XVII. FEJEZET.

A holdpálya alakja. Anomalistikus hónap.

A holdpályának az égre való vetítése ugyan legnagyobb kör, de ezzel a Hold valódi útjának alakjáról még mitsem tudunk. Az alakmeghatározásnál teljesen úgy járhatunk el, mint a Napnál tettük, csakhogy igen különböző eredménynyel. Míg tudniillik a Nap esetében a legnagyobb és legkisebb látszó sugár az egyes keringések alkalmával alig néhány tizedmásodperczczel változik, addig a különbségek a Hold esetében gyakran még félívperczénél is többre rúgnak fel. Ezért az excentrumosság számára nagyon különböző értékeket fogunk kapni. Leghelyesebb lesz még, ha a hosszú időn át figyelt legnagyobb és legkisebb sugarakból külön-külön közepet veszünk s ezzel számolunk. Ekkor oly számot nyerünk, mely a középponti egyenlítésből hosszú időn át levezetett pontos adattól: $e = 0{\cdot}054\,908$, nem sokat tér el. Természetesen a középponti egyenlet is hóról-hóra más excentrumossághoz vezet.

Ebből az következik, hogy a Hold pályája, ha ugyan ellipsisnek akarjuk nevezni, úgy fekvésre, mint alakra nézve igen gyorsan változó. Még inkább meggyőződünk erről, ha az apogaeum és perigaeum időpillanatait pl. a legkisebb és legnagyobb látszó sugarak segítségével összehasonlítjuk. Míg állandó ellipsisben a Hold az apsisvonal két oldalán fekvő fél ellipsist egyenlő idők alatt futja be, addig a Holdnál a különbségek több napra rúghatnak fel. A perigaeum tehát nem fekszik szemben az apogaeummal, vagy más szóval kifejezve: az apsisvonal fekvése az égen gyors változást szenved, de a megfigyelések szerint nem mindig kizárólag előre, azaz kelet felé; hátranyomulások is fordulnak elő.

A perigaeum közepes mozgása folytán már 8 év 310^d $13^h\,48^m\,53^s$ alatt tesz egy teljes keringést és ezért 365 nap alatt $40^0\,39'\,45''.56$ vagy naponként $6'\,41''.056$ nagyságú ívet. Mivel hosszúsága 1800. január 0-án a greenwichi délben $225^0\,23'\,53''.06$ volt, közepes hosszúsága bármily időre nézve kiszámítható.

Ha most a Hold futását perigaeumára vonatkoztatjuk, akkor ez természetesen hosszabb leend, mint siderikus keringése, mert a perigaeum a Holddal egyenlő irányban haladva, a teljes 360° megtétele után az időközben több mint 3°-kal előrenyomult perigaeumot utól kell érnie. A Holdnak két perigaeumátmenete között eltelő időt anomalistikus hónapnak szokás nevezni (letelte után az anomalia ugyanazon értéket veszi fel); tartama, mely a drakonitikushoz hasonló módon számítható $27^d.5546 = 27^d\,13^h\,18^m\,37^s.44$ középben.

A perigaeum valódi hosszúságát a Nap éppen úgy befolyásolja, mint a csomók fekvését vagy a pályahajlást. Egy évi periodussal bíró szakaszos mozgást hoz létre haladásában, melynek amplitudója 22′ 17″, mely az apheliumban s periheliumban 0, a középanomália 90° és 270° értékeinél, tehát április és október elején maximum. E javítás nagysága 22′ 17′ sin M, hol M a Nap középanomáliáját jelenti.

XVIII. FEJEZET.

A különböző holdperiodusok összehasonlítása.

A Hold keringési idejét, a szerint, a mint más-más kezdőpontra vonatkoztatjuk, a következő táblázat mutatja be:

siderikus	hónap	$= 27^d.321\,661$	$= 27^d\ \ 7^h\,43^m\,11^s.5$
synodikus	„	$= 29^d.530\,589$	$= 29^d\,12^h\,44^m\ \ 2^s.9$
tropikus	„	$= 27^d.321\,582$	$= 27^d\ \ 7^h\,43^m\ \ 4^s.7$
drakoni	„	$= 27^d.212\,220$	$= 27^d\ \ 5^h\ \ 5^m\,35^s.8$
anomalistikus	„	$= 27^d.554\,600$	$= 27^d\,13^h\,18^m\,37^s.4.$

Ha a siderikus hónap közvetlen megfigyelésből ismeretes, akkor, mint láttuk, a synodikus és tropikus kiszámítható a siderikus és tropikus évvel való összehasonlítás folytán. A drakói és anomalistikus hó ellenben a csomópont és perigaeum mozgásából vezethető le.

De valamennyi holdkeringés közvetlenül a Hold tropikus mozgásából vezethető le, ha sorban a Nap, az aequinoctium, a csomó és perigaeum közép tropikus mozgásával hasonlítjuk össze. E czélra felírjuk a következő táblázatot:

a Hold	tropikus mozgása 365^d alatt				=	$+4809^0\,23'\,5''.124$
a Nap	„	„	„	„	=	$+359^0\,45'\,40''.601$
az aequinoctium	„	„	„	„	=	$-0^0\,0'\,50''.244$
a csomó	„	„	„	„	=	$-19^0\,19'\,41''.73$
a perigaeum	„	„	„	„	=	$+40^0\,39'\,45''.56$,

a hol az előjel + vagy — volta keleti, illetve nyugoti mozgást jelent, azaz mozgást a növekedő vagy fogyó hosszúságok irányában.

A Hold relativ mozgása a Naphoz 365 nap alatt az első két számadat különbsége, t. i. $4449^0\ 37'\ 24''.52 = 4449^0.623\,48$ s ennélfogva a hold keringése a Naphoz képest, azaz a synodikus hó $= \frac{365 \times 360}{4449{\cdot}623\,48} = 29^d.530\,589$, úgy mint előbb.

A Hold siderikus hónapját kapjuk, ha relativ mozgását az állócsillagokhoz keressük. Az állócsillagok mozgása az aequinoctium negativ mozgásával egyenlő lévén, a Hold relativ mozgása 365 nap alatt $4809^0\ 22'\ 14''.88$, tehát a siderikus keringés $\frac{365 \times 360}{4809{\cdot}3708}$. A Holdnak csomópontjához való relativ mozgása 365^d nap alatt $4828^0\ 42'\ 46''.85$, a drakói keringés tehát $\frac{365 \times 360}{4828{\cdot}713}$ nap, és végül a Hold relativ mozgása a perigaeumához 365 nap alatt $4768^0\,43'\ 19''.56$, ennélfogva az anomalistikus hó $= \frac{365 \times 360}{4768{\cdot}722}$ nap, mely értékek mind az előbb találtakkal teljesen megegyeznek.

XIX. FEJEZET.

A Hold mozgásának egyenlőtlenségei.

A Hold mozgása sokkal több eltérést mutat az elliptikus egyszerű Kepler-féle mozgástól, mint a Nap; egy részét már a csomók, a perigaeum és a pályahajlás változásában ismertük meg. Ezen kívül vannak azonban még eltérések, melyek a Holdnak helyét is változtatják saját pályájában, s mindezen egyenlőtlenségek okai, mint későbben tüzetesebben látni fogjuk, a Nap vonzó befolyására, a Nap háborgásaira vezethetők vissza. A Holdnak pontos mozgása a geographiában is kiváló fontossággal bír; a fogyatkozások, különösen pedig a tengerjárás jelenségei és a hosszúságmeghatározás problemája a Hold mozgásának elmélete nélkül nem is tárgyalható. Mi természetesen azon száz és száz egyenlőtlenség közül, melyeket a Hold futásában az elmélet inkább, mint a megfigyelés kiderített csak a legfontosabbakat s legszembeszökőbbeket tárgyalhatjuk.

A Hold közepes mozgása Hansen szerint naponként 13° 10′ 35″.0286 s mivel 1800. január 0. greenwichi delében hosszúsága 335° 43′ 26″.7 volt, közepes hosszúsága bármely időben az 1800 óta elfolyt idő s a közepes mozgás szorzata által megtalálható. Ehhez adandók azután sorban a most megbeszélendő egyenlítések.

A Hold mozgásának első és legnagyobb egyenlőtlensége a középponti egyenlítés, melyet már Hipparchos talált, azáltal, hogy (miként mi a Nap esetén tettük) összehasonlította a Hold valódi, megfigyelések által levezetett hosszúságát az előre kiszámítható közepes hosszúsággal. Ez egyenlőtlenség legnagyobb értéke 6° 17′ 39″ s ez adja egyszersmind a holdpálya excentrumosságának legpontosabb számát. A középponti egyenlítés bármely más pillanatban az excentrumosság ismerete után most már

$$v - M = 6^0\ 17'\ 22''.67 \sin M + 12'\ 56''.47 \sin 2M$$
$$+ 36''.92 \sin 3M + 2''.01 \sin 4M$$

alakban írható, melyben M a Hold középanomáliáját jelenti. Az egyenlet, mely tulajdonképen végtelen sornak első jelentősebb része, mintegy egy másodperczre helyes.

A középanomália a Hold s perigaeuma közepes hosszúsá gainak különbségével egyenlő. Ez utóbbi Hansen szerint 1800. január 0·0^h greenwichi középidőben 225° 23′ 53″.06 volt s 365 nap alatt 40° 39′ 45″.56 vagy egy nap alatt 6′ 41″.056-czel halad előre (nyugotról kelet felé). A középanomália tehát minden pillanatra könnyen kiszámítható. Ha azonban ehhez hozzá illesztjük a középponti egyenlítést, nem kapjuk — miként a Nap esetében volt — a Holdnak pontos helyét, hanem még sokkal több egyéb javítást kell előbb eszközölnünk. A fontosabbak és nagyobbak, melyek tehát már elég jókor voltak ismeretesek, az evectió, a variatió és az évi egyenlítés.

Az evectiót már PTOLOMAEUS fedezte fel, s legnagyobb értéke $1^0\,20'\,30''$; befolyását a következő egyenlet adja:

$$\text{evectió} = 1^0\,20'\,30''\sin\{2\,(☾ - ⊙) - M_☾\}$$

hol ☾ és ⊙ a Hold közepes és a Nap valódi hosszúságát, M_c a Hold középanomáliáját jelenti. Itt is, mint minden egyenlőtlenségnél az állandó szorzó az evectió coefficiense vagy amplitudója, az időtől függő szöglet pedig argumentumának nevét viseli.

A syzygiák alkalmával $☾ - ⊙ = 0$ vagy 180^0, tehát az evectió $-1^0\,20'\,30''.\sin M_c$ és a valódi Hold legtávolabb marad a közép Hold mögött. A quadraturákban $☾ - ⊙ = 90^0$ vagy 270^0, tehát az evectió $= +1^0\,20'\,30''\sin M_c$ és a Hold legtöbbel előzi meg a közepest. Mindkét pillanatban az evectió alakja ugyanaz, mint a középponti egyenlítés első tagjáé, t. i. $6^0\,17'\,22''.67\sin M_c$ és ezért összevonható; a syzygiák és quadraturák pillanatában e javítás illetve $4^0\,56'\,52''.67\sin M_c$ és $7^0\,37'\,52''.67\sin M_c$. A régi csillagászok a Holdat csak fogyatkozások alkalmával, tehát a syzygiákkor figyelték, s ezért a középponti egyenlítést mindig az evectió értékével kisebbnek találták. PTOLOMAEUS azonban a quadraturákat is észlelvén, a középponti egyenlítést az evectió értékével nagyobbítva találta. A syzygiumi és quadraturai középponti egyenlítés nagy $2^0\,50'$-re rúgó különbsége folytán PTOLOMAEUS az evectiót fedezte fel.

Az evectió periodusa azon idő, mely alatt $2\,(☾ - ⊙) - M_c$ argumentum 360^0-kal megnövekszik; függ tehát a synodikus és anomalistikus hónaptól. Mivel amaz 29·5306, emez 27·5546 napig tart, a Hold relativ mozgása a Naphoz egy nap alatt $\frac{360^0}{29{\cdot}5306}$ és a perigaeumhoz $\frac{360^0}{27{\cdot}5546}$. Ennek következtében $2\,(☾ - ⊙) - M_c = \frac{2 \times 360^0}{29{\cdot}5306} - \frac{360}{27{\cdot}5546}$, s ha ez 360^0-ra rúg, akkor az evectió minden lehetséges phásisát befutotta. Periodusa tehát $\frac{360^0}{2\,(☾ - ⊙) - M_c} = 31\,{}^3/_4$ nap.

A variatiót TYCHO DE BRAHE találta 1590-ben; legnagyobb értéke $35'\,42''$ és mathematikai kifejezése

$$\text{variatió} = 35'\,42''\sin 2\,(☾ - ⊙),$$

tehát tisztán a Nap és Hold relativ állásától függ, a nélkül, hogy a Hold pályájában elfoglalt helye szerepet játszana. A variatió 0, ha $☾ - ⊙ = 0^0$ és 180^0, 90^0 és 270^0, tehát elenyészik a syzygiákban és quadraturákban, de maximum, ha $☾ - ⊙ = 45^0$ és 225^0, vagy 135^0 és 315^0, tehát a főphásisok között, az úgynevezett oktánsokban. Az első és harmadik oktánsban $+ 35' 42''$, a másodikban s negyedikben $- 35' 42''$. A variatió a synodikus hó első és harmadik negyedében positiv, azaz a Hold valódi hossza nagyobb, mint a közepes, a második és utolsó negyedében negativ, azaz a Hold a közepes helye mögött marad. Periodusa természetesen a fél synodikus hó $= 14^3/_4$ nap, mivel $2 (☾ - ⊙)$ ily idő alatt növekszik meg 360^0-kal.

Az évi egyenlítés legnagyobb értéke $11' 12''$ és mathematikai kifejezése:

$$\text{évi egyenlítés} = - 11' 12'' \sin M_{⊙}$$

hol $M_{⊙}$ a Nap közepes anomáliáját jelenti. Tehát tisztán csak a Napnak helyzetétől függ, s ezért periodusa az esztendővel azonos. Felfedezője szintén TYCHO DE BRAHE, vagy mások szerint KEPLER. Értéke 0, ha a Nap perigaeumában vagy apogaeumában áll, tehát jan. 1-én és július 2-án, és legnagyobb, t. i. $- 11' 12''$, illetve $+ 11' 12''$, ha a Nap közepes anomáliája 90^0 vagy 270^0, tehát április, illetve október kezdetén. Az év első felében az évi egyenlítés negativ, tehát a Hold közepes helye mögött marad, a második felében a Hold közepes helyét megelőzi.

A csomók, a perigaeum és a hajlás változásain kívül a felsorolt egyenlítések azok, melyek leginkább számbavehetők, ha a Hold valódi hosszát, s ebből azután szélességét és radius vectorát, illetve rectascensióját és declinatióját kivánjuk számítani. A szerint, a mint most az itt egyszerűen elhanyagolt, értékükre ugyan sokkal kisebb, de számukra nézve a százat is meghaladó egyenlőtlenségek egymást véletlenül egyenlő jellel támogatják, vagy egymást ellentétes jelük miatt lerontják, a kiszámított hosszúság az észlelttől még mindig kisebb vagy nagyobb mennyiséggel eltérhet.

A csillagászok a Hold futását úgynevezett táblázatok segélyével számolják, azaz az egyes kiegyenlítési értékeknek, argumentumaik egyenlő közei számára előre kiszámított értékeivel. Ha ezen, interpolatió által bármely pillanatra könnyen kivehető értékeknek előjeleikre való tekintettel vett összegét a Hold közepes hosszához illesztjük, nyerjük a valódi hosszúságot. A legelső pontosabb táblázatok — mint már egyszer említők — TOBIAS MAYER-től valók, a legújabbakat HANSEN és NEWCOMB számították.

A számítás teljes menete most már rövid vázlatban a következő:

1. Kiszámítjuk a Hold közepes hosszát ☾ és közepes anomáliáját $M_{☾}$.

2. Kiszámítjuk a Nap közepes hosszát ⊙ és közepes anomáliáját $M_{\odot}$.

Most hozzáadjuk a Hold közepes hosszúságához előjelére való tekintettel

3. az evectiót és évi egyenlítést.

4. Ugyancsak hozzáadjuk a Hold közepes anomáliájához az evectiót, az évi egyenlítést és a perigaeum periodikus változását.

5. A javított anomália s az excentrumosság a középponti egyenlítést adják, melylyel a Holdnak már javított hosszúságát még egyszer javítjuk.

6. A másodízben javított holdhoszszal számítjuk a variatiót, a mi által a Hold valódi hosszúságát nyerjük pályájában.

Hogy ezt a hosszúságot most az ekliptikára redukálhassuk, kiszámítjuk

7. a felszálló csomó hosszát, az által, hogy a közepeshez periodikus egyenlőtlenségeit adjuk;

8. a valódi hajlást, az által, hogy közép értékéhez periodikus tagjait csatoljuk, végre

9. az ekliptikára vonatkozó hosszúságát és szélességét azon gömbi háromszögből, mely az ekliptika, a Holdpálya és a Hold szélessége között rajzolható.

Példa kedvéért határozzuk meg a Hold helyét 1881. évi aug. 22. 0^h közép párisi idő számára.

HANSEN és LEVERRIER szerint a következő adataink vannak:

Hold kp. hossza 1800. jan. 0. $0^h 9^m 21^s$ kp. párisi idő: $335^0 43' 26''.7$
Perigaeumának kp. hossza ugyanakkor $225^0 23' 53''.06$
Hold. kp. tropikus mozgása 100 júliusi év alatt
$= 1336$ kerület $+ 307^0 53' 39''.5$

Perihelium kp. trop. mozg. 100 júliusi év alatt
$= 11$ kerület $+ 109^0\ 3'\ 2''.46$
Nap közepes hossza 1850. jan. 1. 0^h kp. párisi idő: $280^0 46' 43''.5$
Perihelium kp. hossza ugyanakkor $280^0 21' 21''.5$
Perihelium kp. évi tropikus mozgása $61''.700$

1. A Hold közepes hosszúsága ☾ és közép anomáliája $M_☾$. 1800 január 0. $0^h 9^m 21^s$ és 1881 augusztus 22. 0^h között eltelt 81 év, 20 szökőnap, 233 nap és $23^h 50^m 39^s = 29818{,}9935$ nap. Ez idő alatt a Hold közepes mozgása $\frac{29818{,}9935}{36525}$ $(1336 \times 360^0 + 307^0 53' 39''.5) = 1091$ kerület $+ 146^0 53' 29''.4$, a perigaeumé pedig $\frac{29818{,}9935}{36525} (11 \times 360^0 + 109^0 3' 2''.46) = 9$ kerület $+ 81^0 58' 16''.10$. E szerint

a Hold kp. hossza: $335^0 43' 26''.7 + 146^0 53' 29''.4 = 122^0 36' 56''.1$
a perigaeum kp. h.: $225^0 23' 53''.1 + 81^0 58' 16''.1 = 307^0 22'\ 9''.2$
és így a Hold közepes anomáliája: $M_☾ = 175^0 14' 46''.9$.

