ vagy } b = a\operatorname{cotg}\alpha\,;$$

szóval: a befogó egyenlő az átfogó és a befogóval szemben fekvő szög sinusának vagy a befogó mellett fekvő szög cosinusának szorzatával; vagy a befogó egyenlő a másik befogó és az elsővel szemben fekvő szög tangensének, vagy a mellette fekvő szög cotangensének szorzatával.

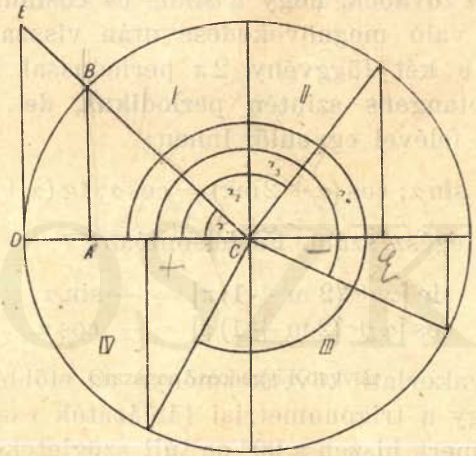
*Complementáris szög goniometriai függvényei.* Felírván a trigonometriai számokat a $\beta$ szöglet számára is (1. ábra), és tekintve, hogy $\beta = 90^0 - \alpha$, tüstént meggyőződünk, a következő egyenletek helyességéről:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha\,;\ \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha\,;$$

$$\operatorname{tang}(90^0 - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha},\ \operatorname{cotg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha},$$

melyek összefüggést adnak két complementáris szög trigonometriai függvényei között.

*Goniometriai függvények előjelei és ábrázolása.* Ha a trigonometriai függvényeket irányított mennyiségekül tekintjük, az $\alpha$ szöglet $90^0$-nál nagyobb is lehet. Megegyezvén abban, hogy a sinus$\alpha$ positiv legyen, ha a BA merőlegest lefelé húzzuk, cos$\alpha$ szintén positiv, ha a merőleges a szögletnek nem meghosszabbított szárát találja, tüstént meggyőződünk arról (2. ábra), hogy a sinus positiv az első és második negyedben, negativ a harmadik és negyedikben, s hogy a cosinus positiv az első és utolsó negyedben, negativ a másodikban és harmadikban.




2. ábra. A goniometriai függvények előjelei.

Ezen szabályból és az ábra egyszerű megtekintéséből adódik azután a következő táblázat, mely kiváló fontossággal bír, ha valamely trigonometriai számhoz a helyes negyedben fekvő szögletet keressük:

$$\sin(90^0 \pm \alpha) = + \cos\alpha \qquad \cos(90^0 \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$$
$$\sin(180^0 \pm \alpha) = \mp \sin\alpha \qquad \cos(180^0 \pm \alpha) = - \cos\alpha$$
$$\sin(270^0 \pm \alpha) = - \cos\alpha \qquad \cos(270^0 \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$$
$$\sin(360^0 \pm \alpha) = \pm \sin\alpha \qquad \cos(360^0 \pm \alpha) = + \cos\alpha$$

$$\text{tang}(90^0 \pm \alpha) = \mp \text{cotg}\,\alpha$$
$$\text{tang}(180^0 \pm \alpha) = \pm \text{tang}\,\alpha$$
$$\text{tang}(270^0 \pm \alpha) = \mp \text{cotg}\,\alpha$$
$$\text{tang}(360^0 \pm \alpha) = \pm \text{tang}\,\alpha$$

E táblázatból következik, hogy valamely szög helyes meghatározására mindig két függvényének előjele szükséges, a mennyiben pl. $\sin \alpha$ negativ volta mellett csak azt mutatja, hogy a szöglet vagy a III., vagy a IV. negyedben fekszik. Ha azonban tudjuk azt is, hogy $\cos \alpha$ positiv, akkor $\alpha$ szög csak a IV. negyedben fekhetik. Mivel továbbá bármily szög $360^0$-kal kisebbíthető vagy nagyobbítható, úgy a táblázat utolsó vízszintes sora azt is mutatja, hogy

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,;\ \cos(-\alpha) = +\cos\alpha\,;\ \operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Látni való továbbá, hogy a sinus és cosinus szögletének $360^0 = 2\pi$-vel való megnövekedése után visszanyeri eredeti értékét: azaz e két függvény $2\pi$ periodussal szakaszos; a tangens és cotangens szintén periodikus, de periodusa az előbbinek csak felével egyenlő. Innen:

$$\sin(\alpha \pm 2m\pi) = \sin\alpha;\ \cos(\alpha \pm 2m\pi) = \cos\alpha;\ \operatorname{tg}(\alpha \pm m\pi) = \operatorname{tang}\alpha,$$

hol m bármily egész szám. És hasonlóan:

$$\sin[\alpha \pm (2m+1)\pi] = -\sin\alpha$$
$$\cos[\alpha \pm (2m+1)\pi] = -\cos\alpha.$$

Fontos gyakorlati következménye az előbbi táblázatnak még az is, hogy a trigonometriai táblázatok csak $45^0$-ig számolandók ki; mert hiszen a $90^0$-on túli szögletek goniometriai függvényei ismétlődnek és a $45^0$-on túli szögek függvényei a $45^0$-nál kisebb pótlószög complementáris függvényeivel fejezhetők ki. Írva ugyanis $\alpha = 45^0 - \varphi$, következik a pótszögekre vonatkozó egyenletekből:

$$\sin(45^0 + \varphi) = \cos(45^0 - \varphi)\,;\ \cos(45^0 + \varphi) = \sin(45^0 - \varphi)\,;$$
$$\operatorname{tang}(45^0 + \varphi) = \operatorname{cotg}(45^0 - \varphi).$$

A 2. ábra a goniometriai függvények ábrázolását is adja; ha ugyanis a kör sugarát 1-nek veszszük, akkor

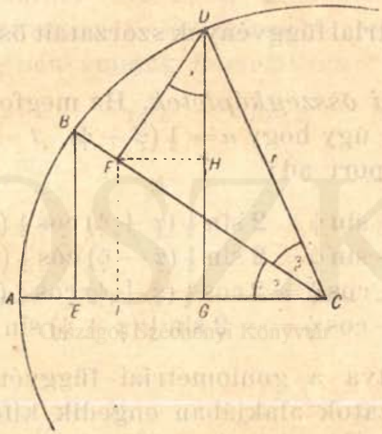
$$\sin\alpha_1 = \frac{AB}{1},\ \cos\alpha_1 = \frac{AC}{1}\,;\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{DE}{1}$$

által fejezhetők ki, úgy hogy az AB, AC, DE vonalak sorban a sinus, cosinus és tangens értékeinek mértékéül szolgálhatnak. Látnivaló továbbá, hogy az $\alpha_1$ szöglethez tartozó BD ív nagyobb minden esetben, mint az AB sinus, de kisebb, mint az ED tangens, és innen

$$\operatorname{tang} \alpha_1 > \operatorname{arc} \alpha_1 > \sin \alpha_1.$$

Ha $\alpha_1$ mindinkább kisebbedik, akkor a sinus és tangens mindjobban simul az ívhez, a cosinus mindjobban megközelíti a kör sugarát, azaz az egységet; úgy hogy minden képzelhető kisebb szögleteknél látni való, hogy $\sin \alpha = \operatorname{tang} \alpha = \operatorname{arc} \alpha$; $\cos \alpha = 1$ . . ha $\alpha$ a 0 felé közeledik.

*Szögösszeg goniometriai függvényei.* A goniometriai függvények rendkívül változatosan átalakíthatók, ha tekintetbe vesz-




3. ábra. Szögösszeg goniometriai függvényei.

szük, hogy két szög összegének, vagy különbségének függvényei az egyes alkotószögek függvényei által fejezhetők ki.

Legyen a 3. ábrában r a kör sugara, $BE = r \sin \alpha$; $CE = r \cos \alpha$; $CF = r \cos \beta$, $DF = r \sin \beta$ és $DG = r \sin(\alpha + \beta)$; $CG = r \cos(\alpha + \beta)$ lévén a $DG = DH + HG = DH + FI$ és $CG = CI - GI = CI - FH$ egyenletek kiszámításából közvetlenül következik:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Ha $\beta$ helyébe $-\beta$-t írunk, lesz hasonlóképen:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

és a megfelelő egyenletek elosztása által:

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}.$$

*Goniometriai függvények szorzatképletei.* Ugyanezen egyenletek összeadása és kivonása által keletkeznek a következő formulák:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha \sin\beta &= \tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)\\
\sin\alpha \cos\beta &= \tfrac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha - \beta)\\
\cos\alpha \sin\beta &= \tfrac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}\sin(\alpha - \beta)\\
\cos\alpha \cos\beta &= \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

melyek a goniometriai függvények szorzatait összegekre bontják.

*Goniometriai összegképletek.* Ha megfordítva $\alpha + \beta = \varphi$, $\alpha - \beta = \psi$-t írunk, úgy hogy $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, $\beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$, a megelőző egyenletcsoport ad:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi + \sin\psi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)\\
\sin\varphi - \sin\psi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\\
\cos\varphi + \cos\psi &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)\\
\cos\varphi - \cos\psi &= -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi),
\end{aligned}$$

melyek megfordítva a goniometriai függvények összegét és különbségét szorzatok alakjában engedik kifejezni.

Hasonlóképen kapunk, ha tekintettel vagyunk arra, hogy tangens és cotangens a sinus és cosinus viszonya által állítható elő:

$$\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin(\varphi \pm \psi)}{\cos\varphi \cos\psi}; \quad \operatorname{cotg}\varphi \pm \operatorname{cotg}\psi = \pm \frac{\sin(\varphi \pm \psi)}{\sin\varphi \sin\psi}.$$

*A kétszeres szög függvényei.* Ha végül a megelőző egyenletcsoportban $\beta = \alpha$, akkor a következő vonatkozásokhoz jutunk:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \qquad \text{vagy} \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \qquad\qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\text{tang}\, 2\alpha = \tfrac{1}{2}\, \text{tg}\,(45^0 + \alpha) - \tfrac{1}{2}\, \text{tg}\,(45^0 - \alpha)$$

$$\text{tg}\, \alpha = \tfrac{1}{2}\, \text{tg}\,(45^0 + \frac{\alpha}{2}) - \tfrac{1}{2}\, \text{tg}\,(45^0 - \frac{\alpha}{2})$$

$$\text{cotg}\, 2\alpha = \tfrac{1}{2}\, \text{cotg}\, \alpha - \tfrac{1}{2}\, \text{tg}\, \alpha \qquad \text{cotg}\, \alpha = \tfrac{1}{2}\, \text{cotg}\, \frac{\alpha}{2} - \tfrac{1}{2}\, \text{tg}\, \frac{\alpha}{2}$$

melyek összefüggést adnak a szög és annak kétszerese, vagy a fél s az egész szög között.

Ezzel koránt sincs kimerítve a lehetséges transformatiók tömege, de az adottakkal az előforduló esetek mindegyike már könnyen egyszerűsíthető.

*Néhány speciális érték.* A goniometriai függvények gyakran előforduló speciális és fejben is tartható értékei a következő táblázatban vannak összeállítva:

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\text{tg}\,\alpha$ | $\text{cotg}\,\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\text{cosec}\,\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0 | $+1$ | 0 | $+\infty$ | $+1$ | $+\infty$ |
| 30 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 2 |
| 45 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ |
| 60 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ |
| 90 | 1 | 0 | $\pm\infty$ | 0 | $+\infty$ | $+1$ |
| 180 | 0 | $-1$ | 0 | $\mp\infty$ | $-1$ | $\infty$ |
| 270 | $-1$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 | $\infty$ | $-1$ |
| 360 | 0 | $+1$ | 0 | $\mp\infty$ | $+1$ | $+\infty$ |

*A síkháromszög megoldása.* A síkháromszög a, b, c (4. ábra) a h magasság meghúzásával két derékszögű háromszögre bomlik, melyek mindegyike megoldható. Ugyanis:

$$h = a\, \sin\beta \text{ és ugyancsak } h = b\, \sin\alpha,$$

a miből

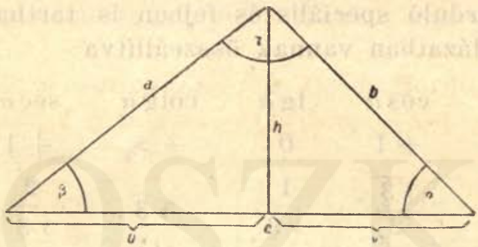
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ és hasonlólag } \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

azaz: a síkháromszögben két oldal úgy aránylik, mint ezen oldalokkal szemben fekvő szögek sinusai. Alkalmazandó, ha összefüggés keresendő két oldal és két szög között. A harmadik szöglet mindig adódik a többi kettőből, mivel amaz ezeknek 180°-ra való kiegészítője.

Ugyanezen tételből következik az $1 = 1$ egyenlet hozzáadása és levonása által:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta} = 2\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\beta};$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta} = 2\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\beta},$$




4. ábra. A sík ferdeszögű háromszög megoldása.

vagy elosztás útján:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \text{ és hasonlóképen: } \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$\text{és } \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}.$$

Szavakban: Bármely háromszögben két oldal összegének és különbségének viszonya ugyanaz, mint ezen oldalokkal szemben fekvő szögek fél összegének és különbségének tangenseiből vett viszony. Alkalmazható, ha két oldal s az általuk bezárt szög ismeretes. Ha ugyanis a, b és $\gamma$ adva van, akkor $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, tehát $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ismeretes; $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ kiszámítható a nevezett tétel segítségével, tehát egyenként $\alpha$ és $\beta$ is.

Ugyancsak a 4-ik ábrából következik, hogy $u = a\cos\beta$, $v = b\cos\alpha$ és $u + v = c$ lévén:

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha,$$

vagy ha u és v-t az a és b oldalnak c-re vett vetületének nevezzük: minden háromszögben az egyik oldal a többi kettő vetületének összegével egyenlő. Hasonlóképen áll:

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta; \quad b = c \cos\alpha + a \cos\gamma.$$

Ha a három egyenletet sorban c-vel, —a-val s —b-vel szorozzuk és összeadunk, lesz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

s hasonlóképen, a betűk sorban való (cyclikus) változtatása által:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta,$$

mely tétel a Carnot-féle tétel nevét viseli s a Pythagoras-féle tételnek ferdeszögű háromszögekre való általánosítása. Alkalmazzuk, ha adott három oldalból a szögletek határozandók meg.

Bevezetvén az oldalösszeget:

$$a + b + c = 2s,$$

a Carnot-féle tétel némi átalakítás után könnyen a következő egyenletekhez vezet:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

és ennek folytán: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

A háromszög területe is nehézség nélkül fejezhető ki trigonometriai úton (4. ábra):

$f = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ és hasonlóan: $f = \frac{1}{2}ac\sin\beta$; $f = \frac{1}{2}ba\sin\gamma$.

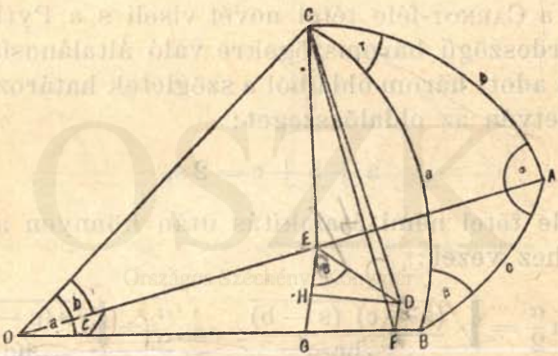
Írva: $\gamma = 2\frac{\gamma}{2}$ és $\sin\frac{\gamma}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$-t az oldalösszegek tételével kifejezve, leend:

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

## Gömbi háromszögtan.

Ha valamely gömb középpontján át három síkot fektetünk, melyek egymáshoz, illetve $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$ szögletekkel hajlanak, akkor ezek gömbi háromszöget metszenek ki, melynek ívei legnagyobb körök darabjai s a keletkezett ABCO pyramis (5. ábra) lapjainak a, b és c szögletét mérik, míg a háromszög szögletei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a síkok hajlásaival azonosak.

A legnagyobb körökből alkotott gömbi háromszög trigonometriája a mathematikai geographia egyik legfontosabb segédeszköze.




5. ábra. A ferdeszögű gömbi háromszög megoldása.

*A gömbi háromszög megoldása.* Bocsássuk C pontból az AOB síkra a CD merőlegest s ennek talppontjából OA-ra és OB-re a DE és DF merőlegeseket. Összekötvén az E és F pontokat C-vel, állíthatjuk, hogy CE és CF is merőleges, illetőleg OA-ra és OB-re.

Ha a gömb sugarát egységül választjuk, akkor a mondottak szerint

$$CE = \sin b\,;\ OE = \cos b\,;\ CF = \sin a\,;\ OF = \cos a,\ \text{és}$$

$$CED = \alpha,\ CFD = \beta,$$

mivel valamely élre emelt merőlegesek szöge az élben összefutó lapok szögét méri. Ha még E-ből merőlegest húzunk OB-re, akkor DEG = c, mivel DE és EG merőlegesen állanak az AOB = c szög száraira. Végül pedig álljon DH is merőlegesen EG-re. A segédvonalak által képezett háromszögekből következik:

$$CD = CE \sin\alpha = \sin b \sin\alpha$$
$$DE = CE \cos\alpha = \sin b \cos\alpha.$$

Hasonlóképen áll a CDF háromszögből:

$$CD = CF \sin\beta = \sin a \sin\beta$$
$$DF = CF \cos\beta = \sin a \cos\beta$$

CD két értékének összehasonlítása tüstént a következő egyenletre vezet:

$$\sin a \sin\beta = \sin b \sin\alpha, \text{ vagy } \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

mely a betűk cyclikus permutatiója által a többi darab számára is felírható:

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ és } \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Ez a gömbi háromszögek sinustétele, mely szerint két oldal sinusa úgy aránylik, mint ezen oldalokkal szemben fekvő szögek sinusai.

Áll továbbá a H-nál derékszögű DEH háromszögből:

$$DH = DE \sin c = \sin b \cos\alpha \sin c.$$

Ellenben a G-nél derékszögű EGO háromszögben

$$OG = OE \cos c = \cos b \cos c,$$

és mivel

$$OF = OG + GF = OG + DH,$$

írhatunk:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

és a betűk cyclikus felcserélése által

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$$

Az oldalokra vonatkozó cosinustétel azt mondja, hogy minden oldal cosinusa egyenlő a mellette fekvő két oldal cosinusának szorzatával, hozzátéve ugyanezen oldalok sinusainak s az általuk bezárt szög cosinusának szorzatát.

Ezen két tételből számtalan más alakú és összetételű egyenlet vezethető le. Mielőtt ezeket levezetnők, mutassuk ki az összefüggést a sík és gömbi trigonometria formulái között.

Ha valamely gömbi háromszög oldalai a gömb sugarához képest vég nélkül kicsinyek, akkor ezen háromszög síknak tekinthető. Legyen tehát a, b és c minden képzelhetőnél kisebb, úgy, hogy az ívek magukkal a sinusokkal legyenek felcserélhetők. A szögletekre természetesen ez nem áll, mivel ezek végtelen kis háromszögekben is véges értékekkel bírnak.

A sinustételből ily módon közvetlenül következik:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}; \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

mi a síkháromszögtan megfelelő tételével azonos.

A félszögek bevezetése által a cosinustétel a következő alakban is írható:

$$1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = \left(1 - 2\sin^2\frac{b}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\frac{c}{2}\right) + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Ha most a, b, c végtelen kicsinysége folytán az íveket a sinusokkal felcseréljük, és az $a^2$, $b^2$, $c^2$ kis mennyiségek mellett a még kisebb $b^2 c^2$ szorzatot elhanyagoljuk, lesz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

mely a síktrigonometriai Carnot-tétellel azonos. A síktrigonometria tehát végtelen nagy sugarú gömbön érvényes sphaerikus trigonometriával azonos.

Ha az első cosinustételben cos c-t ezen tételek harmadikából behelyettesítjük, lesz:

$$\cos a = \cos b(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma) + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

A szorzás után fellépett $1 - \cos^2 b$ helyébe $\sin^2 b$-t téve és sin a sin b-vel elosztva, lesz:

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos\gamma + \frac{\sin c}{\sin a}\cos\alpha$$

és a törtnek a sinustételből adódó értékének beállítása után:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \cot\alpha$$
$$\cot a \sin c = \cos c \cos\beta + \sin\beta \cot\alpha$$

$$\cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \sin\gamma \cot\beta$$
$$\cot b \sin c = \cos c \cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta$$
$$\cot c \sin a = \cos a \cos\beta + \sin\beta \cot\gamma$$
$$\cot c \sin b = \cos b \cos\alpha + \sin\alpha \cot\gamma$$

mely egyenletcsoport az első egyenlet betűinek cyclikus felcseréléséből keletkezett.

Ha az előbbi átmeneti egyenletben nem csak $\frac{\sin c}{\sin a}$, hanem $\frac{\sin b}{\sin a}$-t is kifejezzük a sinustétel segélyével, lesz:

$$\cos a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \cos b \cos\gamma + \cos\alpha \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

vagy

$$\cos a \sin\beta = \cos b \cos\gamma \sin\alpha + \cos\alpha \sin\gamma$$

és hasonlóan, a helyébe b-t, $\alpha$ helyébe $\beta$-t léptetve:

$$\cos b \sin\alpha = \cos a \cos\gamma \sin\beta + \cos\beta \sin\gamma.$$

Ha ezen egyenletet $\cos\gamma$-val megszorozzuk és az előzőbe beállítjuk, kellő összevonás után $\sin\gamma$-val osztunk, lesz:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma \cos\alpha + \sin\gamma \sin\alpha \cos b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c.$$

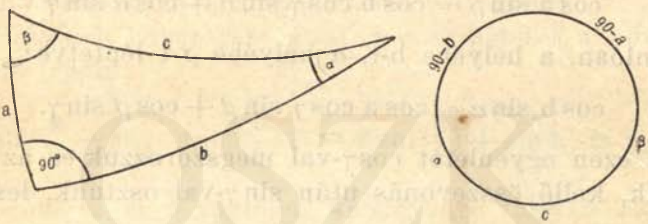
Az előbbi egyenletcsoport a cotangenstétel, az utolsó a szögletekre vonatkozó cosinustétel nevét viseli. Minthogy ez egyenletekben cos a, cos b, vagy cos c mindig valódi tört, következik, hogy a gömbháromszög szögösszege mindig nagyobb 180°-nál.

*Derékszögű gömbháromszög megoldása.* A derékszögű háromszögekre vonatkozó tételeket megkapjuk a levezetettekből, ha az egyik szögletet, pl. $\gamma$-t 90°-nak tételezzük fel. Ezzel $\sin\gamma = 1$ és $\cos\gamma = 0$ lesz. A nyert tételek és azok számos átalakításai a következő Napier nevét viselő szabály szerint tarthatók emlékezetben:

Írjuk a derékszögű háromszögnek darabjait — úgy a mint egymásután következnek és a derékszög kihagyásával — valamely pentagramm csúcspontjaira (6. ábra), úgy azonban, hogy a két befogó értékei helyett azoknak 90°-ra való kiegészítését veszszük. Akkor mondhatjuk: minden darab cosinusa egyenlő a mellette fekvő két darab cotangenseinek szorzatával, vagy a két szemben fekvő darab sinusainak szorzatával. Ily módon pl.

$$\cos c = \cot\alpha \cot\beta \quad \text{vagy} \quad = \cos a \cos b$$
$$\cos\beta = \cot c \operatorname{tg} a = \cos b \sin\alpha \quad \text{s í. t.}$$

*Logarithmusos transformatió.* A derékszögű háromszögekre vonatkozó formulák, valamint a sinustétel goniometriai függvényei csak szorzatokban és osztatokban fordulnak elő, tehát logarithmikus számításra alkalmas alakban, a többi tétel ellenben goniometriai függvényekből alkotott összegeket tartalmaz. A gyakorlott számoló ugyan a később leirandó additiós és subtractiós logarithmusokkal éppoly gyorsan számol, mintha az egyenletek közvetlenül logarithmusos számolásra be volná-



6. ábra. A derékszögű gömbháromszög megoldása.

nak rendezve, mindazonáltal megadjuk az erre vonatkozó szabályokat, melyeket legjobb lesz egy példában bemutatni. Ha

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

egyenlet logarithmusos számolásra berendezendő, akkor tegyük:

$$\cos c = m \cos\mu\,; \quad \sin c \cos\alpha = m \sin\mu,$$

mi minden esetben eszközölhető; c és $\alpha$ adva lévén, természetesen $\mu$ és m is számítható, mert

$$m^2 = \cos^2 c + \sin^2 c \cos^2\alpha \quad \text{és} \quad \operatorname{tang}\mu = \cos\alpha \operatorname{tang} c.$$

m azonban nem ez egyenletek elsejéből szokott meghatároztatni, hanem a már ismert $\mu$ segítségével, vagy az

$$m = \frac{\cos c}{\cos\mu} \quad \text{vagy} \quad m = \frac{\sin c \cos\alpha}{\sin\mu}$$

egyenlet által. Gyakorlati szempontból mindig azon egyenletet választjuk, melynek nevezője a nagyobb. Az adott egyenlet most már a

$$\cos a = m(\cos b \cos \mu + \sin b \sin \mu) = m \cos(b - \mu)$$

alakot ölti és logarithmusokkal minden további nehézség nélkül megoldható.

*Oldalösszeg tétele, Gauss egyenletei és Napier analogiái.* Részben a logarithmikus számítás könnyítése kedveért, részben pedig a gömbi háromszög minden darabjának egyöntetű megoldása kedveért vezette le Gauss és Napier a Gauss-féle egyenletek és Napier-féle analogiák nevét viselő egyenletcsoportokat. Mi ugyan a következőkben nem fogjuk általában véve használni, de azért ismeretük fontos, mert más művek gyakran kizárólagosan ezekre hivatkoznak.

Kiindulunk az oldalokra vonatkozó cosinustételből, melyből következik:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Ha ezen egyenletet az $1 = 1$ egyenlethez adjuk, illetve belőle levonjuk és a szükséges egyszerű reductiókat végezzük, nyerjük a következőket:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{és } \cos \frac{\alpha}{2} = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}\right]^{\frac{1}{2}}$$

és ha ismét az oldalok összegét bevezetjük

$$a + b + c = 2s$$

alakjában, s a keletkező formulákban a betűket cyclikusan permutáljuk, lesz:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \left[\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \left[\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \left[\frac{\sin(s - a) \sin(s - c)}{\sin a \sin c}\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \left[\frac{\sin s \sin(s - b)}{\sin a \sin c}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \left[\frac{\sin(s - a) \sin(s - b)}{\sin a \sin b}\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \left[\frac{\sin s \sin(s - c)}{\sin a \sin b}\right]^{\frac{1}{2}}$$

melyek teljesen megfelelnek a hasonló szabású síktrigonometriai formuláknak; ha ugyanis a, b, c, tehát s is, minden képzelhetőnél kisebb, akkor ismét a 13. oldal egyenletrendszeréhez jutunk, mely végtelen nagy sugarú gömbre, tehát síkra érvényes.

Ez utóbbi egyenletekből képezzük $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ és $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ szorzatokat; ezek lesznek:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\left[\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin s}{\sin c}\left[\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

A két egyenlet összege ad:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin s+\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{2\sin\left(s-\frac{c}{2}\right)\cos\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}$$

vagyis

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{c}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ugyanezen egyenletek különbsége ellenben ad:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\left(s-\frac{c}{2}\right)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}$$

vagyis

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{c}{2}=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ha most az előbbi rendszerben hasonlóan képezzük

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

szorzatokat, s ezekkel hasonló műveleteket hajtunk végre, kapjuk sorban a már levezetettekkel együtt a Gauss-féle egyenleteket:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma=\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma=\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c.$$

És ha végül ezen egyenletek kettejét elosztjuk, nyerjük a Napier-féle analogiákat:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

A sinustételt alkalmazzuk, ha két oldal és egy szemben fekvő szög, vagy két szög és egy szemben fekvő oldal van adva; az oldalokra vonatkozó cosinustételt, ha a három oldal vagy két oldal s a köztük levő szög ismeretes; a szögekre vonatkozó cosinustétel, ha a három szög, vagy két szög s a köztük fekvő oldal adott; a cotangenstételt, ha egy oldal s a mellette fekvő két szöglet, vagy két oldal s a bezárt szög ismeretes. Az oldalösszegekre vonatkozó tételek jó szolgálatot tesznek, ha az adott három oldalból mindhárom szöglet sorban vezetendő le; a Napier-féle analogia első párja, ha két szög s a befoglalt oldal adott s nem a harmadik szöglet, hanem a többi két oldal keresendő. Végre alkalmazzuk a Napier-féle analogiák utolsó párját, ha két oldal s a befoglalt szög ismeretes, s nem a harmadik oldal, hanem a többi két szög származtatandó le.

*Gömbi két- és háromszög területe.* Gömbkétszögön értjük azon idomot, melyet két, a gömb középpontján átmenő és $\alpha$ szöglettel egymáshoz hajló sík a gömbfelületből lemetsz. A két határoló legnagyobb (fél-)kör természetesen ugyanazon $\alpha$ szögletet képezi egymással és világos, hogy ennek területe úgy áll az egész gömb felületéhez, mint az $\alpha$ szöglet a 360°-hoz; innen

$$f = \frac{4 r^2 \pi}{360^0} \alpha = \frac{\pi}{90} r^2 \alpha,$$

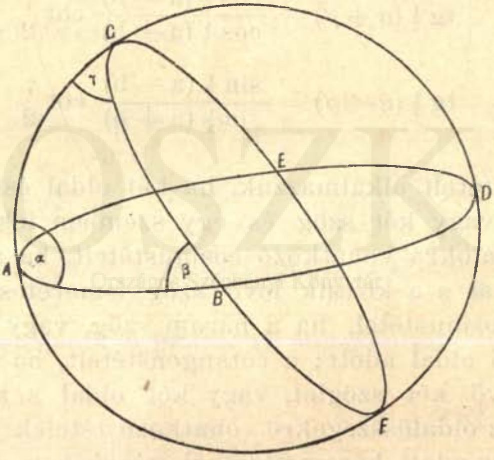
ha $\alpha$ fokokban van kifejezve.

Ebből könnyen vezethető le a gömbháromszög területe is. Az ABC gömbi háromszög (7. ábra) oldalait egész, legnagyobb körökre kiegészítvén, nyerünk három kétszöget, nevezetesen:

$$ABC + BCD = \frac{\pi}{90} r^2 \alpha$$

$$ABC + ACE = \frac{\pi}{90} r^2 \beta$$

$$ABC + ABF = \frac{\pi}{90} r^2 \gamma$$




7. ábra. A gömbháromszög területe.

Ha az ABC területet f-vel jelöljük, akkor tekintve, hogy $BCD + ACE + ABF + f$ a gömb felével egyenlő, lesz összeadás által:

$$f = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180} \pi r^2$$

$\alpha + \beta + \gamma - 180^0$ a gömbi háromszög szögösszegének többlete $180^0$ felett, vagy a gömbi excessus; ha ezt E-vel jelöljük, lesz:

$$f = \frac{\pi}{180} r^2 E,$$

hol természetesen E szintén fokokban fejezendő ki.

Ha a három oldal ismeretes, akkor a sphaerikus excessus L'Huilier Simon formulája szerint:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \left\{ \operatorname{tg}\frac{s}{2} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ez Heron [illegible]

mint ez az előbb adott oldalösszegre vonatkozó formulákból következtethető.

## II. FEJEZET.

## Logarithmusos számolás.

A goniometriai függvények, igen kevés speciális értéktől eltekintve, irrationális számok és a velük való számolás nagyon terhes, hacsak logarithmusokat nem alkalmazunk. Innen van, hogy rendesen nem magukat a goniometriai függvényeket, hanem azok logarithmusait szokás táblázatokba elrendezni.

Különben is kivánatos, hogy kivétel nélkül minden számítás logarithmuskönyv segítségével eszközöltessék, mi nemcsak nagyobb kényelmet s gyorsaságot, hanem biztosságot is kölcsönöz. Igen kevés kivételtől eltekintve (fokmérés s hasonló geodéziai műveletek) négyjegyű logarithmuskönyv elegendő, mert ennek pontossága még mindig $\frac{1}{60}$%, a mit mérésünk csak ritka esetben ér el. Azonkívül pedig, mint látni fogjuk, majdnem kivétel nélkül végtelen sorokra bontás által minden képlet két részre osztható; az egyik vagy éppenséggel ismeretes, vagy logarithmusok nélkül is könnyen meghatározható, a másik ellenben csak apró correctiós tagokat tartalmaz, melyek már négyjegyű logarithmusokkal is kellő pontossággal megállapíthatók. A mérés pontosságán túlmenő kiszámolt tizedesek nem reálisak, hanem csak látszólagos pontosság, inkább károsak, mint hasznosak, mert ámítanak. $\frac{1}{6000}$

*Logarithmustábla berendezése.* A geographusnak hosszabb tapasztalat után leginkább „Vierstellige Logarithmen von Friedrich Wilhelm Rex, Stuttgart“ ajánlhatók. A számok Brigg-féle logarithmusai 1-től 1000-ig két lapon, s a könnyebb interpolatio kedveért 1000-től 2000-ig egy második lapon foglalnak helyet. A következő táblázat az antilogarithmusok tábláját adja, mely haszonnal akkor alkalmazandó, midőn valamely számítás eredménye gyanánt a logarithmusok egész sorához a megfelelő numerusok keresendők. Valamint ugyanis a logarithmustáblában a folyó számok az argumentum és a logarithmus a táblaérték, úgy itt a logarithmus a vezető argumentum, mely szerint a hozzá tartozó folyó számok vannak elrendezve.

A gyakrabban előforduló számadatok vagy állandók táblázatjában különösen $\frac{\pi}{180}$ és $\frac{180}{\pi}$-ed érdekel bennünket. A gyakorlati életben ugyanis az íveket szögmérték szerint mérjük, holott a mathematikában csak az ív szerepel mérték gyanánt. Mivel $360^0$ aequivalens $2\pi$-vel, világos, hogy $\frac{\pi}{180}$ valamely szögnek ívértéke, és $\frac{180}{\pi}$ valamely ívnek szögértéke; a szöglet mindkét esetben fokokban van kifejezve. Ha a szöglet másodperczekben vagy perczekben volna kifejezve, akkor 180 helyett 60 vagy 3600-szor 180 állana. Különösen gyakran fordul elő az $1''$-nak megfelelő ív, illetve annak reciprok értéke $\rho'' =$ 206 264, 8. Mivel ugyanis kis szögletek sinusai és tangensei magukkal az ívekkel arányosak, áll:

$$\sin \alpha = 206\ 264,8\, \alpha,$$

ha $\alpha$ ívmásodperczekben kifejezett igen kis szöglet. A később közlendő soralakokban a goniometriai függvények számára x alatt mindig az x szögnek megfelelő ív értendő. A kényelmes és gyors átváltozásra a mondott logarithmuskönyv különben a IV. táblával szolgál, mely a fokokat és azok részeit részben ívre, részben időben is kifejezi.

Ha tehát valamely körnek sugara r, akkor annak $\varphi$ nagyságú centrális szögletéhez

$$l = \frac{\pi}{180}\, r\varphi$$

ív tartozik. És viszont, ha l valamely r sugarú körben valamely ívnek hossza, akkor hozzá

$$\varphi = \frac{180}{\pi}\, \frac{l}{r}$$

centrális szöglet tartozik.

A húrok táblázata különös előnyöket biztosít a körosztásnál, tehát főképen a térképvetítésben, mert éppen a húr hossza az, melyet körzőbe kell venni, hogy a kört beoszszuk. Ha pl. valamely r cm sugárral biró kör 10—10°-ra osztandó, akkor egyszerűen a 10°-nak megfelelő húr, 0,1743 r cm veendő körzőbe és felviendő a kör kerületére.

A IV. táblában foglalt goniometriai függvények (és nem azok logarithmusai) három tizedessel számítva elég jó átnézetet adnak és becses szolgálatot is tesznek, ha becslésről vagy durva felszámolásról van szó. A pontos goniometriai számításokhoz való az V. tábla, mely a goniometriai függvények logarithmusait adja.

A szögletek fokokkal, perczekkel és tizedperczekkel fejeztetnek ki; ez utóbbiak 60-nal való szorzással másodperczekre, a másodperczek 60-nal való osztás által tizedperczekre változtathatók. Mindkét átszámítás a legegyszerűbben fejben is eszközölhető.

A táblázat oly berendezéssel bír, hogy a log sin és log tang 0°-tól 2°-ig tizedperczenkint, 2°-tól 12°-ig perczenkint van adva. Azután az összes függvények logarithmusai 0°-tól 90°-ig 10 perczenkint vannak táblázva. Az egyes függvények a tábla fején és alján ugyanazon sorrendben: log sin; log tang; log cotg; log cos következnek egymásra, mi a kényelemre és a felkeresés biztonságára nagyon fontos. Igen kis szögleteknél a sinus vagy tangens által biztosított pontosság az ívmásodpercz századrészéig, 45° körül a tangens a szögleteket 24″ pontossággal adja, mi ránk nézve minden esetben elegendő. 0° és 2° között a log sin és log tang táblázatát egy 2A feliratú rovat kiséri, mely igen kis szögletek sinusának és tangensének pontos kiszámítására való. E szám az eltérést adja, mely kis szögletek sinusának s tangensének arányosságától van.

*Additió s subtractió logarithmus.* Végül pedig két igen fontos és kényelmes táblázat következik, melylyel két szám logarithmusából ezen két szám összegének vagy különbségének logarithmusa található, s mely számtalanszor alkalmazandó, a nélkül, hogy némely képletnek úgynevezett logarithmusos számításra való berendezésével kellene törődnünk.

Legyen ugyanis adva log a és lg b és keressük log (a + b) és lg(a — b), a nélkül, hogy a és b a logarithmustáblákból kikerestetnék. Ha a > b, akkor képezzük

$$\frac{b}{a} = x \text{ vagy } \lg b - \lg a = \lg x$$

úgy, hogy x mindig tört legyen, azaz log x : — ∞ és 0 között mozogjon. Írjunk most:

$$\log(a + b) = \lg\left[a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right] = \log a + \lg(1 + x)$$

és hasonlóképen

$$\log(a - b) = \lg\left[a\left(1 - \frac{b}{a}\right)\right] = \log a - \lg\frac{1}{1 - x}.$$

Ha tehát két táblázatunk van, melyek log x argumentummal $\lg(1 + x)$ és $\lg\frac{1}{1 - x}$-et adnak, akkor két szám különbségének vagy összegének logarithmusa minden további nélkül felírható, mert a log x-hez tartozó $\lg(1 + x)$, illetve $\lg\frac{1}{1 - x}$ a nagyobb szám logarithmusához adandó, illetve belőle levonandó. A különbségek képzésére szolgáló táblázatok kissé bővebbek, mert az egységhez közel járó x esetében $\lg\frac{1}{1 - x}$ igen rohamosan változik.

Különösen a sphaerikus trigonometriai formulákban hasznos e táblázat; ha pl. mint később, az időmeghatározás képlete

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

alakban van adva, akkor

$$\log a = \lg\sin\varphi + \lg\sin\delta \quad \text{és} \quad \log b = \lg\cos\varphi + \lg\cos\delta + \lg\cos t,$$

egyenként logarithmusos számításra alkalmas, de log sin h már csak e táblázatok segélyével számítható kényelmesen. Ha mellőzni akarnók, akkor visszafelé kellene keresni a-t és b-t, és miután a könyvek csak log sin h-t adják, nem pedig sin h-t magát is, ismét a + b logarithmusa volna veendő. Az összegezési és levonási táblázatok ~~egy~~ két keresést feleslegessé tesznek.

Az összes táblák berendezésének nem csekély előnye, hogy a táblaértékek különbségeinek átlagosa minden sor végén d (differentia) felirat alatt külön ki van tüntetve.

*Logarithmusos számítás berendezése.* Még igen nagy számjegyekkel operáló számítás is minden esetben úgy rendezhető be, hogy az imént ismertetett logarithmuskönyv teljesen elegendő pontosságot ad. Legrosszabb esetben is a képlet két részre bontható; törzstartalma akkor rendesen valamely más úton már jól ismert szám, másik része apró javító tag. A tényleges kivitel rendesen végtelen, gyorsan összetartó sorba való bontásban áll.

Így pl. a sphaeroidikus Földön a meridiánfok hossza $\varphi$ geographiai szélességben

$$T = \frac{\pi}{180} a (1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}},$$

mely egyenlet kiszámítására bizony a hétjegyű logarithmuskönyv sem sok. De mivel $e^2$ igen kis szám, körülbelül $\frac{1}{150}$-del egyenlő, a képlet

$$T = \frac{\pi}{180} a \left[1 - e^2 (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi) + \frac{15}{8} e^4 \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \frac{4}{5}) + \ldots\right]$$

alakban is írható. Itt $\frac{\pi}{180} a$ az aequatorfok hossza, mely ismeretes, míg a

$$\frac{\pi}{180} ae^2 (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi); \quad \frac{15}{8} \frac{\pi}{180} ae^4 \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \frac{4}{5}) \ldots$$

correctiós tagok már kis mennyiségek, melyek négyjegyű logarithmussal könnyen és biztosan kiszámíthatók.

Ha szögértékeket kell keresnünk goniometriai függvényekből, akkor azt előszeretettel mindig a tangensből eszközöljük, mert ez aránylag a körnegyed minden pontjában a leggyorsabban változik. Igen kis szögleteknél a sinus, $90^0$-hoz igen közel járó szögeknél a cosinus ugyanazon szolgálatokat teszi. Ellenben egészen hibás eredményekhez juthatunk, ha kis szögleteket a cosinusból, nagyokat a sinusból határoznánk meg.

Későbbi alkalommal meg fogjuk pl. határozni a horizont depresszióját $\varphi$. A megfelelő ábra közvetlenül csak a

$$\cos\varphi = \frac{r}{r+h}$$

vonatkozáshoz vezet, melyben r a földsugár, h a Föld méretéhez képest mindig igen kis magasság, melyben a szem a Föld szine felett áll. Ennek pontosabb kiszámítására legalább is nyolcz számjegyű logarithmuskönyv kellene. Ha azonban

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

egyenleteket tekintetbe veszszük, akkor

$$2\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{h}{r+h},$$

melynek kiszámítására a négyjegyű logarithmuskönyv több mint elegendő.

*Természetes (Napier) logarithmusok.* A mathematikában soha nem szerepel a 10-es alappal biró, úgynevezett Brigg-féle logarithmus, hanem a természetes (Napier-féle) logarithmus, melynek alapja az ismeretes, a következő végtelen sor által definiált irrationalis szám: m:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2,718\,281\,8285\ldots$$

Ha x az y-nak természetes logarithmusa, akkor

$$y = e^x$$

egyenlet áll fenn, s ha ez egyenletből a természetes és a Brigg-féle logarithmusokat vesszük, lesz:

$$x = \text{lognat}\, y \text{ és } x \lg e = \lg y,$$

a miből összehasonlítás után származik:

$$\text{lognat}\, y = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg y.$$

Ha ellenben u a v-nek Brigg-féle logarithmusa, akkor hasonlóképen

$$v = 10^u$$

és mindkét logarithmus vétele után

$$u = \lg v \quad \text{és} \quad u \,\mathrm{lgnat}\, 10 = \mathrm{lgnat}\, v,$$

a miből ismét

$$\lg v = \frac{1}{\mathrm{lgnat}\, 10} \mathrm{lgnat}\, v.$$

A két rendszer logarithmusa tehát egyszerű szorzás által változtatható át egymásba, s ha

$$m = 0{,}434\ 2945 = \log e = \frac{1}{\mathrm{lgnat}\, 10}; \quad \frac{1}{m} = 2{,}302\ 5851$$

a Brigg-féle logarithmusok modulusa, akkor

$$\log y = m \,\mathrm{lognat}\, y; \text{ és } \mathrm{lognat}\, y = \frac{1}{m} \log y.$$

*Logarithmusos képletek.* A logarithmikus számítás legfontosabb képletei különben a fent közlött egyenletből következnek.

$$\lg(a\,b\,c\,d\,..) = \lg a + \lg b + \lg c + ..$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

$$\lg a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log a$$

$$a^x = b \text{ egyenlet megoldása: } x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

## III. FEJEZET.

## Végtelen sorok.

A legfontosabb szerepet játszák az alkalmazott mathematikában a végtelen összetartó sorok, egyrészt, mert sorbabontás által sok, alakjára nézve kényelmetlen kifejezés egyszerűbb alakra hozható, különösen, ha a kifejezésben egy kis értékkel biró tag szerepel, mely hatványainak igen gyors fogyása miatt, gyors convergentiát biztosít, s másrészt, mert sorok alakjában nagyon sok, előre ismeretlen kifejezésű menynyiség vagy jelenség állítható elő, miáltal sok esetben jobb hiján legalább empirikus képletekhez jutunk.

*A convergentia kriteriumai.* A convergentiának gyakrabban előforduló criteriumai a következők. Legyen

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \text{ in infin.}$$

valamely végtelen sor. Ha az $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ viszony az n növekedésével az egységnél kisebb értékhez közeledik, akkor a sor összetartó; összetartó akkor is, ha bizonyos tagtól kezdve a tagok mindinkább fogynak és előjelük váltakozó, valamint, ha bizonyos tagtól kezdve a tagok kisebbek, mint valamely más, convergensnek ismert sor tagjai. A binomiális sor

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

minden m számára convergens, ha $-1 < x < 1$, azaz, ha x positiv vagy negativ valódi tört.

*A sorok főbb alakjai.* Rendesen hatványsorokat és periodikus sorokat szoktunk megkülönböztetni; az első képe

$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

a másodiké:

$$s = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

és illetve valamely x változónak hatványai, vagy sokszorosainak sinusai és cosinusai szerint halad.

Az analyzisben leggyakrabban előforduló soralakokat a következőkben állítjuk egybe, érvényességük feltételeivel együtt.

*Newton binom sora.* Általánosan ismeretes a Newton-féle binomiális tétel, melyet igen gyakran fogunk igénybe venni. Szerinte

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots$$

n tetszőleges, $-1 < x < +1$.

Ha n egész szám, akkor a sor véges, ha ellenben negativ vagy akár positiv, de tört, akkor a sor végtelen. E szerint már minden kéttagú sorba fejthető, mert

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n\left[1+\frac{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right)^1+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+..\right]$$

alakban írható, ha $a > b$.

Gyakran előforduló speciális esetek:

$$(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-.. \quad ..+(-1)^m x^m+...$$

$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-.. +(-1)^m(m+1)x^m+..$$

$$(1+x)^{+\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-..$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{1.1.3.5..(2m-3)}{2.4.6..2m}x^m+..$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+...$$

$$+(-1)^m\frac{1.3.5.7..(2m-1)}{2.4.6.8..2m}x^m+..$$

$$-1 < x < 1.$$

Hasonló, csak a hatványok koefficienseiben különböző összetartó sorokba bontható minden függvény bizonyos érvényességi határon belül.

*Exponenses és logarithmusos sorok.* Exponenses és logarithmusos sorok a következők:

$$a^x = 1+\frac{1}{1}x\,\text{lgnat}\,a+\frac{1}{1.2}x^2(\text{lgnat}\,a)^2+\frac{1}{1.2.3}x^3(\text{lgnat}\,a)^3+..$$

$$+\frac{1}{1.2.3..m}x^m(\text{lgnat}\,a)^m+..\quad a>0,\ \infty > x > -\infty.$$

Ha $a = e$, azaz $\text{lognat}\,a = 1$, akkor egyszerűbben

$$e^x = 1+\frac{1}{1}x+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{1.2.3}x^3+...+\frac{1}{1.2.3..m}x^m+..$$

$$+\infty > x > -\infty.$$

Mindkét sor minden véges x számára érvényes. Ha $x = 1$, akkor ezen sor definiálja a természetes logarithmusok alapját:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m} + \ldots$$
$$= 2.718\ 281\ 8285\ldots$$

A legfontosabb logarithmikus sor a következő:

$$\text{lognat}\,(1 + x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}x^m + \ldots \quad 1 \geqq x > -1$$

Ha x helyébe $-x$ lép, akkor

$$\text{lognat}\,(1 - x) = -\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots \quad - \frac{1}{m}x^m - \ldots$$
$$1 > x \geqq -1$$

s a két sor különbsége ad:

$$\text{lgnat}\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{\frac{1}{1}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2m+1}x^{2m+1} + \ldots\right\},$$
$$+1 > x > -1.$$

Ezen sor pl. a barometrikus magassági formula egyik átalakításánál szerepel.

Ha $e^x = z$-t teszünk, tehát $\cancel{z} = \text{lgnat}\,\cancel{x}$, akkor az exponenses sorból következik:

$$z = 1 + \frac{1}{1}\text{lgnat}\,z + \frac{1}{1.2}(\text{lgnat}\,z)^2 + \frac{1}{1.2.3}(\text{lgnat}\,z)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots m}(\text{lgnat}\,z)^m + \ldots \quad \infty > \text{lgnat}\,z > -\infty$$

mely sor segítségével minden logarithmushoz a hozzátartozó szám állapítható meg.

*Goniometriai sorok.* A fontosabb goniometriai sorok a következők:

$$\sin x = x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}x^5 - \ldots$$

$$+(-1)^m \frac{1}{1.2.3.(2m+1)} x^{2m+1} + .. \quad \infty > x > -\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{1.2.3.4} x^4 - .. + (-1)^m \frac{1}{1.2.3...(2m)} x^{2m} + ..$$

$$\infty > x > -\infty,$$

melyek ismét minden véges x számára érvényesek. E sorokban természetesen x mindig ívet, nem szöget jelent. Ha tehát y valamely fokokban adott szöglet volna, akkor $x = \frac{\pi}{180} y$ volna teendő.

$$\text{tang}\, x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + ... \quad \frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$$

$$\text{cotang}\, x = \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 - \frac{2}{945} x^6 - \frac{1}{4725} x^8 + ...\right\} \pi > x > -\pi$$

Mindezen sorok valamely x ívhez tartozó goniometriai függvényeket adnak. Megfordítva, a megfelelő goniometriai számokból kapjuk a hozzátartozó íveket a következő sorok által:

$$x = \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.5.6} \frac{\sin^7 x}{7} + ...$$

$$+ \frac{1.3.5.7..(2m+1)}{2.4.6..\,2m} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + ... \quad \frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{1} - \frac{1}{2} \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{1.3}{2.4} \frac{\cos^5 x}{5} - ...$$

$$- \frac{1.3.5..(2m-1)}{2.4...(2m)} \frac{\cos^{2m+1} x}{2m+1} - ... \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{1}{1} \text{tang}\, x - \frac{1}{3} \text{tg}^3 x + \frac{1}{5} \text{tg}^5 x - \frac{1}{7} \text{tg}^7 x + ..$$

$$+(-1)^m \frac{1}{2m+1} \text{tg}^{2m+1} x + .. \quad \frac{\pi}{4} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{4}.$$

Nagyon fontosak végül azon sorok, melyek valamely sinus vagy cosinus hatványait ugyanazon szöglet sokszorosainak sinusával és cosinusával fejezik ki.

Ha n páros szám, akkor

$$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\alpha + ..$$

$$+\frac{n(n-1)..(\frac{n}{2}+2)}{1.2..(\frac{n}{2}-1)}\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{n(n-1)..(\frac{n}{2}+1)}{1.2..\frac{n}{2}}$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\sin^n\alpha = \cos n\alpha - \frac{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\alpha - ..$$

$$+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{n(n-1)..(\frac{n}{2}+2)}{1.2..(\frac{n}{2}-1)}\cos 2\alpha + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n(n-1)..(\frac{n}{2}+1)}{1.2..\frac{n}{2}}.$$

Ha ellenben n páratlan szám, akkor

$$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\alpha + ..$$

$$+\frac{n(n-1)..\frac{1}{2}(n+5)}{1.2..\frac{1}{2}(n-3)}\cos 3\alpha + \frac{n(n-1)..\frac{1}{2}(n+3)}{1.2..\frac{1}{2}(n-1)}\cos\alpha.$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}2^{n-1}\sin^n\alpha = \sin n\alpha - \frac{n}{1}\sin(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\alpha + ...$$

$$+(-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}\frac{n(n-1)..\frac{1}{2}(n+5)}{1.2..\frac{1}{2}(n-3)}\sin 3\alpha$$

$$+(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{n(n-1)...\frac{1}{2}(n+3)}{1.2...\frac{1}{2}(n-1)}\sin\alpha.$$

A megfordított feladatot, midőn t. i. valamely ív sokszorosának sinusa és cosinusa ugyanez ív sinusainak és cosinusainak hatványa által fejezendő ki, a következő sorok oldják meg:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\alpha\ \sin^4\alpha - ...$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha \sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\alpha \sin^3 a +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\alpha \sin^5\alpha - ..$$

Ha az exponentiális sorban x helyébe xi-t írunk, hol $i = \sqrt{-1}$ az imaginarius egység, és meggondoljuk, hogy

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i;\ i^4 = +1,$$

akkor

$$e^{xi} = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3.4}x^4 - ...$$

$$+ i\left\{\frac{1}{1}x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}x^5 - ...\right\},$$

a mi a sinus és cosinus sorával összehasonlítva, ad:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Hasonlóképen áll

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

és megfordítás által:

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi});\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi}),$$

mely egyenleteknek különösen a térképvetítés elmélete veszi sűrűn hasznát.

## IV. FEJEZET.

## Interpolatio.

Igen gyakran előfordul azon eset, hogy valamely jelenség bizonyos hozzátartozó argumentumok egyes értékei számára ismeretes, a nélkül, hogy a függés módját képlet alakjában meg tudnók mondani. Az interpolatio felel meg arra, hogy a jelenség számbeli értéke mekkora egy a lemért közbe eső, de közvetetlen mérés által nem ismert argumentum számára. Ismerhetjük pl. az inga-nehézségek közepét az egyes parallelák számára $10^0$-ról $10^0$-ra. A kérdés, mekkora a gyorsulás valamely közbeeső helyen?

Ha a tünemény y számértéke az x mennyiségtől függ, akkor állítsuk össze táblázatosan az $x_0$, $x_1$, $x_2$..-hez tartozó $y_0$, $y_1$, $y_2$ értékeket. Legyenek az x-ek egyenközűek, azaz $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \ldots$ Képezzük az y-ok egymásra következő különbségeit: $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$.. és nevezzük ezeket első differentiáknak $\triangle^1 y$; képezzük ezen első differentiák különbségét hasonlóképen, mindig a megelőzőt levonván a következőből, s legyen e második különbség $\triangle^2 y$; s í. t. képezzük a magasabbrendű különbségeket is; akkor

$$y_r = y_0 + \frac{r}{1} \triangle^1 y + \frac{r(r-1)}{1.2} \triangle^2 y + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} \triangle^3 y + \ldots$$

ha r a köznek azon törtrésze, mely számára az $y_r$ értékét keressük. A sor véges, ha r egész szám; végtelen volna, ha r tört. De a gyakorlatban a sor mindig megszakad, a mennyiben a magasabbrendű különbségek csakhamar állandókká válnak, és ezzel a következő különbségi sor csupa zerusból áll.

Ha a sorozat az x argumentumokra vonatkozólag nem egyenlő közű, és ismét $x_0$, $x_1$, $x_2$.. $x_n$ argumentumokhoz $y_0$, $y_1$, $y_2$.. $y_n$ értékek tartoznak, akkor

$$y_x = A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n,$$

hol

$$A_0 = [(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots] : [(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots]$$

$$A_1 = [(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots] : [(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots]$$

$$A_2 = [(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots] : [(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots]$$

$$\vdots$$

$$A_m = [(x-x_0)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\ldots]$$

$$: [(x_m-x_0)\ldots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\ldots]$$

Tisztán graphikusan is járhatunk el, mi természetesen mérsékeltebb pontossággal igen gyorsan czélhoz vezet.

Vízszintes vonalra felrakunk tetszésszerinti hosszegységgel ugyanazon pontból hosszúságokat, melyek sorban $x_0$, $x_1$, $x_2$..-vel arányosak. A végpontokban merőlegeseket emelünk s ezekre rárakjuk az $y_0$, $y_1$, $y_2$.. értékekkel arányos hosszakat. A végpontokat lehetőleg folytonos és az egyes pontokon átmenő görbével kötvén össze, akkor ezen görbe az ismeretlen analytikai kifejezésnek képe, és minden tetszőleges x-hez kivehető a hozzátartozó y, mint az x végpontjában a görbe vonalig emelt merőleges hossza. Az eljárás különösen a meteorologiában és az orometriában szokásos, de a tudomány minden ágában alkalmas.

## V. FEJEZET.

## Egyenletek megoldása.

Az imént tárgyalt eljárásra vezethető vissza a magasabb fokú vagy transcendens egyenletek numerikus megoldása is. Legyen

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

valamely n-edfokú egyenlet, melyben az $A_0$, $A_1 \ldots A_n$ koefficiensek számbelileg ismert mennyiségek. Írva

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

világos, hogy minden tetszőlegesen választott x értékhez, pl. $x = -\infty$, $x = -10$, $x = 0$, $x = +10$, $x = +\infty$ s í. t., y-nak egész meghatározott értéke tartozik. És természetes, hogy azon x lesz az egyenletnek egyik gyöke, mely az y-t zerussá teszi.

Rakjuk tehát ismét vízszintes egyenesre egy pontból kiindulólag x-nek tetszőlegesen választott értékeit és e hosszak végpontjában emelt merőlegesekre a megfelelő, a fenti egyenletből könnyen számítható y értékeket. Az így nyert pontokat összekötve, görbe vonalat kapunk, melynek az x-ek egyenesével való metszési pontjainak távolsága a közös kezdőponttól az egyenlet gyökei lesznek, a mennyiben e metszési pontokban tényleg $y = 0$. Ily módon természetesen csak a reális gyököket kapjuk; az imaginarius gyökökre, egynéhány térképvetítési problemától eltekintve, a mi tárgyunkban szükség nincs. Ha a rajz kellő méretekben és elég sürűn következő x-ek számára készült, akkor a pontosság is elég nagy. Ha mindazonáltal pontosabb megoldást kivánunk, akkor alkalmazhatjuk az úgynevezett regula falsit, mely csakhamar a gyöknek egész tetszőlegesen pontos értékére vezet.

Legyen ugyanis a rajzból kivett gyök értéke $x = x_0$. Ennek behelyettesítése az adott egyenletbe (a rajz mérsekelt pontossága miatt) nem fogja y-t nullá tenni, hanem bizonyára hagy valamely positiv vagy negativ eltérést a nulltól, melyet $y_0'$-vel fogunk jelölni, s melyet az eredmény hibájául lehet tekinteni. Tegyünk most $x_0$ helyébe kevéssel más $x_0 + \triangle x$ értéket, mely új, de lehetőleg az előbbivel ellentett jelű hibához $y_0''$-hoz vezet. Hogy ennek elérésére $x_0$-t nagyobbítani vagy kisebbíteni kell-e, azt a rajz magától is mutatja meg. Ezek után a következő okoskodás áll: Míg az x $x_0$-tól $x_0 + \triangle x$-ig változott, azaz $\triangle x$ változást szenvedte, addig az $A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$ kifejezés $y_0'$-től $y_0''$-re változott át. Ennélfogva kérdés tehető: Hogy kell változtatni az x-et, hogy a kifejezés $y_0'$-től 0-ra változzék? Ha $\xi$ ezen még ismeretlen változás, akkor

$$\frac{\xi}{\triangle x} = \frac{y_0'}{y_0' - y_0''}, \text{ a miből: } \xi = \triangle x \frac{y_0'}{y_0' - y_0''}$$

és $x = x_0 + \xi$ már pontosabb érték, melylyel a számítás teljesen a leírt módon ismétlendő mindaddig, míg a régi és új $\xi$ között a számítás előre megkivánt pontosságán belül többé eltérés nincs.

Ez eljárást pl. a Mollweide-féle vetületnél, vagy a Kepler-féle problemában alkalmazni is fogjuk.

## VI. FEJEZET.

## Empirikus képletek.

Minthogy a mathematika tanai szerint megszabott terjedelmen belül minden függvény convergens sorba bontható, azért megfordítva is mondhatjuk, hogy minden természeti tünemény annak argumentuma — mondhatnók oka szerint sorban állítható elő. Míg azonban a sor koefficiensei minden esetben meghatározhatók a priori is, ha a függés módja analytikailag adott, addig az utóbbi esetben a sor koefficienseinek számértékei csak a megfigyelésből vezethetők le. Mindazonáltal eljutunk ily módon legalább empirikus törvényhez, mely a megfigyelés közén belül a lemért mennyiségét okának függvénye gyanánt állítja elő, s mely sok esetben az igazi törvény felfedezéséhez is vezethet, vagy arra legalább útmutatást adhat.

*Hatványsorok.* Ha pl. valamely pálcza hossza $0^0$ hőmérséklet mellett $l_0$ és hosszúságát t hőfok mellett is kivánjuk ismerni, írhatunk:

$$l = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$$

Szóval, a pálczának a hőmérséklettől függő hossza e hőmérséklettől valamelyes ismeretlen függésbe van téve, melyről mindazonáltal annyit tudunk, hogy bármily alakú is legyen e függés, végtelen, t hatványai szerint haladó sor alakjában előállítható, ha csak $a_0$, $a_1$ .. koefficiensek a megfigyeléseknek megfelelőleg meg vannak határozva.

Az $a_0$ koefficiens értelme közvetlenül adódik, mert $t = 0$ téve marad $l_0 = a_0$, azaz $a_0$ a pálczának hossza $t = 0^0$ mellett. Ha most sorban $t_1$, $t_2$, $t_3$ .. hőmérsékleteknél az $l_1$, $l_2$, $l_3$ .. hosszakat észleltük, akkor állanak ezen egyenletek:

$$l_1 = l_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 + \ldots$$

$$l_2 = l_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 + a_3 t_2^3 + \ldots$$

$$l_3 = l_0 + a_1 t_3 + a_2 t_3^2 + a_3 t_3^3 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a melyekben $a_1$, $a_2$, $a_3$ .. az ismeretlenek. Belőlük természetesen annyi koefficiens állapítható meg, a hány megfigyelés áll rendelkezésünkre.

A jelen példában a gyakorlat azt mutatta, hogy gyakorlati igényeknek teljesen megfelelőleg $a_2$, $a_3$ .. koefficiensek nullával tehetők egyenlőkké, úgy hogy a hőokozta terjedés (empirikus) törvénye így szól:

$$l = l_0 + a_1 t = l_0 \left(1 + \frac{a_1}{l_0} t\right)$$

hol $\frac{a_1}{l_0}$ a hosszegységre vonatkoztatott kiterjedési koefficiens.

Egészen hasonló, de két változó hatványai szerint haladó sor az, mely a Tissot-féle vetületet szabja meg. A sor koefficienseit úgy határozzuk meg, hogy a térkép szög-, terület- és távolságtorzítása lehetőleg kicsiny legyen.

*Periodicus sorok; Fourier-féle sor.* Még fontosabb szerepet játszik a mathematikai geographiában azon sor, mely valamely változó szöglet többszöröseinek sinusa és cosinusa szerint halad s a mely — mint azt az analyzis kimutatja — kivétel nélkül minden alakú függésnek ábrázolására alkalmas, még akkor is, ha az ábrázolandó jelenség nem is periodikus jellegű, mint a sinus vagy cosinus maga, sőt akkor is, ha nem is folytonos, hanem szakadozott. E sorban a koefficiensek is sokkal kényelmesebben fejezhetők ki, mint a hatványsorban, mely n koefficiens meghatározására általában véve n lineáris egyenletnek n ismeretlennel való megoldását követeli. Mint látni fogjuk, ezen sornak koefficiensei mind mechanikai úton, planimeter segítségével vezethetők le.

Legyen f (x) az x változó szögletnek egészen tetszőleges függvénye (pl. f (x) a nehézségi gyorsulás x parallel körön s í. t.) és tegyük fel egyelőre, hogy x: nulla és $\pi$ érték között váltakozhatik. Ha a szóban forgó közt n egyenlő részre osztjuk, akkor az osztási pontokban sorban az x

$$x = \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n} \ldots (n-1)\frac{\pi}{n}$$

értékeket veszi fel és gondoljuk, hogy ezen pontokban az f(x) függvény megfelelő értékei

$$f(\frac{\pi}{n}), f(2\frac{\pi}{n}) \ldots f\left[(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

számbelileg szintén ismeretesek. Akkor feladatunk lesz az

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots \text{ in infinitum}$$

végtelen sor koefficienseinek meghatározása.

*Fourier-féle sinus-sor.* E czélra írjuk fel az f (x) függvény értékeit az egyes x közök végpontjai számára:

$$f(\frac{\pi}{n}) = b_1 \sin\frac{\pi}{n} + b_2 \sin 2\frac{\pi}{n} + b_3 \sin 3\frac{\pi}{n} + \ldots + b_k \sin k\frac{\pi}{n} + \ldots$$

$$f(2\frac{\pi}{n}) = b_1 \sin 2\frac{\pi}{n} + b_2 \sin 2.2\frac{\pi}{n} + b_3 \sin 3.2\frac{\pi}{n} + \ldots + b_k \sin k2\frac{\pi}{n} + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f(i\frac{\pi}{n}) = b_1 \sin i\frac{\pi}{n} + b_2 \sin i\frac{2\pi}{n} + b_3 \sin i\frac{3\pi}{n} + \ldots + b_k \sin i\frac{k\pi}{n} + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Az első egyenletet megszorozzuk $2\sin m\frac{\pi}{n}$, a másodikat $2\sin m\frac{2\pi}{n}$.. az i-ket $2\sin m\frac{i\pi}{n}$-nel s az eredményeket összeadjuk. A baloldal értéke lesz:

$$2f(\frac{\pi}{n})\sin m\frac{\pi}{n} + 2f(\frac{2\pi}{n})\sin m\frac{2\pi}{n} + 2f(\frac{3\pi}{n})\sin m\frac{3\pi}{n} + \ldots$$

$$+ 2f\left[(n-1)\frac{\pi}{n}\right]\sin(n-1)\frac{m\pi}{n} = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(i\frac{\pi}{n})\sin m\frac{i\pi}{n},$$

hol i számára, mint ezt az összegezés jele mellé írt egyenletek mutatják, sorban minden szám teendő $i=1$ és $i=n-1$ között. A jobb oldal valamelyik tagja, pl. a k-ik lesz:

$$b_k \left\{ 2\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{m\pi}{n} + 2\sin 2\frac{k\pi}{n}\sin 2\frac{m\pi}{n} + \ldots \right.$$
$$\left. + 2\sin(n-1)\frac{k\pi}{n}\sin(n-1)\frac{m\pi}{n} \right\}.$$

Az ismert

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

trigonometriai egyenlet segélyével $b_k$ koefficiense felbontható s a következő alakot ölti:

$$\cos(k-m)\frac{\pi}{n} + \cos 2(k-m)\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)(k-m)\frac{\pi}{n}$$

$$-\left\{\cos(k+m)\frac{\pi}{n} + \cos 2(k+m)\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)(k+m)\frac{\pi}{n}\right\}$$

és ezekben mindkét sor oly cosinusfüggvények összege, melyek argumentuma számtani haladványt képez. Lássuk tehát előbb az

$$s = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(n-1)\theta$$

sor összegét, melyet röviden s-vel jelöltünk. Ha a sort $2\cos\theta$-val megszorozzuk, lesz:

$$2s\cos\theta = 2\cos\theta\cos\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + \ldots + 2\cos\theta\cos(n-1)\theta,$$

vagy tekintettel

$$2\cos\alpha\,\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

ismeretes vonatkozásra:

$$2s\cos\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos(n-2)\theta$$
$$+ \cos 2\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos n\theta,$$

a mi tekintettel s értékére nyilván így is írható:

$$2s\cos\theta = 1 - \cos(n-1)\theta + s + \cos n\theta - \cos\theta + s$$

s a miből

$$s = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos(n-1)\theta - \cos n\theta}{2(1-\cos\theta)} = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)\theta\,\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$s = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

következik. Ha ezen összegképletet a mi sorunk számára alkalmazzuk, akkor egyszer $\theta = (k-m)\frac{\pi}{n}$, másodszor pedig $\theta = (k+m)\frac{\pi}{n}$ teendő.

Legyen először k és m egymástól különbözők, azaz $k \gtrless m$. A nevezőben szereplő $\sin\frac{\theta}{n}$ nem lehet nulla, mert $(k \pm m)\frac{\pi}{n}$ sem lehet az, mert $\frac{k \pm m}{n}$ valódi tört. $b_k$ koefficiense ezek szerint két sor különbsége, melyben $\theta = (k-m)\frac{\pi}{n}$ és $\theta = (k+m)\frac{\pi}{n}$, tehát e koefficiens értéke lesz:

$$-\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)(k-m)\frac{\pi}{n}}{2\sin(k-m)\frac{\pi}{2n}} - \left\{-\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)(k+m)\frac{\pi}{n}}{2\sin(k+m)\frac{\pi}{2n}}\right\}$$

vagy az $\tfrac{1}{2}(2n-1)(k \pm m)\frac{\pi}{n} = (k \pm m)\pi - (k \pm m)\frac{\pi}{2n}$ szög felbontása után:

$$\frac{\sin(k-m)\pi\cos(k-m)\frac{\pi}{2n}-\cos(k-m)\pi\sin(k-m)\frac{\pi}{2n}}{2\sin(k-m)\frac{\pi}{2n}}$$

$$-\frac{\sin(k+m)\pi\cos(k+m)\frac{\pi}{2n}-\cos(k+m)\pi\sin(k+m)\frac{\pi}{2n}}{2\sin(k+m)\frac{\pi}{2n}}$$

Ámde $k-m$ és $k+m$ mindig egész szám, $(k-m)\pi$ és $(k+m)\pi$ sinusa tehát mindig null és a két tört számlálójának első tagja elesik. Bármi legyen azonkívül k és m, a két szám különbsége és összege mindig vagy egyszerre páros, vagy egyszerre páratlan. Tehát $\cos(k-m)\pi$ és $\cos(k+m)\pi$ vagy mindkettő $+1$, vagy mindkettő $-1$, és e szerint $b_k$ koefficiense

$$\tfrac{1}{2}\cos(k+m)\pi-\tfrac{1}{2}\cos(k-m)\pi$$

lévén, mindenesetre 0. A $b_k$ koefficiens tehát egyáltalában véve 0, ha k és m egymástól különbözők.

Ha azonban $m=k$, akkor a $b_k$ koefficiens eredeti sora lesz:

$$\cos 0+\cos 2.0+\cos 3.0+..+\cos(n-1).0$$

$$-\left\{\cos 2m\frac{\pi}{n}+\cos 2.2m\frac{\pi}{n}+..+\cos(n-1)2m\frac{\pi}{n}\right\}$$

s ennek első része nyilván $n-i$ egységgel, tehát $n-1$-gyel egyenlő. Második része ismét s, ha benne $\theta=2m\frac{\pi}{n}$, tehát

$$s=-\tfrac{1}{2}+\frac{\sin(2n-1)\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=-\tfrac{1}{2}+\frac{\sin 2m\pi\cos m\frac{\pi}{n}-\cos 2m\pi\sin m\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}$$

Ámde a páros $2m$ számára $\sin 2m\pi=0$ és $\cos 2m\pi=+1$, úgy hogy

$$s=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=-1$$

és ezért $b_m$ koefficiense $n-1+1=n$ leend.

Az eredeti egyenletrendszernek a mondott factorokkal való szorzásából keletkező eredménye tehát a bal oldalon

$$2\sum_{i=}^{i=n-1} f(i\frac{\pi}{n})\sin i\frac{m\pi}{n},$$

a jobb oldalon pedig minden egyes $b_1$, $b_2$.. factor szorzója 0, kivéve azt az egyet, melynek indexe maga is m. Ennek factora, mint éppen találtuk, n lévén, áll

$$b_m = \frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1} f(i\frac{\pi}{n})\sin i\frac{m\pi}{n},$$

hol egy bizonyos m számára sorban $i = 1, 2 .. n-1$ veendő, míg maga m is az $m = 1, 2, 3 .. \infty$ számok sorát futja meg. Ily módon a sor koefficiensei nagyon könnyen adódnak.

*Fourier-féle cosinus-sor.* Egészen hasonló módon mutathatjuk ki, hogy az f(x) függvény cosinusok szerint haladó sorba is bontható:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + ..$$

Valamivel rövidebben jutunk azonban czélhoz, ha a már talált eredményből kiindulva f(x) helyett a 2f(x)sin x függvényt bontjuk sinussorba. Az eredmény:

$$2f(x)\sin x = b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + .. + b_m\sin mx + ..,$$

melyben most

$$b_m = \frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1} 2f(i\frac{\pi}{n})\sin i\frac{\pi}{n}\sin i\frac{m\pi}{n}$$

vagy más alakban írva

$$b_m = \frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1} f(i\frac{\pi}{n})\cos(m-1)\frac{\pi}{n} - \frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1} f(i\frac{\pi}{n})\cos(m+1)\frac{\pi}{n}.$$

Ha most hasonlóan, mint a sinussorban

$$a_m = \frac{2}{n}\sum_{0}^{n-1} f(i\frac{\pi}{n})\cos m\frac{i\pi}{n},$$

hol azonban $i = 0, 1, 2 ..$ lehet, mivel $\cos 0 = 1$, véges érték, akkor ezen sor $b_m$ koefficiense számára a következő relatio állítható fel:

$$b_m = a_{m-1} - a_{m+1}.$$

És ezen vonatkozásnak az eredeti sorba való bevitele ad:

$$2f(x)\sin x = (a_0 - a_2)\sin x + (a_1 - a_3)\sin 2x + (a_2 - a_4)\sin 3x + ..$$

vagy más elrendezésben

$$2f(x)\sin x = a_0 \sin x + a_1 \sin 2x + a_1(\sin 3x - \sin x)$$
$$+ a_3(\sin 4x - \sin 2x) + ..$$

Ha a sinusok különbségeit szorzatokra bontjuk, $\sin 2x$ helyett $2\sin x \cos x$-et írunk és mindkét oldalon $2\sin x$-xel osztunk, lesz végre

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ..$$

*Fourier-féle teljes sor.* Mindkét soralak egyelőre $0 < x < \pi$ határok között érvényes; a sinussor szerinti kifejtést akkor fogjuk használni, ha az előállítandó függvény jelét is változtatja, szóval, ha $f(-x) = -f(x)$. A cosinuskifejtést ellenben akkor alkalmazzuk, ha az előállítandó függvény maga is a cosinus sajátságával bír, azaz jelváltást nem szenved, ha argumentuma jelt vált; vagy ha $f(-x) = +f(x)$ marad. Ha azonban még ismeretlen természetű függvényt kell ily sorba bontanunk, nem tudhatjuk eleve, vajjon páros vagy páratlan-e, s ekkor általánosabban járunk el. Bármilyen legyen az $f(x)$ függvény természete, bizonyos, hogy az $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ páros, mert ha x helyébe $-x$ lép, a kifejezés előjele nem változik; ezen függvény tehát mindenesetre cosinussorra bontható. Ellenben $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ minden esetben páratlan függvény, mert x-nek $-x$-szel való felcserélése értékét negativvá teszi. Ezen függvény tehát mindenesetre sinussorba bontható. Mivel a levezetett két függvény összege $f(x)$, áll egészen általánosan

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + ..$$

mely sorban a koefficiensek

$$a_m = \frac{2}{n} \sum_0^{n-1} f\left(i\frac{\pi}{n}\right) \cos i \frac{m\pi}{n} \quad \text{és} \quad b_m = \frac{2}{n} \sum_0^{n-1} f\left(i\frac{\pi}{n}\right) \sin i \frac{m\pi}{n}$$

által vannak adva

Ezen sorbafejtés most már nyilván nemcsak $\pi > x > 0$, hanem $+\pi > x > -\pi$ határok között is érvényes leend. De még sokkal tágabb határokra terjeszthető ki a sor érvényessége. Ha ugyanis z oly változót jelent, mely $-c$ és $+c$ tetszőleges közben mozoghat, akkor

$$x = \frac{\pi}{c} z$$

mindenesetre $-\pi$ és $+\pi$ között marad. Ennek folytán végül általánosabban azt is írhatjuk:

$$f\left(\frac{\pi}{c} z\right) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\frac{\pi}{c} z + a_2 \cos\frac{2\pi}{c} z + a_3 \cos\frac{3\pi}{c} z + \ldots$$

$$+ b_1 \sin\frac{\pi}{c} z + b_2 \sin\frac{2\pi}{c} z + b_3 \sin\frac{3\pi}{c} z + \ldots \quad + c > z > -c$$

$$a_m = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(i\frac{c}{n}\right) \cos m \frac{ic}{n} \quad \text{és} \quad b_m = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(i\frac{c}{n}\right) \sin m \frac{ic}{n}$$

és e mellett n tetszőlegesen nagy, sőt végtelen nagynak is vehető. Ez utóbbi esetben, melynek gyakorlatilag természetesen csak akkor van értelme, ha az $f(x)$ függvény analytikailag adott, nem pedig megfigyelésekből szerkesztendő, a sor teljesen azonos magával a függvénynyel és ennélfogva annak minden tulajdonságával bír. Ellenkező esetben, azaz véges n mellett a soralak a függvénynek természetesen csak közelítő értékét képviseli.

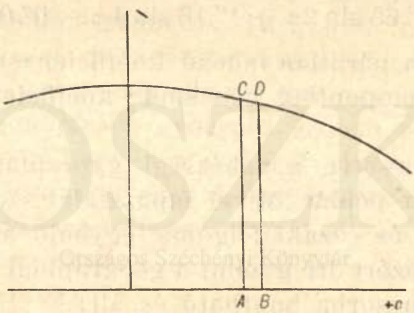
Könnyen győződünk meg róla, hogy a soralak koefficiensei planimeterrel is meghatározhatók. Ha ugyanis a függvényt görbe vonal által ábrázoljuk, akkor az abscissa-tengely $-c$ és $+c$ között fekvő része azon egyenes, a melyen z mozoghat és $f(z)$ a mindenkori z-hez tartozó ordináta (8. ábra). A köz n-ed része $\frac{c}{n}$ azon végtelen kis AB alap, melyen az AC $= f\left(i\frac{c}{n}\right)$ ordináta áll, feltéve, hogy n minden képzelhetőnél nagyobb. Ez esetben $\frac{ic}{n}$ egyszerűen z-vel tehető ugyanis egyenlővé, mert n végtelen nagysága folytán $\frac{c}{n}, \frac{2c}{n}, \frac{3c}{n}$ szakadás nélkül következnek egymásra és a folyó z abscissát adják. Már most az $AB = \frac{c}{n}$ két végtelenül közel egymáshoz fekvő végpontjában a görbéig emelt merőlegesek a görbével és a vízszintes tengelylyel végtelen vékony parallelegramot zárnak be, melynek területe

$$f_s = \frac{c}{n}\ f(i\frac{c}{n}) \sin m i \frac{c}{n}$$

az egyik és

$$f_c = \frac{c}{n}\ f(i\frac{c}{n}) \cos m i \frac{c}{n}$$

a másik görbe számára. Ha az i-t $i = 0$-tól $i = n - 1$-ig változ-




8. ábra. A FOURIER-féle sor koefficienseinek meghatározása.

tatjuk, akkor z az egész vízszintes tengelyt futja be és a nyert terület, mely planimeterrel való körüljárás által ismerhető meg, nyilván

$$F_s = \sum_0^{n-1} f(i\frac{c}{n}) \sin m \frac{ic}{n} \text{ és } F_c = \sum_0^{n-1} f(i\frac{c}{n}) \cos m \frac{ic}{n},$$

úgy hogy az f(x) kifejezésében szereplő koefficiensek tényleg

$$a_m = \frac{2}{n}\ F_c \text{ és } b_m = \frac{2}{n}\ F_s$$

planimeter-mérésekre vezethetők vissza.