2. A Nap valódi hosszúsága ☉ és közép anomáliája $M_☉$. A valódi hosszúságot teljesen az előbb közölt leírás szerint számítva, lesz

$$☉ = 149^0 28' 41''.9.$$

1850. jan. 1. 0^h és 1881. augusztus 22. 0^h idő között elfolyt 31 év, 8 szökőnap és 233 nap; a Nap közepes mozgása ezen időközben $230^0 8' 26''.3$, eltekintve a 360^0 sokszorosaitól; hasonlóképen a perihelium mozgása $61''.7 \times 31 + \frac{61''.7 \times 241}{365{,}25} = 32'$ $33''.41$. Volt tehát

a Nap kp. hossza: $280^0 46' 43''.5 + 230^0\ 8' 26''.3 = 150^0 55'\ 9''.8$
a perihelium kp. h.: $280^0 21' 21''.5 + \quad 32' 33''.4 = 280^0 53' 54''.9$
és ennélfogva a Nap közepes anomáliája $M_☉ = 230^0 1' 14''.9$.

3. A közép holdhosszúság ☾ első javítása:

$$\text{evectió} = 4830''.\ \sin [2 (☾ - ☉)\ M_☾].$$

$$☾ = 122^0 36' 56''.1$$
$$☉ = 149^0 28' 41''.9$$
$$2 (☾ - ☉) = 306^0 16' 28''.4$$
$$M_☾ = 175^0 14' 46''.9$$
$$2 (☾ - ☉) - M_☾ = 131^0\ 1' 41''.5$$
$$\text{evectió} = 4830'' \sin (131^0 1' 41''.5) = + 1^0 0' 43''.7.$$

Évi egyenlítés $= -672'' \sin M_{\odot} = -672''. \sin (230^0 1' 14''.9)$ $= +8' 34''.94$

$$\begin{array}{rl} ☾ & = 122^0 36' 56''.1 \\ \text{evectió} & = + \quad 1^0 \ 0' 43''.7 \\ \text{évi egyenl.} & = + \quad 8' 34''.9 \\ \hline \text{első javított hosszúság } ☾ & = 123^0 46' 14''.7. \end{array}$$

4. A közép holdanomália $M_{☾}$ javítása.

A perigaeum periodikus változása $= 22' 17'' \sin M_{\odot} = 1337''$ $\sin (230^0 1' 14''.9) = -17' 4''.5$.

$$\begin{array}{rl} M_{☾} & = 175^0 14' 46''.9 \\ \text{evectió} & = + \quad 1^0 \ 0' 43''.7 \\ \text{évi egyenl.} & = + \quad 8' 34''.9 \\ \text{perig. period. vált.} & = - \quad 17' \ 4''.5 \\ \hline \text{javított közép anomália: } M_{☾} & = 176^0 41' 10''.0. \end{array}$$

5. A közepes hosszúságnak második javítása:

Középponti egyenlítés $= 22642''.67 \sin M_{☾} + 756''.47 \sin 2 M_{☾}$ $+ 36''.92 \sin 3 M_{☾} + 2''.01 \sin 4 M_{☾} = 22642''.67 \sin (176^0 41' 10''.0)$ $+ 756''.47 \sin (353^0 22' 20'') + 36''.92 \sin (170^0 3' 30'') + 2''.01$ $\sin (346^0 44' 40'') = + 20' 25''.2$. Ehhez adva a Hold első javított hosszúságát: $123^0 46' 14''.7$ adja:

a Hold második javított hosszúságát $☾ = 124^0 6' 39''.9$.

6. Variatió $= 2142'' \sin 2 (☾ - \odot) = 2142'' \sin (309^0 15' 56'')$ $= -27' 38''.4$.

$$\begin{array}{lrl} \text{Ugyanis:} & ☾ & = 124^0 \ 6' 39''.9 \\ & \odot & = 149^0 28' 41''.9 \\ \hline & 2(☾ - \odot) & = 309^0 15' 56''.0. \\ \text{Ebből:} & ☾ & = 124^0 \ 6' 39''.9 \\ & \text{variat.} & = \quad -27' 38''.4 \\ \hline \end{array}$$

A Hold val. hossza pályájában $= 123^0 39' \ 1''.5$.

7. A Hold csomójának mozgása.

1800. jan. 0. 0^h 9^m 21^s párisi kp. időben volt $\Omega = 33^0 16'$ $31''.15$ és kp tropikus mozgása egy évszázad (36525 nap) alatt: 5 kerület $+ 134^0 8' 59''.61$, a mi 29818,9935 napra 4 kerületet $+ 139^0 2' 20''.75$-et ad. Ennek folytán 1881. aug. 22. 0^h közép párisi idő: Ω kp. hossza $= 254^0 14' 10''.4$.

Periodikus változásai $1^0\ 30'\ 25''.2 \sin 2\,(\odot - \Omega) + 7'\ 30'' \sin 2\,(☾ - \Omega) - 6'\ 43''.2 \sin 2\,(☾ - \odot)$.

$$\begin{array}{rl} \odot = & 149^0\ 28'\ 41''.9 \\ \Omega = & \underline{254^0\ 14'\ 10''.4} \\ 2\,(\odot - \Omega) = & 150^0\ 29'\ 3''.0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ☾ = & 123^0\ 39'\ 1''.5 \\ \Omega = & \underline{254^0\ 14'\ 10''.4} \\ 2\,(☾ - \Omega) = & 98^0\ 49'\ 42''.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} ☾ = & 123^0\ 39'\ 1''.5 \\ \odot = & \underline{149^0\ 28'\ 41''.9} \\ 2\,(☾ - \odot) = & 308^0\ 20'\ 39''.2 \end{array}$$

tehát a periodikus csomó-hosszúsági változások:

$$5425''.2 \sin (150^0\ 29'\ 3''.0) + 450'' \sin (98^0\ 49'\ 42''.2)$$
$$- 403''.2 \sin (308^0\ 20'\ 39''.2) = + 57'\ 13''.7.$$

A csomó javított hossza tehát: $254^0\ 14'\ 10''.4 + 57'\ 13''.7 = \Omega = 255^0\ 11'\ 24''.1$.

8. középhajlás $i = 5^0\ 8'\ 47''$.

Periodikus változása $= 8'\ 49'' \cos 2\,(\odot - \Omega) + 36'' \cos 2\,(☾ - \Omega) - 39''.6 \cos 2\,(☾ - \odot) = 529'' \cos (150^0\ 29'\ 3''.0) + 36'' \cos (98^0\ 49'\ 42''.2) - 39''.6 \cos (308^0\ 20'\ 39''.2) = - 8'\ 10''.44$.

A javított hajlás tehát: $i = 5^0\ 8'\ 47'' - 8'\ 10''.44 = 5^0\ 0'\ 36''.56$.

9. A Hold hossza pályájában $= 123^0\ 39'\ 1''.5$
A csomó hossza $= \underline{255^0\ 11'\ 24''.1}$
A szélesség argumentuma $= 228^0\ 27'\ 37''.4$
(HΩ a 109. ábrában).

Már most a Hold hossza a csomó pontjától számítva:

$$\text{tang } E\Omega = \text{tang } H\Omega \,.\, \cos i$$

azaz $E\Omega = 228^0\ 21'\ 5''.3$ és ehhez adva a csomó hosszúságát
$\Omega = \underline{255^0\ 11'\ 24''.1}$

ad: $\lambda = 123^0\ 32'\ 29''.4$ mint a Holdnak az ekliptikában számított hosszúságát, mely most már a tavaszponttól van számítva.

Továbbá ugyanezen háromszögben (109. ábra):

$$\sin HE = \sin \beta = \sin H\Omega \sin i$$

a miből $\beta = - 3^0\ 44'\ 52''.7$.

E számítással szemben a Connaissance des temps teljesen szigorú számítása ad: $\lambda = 123^0 32' 38''0$ és $\beta = -3^0 44' 54''.4$. Az eltérés kicsinysége mellett világos, hogy az elhanyagolt kis tagok legnagyobb részt lerontották egymást.

Elképzelhető most már, hogy az összes egyenlőtlenségek tekintetbevételével mily óriási munkát ad a Hold helyének az év minden egyes napjára való kiszámítása, a melynek pusztán eredménye szerepel az ephemerisekben szerény számadat alakjában.

XX. FEJEZET.

Fogyatkozások.

A Föld, miként a Hold is sötét testek, melyeket a Nap világít meg. Ennek folytán árnyékot vetnek, mely fogyatkozásokat hozhat létre. Ha a Hold a Föld árnyékkúpjába lép, holdfogyatkozás jő létre, ha a Hold árnyékkúpja a Földet éri, napfogyatkozásról — helyesebben földfogyatkozásról — szólunk.

Ha, miként a jelen esetben úgyis van, a megvilágított test kisebb, mint a megvilágító, akkor CED véges hosszúságú árnyékkúp keletkezik, a Nap s a Föld vagy Hold gömbjének közös burkoló egyhéjú kúpjából (111. ábra). Ennek csúcsa a Naptól elfordított s terébe egyetlen napsugár sem hatol be, ez tehát a teljes árnyék. Azon burkoló, kéthéjú kúp, melynek csúcspontja E′ a Nap s a megvilágított test között áll, ennek háta mögött a félárnyékot hozza létre, azaz oly teret, melybe már a Nap egyes sugarai hatolhatnak. Ezen kúp a végtelenségbe terjedvén, benne a sötétség észrevétlenül és éles határ nélkül megy át a teljes megvilágításba.

Ha O a Hold vagy a Föld középpontját jelöli, akkor a 111. ábra szerint a Nap R, O-nak r sugarával s a két test NO = L távolságával határozható meg az árnyékkúp OE = l hossza. Ugyanis

$$\frac{l}{L+l} = \frac{r}{R}, \text{ a miből } l = \frac{r}{R-r} L,$$

úgy hogy az árnyék hossza annál tetemesebb, minél nagyobb a két test távolsága s minél nagyobb a megvilágított test sugara a Napéhoz képest.

A gömb alakú Föld számára

$$r = 6\,370,\ R = 691\,600\ \text{km}.$$

és L az apheliumban s periheliumban illetve 151 203 760 és 146 216 100 km.

Innen a Föld árnyékkúpjának legkisebb és legnagyobb értéke

$$l = 1\,359\,250 \text{ és } l = 1\,405\,610\ \text{km.},$$

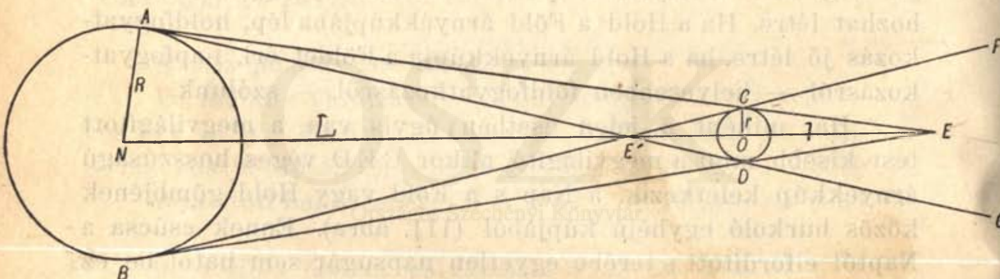
a mi körülbelül a Nap átmérőjével azonos.

Az újhold esetében — mert a telehold árnyéka fogyatkozást nem létesíthet —

$$r = 1740,\ R = 691\,600\ \text{km.},$$

és L a Nap perigaeumában s a Hold apogaeumában:

$$146\,216\,100 - 407\,110 = 145\,808\,990\ \text{km.}$$



111. ábra. A Föld vagy Hold árnyékkúpja.

és L a Nap apogaeumában s a Hold perigaeumában:

$$151\,203\,760 - 356\,650 = 150\,847\,110\ \text{km.},$$

minek folytán a Hold árnyékkúpjának legkisebb és legnagyobb hosszúsága

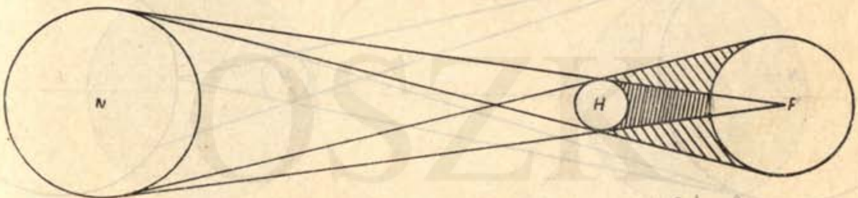
$$l = 367\,770 \text{ és } l = 380\,470\ \text{km.}$$

Amaz a Föld középpontjától 407 110 — 367 770 = 39 340 és a Föld felületének legközelebbi pontjától 32 970 km.-nyivel marad el, amaz azonban a Föld középpontjánál 380 470 — 356 650 = 23 820 km.-rel és a felület legtávolibb pontjánál is 17 450 km.-rel tovább nyúlik. Ha a Föld a Holdtól közepes távolságban van, a mely 385 080 km., akkor a leghosszabb holdárnyék is alig éri már a Föld felületét. Az esetek túlnyomó számában tehát a Hold árnyéka nem éri el a Föld felületét.

XXI. FEJEZET.

Napfogyatkozások.

Fogyatkozás általában csak úgy jöhet létre, ha az egyik bolyó a másiknak árnyékkúpjába lép, ha tehát Nap, Föld és Hold legalább közel egy egyenesben fekszik. Ez nyilván csak új- és telehold alkalmával történhetik, s mivel a Hold nem az ekliptikában mozog, hanem oly pályában, mely vele több mint 5^0-nyi szögletet képez, közelebbről meghatározva csak akkor, ha a Hold is közel van az ekliptikához, azaz ha valamelyik csomópontja szomszédságában áll. Ha ezen körülmények újhold alkalmával találkoznak, a midőn a Hold a Nap s a Föld között áll, akkor árnyéka a Földre érhet, s ekkor az elsötétített részben a Napot nem láthatjuk, napfogyatkozás jön létre. Ez abban



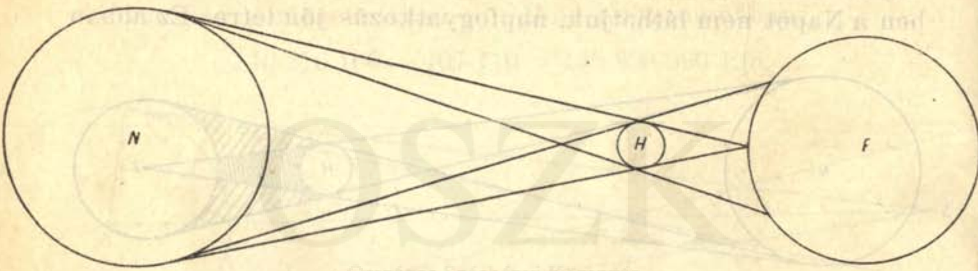
112. ábra. Teljes napfogyatkozás.

nyilvánul, hogy a Hold sötét korongja a Nap fényes tányérába vág be, ezt részben vagy teljesen is elfödi. Ha az árnyékkúp a Földet teljesen éri, mint a 112. ábrában, akkor a teljes árnyékban álló megfigyelő a Napot teljességgel elfödve fogja látni, a félárnyékban álló észlelő pedig a Nap annál keskenyebb sarlóját, minél közelebb áll a teljes árnyékhoz. A félárnyékon kívül a fogyatkozás nem látható. Ha azonban a megfigyelő a Földet nem érő árnyékkúp tengelyében áll (113. ábra), akkor a Nap kerületének minden pontjából nyer még fényt, azaz a Hold sötét tányérja körül fénylő gyürűt lát. E szerint lehet a Napfogyatkozás teljes, részleges vagy gyürűs.

Különösen az első érdekes, mert ekkor a Nap helyén teljességgel fekete korong mutatkozik, melyet ezüstszürke, gyöngyházfényű, szabálytalan alakú fénymez övez, a korona és ebbe gyakran belenyulnak a Nap felületéből kitörő izzó gázeruptiók, a protuberantiák.

A teljes fogyatkozást centrálisnak nevezzük, ha a Nap és Hold középpontja, valamint a megfigyelő szeme szigorúan egy egyenesben állanak. A fogyatkozások nagyságát a napátmérő részeiben szoktuk kifejezni, megjelölvén, hogy a Hold az átmérő hanyadrészét takarja el.

Világos, hogy úgy a megfigyelő helyváltozása a Földön a Hold árnyéktengelyéhez képest, mint a Föld forgása és a Hold árnyékának a térben való mozgása ugyanazon fogyatkozást más-más helyen és időben másként láttatják. A Napfogyatkozásokat ez oknál fogva optikai, vagy parallaktikus fogyatkozásnak is szokás nevezni, mert kizárólag az észlelő különös helyzete folytán látjuk a Holdat a Nap tányérjára vetítve.



113. ábra. Részleges napfogyatkozás.

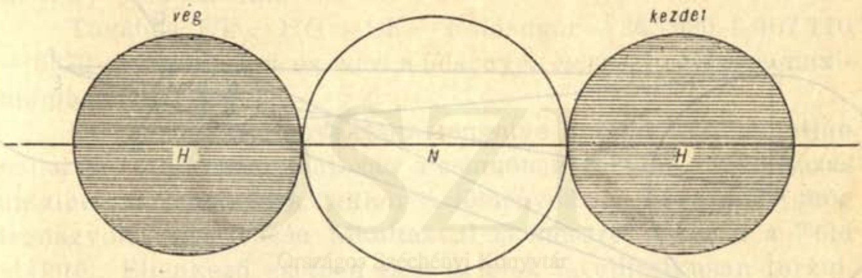
A napfogyatkozás három fajáról az idézett két ábrán kívül más úton is szerezhetünk fogalmat. A Nap látszó átmérője kerek számban 31′ 31″ (apogaeum, július 2-án) és 32′ 35″ (perigaeum, január 1-én) között, a Holdé az apogaeumban 29′ 26″ és a perigaeumban 33′ 33″ között váltakozik. Ha tehát az apogaeumban a Hold centrálisan a Nap elé áll, akkor legalább is 31′ 31″ — 29′ 26″ = 2′ 5″-nyi széles gyűrű marad hátra, a Hold ez esetben a Napot teljesen nem födheti el. Ha azonban a földközelben áll a Nap elé, akkor teljesen elfödheti, sőt a Hold legkedvezőtlenebb esetben is 58″-czel nagyobb átmérővel bírván, a fogyatkozásnak bizonyos tartama is leend. Ha a két égi test nem centrálisan vetűl egymásra, akkor részleges fogyatkozásnak van helye.

A fogyatkozás tartama első sorban attól függ, mily távol esik egymástól a Hold és Nap középpontja. De centrális fogyatkozás esetén is különböző lehet még, egyrészt a két égi test sugarainak változása szerint, másrészt a pályájukban elfoglalt helyzet szerint, mert ezzel változik a két égi testnek sebessége is. Ha közepes viszonyokat tartunk szem előtt, akkor

a Nap	közepes	átmérője		1923″.6
a Hold	„	„		1868″.0
a Nap	„	siderikus mozgása	1^m alatt	2″.464
a Hold	„	„ „	1^m „	32″.941

lévén, a Hold relativ mozgása a nyugvónak gondolt Naphoz 30″.477 perczenként.

A Hold a Nap nyugoti szélén lép be havi mozgása folytán a korongba, s keleten hagyja el; a fogyatkozás kezdődik és véget ér, ha a Hold korongja a Napét kívülről nyugoton

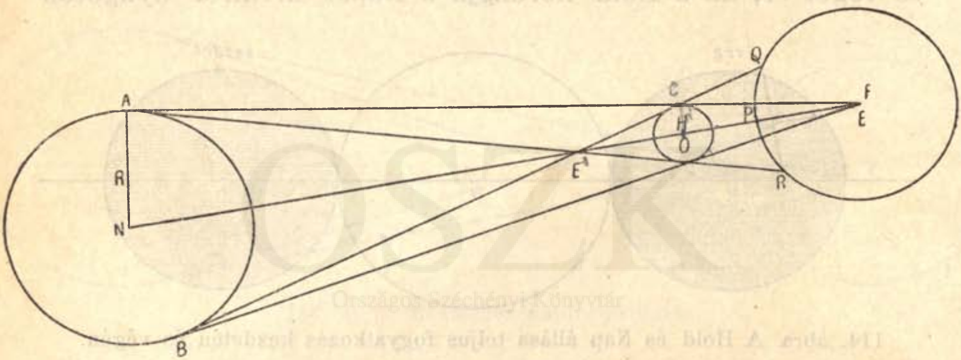


114. ábra. A Hold és Nap állása teljes fogyatkozás kezdetén és végén.

és keleten érinti (114. ábra). E közben a Hold minden pontja a két égi test átmérőinek összegével egyenlő utat írt le, s ezért a centrális fogyatkozás közepes viszonyok melletti tartama $\frac{3791 \cdot 6}{30 \cdot 477} = 124 \cdot 4$ percz. De mivel a megfigyelő a Föld tengelyforgása folytán maga is keletfelé mozog, a fogyatkozás tartama valamivel megnyúlik még és általában véve 2 óránál valamivel nagyobb.

Ebből csak igen kis törtrész esik a czentrális teljes vagy gyürűs fogyatkozásra. Ennek kezdete és vége azáltal van előírva, hogy a Hold a Napot nyugoti és keleti szélén belülről érinti. A Hold által megtett út ekkor a két átmérő külömbségével egyenlő, a mire átlagos viszonyok mellett $\frac{55 \cdot 6}{30 \cdot 477} = 1^m\ 50^s$ közel szükségeltetik. A teljes vagy gyürűs fogyatkozás átlagos tartama tehát alig 2 percz; amazé legnagyobb, ha a Hold a perigaeumban, a Nap ellenben a földtávolban van, emezé, ha a Nap perigaeuma a Hold apogaeumával kombinálódik. Az átmérők külömbségei ez esetben 122″, illetve 189″, s azonkívül a Hold a gyűrűs napfogyatkozás esetében az apogaeumban lévén, tetemesen lassabban mozog, mint a totális fogyatkozás esetében. Legszélsőbb tartama a centrális fogyatkozásnak 8^m, a gyűrűsé 12^m lehet.

Ha a 115. ábrában PQR a földfelület egy részét jelöli, akkor ezen könnyen kiszámíthatjuk a Hold teljes árnyékának keresztmetszetét. Ez nyilván annál nagyobb, minél távolabb fekszik a Nap, s minél közelebb a Föld a Holdhoz képest.



115. ábra. A Hold árnyékának metszése a Földdel.

Ez esetben a Hold árnyékának hossza volt: 380 470 km. és a Föld és Hold középpontjainak távolai 356 650 km., ennélfogva a földfelület távolsága a kúp csúcsától 380 470 — 356 650 + 6370 = 30 190 km. Az ábra szerint, melyben most O a Holdat jelenti:

$$\frac{\text{a Hold teljes árnyékának átmérője a Földön}}{\text{a Hold átmérőjéhez}} = \frac{30\,190}{380\,470}$$

a miből $2r = 3.1740$ lévén, a teljes árnyék keresztmetszete a Föld felületén 276·1 km. Ha ennek tengelye a Föld középpontján megy át, akkor a keresztmetszet kör, minden más esetben gömbi ellipsis, mely különösen a Föld szélei felé erősen torzul s ezért nagyobb átmérővel bír.

A félárnyék keresztmetszete ellenben annál nagyobb, minél közelebb áll a Nap s minél távolabb a Föld a Holdtól.

Az előbbi ábra szerint a félárnyék átmetszete úgy áll a Hold átmérőjéhez, mint E′P a az E′O-hoz. De ANE′ és OCE′ hasonló háromszögekből:

$$\frac{E'N}{E'O} = \frac{R}{r} \text{ vagy } \frac{E'N + E'O}{E'O} = \frac{R + r}{r}$$

mivel $E'N + E'O = L$ = a Nap s Föld és Hold-Föld távolságainak külömbségével, áll végre

$$E'O = L \frac{r}{R + r}$$

A legnagyobb napközelség = 146 216 100 és a legnagyobb holdtávolság 407 110 km., tehát az itt számbajövő L = 145 808 990 és $E'O = 365\,920$ km.

Továbbá $E'P = E'O + OF$ — Földsugár = 365 920 + 407 110 — 6370 = 766 660 km. és ezért a félárnyék keresztmetszete maximumban 7291 km.

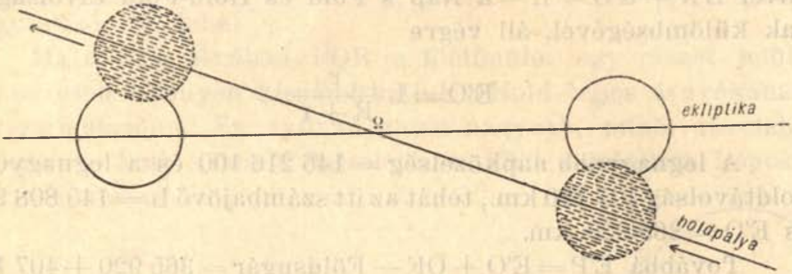
Ha ismét az árnyékkúp tengelye a Föld középpontján halad át, a mi csak pontosan a csomóban történő fogyatkozás alkalmával lehetséges, akkor a félárnyék is kör, mely még legnagyobb kiterjedése alkalmával is messze elmarad a Föld szélétől. Ellenkező esetben ezen árnyék is elliptikusan torzul, sőt a Föld felületén túlterjed.

XXII. FEJEZET.

Fogyatkozási határok.

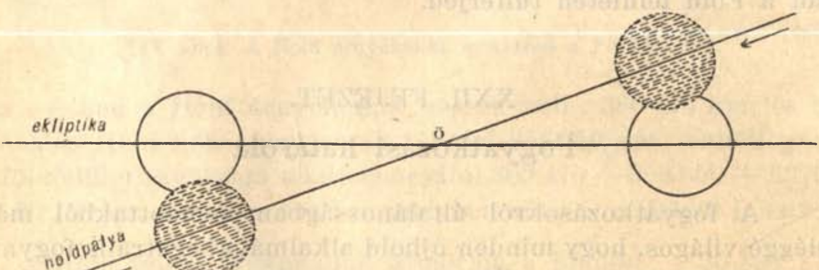
A fogyatkozásokról általánosságban mondottakból már eléggé világos, hogy minden újhold alkalmával centrális fogyatkozás jönne létre, ha a Hold is az ekliptikában mozogna. Mivel azonban a Hold pályahajlása mintegy 5^0 és a két égi test sugara csak egynegyed fokot tesz ki, azért a legtöbb újhold fogyatkozást nem okozva halad el a Nap felett vagy alatt, s födés csak akkor jöhet létre, ha a conjunctió ideje közel a csomóponthoz esik. Ha a fogyatkozás magában a csomóban történik, akkor a fogyatkozás centrális, még pedig gyürűs vagy teljes, ezenkívül pedig csak részleges lehet. A 116. és 117. ábra mutatja, hogy a felszálló csomó előtt és a leszálló csomó mögött a Hold a Nap alsó, a felszálló csomó mögött és a leszálló csomó előtt a napkorong felső felét fedi el.

Azon távolság, a melyen belül a csomó szomszédságában fogyatkozás lehetséges vagy szükséges, a fogyatkozási határ nevét viseli. Ez a holdpálya fekvéséből, a két égi test távolságából s látszó méreteiből könnyen meghatározható.



116. ábra. Napfogyatkozás a felszálló csomó körül.

A 118. ábra feltünteti azon pillanatot, melyben valamely részleges Napfogyatkozás kezdődik, melyben tehát az A-ban lévő megfigyelő a Hold korongjának külső érintkezését látja a Nap tányérjával, vagy melyben a félárnyék kúpja az A helyen a Földet érinti. R a látszó napsugár, azon szöglet, mely alatt



117. ábra. Napfogyatkozás a leszálló csomó körül.

a Nap sugarát látjuk, π a napparallaxis, azaz azon szöglet, mely alatt a Napról a Föld AF sugarát látni. Ugyanezt jelöli r és p a Hold számára. A Nap és Hold középpontjának látszó távolságát a részleges fogyatkozás kezdetén az NFH szöglet méri, ez pedig egyenlő:

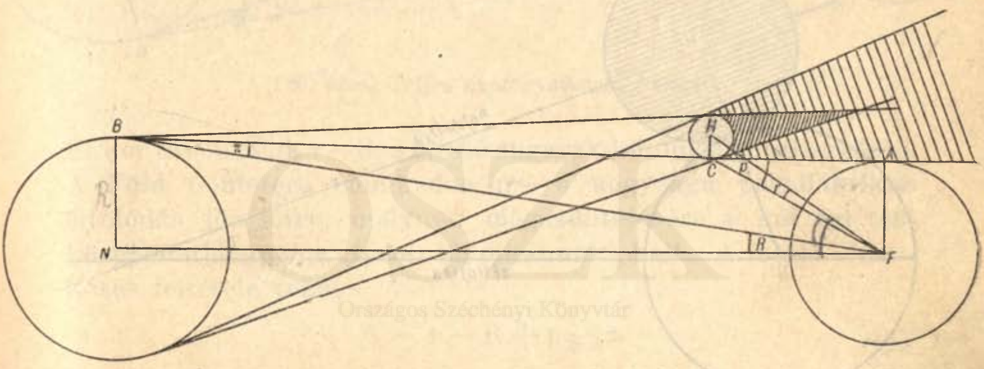
$$NFH = R + r + BFC.$$

A BFC háromszögnek p külső szöge, ezért $p = \pi + BFC$, vagyis

$$NFH = \triangle = R + r + p - \pi$$

a részleges fogyatkozás kezdetén Hold és Nap távolsága.

Más úton is jutunk ugyanezen egyenlethez. A Föld középpontjában álló megfigyelő számára kezdődik a részleges fogyatkozás azon pillanatban, melyben a két égi test korongja egymást érinti. Középpontjai szögtávolsága ekkor nyilván a két kör látszó sugarainak összegével, $R + r$-rel egyenlő. Ha most a két középpontot összekötő egyenessel párhuzamosan emelkedünk a földfelületre, akkor a parallaxis hatása miatt sülyed a Hold p-vel, a Nap a sokkal kisebb π ívvel, úgy hogy a két



118. ábra. Részleges napfogyatkozás határa.

korong a két parallaxis $p - \pi$ különbségével egymásba átfog. Érintkezés tehát csak akkor lép fel megint, ha a két korong középpontját ez eltolódás nagyságával távolítjuk, azaz ismét $R + r + p - \pi$ távolságra állítjuk.

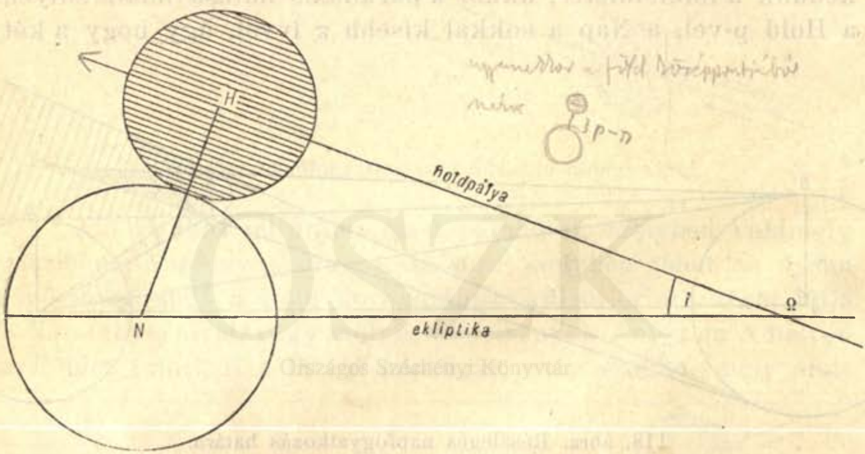
A partiális fogyatkozás belépést most már együtt a hold- és nap-pálya bennünket érdeklő íveivel a ~~120~~119. ábra mutatja. $HN = \triangle$ azon maximális távolság, mely mellett részleges fogyatkozás még éppen lehetséges. A H-ban derékszögű gömbháromszög megoldása ad az $N\Omega = d$ fogyatkozási határ számára:

$$\sin d = \frac{\sin \triangle}{\sin i}, \quad \triangle = R + r + p - \pi.$$

Mivel a $\triangle$-ban szereplő egyes mennyiségek bizonyos értékeken belül változékonyak, természetesen a fogyatkozásoknak egy lehetséges és egy szükségképeni határát fogjuk találni: amaz a △ maximumának, emez lehetséges minimumának fog megfelelni. Az egyes elemek számára a következő számértékek állanak:

R	maximuma	16′ 17″.5,	minimuma	15′ 45″.5
r	„	16′ 46″.5	„	14′ 43″.0
p	„	61′ 27″.0	„	53′ 53″.0
π	„	9″.0	„	8″.7

és ennek következtében minimum △ = 84′ 12″.5 és maximum

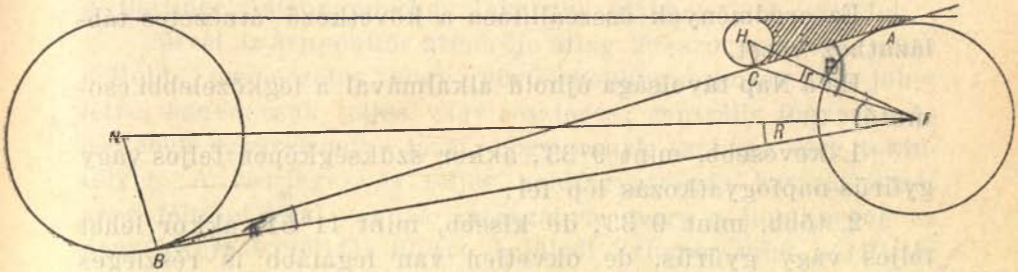


119. ábra. Részleges napfogyatkozás határa.

△ = 94′ 22″.3. Azonban a Holdpálya i hajlása is $5^0\,0'$ és $5^0\,18'$ között változó. Képletünk értelmében a maximális határt kapjuk, ha △ maximumát i minimumával kötjük össze és megfordítva. Téve tehát egyszer △ = $1^0\,24'\,12''.5$ és i = $5^0\,18'$, máskor △ = $1^0\,34'\,22''.3$ és i = $5^0\,0'$ nyerünk, illetve d = $15^0\,22'.6$ és d = $18^0\,21'.4$. Az előbbi érték a fogyatkozás szükségképeni, ez utóbbi lehetséges határa és azt mondja: Ha az újhold hosszúsága a legközelebbi csomótól kisebb, mint $18^0\,21'$, akkor lehet, ha kisebb, mint $15^0\,23'$, akkor van szükségképen részleges napfogyatkozás.

Egészen hasonlóan állapítjuk meg a fogyatkozási határokat a teljes vagy gyűrűs napfogyatkozások számára. Teljes vagy gyűrűs fogyatkozás lép fel, ha mint a 120. ábrában, a

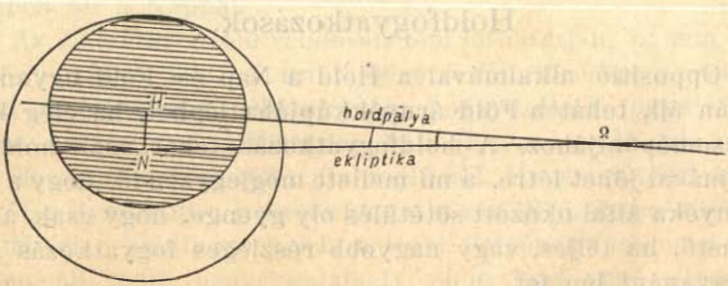
Hold teljes árnyékkúpja a Földet legalább is érinti. Ekkor NFH = △, a két égi test látszó távolsága r — R + p — π, mint azt az előbbi esethez teljesen hasonlóan levezethetjük. Vagy ismét: a Föld középpontja számára a teljes fogyatkozás belép, ha a két égi test korongja egymást belülről legalább is érinti.



120. ábra. Teljes napfogyatkozás határa.