Ezen sor minduntalan lép fel, akár úgy, hogy valamely adott függvényt kényelmi szempontokból valamely szöglet sokszorosainak sinusai vagy cosinusai szerint bontunk fel, akár úgy, hogy valamely jelenségnek ismeretlen függvényét ilyen sorba bontunk és a koefficienseket utólag határozzuk meg. Példa az első esetre a geographiai és geocentrumos szélesség, melyet — mint látni fogjuk — a következő

$$\operatorname{tang}\psi = (1 - e^2)\operatorname{tang}\varphi$$

egyenlet köt össze. Ennek kiszámítása az egyszerű alak ellenére nagyon kényelmetlen, mert $e^2$ kicsinysége folytán $\operatorname{tang}\psi$ csak nagyon kevéssel különbözik $\operatorname{tang}\varphi$-től. Sokkal pontosabb eredményhez jutunk és tetemesen kényelmesebben számolunk, ha sorbabontást alkalmazunk. Mivel negativ $\varphi$-k számára $\psi$ is negativ, azért a sinusok szerint haladó sor használandó; az eredmény, melyet más úton mi is le fogunk vezetni, a következő:

$$\psi = \varphi - 11' 30''.65 \sin 2\varphi + 1''.16 \sin 4\varphi - 0''.003 \sin 6\varphi + \ldots$$

E szerint tehát a páratlan indexű koefficiensek 0-lal egyenlők és gyakorlati szempontból már $\sin 4\varphi$ koefficiense is figyelmen kívül hagyható.

A második esetre a nehézségi gyorsulás földfelületi eloszlása szolgáltat példát. Mivel tapasztalat szerint a nehézségi gyorsulás a déli és északi félgömb egyenlő szélességű paralleláin ugyanaz, azért itt g mint a geographiai szélesség páros függvénye cosinussorba bontható és áll:

$$g = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \ldots$$

a hol azonban az $a_0$, $a_1$, $a_2$.. koefficiensek csak utólag, megfigyelésekből vezethetők le.

Ha az északi és déli polus között, tehát $0^0$ és $180^0$ polustávolság között n megfigyelést tettünk, még pedig $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.. szélességek alatt a gyorsulást $g_1, g_2, g_3$..-nek találtuk, akkor

$$a_m = \frac{2}{n}\left[g_1 \cos m\varphi_1 + g_2 \cos m\varphi_2 + g_3 \cos m\varphi_3 + \ldots\right],$$

a mely kifejezés könnyen kiszámítható. A tényleges számítás a megfigyelés értékeivel jelen esetben is azt mutatja, hogy a sornak már kevés tagja elegendő, a mennyiben a megfigyelt nehézségi erő a mérés pontosságán belül

$$g = 9{,}806\ 166 - 0{,}025\ 438 \cos 2\varphi \text{ (méter)}$$

kifejezés által adható vissza.

Ezen, felfedezőjük után FOURIER-féle soroknak nevezett kifejezésekkel nagyon közeli rokonságban állanak azon végtelen sorok is, melyek minden vonzási problemában előfordulnak s melyeket ennek megfelelőleg külön fejezetben a kellő helyen külön tárgyalunk. Az úgynevezett gömbfüggvények könnyen változtathatók át FOURIER-féle sorokba és viszont, s a sorok főbb tulajdonságai is megegyezők.

## VII. FEJEZET.

## Infinitesimális számítás.

A természeti és geometriai kutatások egyik leghatalmasabb segédeszköze a végtelen kicsiny mennyiségek elemzése, vagy az infinitesimális számítás. Tárgyunk minden lépésnél a térbe és időbe vezet és tanácstalanul állunk minden jelenség előtt, mely nem egyenes vonalban s nem egyenletesen folyik le.

Már az egyenletesen gyorsuló szabad esés tanulmányozásában is cserben hagy a mozgásról szerzett minden tudományunk, mert csak egyenes és egyenletes mozgást értünk mintegy axiomatikusan teljesen. A szabad esésnél a következő, az egész módszer lényegére és jellegére jellemző gondolatmenetet alkalmazzuk.

A $t$ időt, mely alatt a szabad esést tanulmányozni kivánjuk, gondolatban $n$ igen sok részre osztjuk. $n$-et oly nagynak válaszszuk, hogy $\frac{t}{n} = \tau$ rövid időpillanat alatt a mozgás egyenletesnek legyen tekinthető. Ha az esés gyorsulása $g$ és a test 0 sebességgel kezdi esését, mint ezt egyszerűség kedvéért feltételezzük, akkor az egyes $\tau$ időszakaszok kezdetén a sebesség:

$$\begin{array}{cccccc} & 1\tau & 2\tau & 3\tau \ldots & (n-1)\tau & n\tau \\ v = 0 & 1g\tau & 2g\tau \ldots & & (n-2)g\tau & (n-1)g\tau \end{array}$$

ugyanezen időszakaszok végén azonban a sebesség

$$v = 1g\tau \quad 2g\tau \quad 3g\tau \ldots (n-1)g\tau \quad ng\tau.$$

Ha $n$ oly nagy, azaz az egyes időszakaszok oly rövidek, hogy alattuk a szabad esés éppen úgy történik, mintha egyenletes mozgás volna, akkor az egyes időrészletek alatt befutott térrészletek, mint a sebesség és idő szorzata lesznek:

$$0 \quad 1 g\tau^2 \quad 2 g\tau^2 \ldots . (n-2) g\tau^2 \quad (n-1) g\tau^2, \text{ vagy}$$

$$1 g\tau^2 \quad 2 g\tau^2 \quad 3 g\tau^2 \ldots . (n-1) g\tau^2 \quad n g\tau^2$$

a szerint, a mint az időszakasz alatt az annak elején vagy végén érvényes sebességgel számolunk. Nagyon természetes, hogy az igazán befutott utak az első feltevés által nyert eredménynél nagyobbak, a második számítás eredményénél azonban kisebbek, a mennyiben az időrészecske alatti tényleges sebesség nagyobb, mint annak kezdő értéke, de kisebb, mint értéke az időpillanat végén. A t idő alatt ténylegesen befutott út s, tehát nagyobb, mint az első sorban és kisebb, mint a második sorban álló útrészletek összege. Ezek számtani haladványt képeznek; az első összeg

$$s_1 = g\tau^2 [0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)] = \frac{g\tau^2}{2} n (n-1)$$

a második ellenben

$$s_2 = g\tau^2 [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n] = \frac{g\tau^2}{2} n(n+1)$$

vagy $\tau = \frac{t}{n}$ értéket visszaállítva

$$s_1 = \frac{gt^2}{2} \frac{n^2 - n}{n^2} \text{ és } s_2 = \frac{gt^2}{2} \frac{n^2 + n}{n^2}.$$

A tényleg befutott út számára áll most

$$s_2 > s > s_1 \text{ vagy } \frac{gt^2}{2} (1 + \frac{1}{n}) > s > \frac{gt^2}{2} (1 - \frac{1}{n}).$$

Látnivaló, hogy n nagyobbodtával mindkét kifejezés ugyanazon határ felé convergál, és ha $n = \infty$ lett, azaz minden képzelhetőnél nagyobb, akkor minden képzelhetőnél kisebb hibával mondhatjuk, hogy

$$s = \frac{gt^2}{2}$$



a szabad esés t másodpercz alatt.

Ezen okoskodás minden mechanikai és minden geometriai problemában visszatér; az elemi geometriában is ismerjük jól ezen eljárást, midőn a kör kerületét számítjuk.

Az egyenes vonal mibenlétéről egészen axiomatikus fogalmaink vannak, melyek teljesen megzavarodnak, mihelyest a legegyszerűbb görbe vonal előtt is állunk. Nem marad tehát más hátra, minthogy a görbe vonalat oly végtelen kis részekre osszuk, melyeket végnélkül való megközelítéssel egyeneseknek tekinthessük, s hogy az egyenesekre ismert törvényeket ez elemi egyenesekre is vigyük át. A kör kerületének kiszámításánál az elemi geometria pl. így jár el: a körbe beírunk és a kör körül írunk szabályos sokszöget, melynek oldalszámát mindig nagyobbítjuk. A beírt sokszög kerülete kisebb, a körülírté nagyobb, mint a köré, s ezért ez utóbbi ismeretlen két ismeretes határ közé van szorítva, melyek a sokszög oldalainak szaporítása által mindig szűkebbre, sőt tetszőlegesen szűkre vonhatók.

Az elemekre való ilyetén bontás, mely bizonyos értelemben már Archimedes előtt is ismeretes volt, természetesen minden problemánál más-más módszeren alapul és hasonlóképen a végtelen kis elemeknek véges mennyiségekre való összeadása minden speciális esetben más és más elveken alapszik, ha a legelemibb segédeszközökkel akarnánk élni. Ma már mindkét disciplinának teljesen kidolgozott egységes szabályai vannak. A végtelen kicsinyekre való bontással s ezek törvényszerűségével foglalkozik a differentiálszámítás, a végtelen kicsinyekből véges törvényeket levezetni az integrálszámítás hivatott.

E munka keretén belül e két nagy terjedelmű disciplina természetesen nem tárgyalható és czélszerűbbnek látszik, hogy mi szükség esetén esetről-esetre külön vezessük le eredményeinket. Mindenesetre azonban mulasztás volna arra nem figyelmeztetni, hogy az infinitesimális analyzis nélkül természetfelfogás jóformán nem is gondolható.

Egynéhány fontos esetet azonban itt is tárgyalhatunk egészen általánosan.

## VIII. FEJEZET.

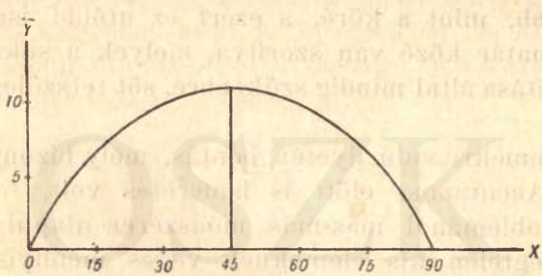
## Függvények és ábrázolása.

Ha valamely y mennyiség egy másik x mennyiségtől függ, úgy hogy minden tetszés szerint választott x-hez y-nak egészen bizonyos, bár esetleg többszámú értéke tartozik, akkor y-t x függvényének mondjuk, mit úgy fejezünk ki:

$$y = f(x), \text{ vagy } y = F(x), \text{ vagy } y = \varphi(x), \text{ vagy } y = \Phi(x).$$

Némely függvény módja a következő példák által adott:

$$y = a + bx;\ y = (a + bx^m)^n;\ y = \lg x;\ y = \sin x \text{ stb. stb.}$$




9. ábra. Az $y = 11'.5 \sin 2x$ egyenlet görbéje.

Mivel x minden tetszőlegesen választható értékéhez y bizonyos meghatározott értéke tartozik, azért x a független, y a függő változó nevét viselheti. Valamely függvény természetesen több független változót is tartalmazhat, pl.

$$y = F(u, v, w, x \ldots).$$

Két változónak függése a síkban görbe vonal, három változó függvénye a térben általában véve felület által geometriailag is ábrázolható. Ha ugyanis $y = f(x)$ egyenletben az f függvény által adott függés alakja ismeretes, akkor minden x-hez bizonyos számú y érték tartozik. Ha most (9. ábra) vízszintes egyenest húzunk és erre felrakjuk az x-ek választott értékeit a tetszőlegesen felvett 0 ponttól jobbra, ha az x positiv, balra 0-tól, ha negativ és az egyes x-ek végpontjaiban merőlegeseket emelünk, melyekre felrakjuk az y-oknak megfelelő hosszakat, felfelé, ha y positiv, lefelé, ha y negativ, akkor az így nyert pontok összesége általában görbe vonalat képez, mely az $y = f(x)$ függvény geometriai ábrázolása. Ha pl. y a geographiai és geocentrumos szélesség különbsége, x a geographiai szélességet jelenti, akkor a 48. oldalon felhozott példa szerint

$$y = +11'.5 \sin 2x.$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ha $x = 0^0$ | $15^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $75^0$ | $90^0$, akkor y lesz: |
| $y = 0'.00$ | $5'.75$ | $9'.96$ | $11'.50$ | $9'.96$ | $5'.75$ | $0'.00$ |

és az e szerint rajzolt 9. ábra ezen függvény képe. Mint az interpolatio fejezetéből tudjuk, a függvény geometriai képe akkor is megrajzolható, ha az analytikai kifejezés ismeretlen és csak egyes megfigyelések vannak adva. Az orometriában hasonló görbék minduntalan szerepelnek.

## IX. FEJEZET.

## Differentiatio.

Természeti viszonyokat kifejező függvényeknek rendesen az a tulajdonságuk van, hogy folytonosak. Azaz: ha a független változót végnélkül kis értékkel növeljük, akkor a hozzá tartozó y is csak végnélkül kis értékkel, de nem véges értékkel növekedik. A mit a régiek a híres: „natura non facit saltum“ axiomával fejeztek ki.

Ha tehát valamely függvényben x helyébe $x + \triangle x$-et írunk, akkor az előbb volt y érték is megváltozik és $y + \triangle y$-ná válik. Áll tehát

$$y = f(x) \text{ és } y + \triangle y = f(x + \triangle x),$$

úgy hogy a $\triangle y$ különbség

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$$

egyenlet által adott. Mivel a fontosabb függvényalakok sorbabontását adtuk, könnyű immár a $\triangle y$-t bármily függvény számára meghatározni. Ha pl.

$$y = ax^m$$

volna, mely eset a későbbiekben többször fog előfordulni, akkor

$$\triangle y = a(x + \triangle x)^m - ax^m$$

volna, vagy az x mellett kis $\triangle x$-ek számára a Newton-féle binomtétel értelmében:

$$\triangle y = ax^m + max^{m-1}\triangle x + \frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}(\triangle x)^2 + \ldots - ax^m,$$

mely kifejezés még bármilyen véges, de kis $\triangle x$ számára érvényes. Ha azonban $\triangle x$ mindinkább kisebb és kisebb, akkor $(\triangle x)^2$ még inkább kicsiny, s ha $\triangle x$ végtelenül közeledik a nulla felé, akkor $(\triangle x)^2$ s még inkább magasabb hatványai a $\triangle x$ első hatványa mellett elhanyagolhatók, s marad

$$\triangle y = max^{m-1}\triangle x \quad (\triangle x,\ \triangle y \text{ végtelen kicsiny}).$$

A végtelen kis $\triangle y$ és $\triangle x$ incrementumokat dx, dy-nal szokás jelölni, s habár ők egyenként végtelen kicsinyek, quotiensük

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$$

véges érték. A végtelen kis különbségeket differentiálnak, viszonyukat ellenben differentiálquotiensnek szokás nevezni, és látni való, hogy ez mindenféle függvény számára az előbbi eljáráshoz hasonló módon egyértelműen levezethető. Ha az egyszerű függvények differentiálquotienseit egyszer s mindenkorra ismerjük, akkor bárminő függvény differentiálquotiense a legnagyobb könnyűséggel levezethető.

*A differentiálquotiens jelentősége.* Lássuk most ennek egynéhány geometriai és mechanikai alkalmazását.

Legyen a 10. ábrában rajzolt görbe vonal valamely $y = f(x)$ függvény képe. Ekkor az x abcissához az y ordináta, az $x + \triangle x$ abcissához az $y + \triangle y$ ordináta tartozik. A végpontok összekötő egyenese a görbének egy metszője, mely az x tengelylyel annak positiv ága felé a t szögletet képezi, és könynyen látjuk, hogy

$$\operatorname{tang} t = \frac{DE}{BE} = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Ha most az A és C, tehát a B és D pont is mindinkább közelebb és közelebb lép egymáshoz, akkor a szelő az érintőbe megy át, mikor $\triangle y$ és $\triangle x$ végtelen kicsinynyé vált. A

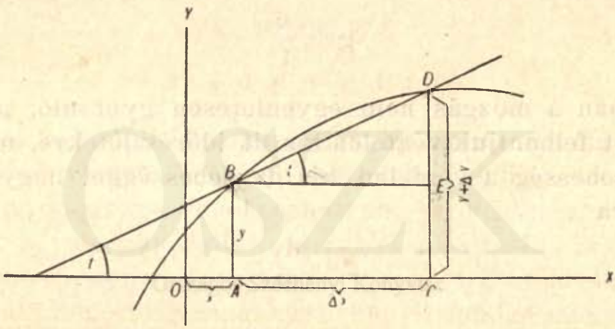
$$\frac{dy}{dx} = \text{tang } t$$

differentiálquotiens tehát a görbének az xy pontban húzott érintő szögletét adja az abscisstengely positiv ágával.

Továbbá: ha az EBD háromszög már végtelen kicsiny lett, akkor a BD ív és BD húr teljesen összeesőnek tekinthető, és a PYTHAGORAS-féle tétel értelmében áll:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

ha ds a görbének az xy pont körüli ív elemét fejezi ki. Mihelyt természetesen az $y = f(x)$ függvény alakja ismeretes, $\frac{dy}{dx}$ kiszá-



10. ábra. A differentiálquotiens ábrázolása.

mítható, és ezzel azután ds is függésbe van hozva dx differentiállal, mely végtelen kicsiny tartozik lenni, de a mellett egészen tetszőleges lehet. Ez más szavakkal kifejezve annyit tesz, hogy a differentiálquotiens mindig ugyanaz marad, bármilyennek választjuk a dx-et, ha ez csak végtelen kicsiny, vagyis: a végtelen kicsiny elemekre való bontás módja teljesen tetszőleges maradhat.

A mechanikából is adhatunk egyszerű s világos példát. Az egyenes és egyenletes mozgásnál tudvalevőleg a sebességet

$$v = \frac{s}{t}$$

viszonyból számítjuk ki; bármily hosszú idő alatt figyeltük is volna meg a mozgást, a sebesség állandósága miatt mindig ugyanazon v-hez jutunk. Nem egyenes s nem egyenletes mozgás esetében is megtarthatjuk ezen definitiót, csakhogy akkor úgy az utat, mint az időt végtelen kis ds és dt elemekre kell bontanunk és feltételeznünk, hogy egy ilyen végtelen kis időtartam alatt a mozgás végtelen közelítéssel egyenesnek s egyenletesnek tekinthető. Innen azután

$$v = \frac{ds}{dt}$$

lévén látni való, hogy valamely útnak az idő szerint vett differentiálquotiense az illető mozgás sebességét adja.

A gyorsulás tudvalevőleg az időegység alatt a meglevő sebességhez hozzájáruló sebesség. Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében tehát

$$g = \frac{v}{t}.$$

Ha azonban a mozgás nem egyenletesen gyorsuló, akkor az időt ismét felbontjuk végtelen kis dt időrészletekre, melyeken belül a sebesség a végtelen kis dv sebességgel nagyobbodik, ennélfogva

$$g = \frac{dv}{dt};$$

általában véve tehát a gyorsulás a sebességnek az idő szerint vett differentiálquotiense, vagy a sebességre való tekintettel

$$g = \frac{dds}{dtdt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

a mit úgy szoktunk kifejezni, hogy a gyorsulás a pályának az időre vonatkozó második differentiálquotiensével egyenlő.

*Taylor és Mac-Laurin-féle sor.* A differentiálszámítás egynéhány igen nevezetes soralakhoz vezet, mely az egész mathematikában és természettudományban alapvető. Ha ugyanis f(x) x-nek tetszőleges függvénye, f′(x) annak differentiálquotiense, f″(x) ismét f′(x)-nek differentiálquotiense, és így tovább, akkor áll:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

Ezen sor megmutatja, mennyivel változik f(x), ha x helyébe x + h lép. Felfedezője után a TAYLOR-féle sor nevét viseli. Hasonló soralak a MAC LAURIN-féle:

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(o) + \dots$$

a hol f'(o) azt jelenti, hogy f(x) függvény differentiátiója után x = o teendő. Ha az első sorban h végtelen kicsiny, akkor belőle

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a differentiálquotiens definitiója következik.

## X. FEJEZET.

## Integratio.

Gondolkodásunk és okoskodásunk ugyan mindig a végtelen kicsinyek elemzésére vezet vissza, de megfigyeléseink csak véges mennyiségekre vonatkozhatván, természetes, hogy oly módszerre is van szükségünk, melylyel a végtelen kis elemeket véges mennyiségekre összeadjuk. Ezen eljárás az integratio nevét viseli. Megértése ismét egynéhány példából világos leend. Legyen a 11. ábrában AB valamely görbe, melynek egyenlete y = f(x) által adott és keressük ennek térfogatát az $x_1$ és $x_2$ abscissák között. Az x abscissának megfelelő ordináta y = f(x): ha az x tengely mentén dx végtelen kis darabbal megyünk tova, és e pontban is ordinátát emelünk, akkor végtelen keskeny sávolyt kapunk, melynek felső határolása ugyan AB görbe vonal egy íveleme, mely azonban annál szigorúbban azonosítható parallelegrammal, minél kisebb a dx. Végtelen kis dx esetében az elkövetett hiba minden képzelhetőnél kisebb leend. E végtelen vékony sávoly végtelen kis területe df, tehát

$$df = ydx = f(x)dx$$

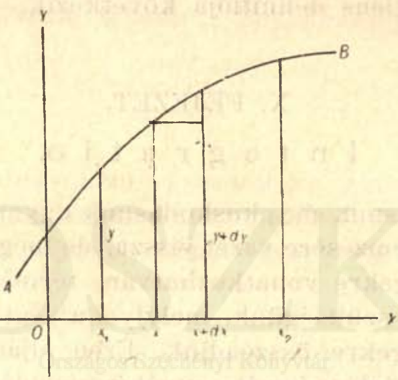
és ezek véges összege $x_1$ és $x_2$ abscissák között általánosan szokásos jelölés szerint az

$$f = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

integrál. Keletkezése a következő egyszerű módon érthető. Kiindulunk az $x_1$ abscissából, melynek ordinátája $f(x_1)$; $x_1 + dx$ abscissához tartozik $f(x_1 + dx)$ stb. ordináta. Ha most az $x_2 - x_1$ közt n egyenlő részre osztjuk, és $\frac{x_2 - x_1}{n} = \xi$ egy ilyen köz, akkor az

$$f(x_1)\xi + f(x_1 + \xi)\xi + f(x_1 + 2\xi)\xi + \ldots$$
$$+ f(x_1 + (n-1)\xi)\xi + f(x_1 + n\xi)\xi$$

összeg a 12. ábrában feltüntetett kis parallelegramok össze-



11. ábra. Az integratio geometriai ábrázolása.

gével egyenlő. Ha azonban n végtelen nagy, akkor $\frac{x_2 - x_1}{n} = \xi = dx$ és $x_1 + m\xi = x$ a folyó coordináta.

Minden integrál, melyben egyetlen egy változó szerepel, ennélfogva területmeghatározásra vezethető vissza, mi ránk nézve különösen fontos megjegyzés, mert a területmeghatározást planimeter segítségével eszközölhetjük.

Hasonlóképen meghatározhatjuk valamely görbe véges ív hosszát is $x_1$ és $x_2$ abscissák között. A 10. ábrában találtuk

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \text{ hol } y = f(x) \text{ volt,}$$

és ennélfogva a véges $x_1$ és $x_2$ abscissák közé eső íve a görbének

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

mely integrál tudvalevőleg curveometerrel számítható ki numerikusan.

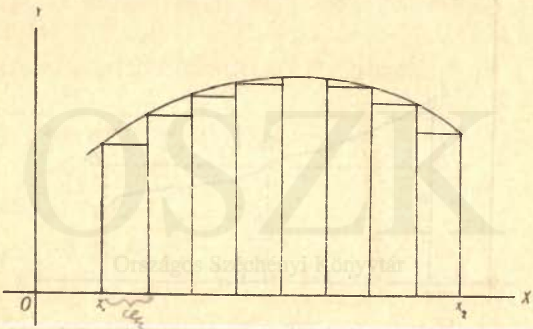
Az integratio egy példányát a szabad esésnél tárgyaltuk; adott függvényalakok számára az integratiónak is megvannak a maga kész szabályai, melyek valamely mathematikai munkából kivehetők.

## XI. FEJEZET.

## Mechanikai integratio.

### Simpson formulája.

Igen sok esetben azonban az $y = f(x)$ függvény analytikai kifejezése nincs megadva, hanem helyette a megfigyelés-



12. ábra. Az integrál geometriai ábrázolása.



ből merített bizonyos értékek, melyek meghatározott x-ekhez tartoznak. Keressük például valamely völgy közepes magasságát! Ha a völgy talpvonala EF (13. ábra) $y = f(x)$ egyenlet alakjában adott, akkor az ABFE terület

$$f = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

alakban adott, ha $OA = x_1$, $OB = x_2$ és az OB tengely a tengerszint jelenti. Ha az ugyanazon AB alapon álló ABCD parallelegramnak ugyanazon területe van, akkor h a görbe közepes magassága. Mivel

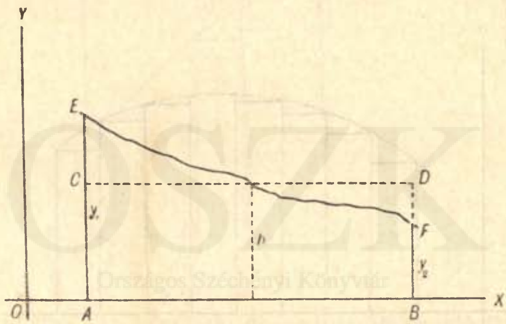
$$f = (x_2 - x_1)\, h,$$

úgy következik, hogy

$$h = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx,$$

s a közepes magasság kiszámítható, mihelyest minden x távolsághoz tartozó y magasság az $y = f(x)$ ismert törvényből meghatározható. Rendesen azonban csak bizonyos x távolságoknak megfelelő magassági adatok vehetők ki a térképekből, más szóval az $f(x)$ függvény természete ismeretlen, s ekkor csak közelítő eljárásokhoz folyamodhatunk.

Tisztán mechanikailag járunk el, ha az összetartozó x és y pontokat megszerkesztjük, azokon át lehetőleg minden ponthoz simuló görbét vonunk s annak területét planimeterrel




13. ábra. Középérték geometriai jelentősége.

határozzuk meg. De számítva is járhatunk el, mi sok esetben pontosabb eredményekhez vezet. A megfelelő képleteket, melyeket különösen az orometriában és a térképvetítés tanában alkalmazunk, a következők:

Legyen meghatározandó az

$$f = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx$$

integrál numerikus értéke, melyben

$$y = f(x)$$

akár analytikailag ismeretes, akár csak egyes számértékek útján numerikusan adott. Az $x_n - x_0$ közt n egyenlő részre osztjuk; minden köz h nagysággal bírjon, akkor

$$\frac{x_n - x_0}{n} = h$$

és az egyes osztási pontok coordinátái lesznek sorban:

$$x_0 = x_0,\ x_1 = x_0 + 1h,\ x_2 = x_0 + 2h \ldots$$

$$x_{n-1} = x_0 + (n-1)h;\ x_n = x_0 + nh,$$

melyekhez a megfelelő

$$y_0,\ y_1,\ y_2 \ldots\ y_{n-1},\ y_n$$

ordináták vagy függvényértékek tartoznak.

A legegyszerűbb, de legkevésbbé pontos formula, mely teljesen megfelel a 12. ábrának, a következő:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left\{y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right\}.$$

Jobban megfelelnek a következő képletek:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left\{y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n\right\}$$

és még inkább

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \right.$$

$$\left. + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right\},$$

mely a Simpson-féle formula nevét viseli.

Mindezen egyenletek nemcsak területek, hanem egyszersmind térfogatok számítására is alkalmasak; ha ugyanis $y_0$, $y_1$, $y_2$ .. a h közökben egymásra következő párhuzamos keresztmetszetek területét jelenti, akkor az integrál természetesen a térfogatot szolgáltatja, minek az orometriában szintén hasznát fogjuk venni.

Még egy általános érvényességű integratiós formulára van szükségünk. Legyen ismét, de kissé általánosabban

$$y = f(a + x)$$

és keressük az

$$\int_{x=0}^{x=x} f(a + x)\,dx$$

integrál értékét $x = 0$ és a változó, de tetszés szerinti nagy $x$ között. Az eredmény:

$$\int_0^x f(a+x)dx = h\left\{\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\right.$$
$$\left.+f[a+(n-1)h]+\tfrac{1}{2}f(a+nh)\right\}$$
$$-h^2\frac{B_1}{1.2}\left\{f'(a+nh)-f'(a)\right\}+h^4\frac{B_3}{1.2.3.4}\left\{f'''(a+nh)-f'''(a)\right\}$$
$$-h^6\frac{B_5}{1.2.3.4.5.6}\left\{f^{v}(a+nh)-f^{v}(a)\right\}+\ldots$$

a mely kifejezésben

$$h = \frac{x}{n}$$

és

$$\frac{B_1}{1.2} = 0{,}083\,333\,3333 \qquad \frac{B_3}{1.2.3.4} = 0{,}001\,388\,8889$$
$$\frac{B_5}{1.2.3.4.5} = 0{,}000\,033\,0688 \qquad \frac{B_7}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 0{,}000\,000\,8267$$
$$\frac{B_9}{1.2\ldots9.10} = 0{,}000\,000\,0209 \qquad \frac{B_{11}}{1.2\ldots\,10.11} = 0{,}000\,000\,0005$$

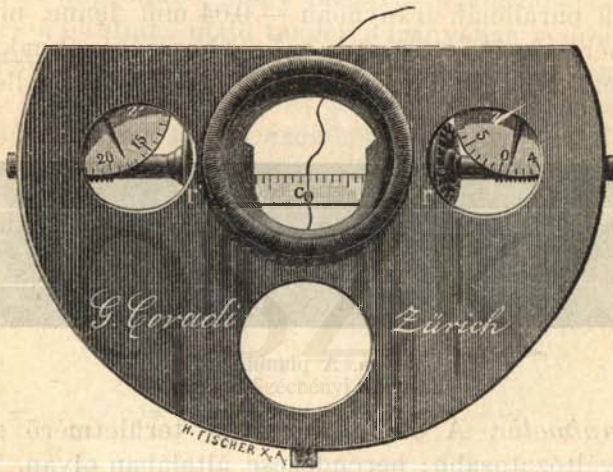
$f'$, $f'''$, $f^{v}$ ellenben az $f(a+x)$ függvénynek első, harmadik és ötödik differentialquotiensét jelenti. Az egyenlet első sora nyilván az előbb közölt kifejezések másodikával azonos, a többi sorok ez értéknek mintegy javításait adják.

## XII. FEJEZET.

## Curveometer és planimeter.

Úgy az ívmérés, az úgynevezett kiegyenesítés vagy rectificatio, mint a területmeghatározás, a quadratura tehát minden esetben legalább közelítésben számítás által eszközölhető, de tisztán mechanikai segédeszközökkel is operálhatunk. Ezek a curveometer és a planimeter, s mindkét eszköz a mondottak folytán valóságos integrograph műszerek.

*Curveometer.* A curveometer elvben kis kerék, melyet — síkját mindig merőlegesen tartva a papir síkjára — a görbe mentén vezetünk tova. A kerék fordulatai és azok részei, melyet alkalmas mutató átvitel önműködően jelez, az ív hosszát adják. A legtökéletesebb curveometer a CORADI-féle (14. ábra), mely két teljesen egyenlő, ugyanazon tengelyre erősített kerékből áll. A műszer indexxel van ellátva, mely állandóan a görbe mentén siklik, míg a tengelyt lehetőleg minden pontban merőlegesen tartjuk a görbe pillanatnyi érintőjére. A két kerék



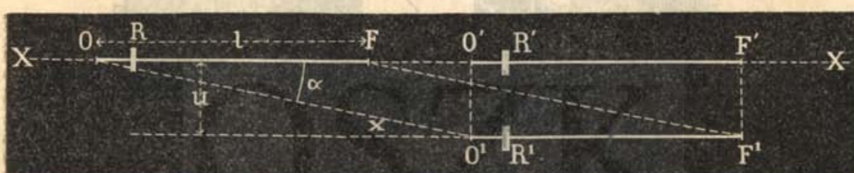

14. ábra. A CORADI-féle curveometer.

leolvasásának összege adja a megtett utat, mely könnyen 0·01 mm. pontossággal olvasható le.

Ha a curveometert ismeretes $l_0$ hosszúságú egyenesen vezetjük s a curveometeren az l hosszúságot olvassuk le, akkor minden curveometer leolvasás $\frac{l_0}{l}$ factorral megszorzandó, hogy helyes adatokat kapjunk. A térképeken való kimérésen még más hiba is történhetik. A térkép papirja ugyanis torzulásokat szenvedhetett, s ezért tanácsos, hogy egyrészt a mellé adott skála hosszát összehasonlítsuk a mellé írt mértékkel, vagy hogy, miután ez a torzulást csak egy irányban, t. i. a skála irányában adja, az ellenőrző mérést a hálózat úgy meridián-, mint parallelfokára kiterjesszük. Ezek igazi hosszát ismerjük, ha ismerjük a vetület módját és a térkép méretét.

Vegyük egyszerűség kedvéért az aequidistáns hengervetületű térképet, melyen tehát a hálózat pusztán négyzetekből álljon. Mivel az aequatorfok hossza 111,306 km. és a térkép mérete pl. 1 : 10 millióhoz, azért minden meridián és parallelfoknak 11·13 mm. hosszúsággal kellene bírnia.

Ha most a curveometer a meridiánfokot 11·20 mm.-nyinek, a parallelfokot $\varphi$ geographiai szélesség alatt 11·09 mm.-nyinek adná, akkor a papir torzulása a meridiánok mentén fokonként + 0·07, a parallelák irányában — 0.04 mm. lenne, mit a hosszúságméréseknél (eltekintve még a hosszúságoknak a vetület természete által való torzulásoktól) tekintetbe kellene venni.




15. ábra. A planimeter elve.

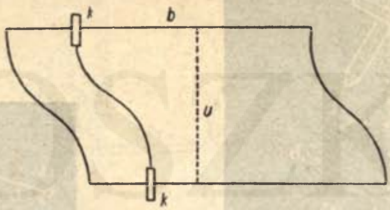
*Planimeter.* A planimeter vagy területmérő szerkezete sokkal változatosabb; berendezése általában olyan, hogy valamely idomnak körüljárása által annak területét szolgáltassa. Lényeges része minden esetben egy állandó kar, melyre merőlegesen ~~kerék~~ van ~~erősítve~~. Ha a 15. ábrában az OF = l hosszúságú kart tengelye mentén O′F′-be toljuk, akkor a rúd nyilván területet nem súrol és ennek megfelelőleg az R csiga síkjára merőlegesen csúszva, forgást nem végez s e szerint útadatot sem jelez. A planimeter ezen állását, tekintet nélkül szerkezetére, alapállásnak s a vezető tű által ez esetben leírt egyenest alapvonalnak szokás nevezni; a következőkben XX-xel fogjuk jelölni. Ha azonban a kart (ugyanezen ábra) magával párhuzamosan O¹F¹ helyzetbe hozzuk, akkor a csiga az u utat jelzi, mert megerősítési módja magával hozza, hogy mindig az egész megtett útjának azon komponensét adja, mely saját síkjába esik. Erről legegyszerűbben úgy győződünk meg, ha a kart az OF helyzetből először O′F′-be hozzuk, miközben a csiga egyáltalán nem forog és onnan $O^1F^1$-be viszszük, a midőn is az u íven át gördül. Az útadat tehát

$$u = OO^1 \sin \alpha,$$

és a leírt parallelegramm területe nyilván

$$f = lu,$$

egyszerűen arányos a csiga útadatával. Ugyanez egyenlethez még más úton is juthatunk; az OF rúdnak $O^1F^1$-be való átvitele úgy is képzelhető, hogy magával párhuzamosan végtelenül kevéssé eltoljuk, majd tengelye irányában végtelenül kis úton mozgatjuk s az eljárást kellőképen sokszor ismételjük. Ez utóbbi mozgások egyenként és összegben a csigára nem hatnak, az előbbiek összege azonban a csiga u ívnyi lefejtését




16. ábra. A planimeter elve.

eredményezik. Most már látni való, hogy teljesen ugyanezen eredményhez fogunk jutni, bármilyen úton történjék is a rúdnak OF-ből $O^1F^1$-be való átvitele, a mint ezt a 16-ik ábra érzékíti.

A mérőcsiga adata közvetlenül a 17. ábrából ítélhető meg. Ha ezt ugyanis az $ad = x$ úton vezetjük, mely tengelyével $\alpha$, tehát síkjával $90^0 - \alpha$ szögletet képez, akkor ezen út végtelen kis mozgásokkal tehető meg, melyek a tengelyre merőlegesek és a tengelybe esők. Az előbbiek összege ismét az u út, hol $u = x \sin \alpha$, az utóbbiak ellenben csak a csiga csuszásával járnak, tehát befolyást az útadatra nem gyakorolnak.

Ha a planimeter rúdja (18. ábra) OF az O pont körül $\alpha$ szögnyi forgást végez, akkor körsektort súrol, melynek területe

$$f = \frac{\pi}{360} l^2 \alpha.$$

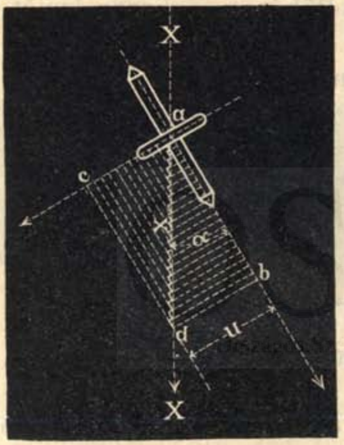
Az $\alpha$ szöglet egyszerűen fejezhető ki a csiga leolvasása által. Ha ugyanis a csiga r távolságban áll az O ponttól, akkor

$$u = \frac{\pi}{180} r\alpha,$$

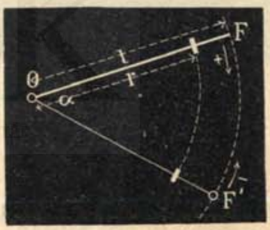
és ennek folytán a planimeter által súrolt terület

$$f = \frac{l^2}{2r} u,$$

tehát ismét arányos a csiga útjával. A teljes kör számára




17. ábra. A mérőcsiga adata.




18. ábra. A planimeter elve.

$\alpha = 360^0$ és $u = 2r\pi$, a miért is $f = l^2\pi$. Ha ellenben a planimeter teljes kör leírása nélkül tér vissza kezdeti helyzetébe, akkor ugyanezen sectort positiv és negativ irányban írta le. A csiga végadata tehát O és az összesen bejárt terület is eltünik.

Most már könnyen érthető a területmérés az esetben is, a mikor haladó és forgó mozgások együttesen fordulnak elő.

Legyen a 19. ábrában ABDD'B'A'C'CA a terület, melyet a planimeter rúdja súrolt, midőn az AB helyzetből CD-be jutott, azután N középpontja körül $\triangle\psi$ szöglettel fordult C'D' helyzetbe s onnan ismét párhuzamosan magával A'B'-be került. Az ábra területe nyilván ABCD + A'B'C'D', mivel CC'N + DD'N

= o, és miután az egyes parallelegramokban a csiga útja (ismét merőlegesen a karra számítva) u és u′, lesz:

$$f = b\,(u + u').$$

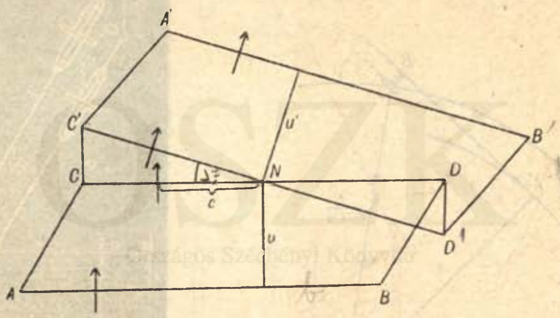
Ha a csiga c távolságra van a pálcza középpontjától, akkor forgás közben a c$\psi$ ívet írta le és a csiga teljes útja

$$U = u + u' + c\,\psi,$$

a mivel a keresett terület

$$f = b\,(U - c\,\psi);$$

a csigának egész U útadatából tehát mindenesetre levonandó a forgásra eső útrészlet, melyet, mint mindjárt látni fogjuk,




19. ábra. A planimeter elve.

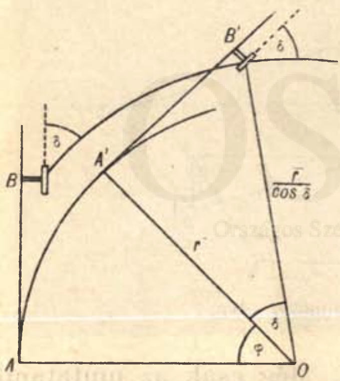
egyszerű módon lehet eliminálni. Még csak az mutatandó ki, hogy a csiga helyzete teljesen közömbös, ha csak a pálczára merőlegesen áll.

Ha az OAB szilárd kar (20. ábra) $\varphi$ szöglet körül való forgás után OA′B′ helyzetbe jut, akkor a csiga, mint egész az $\frac{r}{\cos\delta}\,\varphi$ ívet futja be; leolvasása azonban csak a csiga síkjába eső összetevőt adhatja, mely az egész útnak cos $\delta$-szorosával, tehát $\frac{r}{\cos\delta}\,\varphi \cos\delta = r\varphi$-vel egyenlő. Az eredmény tehát ugyanaz, mintha a csiga az OA pálcza A pontjában volna megerősítve és itt tenné meg a $\varphi$ szöglet körül való forgása folytán az $r\varphi$ útat.

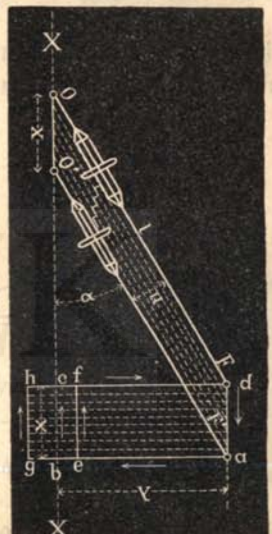
Az ezen elveken alapuló planimetert poláris planimeter-nek szokás nevezni, mert O szilárd pont körül forog. Az előbbi ábrák ellenben inkább a lineáris planimeterre vonatkoznak.

A tényleges mérések elvét adja a 21. ábra bármily szerkezetű planimeter számára és a 22. ábra egy speciális esetben. Ha az F vezető tűt da úton visszük, akkor a csiga az eddigiek szerint az u utat adja, és lu, a kar s az út hosszainak szorzata az abcd parallelegramm területét méri, a menynyiben

$$ab = l \sin\alpha \quad \text{és} \quad ad = \frac{u}{\sin\alpha}.$$



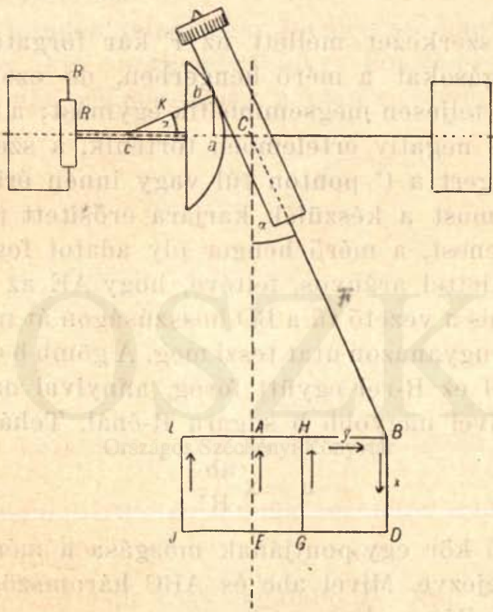

20. ábra. A planimeter elve.




21. ábra. A területmérés elve.

Ugyanezen területhez jutunk akkor is, ha közvetlenül az abcd alakot járjuk körül. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az ab és cd egyenesek bejárása alkalmával a csiga két egyenlő, de előjelre nézve ellentétes utat ad, melyek összege null. A bc út bejárásánál a csiga nem működik, miután ezen út az alapvonalba esik, tehát a csiga az egész alak körüljárása alkalmával csak azt a forgást adja, mely az ad vonalnak felel meg.

Ha az ef egyenésen vezetjük a tüt, még pedig a da iránynyal ellenkező irányban, akkor hasonló módon az ebcf területet nyerjük, melynek előjele azonban az abcd területével ellenkező és ennélfogva belőle levonódik. Az aefd határ bejárása tehát tényleg az idom területét adja. Ha a gh egyenesen vezetjük a tűt, akkor hasonlóképen abghc területet kapjuk, mely ismét positiv előjelű, a mennyiben a gh irány ellentétese a da-nak, de egyszersmind az alapvonal ellenkező oldalán is fekszik. E terület tehát abcd-hez adódik. Az aghd alak bekerítése tehát ismét ennek területét adja, még pedig teljesen függetlenül az alapvonaltól, melynek helyzetét ismernünk sem kell. Az egész levezetés itt is láttatja, hogy egyetlen köve-




22. ábra. A Coradi-féle gömb-planimeter.

telmény a csigának a planimeter-rúdra való merőlegessége; ettől eltekintve bárhol erősíthetjük meg, esetleg a rúdnak valamely oldalagos ágán is.

Ugyanezen elvet mutatja be a 22. ábra is, melynek kapcsán mindjárt a Coradi-féle gömb-planimeter lényeges részeinek leírását is adhatjuk.

Az R'R' kerekeken nyugvó kocsiszerkezet egyik kerekére ráfekszik surlódással az R kerék, mely az ugyanazon tengelyre erősített gömbsüveget, K-t forgatja. Ez ráfekszik a hossztengelye körül forgatható C hengerre, s ezt is forgatja, kivéve, ha e tengely merőlegesen áll a gömbsüveg tengelyére. A henger s a hozzá erősített F kar C függélyes tengely körül is forgatható. A helyesség feltételei, hogy R′ kerék, K gömbsüveg és F kar tengelye ugyanazon függélyes síkban álljanak, hogy a kar tengelye merőlegesen álljon a papir síkjára és merőlegesen magára a karra, a mérő henger tengelye pedig párhuzamos legyen úgy a rajz síkjával, mint a karral. A CE egyenes, mely az R′R′ tengelyre merőlegesen áll, a planimeter alapvonala; ha a kar ebben áll, úgy a gömb forgása a hengerben forgást nem idéz elő.

Nyugvó szerkezet mellett az F kar forgatása létrehoz ugyan kis forgásokat a mérő hengerben, de ezek zárt alak körüljárásánál teljesen megsemmisítik egymást; a forgás tudniillik positiv és negativ értelemben történik, a szerint, a mint a gömb a hengert a C ponton túl vagy innen érinti.

Ha már most a készülék karjára erősített tűvel leírjuk a BD = x egyenest, a mérő henger oly adatot fog adni, mely az AEBD területtel arányos, feltéve, hogy AE az alapvonalba esik. Ha ugyanis a vezető tű a BD hosszúságon át mozog, akkor úgy R′, mint R ugyanazon utat teszi meg. A gömb b érintő pontja ellenben, mivel ez R-rel együtt forog, annyivel nagyobb utat, mint a mennyivel nagyobb b sugara R-énál. Tehát a b útja u

$$u = x \frac{ab}{R},$$

ha u az érintő kör egy pontjának mozgása a mérő csiga fordulataiban kifejezve. Mivel abc és ABC háromszögek egymással hasonlók, világos, hogy

$$\frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC} \text{ vagy } ab = K \frac{y}{F},$$

ha K jelenti a gömbsüveg sugarát és F a vezetőkar hosszát. Innen ab értékét az előbbi egyenletbe téve, leend:

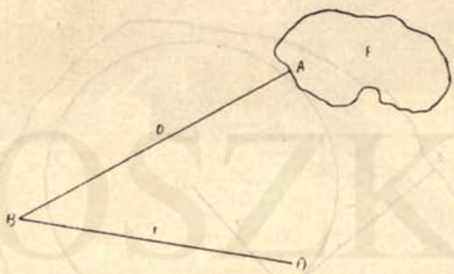
$$u = \frac{K}{FR} xy \text{ vagy } xy = \frac{FR}{K} . u$$

azaz az ABDE négyszög területe arányos azon úttal, melyet a henger jelez, midőn a vezető kar tűjét a BD vonal mentén végighúzzuk. Az $\frac{FR}{K}$ pedig ugyanazon planimeter számára, a meddig a vezető kar hosszát nem változtatjuk, állandó.

Ha most a vezető tű EA helyett, melyen a henger nem forog, GH-t írja le, úgy hogy a körüljárt terület jobbra fekszik az alapvonaltól, akkor a mérő csiga az AHGE területet adja. De ezen forgás ellentett irányban történt, tehát levonandó. Marad tehát BDGH tényleg körüljárt terület.

Ha ellenben BDJL-t írjuk le, mely az alapvonal mindkét oldalán fekszik, akkor JL leírásánál a forgás EJLA irányban történik, s ez positiv lévén, hozzáadandó a BD bejárásánál leírt ABDE területhez.

Miután minden tetszőleges terület az alapvonalra merőleges végtelen kis parallelegramokra bontható (mint a 21-ik ábrában), immár világos, hogy a planimetertű körülvezetése



23. ábra. A polaris planimeter alkalmazása.

tetszőleges idom kerületén, annak területét szolgáltatja. Mint láttuk, az f terület

$$f = lu \text{ vagy legalább } f = ku,$$

hol u a mérőcsiga adatja és l a planimeterrúd hossza, vagy általánosabban k valamely arányossági faktor, mely pusztán a műszer méreteitől függ.

Teljesen hasonló megfontolások érvényesek a poláris planimeterek számára is, csak hogy ezekben az ábra szétbontása végtelen közel eső sugarak és körívek által történik.

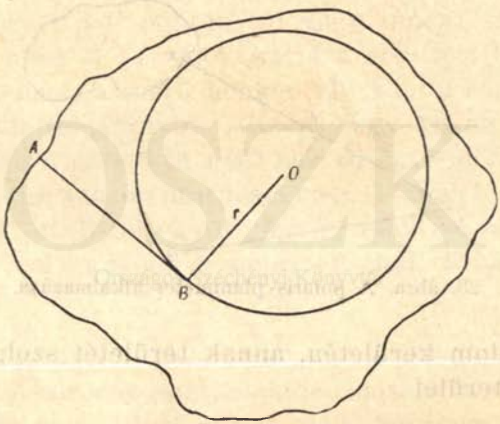
Némi különbséget tesz azonban a poláris planimeternél, vajjon a műszer pólusa a lemérendő ábrán kívül áll, vagy pedig határai közé esik, a mennyiben itt a 19. ábrához fűzött megfontolások érvénybe lépnek.

A mérés a következő módon történik: Ha a pólus az ábrán kívül áll, mint a 23-ik ábrában, akkor az A vezetőcsúcs körülvitetik a terület pereméjén, vissza a kiindulási pontig. Ekkor a b kar és vele együtt a csiga forgásokat is végez, melyek azonban teljesen eliminálódnak. Ugyanis a kar ugyanannyival forogván felfelé, mint a másik irányban, a fenti

$$f = b\,(U - \psi c)$$

képletben szereplő $c\psi$ ív positiv és negativ egyenlő nagyságban fordul elő, tehát befolyása null. Ha azonban a pólus, mint a 24. ábrában a terület határán belül áll, akkor a körülvezetés után az OB kar maga is teljes kört ír le, melynek területe $r^2\pi$, úgy, hogy a planimeter adta terület

$$f - r^2\pi = b\,(U - 2c\pi)$$




24. ábra. A poláris planimeter alkalmazása.

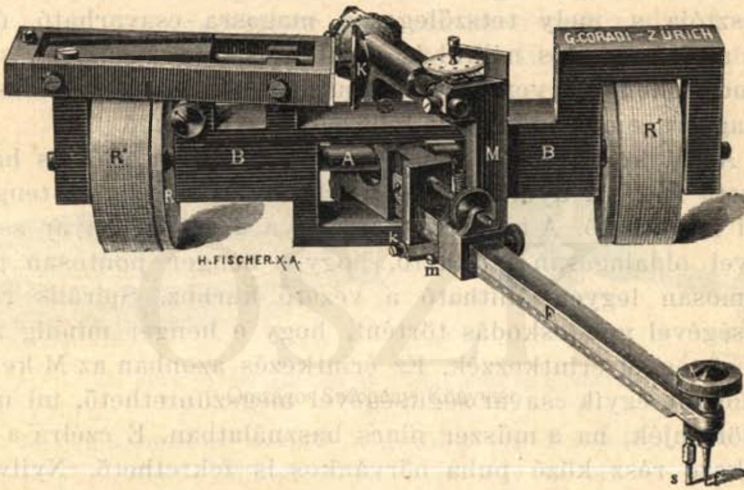
a mennyiben t. i. a kar forgása teljes $360^0$, azaz $2\pi$ ív körül történt. Ebből

$$f = bU + (r^2\pi - 2c\pi)$$

úgy, hogy ez esetben a planimeter-leolvasáshoz még valamely, a planimeter szerkezetétől, esetleg beállításától függő szám adandó, mely a különböző beállítások számára rendesen magára a műszerre van vésve. Ha a körüljárt ábra területe nagyobb, mint ezen kör területe, akkor a mérőcsiga leolvasása ezen állandóhoz adandó, ellenkező esetben pedig belőle levonandó. A csiga oly értelemben van megszámozva, hogy a vezető tű mindig az óramutató irányában mozgatandó.

A 25. ábra egy lineáris, a 26. ábra egy poláris planimetert mutat be. Az előbbi a Coradi-féle gördülő gömb-planimeter, körülbelül $\frac{1}{2}$ természetes nagyságban, mely metszetben már a 22. ábrában is szerepelt, az utóbbi a Coradi-féle precziós korong-planimeter mintegy $\frac{1}{3}$ természetes nagyságban.

A műszer a két R'R' kerék s az f vezető tű, illetve s támasztó segítségével nyugszik a papiron; a vezetés biztossá tétele végett e kerekek kerületei finoman rovátkásak. Szilárdan össze vannak kötve a B állványba beágyazott A tengely-




25. ábra. A Coradi-féle gördülő gömb-planimeter.

lyel, mely keményített aczélcsúcsok körül forog; a jobboldali tengelyágy javítócsavar segítségével beállítható.

A baloldali kerék finom fogazattal bír, melybe a K gömbsüveg tengelyére erősített kis (az ábránkon nem látható) kerék fog. Ezen kerék ket kemény és finoman dolgozott ágya az ábra baloldalán látható négyszögletes keretben foglal helyet, mely a készülék kimélése czéljából a nyíllal jelölt csavar segítségével annyira emelhető, hogy a két kerék érintkezése megszünik. A kereten kívül foglal a tengelyen helyet a hemény fémötvényből pontosan gömbalakra csiszolt K süveg. Ennek tengelye az A tengelylyel pontosan párhuzamos és ugyanazon vertikális síkban fekszik. E síkban fekszik továbbá a B állvány közepén ama vertikális tengely is, mely körül az F vezető rúd forgatható. Két csapágya csavarok segítségével szintén korrigálható.

A vezető rúd tokjában tetszés szerint eltolható és két nyomó csavar segítségével mindenkori állásában megszorítható; megszorítás után a végleges finom beállítás a mikrometer-csavar segítségével történik. Félmillimeteres beosztással bír, mely a tokra alkalmazott nonius segítségével $\frac{1}{20}$ millimeterre leolvasható. Ezen osztásra vonatkozik ama beállítási táblázat, mely minden műszer mellé van adva.

A vezető kar végére van erősítve a vezető tű s ennek támasztója s, mely tetszőlegesen magasra csavarható úgy, hogy a tű karczolás nélkül is vezethető a térképen. A később leirandó ellenőrző vonalzó alkalmazása esetén ezen támasztó jó magasra emelendő, vagy teljesen eltávolítandó.

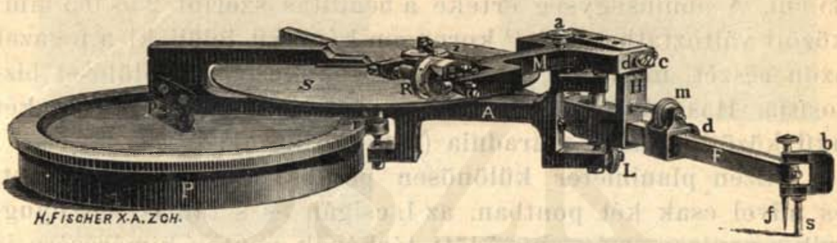
Az M keret, mely a mérő hengert hordja, elől és hátul a vezető rúd alá nyúlik s vele párhuzamos vízszintes tengely körül forgatható. A tengely elölső ágya a két k csavar segítségével oldalagosan eltolható, hogy a henger pontosan párhuzamosan legyen állítható a vezető karhoz. Spirális rugó segítségével gondoskodás történt, hogy e henger mindig a K gömbsüveggel érintkezzék. Ez érintkezés azonban az M keretben foglalt egyik csavar segítségével megszüntethető, mi mindig történjék, ha a műszer nincs használatban. E czélra a két érintkező rész közé puha bőrvánkos is fektethető. Nyilvánvaló, hogy e két rész a műszer lelke, és ezért különösen kerülni kell a hengernek a gömbsüvegre való ütközését, a mi horpadásokat okozhatna.

A mérőhengerre celluloid-kerék van erősítve, melynek kerülete 100 részre osztott. A mellette álló nonius ezen részek tizedét is engedi leolvasni, úgy hogy közvetlenül ezredfordulatokat nyerünk. A nonius adja a leolvasandó szám egységeit, a henger a tizeseket és százasokat, egy másik 50 részre osztott celluloid-korong, mely minden hengerfordulatnál egy résszel elfordul, az ezreseket.

A henger rendes szobahőmérséklet mellett igen könnyedén forog; alacsony hőmérsékletek mellett nehézkes járású lesz, nagy melegben túlságosan meglazul. Alkalmas csavarok segítségével előállítható ugyan mindig a henger kellő könnyű járása, de mindenesetre jobb e javításokat nem eszközölni és inkább arról gondoskodni, hogy a mérések közel ugyanazon hőmérsékletek mellett történjenek. A műszer gondos kezelés mellett éveken át változatlan marad.

A B állvány jobb oldalán kis fékező csavar van, melynek gyenge meghúzása által megakadályozható, hogy a planimeter esetleges lökés folytán meginduljon.

A vezető kar az alapvonaltól jobbra és balra mintegy $30^0$-kal térhet ki; ennek folytán egyszerre oly területek mérhetők meg e műszerrel, melyek szélessége a vezető kar beállított hosszával egyenlő s melyek hosszúsága tetszőlegesen nagy lehet. A noniusegység ezen planimeternél, melyet Coradi két nagyságban állít elő, a vezetőkar beállítása szerint 1·0 és 0·4 $mm^2$ illetőleg 0·8 és 0·32 $mm^2$ között változtatható.




26. ábra. A Coradi-féle precziziós korong-planimeter.

Mivel a henger csupán a gömbsüveg felületén gördül, a térkép papirjának mineműsége nem foly be az eredményre.

A 26. ábra a Coradi-féle precziziós korongos planimetert mutatja be. Két elkülönített részből áll, a P póluskorongból, melynek pereméje finom fogazattal bír, és a tulajdonképeni planimeterből AFHSM.

F a vezetőkar, melyre az előbbi leirás is alkalmazható. Az A póluskar vertikális tengelyt hord, melyre az r kerék és az S korong van erősítve. A tengely alsó csapágya beigazítható. A kar még egy másik, szintén korrigálható vertikális tengelylyel is van ellátva, mely a vezetőkar H tokjához van erősítve.

A póluskar egyrészt az L csigával támaszkodik a térképre, másrészt a p ágygyal finomra csiszolt aczélgolyóra, mely pontosan a P korong középpontján elhelyezve az egész műszer forgási pontját vagy pólusát képezi. Mihelyt a p ágyat a golyóra borítjuk, az r kerék a korong fogazatába belefog és az S korongot a vezetőkar mozgásával arányos forgásba hozza. E korong aluminiumból készül és felülete papirral van bevonva. Fölötte áll a mérőhenger M kerete, mely vízszintes, a vezetőkarral párhuzamos és annak tokjába erősített tengely körül forgatható. Az említett párhuzamosság javítócsavarral egészen pontosan idézhető elő.

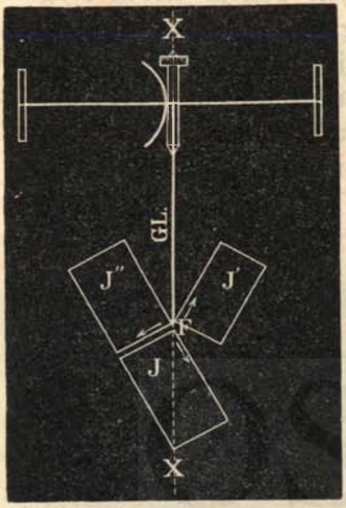
A keret súlyánál fogva az R mérőhenger a korongon nyugszik, de *a* csavar segítségével róla leemelhető. Ha a műszer használaton kívül van, vagy rajta javításokat, beállításokat s hasonlókat eszközlünk, sürgősen tanácsos a henger leemelése. Az M keret különben hátra is hajlítható, hogy az S koronghoz szabadon férhessünk.

A P póluskorong átmérője 15 cm., a vezetőkar hossza 35 cm. A noniusegység értéke a beállítás szerint 2 és 0·5 $mm^2$ között változtatható. A P korongon két nyíl jelöli ki a fogazat azon részét, mely az r kerék legegyenletesebb gördülését biztosítja. Használat alkalmával az S korongnak mindig e két nyíl között kellene maradnia (lásd 30. ábra).

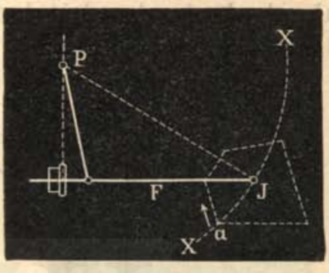
Ezen planimeter különösen pontos adatokat szolgáltat, és mivel csak két pontban, az L csigán és s támasztón nyugszik a papiron, még gyürődött térképek pontos kimérésére is használható; másik előnye, hogy a mérőcsiga mindig ugyanazon alapon mozog. A póluskorongnak természetesen biztosan kell állania.

Röviden adjuk még azokat a szabályokat, melyek a planimeteres méréseknél bármily szerkezetű műszerrel szem előtt tartandók.

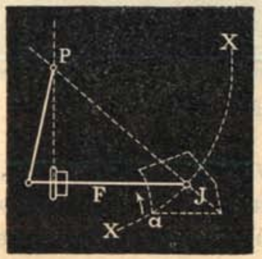
Minden planimeter mérőcsigája könnyedén és lehetőleg surlódás nélkül forogjon; e nélkül pontos eredményeket nem adhat. Éppen ezért tengelyére a legnagyobb gond fordítandó: nyomás vagy lökésektől megóvandó. A legkisebb ily irányú hiba meghamisítja a csiga gördülésének sinustörvényét ($u = x \sin \alpha$), s ezen csak alapos reparatura segíthet. Minden planimeter oly helyzetbe állítandó a kimérendő területhez képest, hogy határai ne feküdjenek közel vagy párhuzamosan a planimeter alapvonalához. Ez alapvonal a lineáris és poláris planimetereknél illetve egyenes vonal és kör s ennek mentén tudvalevőleg a csiga gördülés nélkül csúszik. A 27—30-ik ábrák tüntetik fel a különböző planimeterek legkedvezőbb állását a lemérendő I területhez képest. Ezt hosszas kisérletezés nélkül is megállapíthatjuk a következő szabály alapján: Helyezzük a vezető tűt a lemérendő terület közepébe és állítsuk a pólust úgy, hogy a mérőcsiga síkja kellőképen meghosszabbítva a póluson menjen át, vagy lineáris planimetereknél úgy, hogy



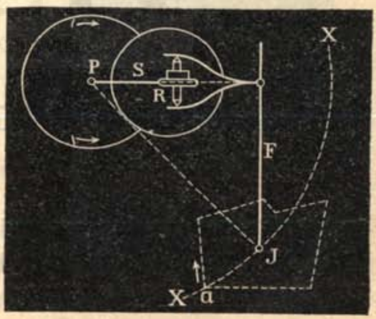

27. ábra.




28. ábra.




29. ábra.




30. ábra.

27—30. ábra. A planimeter legkedvezőbb állása a lemérendő területhez.

a vezetőkar merőlegesen álljon a kocsiszerkezet tengelyére. Ezen állásban vezetjük a tűt (az alapvonal mentén) a terület határáig (az ábráinkon *a* pontig) s onnan kezdjük a kerület bejárását. Mivel az alapvonalon a csiga nem gördül, természetes, hogy ezen berendezés mellett enyészik el leginkább a planimetertű beállítási hibája.

A műszer méreteinek változásai a hőmérséklettel általában véve elhanyagolható kicsinyek. A vezetőkar pl. $0^0$—$100^0$ C. hőmérséklet-emelkedés alatt hosszának mintegy $\frac{1}{500}$-dával változik. Ha a szoba hőmérséklete ennélfogva $10^0$ és $30^0$ C. között ingadozik, akkor a változás a vezetőrúd hosszábsn és a csiga leolvasásában $\frac{1}{2500}$, a mi tekinteten kívül maradhat.

A planimeter mellé kis, egyik pontja körül forgatható vonalzó van adva, melynek a forgásponttól meghatározott távolságú lyukaiba a planimeter tűje illeszthető. Ha a vonalzót körben forgatjuk, az $r^2\pi$ egészen meghatározott területet kapjuk. A planimeter két leolvasása a kör kezdőpontjában és oda visszatérve legyen $p_1$ és $p_2$, akkor a planimeter-adat

$$p = p_2 - p_1 \text{ és } r^2\pi = cp,$$

31. ábra. Területek meghatározása a térképen.

a miből a planimeter c állandója úgy határozható meg, hogy minden adat tüstént az r-ben alkalmazott hosszegységben kifejezhető. Természetes, hogy ezen c úgy a vezető kar beállításával (mely ugyanis rövidebbre és hosszabbra vehető), mint némileg legalább a hőmérséklettel változik, s ezért különböző karhosszakra és hőmérsékletekre külön-külön meghatározandó.

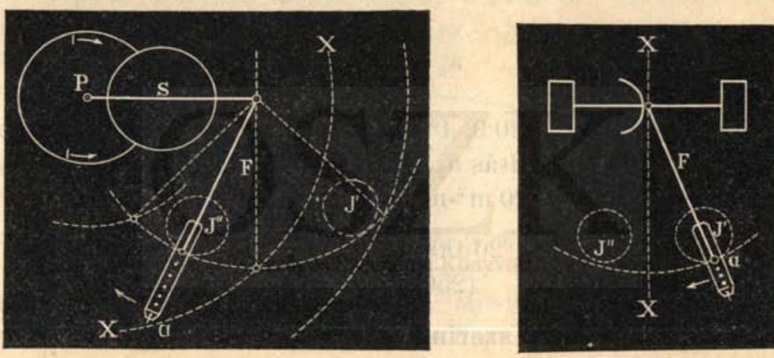
Térképkiméréseknél ismét másként járunk el, mert tekintetbe veendő a nedvesen nyomtatott térkép papirosának száradás után bekövetkezett torzulása. Legyen (31. ábra) f a lemérendő terület és ABCD ezen területhez lehetőleg közel simuló szeme a térképhálózatnak, melynek AD és BC meridiánrészletei $\lambda'-\lambda$ fokokban kifejezett hosszúságkülönbséggel bírnak, míg AB $\varphi'$ és CD $\varphi$ geographiai szélesség alatt fekvő parallel ív. Ha az f terület peremét járjuk be p, ha ellenben ABCD kerületét húzzuk meg, P planimeter-adathoz jutunk. Ha még a hálószem területe F, akkor nyilván

$$f = F\frac{p}{P},$$

még pedig függetlenül úgy a planimeter állandójától, mint a papiros netalán szabálytalan összehuzódásától. Az F terület mérés nélkül is, tehát függetlenül netáni torzulásoktól, ismeretes; gömbi Földön pl.

$$F = \frac{\pi}{90} r^2 (\lambda' - \lambda) \sin\frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos\frac{\varphi' + \varphi}{2},$$

mint ezt későbben látni fogjuk.




32. és 33. ábra. Az ellenőrző vonalzó alkalmazása.

Az ellenőrző vonalzó használatát, különösen azon szempontból is, vajjon az alapvonal mindkét oldalán a műszer egyenlően mér-e, a 32. és 33. ábra mutatja be.

A műszert rendesen táblázat kiséri, mely a vezetőkar bizonyos beállításai számára a noniusegység értékét adja. Ha valamely ismeretes terület (négyszög, vagy ellenőrző vonalzóval leírt kör) lemérése valódi értékének $\frac{1}{n}$-ével kisebb számhoz vezet, akkor a vezetökar hossza is $\frac{1}{n}$-dével megrövidítendő s fordítva. Hasonlóképen állapítható meg a műszer azon állandója is, mely akkor szerepel, mikor a pólus az ábra határai közé esik. Körüljárunk ismeretes t területű négyszöget az óramutató irányában. Ha a noniusegység értéke f, az első és második leolvasás $p_1$ és $p_2$, akkor az állandó K:

$$K = \frac{t}{f} + p_1 - p_2.$$

A vezetőkar beállítása végre oly esetekben is kiszámítható, melyek a műszert kisérő táblázatban megjelölve nincsenek. E czélból a táblázat a noniusegység $f^0$ értékét $mm^2$-ekben természetes nagyságban (1 : 1) is tartalmazza.

Legyen a és $a_1$ a táblázatban adott leghosszabb és legrövidebb vezetőkar-beállítás és $f^0$, $f^0_1$ a hozzátartozó noniusegységek értékei $mm^2$-ben; keressük az $a_2$ beállítást $f^0_2$ noniusegység számára. Ha F a vezetőkar hossza $f^0 - f^0_2$ noniusegység számára, akkor

$$\frac{a - a_1}{F} = \frac{f^0 - f^0_1}{f^0 - f^0_2} \text{ arányból } F = (a - a_1)\,\frac{f^0 - f^0_2}{f^0 - f^0_1}$$

és

$$a_2 = a - F.$$

Legyen pl. $a = 320{\cdot}9$, $f^0 = 10\,mm^2$; $a_1 = 128{\cdot}5$, $f^0_1 = 4\,mm^2$ és kerestessék a beállítás $a_2$ oly 1 : 2500 méretű tervhez, melyben a noniusegység $20\,m^2$-nek felel meg. Ekkor

$$f^0_2 = \frac{20\,000\,000}{(2500)^2} = 3{\cdot}2\,mm^2.$$

A felírt két egyenlet szerint:

$$F = 218{\cdot}05 \text{ és } a_2 = 320{\cdot}9 - 218{\cdot}05 = 102{\cdot}85.$$

Ha ezen utóbbi számra állítjuk be a vezetőkart, akkor 1 : 2500-es térképen minden noniusegység tényleg $20\,m^2$-nek fog megfelelni a természetben.

Hasonló szolgálatokat, mint a planimeter, tehet a pontos mérleg is. Ha ugyanis az F és f területeket ugyanazon minőségű homogen papirra rajzoljuk, majd kivágva megmérlegeljük és a Q, illetve q súlyokat tapasztaljuk, áll ugyancsak

$$f = F\,\frac{q}{Q},$$

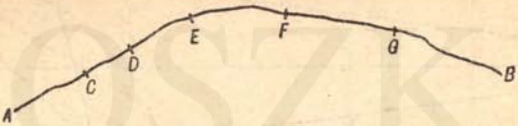
a mennyiben egyenlő vastagságok mellett a súlyok csakugyan úgy aránylanak, mint a felületek.

## XIII. FEJEZET.

## Közelítő rectificatio és quadratura.

Igen sok esetben úgy a quadratura, mint a rectificatio sokkal egyszerűbben végezhető, még pedig kellő gyakorlat mellett elegendő pontossággal.

Ha az AB vonalat ki akarjuk egyenesíteni, illeszszünk a vonal mellé vonalzót (34. ábra) s vegyük körzőbe az AC darabot, melyet nagy közelítéssel egyenesnek tekinthetünk. Forgassuk a vonalzót C pont körül (a körző egyik szára körül) és tűzzük be a körző másik szárát hátrafelé; kinyitván most a másik szárat D pontig, nyilván az AD kiegyenesített hosz-



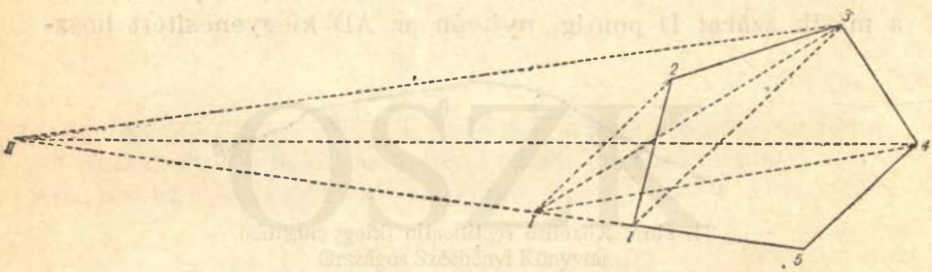
34. ábra. Közelítő rectificatio (kiegyenesités).

szúsággal egyenlő a körző nyilása. Most forgatjuk a vonalzót E körül, a körző egyik szárát betűzzük a vonalzó mentén, ED vonaldarabtól balra és nyissuk ki E pontig s í. t.

Hasonló közelítő eljárással határozhatjuk meg szabálytalan alakok területét is. Az adott idom kerületét egyenes vonalokkal határoljuk, természetesen úgy fektetve ezeket, hogy a mit egyik helyen az idomból lemetszettünk, azt más helyen hozzácsatolhassuk. Ha ily módon pl. mint ezt a 35. ábra mutatja, az 12345 ötszög keletkezett, hosszabbítsuk meg ennek egyik oldalát, pl. 51-et. Az 1—3 csúcsokat összekötve, vonjunk 2-n át ez egyenessel párhuzamost, mely I-ben metsz be az alapvonalba. Húzva már most I3-at, világos, hogy az eredeti ötszög a vele egyenlő térfogatú I345 négyszögre bomlott. Az 1345 idom változatlanul maradt; az 13 oldalon álló két háromszög: 132 és 131 ellenben egyenlő térfogatú, mert ugyanazon alapon állanak és ugyanazon közös magassággal bírnak.

Most folytatjuk az eljárást; I-et összekötjük 4-gyel és 3-on át hozzá párhuzamost vonunk, mely II-ben metszi az alapot. Meghúzván II4-et a II45 háromszöget kapjuk, mely az I345 négyszöggel, tehát az eredetileg adott ötszöggel is egyenlő. Míg ugyanis I45 a szerkesztés által ismét bántatlan maradt, addig az I4 közös alapon az I43 és I4II háromszögek állanak, melyek magassága ismét ugyanaz. Ezen eljárás folytatásával utóbb minden alak háromszögre bontható, melynek területe ismert szabály szerint határozható meg.

Az előforduló ferde metszések miatt azonban a 12. ábrában bemutatott, szétbontásra alkalmazott SIMPSON-féle szabály minden esetben pontosabb eredményekhez vezet.



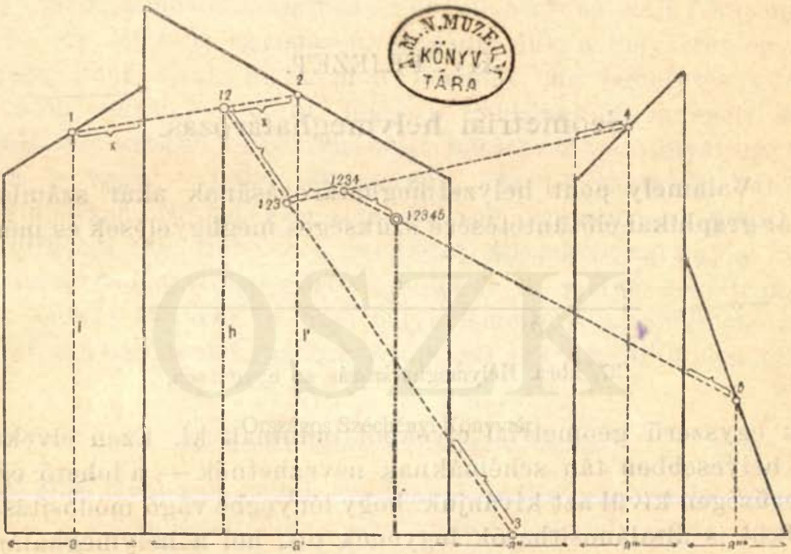

**35. ábra.** Közelítő quadratura (területmeghatározás).

Talán még egyszerűbb amaz eljárás, melyről a 36. ábra ad képet. A területére nézve meghatározandó alakot közös alapvonalon álló trapezekre bontjuk, melyek közül bárhány háromszög által is lehet helyettesítve; a trapezek, miként az ábrában is, csoportosan el lehetnek egymástól választva. A trapezek felső oldalait felezzük, mi által sorban az 1, 2, 3, 4, 5 pontokat nyerjük. E mellett az üres köz természetesen null magassággal biró trapeznek tekinthető. Meghúzzuk az 1—2 egyenest és felrakjuk az x távolságot, azaz az összekötő egyenesnek azon darabját, mely a felező pont és a következő trapez függélyes oldala között fekszik a 2. pontból visszafelé, mi által az 12 pontot nyerjük. Az 12 ponton át az alapra húzott merőleges h ama parallelegram magassága, mely a két trapezzel egyenlő alapon áll és velük egyenlő területtel bír.

Az első két trapez alapja ugyanis a és a'. középvonaluk l és l', területük tehát összesen:

$$T = al + a'l'.$$

Ha azonban az l pontból párhuzamost húzunk az alappal, akkor ez l'-ből és h-ból az l'—l és h—l darabokat metszi le. Miután továbbá az l és h vonalak távolsága a', az l és l' egyeneseké a + a' (a mennyiben a trapezoldalak felezése és






36. ábra. Trapez-csoportok területének meghatározása.

a középoldal meghúzása által a megfelelő alapok is feleztetnek), úgy nyilván áll:

$$\frac{h - l}{l' - l} = \frac{a'}{a' + a'}$$

a miből

$$h(a + a') = al + a'l'.$$

A T terület tehát tényleg oly parallelegraméval azonos, melynek alapja a két trapez alapjának összege és melynek magassága h.

Így folytathatjuk a szerkesztést tovább is; az 12 pont összekötve 3-mal, s a megfelelő levágást 12-ből felrakva, eljutunk 123-hoz stb. Utóbb is az 12345 pont szolgáltatja azon magasságot, melylyel az idom teljes alapja $a+a'+a''+a'''+a^{IV}$ szorzandó, hogy annak területét nyerjük.

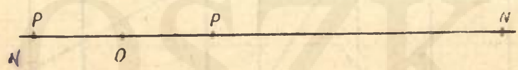
A felhozott esetek mindenesetre bizonyítják azon sokszor hivatolt tényt, hogy a rajzolás és számítás egyenértékű, bár szemléletünkhez különbözően élénken szóló műveletek.

Az eddigiekkel szoros kapcsolatban áll a geometriai helymeghatározás tana, mely a következő fejezet tárgyát képezi.

## XIV. FEJEZET.

# Geometriai helymeghatározás.

Valamely pont helyzetmeghatározásának akár számbeli, akár graphikai előtüntetésére szükséges megfigyelések és méré-




37. ábra. Helymeghatározás az egyenesen.

sek egyszerű geometriai elvekből indulnak ki. Ezen elvektől — helyesebben tán schémáknak nevezhetnők — a lehető egyszerűségen kívül azt kivánjuk, hogy lényegbe vágó módosítások nélkül is általánosíthatók legyenek ott, hol a helymeghatározás, mint pl. a legáltalánosabb értelemben szabálytalannak vett Föld felületén, a legelemibb geometriai eljárások szerint lehetetlennek látszhatnék.

### a) *Helymeghatározás a vonalon.*

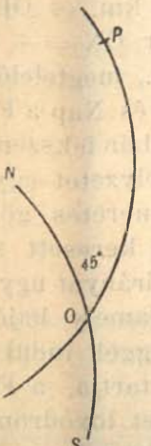
Ha valamely pontról eleve tudjuk, hogy csak egyenes vonal mentén keresendő, helymeghatározása egyetlen egy adat lemérése által eszközölhető. Az egyenesen ekkor szilárd, különben tetszőleges kezdőpontot választunk O, s ettől megadjuk a keresett P pontnak távolságát; az irányban sem lehet kétség, mihelyt megállapítjuk, hogy a positiv távolsági számok jobbra, a negativok balra veendők. Teljes Nap- vagy Holdfogyatkozás tudvalevőleg csak akkor lép be, ha a Föld, Nap és Hold középpontjai ugyanazon egyenesen feküsznek; a fogyatkozás pillanatában tehát a Nap vagy Hold helye egyetlen egy adat által jellemezhető, és ennek megfelelőleg 37. ábránkban O a Föld, P, illetve $P_1$ a Hold és N a Nap középpontja. Teljes Napfogyatkozás pillanatában $ON = +149$ mill. km. és $OP = +385$ ezer km., míg teljes Holdfogyatkozáskor $ON = +149$ mill. km. mint előbb, míg $OP_1 = -385$ ezer km., megfelelőleg az ismert ténynek, hogy az első esetben a Hold és Nap a Föld ugyanazon, a második esetben a Föld ellentett oldalain fekszenek.