Ekkor távolságuk r—R, a látszó sugarak különbségével egyenlő. A Föld felületére emelkedve p — π nagyságú parallaktikus eltolódás jön létre, melynek megszüntetésére a két égi test középpontját p — π ívvel távolítanunk kell. A belső érintkezés feltétele tehát

$$\triangle = r - R + p - \pi.$$



121. ábra. Teljes napfogyatkozás határa.

Ha ismét △ maximumát és minimumát képezzük, tekintetbe kell vennünk, hogy sugár és parallaxis egymástól nem független; a legkisebb p-hez tartozik a legkisebb r és megfordítva, úgy hogy r maximum értékéhez teljes, a minimum értékéhez gyűrűs fogyatkozás tartozik. A megfelelő gömbi háromszöget most a 121. ábra tünteti fel.

E szerint minimum $\triangle = 52' \, 41''.8$ és maximum $\triangle = 61' \, 47''.0$; ha amazt ismét i maximumával, emezt i minimumával kapcsoljuk, különben pedig az előbbi képlet szerint számolunk, akkor d minimumértéke $9^0 \, 33'.1$ és maximuma $11^0 \, 54'.0$ leend. A teljes vagy gyűrűs fogyatkozás lehetséges határa tehát $11^0 \, 54'$, szükségképeni határa $9^0 \, 33'$.

Ez eredmények összeállítása a következő átnézetes táblázathoz vezet.

Ha a Nap távolsága újhold alkalmával a legközelebbi csomótól

1. kevesebb, mint $9^0 \, 33'$, akkor szükségképen teljes vagy gyűrűs napfogyatkozás lép fel;

2. több, mint $9^0 \, 33'$, de kisebb, mint $11^0 \, 54'$, akkor lehet teljes vagy gyűrűs, de okvetlen van legalább is részleges fogyatkozás;

3. több, mint $11^0 \, 54'$, de kevesebb, mint $15^0 \, 23'$, akkor szükségképen van részleges fogyatkozás;

4. több, mint $15^0 \, 23'$, de kisebb, mint $18^0 \, 21'$, akkor lehetséges részleges fogyatkozás;

5. több, mint $18^0 \, 21'$, akkor semmiféle napfogyatkozásnak többé helye nincs.

XXIII. FEJEZET.

Holdfogyatkozások.

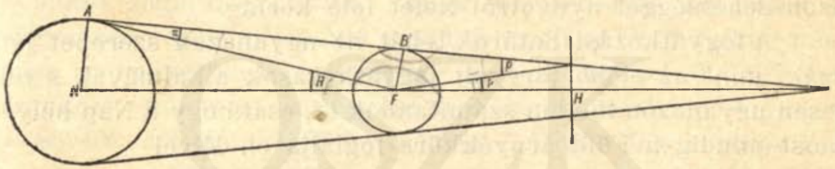
Oppositió alkalmával a Hold a Nap és Föld ugyanazon oldalán áll, tehát a Föld árnyékkúpjába léphet, ha elég közel áll csomópontjához. A holdfogyatkozás tehát csak holdtölte alkalmával jöhet létre, a mi mellett megjegyzendő, hogy a Föld félárnyéka által okozott sötétülés oly gyenge, hogy csak akkor érezhető, ha teljes, vagy nagyobb részleges fogyatkozás kísérője gyanánt lép fel.

Ha a Föld árnyékkúpját (122. ábra) a Hold távolságában BH tengelyére merőlegesen fektetett síkkal metszük, akkor keresztmetszetül az árnyékkört nyerjük, melynek a Földről látott ρ látszó sugara könnyen meghatározható. AFR háromszögben ugyanis $180^0 - (R + \rho) + \pi + p = 180^0$, a miből

$$\rho = \pi + p - R.$$

Ha ismét R, p és π értékeinek maximumát és minimumát tekintjük, akkor ρ: 37′ 44″.5 és 45′ 50″.2 között változhatik, míg a közepes értéke 41′ 9″. A légkör sugártörése miatt azonban az árnyékkör sugara még nagyobb, mert a fogyatkozás ezen méret feltételezése mellett már korábban kezdődik és későbben ér véget, mint a számítás szerint. Ennélfogva Mayer Tóbiás szerint a sugarat értékének $\frac{1}{60}$-adával nagyobbítani kell. A Berliner Astronomisches Jahrbuch újabban $\frac{1}{40}$-et vesz fel.

Mivel az árnyékkör átmérője átlag 2·6-szor nagyobb, mint a Holdé, természetes, hogy gyűrűs holdfogyatkozás nem jöhet létre, hanem csak teljes, vagy részleges; centrális fogyatkozás esetében egyszersmind látni, hogy annak tartama elég tekintélyes. A részleges és teljes holdfogyatkozás határai ismét azon feltétel által vannak megszabva, hogy a holdkorong az árnyékkört kívülről, illetve belülről érintse, mint a 119. és 121. ábra mutatja. Mindkettőben az árnyékkör középpontja



122. ábra. Holdfogyatkozás létrejötte.

N betűvel van jelölve, jogosan, mert ez mindig diametrálisan szemben áll a Nappal.

Az elsötétült Hold rendesen nem láthatatlan, hanem sötét rézvörös fénye van, a mi a levegő fénytörésére vezetendő vissza. Csak kevés példánk van, hogy a Hold fogyatkozása alkalmával teljesen láthatatlan volt (Kepler említ két esetet 1601. deczember 9. és 1620. június 15-ről, Hevelius 1642. április 25-éről, s ilyen volt a londoni fogyatkozás 1816. június 10-én is).

Mivel a holdfogyatkozás a Hold fényének tényleges elvételében áll, nem pedig valamely eléje lépő test elfödésére vezethető vissza, objektiv vagy physikai fogyatkozásnak mondható, melyet minden észlelő egyformán lát, a ki számára a Hold egyátalában a horizont felett áll. A holdfogyatkozást tehát ugyanazonképen a Föld egész éjjeli fele látja, míg a subjectiv napfogyatkozást mindig csak igen keskeny sávolyban álló megfigyelő látja teljesnek, az azon kívül álló megfigyelők pedig távolság és idő szerint többé-kevésbbé részlegesnek.

XXIV. FEJEZET.

Hold Fogyatkozási határok.

Ha a Hold pályája az ekliptikával összeesnék, akkor minden újhold teljes nap-, minden telehold teljes centrális holdfogyatkozással járna. A két sík között levő tetemes hajlás miatt azonban a telehold a legtöbb esetben sötétülés nélkül fog elhaladni az árnyékkör felett vagy alatt, s kisebb-nagyobb fogyatkozás csak úgy jöhet létre, ha a holdtölte nagyobb vagy kisebb távolságban, de mindig elég közel áll be a holdpálya egyik csomójához. Ugyanis az árnyékkör középpontja diametrálisan szemben fekszik a Nappal, s ezért, mint ez maga is, az ekliptikában fekszik s a Nappal együtt benne ugyanazon sebességgel nyugotról kelet felé kering.

A fogyatkozási határok tehát itt ugyanazon szerepet játszák, mint az előbb tárgyalt fogyatkozások alkalmával, s teljesen ugyanazon módon számítandók ki, csakhogy a Nap helyét most mindig a Föld árnyékköre foglalja el. Mivel

$$\rho : 37' \; 44''.5 \text{ és } 45' \; 50''.2$$

között, a Hold sugara ellenben

$$r : 14' \; 43''.0 \text{ és } 16' \; 46''.5$$

között változik, a részleges fogyatkozás számára $r + \rho$, azaz $NH = \triangle$ minimuma és maximuma leend: $52' \; 27''.5$ és $62' \; 36''.7$. Ha amazt a hajlás maximumával $i = 5^0 \; 18'$, emezt minimumával $i = 5^0 \; 0'$ egyesítjük, akkor $N\Omega = d$ számára $9^0 \; 30'.5$ és $12^0 \; 3'.7$ nyerünk. A kisebb érték a részleges fogyatkozás szükséges, a nagyobb érték lehetséges határa.

A teljes fogyatkozás határa beáll, ha a Hold az árnyékkört belülről érinti; ekkor a két kör középpontja $\triangle = \rho - r$ távolságban van, mely szélső eseteiben $23' \; 1''.5$ és $29' \; 3''.7$ között ingadozhatik. Az előbbivel hasonló eljárás szerint a teljes fogyatkozás szükséges határa $d = 4^0 \; 9'.5$, lehetséges határa $d = 5^0 \; 34'.0$. Ha az árnyékkör középpontja közel áll az egyik csomóhoz, akkor természetesen a Napé ugyanily távolságban marad a másik csomótól, és ezért a holdfogyatkozások beálltának feltételeit a következő átnézetben állíthatjuk össze:

Ha a Nap távolsága a legközelebbi csomóponttól:

1. kisebb, mint $4^0\ 9'$, akkor okvetetlenül teljes holdfogyatkozás lesz;

2. nagyobb, mint $4^0\ 9'$, de kisebb, mint $5^0\ 34'$, akkor lehet teljes, de bizonyára van részleges fogyatkozás;

3. nagyobb, mint $5^0\ 34'$, de kisebb, mint $9^0\ 30'$, akkor szükségképen lesz részleges fogyatkozás;

4. nagyobb, mint $9^0\ 30'$, de kisebb, mint $12^0\ 4'$ akkor lehet partiális, és

5. nagyobb, mint $12^0\ 4'$, akkor fogyatkozás egyáltalában nem lehet többé.

A centrális holdfogyatkozás közepes tartamát könnyen számíthatjuk a 114. ábrából, ha most a Nap helyébe az árnyékkör sugarát teszszük. Ennek közepes mozgása irány és nagyságra nézve a Napéval egyenlő lévén, a Hold relativ mozgása az árnyékkörhez ugyanaz, mint a Naphoz, $30''.477$ perczenként. Már most az árnyékkör közepes átmérője $+\frac{1}{60}$ része $= 83'\,40''$, a Holdé $31'\,8''$ és ezért a centrális fogyatkozás öszszes tartama $\frac{83'40''+31'8''}{30''.447} = 226^m = 3^h\,46^m$, a miből $\frac{83'40''-31'8''}{30''.447} = 103^m = 1^h\,43^m$ a teljes sötétülésre esik.

XXV. FEJEZET.

A hold- és napfogyatkozások kiszámítása.

Ha ephemeridagyűjtemény áll rendelkezésünkre, akkor a Nap és a Hold csomójának hosszából a syzygiák alkalmával nagyon könnyen megállapíthatjuk, vajjon a fogyatkozás határai be vannak-e tartva, várható-e tehát nap- vagy holdfogyatkozás, vagy sem. Ha igen, akkor interpoláljuk az évkönyvből a conjunctió vagy oppositió pillanata számára a lennt közölt fogyatkozási elemeket, melyekkel a fogyatkozás egész menete graphikusan teljesen kielégítő pontossággal levezethető.

Ha ellenben oly fogyatkozásról van szó, a mely számára ephemerisünk nincsen, pl. valamely történeti fogyatkozásról, akkor rendesen ismerjük valamely hely számára annak beálltát; ha ezen adat sem könnyítené számításunkat, a lennt levezetendő fogyatkozási cyklusok segítségével iparkodunk kipuhatolni legalább azon, lehetőleg szűkre szabott időközt, melyen belül a fogyatkozásnak történnie kellett. A fogyatkozásnak valószinű beállta körül egyenlő időközökre számítsuk a Hold és Nap hosszúságait, mint ezt eddig tanultuk, és keressük interpolatió által azon pillanatot, melyben a Hold és Nap hosszúsága 0^0 vagy 180^0-kal, avagy rectascensiója 0^h vagy 12^h-val különböző volt. Ezen pillanat számára keressük azután ismét a fogyatkozási elemeket.

Megjegyzem mindjárt, hogy a geographusnak vagy a történésznek ezen számítást tényleg eszközölnie soha sem kell. Ismeretes azon sajátságos hatás, melyet a Hold, de még különösebben a Nap fogyatkozása reánk és minden szervezetre gyakorol, és ennélfogva a régibb történetírók soha sem mulasztották el, hogy tudomásukra jutott fogyatkozásokról említést tegyenek. Régi fogyatkozásoknak ilyetén említése most már beláthatólag kitünő eszköz egyidejű események időpontjának pontos megállapítására, vagy idegen naptárrendszernek a mienkbe való átváltoztatására. Ezen czélból számította már a mult évszázadban Pingré a régi fogyatkozásokat Art de verifier les dates czímű művében, újabban pedig Theodor v. Oppolzer „Canon der Finsternisse“ nevű, örök időkre alapvető nagy fogyatkozási katalogusát (Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissensch. Wien. 52. köt. 1887.).

Ezen munka a Kr. szül. előtti 1208 és Kr. szül. utáni 2163 év közé eső 8000 nap- és 5200 holdfogyatkozást sorolja fel, melyek a déli szélesség 30^0-ig láthatók voltak vagy lesznek, s minden adatot tartalmaz, melylyel a fogyatkozásnak közelebbi láthatósági viszonyai tetszés szerint adott hely számára könnyen számíthatók. E számításokat, melyekkel minden elemi képzettségű számoló könnyen elbánik, mellőzendőknek vélem, mert a munka bevezetője erre vonatkozólag elég bő utasításokat ad. Megjegyzem azonban, hogy ezen, már eléggé könnyű s egyszerű számítás is a legtöbb esetben mellőzhető, mert a holdfogyatkozások közelebbi láthatósága glóbus segélyével állapítható meg, a napfogyatkozásokéit ellenben a munka terjedelmes függeléke, a napfogyatkozások ikonographiája szolgáltatja. Ez stereographikus poláris projectióban ábrázolja a Földet — 30° szélességig s minden a mondott időközbe eső napfogyatkozás számára a következő pontokat tartalmazza: azon helyet, hol a napfogyatkozás napkelet pillanatában kezdődött és napnyugotkor véget ért, továbbá, hol a centralitás pillanata a valódi délre esett, s végül a fogyatkozás jellegét, totális, gyűrűs vagy részleges-e. Ha az idéztem három főphásisnak megfelelő pontokat körívvel kötjük össze (a stereographikus vetület természete folytán a térképen is körív lesz e görbe), akkor igen nagy közelítéssel azon vonalat nyerjük, melynek mentén a fogyatkozás a nap valamely szakában centrális, tehát teljes volt, azaz a centralitás görbéjét. E görbéből egy pillanat alatt dönthetjük el, vajjon valamely és mely fogyatkozás átment-e egy adott helyen, sőt hozzávetőleg még azt is, hogy a nap mely órájában volt látható a fogyatkozás legnagyobb phásisa.

Ez ikonographiából péld. kétségtelenül kiderül, hogy a Georgius Monachos folytatójától említett, Byzanczban látható volt teljes napfogyatkozás, mely a bolgár háborút előzte meg, a 891. augusztus 8-iki centrális gyűrűs napfogyatkozás volt. Ezen napfogyatkozás az, mely Magyarország ezredéves fennállásának ünneplő évét közelebbről szabja meg, a mit ily módú csillagászati meghatározás nélkül tenni nem lehetett volna.

Az Oppolzer-féle Canon tehát az összes fogyatkozásokra vonatkozó kérdésekben illetékes, s míg egyrészt a történettel s chronologiával foglalkozónak nélkülözhetetlen segédeszköze marad, a geographusnak is becses statistikai felvilágosításokkal szolgál.

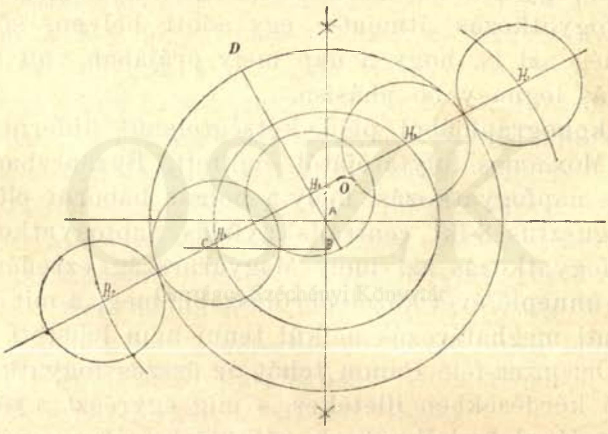
De lássuk ettől függetlenül is egy hold- s egy napfogyatkozás teljes kiszámítását graphikai módon a glóbus segítségül vételével. A száraz leírás helyett egy példa álljon, mely az egész úgy is egyszerű eljárást teljesen világossá fogja tenni.

Kiszámítandó az 1895. márczius 10-iki teljes holdfogyatkozás. A fogyatkozás elemei a Berliner Astronomisches Jahrbuch szerint a következők:

Oppositió rectascensióban 1895. márcz. 10.	$16^h\ 25^m\ 0^s.9$ k. berl. idő.
Hold declinatiója	$+3^0\ 59'\ 35''.0$
Nap „	$-3^0\ 50'\ 3''.5$

Hold óránkénti mozgása AR-ban		+	33′ 7″.8
Nap „ „ „		+	2′ 17″.9
Hold „ „ Decl-ban		—	17′ 54″.3
Nap „ „ „		+	0′ 58″.8
Hold aequ. hor. parall.	p		60′ 53″.3
Nap „ „ „	π		8″.9
Hold sugara	r		16′ 37″.2
Nap „	R		16′ 5″.6.

Az árnyékkör sugara $\rho = p + \pi - R = 44' 56''.6$ és $\frac{1}{60}$-ával nagyobbítva: $\rho = 45' 41''.5$.



123. ábra. Holdfogyatkozás graphikus meghatározása.

Tetszőleges mértékkel, melynek hosszegysége 1 mm., pl. 1′-nek feleljen meg, írjunk le (123. ábra) $\rho = 45'.7$ mm. sugárral kört, mely az árnyékkör keresztmetszetének felel meg. Az $r = 16'.6$ mm.-nyi sugarú kör ép úgy a telehold korongját fogja ábrázolni.

Mivel az összes elemek az aequatorra vonatkoznak, húzzunk az árnyékkör A középpontján egy vízszintes és rá merőleges egyenest, mely az árnyékkör parallel-, illetve órakörét ábrázolja.

Az oppositió pillanatában a Hold természetesen a Naptól 180^0-ra, tehát az árnyékkör centrumának órakörében van; a

Hold declinatiója $+3^0 59' 35''.0$, a Napé $-3^0 50' 3''.5$, tehát a vele diametrálisan szemben fekvő árnyékközéppontté $+3^0 50' 3''.5$. A Hold ennélfogva $+9' 31''.5 = 9{\cdot}5$ mm.-rel áll A ponttól északra O-ban, az oppositió pillanatában.

A Hold pályafekvését könnyen megállapíthatjuk az órai mozgásokból. A Nap declinatiója óránként $58''.8$-czel nő, tehát az árnyék középpontja ugyanannyival fogy, vagyis órai mozgása $-58''.8$; a Hold ugyanez időben $-17' 54''.3$-nyi ívet fut be. Ha az árnyékot állónak gondoljuk, akkor a Hold a két mozgás külömbségével $-16' 55''.5$-nyi relativ órai mozgással emelkedik declinatióban; egy óra mulva tehát az órakörben $+16{\cdot}9$ mm.-rel délebbre került, B pontba. De az árnyékkör a Holddal együtt egyszersmind keletre is vándorol; amannak mozgása a Napéval most előjelre nézve is azonos, $+2' 17''.9$, emezé $33' 7''.8$. A Hold kelet felé tartó relativ mozgása a nyugvó árnyékkörhez képest $30' 49''.9$ óránként.

Ez rajzunkon $30{\cdot}83$ mm.-t tenne ki, ha a Hold az aequatorban mozogna. Tényleg azonban $+3^0 59' 35''$ declinatiójú parallelben halad, s mivel ennek kerülete az aequatoréhoz a $\cos 3^0 59'.6$ arányban áll, az egyenlő idők alatt megtett utak is a declinatiók cosinusával szorzandók meg. A Hold declinatiókörén megtett út e szerint $30' 49''.9 \times 0{\cdot}9962 = 30' 42''.9$ vagy $30{\cdot}8$ mm. Ha tehát BC-t merőlegesen húzzuk az órakörre s hosszát $30{\cdot}8$ mm.-rel teszszük egyenlővé, akkor C a Hold helye az oppositió után 1 órával. Az oppositió alkalmával O-ban volt, tehát OC egyenes és kellő meghosszabbítása szolgáltatja a Hold pályáját, $OC = 35{\cdot}1$ mm. ellenben a Hold óránkénti útját pályájában, melyre későbben szükségünk lesz.

Most már könnyű szerrel állapítjuk meg a fogyatkozás egész lefolyását. Ha ugyanis az árnyék középpontja körül $\rho + r = 62' 18''.7$ és $\rho - r = 29' 4''.3$ vagy $62{\cdot}3$ és $29{\cdot}1$ mm. sugárral kört írunk le, akkor ezen körök kerülete, helyesebben ezek metszései a holdpályával H_1, H_2, H_4 és H_5 a Hold középpontjának helyei a részleges és teljes fogyatkozás kezdetén és végén, a miről könnyen meggyőződünk, ha e pontok körül $16{\cdot}6$ mm. sugárral a Hold korongját képviselő köröket írunk le. Ha végül még A-ból merőlegest emelünk a holdpályára, egy ötödik H_3 holdhelyet is kapunk, melyet a Hold a fogyatkozás közepén foglal el. Ez öt pont helye egyszersmind a hozzá tartozó időpontok levezetését is engedik. Ugyanis O ponttól való távolságaik sorban: $OH_1 = -57{\cdot}2$; $OH_2 = -23{\cdot}3$; $OH_3 = +4{\cdot}6$; $OH_4 = +32{\cdot}4$ és $OH_5 = +66{\cdot}3$ mm., miként a direct lemérés mutatja. Az oppositiónak megfelelő órakörtől balra, azaz a Hold mozgásának irányában előtte fekvő távolságokat negativ, az oppositió utáni helyek távolságait negativ jellel vettük. Ámde a Hold órai útja pályájában 35·1 mm. és ezért ezen $H_1 \ldots H_5$ helyek az oppositió pillanatához képest $-1{\cdot}63$, $-0{\cdot}66$, $+0{\cdot}13$, $+0{\cdot}92$, $+1{\cdot}89$ órával előbb, illetve későbben foglaltatnak el. Az oppositió pillanata az elemek szerint $16^h\,25^m.0$ lévén, ebből $1^h\,37^m.8$, $39^m.6$ levonandó, illetve $7^m.8$, $55^m.2$ és $1^h\,53^m.4$ hozzáadandó, hogy a $H_1 \,.\,.\, H_5$ helyeknek megfelelő időket nyerjük. E szerint:

A fogyatkozás kezdete általában	$14^h\,47^m.2$	k. berl. idő	$(14^h\,47^m.1)$
A totális sötétülés „ „	$15^h\,45^m.4$	„	$(15^h\,45^m.0)$
A fogyatkozás közepe	$16^h\,32^m.8$	„	$(16^h\,32^m.9)$
A totális sötétülés vége	$17^h\,20^m.2$	„	$(17^h\,20^m.7)$
A fogyatkozás „ általában	$18^h\,18^m.4$	„	$(18^h\,18^m.6)$

A zárjelbe foglalt számok adják a fogyatkozás lefolyását a legszigorúbb csillagászati számítás szerint, mutatják tehát, hogy egynéhány másodperczny pontossággal a graphikai módszer is teljesen kielégítő eredményekhez vezet. Ha partiális fogyatkozásról van szó, akkor természetesen a H_2 és H_4 helynek megfelelő második és negyedik phasis elesik.

A fogyatkozás nagyságát végül a BD vonal méri, mely a fogyatkozás közepén a holdátmérő folytatását adja az árnyékkör legközelebbi széléig. Ez ábránkban 54·0 mm., a Hold átmérője ellenben 33·2 mm., tehát a holdátmérő 1·626-szerese (Berl. Jahrb. szerint 1·628).

A holdfogyatkozás láthatósági viszonyait legegyszerűbben a földglóbus segítségével ítéljük meg.

Ha ugyanis a Föld északi vagy déli pólusát annyi fokkal emeljük a horizontot ábrázoló fakarika fölé, mint a menynyit a Hold északi vagy déli declinatiója kitesz (a mi példánkban az északi pólus $4^0\;0'$-czel emelendő), akkor a Hold nyilván a horizont felett lévő félgömb zenithjét foglalja el, és az egész a fakarika felett lévő félgömb egyszerre látja a Holdat. Ha most a Föld állását ismerni akarjuk a fogyatkozások egyes phásisaiban, pl. a teljesség kezdetekor, akkor hozzuk Berlint (a fogyatkozási adatok példánkban berlini idő szerint vannak adva) az első meridián (rézkarika) alá s állítsuk a tengely végén levő órát, pontosabb kisérletnél az időegyenlítés tekintetbevételével, éjjeli 12^h-ra. A telehold ugyanis a Nappal szemben áll, tehát éjjeli 12^h-t kell, hogy mutasson az óra, ha Berlin meridiánjában delel a Hold. Ha most a glóbust addig forgatjuk, míg órája $15^h\ 45^m$-t nem mutat, akkor a fahorizont felett levő helyek mind látják a teljes holdfogyatkozás kezdetét. Még pedig a rézmeridián alatt levők a Hold delelésének pillanatában, a nyugoti horizonton levő helyek a Hold keltének, a keletin levők a lenyugvás pillanatában. Ugyanígy járván el a többi phásis számára is, megállapíthatjuk mindazon helyek összeségét, melyek a holdfogyatkozást láthatják, s ily módon közvetlenül láthatjuk, hogy a Hold sötétülése mindig a fél Földnél jóval nagyobb területen észlelhető.

Egészen hasonlóan járhatunk el a napfogyatkozások számításában is. Hasonló graphikai eljárás szolgáltatja a sötétülés egyes phásisait a Föld középpontja számára. Ha azonban a fogyatkozásnak, mint subjectiv tüneménynek a Föld felületének különböző részein való lefolyását keressük, a földglóbust egy a holdpályát ábrázoló segédeszközzel kell ellátnunk. Az egész eljárást ismét egy példa fogja világosabbá tenni, a mely számára az 1764-iki teljes napfogyatkozást választom. Elemei, melyek ez esetben kényelmesebben az ekliptikára vonatkoztathatók és melyek ugyanoly módon beszerezhetők és a hosszkülönbségnek az interpolátióval való tekintetbevételével tetszőleges hely meridiánjára átszámíthatók, mint a holdfogyatkozásnál, a következők:

		Valódi párisi idő.
Conjunctió hosszúságban: 1764. április 1. d. e.		$10^h\ 31^m\ 23^s$
☾ szélessége	+	$0^0\ 39'\ 36''$
☾ óránkénti mozgása hosszúságban	+	$29'\ 39''$
⊙ „ „ „	+	$2'\ 27''$
☾ óránkénti mozgása szélességben	+	$2'\ 31''$
☾ horizontális aequatori parallaxisa	$p =$	$54'\ 9''$
⊙ „ „ „	$\pi =$	$9''$
☾ látszólagos sugara	$r =$	$14'\ 47''$
⊙ „ „	$R =$	$16'\ 1''$

Mivel a 118. és 120. ábra szerint a Föld nappali félgömbjének szélén fekvő A hely számára a részleges és teljes napfogyatkozás kezdődik vagy végződik, ha Nap és Hold szögtávolsága $p - \pi + R + r$, illetőleg $p - \pi + r - R$, írjunk le ezen értékű sugarakkal két concentrikus kört. Ha ismét p. o. 1 ívpercz = 1 mm. akkor $p - \pi + R + r = 84' 49'' = 84{\cdot}8$ mm. és $p - \pi + r - R = 52' 45'' = 52{\cdot}8$ mm. E két kör nyilván a Föld napos féltekéjének (a Hold távolságában) a részleges, illetve teljes napfogyatkozás kezdetén és végén rajzolt orthogonális projectiójának felel meg. F, a Földnek, éppen úgy, mint a Napnak szélessége állandóan O, mivel mindkettőnek középpontja az ekliptikában fekszik. A 123. ábrával való konformitás tekintetéből a vízszintes átmérő a Föld napos oldalának szélességköre, az erre merőleges átmérő a Föld napos oldalának hosszúsági köre nevét is viselheti. Mivel a conjunctió pillanatában a Hold északi szélessége 39′ 36″, ugyancsak az előbbi ábrának megfelelő O pont 39·6 mm.-nyi távolságban kerül F-től észak felé. A Hold relativ mozgása a Földhez szélességben + 2′ 31″ (mivel a Föld állandóan az ekliptikában marad) és hosszúságban 29′ 39″ — 2′ 27″ = 27′ 12″ (mivel a Föld ezirányú mozgása a Napéval azonos). Ha tehát OB = 2·5 mm. és BC = 27·2 mm., akkor OC = 27·3 mm. a Hold valódi óránkénti útja, és e vonal $H_1 \,..\, H_5$ meghosszabbítása szolgáltatja a Hold relativ pályáját, melynek csomópontja az egyenesnek s az ekliptikának meghosszabbításának metszésében keresendő. A Holdpálya H_1, H_5 és H_2, H_4, pontjai nyilván azok, melyekben a Föld napos oldalának szélén a részleges, illetve a teljes fogyatkozás kezdete és vége észlelhető. Ha F pontból még merőlegest emelünk a holdpályára, még egy H_3 pontot is nyerünk, mely a teljes fogyatkozás közepének felel meg. A $H_1 \,..\, H_5$ pontoknak O-tól — a Holdnak a conjunctió pillanatában elfoglalt helyétől való távolságai — a szerkesztés értelmében 78·7; 38·7; 3·6; 31·4 és 71·4 mm. és mivel a Hold óránkénti mozgása pályájában ugyancsak OC = 27·3 mm., ezen távolságoknak sorban 2·88; 1·42; 0·13; 1·15 és 2·61 óra időkülönbség felel meg. Az első három nyilván a conjunctió idejéből levonandó, az utolsó kettő hozzáadandó. Ez által a következő táblázatot nyerjük:

Valódi párisi idő.

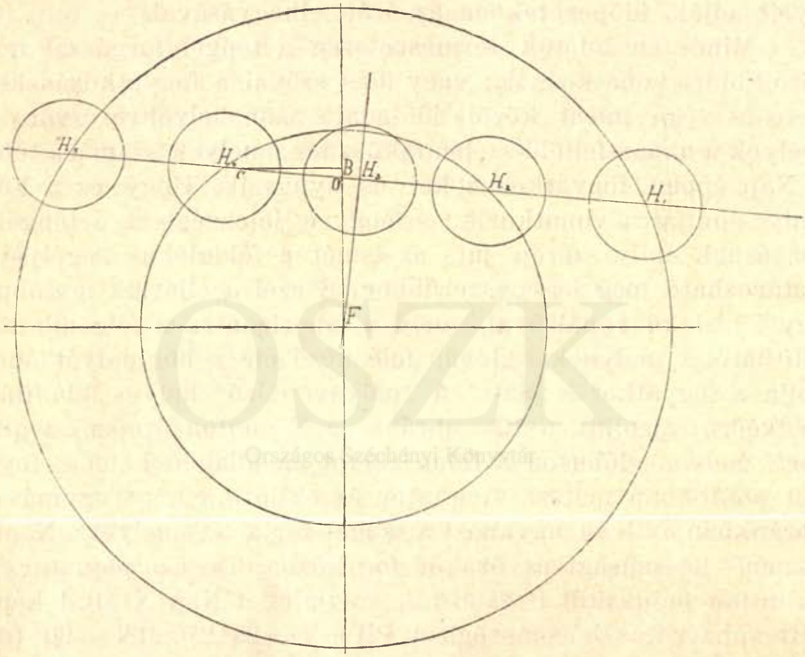
A fogyatkozás kezdete általában: 1764. ápr. 1. d. e.	$7^h\,38^m.6$	(37·8)
A teljes fogyatkozás kezdete általában	$9^h\,6^m.2$	(4·4)
A teljes fogyatkozás közepe	$10^h\,23^m.6$	(22·7)
A teljes fogyatkozás vége általában	$11^h\,40^m.4$	(38·8)
A fogyatkozás vége általában d. u.	$1^h\,8^m.0$	(7.6)

A zárjelekbe fogott számok a szigorú számítás eredményeit adják, időperczekben az órák elhagyásával.

Mindezen adatok természetesen a tengelyforgással nem bíró Földre vonatkoznak; vagy más szóval a fogyatkozás kezdete és vége imént közölt idő-adata azon helyekre érvényes, melyek a napos félföld szélén feküsznek, melyek számára tehát a Nap éppen fogyatkozva kel és nyugszik. Hogy ez a Föld mily pontjaira vonatkozik, s hogy e jelenségben a tengelyforgásnak mily szerep jut, az ismét a földglóbus segélyével határozható meg legegyszerűbben. E czélra ellátjuk a glóbust egy ⊓ alakú vonalzóval, mely a fahorizontra a félgömb fölé állítható, s melynek a glóbus felé néző éle a holdpályát ábrázolja a fogyatkozás alatt. A „pályavonalzó“ helyes felállítása kedvéért rajzoljuk a 124. ábrába az F ponton átmenő aequatort, mely a glóbuson a fahorizontot az állandó kelet és nyugot pontokban metszi. Aequator és ekliptika képe egymással ábránkban nyilván ugyanazt a szöget zárja be, melyet a Napon átmenő hosszúsági és órakör fog közbe. De az aequator és ekliptika pólusaitól P és Π-től, valamint a Nap N által képezett sphaerikus háromszögben $P\Pi = \varepsilon = 23^0\,27'$, $\Pi N = 90^0$ (mivel a Nap szélessége állandóan 0), $\Pi NP \sphericalangle = p$ a keresett szög, $\Pi PN \sphericalangle = 90^0 + \alpha$, hol α a Nap rectascensiója. Ebből következik:

$$\sin p = \sin \varepsilon \cos \alpha,$$

a mi egyszersmind az aequatort hajlás és irány szerint meghatározza. Mivel a mi esetünkben $\alpha = 10^0\,33'$, $\varepsilon = 23^0\,27'$, $p = 23^0\,2'$-nek adódik, az aequator $23^0\,2'$-nyi szöglet alatt úgy fektetendő F ponton át az ekliptikához, hogy ennek nyugoti (jobboldali) ága az aequator nyugoti ágától északra kerüljön. A vonalzó két lábát ennélfogva a Hold északi declinatiója esetében annyi fokkal állítjuk a kelet és nyugot ponttól északra (déli declinatió esetében dél felé), a hány fokra fekszik a 124. ábrában H_2 és H_4 a teljes, H_1 és H_5 a részleges fogyatkozás esetében az aequator és a belső, illetőleg az aequator és a külső kör metszési pontjaitól. Ezzel a vonalzó belső éle a holdpálya relativ fekvését a Földhöz képest helyesen adja vissza. Az F pontban az aequatorra merőleges egyenes a Nap óraköre, melyet ezentúl a glóbus fémmeridiánjával fogunk azonosítani, s mely alatt a Föld tengelyforgása közben elfordul.



124. ábra. NAP fogyatkozások graphikus meghatározása.

Most emeljük a glóbus északi vagy déli pólusát annyi fokkal a fahorizont fölé, a mennyit a Nap északi vagy déli declinátiója a fogyatkozás napján kitesz (a mi esetünkben $\delta = +4^0\,30'$, s ennyivel emelendő az északi pólus), a mivel elértük, hogy a Nap aznapi parallelköre a glóbus zenithjén megy át. Mivel a Napot a fémmeridiánban, mint saját óraköréében képzeljük, ez tényleg a glóbus zenithjében áll, s a fahorizont feletti rész adja a Föld nappali oldalát, míg a „pályavonalzó“ a glóbushoz képest teljesen úgy fekszik, mint ábránkban a $H_1 \,.\,.\, H_5$ pálya a Föld orthogonális projectiójában.

Mivel a glóbus és a felette képzelt Nap úgy áll, hogy a *párhuzamos* napsugarak merőlegesen esnek a glóbus horizontjára, a vonalzóhoz illesztett függőón egy ilyen napsugár képét szolgáltathatja. Ha a függőón a gömb keleti és nyugoti oldalát érinti, a vonalzón nyilván a H_2 és H_4 pontoknak megfelelő holdhelyeket kapjuk, feltéve, hogy a teljes fogyatkozásnak megfelelőleg, a glóbus sugarát a belső kör sugarának megfeleltetjük. E két helyzetnek megfelel a teljes fogyatkozás kezdete és vége, $9^h 6^m$ és $11^h 40^m$, a miért is e két pont között a vonalzó mindjárt 154 részre — minutára — osztható, hogy a Hold helye valamely földfelületi pont felett az egész teljes fogyatkozás tartama alatt meghatározható legyen.