Úgy mint az egyenesen, megadhatjuk a helyzetet egyetlenegy adat által, ha a pont bármely, de ismeretes görbe vonalon marad, az által, hogy a görbének a keresett s a kezdőpont között fekvő ívhosszát határozzuk s irányát ugyancsak + vagy — jellel jellemezzük. Ha pl. valamely hajó a meridiánnal, NS-sel képezett $45^0$-nyi irányszöggel indul ki kikötőjéből (38. ábra) s e szögletet állandóan tartja, a Föld felületén tudvalevőleg görbe vonalat ír le, melyet loxodromiának szokás nevezni. A hajó helye ismeretes a vonal mentén, ha OP-t, a hajó loxodromikus távolságát az O kikötőtől ismerjük.

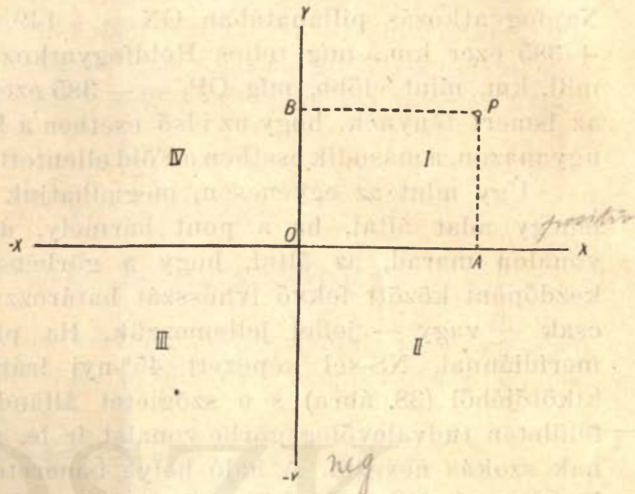
## b) *Helymeghatározás a lapon.*

Míg a vonalon, mint egydimensionális geometriai képződésen a helymeghatározás egy adatot igényel, addig a kétméretű lapon két számmeghatározóra van szükségünk.

Legegyszerűbben (39. ábra) két egymásra merőleges XX és YY vonalrendszert választunk, melyben a P pont fekvését az Y tengelytől való $BP = OA$ távolsággal s az X tengelytől való $AP = OB$ távolság által jellemezzük. Az Y tengelytől való az X tengelyen OA irányában leolvasandó távolságot abscissának, a rá merőleges, az Y tengely irányába eső távolságot ordinátának szokás nevezni és illetve x-xel és y-nal jelölni. Az XY tengelykereszt a síkot négy részre osztja; a P pont helyzete mindazonáltal egyértelműen jellemezhető, ha a coordinátáit kellő előjelekkel irányítjuk, azaz az Y tengely O-tól jobbra és balra eső részét illetve positivnek és negativnek, és az Y tengely O-tól felfelé és lefelé húzott felét szintén illetve positivnek és negativnak tekintjük. Ha tehát a felső jobboldali negyedből kiindulólag a quadransokat az óramutató irányában számozzuk, akkor az elsőben x és y positiv, a harmadikban x és y negativ, a másodikban x positiv, y negativ, végül a negyedikben x negativ és y positiv. Valamely pont-

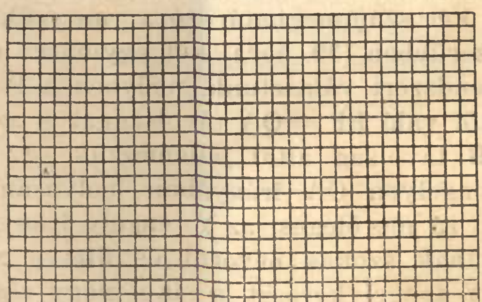



38. ábra. Helymeghatározás görbe vonalon.




39. ábra. Derékszögű sik coordinátarendszer.

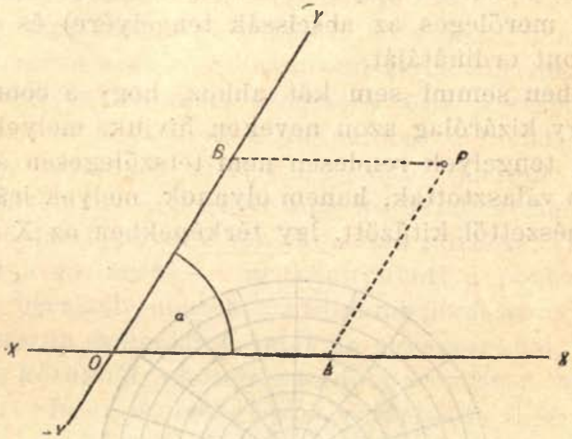
nak úgy lemérését, mint adott coordinátákból a síkra berajzolását természetesen tetemesen megkönnyíthetjük, ha aequi-



40. ábra. Derékszögű coordinátaháló (millimeterpapiros).

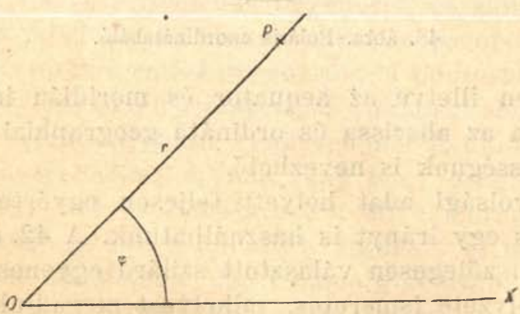
distans pontok coordinátáit előre berajzoljuk, azaz, ha a síkot az X és Y tengelyekkel parallel aequidistans egyenesekkel, úgynevezett hálóval borítjuk (40. ábra).

Semmi sem kényszerít arra, hogy a tengelyeket egymásra merőlegesen válaszszuk; ha egymással, mint a 41-ik ábrában $\alpha$ szögletet képeznek, P pontnak ferdeszögű coordinátáiról




41. ábra. Ferdeszögű sík coordinátarendszer.

szólunk, míg az előbbi rendszert derékszögűnek, vagy orthogonálisnak nevezzük. A ferde rendszerben ugyancsak OA = BP = x az abscissa és AP = OB = y az ordináta, mely magá-

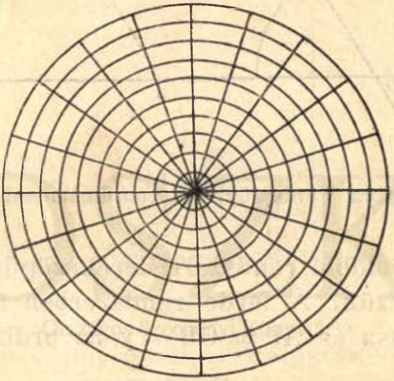



42. ábra. Poláris sík-coordinátarendszer.

tól érthetőleg az Y tengelylyel párhuzamosan vonandó. E két coordinátarendszer mindkét faja némely térképen használatos és az itt megbeszélttől csakis abban különböző, hogy a távolságok nem a szokásosabb hosszegység szerint, hanem fokmérték szerint vannak kijelölve.

Valamely pont felkeresése ezen két coordinátarendszerben két mérést és egy szerkesztést igényel; felrakjuk a P pont abscissáját az X tengelyre; végpontjában az Y tengelylyel párhuzamost vonunk (mely derékszögű rendszer esetében természetesen merőleges az abscissák tengelyére) és ezen mérjük le a pont ordinátáját.

Különben semmi sem köt ahhoz, hogy a coordinátákat tényleg vagy kizárólag azon neveken hívjuk, melyekről eddig szó volt. A tengelyek rendesen nem tetszőlegesen és teljesen önkényesen választottak, hanem olyanok, melyek iránya mintegy a természettől kitűzött. Így térképekben az X és Y tengely rendesen illetve az aequator és meridián irányába eső és ennélfogva az abscissa és ordináta geographiai hosszúságnak és szélességnek is nevezhető.



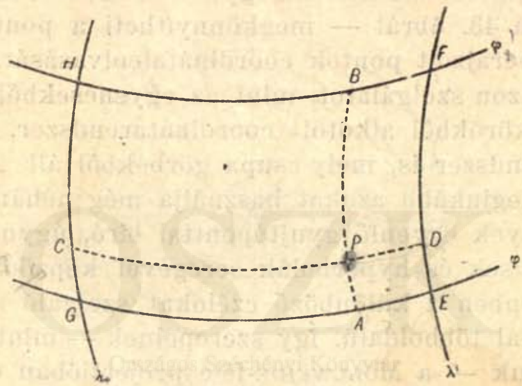
43. ábra. Poláris coordinátaháló.

Két távolsági adat helyett teljesen egyértelműleg egy távolságot és egy irányt is használhatunk. A 42. ábrában OX ismét egy tetszőlegesen választott szilárd egyenes, a tengely. A P pont helyzete ismeretes, mihelyest megadjuk távolságát az O kezdőponttól és azon szöget, melyet ezen távolság a fix tengelylyel képez. A távolság r, a radius vector, a szöglet $\varphi$, az anomália nevét szokta viselni; a szöglet iránya meg van határozva, mihelyt megállapítjuk, hogy ez, mint rendesen szokás felvenni, az óramutató járásával ellenkező irányban nő.

A Föld póluskörüli térképei ezen utóbb megbeszélt és a poláris névvel jelzett coordinátarendszert szokták választani;

ha az O kezdőpontot az északi pólusba, az OX szilárd tengelyt a kezdő meridiánba fektetjük, akkor a radius vector, melyet ez esetben ismét fokmértékben adunk, a geographiai szélességnek 90⁰-hoz való kiegészítője vagy a sarktávol, az anomalia pedig ismét a geographiai hosszúsággal azonos. A P pont felkeresése ezen coordinátarendszerben is elég egyszerű. Az OX tengelyre illesztett szögmérő adja a vezérsugár irányát, melyen csak O pontból kiindulólag a kivánt távolságot kell lemérni. Hálózat, melylyel a síkot borítjuk s mely ez esetben concentricus, aequidistans körökből s ezeket metsző egyenlő szögintervallumokban egymásra következő sugarakból áll — lásd a 43. ábrát — megkönnyítheti a pontok berajzolását vagy berajzolt pontok coordinátaleolvasását.

Ugyanazon szolgálatot, mint az egyenesekből, vagy egyenesekből és körökből alkotott coordinátarendszer, teheti végre azon vonalrendszer is, mely csupa görbékből áll. A geometria ezek közül leginkább azokat használja még néhány speciális esetben, melyek egyenlő gyujtóponttal biró, úgynevezett confocális ellipsisek és hyperbolák seregével képződnek; a geographus ellenben a különböző czélokat szolgáló térképvetítésekben sokkal többoldalú. Így szerepelnek — mint ezt később látni is fogjuk — a Mollweide-féle projectióban ellipsisek és egyenesek, a Flamsteed-félében egyenesek és sinusvonalak, a Bonne-félében körívek és sinusvonalak s hasonló, többnyire még bonyolódottabb természetű görbék. A pontosabb térképek, melyekből egyszersmind tetszőleges pontok elég közelített geographiai fekvése kivehető, rendesen mértéküknek megfelelő elég szűk hálószemekkel bírnak, úgy hogy ezek oldalai első közelítésben egyeneseknek tekinthetők. Mivel a graphikus interpolátió szüksége gyakran felmerül, álljanak itt már most az erre vonatkozó utasítások. Ha valamely coordinátahálózatból — térképből p. o. — valamely P pont helyzete kiveendő, kiindulunk ezen pontot körülzáró legközelebbi hálószemből (44. ábra), mely általánosságban görbéktől határolt trapezoid alakú s melynek oldalai szélességben $\varphi' - \varphi$ és hosszúságban $\lambda' - \lambda$ ívmértékben kifejezett hosszúsággal bírnak. A P ponton át fektessünk a hozzá közelebb álló két oldalhoz párhuzamos görbét — a legtöbb esetben a P ponton átmenő egyenesek is elég jó eredményt fognak adhatni — és határozzuk meg AB és CD, ezen párhuzamosoknak a szem határai közé eső hosszát. Azonkívül mérjük meg ezen párhuzamosoknak a keresendő pont és a legközelebbi oldal közé eső AP és PD részeit. Akkor nyilván a P pontnak a $\varphi$ szélességű parallelkörhez való szélességkülönbsége annyiad része a két parallel közt lévő $\varphi'-\varphi$ szélességkülönbségnek, mint a hányad része AP az egész AB vonalnak. És hasonlóan: P-nek a $\lambda'$ hosszúságú meridiántól való hosszkülönbsége az egész trapezoid $\lambda'-\lambda$ hosszkülönbségének annyiad része, a hányad része PD az egész CD hoszszúságnak. Ha az AP távolságnak megfelelő szélességkülönb-




44. ábra. Helymeghatározás a térképen.

ség $\triangle\varphi$, a DP ívnek megfelelő hosszúságkülönbség $\triangle\lambda$, akkor P-nek coordinátái: $\varphi + \triangle\varphi$ és $\lambda' - \triangle\lambda$ és

$$\triangle\varphi = (\varphi' - \varphi)\frac{AP}{AB} \text{ és } \triangle\lambda = (\lambda' - \lambda)\frac{DP}{CD}$$

$\triangle\varphi$ és $\triangle\lambda$ positiv vagy negativ, a szerint, a mint a P pont $\varphi$ és $\lambda$ vagy $\varphi'$ és $\lambda'$ görbéhez áll közelebb, azaz vajjon P a trapezoid kiindulási oldalától kezdve a növekedő vagy fogyó szélesség és hosszúság irányában fekszik.

Ha fordítva a P pontnak helyzete $\varphi_0$ szélessége és $\lambda_0$ hosszúsága szerint számbelileg adva van s e szerint a térképbe berajzolandó, képezzük $\varphi_0 - \varphi$ és $\lambda' - \lambda_0$ szélesség- és hosszúságkülönbségeket, ismét oly módon, hogy ezen különbségek kisebbek legyenek, mintha a másik szomszédos parallelkört vagy meridiánt választanók kiindulási vonal gyanánt. Mérjük meg

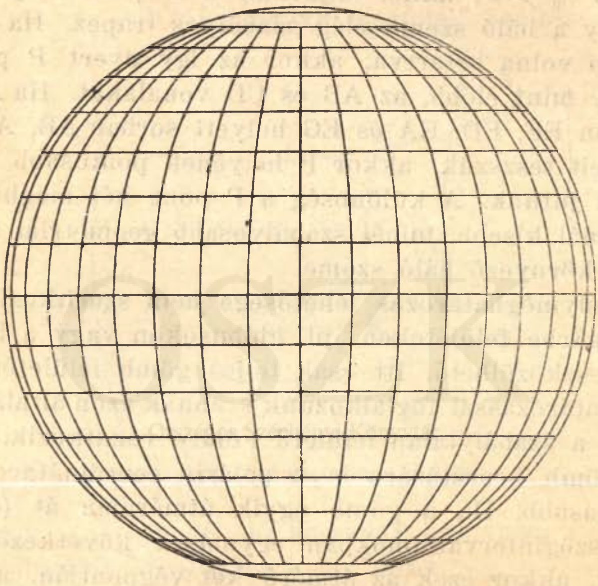
EF és EG vonalok hosszát, akkor a P pontnak megfelelő ED és EA coordináták értékei az előbbi feladat értelmében:

$$ED = EF \frac{\varphi^0 - \varphi}{\varphi' - \varphi} \text{ és } EA = EG \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda' - \lambda}.$$

Ha ezen hosszúságokat E pontból kiindulólag a meridiánra és a parallelkörre felviszszük, még pedig az előjel tekintetbevételével a növekedő hosszúság és szélesség irányában, ha $\varphi_0 > \varphi$ és $\lambda_0 > \lambda'$, akkor eljutunk a P pont helyéhez, feltéve, hogy a háló szeme elég szabályos trapez. Ha ezen feltevés nem volna betartva, akkor az így nyert P ponton át fektessük, mint előbb, az AB és CD vonalakat. Ha az előbbi formulában EF, ED, EA és EG helyett sorban AB, AP, DP és CD értékeit teszszük, akkor P helyének pontosabb meghatározásához jutunk. A különbség a P pont két meghatározása között annál kisebb, minél szabályosabb geometriai alakzat a P pontot környező háló szeme.

A helymeghatározás lehetősége nem szorítkozik csupán a síkra, görbe felületeken, pl. glóbusokon vagy a Föld felületén is eszközölhető. Itt csak teljes gömb felületén végzett helymeghatározással foglalkozunk s annak azon általánosításával, mely a szabálytalan felületű Földre vonatkozik.

A gömb beosztására is a poláris coordinátarendszer a legalkalmasabb. Ha a gömb egyik átmérőjén át (45. ábra) egyenlő szögintervallumokban egymásra következő síkokat fektetünk, akkor ezek az átmérő két végpontján, a két diametrális póluson átmenő legnagyobb köröket szelnek ki, melyek a pólusokon egymással ugyanazon szögeket képezik. Ha ezután az egyik vagy a másik pólus körül mindig ugyanazon menynyiséggel növekedő gömbi ívvel aequidistans és párhuzamos köröket írunk le, ismét orthogonális, legnagyobb és kisebb körökből álló hálózatot nyerünk, melylyel a helymeghatározás feladata teljesen megoldható. A gömbnek oly kis felületrésze, mely a pólus körül fekszik és közelítésben síkkal azonosítható, tehát ugyanazon beosztással bír, mint a síkon a poláris coordinátarendszer és az aequator — azaz a kisebb, párhuzamos körök — legnagyobbikának síkkal azonosítható környéke ugyanazon képet nyujtja, mint a síkon az orthogonális rendszer. A hálózat egyes köríveinek hossza akár hossz-, akár ívmérték szerint mérhető; az égen és a Földön — még ha utóbbi geometriai gömb volna is — az utóbbi mérték az egyedül hasznavehető, mert az ég méretei ismeretlenek, illetve végtelen nagyok, s mert a Föld méretei sincsenek oly pontossággal meghatározva, hogy geometriailag kifogástalan beosztási rendszerhez juthatnánk. Azonkívül a Földön egyenlő hoszszúságok kitűzése és tényleges lemérése — mint ezt a fokmérés fejezetében látni fogjuk — oly nehéz művelet, mely a hely-



45. ábra. A Föld coordinátahálózata.

meghatározást rendkívül megnehezítené. Az ég s a Föld ívmérték szerint való beosztása ellenben oly hálózathoz vezet, mely a Föld tengelyforgása és a csillagoknak ezzel kapcsolatos láthatósága alapján mindenkor és mindenütt könnyen megállapítható, mint ezt a geographiai és csillagászati hely- és időmeghatározás methodusa tanítja és bizonyítja. És ezen csillagászati methodussal, nem többé geometriai szerkesztés útján nyert hálózat teljesen egyértelmű és összeeső, ha a Föld mathematikai gömb volna, de fölötte azon előnynyel bír, hogy a legkönnyebben általánosítható, ha a Földet akár szabálytalan testnek tekintjük, sőt általánosítása nem okoz nehézséget még akkor sem, ha a Föld teljességgel absolute szabálytalan felület volna is.

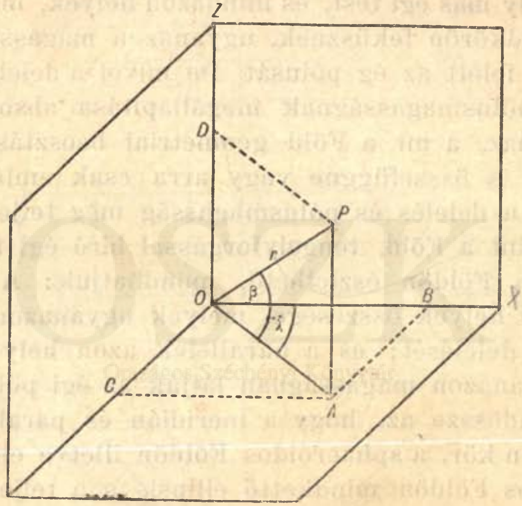
Ha ugyanis az előbb említett mathematikai gömbhálót úgy fektetjük, hogy a két pólust összekötő egyenes, a meridiánsíkok közös metszési éle, szóval a gömb tengelye a Föld forgási tengelyébe essék, akkor a legnagyobb körök a meridiánokat, a kisebb párhuzamos körök a paralleleket és azok legnagyobbika az aequatort adja. A mathematikai gömbalakkal biró Földön ekkor mindazon helyek számára, melyek ugyanazon meridián alatt feküsznek, ugyanazon időben delel a Nap vagy bármely más égi test, és mindazon helyek, melyek ugyanazon parallelkörön feküsznek, ugyanazon magasságban látják horizontjuk felett az ég pólusát. De mivel a delelés pillanatának és a pólusmagasságnak megállapítása absolute semmit sem tartalmaz, a mi a Föld geometriai beosztásával csak a leglazábban is összefüggne vagy arra csak emlékeztetne is, azaz, mivel a delelés és pólusmagasság még teljesen szabálytalan, de mint a Föld, tengelyforgással biró égi testen éppen úgy, mint a Földön észlelhető, mondhatjuk: A földi meridiánok azon helyek összesége, melyek ugyanazon időben látják a Nap delelését; és a parallelek azon helyek sorozata, melyek ugyanazon magasságban látják az égi pólust. S a különbség mindössze az, hogy a meridián és parallel a gömbalakú Földön kör, a sphaeroidos Földön illetve ellipsis és kör, az ellipsoidos Földön mindkettő ellipsis s a teljesen szabálytalan Földön szintén teljesen szabálytalan, minden geometriai értelmezést nélkülöző, de astronomiailag mindenütt és bármikor könnyen kijelölhető görbe.

Valamely helynek interpolatio útján való meghatározása a glóbuson teljesen azon schéma szerint végzendő, melyet a 44. ábrával kapcsolatosan adtunk. A dolog az általános esetnél egyszerűbb, mivel a kijelölt hálószem szabályos gömbi trapez, vagy a pólus körül egyenszárú gömbi háromszög és a P ponton átmenő AB görbe legnagyobb, a pólusokon áthaladó kör, CD ellenben parallelkör darabja, mely minden esetben könnyű szerrel szerkeszthető.

## c) *Helymeghatározás a térben.*

Míg valamely pont egy — s mint ezt a Föld esetén láttuk — akár szabálytalan felületen is marad, két helyhatározó számadat annak szabatos kijelölésére teljesen elegendő. Nem úgy a térben, melyet három dimensióval mérünk, s melyben ennélfogva három adat kell.

A legszokásosabb térbeli coordináták a derékszögű, orthogonális és a poláris coordinátarendszer. Képzeljünk három egymást O pontban metsző s egymásra merőleges tengelyt, XX,



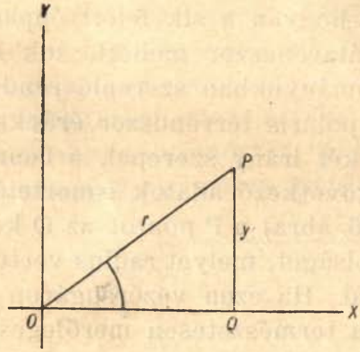

46. ábra. Derékszögű coordinátarendszer a térben.

YY és ZZ (46. ábra), melyek közül X és Z a papir síkjában, Y erre merőlegesen áll. Valamely P pont helyzete egyértelműleg meghatározott, ha ismerjük a három tengelytől mért távolságait, azaz OB = AC = x, OC = BA = y és OD = AP = z coordinátáit nagyság és irány szerint. A tengelykereszt a tért nyolcz oktánsra osztja és a P pont egy bizonyos oktánsba való tartozóságát a három coordináta előjele szabja meg, ha megegyezünk abban, hogy az X tengelyt jobbra, az Y tengelyt előre, a Z tengelyt felfelé veszszük positivnek. Ha ezen oktánsokat a Z tengely negativ oldaláról tekintve, az óramutató irányában számozzuk egytől négyig az XY sík fölött és alatt és kiindulunk az elölső felső és alsó oktánsból, akkor mondhatjuk: a felső négy oktánsban z általában positiv; x és y az elsőben positiv, a harmadikban negativ, a másodikban x positiv és y negativ, a negyedikben x negativ és y positiv. Az XY sík alatt a z coordináta egyáltalában negativ; x, y úgy viselkedik, mint a hogyan a sík felett éppen felsoroltuk.

Ezen coordinátarendszer mellett, sok más és különösen a mechanikai tudományokban szereplő rendszertől eltekintve, bennünket még a poláris térrendszer érdekel. Ebben egyetlen egy hosszúság és két irány szerepel, s benne a P pont helymeghatározása a következő adatok ismertetésére vezet vissza. Ha összekötjük (46. ábra) a P pontot az O kezdőponttal, nyerjük az OP = r távolságot, melyet radius vectornak, vezérsugárnak szokás nevezni. Ha ezen vezérsugáron és a Z tengelyen át egy az XY síkra természetesen merőlegesen álló síkot fektetünk, nyerjük az AZ síkot, mely az XZ-vel a λ szögletet képezi; ezt rendesen geographiai hosszúságnak szokás nevezni. Mert ha XZ sík a kezdőmeridiánba, Z tengely a mathematikai gömbnek képzelt Föld forgási tengelyébe és XY az aequatorba esik, azaz O a Föld geometriai középpontjával födésbe jut, akkor a P ponton s Z tengelyen átmenő sík a P pont meridiánsíkja és λ a két meridiánsík képezte szög, csakugyan az, a mit geographiai hosszúságnak szokás nevezni, ha ugyan a λ szöglet a Z tengely negativ oldaláról nézve az óramutató irányában nő. Ha a P pontból az AP merőlegest bocsátjuk, mely természetesen az AZ síkba esik, akkor OA az r-nek az XY síkban fekvő vetülete és AOP szög, a radius vector és vetülete által képezett φ szög a geographiai szélesség nevén a második irányadat. Mert a gömbalakú Földön tényleg a radius vector és aequator közötti szög az, melyet a szélesség nevével szokás illetni. Ezen φ szögletet positivnek szokás venni, ha az XY síktól a Z tengely positiv — felső — ága felé nő. Irányítása tehát szintén ugyanaz, mint a geographiai szélesség szögletéé.

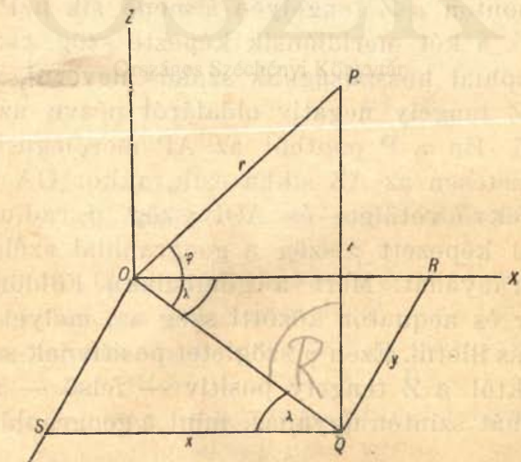
Míg a derékszögű x, y, z coordináták rendesen külön neveket nem viselnek, addig a poláris rendszer két irányszöge a helymeghatározás sokfélesége szerint más és más elnevezés alatt fordul elő. λ majd a geographiai hosszúság, majd azimuth, majd recta ascensio és mágneses meghatározásokban declinátio; φ majd a geographiai szélesség, majd meg magasság, majd declinatio és mágneses méréseknél inclinatio néven található.

Más, bonyolódottabb vagy síkok helyett éppen görbe felü-




47. ábra. Síkderékszögű és poláris coordináta-rendszer transformatiója.

letekkel operáló coordinátarendszerek, melyek a geometriában még szerepelnek, bennünket nem érdekelnek és ennélfogva mellőzhetők. E helyütt álljon még a fontos megjegyzés, hogy




**48. ábra. Térbeli derékszögű és poláris coordinátarendszer transformatiója.**

mind az említett és síkra *vagy* térre vonatkozó többféle coordinátarendszer egymásba analytikailag átalakítható, mi rendesen a foganatba vett feladat egyszerűbb és áttekinthetőbb megoldásához vezet. Így pl. a térbeli orthogonális és poláris coordinátáknak egymásba való átalakítása egy csapással a gömbháromszögtan minden tételéhez vezet. Hasonló transformatiókkal és a coordinátaszámítás legszükségesebb elemeivel több helyütt és több ízben nekünk is kell majd foglalkoznunk.

A legegyszerűbb eset, midőn derékszögű és poláris rendszer változtatandó át egymásba.

A 47. ábrában x, y a P pont orthogonális, r és v poláris coordinátái, melyek között az OPQ háromszög tüstént megadja az összefüggést. Ugyanis:

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v$$

vagy megfordítva:

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \operatorname{tang} v = \cancel{\frac{x}{y}}\,\frac{y}{x}$$

A 48. ábra a térbeli coordinátarendszer esetét tárgyalja. x, y, z a P pontnak derékszögű coordinátái, r, λ és φ poláris összrendezői. Az OPQ, Q-nál derékszögű háromszögből következik:

$$OQ = r\cos\varphi \quad \text{és} \quad z = r\sin\varphi.$$

Az OQR vagy a vele congruens OQS háromszögből, mely R, illetve S mellett derékszögű:

$$x = OQ\cos\lambda \quad \text{és} \quad y = OQ\sin\lambda,$$

vagy végleg:

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda; \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda; \quad z = r\sin\varphi$$

és megfordítás által:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## II. SZAKASZ.

# A NAPI MOZGÁS.

## I. FEJEZET.

### Az éggömb.

Ha az ég s a Föld geometriai beosztása lehetséges volna is — pedig az előbbi fejezetben mondottak szerint ezen lehetőség teljesen ki van zárva — mégsem zárhatnók ki tanulmányaink köréből a csillagos ég jelenségeit. Mert ha a szabatos helymeghatározás érdekében nyugvó, a Földön kívüli pontot keresünk, melyre a Föld coordinátarendszerét vonatkoztathatnók, ezt csak az égen leljük meg. A csillagászati geographiában egészen közömbös, vajjon a látszatnak hódolva a Földet nyugvónak tekintjük és az égnek körüle való napi forgását valónak hiszszük, vagy vajjon a változatlan mindenségben a Föld napi tényleges tengelyforgását valljuk-e; mi a két lehetséges és tárgyunkban egyjelentőségű kifejezés közül mindig a pillanatnyi tárgyalásmodornak jobban megfelelő kitételt választjuk. Minden esetben a csillagos ég teszi lehetővé, hogy a Föld coordinátarendszerének a térben való pontos irányulását megállapítsuk s képesít bennünket arra, hogy a gondolható végtelen sok coordinátarendszer közül éppen azt válaszszuk, mely az ég forgásával és a csillagoknak láthatósága által lévén meghatározva, összes helymeghatározó feladataink lehető gyors, áttekinthető és egyszerű megoldását szolgáltatja. Köznapi példával élve mondhatjuk, hogy a Föld magában véve olyan, mint egy számlap nélküli óra különben járó mutatója: csak a csillagos ég hozzájárulása szolgáltatja a mutató számára a szükséges számlapot és ezzel együtt az idő meghatározhatóságának első föltételét.

Mint az emberiség maga, oly régi ama látszat, melynek PYTHAGORAS az éggömbőt ábrázoló kristálysphaerájával adott kifejezést: a földfelület bármely pontját is foglaljuk el, mindenütt óriási, csillagokkal behintett gömb geometriai középpontjában képzeljük magunkat s ez érzéki benyomás meggyőző elevensége alól nem vonhatja ki magát még az sem, ki a tudomány vívmányait ismerve tudja, hogy Földünk félévente egymástól közel 300 millió km.-nyi távolságban fekvő állásokat foglal el s hogy Napunkkal együtt tetemes sebességgel halad érezhetőleg egyenes irányban a térben tova. A világrendszernek ezen tapasztalatilag kétségenkívül igazolt geoczentrumos felfogását a PYTHAGORAS-féle sphaera érzékíti legközvetlenebbül: ma is valljuk még, hogy a megfigyelő magát a mindenség középpontjában látja, de a tudomány lerombolta a csillagokat tartó sphaera kristályfalait s a gömbhéjnak még KEPLER idejében is szűk sugarát az újabb időben a mérhetetlenségig, a végtelenségig tágította. Mert közömbös ugyan, mekkorának tekintjük az éggömb sugarát; a modern asztronomia egyszerűen végtelennek tételezi fel, s ezáltal eléri azt, hogy a megfigyelő még akkor is annak középpontjában képzelheti magát, midőn nemcsak a Föld különböző pontjaira, hanem éppenséggel más égi testekre is megy át. Más szóval: a térben szabadon lebegő égi testeket ítéletünkben egy képzelt gömb felületére *vetítjük* és az egész ma már immateriális kristálysphaera csak az égi testek iránymeghatározására szolgáló kényelmes vetítési háttér. A mi tehát a látszó égbolton egymás mellett észlelhető, az a térben valójában egymás mögött messze elválasztottan létezhet és természetes, hogy a tér bármely pontjaiból az éggömb *egy* pontjához húzott látósugarak a gömb végtelen nagy méretei mellett egymással párhuzamosak. Csak egynéhány eset van, melyben ezen szerkesztés nem helyes, vagy legalább nem elég szigorú: a Hold, a bolygók általában és a Nap aránylag oly közel állanak Földünkhez, hogy annak különböző pontjaitól ezen égi testek középpontjához vont látósugarak egymással érezhető szögletet képeznek, az úgynevezett parallaxist. De ennek meghatározása könnyen megadja a kiigazítást, melyet alkalmaznunk kell, hogy az ég mérhetetlenségének feltevése közeli égi testekre vonatkozólag is fentartható legyen.

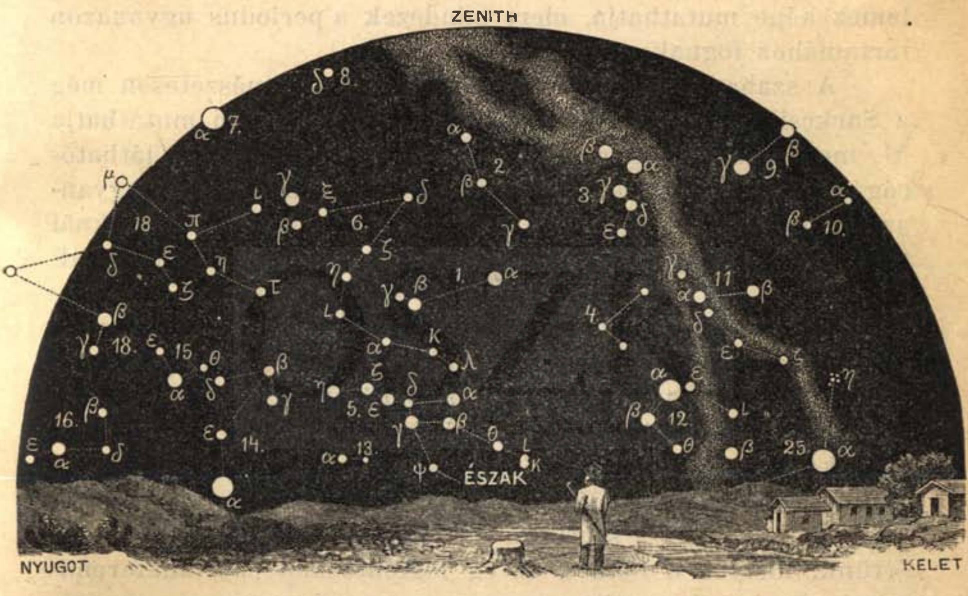
Az éggömb ezen értelmezése mellett, melyben ez csak mint végtelen távol vetítési lap szerepel, semmiféle komoly, elvi fontosságú ellenvetést nem képezhet az észrevétel, hogy a csillagászati geographiában kizárólag alkalmazott éggömb mellett még az égboltozatról is szólunk, egy valószinűleg ítélettévesztés útján lapultnak tetsző kupoláról, melynek alak- és méretmeghatározása a látásbenyomás jelenségeihez utalandó. Igaz, hogy a horizont feletti magasságok, a Nap és Hold átmérőinek, a csillagok relativ távolságainak szabad szemmel való *becslése* jelentékeny különbségeket tüntet fel, ha az égi testek a kupolás égboltozat alját vagy tetejét foglalják el. De mindezen különbségek nyoma sem vehető észre, ha műszerek segélyével *méréseket* eszközlünk. Tehát nem erre, hanem a fentemlített gömbfelületre vonatkoztatjuk irány- és helymeghatározásainkat és így az égboltozat fogalma az éggömbé mellett e helyen teljesen elejthető.

## II. FEJEZET.

## Az álló csillagok napi mozgása.

A csillagos égnek már egynéhány órai megfigyelése mutatja, hogy az állócsillagok a Föld körül látszó mozgást végeznek, melynek főjellemzője, hogy mozgás közben a csillagok relativ helyzete egymáshoz nem változik, hogy tehát az ég szilárd, rideg rendszer módjára viselkedik. Ezen megfigyelés vezette Pythagoras-t ama nézethez, hogy a csillagok merev kristály gömbhéjhoz vannak erősítve. A keleten álló csillagok emelkednek, míg előbb láthatatlan égi testek merülnek a keleti láthatár fölé; a dél felé látható csillagok nyugot felé folytatják útjokat, míg a nyugoti égen állók sülyednek, majd meg a láthatár alá merülnek: jeléül annak, hogy az ég mozgása keletről nyugot felé tart. Ha tekintetünket észak felé fordítjuk, azon pont környéke felé, mely a nagy medve általánosan ismert csillagkép két utolsó $\alpha$ és $\beta$-val jelzett csillagnak észak felé való mintegy ötszörös meghosszabításában fekszik s melynek tőszomszédságát fényesebb, másodrendű csillag, $\alpha$ Ursae minoris vagy a Sarkcsillag jelzi (49. ábra), észre fogjuk venni, hogy az ennek közelében lévő csillagok a

Sarkcsillag körül az óramutató irányával ellentétesen, azaz szintén keletről délen át nyugot felé mozognak. E közben a csillagok szemlátomást egymással párhuzamos köröket írnak le, melyek közös középpontja, mint ezt a szorgosabb megfigyelés tanítja, mindannyian a Sarkcsillag tőszomszédságában, tőle mintegy $2^1/_2$ telehold átmérőnyi távolságban összeesnek. Legjobban mutatja ezt a Sarkcsillag felé felállított photographiai kamera. Egynéhány órai kinntartás után a fényesebb csillagok nyomo-



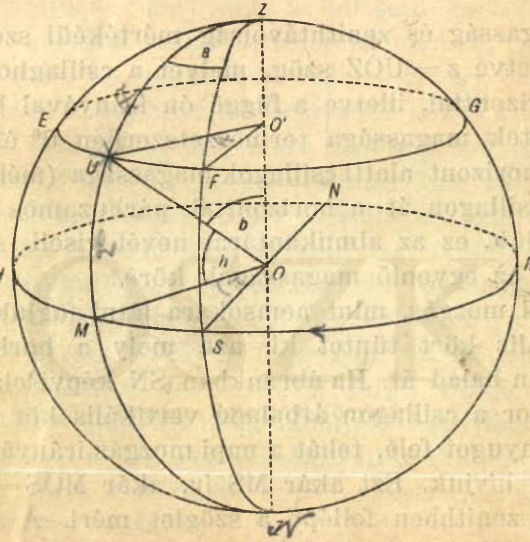

49. ábra. A csillagos ég északi fele október 1-én Budapesten este 9 órakor.

kat hagynak, csakhogy a csillagok képei nem pontalakúak, hanem mozgásuk folytán elhuzódottak; a fényérzékeny lemez egyenesen a csillagok útját adja. Ha *egy* csillag ívalakú útjában legalább három különböző húrt húzunk és ezek felező pontjában merőlegest emelünk, akkor ezen normálisak mindannyian a Sarkcsillaghoz közel álló ugyanazon pontban metszik egymást: jeléül annak, hogy a leírt pálya kör, melynek középpontja az említett csillag tájába esik. Ha a szerkesztést a lemezen lévő többi csillag számára is végezzük, azt tapasztaljuk, hogy útjaik mind körök, melyek ugyanazon középponttal bírnak. Ha végül még a lemez kinntartásának idejét pontosan járó középidőt mutató órán megjeleltük és meghatározzuk a csillag útját ábrázoló körív fokmértékben kifejezett hosszát, könnyen megállapíthatjuk az időt, melyet a teljes körforgás igénybe vesz, feltéve azt, hogy a mozgás egyenletes. Mert a teljes fordulat ideje úgy áll a kinntartás idejéhez, mint a teljes peripheria, $360^0$ áll a csillagút hosszához. A tényleges mérés arról fog meggyőzni, hogy e körülforgás tartama 23 óra 56 perczczel egyenlő. Hogy pedig a mozgás egyenletes, azt ugyancsak több különböző kinntartási időkkel exponált lemez képe mutathatja, mert mindezek a periodus ugyanazon tartamához fognak vezetni.

A szabad szemmel való megfigyelés természetesen még a Sarkcsillag körüli csillagok *teljes* forgását sem mutathatja ki, mert világos, hogy a Nap közbejötte a csillagok láthatóságát megakasztja, de ha egy teljes éven át, mindennap ugyanazon esteli órában észleljük az eget — később belátható oknál fogva — a csillagot pályájának minden pontjában fogjuk találhatni.

Ha az ég mozgásának teljesebb képét akarjuk adni azon czélból, hogy hozzá az ég s a Föld lehetőleg legalkalmasabb coordinátarendszerét szabjuk, egynéhány egyszerű előismeretre van szükségünk, mely az egész megfigyelő astronomiában, különösen a geographiai hely- és időmeghatározásban a legfontosabb szerepet játsza. Bizonyos, magától a természettől kijelölt s a Földdel szorosan összekapcsolt síkot és egyenest értünk, melyek a Föld s az ég legfontosabb coordinátarendszerének elemeit teszik.

*A horizont coordinátarendszere.* A Föld felületén minden szabad folyadékfelület egy bármikor könnyen előállítható síkot jelöl ki, melyet horizontnak nevezünk, s mely az égig folytatva ezt két félgömbre bontja: egy folytonosan láthatóra, mely fölöttünk nyugszik, s egy láthatatlanra, melyet előlünk a Föld teste eltakar. Az ég már több ízben kiemelt mérhetetlensége folytán közömbös teljesen, vajjon a horizontot az észlelő szemén, vagy pedig a Föld középpontján vezetjük-e át. Ezen fontos alapsík legegyszerűbb előállítása a libella segítségével történik: minden sík, melyen a libella két egymásra merőleges állásban bejátszik, a horizonttal párhuzamos, vagy (a földi méreteknek az égiekhez való elenyésző voltánál fogva) vele összeeső. A horizont, mint minden a gömb középpontján átmenő sík, az eget legnagyobb kör mentén metszi, melyet megkülönböztetés nélkül szintén horizontnak szokás nevezni. Ezen kör azonban különbözik ama határvonaltól, melyben ég és Föld egymást érinteni látszik, s melyet láthatárnak nevezhetnénk. A két fogalomnak egymáshoz való viszonyával később még behatóbban foglalkozunk: itt elég a megjegyzés, hogy a láthatár általában véve a horizont *alatt*




**50. ábra. A horizont coordinátarendszere.**

fekszik, de oly csekély mennyiséggel, melyet szabad szem megfigyelésnél tekinteten kívül hagyhatunk.

Ha a horizont középpontjában, azaz a megfigyelő helyén, a horizontra merőlegest bocsátunk, ugyanazt a merőlegest, melyet a függő ón bármikor könnyen kijelöl, s melyet ezért függélyesnek szokás nevezni, egyenest nyerünk, mely kellőképen meghosszabítva, az eget két pontban találja: a legmagasabban, a zenithben, tetőpontban s a legmélyebben, a nadirban vagy lábpontban. Amaz fejünk fölött folyton látható, emez a láthatatlan félgömbbe esik. Az 50. ábrában, melyben O a megfigyelő helyét jelzi az éggömb középpontjában, SHNRS a horizont síkja és legnagyobb köre; Z és Z′, illetve a zenith és nadir. Minden a függélyesen átfektetett sík vagy kör (mely természetesen a zenithen és nadiron átmegy, a legnagyobb kör és a horizonton merőlegesen áll) magassági vagy vertikális kör nevét viseli. És az U csillagon átfektetett vertikális körnek a csillag és horizont között fekvő darabja, az UM = h a csillag magassága, míg a csillag és a zenith közt terjedő ív UZ = z a csillag zenithtávola. Természetes, hogy a kettő együttvéve $90^0$-ot tesz ki, úgy hogy áll az egyenlet:

$$z = 90^0 - h.$$

A magasság és zenithtávolság mértékéül szolgál azon h = UOM, illetve z = UOZ szög, melyet a csillaghoz vont látóvonal a horizonttal, illetve a függő ón irányával képez. A látható égitestek magassága természetszerűen $0^0$ és $90^0$ között fekszik; a horizont alatti csillagok magassága (mélysége) negativ. Ha a csillagon át a horizonttal párhuzamos UFG kisebb kört fektetjük, ez az almukantarat nevét viseli. Az almukantarat tehát az egyenlő magasságok köre.

A napi mozgás, mint nemsokára látni fogjuk, különösen *egy* vertikális kört tüntet ki, azt, mely a horizont dél és északpontján halad át. Ha ábránkban SN képviseli a dél-észak irányt, akkor a csillagon áthaladó vertikális kör távolságát a délponttól nyugot felé, tehát a napi mozgás irányában olvasva, azimuthnak hívjuk. Ezt akár MS ív, akár MOS = UO'F szöglet, akár a zenithben fellépő a szöglet méri. A csillagász az azimuthot a délponttól kiindulólag nyugot felé $360^0$-ig olvassa, a geographus rendesen az északpontot választja kiindulási pont gyanánt, és a szögleteket kelet felé és nyugot felé olvassa $180^0$-ig. A $0^0$ és $180^0$ azimuthon átmenő vertikális kör — mint látni fogjuk — a meridián nevét viseli, a $90^0$ és $270^0$, azaz a kelet—nyugoton átmenő magassági kör az első vertikális nevét viseli.

Azimuth és magasság valamely csillagnak helyét teljesen megállapítja az éggömbön; a harmadik távolsági coordinátára, a radius vectorra itt semmi szükség sincs, mert hiszen az égi testeket az éggömb *felületére* vetítjük. És nem tudjuk eléggé nyomatékosan kiemelni, hogy a horizont coordinátarendszere, mint az imént bemutatott helymeghatározókat nevezzük, teljesen független a Föld esetleges geometriai beosztásától, sőt a szükséges coordinátaelemek, a horizontális sík, a függélyes és a délpont nem is geometriai, hanem tisztán csak mechanikai és mozgástani elvek útján szerkeszhetők; az előbbi kettőt teljesen meghatározza bármily szabálytalan földfelület esetén is a nehézségi erő, az utóbbit az ég napi mozgása, mely egyáltalában forgó Földet tételezve fel, szintén teljesen független ennek közelebbi alakjától.

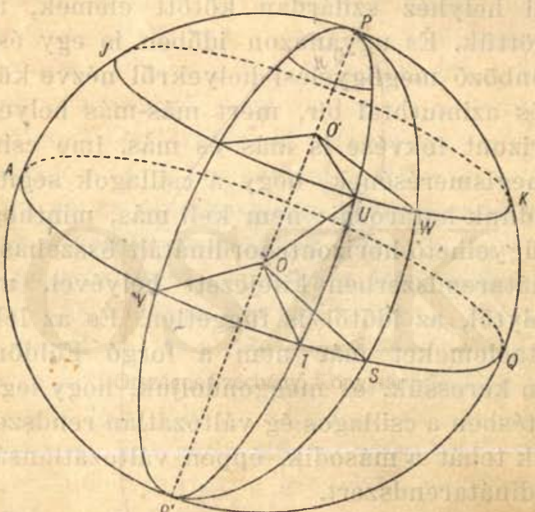
Világos, hogy a horizont coordinátarendszere az éghez képest egy és ugyanazon megfigyelési helyen is az idővel folytonosan változó: mert míg a horizont és a függélyes a megfigyelési helyhez szilárdan kötött elemek, addig az ég elfordul fölöttük. És ugyanazon időben is egy és ugyanazon csillag különböző megfigyelési helyekről nézve különböző magassággal és azimuthtal bír, mert más-más helyen természetesen a horizont fekvése is más és más. Ime csirája ez ama lehetőség megismerésének, hogy a csillagok segítségével időt és helyet tudunk határozni: nem kell más, minthogy valamely csillag megfigyelhető horizontcoordinátáit összehasonlítsuk egy oly coordinátarendszerben kifejezett helyével, mely a megfigyelési helytől, az időtől is független. És az lehetséges, ha a coordinátaelemeket már nem a forgó Földön, hanem a nyugvó égen keressük, és meggondoljuk, hogy legalább fölötte nagy közelítésben a csillagos ég változatlan rendszernek tekinthető. Lássuk tehát a második, éppen változatlanságánál fogva fontos coordinátarendszert.

*Az aequator coordinátarendszere.* Bevezetőleg megemlítők, hogy valamennyi csillag, a Napot és Holdat sem véve ki; keletről nyugot felé párhuzamos körös pályákban kering a Föld körül. Úgy miként az idézett egyszerű photographiai megfigyelés kimutatja, hogy a sarkhoz közel álló csillagok mozgási középpontja a sarkcsillag tájába esik, s hogy periodusa $23^h\ 56^m$, úgy kimutatja a délebbre fekvő csillagok megfigyelése is, hogy azok köreinek középpontjai egy a megfigyelő szemén és a Sarkcsillag körüli többször említett ponton átmenő egyenesen fekszenek. Ezen egyenes, mely körül az éggömb látszó forgása történik, az ég- vagy világtengely nevét viseli, és két metszési pontja az éggel (51. ábra) a két ég- vagy világpolus, sark, P, P′.

Ezek egyike, melyet horizontunk felett és mintegy $2\frac{1}{2}$

teleholdátmérőnyire láthatunk a Sarkcsillagtól az északi, másika a déli pólus, s az égfélgömb, melynek az északi vagy a déli pólus foglalja el tetejét, az északi vagy déli félgömb.

Minden legnagyobb, a világtengelyen áthaladó kört declinatió- vagy órakörnek szokás nevezni. Az észlelő helyén át a világtengelyre merőlegesen fektetett sík az éggömbből az AVSQ legnagyobb kört metszi ki, az aequatort vagy egyenlítőt, mely természetesen valamennyi declinatiókörre is áll merőlegesen. Ha valamely U csillagon át declinatiókört fek-




51. ábra. Az aequator coordinátarendszere.

tetünk, ennek a csillag és aequator között terjedő $UT = \delta$ íve a csillag declinatiója, a csillag és pólus közötti része a csillag pólustávola, $UP = p$. A kettő együttvéve természetesen negyedkört ad, úgy hogy:

$$p = 90^0 - \delta.$$

A declinatiót az aequatortól kiindulólag a sarkok felé szokás olvasni, még pedig + előjellel az északi, — előjellel a déli féltekén. A sarktávolságot rendesen az északi pólusból egészen $180^0$-ig számítják. A csillagon át az aequatorral párhuzamosan leírt kör a parallelkör, a mi ábránkon JUK. Ha az aequator mentén egy tetszőleges, de állandó V pontot választunk s ezen át declinatiokört vonunk, akkor megállapítható a csillag egy második helymeghatározója is, az aequatornak VT íve vagy VOT szöglete, vagy végül a V-n és U-n átmenő declinatiókörök a pólusnál képezte szöge, melynek recta ascensio vagy egyenes emelkedés a neve. A csillagászok czélszerűségi okoknál fogva V pont gyanánt nem valamely csillagot, hanem az aequator ama pontját veszik, melyben a Nap tavasz kezdetének pillanatában áll; e kezdőpontot tehát a tavaszi pontnak, tavaszi napéjegyenlőség pontjának szokás nevezni. Azon pont, melyben a tavaszponton átmenő órakör az aequatort másodízben metszi, ennélfogva az őszi aequinoctium vagy az őszpont leend. A recta ascensiót a tavaszpontból kiindulólag kelet felé, tehát a napi mozgással ellentétes irányban szokás olvasni vagy $360^0$-ig ivmértékben, vagy $24^h$-ig időmértékben. Miután ugyanis az ég egyenletes mozgásában a csillagászok órája szerint (mely a köznapi életben használthoz képest naponta mintegy négy perczczel siet) az aequator teljes körülforgása 24 órát igényel, természetes, hogy ív és idő egymással teljesen aequivalens időmértéknek tekinthető, oly módon, hogy

$$15^0 = 1^h;\ 15' = 1^m;\ 15'' = 1^s \text{ és } 1^0 = 4^m;\ 1' = 4^s;\ 1'' = 0^s,0666\ldots$$

*Iv és idő átváltozása.* Ívmértékről időmértékre tehát 15-tel való osztás, időről ívre 15-tel való szorzás által megyünk át. Mivel ez átszámítás igen gyakran fordul elő, álljon itt a következő általános szabály: Ha ív változtatandó át időre, oszszuk a fokokat 15-tel; az egész számú hányados adja az órákat. A négygyel szorzott maradék adja az időminutákat, melyekhez még az ívperczeknek 15-tel osztott egész számú hányadosa is jár. Az ívperczek maradékának négyszerese az időmásodperczeket szolgáltatja, melyekhez még az ívmásodperczek 15-öde járul.

Mennyi e szerint $128^0\ 47'\ 38''.8$ időben kifejezve?

$$\begin{aligned} 128^0 : 15 &= 8^h + 8 \times 4^m = 8^h\ 32^m \\ 47' : 15 &= 3^m + 2 \times 4^s = \quad 3^m\ 8^s \\ 38''.8 : 15 &= \quad 2^s.586, \text{ összesen } 8^h\ 35^m\ 10^s.586. \end{aligned}$$

Ha ellenben idő változtatandó át ívre, akkor szorozzuk az órákat 15-tel, miáltal a fokokat nyerjük; az időminuták negyedében foglalt egész szám szintén fokokat ad, a háromnál soha nem nagyobb maradék 15-szöröse adja az ívperczeket, melyekhez még az idősecundák negyedében foglalt egész szám járul. A 15-tel szorzott maradék az ívmásodperczeket és annak törtrészeit adja.

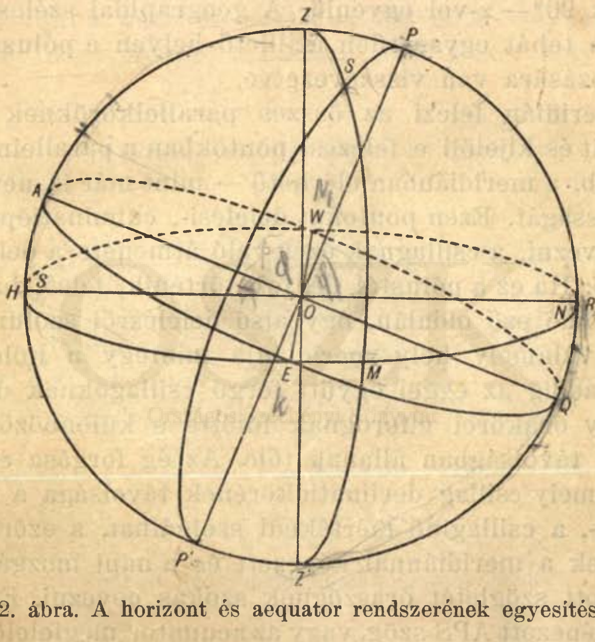
E szerint $8^h\ 35^m\ 10^s.586$ számára álland:

$$8^h \times 15 = \qquad 120^0$$
$$35^m : 4 = 8^0 + 3 \times 15' = 8^0\ 45'$$
$$10^s.586 : 4 = 2' + 2{,}586 \times 15'' = 2'\ 38''.79 \text{ összesen } 128^0\ 47'\ 38''.79.$$

A tavaszi és őszi napéjegyenlőségi ponton átmenő declinatiókör az aequinoctiumi kolur, a tőle $90^0$-ra fekvő, a nyári és téli solstitiumon átmenő és az ekliptika pólusait is magában foglaló declinatiókört a solstitiumi kolurnak szokás nevezni.

Recta ascensio és declinatio úgy az ég forgása közben, mint más és más észlelési helyekre való átmenet közben teljesen állandó, mert hiszen aequator és órakörök magán az éggömbön képzelendők és más-más álláspontokból ugyanazon állócsillaghoz húzott látóvonalak egymás között párhuzamosak. Igen lassú, a napi mozgással szemben azonban teljesen elhanyagolható változások mégis léteznek, melyek okai — mint később látni fogjuk — a praecessio, a nutatio és aberratio, egyik vagy másik állócsillagnál pedig még az észrevehetőség határán túleső sajátos mozgás. Valamennyi 9-ed, sőt 10-edrendig menő csillagnak recta ascensióját és declinatióját megállapították már a csillagászok, úgy hogy az égi testek helyzete ezen változatlannak tekinthető coordinátarendszerre vonatkozólag egyszer s mindenkorra ismeretesnek tételezhető fel.

*A két rendszer egyesítése.* Ha a két, a horizontra és aequatorra vonatkozó coordinátarendszert többé nem különkülön, hanem együttesen tárgyaljuk, újabb érdekes és fontos vonatkozásokhoz jutunk. Mindenekelőtt észreveszszük, hogy a két rendszernek egy közös legnagyobb köre van, az, mely úgy a pólusokon, mint a Zenithen és nadiron megy át. Ezen kör HAZPRQZ'P' (52. ábra) egyszersmind órakör és magassági kör, s mint ilyen úgy az aequatorra, mint a horizontra áll merőlegesen. Meridiánnak, délkörnek nevezzük, mert könnyen beláthatólag a horizont felett levő parallelkörök íveit kelet és nyugvás között felezve, benne érik el a Nap és csillagok legnagyobb, úgynevezett déli magasságukat. Míg tehát a horizont rendszerét a nehézségi erő jelöli ki, tehát mechanikai elem, addig az aequator rendszerét az ég mozgása, tehát tisztán phoronomiai elem szabja meg és a meridián e két elemet tartalmazza magában, miután úgy a zenithen, mint a pólusokon megy át. A meridián a horizontot két átellenes pontban metszi, H és R-ben; amaz legtávolabb, emez legközelebb esik az északi




52. ábra. A horizont és aequator rendszerének egyesitése.

pólushoz, s ezért N = R az észak-, S = H a délpont nevét viseli. Tőlük $90^0$-ra esik a kelet és nyugot, E és W pontja úgy, hogy a dél felé forduló észlelő balján álljon kelet, jobbján nyugot. Az NS egyenes, azaz a meridiánnak a horizontra való vetülete a délvonal vagy meridiánvonal (geographiai meridián) nevét viseli. A PR vagy PN ív s a mértékéül szolgáló POR szög a világtengely hajlása az észlelési hely horizontjához, vagy a pólusnak horizont feletti magassága. E pólusmagasság valamely hely fekvésére nézve rendkívül fontos adat, mint ezt akár az ábra, akár egy könnyű meggondolás mutatja. Ugyanis: világtengely és aequator úgy, mint a függőleges és a horizont egymásra merőlegesen állanak; a tengely és horizont tehát egymással ugyanazon szögletet képezi, mint a zenith—nadir vonal és az aequator. De a függélyesnek, vagy a függő ónnak hajlása a Földön át folytatva gondolt égi aequator felé az észlelési helynek geographiai szélessége $\beta$, tehát a sarkmagasság a geographiai szélességgel egy és ugyanaz. És világos, hogy a PZ ív, azaz a pólusnak zenithtávola, vagy a zenith pólustávola a geographiai szélességnek $90^0$-hoz való kiegészítője, valaminthogy az aequator magassága; AH ív = AOS szöglet ugyancsak $90^0 - \varphi$-vel egyenlő. A geographiai szélesség meghatározása tehát egyszerűen az illető helyen a pólusmagasság meghatározására van visszavezetve.

A meridián felezi az összes parallelköröknek horizont feletti íveit és kijelöli e felezési pontokban a parallelnek lehető legnagyobb, a meridiánban elérhető — mint már is neveztük — déli magasságát. Ezen pontokat delelési-, culminatiópontoknak szokás nevezni, a csillagnak ezen való átmenete a delelés vagy culminatio. Ha ez a pólustól dél felé történik, felső, ha a pólustól észak felé eső oldalán, úgy alsó delelésről szólunk.

Míg valamely hely meridiánja mintegy a Földhöz van rögzítve, addig az éggel együtt forgó csillagoknak declinatiókörei vagy órakörei elforognak fölötte s különböző időkben különböző távolságban állanak tőle. Az ég forgása egyenletes lévén, valamely csillag declinatiókörének távolsága a meridiántól az idő-, a csillagidő mértékéül szolgálhat, s ezért a declinatiókörnek a meridiánnal képezett és a napi mozgás irányában olvasott szögletét óraszögnek szokás nevezni. Ezt vagy a pólusnál képezett APS szög, vagy az aequator megfelelő íve méri és a delelés előtt negativ, a meridián nyugoti oldalán positiv. Mint a recta ascensio, ez is időben vagy szögletben fejezhető ki.

Az idő mérésére bármely állócsillag óraszöge szolgálhatna. A csillagászok mindazonáltal a tavaszi napéjegyenlőség pontjának óraszögével mérik az ég forgását és ezt csillagidőnek, $\theta$-nak nevezik. A csillagidő tehát a tavaszi aequinoctium óraszöge. Mivel valamely csillag recta ascensiója ugyancsak az aequinoctiumtól való távolsággal egyenlő, világos, hogy bármely csillag t óraszöge és recta ascensiója között fennáll a következő egyenlet:

$$t = \theta - \alpha,$$

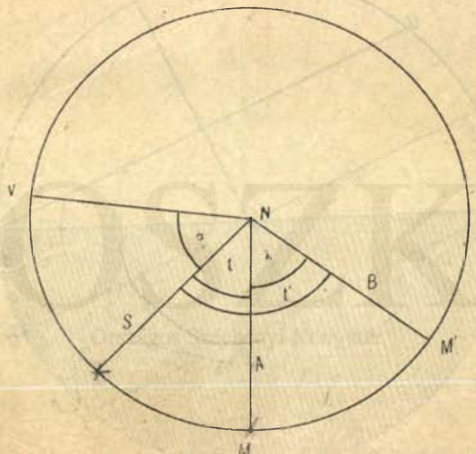
mely az 53. ábrából minden további nélkül leolvasható. A csillag delelésének pillanatában $t = 0$ lévén, áll:

$$\theta = \alpha,$$

azaz minden csillag recta ascensiójával egyenlő csillagidőben delel. Valamely csillag tehát akkor megy át a meridiánon, mikor a csillagóra a recta ascensiójával egyenlő időt mutatja.

Ha az óraszöget a Napra vonatkoztatjuk, akkor ezt a valódi napi időnek szokás nevezni.

Képzeljünk most az adott megfigyelési helyhez még egy másodikat, mely nyugotra fekszik tőle. A két helyen átmenő




53. ábra. A geographiai hosszkülönbség jelentése.

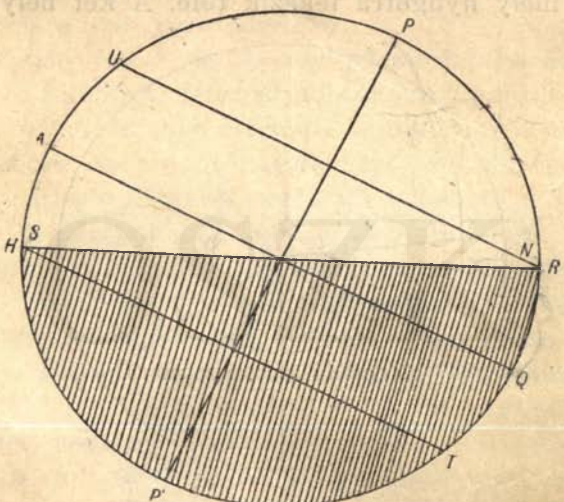
meridián egymással szögletet zár be, melyet geographiai hosszúságnak nevezünk. s melyet tetszőleges első meridiánból kiindulólag (Greenwich, Ferro) vagy 360°-ig olvasunk W felé, vagy kétszer 180°-ig nyugot és kelet felé.

Ha valamely csillag most a keleti helyen delel, akkor nyilván annyi óra mulva kerül a nyugoti hely meridiánjába is, a hány órát tesz ki a két hely időben kifejezett hosszkülönbsége. Vagy más szóval: két hely hosszkülönbsége ugyanazon égi test egyenidejű óraszögeinek különbségével egyenlő. Legszebben demonstrálható ez a következő ábrában. Legyen az 53. ábra az éggömb aequatori vetülete, N az északi pólus. NM az A, NM′ a B helyen átmenő meridián, SN egy S csillag óra- vagy declinatióköre, V a tavaszi napéjegyenlőség pontja. A korábban mondottak szerint VS a csillag recta ascensiója, VM az A, VM′ a B helyi csillagideje, SM az S csillag óraszöge A helyen, mely B-től λ hosszúsággal áll el. Az ábra egyszerű megtekintéséből következik, hogy úgy, mint előbb:

$$\theta = t + \alpha; \ \theta' = t + \lambda + \alpha \text{ és } t' = t + \lambda,$$

a miből következik

$$\lambda = \theta' - \theta \text{ vagy } \lambda = t' - t.$$



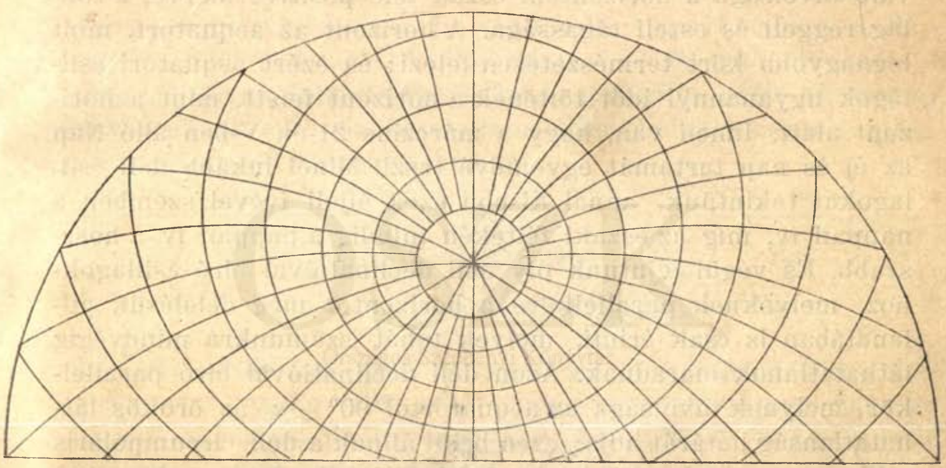

54. ábra. A csillagok nappali és éjjeli íve.

Azaz: két hely hosszúságkülönbsége e helyek helyi csillagideinek különbsége vagy tetszőleges égi test egyenidejű óraszögeinek különbsége. Az utóbbi egyenlet közvetlenül következik az előbbiből is, mert hiszen óraszög és csillagidő csak az égi test recta ascensiójában különböznek egymástól; követelmény tehát ez utolsó egyenletnél, hogy az égi test recta ascensiója állandó legyen.

Ezen delelésre vonatkozólag most a csillagok között csakhamar lényeges különbségeket tapasztalunk: némelyek alsó delelése is látható, másoknál ez a horizont alá esik, láthatatlan. Az előbbieknél az egész egy nap alatt befutott parallelkör a horizont felett fekszik, s ezek, mint azt az 54. ábra mutatja, azon csillagok, melyek egy, a pólus körül PR, azaz a sarkmagassággal egyenlő ívvel leírt gömbsüvegen belül feküsznek. Ezen csillagokat circumpoláris csillagoknak nevezzük és helyzetük azáltal van megállapítva, hogy sarktávolságuk kisebb vagy legfölebb egyenlő lehet a sarkmagassággal; azaz

$$p = 90^0 - \delta \leqq \varphi, \text{ miből } \delta \geqq 90^0 - \varphi.$$

A sarkmagassággal, mint sugárral a pólus körül leírt kör, mely a horizontot az északpontban érinti, adja tehát a csilla-



55. ábra. Az északi ég hálózata Budapest számára.

gok folytonos láthatóságának határát. Ezen belül a csillag pályájának bármely pontjában látható és sem nem kel, sem le nem nyugszik.

Ezen viszonyokat élénken tünteti fel az 55. ábra, mely az északi égnek aequatori hálózatát adja a horizont és zenith és a nyugot-kelet vonal között Budapest ($\varphi = 47^0\ 30'$) számára. Látnivaló, hogy a $47^0\ 30'$ declinatióval bíró declinatiókör érinti az északi horizontot, s hogy megfelelőleg a $42^0\ 30'$-es kör Budapest zenithjén halad át.

A sarkmagasságnál kisebb declinatióval biró csillagoknak parallelköre már csak részben látható a horizont felett; annál nagyobb íve esik a horizont alá, minél délibb a csillag declinatiója. Ez égi test tehát a keleti láthatár egyik pontján kel, emelkedik és delel, majd leszáll és a nyugoti láthatár alá merül; parallelkörének horizont feletti látható íve a nappali ív, a horizont alatt lévő része éjjeli ív nevét viseli. A két pont, melyben a parallelkör a horizontot metszi, általában nem, csak a legnagyobb parallelkör, az aequator esetében azonos a kelet- és nyugotponttal; északi declinatióval biró parallelkörök kelés- és nyugváspontja észak felé, déli parallelkörök kelte és nyugta a kelet- és nyugotponttól délre esik. A kelés és nyugvás pontjának a kelet- és nyugotpontoktól való távolsága a horizonton, észak felé positive mérve, a csillag reggeli és esteli tágassága. A horizont az aequatort, mint legnagyobb kört természetesen felezi; és ezért aequatori csillagok ugyanannyi idöt töltenek a horizont felett, mint a horizont alatt. Innen van, hogy a márczius 21-én V-ben álló Nap az éj és nap tartamát egyenlővé teszi. Minél inkább déli csillagokat tekintünk, annál kisebb ezek éjjeli ívével szemben a nappali ív, míg az északi féltekén mindig a nappali ív a hosszabb. És végül eljutunk oly déli declinatióval biró csillagokhoz, melyeknek parallelköre a horizontot még delelésük pillanatában is csak érinti, melyek tehát számunkra mindvégig láthatatlanok maradnak. Azon déli declinatióval biró parallelkör, melynek távolsága az aequatortól $90^0 - \varphi$, az örökös láthatatlanság határát adja; ezen belül állnak a déli circumpoláris csillagok, melyek a mi horizontunk fölé soha nem emelkednek.

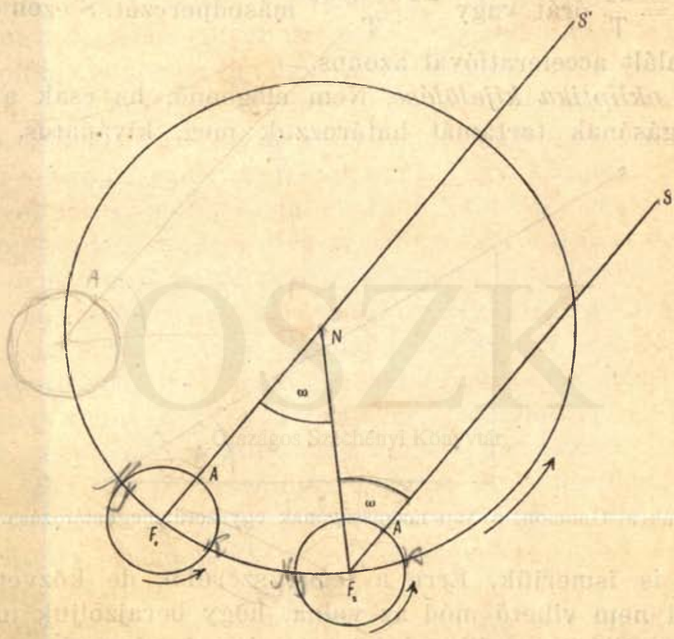
Az 54. ábra érzékíti a visszonyokat úgy, mint ezek nagyjában Közép-Magyarországon alakulnak (sphaera obliqua). Ha észlelési helyünket elhagyjuk és dél felé vándorlunk, akkor (a sarkmagasság és geographiai szélesség ismert egyenlősége folytán) az északi pólus mindig sülyed a horizont felé; az aequator alatt mindkét pólus a horizontban fekszik, a világtengely tehát vízszintes, és minden parallelkör nappali és éjjeli íve egymással egyenlő: minden égi test 12 órát időz a horizont felett, ugyanannyit a horizont alatt. Zenith és nadir az aequatorba esnek és a szemlélő egy teljes év lefolyása alatt az egész csillagos eget láthatja, míg $\varphi$ geographiai szélesség alatt a $90^0 - \varphi$-nél délibb declinatiójú csillagok állandóan rejtve maradnak. A régi geographiai írók az éggömb ezen állásában sphaera perpendiculariáról szólanak.

Ha ellenkezőleg észak felé vándorlunk, az északi pólus folyvást emelkedik a horizont fölé, a déli még jobban sülyed. Éppen a pólus alatt az égi pólus a zenithbe, az aequator a horizontba esik, minek folytán az égnek állandóan csak fele, ez esetben északi félgömbje látható. A világtengely függélyes és valamennyi csillag a horizonttal párhuzamos köröket ír le napi mozgása közben: az állócsillagok kelte és nyugta ott ismeretlen tünemény. Mivel a parallelkörök a pólusok egyikén álló megfigyelő számára a horizonttal párhuzamosak, a gömb ezen állását sphaera parallelának szokás nevezni, míg a két szélső eset között álló, már bőven leírt jelenségeket a sphaera obliqua láttatja. Ha tekintetbe veszszük, hogy a Nap egy év lefolyása alatt declinatióját $\pm 23^0 28'$-en belül változtatja, érdekes következtetéseket vonhatunk ezen különböző sphaeráknak a Nappal kapcsolatos jelenségekkel szemben tanusított viselkedésére vonatkozólag.

## III. FEJEZET.

## A Nap évi mozgása.

Ha a csillagok napi mozgását jól járó, középidőt mutató óra szerint megfigyeljük, csakhamar azt tapasztaljuk, hogy az ég naponként körülbelül négy perczczel előbb éri el ugyanazon állást a Földhez képest, melyet előtte való nap mutatott; azaz ugyanazon csillag naponként négy perczczel előbb kel vagy nyugszik, vagy tünik el valamely messze földi tárgy mögött. Mivel a rendesen használt időnket tudvalevőleg a Nap mozgása szolgáltatja, ez annyit mond, hogy az állócsillagok a Naphoz képest naponkint mintegy négy perczczel sietnek, azaz nyugotra nyomulnak, vagy hogy a Nap naponkint ugyanannyival késik, azaz kelet felé mozog. Ezen jelenséget, nevezetesen pedig a körülbelül $4^m$-nyi, vagy pontosabban $3^m\ 55^s.91$-nyi időkülönbséget az állócsillagok acceleratiójának szokás nevezni. Legszembetünőbben meggyőződhetnénk erről, ha a Nap mellett képesek volnánk a csillagokat látni; mivel ezt nem tehetjük, megfigyelhetjük legalább némi fáradsággal ama csillagokat, melyek a Nappal együtt kelnek vagy nyugodnak, vagy még könnyebben azokat, melyek a Nappal egyszerre, de a meridián ellentétes oldalán, azaz éjfél körül delelnek. Mivel a Nap nem éppen pontosan éjfélkor van alsó delelésben, kissé pontosabb megfigyelésnél a következőképen járhatunk el: állapítsuk meg napóra segítségével az időt, melyet a középidő szerint járó óra mutat, midőn a Nap delel, azaz valamely függélyes tárgy árnyéka a délvonalba esik. 12 órával későbben beáll a Nap alsó delelése, mely tehát közel ugyanannyival esik előbbre vagy későbbre az éjfélnél, mint a mennyivel előbb vagy később figyeltük a Nap felső delelését a délnél. Ha a megfigyelést február 17-ikén végeznők, azt találjuk, hogy a Nap alsó delelése alkalmával éppen $\alpha$ Leonis, Regulus fényes csillag áll a meridián látható részében. Egy nappal későbben e csillag delelése óta már négy percz folyt el, és így minden következő napon a csillag delelése a Nap alsó deleléséhez képest korábban és korábban lép be. Egy negyed év alatt ezen naponkénti körülbelül négy percz már teljes hat órát tesz ki: a Nap alsó delelésekor a csillag nyugszik. Újabb negyedév mulva, azaz augusztus 21-ikén mindkét égi test együtt van: együtt kelnek, együtt delelnek és nyugodnak. Azontúl a Nap tovább távozik kelet felé, a csillag nyugotra marad, míg egy újabb negyedév lefolyása után tőle már ismét $90^0$-nyira áll, azaz kel, midőn a Nap a horizont alatt delel és nyugszik dél körül. Egy teljes év lefolyása alatt a cyklus be van fejezve, csillag és Nap ismét $180^0$-ra állanak el egymástól, úgy hogy az egyik felső, a másik alsó delelésben van. A Nap ez év alatt 365-ször delelt, a csillag ellenben, mely a Nap ez évi mozgásával szemben látszólag nyugot felé hatolt, tehát a Nap elé sietett, 366-szor szelte a meridiánt. Ha tehát az év tartamát 365·2422 napnyinak tételezzük fel, akkor ez idő alatt 366·2422 oly nap van, melyet valamely csillagnak két egymás közötti delelése közt olvasunk, s melyet röviden csillagnapnak nevezünk, úgy hogy egy csillagnak két delelése közötti időköze, azaz a csillagnap $\frac{365\cdot2422}{366\cdot2422} \times 24$ óra = 23 óra 56 percz és 4·09 másodpercz, egyszersmind a Földnek teljes $360^0$ körül való forgásának középidőben kifejezett tartama. Ha már tudjuk, hogy a Nap látszó évi mozgása a Földnek a Nap körül való tényleges keringéséből ered, az állócsillagoknak a Naphoz való gyorsulása más úton is határozható meg. Legyen az 56. ábrában a papir síkja az aequator, N a Nap és $F_1$, $F_2$ a Földnek két helyzete első közelítésben körnek vett Nap körüli pályájában. Nem felel meg ugyan a tényeknek, hogy a Nap — mint ezt ábránk érzékíti — maga is az aequator síkjában áll, de azért látni fogjuk később, hogy rajzunk helyes, mivel a középidőt nem a valódi Nap, hanem egy képzelt, úgy nevezhetnők közepes Nap járása után mérjük, s ezen képzelt Nap tényleg az aequator síkjában tartoz-

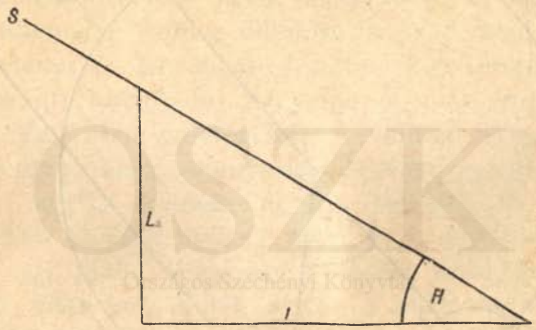



56. ábra. A Nap évi mozgása és az állócsillagok acceleratiója.

kodik. Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy $F_1$ helyzetben a Nap az S csillaggal együtt delel, úgy hogy $F_1 A$ a Föld megfigyelési helyének meridiánja. Bizonyos idő mulva a Föld Nap körüli útjában a nyíl irányában mozogva eljut $F_2$-be; ha időközben egész számú csillagnap, azaz tengelyforgás elmult, akkor $F_2$ A, az előbbi meridián ismét S csillag irányába esik, a csillag ismét delel. De nem a Nap, mely csak akkor jut ismét a meridiánba, ha a Föld keringése irányával megegyező tengelyforgásában ugyancsak a nyíl irányában még ω szöglettel fordul. Ezen $\omega = SF_2N$ szöglet nyilván $F_1NF_2$-vel, azaz a

Földnek időközben megtett szögútjával azonos. Ha tehát a Föld évének tartama T, akkor a közepes napi mozgás, mely a Föld köralakú pályájának megfelelne, $\frac{360^0}{T}$ s ez egyszersmind $\omega$-nak egy nap alatt elért értéke. Mivel a Föld 24 óra csillagidő alatt tesz egy teljes tengelyforgást, úgy minden foknyi elfordulásra $\frac{24}{360}$ órát igényel, $\omega$ szög megtételére tehát $\frac{24}{360} \cdot \frac{360}{T} = \frac{24}{T}$ órát vagy $\frac{24 \times 3600}{T}$ másodperczet. S ezen érték a fent talált acceleratióval azonos.