Hátra van még végül a glóbus helyes forgatása. Példánkban a teljes fogyatkozás kezdete beáll, ha Párisban az óra délelőtti $9^h 6^m$-et mutat, ha tehát Páris a Napot magában foglaló órakörtől még $12^h - 9^h 6^m = 2^h 54^m$-nyire *nyugot* felé fekszik. Hozzuk tehát Párist a fémmeridián alá, állítsuk a számlapját a fogyatkozás kezdetére, $9^h 6^m$-ra, és forgassuk a glóbust nyugot felé, míg a számlap déli 12 órára nem áll. Ekkor Páris a követelménynek megfelelőleg $2^h 54^m$-nyira fekszik nyugotra, s ez utolsó művelettel végül az egész tünemény hű mechanikai mását nyertük: a fémmeridián alatt fekvő helyek számára egyszerre van dél, a *nyugoti* horizont mentén fekvő pontok egyszerre látják a Nap *keltét,* a *keleti* horizont pontjai a Nap *nyugtát.*

A nyugoti horizonton a „pályavonalzó“ alatt függőlegesen fekvő hely az *első,* mely $9^h 6^m$ párisi időben látja a teljes fogyatkozás kezdetét. Valamely keletre, de mindig a „pályavonalzó“ alatt álló pont *ugyanez* időben a részleges fogyatkozásnak éppen kezdetét láthatja akkor, ha a vonalzóra illesztett függőón távolsága a Hold helyétől (a fogyatkozás kezdetét jelölő $9^h 6^m$ ponttól) a két égi test sugarának összegével azonos. Ez összeg 30′ 48″; másrészt a glóbus átmérője, mely a vonalzó osztott hosszával egyenlő, 154 részből áll, melyek együttvéve a 124. ábra belső körének átmérőjével 105′ 30″-czel felelkeznek. Ennélfogva a keresett távolság x:

$$\frac{x}{154} = \frac{30' \, 48''}{105' \, 30''}$$

s ha a vonalzó 9^h 6^m-pontjától ezen x távolságra függélyest bocsátunk le, a Földnek azt a helyét nyerjük, melyben 9^h 6^m párisi időben a részleges fogyatkozás éppen kezdődik. Ugyan így megállapíthatók mindazon helyek is, melyekben a fogyatkozás adott időben éppen egy előírt nagyságot elért. Ha ezen egész eljárást ismételjük a fogyatkozás közepére és végére nézve is, midőn a Hold helyét a vonalzón a 10^h 24^m, illetve 11^h 40^m pontban keressük, a tünemény teljes lefolyását a földforgás tekintetbevételével tanulmányozhatjuk, különösen pedig kereshetjük azt a pontot is, melyben a teljes fogyatkozást 10^h 40^m párisi időben utoljára látják.

Az ily módon felkeresett vagy felkereshető pontok öszszessége geographiai helyzetük szerint térképekbe rajzolva megadják a tünemény láthatóságának teljes zónáját, melynek szélessége nyilván a teljes fogyatkozás esetében a holdárnyék földfelületi átmetszetével azonos; és a ki a térképvetítés tanaiban csak némi jártassággal bír, könnyű szerrel képes lesz úgy a hold-, mint a napfogyatkozásokra nézve előadott mechanikai megoldást sokkal nagyobb pontossággal tisztán graphikailag is eszközölni.

XXVI. FEJEZET.

Nap- és holdfogyatkozások összehasonlítása.

Ha a fogyatkozások lehetséges határait szembesítjük a Nap és Hold számára, azt tapasztaljuk, hogy amazé 36^0 $42'$, emezé 24^0 $8'$ a csomó mindkét oldalán. Ebből tehát az következik, hogy adott, elég hosszú idő alatt, körülbelül felével több napfogyatkozás észlelhető a Földön általában, mint holdfogyatkozás. Tényleg 18 évi cyclusban előfordulni szokott 70 fogyatkozás közül 41 nap- és 29 holdfogyatkozás észlelhető. Ugyanezen eredményt közvetlenül a 111. ábra is szolgáltatja. A holdfogyatkozások ugyanis a Nap és Földet érintő kúp sötét, a napfogyatkozások ellenben a Föld és Nap között fekvő fényes részében jönnek létre. Mivel ez utóbbi tetemesen nagyobb, nagyobb a valószinűség is, hogy különben egyenlő viszonyok között több nap-, mint holdfogyatkozás lépjen fel.

Ha azonban a Földet nem mint egészet tekintjük, hanem annak csak bizonyos helyeit, akkor lényegesen másképen állanak a viszonyok. A napfogyatkozás subjectiv tünemény, mely hely és idő szerint minden megfigyelő előtt másképen játszódik le, melyet azonban legfölebb 276 km. széles övben észlelhetni teljességében. A legnagyobb félárnyék átmérője is csak 7291 km., tehát jóval kisebb, semhogy a fél Földet takarhatná. Ezzel szemben a Hold sötétülése objectiv jelenség, melyet ugyanazon nagyságban és lefolyásban minden megfigyelő lát, a ki számára a Hold egyáltalában a horizont felett áll, mely tehát a fél Földnél jóval nagyobb területen észlelhető, mivel az elsötétült Hold a Föld tengelyforgása folytán mindig új és új megfigyelők számára kel.

A kedvezőbb láthatósági viszonyok folytán tehát egy bizonyos hely számára tényleg több holdfogyatkozás észlelhető, mint napfogyatkozás. A teljes és gyűrűs fogyatkozás éppen ritka tünemény; így Párisban az utolsó centrális napfogyatkozás 1724-ben volt, a következő csak 1900 körül lesz, és London 1140 és 1715 között teljes napfogyatkozást szintén nem látott.

XXVII. FEJEZET.

A fogyatkozások visszatérése. Fogyatkozási cyclusok.

E tünemények történeti és chronologiai, továbbá mint a syzygiumok különösen élesen kidomborodó speciális esete, geophysikailag is fontos szerepe igazolja, ha a fogyatkozások tanánál még tovább tartózkodunk, s egymásra következő fogyatkozások viszonyát és visszatérésük szabályait keressük.

A fogyatkozások bekövetkezése, nagyságuk s közelebbi körülményeik mindig csak pontos számítás segítségével ítélhető meg, nem pedig egyszerű cyclikus számítással. Mert a fogyatkozások ismétlődése a Holdnak egyszersmind a Naphoz és a csomóhoz való helyzetétől függ: függ tehát a synodikus és draconikus hó tartamától. Már pedig mindkét keringés változékony, esetről-esetre más és a cyclikus számítás természetesen csak közepes értékekkel operálhat. A levezetendő tételek ennek következtében nem kivétel nélkül való törvényszerűségek, hanem csak szabályok jellegével bírnak.

A synodikus hónap közepes tartama 29·530 589 nap s a csomók mozgása 365 nap alatt $-19^{0}19'41''.73$, ennélfogva a tropikus mozgása a nap- és földárnyéknak, illetve a csomóknak:

1 synod. hó alatt	$+29^{0}\ 6'.6$	a nap- s földárnyék	s	$-1^{0}33'.8$
5 „	$+145^{0}33'.0$	„		$-7^{0}49'.1$
6 „	$+174^{0}39'.6$	„		$-9^{0}23'.0$
11 „	$+320^{0}12'.6$	„		$-17^{0}12'.1$
12 „	$+349^{0}19'.2$	„		$-18^{0}45'.9$

a csomó számára.

Mivel a fogyatkozásoknál csupán a nap- s földárnyék relativ mozgása a csomóhoz dönt, ezt állónak tekinthetjük, a mire is a nap- és földárnyék a két mozgás külömbségével mozog tova. Ennek folytán a nap- és földárnyék relativ mozgása a csomóhoz képest

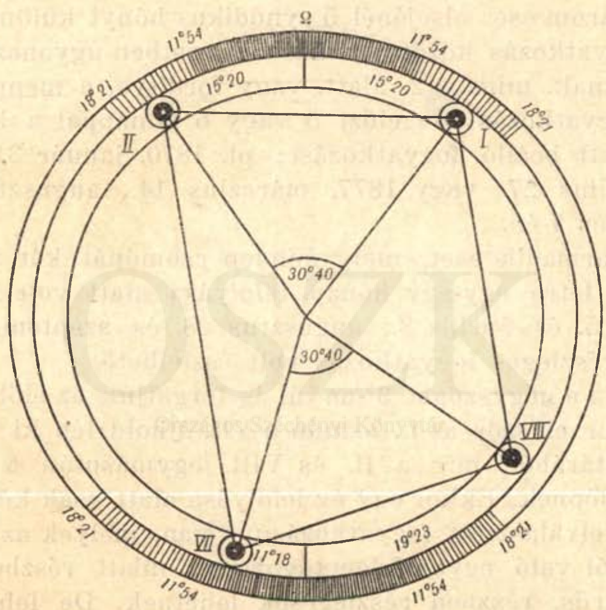
1 synodikus hó alatt	$=30^{0}40'.4$
5 „	$=153^{0}22'.1$
6 „	$=184^{0}\ 2'.6$
11 „	$=337^{0}24'.7$
12 „	$=368^{0}\ 5'.1$.

Két egymásra következő új- vagy telehold a csomókhoz képest számítva mozgásukat, mindig $30^{0}40'$-nyire fekszik egymástól. Ezen mozgás és az előbb talált fogyatkozási határokra való tekintetből a következő szabályokat vonhatjuk le:

1. Ha két egymásra következő újhold I és II a 125. ábrában symmetrikusan fekszik a csomóhoz, azaz $15^{0}20'$-nyi távolságban tőle, akkor még éppen a napfogyatkozások szükséges határaiba esnek ($15^{0}23'$) és ennélfogva mindkettő részleges napfogyatkozással jár. Az egyik újholdnak a csomótól való távolodása a másiknak hozzá való közeledésével jár, s ezért az egyik partiális fogyatkozás kimaradását egy nagyobb partiális, totális vagy gyűrűs fogyatkozás követheti. A Hold ennélfogva nem mehet el csomója mellett a nélkül, hogy napfogyatkozást ne hozna létre, s így minden évben legalább is két napfogyatkozás van.

Ábránk a körgyűrű sötétebb és világosabb árnyékolásával a teljes és részleges fogyatkozás lehetséges határát jelöli meg. Erre vonatkoznak a kívülről mellé írt számok is. Ezen határokhoz, illetve a csomókhoz képest feküsznek a belül írt számokkal adott távolságokban az egyes újholdak, melyek sorrendjét római számok szabják meg.

2. Ha ismét két újhold symmetrikusan fekszik a csomóhoz, akkor a VII. újhold az első napfogyatkozástól számítva $15^0 20' + 153^0 22' = 168^0 42'$ és a VIII. újhold $15^0 20' + 184^0 3' = 199^0 23'$ távolságra esik. Amaz tehát $11^0 18'$-czel, emez 19^0



125. ábra. A napfogyatkozások visszatérése.

23′-czel marad el a másik csomótól. Ennélfogva az I. és II. újhold alkalmával létrejött két partiális fogyatkozáson kívül a VII. újhold is partiális, totális vagy gyűrűs napfogyatkozást létesít. Egy év lefolyása alatt van tehát 2 partiális fogyatkozás egy hónapon belül és 6 synodikus hó vagy 177 nap mulva ismét egy partiális vagy totális sötétülés. Pl. 1870. június 28. és július 27-én partiális, deczember 22-én totális fogyatkozás volt.

3. A lehetséges határ ($18^0 21'$) tekintetbevételével ezen három fogyatkozásnak azonban még 3^0-nyi tágassága van,

mielőtt teljesen lehetetlenné válnék. Ha tehát az újholdak kissé hátrább esnek, azaz ha a négy újholdat összekötő négyszöget kissé forgatjuk az óramutató irányában 1—3°-kal, a VIII. újhold is még belekerül a lehetséges fogyatkozási határba. Ekkor II. és VII. a szükséges, I. és VIII. a lehetséges határon belül fekszik és így lehetséges egy év lepergése alatt 2, 3 vagy 4 fogyatkozás, t. i. 2 részleges, a II. és VII.; vagy 3 részleges, az I., II. és VII. vagy II., VII. és VIII. és 4 részleges fogyatkozás, az I., II., VII. és VIII. újhold alkalmával.

E három eset elsejénél 5 synodikus hónyi külömbség van a két fogyatkozás között; a második esetben ugyanazon viszonyok állanak, mint a 2. alatt, vagy fordítva, a mennyiben az egyes fogyatkozás megelőzi 5 vagy 6 hónappal a két — egy hónap alatt beálló fogyatkozást; pl. 1870. január 31., június 28. és július 27., vagy 1877. márczius 14., augusztus 8. és szeptember 7-én.

A harmadik eset, mely minden csomónál két fogyatkozást hoz létre egy-egy hónap lefolyása alatt volt 1848-ban; márczius 5. és április 3., augusztus 28. és szeptember 26-án egy-egy részleges fogyatkozás volt észlelhető.

4. Ha a négyszöget 3°-on túl is forgatjuk az előbbi irányban, akkor először az I., azután a VII. újhold lép ki a fogyatkozás határából, míg a II. és VIII. egymásután a totalitás határába lépnek. Ekkor egy év lefolyása alatt csak két 6 hónyi köz által elválasztott fogyatkozásunk van, melyek az újholdak a csomótól való egyenlőtlen távolságai miatt részben totális vagy gyűrűs, részben részlegesek lehetnek. De lehet mindkettő teljes vagy gyűrűs és partiális is. Így 1865. április 25. és október 19-én teljes fogyatkozás; 1873. május 25. és november 19-én partiális és 1881. május 27-én partiális, november 21-én gyűrűs fogyatkozás állt be.

Teljesen azonos eredményekhez jutunk természetesen, ha a 125. ábra négyszögét ellentétes irányban forgattuk volna el.

A találtak összefoglalásaképen most már röviden a következő szabályokat mondhatjuk: Minden 12 synodikus hónapból vagy 354 napból álló úgynevezett holdévben van,

vagy 2 tetszőleges nagyságú napfogyatkozás 5 vagy 6 synodikus hónyi közben, vagy

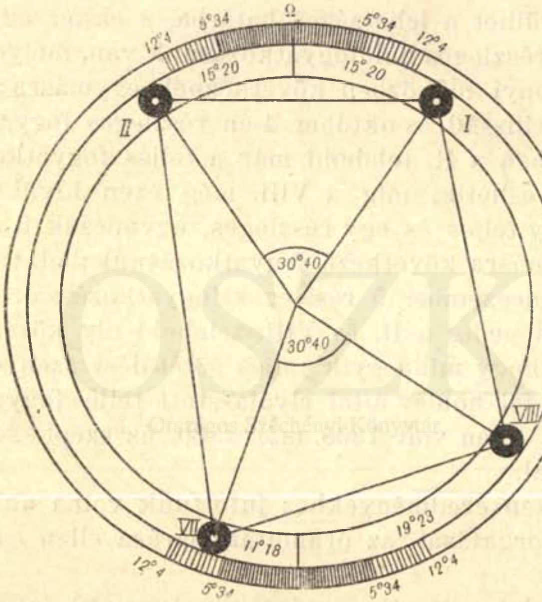
3 napfogyatkozás, melyek közül 2 partiális egymásután

az egyik csomónál és egy harmadik részleges vagy teljes 5 synodikus hóval előbb vagy később a másik csomónál beáll, vagy végre

4 partiális fogyatkozás, minden csomónál kettő egymásután, a két pár között 5 synodikus hónapnyi időközzel.

A holdfogyatkozásokra egészen hasonló, a 126. ábrán alapuló tanulmányt tehetünk.

1. Ha két egymásra következő telehold a csomóhoz sym-



126. ábra. A holdfogyatkozások visszatérése.

metrikusan esik, mikor is mindegyik 15^0 20′-nyi távolságban marad tőle, akkor a holdfogyatkozás lehetséges határán (12^0 4′) is kívül fekszik, sötétülést tehát nem szenvedhetnek. A VII. és VIII. telehold — mint előbb a megfelelő újholdak — ekkor 11^0 18′, illetve 19^0 23′-nyi távolságra jutnak a második csomótól, úgy hogy legfölebb a VII. telehold sötétülhet el kis részben. Ezen apró részleges fogyatkozás azonban könnyen ki is maradhat.

Ha a négy teleholdat összekötő négyszöget ismét az óramutató irányában forgatjuk, akkor a VII. telehold csakhamar kilép a fogyatkozás lehetséges határából is, még mielőtt a II. vagy VIII. ebbe belépett volna. Ily körülmények között nem jön létre holdfogyatkozás az egész év alatt sem. Példák erre 1864, 1868, 1875 és 1882.

2. Nagyobb forgatás mellett a II. telehold 12° 4′, illetve 9° 30′-nyi távolságba juthat a csomótól, míg a többi három a lehetséges határon kívül marad. Ily esztendőben csak egyetlenegy holdfogyatkozás van, pl. 1879-ben.

3. Tovább folytatott forgatás mellett a II. teleholdon kívül a VIII. is kerülhet a lehetséges határba, s ekkor egy év lefolyása alatt 2 részleges holdfogyatkozásunk van, melyek 6 hónyi vagy 177 napnyi időközben következnek egymásra; ilyen év volt 1865. április 10. és október 4-én részleges fogyatkozással.

4. Eközben a II. telehold már a teljes fogyatkozás határába (5° 34′) eshetik, míg a VIII. még ezen kívül marad, s ekkor van egy teljes és egy részleges, ugyancsak 6 synodikus hó alatt egymásra következő fogyatkozásunk; pl. 1881. június 11. teljes és deczember 5 részleges fogyatkozással.

5. Végül pedig a II. és VIII. telehold oly közel kerülhet a csomóhoz, hogy mindegyik teljes sötétülést szenved. Ekkor 2, ugyancsak fél holdév által elválasztott teljes fogyatkozással van dolgunk. Ilyen volt 1866. márcz. 30. és szept. 24-én teljes fogyatkozással.

Ugyanezen eredményekhez jutottunk volna akkor is, ha a négyszög forgatását az óramutató járása ellen eszközöltük volna.

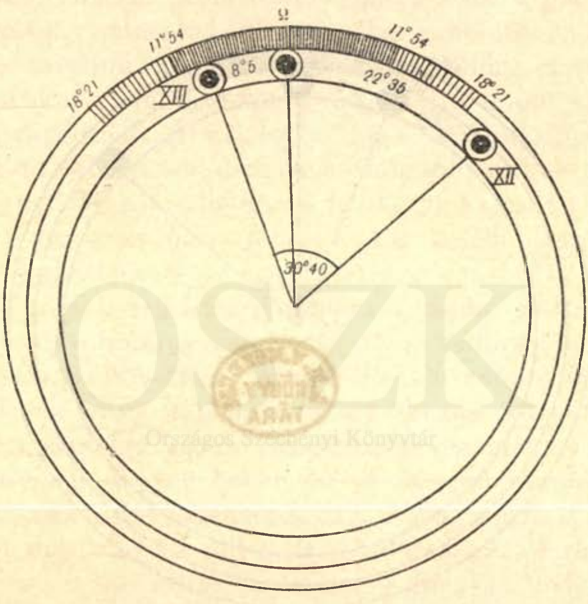
Összefoglalva ismét mondhatjuk, hogy 12 synodikus hónapból álló évben vagy egyetlen fogyatkozás sincs, vagy pedig van egy partiális vagy 2 tetszőleges jellegű fogyatkozás 177 napnyi időközzel.

Ha most ugyanazon év nap- és holdfogyatkozásait összehasonlítjuk egymás között, tekintetbe véve, hogy a Nap és a földárnyék mozgása a csomóhoz képest egy fél synodikus hó alatt 15° 20′-et tesz, a következő eredményhez juthatunk:

1. Ha valamely holdfogyatkozás pl. a felszálló ☊ csomóba esik, akkor a Nap diametrálisan szemben, a leszálló ☋ csomóban foglal helyet. Fél synodikus hónap után újhold lesz ☋ + 15° 20′-nél, míg fél hónappal ezelőtt az újhold ☋ — 15° 20′-re esett. Mindkét esetben tehát részleges napfogyatkozásnak kell

beállania. Ha a holdfogyatkozást előre vagy hátra tolva gondoljuk, akkor a két újhold egyike a ☋-hoz közelebb lép, tehát mindenesetre 14 nappal holdfogyatkozás előtt vagy után napfogyatkozás is lép fel. Vagy más szavakkal: minden holdfogyatkozás 14 nappal valamely napfogyatkozás után vagy előtt lép fel.

2. Ha két napfogyatkozás symmetrikusan esik a csomóhoz, akkor a közbeeső telehold pontosan a másik csomóba

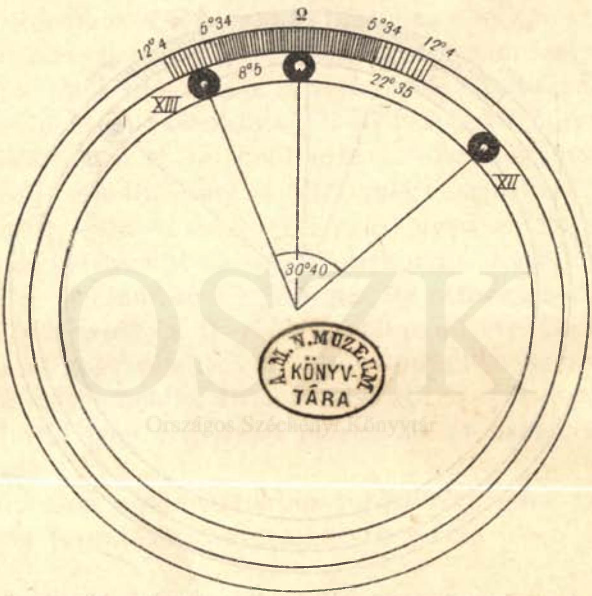


127. ábra. A napfogyatkozások váltakozása egymásra következő években.

jut, tehát teljesen elsötétedik. Ha a két napfogyatkozást legfölebb 3^0-kal, azaz a lehetséges határon belül eltoljuk, akkor a holdfogyatkozás még mindig a teljes sötétülés szükséges határán ($4^0 10'$) belül marad és ennek következtében két ugyanazon csomónál fellépő részleges napfogyatkozás között mindig teljes holdfogyatkozás lép fel. Ily esetben egy synodikus hó lefolyása alatt 3 fogyatkozást észlelhetünk; pl. 1880. deczember 1. és 31-én részleges nap-, deczember 16-án teljes holdfogyatkozás.

Végül pedig még összehasonlíthatjuk az egymásra következő évek fogyatkozásait is, tekintetbe véve, hogy a nap- és földárnyék 11 és 12 synodikus hónap alatt 337^{0} 24′.7, illetve 368^{0} 5′.1-nyi ívet fut be. A nap- és holdfogyatkozások ezen tanulmányát a 127. és 128. ábra könnyíti, mely az előbbiek szerint minden további nélkül érthető.

Ha valamely napfogyatkozás pontosan a felszálló csomóba, Ω-ba esik, akkor 12 synodikus hó mulva az újhold (XIII) Ω + 368^{0} 5′.1-ra esik, azaz 8^{0} 5′-nyire a csomón túl, a teljes napfogyatkozás (11^{0} 54′-nyi) határán belül. Ha az első napfogyat-



128. ábra. A holdfogyatkozások váltakozása egymásra következő években.

kozást a csomó elé toljuk, a lehetséges fogyatkozási határig (18^{0} 21′), akkor a XIII. újhold 10^{0} 16′-czel a Ω elé vándorol, tehát még mindig a teljes fogyatkozás lehetséges határán belül marad. De ha az első napfogyatkozást a csomón túl toljuk el, akkor 10^{0} 16′-nyi csomótávolság elérésekor a XIII. újhold a fogyatkozások lehetséges határán túl esik, de a XII. újhold már csak 12^{0} 19′-czel esik jobbra a csomótól, tehát mindenesetre létesít részleges napfogyatkozást.

Minden a csomópont előtt, vagy mögötte nem túlságos nagy távolságban beálló napfogyatkozásra következik 12 synodikus hó, azaz a következő évben 10—11 nappal előbb ismét egy napfogyatkozás, és minden a csomó mögötti napfogyatkozásra következik 11 synodikus hó mulva, azaz a következő évben 40 vagy 41 nappal előbb ismét egy napfogyatkozás. Pl. 1878. július 29. és 1879. július 18-án; 1880. július 7-ikén és 1881. május 27.

Ha másrészt valamely holdfogyatkozás pontosan a csomóba esik, akkor a rákövetkező XIII. telehold, mint előbb az újhold, 8^0 5′-czel ezen csomó mögé esik a partiális holdfogyatkozások határaiba (9^0 30′). Ha a holdfogyatkozást 12^0 4′-czel visszatoljuk a lehetséges határ szélére, akkor a XIII. telehold 4^0-kal (pontosabban 3^0 59′-czel) a ☊ elé vándorol és teljes fogyatkozást szenved. De ha a kiinduló fogyatkozást balra húzzuk 4^0-nyi távolságba a csomótól, akkor a XIII. telehold a fogyatkozások lehetséges 12^0 4′-nyi határát átlépi s csak 10^0 30′-nyi forgatás után jöhet a XII. telehold a lehetséges sötétülés határába.

Ebből következik, hogy minden a csomó előtt vagy közel mögötte beálló holdfogyatkozásra 12 synodikus hónappal későbben, azaz a következő évben 10—11 nappal előbb rendesen részleges vagy teljes holdfogyatkozás következik. Igen kis fogyatkozásra a csomó mögött esetleg már 11 synodikus hóval későbben, a jövő évben 40—41 nappal korábban ugyanily fogyatkozás következhetik. Pl. 1865. ápril 10. részleges (kis), 1866. márczius 30. teljes, 1867. márcz. 19. részleges (nagy) fogyatkozás; 1871. július 2. részleges (nagy), 1872. május 22. részleges (igen kis), 1873. május 12-én teljes, 1874. május 1-én részleges holdfogyatkozás.

Ha tehát az egy évben beállható 2 holdfogyatkozás a csomó mögé tetemesebb távolságra esik, akkor a következő év holdfogyatkozás nélkül szűkölködik. 1867 után 1868-ban nincs, 1874 után 1875-nek nincs holdfogyatkozása.

Ily módon kapcsolódnak az egymásra következő évek hold- és napfogyatkozásai.

XXVIII. FEJEZET.

Fogyatkozási periodusok; Saros.

A fogyatkozások visszatérésében nehézség nélkül ismerhetünk fel bizonyos periodicitást, ha meggondoljuk, hogy a fogyatkozás egyrészt a synodikus hónap, másrészt a drakói hónap tartamától függ, azaz a Holdnak úgy a Naphoz, mint a csomóhoz való viszonya által van megszabva. Ha a két hónap tartama ugyanaz volna, akkor vagy minden syzygium a csomóhoz való ugyanazon fekvése miatt fogyatkozás nélkül mulna el, vagy ellenkezőleg, mindig ugyanazon nagyságú fogyatkozást létesítené. Mivel ez nincs így, úgy a fogyatkozások ugyanazon sorrendben és nagyságban csak olyan időközök multán térhetnek vissza, melyek egész számú sokszorosai a synodikus és draconikus hónapnak. Ilyen periodus megkeresése tehát azonos a következő feladattal: fejeztessék ki a synodikus és draconikus hó viszonya lehetőleg pontosan egész számok által. Hasonló feladatok, melyekkel még ezentúl is néhányszor találkozunk, ismeretes módon legegyszerűbben láncztörtre bontás által oldhatók meg, folytatólagos osztás által. Ha ugyanis az osztás maradékával elosztjuk mindig a megelőző osztót, akkor a két hónap viszonya számára a következő láncztörtet kapjuk:

$$\frac{\text{synodikus hó}}{\text{draconikus hó}} = \frac{29{\cdot}530\,589}{27{\cdot}212\,220} = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \ldots$$

melyek közelítő törtei az ismeretes módon képezve, a következők:

$$\frac{12}{11},\ \frac{13}{12},\ \frac{38}{35},\ \frac{51}{47},\ \frac{242}{223},\ \frac{777}{716}\ \text{stb.}$$

Ismeretes, hogy az egymásra következő közelítő törtek mindig növekedő pontossággal adják a keresett viszony kifejezését egész számokban, még pedig oly módon, hogy a viszony pontos értéke mindig két egymásra következő tört között fekszik. Ha tehát az egyik túlságos nagy eredményt ad, akkor a következő tört pontosabb, de a valóságnál kisebb értéket szolgáltat.

Növekedő pontossággal tehát

11 synodikus hó = 12 draconikus hóval,
12 „ „ = 13 „ „
35 „ „ = 38 „ „ stb.

Tényleg pedig van:

11 synod. hó = 324·836 479 nap ; 12 drac. hó = 326·546 640 nap ;
különbség = + 1·710 261 nap.

12 synod. hó = 354·367 068 nap ; 13 drac. hó = 353·758 860 nap ;
különbség = — 0·608 208 nap.

35 synod. hó 1033·570 615 nap ; 38 drac. hó 1034·064 360 nap ;
különbség = + 0·493 745 nap.

47 synod. hó 1387·937 683 nap ; 51 drac. hó 1387·823 220 nap ;
különbség = — 0·114 463 nap.

223 synod. hó 6585·321 347 nap ; 242 drac. hó 6585·357 240 nap ;
különbség = + 0·035 893 nap.

716 synod. hó 21 143·901 724 nap ; 777 drac. hó 21 143·894 940 nap ;
különbség = — 0·006 784 nap. -10^m

A különbségeknek eleinte tetemes nagyságából látni, hogy gyakorlati igényeknek csak az utolsóelőtti és a többi rákövetkező közelítési tört felelhet meg. Az utolsóelőtti viszony 0·035 893 napnyi = 51^m 41^s.2-nyi különbséget hagy hátra, s ezért 6585 nap vagy 18 év és 10—11 nap — a szerint, a mint e cyclusban 4 vagy 5 szökőév foglaltatik — elég nagy közelítéssel 223 synodikus és 242 draconikus holdkeringést tartalmaz. Ily idő után a Hold úgy a Naphoz, mint a csomóponthoz ismét közel ugyanazon állást foglalja el, a fogyatkozások előfeltételei ugyanazok, és ezért ez időköz mulva a fogyatkozások rendben jellegük és nagyságuk szerint ismét visszatérnek.

Ezen cyclust már a régi chaldaeusok is ismerték jóval Krisztus születése előtt, s saros néven ugyancsak a vallási szertartásokban fontos szerepet játszó fogyatkozások jövendölésére használták. A hátramaradó 51^m 41^s-nyi hiba miatt ugyan nem teljesen pontos, s azért időről-időre kis eltolódásokat szenved, melyeknek befolyását nagyon könnyen becsülhetjük. Ha ugyanis valamely pontosan a csomóban történt teljes fogyatkozásból kiindulunk, akkor 223 lunatió után ismét pontosan van ugyan új- vagy telehold, de nem a csomóban, mert 242 draconikus hó $51^m\,41^s.2$-czel hosszabb. A Hold tehát a 223-dik syzygium után még $51^m\,41^s$-val kénytelen tovahaladni, míg a csomóba jut. Mivel a Hold közepes draconikus mozgása

$\frac{360^0}{27{\cdot}321\,582}$, ezen idő alatt $28'\,22''.6$-nyi ívet fut be.

Minden saros után tehát a fogyatkozás ezen darabbal marad a csomó előtt. Ha eleinte teljes volt, akkor tartama minden következő saros után fogy, elvégre részleges lesz és majd teljesen ki is marad. Ellenben a csomón túl fellépett részleges fogyatkozás minden saros után jobban belemélyed a fogyatkozás határába, és mindinkább hosszabb tartamú teljes fogyatkozássá válik, míg a csomó átlépése után ismét egészen a kimaradásig fogy. A csomók előtti fogyatkozások tehát minden sarosban kisebbednek, a csomók mögöttiek ellenben nőnek.

Mivel egy saros alatt a fogyatkozás elmaradása $28'.38$, úgy pontosan a csomóban végbemenő fogyatkozásnak a lehetséges határral egyenlő ívvel kell elmaradnia, hogy a fogyatkozás végleg és bizton elmaradjon. Ez a nap- és holdfogyatkozásokra illetve $18^0\,21'$ és $12^0\,4'$ lévén, legfölebb $\frac{18^0\,21'}{28'.38} = 38$ 685 é

450 év

és $\frac{12^0\,4'}{28'.38} = 25$ saros mulva enyészik el teljesen a legteljesebb nap-, illetve holdfogyatkozás. A holdfogyatkozásokra nézve a saros tehát előbb tolódik el, mint a napfogyatkozások számára.

Az utolsó visszony kissé kényelmetlen hosszú tartama folytán. 21,144 nap vagy 58 év és 40—41 nap (a szerint, a mint a sorozatban 14 v. 15 szőkőév van) közel 716 synodikus és 777 draconikus keringéssel egyenlő, s a hiba már csak $9^m\,46^s.1$, de az előbbi periodussal ellentétes irányú. A Hold ezen alig 10^m-nyi idő alatt $5'\,21''.8$-nyi ívet tesz, s ezzel esik a kiindulási teljes, a csomóban történt fogyatkozás előre. A csomó előtt beálló fogyatkozások. tehát minden 58 év után közelednek a csomóhoz és teljesebbekké válnak, a csomó mögöttiek ellenben távolodnak tőle és kisebbednek. Ezen hosszabb periodusban a centralis napfogyatkozás csak 205, a centrális holdfogyatkozás csak 135 periodus után marad ki teljesen.

Hogy ily cyclikus meghatározás mennyire alkalmas a fogyatkozások belépését az egész Föld számára (természetesen nem a Föld egyes helyei számára) előtüntetni, arról bármely elég terjedelmes naptár vagy ephemeris sorozat adhat felvilágosítást.

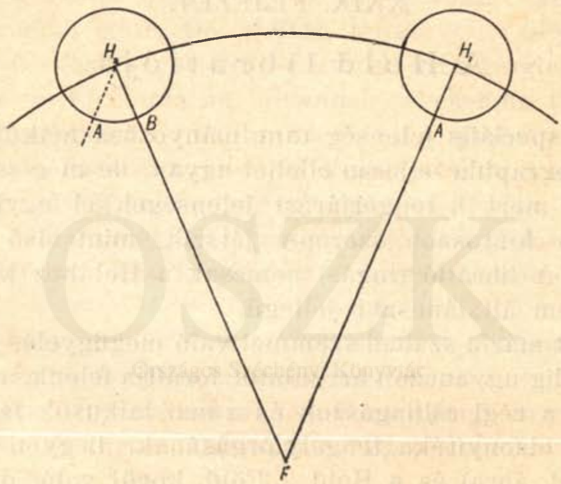
XXIX. FEJEZET.

A Hold libratiója.

Ezen speciális jelenség tanulmányozása nélkül a mathematikai geographia teljesen ellehet ugyan, de még sem mellőzhető azért, mert a tengerjárási jelenségekkel együtt a kosmogoniában fontosabb szerepet játszik, mint első pillanatra gondolnók. A libratió (ingás) nemcsak a Holdhoz kötött tünemény, hanem általánosabb jellegű.

Miként már a szabad szemmel való megfigyelés is mutatja, a Hold mindig ugyanazon arczulatot fordítja felénk, a mi éppen ellentétben a régi csillagászok és a mai laikusok felfogásával, legerősebb bizonyítéka tengelyforgásának. Legyen ugyanis F a Föld (129. ábra) és a Hold a Föld körül való útjának két helyzete H_1 és H_2. A Földről nézve a holdkorong középpontját A-ban látjuk, azon pontban, melyben a Hold radius vectora az innenső felületét metszi. Ha a Hold most tengelyforgás nélkül H_2-be fordulna, akkor a H_1A holdmeridián természetesen párhuzamos maradna önmagával, és H_2A helyzetet foglalná el; a korongnak a Földről látszó középpontja most már nem A lehet, hanem B. De tapasztalat szerint a Hold tányérjának középpontján mindig ugyanazon foltokat találjuk, a miből következik, hogy A összeesik B-vel, vagy hogy a Hold, míg a Föld körül való útjában pályájának északi pólusából nézve az óramutató járásával ellentétes irányban a H_1FH_2 szögletet tette meg, AH_2B szöglettel fordult tengelye körül ugyanazon irányban. Vagy más szavakkal mondva: a Hold tengelyforgása és keringése ugyanazon idő alatt és ugyanazon irányban történik. A Hold éve, a synodikus hónap egyszersmind azonos napnapjával; éjjele azonos a $14\frac{1}{4}$ napig tartó telével, nappala a középben ugyanily tartamú nyarával.

Ha azonban a Holdat távcsővel figyeljük, s felületéről pontos topographiai felvételeket eszközlünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezen szabályosság látszólag csak közelítésben van meg, a mennyiben a Hold középpontja körül lévő jobb és baloldali, északi és déli fekvéssel bíró foltok is válnak felváltva a korong középpontjává. Míg tengelyforgásának eme sajátossága folytán a Holdnak mindig csak ugyanazon félfelületét



129. ábra. A Hold libratiója hosszúságban.

figyelhetjük, addig hála ezen apró ingadozásnak, szélének egy csekély sávolya is válik láthatóvá, úgy hogy a teljesen láthatatlan felület a Hold felületének nem felét, hanem csak $\frac{3}{7}$-ét teszi.