*Az ekliptika kijelölése.* Nem elegendő, ha csak a Nap évi mozgásának tartamát határozzuk meg, kivánatos, hogy




57. ábra. Gnomon, a Nap magasságának egyszerű meghatározása.

pályáját is ismerjük. Erre a legegyszerűbb, de közvetlenül keresztül nem vihető mód az volna, hogy berajzoljuk naponkint a Nap állását a csillagok között valamely abroszba vagy az égi glóbusra. Egyelőre elegendő pontossággal tényleg úgy járhatunk el (57. ábra): vízszintes síkon állítsunk fel függőleges pálczát, úgynevezett gnomont, melynek lábpontján át húzzuk a meridiánvonalat, azaz az észak-dél vonalat, figyeljük meg a pálcza árnyékhosszát a delelés pillanatában, azaz mikor árnyéka éppen a délvonalba esik. Ha ez l és a pálcza hossza L, a Nap déli magassága ellenben H, akkor az ábra szerint áll

$$\operatorname{tang} H = \frac{L}{l}$$

Ebből a declinatio már könnyen levezethető: mivel a meridián egyszersmind órakör és magassági kör, természetes, hogy a delelési magasság egyenlő az aequatormagasság és a csillagnak aequator feletti magasságának — azaz declinatiójának — összegével. Vagy az 54. ábra szerint az U delelő csillag meridiánmagassága $HU = HA + AU$. De $HU = H$, $HA = 90^0 - \varphi$ és $AU = \delta$ lévén, áll

$$\delta = H + \varphi - 90^0,$$

a mivel a Nap delelési declinatiója adott geographiai szélességgel bíró észlelési helyen ismeretes. Az előbbi utasítások szerint állapítsuk még meg épp úgy, mint előbb azon csillagokat, melyek a Nap alsó delelése alkalmával delelnek: akkor ezen csillagok órakörének azon pontja, melynek declinatiója a Napéval azonos, a Nappal szemben fekvő pont, vagy a Napnak azon helye, melyet fél év mulva foglal el. Ha a Napot ily módon egy éven át folytatólagosan figyeljük, a csillagok között leírt egész pályáját nyerjük. E pályát ekliptikának vagy nappályának szokás nevezni; legnagyobb kör, mely az aequatort a tavasz és őszpontban metszi s vele körülbelül $23^0\ 28'$-nyi szögletet, az úgynevezett ekliptika ferdeségét képezi; az égen szabad szemmel is elég könnyen kijelölhetjük, mert az állatövi csillagképeken elég számú fényes állócsillag mellett húzódik el.

*Ekliptikai coordinátarendszer.* Az ekliptikát, úgy mint az aequatort a tavaszponttól kiindulólag a napi mozgással ellentétes, tehát a Nap évi mozgásának irányában $360^0$-ra szokás osztani. Ha az ekliptika középpontjában merőlegest húzunk, ez az égen két pontot jelöl ki, melyek az ekliptikának pólusai; az északi a Sárkány csillagzat $\beta$ nevű csillagjának közelébe esik, és a pólustól az ekliptika ferdeségével egyenlő ívvel áll el. Ha az ekliptika két pólusán át legnagyobb kört fektetünk az ekliptikára merőlegesen, a szélességi köröket nyerjük, és ezen kör valamely csillag és az ekliptika közötti íve a csillag szélessége. A szélességet az ekliptikától északra és délre $+$ és $-$ jellel szokás olvasni $90^0$-ig. A csillagon át az ekliptikával párhuzamosan vont kör a hosszúsági kör nevét viseli; az ekliptika azon íve, mely a csillag szélességi köre és a tavaszpont között van, a csillag hosszúságát adja. Ily módon új, ekliptikális coordinátarendszerhez jutottunk, mely a megfigyelőt ugyan nem érdekli, de mely elméleti szempontból fölötte fontos; azért, mert a Nap maga folyton az ekliptikában marad, szélessége tehát állandóan O, s mert a bolygók pályái mind nagyon közel esnek ezen jelentős alapsíkhoz.

*Évszakok és földövek.* A Nap tehát az állócsillagoktól elütően nem mindig ugyanazon parallelkörben marad, hanem egy év lefolyása alatt az ekliptika ferdeségének megfelelő ívvel vándorol északra és délre az aequatortól, azaz declinatiója $+23^0 28'$ és $-23^0 28'$ értékek között váltakozik, minek következtében egy év lefolyása alatt ugyanazon észlelési helyen is a nappalok hosszúsága, a Nap delelési magassága és ezzel együtt a megvilágítás és melegítés visszonyai változnak.

Lássuk lehető rövidséggel leírva a Nap évi mozgásának befolyását a Földre. Márczius 21-én a Nap a tavaszpontban, az ekliptika és aequator metszésében áll és ennélfogva az egész Földön a nap és éj egyenlő tartamú; az aequator a Napot délben a zenithben látja, a mi szélességünk alatt déli magassága $42^0$ 30′ körül van, s a két pólus számára a Nap éppen a horizontot éri. Azontúl a Nap mindig magasabb és magasabb északi declinatióval bíró parallelkörökhez jut, míg declinatiója junius 22-ikén $+23^0$ 28′ lett. Ekkor az északi félgömb napja a leghosszabb, éjjele a legrövidebb, a Nap kitérése észak felé kelte és nyugtakor a legnagyobb: szóval az északi félgömbön nyár van. A Nap delelésekor azon parallelkör zenithjében áll, melynek geographiai szélessége $23^0$ 28′, a Nap declinatiójával egyenlő; ugyanekkor a Nap déli magassága az aequatoron $66^0 32'$, az északi póluson $23^0$ 28′ és a déli szélesség $66^0$ 32′-nyi parallelköre alatt 0. A déli féltekére a Nap sugarai csak kis szöglet alatt esnek, ott rövid nappalok és alacsony hőmérséklet uralkodnak. A parallelkör, melyben a Nap nyár kezdetén áll, melyben mintegy megállni látszik, hogy azután ismét dél felé vándoroljon, a nyári napfordulat, solstitium, vagy a Rák térítőjének (tropus) nevét viseli, mivel a Nap ekkor a Rák állatövi jegyében áll. Június 22-ikétől szeptember 23-ikáig a Nap ismét az aequator felé mozog és eléri az őszi napéjegyenlőség pontját; ismét keleten és nyugoton kel és nyugszik, s a viszonyok úgy állnak, mint tavasz kezdetekor. Az északi pólusnak egy fél évig tartott nappala véget ér és a déli pólus fél évi éjjele után feltünik az első napsugár.

Deczember 22-ikén foglalja el a Nap az ekliptika legmélyebb pontját, declinatiója $-23^0\ 28'$. Ezen szélességgel bíró parallelkörben, a Bak térítőjében, vagy a téli napfordulat körén jut delelésekor a zenithbe; az északi féltekén reggeli és esteli tágassága ismét legnagyobb, de most dél felé irányított. A $+66^0\ 32'$-nyi parallelkör, az úgynevezett poláriskör délben még láthatárán látja a Napot, azontúl a pólusig félévi éjjel van. Újabb negyedév alatt a Nap ismét az aequatorhoz jut, a nappalok és éjjelek hosszúsági viszonya s az évszakok váltakozása újból kezdődik.

Ez idő alatt a Nap declinatióváltozása nem állandó, hanem ~~tapasztalatilag~~ legnagyobb az aequatorban, legkisebb a fordulatokkor; első esetben a Nap gyorsan változtatja a parallelköröket, melyekben napi mozgását végezi, utóbbiban lassan, s innen van, hogy a nappalok hosszúsága leggyorsabban nő, illetve fogy márczius 21-én és szeptember 22-én, s hogy napokon át majdnem állandó marad június 22-ike és deczember 22-ike körül.

A viszonyok némelyikéhez még vissza kell majd térnünk, ha a Föld mozgását a Nap körül későbben kissé tüzetesebben megvizsgáljuk.

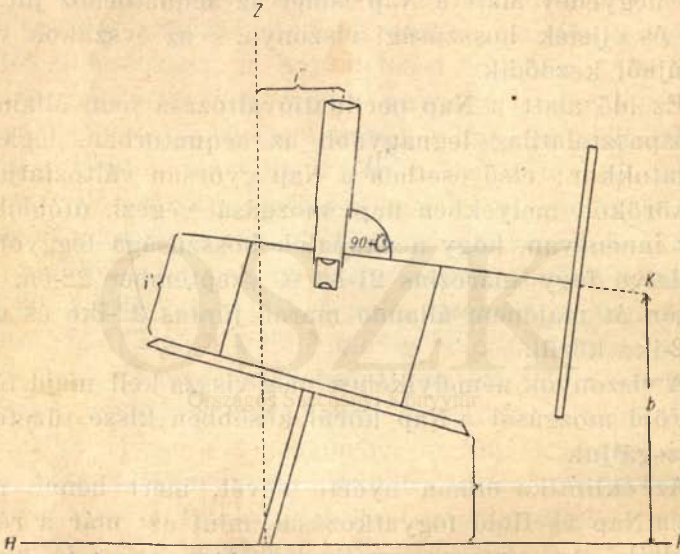
Az ekliptika onnan nyerte nevét, mert benne mennek végbe a Nap és Hold fogyatkozásai, mint azt már a régiek is jól tudták. Az egyenes emelkedés, recta-ascensio elnevezés pedig indokolt, mert alacsony szélességek alatt, hol a csillagászat bölcsője állott (sphaera perpendicularia), a parallelkörök közel merőlegesen állanak a horizontra, a csillagok tehát függélyesen kelnek fel. A kolurok egyike elszeli a Nagy Medve farkát, innen sajátságos neve. A Nap napi ívének hossza szabja meg a nappal tartamát, innen a többi égi testekre is átvitt neve. A geographiai szélesség és hosszúság elnevezése azon időből való, melyben az ismert Föld a földközi tenger partjait képezte; e tenger hossztengelyére vonatkozólag csakugyan jól van választva e két helymeghatározó neve.

Általános: a hosszúsági koordinátákat (a, AR, λ) olyan irányban számoljuk, hogy amint a Nap mozog, koordinátái nőjjön; a szélességiek (h, δ, β) északra (+), délre (−).

## IV. FEJEZET.

# Csillagászati-geographiai műszerek.

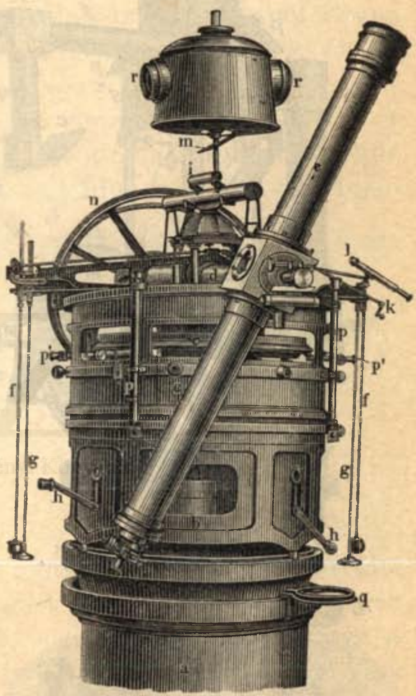
*A Theodolit.* A három tanulmányozott coordinátarendszeren ezek mechanikai utánzását képező műszerek alapulnak, melyek közül a geographust természetesen csak a horizontális rendszert ábrázoló műszer, az úgynevezett altazimuth, universalműszer vagy theodolit érdekli. Az 58. ábra schematikus




58. ábra. A theodolit schematikus (torzult) rajza.

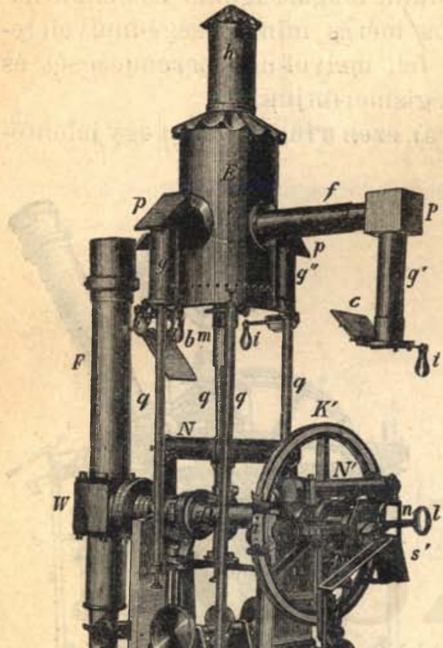
rajzát adja lényeges részének, az 59. és 60. ábra a kész és teljes műszert mutatja be. Ha a HR vízszintes és kerülete mentén 360°-ra osztott kört a libella segítségével állítjuk be, ez a horizontnak teljesen megfelelő képét adja. A T távcső egyrészt a HR-en merőleges tengely, másrészt a felső. erre merőleges, tehát vízszintes tengely körül forgatható, és ezért bármily irányba hozható. Az első forgás nagyságát a HR kör, a másodikét a ZZ' osztott és magassági körrel párhuzamos kör szolgáltatja. A távcső optikai tengelye a csillaghoz vont látóvonalat vagy radiusvectort ábrázolja, úgy hogy a műszer a horizont coordinátarendszerének minden elemét tartalmazza és a rendszernek tényleg hű mechanikai mása. Ha a T távcső valósággal vízszintes és függélyes tengely körül forgatható, akkor vele könnyű szerrel tudunk magasságokat és azimuthális szögleteket mérni. A pontos mérés mindig segédműveleteket és segédeszközöket tételez fel, melyeknek berendezését és alkalmazását most röviden megismertetjük.

*A libella.* A libella (61. ábra), ezen a függő ónnal egy jelentőségű fontos geographiai és geophysikai műszer gyenge görbültséggel bíró üvegcső, mely egy a műszer méreteinek megfelelő légbuborékig alkohollal vagy aetherrel van megtöltve. Mivel a szabad folyadék felszine mindig vízszintesen áll, a légbuborék a csőnek legmagasabb helyét foglalja el; helyzete a cső mentén bekarczolt osztályzaton leolvasható. Az osztályzat egy közének értéke a theodolit segélyével könnyen meghatározható: e czélra akaszszuk a libellát a vertikális kör egyik küllőjére és forgassuk a kört addig, míg a buborék az osztályzat egyik végéhez közel teljesen láthatólag beáll. A buborék közepének megfelelő osztályvonás, melyet a két buborékvég leolvasásának számtani közepéből nyerünk, legyen l. Azután forgassuk lassan a kört, míg a buborék az osztályzat másik végén l′ helyzetet foglalja el. Ha a kör leolvasása az első esetben k, most k′ volt, akkor a körnek (k′ — k) mpercz körüli forgása a libellának (l′ — l) osztályrészével aequivalens, miből egy skálarész értéke $\frac{k' - k}{l' - l}$ mpercz. Még kényelmesebben és rendesen nagyobb pontossággal felhasználhatjuk ugyane czélra a theodolit lábcsavarját. A két lábat összekötő egyenes távol-



59. ábra. Altazimuth.

sága a harmadik lábtól legyen L. Ennek irányába állítsuk a libellát, melynek buborékja most l skálarészen áll. Ha a libella irányába eső lábcsavart n menettel emeljük, akkor a buborék közepe l'-re áll be. Ha egy csavarmenet magassága h, akkor a csavarás által a libella nyilván




60. ábra. Konkoly utazási theodolitja.

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{nh}{L}, \text{ vagy } \alpha = \frac{nh}{L \sin 1''}$$

szöglet körül fordult és ennek folytán ~~a~~ 1 skálarész értéke:

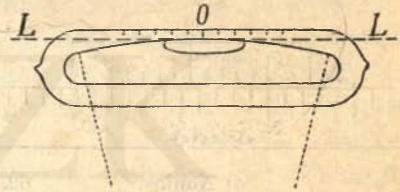
$$1 \text{ skálarész} = \frac{nh}{L\,(l - l')\sin 1''}$$

Ha a három lábcsavar s oldalhoszszal bíró egyenlő oldalú háromszög csúcsában áll, akkor nyilván

$$L = s \cos 30^0.$$

A libella maga is bírhat hibával, mely onnan ered, hogy két lába vagy karja nem egyenlő hosszú, vagy hogy az osztályzat zeruspontja nem esik össze a cső legmagasabb pontjával. Mindkét hiba egyszerre kiküszöbölhető a következő eljárás által: Helyezzük a műszert a theodolit egy már közel vízszintesen álló alkatrészére, vagy a távcső horizontális tengelyére, vagy a vízszintes körre és olvassuk le a libella állását, azaz a buborék középpontjának osztályzatrészét; fektessük át a libellát $180^0$ körül, úgy hogy előbbi bal oldala most jobb oldalt álljon; ha az új leolvasás a régivel nem azonos, igazítsuk el az eltérés felét a libellának csavarral emelhető lábán, a másik felét a műszer lábcsavarjával, és ismételjük az eljárást addig, míg a libella átfektetés után eltérő eredményt nem ad. Ekkor úgy a libella helyes, mint alapzata vízszintes.

A körök könnyebb leolvashatóság céljából nincsenek túlságosan szűken osztva; a középnagyságú theodolitok directe rendesen 10′-nyi szögleolvasást engednek meg. De ennél kisebb részek is kényelmesen mérhetők a nonius segítségével (62. ábra). Ez a főosztályzat mellett sikló kisebb osztott lemez, mely ugyanazon téren, melyen a főosztályzat n vonalat tartalmaz, n + 1 vagy n — 1 részre van osztva. Ha tehát a nonius o vonala a kör egyik vonalával összeesik, akkor a nonius 2, 3 . . m-ik vonala nyilván $\frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1} \,.\,.\, \frac{m}{n+1}$-ed körosztályzatértékkel áll el a kör megfelelő vonalától. Innen a szabály: olvassuk le a körön látható osztályrészeket egészen a nonius o vonaláig; adjuk e leolvasáshoz az osztályzatköz annyiadszor n-ed részét, a hányadik vonás a nonius o-ján túl összeesik a körosztályzat valamely vonásával. A 62. ábrában pl. igen gyakran előforduló eset látható, melyben a főléptéknek kilencz köze a noniuson 10 részre van osztva; a noniusadat tehát $\frac{1}{10}$ osztályrész. Ennélfogva a nonius leolvasása: (62. *b*) 32 + 5 tized = 32·5 osztályrész. A körnoniuson rendesen az egyes perczeknek megfelelő vonalak már meg vannak jelölve, úgy hogy a vonalösszeesés felkeresése tetemesen meg van könnyítve; 10″-et adó noniusnál pl. minden 6-ik vonás egy teljes percznek van számozva.

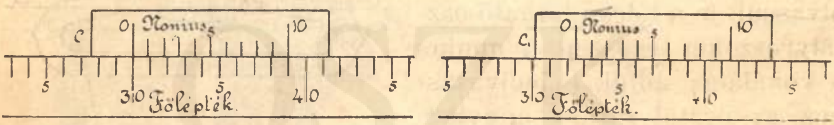


61. ábra. Libella.

A jó theodolit kelléke, hogy a körök mechanikai és geometriai tengelye pontosan egybeessék; ha e kellék nincs betartva az úgynevezett excentrumossági hiba keletkezik, mely azonban teljesen ártalmatlanná tehető azáltal, hogy két diametrálisan fekvő nonius leolvasásának közepét tekintjük leolvasás gyanánt. Ennek oka azon ismert egyszerű geometriai tételben keresendő, mely két egymást metsző húr által kiszelt körív számtani közepére vonatkozik. Mivel az excentrumosság teljesen soha ki nem kerülhető, minden körnél két szemközt fekvő nonius olvasandó le.

A távcső optikai tengelyét egy a kép síkjában alkalmazott fonalkereszt metszési pontjával szokás jelezni, s ezen keresztezési pontra történik az égi test vagy beirányítandó pont beállítása. Ha az ily módon kijelölt optikai tengely nem merőleges a vízszintes forgási tengelyre, újabb hiba keletkezik, melyet collimatióhibának szokás nevezni; ez magasságméréseknél alig bír befolyással, de azimuthmeghatározásokban gondosan tekintetbe veendő. Meghatározása a következő módon történik:

Közel a horizonthoz álló pontot beállítván a fonalkereszt közepére, leolvassuk a horizontális kör adatát. Azután átforgatjuk a távcsövet $180^0$-kal előbb már pontosan vertikálisra állított tengelye körül és átcsapjuk a távcsövet, míg az előbb




*a*) Nonius. 62. ábra. *b*) Nonius.

beállított pont képe ismét a fonalkeresztre nem jut. Az új körleolvasás különbsége az előbbihez képest adja a collimatióhiba kétszeresét, mert világos, hogy a kereszt középpontja a második beirányzásnál ugyanannyival áll az optikai tengelytől pl. jobbra, mint a mennyivel állt tőle balra az első leolvasásnál. De oly módon is járhatunk el, hogy az első beállítás után a távcsövet egészen kiemeljük csapágyaiból és átfektetve helyezzük ismét beléje. Ha a tengely hajlását és ugyancsak a libellával tanulmányozható tengelycsapok egyenlőtlenségét ismerjük, ismét a két leolvasás különbsége lesz a collimatió kétszerese. A csillagászok e hiba meghatározására rendesen egy a pólushoz közel álló, tehát igen lassú napi mozgással bíró csillagot használnak fel.

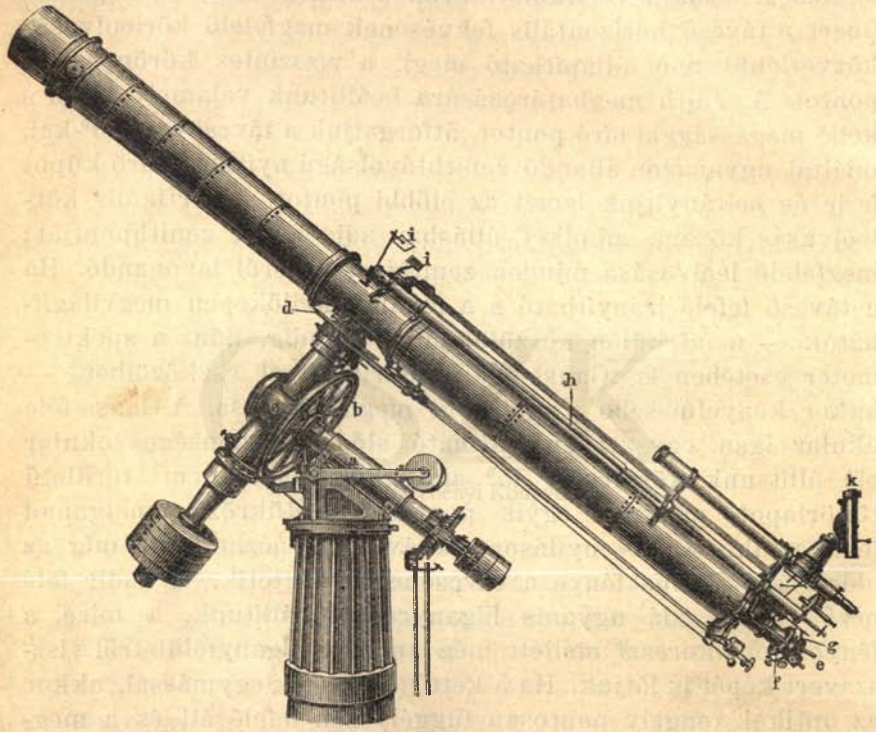
A beállítás biztossága megkivánja, hogy a fonalkeresztnek, melyet éjjeli megfigyelések alkalmával oldalról meg kell világítani, ne legyen parallaktikus hibája, azaz kép- és fonalkereszt ne tolódjanak el egymás felé, ha szemünket az okular előtt mozgatjuk. Helyes beállításnál az okulárnak tokjában való eltolódása által keressük először is a fonalkereszt éles képét, s azután, az okulárt többé nem bántva, a távcső kihúzó csövét addig igazítjuk, míg valamely csillagnak képét is élesen látjuk.

Még hátra van, hogy a két körnek kezdőpontjait állapítsuk meg, azaz a vertikális körön a zenith- vagy nadirpontot (mert a távcső horizontális fekvésének megfelelő körleolvasás közvetlenül nem állapítható meg), a vízszintes körön a délpontot. A zenith meghatározására beállítunk valamely távol s kellő magassággal bíró pontot, átforgatjuk a távcsövet 180$^0$-kal, miáltal ugyanazon állandó zenithtávolságú nyílással bíró kúpot ír le és beirányítjuk ismét az előbbi pontot. A vertikális körleolvasás közepe mindkét állásban adja a kör zenithpontját; megfelelő leolvasása minden zenithleolvasásról levonandó. Ha a távcső lefelé irányítható s a fonalak kellőképen megvilágíthatók — a mi külön készülék híján mindig, mint a spektrometer esetében is, Gauss-féle okulártükörrel eszközölhető — akkor kényelmesebb a nadirpont meghatározása. A Gauss-féle okular igen egyszerűen állítható elő. A közönséges okular elé állítsunk körülbelül 45$^0$ alatt kis, néhány cm$^2$ területű tükörlapot, melynek egyik pontjáról a tükröző amalgamot levakarjuk. A kis nyíláson a távcsőbe nézhetünk, míg az oldalt álló lámpa fénye a távcsőbe bevetíttetik. A nadir felé néző távcső alá ugyanis higanycsészét állítunk, a mire a fényes fonalkereszt mellett még annak a higanyfelületről viszszavert képét is látjuk. Ha a kettő összeesik egymással, akkor az optikai tengely pontosan függélyesen lefelé áll és a megfelelő körleolvasás a nadir beallításának felel meg. A nadir- és zenithpont leolvasásának közepese természetesen a horizont beállításának felelne meg.

A vízszintes kör délpontjának meghatározására legjobban a sarkcsillagot vagy valamely deleléséhez közel álló égi testet, akár a Napot is, használjuk fel. Ha adott időben beállítjuk az egyiket vagy másikat, akkor azoknak azimuthja az ephemerisekben adott declinatióval számítás útján megállapítható. Az ugyanakkor leolvasott vízszintes kör meg fogja mondani, mily javítás adandó a leolvasott azimuthoz, hogy a valódit nyerjük. Az eljárás természetesen a sarkcsillagnál igen egyszerű, mivel ez állandóan nagyon közel 180°-os azimuthtal bír.

A legpontosabb méréseknél azonkívül számos más eljárás követendő; meghatározandók a körök osztási hibái, a noniusok vagy az azokat helyettesítő mikroskópok hibái s hasonlók.

Bizonyos czélokra elegendő az egyik vagy másik kör

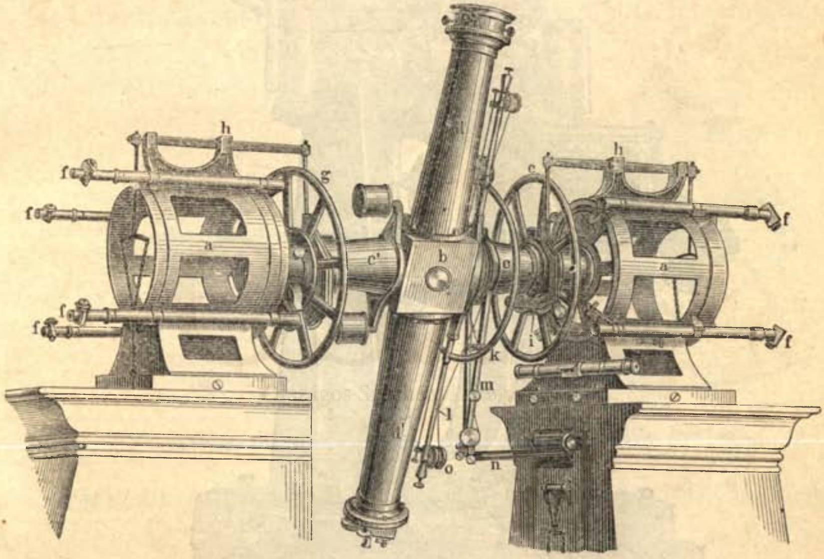



63. ábra. Parallaktikus távcső.

használata, s e czéloknak megfelelő műszerek a nem teljes theodolitok; vertikális körök csupán magassági, azimuthalok csupán horizontális szögleteket adnak.

Ha a theodolitot oly alapra helyezhetnők, melynek síkja az aequatorral párhuzamos, oly módon, hogy az előbbi vertikális tengely most észak felé mutat s a világ tengelyével párhuzamos, akkor a parallaktikusan felállított csillagászati távcsövet vagy aequatoreálét nyerjük, mely azonban nehezebb felállítása miatt nem hordozható s geographiai czélú méréseknél tekintetbe nem jön. A rendesen használt, a leírt műszertől csak alakilag eltérő parallaktikus távcsövet a 63. ábra állítja elénk.

Ha végül a theodolitot úgy állítjuk fel, hogy távcsöve csupán a meridián síkjában mozoghat, a mi mellett a horizontális kör természetesen teljesen felesleges, a meridiánkört nyerjük (64. ábra), melynek segítségével a csillagász a csillagnak átvonulási idejéből vagy annak rectascensióját, vagy a megfigyelés csillagidejét, delelési magasságából pedig vagy a hely sarkmagasságát, vagy a csillag declinatióját határozza



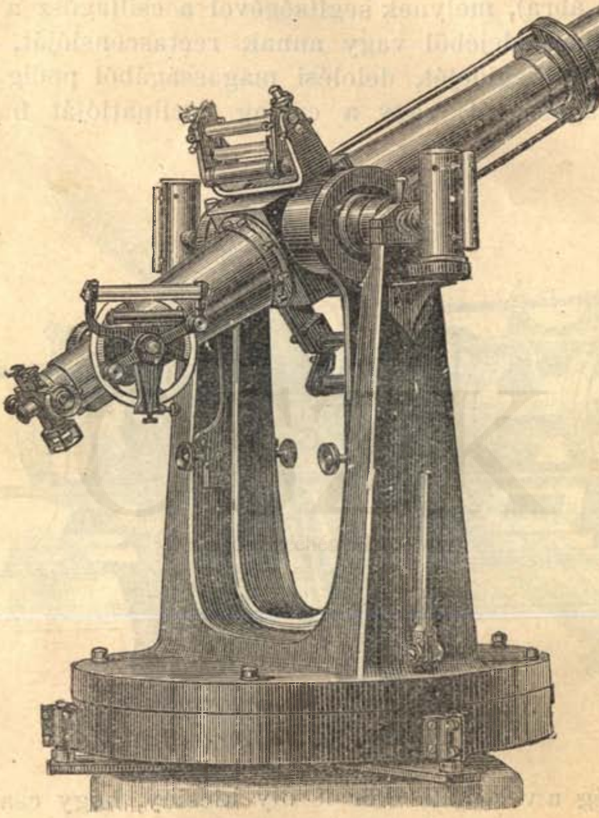
64. ábra. Meridiánkör.

meg. Ha még a vertikális kör is oly kicsiny, hogy csak beállításra, de nem pontos leolvasásra való, akkor a meridiánkör átmegy az időt meghatározó passage-csőbe (65. ábra), mely egyszerűen a meridián-átmenet idejéből s a csillag rectascensiójából az órajavítást szolgáltatja. E két utóbbi műszer ugyancsak nagy gondot igénylő felállítása miatt szintén csak állandó csillagvizsgálókon használatos, de a velök tett megfigyelések nagyon közelről érdeklik a geographust.

A theodolitnak elődje már a történeti ó-korban használatos astrolabium volt (66. ábra), az éggömbnek különböző köreivel való alakilag leghűbb és legközvetetlenebb utánzása.

A gömb középpontjában szabadon forgatható vonalzó képezte a látósugárral párhuzamos radius vectort.

Teljesen más mérési elven alapszik a fontos sextáns, mely tisztán gömbi távolságokat ad s melynek főelőnye, hogy semmiféle szilárd felállítást nem kiván, tehát kézben, sőt ingó

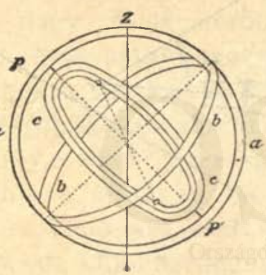


65. ábra. Passage-cső.

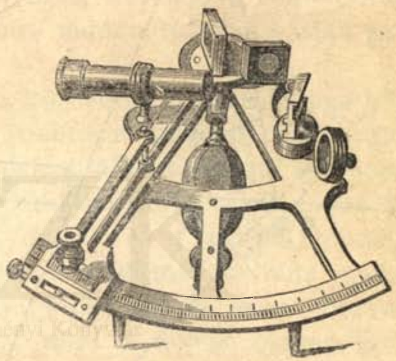
hajón is használható. Ennek oka, hogy a közvetetlenül beállított tárgyon kívül még egy másik pontnak a műszer által adott tükörképét irányítjuk be.

A műszer körhatod (67. ábra), melynek középpontjában a noniust hordó alhidadéval együtt a kör síkjára merőleges tükör, az úgynevezett nagy tükör, M (68. ábra) foroghat. Vele szemben, ugyancsak merőlegesen a kör síkjára áll a kis tükör M′, melynek felső fele áttörött, alsó fele azonban tükröző. A kis tükör úgy van megerősítve, hogy a nagygyal párhuzamos legyen, ha annak alhidadéja nullra mutat. A kis tükör átellenében távcső áll, úgy hogy tárgylencséjének alsó felébe csak a kis tükör alsó feléből jöhet fény, míg a felső felébe a tükör szabad felületén át bármily tárgy képe juthat. Természetes, hogy ezért M' tükör alkalmasan állított prismával is helyettesíthető. Állító csavar segítségével a kis tükör pontosan beigazítható.

Két, A és B pont közötti, a megfigyelő szemében képezett szöglet legyen $\alpha$; a baloldali objectumot a távcső egyenesen látja, a jobboldalinak képét M és M' tükrökön való visszaverődés után (68. ábra). MM'P és MM'Q háromszögekből



66. ábra. Astrolabium.


67. ábra. Sextans.

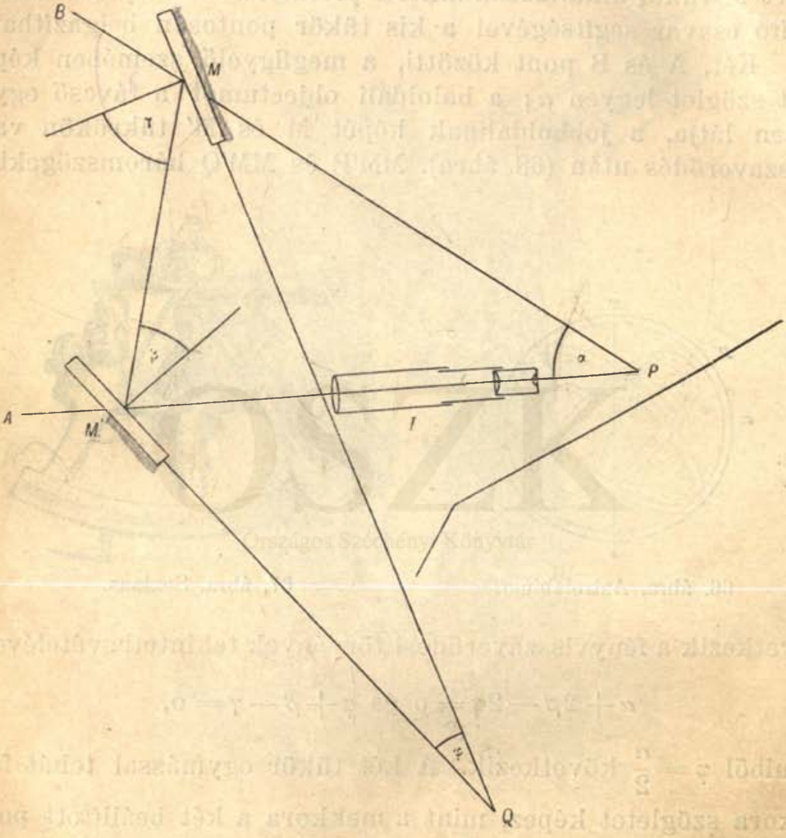
következik a fényvisszaverődési törvények tekintetbevételével:

$$\alpha + 2\beta - 2\gamma = o \text{ és } \varphi + \beta - \gamma = o,$$

a miből $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ következik. A két tükör egymással tehát félakkora szögletet képez, mint a mekkora a két beállított pont gömbi távolsága. Ezért a kör szélén lévő osztáson minden fél fok egésznek van feltüntetve, hogy a kettővel való osztást mellőzni lehessen. Egyszersmind világos is, hogy a sextans mozgása közben mindkét tárgy képe egyenlőképen mozog, úgy hogy kölcsönös távolságuk nem változik.

A sextans főkellékei, hogy a két tükör merőleges legyen a kör síkjára, hogy a távcső optikai tengelye legalább közel párhuzamos legyen a kör síkjával és hogy az alhidade nullállásában a két tükör egymással párhuzamosan álljon.

Ha a két tükör egymással közel párhuzamos, akkor ugyanazon távoli pont már magában is két képet ad a távcsőben; ha ezek egymást födik, akkor, távolságuk 0 lévén, természetes, hogy ez állásnak megfelelő körleolvasás minden következő leolvasásból levonandó. Ez adat az indexcorrectió




68. ábra. A sextans elve.

nevét viseli. Az indexjavítás megállapítására használt tárgynak természetesen oly távolnak kell állnia, hogy e távolsággal szemben a sextans méretei, nevezetesen a két tükör távolsága, elenyésző legyen. Legjobban használhatjuk a Napot, ha minden sextanson lévő úgynevezett napüvegek (szines, a Nap fényét tetemesen gyengítő üvegek) kikerülésével az okular elé fekete üveget teszünk. Ezáltal ugyanis mindkét napkép egyenlő torzulást, illetve a védőüveg prismatikus hibája miatt, egyenlő eltolódást mutat. Ha egyszer a két napkép egyik, majd másik szélét hozzuk érintkezésbe, akkor a két állásnak megfelelő leolvasás közepese megfelel a tükrök parallel állásának, míg a különbségük az ephemeridákból kikereshető napátmérő kétszeresét adván, mindjárt ellenőrzi a mérés jóságát.

A napüvegek részint a nagy, részint a kis tükör előtt foglalnak helyet. Közbeigtatásuk természetesen hibát hoz be, ha ez üvegek nem planparallelek, hanem prismatikusak. E hiba vagy kiküszöbölhető, ha két mérést végzünk s időközben az üvegeket 180$^0$-kal megforgatjuk, vagy számításba vehető, ha az indexcorrectiót a szines üvegek különböző conbinatiójával meghatározzuk s az előbb leírt módon talált hibátlan javítással összehasonlítjuk.

A nagy tükör merőleges a kör síkjára, ha a limbus képe minden törés nélkül megy át a limbusba magába; a kis tükör merőleges a sextánsra, ha a horizontálisan állított sextánson az indexjavítás meghatározása alkalmával a távoli pont két képe ugyanazon magasságban fekszik és a távcső tengelye párhuzamos síkjával, ha vízszintesen állított sextáns mellett a távcsövön át s a sextáns síkja fölött távoli léczre nézve a leolvasások különbsége ugyanaz, mint a távcső magassága a sextáns felett.

A sextáns leggyorsabban változó javítása az indexjavítás és ezért ez minden egyes megfigyelés előtt és után eszközlendő. A többi hiba meglehetősen állandó és ezért ezek sommásan határozhatók meg. E hibák a fentemlített három követelmény nem teljes kielégítése mellett az osztás hibája, különösen pedig az excentrumosság, mely abban áll, hogy az alhidade forgásközéppontja nem esik össze a körosztás geometriai centrumával. E hiba a sextánsnál tetemes nagyságot érhet el és nem kellő gondozás mellett elég gyorsan változó. Minde hibák együttesen a következő módon vehetők tekintetbe:

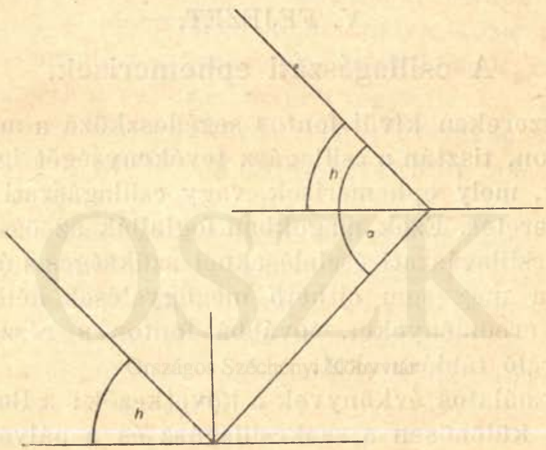
Kiválasztunk (tán éggömb segítségével) kellően fényes állócsillagokat, melyek egymástól körülbelül 5, 10, 15.. foknyi távolságban állanak és ezeknek meghatározzuk a sextánsunk segítségével távolságait. De ugyanezen csillagoknak távolsága ismert rectascensiójukból és declinatiójukból a fénysugár törésének tekintetbevételével számítható is. A különbség számítás-megfigyelés értelmében adja azon javítást, melyet az illető távolságoknak megfelelő körleolvasáshoz adnunk kell, hogy hibáktól ment értéket kapjunk. Akár számítva, akár graphikus úton most már könnyen szerkeszthetünk táblázatot, melynek segélyével minden tetszőleges leolvasásnak megfelelő javítás kivehető. A graphikus kijavítást választva, így járhatunk el: vízszintes, a sextáns osztásának megfelelően osztott vonalra merőlegeseket emelünk a csillagok lemért távolságainak megfelelő pontokban s ezekre rárakjuk a talált javításokat. Az így nyert pontokat lehetőleg folytonos és minden ponton átmenő görbével kapcsoljuk, melynek segélyével most minden leolvasáshoz a megfelelő javítás olvasható le. Nagyon természetes, hogy ezen eljárás a műszer csekély állandósága mellett időről-időre ismétlendő.

Éppen az excentrumosság változékonysága miatt újabban a sextánsok helyett inkább teljes köröket használnak, bár szembeötlő, hogy egyenlő osztásfinomsága mellett a teljes kör sokkal kényelmetlenebb, mert nagyobb műszert ad. Ez esetben az alhidade két, egymástól $180^0$-nyira fekvő noniussal bír, melyek adatainak közepese ment minden excentrumossági hibától. Teljesség kedveért még megemlíthető, hogy a sextánsokat kivételesen állványon is használják, s hogy a kétszeres reflexióra való tekintetből a fénytelenebb objectumot mindig egyenesen a távcsővel állítjuk be, a mi némelykor szükségessé teszi, hogy a műszert osztott lapjával lefelé fordítsuk. A beállításnál a távcsővel közvetlenül látott pontot megtartva, az egész sextánst a távcső körül, mint tengely körül forgatjuk vagy lengetjük, miközben az alhidade állását is változtatjuk mindaddig, míg a másik pont képe is nem jelenik meg a látmezőben.

Mivel a sextáns csak távolságokat mér, közvetlenül nem minden csillagászati mérés eszközlésére használható. A theodolitnál csak a hosszkülönbség meghatározásánál fontos, úgynevezett holdtávolságok mérésében közvetlenebb, de a magasság és azimuthok lemérésére is használható. Az első esetben mesterséges horizontot használunk, azaz higany vagy egyéb folyadék felületét, vagy libellával vízszintesen beállított tükröző üveget. Ha valamely égi testnek reflektált és közvetlenül látott képe között levő $\alpha$ távolságot (69. ábra) mérjük, akkor ez nyilván e testnek kétszeres magasságával azonos, a mennyiben

t. i. a szemmagasság a folyadék szine felett e test távolságához képest elenyésző csekély. Tengeren a szemhatárhoz viszonyítjuk a csillagok magasságát, azaz ama határvonalhoz, melyben ég és víz érintkezni látszik. Ekkor közvetlenül az égi testet állítjuk be és ennek látásvonala körül lengetjük a sextánst addig, míg a szemhatár (Kimm) képe lengetés közben is az égi test képét érinti. Ily módon kapjuk meg a legrövidebb, tehát merőlegesen a horizontra álló távolságot, mely azonban a horizon depressiója miatt még némi javításra szorul.

Azimuthmeghatározásnál a kérdéses pontot összehason-




69. ábra. Magasságmérés a sextánssal.

lítjuk a Nappal vagy valamely csillaggal, ha ez lehetőleg közel áll a horizonthoz. A megmért távolságnak a horizontra levetített értéke nyilván e két pont azimuthkülönbségével azonos, a miből az azimuth maga is meghatározható, miután a csillagé tetszés szerinti időre számítható. Az adott leírás alapján már képesek leszünk a műszer hibáit annyira kijavítani, hogy kezdetleges megfigyelések vele eszközölhetők. Miután azonban a hiba soha maradandóan nullává nem tehető, legjobb, ha a tényleges hibákat külön megfigyelések segítségével nagyságuk szerint megállapítjuk és számításba veszszük, úgy hogy a mondottakon kívül külön, mélyebbre ható hibaelmélettel is kell foglalkoznunk.

Mindezen műszereknél, mint láttuk, fontos szerepet játszik a libella egyik vagy másik alakban, a sextáns esetében pl. a vele egyértelmű mesterséges horizon. Ez természetes is, mert hiszen az ég egyik legfontosabb körének síkja éppen ez úton jelölhető ki. E körülményre később fontos hivatkozás történik, a mennyiben a mechanika törvényeiből eléggé világos, hogy az ily módon kijelölt horizont nem a Föld alakjának érintő síkjával esik össze, hanem minden pontban merőleges a nehézségi erő irányára, tehát érintő síkja a Föld niveau-felületének, mely nem szükségkép födi a Föld látható, geometriai alakját.

## V. FEJEZET.

## A csillagászati ephemerisek.

A műszereken kívül fontos segédeszköze a mérő geographusnak azon, tisztán a csillagász tevékenységét igénylő adatgyűjtemény, mely ephemerisek, vagy csillagászati évkönyvek czímén ismeretes. Ezek magokban foglalják az összes geographiai vagy csillagászati észleléseknél szükséges s újabb, nehéz és útközben meg sem ejthető megfigyelések nélkül be nem szerezhető eredményeket, továbbá fontos s részben kényelemre szolgáló táblázatokat.

A használatos évkönyvek a következők: a Berliner Jahrbuch, mely különösen a szakcsillagász és a pályaszámítással foglalkozó igényeinek felel meg; a Nautical Almanac, melyet az angol admiralitás, a Connaissance des Temps, melyet a Bureau des Longitudes, és a Nautical Almanac, melyet az amerikai Naval Observatory ad ki. A mi czéljainknak legjobban megfelel az angol Nautical Almanac kivonatát képező: Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr .... zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen.

Mérsékeltebb pontosság mellett a „Magyar Tud. Akadémiai Almanach“ is megfelel, mely természetesen az összes adatait a budapesti meridiánra vonatkoztatja.

Minden egyes nap közép greenwichi dele számára adja a Nap rectascensióját, declinatióját, sugarát, továbbá az időegyenlítést és a csillagidőt, azonkívül pedig a Nap declinatióját a valódi greenwichi délben is, ezen mennyiségek legtöbbjének óránkénti változásával együtt. Egy másik rovat ismerteti a Hold meridiánátmenetét, sugarát és horizontális parallaxisát délben és éjfélkor, továbbá minden nap delére a Hold korát. Különös tekintettel a hosszúságmeghatározásokra közöltetik azután három óránként a Hold rectascensiója és declinatiója s azok 10 perczenkénti változásai, valamint a Jupiterholdak látható fogyatkozásai és a négy fényesebb bolygó: Vénus, Mars, Jupiter és Saturnus minden nap delére érvényes helyzetei, sugara és horizontális parallaxisa. Ugyancsak három óráról három órára fel vannak sorolva, az Ujhold körüli napok mellőzésével, a Hold középpontjának távolságai a Naptól, a fényesebb bolygóktól s egynéhány, a holdpálya közelében fekvő fényes állócsillagtól, e távolságok változásának mértékével együtt. A közvetlen változás helyett ugyanis az évkönyv az egy időmásodpercz alatti változás reciprok értékének logarithmusát adja, azaz lg 10800 — lg távolságváltozás másodperczekben három óra alatt.

Azután találjuk 78 fényesebb állócsillag közép helyzetét az év kezdete számára és ugyanazon csillagok tényleges rectascensióját és declinatióját 10 napos időközökben e csillagok felső delelése számára. A mondott dekadok alatt e csillagok helyzete bátran állandónak tekinthető, csupán $\alpha$ Ursae minoris és $\sigma$ Octantis, az északi s déli sarkcsillag esetében a változás oly tetemes, hogy interpolatióra szorulunk.

Egy következő táblázat adja a Hold által elfödött csillagok jegyzékét és mindazon segédmennyiségeket, melyekkel valamely hely számára a födés bekövetkezése kiszámítható, a mi a hosszúságmeghatározás szempontjából szintén fontos.

Végül pedig következik 30 segédtábla, melyek közül az I., XII., XVIII., XIX., XX., XXI. a holdtávolságok javítására szolgálnak, míg V. és VI. azon interpolatiónál jönnek tekintetbe, melyeknél az első különbség tekintetbevétele nem adna kielégítő pontosságot. II. a szélesség meghatározására szolgál a sarkcsillag megmért magassága segítségével, III. és IV. a közép- és csillagidőt változtatja át egymásba. VII., VIII., IX. a levegő sugártörését adja függésében a légnyomástól és hőmérséklettől és XV., XVI. és XVII. a sugártörés befolyását a Nap és Hold látszó sugarára.

A X. tábla a thermometer és barometerskálák átszámítását tartalmazza, XI. a horizont depressióját szolgáltatja, a XIII. a Nap, a XIV. a bolygók magassági parallaxisát. A XXII—XXVII. tábla a tengerjárásra és tengerészeti időszolgálatra vonatkozik, a XXVIII. néhány főbb csillagvizsgáló geographiai fekvésével, a többi kettő a fogyatkozásokkal s naptári részletekkel ismertet meg.

Megjegyzendő, hogy az ephemerisek mindig a greenwichi délre vonatkoznak, hogy tehát más helyen és a nap más szakában interpolatióval számíthatjuk csak ki a kellő számadatokat. Ha valamely hely $\lambda$ fokkal vagy $\frac{\lambda}{15}$ órával fekszik nyugotra Greenwichtől s e helyen délutáni t órakor keressük egy, az ephemerisekben foglalt adat értékét, melynek órai változásai algebrai jelének tekintetbevételével u, akkor $(\frac{\lambda}{15} + t) . u$ adandó az ephemeris értékéhez. Keleti hosszúság és délelőtti időre $\lambda$ és t természetesen negativ. Így 1891. április 17-én a Nap declinatiója a greenwichi középdélben $+ 10^0\,28'\,38''$, az órai változás $+ 52''.5$. Tehát Budapesten d. u. $5^h\,40^m$-kor a Nap declinatiója lesz: $+ 10^0\,28'\,38'' + (- 1^h\,16^m + 5^h\,40^m) . 52''.5 = + 10^0\,32'\,29''$. Megjegyezvén, hogy Budapest geographiai fekvése szerint jellemezve van:

$$\lambda = - 1^h\,16^m\,15^s.4 \text{ Greenwich} . \varphi = + 47^0\,29'\,34''.7$$

által. Épp így találjuk, hogy a csillagidő délben Budapesten mindig $12^s.53$-mal kisebb, mint Greenwichben.

A hol a legnagyobb szabatosságra törekszünk az egyszerű, úgynevezett vonalos közbeigtatás nem elegendő, hanem a következő eljárást választjuk. Legyen $z_r$ az ephemerisekben található valamely r időpontra vonatkozó szám, $\triangle z_r$, $\triangle^2 z_r$.. annak első, második.. különbsége. Az első különbségi sor előáll, ha minden adott számértékből a megelőzőt a jel tekintetbevételével levonjuk, a második, ha ezen eljárást az imént nyert sorozaton folytatjuk, s í. t. Keressük most az ephemerida z értékét egy $r + n$ időpillanat számára, melyben természetesen n az r-nek megfelelő időköz részeiben van kifejezve. Akkor áll Newton szerint:

$$z_{r+n} = z_r + \frac{n}{1} \triangle z_r + \frac{n(n-1)}{1.2} \triangle^2 z_r + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \triangle^3 z_r + ..$$

A Nautisches Jahrbuch szerint Mars bolygó rectascensiója a greenwichi közép dél számára:

$$
\begin{array}{llll}
\text{1891. május 1.} & 4^h\,23^m\,21^s.1 & & \\
 & & +2^m\,53^s.7 & \\
\text{„ \quad „ \quad 2.} & 4^h\,26^m\,14^s.8 & & +0^s.2 \\
 & & +2^m\,53^s.9 & \\
\text{„ \quad „ \quad 3.} & 4^h\,29^m\,8^s.7 & & +0^s.2 \\
 & & +2^m\,54^s.1 & \\
\text{„ \quad „ \quad 4.} & 4^h\,32^m\,2^s.8 & &
\end{array}
$$

s ennek következtében Mars rectascensiója május 2-án greenwichi közép éjfél számára kereshető. $z_r = 4^h\,26^m\,14^s.8$; $\triangle z_r = +2^m\,53^s.9 = 173^s.9$; $\triangle^2 z_r = +0^s.2$ $n = 12$ óra $= \frac{1}{2}$, mivel az egymásra következő r időpontokat egész napok választják el. A számítás eredménye, hogy $z_{r+n} = 4^h\,26^m\,14^s.8 + 1^m\,26^s.92$.

Az évkönyv mellett valamely jobb csillagtérkép használata is ajánlatos, már csak azért is, mert a gyakorló geographus a főbb állócsillagok ismeretére rászorul. Hiszen ismernünk kell azon csillag nevét, melynek magasságából pl. időt kivánunk meghatározni, mert ez ismeret nélkül nem vehetjük ki declinatióját és rectascensióját az évkönyvekből. Azonkívül pedig az ephemerisekben feltüntetett számadatok berajzolása valamely égi abroszba igen élénk képét adja a Nap, a Hold s a bolygók látszó futásának.

## VI. FEJEZET.

## Az időszámítás.

A Föld tengelyforgása minden eddigi ismeretünk szerint teljesen egyenletes mozgás s ezért kiválóképen alkalmas az idő mérésére. Mivel azonban a forgást csupán a csillagos ég látszó mozgásán vehetjük észre, világos, hogy a teljes körülforgás megállapítása céljából az égboltozat egy pontjának teljes turnusát kell figyelnünk. Az állócsillagok mozgásuk közben relativ helyzetüket nem változtatván, bármelyikéből indulhatunk ki, mondván, hogy csillagnapon értjük azon időt, mely ugyanazon állócsillagnak két egymásra következő felső, vagy ugyanazon irányú delelése között eltelik. Ez időközt tudvalevőleg 24 (csillag-)órára, az órát pedig a hatvanas rendszer szerint szokás osztani. A mozgást vonatkoztathatjuk azonban valamely bolygóra, különösen a Napra is, sőt ezen választás nagyon is indokolt leend azon megszakíthatatlan viszony folytán, melyben napunk beosztása éppen a Nappal áll. Ennélfogva azon időköz, mely a Nap két egyenirányú delelése között húzódik a napnap (dies solaris) nevét kapta, s ezt is ugyancsak 24 órára s megfelelő kisebb részekre szokás osztani. Csakhogy a Nap egy év lefolyása alatt megjárván kelet felé az eget, világos, hogy a két nap tartama nem lehet egyenlő. Viszonyukat nagyon könnyen állapíthatjuk meg, akár az 56. ábra segítségével is.

A siderikus év, azaz a Föld egy teljes keringése 366.2422 csillagnapot tartalmaz, de mivel ez idő alatt a Nap az égen látszólag kelet felé $360^0$-kal körüljárt, egygyel kevesebb napnap foglaltatik benne. Ennélfogva 366·2422 csillagnap = 365·2422 napnappal, vagy

$$1 \text{ napnap} = 1 \text{ csillagnap} + 3^m\, 56^s.5554 \text{ csillagidőben}$$
$$1 \text{ csillagnap} = 1 \text{ napnap} - 3^m\, 55^s.9094 \text{ középidőben,}$$

a miből most már minden időtartam arányosan átszámítható. A csillag- és napnap közötti időkülönbség tehát egyszerűen azon $\omega$ szöglet (56. ábra), mely a Föld egy napi útjának felel meg.

A megfigyelés azonban azt mutatja, hogy az egyes napnapok nem egyenlő tartamúak, részben a Földnek ekliptikus mozgása miatt, részben azért, mert a Föld nem az aequator síkjában, hanem az ekliptikában mozog. Ennélfogva a valódi napnap helyett azok átlagos hosszát veszszük, az úgynevezett közép napot; ez azon időtartam, mely az aequatorban egyenletes körmozgást végező képzelt Nap két egyenirányú delelése között telnék el.

Természetes, hogy a megfigyelés közvetlenül csak a valódi napi időt, azaz a Nap óraszögét adhatja és ennek következtében módról kell gondoskodni, hogy ebből a középidő számítható legyen. Ez történik az időegyenlítés segítségével, mely

$$\text{középidő} - \text{valódi idő} = g$$

egyenlet által van definiálva, úgy hogy a középidő előáll, ha a megfigyelt valódi időhöz az időegyenlítést adjuk. E mennyiség genetikus definitióját azonban csak későbben adhatjuk; értékei napról-napra az ephemerisekből kivehetők.

A mondottak alapján immár könnyű időtartamok értékeit akár csillag-, akár középidőben kifejezni. 24 óra középidő = $24^h\ 3^m\ 56^s.56$ csillagidővel és 24 óra csillagidő = $23^h\ 56^m\ 4^s.09$ középidővel lévén egyenlő, mi sem könnyebb, mint a $3^m\ 56^s.56$ vagy $3^m\ 55^s.91$-nyi, egy teljes napra eső időközt arányosan felosztani. De mivel e számítás nagyon sürűn fordul elő, az ephemerisek erre külön segédtáblázatokat tartalmaznak.

Időpontok átszámításánál tekintetbe veendő, hogy a csillagász a napot délkor kezdi s azt 24 órán át folytatólagosan olvassa. A közéletben (polgári időszámítás) ellenben a nap kezdetét éjfélre teszik s kétszer 12 óráig olvasnak. Ebből következik, hogy a délutáni órák jelölése mindkét módon ugyanaz, ellenben a délelőtti órákban a csillagász ember a datumban egy nappal hátra van és 12 órával többet olvas. Május 16-ika $4^h$ polgári számítás szerint május 16-ika délutáni 4 óra; ellenben május 16-ika $21^h$ annyi a polgári számítás szerint, mint május 17-iki d. e. 9 óra.

Időpontok átszámítására szolgál az ephemerisekben a napról-napra közölt csillagidő a közép délben. A csillagidő napról-napra $3^m\ 56^s.56$-czel nő, ily körülményes táblázat tehát csak a kényelem szempontjából kivánatos. Néhány példa elégséges az eljárás megvilágítására.

Mely polgári időpontnak felel meg 1891. április 17. $18^h\ 5^m\ 29^s.6$ budapesti csillagidő? E napon a déli csillagidő Greenwichben $1^h\ 41^m\ 18^s.8$, Budapesten tehát $12^s.5$ kevesebbel, vagyis $1^h\ 41^m\ 6^s.3$, és ezért $16^h\ 24^m\ 23^s.3$ csillagidő folyt el április 17-ének dele óta. Ámde a segédtáblázatok szerint

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 óra | csillagidő | = | $15^h\ 57^m\ 22^s.73$ | középidő |
| $24^m$ | „ | = | $23^m\ 56^s.07$ | „ |
| $23^s$ | „ | = | $22^s.94$ | „ |
| 0·3 | „ | = | $0^s.30$ | „ |
| | | | $16^h\ 21^m\ 42^s.04$ | |

A mondott időpont tehát csillagászati számítás szerint 1891. április 17. $16^h\ 21^m\ 42^s.0$, vagy polgári számítással: április 18. r. $4^h\ 21^m\ 42^s.0$-nak felel meg. Ha viszont ez utóbbi időpont változtatandó át csillagidőre, tudjuk, hogy ez csillagászati számítás szerint 1891. április 17. $16^h 21^m 42^s.0$ budapesti középidő. A segédtáblázatok szerint megint áll:

$$
\begin{array}{llrl}
16^h & \text{középidő} = & 16^h\ 2^m\ 37^s.70 & \text{csillagidő} \\
21^m & \quad " \quad = & 21^m\ 3^s.45 & \quad " \\
42^s.0 & \quad " \quad = & 42^s.12 & \quad " \\
\hline
 & & 16^h\ 24^m\ 23^s.27, &
\end{array}
$$

azaz csillagidőben kifejezve ennyi idő telt el a közép Nap delelése óta. Ámde e napon a csillagidő a budapesti délben $1^h 41^m 6^s.3$ s ezért a mondott idő 1891. ápr. 17. $18^h 5^m 29^s.6$-nak felel meg.

Újabban különösen tekintetbe veendő, hogy némely államban, egyebek között nálunk is a helyi idő helyett az úgynevezett zónaidőt vagy világidőt használjuk. Ez tulajdonképen nem más, mint a greenwichi idő a helyi középidőnek megfelelő teljes óraszám megtartásával. Így Budapest hosszúságkülönbsége Greenwichhez — $1^h 16^m 15^s.4$ lévén, a zónaidő egyszerűen a $16^m 15^s.4$-czel kisebbitett helyi középidővel azonos. Bár az időnek ilyetén számítása közlekedés és kereskedelem szempontjából nagyon üdvös, nem helyeselhető, hogy egyik geographiai elementumot, mint a minő a hely geographiai hosszúságára jellemző helyi középidő, egyszerűen törlünk.

## VII. FEJEZET.

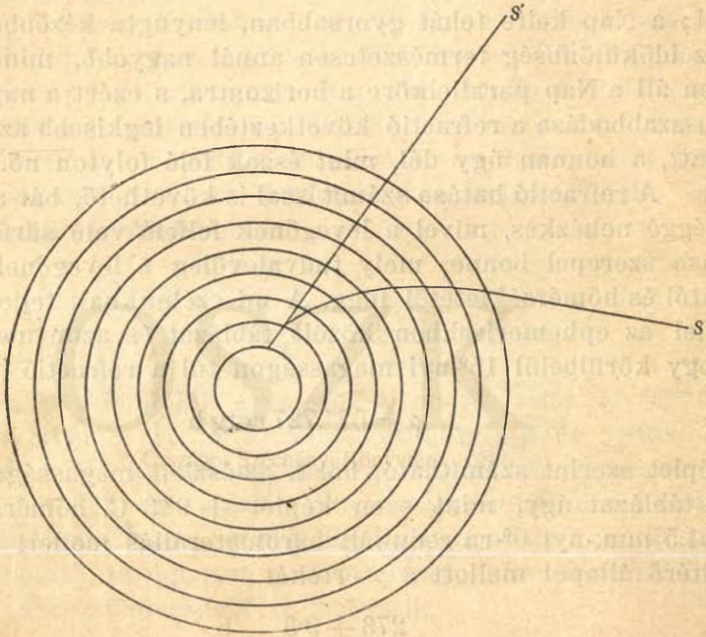
## A csillagászati megfigyelések javításai.

Az ephemerisek az égi testek helyzeteit a napi mozgástól független aequatori rendszerben adják, még pedig mint legegyszerűbb esetre, a Föld középpontjában képzelt megfigyelőre vonatkoztatva. Természetes tehát, hogy a megfigyelés adatai csak úgy válnak összehasonlíthatókká a számítással, ha előbb a szükséges javításokat tekintetbe vettük.

A fénytörő légburok, melyen át a csillagokat figyeljük, sugártörés által megváltoztatja ezek helyzeteit, a Föld véges méretei némely égi test távolságával szemben a parallaxis képében érvényesülnek, különbséget létesítvén az égi testnek a Föld felületéről és középpontjából látott helye között és a tengeren sextánssal tett mérések nem a horizontra, hanem a Föld gömbalakja miatt mélyebben fekvő szemhatárra vonatkoznak.

## A refractió.

Ha az atmospherát vékony, concentrikus gömbrétegekre bontjuk, melyeken belül a sürűség érezhetően állandónak tekinthető, akkor tüstént meggyőződünk róla, hogy valamely csillag fénye (70. ábra) a Föld felé homorú oldalát fordító utat




**70. ábra. A sugártörés a légkörben.**

ír le. És mivel a szem a fényforrást mindig az utolsó fényelem irányában keresi, kétség nincs, hogy a csillagot kivétel nélkül magasabban látjuk, mint tényleg áll.

A refractió emeli tehát a csillagokat és egyebek között láttatja őket, midőn még a horizont alatt állanak, meghoszszabbítja így a nap tartamát is és okozza a Hold és Nap elliptikus alakját, midőn ez égi testek közel állanak a horizonthoz. Természetes ugyanis, hogy a refractió mindaddig, míg a levegő sürűsége concentrikus gömbhéjakban azonosnak vehető, csak az égi testek magasságára, nem egyszersmind azimuthjára is folyik be. Ha a Nap éppen a horizonton áll, akkor alsó széle a horizontális refractió értékével, azaz 35′-czel emelkedik, míg a fél fok magasságban álló felső széle már csak 29′-czel. A nap vertikális átmérője tehát 6′-czel, azaz egész értékének $\frac{1}{5}$-ével rövidül meg, míg a vízszintes átmérő változatlan marad.

Mivel a Nap és Hold átmérője véletlenül csak kevéssel kisebb, mint a refractió a horizonton, e két égi test teljes korongja már látható, ha felső szélük is még a horizont alatt áll; a Nap kelte tehát gyorsabban, lenyugta későbben áll be. Az időkülönbség természetesen annál nagyobb, minél ferdébben áll a Nap parallelköre a horizontra, s ezért a nappal meghosszabbodása a refractió következtében legkisebb az aequator alatt, a honnan úgy dél, mint észak felé folyton nő.

A refractió hatása számítással is követhető, bár az elmélet eléggé nehézkes, mivel a levegőnek felfelé való sürűségváltozása szerepel benne, mely tudvalevőleg a levegőnek nyomásától és hőmérsékletétől függ. A mi czélunknak teljesen megfelel az ephemerisekben közölt táblázat és azon megjegyzés, hogy körülbelül $15^0$-nyi magasságon túl a refractió

$$\rho = 57''.727 \operatorname{cotg} h$$

képlet szerint számítható, hol h az észlelt magasságot jelenti. A táblázat úgy, mint ezen képlet $+9^0.3$ C. hőmérséklet és 751.5 mm.-nyi $0^0$-ra redukált barometerállás mellett érvényes. Eltérő állapot mellett a $\rho$ értékét

$$\frac{273+9{\cdot}3}{273+t}\ \frac{b}{751.5}$$

az egységhez közel álló factorral kell megszorozni, melyben t és b a megfigyelés alatt uralkodó hőmérsékletet és légnyomást jelenti. A javítás az évkönyvben közlött táblázatok segítségével még egyszerűbben eszközölhető.

Csupán csak általános áttekintés kedveért közöljük a refractió értékeinek következő rövid sorozatát:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h =$ | $0^0$ | $2^0$ | $5^0$ | $10^0$ | $20^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
| $\rho =$ | $35'$ | $18'$ | $10'$ | $5'$ | $3'$ | $2'$ | $1'$ | $0'.5$ | $0'.0$ |

a melyből megítélhetjük, mily rohamosan nő e javítás a horizont felé s mily lassan változik a zenith körül. A zenithben a refractió hatása 0, mert hiszen e helyzetben a csillag merőlegesen szeli az összes légrétegeket. Egyszersmind az is világos e táblázatból, hogy a sugártörés értéke meglehetősen változékony s ezért bizonytalan is a horizontban, s hogy ezért a csillagász lehetőség szerint kerüli a szemhatárhoz közel fekvő csillagok megfigyeléseit.

A sugártörést Kleomedes fedezte fel, a ki teljes holdfogyatkozás alkalmával, midőn a Nap, a Hold és a Föld középpontja egy egyenesben áll, a lenyugvó Napot és a felkelő Holdat egyszerre látta a horizont felett. Hasonló tüneményt említ Plinius is. A refractió a horizontban álló Holdat és Napot, mely teljes holdfogyatkozás esetében $180^0$-ra áll egymástól, több mint $1^0$-kal közelíti egymáshoz.

## A parallaxis.

Parallaxison értjük azon szöget, melyet valamely égi test középpontjából S (71. ábra) álláspontunkhoz A és a Föld középpontjához F húzott egyenes bezár, tehát egyszersmind azon szögletet, mely alatt a csillag középpontjából a Földnek álláspontunkhoz húzott sugara látszik. Ez nyilván annál kisebb, minél távolabb az égi test, s minél nagyobb a magassága.

Az AFS háromszögből következik

$$h - h' = p,$$

azaz a magassági parallaxis a geocentrumos és észlelt magasság különbsége, vagyis a Föld középpontjából észlelt magasságot megkapjuk, ha a felületen figyelt magassághoz teszszük a magassági parallaxist. Csillagászati elnevezés szerint az A észlelési helyen átmenő vízszintes sík a látszó, a Föld középpontján át vele párhuzamosan fektetett sík a valódi horizont. Ha a csillag a napi mozgás következtében A pontnak H' horizontjába jut, úgy hogy $FS = FS_1$ a csillag állandó D távolsága, akkor AFS és $AFS_1$ háromszögekből következik:

$$\frac{r}{D} = \frac{\sin p}{\cos h'} \text{ és } \frac{r}{D} = \sin \pi,$$

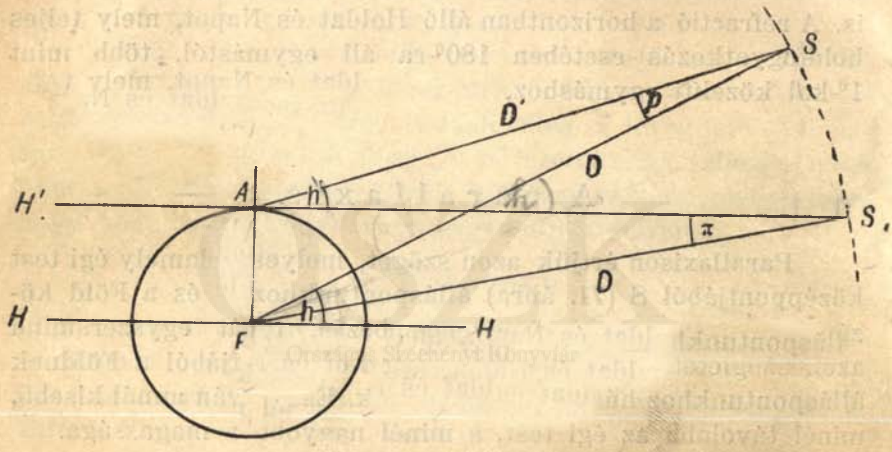
a mely egyenletek összehasonlításából:

$$\sin p = \sin \pi \cos h'.$$

Mivel a legközelebbi égi testnek, a Holdnak parallaxisa is csak közel $1^0$-ot tesz, a bolygóké s a Napé pedig alig néhány másodperczre rúg, azért a sinus az ívvel felcserélhető s lesz egyszerűbben:

$$p = \pi \cos h',$$

azaz: a magassági parallaxis a látszó magasság cosinusával arányos. Mivel $h' = o$ esetében $p = \pi$, nyilvánvaló, hogy $\pi$ az




71. ábra. Horizontális és magassági parallaxis.

illető égi test horizontális parallaxisa, egyszersmind ennek legnagyobb értéke. Ha $h' = 90^0$, azaz a csillag a zenithben áll, akkor $p = o$, mi természetes is, mert hiszen akkor a megfigyelési hely sugara ponttá rövidülve látszik.

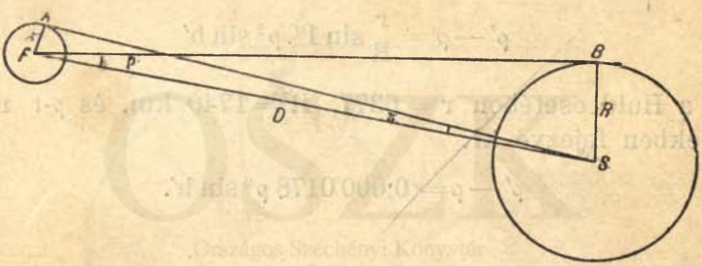
A mondottakból látnivaló, hogy a parallaxis sülyeszti az égi testeket, s hogy ezért a magassági parallaxis a megfigyelt magassághoz adandó, hogy a Föld középpontjából észlelt magasságot nyerjük.

A közelebbi égi testeknél, különösen a Holdnál, a Földnek sphaeroid alakja már érezhető befolyást gyakorol s ezért nem is közömbös, minő sugárra vonatkoztatjuk a horizontális parallaxisát. Mindig a Föld aequatorsugarát választjuk s ezért teljesebben a horizontális aequatori parallaxisról szólunk.

Mivel a parallaxis a látszó földsugár valamely égi testből nézve, úgy ezen égi test látszó sugara is, mint a reá vonatkoztatott földparallaxis fogható fel s ezért valamely bolygó parallaxisa úgy áll látszó sugarához, mint a Föld lineáris sugara e bolygó lineáris sugarához, a mi a 72. ábra AFS és BFS háromszögeiből tüstént egyenesen is levezethető, ha bennök a parallaxisok sinusai helyébe ismét az íveket teszszük. Egyenletben:

$$\frac{\pi}{\rho} = \frac{r}{R}.$$

A parallaxis következtében a Hold látszó sugara is nagyobbnak látszik, mint ha a Föld középpontjából figyelnők.




72. ábra A parallaxis és látszó sugár viszonya.

A többi bolygónál és a Napnál e befolyás teljesen érezhetetlen. Kiszámítására felhasználhatjuk a 71. ábrát és azon tételt, hogy a látszó sugarak visszás arányban állanak a távolságokkal. Ha tehát a Hold látszó sugara A-ból és F-ből nézve illetve $\rho'$ és $\rho$, akkor

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{D}{D'}.$$

Ámde AFS háromszögből következik a sinustétel alapján:

$$\frac{r}{D} = \frac{\sin p}{\cos h'} \text{ és } \frac{r}{D'} = \frac{\sin p}{\cos(h' + p)}$$

és ennélfogva:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\cos h'}{\cos(h' + p)}$$

vagy maga a sugárrövidülés, ha ezen egyenlet mindkét oldaláról az egységet levonjuk:

$$\frac{\rho' - \rho}{\rho} = \frac{\cos h' - \cos(h' + p)}{\cos(h' + p)} = \frac{\cos h' - \cos h' \cos p + \sin p \sin h'}{\cos(h' + p)}.$$

Ha ismét $\sin p$ helyébe $p \sin 1''$-et írunk s $\cos p = 1$ teszünk, a mi a parallaxis kicsiny volta mellett megengedett, továbbá a nevezőben a tetemes $h'$ mellett $p$-t elhanyagoljuk, lesz:

$$\rho' - \rho = \rho\, p \sin 1'' \frac{\sin h'}{\cos h'} = \rho\, \pi \sin 1'' \sin h'.$$

Ha még $\pi$ helyébe $\frac{r}{R}\rho$-t teszünk, hogy csupán csak egy, a távolságtól függő elemünk legyen $\pi$ és $\rho$ helyett, lesz:

$$\rho' - \rho = \frac{r}{R} \sin 1''. \rho^2 \sin h'$$

vagy a Hold esetében $r = 6377$, $R = 1740$ km. és $\rho$-t másodperczekben fejezve ki:

$$\rho' - \rho = 0{\cdot}000\,0178\, \rho^2 \sin h'.$$

## A szemhatár depressiója.

Ha — mint tengeren szokás — az égi testek magasságát nem a horizontra vonatkoztatjuk, hanem a szemhatárra, akkor újabb correctió lép fel a Föld görbültsége miatt.

Legyen (73. ábra) F ismét a Föld középpontja és A valamely észlelő, mely a Föld felülete felett m magasságban áll. Ennek horizontja a gömbalakú Földön AH, míg szemhatára a B-n átmenő és C pólussal bíró parallelkör, a mennyiben ebben a látósugarakból képezett körkúp a Földet érinti, Földet és eget tehát egymástól elválasztani látszik. Mivel gömbalakú Földön BFA és BAH szögletek szárai egymásra kölcsönösen merőlegesen állanak, a $\varphi$ szöglet s így a szemhatár mélysége a horizont alatt vagy depressiója a Föld középpontjában is képződik és írhatunk ABF háromszögből:

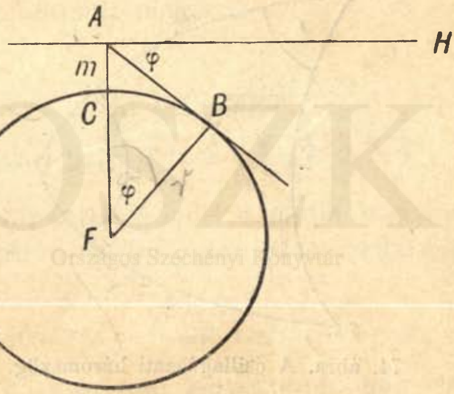
$$\frac{r}{r + m} = \cos \varphi,$$

mely egyenlet azonban $\varphi$ kicsinysége miatt gyakorlatilag nem használható. Ha ellenben az egyenletet m szerint megoldjuk, lesz

$$m = r \frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi} = 2r \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$\varphi$ a legtöbb esetben alig egynéhány percz és ezért a nevezőben $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ az egységet nagyon megközelítő $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ mellett elhanyagolható, úgy hogy

$$\tang^2\frac{\varphi}{2} = \frac{m}{2r}$$




73. ábra. A láthatár depressiója.

marad és ez is tekintettel $\varphi$ kicsinységére

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{2r \sin 1''}} \sqrt{m}$$

alakban írható. Mivel $r = 6\,370\,000$ és $\frac{1}{\sin 1''} = 206\,265$, lesz

$$\varphi = 115''.58 \sqrt{m},$$

ha m méterekben van kifejezve. A levegő sugártörése miatt ebből értékének $\frac{1}{14\cdot 8}$-dát szokás levonni, s marad:

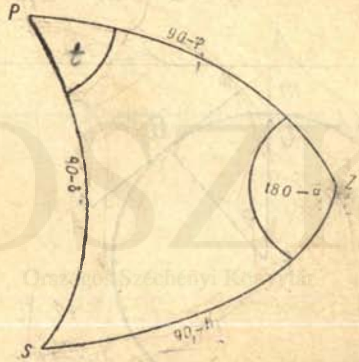
$$\varphi = 107''.8 \sqrt{m},$$

úgy hogy a szemhatár 1′ 48″-czel fekszik a horizont alatt, ha szemünk egy méternyire foglal állást a Föld felülete fölött. A horizontdepresszióra vonatkozó táblázatok is bennfoglaltatnak az ephemerida-gyűjteményekben.

## VIII. FEJEZET.

## A csillagászati háromszög.

Valamely csillagon, a póluson s a megfigyelő hely zenithjén át három legnagyobb kör ívei fektethetők; ezáltal azon gömbi háromszöget nyerjük, mely minden az idő- és hely-




74. ábra. A csillagászati háromszög.

meghatározást illető feladatok megoldására használható. E háromszög része azon ábrának, mely a horizontális és aequatori coordinátarendszer egyesítéséből keletkezett. Benne PZ a megfigyelési hely meridiánjának egy íve, mely nyilván az aequatormagassággal egyenlő; hiszen a pólus a geographiai szélességgel egyenlő ívvel, a zenith pedig 90°-kal fekszik a horizont felett. PS a csillag óraköre vagy declinatióköre és szorosabban a csillag pólustávola, tehát $90^0 - \delta$. E két ívnek a pólusnál képzett szöglete a csillag órakörének távolsága az első meridiántól, tehát a csillag óraszöglete. SZ a csillagon átmenő magassági kör s közelebbről a csillag zenithtávolsága vagy $90^0 - h$; szöglete, melyet a meridián déli oldalával nyugot felé bezár az azimuth, úgy hogy SZP szöglet $180^0$-a. Az S-nél lévő szöglet pedig, mely csak tisztán csillagászati feladatoknál szerepel, a parallaktikus szög nevét viseli.

E háromszög fontos voltát tüstént beláthatjuk, ha jellemző tulajdonságaira figyelünk; benne ugyanis három lényegesen különböző darab fordul elő. Az óraszög a csillagidő és rectascensió különbsége lévén, világos, hogy egyrészt a folyó időt, a hely hosszúságkülönbségét egy kiindulási hely idejéhez és a csillag rectascensióját tartalmazza. PZ ív nagysága tisztán a megfigyelési hely geographiai szélességétől, PS csupán a csillag helyzetétől függ. A magasság és azimuth pedig a közvetlen megfigyelésnek hozzáférhető adatok, melyek — mint ismeretes — úgy a hely fekvésével, mint az idővel változók. E háromszög trigonometriai megoldása tehát módot nyujt arra, hogy kevés adat lemérésével vagy az időt, vagy észlelési helyünk fekvését állapítsuk meg.

## IX. FEJEZET.

## Időmeghatározás.

Kiindulásunk pontját képezi a gömbi háromszögtan oldalcosinustétele, mely a csillagászati háromszögre alkalmazva a következő alakú:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$

Mindenekelőtt meg kell jegyeznünk, hogy ha h'-val jelöljük a megfigyelt magasságot, álland:

$$h = h' - \rho + p - d,$$

hol $\rho$ a refractió, p a magassági parallaxis, mely a Hold esetében tetemes, 1°-ra is rúghat, a Napnál maximumban 9″, az állócsillagoknál azonban teljesen 0; d végre a horizont-depressió, mely csak akkor jöhetne tekintetbe, ha sextánssal mértük volna a magasságot, még pedig nem a horizontra, hanem az ég és Föld érintkezési vonalára vonatkozólag.

A fenti egyenlet egyszersmind a napi mozgás minden jelenségéről adhat számot. A meridián előtti és utáni egyenlő óraszögek számára t ugyanaz, de ellentett előjelű; cos t tehát ugyanaz s ebből következik, hogy sin h vagy h is ugyanaz.

Egyenlő időkkel a delelés előtt s után a csillag ugyanazon magassággal bír. Mivel továbbá a sinustétel szerint

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\cos \delta}{\cos h},$$

következik, hogy ugyanez óraszögekhez egyenlő, de ellentett jelű azimuthok tartoznak. A meridián tehát a napi mozgást két teljesen symmetrikus félre bontja, feltéve, hogy időközben az égi test declinatiója észrevehetőleg nem módosul. Ez utóbbi eset az állócsillagoknál szigorúan áll ugyan, de a Nap és különösen a Hold esetében már csak közelítésben. E két megjegyzés fontos az úgynevezett megfelelkező (correspondeáló) magasságok s azimuthok módszerére nézve.

Az égi test delelési magassága szintén könnyen kiszámítható; ha ugyanis $t = o$, akkor

$$\sin h_0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos(\varphi - \delta), \text{ a miből}$$
$$h_0 = 90^0 - \varphi + \delta,$$

vagyis az aequator-magasság és a declinatió összegével egyenlő, mi természetes is, mert hiszen a delelés pillanatában a meridián egyszersmind a csillag vertikális köre is. A delelési magasság természetesen nagyobb, mint bármely más időben elért magasság. Az alsó delelésnél elért magasság esetében $t = 180^0$ teendő; ennek értéke

$$h_1 = 90^0 - \varphi - \delta$$

a horizont alatt, s érthetővé teszi, hogy a horizont felett magasan álló nyári nap éjjel csak kevéssel sülyed a horizont alá, úgy hogy már aránylag kis szélesség mellett egész éjjel tartó szürkületünk van.

A csillag felkel, ha a refractiótól egyelőre eltekintve, magassága 0. Ha a keltének vagy nyugtának megfelelő óraszöget, mely nyilván a csillag kelte és delelése, vagy delelése és nyugta közötti időtartam, tehát a nappali félív, $t_0$-lal jelöljük, lesz első képletünkben $\sin h = o$ téve

$$\cos t_0 = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta,$$

vagy másképen írva

$$\cos(180^0 - t_0) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

Ezen óraszög tehát tisztán a csillag s a megfigyelő helyzetétől függ. Valós értéket kapunk számára, ha tekintettel arra, hogy cosinus $t_0$ maximum értéke 1,

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta \leqq 1,$$

vagy másképen írva

$$\operatorname{tg}\varphi \leqq \operatorname{tg}(90^0 - \delta), \quad \varphi + \delta \leqq 90^0.$$

Mindazon helyek és csillagok, melyek számára $\varphi + \delta = 90^0$ circumpolárisak; ha $\varphi + \delta > 90^0$, akkor a csillag e helyen többé sem nem kel, sem nem nyugszik, hanem vagy mindig látható, vagy ellenkezőleg mindig a horizont alatt marad. Ha $\varphi = 0$, tehát az aequator alatt, $\cos t_0 = 0$, $t_0 = 90^0 = 6^h$, minden csillag kivétel nélkül $6^h$-val meridiánátmenetele előtt kel és ugyanannyival delelése után nyugszik, azaz $12^h$-ig látható. Éppen úgy bármely helyen az aequatori csillagok ($\delta = 0^0$) nappali íve $12^h$. Innen van, hogy a tavaszi és őszi napéjegyenlőség pontjában álló Nap a nappalt és éjjelt az egész Földön egyenlővé teszi.

A felsorolt egyenletekben t-nek összefüggése a folyó idővel más-más, a szerint, a mint égi testünk valamely állócsillag, vagy pedig a Nap. Az állócsillag óraszöge

$$t = \theta - \alpha$$

ismeretes rectascensiójával együtt közvetlenül a csillagidőt adja, míg a Nap óraszöge egyenesen a valódi napi idővel azonos. Ha tehát a fél napi ívet az állócsillag rectascensiójából levonjuk vagy hozzáteszszük, nyerjük a kelte vagy lenyugta csillagidejét, s ha a Nap félnapi ívét $12^h$-hoz teszszük vagy ebből levonjuk, kapjuk a napnyugot vagy napkelet valódi idejét, mely az időegyenlítés hozzátevése mellett e két időpillanat középidejét szolgáltatja.

A félnapi ívre vonatkozó egyenlet természetesen más feladatok megoldására is alkalmazható; kérdezhetjük, mily parallelkör alatt tart a nappal bizonyos számú óráig, valamint azt is, hogy adott helyen mily napon $2\,t_0$ tartamú a nappal hossza. Utóbbi esetben a képlet a Nap declinatióját adja, melyből az ephemerisek segítségével e declinatióhoz tartozó két nap kikereshető.

Mivel a Nap declinatiója változó, az ephemerisek ellenben annak csak délre szóló értékét adják, a declinatiót a kelet vagy lenyugvás pillanatára interpolálni kellene, mi természetesen e pillanat előzetes ismerete nélkül nem lehetséges. De egész jó eredményt kapunk, ha a kelte vagy nyugta pillanatát durván becsüljük és az erre interpolált declinatióval számítjuk a fél nappali ívet. Ugyanígy járunk el a Holdnál; de mivel ennek declinatióváltozása tetemes, az első számítás eredményét arra használjuk fel, hogy a horizontban álló Hold declinatióját pontosan interpolálhassuk. Ha a feltevéses és számított felkelés és nyugvás között túlságos nagy különbség mutatkoznék, a számítást újra interpolált declinatióval ismételhetjük.

Ha adott helyen gyakran ismétlődik az efféle számítás, akkor legjobban számítunk $\delta$ argumentummal táblázatot, mely közvetlenül $t_0$-t adhatja. Mivel az év lefolyása alatt a Nap declinatiója $-23^0\,28'$ és $+23^0\,28'$ között váltakozik — a két szélsőség tudvalevőleg a legrövidebb és leghosszabb napnak felel meg — képletünk egyszersmind a nappalok váltakozó hosszáról is adhat felvilágosítást az év különböző szakaiban s különböző övekben fekvő helyekre vonatkozólag.

Nagyon természetes, hogy a Nap csekély napi declinatióváltozásától eltekintve, a délelőtt tartama ugyanaz, mint a délutáné. A kalendáriumi adatok ennek látszólag ellent mondanak. A különbség onnan ered, hogy a Nap delelése nem esik össze a középidő szerint számított déllel. Mivel a kelet és nyugvás pillanatában az időegyenlítés ellentetten járul a fél napi ívhez, természetes, hogy a látszólagos különbség délelőtt és délután között az időegyenlítés értékének kétszeresére, tehát fél órára is rúghat.

A Nap és Hold keltét azonban a refractió sietteti, nyugvását késlelteti. Az állócsillagoknál, melyek fénye a horizonton még gyenge, e körülmény fontosabb befolyással nem bir. A mondott két égi test középpontja tehát megjelenik már a horizonton, ha tényleg még a horizontális refractió értékével, 35′-czel a horizont alatt állanak, azaz, midőn magasságuk még csak $-35'$. Tulajdonképeni fél napi ívük tehát a teljesebb

$$\cos t_0 = -\frac{0{\cdot}01018}{\cos\varphi\,\cos\delta} - \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta$$

képlettel számítandó. A refractióra eső időkülönbség azonban könnyen közvetlenül is számítható. Ha ugyanis $t_0$ a fenti képlet szerint számított fél napi ív, $\triangle t$ annak meghosszabbodása a refractió folytán, akkor áll:

$$-\sin 35' = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(t_0 + \triangle t)$$

és mint előbb is

$$o = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_0.$$

Levonás által

$$\cos\varphi \cos\delta\,[\cos t_0 \cos\triangle t - \sin t_0 \sin\triangle t - \cos t_0] = -\sin 35',$$

vagy mivel $\triangle t$ oly kicsiny, hogy cosinusa az egységgel, sinusa pedig ívével cserélhető fel:

$$\triangle t = \frac{35'}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0}.$$

De 35′ időben kifejezve $\frac{35^m}{15} = 2^m\,20^s$ és ezért

$$\triangle t = \frac{140^s}{\sin t_0 \cos\varphi \cos\delta}.$$

E javítás tehát nagyobbodó geographiai szélességgel igen gyorsan nő. Az aequator alatt a napéjegyenlőség alkalmával a refractió tehát $4^m\,40^s$-val hosszabbítja meg a Nap tartamát.

Ha végül nem a Nap vagy Hold középpontjának, hanem felső szélének keressük a horizonton való megjelenését, akkor akár ez utolsó közelítő, akár a teljes egyenletben 35′ helyett $35' + \rho$ irandó, hol $\rho$ a Nap vagy Hold sugarát jelenti.

A kelet és nyugvás helyét az azimuth szabja meg. A 74. abrából következik ugyanak a cosinustétel alapján:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a,$$

vagy a horizontban, midőn $h = o$:

$$\cos a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Ha a Nap az aequatorban mozogna, $\delta =$ állandóan 0 volna, akkor $a = 90^0$ vagy $270^0$ lenne, azaz a Nap mindig keleten kelne, pontosan nyugoton nyugodna. Keltének és nyugvásának tényleges helyeit a kelet és nyugot ponttól észak felé positive olvasva, a reggeli és esti tágasságnak szokás nevezni. Ha ezt A-val jelöljük, akkor a reggeli és esti tágasság számára illetve áll:

$$a = 90^0 + A \text{ és } a = 270^0 - A,$$

vagy közösen:

$$\sin A = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

A nyári félévben $\delta$ positiv, tehát a Nap északra a keletnyugot vonaltól áll a horizonton, télen délre tőle. A legnagyobb tágasság a leghosszabb és legrövidebb napon áll be, úgy hogy a Nap deczember 21-én ugyanannyival áll délre a horizont e két pontjától, mint a mennyivel áll északra június 22-én. E tágasság azonkívül a geographiai szélesség nagyobb voltával gyorsan nő, az aequator alatt azonban mindig a Nap declinatiójával azonos marad.

Meddig tartott a nap Budapesten 1891 május 10-én és a horizont mely pontján kelt és nyugodott a Nap?

A közép greenwichi délben a Nap declinatiója e napon $\delta = +17^0\,37'\,20'' + 38''.9$ órai változással. Mivel a Nap körülbelül e napon r $4^h\,30^m$-kor kel és Budapest $1^h\,16^m$-val keletre fekszik, a declinatió $5^h\,46^m$-val előbbre interpolálandó. $\delta_k = +17^0\,37'\,20'' - 3'\,46'' = 17^0\,34'.6$. Az időegyenlítés a greenwichi közép délben $g = -3^m\,43^s.9 - 0^s.09$ órai változással, tehát napkeltekor $g_k = -3^m\,43^s.4$. Hasonlóképen napnyugtakor, mely körülbelül $7^h\,30^m$-kor áll be, ezen mennyiségek $6^h\,14^m$-val későbbre interpolálandók, úgy hogy $\delta_n = +17^0\,37'\,20'' + 4'\,1'' = +17^0\,41'.4$ és $g_n = -3^m\,43^s.9 - 0^s.6 = 3^m\,44^s.5$.

| | | |
|---|---|---|
| $\log tg\,\varphi = 0{\cdot}0378$ | $\lg tang\,\varphi = 0{\cdot}0378$ | $\log \sin \delta_k = 9{\cdot}4799$ |
| $\log tg\,\delta_k = 9{\cdot}5007$ | $\log tg\,\delta_n = 9{\cdot}5037$ | $\lg \cos \varphi = 9{\cdot}8297$ |
| $\log \cos (180^0\text{-}t) = 9{\cdot}5385$ | $9{\cdot}5415$ | $\lg \sin A_k = 9{\cdot}6502$ |

$$\lg \sin \delta_n = 9{\cdot}4827$$
$$\lg \cos \varphi = 9{\cdot}8297$$
$$\lg \sin A_n = 9{\cdot}6530$$

$180^0 - t_k = 69^0\,47'.1$; $180^0 - t_n = 69^0\,38'.2$; $A_k = 26^0\,32'.7$; $A_n = 26^0\,43'.6$

$$t_k = 110^0\,12'.9 \qquad t_n = 110^0\,21'.8$$
$$t_k = -\,7^h\,20^m\,51^s.6 \qquad +\,7^h\,21^m\,27.2$$
$$g_k = \quad -\,3^m\,43^s.4 \qquad g_n = \quad -\,3^m\,44^s.5$$
$$t_k + g_k = -\,7^h\,24^m\,35^s;\; t_n + g_n + 7^h\,17^m\,43^s.$$

A Nap tehát reggel $4^h\,35^m\,25^s$-kor kel és este $7^h\,17^m\,43^s$-kor nyugszik a horizont oly pontján, mely $26^0\,33'$-czel, illetve $26^0\,44'$-czel fekszik a kelet és nyugot ponttól északra.

$$\begin{aligned}
\lg \sin t_0 &= 9{\cdot}9722\\
\lg \cos \varphi &= 9{\cdot}8297\\
\lg \cos \delta &= 9{\cdot}9791\\
\hline
&\phantom{=}\ 9{\cdot}7810\\
\lg 140 &= 2{\cdot}1461\\
\hline
\lg \triangle t &= 2{\cdot}4651
\end{aligned}$$

$$\triangle t = 292^s = 4^m\,52^s.$$

A declinatió és óraszög közepével számítva azt találjuk, hogy a napkelte a refractió miatt $4^m\,52^s$-val korábban lép be, a nyugta ugyanannyival késleltetik.

A napi mozgásnak még egy lényeges mozzanata, mely mint látni fogjuk, gyakorlati jelentőséggel is bír, azon pillanat, melyben az égi test az első vertikálisba, vagyis a kelet-nyugot vonalba jut. Ez esetben $a = 90^0$ vagy $270^0$, és ezért a 74. ábrából a cotangenstétel értelmében:

$$\operatorname{tang} \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t - \sin t \operatorname{cotg} a,$$

mely jelen esetben $\operatorname{cotg} a = o$ értékkel

$$\cos t' = \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \varphi$$

egyenlettel adja a $t'$ óraszöget, melyben az égi test az első vertikálisba jut. Reális értéket $t'$ számára csak akkor kaphatunk, ha $\delta < \varphi$. Ha $\delta = \varphi$ volna, akkor a csillag természetesen a megfigyelő zenithjébe jut és ha $\delta > \varphi$, akkor az úgynevezett stationáló azimuthba kerül. Ennek feltétele, hogy az S-nél lévő szöglet (74. ábra) $90^0$ legyen; az ily módon derékszögű lett háromszögből következik:

$$\cos t'' = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \delta.$$

A Nap tehát csak a forró övön belül jut stationáló azimuthba és ez övön kívül az első vertikálisba.

Ha valamely égi testnek magasságát megmértük s ezt részint a műszer, részint az álláspontunkból folyó javításokkal elláttuk, akkor az időmeghatározás a

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

egyenlet megoldásával azonos. Legczélszerűbb ez egyenletet adott könnyen megtartható alakjában megtartani és összeg vagy különbségi logarithmusokkal számolni. Ha mindazonáltal valaki a közvetlen logarithmusos számításra alkalmasabb alakot kedvelné, levonjuk az egyenletet az egységből; ez által

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos \varphi \cos \delta - \sin h + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Ha most, mint előbb is

$$h_0 = 90^0 - \varphi + \delta$$

-vel jelöljük a delelési magasságot, akkor egyszerűbben

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\sin h_0 - \sin h}{\cos \varphi \cos \delta}$$

vagy ismeretes goniometriai egyenletek felhasználásával

$$\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(h_0 - h) \cos \frac{1}{2}(h_0 + h)}{\cos \varphi \cos \delta}}.$$

A négyzetgyök két jele közül természetesen a positiv a delelés utáni, a negativ a delelés előtti óraszögekre vonatkozik és ugyane megfontolás mérvadó az eredeti egyenlet számára, melyben $\cos t$ szintén úgy positiv, mint negativ óraszöghöz tartozhatik.

Jordán 1873. decz. 26-án Nekeb szálláson, a libyai sivatagban Aldebaran ($\alpha$ Tauri) csillag magasságát mérte meg theodolittal. A távcső átfektetése előtt és után tett megfigyelések közepe, mely ment a zenithpont hibás fekvésétől:

$$h = 46^0\,44'\,1'' \quad t = 6^h\,5^m\,51^s.5 \text{ óraidőkor (középidő)},$$

léghőmérséklet $= +10^0$ C.; barometer $= 740$ mm. Ez adatokkal a refractió (Nautisches Jahrbuch, tábla VII., VIII. és IX.) $54'' - 0 - 1'' = 53''$, tehát az igazi magasság $h = 46^0 44' 1'' - 53'' = 46^0 43' 8''$.

A geographiai szélesség előzetes meghatározás szerint $\varphi = 27^0 15' 24''$; a hosszúság az útnapló szerint közelítve $1^h$ $56^m$ E. Greenw.

E nap számára a Naut. Jahrb. szerint $\alpha = 4^h 28^m 41^s.9$, $\delta = +16^0 15' 20''$ és a csillagidő a közép greenwichi délben $\theta_0 = 18^h 20^m 12^s.7$, a megfigyelés helyén $\frac{1^h 56^m}{24^h} \times 3^m 56^s$-vel kevesebb.

$$\begin{aligned} \log\sin h &= 9{\cdot}8621 & \lg\sin\varphi &= 9{\cdot}6609 \\ \text{subtract} &= 0{\cdot}0842 & \lg\sin\delta &= \underline{9{\cdot}4470} \\ & & \lg(\sin\varphi\ \sin\delta) &= 9{\cdot}1079 \end{aligned} \qquad \lg\frac{\sin\varphi\ \sin\delta}{\sin h} = \lg x = 9{\cdot}2458$$

$$\begin{aligned} \lg(\sin h - \sin\varphi\ \sin\delta) &= 9{\cdot}7779 & \log\cos\varphi &= 9{\cdot}9489 \\ \lg(\cos\varphi\ \cos\delta) &= \underline{9{\cdot}9312} & \lg\cos\delta &= \underline{9{\cdot}9823} \\ \lg\cos t &= 9{\cdot}8467 & \lg(\cos\varphi\ \cos\delta &= 9{\cdot}9312 \end{aligned}$$

$t = -45^0 21'.7 = -3^h 1^m 26^s.8$, miután a megfigyelés a meridián előtt történt.

$$\begin{aligned} \alpha &= \phantom{-}4^h\ 28^m\ 41^s.9 \\ t &= \underline{-3^h\ \ 1^m\ 26^s.8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{helyi csill. idő} = \theta &= \phantom{1}1^h\ 27^m\ 15^s.1 \\ \text{csill. idő délben} = \theta_0 &= \underline{18^h\ 19^m\ 53^s{\cdot}7} \\ \text{dél óta elfolyt csill. idő} &= \phantom{1}7^h\ \ 7^m\ 21^s.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^h \text{ csill. i.} &= 6^h\ 58^m\ 51^s.19 \text{ kp. idő.} \\ 7^m \quad ,, &= \phantom{6^h}\ 6^m\ 58^s.85 \quad ,, \\ 21^s.4 \ ,, &= \underline{\phantom{6^h\ 6^m}\ 21^s.34 \quad ,,} \\ t &= 7^h\ \ 6^m\ 11^s.4 \text{ kp. idő.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{chronom} &= \underline{6^h\ \ 5^m\ 51^s.5} \\ \triangle t &= +1^h\ \ 0^m\ 19^s.9 \end{aligned}$$

A chronometer tehát $1^h\ 0^m\ 20^s$-val késik.

Hogy az átalakított képletre is legyen példánk, vegyük a következőt: 1882. okt. 25-én Bahia-Blancán, a Vénus átvonulási expeditió állomásán sextánssal és mesterséges horizonttal délelőtt

$10^h\,35^m\,19^s.6$, $10^h\,37^m\,47^s.2$, $10^h\,40^m\,38^s.8$, $10^h\,43^m\,8^s.8$

chronom. időkor észlelték felváltva a Nap alsó és felső szélének érintkezését a következő

$73^0\,0'\,0''$ $75^0\,0'\,0''$ $75^0\,0'\,0''$ $77^0\,0'\,0''$

magasságokban. A magassági kerek számok azt mutatják, hogy megvárták az időt, melyben a szélek az előzetesen beállított sextáns távcsőben érintkeztek; a chronometer csillagidőt mutatott és állása körülbelül $-\,5^m\,20^s$ volt. A sextáns indexjavítása $-\,2'\,28''.3$, a Nap sugara $15'\,57''.5$, a Nap parallaxisa $8''.9$.

Mivel $\varphi = -\,38^0\,42'\,50''$ és $\lambda = 4^h\,9^m\,13^s$ WGreenw. a Nap declinatiója ($-\,12^0\,10'\,17''.8$ közép greenw. délben) a megfigyelés helyére és idejére átszámítva: $\delta = -\,12^0\,10'\,41''.8$. Ugyancsak a déli csillagidő Greenwichben $\theta_0 = 14^h\,15^m\,6^s.0$, tehát Bahia-Blancában: $\frac{4^h\,9^m\,13^s}{24^h} \times 3^m\,56^s.6 = 40^s.9$-czel nagyobb, vagyis: $\theta_0 = 14^h\,15^m\,46^s.9$. Ugyancsak az időegyenlítés a megfigyelési hely és időre: $g = -\,15^m\,50^s.9$.

A négy magasság közepe $75^0\,0'\,0''$ megfelel a négy idő közepének: $10^h\,39^m\,13^s.8$. Az indexjavítás tekintetbevétele mellett a kétszeres magasság: $74^0\,57'\,31''.7$, vagy annak fele, azaz a Nap középpontjának magassága: $37^0\,28'\,45''.9$. (Ha az egyes adatokat számítanók ki, akkor az első és harmadik megfigyeléshez a napsugarat hozzá kellene adni, a második és negyedikből ezt le kellene vonni, mert emezek a felső, amazok az alsó szélre vonatkoznak). A refractió $-\,1'\,14''.9$. Tehát

$$h = 37^0\,28'\,45''.9 - 1'\,14''.9 + 8''.9 = 37^0\,27'\,40''.$$

A delelési magasság (déli félteke):

$$h_0 = 90^0 - 38^0\,42'\,50'' + 12^0\,10'\,42'', \text{ vagy}$$

$$\begin{aligned} h_0 &= 63^0\,27'\,52'' \\ h &= 37^0\,27'\,40'' \\ \hline \tfrac{1}{2}(h_0 - h) &= 13^0\,\,0'\,\,6'' \\ \tfrac{1}{2}(h_0 + h) &= 50^0\,27'\,46'' \end{aligned}$$

$$\lg \sin \tfrac{1}{2}(h_0 - h) = 9{\cdot}3522 \qquad \lg \cos \varphi = 9{\cdot}8922$$
$$\lg \cos \tfrac{1}{2}(h_0 + h) = \underline{9{\cdot}8038} \qquad \lg \cos \delta = \underline{9{\cdot}9901}$$
$$9{\cdot}1560 \qquad\qquad 9{\cdot}8823$$

$$2 \lg \sin \frac{t}{2} = 9{\cdot}2737$$

$$\lg \sin \frac{t}{2} = 9{\cdot}6369$$

$$\frac{t}{2} = 25^0\ 41'.0,$$

a miből $t = 51^0\,22'.0$ vagy $-3^h\,25^m\,28^s.0$, mivel a megfigyelés délelőtt történt. Hozzá téve még $g = -15^m\,50^s.9$, az időegyenlítést, lesz:

$$t = -3^h\,41^m\,19^s \text{ kp. idő.}$$

Mivel a megfigyelt óra csillagidőt mutatott, ezt át kell változtatni csillagidővé.

$$\begin{array}{rcl}
3^h & = & 3^h\ 0^m\,29^s.57 \text{ csill. idő} \\
41^m & = & 41^m\ 6^s.74 \\
19^s & = & \underline{19^s.05} \\
 & - & 3^h\,41^m\,55^s.36 \\
\theta_0 & = & \underline{14^h\,15^m\,46^s.9} \\
\theta & = & 10^h\,33^m\,51^s.5 \\
\text{chron.:} & & \underline{10^h\,39^m\,13^s.8} \\
\triangle t & = & -5^m\,22^s.3
\end{array}$$

A chronometer tehát $5^m\,22^s$-val sietett. A közép- és csillagidőnek egymásba való átváltozása természetesen elesik, ha a csillagokat csillagóra, a Napot középidő szerint járó óra szerint figyeltük volna meg.

Természetes, hogy az időmeghatározás annál pontosabb leend, minél gyorsabban változtatja a csillag magasságát. Egyenlő viszonyok között tehát lehetőleg az aequatorhoz közel álló csillagokat fogunk választani és azokat is oly állásokban, melyekben nappali ívüknek a vertikális körre való vetülete lehetőleg nagy. Számítás, de némi gondolkodás útján is könynyen beláthatjuk, hogy ez az első vertikálisban történik, a midőn a csillag tehát a kelet-nyugot vonalat méri át. Ez esetben — s ez a módszernek különösen utazásoknál való főelőnye — a hely geographiai szélességének netalán nem pontos ismerete teljesen befolyás nélkül marad.

Hogy ezt belássuk, keressük a

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \varphi \cos \delta} - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$$

egyenletből t változását $\triangle t$, ha $\varphi : \triangle\varphi$-vel változik. Az új egyenlet

$$\cos (t + \triangle t) = \frac{\sin h}{\cos (\varphi + \triangle\varphi) \cos \delta} - \operatorname{tang} (\varphi + \triangle\varphi) \operatorname{tang} \delta.$$

A két egyenlet különbsége ad, ha $\triangle t$ és $\triangle\varphi$ mennyiségeket oly kicsinyeknek tekintjük, hogy $\cos \triangle t = 1$, $\cos \triangle\varphi = 1$, $\sin \triangle t = \triangle t$, $\sin \triangle\varphi = \triangle\varphi$ írható s ezek magasabb hatványai elhanyagolhatók:

$$-\triangle t \sin t = \left[\frac{\sin h \sin \varphi}{\cos^2 \varphi \cos \delta} - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos^2 \varphi}\right] \triangle\varphi.$$

Ámde a sinustétel és cosinustétel szerint:

$$\cos \delta \sin t = \sin a \cos h$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a,$$

a miket a $\triangle t$ egyenletébe téve, lesz:

$$-\triangle t . \sin a \cos h = \left[\sin h \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a}{\cos^2 \varphi}\right] \triangle\varphi$$

vagy

$$\triangle t = -\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \varphi} \triangle\varphi$$

vagy ha $\triangle\varphi$ ívmásodperczekben és $\triangle t$ időmásodperczekben van kifejezve:

$$\triangle t = -\frac{1}{15} \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \varphi} \triangle\varphi^{('')}.$$

Ha tehát $a = 90^0$ vagy $a = 270^0$, azaz az első vertikálisban $\triangle\varphi$ bármily (véges és < 5° nagy legyen is, $\triangle t = 0$, azaz az időmeghatározás a geographiai szélesség hibás ismerete mellett is hibátlan leend.

A meridián szomszédságában a parallelkör ellenben kis darabon párhuzamosan halad a horizonttal, tehát magasságváltozás a delelés körül nincs, s ezért a delelés körüli idő magasságból való időmeghatározás czéljából teljességgel kerülendő.

Az általános képlet a csillag declinátióját és a hely geographiai szélességének pontos ismeretét tételezi fel; a hosszúságra csak igen hozzávetőleges adat kell, a mennyiben ez csupán az ephemerisekből felkeresendő declinatió, az időegyenlítésnek vagy déli csillagidőnek interpolatiójára szükséges. Ha a geographiai szélesség teljességgel ismeretlen volna, akkor ezt vagy külön — később bemutatandó — módszerek szerint kellene meghatározni, vagy az időmeghatározás egy más, ettől független módját, a felelkező magasságok módszerét választani. Ha ellenben a geographiai szélességet legalább hozzávetőleg ismerjük, akkor az időmeghatározás képlete kétszer írható fel: egyszer oly csillag számára, mely közel áll az első vertikálishoz, másodszor közel delelő égi test számára. A két egyenletnek két ismeretlennel való megoldása különösen akkor lesz egyszerű, ha a helyi idő és geographiai szélesség közelített értékeinek $\triangle t$ és $\triangle \varphi$ javításait keressük.

Az óraszögre mondottak folytán, mint láttuk, különbség leend a végleges számításban, ha a Nap, vagy valamely állócsillag magasságát mértük meg. Első esetben közvetlenül a valódi napi időt kapjuk, mely az időegyenlítés hozzátevése által a középidőt adja. A második esetben a csillag óraszöge, hozzáadva annak rectascensióját, szolgáltatja a megfigyelés csillagidejét, mely ismert szabályok szerint ugyancsak középidőre átváltoztatandó.

Az időmeghatározás közvetlen czélja mindig az, hogy a megfigyelésnél szereplő óra javítását találjuk. Ha $t'$ a magasságvétel leolvasott óraideje, $t$ pedig az idő, mint ezt képletünk segítségével kiszámítottuk, akkor $t - t' = \triangle t$ az óra állása. Ha ezt több napon át megfigyeljük, bizonyára más-más $\triangle t_1$, $\triangle t_2$.. sorozat által előtüntethető állásokat kapunk. Ha most $\triangle t_2 - \triangle t_1$, $\triangle t_3 - \triangle t_2$.. álláskülönbségeket arányosan 24 órai időközre átváltoztatjuk, az óra $\triangle^2 t$ járását nyerjük, mely jó óra esetében meglehetősen állandónak tekinthető. Ezen adatok ismerete mellett a helyes idő egynéhány tized másodperczig bármikor, az időmeghatározáson kívül is megismerhető, mert ha

$T_0$ időben az állás $\triangle t$ és a jarás $\triangle^2 t$ volt, akkor az állás T időben nyilván $\triangle t + (T - T_0) \triangle^2 t$ leend. Ha ellenben az óra járása nagyon kevéssé állandónak bizonyulna, akkor lehetőleg sokszor kell időmeghatározásokat eszközölnünk, lehetőleg úgy, hogy a megfigyelendő tünemény előtt és után ismerjük meg az óra hibáját.

Az időmeghatározás gyakorlati kivitelére vonatkozólag kevés szóval érhetjük be. Ha valamely csillag a magasságmérés objectuma, akkor ezt a jól felállított theodolit fonalkeresztjének középpontjára vezetjük, feljegyezvén az órát, a melyben a csillag képe a fonalkereszt közepét érintette. Erre egyetlenegy megfigyelő is elegendő, ha megszokta, hogy az óra ütése szerint másodperczeket olvashasson. Leolvasván a magassági kör legalább két noniusát, átfordítjuk a távcsövet $180^0$ körül, átcsapjuk s ismételjük a folyamatot. Gyakorlott megfigyelőnél a két beállítás időköze annyira kicsiny leend, hogy e közben a magasságváltozást az idővel arányosnak tételezhetjük fel, s ekkor a két leolvasás közepe a két óraidő közepére vonatkozó magasságot adja, mely most már csak az esetleges műszerhibáktól és a refractiótól szabadítandó meg.

Ha ellenben a Napot figyeljük, akkor a távcső első állásában a Nap egyik, pl. alsó szélének magasságát veszszük, a távcső második állásában ellenben a másik, pl. felső szélét állítjuk be. Ismét a két óraidő közepe meg fog felelni a Nap középpontja magasságának. Ha mindkét megfigyelésben a Nap ugyanazon szélét vettük volna, pl. az alsót, vagyis a távcsőben a felsőt, akkor az ephemeridákból kivett napsugár a megfigyelés közepéhez adandó, hogy a korong középpontjának magasságát kapjuk.

Sextáns megfigyeléseknél egészen hasonlóan járunk el, kellő ügyet vetve a védő üvegek alkalmazására s azok prismatikus hibájának befolyására.

Az itt alkalmazásba jött képlet szoros kapcsolatban áll egy másik érdekes jelenséggel, a szürkület tartalmával. A polgári szürkület, melynél rendes nyomtatást a szabadban olvashatni megszününk, tudvalevőleg beáll, ha a Nap magassága $-9^0$, a csillagászati szürkület, melynél a hatod rendű csillagok kezdenek láthatókká lenni, ha a Nap $18^0$-kal áll a horizont alatt. Ha tehát a Nap óraszögét a hajnali szürkület kezdetekor vagy az alkonyat vége alkalmával $\tau$-val jelöljük, a fél nappali ívét, mint előbb is $t_0$-val, akkor

$$-\sin\begin{cases}9^0\\18^0\end{cases} = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\tau$$

egyenlet szolgáltatja $\tau$-t úgy a polgári, mint csillagászati szürkület számára, és $\tau - t_0$ adja a szürkület tartamát, melynek kétszeresével hosszabbodik meg egyszersmind a nappal tartama is. Különösen érdekes a legrövidebb szürkület kiszámítása valamely hely számára.

Ezen, már az ó-korban híres problemának, melynek első megoldását NOÑEZ adta, kifejtése STOLL szerint (Zeitschr. für Math. u. Phys., 28. köt., 150. l.) a következő. A kérdést így téve fel: Melyik parallelkörön jut adott declinatiójú csillag leggyorsabban $h_1$ magasságú almukantaratból $h_2$ almukantaratba? és melyik azon csillag declinatiója, mely adott parallelkör alatt leggyorsabban jut $h_1$ almukantaratból $h_2$-ében? felhasználhatjuk a megoldásra a csillagászati háromszög 74-ik ábráját, melyben a sinus és cosinustételek alkalmazásával leend:

$$\cos h_1 \sin a_1 = \cos\delta \sin t_1\,;\ \cos h_2 \sin a_2 = \cos\delta\sin t_2 \qquad a)$$

$$\begin{aligned}\sin h_1 - \sin\varphi\sin\delta &= \cos\varphi\cos\delta\cos t_1\,;\\ \sin h_2 - \sin\varphi\sin\delta &= \cos\varphi\cos\delta\cos t_2\,; \qquad b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos h_1\cos a_1\cos\varphi &= \sin h_1\sin\varphi - \sin\delta\,;\\ \cos h_2\cos a_2\cos\varphi &= \sin h_2\sin\varphi - \sin\delta\,; \qquad c)\end{aligned}$$

melyekben nyilván $h_1$, $a_1$ és $h_2$, $a_2$ a csillagnak a két almukantaratban elfoglalt helyét jelöli.

Ha a *b)* és *c)*-vel jelölt két-két egyenletet egymással szorozzuk, összeadjuk és az első sor szorzatának $\cos^2\varphi$-szeresét ezek összegéhez adjuk vagy belőlük levonjuk, nyerjük a következő kifejezést:

$$\begin{aligned}&(\sin h_1 - \sin\varphi\sin\delta)\,(\sin h_2 - \sin\varphi\sin\delta)\\ &+ \cos h_1\cos h_2\cos a_1\cos a_2\cos^2\varphi \pm \cos h_1\cos h_2\sin a_1\sin a_2\cos^2\varphi\\ &= \cos^2\varphi\cos\delta^2\cos t_1\cos t_2 + (\sin h_1\sin\varphi - \sin\delta)\,(\sin h_2\sin\varphi - \sin\delta)\\ &\pm \cos^2\delta\sin t_1\sin t_2\cos^2\varphi.\end{aligned}$$

Némi összevonás után:

$$\cos^2\varphi \cosh_1 \cosh_2 \cos(a_1 \mp a_2) + \sin h_1 \sin h_2 + \sin^2\delta \sin^2\varphi$$
$$= \cos^2\varphi \cos^2\delta \cos(t_2 \mp t_1) + \sin h_1 \sin h_2 \sin^2\varphi + \sin^2\delta$$

és $\cos^2\varphi$-vel osztva:

$$\cos^2\delta \cos(t_2 \mp t_1) = \cos h_1 \cos h_2 \cos(a_1 \mp a_2) + \sin h_1 \sin h_2 - \sin^2\delta.$$

Ha most a félszögek függvényeit hozzuk be, írhatunk:

$$\cos^2\delta \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 \mp t_1) = \sin^2 \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2)$$
$$+ \cos h_1 \cos h_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(a_1 \mp a_2). \qquad d)$$

A *b)* egyenletek különbségei adnak ellenben:

$$\cos\varphi \cos\delta (\cos t_1 - \cos t_2) = \sin h_1 - \sin h_2$$

vagy

$$\cos\varphi \cos\delta \sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) \sin \tfrac{1}{2}(t_2 + t_1)$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2) \qquad e)$$

Ha ezt négyzetre emeljük és az előbbi egyenlettel — melyben az alsó jelt tartjuk meg — összehasonlítjuk, lesz:

$$\cos^2\varphi \sin^2\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos^2\frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \sin^2\frac{1}{2}(h_1 - h_2)}, \qquad f)$$

hol most a *d)* és *f)* egyenlet a két kitűzött problema megoldását adja. *d)*-ből ugyanis következik állandó $\delta$ számára, hogy $t_2 - t_1$ minimum, ha $a_1 - a_2 = o$. E minimum értéke:

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\cos\delta} \qquad g)$$

és a hozzá tartozó parallelkört kapjuk, ha $a_1 = a_2$ téve a *c)* egyenleteket elosztjuk:

$$\frac{\cos h_1}{\cos h_2} = \frac{\sin h_1 \sin\varphi - \sin\delta}{\sin h_2 \sin\varphi - \sin\delta}.$$

Ebből

$$\sin\varphi (\sin h_2 \cos h_1 - \sin h_1 \cos h_2) = \sin\delta (\cos h_1 - \cos h_2)$$

vagy

$$\sin\varphi = \sin\delta \frac{\sin \frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}. \qquad h)$$

Ellenben *f)*-ből következik, ha $\varphi$ állandó, $t_2 - t_1$ minimum feltétele gyanánt:

$$a_1 + a_2 = 180^0 \text{ vagy } a_2 = 180^0 - a_1,$$

azaz: a magassági körök, melyekben a csillag az első és második almukantaraton való átmenetekor van, egyenlő messze esnek északra és délre az első vertikálistól. E feltétel alatt lesz *f)*-ből:

$$\cos^2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(h_1 - h_2) \cos^2 \frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos h_1 \cos h_2 + \sin^2 \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}$$

vagy mivel a nevező

$$\tfrac{1}{2}\cos(h_1 + h_2) + \tfrac{1}{2}\cos(h_1 - h_2) + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(h_1 - h_2)$$
$$= \cos^2 \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)$$

alakban is írható:

$$\sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}{\cos\varphi} \qquad i)$$

Ez egyenlet adja az átvonulás legrövidebb tartamát. A hozzá tartozó declinatió ismét $a_2 = 180^0 - a_1$ feltétel alatt a *c)* egyenletek elosztásából adódik:

$$-\frac{\cos h_1}{\cos h_2} = \frac{\sin h_1 \sin\varphi - \sin\delta}{\sin h_2 \sin\varphi - \sin\delta},$$

a melyekből hasonlóképen, mint előbb levezethető:

$$\sin\delta = \sin\varphi \frac{\sin \frac{1}{2}(h_1 + h_2)}{\cos \frac{1}{2}(h_1 - h_2)}. \qquad k)$$

Ha most a csillagászati szürkület tartamának megfelelőleg $h_1 = o$, $h_2 = -18^0$, akkor *g), h), i)* és *k)* egyenletek:

$$\sin\varphi = -\operatorname{tang} 9^0 \sin\delta; \; \sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin 9^0}{\cos\delta}$$

$$\sin\delta = -\operatorname{tang} 9^0 \sin\varphi; \; \sin \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{\sin 9^0}{\cos\varphi}$$

alakban teljesen megfelelnek a felvetett két kérdésre. Meg jegyzendő, hogy e problemában a geographiai szélesség s a csillag declinatiója teljesen symmetrikusan szerepelnek. A szürkület tartama számára természetesen csak akkor kapunk reális értéket, ha δ vagy $\varphi < 81^0$; különben látnivaló, hogy a legrövidebb szürkület tartama rohamosan nő a declinatió és geographiai szélesség növekedésével és hogy a legrövidebb szürkület parallelköre mindig kisebb szélességgel bír, mint a milyen a Nap declinatiója.

Az időmeghatározás legtökéletesebb módszere az, melyet a felelkező magasságok nyujtanak. Elve, hogy valamely állandó declinatióval bíró égi test a meridián körüli egyenlő óraszögekben egyenlő magasságot ér el.

Figyeljük meg tehát az időt, a melyben valamely csillag a meridián előtt bizonyos, de egészen tetsző magasságot ért el és ugyancsak az időt, melyben ugyanezen magasságot a meridián után foglalja el, akkor világos, hogy a két óraidő közepe az égi test delelésének felel meg. Látnivaló, hogy e módszer nem követeli a geographiai szélesség ismeretét, nem is követel pontosan osztott kört, mert nem a magasság értéke, hanem ennek csak állandósága követeltetik és épp oly hasznavehető, ha az óra járással bír, de csak ha $\delta t = 0$ mintha a csillagzat rectascensióját egyenletesen változtatja. Ha theodolittal figyelünk, akkor egyetlen kellék, hogy vertikális tengelye valóban függélyesen is álljon.

E módszer kényelmes alkalmazására külön műszer is van, a chronodeik, apró, maga alá látó, vertikálisan felfüggesztett távcső, melynek tárgylencséje előtt hajlítható síktükör vetíti a Nap képét a látmezőbe. A délutáni megfigyelésnél e tükör hajlítását nem bántva, várjuk a Nap megjelenését a fonalkereszten.

A Nap nem felel meg teljesen a módszer követelményeinek, a mennyiben declinatióját kevéssé mégis változtatja néhány órai időköz alatt. Rectascensióváltozása, mint láttuk, befolyást nem gyakorol. De a Nap is felhasználható ily módon időmeghatározásra, ha declinatióváltozását tekintetbe veszszük. Ha ugyanis $\mu$ a Nap óránkénti declinatióváltozása ívmásodperczekben kifejezve, t a két megfigyelés fél időköze, akkor a két óraidő középéhez

$$v^s = -\mu \frac{t^h}{15}\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin t} - \operatorname{tang}\delta \operatorname{cotg} t\right)$$

másodperczekben kifejezett javítás adandó, hogy a delelés pillanatához jussunk. E javítás a déljavítás nevét viseli. Ha az egyik megfigyelést este, a másodikat a következő reggel eszközölnők, akkor természetesen a két óraidő közepese az alsó delelés időpontjának felelne meg, Az előbbi javítás, mely most az éjfélcorrectió, most is használható, csakhogy sin t helyébe — sin t teendő.

E képletet nagyon könnyen levezethetjük, ha keressük, miként változik az óraszög, ha a declinatió egy óra alatt $\mu$-val változik?

1882. október 27-én Chacra-Pronzati (Bahia-Blanca mellett) Vénus expeditiói állomáson figyelték a Nap megfelelő magasságait tükörkörrel. A felső és alsó napszél a sextáns $83^0\,0'\,0''$ beállítását

felső napszél $8^h\,41^m\,57^s.2$ délelőtt és $14^h\,57^m\,38^s.4$ d. u. kp. időkor
alsó napszél $44^m\,48^s.9$ $54^m\,45^s.1$

érte el. A Nap középpontjának délelőtt és délután egyenlő magassága tehát

$$8^h\,43^m\,23^s.05 \text{ és } 14^h\,56^m\,11^s.75$$

kp. időknek felel meg. Az indexhiba délelőtt és délután, illetve $-1'\,25''$ és $-1'\,36''$ volt és a refractió is délután $1''.3$-del kisebb volt, mint délelőtt. Ha az abból származó kis correctiót, mely jelen esetben maximumban $-0^s.19$-et tesz ki, elhanyagoljuk, a számítás a következőképen áll:

$$\rho = -38^0\,42'.8\,;\ \delta = -12^0\,53'.8\,;\ g = -16^m\,2^s.94$$

és a declinatió óránkénti változása

$$\mu = -50''.64\,;\ t = \tfrac{1}{2}(14^h\,56^m\,11^s.75 - 8^h\,43^m\,23^s.05)$$

$$= 3^h\,6^m\,24^s.35 = 3^h.1068 = 46^0\,36'\,5'' \text{ és } \frac{t}{15} = 0^h.20712.$$

$$\begin{array}{lll}
\lg\text{tang}\,\varphi = 9{\cdot}9039_n & \lg\text{tang}\,\delta = 9{\cdot}3598_n & \\
\lg\sin t \;\;= \underline{9{\cdot}8613} & \lg\text{cotg}\,t = \underline{9{\cdot}9757} & \lg x = 9{\cdot}2929 \\
\qquad\quad\;\; 0{\cdot}0426_n & \qquad\quad\;\; 9{\cdot}3355_n &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
 & 0{\cdot}0426_n & \\
\lg \text{subtr.} & 0{\cdot}0949 & \text{a két idő közepe} = 11^h\,49^m\,47^s.40 \\
 & 9{\cdot}9477_n & \qquad -v^s = \quad -9^s.30 \\
\lg \frac{t}{15} & = 9{\cdot}3163 & \text{óraidő a val. délben} = 11^h\,49^m\,38^s.10 \\
\lg \mu & = 1{\cdot}7045_n & \text{kp.-idő a val. délben} = 11^h\,43^m\,57^s.06 = (12^h + g) \\
\lg v^s & = 0{\cdot}9685 & \qquad \triangle t = \quad -5^m\,41^s.04 \\
v^s & = 9^s.30 &
\end{array}
$$

Magas szélességek alatt az égi testek magassága kevéssé változik (a póluson tudvalevőleg éppen minden parallelkör párhuzamos a horizonttal) és ezért az időmeghatározásnak más módját kell választani. Ez esetben az azimuth megméréséből indulunk ki, mely a csillagászati háromszögre alkalmazott

$$\operatorname{tang}\delta \cos\varphi = \sin\varphi \cos t - \sin t \operatorname{cotg} a$$

cotangenstételből ugyancsak az óraszöget szolgáltatja. E módszer természetesen alacsony szélességek alatt is hasznavehető. Ha

$$-\operatorname{cotg} a = m \cos M ; \quad -\sin\varphi = m \sin M$$

írunk, akkor

$$m \sin(t - M) = \operatorname{tang}\delta \cos\varphi$$

egyszerűbb és könnyen megoldható alakhoz jutunk. Mivel az azimuth leggyorsabban a meridián körül változik — a parallelkör meridián körüli darabja párhuzamos a horizonttal — természetes, hogy a felső culminatióhoz közel fogjuk eszközölni megfigyeléseinket.

Igen kényelmessé válik ezen módszer, ha valamely égi testnek távoli fal vagy torony mögötti eltünésének óraadatából határozzuk meg az időt. Feltevés természetesen, hogy az észlelő álláspontja a falhoz képest ne változzék.

A csillagász az időt mindig passage-csővel vagy meridiánkörrel határozza meg, melyet utazások közben a meridiánban felállított theodolit is pótolhat. Ez esetben a csillag meridiánátmenete természetesen tüstént a rectascensiójával egyenlő csillagidőt szolgáltatja.

A gróf Széchenyi Béla kelet-ázsiai utazásában Kreitner

Csung tyienben 1880. január 1-én a meridiánban felállított universalműszeren a következő csillagátmeneteket észlelte:

*Kör nyugoton.*

| | $\alpha$ Ursae min. | $\eta$ Piscium | $\beta$ Arietis. |
|---|---|---|---|
| Átmenet a középszálon, chronometer | $10^h 53^m 33^s.0$ | $11^h 10^m 17^s.7$ | $11^h 33^m 18^s.9$ |
| azimuthjavítás | $+6^m 29^s.26$ | $-2^s.32$ | $-1^s.40$ |
| hajlásjavítás | $-3^s.47$ | $-3^s.36$ | $-5^s.53$ |
| collimatiójavítás | | | |
| órajárási javítás | $-7^s.39$ | $-10^s.58$ | $-15^s.18$ |
| $\alpha$ | | $1^h 26^m 5^s.11$ | $1^h 48^m 0^s.10$ |
| $\triangle t =$ | | $-9^h 44^m 56^s.33$ | $-9^h 44^m 56^s.69$ |

A kiszámítás a csillagász előtt jól ismert

$$\alpha = t + \triangle t + \triangle^2 t + a \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + i \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + c \sec\delta$$

egyenlet segítségével történt. Az i hajlást közvetlenül a libella adja, a c és a collimatió és azimuth állandót a sarkcsillagnak egy aequatori csillaggal való összevetéséből szokás meghatározni.

## A napóra.

Az időmeghatározásnak legkényelmesebb és a gyakorlati életben — hol az első perczek törtrészeinek ismeretére alig van valaha szükség — elég pontossággal járó módja a Nap állásának megfigyelése. Hiszen épen a Nap az, melynek állásához polgári foglalkozásaink legjavát kötjük. Innen van, hogy a napórák, noha könnyen kezelhető, kevés számítással járó és elég olcsó, náluknál pontosabb időmeghatározó műszerek már rég ismeretesek is, népszerűségüket még ma sem vesztették el és meg is fogják tartani mindenütt, hova a nagyobb városokban és a telegráfhálózat mentében már most is dívó telegráfi időjelzés még el nem hatott.

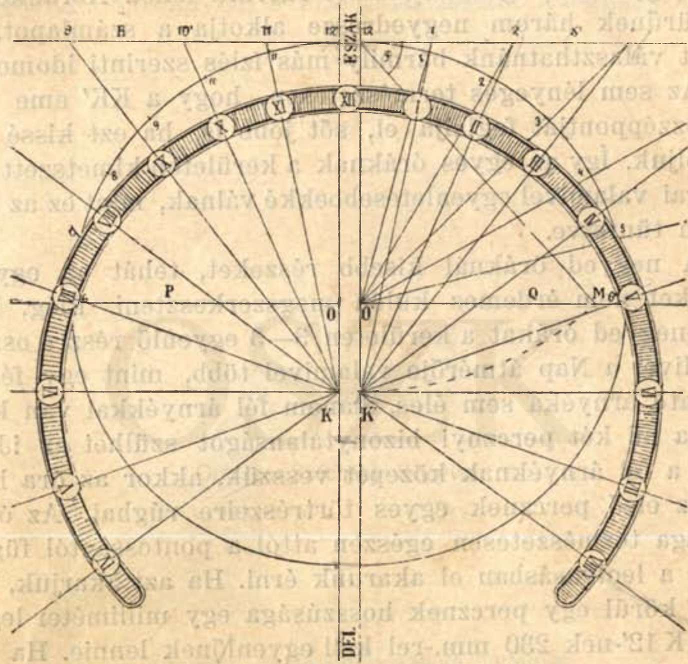
A napórák három faját szokás megkülönböztetni; az *aequatoreális napórát*, melynek lapja az aequatorral, vagyis azzal a körrel párhuzamos, a melyet a Nap a tavaszi és őszi napéjegyenlőségkor az égen leír; *a horizontális napórát*, melynek síkja vízszintes, végre a *vertikálist*, melynek síkja függőleges.

Szerkezetre nézve, igaz, legkényelmesebb az első, a menynyiben órafelosztása egyenletes és a mutatója merőlegesen áll az óra lapjára. Felállítása azonban nehezebb, mert hiszen úgy kell megerősíteni, hogy lapja, az aequator síkjába essék. Minthogy a Nap a nyári féléven az aequatortól északra, a téli félévben tőle délre jár, az óra csak úgy használható egész éven át, ha alsó lapja is be van osztva. Télen az alsó, nyáron a felső beosztáson olvashatjuk le az órát az északi félgömbön. Ez óra leginkább az aequatorral szomszédos tájakon kényelmes.

*A horizontális napóra.* A napóra tervezett nagyságánál jóval nagyobb papirlapon két párhuzamos vonalat húzzunk (75. ábra) dél-észak, oly távolságban egymástól, mely az alkalmazandó mutató vastagságával egyenlő. Délelőtt ugyanis a mutatónak bal, délután jobb éle veti az árnyékot. O és O′ tetszés szerint választott pontokon át állítsunk a délészak vonalra merőlegest, PQ és tetszőleges sugárral O 12′ = O′ 12′ két félkört húzzunk, úgy hogy a jobb a délészak vonalpár jobb, a bal félkör ezen vonalpár bal vonalán nyugodjék mint átmérőn. A 12′ P és 12′ Q környegyedeket beosztjuk 6—6 egyenlő részre, s ezen osztályrészeket a megjelölt sorrendben az 1—6 és 6—12 óraszámokkal látjuk el. Most a 12′ — 12′ ponton át RS párhuzamost vonván PQ-val, az O és O′ középpontokon és illetőleg 11, 10, . . 7 és 1, 2 . . 5 pontokon át egyeneseket fektetünk, melyek a PQ-val párhuzamost a megfelelő 11′, 10′. . 7′ és 1′, 2′. . 5′ pontokban szelik. Hogy ábránk túlságos bonyolulttá ne váljék, e sugarakat csupán az óralap jobb felében húztam ki; azonkívül a mutató vastagságát, t. i. az OO′ távolságot aránytalanul nagynak vettem fel.

Ennyire mehetünk a szerkesztésben a nélkül, hogy a napóra felállítása helyének geographiai fekvéséről közelebbit tudnunk kellene.

Legyen a geographiai szélesség, mely Magyarországon körülbelül 48°, egyenlő $\varphi$-vel. Jó szögmásoló (transporteur) vagy geométriai szerkesztés útján ezt a $\varphi$ szöget a 12′ pontból kiindulva felrakjuk az RS egyenesre és meghosszabbítjuk a másik szárát, míg ez az OO′ középpontokon áthaladó PQ egyenest M pontban metszi. Az M 12′ egyenes hosszúságát most a két 12′ pontból a *dél-észak* vonalpárra átvive, megjelöljük a KK′ pontokat, melyek a napórának középpontjai. Összekötvén ezeket az RS egyenesnek 7′, 8′..12′, 12′, 1′..5′ pontjaival megkapjuk a K 7′, K 8′..K 12′ illetőleg K′ 12′, K′ 1′..K′ 5′ sugara-




75. ábra. Vizszintes napóra.

kat, melyek a megjelölt órák számára a KK′ pontokból kiinduló mutató árnyékával összeesnek. A reggeli és esti 6 órának megfelelő árnyékirányt megkapjuk, ha a KK′ pontokon át PQ vagy RS egyeneshez párhuzamost húzunk. A reggeli 4 és 5, valamint az esti 7 és 8 órának megfelelő sugarakat ellenben, — és ennél tovább nem kell mennünk, mivel nálunk 4 óránál előbb nem kel, 8 óránál később nem nyugszik le a Nap — ha K és K′ pontból, illetőleg K′ 5′, K′ 4′ és K′ 7, K′ 8′ sugarakhoz vonunk párhuzamosakat.

Ha nem csupán a teljes óráknak, hanem a fél vagy negyed óráknak megfelelő árnyékirányokat is óhajtjuk ismerni, akkor az O és O′ pont körül húzott körök PQ felett fekvő negyedeit nem 6, hanem 12, illetőleg 24 részre osztanók, ezekkel az osztás-vonalakkal is hasonlóképen járván el, mint ezt a teljes óráknak megfelelőkkel tettük.

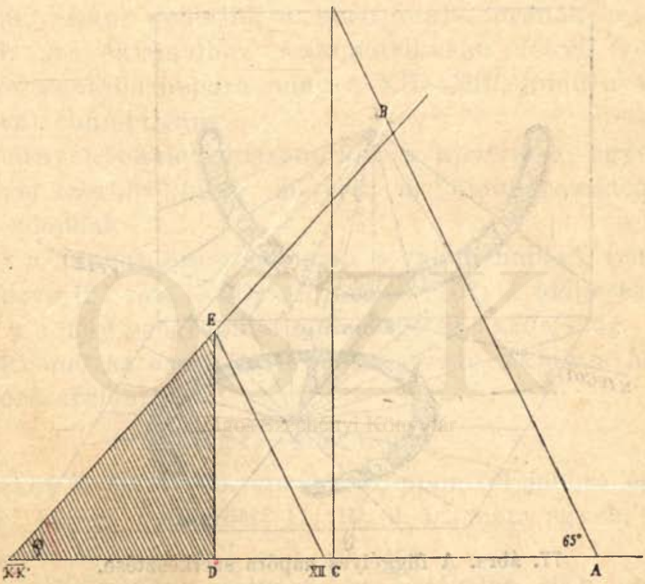
Minthogy az árnyékvonalnak csupán az iránya határoz, hossza pedig közönyös, ez okból a kerület, a melybe az órákat bejegyezzük, egészen tetszés szerinti lehet. Ábránkon egy körgyürűnek három negyedrésze alkotja a számlapot. Kör helyett választhatnánk bármily más ízlés szerinti idomot.

Az sem lényeges természetesen, hogy a KK′ eme kerület középpontját foglalja el, sőt jobb is, ha ezt kissé „dél“ felé toljuk. Így az egyes óráknak a kerületen kimetszett hosszúságai valamivel egyenletesebbekké válnak, mint ez az ábrán fel van tüntetve.

A negyed óráknál kisebb részeket, tehát az egyes öt perczeket nem érdemes külön megszerkeszteni. Elég, ha az egyes negyed órákat a kerületen 3—3 egyenlő részre osztjuk.

Mivel a Nap átmérője valamivel több, mint egy fél fok, a mutató árnyéka sem éles, hanem fél árnyékkal van körülvéve, a mi két percznyi bizonytalanságot szülhet az időben. De ha a fél árnyéknak közepét vesszük, akkor az óra hibája csak az első percznek egyes törtrészeire rúghat. Az óralap nagysága természetesen egészen attól a pontosságtól függ, a melyet a leolvasásban el akarunk érni. Ha azt akarjuk, hogy 12 óra körül egy percznek hosszúsága egy milliméter legyen, akkor K 12′-nek 230 mm.-rel kell egyenlőnek lennie. Ha beérjük azzal, hogy dél körül öt percznek megfelelő hosszúság 3 mm. legyen, akkor K 12′ körülbelül = 140 mm.

A napóra mutatóját legczélczerűbb derékszögű háromszög alakjában előállítani, olyformán, hogy az egyik hegyes szög a hely geographiai szélességével legyen egyenlő. E végből a $\varphi$ szöget, úgy a mint azt az óra szerkesztésekor is tettük volt, valamely tetszés szerint felvett $\overline{KK'A}$ vonalra (76. ábra) felrakjuk, azután a $\overline{KK'B}$ szárnak valamely tetszés szerint választott pontjából is bocsáthatnánk le merőlegest a másik szárra és a mutató már így is kész lenne. Az ekként előállított mutatóval azonban könnyen megeshetnék az, hogy árnyéka nem érné el a beosztott órakört és ennélfogva a mutató méreteit külön kell meghatároznunk. E végből elégséges tudnunk, hogy Magyarországon a Nap legnagyobb magassága 65°. Ha tehát a $\overline{KK'}A$ vonalra a napórának $\overline{KK'}$ XII hosszúságát, azaz az óra középpontja (mely egyszersmind a mutató talppontja) és a XII. órajel közti távolságot lemérjük, akkor a mutató E pontját oly módon kell megkeresnünk, hogy ennek árnyéka még akkor is, midőn ez legrövidebb, a XII-re essék. Ennélfogva egy tetszőleges A pontban $\overline{KK'}A$ szárra átvisszük a legnagyobb nap-

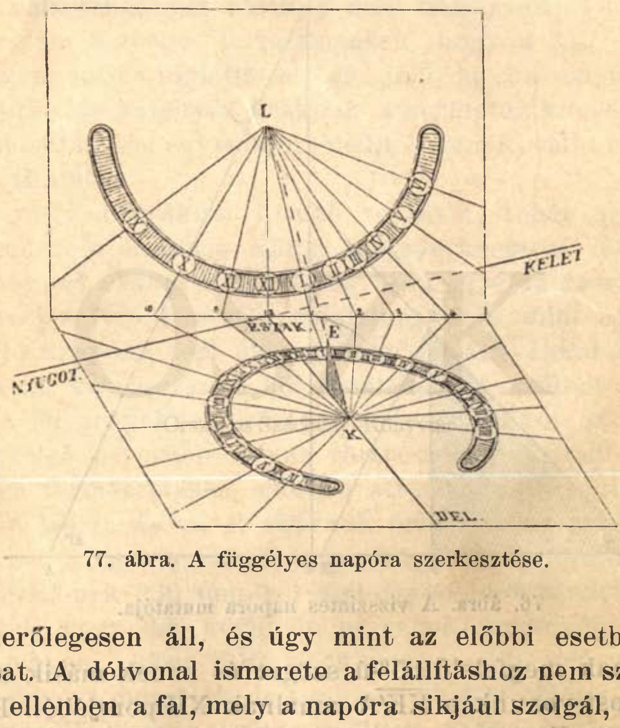



76. ábra. A vizszintes napóra mutatója.

magasságnak megfelelő 65°-ú szöget és ennek másik szárával párhuzamost vonunk a $\overline{KK'}A$ vonalnak XII pontjából. Ez meghatározza az E pontot, melyből a DE merőlegest húzván, az árnyékolva rajzolt mutatót kimetszhetjük.

Ennek vastagsága, mint mondók az „észak-dél“ vonalpár távolságával egyenlő. A napórára $\overline{KK'}D$ alappal úgy állítjuk, hogy a $\varphi$ szög csúcspontja „dél“ felé irányítva K és K' pontokra esvén, a mondott vonalpárt kitöltse és az óra lapjára merőleges legyen.

*A függőleges napóra* szerkesztését leírni azon esetben, midőn ezt *pontosan* keletről nyugot felé néző falra akarjuk alkalmazni, alig volna egyéb a most mondottak ismétlésénél. Az óralap szerkesztésében az egyedüli különbség csupán az, hogy a 12′ pontban (75. ábra) felrakott $\varphi$ szög helyett most $90 - \varphi$ szöget veszünk, s hogy ugyanígy a mutató rajzolásakor is a $\varphi$ helyett $90 - \varphi$ szöget, $65^0$ helyett hasonlóan $90^0 - 65^0 = 25$ fokot választunk. Ezen óra felállítása is igen egyszerű; az észak-dél vonalat függélyesen állítjuk úgy, hogy a XII legalól legyen; a mutató talppontja ugyancsak KK′-ban van, a




77. ábra. A függélyes napóra szerkesztése.

lapra merőlegesen áll, és úgy mint az előbbi esetben a XII felé mutat. A délvonal ismerete a felállításhoz nem szükséges.

Ha ellenben a fal, mely a napóra sikjául szolgál, nem esik össze a kelet-nyugot vonallal, akkor az óra szerkesztése jóval bonyolódottabb. Legegyszerűbb ilyenkor az árnyékvonalak irányának számítás útján való meghatározása. Szerkesztésében (77. ábra) a következőképen járnánk el.

Az illető hely számára megrajzoljuk először a horizontális napórát, melyet vízszintesen megerősítve úgy illesztünk a jobbadán mégis délnek néző falhoz, hogy az „észak-dél“ vonal (77. ábra) a meridiánba essék. A mutatót KE meghosszabbítva a falon az L pontot találjuk, mely a vertikális napóra középpontja lesz. Az L-ből kiinduló mutató most természetesen a KL irányba esik és hosszúsága — ha csak a fal eltérése a kelet-nyugot vonaltól nem túlságos nagy, — a függőleges órák számára adott utasítás szerint szerkeszthető meg.

Meghosszabbítjuk most a horizontális napóra egyes árnyékvonalait míg a falat érik, és összekötjük ezeket a metszéspontokat L ponttal, egyszersmind ellátva őket a megfelelő órajelzésekkel. Ha egyes vonalak meghosszabbításai nem találják a falat, akkor vehetjük a horizontális órának megfelelő a VI—VI. árnyékvonalhoz szimmetrikusan fekvő vonalait, mert a horizontális napóra mind a XII—XII., mind a VI—VI. vonal körül simmetrikus.

Az árnyékvonalak kiszámítása a következő egyenletek segítségével eszközölhető, melyek a gömbháromszögtanból könnyen adódnak.

Ha t a Napnak óraszöge, azaz a valódi napidő, ívmértékben kifejezve (24 óra $= 360^0$; 1 óra $= 15^0$; 1 időpercz $=$ 15 ívpercz), $\varphi$ a hely geographiai szélessége és $\tau$ azon szög, melyet az árnyékvonal az észak-dél vonallal bezár, akkor a horizontális napóra számára

$$\operatorname{tang} \tau = \sin \varphi \operatorname{tang} t.$$

A $\tau$-szögeket K és K' (75. ábra) középponttól jobbra és balra rakjuk fel, mivel a délelőtti 11, 10, 9 óra nem egyéb, mint a déltől számított $-1$, $-2$, $-3$..-ik óra.

Vertikális napóra számára, ha az óralap síkja pontosan a kelet-nyugat vonalba esik, a képlet úgy hangzik:

$$\operatorname{tang} \tau = \cos \varphi \operatorname{tang} t.$$

Innen van, hogy a szerkesztésben a horizontális és vertikális napóra között csak azon különbség van, hogy $\varphi$ helyébe $90 - \varphi$ lép.

Bonyolódottabb a képlet, ha a függőleges fal a kelet-nyugat vonaltól eltér. Ha nyugati oldala $\alpha$ szöggel fekszik észak felé, akkor

$$\operatorname{cotang} \tau = \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi + \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \operatorname{cotang} t,$$

hol a délutáni órák számára t és $\tau$ positiv, a délelőttiek számára ellenben negativ.

A mutató hátahosszúságát h, kiszámítjuk a következő képlet segítségével:

$$h = \frac{r}{\cos\varphi + \sin\varphi \operatorname{tang}(\varphi - 23^0 28')},$$

hol r a KK′ középponttól számított távolsága a XII órajelnek, 23⁰ 28′ ellenben az ekliptika ferdeségét jelöli.

A mutatót (76. ábra) formázó háromszög $\overline{KK'D}$ alapját és DE magasságát h-ból könnyen kapjuk; ugyanis:

$$\overline{KK'D} = h\cos\varphi; \; DE = h\sin\varphi.$$

Minthogy egyáltalában könnyebb a vonalaknak, mint a szögeknek lemérése, azért tanácsos itt is az „észak-dél“ vonalra merőleges RS-et húzni. A 12′ ponttól számított metszetek, melyek $\tau$ irányú árnyékvonalnak megfelelnek, akkor a $\overline{K'12'}$ $\operatorname{tang}\tau$ által vannak adva, a VI órától számított metszetek ellenben egy a VI—VI órára a KK′ középponttól x távolságban fekvő merőleges vonalon $x \operatorname{cotang}\tau$ által.

*A napórák felállítása,* mint említők, legegyszerűbb azon esetben, midőn függőleges, pontosan keletről nyugatnak irányított fallal van dolgunk. Elégséges a mutató háromszöget e lapra merőlegesen állítanunk és az órát úgy megerősítenünk, hogy az észak-dél vagy közép vonala függőleges legyen.

A horizontális, úgymint a függőleges, de nem kelet-nyugat irányban fekvő napórán azonban okvetetlenül szükséges a délvonal (meridián) irányát ismerni, mire a horizontális napórát csak úgy kell vízszintesen irányítani, hogy a dél-észak vonal a meridiánnal pontosan összeessék.

Ha valamely módon pontosan ismerjük (legalább perczre) az időt, akkor a horizontális napóra felállítása természetesen úgy is történhetik, hogy vízszintesen addig forgatjuk a lapját, míg — az időegyenletet tekintetbe véve — a mutató árnyéka is ugyanazt az időt nem jelezi.

Igen czélszerű, ha kis táblázatot szerkesztünk, melyet a napóra lapjára vésethetünk, hogy a leolvasott időt az időegyenlítéssel mindjárt javíthassuk. Egy ilyen táblázat, mely egész Magyarország területén mind rendes, mind szökőévben használható, a következő oldalon van feltüntetve.

**A polgári időhöz képest a napóra**

| nap | január | február | márczius | április | május | június | nap | július | augusztus | szeptemb. | október | november | deczember |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | hónapban a következő perczekkel | | | | | | | hónapban a következő perczekkel | | | | | |
| | késik | | | siet | | | | késik | | siet | | | |
| 1 | | | 13 | | | 3 | 1 | 3 | | 0 | 10 | | 11 |
| 2 | 4 | | | 4 | | | 2 | | | | | | |
| 3 | 5 | | 12 | | 3 | | 3 | | 6 | 1 | 11 | | 10 |
| 4 | | 14 | | 3 | | 2 | 4 | 4 | | | | | |
| 5 | | | | | | | 5 | | | | | | 9 |
| 6 | 6 | | | | | | 6 | | | 2 | 12 | 16 | |
| 7 | | | 11 | 2 | | | 7 | | | | | | 8 |
| 8 | 7 | | | | | | 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | | 9 | | | 3 | | | 7 |
| 10 | | | | | | 1 | 10 | | 5 | | | | |
| 11 | 8 | 15 | 10 | 1 | | | 11 | 5 | | | 13 | | 6 |
| 12 | | | | | | | 12 | | | 4 | | | |
| 13 | | | | | | | 13 | | | | | | |
| 14 | 9 | | | 0 siet | | 0 késik | 14 | | | | | | 5 |
| 15 | | | | | 4 | | 15 | | | 5 | 14 | | |
| 16 | 10 | | 9 | | | | 16 | | 4 | | | 15 | 4 |
| 17 | | | | | | | 17 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | 18 | | | 6 | | | 3 |
| 19 | 11 | | 8 | 1 | | 1 | 19 | | | | 15 | | 2 |
| 20 | | 14 | | | | | 20 | | | | | | |
| 21 | | | | | | | 21 | | 3 | 7 | | 14 | 1 |
| 22 | 12 | | 7 | | | | 22 | | | | | | |
| 23 | | | | | | | 23 | 6 | | | | | késik |
| 24 | | | | 2 | | 2 | 24 | | | 8 | | 13 | |
| 25 | | | 6 | | | | 25 | | 2 | | | | |
| 26 | | | | | | | 26 | | | | | | 1 |
| 27 | 13 | 13 | | | | | 27 | | | 9 | 16 | 12 | |
| 28 | | | | | 3 | | 28 | | 1 | | | | 2 |
| 29 | | | 5 | 3 | | 3 | 29 | | | | | | |
| 30 | | | | | | | 30 | | 0 | 10 | | 11 | |
| 31 | | | 4 | | | | 31 | | 0 | | | | 3 |

A napórát régen a gnomon, sőt az emberi test árnyékának hosszúsága és iránya is pótolta. Egyszerű gnomonnal ismerkedünk meg a III. szakasz I. fejezetében (87. ábra).

## X. FEJEZET.

## A geographiai szélesség meghatározása.

Minthogy a geographiai szélesség a sarkmagassággal azonos, két közvetlen módszer kinálkozik meghatározására. Az egyik a sarkcsillag magasságának megfigyelése, a másik a csillagok delelési magasságának lemérése. Ha az utóbbit $h_0$-nal jelöljük, akkor a már többször idézett képletből következik:

$$\varphi = 90^0 - h_0 + \delta.$$

Ha tehát a Nap vagy valamely csillag képét beállítjuk a meridián szomszédságában theodolitunk vagy sextánsunk fonalkeresztjére és a távcsövet addig csavarjuk az égi test után, míg ez egyáltalában még emelkedőben van, akkor közvetlenül a delelési magasságot olvashatjuk le, melyet már csak a refractió, esetleg parallaxis és horizontdepressió miatt kell javítani. A declinatió természetesen az évkönyvből vehető ki.

De elegendő már az is, ha csak nagyon közel a meridiánhoz veszünk egy magasságot. Ekkor az időmeghatározás logarithmusos képletéből:

$$\sin\frac{h_0 - h}{2} = \sin^2\frac{t}{2}\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\cos\frac{1}{2}(h_0 + h)}$$

$h_0 - h = \triangle h$ magasságjavítás számítható, mely az észlelt t óraszögkor érvényes magassághoz adandó, hogy a delelési magasságot nyerjük. Ha ez óraszög nagyon közel 0, azaz a megfigyelés közel történt a meridiánhoz, akkor $\sin^2\frac{t}{2}$ kicsinysége miatt a formulában előforduló $\varphi$ és $h_0$ már nagyon durva ismerete is elégséges. Ezen $\varphi$ helyébe írható akkor $90^0 - h + \delta$ és a nevezőben $\frac{1}{2}(h_0 + h)$ helyébe h, úgy hogy a magassági javítás

$$\triangle h = \tfrac{1}{2}\sin 1''\,.\,t^2\,\frac{\sin(h - \delta)\cos\delta}{\cos h},$$

hol t is ívmásodperczekben fejezendő ki.

JORDAN 1873. deczember 31-én Farafrah oázisban a következő hét dél körüli napmagasságot mérte:

| | | |
|---|---|---|
| chronometeridő $= 10^h\,54^m\,33^s$; | napmagasság $=$ | $39^0\,46'\,50''$ |
| $58^m\ 0^s$ | | $49'\,17''$ |
| $11^h\ 2^m\ 1^s$ | | $51'\,10''$ |
| $5^m\,26^s$ | | $51'\,45''$ |
| $10^m\,12^s$ | | $51'\,40''$ |
| $14^m\ 0^s$ | | $49'\,27''$ |
| $17^m\,56^s$ | | $47'\,55''$ |

léghőmérséklet $= +17^0$ C; barometer $= 760$ mm.

A magasságok theodolittal vannak lemérve, még pedig a távcső két fekvésében, úgy hogy az egyik helyzetben az alsó szél, átfektetés után a felső észleltetett. A magasságok tehát mentek a kör hibás zenithpontjától és a Nap középpontjára vonatkoznak. Ha e megfigyeléseket görbe vonal alakjában rajzoljuk fel, úgy hogy az idők az abscissát, a magasságok az ordinátát adják, akkor a maximális, azaz déli magasság számára $h = 39^0\,51'\,50''$ adódik. A refractió $-1'\,9''$, a parallaxis $+7''$, tehát $h_0 = 39^0\,50'\,48''$. A mondott napon a Nap declinatiója a közép greenwichi délben $= -23^0\,5'\,0'' + 11''.45$ órai változással. Mivel a megfigyelési hely hosszúsága körülbelül $1^h\,52^m$ E. Greenw., úgy $-\dfrac{112}{60} \times 11''.45 = -21''$ járul hozzá és $\delta = -23^0\,5'\,21''$. E szerint

$$\varphi = 90^0 - h_0 + \delta = 50^0\,9'\,12'' - 23^0\,5'\,21'' = 27^0\,3'\,51''.$$

A többi megfigyelés is felhasználható a 180. oldalon adott egyenlet alapján. Vegyük pl. a harmadikat. A mondott rajzból, vagy közvetlen megfigyelésből látszik, hogy a Nap delelése a chronometer szerint $11^h\,6^m\,48^s.7$-kor történt; az óra állása tehát a valódi napidőhöz képest $+53^m\,11^s.3$. Ennek folytán $39^0\,51'\,10''$ észlelt magasság $t = 11^h\,55^m\,12^s$ vagy $-4^m\,48^s = -1^0\,12'\,0''$ óraszögre vonatkozik, mi másodperczekben kifejezve $t = 4320''$. A refractió és parallaxis javítás miatt:

$$h = 39^0\,51'\,10'' - 1'\,8'' + 7'' = 39^0\,50'\,9'' \text{ és } h - \delta = 62^0\,55'\,30''$$

$$\begin{aligned}
\lg \tfrac{1}{2} \sin 1'' &= 4{\cdot}3846 \\
2 \lg t &= 7{\cdot}2710 \\
\lg \sin (h - \delta) &= 9{\cdot}9496 \\
\lg \cos \delta &= 9{\cdot}9637 \\
\hline
\lg \triangle h'' &= 1{\cdot}5689
\end{aligned}$$

$$\triangle h = 37''.06.$$

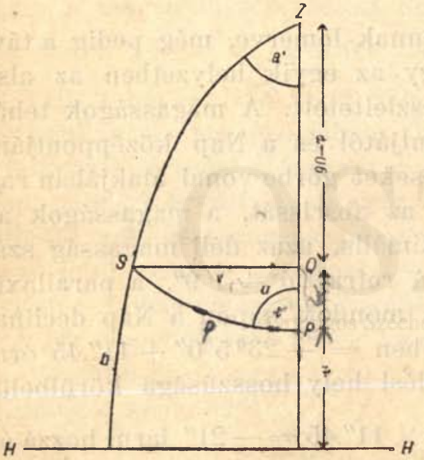
Ennélfogva

$$h_0 = h + \triangle h = 39^0\, 50'\, 46''$$

és $\varphi = 90^0 - h_0 + \delta = 50^0\, 9'\, 14'' - 23^0\, 5'\, 21''$

$$\varphi = 27^0\, 3'\, 53'',$$

a mi az előbbi eredménynyel jól vág össze.




78. ábra. Szélességmeghatározás a Sarkcsillag segitségével.

Épp ily közvetlen módszer volna a sarkcsillag vagy valamely circumpoláris csillagnak magasságmeghatározása alsó és felső delelése alkalmával. — Nyilvánvaló ugyanis, hogy e két magasság közepese, eltekintve természetesen a külön számításbaveendő refractiótól, a pólus magasságával egyenlő. Mivel azonban a két delelés között oly hosszú idő telik el, hogy nem mindkettő egyenlő kényelemmel figyelhető, némi javítás tekintetbevételével a sarkcsillagnak már egyetlen egy magasságmérése is elegendő.

Legyen a 78. ábrában HH a horizont, Z a zenith, P a pólus, S a h magasságban megmért sarkcsillag, mely egy foknál alig nagyobb távolságban áll a pólustól. Az u v p oldalok által képezett derékszögű háromszög síknak tekinthető és ezért

$$u = p \cos t, \quad v = p \sin t.$$

Ugyancsak elég közel tehető:

$$h = \varphi + u,$$

a miből azután

$$\varphi = h - p \cos t$$

következik. Ha valamivel pontosabban járnánk el, ugyanezen módszer szerint

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2} \sin 1'' \operatorname{tang} \varphi \sin^2 t$$

teljesebb egyenlethez jutnánk. A következő, itt is elhanyagolt tag legnagyobb értékben még 1″-et sem tesz ki a mi szélességeink alatt. Természetes, hogy a sarkcsillag lassú mozgása miatt az időnek közelített ismerete elegendő. A Nautisches Jahrbuch oly táblázatot közöl, mely három javítással adja a sarkcsillag bármikor észlelt magasságából a sarkmagasságot.

JORDAN 1873. deczember 30-án a Farafrah oázisban a Polaris (*α* Ursae min.) következő magasságait mérte:

| Chronometer | távcső fekvése I. | | távcső fekvése II. | |
|---|---|---|---|---|
| $4^h\ 31^m\ 8^s$ | bal nonius | $118^0\ 26'\ 40''$ | (átfordítás után) | |
| | jobb „ | $298^0\ 21'\ 20''$ | | |
| $4^h\ 34^m\ 4^s$ | | | bal nonius | $241^0\ 40'\ 0''$ |
| | | | jobb „ | $61^0\ 37'\ 20''$ |
| Közép: $4^h\ 32^m\ 36^s$ | | $I = 298^0\ 24'\ 0''$ | | $II = 241^0\ 38'\ 40'$ |

$$\frac{I - II}{2} = 28^0\ 22'\ 40''$$

s ezen magasság az alkalmazott kettős körfekvés miatt már ment a kör ismeretlen zenithhibájától. Az óra állása $\triangle t = + 56^m\ 33^s$ lévén, az ezen leolvasáshoz tartozó középidő $= 5^h\ 29^m\ 9^s$. A léghőmérséklet $+ 11^0$ C, a légnyomás 764 mm., tehát a refractió 1′ 48″, a mivel a valódi magasság

$$h = 28^0\ 20'\ 52''.$$

A Naut. Jahrb. szerint: a csillagidő a greenwichi délben $= 18^h\ 35^m\ 59^s$ és ennélfogva Farafrah-n, melynek hossza körülbelül $1^h\ 52^m$ E. Greenw. $18^s$-val kisebb; vagy $\theta_0 = 18^h\ 35^m\ 41^s$. E napon továbbá ugyanazon táblázatok szerint

$$\alpha = 1^h\ 12^m\ 27^s \text{ és } \delta = 88^0\ 38'\ 33''$$

$$\text{vagy } p = 90^0 - \delta = 1^0\ 21'\ 27'' = 4887''.$$

| | | |
|---|---|---|
| Közép helyi idő | $5^h\,29^m\;9^s$ | $\log p = 3{\cdot}6890$ |
| red. csillagidőre | $+\,54^s$ | $\lg \cos t = 9{\cdot}9814$ |
| Csillagidő Farafrah delében | $18^h\,35^m\,41^s$ | $\lg p \cos t = 3{\cdot}6704$ |
| helyi csillagidő | $24^h\;5^m\,44^s$ | $p \cos t = 4681'' = 1^0 18' 1''$ |
| | | $\varphi = 28^0\,20'\,52'' - 1^0 18' 1''$ |
| | | $= 27^0\,2'\,51''$ |
| rectascensió $\alpha$ | $1^h\,12^m\,27^s$ | $\lg \frac{1}{2} = 9{\cdot}6990$ |
| óraszög $t$ | $22^h\,53^m\,17^s$ | $\lg p^2 = 7{\cdot}3780$ |
| | $= 343^0\,19'\,15''$ | $\lg \sin 1'' = 4{\cdot}6856$ |
| | | $\lg \operatorname{tang} \varphi = 9{\cdot}7081$ |
| | | $\lg \sin^2 t = 8{\cdot}9158$ |
| | | $0{\cdot}3865$ |

$$\frac{p^2}{2} \sin 1'' \operatorname{tg} \varphi \sin^2 t = +\,2''.4$$

a mivel az előzetes szélesség $27^0\;2'\;51''$ ad

$$\varphi = 27^0\;2'\;53''.$$

Mind e módszerek függetlenek az idő ismeretétől, vagy annak legalább csak durván közelített ismeretét tételezik fel. De megállapíthatjuk az időt és a geographiai szélességet együttesen is két csillagnak megmért magasságából, vagy ugyanazon csillagnak két magasságából, melyek mérése között $t$ idő folyt el (Douwes feladata). Az ilyen s hasonló feladatok rendkívül elegáns képletekkel oldhatók meg, de inkább mathematikai játék, mint gyakorlati igényekből keletkeztek.

A szélesség egyetlen csillagmagasságból is számítható, melyet pontosan ismert órában eszközöltünk; ekkor ugyanis a magasság képletéből következik

$$\sin \delta = M \cos m \quad \text{és} \quad \cos \delta \cos t = M \sin m$$

téve:

$$\sin h = M \sin (\varphi + m).$$

1875. febr. 26-án figyelték Port-Ross-ban Auckland szigetén (Vénus expeditiói állomás) prismakör és mesterséges horizont segítségével a Nap délelőtti magasságát. A Nap alsó és felső szélének beállítása volt

$$20^h\,37^m\;6^s.0 \text{ óraidőkor } 83^0\,21'\,40''$$
$$37^m\,57^s.5 \qquad\qquad 84^0\,37'\,40''.$$

Az indexjavítás — 32″, tehát a leolvasások közepei, melyek a Nap középpontjára vonatkoznak: $20^h\,37^m\,31^s.75$ és $83^0\,59'\,8''$ és ennek fele: $41^0\,59'\,34''$. A refractio és parallaxis $-1'4'' + 7''$ a mivel a kiigazított magasság

$$h = 41^0\,58'\,37''.$$

Az óra állása $+54^s.78$ lévén, a hozzátartozó pontos idő $t = 20^h\,38^m\,26^s.53$, a mi körülbelül $11^h\,11^m$ kp. greenw. időnek felel meg, miután a megfigyelési hely hossza mintegy $11^h\,5^m$ E. Greenw. Ez időben a Nap helyzete: $\alpha = 22^h\,34^m\,49^s.9$ és $\delta = -8^0\,57'\,15''.5$ A Nap óraszöge $t = \theta - \alpha$, tehát $20^h\,38^m\,26^s.53 - 22^h\,34^m\,49^s.9 = -1^h\,56^m\,23^s.4 = -29^0\,5'\,51''$.

| | |
|---|---|
| $\lg\cos\delta = 9{\cdot}9946$ | $\lg\operatorname{tang} m = 0{\cdot}7439_n$ |
| $\lg\cos t = 9{\cdot}9414$ | $m = 180^0 - 79^0\,46'.57 = 100^0\,13'.43$ |
| $\lg(M\sin m) = 9{\cdot}9360$ | $\lg(M\sin m) = 9{\cdot}9360$ |
| $\lg(M\cos m) = 9{\cdot}1921_n$ | $\lg\sin m = 9{\cdot}9930$ |
| | $\lg M = 9{\cdot}9430$ |

| | |
|---|---|
| $\log\sin h = 9{\cdot}8253$ | $\varphi + m = 49^0\,41'.8$ |
| $\lg M = 9{\cdot}9430$ | $m = 100^0\,13'.4$ |
| $\lg\sin(\varphi + m) = 9{\cdot}8823$ | $\varphi = -50^0\,31'{\cdot}6$ |

A módszer csak a meridián közelében alkalmazható s mellőzendő, ha $\varphi$ igen kicsiny.

A sarkmagasság apró periodikus változásai ma rendkívül nagy fontossággal bírnak s ezért ezek meghatározása külön, nagyon pontos megfigyelési módszert s műszert is létesített (Talcot-Horrebow-féle módszer), mely lényegesen csak a libella használatára támaszkodik.

## XI. FEJEZET.

## Iránymeghatározások.

Az azimuthmeghatározás vagy a meridián kitüzése szintén fontos mathematikai geographiai feladat, melynek megoldását ismét az astronomia közvetíti.

Ha a helyesen felállított theodolittal beállítunk egy t óra-szöglettel bíró égi testet, akkor ennek azimuthja a csillagászati háromszögre alkalmazott cotangens-tétel értelmében

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\sin\varphi \cos t - \operatorname{tang}\delta \cos\varphi}{\sin t}$$

kiszámítható; ha a vízszintes kör leolvasása A volt, akkor a — A a theodolit azimuthjavítása, mely addig, míg a műszeren változás nem esik, minden leolvasott vízszintes szöglethez adandó, hogy a csillagászati azimuthot nyerjük. Ha a távcsövet vertikális tengelye körül forgatva a körnek A — a osztási vonalára állítjuk, a távcső természetesen a meridiánban áll.

A távcső ez állásában már könnyű valamely meridiánjelt (mire) felállítani, mely a többi méréseknél az azimuthok kezdőpontját jelöli. Természetes, hogy minden más, ily módon meghatározott azimuthtal bíró földi tárgy (torony, vagy falba illesztett jel) mire gyanánt szolgálhat.

1891. szeptember 18-án délelőtt $10^h\ 29^m\ 52^s$ közép budapesti időben megfigyeltük a Nap középpontjának azimuthját egy theodolit segítségével. Az adott idő az előrehaladó és követő napszél leolvasásának közepére vonatkozik, mely

$$A = 100^0\ 25'\ 30''.$$

Az időegyenlítés e napon ($-1^h\ 16^m$ és $-1^h\ 30^m$ keletre Greenwichtől) $-5^m\ 49^s.2$, a Nap declinatiója $= +1^0\ 55'\ 40''$.

A Nap óraszöge, vagyis a valódi idő $= 10^h\ 29^m\ 52^s - (-5^m\ 49^s.2) = 10^h\ 35^m\ 41^s$ vagy $-1^h\ 24^m\ 19^s = -21^0\ 4'\ 45''$.

$$\begin{array}{llll}
\log\sin\varphi & = 9{\cdot}8676 & \log\operatorname{tg}\delta & = 8.5272 \\
\log\operatorname{cotg} t & = \underline{0{\cdot}4141_n} & \log\cos\varphi & = \underline{9.8297} \\
 & \phantom{=}\ 0{\cdot}2817_n & & \phantom{=}\ 8.3569 \\
\log \text{subtr.} & = \underline{0{\cdot}0146} & \lg\sin t & = \underline{9{\cdot}5559_n} \\
\lg\cot a & = 0.2671_n & & \phantom{=}\ 8.8010_n \quad \lg x = 8{\cdot}5193
\end{array}$$

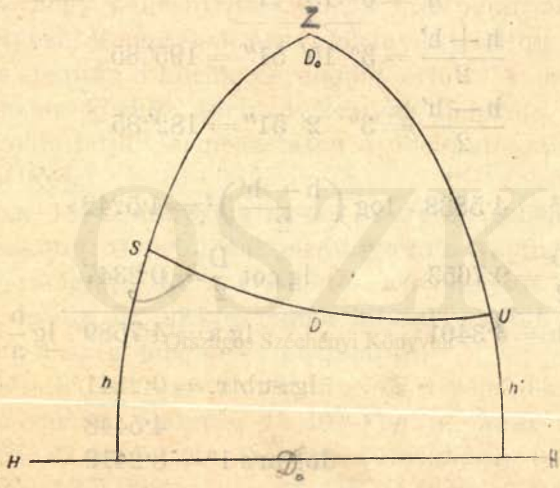
$$a = -28^0\ 23'.9 = 331^0\ 36'.1$$

Ennélfogva minden azimuthleolvasáshoz $a - A = 231^0\ 10'.5$ adandó, hogy a csillagászati azimuthot nyerjük. Ha tehát a távcsövet $128^0\ 49'.5$-ra állítjuk, akkor optikai tengelye a meridiánnal esik össze.

Ha sextánssal észlelünk, akkor természetesen nem vízszintes, hanem általában véve ferde szögleteket mérünk. Legyen a 79. ábrában HH a horizont, Z a zenith. S valamely csillag és U a pont, melynek azimuthja meghatározandó. A sextáns közvetlenül a D távolságot méri, holott S és U azimuthkülönbségét ennek a horizontra vetített $D_0$ íve, vagy a megfelelő $D_0$ szöglet adja. A cosinustétel szerint

$$\cos D = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos D_0$$

a miből $D_0$ kiszámítható; h′ közvetlenül lemérhető, ha földi




79. ábra. Azimuthmeghatározás sextáns segélyével.

tárgyról van szó, h pedig vagy a távolságmérés idejére számítható, vagy segéd által lemérhető, de úgy is járhatunk el, hogy a távolságmérés előtt és után eszközlünk magasságmeghatározást, melynek közepével számolunk.

Azimuthmeghatározásoknál kivánatos, hogy a két h és h′ magasság kicsiny legyen. E feltétel alatt némi számítás után közvetlenül $D_0 - D$ különbsége

$$D_0 - D = \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{D}{2} - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{D}{2}$$

elegáns alakban található.

JORDAN 1883. július 20-án naplemente előtt Niendorfban lemérte a Nap és a Neustadti templom távolságát sextáns segítségével. Az észlelő a keleti tenger partján állott, szeme $4^m$-nyi magasságban a tenger szine felett. $7^h\ 21^m\ 24^s$ közép helyi időben volt a távolság $D = 60^0\,26'\,17''$, és ugyanakkor a Nap látszólagos magassága $H = 6^0\ 18'\ 42''$, a templomtoronyé pedig $16'\ 37''$ a szemhatár felett. A depressió $4^m$ magasság mellett $3'\ 36''$ lévén, $H = 0^0\ 13'\ 1''$. A Nap azimuthja, mint az előbbi példában is kiszámítható; $a = 117^0\ 0'\ 53''$. A fenti egyenlet szerint:

$$h = 6^0\ 18'\ 42''$$
$$h' = 0^0\ 13'\ \ 1''$$

$$\frac{h + h'}{2} = 3^0\ 15'\ 51'' = 195'.85$$

$$\frac{h - h'}{2} = 3^0\ \ 2'\ 51'' = 182'{\cdot}85$$

$$\log\left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 = 4{\cdot}5838 \qquad \log\left(\frac{h-h'}{2}\right)^2 = 4{\cdot}5242$$

$$\lg\tan\frac{D}{2} = 9{\cdot}7653 \qquad \lg\cot\frac{D}{2} = 0{\cdot}2347$$

$$\lg b = 4{\cdot}3491 \qquad \lg a = 4{\cdot}7589 \qquad \lg\frac{b}{a} = 9{\cdot}5902$$

$$\lg \text{subtr.} = 0{\cdot}2141$$
$$4{\cdot}5448$$
$$\log \text{arc}\ 1^0 = 8{\cdot}2419$$
$$\lg(D_0 - D) = 2{\cdot}7867_n$$
$$D_0 - D = -612''.0 = -10'\ 12''$$

A horizontra reducált távolság tehát $D_0 = 60^0\ 26'\ 17'' - 10'\ 12'' = 60^0\ 16'\ 5''$ s ezt a Nap azimuthjához adva, kapjuk a tőle jobbra fekvő torony azimuthját.

$$117^0\ \ 0'\ 53''$$
$$60^0\ 16'\ \ 5''$$
$$a = 177^0\ 16'\ 58''.$$

A correspondeáló magasságok módszere szintén az azimuth, illetve a meridián ismeretére vezet. Állítsuk be theodolittal az égi testet a meridián előtt, olvassuk le vízszintes körét, és ismételjük ez eljárást, ha a csillag a delelés után ugyanazon magasságát éri el. Természetes, hogy a két vízszintes irány felezője a meridiánnak felel meg, feltéve, hogy időközben a csillag declinátióját nem változtatta. A Nap esetében e feltétel nem áll, és ezért javítást kell eszközölni, nevezetesen

$$v' = -\frac{t^m}{3600}\,\frac{\mu}{\sin t \cos \varphi}$$

ívperczet tenni a két vízszintes szög felezőjéhez. A két megfigyelés fél időköze itt perczekben van kifejezve, $\mu$ ismét a Nap órai declinatióváltozása.

Ezen módszer tudományos kivitele annak az egyszerű eljárásnak, hogy concentrikus körök középpontjába függélyes pálczát helyezünk, melynek árnyékirányát jelöljük, ha árnyéka délelőtt és délután a körök peremét érinti. A megfelelő egy és ugyanazon körhöz tartozó irányok felezője a meridián vonalát szolgáltatja, természetesen a declinatióváltozásra való tekintet nélkül.

Jordan 1874. márczius 24-én Chargeh oázisban mágnestűvel összekötött theodolittal megfigyelte a Napnak correspondeáló magasságait. Ha a vízszintes kör helyett a mágnestű állásait olvassuk le, akkor ennek állását kapjuk a meridiánhoz képest, azaz a mágneses declinatiót.

Délelőtt $8^h\ 12^m$-kor volt a tű N és S végének leolvasása: $120^0.86$ és $300^0.90$. Délután $1^h\ 40^m$-kor ugyanazon magasság mellett: $251^0.82$ és $71^0.90$. A négy tűleolvasás közepe $6^0.370$ s a mérések fél időköze $t = 2^h\ 44^m = 164^m = 41^0\ 0'$. A Nap órai declinatióváltozása a Naut. Jahrb. szerint $\mu = +59''.0$ és a megfigyelési hely szélessége $\varphi = 25^0\ 26'$. Ezzel azután a számítás a következő:

$$\begin{array}{lll}
\log t = 2{\cdot}2148 & \log 3600 = 3{\cdot}5563 & \\
\lg \mu = 1{\cdot}7709 & \log \sin t = 9{\cdot}8169 & \log v' = 0{\cdot}6568 \\
\overline{\phantom{\lg \mu =}\ 3{\cdot}9857} & \log \cos \varphi = 9{\cdot}9557 & v' = 4'.54 = -0^0.076. \\
 & \overline{\phantom{\log \cos \varphi =}\ 3{\cdot}3289} &
\end{array}$$

A tű közép leolvasása volt:

$$\begin{array}{r}
6^0.370 \\
v' = -0^0.076,
\end{array}$$

tehát a tű elolvasása a valódi meridiánban $= 6^0.294$ s ez egyszersmind a mágneses declinatió a mondott helyen s időben, feltéve, hogy a theodolit collimatiója s a mágneses tengely eltérése a tű geometriai tengelyétől nullával egyenlő.

Az azimuthmeghatározás legegyszerűbb eszközét ismét a sarkcsillag adja, melynek azimuthja mindig közel $180^0$ marad. A 78. ábrából következik részint SPQ, részint SQZ háromszögekből:

$$v = p \sin t \text{ és } v = a' \cos \varphi,$$

ha az íveket teszszük a sinusok vagy tangensek helyébe, és ezért

$$a' = p \frac{\sin t}{\cos \varphi}.$$

Ha azonban az azimuthokat, mint rendesen délről nyugoton át olvassuk, akkor a' helyébe $180^0 - a$ teendő, s ezért a sarkcsillag közelített azimuthja annak t óraszöge mellett:

$$a = 180^0 - p \frac{\sin t}{\cos \varphi}$$

vagy ugyanily módon tovább vive a pontosságot:

$$a = 180^0 - p \frac{\sin t}{\cos \varphi} - p^2 \sin 1'' \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \sin t \cos t$$

hol az elhanyagolt következő tag maximumban még három ívmásodperczet sem tesz ki.

1874. deczember 12-én Ispahanban figyelték theodolittal és csillagidő szerint járó órával egy mecset azimuthját a sarkcsillaghoz képest. Az eredmény az, hogy $16^h\,19^m\,59^s.0$ csillagidőben a műszerhibák miatt javított azimuthkülönbség $= +8^0\,5'\,16''$. A hely geographiai szélessége $\varphi = +32^0\,38'\,36''$; a sarkcsillag helyzete a mondott napon $\alpha = 1^h\,13^m\,1^s.3$ és $\delta = +88^0\,38'\,50''.8$ vagy $p = 1^0\,21'\,9''.2 = 81'.153$.

| | | |
|---|---|---|
| $\theta = 16^h\,19^m\,59^s.0$ | $\log p = 1{\cdot}9093$ | $\log p^2 = 3{\cdot}8186$ |
| $\alpha = 1^h\,13^m\,1^s.3$ | $\log \sin t = 9{\cdot}8623_n$ | $\lg \sin 1'' = 4{\cdot}6856$ |
| $t = 15^h\,6^m\,57^s.7$ | $1{\cdot}7716_n$ | $\lg \operatorname{tg} \varphi = 9{\cdot}8066$ |

$= 226^0\,44'\,25''.5$ $\quad \log\cos\varphi = 9{\cdot}9253 \quad \log\sin t = 9{\cdot}8623_n$

$1{\cdot}8463_n \quad \lg\cos t = 9{\cdot}8359_n$

$-70'.20 \quad 8{\cdot}0090$

$\log\cos\varphi = 9{\cdot}9253$

$8{\cdot}0837$

$+0'.012$

A poláris azimuthja tehát:

$$180^0 + 70'.20 - 0'.012 = 181^0\ 10'.21$$

| | |
|---|---|
| mecset — sarkcsillag | $= 8^0\ 5'.27$ |
| tehát a mecset azimuthja | $= 189^0\ 15'.48$ |

Ha valamely sark körüli csillag azimuthalis eltérése a pólustól maximum, legnagyobb keleti vagy nyugoti digressióban levőnek mondjuk. Ez theodolittal — hasonlóképen, mint a déli magasság — nagyon könnyen megfigyelhető, s természetes, hogy a két digressió azimuthleolvasásának közepe a $180^0$-os azimuthnak megfelelő vízszintes körleolvasást adja. Mivel (74. ábra) a magassági kör ez esetben a csillag pólustávolságával derékszöget képez, leend az PSZ háromszögből:

$$\cos t = \operatorname{tang} p \operatorname{tang}\varphi$$

vagy p kicsinysége miatt, s ha p ívperczekben, t időperczekben van adva:

$$t = 6^h - \frac{p}{15}\operatorname{tang}\varphi,$$

mint a legnagyobb keleti digressió óraszöge. Az azimuth számára kapunk e pillanatból ugyanazon háromszögből:

$$\sin a = \frac{\sin p}{\cos\varphi}$$

vagy nagyon közel:

$$a = \frac{p}{\cos\varphi},$$

úgy, hogy egyetlen egy digressió megfigyelése is elegendő az azimuth és ezzel a vízszintes kör 0 pontjának meghatározására.

# XII. FEJEZET.

## Geographiai hosszúságmeghatározás.

A hosszúságmeghatározás lényegesen időmeghatározási problema és velejében abban áll, hogy valamely absolut pillanatban beálló jelenséget a két, hosszúságára nézve összehasonlítandó hely helyi ideje szerint jegyezzük.

Ha tehát valamely A helyen $\theta$ helyi csillagidőben messze látható jelt adunk, akkor ezt B helyen $\theta'$ helyi csillagidőkor látjuk, és innen e két idő különbsége a keresett hosszúságkülönbség. Puskaporjelek, egyes ritka esetekben hullócsillagok feltünése vagy elalvása szolgálták régebben e czélt. Ugyancsak felhasználhatók e meghatározásokra közvetlenül a Holdfogyatkozások és a Jupiter holdak sötétülései, a mennyiben a Hold fényének a főbolygó árnyékkúpja által való elvétele csakugyan minden megfigyelő előtt ugyanazon absolut időpontban látható tünemény. Napfogyatkozások, a Hold csillagfödései és ritka esetekben a Merkur vagy Vénus átvonulásai a Nap korongján szintén felhasználhatók, de már csak hoszszadalmas számítások után, minthogy e tünemények parallaktikusak lévén, azaz másmás helyen más időben láthatók lévén, először bonyolódott reductióra van szükségünk. A csillagfödésekre vonatkozólag a teljes számítás a Nautisches Jahrbuch-ban közöltetik.

A Jupiterholdak fogyatkozásait, melyek megfigyelésére már igen kis távcső is elegendő, a Nautisches Jahrbuch greenwichi $t_0$ idő szerint közli. Ha mi tehát ismeretlen helyen a tüneményt beálltát $t - t_0$ idővel előbb vagy utóbb észlelnők, akkor $t - t_0$ lesz helyzetünknek Greenwichhez viszonyított nyugoti vagy keleti hosszúságunk, mely $15^0$-ot számítva egy órára, könnyen ívmértékben is fejezhető ki. Természetes, hogy a megfigyelés a pontos helyi időnek ismeretét feltételezi.

1883. februárius 5-ikén figyelték meg Strassburgban a Jupiter I. holdjának kilépését Jupiter árnyékkúpjából esti $7^h$ $35^m$ $16^s$ közép strassburgi időben. A Naut. Jahrb. szerint e tünemény beálltát $7^h$ $4^m$ $5^s$ greenw. közép időre adja, tehát Strassburg hosszúsága $7^h\,4^m\,5^s - 7^h\,35^m\,16^s = -\,31^m\,11^s$, vagy Strassburg $7^0\,47'\,45''$-czel fekszik keletre Greenwichtől.

A szárazföldön újabb időben az elektromos telegraphot használjuk a legpontosabb hosszúságmeghatározásokra. Ha valamely A és B meridiánkörrel vagy passagecsővel ellátott két állomás egymással telegraphikus összeköttetésben áll, akkor ugyanazon csillagnak az A meridiánkör fonalhálózatán való átmenetel megsürgönyözhető B állomásnak és viszont. A távírókészülék ez esetben az úgynevezett chronograph, azaz két íróemeltyűs Morse-féle telegraph; az egyik íróemelő a helyi órával kapcsolatos, úgy hogy ez másodperczenként egy pontot nyom a gördülő papirszalagra, a másik emelőt a megfigyelő kezében lévő „kulcs"-csal, billentyűvel lenyomja, midőn a csillag a fonalkereszt szálai mögött megy el. Ily módon tehát az A megfelelő jeleit közvetlenül a B órája által hajtott papirra adhatja és megfordítva. Ha azután az A és B-ben volt észlelők még helyet cserélnek s az eljárást ismétlik, a négy megfigyelés közepe ment lesz nemcsak azon késedelemtől, melyet az elektromos áram a vezetékben szenved, hanem az úgynevezett személyi egyenlítéstől is, azaz ama hibától, mely abból áll, hogy minden megfigyelő ugyanazon tüneményt más-más időben fogja fel. Azáltal pedig, hogy mindkét állomáson ugyanazon csillagot választjuk, függetlenek vagyunk még e csillagnak netalán hibás helyismeretétől is.

Példa gyanánt álljon itt azon meghatározás, melyet 1865. április 20-án ν Virginis csillag megfigyelése által Leipzig és Gotha között eszközöltek.

| | A csillag meridiánátmenete | | |
|---|---|---|---|
| | Leipzig-ben | Gothában | hossz-különbség |
| Leipzigi chronograph | $11^h 38^m 53^s.55$ | $11^h 45^m 36^s.98$ | $6^m 43^s.43$ |
| Gothai „ | $11^h 32^m 32^s.74$ | $11^h 39^m 16^s.13$ | $6^m 43^s.39$ |

A két hosszkülönbség eltérésének a fele, $0^s.02$ az áramidő, míg a személyi egyenlítés itt tekintetbe véve nincs.

Utazás közben ezen módszer természetesen csak a legritkább esetekben használható fel; hold- vagy Jupiterhold-fogyatkozások s hasonló tünemények nem állnak mindig kellő számban rendelkezésre, s ezért más módok után kellett keresni. Az angol akadémia a tengeren való hosszúságmeghatározás problemájának megoldására óriási díjat tűzött ki a mult században, melyet Harrison órás és Tobias Mayer csillagász között kellett megosztani. Az első tetemes mértékben javította a chronometereket, úgy hogy az időt még hosszadalmas utazások alatt is jól tartották. Ha ilyen órát, vagy a mi még jobb, a chronometerek egy egész sorozatát elindulásunk előtt greenwichi időre állítjuk be, akkor ismeretlen helyen tett időmeghatározás tüstént szolgáltatja (természetesen az óra ismeretes járásának tekintetbevételével) a greenwichi időhez viszonyított helyi időt, tehát a Greenwichtől való hosszúságunkat. Az órák nagyobb száma természetesen csak ellenőrzésre szolgál.

A hosszúságmeghatározás ezen legegyszerűbb módja van ma alkalmazásban minden hajón, különösen miután hivatalosan kipróbált chronométerek vannak, melyek az Amerikába való utazás alatt pár mp.-nél nagyobb szabálytalan hibát nem ejtenek.

Kreitner gróf Széchenyi Béla keletázsiai utazása közben Szu csou-ban 1879. április 6-án és május 18-án tett időmeghatározásokat. A két napon volt az óra állása:

$$\triangle u = -1^h\,29^m\,59^s.21 \,..\, 1879.\ \text{ápr. 6-án.}$$
$$\triangle u = -1^h\,31^m\ \ 0^s.74 \,..\, 1879.\ \text{máj. 18-án.}$$

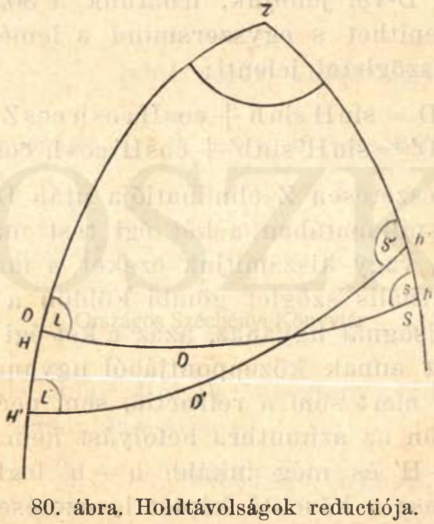
Az időköz $42^d\ 7^h\ 42^m = 42{\cdot}32^d$, a miből a napi járás $\triangle^2 u = -1^s.454$ adódik.

A chronometer április 26-án átvitetett Anszifanba és ott ennek segítségével időmeghatározást eszközöltek, a melynek értelmében a chronometer állása

Anszifanban $8^h\ 7^m\ 42^s$ chronometeridőben: $\triangle u = -1^h\,40^m\,32^s.96$
Ugyanakkor lett volna az állás Szu csou-ban: $-1^h\,30^m\,28^s.30$
tehát az Anszifan — Szu csou hosszkülönbség $= -10^m\ \ 4^s.66$
$= -2^0\,31'\,9''.9.$

A kitűzött díj második részét azonban Mayer csillagász nyerte el a Hold mozgásának tüzetes tanulmányozásáért. A csillagos eget ugyanis egész bátran óra számlapjához hasonlíthatjuk. A csillagok a számok, a mutató a Hold. Ha a mutató járását pontosan ismerjük, akkor akár másodperczre pontosan is mondhatjuk az időt, melyben a Hold egy csillagot elföd, vagy tőle adott távolságra fekszik. A hosszúságmeghatározás elve most már a következő: a Nautisches Jahrbuch greenwichi időre és a Föld középpontjában álló észlelő számára három óráról három órára kiszámítva tartalmazza a Hold középpontjának távolságát a Naptól, a fényesebb bolygóktól és nyolcz állócsillagtól, melyek a holdpálya közelében feküsznek. Ha most valamely ismeretlen helyen t helyi időben a Hold távolságát ugyancsak a Föld középpontjára reducálva, D-nek találjuk, akkor könnyű interpolatió által megismerhetjük azon $t_0$ greenwichi időt, melyben a távolság ~~Greenwichben is~~ a lemért D-vel ~~volna~~ kell egyenlő. Ekkor nyilván $t - t_0$ a helynek hosszkülönbségével egyenlő.

A kivitel természetesen némi, számos táblázat által azonban lehetőleg kényelmessé tett számítást igényel, mert a távolságot csak a Hold szélétől, nem középpontjától mérhetjük, s mert szerepet játszik a refractió, a parallaxis, sőt ez utóbbiban még a Földnek a gömbtől való eltérése is.




H − H' > 0, mert ☾-ra a ge
magasságcsökkentés nagy
mint a refractio mag.
h − h' < 0, mert a Földi
a geoc. magasságot
nagyobb mint a refr.

80. ábra. Holdtávolságok reductiója.

Az újhold körül természetesen egynéhány nap mindig a mérésre alkalmatlan, különben pedig a módszer mindig használható, mihelyt a Hold a horizont felett áll. A pontosság megítélésére szolgáljon azon megjegyzés, hogy a Hold naponkénti közepes mozgása $13^0\,10'\,35''$; $1^h$ alatt tehát $33'$, $1^m$ alatt $33''$-et tesz. Ha a sextáns $10''$-nyi leolvasást enged, akkor az idő is $\frac{1}{3}$ perczre, azaz mintegy $20^s$-ra pontos leend, s gyakorlott megfigyelő, ki a noniuson tizedrészeket tud becsülni, könynyen $10^s$-ra pontos idő-, tehát hosszúságmeghatározást eszközöl. Az utolsó negyed után a Nap-Hold távolságmérésénél a sextáns természetesen osztott lapjával lefelé fordítandó, nehogy a fényes Napot a távcsőben, a mellette gyenge Holdat kétszeres reflexió után kelljen észlelnünk.

Az apróbb javítások levezetésének mellőzésével itt csak azt adjuk, melynek segélyével a mért távolságot geocentrumos távolságra redukáljuk.

Legyen H (80. ábra) a Hold valódi, geoc. H′ látszó magassága, s jelentsék h és h′ ugyanezt a Nap vagy csillag számára. Akkor

$$H - H' = \pi \cos H' - \rho\,; \quad h - h' = \pi' \cos h' - \rho',$$

hol $\pi$ a Hold, $\pi'$ a Nap parallaxisát, $\rho$, $\rho'$ e két égi test refractióját jelenti. Ha $\pi'$ valamely csillagra vonatkozik, akkor természetesen értéke 0. Ha végre a lemért távolságot D′-tel, a geocentrumosat D-vel jelöljük, írhatunk a 80. ábra nyomán, melyben Z a zenithet s egyszersmind a lemért távolsághoz tartozó azimuthszögletet jelenti:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \text{ és}$$
$$\cos D' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos Z,$$

a melyből természetesen Z eliminatiója után D kifejezhető D′ által. A mérés pillanatában a két égi test magasságát vagy egy segéd méri, vagy kiszámítjuk ezeket a magassági képlet által. Az azimuthális szöglet gömbi Földön a látszó és geocentrumos távolságnál ugyanaz, azaz a két égi test úgy a Föld felületéről, mint annak középpontjából ugyanazon magassági körben fekszik, mert sem a refractió, sem pedig a parallaxis gömbalakú földön az azimuthra befolyást nem gyakorol.

Mivel H — H′ és még inkább h — h′ legfölebb $1^0$ lehet, kényelmesebb lesz a közelítő képlet levezetése. Ha

$$H - H' = \triangle H, \quad h - h' = \triangle h \text{ és megfelelőleg: } D - D' = \triangle D,$$

írhatjuk a két szigorú egyenlet elsejét:

$$\cos(D' + \triangle D) = \sin(H' + \triangle H)\sin(h' + \triangle h)$$
$$+ \cos(H' + \triangle H)\cos(h' + \triangle h)\cos Z.$$

Ha a kis $\triangle H$, $\triangle h$ és $\triangle D$ szögletek cosinusait az egységgel teszszük egyenlővé, sinusait pedig az ívvel felcseréljük és két ily kis mennyiség szorzatát, mint másodrendű kicsiny mennyiséget elhanyagoljuk, leszen

$$\cos D' - \triangle D \sin D' = \sin H' \sin h' + \triangle H \sin h' \cos H' + \triangle h \sin H' \cos h$$
$$+ \cos h' \cos H' \cos Z - \triangle H \sin H' \cos h' \cos Z - \triangle h \sin h' \cos H' \cos Z$$

és ebből levonva a két szigorú egyenlet másodikát:

$$-\triangle D \sin D' = \triangle H [\sin h' \cos H' - \sin H' \cos h' \cos Z]$$
$$+ \triangle h [\sin H' \cos h' - \sin h' \cos H' \cos Z].$$

A zárójelben lévő mennyiségeknek egyszerű jelentősége van; a cotangenstétel szerint áll ugyanis:

$$\cot L' \sin Z = - \sin H' \cos Z + \operatorname{tang} h' \cos H'$$

és a sinustétel szerint:

$$\frac{\sin Z}{\sin L'} = \frac{\sin D'}{\cos h'}$$

Ebből következik:

$$\cos L' = \frac{1}{\sin D'} [\sin h' \cos H' - \cos h' \sin H' \cos Z]$$

és teljesen hasonlóan, ha h′ és H′-t felcseréljük s L helyébe S-t írunk:

$$\cos S' = \frac{1}{\sin D'} [\sin H' \cos h' - \sin h' \cos H' \cos Z],$$

a miből végre

$$-\triangle D = \triangle H \cos L' + \triangle h \cos S'.$$

Ha ellenben a D oldal által berekesztett háromszögből indultunk volna ki, hasonlóan állana:

$$-\triangle D = \triangle H \cos L + \triangle h \cos S,$$

úgy, hogy végül L és L′, S és S′ egy középértékével:

$$D - D' = -(H - H') \cos L_0 - (h - h') \cos S_0$$

azon correctió, melyet a lemért D′ távolsághoz kell adni, hogy a refractiótól megszabadult távolságot úgy kapjuk, a mint ezt a gömbalakú Föld középpontjában figyeltük volna. Az $L_0$ és $S_0$ meghatározására a

$$\sin h = \sin H \cos D + \cos h \sin D \cos L_0;$$
$$\sin H = \sin h \cos D + \cos h \sin D \cos S_0$$

egyenleteket alkalmazhatjuk, melyekben D, H és h helyett akár a javított, akár a közvetlenül megfigyelt adatokat tehetjük.

Azonkívül még tekintetbe veendők a következő javítások: a Hold és Nap sugara megváltozik a parallaxis és a sugártörés miatt; a Föld lapultsága a lemért távolságban 10—20″-nyi hibát hozhat létre és abban nyilvánul egyrészt, hogy a $\pi \cos H'$ magassági parallaxis csak durva közelítés, továbbá, hogy sphaeroidos Földön már oldalagos — azimuthra ható — parallaxis is lép fel. Végül pedig a hosszkülönbség számítására ez egyszerű interpolatió helyett még az elég tetemes második különbségekre is kell ügyet vetni. Mindezen javítások a Nautisches Jahrbuch táblázatai segítségével minden további számítás nélkül eszközölhetők.

Jordan 1874. január 9-én délelőtt lemérte sextánssal a Hold és Nap távolságait. Több mérés közepe szerint a Hold és Nap egymás felé fordított széleinek leolvasott távolsága: $9^h\ 6^m\ 50^s$ chronometeridőben volt $D' = 106^0\ 13'\ 13''$. A Hold jobbra állott, a Nap balra. A léghőmérséklet $+17^0$ C, a légnyomás 756 mm. Az indexjavítás és egyéb a sextáns excentrumosságából, a napüvegek prismatikus hibáiból keletkező javítások $-8'\ 24''$, úgy hogy a mérés eredménye:

1874. jan. 8. chronometer $21^h\ 6^m\ 50^s$-kor távolság $= 106^0 4'\ 49'' = D'$.

A megfigyelési hely geographiai szélessége $\varphi = +25^0 42'\ 0''$ és a hosszúság az úti naplóból levezetve körülbelül $\lambda = 1^h\ 56^m\ 0^s$ E Greenwich. Az óra állása correspondeáló napmagasságokból levezetve: $\triangle u = +1^h\ 0^m\ 22^s$.

| | | |
|---|---|---|
| A megfigyelés ideje: chronometer | $=$ | $21^h\ 6^m\ 50^s$ 1874. jan. 8. |
| chronometer állása $\triangle u$ | $=$ | $+1^h\ 0^m\ 22^s$ |
| Közép helyi idő | $=$ | $22^h\ 7^m\ 12^s$ |
| Közelített hosszúság Greenwichhez | $=$ | $-1^h\ 56^m\ 0^s$ |
| A megfigyelés közép greenw. ideje | $=$ | $20^h\ 11^m\ 12^s$. |

Ezen adatokkal interpolálható már a Hold és Nap helye a Naut. Jahrb.-ból.

$$\alpha_☾ = 12^h\ 15^m\ 40^s,\quad \delta_☾ = +1^0\ 49'\ 18'';$$

$$\delta_\odot = -22^0\ 6'\ 52'';\quad g = +7^m\ 22^s.$$

Ezekből a Hold és Nap óraszöge: $t_☾ = 5^h\, 6^m\, 19^s = 76^0\, 34'\, 45''$ és $t_⊙ = 21^h\, 59^m\, 50^s = 329^0\, 57'\, 30''$, a mikkel most már a Hold és Nap valódi magasságai számíthatók:

| | Hold | Nap |
|---|---|---|
| valódi magasság | $H = 12^0\ 52'$ | $h = 34^0\ 1'$ |
| azimuth | $a = 85^0\ 46'$ | $a_⊙ = 325^0\, 58'$. |

$$Z = a_☾ - a_⊙ = (360^0 + 85^0\, 46') - 325^0\, 58' = 119^0\, 48'.$$

Ugyancsak a Naut. Jahrbuchból kiveendő még: a holdparallaxis $\pi = 54'\, 12''$; a holdsugár $14'\, 47''$; a napsugár $16'\, 18''$ és a legközelebb eső, benne előreszámított holdtávolság $XVIII^h$ greenwichi időre $107^0\ 3'\ 13''$ a megfelelő proportionális logarithmussal: 0·3483.

A következő számításnál az apró correctiók, melyek a szövegben csak névleg vannak megemlítve, az évkönyv különböző táblázataiból kivehetők. A számítás legkényelmesebb elrendezése:

Dachel oázis 1874. jan. 9. délelőtt. $\varphi = +25^0\, 42'$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☾ hor. parall. (Naut. Jahrb.) | $\pi = 54'\, 12'' = 3252''$ | | $\lg\pi = 3{\cdot}5122$ |
| ☾ valódi magassága | $H = 12^0\, 52'$ | | $\log\cos H'' = 9{\cdot}9904$ |
| javítás: $p_0 = \pi\cos H$ | $-p_0 = -53'$ | | $\log p = 3{\cdot}5026$ |
| $H'$ | $= 11^0\, 59'$ | | $p = 3181'' = 53'\ 1''$ |
| javítás (Naut. J. tábla XVIII) | $+1'$ | javítás (t. XIX) $=$ | $-2''$ |
| $H'' =$ | $12^0\ 0'$ | $p =$ | $52'\, 59''$. |

| | | Hold | | Nap |
|---|---|---|---|---|
| Valódi magasság | | $12^0\, 52'$ | | $34^0\, 1'$ |
| Magassági parallaxis | | $-52'\, 59''$ | | $-8''$ |
| Val. magasság a refr. számítására | | $11^0\, 59'\ 1''$ | | $34^0\, 1'\, 52''$ |
| Közép refractio (VII. tábla) | $4'\, 24''$ | | $1'\, 25''$ | |
| javítás $+17^0$-ért (VIII. tábla) | $-7''$ | $= +4'\, 19''$ | $-2''$ | $= +1'\, 24''$ |
| javítás 556 mm.-ért (IX. tábla) | $+2''$ | | $+1''$ | |
| Látszó magasságok | | $12^0\ 3'\, 20''$ | | $34^0\, 2'\, 16''$ |
| Magassági különbség | | $\triangle H = +48'\, 40'' = +2920''$ | | $\triangle h = -1'\, 16'' = -76''$ |

| | |
|---|---|
| Lemért távolsága a széleknek: | $106^0 13' 13''$ |
| Indexjavítás stb. | $-8' 24''$ |
| A szélek látszó távola | $106^0 \; 4' 49''$ |
| Holdsugár | $+14' 47''$ |
| javítása (Naut. J. XII. tábl.) = | $+3''$ |
| javítása (Naut. J. XV. tábl.) = | $-2''$ |
| Napsugár | $+16' 18''$ |
| javítás (Naut. J. XV. tábl.) | $0''$ |
| Középpontok távolsága | $D' = 106^0 35' 55''$ |

A XV. táblázatból veendő javításnak egyelőre elhanyagolása mellett $D' = 106^0 36'$ kerek számban. Ezzel számítandó a távolságnak a vertikális körrel képezett szöge.

| | Távolság | Holdmagasság | Napmagasság |
|---|---|---|---|
| val. közelít. | $D = 106^0 \; 4'$ | $12^0 52'$ | $34^0 1'$ |
| látszó | $D' = 106^0 36'$ | $12^0 \; 3'$ | $34^0 2'$ |
| közép | $D_0 = 106^0 20'$ | $H_0 = 12^0 28'$ | $h_0 = 34^0 2'$ |

| | |
|---|---|
| Hold azimuthja | $85^0 46'$ |
| Nap azimuthja | $325^0 58'$ |
| Z zenithális szög = | $119^0 48'$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log \sin Z$ | $= 9{\cdot}9384$ | $\log \sin Z$ | $= 9{\cdot}9384$ |
| $\log \cos h_0$ | $= 9{\cdot}9184$ | $\log \cos H_0$ | $= 9{\cdot}9897$ |
| | $9{\cdot}8568$ | | $9{\cdot}9281$ |
| $\log \sin D_0$ | $= 9{\cdot}9821$ | $\log \sin D_0$ | $= 9{\cdot}9821$ |
| $\log \sin L$ | $= 9{\cdot}8747$; $L = 48^0 32'$ | $\log \sin S$ | $= 9{\cdot}9460$; $S = 62^0 1'$ |
| $\log \cos L$ | $= 9{\cdot}8210$ | $\log \cos S$ | $= 9{\cdot}6714$ |
| $\lg \triangle H$ | $= 3{\cdot}4654$ | $\lg \triangle h$ | $= 1{\cdot}8808_n$ |
| $\lg(\triangle H \cos L)$ | $= 3{\cdot}2864$ | $\lg(\triangle h \cos S)$ | $= 1{\cdot}5522_n$ |

$\triangle H \cos L = +1934'' = 32' 14''$ $\qquad \triangle h \cos S = -36''$

$$\triangle H \cos L + \triangle h \cos S = +31' 38''.$$

Most folytatható a számítás:

| | |
|---|---|
| Középpontok távolsága | $D' = 106^0\ 35'\ 55''$ |
| $-(\triangle H \cos L + \triangle h \cos S) =$ | $-\ 31'\ 38''$ |
| | $106^0\ 4'\ 17''$ |
| javítás (Naut. J. XX. és XXI. tábl.) | $-6''$ |
| Reducált távolság $D =$ | $106^0\ 4'\ 11''$ |
| Legközel. távolság a Naut. J.-ban | $107^0\ 3'\ 13''$ |
| $\triangle D =$ | $0^0\ 59'\ 2'' = 3542'$ |

| | | |
|---|---|---|
| $XVIII^h$ számára: | Prop. Log. | $= 0{\cdot}3483$ |
| | $\log \triangle D$ | $= 3{\cdot}5492$ |
| | $\lg \triangle T$ | $= 3{\cdot}8975$ |

| | |
|---|---|
| $\triangle T = 7898^s =$ | $2^h\ 11^m\ 38^s$ |
| javít. II. Diff. miatt (Naut. J. I.) | $0^s$ |
| Greenw. idő: $XVIII^h + \triangle T =$ | $20^h\ 11^m\ 38^s$ |
| Közép helyi idő | $22^h\ 7^m\ 12^s$ |
| Hosszkülömbség $\lambda =$ | $-1^h\ 55^m\ 34^s = 28^0\ 53'\ 30''$ EGreenw. |

A Holdat még más irányban lehet hosszúságmeghatározásokra felhasználni, az által, hogy a Holdnak egyszerűen magasságát mérjük megadott helyi időben. Természetes ugyanis, hogy a Hold, míg helyzetünknek megfelelő óraszögéből Greenwich ugyanazon óraszögébe jut, már tetemes mozgást végzett a csillagok között, melynek folytán már egyenlő helyi időkben még egyenlő geographiai szélesség alatt sem mutathatja ugyanazon magasságot. A lemért magasság összehasonlítása a geocentrumos ~~greenwichi,~~ az évkönyvből bárminő időpillanatra kiszámítható magassággal szintén módot nyújt a hosszúságkülömbség meghatározására.

Maga az eljárás elég egyszerű. A megfigyelés pillanata számára kiveszszük az évkönyvből, mint a holdtávolságok esetében is $\alpha$, $\delta$, $\pi$ és r-t és azonkívül $\alpha$ és $\delta$-nak $1^m$ középidő alatti változását, $\triangle\alpha$ és $\triangle\delta$-t. A hosszúság közelítő értéke legyen $\lambda$, annak javítása $\triangle\lambda$. Számítsuk:

$h' = h \mp r'$ a szerint, a mint a Hold $\frac{\text{felső}}{\text{alsó}}$ szélét észleltük; ebben

$$r' = r + gr^2 \sin h + \tfrac{1}{2} g^2 r^3 + \tfrac{1}{2} g^2 r^3 \sin^2 h$$

$$\text{és } \log g = 5{\cdot}2495 - 10.$$

Továbbá

$$\pi' = \pi (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi), \text{ hol } \lg e^2 = 7{\cdot}8244 - 10.$$

Ha még

$$\delta_1 = \delta + e^2 \pi_1 \sin\varphi \cos\delta\,; \; h_1 = h' + \pi_1 \cos h',$$

$$\sin\frac{t}{2} = \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}\,[90^0 - h_1 + (\varphi - \delta_1)] \sin\frac{1}{2}\,[90^0 - h_1 - (\varphi - \delta_1)]}{\cos\varphi \cos\delta_1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

és

$$\alpha_1 = T + \triangle t \pm \frac{t}{15},$$

a szerint, a mint a Hold a meridián $\frac{\text{előtt}}{\text{után}}$ észleltetett. Ezek után időminutákban kifejezve leend:

$$\triangle\lambda = \pm \frac{\alpha - \alpha_1}{\triangle\alpha + \frac{\triangle\delta}{15}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} t}\right)},$$

hol a felső (vagy alsó) előjel keleti (vagy nyugoti) hosszúság esetében érvényes.

1889. november 12-én figyelték meg Strassburgban a Hold delelése előtt annak magasságát theodolittal. Több leolvasás közepe szerint a Hold alsó széle leolvasott magassága $2^h\ 27^m\ 39^s.67$ óraidőkor (csillagidő szerint) $30^0\ 20'\ 1''.5$ volt. A kör nullpontja már eliminálva van, mivel a megfigyelések, melyeknek a közepe itt szerepel, a távcső két fekvésében eszközöltettek. A refractió $1'\ 42''.6$, tehát a sugártöréstől megszabadított magasság: $h = 30^0\ 18'\ 18''.9$.

A megfigyelési hely fekvése $\varphi = +48^0\ 35''\ 0''.2$ és közelítve $\lambda = -30^m\ 30^s$, a mivel az egyidejű időmeghatározás szerint az óra állása $\triangle t = +21^m\ 37^s.69$. A megfigyelés adatai tehát: $T = 2^h\ 49^m\ 17^s.36$, $h = 30^0\ 18'\ 18''.9$. Ezen időnek megfelelő középidőben volt az ephemeris gyűjtemény szerint:

$$\alpha = 7^h\ 23^m\ 41^s.86, \; \delta = +23^0\ 27'\ 21''.7,$$

$$\pi = 54'\ 7''.3 \text{ és } r = 14'\ 46''.3 = 886''.3.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log g$ | $= 5{\cdot}2495$ | $\log \frac{1}{2}$ | $= 9{\cdot}6990$ | $\log \frac{1}{2}$ | $= 9{\cdot}6990$ |
| $\log r^2$ | $= 5{\cdot}8950$ | $\log g^2$ | $= 0{\cdot}4990$ | $\log g^2$ | $= 0{\cdot}4990$ |
| $\lg \sin h$ | $= 9{\cdot}7029$ | $\log r^3$ | $= 8{\cdot}8425$ | $\log r^3$ | $= 8{\cdot}8425$ |
| | $0{\cdot}8474$ | | $9{\cdot}0405$ | $\log \sin^2 h$ | $= 9{\cdot}4058$ |
| $g r^2 \sin h$ | $= 7''.04$ | $\frac{1}{2} g^2 r^3$ | $= 0''.11$ | | $8{\cdot}4463$ |
| | | | | $\frac{1}{2} g^2 r^3 \sin^2 h$ | $= 0''.03$ |

$$r' = 14'\,46''.3 + 7''.04 + 0''.11 + 0''.03 = 14'\,53''.5;$$

$$h' = h + r' = 30^0\,33'\,12''.4.$$

| | |
|---|---|
| $\log \pi$ | $= 3{\cdot}5115$ |
| $\frac{1}{2} \lg e^2$ | $= 7{\cdot}5234$ |
| $\lg \sin^2 \varphi$ | $= 9{\cdot}7500$ |
| | $0{\cdot}7849$ |
| | $6''.1$ |

$\pi_1 = \pi - 6''.1 = 54'\,1''.2$ (mint ez a XIX. táblából is kivehető számítás nélkül).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lg e^2$ | $= 7{\cdot}8244$ | $\log \pi_1$ | $= 3{\cdot}5107$ |
| $\lg \pi_1$ | $= 3{\cdot}5107$ | $\log \cos h'$ | $= 9{\cdot}9351$ |
| $\lg \sin \varphi$ | $= 9{\cdot}8750$ | | $3{\cdot}4458$ |
| $\log \cos \delta$ | $= 9{\cdot}9625$ | | $2791''.6$ |
| | $1{\cdot}1726$ | | $= 46'\,31''.6$ |
| | $14''.9$ | | |

a mely javítások után $\delta_1 = 23^0\,27'\,36''.6$ és $h_1 = 31^0\,19'\,44''.0$.

$$90^0 - h_1 = 58^0\,40'\,16''.0$$
$$\varphi - \delta_1 = 25^0\,7'\,23''.6$$
$$\tfrac{1}{2}[(90^0 - h_1) + (\varphi - \delta_1)] = 41^0\,53'\,49''.8$$
$$\tfrac{1}{2}[90^0 - h_1 - (\varphi - \delta_1)] = 16^0\,46'\,26''.2$$

$$\lg \sin \tfrac{1}{2}[90^0 - h_1 + (\varphi - \delta_1)] = 9.8246$$
$$\lg \sin \tfrac{1}{2}[90^0 - h_1 - (\varphi - \delta_1)] = 9{\cdot}4603$$
$$9{\cdot}2849$$

$$\log \cos \delta_1 = 9{\cdot}9625$$
$$\log \cos \varphi = 9{\cdot}8205$$
$$9{\cdot}7830$$

$$\lg \sin^2 \frac{t}{2} = 9{\cdot}5019$$

$$\lg \sin \frac{t}{2} = 9{\cdot}7509_5$$

$$\frac{t}{2} = 34^0\ 18'.2$$

$$t = 68^0\ 36'.4\ ;\quad \frac{t}{15} = 4^h\ 34^m\ 25^s.60$$

$$\begin{array}{lcr} T + \triangle t & = & 2^h\ 49^m\ 17^s.36 \\ +\frac{t}{15} & = & +\ 4^h\ 34^m\ 25^s.60 \\ \hline \alpha_1 & = & 7^h\ 23^m\ 42^s.96 \\ \alpha & = & 7^h\ 23^m\ 41^s.86 \\ \hline \alpha - \alpha_1 & = & -\ 1^s.10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log tg\,\varphi = 0{\cdot}0545 & \log tg\,\delta = 9{\cdot}6374 \\ \underline{\lg \sin t\ = 9{\cdot}9690} & \underline{\log tg\,t = 9{\cdot}4070} \\ \qquad\qquad 0{\cdot}0855 & \qquad\qquad 0{\cdot}2304 \qquad \log x\ = 9{\cdot}8551 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log subtr. & = 0{\cdot}5472 \\ & \overline{\ \ 9{\cdot}6832} \\ \log \triangle\delta & = 0{\cdot}2014_n \\ \log 15 & = \underline{1{\cdot}1761} \\ & \quad 8{\cdot}7085_n \end{array}$$

$$\log quot = 8{\cdot}3773$$

$$\begin{array}{ll} \log \triangle\alpha & = 0{\cdot}3312 \\ \log subtr. & = \underline{0{\cdot}0104} \end{array}$$

$$\log\left[\triangle\alpha + \frac{\triangle\delta}{15}\left(\frac{tg\,\varphi}{\sin t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}\right)\right] = 0{\cdot}3208$$

$$\begin{array}{ll} \log(\alpha - \alpha_1) & = \underline{0{\cdot}0414_n} \\ \lg \triangle\lambda & = 9{\cdot}7206_n \end{array}$$

$$\triangle\lambda = -\,0^m.525 = -\,0^m\ 31^s.50.$$

A valódi hosszúság tehát $= \lambda + \triangle\lambda = -\,30^m\ 30^s - 0^m\ 31^s.50 =$ $-\,31^m\ 1^s.50.$

A csillagfödésekre és holdculminatiókra vonatkozó módszerek végett bővebb munkák tekintendők meg. A csillagfödésekre vonatkozólag maga a Nautisches Jahrbuch is megadja példa kiséretében a kellő számítási utasításokat.

Úgy az idő-, mint a szélesség- és hosszúságmeghatározás, valamint a meridián kitűzése tisztán csillagászati feladat, melybe,

mint láttuk, a Föld alakjának kérdése bele sem játszik. A hol a Föld alakjáról e feladatokban említés esett, csupán correctió-mennyiségek forogtak szóban, melyek tekintetbevételére a Föld alakjának ismerete untos-untig elég pontos. E meghatározások tehát a Föld bármily, akár szabálytalan alakja mellett is érvényesek még, s ezért jó lesz a Föld geometriai beosztását geometriai alapon elejtenünk és helyette phoronomiai értelmezést behoznunk. Ily értelemben mondhatjuk, hogy a parallelkörök az egyenlő sarkmagassággal, a meridiánok az egyenidejű deleléssel bíró pontok összeségei, mely definitió még akkor is helyes marad, ha e görbék többé nem körök vagy ellipsisek, hanem
creatiók
minden geometriai törvény nélkül szűkölködő képletek.

Azonban a helymeghatározás ezen feladatok megoldásával nincs teljesítve tökéletesen, még egy távolsági adatra is van szükségünk, t. i. a megfigyelő helynek távolságára a Föld középpontjától, vagy a Föld valamely másik kezdetül választott pontjától. Addig, míg a Földet geometriai testtel, gömbbel, sphaeroiddal vagy akár háromtengelyű ellipsoiddal azonosítjuk, e távolság a felület általános méreteiből és a geographiai fekvésből számítás útján meghatározható; e feltevés elejtése után azonban már csak külön észleletekből nyerhető.

## XIII. FEJEZET.

# Csillagászati műszer-elmélet.

Egyetlenegy, megfigyelésekre utalt tudományág sem mutatja jobban a műszerek pontos tanulmányozásának szükségét, mint az astronomia, s ezért legalább a theodolit s sextáns elméletébe való bevezetés helyén való leend. Tanulhatjuk ebből általában is azt, hogy mérés előtt és közben minden műszer folytonos ellenőrzést igényel, s hogy gondos tanulmányozás nélkül értékeket ad, melyek inkább félrevezetnek, semhogy tanítanának.

A csillagászati műszerek között első helyet foglal el az óra, a mely — a szerint, a mint közép- vagy csillagidőt mutat — a közép Nap vagy a tavaszi aequinoctium-pont mindenkori óraszögét adja. Utolsó elemzésben tehát oly távcsőnek tekinthető, melynek optikai tengelye — a mutató — mindig a kérdéses pontra van beállítva, míg a távcső forgási szöglete a távcső körén — az óra számlapján — leolvasható. Utazásoknál természetesen csak chronometer szerepel, míg az állandó csillagdákon az ingás óra a használatos. A mennyiben minden óra nem a pontos helyi közép- vagy csillagidőt mutatja, meg kell állapítani az óra állását és különbséget kell tenni a valódi, helyes idő és az óra által mutatott chronometeridő között. Az állás definitiója:

$$\text{állás} = \triangle t = \text{helyes idő} - \text{chronometeridő}.$$

Ha egymásra következő napokon tett időmeghatározásokból a $t_1, t_2, t_3$ .. időkhez tartozó $\triangle t_1, \triangle t_2$ .. állásokat találtuk, akkor

$$\triangle^2 t_1 = \frac{\triangle t_2 - \triangle t_1}{t_2 - t_1}; \quad \triangle^2 t_2 = \frac{\triangle t_3 - \triangle t_2}{t_3 - t_2} \,..$$

az óra 24 órai vagy napi járása. A jó óra esetében ezen járás meglehetősen állandó. Ha tehát valamely óra állása és járása $t_0$ időben $\triangle t_0$ és $\triangle^2 t$, akkor ezen óra állása t időben lesz:

$$\triangle t = \triangle t_0 + (t - t_0) \triangle^2 t,$$

feltéve, hogy $(t - t_0)$ napokban van kifejezve.

1875. januáriusban Auckland szigetén a Venus-expeditió egyik chronometerjével a következő állásokat észlelték:

| | | | |
|---|---|---|---|
| január 4. | $6^h\ 3^m$-kor | = jan. 4·252 | $\triangle t = + 34^s.25$ |
| „ 6. | $7^h\ 7^m$ | 6·297 | $36^s.99$ |
| „ 13. | $5^h\ 20^m$ | 13·222 | $43^s.94$ |

Az időközök az első és harmadik, második és harmadik megfigyelés közt 8·970 és 6·925 nap, a megfelelő állások különbsége pedig $9^s.69$ és $6^s.95$, a miből

$$\triangle^2 t = + 1^s.08 \text{ és } + 1^s.00 \text{ vagy középben } \triangle^2 t = + 1^s.04,$$

ennélfogva pl. az óra állása 1875. január 7-én $8^h\ 10^m$ = jan. 7·340-kor volt:

$$+ 36^s.99 + (\text{jan. } 7{\cdot}340 - \text{jan. } 6{\cdot}297) \times 1^s.04$$

$$= + 36^s.99 + 1^s.08 = + 38^s.07.$$

A libelláról már volt szó; tudjuk, hogy valamely tengelynek hajlását megkapjuk, ha a libellát reá két helyzetben állítjuk és mindig először a buborék körvégét olvassuk le.

A libella skálarészeiben kifejezett és helyes előjellel vett hajlást a következő schema szerint kapjuk: legyen $k_1$ és $t_1$ a körvég és távcső-végen leolvasott buborék-közép; $k_2$ és $t_2$ ugyanazon jelentőséggel bírjon a libella átfektetése után. Ha a libella nullpontja a skála közepén fekszik, lesz:

$$b = \tfrac{1}{4}(k_1 + k_2 - t_1 - t_2);$$

ha ellenben a nullpont az egyik végén van, akkor

$$b = \tfrac{1}{4}(-k_1 + k_2 - t_1 + t_2).$$

A b érték még a libella skálarészének értékével megszorzandó.

A tengelycsapok egyenlőtlenségéről itt bővebben nem akarok szólani; hibájuk szintezéssel könnyen kipuhatolható és minden egyes leolvasásnál a távcső magasságának arányában tekintetbe vehető.

A műszereket hibátlanul elkészíteni, sem felállítani nem lehet. Sőt ha egy pillanatban hibátlan műszer tökéletesen helyesen fel is volna állítva, a másik pillanatban már bizonyos javításokra szorulna, melyeket nem tanácsos az igazító csavarokkal elcorrigálni, hanem sokkal helyesebb e hibák befolyását számítva tekintetbe venni.

A hibaszámításra való utasításokat éppen a műszerek elmélete hivatott megadni.

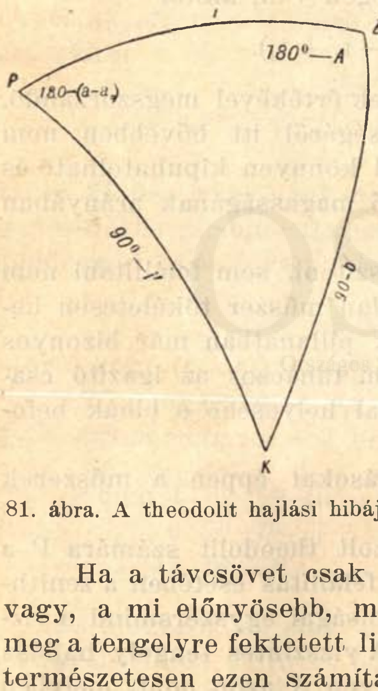
Legyen az 58. ábrában felrajzolt theodolit számára P a vízszintes kör polusa, mely helyes felállítás esetében a zeniththel esnék össze; e pólus zenithtávolságai egyszersmind a vízszintes kör hajlása a horizonthoz. A vízszintes tengely hajlása a vízszintes körhez legyen i′ és legyen K azon pont, melyben a körvég felé meghosszabbított tengely az égboltot találja. E pont magassága legyen b. Miután a horizontális körön csak azimuthkülömbségeket mérünk, ezen azimuthok kezdőpontja tetszőlegesen megválasztható. A vízszintes kör forgatásával P és Z nem változik, ellenben K $360^0$-ot fut be az égen. Az azimutholvasás kiindulási pontjául tehát azon $a_0$ köradatot választjuk, mely leolvasható, midőn K pont P és Z-vel együtt ugyanazon egy vertikális körben fekszik. Legyen továbbá A ugyanazon kezdőponttól, de nem a „vízszintes“ körön, hanem a horizonton mért azimuth. Akkor a P, Z és K pontok által képezett gömbi háromszögben (81. ábra):

$$\sin b = \cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos(a - a_0) \text{ és } \frac{\sin A}{\sin(a - a_0)} = \frac{\cos i'}{\cos b}$$

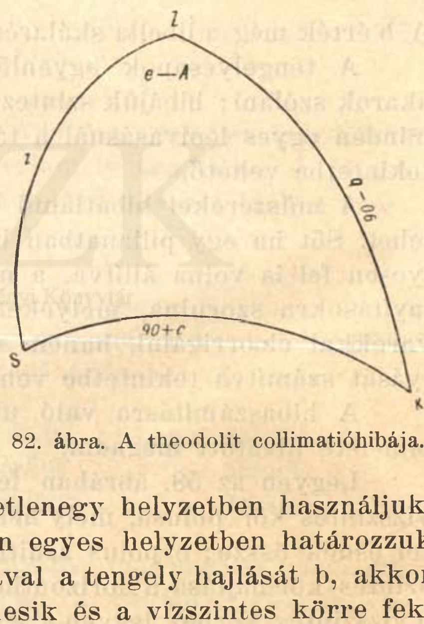
a mi tekintettel az előforduló javítási mennyiségek igen kis értékére:

$$b = i' - i \cos(a - a_0) \text{ és } A = a - a_0$$

alakban is írható.




81. ábra. A theodolit hajlási hibája.




82. ábra. A theodolit collimatióhibája.

Ha a távcsövet csak egyetlenegy helyzetben használjuk, vagy, a mi előnyösebb, minden egyes helyzetben határozzuk meg a tengelyre fektetett libellával a tengely hajlását b, akkor természetesen ezen számítás elesik és a vízszintes körre fektetendő libellára sincsen szükség.

Ha most a távcső (58. ábra) a tengelyére nem merőleges, hanem a körvége felé $90^0 + c$ szögletet képez, újabb, az úgynevezett collimatiójavítás lép fel. Ez a fonalkereszt oldallagos eltolása által tetszés szerint változtatható. Ha a távcsövet az ég egy S pontja felé irányítjuk, melynek zenithtávola z (82. ábra) és azimuthja e, akkor ez a K tengelyvégtől nyilván $90^0 + c$ távolságra fekszik, s leend:

$$-\sin c = \cos z \sin b + \sin z \cos b \cos(e - A)$$

vagy kielégítő közelítéssel:

$$-c = b \cos z + \sin z \cos(e - A).$$

Mivel c és b kicsiny, $\cos(e - A)$ vagy az előbbiek szerint $\cos(e - [a - a_0])$ is az, úgy hogy $90^0 - e + (a - a_0)$ ív felcserélhető a sinusával. Lesz tehát:

$$-c = b \cos z + \sin z . [90^0 - e + (a - a_0)] \text{ .. körbal és}$$

$$-c = b \cos z + \sin z . [90_0 + e - (a - a_0)] \text{ .. körjobb,}$$

mivel a kör osztályzata az azimuthéval egyezvén az egyik helyzetben tehát $e - A$, a távcső megfordítása után ellenben $A - e$ veendő.

Az azimuthmeghatározásra következik ebből e formula:

$$e = A + \triangle A \pm c \operatorname{cosec} z \pm b \cot z,$$

a hol a felső, illetve alsó jel veendő, a szerint, a mint a kör bal vagy jobb oldalt fekszik. $a - a_0 \pm 90^0$ helyébe írtunk $A + \triangle A$, hol A a körön leolvasott azimuth, $\triangle A$ pedig annak eltérése a meridiántól, mely az azimuthmeghatározásoknál mondottak szerint megállapítható.

A hibák, illetve javítások meghatározása most már a következő: b hajlás a műszer minden állásában közvetlenül a libella által meghatározható. Hogy azonban tetszőleges azimuthban ismeretes legyen, végezzünk három hajlásmérést, midőn a vízszintes kör noniusa a tetszőleges a, $a + 120^0$ és $a + 240^0$ azimuthra mutat; a hajlások e helyzetekben legyenek $b_1$, $b_2$ és $b_3$. Akkor:

$$b_1 = i' - i \cos(a - a_0);$$

$$b_2 = i' + \frac{i}{2} \cos(a - a_0) + \tfrac{1}{2} i \sqrt{3} \sin(a - a_0)$$

$$b_3 = i' + \frac{i}{2} \cos(a - a_0) - \tfrac{1}{2} i \sqrt{3} \sin(a - a_0)$$

A három egyenlet összegéből

$$i' = \tfrac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3),$$

és ha a két utolsó egyenlet összegéből levonjuk az első kétszeresét:

$$i\cos(a-a_0)=\tfrac{1}{3}(b_2+b_3-2b_1),$$

ellenben a két utolsó egyenlet különbsége:

$$i\sin(a-a_0)=\frac{1}{\sqrt{3}}(b_2-b_3),$$

mely két egyenletből úgy i, mint $a_0$ adódik. Ezen értékekkel a hajlás

$$b=i'-i\cos(a-a_0)$$

egyenlet segítségével most minden beállított a azimuth számára kiszámítható.

A collimatióhiba megállapítására beállítjuk ugyanazon távoli tárgyat körbal és körjobb helyzetben, mindig leolvasva a vízszintes kört. Ekkor az azimuthmérés két egyenlete:

$$e=A+\triangle A+b\cot z+c\operatorname{cosec} z$$

$$\text{és } e=A'+\triangle A-b'\cot z-c\operatorname{cosec} z$$

s ezek különbségéből:

$$c=\tfrac{1}{2}(A'-A)\sin z-\tfrac{1}{2}(b'+b)\cos z,$$

a mennyiben a második azimuthleolvasás éppen a collimatióhiba miatt az elsőtől különbözik. Látnivaló, hogy a hajlás ismerete e meghatározásra szükséges és tőle csak akkor tekinthetünk el, ha a beállított tárgy a horizontban van.

Ha a theodolit távcsöve nem az osztás középpontjában van, hanem excentrumosan fekszik, akkor közeli tárgyak esetében parallaxis lép fel, mely szintén tekintetbe veendő, s mely a collimatióhibával egyesíthető. Ha ugyanis a távcső távolsága a kör középpontjától d, a tárgy távolsága az eszköztől D, akkor

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{d}{D} \text{ vagy } \psi=\frac{1}{\sin 1''}\,\frac{d}{D}$$

adja azon szögletet, mely alatt a tárgyból nézve a d távolság látszik, és ekkor könnyen beláthatólag a collimatióhiba c helyett $c+\frac{1}{\sin 1''}\frac{d}{D}$ leend. E correctió természetesen mindazon távolságoknál elesik, melyek az eszköz méreteihez képest végteleneknek tekinthetők.

pontosabban: melyekre a korrekciós tag a
szabálytalan mérési hibáknál nem nagyobb

Könnyű és hosszabb távcsövek esetében végül a cső a nehézségi erő befolyása alatt meggörbül egyrészt magában, másodszor meghajlítja a tengelyt is. Mindkét befolyás a collimatióhiba megváltoztatását iparkodik létrehozni, s ezért ez $c + \gamma \cos z$ alakban írható. A $\gamma$ coefficiens nagyon könnyen meghatározható, ha különböző magasságokban lévő tárgyakon határozzuk meg a collimatióhibát. Legalkalmasabbak erre az állócsillagok, csakhogy tekintetbe veendő, hogy a két leolvasás $\tau$ időtartama alatt az azimuth megváltozott. A második leolvasásnál tehát az azimuth már nem $e$, hanem $e'$. Az $e' - e$ különbség az azimuth képletéből $\tau$ időköz ismeretével könynyen meghatározható.

Végül pedig úgy az azimuthális, mint a vertikális kör osztása, s azok leolvasására szánt noniusok vagy mikroskopok hibákkal bírnak, melyek hosszadalmas tanulmányt igényelnek. Azáltal állapíthatók meg, hogy ugyanazon szögletet a kör különböző helyein s a noniusok más-más helyzetében olvassuk le. Mivel az osztás s a mérő csavarok elkészítési módja szerint e hibák a leolvasandó azimuthtal vagy magassággal periodikusan váltakoznak, számukra a következő

$$\begin{aligned}\triangle = a_0 + a_1 \cos\zeta + a_2 \cos 2\zeta + \ldots\\ + b_1 \sin\zeta + b_2 \sin 2\zeta + \ldots\end{aligned}$$

törvény tételezhető fel, melyben az $a_0$, $a_1 \ldots b_1$, $b_2 \ldots$ coefficiensek, mint említők, ugyanazon szöglet többszörös mérése által megállapíthatók. A $\zeta$ itt akár a vízszintes, akár a függélyes körnek azon osztási helyét jelenti, melyen a mérés történt.

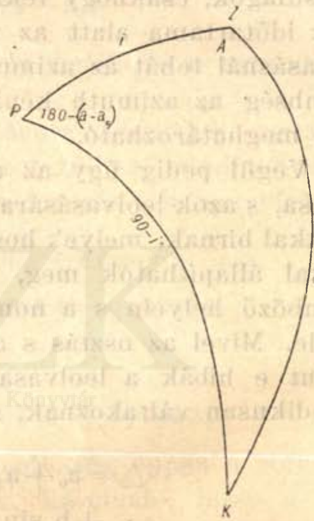
Magasságmérésnél tudvalevőleg beállítjuk a távcsövet és leolvassuk a vertikális kört. Azután forgatjuk a távcsövet azimuthban $180^0$ körül és beirányítjuk ismét. A két leolvasás fél különbsége adja a zeniththávolságot azon feltevés alatt természetesen, hogy $i$, $i'$ és $c$ nullával egyenlők. A hibák befolyását a következő módon vehetjük tekintetbe. Legyen (83. ábra) $P$ a műszer zenithje, $S$ a beállított csillag, melynek zeniththávolsága $\zeta$. $K$ ismét a meghosszabbított tengely metszése az égbolttal. $\zeta$ mértéke csak akkor lesz a vertikális, a

K tengelyen ülő kör leolvasása, ha $KS = KP = 90^0$. Így azonban áll:

$$\cos\zeta = -\sin c \sin i' + \cos c \cos i' \cos\zeta'.$$

A hibák kicsinysége folytán közelített képletet vezetünk le. Ha tekintetbe veszszük, hogy $\cos\zeta' = \cos^2\frac{\zeta'}{2} - \sin^2\frac{\zeta'}{2}$ alakban írható és $\sin c \sin i'$-t $\cos^2\frac{\zeta'}{2} + \sin^2\frac{\zeta'}{2}$ egységértékkel megszorozva lesz:


83. ábra. A theodolit zenithadata.




84. ábra. A zenithtávolság javitása.

$$\cos\zeta = \cos(c + i')\cos^2\frac{\zeta'}{2} - \cos(c - i')\sin^2\frac{\zeta'}{2}.$$

Ha mindkét oldalon $\cos\zeta'$-t levonunk:

$$\cos\zeta - \cos\zeta' = -2\sin\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta')\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta')$$

$$= \cos(c + i')\cos^2\frac{\zeta'}{2} - \cos(c - i')\sin^2\frac{\zeta'}{2} - \cos^2\frac{\zeta'}{2} + \sin^2\frac{\zeta'}{2},$$

vagy összevontan írva:

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta')\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta') = -2\sin^2\tfrac{1}{2}(c + i')\cos^2\frac{\zeta'}{2}$$

$$+ 2\sin^2\tfrac{1}{2}(c - i')\sin^2\frac{\zeta'}{2}$$

és ha most a kis szögek sinusait az ívvel felcseréljük és baloldalt

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta') = \sin\zeta' = 2\sin\frac{\zeta'}{2}\cos\frac{\zeta'}{2}$$

teszünk, a mi $\zeta$ és $\zeta'$ kis különbsége folytán megengedett, leszen

$$\zeta = \zeta' + \left(\frac{c+i'}{2}\right)^2 \cot\frac{\zeta'}{2} - \left(\frac{c-i'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\frac{\zeta'}{2}$$

vagy a négyzeteknek felbontása és kellő összevonás után:

$$\zeta = \zeta' + \frac{c^2+i'^2}{2}\cot\zeta' + c\,i'\operatorname{cosec}\zeta'.$$

De mi a zenithtávolságot nem a műszer P pólusára, hanem a horizont Z pólusára vonatkoztatjuk, s ezt nyilván megkapjuk, ha $i'$ hajlás helyébe a $b = i' - i\cos(a - a_0)$ hajlást teszszük. Csakhogy akkor a magassági kör adatából még azon szög vetülete levonandó, melyet a PZ ív a magassági körön kitesz, s mely a 84. ábrán K-val van jelölve. A 83. és 84. ábra két egymás felé fekvő PK oldal közös ugyan, de a PZ és PS ív nem ugyanazon legnagyobb körben fekszik. E háromszögből

$$\frac{\sin K}{\sin(a-a_0)} = \frac{\sin i}{\cos b} \quad \text{vagy} \quad K = i\sin(a-a_0).$$

E szög kiszámítására külön szükség nincs, mert minden esetben egy a vertikális körhez erősített libellával határozható meg.

Legyen a buborékleolvasás a kör azon oldalán, hol az osztályzat a legmagasabb pontból kiindulva nő p, n a buborék másik végének állása és Z a kör azon pontja, mely a buborék közepének felel meg. Akkor a kör zenithpontja az egyik és másik fekvésben, illetve

$$Z + \tfrac{1}{2}(p - n) \quad \text{és} \quad Z + \tfrac{1}{2}(p' - n')$$

és a két oldalon leolvasott zenithtávolság $\zeta'$ és $\zeta'_1$ igazi zenithtávolságban kifejezve lesz:

$$z' = \zeta' - Z - \tfrac{1}{2}(p-n)\varepsilon \quad \text{és} \quad z' = -\zeta'_1 + Z + \tfrac{1}{2}(p'-n')\varepsilon,$$

hol $\varepsilon$ a libella skálaértékét jelenti. Ezek közepe függetlenül a kör ismeretlen Z pontjától:

$$z' = \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta'_1) - \frac{\varepsilon}{4}[(p-n)-(p'-n')]$$

és ezért a zenithtávolság most már teljes képlete:

$$z = \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta'_1) - \frac{\varepsilon}{4}[(p-n)-(p'-n')]$$
$$+ \frac{c^2+b^2}{2}\sin 1'' \operatorname{cotg} z + bc \sin 1'' \operatorname{cosec} z,$$

a mennyiben az úgy is kicsiny correctiómennyiségekben most már bátran tehető z az előbbi $\zeta'$ helyébe.

Figyelemre méltó körülmény, hogy a theodolit felállítási hibái teljes eredménynyel mennek át az azimuthmérésekbe, míg a magasságmérésekben csak másodrendű mennyiségek gyanánt szerepelnek. Tehát csak némileg is jól felállított eszközzel már 60$^0$ magasságig észlelhetünk, a nélkül, hogy a hajlás és collimatióhibát lelkiismeretesen tekintetbe kellene venni; ellenben nagy gond fordítandó arra, hogy a körön levő libella bejátszék.

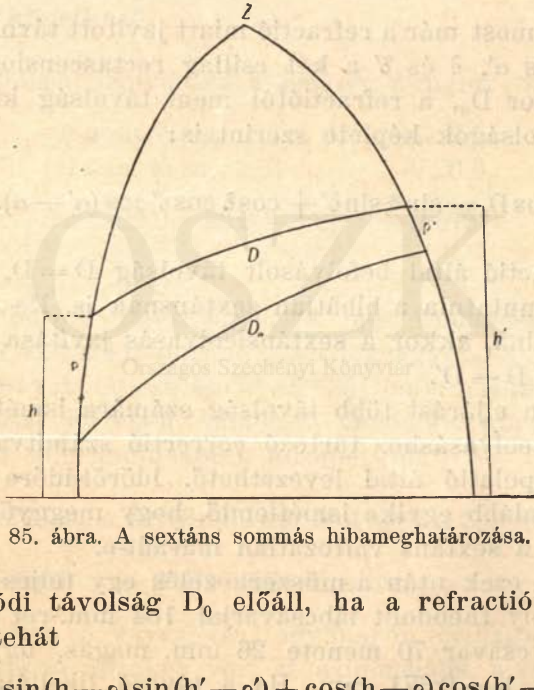
Némely, különösen régibb theodolit éppen az osztási hibákra való tekintettel ismétlő, multiplicatiós körrel bírt. Ezek vertikális tengelye üres, s a fúrásban másik tengely forog, mely körül a műszer ugyancsak concentrikusan az előbbi tengelylyel foroghat. A mérés lényege itt a következő: miután a műszer az egyik pontra be van állítva, köröstül együtt a másik pontra irányítjuk be. Onnan csupán csak a távcsövet forgatjuk vissza az első pontra és ismét köröstül együtt beállítjuk a második pontot s í. t. Ha így n-szer forgattuk vissza a távcsövet, a kört nyilván a lemérendő szöglet n-szeresének megfelelő íven mozgattuk, és mivel a leolvasás csak az n forgatás elején és végén történik, természetes, hogy úgy a leolvasási, mint az esetleges osztási hibák n-edrésze megy át az eredménybe.

A sextáns hibaelméletében hasonlóan járhatunk el; megjegyzendő azonban, hogy a távcső, a kis és nagy tükörnek a sextáns síkjához való hajlása miatt oly hiba jön létre, melynél fogva a sextáns mindig túlságos nagy szögletet mér. E hibák befolyása azonban kicsiny és valamennyire kiigazított eszköz esetében el is hanyagolhatók.

A legkényelmesebb eljárás mindenesetre, mint már egyszer említők, ha az indexhibát mindig külön-külön, a többi hibákat ellenben sommásan, alkalmas és körülbelül egyenletesen haladó csillagtávolságok sorozatának leméréssével határozzuk meg.

Legyen (85. ábra) h és h′ két csillag magassága, Z azok azimuthkülömbsége és D a lemért távolság, akkor

$$\cos D = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos Z.$$




85. ábra. A sextáns sommás hibameghatározása.

A valódi távolság $D_0$ előáll, ha a refractiót tekintetbe veszszük; tehát

$$\cos D_0 = \sin(h-\rho)\sin(h'-\rho') + \cos(h-\rho)\cos(h'-\rho')\cos Z,$$

vagy $\rho\rho'$ szorzat elhanyagolásával és $\sin\rho = \rho$, $\cos\rho = 1$ téve:

$$\cos D_0 = \sin h \sin h' - \rho \sin h' \cos h - \rho' \sin h \cos h'$$

$$+ \cos h \cos h' \cos Z + \rho \sin h \cos h' \cos Z + \rho' \sin h' \cos h \cos Z.$$

Ha ebből levonjuk az első egyenletet és a refractiótörvény értelmében

$$\rho = \alpha \cot h, \quad \rho' = \alpha \cot h', \quad \alpha = 57''.727$$

teszünk, lesz:

$$\cos D_0 - \cos D = \alpha \left\{ -\cos^2 h \frac{\sin h'}{\sin h} - \cos^2 h' \frac{\sin h}{\sin h'} \right.$$
$$\left. + 2 \cos h \cos h' \cos Z \right\}.$$

vagy $\cos^2 h = 1 - \sin^2 h$ téve s $D_0 - D$ sinusát az ívvel felcserélve:

$$D_0 - D = \frac{\alpha}{\sin D} \left\{ \frac{\sin h'}{\sin h} + \frac{\sin h}{\sin h'} - 2 \cos D \right\},$$

mely képlet most már a refractió miatt javított távolságot adja.

Ha $\alpha$ és $\alpha'$, $\delta$ és $\delta'$ a két csillag rectascensiója és declinatiója, akkor $D_0$, a refractiótól ment távolság kiszámítható a gömbi távolságok képlete szerint is:

$$\cos D_0 = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha).$$

A refractió által befolyásolt távolság $D = D_0 - (D_0 - D)$ és ezt kell mutatnia a hibátlan sextánsnak is. Ha ennek leolvasása $D'$ volna, akkor a sextánsleolvasás javítása a kérdéses leolvasásnál $D - D'$.

Ha ezen eljárást több távolság számára ismételjük, minden sextánsleolvasáshoz tartozó correctió számítva vagy graphikai interpolatió által levezethető. Időről-időre azonban a mérések legalább egyike ismétlendő, hogy meggyőződhessünk róla, vajjon a sextáns változatlan maradt-e.

Lássuk ezek után a műszerkezelés egy teljes példáját.

Valamely theodolit lábcsavarjai 184 mm.-rel állnak egymástól, s a csavar 70 menete 26 mm. magas, úgy hogy egy csavarmenet $h = 0{\cdot}371$ mm. Ha a távcső libelláját az alapháromszög magasságának irányában állítjuk és $\frac{1}{8}$ kerülettel, vagy $45^0$-kal csavarjuk a lábcsavart, akkor a libellabuborék közepe 11·46 skálarészt fut be. Ezek szerint

$$p = 5''.237.$$

Ezen libellával meghatározandó most a theodolit E—W irányban álló tengelyének hajlása.

*A)* A libella 0 pontja a közepén van.

A buborék közepének leolvasása a tengely nyugoti-, keleti végén:

| | | |
|---|---|---|
| | $+6{\cdot}8$ | $-7{\cdot}3$ |
| és a libella átfektetése után | $+6{\cdot}0$ | $-8{\cdot}2.$ |

Ennek következtében a W vég hajlása a tengely E végéhez:

$$b = \tfrac{1}{4}(+6{\cdot}8 + 6{\cdot}0 - 7{\cdot}3 - 8{\cdot}2) = -0{\cdot}675 = -3''.53.$$

*B)* Ha ugyanezen libella átmenőleg van osztva, akkor a számítás a következő:

A buborék-közép leolvasása a tengely nyugoti-, keleti végén:

| | | |
|---|---|---|
| 0 pont W-ra | $-\ 6{\cdot}5$ | $-22{\cdot}0$ |
| 0 pont E-ra | $+20{\cdot}6$ | $+\ 5{\cdot}2$ |

$$b = \tfrac{1}{4}(-6{\cdot}5 - 22{\cdot}0 + 20{\cdot}6 + 5{\cdot}2) = -0{\cdot}675 = -3''.53,$$

mint előbb.

1891. február 15-én figyeltük meg Budapesten theodolit segítségével $\alpha$ Ursae minoris-t közel legnagyobb nyugoti digressiója alkalmával. A csillag $6^h\,48^m\,35^s$ helyi csillagidőben volt a fonalkereszt közepén, midőn a theodolit köre balra állt. A vízszintes kör noniusainak közepe volt:

$A = 278^0\,27'\,19$, a vertikális kör leolvasása $\zeta' = 127^0\,45'\,45''$,

a libella pedig $b = -3''.53$ hajlást adott.

Átfektetve a távcsövet, ugyanazon csillagnak a fonalkereszt közepén álltakor volt az azimuthális, a vertikális kör és a libella adata $\theta' = 6^h\,52^m\,53^s$-kor:

$$A' = 278^0\,27'\,45'',\ \zeta'_1 = 43^0\,0'\,15'' \text{ és } b' = -2''.19.$$

Ha ezen időkben számítjuk a sarkcsillag azimuthját, azt találjuk, hogy ez az első leolvasás esetében volt $a = 178^0\,7'\,54''$, a másodikban $a' = 178^0\,7'\,43''$, vagyis $a' = a - 11''$.

A 210. oldalon álló két egyenlet különbsége tehát:

$$a - a' = A - A' + (b + b')' \cot z + 2\,c \operatorname{cosec} z,$$

mely a közölt egyenlettel azonos, ha $a' = a$, a beirányított objectum tehát állandó helyet foglal el. Áll tehát:

$$c = \tfrac{1}{2}[(A' - A) + (a - a')] \sin z - \tfrac{1}{2}(b + b') \cos z.$$

$$A' - A = 26''; \quad a - a' = 11''; \quad b + b' = -5''.72$$

$$\begin{array}{rl} \lg \left\{ \tfrac{1}{2}[(A' - A) + (a - a')] \right\} = & 1{\cdot}2672 \\ \lg \sin z = & 9{\cdot}8287 \\ \hline & 1{\cdot}0959 \\ & +12''.47 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lg [\tfrac{1}{2}(b + b')] = & 0{\cdot}4564_n \\ \log \cos z = & 9{\cdot}8685 \\ \hline & 0{\cdot}3249_n \\ & -2''.11 \end{array}$$

tehát $c = 12''.47 - (-2''.11) = +14''.58.$

A két megfigyelési idő közepére vonatkozólag a zenithtávolság, eltekintve a javításoktól:

$$z = \tfrac{1}{2}\{127^0\,45'\,45'' - 43^0\,0'\,15''\} = 42^0\,22'\,45''.$$

Az $\frac{\varepsilon}{4}[(p - n) - (p' - n')]$ a legtöbb esetben a műszer készítési módjánál fogva teljesen elhagyható. A többi, hajlásból és collimatióból származó correctió, ha most a hajlások közepét veszszük b helyébe:

$$\begin{array}{ll} \lg(b^2 + c^2) = 2{\cdot}3334 & \lg(bc) \quad = 1{\cdot}6202_n \\ \lg \tfrac{1}{2} \sin 1'' = 4{\cdot}3846 & \lg \sin 1'' = 4{\cdot}6856 \\ \lg \cot z \quad = 0{\cdot}0398 & \log \operatorname{cosec} z = 0{\cdot}1713 \\ \hline \qquad\quad 6{\cdot}7578 & \qquad\quad 6{\cdot}4771_n \\ + 0''.000\,57 & - 0''.000\,30 \end{array}$$

A hajláshoz járuló correctió tehát $+0''.000\,57 - 0''.000\,30$, a mely teljesen elhanyagolható. Gyakorlati példában is ki van tehát mutatva, hogy magasságmérések esetében kis hibák befolyást nem gyakorolhatnak.

Mivel végül a Sarkcsillag azimuthja ismeretes, a vízszintes kör azimuthcorrectiója $\triangle a$ is számítható.

Körbal számára (209. oldal):

$$178^0\,7'\,54'' = 278^0\,27'\,19'' + \triangle a + 21''.64 - 3''.87.$$

Körjobb számára:

$$178^0\,7'\,43'' = 278^0\,27'\,45'' + \triangle a - 21''.64 + 2''.40$$

és mindkettőből ugyanazon $\triangle a = -100^0\, 19'\, 42''.8$ következik. Tehát a műszerjavításoktól eltekintve, minden azimuthleolvasáshoz $-100^0\, 19'\, 43''$ adandó, hogy a csillagászatilag számított azimuthot nyerjük.

Egészen analog módon számítjuk ki a 171. oldalon adott képletben előforduló azimuthcorrectiót is, azáltal, hogy a Sarkcsillagot, vagy valamely nagy declinatióval bíró csillagot aequatori csillaggal combinálunk.

Az osztási hibák vagy a noniusokat helyettesítő microscopok csavarmenet-egyenlőtlenségeinek meghatározása inkább a csillagász dolga marad.

A fonalkereszt rendesen páratlan számú parallel fonálból áll, melyek a középfonálhoz symmetrikusan állanak. Ha a symmetria teljes, akkor természetesen a középszálon való átmenet pillanata az egyes szálak átmeneti idejének közepével egyenlő; ha ellenben a symmetria nem teljes, akkor minden egyes szál külön-külön a középszálra redukálandó. A közép- és oldalszál, továbbá a pólus közti háromszögből következik közelítésben:

$$\tau = f \sec \delta \sec s, \text{ hol } \sin s = \sin a \frac{\cos \varphi}{\cos \delta},$$

hol f az egyes szálak távolsága a középszáltól és $\tau$ azon idő, mely az oldalszálon figyelt átmeneti időhez adandó, hogy a középszál átmeneti idejét nyerjük. s azon szöglet, melyet a csillag parallelköre a horizonttal képez, tehát $s = o$ a meridiánátmenet esetében. f meghatározására nagy declinatiójú csillagot menesztünk át a szálkereszten. A számítás teljesen kikerülhető, ha bizonyos szálkereszthez egyszer s mindenkorra $\delta$ argumentummal táblázatokat-számítunk, melyek a $\tau = f \sec \delta$ értékeket adják.

Sextáns segítségével beállították a Napnak a távcsőben egyenesen és a két tükör által kétszeresen reflectált széleit, úgy hogy a reflectált (homályosabb) kép az egyenesen látottat egyszer jobbról, majd balról érintette. A leolvasások voltak:

$$0^0\, 31'\, 10'' \text{ és } 359^0\, 27'\, 40'' \text{ vagy } -0^0\, 32'\, 20.$$

A két leolvasás félösszege $= -35''$; ennek következtében minden ezen sextánssal végzett leolvasáshoz $+35''$ indexjavítás adandó. A két leolvasás negyed összege $= 15'\, 52''$ adja a

Napnak sugarát, mely az illető napra az ephemerisből is kivehető és ennélfogva a mérés pontosságának ellenőrzéséül szolgálhat.

A sextáns és prizmakörök összes hibái (a gyorsan változó indexcorrectiótól és a csak esetlegesen alkalmazásba jövő szines üvegektől eltekintve) a következő példa szerint javíthatók:

1874. október 1-én este $7^h\ 13^m\ 46^s$ közép helyi időkor figyelték meg Karlsruhéban sextáns segítségével Arcturus és Wega távolságát; a hőmérséklet volt $+18^0$ C., a légnyomás 747 mm. Az indexhiba miatt javított látszó távolság volt $D = 59^0\,0'\,56''$ tíz egymást gyorsan követő leolvasásból.

E napon a Nautisches Jahrbuch szerint:

$$\alpha \text{ Bootis}: \alpha = 14^h\ 9^m\ 55^s.5 \qquad \delta = +19^0\,50'\,17''$$
$$\alpha \text{ Lyrae}: \alpha' = 18^h\,32^m\,41^s.5 \qquad \delta' = +38^0\,40'\,14''$$

a miből $\alpha' - \alpha = 4^h\,22^m\,46^s.0 = 65^0\,41'\,30''$. Ezen adatokkal a valódi távolság

$$D_0 = 59^0\,2'\,41''.$$

A közép (csillagidőre átváltoztatott) helyi időből és a megfigyelési hely geographiai hosszúságából és szélességéből: $\varphi = +49^0\,0'$, $\lambda = -33^m\,40^s$ kiszámítható a két csillag magassága:

$$h = 17^0\,12' \text{ és } h' = 72^0\,0'.$$

A további számítás:

$$\log \sin h = 9{\cdot}4708$$
$$\log \sin h' = 9{\cdot}9782$$
$$\lg \frac{\sin h}{\sin h'} = 9{\cdot}4926 = (\lg b)$$
$$\lg \frac{\sin h'}{\sin h} = 0{\cdot}5074 = (\lg a) \qquad \lg \frac{b}{a} = 8{\cdot}9852$$
$$\log \text{add} = 0{\cdot}0400$$
$$0{\cdot}5474 = (\lg a')$$
$$\lg (2 \cos D) = 0{\cdot}0124 \quad (\lg b') \quad \lg \frac{b'}{a'} = 9{\cdot}4650$$
$$\log \text{subtr.} = 0{\cdot}1498$$
$$\lg \left[ \frac{\sin h'}{\sin h} + \frac{\sin h}{\sin h'} - 2 \cos D \right] = 0{\cdot}3976$$
$$\log \alpha = 1{\cdot}7614$$
$$2.1590$$
$$\log \sin D = 9{\cdot}9332$$
$$2{\cdot}2258$$

léghőm. $18^0$ — 0·0131
légnyom. 747 mm. — 0·0026

$\lg(D_0 - D) = 2{\cdot}2101$
$D_0 - D = 162'' = 2' 42''$.

Ebből: $D = D_0 + 2' 42'' = 59^0 2' 41'' - 2' 42'' = 58^0 59' 59''$.
De a sextánssal való mérés adott: $59^0\ 0' 56''$.

Ennélfogva $59^0$ sextánsleolvasásnál a sextáns adatához: $-57''$ javítás adandó.

Ezen és más csillagok között megfigyelt távolságok a következő javítási táblázatot adják:

| Leolvasás | Javítás. | Leolvasás | Javítás. | Leolvasás | Javítás. |
|---|---|---|---|---|---|
| $28^0$ | $-17''$ | $40^0$ | $-16''$ | $84^0$ | $-3''$ |
| 30 | +10 | 54 | −46 | 93 | −21 |
| 35 | −37 | 59 | −52 | 95 | −66 |
| 38 | +6 | 65 | −16 | 115 | −36 |
| | | 70 | −19 | | |

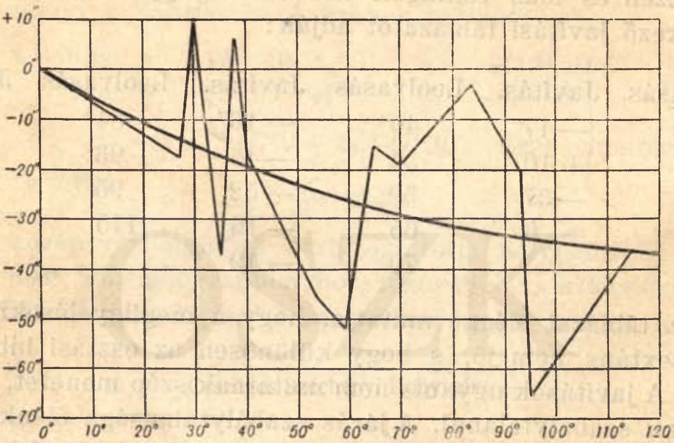
E táblázat eléggé mutatja, hogy a megfigyelésekre szolgált sextáns nem jó, s hogy különösen az osztási hibák nagyok. A javítások ugyanis nem mutatnak szép menetet, hanem szöknek szabálytalanul. A járás szabálytalansága élénken kirí a 86. ábrából, melyben a sextánsleolvasásoknak megfelelő javítások fel vannak rajzolva. Ha az egyes pontokon át annyira-mennyire simuló görbét rajzolunk, akkor minden abscissához vagy sextánsleolvasáshoz a megfelelő javítás kivehető. Természetesen azt sem szabad elfelejteni, hogy a rajz igen nagy méretekben készült, hogy $1'' = 1$ mm., holott a sextánson csak $10''$ olvasható le. Ennek megfelelőleg a pontokon át vont görbe elég közelítést ad, s ebből a következő javítási tábla vezethető le:

| Leolvasás | Javítás. | Leolvasás | Javítás. | Leolvasás | Javítás. |
|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | $0''$ | $50^0$ | $-22''$ | $100^0$ | $-35''$ |
| 10 | −5 | 60 | −25 | 110 | −37 |
| 20 | −10 | 70 | −28 | 120 | −38 |
| 30 | −14 | 80 | −31 | 130 | −39 |
| 40 | −18 | 90 | −33 | 140 | −40. |

Ugyanazon szolgálatot, mint a csillagok távolságai, teheti természetesen bármilyen más földi szögtávolság is, melyet theodolittal és sextánssal mértünk le. Ha a kiigazított theodolitadat $t$, a sextánsadat s, akkor $t - s$ azon javítás, mely a sextánsleolvasáshoz adandó.

Végül lássuk még a tompító üvegek prismatikus hibája miatti javítást.

Ha az ocular előtti üveget becsatoljuk (mely az egyenesen és reflectáltan látott képet egyenlőképen torzítván, hibát




86. ábra. Egy sextáns javítási táblája.

nem okoz), akkor a napszélek érintkezése több leolvasás középéből: $0^0\,37'\,2''$ és $359^0\,33'\,44''$ volt. Az indexhiba tehát $5'\,23''$, az indexjavítás $-5'\,23''$. Ha ellenben a nagy tükör előtt az I, a kis tükör mögött az 1. számú üveget csatoljuk be az ocular-tompító helyett, akkor a leolvasások ismét több beállításból: $0^0\,37'\,22''$ és $359^0\,34'\,4''$, úgy hogy az indexjavítás ez esetben $-5'\,43''$. Ha tehát a mondott két (I + 1) tompító alkalmazásba jut, akkor eltekintve a mindenkori indexjavítástól is, minden leolvasáshoz $-5'\,43'' - (-5'\,23'') = -20''$ javítás adandó. Hasonló módon vizsgálható meg minden combinatiója az egyes tompító üvegeknek.

## III. SZAKASZ.

# AZ ÉVI MOZGÁS.

### I. FEJEZET.

### A Nap látszó mozgása.

Az állócsillagok napi mozgásában osztozkodik a Nap, a Hold s a bolygók is, csakhogy ezek e kívül még lassúbb, nyugatról kelet felé irányított s az előbbivel nem párhuzamos mozgást is mutatnak, melynek periodusa a Nap esetében az esztendő. A Hold s a bolygók esetében e lassú mozgás estéről estére követhető, ha ez égi testek helyzeteit közeli állócsillagokhoz viszonyítjuk; a Nap mellett az állócsillagok természetesen nem láthatók, de mindamellett ez évi mozgásról már a legrégibb népek is tudtak. Megfigyelték ugyanis azon fényes csillagokat, melyek a nyugoti égen közvetlenül a napnyugta után, s a keleti égen közvetlenül a Nap kelte előtt láthatók, más szóval a csillagok heliákus keltét és nyugtát. Bizonyos idő mulva a nyugaton látott csillagok nem voltak már láthatók, s helyükbe más, előbb jóval kelet felé észlelt csillagok léptek. És hasonlóképen a Nap előtt kelő csillagok csakhamar mindinkább balra-keletre álló csillagoknak engednek helyet. Mindkét megfigyelés csak azáltal magyarázható, hogy a Nap közben az első csillagtól kelet felé a másodikhoz s. í. t. vándorolt. Ha e megfigyeléseket huzamos időn át folytatjuk, csakhamar észre kell vennünk, hogy periodikusan ugyanazon csillagokat észlelhetjük heliákus keltük s nyug-

heliákus ≡ Nappal együtt való

tukban, s hogy ez időtartam, az év alatt, a természet is teljesen magába zárt jelenségturnust végezett. A heliákus kelet megfigyelése tehát egyszersmind az év hosszának legelső pontosabb megállapításával azonos, s mivel erre kiválólag fényes csillagok alkalmasak, az aegyptusiak már ősrégi idők óta a Sirius (az ő nyelvükön a Sothis) nappali keltét figyelték, mely a Nilus áradataival, tehát ugyancsak az évszakokkal szoros kapcsolatban állt.

Ha az ily módon egy év lefolyása alatt megfigyelt csillagokat az égen felkeresték, fel kellett tünnie, hogy ezek nagyjában egy legnagyobb kör mentén feküsznek, mely egyszersmind a Napnak évi útja is. E legnagyobb kör az ekliptika, a fogyatkozások vonalának nevét nyerte, mihelyest nyilvánvalóvá lőn, hogy a Hold és Nap fogyatkozásai mindig akkor lépnek fel, midőn ez égi testek e pályában együttesen tartózkodnak.

A legprimitivebb csillagászati műszer, a gnomon, már mérő megfigyeléseket is enged. Ha ugyanis annak legrövidebb, déli árnyékát figyeljük, csakhamar észrevehető, hogy ez egy félévig nő, egy félévig fogy. 1100-ban Kr. e. egyik khinai császár nyolcz láb magas gnomonjának legrövidebb és leghosszabb déli árnyékát 1·54 és 13·12 lábnyinak találta. A hozzá tartozó magasságok

$$\text{cotang}\, h_1 = \frac{1{\cdot}54}{8} \quad \text{és} \quad \text{cotang}\, h_2 = \frac{13{\cdot}12}{8}$$

képlettel (87. ábra) $h_1 = 31^0\,22'$ és $h_2 = 79^0\,6'$ adódnak. Ha a Nap az aequator~~ral~~ vagy vele párhuzamosan mozogna, ily különbség létre nem jöhetne. A $h_2 - h_1 = 47^0\,44'$-nyi különbség tehát a teljes kitérés, melyet a Nap egy év lefolyása alatt az aequator körül tett, s ha pályáját csakugyan legnagyobb körnek tekinthetjük, akkor e kitérés fele $23^0\,52'$ szolgáltatja a pálya hajlását az aequatorhoz, az ekliptika ferdeségét. E régi számadat helyessége könnyen ellenőrizhető; a déli magasság ugyanis a geographiai szélességgel:

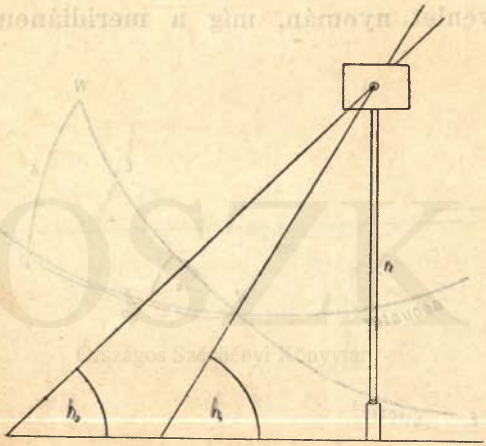
$$\varphi = 90^0 - h_0 + \delta$$

ismert képlettel függ össze. A nap declinatiója a két árnyék mérés alkalmával ellentetten egyenlő ($+ 23^0 52'$ a legrövidebb, $- 23^0 52'$ a leghosszabb árnyék esetében) s ezért

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)$$

vagy a felsorolt értékekkel $\varphi = 34^0 46$, a mi csakugyan megfelel azon város földrajzi fekvésének, mely a megfigyelés helyéül meg van említve.

A gnomon helyett ma az összehasonlíthatatlanul pontosabb meridiánkört alkalmazzuk, mely a Nap s az állócsillagok




87. ábra. A solstitiumi napmagasságok megfigyelése gnomonnal.

delelési pillanatának s magasságának összehasonlításából a következő tényeket deríti ki: ugyanazon állócsillag mindig állandó 24 órai csillagidőköz után delel. A Nap delelése ehhez képest minden nap körülbelül négy perczczel késik, de nem állandóan, s delelési magassága félévenként változik; június 21-én legmagassabban, deczember 22-ikén legalacsonyabban culminál, közben kétszer a megfigyelési hely aequatormagasságában halad át a meridiánon, azaz a Nap maga is az aequatorban áll.

Mindebből ismételve következik, hogy a Nap az állócsillagok között keletre nyomul, hogy az aequatorhoz ferdén fekvő pályáját egy év lefolyása alatt méri át. Közelebbi feladatunk most e pálya fekvésének meghatározása leend.

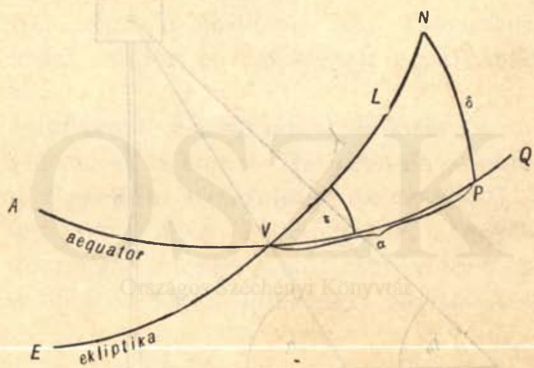
## II. FEJEZET.

# Az ekliptika s az aequinoctiumok kijelölése.

Legyen a 88. ábrában AQ az aequator, EL az alakjára nézve eddig még ismeretlen ekliptika, mely az aequatort V-ben metszi s vele $\varepsilon$ szögletet képez. Ha a Napot a meridiánkörön figyeljük, akkor $NP = \delta$ declinatiója déli magasságából s a hely geographiai szélességéből adódik a többször idézett

$$\delta = \varphi + h_0 - 90^0$$

egyszerű egyenlet nyomán, míg a meridiánon való átmenet




88. ábra. Az ekliptika ferdesége s a tavaszi aequinoctium.

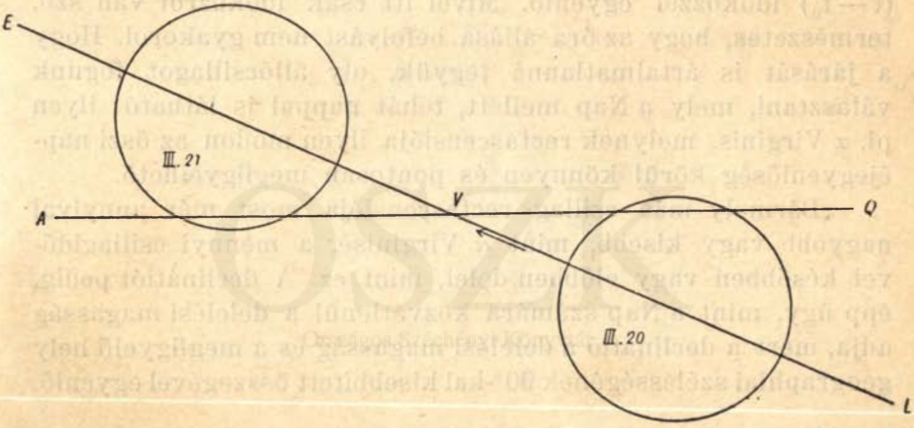
csillagideje, mint már szintén tudjuk, a rectascensiojával $VP = \alpha$ azonos. Ebből következik a P-nél derékszögű gömbi háromszögből:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin \alpha}.$$

Bármikor és bármily helyen eszközöljük is e megfigyelést, $\varepsilon$ számára mindig ugyanazon $\varepsilon = 23^0\, 27'.2$ szögletet kapjuk, a mi csakúgy lehetséges, ha az ekliptika az aequator középpontján átmenő sík, metszése az éggömbbel tehát legnagyobb kör. Az aequatorhoz való hajlását az ekliptika ferdeségének szokás nevezni.

Mint legnagyobb kör az ekliptika az aequatort természetesen két egymással diametrálisan szemközt fekvő pontban metszi. A Nap e pontokban egyszersmind az aequatorban is áll, napi íve tehát az éjjeli ívvel egyenlő, s ezért e pontokat éjnapegyenlőségeknek vagy aequinoctiumoknak szokás nevezni. Azon metszési pont, melyen át a Nap évi mozgásában a déli féltekéről az északira jut, a tavaszi aequinoctium nevét viseli, s mint tudjuk, ezen pont egyszersmind a rectascensiók s az égen olvasott hosszúságok kezdőpontját képviseli. A Nap e helyzetet tavasz kezdetének pilanatában foglalja el.

Ezen fontos kezdőpont kijelölésére ugyancsak a meridiánkör szolgál. Ha ugyanis márczius 21-ike körül a delelését figyeljük, akkor azt fogjuk tapasztalni, hogy két szomszédos




89. ábra. Az aequinoctium meghatározása.

nap között declinatiója jelt vált, és könnyen kiszámíthatjuk egyszerű arányosság segítségével azon csillagidőt, melyben a Nap declinatiója 0 volt, melyben tehát pontosan az aequatorban, vagyis a tavaszi aequinoctiumban állt. Mivel a csillagidő, mint már tudjuk, a tavaszi napéjegyenpont óraszöge, természetes, hogy ez e pillanatban $0^h$-t fog mutatni. Hasonlóképen jelölhetjük ki az őszi aequinoctiumot, melynek delelése pillanatában a csillagóra $12^h$-t mutat, megfelelőleg azon ténynek, hogy a két metszési pont egymástól $180^0$-ra áll.

De ezzel e két pont fekvése még nincs kijelölve a csillagok között, vagy más szóval, meg kell állapítani legalább egyetlenegy állócsillag rectascensióját, mert a többié azután már egyszerűen felkereshető. Mivel a tavaszi napéjegyenlőség pontja nem valamely csillag által, hanem csupán a Nap mozgása által van kijelölve, természetes, hogy az állócsillagok rectascensiójuk meghatározására is a Nappal hasonlítandók össze. A 88. ábrából a Nap rectascensiója számítható, mihelyt egy declinatiómérést eszközöltünk s az ekliptika ferdesége ismeretes; ugyanis: de $\varepsilon$ sem állapítható meg $\alpha$ nélkül!?

$$\sin \alpha = \operatorname{tang} \delta \cot \varepsilon.$$

Ha a Nap declinatió megfigyelése $t_0$ csillagidőben történt, $t$ időben pedig valamely állócsillag halad át a meridiánkör fonalkeresztjén, akkor e csillag rectascensiója a Napéval + $(t - t_0)$ időközzel egyenlő. Mivel itt csak időközről van szó, természetes, hogy az óra állása befolyást nem gyakorol. Hogy a járását is ártalmatlanná tegyük, oly állócsillagot fogunk választani, mely a Nap mellett, tehát nappal is látható; ilyen pl. $\alpha$ Virginis, melynek rectascensiója ilyen módon az őszi napéjegyenlőség körül könnyen és pontosan megfigyelhető.

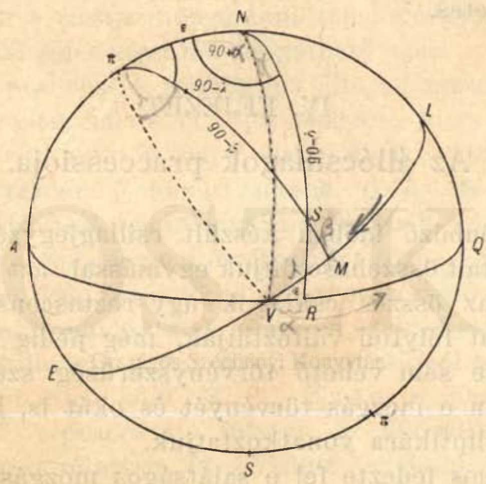
Bármely más csillag rectascensiója most már annyival nagyobb vagy kisebb, mint $\alpha$ Virginisé, a mennyi csillagidővel későbben vagy előbben delel, mint ez. A declinátiót pedig, épp úgy, mint a Nap számára közvetlenül a delelési magasság adja, mert a declinatió a delelési magasság és a megfigyelő hely geographiai szélességének 90°-kal kisebbített összegével egyenlő.

## III. FEJEZET.

## Az ekliptika coordinátarendszere.

Valamint az aequator, úgy az ekliptika is az égen alapsík gyanánt szerepelhet, melyre az állócsillagok vagy égi testeknek helyzetét általában vonatkoztatjuk. És mivel az ekliptika is, úgymint az aequator, a napi mozgásban részt vesz, ez úton is oly rendszerhez jutunk, mely az idővel nem változik. E rendszer leginkább a csillagászt érdekli ugyan, mert a Nap, a Föld pontosan, a többi bolygó pedig legalább közel az ekliptikához keringenek, de hasznát veszi a geographus is, mert egy geophysikailag fontos lassú mozgása az égi testeknek, a praecessió, érthetőbb, ha az ekliptikára vonatkoztatjuk. Ezenkívül pedig a régiek kizárólag az ekliptika rendszere szerint végezték az égi testek helymeghatározását.

Ha az égi test helyén át merőleges legnagyobb kört fektetünk az ekliptikára, akkor ennek a csillag és az EL ekliptika közötti ívét (90. ábra) $SM = \beta$ a csillag szélességének mondjuk, míg MV, azaz a csillagnak az ekliptikán olvasott távolsága a tavaszi napéjegyenlőség pontjától, $VM = \lambda$ a csillag hosszúsága. Ez elnevezések, melyek nem födik a geographiai hosszúság és szélesség fogalmait, érthetőkké válnak, ha meggondoljuk, hogy a régiek leginkább a bolygókat s az állatöv




90. ábra. Az ekliptika coordinátarendszere.

csillagjait figyelték, melyek tudvalevőleg mindig közel mozognak az ekliptika síkjában, tőle tehát csak kevéssel szélednek el.

Ha az ekliptika középpontjában merőlegest emelünk s ezt az égig folytatjuk, ez az ekliptika Π és Π' polusait fogja kiszelni, melyek az aequator AQ-nak N és S pólusaitól az ekliptika ferdeségével $\varepsilon$-nal egyenlő ívekkel feküsznek tova. Ha végül az S csillagnak aequatori coordinátáit is ugyanez ábrába berajzoljuk, és a Π meg N polusokat a tavaszi aequinoctiummal legnagyobb körrel kapcsoljuk, akkor nyerünk egy a csillagászati háromszöghez hasonló NΠS háromszöget, melyben:

$$NS = 90^0 - \delta;\ \Pi S = 90^0 - \beta;\ \Pi N = \varepsilon;\ \Pi NR = 90^0 + \alpha;\ N\Pi M = 90^0 - \lambda$$

míg NΠV természetesen 90°-kal egyenlő és melynek megoldása által az ekliptika és aequator coordinátái változtathatók át egymásba. Így

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha$$

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\cos\delta}$$

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda,$$

mely egyenletek által a csillag hosszúsága és szélessége adódik, ha az aequatorra vonatkozó helyzete és az ekliptika ferdesége ismeretes.

## IV. FEJEZET.

## Az állócsillagok praecessiója.

Ha különböző időben készült csillagjegyzékek vagy égi térképek adatait összehasonlítjuk egymással, azt fogjuk tapasztalni, hogy az összes csillagok úgy rectascensiójukat, mint declinatiójukat folyton változtatják, még pedig felületes vizsgálatnál észre sem vehető törvényszerűség szerint. Tüstént látjuk azonban e mozgás törvényét és okát is, ha a csillagok helyeit az ekliptikára vonatkoztatjuk.

Hipparchos fedezte fel e sajátságos mozgást; a Kr. előtti második században állítólag egy új csillag feltünése alkalmával 1080 állócsillagot magában foglaló ekliptikális csillagjegyzéket készített, s midőn ezt Aristyllos és Timocharis 150 éves csillagkatalogusával összehasonlította, azt tapasztalta, hogy a csillagok szélességei változatlanok, hosszai azonban mindegyiknél állandóan 2°-kal nagyobbak. Ebből az következik, hogy az állócsillagok az ekliptikával párhuzamosan lassan keletre vonulnak, oly módon, hogy évente 50″.21-nyi útat tesznek meg. A későbbi elmélet által is támogatott megfigyelések szerint e szám, az állócsillagok praecessiója nem állandó, hanem pontosabb kifejezése:

$$50''.21\,129 + 0''.000\,244\,297\,(t - 1750),$$

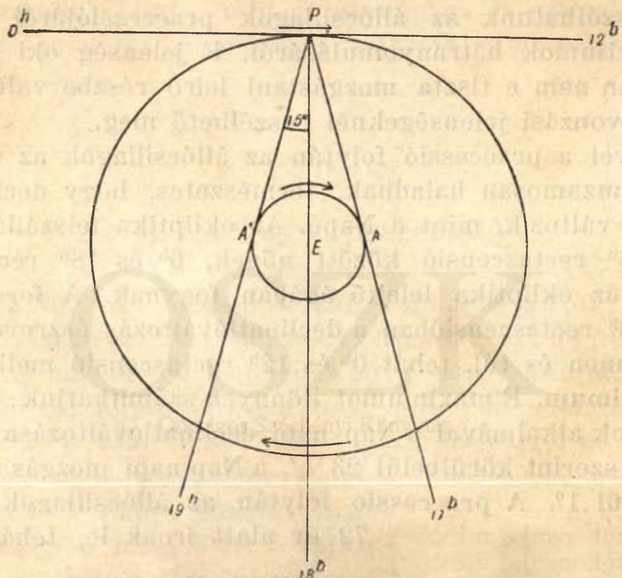
hol t a megfigyelési év számát jelenti. A praecessió periodusa tehát, ezen lassú változásoktól eltekintve, 26,000 év, a menynyiben ily hosszú idő alatt tesznek a csillagok 360°-ot az égen.

Nem nehéz elképzelni, hogy ily feltünő, minden állócsillaggal közös mozgás bizonyára csak sokkal egyszerűbb mozgás látszólagos tükörképe. Ugyanis világos, hogy az állócsillagok hosszának egyenlő megnagyobbodását akkor is fognók tapasztalni, ha a csillagok tényleg állanak, ellenben az aequinoctium, a hosszúságok olvasásának kezdőpontja a praecessióval egyenlő ívvel nyomulna nyugot felé. Tehát ugyanazon joggal szólhatunk az állócsillagok praecessiójáról vagy az aequinoctiumok hátranyomulásáról. E jelenség oki magyarázata már nem e tiszta mozgástani leíró részbe való, hanem a tömegvonzási jelenségeknél beszélhető meg.

Mivel a praecessió folytán az állócsillagok az ekliptikával párhuzamosan haladnak, természetes, hogy declinatiójuk épp úgy változik, mint a Napé. Az ekliptika felszálló ágában, $18^h$ és $6^h$ rectascensió között nőnek, $6^h$ és $18^h$ rectascensió között, az ekliptika lelejtő ágában fogynak. A fordulókban, $6^h$ és $18^h$ rectascensióban a declinatióváltozás észrevehetetlen, $6^h$-val innen és túl, tehát $0^h$ és $12^h$ rectascensió mellett azonban maximum. E maximumot könnyen számíthatjuk: az aequinoctiumok alkalmával a Nap napi declinatióváltozása az ephemerisek szerint körülbelül $23\,{}^1/_2{}'$, a Nap napi mozgása ellenben körülbelül $1^0$. A praecessió folytán az állócsillagok azonban $1^0$-nyi ívet csak mintegy 72 év alatt írnak le, tehát egy év alatt $\frac{23'.5}{72} = 20''$-czel változtatják declinatiójukat azon csillagok, melyek az aequinoctiumon átmenő szélességi körben állanak.

Az állócsillagok rectascensiója általában szintén nőni fog, úgymint a Napé is nő egy év lefolyása alatt. Kivételt természetesen azon csillagok képeznek, melyek távolsága az ekliptika pólusától kisebb, mint az ekliptika ferdesége, melyek szélességi körei tehát az ekliptika és az aequator pólusain mennek át.

A 91. ábrában P az aequator, E az ekliptika pólusa. P-ből húzzunk 12 órakört és E körül azon szélességi köröket, melyeket ez órakörök érintenek. Most már természetes, hogy e szélességi körökben álló csillagok praecessió folytán rectascensiójukat növelik vagy kisebbítik, a szerint, a mint a körnek alsó vagy felső részében állanak az AA′ érintkezési pontok között. Ezekben magukban a rectascensióváltozás 0, a $18^h$-körben ellenben maximum, oly módon, hogy a rectascensió kisebbedése nagyobb, mint növekedése, mert egyenlő óraközök kisebb ívet foglalnak el a körök felső, mint alsó feleiben. Az érintkezési pontok meghatározása nagyon egyszerű; ha (92. ábra) APE a két pólus s az érintkezési pont által képezett




91. ábra. Az aequatori coordináták változása praecessió folytán.

gömbi háromszög, s A azon érintkezési pontnak felel meg, melyet a középvonaltól fekvő első, második . . órakör képez, akkor P szög $= 15^0$, $30^0$. . míg PE $= \varepsilon$ az ekliptika ferdeségével egyenlő. Ebből

$$\text{tang PA} = \text{tg}\,\varepsilon \cos(270^0 - \alpha)$$

és sorban $P = 15^0, 30^0 \ldots 75^0$ számára:

$$PA = 22^0\,44'.2\,;\; PB = 20^0\,35'.6\,;\; PC = 17^0\,3'.3\,;$$

$$PD = 12^0\,4'.4\,;\; PF = 6^0\,24'.4.$$

Ha tehát a rectascensió utolsó 12 órájában fekvő valamely állócsillag számára

$$\cot\delta < \operatorname{tg}\varepsilon\cos(270^0 - \alpha),$$

akkor rectascensiója a praecessió folytán fogy, különben pedig nő. Mivel az érintkezési pontok nyilván az $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú gömbi körben feküsznek, melynek átmérője a $18^h$ órakörben fekszik a két pólus között, azt is mondhatjuk, hogy minden e körben fekvő csillag rectascensiója fogy.

A praecessió folytán minden a 91. ábra szélső, a póluson átmenő körön fekvő csillag 26,000 év lefolyása alatt sarkcsillaggá válik. A mostani sarkcsillag, $\alpha$ Ursae minoris, még egy ideig közeledik a pólushoz, azután mindinkább elhagyja. Helyébe lép sorban $\gamma$, $\beta$ és $\alpha$ Cephei, azután a Cygnus leg-


92. ábra. Az aequatori coordináták változása praecessió folytán.

északibb csillagjai, mintegy 12,000 év mulva $\alpha$ Lyrae, mely egyszersmind a legfényesebb sarkcsillag. Később következnek a Herkules északi csillagjai, a Draco $\iota$ és $\alpha$-ja és ismét 26,000 év mulva a mostani sarkcsillag.

Mivel ily módon az aequator az állócsillagok között helyzetét lassan változtatja, a hely horizontjához hajlását azonban megtartja, világos, hogy a praecessió idővel a csillagos ég alakját is periodikusan megmásítja. Mintegy 13,000 évvel azután (91. ábra) az északi pólus a $18^h$-körben $47^0$-kal délebbre fekszik és helyét közelítve a Wega fogja jelölni; a déli pólus, mely most az oktáns csillagzatában fekszik, a $6^h$-körbe és ugyancsak $47^0$-kal északra, a Columba csillagképbe kerül. Hasonlóképen az aequator a $18^h$ és $6^h$-kört $47^0$-kal délebbre, illetve északabbra fogja szelni és az őszi meg tavaszi napéjegyenlőség pontja is helyet cserél. A Nap márczius 21-ikén a Virgóban fekvő tavaszi aequinoctiumban lép az északi féltekére és a Sagittariusban éri el a nyári térítőt, az ikrekben a téli legmélyebb állását. Az aequator akkor a Halak, Háromszög, Perseus, Auriga, Lynx, Leo, Virgo, Hydra, Centaurus, Lupus, Ara, Telescopium, Microscopium, Piscis austrinus és Aquarius csillagképeken halad át és nálunk a Kis medve, Draco, Cepheus még továbbra is circumpolar marad, de a Nagy medve és a Cassiopeia naponként kel és nyugszik, s az egész Hattyú, Lyra, Vulpecula, Aquila, Herkules, Corona és részben Ophiuchus, Serpens és Bootes állandóan horizontunk felett marad. A déli ég egészen közel mostani pólusáig látható leend, a Centaurus és déli kereszt a mi egünkhöz fog tartozni, ellenben nem kél többé nálunk a Monoceros, az Eridanus és a pompás Orion és Sirius.

Az állatövet vagy ekliptika körüli övet régebben $360^0$ helyett $30^0$-ot magában foglaló 12 csillagképre szokás volt osztani, melyek elseje az Aries volt. A praecessió folytán e csillagképek mind keletre vándoroltak, még pedig Nagy Sándor ideje óta mintegy $30^0$-kal, azaz egy csillagkép hosszával. Ennélfogva ma külömbséget teszünk állatövi csillagkép és jel között. A Nap most is kezdi a tavaszt, midőn a kos jegyének első pontjában áll, de e pont nem esik már a kos csillagzatába, hanem a halakba. Épp így az őszi aequinoctium helye a mérleg jegyének kezdőpontjában a Virgo csillagjai között fekszik és a Nap szélső állásait az aequatortól ugyan a Cancer és Capricornus jegyében, de a Gemini és Sagittarius csillagzatában éri el.

A jegy és jel hasonló felcserélésével iparkodtak a praecessió nyomán bizonyos historikus állatövek számára oly tiszteletre méltó, de kérdéses kort számítani (Dendarahi állatkör).

Mivel az aequator az ekliptikával $23^0.5$-nyi szögletet képez, vagy a mi ugyanezt mondja, a Föld forgási tengelye az ekliptikára $66^0.5$-nyi szöglet alatt áll, a praecessió jelenségét úgy is fejezhetjük ki, hogy a Föld tengelye 26,000 év alatt egy $47^0$ szögnyílással bíró kúp palástját írja le. A Föld tehát egy ferdén felállított pörgettyűhöz hasonló mozgást végez, melynek okaival később számolunk be.

## V. FEJEZET.

## Az év hosszúsága.

Éven értjük a Napnak az ekliptikában való teljes 360° körül való keringésének időtartamát. Ha a Nap mellett az állócsillagokat láthatnók, meghatározása könnyű dolog lenne. Ekkor egyszerűen figyelnők időmeghatározással ellenőrzött órán az időközt, mely ugyanazon állócsillagnak a Nap által való kétszeres elfödése között eltelik. Mivel az év hosszát éppen a mozdulatlan állócsillagokhoz való visszatértén ítéljük meg, ezt siderikus évnek szokás nevezni. Csakhogy ezen a Hold s a többi bolygó esetében jól használható módszer a Napnál nem alkalmazható, s ezért máskép kell eljárnunk.

Meghatározhatjuk a már ismertetett módon két egymásra következő évben azon időpillanatot, melyben a Nap az aequatort szeli, azaz a tavaszi vagy őszi aequinoctiumba lép. Ezen időköz a praecessió miatt természetesen nem lehet egyenlő a siderikus év tartamával, hiszen az aequinoctium egy év lefolyása alatt mintegy $50\frac{1}{4}''$-czel nyomul nyugotra, tehát a Nap elé. Ezen, ugyanazon aequinoctiumon való kétszeres átmenet között eltelt időköz ennélfogva rövidebb, vagy nem teljes siderikus évre vonatkozik, és ezt tropikus évnek szokás nevezni.

Ezen utóbbi képezi összes időszámításunk alapját, mert az évszakok váltakozása és azok következményei nem a Napnak az állócsillagokhoz való fekvésétől, hanem az aequatorhoz való viszonyától függ. Ennek meghatározása tehát a fontosabb feladat is, egyszersmind azonban elég nehéz problema, mert a praecessió változása miatt a tropikus év hossza sem minden időben állandó.

Igen hosszú időközök által elválasztott megfigyelések szerint a közép tropikus év tartama 1885-ben: 366·242 198 csillagnap, vagy $366^d\ 5^h\ 48^m\ 45^s.91$ csillagidő. Mivel a praecessió évezredenként mintegy $\frac{1}{4}''$-czel nő, a tropikus év 1000 év alatt mintegy $6^s$-val fogy, mivel a Nap $1''$-nyi út megtételére körülbelül $24^s$-nyi időt igényel.

A tropikus év hosszából most már könnyen számítható a siderikus is, mert ez azon idővel hosszabb, a mennyi alatt a Nap az évi praecessió ívét befutja. A Nap ugyanis 366·242 198 csillagnap alatt $360^0 - 50''.24427$ útat tesz meg, tehát teljes $360^0$ megtételére 0·014 199 csillagnappal $= 20^m\ 26^s.79$ csillagidővel több idő kell. A siderikus év tartama e szerint $366^d\ 6^h\ 9^m\ 12^s.70$ csillagidőben kifejezve. Vagy középidő szerint:

$$\text{siderikus év} = 365^d\ 6^h\ 9^m\ 10^s.75$$

$$\text{tropikus év} = 365^d\ 5^h\ 48^m\ 47^s.27 - 0''.595\ \frac{t - 1890}{100}.$$

Ezzel szemben a gregoriusi naptár alapját képező közepes év tartama:

$$\text{gregori naptári év} = 365^d\ 5^h\ 48^m\ 12^s,$$

tehát még mindig elütő a valódi tropikus évétől. Különben megjegyzendő, hogy a két évnek mesterkélt módon való egyenlítése nem kivánatos, mert hiszen ezek egyike, a tropikus év, változó, holott a kalendáriumi év közepes tartama a dolog természeténél fogva állandó.

## VI. FEJEZET.

## Az évszakok és zónák keletkezése.

Valamely égi test nappali ívének, valamint delelési magasságának értéke kizárólag a hely geographiai szélességétől és a csillag declinatiójától függ és könnyen beláthatólag ezek szabják meg egyebek között a napsütés tartamát és a napsugarak beesési szögletét is. Mivel azonban a Nap sem az aequatorban, sem valamely állandó parallelkörben nem mozog, hanem az ekliptikában fel- és leszállva, úgyszólván naponként más parallelkörben foglal helyet, a Földön a Nap declinatiója és a megfigyelési hely szélessége szerint más-más leend e két fontos faktor értéke. Ezek szabják meg időbeli lefolyásukban az évszakokat, térbeli eloszlásukban a Föld úgynevezett melegöveit.

Az évszakok váltakozása legjobban látható az 52. ábrából, ha benne még egynéhány parallelkört vonva gondolunk.

Márczius 21. és szeptember 23-án a Nap az aequinoctiumokban állván, egyszersmind az aequatorban is áll; ezt a horizont két egyenlő részre osztja, s ezért az egész Földön nap és éj tartama ugyanaz, déli magassága pedig az aequatormagassággal (a sarkmagasság pótlószögletével) azonos. Az aequator alatt tehát a Nap a zenithben áll, a térítőkön $\varphi = \varepsilon$ miatt a Nap déli magassága 66°.5, a sarkkörön 23°,5, a két póluson a Nap éppen a horizonton látszik, ha a refractiótól eltekintünk.

Márczius 21-ike után június 21-ikéig a Nap declinatiója folyton nő; mindig északibb és északibb helyeknek jut zenithjébe és az északi térítőn túl déli magassága szintén nő, a déli féltekén pedig a déli pólus felé magassága folyton fogy. Míg az északi pólus a Napot declinatiójával egyenlő déli magasságban látja, addig a déli féltekén már a Nap declinatiójával a déli pólustól elálló parallelkörben ez égi test állandóan láthatatlan. És míg márczius 21-én pontosan a kelet és nyugot pontjaiban kelt és lenyugodott, addig most a horizontnak mindig jobban északra fekvő pontjaiban jelenik meg.

Június 22-én elérte a Nap legmagasabb állását az aequator fölött; declinatiója 23° 27′, az ekliptika ferdeségével azonos, déli magassága tehát mindenütt $23^1/_2$°-kal nagyobb, mint a hely aequatormagassága. A térítő alatt a Nap a zenithben delel, az aequator alatt magassága 66°.5, az északi póluson $23\,^1/_2$°, a déli féltekén még délben is csak a sarkkörig látható. Az éjjel természetesen a legrövidebb, a nap éjjeli mélysége a horizont alatt legkisebb és esti meg reggeli tágassága észak felé legnagyobb. Mivel az ekliptika a térítő parallelkörét érinti, tehát a két körnek bár kicsiny közös íve van, természetes, hogy a Nap e térítőben declinatióját egy ideig észrevehetően nem változtatja; innen a napállás, solstitium neve, míg a térítő vagy napfordulat elnevezés onnan van, hogy a Nap felfelé szálló mozgását immár ellentétessé változtatja.

Szeptember 23-ig a leírt viszonyok ellentett sorrendben ismétlődnek, a mennyiben a Nap ismét az aequator felé száll le. Szeptember 23-án túl a Nap a déli féltekén tartózkodik, s az előbb ezen félgömbre mondottak most a Föld északi felére érvényesek. Ennek nappalai mindinkább rövidülnek s a Nap mindjobban délre kel és nyugszik a kelet-, illetve nyugotponttól; déli magassága adott helyre nézve szintén kisebbedik és az északi pólus mindjobban sötétségbe burkolódik.

December 22-én érte el a Nap az aequatortól legnagyobb déli távolságát; declinatiója most $-23^{0}.5$ és még délen is az északi poláris kör határán láthatatlanná kezd lenni; ekkor az északi félteke éri a leghosszabb éjjelt és látja legdélebbre kelni és nyugodni a Napot. Az alacsony déli magassággal, mely most $90^{0}-\varphi-\varepsilon$, tehát Budapesten csak mintegy $19^{0}$, jár a sugarak ugyanily hegyes szöglet alatt való beesése, tehát csekély melegítő hatásuk is, melyhez még a napsütés idejének rövidsége is veendő.

Innen kezdve a Nap ismét felszáll az aequator felé és a jelenségek a fordított sorrendben ismétlődnek, míg márczius 21-ikén, az aequinoctium újabb elérésével, a tünemények turnusa be van fejezve.

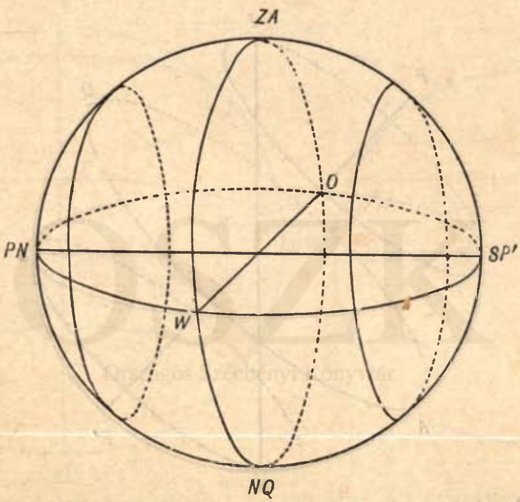
A Nap déli magasságának és a nappal tartama eközben nem egyenletesen változnak; leggyorsabb a változás az aequator átszelése közben, tehát tavasz és ősz kezdetekor, legkisebb a solstitiumok alkalmával, nyár és tél kezdetén, mert e négy pillanatban változik leggyorsabban, illetve leglassabban a Nap declinatiója, melytől adott hely számára úgy a nappal hossza, mint a déli magasság nagysága függ. Ezt tüstént megértjük, ha valamelyik glóbuson figyeljük az ekliptika valamely ívének hajlását az aequatorhoz. Ez legnagyobb a metszési pontokban és azokon túl az ekliptika mindinkább az aequatorhoz parallel állást iparkodik felvenni, melyet a térítők alatt tényleg el is ér. Ezekben a Nap declinatiója hosszabb ideig változatlannak látszik.

A Nap declinatióváltozásának hatásai nemcsak időbelileg, hanem térbelileg is tárgyalhatók, s akkor keletkeznek a Föld mathematikai, solaris vagy Parmenides-féle övei. Legegyszerűbben tárgyalhatjuk az 52. ábra nyomán, ha helyzetünknek geographiai szélességét a Nap declinatiójától függő alkalmas módon megváltoztatjuk. Ha t. i. a Föld valamelyik meridiánja mentén északra vagy délre haladunk, akkor a világtengely mindig a pillanatnyi kelet-nyugot vonal körül forogván, felegyenesedik, vagy még jobban hajlik a horizont felé.

Ha így a Föld aequatorán állunk, akkor az égi aequator merőlegesen áll horizontunkra, a zenithen halad át és a keletnyugot vertikális körével azonos. A világtengely párhuzamos a horizonttal, tehát mindkét pólus a horizontban fekszik.

A horizont egyszersmind az összes, rá merőlegesen álló parallelköröket felezi, s ezért nap és éjjeli ív bármely égi test számára egyenlő. Egyenlő egyszersmind a déli és éjféli magasság, mely a Nap esetében aequinoctium alkalmával 90°, a legrövidebb és leghosszabb nap delében pedig 66°.5 dél s illetve észak felé. Az aequatori és horizontrendszer ezen kapcsolatát a régibb geographiai munkák sphaera perpendiculariának — függélyes körrendszernek — mondják (93. ábra).

Ha most észak felé vándorlunk, míg 23°.5 szélességet el nem értünk, akkor a világtengely felegyenesedik s ugyan-




93. ábra. Sphaera perpendicularia.

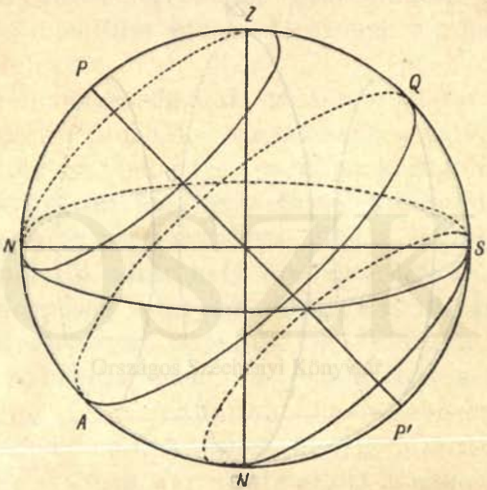
akkora szögletet képez a horizonttal. Ekkor a rák térítője áthalad zenithünkön, a bak térítője a nadirponton. Tavasz és ősz kezdetén a Nap szintén $12^h$-ig tartózkodik a horizont felett s alatt és a legrövidebb s leghosszabb nap közötti különbség nem valami tetemes;

$$\cos t'_0 = \mathrm{tg}^2\, \varepsilon \quad \text{és} \quad \cos t''_0 = -\mathrm{tg}^2\, \varepsilon$$

képletekből számítható ki és $2(t''_0 - t'_0)$-val egyenlő. A Nap déli és éjféli magassága amazon 90° és 43°, emezen 43° és 90°.

Még tovább észak felé menve, 66°.5 geographiai szélesség alatt, az északi térítő teljesen a horizont felett fekszik s a folyton látható csillagok határát szabja meg, míg a déli térítő a déli circumpoláris övet jelöli. Az északi poláris kör a zenithen, a déli a nadirponton halad át. Az aequinoctiumokban a nappal s éjjel hossza itt is egyenlő és déli magassága, valamint éjféli mélysége 23°.5. Nyár kezdetén a Nap teljes $24^h$-ig látható, tél kezdetén pedig $24^h$-ig teljesen láthatatlan; a leghosszabb nap tehát 24, a legrövidebb $0^h$-ig tart; emebben az éjféli mélysége 47°, amabban a déli magasság ugyanekkora. A 94. ábrában adott sphaera obliqua 45° geographiai szélességre érvényes.

Ha végre az északi pólus alá jutottunk (95. ábra), akkor



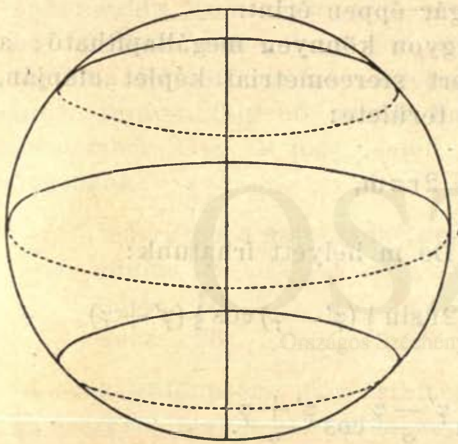

94. ábra. Sphaera obliqua.

a világtengely függélyesen áll, északi sark és zenith, déli sark és nadir összeesnek és a horizont az aequatorral azonos. Minden parallelkör párhuzamos a horizonttal is és ennélfogva az északi félteke minden égi teste $24^h$-ig látható. A Nap tehát márczius 21-étől szeptember 22-ig szakadatlanul süt, június 21-én 23°.5 déli magassággal, fél évvel rá épp akkora éjféli mélységgel. A póluson tehát fél évi nappal s ugyanily tartamú éjjelünk van. És mivel az ég forgásának rendszere teljesen összeesik a horizont rendszerével, a világtájak jelentősége teljesen elmosódik, vagyis helyesebben, az északi pólus alatt bármely irány felé van dél. Az éggömb ezen fekvését a sphaera parallelának szokás nevezni, míg a kettő közé eső fekvést — melynek egy speciális esete a 94. ábra — a sphaera obliqua névvel illetik.

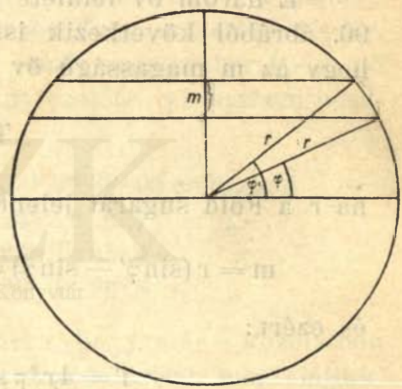
A Föld déli félgömbjén természetesen ugyanazon viszonyok uralkodnak, csakhogy ezek egy félévi eltolódást szenvednek; mindkét féltekén tehát egyidőben ellentétes évszakok uralkodnak, itt tavasz, amott az ősz, itt nyár, amott a tél.

A speciálisabban tárgyalt esetek tekintetbevételével most már a Föld felületén a következő zónákat különböztethetjük meg:

1. Az aequatortól a térítő valamelyikéig. Minden hely




95. ábra. Sphaera parallela.




96. ábra. A PARMENIDES-féle övek területe.

egy év lefolyása alatt kétszer látja a Napot a zenithben; az aequatori pontok fél évi időközök után, az északabbra vagy délebbre fekvők annyival rövidebb időközök mulva, minél nagyobb a szélességük. Az öv határán e két zenithális nap egybe olvad össze. A Nap legkisebb déli magassága 43⁰ és a nappalok nem különböznek lényegesen $12^h$-tól. A hőmérséklet ennek folytán nem áll távol nyarunk hőmérsékletétől és ezért ez övet forrónak nevezzük, vagy mivel határai a térítők vagy tropusok, tropikus övnek.

2. A térítőktől a $66^0.5$ szélességű sarkkörig. A Nap minden pont számára naponta kel és nyugszik és déli magassága $0^0$ és $90^0$ között — emezt az öv déli, amazt északi határán —

tetszőlegesen váltakozhatik. Hőmérsékleti viszonyai folytán a mérsékelt zónának nevezhető; aequatori szomszédsága mindazonáltal a tropikus, sarki szomszédsága a poláris övre emlékeztet, s ezért helyenként amazt subtropikus, emezt subarktikusnak is lehetne nevezni.

3. A sarkkör és a pólus között. A nappalok hossza $0^h$ és egy félév között váltakozik és a Nap déli magassága legfölebb $47^0$ az öv aequator felé eső határán. Minden pont számára legalább egy nap van évente, melyen a Nap nem kel és melyen nem nyugszik. Mindezek folytán ez öv a hideg öv vagy arktikus zóna nevével illethető. Határa azon parallelkör, melyet a solstitium napján a napsugár éppen érint.

E három öv felülete nagyon könnyen megállapítható; a 96. ábrából következik ismert stereometriai képlet alapján, hogy az m magasságú öv T területe:

$$T = 2r\pi m,$$

ha r a Föld sugarát jelenti. De m helyett írhatunk:

$$m = r(\sin\varphi' - \sin\varphi) = 2r\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$$

és ezért:

$$T = 4r^2\pi\sin\frac{\varphi' - \varphi}{2}\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}.$$

A forró öv számára $\varphi = o$ és $\varphi' = \varepsilon$; a hideg öv számára $\varphi = 90^0 - \varepsilon$, $\varphi' = 90^0$ és a mérsékelt öv számára $\varphi = \varepsilon$, $\varphi' = 90^0 - \varepsilon$, ennélfogva:

$$T_f = 2r^2\pi.\sin\varepsilon;\ T_m = 4r^2\pi\sin(45^0 - \varepsilon)\overset{\cos}{\cancel{\sin}}45^0;\ T_h = 4r^2\pi\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$ cos45=[illegible]

vagy mivel az egész félföld felülete $2r^2\pi$, ennek részeiben:

$$T_f = \sin\varepsilon;\ T_m = \cos\varepsilon - \sin\varepsilon;\ T_h = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2},$$

úgy hogy kerek számban a forró, mérsékelt és hideg övre a Föld felületének illetve 40, 52 és 8 perczentje jut.

## VII. FEJEZET.

# A napnapok egyenlőtlenségei és a közép Nap.

A napnak két egymásra következő felső delelése közötti időt napnapnak szokás nevezni. Ha e deleléseket meridiánkörön csillagidő szerint szabályozott órán figyeljük, csakhamar azt fogjuk tapasztalni, hogy a napnapok egyenlőtlen tartamúak. A Berliner Astronomisches Jahrbuch a Nap rectascensióját adja egyebek között a valódi délben; e rectascensió tudvalevőleg a csillagidő a Nap delelése alkalmával, s ezért az ephemerida ezen része a direkt megfigyelés helyett szolgálhat. Látjuk belőle, hogy január 1-étől kiindulva a napnap tartama folyton, de nem egyenletesen fogy márczius végéig, innen június 20-ig nő, azután fogy ismét szeptember 18-ig, nő deczember 23-ig és fogy ismét, mint ezelőtt. Az extrem hoszszúságok:

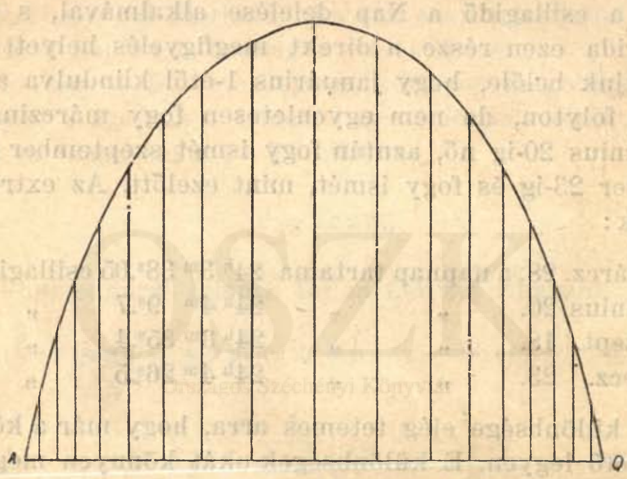
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| márcz. 28. | a napnap tartama | $24^h\, 3^m\, 38^s.05$ | csillagidő |
| június 20. | „ „ | $24^h\, 4^m\, 9^s.7$ | „ |
| szept. 18. | „ „ | $24^h\, 3^m\, 35^s.4$ | „ |
| decz. 23. | „ „ | $24^h\, 4^m\, 26^s.5$ | „ |

és ezek különbsége elég tetemes arra, hogy már a közéletben is érezhető legyen. E különbségek okát könnyen megtaláljuk. A 88. ábrában ugyanis NV a Nap hosszúsága (az ekliptikában), mely az ekliptika ismert ferdeségével és a Nap declinatiójából vagy rectascensiójából könnyen meghatározható. Áll ugyanis:

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\varepsilon} \text{ vagy } \sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}.$$

Ha tehát a Nap egymásra következő delelései számára akár a rectascensióból, akár a declinatióból a hosszúságokat számítjuk, azok különbségeit veszszük, s akár egyenlő, pl. $24^h$-i közökre is reducáljuk, tapasztalni fogjuk, hogy a hosszúságváltozások egyenlő idők alatt nem egyenlők. A Nap tehát nem egyenletesen mozog az ekliptikában. De ha tenné is, sem lehetnének a rectascensiókülönbségek, azaz a delelési közök egyenlők, mert hiszen a Nap az ekliptikában mozog, s ennek egyenlő darabjai levetítve az aequatorra, nem egyenlő hosszú vetületeket adnak. Ha a 97. ábrában az aequator és ekliptika felét lefejtjük, s az utóbbi egyenlő távolságú osztási pontjaiból merőlegeseket húzunk, ezáltal az aequator nem egyenlő részekre oszlik.

A Nap sebessége az ekliptikában legnagyobb január 1-én és legkisebb július 1-én. Ezenkívül pedig még egyenletes mozgásnak megfelelő delelési közök is az utóbb mondott oknál fogva legkisebbek a tavasz és ősz kezdetén, legnagyobbak nyár és tél kezdetén. Látjuk tehát, hogy a Nap egyenetlen mozgásának phásisai complikált törvény szerint tevődnek össze az




97. ábra. A napnapok egyenlőtlenségei.

aequatorra való reductióval, s ezért a napnapok változásának törvénye nem enged egyszerű áttekintést.

Közvetlenül nem alkalmazhatjuk tehát a Napot időszámításunk mérésére, úgy mint az állócsillagokat. A csillagász minden megfigyelését ugyan a csillagok mozgása által adott időre vonatkoztatja, de mi polgári életünk minden tevékenységével annyira a Naphoz vagyunk kötve, hogy ez égi testet időmeghatározásra nem mellőzhetjük. Ha a csillagidőt fogadnók el a polgári életben is, akkor ennek naponkénti mintegy négy percznyi sietése miatt minden órához kötött teendőnk egy év lefolyása alatt a nap minden szakára esnék.

A napnapok egyenlőtlenségét, mely ugyan két egymásra következő napdelelés között alig tesz ki többet, mint egynéhány tizedmásodperczet, mely azonban idők teltével tűrhetetlen sokra halmozódik, a csillagászok a következő módon tüntetik el:

Az aequatorhoz hajlott pályában egyenetlenül mozgó valódi Nap helyett úgynevezett közepes Napot képzelünk, mely az aequatorban egyenletesen mozog, s melynek keringése ugyancsak a tropikus évvel egyenlő. Ha tehát a két Nap egy és ugyanazon órakörből indul ki, akkor egy tropikus év lefolyása alatt ismét ugyanebben az órakörben találkoznak. És természetes, hogy ezen képzelt Nap delelési közei most már szigorúan egyenlők leendenek. Ebből következik az is, hogy e képzelt Nap sebessége mindig az igazi Nap változó sebességének közepével és delelési közei a valódi napnapok változó hosszának közepével egyenlők. Innen van, hogy ezen képzelt Napot joggal közép Napnak nevezhetjük.

A képzelt Nap két felső delelése között elfolyt időt a napnappal szemben középnapnak, delelése pillanatát a valódi déltől megkülönböztetve, középdélnek nevezzük. A valódi Nap óraszöge a valódi, a közepes Napé a középidő nevét viseli. A két idő különbsége:

$$\text{középidő} - \text{valódi idő} = \text{időegyenlítés} = g$$

az időegyenlítés nevét nyerte, s láthatólag azon javítás, melyet az egyedül észlelhető valódi időhez adni kell, hogy a középidőt nyerjük.

A két Nap különböző sebessége miatt a közép Nap rectascensiója hol nagyobb, hol kisebb a valódiénál. Az első esetben későbben jut a meridián alá, mint a valódi Nap, a középidő kisebb, az időegyenlítés negativ, a második esetben előbb delel, a középidő nagyobb és az időegyenlítés positiv.

A középnap és csillagnap viszonyáról szóltunk már, éppen úgy a csillag- és középidő átváltozásáról. Itt még csak arról legyen szó, hogy a közép Nap rectascensiója bármily időpontban nagyon könnyen megállapítható. Mivel ugyanis 365·256 3582 középnapból álló siderikus év alatt 360°-ot ír le, egyenletes mozgása folytán naponként

$$\frac{360^0}{365{\cdot}256\,3582} = 0^0.985\,609 = 59'\,8''.1929\text{-nyi}$$

ívet tesz, tehát átmérőjének majdnem kétszeresével halad tova. Ez a közép Napnak valódi szögmozgása. Rectascensióban való mozgása azonban valamivel nagyobb, mert hiszen ezek kezdőpontjához képest a 360°-ot már a rövidebb tropikus év alatt írja le. Rectascensióváltozása tehát

$$\frac{360^0}{365{\cdot}242\,198} = 0^0.985\,647 = 59'\,8''.3304.$$

Leverrier szerint a közép Nap rectascensiója 1850. január 1-ének közép párisi delében $280^0\,46'\,43''.5 = 18^h\,43^m\,6^s.90$, s ha valamely kivánt párisi középidőben kifejezett pillanatban ezóta n nap s azok tört része folyt le, a középnap rectascensiója $18^h\,43^m\,6^s.90 + 3^m\,56^s.5554 \times n - 24^h\,N$ leend, hol N egész szám, mely a talált rectascensiót $24^h$-nál kissebbé teszi.

## VIII. FEJEZET.

## Az időegyenlítés.

A valódi Nap rectascensiója mindenkor meridiánkörrel s jó órával észlelhető; a csillagóra adata a delelés pillanatában a valódi Nap rectascensiója. Ha ezt levonjuk a bármily pillanatra az előbbiek szerint könnyen kiszámítható közép Nap rectascensiójából, s a különbséget középidőre számítjuk át, akkor az időegyenlítést nyertük. E megfigyelések azt mutatják — miről bármily ephemeridagyűjtemény segítségével meggyőződhetünk — hogy a valódi Nap rectascensiója

február 11-től május 14-ig (92 napon át) lassabban,
május 14-től július 26-ig (73 napon át) gyorsabban,
július 26-tól novem. 2-ig (99 napon át) lassabban és
novemb. 2-től febr. 11-ig (101 napon át) gyorsabban

nő, mint a közép Napé. A rectascensióváltozás nagyságáról a következő táblázat ad felvilágosítást:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Az 1. | időközben | a közép | Nap | nyert | a valódival | szemben | $18^m$ | $23^s$-t |
| A 2. | „ | „ | „ | „ vesztett | „ | „ | $10^m$ | $9^s$-t |
| A 3. | „ | „ | „ | „ nyert | „ | „ | $22^m$ | $38^s$-t |
| A 4. | „ | „ | „ | „ vesztett | „ | „ | $30^m$ | $52^s$-t. |

A két Nap legnagyobb eltérése ennek folytán november 2-ika és február 11-ike között észlelhető. Ha tehát mindkét Napot november 2.-ától fogva ugyanazon órakörből indítanók meg, akkor a közép Nap mindinkább hátra maradna és február 11-én majdnem $31^m$-val előbb delelne, mint a valódi Nap. Óráink tehát e napon a Nap valódi állásától több mint félórával térnének el. $12\frac{1}{2}$ órakor volna a valódi dél, s mivel a nappal tartama nálunk ekkor körülbelül $9\frac{1}{2}$ óra, a Nap óráink szerint $^3/_4$ 8 órakor kelne s $^1/_4$ 6 órakor nyugodna, a délelőtt tehát látszólag egy teljes órával rövidebb lenne, mint a délután. Február 11-étől május 14-ig a közép Nap $18^m$ $23^s$-t nyer, tehát már csak $12^m$ $29^s$-val maradna a valódi Nap mögött. De július 26-ig ismét vesztvén $10^m$ $9^s$-t, már megint $22^m$ $38^s$-val maradna hátra, mit július 26-ikától november 2-ig ismét pótolna.

Ugyanezen, de ellentétes irányú eltérésekre jutnánk, ha a két Napot február 11-én indítanók el ugyanazon órakörből. Ez eltéréseket azonban kisebbíthetjük, ha az indulási órakört a legnagyobb eltérési köz felébe fektetjük, mert ekkor a két szélső értéktől való eltérés mindkét irányban ugyanakkora, t. i. körülbelül $^1/_4$ óra. November 2-ika és február 11-ike között fekszik középben deczember 22, mely helyett a csillagászok a deczember 24-ét választják.

Ha ugyanis a valódi nap rectascensióját számítjuk, de azon feltevés alatt, hogy az ekliptikában egyenletesen mozog, naponként tehát $59' \, 8''.33$ vagy $3^m$ $56^s.56$ utat tesz, akkor e számítás a perigaeumból január 1-től kiindulva, éppen deczember 24-ikére adja a Nap valódi rectascensióját is. Deczember 24-ike tehát azon nap, melyen a valódi és az ekliptikában képzelt (az aequatorban haladó közepes Naptól eltérő) közepes Nap a perigaeumból közösen kiindulva, egyenlő rectascensiót érnek el.

Deczember 24-ikétől kiindulólag tehát a közép Nap s a valódi Nap ugyanazon órakörből halad kelet felé; emez változó sebességgel az ekliptika mentén, amaz naponként $59' \, 8''.33$-nyi ívet téve az aequator hosszában. Február 11-ig a közép Nap mintegy $14^1/_2{}^m$-val a valódi mögött marad; május 14-ig $18^1/_2{}^m$-t nyer a valódival szemben, úgy hogy azt most $4^m$-val megelőzi, július 26-ig veszt ismét a valódival szemben $10^m$-t, tehát $6^m$-val hátramarad és november 2-ig $22\,^1/_2{}^m$-t nyerve, a valódi Nap előtt $16\,^1/_2{}^m$-val halad; február 11-ig $31^m$-t veszít és ennélfogva ismét $14\,^1/_2{}^m$-val hátramarad. A legnagyobb eltérések február 11-én és november 2-án ($\frac{II}{11}$ és $\frac{XI}{2}$ jelzésben könnyen megtartható datumok) tehát csak $\pm \frac{1}{4}$ órát tesznek ki.

Az időegyenlítés egy év lefolyása alatt négyszer váltja előjelét, s ezért négyszer évenként 0 értéket vesz fel. A következő kis táblázat legalább a főphásisokról ad kellő felvilágosítást:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| deczember 24. | $g = 0^m\ 0^s$ | | június 13. | $g = 0^m\ 0^s$ |
| február 11. | $+ 14^m\ 27^s$ | | július 26. | $+ 6^m\ 18^s$ |
| április 15. | $0^m\ 0^s$ | | szeptember 1. | $0^m\ 0^s$ |
| május 14. | $- 3^m\ 51^s$ | | november 2. | $- 16^m\ 20^s$ |

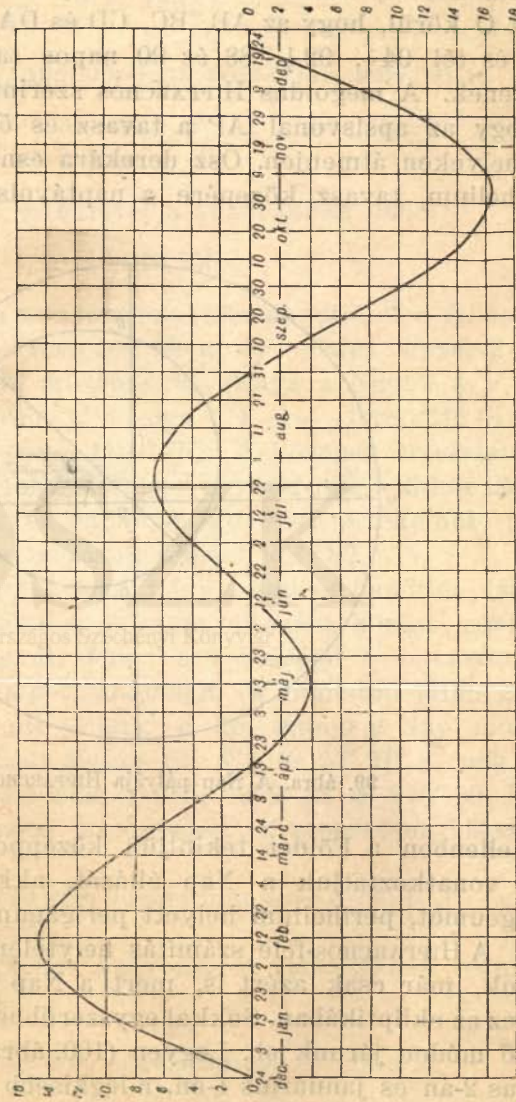
Az időegyenlítés természetesen az ekliptika ferdeségével és a Napnak e pályában való sebességével változik; e két elem azonban, mint később látni fogjuk, lassú változásoknak vannak alávetve, minek folytán az időegyenlítés is évről-évre megmásul. Csakhogy a változások oly kicsinyek, hogy egy bizonyos évre érvényes táblázat elég hosszú időn át nem nagy pontosságú igények mellett alkalmazható. A 98. ábra az időegyenlítés graphikai táblázatát adja, mely minden további magyarázat nélkül is könnyen érthető; a megfelelő perczre pontos számtáblázatot a 179. lapon közöltük.

## IX. FEJEZET.

## A nappálya alakja.

Ha az ekliptikát legnagyobb körnek mondtuk, úgy ezzel alakjára vonatkozólag sem mi ítéletet sem hoztunk. Ez csak annyit jelent, hogy a Föld középpontján átmenő sík, mely az égig meghosszabbítva, onnan egy legnagyobb kört szel ki. Alakjáról a Napnak pusztán helymeghatározásai folytán véleményt nem mondhatunk, erre okvetlenül helymeghatározásokkal együtt távolságmérések is kellenek. Ezeket legalább relative tényleg eszközölhetjük, mert a Nap látszólagos átmérője elég nagy arra, hogy változásai is elég jól mérhetők legyenek.

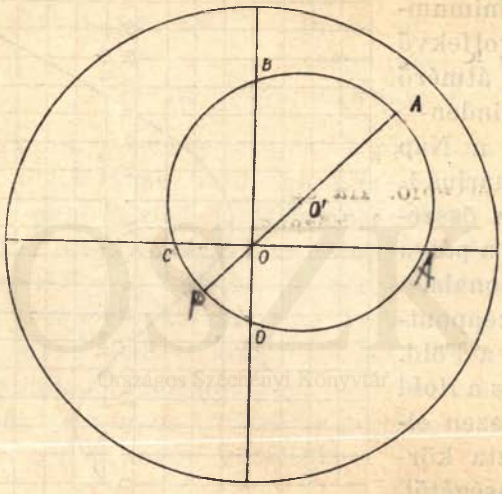
Ha most a Nap látszó átmérőjét napról-napra mérjük, azt tapasztaljuk, hogy ez január 1-én legnagyobb, 1956″.45 és fél évvel később, július 2-án legkisebb 1891″·96. A különbség 64″.5 másodperczre rúg, a mi elég tekintélyes. A megfigyelés továbbá arról is meggyőz, hogy a maximumtól és minimumtól egyenlő távol fekvő napokban az átmérő ugyanaz, mindenesetre tehát a Nap helyzetét január 1. és július 2-án összekötő egyenes a pálya symmetriavonala, melynek középpontján kívül áll a Föld.



98. ábra. Az időegyenlítés görbéje.

A Nap és a Hold mozgásának ezen eltérését a tiszta körmozgás jelenségétől, melyet mi pályájuk középpontjából észlelhetnők, már HIPPARCHOS is ismerte, s a bolygó-mozgás első egyenlőtlenségének nevezte. Ugyan nem a napátmérő méréséből, hanem az évszakok előtte már pontosan ismert hosszából meghatározta, hogy a Föld nem az aprioristikusan köralakúnak feltételezett pálya középpontjában áll, hanem azon kívül, s hogy az excentrumosság a pályasugár $\frac{1}{24}$-ével egyenlő.

Ha ugyanis görög felfogás szerint (ld. 99. ábra) a Nap egyenletes körmozgást végez ABCD pályában, az évszakok pedig egyenlőtlenek, akkor a feladat: úgy fektetni a nappályát a Föld O körül, hogy az AB, BC, CD és DA ívek a tavasz, nyár, ősz és tél $94\frac{1}{2}$, $92\frac{1}{2}$, 88 és 90 napos tartamával arányosak legyenek. A megoldás HIPPARCHOS szerint, hogy $OO' = \frac{1}{24} AO'$, s hogy az apsisvonal AP a tavasz és ősz közepén elfoglalt naphelyeken átmenjen. Ősz derekára esnék így a napközelség perihelium, tavasz közepére a naptávolság aphelium pontja.




99. ábra. A Nap pályája HIPPARCHOS szerint.

Ha ellenben a Földet tekintjük középponti testnek, tehát ő reá vonatkoztatjuk a Nap állását, akkor aphélium helyett apogeumot, perihelium helyett perigaeumot mondhatunk.

A HIPPARCHOS-féle számítás helytelen, mint első pillanatra látjuk, már csak azért is, mert a Nap egyenlőtlen mozgást végez az ekliptikában. Sokkal egyszerűbben és helyesen a következő módon járunk el: Legyen (100. ábra) A és P a Nap helye július 2-án és január 1-én, a legkisebb és legnagyobb sugár, vagy a legnagyobb és legkisebb távolsága pillanatában. AP akkor az apsisvonal, A és P pontok az apogaeum és perigaeum. Ha e vonal hosszát 2a-val jelöljük, a Föld helyét a C középponton kívül F-be teszszük és $CF = ea$ vonalos excentrumosságot vezetjük be, akkor kell hogy, $\rho$ és $\rho'$-vel jelölve a Nap legnagyobb és legkisebb sugarát, álljon:

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{R}{a - ae} \text{ és } \operatorname{tang} \rho' = \frac{R}{a + ae}$$

vagy a kis szögletek tangenseit az ívekkel elcserélve:

$$\frac{a - ae}{a + ae} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

$e = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$

Az előbb idézett értékeivel a sugaraknak ebből

$$e = 0{\cdot}016\,755,$$

vagy a Föld távolsága az apsisvonal középpontjától e fél apsisvonal $\frac{1}{60}$-ával egyenlő. Ha ezen fél apsis-vonalat egységül választjuk, akkor a Föld közepes távolsága a Naptól $\frac{1}{2}(1 + e) + \frac{1}{2}(1 - e) = 1$, legkisebb távolsága $= 1 - e = 0{\cdot}983\,245$ és legnagyobb távolsága $1 + e = 1{\cdot}016\,755$. A közepes távolságba a Nap minden félévben természetesen egyszer jut, s akkor látszó sugara is közepe az egyes napokon észlelhető értékeinek, pontos greenwichi meghatározások szerint 961″.82.

Mindenesetre feltünt már, hogy a Nap egyenlőtlen sebessége között az ekliptikában s sugárváltozása között legalább is időbeli vonatkozás áll fenn; a sebessége t. i. maximum január 1-én, tehát a périgaeumban, és minimum július 2-án, a mikor legtávolabb áll tőlünk. E két napon a Nap naponkénti hosszúságváltozása illetve 61′ 8″.5 és 57′ 10″.8, míg sugarai ugyanakkor, mint már említők, 978″.22 és 945″.98. Lássuk ezen számok közötti viszonyokat; a sebességek viszonya

$$\frac{61'\,8''.5}{57'\,10''.8} = 1{\cdot}06\,929, \text{ logarithmusa} = 0{\cdot}02\,910.$$

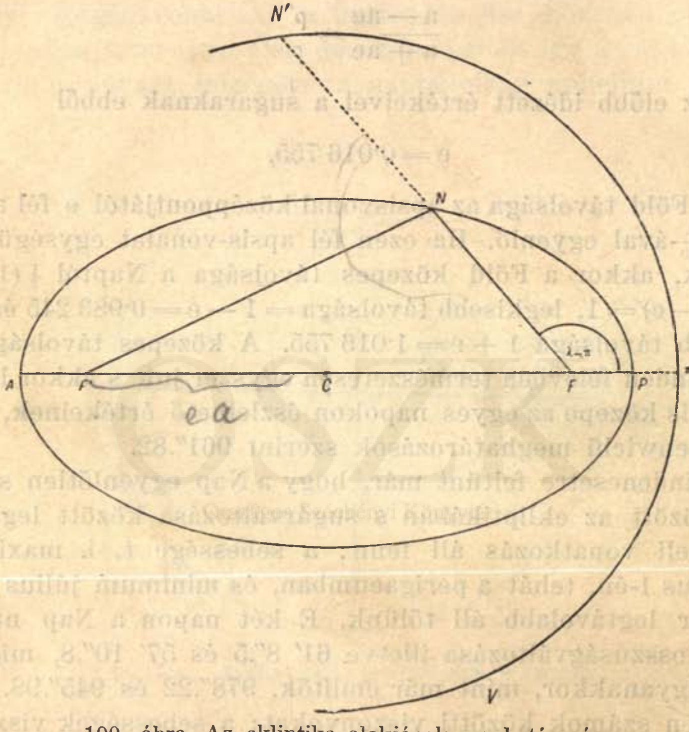
A sugarak viszonya, tehát a távolságok viszonyának reciprok értéke:

$$\frac{978''.22}{945''.98} = 1{\cdot}03\,408, \text{ logarithmusa} = 0{\cdot}01\,455.$$

Tehát mindenesetre nem áll az, hogy a sebességek az apo- és perigaeumban egyszerűen visszás arányban volnának a távolsággal, minek állnia kellene, ha a Nap egyszerűen a Hippar-

CHOS-féle feltevés értelmében excentrumos körben egyenletes mozgással haladna. Ha azonban e viszonyoknak logarithmusait tekintjük, akkor tüstént látjuk, hogy az első kétszerese a másodiknak, hogy tehát a távolságok négyzetei visszás arányban állanak a sebességgel.

Ezen törvényszerű összefüggést sebesség és távolság




100. ábra. Az ekliptika alakjának meghatározása.

között e két kitünő ponton kívül is bármely pontjában az ekliptikának tapasztaljuk és ezért általános érvényességű.

Ha ezentúl a Nap középpontjától a Föld középpontjához húzott egyenest a Nap radius vectorának, (vonsugarának) nevezzük, akkor általánosságban mondhatjuk, hogy a radius vectorok négyzetei visszás arányban állanak a sebességekkel. vagy képletileg kifejezve:

$$r'^2 v' = r^2 v,$$

a mi, mint látni fogjuk, KEPLER második törvényével azonos.

Mindezekből már következik, hogy a Nap semmiesetre sem mozog körben, s hogy sebességének megváltozása nem látszó, hanem tényleges.

Az ekliptika alakját most már végérvényesen megállapíthatjuk. Legyen (100. ábra) PN az ekliptika egy darabja, benne N a Nap. AP egyenes apsisvonala, végpontjai az apogaeum és perigaeum, a Föld helye a C középponton kívül $\frac{1}{60}$ távolságra fekvő F. Tegyünk $CF' = CF = e$, $CP = CA = 1$, akkor egyidejű hely- és sugármeghatározása a Napnak az FF'N háromszög megoldásához vezet. Ha ugyanis $V\pi N'$ az égboltig folytatott ekliptika, tehát legnagyobb kör, akkor $V\pi$ a nappálya perigaeumának hossza, mely LEVERRIER szerint 1850. januárius 1-ének közép párisi delében $280^0\,21'\,21''.5$ és évente $61''.7$-czel nő; ez tehát minden esetben kiszámítható. A direct megfigyelés már korábban idézett formula alapján a Nap hosszát adja, vagyis N'V ívet, mely a Napnak égboltra vetített helye és a tavasz kezdőpontja között az ekliptika mentén fekszik. $PFN = \lambda - \pi$ vagy $F'FN = 180^0 - (\lambda - \pi)$. $FF' = 2e$ és FN a lemért látszó és közepes látszó sugár viszonya: $FN = \frac{961 \cdot 82}{\rho}$. Ekkor F'N számára lesz:

$$F'N = \{4e^2 + FN^2 + 4e \,.\, FN \,.\, \cos(\lambda - \pi)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ha a négyzetgyök alatt $4e \,.\, FN - 4e \,.\, FN$ hozzáadatik, írhatjuk:

$$(2e + FN)^2 - 8e \,.\, FN \,.\, \sin^2 \frac{\lambda - \pi}{2}$$

és ha még írunk:

$$n^2 = 8e \,.\, FN \sin^2 \frac{\lambda - \pi}{2},$$

akkor egyszerűbben

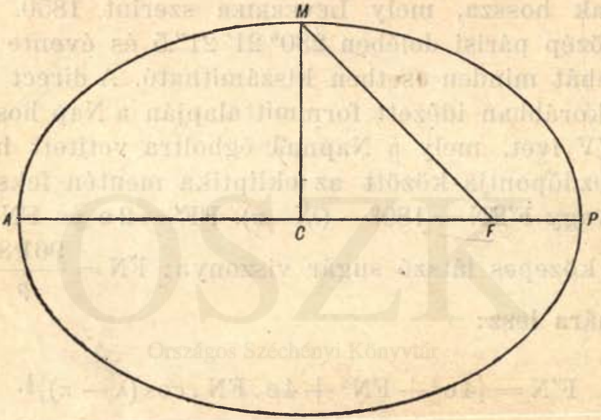
$$F'N = \sqrt{(2e + FN - n)\,(2e + FN + n)}.$$

1882. márczius 2-án a közép párisi délben volt $\rho = 969''.91$ és a Nap hosszúsága $\lambda = 341^0\,49'\,56''.6$; perigaeumának hossza $\pi = 280^0\,54'\,26''.0$, tehát $\lambda - \pi = 60^0\,55'\,30''.6$.

$FN = \frac{961{\cdot}82}{969{\cdot}91} = 0{\cdot}991\,659$ és $F'N = 1{\cdot}008\,369$; a két távolság összege

$$FN + F'N = 2{\cdot}000\,028,$$

tehát különösen a napsugár leméréséyel járó hibákon belül mondhatjuk, hogy a két radiusvector összege a nagy tengelylyel egyenlő. Bármely pontján az ekliptikának ismételjük is ezt a megfigyelést és számítást, mindig ugyanazon eredményhez jutunk, s ezzel be van bizonyítva, hogy a nappálya alakja




101. ábra. A Nap helye közepes távolságban.

ellipsis, mert csak ezen vonalban képez két állandó pontból húzott vonsugár összege állandót.

A Nap pályája e szerint ellipsis, melynek egyik gyujtó pontjában a Föld áll. A kis tengely $b = a\sqrt{1 - e^2} = 0{\cdot}99\,986$, ha a fél nagy tengelyt, mint előbb is, egységül választjuk, s a Nap e kis tengely végpontjában M-ben (101. ábra) éppen közepes, azaz egységnyi távolságban áll a Földtől, mert az ellipsis egyik ismeretes tulajdonsága folytán $FM = CP = a = 1$.

Ha a Nap pályáját 1 m. átmérőjű ellipsisnek rajzoljuk, akkor a kis tengelynek végpontjaiban mindkét oldalt 0·07 mm. hiányzik a teljes körből, a mi még igen finom mérések mellett is alig lesz észrevehető. A következőkben tehát sokszor szabad lesz az ekliptikát egyszerűen körrel azonosítanunk.

Teljesen ugyanezen eredményekhez jutunk a Hold esetében és a bolygók számára is, bár ez utóbbiak esetében, mint látni fogjuk, a mozgás középpontja nem a Földdel esik össze.

Láttuk, hogy a sebesség és radius vector négyzetéből alkotott szorzat állandó. Képzeljünk most az ekliptika tetszőleges két helyén két ívet v és v′-t, melyet a Nap ugyanazon idő alatt ír le. Ha ez időt vég nélkül kicsinynek tekintjük, akkor ez ívek végpontjaihoz húzott radiusvectorok által képezett elliptikus sector végtelen megközelítéssel körsectornak tekinthető. Ezen két sector területe akkor $\frac{r^2\pi v}{360}$ és $\frac{r'^2\pi v'}{360}$, ha az ívek fokokban fejeztetnek ki. Ámde az előbb találtak értelmében $r^2 v = r'^2 v'$ és ezért e sectorok is egyenlő területűek. És mivel bármely tetszőleges nagyságú elliptikus sector ily végtelen keskeny, egyenlő idők alatt súrolt körszeletekből összetehető, mondhatjuk végre:

A Nap radiusvectora egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol, vagy a radiusvector által leírt sectorok területei az idővel arányosak.

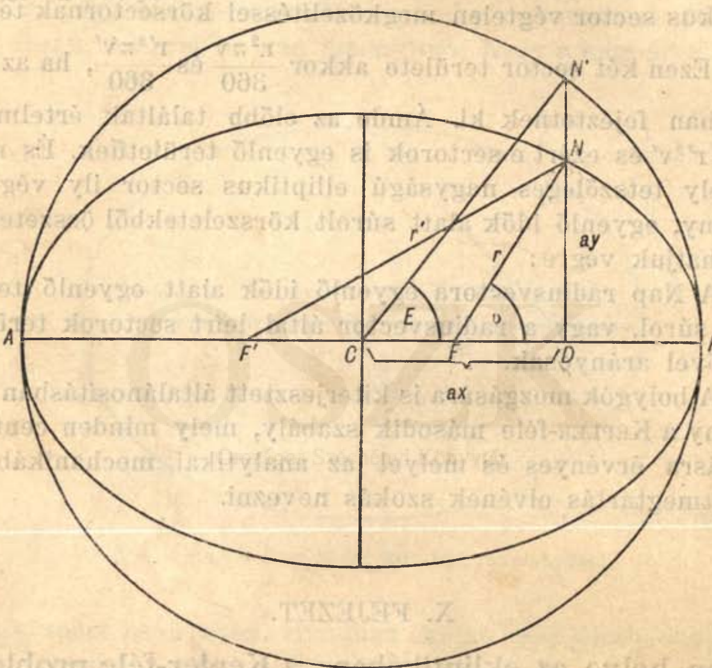
A bolygók mozgására is kiterjesztett általánosításban ezen törvény a Kepler-féle második szabály, mely minden centrális mozgásra érvényes és melyet az analytikai mechanikában a területmegtartás elvének szokás nevezni.

## X. FEJEZET.

## A Nap helye az ekliptikában; a Kepler-féle problema.

A Kepler-féle második törvény módot nyujt a Nap helyének az ekliptikában való meghatározására, a mi, csillagászati fontosságától eltekintve, számos, az évszakok hosszúságára és változékonyságára vonatkozó kérdésben fontos problema.

Legyen a 102. ábra a Nap ellipsise, mely körül C középpontból CP = a sugárral kört írtunk le. Az N pont helyzete az ellipsisben ismeretes, ha ismerjük azon v szögletet, melyet a Nap pillanatnyi radiusvectora valamely tetszőleges iránynyal bezár. Legczélszerűbben választjuk a perigaeum irányát, s ekkor a v szöglet a valódi anomália nevét nyeri. Ezt úgy is foghatjuk fel, mint a Napnak saját pályájában a perigaeumtól számított hosszúságát. Ha tehát a perigaeumátmenet óta elfolyt időt ismerjük s ezt t-vel jelöljük, akkor a feladat, hogy v-t mint t függvényét állítsuk elő. Ez közvetlenül nem lehetséges, s ezért KEPLER nyomán segédszöget vezetünk be, az úgynevezett excentrumos anomáliát, E. Az ellipsis centrumából (~~innen e szöglet neve~~) húzzunk egyenest N′ pontig, melyet




102. ábra. A KEPLER-féle problema.

nyerünk, ha a Nap N helyén át az apsisvonalra merőlegest húzunk s azt a kör kerületéig nyujtjuk.

Ha ismét minden hosszúság egységét a-val jelöljük, akkor CF = CF′ = ae, CD = ax ; DN = ay, CN′ = a = CP ; FN = r és F′N = r′, és most már az elliptikus mozgás legtöbb egyenletét könnyen levezethetjük.

Az FF′N háromszögből következik:

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos v,$$

vagy másképen írva:

$$(r' - r)\ (r' + r) = 4a^2e^2 + 4aer\cos v.$$

Ámde $r' + r = 2a$, és ezért

$$r' - r = 2ae^2 + 2er\cos v,$$

a mi $r' + r = 2a$-val egyesítve

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v} \qquad a)$$

alakban a radiusvectort szolgáltatja, mely v valódi anomáliához tartozik.

A CDN' derékszögű háromszögből

$$\cos E = \frac{CF + FD}{a} = e + \frac{r}{a}\cos v \qquad b)$$

és F'ND meg FND háromszögekből:

$$r'^2 = (ay)^2 + (ax + ae)^2;\ r^2 = (ay)^2 + (ax - ae)^2.$$

Ezek különbsége ad

$$(r' - r)\ (r' + r) = 4a^2ex,$$

vagy $r' + r = 2a$ lévén:

$$r = a(1 - e\cos E), \qquad c)$$

mely egyenlet a radiusvectort az excentrumos anomáliától való függésében adja. Ha *b)* és *c)* egyenletből r-et eliminálјuk, lesz

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \qquad d)$$

mely egyenlet a valódi és excentrumos anomaliát kapcsolja. Mivel valamely szöglet cosinusából nem mindig határozható meg biztosan, a következő átalakítással élünk: az egységből levonva s hozzá adva az egyenlet két oldalát, leend:

$$1 - \cos v = 2\sin^2\frac{v}{2} = \frac{1 - e\cos E - \cos E + e}{1 - e\cos E} = \frac{(1+e)\ (1 - \cos E)}{1 - e\cos E}$$

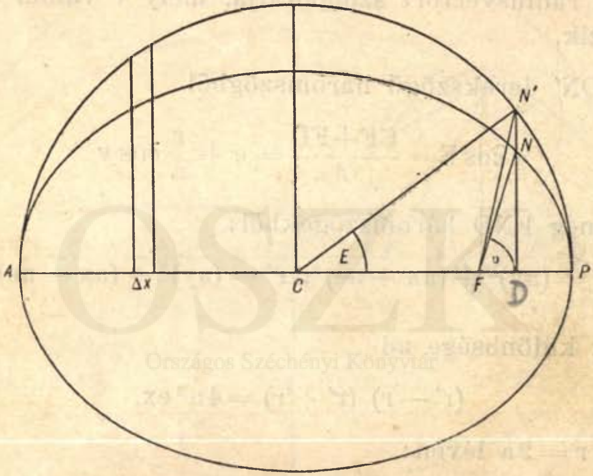
$$1+\cos v = 2\cos^2\frac{v}{2} = \frac{1-e\cos E+\cos E-e}{1-e\cos E} = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}$$

és osztás és négyzetgyökvonás után:

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \qquad e)$$

melyből most már v könnyen és minden kétértelműség nélkül biztosan kiszámítható.

Most tehát úgy a radiusvector, mint a valódi anomália




**103. ábra. Segédtétel az ellipsisről.**

ismeretes, ha képesek leszünk az excentrumos anomáliát az időtől való függésében előállítani. Erre való a 103. ábra.

Egész számításunk alapját azon tétel képezi, hogy ugyanazon abscissához tartozó ordináták az ellipsisben s a körüleírt körben úgy aránylanak, mint az ellipsis kis és nagy tengelye. Ennek bizonyítására vegyük elő ismét a 102. ábrát; benne

$$ND = r\sin v \text{ és } N'D = a\sin E,$$

vagy tekintettel *a)* és *d)* egyenletekre:

$$ND = \frac{a(1-e^2)\sin v}{1+e\cos v} \text{ és } N'D = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin v}{1+e\cos v},$$

a mennyiben ugyanis átírás és négyzetre emelés által *d)*-ből $\sin v$ is számítható. E két ordináta viszonya

$$\frac{ND}{N'D} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{b}{a},$$

a mi által a tétel be van bizonyítva.

Ha most (103. ábra) az ellipsis nagy tengelyén végtelen közel egymáshoz két ordinátát húzunk, akkor $\triangle x$ közös alapon álló parallelegrammot kapunk, melynek az ellipsis és körön belül fekvő magassága úgy aránylik, mint $\frac{b}{a}$. Ennélfogva e területek, melyek az ellipsisen és körön belül fekszenek, ugyanily arányban vannak. És mivel bármily véges terület ily épszögekre osztható, ezek összegéből pedig a $\frac{b}{a}$ közös faktor kiemelhető, mondhatjuk: bármily, az ellipsisben s a körüle írt körben közös alapon fekvő területek úgy aránylanak, mint az ellipsis kis és nagy tengelye. A kör területe $a^2\pi$, tehát az ellipsisé $\frac{b}{a}\,a^2\pi = ab\pi$, mint egyébként is ismeretes.

A Kepler-féle második törvény szerint a radiusvector által súrolt területek arányosak az idővel. A perigaeumátmenet óta elfolyt $t$ idő alatt e terület az FPN elliptikus sector, míg a $T$ keringési idő alatt e sector az egész ellipsis $ab\pi$ területébe megy át. Áll tehát Kepler szerint:

$$\frac{FPN}{ab\pi} = \frac{t}{T}.$$

De az FPN elliptikus sector FPN′ körszelettel közös alapon áll és FPN′ felbontható a teljes CPN′ körsectorra és CFN′ háromszögre, oly módon, hogy

$$FPN' = CPN' - CFN'.$$

Míg tehát az ellipsis és kör mondott tulajdonsága folytán

$$\frac{FPN}{FPN'} = \frac{b}{a},$$

addig FPN′ részei számára áll:

$$CPN' = \frac{a^2\pi}{360^0} E \text{ és } CFN' = \frac{a^2 e}{2} \sin E,$$

úgy hogy maga FPN:

$$FPN = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2\pi}{360^0} E - \frac{a^2 e}{2} \sin E\right)$$

által van adva. A megelőző egyenlettel kapcsolva, leend:

$$360^0 \frac{t}{T} = E - \frac{180}{\pi} e \sin E.$$

Itt $e = 0{\cdot}016\,755$, ívértékben van adva; $\frac{180}{\pi}$ ellenben az egységnyi ív fokértéke; ha tehát ezentúl e-t is fokokban fejezzük ki, akkor egyszerűbben

$$M = 360^0 \frac{t}{T} = E - e \sin E \qquad f)$$

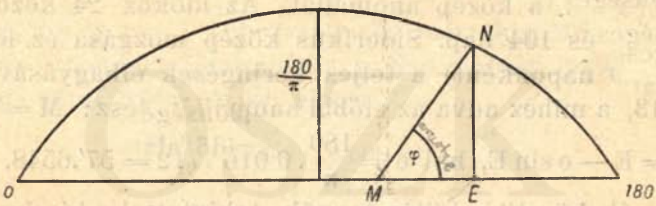
alakban áll elő a híres Kepler-féle egyenlet, mely a keresett kapcsolatot adja az idő és az excentrumos anomália között. Ha ezen egyenletet megoldottuk, akkor *e)* szolgáltatja a valódi anomáliát, tehát a Nap helyét, és akár *a)*, akár pedig *c)* a hozzá tartozó radiusvectort. Az egyenlet baloldalán álló $\frac{360^0}{T}$ nyilván a Nap szögsebessége, azaz naponként megtett útja fokokban kifejezve, ha T is napokban van adva. Ennek t-szerese tehát azon út, melyet a Nap az égen megtett volna perihélium átmenete óta, ha a közepes sebességgel egyenletes mozgásban haladna. Ezért a $360^0 \frac{t}{T}$ mennyiséget középanomáliának is szokás nevezni.

A Kepler-féle egyenlet közvetlenül még sem oldja meg a kivánt feladatot, mert ismeretes excentrumos anomáliával adja ugyan egyszerűen a közepes anomaliát vagy az időt, de nem ebből amazt. Más szóval ez egyenletből az alsóbb mathematikai műveletekből nem számítható ki E, ha, mint rendesen, t van adva. Az egyenlet, éppen megoldásának nehézségei, de különösen az astronomiában fontossága folytán, híressé vált s a Kepler-féle problema nevét viseli.

Geographiai alkalmazásokban, mint látni fogjuk, a problema semmi nehézséget nem nyujt. Az évszakok hosszának meghatározásában mindig a valódi anomália a priori adott, ebből számíthatjuk az *e)* egyenlet megfordításával E-t és ebből *f)* segítségével a hozzá tartozó időt. Teljesség kedvéért, és mert ez egyenlettel a térképvetítés tanában ismét találkozunk, álljon itt egyszerű, graphikus úton eszközölhető megoldás. Tetszőleges egységgel rakjunk a 0—180 vonalra 180 egyenlő fokot és construáljuk föléje a sinus vonalat úgy, hogy minden x abscissa vagy fok számára az ordináta $\frac{180}{\pi}$ sin x legyen. Az $M = 360\frac{t}{T}$ pontban fektessük a $\varphi$ szögletet, mely

$$\cot\varphi = e$$

egyenlet által van adva és a sinusvonallal való N metszési




104. ábra. A KEPLER-féle egyenlet graphikus megoldása.

pontból bocsássunk egy merőlegest NE, mely éppen a keresett E excentrumos anomáliának megfelelő pontban fog bemetszeni. Ugyanis a görbe vonal törvénye folytán $NE = \frac{180}{\pi} \sin E$; de $ME = EN \cot\varphi = \frac{180}{\pi} e \sin E$ és ez *f)* egyenlet szerint tényleg E — M-mel egyenlő.

Ugyanez ábrával oldhatók meg az elliptikus mozgás többi egyenletei is graphikus és egyszerű módon.

Az egész pontos megoldás most már egyszerű. A graphikus eljárás mindenesetre igen közeli értéket ad E számára, melyet $E_1$-vel jelöljünk s mely az *f)* egyenletbe téve,

$$E_1 - e \sin E_1 - M = u_1$$

$u_1$ hibát hagy hátra. Ha u = o volna, a megoldás helyes lenne. Kissé változtatott $E_2$ értékkel egy más

$$E_2 - e \sin E_2 - M = u_2$$

$u_2$ hiba jön létre. Kérdezhetjük tehát: ha az excentrumos anomaliának $E_2 - E_1$ megváltozása a Kepler-féle egyenlet hibáját $u_2 - u_1$-vel változtatja, hogy kell választanunk $E - E_1$-et, hogy a hiba $u_1$-vel változzék, azaz: teljesen eltünjék? Most már e hármasszabály megoldása által sokkal inkább közelített értéket kapunk, mely az eljárás ismétlése által tetszés szerinti pontossághoz vezet.

Felvilágosításul számítsuk a Nap hosszát 1882. április 15-ikének közép párisi delére. Leverrier szerint a közép Nap hossza 1850. jan. 1. közép párisi dél: $280^0\ 46'\ 43''.5$ és ugyanakkor a perigaeum hosszúsága $280^0\ 21'\ 21''.5$, úgy hogy a Nap közép anomáliája volt $0^0\ 25'\ 22''.0$. Ha ehhez rójjuk az időközben leírt közepes mozgást, akkor a keresett dátum számára nyerjük a közép anomáliát. Az időköz 24 közönséges, 8 szökő év és 104 nap. Siderikus közép mozgása ez idő alatt ($59'\ 8''.1929$ naponként) a teljes keringések elhagyásával $102^0\ 18'\ 10''.13$, a mihez adva az előbbi anomáliát, lesz: $M = 102^0\ 43'\ 32''.13 = E - e \sin E$, hol $e = \frac{180}{\pi} . 0{\cdot}016\ 7712 = 57'.6548$.

Egyéb közelítés híjján tegyük, tekintettel e kicsinységére, egyszerűen $E_1 = M$, tehát: $E_1 = 102^0\ 43'\ 32''.13 + e \sin (102^0\ 43'\ 32''.13) = 103^0\ 39'\ 46''.44$. Második közelítésben legyen $E_1 = 103^0\ 39'\ 46''.44$; ezzel

$$E_2 = 102^0\ 43'\ 32''.13 + e \sin (103^0\ 39'\ 46''.44) = 103^0\ 39'\ 33''.53;$$

harmadik közelítésben legyen $E_2 = 103^0\ 39'\ 33''.53$, tehát

$$E_3 = 102^0\ 43'\ 32''.13 + e \sin (103^0\ 39'\ 33''.53) = 103^0\ 39'\ 33''.58,$$

mely az előbbi $E_2$ értéktől csak $0''.05$-ben különbözik, tehát véglegesnek tekinthető. $E = 103^0\ 39'\ 33''.58$ értékkel következik *e)*-ből $v = 104^0\ 35'\ 28''.6$ és hozzátéve a perigaeum hosszát: $24^0\ 56'\ 50''.1$. Ez volna a Nap hossza, ha időközben az aequinoctium pontja változatlan maradt volna. De 32 év alatt $32 \times 50''.23963$ (ez az 1850. és az 1882-re eső praecessió középértéke) $= 26'\ 47''.7$-czel hátranyomult s ezért ez ívet a talált számhoz adva, $25^0\ 23'\ 37''.8$ lesz a Nap keresett hossza. Ugyanekkor a Nap radiusvectora *c)* szerint $a = 1$ téve: $r = 1{\cdot}00\ 396$.

Most már a Nap sebessége is könnyen meghatározható. Ha ennek mértékéül a másodperczenként befutott ívet, u-t tekintjük, akkor $\frac{r^2 \pi u}{360^0}$ az időegység alatt súrolt terület, a menynyiben ily kis idő alatt az elliptikus sector körsectorral felcserélhető. Ha a teljes keringés T másodperczet igényel, akkor

$$\frac{r^2 \pi u}{360} T = ab\pi$$

nyilván az egész ellipsis területével azonos. Ebből

$$u = \mu \frac{ab}{r^2} = \frac{\mu}{r^2} \sqrt{1 - e^2}, \qquad g)$$

ha $\mu$ jelenti a közepes sebességet, mely nyilván $\frac{360^0}{T}$-vel egyenlő és mint előbb is $a = 1$ a hosszegység mértéke. Más alakba is önthető ez egyenlet. Ha ugyanis a Nap helyét inkább valódi anomáliája által fejezzük ki, akkor

$$u = \mu \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \qquad h)$$

hol r értékét az *a)* egyenletből vettük. Könnyen látni, hogy a legnagyobb sebesség a perigaeumban ($v = o$), a legkisebb az apogaeumban ($v = 180^0$) észlelhető; amaz

$$u_{max} = \frac{\mu}{1 - e} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} = 2' \, 32''.91 \text{ óránként,}$$

emez

$$u_{min} = \frac{\mu}{1 + e} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = 2' \, 22''.99 \text{ óránként.}$$

Hasonlóképen találjuk, hogy a kis tengely végpontjain a sebesség $\mu \sqrt{1 - e^2} = 2' \, 27''.83$ óránként és hogy a valódi sebesség a közepessel egyenlő, ha $r^2 = \sqrt{1 - e^2}$-vel.

## XI. FEJEZET.
## A középponti egyenlítés.

Ha a valódi Nap elliptikus helyét csupán csak közepes mozgásával számítanók, akkor valódi anomáliája helyett a közepeset nyerjük. Ha azonban ez utóbbihoz a $v - M$ javítást teszszük, akkor nyilván a valódi anomália értékét kapjuk. Mivel a Nappálya excentrumossága kicsiny, $v - M$ szintén ezen excentrumosságtól függő kis mennyiség leend, melyet a középpont egyenlítésének szokás nevezni. Az *e)* és *f)* egyenletek megoldásából találhatjuk, ha E értékét elimináljuk. Mivel elemi számításokkal e művelet nagyon bonyodalmas volna, álljon itt a kész eredmény:

$$v - M = (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin M + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2M + \tfrac{13}{12}e^3 \sin 3M + ..$$

mely a Nap számára teljesen pontosnak nevezhető. Általában pedig ez egyenlítés M sokszorosainak sinusa szerint haladó végtelen sor, melynek coefficiensei is az excentrumosság növekedő hatványai szerint elrendezett végtelen sorok.

$e = 0{\cdot}016\,7712$ helyettesítése után s $\sin 1''$-czel osztva, hogy mindjárt másodperczekben kapjuk a coefficienseket, lesz:

$$v - M = 6918''.37 \sin M + 72''.52 \sin 2M + 1''.05 \sin 3M + ..$$

A mi előbbi példánkra, $M = 102^0\, 43'\, 32''.13$ alkalmazva ad:

$$v - M = 1^0\, 51'\, 56''.44, \text{ tehát } v = 104^0\, 35'\, 28''.57,$$

mint előbb is.

A középponti egyenlítés coefficiensei közvetlenül is megfigyelhetők. Ha ugyanis a Nap hosszát számítjuk akár declinatiójából, akár rectascensiójából, melyet delelési megfigyelések közvetlenül adnak, akkor $\lambda - \pi$, hol $\pi$ az előbbiek szerint minden időben ismeretes perigaeum hosszát jelenti, a valódi anomália v. Ha ellenben a Nap egyenletesen mozogna köralakú pályájában, akkor anomáliája $M = 360^0 \frac{t}{T}$ volna, s a kettő különbsége éppen a középponti egyenlítés. Ha tehát ennek értékét bármely adott t időben közvetlenül meghatározzuk, akkor az egyenletben szereplő excentrumosság könnyen kiszámítható, még pedig sokkal pontosabban, mint a Nap sugarának megméréséből. A bolygók sugarai sokkal kisebbek lévén — csak néhány másodperczre rúg ezek értéke — ez úton nagyon megbízhatlan eredményhez jutnánk; ez esetben a középponti egyenlítés meghatározása az egyetlen mód az excentrumosság kiszámítására.

Ily módon azt találták, hogy a nappálya excentrumossága

$$e = 0{\cdot}016\,7712 - 0{\cdot}000\,0004244\,(t - 1850),$$

ha t a folyó évet jelenti (LEVERRIER).

## XII. FEJEZET.

## Az időegyenlítés meghatározása.

Ezen feladat szorosan összefügg a középponti egyenlítéssel. Minthogy a Nap közepes hossza az ekliptikában azonos az aequatorban egyenletesen mozgó Nap rectascensiójával, világos, hogy még csak a Nap valódi hossza számítandó; ha ezt rectascensióba számítjuk át, akkor az aequatori közép Nap — a valódi Nap rectascensiója a keresett időegyenlítés.

Felvilágosításul számítsuk az időegyenlítést 1881. október 13-ának közép párisi delére. 1850. januárius 1-ének közép párisi delében volt a Nap közepes hossza $280^0\,46'\,43''.5$ és ez idő óta lefolyt 31 év, 8 szökő év és 285 nap. A közép tropikus mozgás ez idő alatt tehát $281^0\;23'\;39''.46$, a mi a Nap előbbi közepes hosszához téve, $202^0\,10'\,22''.96$ ad. Ugyanekkora, azaz $13^h\,28^m\,41^s.53$ volt természetesen a közép Nap rectascensiója is.

A perigaeum hossza 1850. jan. 1-én $0^h$ kp. pár. időben volt $280^0\,21'\,21''.5$ és mivel ez évente $61''.7$-czel nő, nőtt 1881. okt. 13-ig $32'\;42''.2$-czel. A kérdéses időben $\pi = 280^0\;54'\;3''.7$ s ezt levonva a Napnak középhosszúságából, marad $M = 281^0\;16'\;19''.3$ mint középanomália.

A középponti egyenlítés ez értékkel ad $v - M = -1^0\,53'\,31''.85$ és ezért a valódi hosszúság $= 202^0\;10'\;22''.96 - 1^0\;53'\;31''.85 = 200^0\,16'\,51''.11$. Ámde egy korábbi egyenlet szerint

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\lambda\,\cos\varepsilon,$$

tehát $\alpha = 198^0\,43'\,36''.45 = 13^h\,14^m\,54^s.43$. Az időegyenlítés tehát

$$13^h\,14^m\,54^s.43 - 13^h\,28^m\,41^s.53 = -13^m\,47^s.10.$$

Noha a geographus csak ritkán juthat azon helyzetbe, hogy a középponti és időegyenlítésnek közvetlenül hasznát vegye, teljesen mellőzendőnek még sem gondoltam.

## XIII. FEJEZET.

## Az évszakok hosszai és azok változásai.

Eddig a KEPLER-féle egyenletet az értelemben oldottuk meg, hogy egy bizonyos idő alatt befutott ívet kerestünk; most megfordítva kérdezzük, mily időre van szüksége a Napnak, hogy valamely adott anomálián át haladjon?

Így közvetlenül világos, hogy a Nap az apogaeumtól a perigaeumig ugyanazon idő alatt jut, mint a perigaeumtól az apogaeumig, és természetes, hogy ez idő az év felével egyenlő. Azonban az ellipsisnek a kis tengelyére vonatkozó feleit már nem ugyanazon sebességgel futja be.

A kis tengely végpontjában az excentrumos anomália illetve $90^0$ és $270^0$. A középanomália tehát, ha a Nap a kis tengely felső, illetve alsó pontjában áll a KEPLER-féle egyenlet alapján

$$M_1 = 90^0 - e = 89^0\,2'\,24'' \text{ és } M_2 = 270^0 + e = 270^0\,57'\,36''.$$

Ha ezen számokat a Nap közép siderikus mozgásával ($59'\,8''.1929$ naponként) elosztjuk, kapjuk az első adatból $90^d\,8^h\,9^m\,41^s.2$ s ez azon idő, mely alatt a Nap a perigaeumból a kis tengely végpontjáig jut, vagy megfordítva. Az ellipsisnek azon felét, mely a perigaeumot tartalmazza, e szerint kétannyi idő alatt írja le, t. i. $180^d\,16^h\,19^m\,22^s$ s az apogaeumot tartalmazó felét $184^d\,13^h\,49^m\,47^s$ alatt, t. i. az előbbi időnek a siderikus évhez való kiegészítője alatt. A különbség tehát a két ellipsisfélre nézve $3^d\,21^h\,30^m\,25^s$, azaz közel négy nap, oly módon, hogy a perigaeum oldalán fekvő fél nagyobb sebességgel tétetik meg.

Egészen hasonlóan számítunk, ha az évszakok tartamáról van szó. Az aequinoctiumok és solstitiumok pontjai ugyanis egyenként 90°-nyira feküsznek egymástól, és mivel a perigaeum hosszát ismerjük, természetes, hogy a Napnak minde pontokban való anomáliáját megmondhatjuk. A hozzá tartozó középanomáliák adják azután az időt, mely egy évszaknak kezdetétől a másik kezdetéig eltelik.

A csillagászatban divatos kiindulási epochában, 1850· jan. 1. közép párisi délben volt

| | |
|---|---|
| a perigaeum hossza | 280° 21′ 21″.5 |
| a tavaszi napéjegyenlőség pontja | 360° 0′ 0″.0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| következőleg a tavaszpont | valódi anomáliája | | 79° 38′ 38″.5 |
| a nyári solstitium | „ | „ | 169° 38′ 38″.5 |
| az őszpont | „ | „ | 259° 38′ 38″.5 |
| a téli solstitium | „ | „ | 349° 38′ 38″.5 |
| a követk. tavaszpont | „ | „ | 439° 38′ 38″.5 |

Ezen adatokból és

$$\operatorname{tang}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{v}{2}$$

képletből adódnak a következő excentrumos anomáliák:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a tavaszpontban az excentrumos anomália | | | = 78° 42′ 0″.6 |
| a nyári solstitiumban | „ | „ | = 169° 28′ 11″.4 |
| az őszpontban | „ | „ | = 260° 35′ 26″.8 |
| a téli solstitiumban | „ | „ | = 349° 48′ 55″.4 |
| a követk. tavaszpontban | „ | „ | = 438° 42′ 0″.6 |

Ha e szögletek sinusait e = 3459″.3-vel szorozzuk s az eredményt ez excentrumos anomáliákból levonjuk, nyerjük a Kepler-féle egyenlet alapján a közepes anomáliákat, melyek ismét a Nap közép tropikus mozgásával elosztva, a perigaeum óta elmult napok számát adják. E szerint

| | | | |
|---|---|---|---|
| a tavaszpont középanomáliája | = 77° 45′ 28″.4, | megfelel. | $78^{d}.8902$ |
| a nyári forduló „ | = 169° 17′ 39″.2 | „ | $171^{d}.7599$ |
| az őszpont „ | = 261° 32′ 19″.5 | „ | $265^{d}.3473$ |
| a téli forduló „ | = 349° 59′ 7″.1 | „ | $355^{d}.0818$ |
| a követk. tavaszpont „ | = 437° 45′ 28″.4 | „ | $444^{d}.1326$ |

Az egyes évszakok beléptéig a perigaeum óta elfolyt napok különbsége adja az egyes szakok tartamát. Tehát volt 1850-ben:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a tavasz tartama | $= 92^d.8697$ | vagy | $92^d\ 20^h\ 52^m\ 22^s$ |
| a nyár „ | $= 93^d.5874$ | „ | $93^d\ 14^h\ 5^m\ 51^s$ |
| az ősz „ | $= 89^d.7345$ | „ | $89^d\ 17^h\ 37^m\ 40^s$ |
| a tél „ | $= 89^d.0508$ | „ | $89^d\ 1^h\ 13^m\ 9^s$ |

s ezek összege $365^d\ 5^h\ 49^m\ 2^s$ természetesen a tropikus év tartamával egyenlő.

Ha tehát valamely szökőévben tavasz kezdete éppen márczius 21. $0^h$-ra esik, akkor nyár kezdete június 21. $21^h$, ősz beállta szeptember 23. $11^h$ és tél kezdete deczember 22. $5^h$; a következő tavasz pedig márczius 21. $6^h$-ra esik. A következő évben tehát minden évszak negyednappal később lép be, a mit éppen egy újabb szökőév közbeigtatásával kiigazítanak, ha az eltérés már négy év mulva egy teljes napra rúgott fel. A négy évi cyclusban tehát az évszakok váltakozása a következő schema szerint halad:

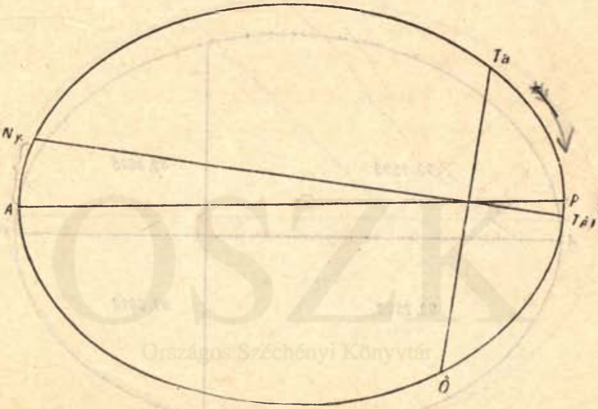
| | tavasz: márcz. | nyár: jún. | ősz: szept. | tél: decz. |
|---|---|---|---|---|
| Szökőév. | 21. $0^h$ | 21. $21^h$ | 23. $11^h$ | 22. $5^h$ |
| 1. Közöns. év. | 21. $6^h$ | 22. $3^h$ | 23. $17^h$ | 22. $11^h$ |
| 2. Közöns. év. | 21. $12^h$ | 22. $9^h$ | 23. $23^h$ | 22. $17^h$ |
| 3. Közöns. év. | 21. $18^h$ | 22. $15^h$ | 24. $5^h$ | 22. $23^h$ |

Ha tehát a nicaeai zsinat határozata értelmében a tavasz kezdete márczius 21-ére esik, akkor nyár, ősz és tél legtöbbször illetve június 22., szept. 23. és deczember 22-ére esnek.

Tavasz és nyár összes tartama $186^d\ 10^h\ 58^m\ 13^s$
Ősz és tél „ „ $178^d\ 18^h\ 50^m\ 49^s$.

A Nap tehát $7^d\ 16^h\ 7^m\ 24^s$-val tovább időzik az ég északi félgömbjén, mint a délin. A hőmérsékleti viszonyokra azonban e körülménynek döntő befolyása nincsen, mert a hosszabb északi nyár alatt a Nap távolsága nagyobb. A sebesség, mint láttuk, visszás arányban van a távolság négyzetével és ugyanez arányban áll a besugárzás intenzitása is, úgy hogy a nagyobb távolsággal veszítjük, a mit a nyári félév hosszabb tartamával nyerünk. Innen van, hogy a mennyire meteorologiai statisztika kideríthette, a déli és északi földfélgömb a Naptól az egész év lefolyása alatt ugyanazon melegmennyiséget nyeri és mindenütt megfelelő szélességek alatt ugyanazon hőmérsékletet tünteti fel.

E kiszámított hosszúságok azonban nem állandóak; egyrészt megváltozik bizonyos határokon belül periodikusan az ekliptika excentrumossága, másrészt pedig a perigaeum hossza is haladó mozgásnak van alávetve, mely évenként tropikusan 61″.700-et tesz ki nyugotról kelet felé. A perigaeum ezen mozgása kettőből tehető össze: siderikusan maga nyomul előre évi 11″.464-czel, míg az aequinoctium s solstitiumpontok 50″.236-czel




105. ábra. Az évszakok jelenlegi hosszúsága.

hátrálnak. E két ív összegével közeledik egymás felé egy év lefolyása alatt a két pont.

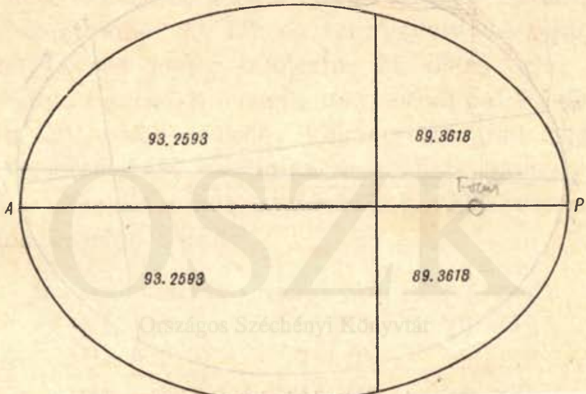
1850-ben a perigaeum hossza 280° 21′ 21″.5 volt, ennélfogva 10° 21′ 21″.5-czel feküdt keletre a téli solstitiumtól (lásd 105. ábra) és $\frac{10^0\ 21'\ 21''.5}{61''.7} = 604$ évvel ezelőtt, tehát 1246-ban össze is esett a téli solstitiummal. $90^0$-nyi eltolódásra $\frac{90^0 \times 3600}{61 \cdot 7}$ $= 5250$ év kell körülbelül, s ezért a perigaeum Kr. e. mintegy 4000 évvel az őszpontban feküdt s í. t. A perigaeum egész tropikus periodusa mintegy 21,000 évet foglal magában.

Ha a négy kardinálispont egyike összeesik a perigaeummal (106. ábra), akkor azok valódi anomáliája sorban $0^0$, $90^0$, $180^0$ és $270^0$. Ha $v = 90^0$, akkor

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{ és } E = 89^0\,2'\,24'',\ M = 88^0\,4'\,45'',$$

a minek $89^d.3618 = 89^d\,8^h\,41^m$ felel meg. Ez idő alatt teszi meg a Nap az anomália első 90 fokát. Az apogaeumig ennek egy félévre való kiegészítőjét igényli, azaz $93^d.2593 = 93^0\,6^h\,13^m$ és ugyanily tartamú ellentett sorrendben a következő két évszak.

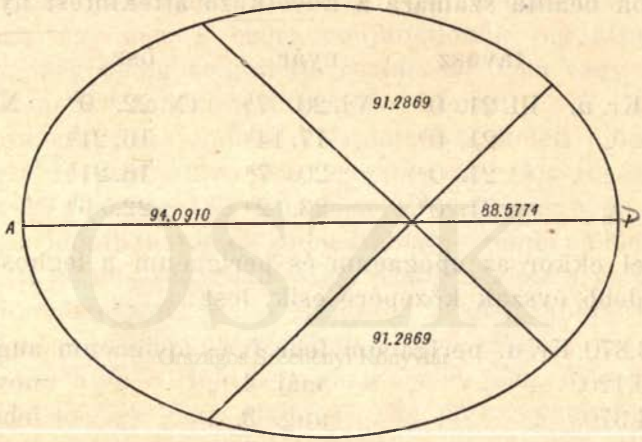
Ha tehát az aequinoctiumok vagy solstitiumok egyikébe esik a perigaeum, akkor a perigaeum melletti két évszak tartama egyenként $89^d\,8^h\,41^m$, míg az apogaeum mellettiek együttvéve $7^d\,19^h$-val hosszabbak. E szerint négy különböző eset




106. ábra. Váltakozóan egyenlő évszakok.

különböztethető meg: 1. a tél kezdetével esik össze a perigaeum; ekkor tél + tavasz = nyár + ősz, de ősz + tél $7^d\,19^h$-val rövidebb, mint nyár és tavasz együttvéve. 1250-ben Kr. e. volt így. 2. A perigaeum a tavaszponttal esik össze. Ekkor tavasz + nyár = ősz + tél, de tél és tavasz együttvéve $7^d\,19^h$-val rövidebb, mint nyár és ősz. Így leend 6500-ban Kr. u. — 3. Ha a perigaeum a nyári solstitiumba esik, akkor nyár + ősz = tél + tavasz, de a nyári félév $7^d\,19^h$-val rövidebb, mint a téli. Így volt 9250-ben Kr. e. és ismétlődik 11,750-ben Kr. u. — 4. Ha a perigaeum az őszponttal esik össze, akkor ősz + tél = tavasz + nyár, de ismét nyár és ősz együttvéve $7^d\,19^h$-val rövidebb, mint tél és tavasz együttvéve.

Valamely évszak legrövidebb tartama természetesen akkor észlelhető, ha a Nap annak folyamán legnagyobb sebességgel bír, ha tehát a perigaeum ez évszak közepére esik, a mit a 107. ábra érzékít. Ellenkezően, valamely évszak leghosszabb, ha az apogaeum ideje a szak közepével azonos. Ez esetben a valódi anomália ezen évszak kezdete és vége számára $45^0$, illetve $135^0$, az excentrumos anomália $44^0\,19'\,28''$ és $134^0\,19'\,2''$, a közepes anomália $43^0\ 39'\ 11''$ és $133^0\ 37'\ 47''$, a mi illetve $44^d.2887$ és $135^d.5756$ napnak felel meg a perihéliumátmenet után. E kettő különbsége $91^d.2869 = 91^d\ 6^h\ 53^m$. E szerint a legrövidebb évszak tartama $2 \times 44^d.2887 = 88^d\ 13^h\ 51^m$, a két




107. ábra. Az évszakok szélső hosszúságai.

szomszédos szaké egyenként $91^d\ 6^h\ 53^m$ és a leghosszabbé a tropikus év többi része, t. i. $94^d\ 2^h\ 11^m$.

Ha a 105. ábrában az ellipsis változatlan alakja mellett az évszakokat egymástól elválasztó vonalkeresztet a nyíl irányában forgatjuk, akkor a perigaeum felé közeledő évszakok rövidülnek, az apogaeumhoz közeledő szakok ellenben hosszabbodnak egészen addig, míg e két pont a szak közepére nem esik. Jelenleg tehát a tavasz és tél rövidül, nyár és ősz még folyton hosszabbodik. A jelenleg a télen és nyáron átmenő apsisvonal e szakokat felezni fogja, ha további $45^0 - 10^0\,21'\,21''.5 = 34^0\,38'\,38''.5$ körül forgott, a mi 3870-ben Kr. u. álland be. Ekkor a tél a lehető legrövidebb, a nyár a lehetséges legnagyobb tartammal fog bírni. Minden 5250 év mulva a kereszt további $90^0$-kal fordul és a maximális és minimális tartam mindig más-más szakokra esik. A szélsőségeket a következő táblázat tünteti fel:

| | tavasz | nyár | ősz | tél |
|---|---|---|---|---|
| 3,870. Kr. u. | $91^d\ 6^h\ 53^m$ | $94^d\ 2^h\ 11^m$ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ | $88^d\ 13^h\ 51^m$ |
| 9,120. „ | $88^d\ 13^h\ 51^m$ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ | $94^d\ 2^h\ 11^m$ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ |
| 14,370. „ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ | $88^d\ 13^h\ 51^m$ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ | $94^d\ 2^h\ 11^m$ |
| 19,620. „ | $94^d\ 2^h\ 11^m$ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ | $88^d\ 13^h\ 51^m$ | $91^d\ 6^h\ 53^m$ |

és ha ez időben mai naptárunk még érvényben leend, akkor a szakok beállta számára a következő áttekintést nyerjük:

| | tavasz | nyár | ősz | tél |
|---|---|---|---|---|
| 3,870. Kr. u. | III. 21. $0^h$ | VI. 20. $7^h$ | IX. 22. $9^h$ | XII. 22. $16^h$ |
| 9,120. „ | 21. $0^h$ | 17. $14^h$ | 16. $21^h$ | 19. $23^h$ |
| 14,370. „ | 21. $0^h$ | 20. $7^h$ | 16. $21^h$ | 17. $4^h$ |
| 19,620. „ | 21. $0^h$ | 23. $2^h$ | 22. $9^h$ | 19. $23^h$ |

és mivel ekkor az apogaeum és perigaeum a leghosszabb és legrövidebb évszak közepére esik, lesz:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,870. Kr. u. | perigaeum | febr. 5. | és apogaeum | | aug. 6. |
| 9,120. | „ | „ | máj. 4. | „ „ | nov. 2. |
| 14,370. | „ | „ | aug. 3. | „ „ | febr. 2. |
| 19,620. | 2 | „ | nov. 5. | „ „ | máj. 8. |

## XIV. FEJEZET.

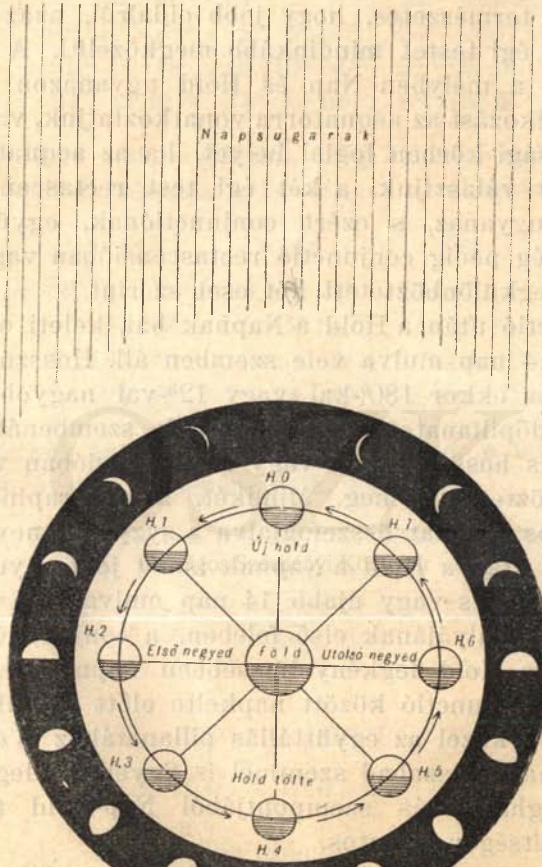
## A Hold mozgása.

Még sokkal feltünőbb mértékben mint a Nap, mutatja sajátos mozgását az állócsillagok között a Hold, nemcsak azért, mert a Föld körül való keringése közel 12-szer rövidebb idő alatt megy végbe, hanem azért is, mert mellette legalább a fényesebb állócsillagok már szabad szemmel is észlelhetők. Ha tehát a Holdat valamelyik állócsillag közelében találjuk, akkor $24^h$-val későbben átlag már több mint $13^0$-kal fog keletre állani, sőt sajátos mozgása már egyetlen egy este szabad szemmel is felismerhető, mert óránként közel 33′-et, tehát saját látszó átmérőjével egyenlő ívet fut be. Különösen szépen észlelhető sajátos mozgása, ha a Hold csillagokkal sürűbben behintett égtájon, tehát a Hyadok vagy különösen a Plejádok csillagcsoportján halad át.

Mivel a Hold átlag 12-szer sebesebben mozog az égen, mint a Nap, természetes, hogy jobb oldalról, azaz nyugotról kelet felé ez égi testet mindinkább megközelíti. A találkozás pillanatában, a melyben Nap és Hold ugyanazon órakörben áll, ha a találkozást az aequatorra vonatkoztatjuk, vagy ugyanazon hosszúsági körben foglal helyet, ha az aequator helyett az ekliptikát választjuk, a két égi test rectascensiója vagy hosszúsága ugyanaz, s ezért conjunctiónak, együttállásnak nevezzük, még pedig conjunctió rectascensióban vagy hosszúságban, a megkülönböztetett két eset szerint.

Conjunctió után a Hold a Napnak bal, keleti oldalára jut és mintegy 14 nap mulva vele szemben áll. Hosszúsága vagy rectascensiója ekkor 180°-kal vagy $12^h$-val nagyobb, mint a Napé, s ez időpillanatot az oppositiónak, szembenállásnak nevezzük. Itt is hosszúságban vagy rectascensióban való oppositió különböztethető meg. Mindkét, a geographiára nézve nagyon fontos pillanat összefoglalva a syzygiák nevét nyerte. Az oppositió után a Hold a Napnak ismét jobb, nyugoti oldalán jelenik meg és vagy újabb 14 nap mulva vele újból conjunctióba lép. Pályájának első felében, a conjunctió és oppositió között a Hold legkényelmesebben napnyugta után, az oppositió és conjunctió között napkelte előtt észlelhető. De a Hold aránylag közel az együttállás pillanatához is elég fényes arra, hogy nappal szabad szemmel is figyelhető legyen, a mi hosszúságmeghatározás szempontjából Nap-Hold távolságok lemérése segítségével fontos.

A Hold ezen keringése alatt az ismeretes fényváltozásokat mutatja. A conjunctió pillanatában egyáltalában láthatatlan — Újhold — és legfölebb fekete korongot láttat, ha véletlenül Napfogyatkozás — különösen gyürűs napfogyatkozás — alkalmával a Nap tányérján megjelenik. De már kevés nappal az együttállás után az esti égen, tehát keletre a Naptól domború oldalával a Nap felé forduló vékony sarlót képez, mely napról-napra szélességében megnő. Mintegy hét nap mulva a Holdtányér nyugoti fele pontosan meg van világítva, a Hold első negyedében van, s a Naptól 90⁰-ra áll keletre. A Hold ezentúl mindinkább telik, s az oppositió pillanatában teljes tányéra fénylik, Holdtölte van. Ekkor a Hold a Nappal szemben áll, tehát éjfélkor delel, napnyugtakor kel és napkeltekor




108. ábra. A Hold fényváltozásai.

nyugszik. A szembenállás pillanatán túl a Hold nyugoti fele fogy, először észrevétlenül, majd gyorsabban, s vagy hét nap mulva a Hold ismét félkorongjában van csak megvilágítva. Ez az utolsó negyed pillanata, a Hold ekkor a Naptól 270⁰-ra áll el keletre, vagy 90⁰-ra nyugotra és azontúl ismét mindinkább szűkülő sarlót képez, melynek domború oldala azonban most kelet felé, tehát mint előbb is, a Nap felé mutat. A növekedő Hold D, a fogyó C betűhez hasonlít, tehát a luna decrescens és crescens kezdő betűihez. Innen luna mendax.

Újhold ideje körül a vékony sarlón kívül némelykor az egész Hold tányérját is látjuk gyenge fényben. Ez — mint már LEONARDO DA VINCI és MAESTLIN is tudta, nem egyéb, mint a Földnek a Holdról visszavert fénye. A Föld ekkor t. i. teljes megvilágított oldalával fordul a Hold felé, hiszen Nap, Hold és Föld közel egy egyenesben állanak. Hogy a sarló a gyengén megvilágított Holdnál nagyobb koronghoz látszik tartozni, az tisztán az irradiatió folyománya.

Mivel a Hold az együttállás körül sötét és legfölebb keskeny sarlót mutat, világos bizonyítékul szolgálhat a számára, hogy a Hold közelebb van hozzánk, mint a Nap; mert ha a Napon túl állana, akkor éppen ezen pillanatban mutatná teljesen megvilágított oldalát.

A Hold ezen fényváltozásait nagyon könnyen magyarázzuk sötét voltából és a Föld körüli mozgásából (108. ábra). A Nap nagy távolsága miatt ugyanis párhuzamos sugarakat bocsát a Holdra, melyek mindig egyik felét teljesen megvilágítják. De a Földhez képest ezen állandóan a Nap felé fordított megvilágított fél a keringés egyes phásisaiban másként és másként áll, s ezért belőle hol többet, hol kevesebbet látunk. Ábránkban a párhuzamos vonalak a Nap sugarait jelentik, melyek a Holdnak mindig a Nap felé forduló felét világítják meg. A Földről nézve azonban a Holdkorong közepét mindig H-ban látjuk, ott, hol a Hold radius vectora a Földhez fordított felületét metszi. Ezen középpontra vonatkozólag a korongnak mindig más-más része fényes, mint ezt a sötét gyűrűben felrajzolt holdalakok érzékítik. Az egész ábra a Hold pályájában van vetítve, a gyürű ellenben a Holdalaknak centrális vetületét adja a Földről nézve. A Hold fénye eszerint egyszerűen a Hold nappali oldaláról visszavert napfény.

## XV. FEJEZET.

# A Hold keringési ideje.

Azon idő, mely alatt a Hold az égen teljes $360^0$-ot tesz, azaz mely alatt valamely állócsillagból kiindulva ahhoz ismét visszatér, a siderikus hónap nevét viseli. Már a definitió is mutatja meghatározásának módját. Tartama $27^d.321\,661 = 27^d$ $7^h$ $43^m$ $11^s.5$, és leginkább tisztán csillagászati kérdésekben fontos szerepű.

Ha azonban a Hold futását a Napra vonatkoztatjuk, azaz keressük, mily időközökben tér vissza ez égi test a Naphoz, vagy mi egyre megy, mi idő telik el két újhold vagy két telehold vagy általában két egyenlő phásis között, akkor a synodikus hó fogalmához jutunk. Ez nyilván nagyobb, mert hiszen a $360^0$ megtétele után a Nap is tetemesen kelet felé vándorolt, s a Holdnak még jókora ívet kell befutnia, hogy a Napot ismét utólérje. Mivel a Nap járása sem egyenletes, világos, hogy a synodikus hónap változó, úgy hogy csak közepes hosszúságáról szólhatunk.

Megfigyelés útján meghatározhatjuk legjobban a napfogyatkozások észlelt centrálitásának időpillanataiból, mert ekkor a Hold pontosan a Nap és Földet összekötő egyenesben áll. Ha két napfogyatkozás között n holdváltozás, lunatió volt, akkor az időköz a synodikus hó n-szerese. De számítás által is találhatjuk értékét, ugyanazon okoskodással, melylyel a két óramutató találkozását számítjuk. A siderikus hónap megfelel az óramutató járásának a számlap valamely pontjához, pl. a XII-hez képest, a synodikus hó ellenben az óramutató járásának a másik mutatóhoz képest.

$m > N$ Ha a nagyobb sebességű test N, a kisebb sebességű n nap alatt teszi meg keringését, akkor egy nap alatt a kerület illetve $\frac{1}{N}$ és $\frac{1}{n}$-edrészét írják le, és hasonlóképen t nap alatt $\frac{t}{N}$ és $\frac{t}{n}$-ed részét. De az újból való találkozása alkalmával az első út egy teljes kerülettel nagyobb lévén, mint a másik, áll:

$$t\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n}\right)=1, \text{ vagy } t=\frac{Nn}{n-N}.$$

A mi esetünkben n a Hold siderikus keringése, $n = 27^d.321\,661$, N a Napnak siderikus keringése $N = 365^d.256\,365$, a miből a synodikus hó tartama középben $29^d.530\,589 = 29^d\,12^h\,44^m\,2^s.89$. Kerek számban tehát a közép synodikus hónap $29\,{}^1/_2$ nap. Mindenesetre ezen synodikus hóval összefüggő változásai a holdphásisoknak okozták a hetekre és hónapokra való osztását az évnek. A synodikus hó mint hónap legjobban tükröződik vissza a török naptárban, melynek hónapjai felváltva 29 és 30 naposok.

A Hold tropikus hónapja azon időköz, mely alatt a Hold hosszúságban $360^0$-ot tesz ki. A mozgás kezdőpontja tehát az aequinoctiumra vonatkozik, mely egy hónap lefolyása alatt a Hold elé siet, úgy hogy ezt már újból eléri, még mielőtt az égen $360^0$-ot megtett volna. Tartama tehát a siderikus hónapnál rövidebb azon időközzel, mely alatt a Hold közép siderikus mozgásával a $27^d.322$ nap alatti praecessiót leírja. Vagy az előbbi képlet alapján, ha N helyébe a Nap tropikus évét teszszük, míg t a synodikus hó. Ebből a közép tropikus hónap $27^d.321\,582 = 27^d\,7^h\,43^m\,4^s.68$.

Ebből a Hold közép tropikus (vagy hosszúságban való) mozgása:

1 közönséges (365 napos) év alatt: 13 kerület $+ 129^0\,23'\,5''.124$.
1 nap alatt: $13^0\,10'\,35''.027\,76$.
1 óra alatt: $32'\,56''\,4595$; $1^m$ alatt: $32''.941$; $1^s$ alatt: $0''.549$.

A Hold pályájának pontosabb megismerése után még két, ránk nézve fontos, hónappal ismerkedünk meg, melyek különösen a fogyatkozások tanában szerepelnek; ezek, mint már előzetesen megemlíthetjük, az anomalistikus és a drakói hónap. Amaz a Hold mozgását a holdpálya apsisvonalára, emez pályájának csomópontjára vonatkoztatja.

## XVI. FEJEZET.

## A Holdpálya fekvése.

A holdpálya pontos kijelölésével ugyanazon feladat előtt állunk, melyet a Nap esetében már megoldottunk. Megfigyeljük meridiánkör segítségével a Hold deleléseit, a mi közvetlenül rectascensióját és declinatióját adja. Mindenekelőtt meggyőződünk arról, hogy a Hold két egymásra következő delelése között elfolyó idő változékony, továbbá, hogy a declinatiója körülbelül úgy változik, mint a Napé, csakhogy nem egy év, hanem már egy siderikus hónap alatt írja le körülbelül az ekliptika ferdeségével egyenlő határokon belül fekvő pályáját.

Látnivaló tehát, hogy a Hold is nem az aequatorban kering, hanem egy, hozzá az ekliptika ferdeségével nagyjában egyenlő hajlású pályában, melyet a csillagászok szokása szerint nem az aequatorra, hanem az ekliptikára fogunk vonatkoztatni. Egyrészt a praecessió miatt az aequator folytonosan változó, míg az ekliptika helyben marad, másodszor pedig az összes, a naprendszerhez tartozó testek közel ugyanazon, az ekliptikától nem messze eltérő síkban mozognak, a mi a helymeghatározásban sok előnynyel jár.

Ha a megfigyelt rectascensiókat és declinatiókat (tényleges megfigyelések helyett gyakorlatul az ephemerisek adatai szolgálhatnak) égi glóbusba berajzoljuk, csakhamar meggyőződünk róla, hogy a holdpálya is legnagyobb kör az égen, tehát a Föld középpontján átmenő sík, mely az ekliptikához körülbelül $5^0$-nyi szöglet alatt hajlik. Az ekliptikával két, egymástól $180^0$-ra fekvő metszési pontot képez; azon metszési pont, melyen át a Hold a déli szélességekből az északi félgömbre jut, a holdpálya felszálló csomójának (vagy régi astrologiai szokás szerint a sárkány fejének), melyen át az ekliptika északi feléből annak déli felébe kerül, a leszálló csomójának (vagy sárkány farkának) szokás nevezni. Innen van, hogy a csomópontokra vonatkoztatott hónap a drakonitikus hó nevét nyerte.

A számítás természetesen pontosabb eredményt ád; eszközlésére először is minden észlelt declinatió és rectascensió hosszúság és szélességre változtatandó át, a mi az ephemerisekből kivehető ekliptika ferdeségével könnyen eszközölhető. Az e czélra közölt formulák némi átalakulás után a következők:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\delta};$$

ezzel:

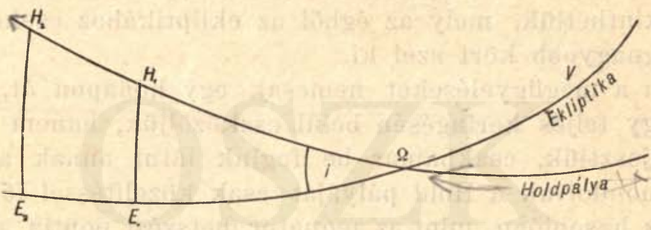
$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\sin(\omega+\varepsilon)}{\sin\omega}\operatorname{tang}\alpha \quad \text{és} \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}(\omega+\varepsilon)};$$

$\omega$ mindig az első negyedben választható, $\lambda$ pedig $\alpha$-val ugyanazon körnegyedben fekszik, $\beta$ positiv és negativ lehet.

Ha a számítást minden előzetes hypothezis nélkül akarjuk eszközölni, akkor két holdhelyen át (109. ábra) fektessük egy legnagyobb kör ívét. Ez kellőképen meghosszabbítva az ekliptikát $\Omega$-ban fogja metszeni és a legnagyobb kör hajlása az ekliptikához i leend. Ismerjük ugyan a Hold hosszúságát $VE_1$ és $VE_2$ a két megfigyelésben, de nem a csomóét, s ezért a gömbi háromszög megoldása ad: (cotangens tétel)

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \beta_1}{\sin(\lambda_1 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tang} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - \Omega)},$$

ha a Hold helye az első és második megfigyelés alkalmával




109. ábra. A holdpálya fekvésének meghatározása.

1 és 2 indexxel van ellátva és a csomó hosszúságát szintén az $\Omega$ jellel jelöljük. A felírt két egyenletből következik:

$$\frac{\sin(\lambda_2 - \Omega)}{\sin(\lambda_1 - \Omega)} = \frac{\operatorname{tang} \beta_2}{\operatorname{tang} \beta_1}.$$

Ha ezen egyenlet mindkét oldalához 1-et adunk s az egységből levonjuk, a két egyenletet azután egymással osztjuk, lesz:

$$\frac{\sin(\lambda_2 - \Omega) + \sin(\lambda_1 - \Omega)}{\sin(\lambda_2 - \Omega) - \sin(\lambda_1 - \Omega)} = \frac{\dfrac{\sin\beta_2}{\cos\beta_2} + \dfrac{\sin\beta_1}{\cos\beta_1}}{\dfrac{\sin\beta_2}{\cos\beta_2} - \dfrac{\sin\beta_1}{\cos\beta_1}}$$

vagy kellő összevonás után:

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\,\Omega) \cos \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)}{2 \sin \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\,\Omega)} = \frac{\sin\beta_2 \cos\beta_1 + \sin\beta_1 \cos\beta_2}{\sin\beta_2 \cos\beta_1 - \sin\beta_1 \cos\beta_2},$$

vagy rövidebben írva:

$$\tang \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega) = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ez egyenlet jobb oldalán a megfigyelés által ismeretes mennyiségek szerepelnek, a baloldali $\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega$, tehát $\Omega$ maga is meghatározható, s ezzel az eredeti két egyenlet bármelyikéből $i$.

A kiszámítás azt mutatja, hogy igen nagy közelítéssel a Hold két helyét összekötő legnagyobb kör ívei mind az ekliptika ugyanazon $\Omega$ pontján haladnak át és az ekliptikához ugyanazon $i$ hajlással bírnak, jeléül annak, hogy a mondott közelítéssel a Hold pályáját a Föld középpontján átmenő siknak tekinthetjük, mely az égből az ekliptikához csekély hajlású legnagyobb kört szel ki.

Ha a megfigyeléseket nemcsak egy hónapon át, azaz a Hold egy teljes keringésén belül eszközöljük, hanem azontúl is kiterjesztjük, csakhamar be fogjuk látni annak az okát, miért mondottuk a Hold pályáját csak közelítéssel főkörnek. Ugyanis hasonlóan, mint az aequator metszési pontja az ekliptikával hátrafelé nyomul, azaz nyugotra vándorol, úgy nyomulnak hátra a Hold csomói is. Hosszúságuk folytonosan kisebbedik, még pedig tetemesen, mert naponta középben 3′ 10″.63-nyi ívet futnak be, s teljes keringésüket tropikusan 6798·34 nap alatt teszik meg; 365 napra tehát $19^0\ 19'\ 41''.73$ esik.

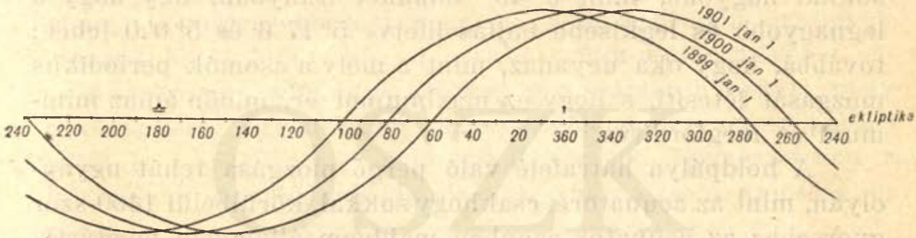
Ebből közvetlenül kiszámíthatjuk azon időt is, mely a Holdnak csomópontján való két átmenete közt eltelik. Ezen idő kisebb, mint a siderikus keringés, mert hiszen a csomópont egy hó lefolyása alatt a Hold elé siet. Kiszámítható tehát akár úgy, mint a praecessióból és a siderikus évből számítottuk a tropikus évet, akár úgy, mint a synodikus hónapot. Pontos közepes értéke ezen úgynevezett drakói hónapnak $27^d.21\,222 = 27^d\ 5^h\ 5^m\ 35^s.8$.

A csomók közepes mozgásának ismerete után most már közepes hosszúságukat bármely pillanat számára kiszámíthatjuk, ha helyzetüket egy bizonyos epocha számára ismerjük. Hansen szerint a holdcsomó hossza 1800. január 0. (azaz 1799. decz. 31.) közép greenwichi delében: $\Omega = 33^0\ 16'\ 31''.15$.

A tényleges helyzete a középmozgásból számítottnál természetesen majd nagyobb, majd kisebb hosszúsággal bír.

Mivel egy hónap lefolyása alatt a csomópontok hátrálása körülbelül $1^0.5$-ot tesz ki, a holdpálya már nem tekinthető magában zárt, sík görbének. Ha a Hold az ekliptikát egy keringésénél $\Omega$ pontban szeli, akkor a következő keringésnél már $\Omega$ előtt fogja szelni s í. t. A pálya tehát csavarvonal, melynek csavarodásai azonban nem haladnak párhuzamosan egymással, hanem sorban keresztezik egymást, mint ezt a 110. ábra jól mutatja, mely a lefejtett ekliptikát s három egy évnyi köz által elválasztott holdpályát tüntet fel.

A csomók hátrálása nem egyenletes, mint tüstént látni, ha hosszabb időn át folytatott megfigyeléseket hasonlítunk




110. ábra. A Hold három lefejtett pályája.

össze. Azt találjuk ugyanis, hogy a hátrálás az első és harmadik évnegyedben folyton gyorsul, a másodikban és negyedikben lassul. Ebből látni, hogy a Nap befolyást gyakorol a csomók mozgására, mely a megfigyelésekből levezetett valódi hosszúságnak az előbbi szabály szerint számított közepes csomóhosszúsággal való összehasonlításából levezethető. A valódi és közép csomóhosszúság különbsége függ a Nap, a Hold s a csomó helyzetétől és a valódi csomóhosszat találjuk, ha a közepeshez

$$1^0.507 \sin 2(\odot - \Omega) + 0^0.125 \sin 2(\leftmoon - \Omega) - 0^0.112 \sin 2(\leftmoon - \odot)$$

javítást adjuk. Ebben $\odot$ és $\leftmoon$ a Nap és Hold hosszúságát jelenti. Látnivaló, hogy a tényleges és közép csomó közel összeesik, ha a Nap a csomóban áll vagy tőle $90^0$-ra fekszik, hogy ellenben a kettő közötti különbség közel maximum, ha a Nap a holdcsomótól $45^0$-nyira foglal helyet. A csomók mozgása tehát egyenletes körmozgásból s egy főleg félévi és félhavi periodusban ismétlő szakaszos mozgásból tehető össze. Ebben is teljesen hasonlít az aequinoctium hátrálásához, mert ennek is van egy rövidebb periodusú egyenlőtlensége, az úgynevezett nutatió, s okaiban is, mint látni fogjuk azonos, valamint amaz, úgy ez is, a Nap vonzó befolyására vezetendő vissza.

Miként a csomópontok, úgy a holdpálya hajlása is változásoknak van alávetve. Ezek azonban nem egyirányúan haladók, hanem egy félév lefolyása alatt periodikusan változók. A középérték $i = 5^0\,8'\,47''$, a valódi hajlás $0^0.147 \cos 2\,(\odot - \Omega) + 0^0.010 \cos 2\,(☾ - \Omega) - 0^0.011 \cos 2\,(☾ - \odot)$ javítás hozzáadása által keletkezik. Ebből látni, hogy a változás nagysága nem sokkal nagyobb, mint $8'\,49''$ mindkét irányban, úgy hogy a legnagyobb és legkisebb hajlás illetve $5^0\,17'.6$ és $5^0\,0'.0$ lehet; továbbá, hogy oka ugyanaz, mint a mely a csomók periodikus mozgását létesíti, s hogy ez maximumot ér, midőn amaz minimum és megfordítva.

A holdpálya hátrafelé való pergő mozgása tehát ugyanolyan, mint az aequatoré, csakhogy sokkal, körülbelül 1400-szor gyorsabb; az aequator azonban majdnem állandóan megtartja hajlását az ekliptikához, míg a holdpálya ezt félévenként, bár kevéssé érezhetően változtatja. A holdpálya pólusa a praecessió $23^0\,27'$-nyi sugarával 26,000 év alatt leírt körével concentrikus kört ír le 18·6 év alatt $5^0\,9'$ gömbi sugárral. Ha a forgás közben a felszálló holdcsomó a tavaszi aequinoctium pontjába kerül, akkor aequator, ekliptika és holdpálya közös metsző egyenessel bírnak, s a Holdnak legnagyobb és legkisebb declinatiója illetve $23^0\,27' + 5^0\,9'$ és $-23^0\,27' - 5^0\,29 =$ azaz $\pm\,28^0\,36'$. Ha ellenben kilencz év lefolyása alatt a leszálló csomópont kerül a tavaszpontba, akkor a Holdnak szélső declinatiója nyilván $\pm\,(23^0\,27' - 5^0\,9')$, azaz $\pm\,18^0\,18'$. A holdpálya legészakibb és legdélibb pontja 18·6 év lefolyása alatt az ekliptika mindkét oldalán párhuzamos sávolyt ír le, melynek szélessége a holdpálya hajlásának kétszerese, tehát $10^0\,0'$ és $10^0\,35'$ között változó.