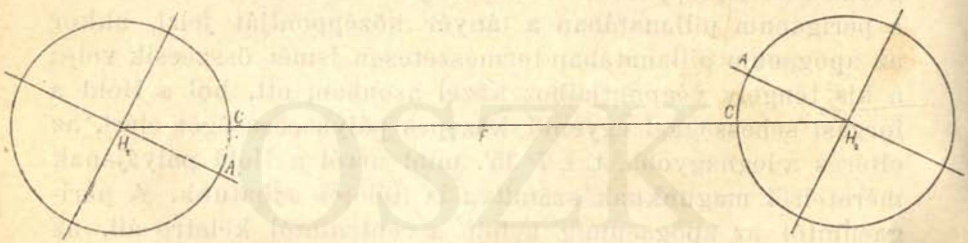
A Hold libratiója két komponensre bontható fel; az egyik folytán a Hold ingalengéseket végez pályájára merőlegesen álló tengely körül, tehát a hosszúságok irányában; ezt a hosszúsági librationak szokás nevezni; a másik folytán hasonló mozgásokat végez az előbbire merőleges és mindig haladásának irányába eső tengely körül, a mi által a foltoknak az ekliptikára vonatkoztatott szélessége változik. Ezért ezen összetevőt szélességbeli librationak szokás nevezni. Végül pedig a Holdnak nagy közelsége folytán foltjai már akkor is mutatnak eltolódást, ha a Földön való állóhelyünket megváltoztatjuk: az ebből származó eltolódást parallactikus vagy napi librációnak nevezzük.

Mindhárom mozgás azonban nem tényleges, hanem látszó csupán. Az utóbbiról ez közvetlenül világos, a két első libratióról is könnyen állíthatjuk ugyanazt, ha meggondoljuk, hogy a Hold pályája a Földet nem kör, hanem ellipsis alakjában veszi körül, s hogy e pálya nem az ekliptikába esik, hanem ezzel szögletet képez. Míg ugyanis a tengelyforgás sebessége állandó, addig a Hold pályasebessége különböző a pálya különböző pontjaiban, a miből következik, hogy egy teljes keringés alatt középben a korong centrumát elfoglaló folt majd a geometriai középponton innen, majd túl áll. Ha valamely folt a perigaeum pillanatában a tányér középpontját jelzi, akkor az apogaeum pillanatában természetesen ismét összeesik vele; a kis tengely végpontjaihoz közel azonban, ott, hol a Hold a forgási sebességgel egyenlő közepes pályasebességét eléri, az eltérés a legnagyobb, t. i. $7^{0} 35'$, mint arról a Hold pályájának méreteiről magunknak számítva is ítéletet adhatunk. A perigaeumtól az apogaeumig a folt a centrumtól keletre áll, az ellipsis második felében nyugotra. A hosszúságbeli libratió tehát a középpont mindkét oldalán több mint 15^{0}-ot tesz ki.

Ha a Holdat ezen libratió két különböző fázisában photografáljuk, akkor a két fénykép egyesítése szép stereoskopikus hatást ad.

A szélességbeli libratió szintén könnyen magyarázható. Az ekliptikában álló Földről nézve ugyanis a Holdnak északi, illetve déli félgömbjéből látunk többet, a szerint a mint a Hold pályájában az ekliptika alatt vagy felett áll. Ha a 130. ábra a holdpályának a Földön átmenő merőleges átmetszetét jelenti, akkor a Hold pályájának két diametrális pontjában a H_1 és H_2 állásokat foglalja el, melyekben a pályájához különben hajlott tengelye egymás között párhuzamos marad. A Hold látszó középpontja C a két feltüntetett esetben ugyanazon, de ellentétes előjelű selenographikus szélességgel bír. Az ábra láthatólag teljesen ugyanaz, mint a melylyel a napsugarak esését a Földre két ellentétes évszakban érzékítjük. Mivel a Hold tengelye az ekliptikára merőleges vonaltól $1^{0} 28' 45''$-czel eltér, ezen vonal pedig a holdpályára emelt merőlegessel $5^0\,0'$ és $5^0\,18'$ között váltakozó szögletet zár be, azért a Hold tengelye is a holdpályára emelt merőlegestől egészben $6^0\,29'$ és $6^0\,47'$ között ingadozó szöglettel térhet el. Ugyanaz természetesen a holdaequator mindkét oldalán fellépő szélességbeli libratió is, melynek összes nagysága tehát 13^0 és $13^0\frac{1}{2}$ között váltakozhatik.

A parallaktikus libratió könnyen beláthatólag egy a Föld középpontjában és felületén álló megfigyelő számára mindig a Hold magassági parallaxisával egyenlő. A Föld középpontjából nézve a Hold látszó középpontját ugyanis mindig egy, a magassági parallaxissal egyenlő szöglettel (131. ábra) lejebb keressük. Ezen libratió hatása természetesen legnagyobb a



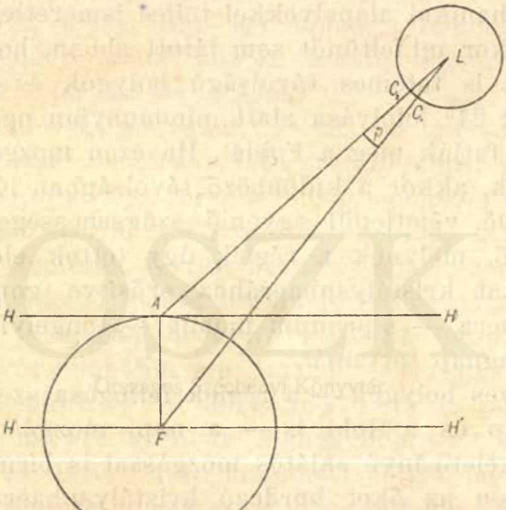
130. ábra. A Hold libratiója szélességben.

horizontban, hol $53'\,52''$ és $61'\,27''$ szöglet között változó, középben $57'\,2''$-nyi szögletet tesz ki. A napi parallaxis tehát a Hold kelte és nyugta között közel magában véve is 2^0-nyi eltolódást hoz létre a Hold látszó középpontjának fekvésében. A látszó holdfelület minden pontja kelet és lenyugvás között balról jobbra tolódik el, úgy hogy a keleti holdszélen mindig új és új pontok lépnek fel. E három libratió folytán a Hold minden felületi pontja nagyon komplikált látszó pályát ír le, mely annál élesebben kifejezett, minél közelebb fekszik a pont a Hold látszó középpontjához.

De mindezen látszó libratiókon kívül van még egy valódi, úgynevezett physikai libratió is, mely tulajdonképen kicsinysége daczára is a legfontosabb. Későbben látni fogjuk, hogy a Hold korántsem gömb, hanem a Föld felé bár igen kis mértékben elnyúlt sphaeroid, melynek súlypontja nem esik össze geometriai középpontjával. Ebből, valamint azon tényből, hogy a

Hold pályafutása alatt radius vectora nem esik mindig össze alakjának geometriai tengelyével — azaz, hogy hosszúságbeli libratióval bír — következik már önként, hogy a Hold e geometriai középpontja körül valóságos ingalengéseket fog végezni. Ezeket elméleti úton fedezték fel; amplitudójuk oly kicsiny, alig 1″, hogy a megfigyelés éppen csak konstatálhatja.

Ugyanezen physikai libratió vehető észre a Merkuron is, a melyik a Hold módjára azon végállapot felé törekszik, hogy tengelyforgását a Nap körül való keringésével egyenlővé tegye.



131. ábra. A Hold parallaktikus libratiója.

Laplace elméleti úton kimutatta, hogy a forgási és keringési sebesség egyenlősége szükségképen bekövetkezik idők folytán, ha valamikor bár csak közelítésben is megvolt. És Maxwell e sajátságos, az összes bolygóholdakon kívül Vénus és Merkur bolygó esetében is észlelhető viszonyt az égi testek felületén végbemenő tengerjárási jelenségekre vezeti vissza. Midőn a Hold még folyós vagy legalább plastikus volt, állandóan a Föld felé irányított árhullámmal bírt, mely alatt az akkor még önálló forgással bíró Holdnak el kellett forognia. A tetemes surlódás idők folytán felemésztette az eleven erő többletét, míg a Hold ezen földirányú árhullámhoz képest meg nem állt. De e pillanatban tengelyforgása egyenlő keringésével s az egyensúlyi állapotba való végleges belépés természetesen nem egyszerre, hanem ingalengésekben történt, melyeknek még most is fennálló nyomai a physikai libratió.

XXX. FEJEZET.
A Föld mozgása a térben.

A mechanikai alapelvekkel teljes ismeretlen régiek s az egész középkor mi feltünőt sem látott abban, hogy az ő fogalmuk szerint is tetemes távolságú bolygók és különösen az állócsillagok 24^h lefolyása alatt mindannyian ugyanazon szögsebességgel futják meg a Földet. Ha ezen mozgást ténylegesnek veszszük, akkor a különböző távolságban lévő égi testek fölötte felötlő, véletlenül egyenlő szögsebessége kényszerfeltételt ír elő, melynek a régiek úgy tettek eleget, hogy az állócsillagokat kristálysphaerához erősítve gondolták. Ezen kristálysphaera — a primum mobile — tengelyforgása szabta meg a csillagnap tartamát.

Az egyes bolygók — a régiek felfogása szerint ide sorolandó a Nap és a Hold is — a napi mozgáson kívül igen különböző keletirányú sajátos mozgással is bírnak, a melynek következtében az őket hordozó kristálysphaeráknak a napi tengelyforgáson kívül keletirányú lassú forgást is kellett adni. A bolygók kristálysphaerái tehát lassúbb forgással bírnak, mint az állócsillagoké.

Ma pontosan ismerjük a Hold, a Nap, a bolygók és legalább egynémelyik állócsillag távolságát; kiszámítva ezekből másodperczenkénti sebességüket, melyekkel mozogniok kell, hogy a Földet 24^h alatt körüljárják, elképzelhetetlen nagy számokhoz jutunk, és hozzátéve mai dynamikai ismereteinket, ezen sebességek oly nagy és a távolsággal semmiféle át nem tekinthető viszonyban álló, a Földben székelő erőhöz vezetnek, hogy e látszó mozgásnak tényylegesül való elfogadása a lehetetlenségek közé tartozik.

Coppernicus volt — addig is ejtett egyes sejtelmektől eltekintve — az első, a ki az ég napi mozgását tisztán látszó mozgásnak mondta, azt állította, hogy az állócsillagok valóban állók és hogy a Föld a világtengelylyel összeeső tengely körül naponként az égi testek mozgásával ellentétes irányban, nyugotról kelet felé forog. Ezen felfogás a legegyszerűbb módon magyarázza az égnek különben egyszerűen nem érthető egyenletes mozgását és megszünteti azon kényszerfeltételt, melyet az egyenlő szögsebesség tapasztalata szükségessé tett. Különben sem egyéb, mint ama látszólagos mozgásoknak a világegyetemre való alkalmazása, melyet magunk körül nyugvó tárgyakon mindenha tapasztalunk, ha saját helyváltoztatásunkról tudomásunk nincs. Épp így halad a telehold ellentétes irányban a nyugvó felhők között, holott megfordítva a Hold az, mely előtt a felhők elvonulnak.

Az ellenvetések, melyeket Coppernicus kortársai az új tan ellen tettek, részben hamisan interpretált bibliai mondásokra, részben a tehetetlenségi törvény nem ismerésére vezethetők vissza. Amazok szerint a Földnek nyugodnia, a Napnak mozognia kellett; emezek szerint örökös keleti vihar dühöngene, a fészkéből emelkedő madár a Föld forgása miatt távol vitetnék nyugotra, a magas toronyról leeső kő messze nyugoton esnék le a torony lábától, stb. Riccioli, Coppernicus leghevesebb ellenese, mintegy 70 ellenvetést állított össze a Föld forgása ellen, melyek azonban legnagyobbrészt a tehetetlenségi törvény felfedezése után maguktól dőltek meg. Mindezek semmisek, ha tekintetbe veszszük, hogy minden a Földdel kapcsolatos tárgy, a levegőnk szintén, a tengelyforgásban részt vesz.

Ha egyenes bizonyítékunk nem volna is Coppernicus mellett, tanának nemes egyszerűsége puszta hypothezis gyanánt is szükségképen elfogadtatott volna, mert legegyszerűbben magyarázza a napi mozgás minden jelenségeit.

Nagyon természetes most már, hogy a napi mozgás leírásánál bevezetett fogalmak egyike-másika változást fog szenvedni. Így a Föld tengelye, nem pedig a világtengely az elsőleges fogalom. Amannak az égig való folytatása jelöli ki a világtengelyt és a Föld pólusainak megfelelő világsarkokat. Így az aequator is tulajdonképen a Földhöz tartozó vonal, melynek kellő folytatása az égen metszi ki az égi aequator nevét viselő legnagyobb kört. Nem az állócsillagok írják le az égi aequatorral párhuzamos parallelákat, hanem a föld-felületnek különböző pontjai tesznek meg egy nap lefolyása alatt kisebb-nagyobb köröket, melyeknek síkja az égig meghosszabbítva, ott a parallelköröket szeli ki. Nem a csillag kel és nyugszik, hanem a helyhez szilárdan kötött horizont fordul nyugotról kelet felé, amott mindig új és új csillagokat eltakarva, emitt mindig újabbakat felfedve. Épp így forog a horizontra merőleges meridián síkja, nyugotról megközelítve a csillagokat s őket delelésük pillanatában síkjában felfogva.

Így a Föld minden körének megfelel az ég egy köre; a circumpolaritás köre a Földön is kijelölhető, a nappali és éjjeli ív a Föld parallelkörének a Nap fényében vagy árnyékban fekvő darabja, stb. És még szorosabban fűződik azon oki összefüggés, mely a Földön és égen geographiai szélesség és declinatió, geographiai hosszúság és rectascensió vagy óraszög között fennáll.

Habár közvetlenül a Föld forgása nem is észlelhető, mégis vannak megfigyelés alá eső következményei, melyek közül az egyik vagy másik nagyobb hatású és élesen lemérhető viszont a tengelyforgás bizonyítéka gyanánt is szerepelhetne.

Ezek fontosabbjai a következők: Ha magas helyről ejtő kisérleteket végezünk, akkor az eső test mindig kelet felé és nagyon kevéssé dél felé is tér ki. A magasabb hely ugyanis szintén 24^h alatt téve meg forgását, nagyobb lineáris sebességgel bír, mint talppontja. A reá helyezett test a tehetetlenség folytán ezen nagyobb sebességet felveszi és estében is megtartva, nem mint Riccioli akarta, nyugotra marad el, hanem ellenkezően keletre esik az emelkedés talppontjától. — Benzenberg 1804-ben a hamburgi Mihály-toronyban, Reich 1831-ben a freibergi Dreibrüder-aknában, illetve 76 és 158·5 méternyi magasságból ejtő kisérleteket eszközölt. Amazok 9, emezek 28·4 mm.-nyi keleti eltérést adtak, a mi az elmélettel e kisérletek nem nagy pontosságán belül eléggé megegyezik.

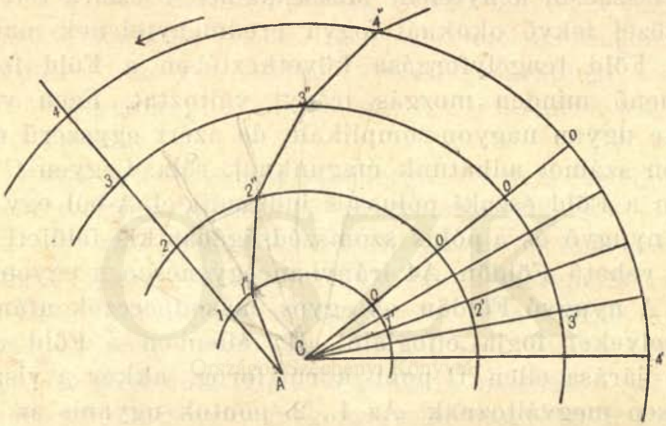
A nehézkesebb levezetést ez esetben kerülve, felírhatjuk a keleti és déli eltérés nagyságát. Ha ugyanis φ geographiai szélességgel és g nehézségi gyorsulással bíró helyen z magasságból ejtünk le egy testet, akkor ennek

$$\text{keleti eltérése} = \frac{4\pi}{3T} z \cos\varphi \sqrt{\frac{2z}{g}}\,;\ \text{déli eltérése} = 0{\cdot}03\,391 \frac{z}{2g} \sin 2\varphi$$

ha z méterekben van kifejezve és T a nap tartamát jelenti másodperczekben. A második képletben szereplő számfactor, mint látni fogjuk, a centrifugális erő gyorsulása az aequatoron, tehát $\frac{4\pi^2}{T^2}r$, ha r a Föld aequatori sugarát jelenti.

Ha függélyesen felfelé hajítunk valamely testet, akkor ez emelkedése alatt mindig nagyobb lineáris sebességgel bíró magasságokba jut és elmarad ennek folytán nyugot felé. Lestében ugyanannyival tér ki kelet felé, tehát pontosan kiindulási helyére esik. A függélyesen álló mozgásból kilőtt golyó tehát visszaesni kénytelen. MERSENNE-nek e czélra tett kisérletei közel fekvő okoknál fogva eredménytelenek maradtak.

A Föld tengelyforgása következtében a Föld felületén végbemenő minden mozgás irányt változtat. Ezen változás elmélete ugyan nagyon complikált, de azért egyszerű esetben könnyen számot adhatunk magunknak róla. Legyen C a 132. ábrában a Föld északi pólusa s indítsunk el A-ból egy testet, mely a nyugvó és a pólus szomszédságában kis felületi részen síknak vehető Földön A4 irányban egyenesen s egyenletesen halad. A nyugvó Földön az egyes másodperczek után az 1., 2., 3. helyeket fogja elfoglalni. Ha ellenben a Föld az óramutató járása ellen C pont körül forog, akkor a viszonyok tetemesen megváltoznak. Az 1., 2. pontok ugyanis az 11′, 22′ parallelköröket írják le, még pedig ugyanazon szögsebességgel. Ha tehát az első kör 1^s alatt 01′ ívvel fordul, akkor a második, harmadik kör 2^s, illetve 3^s.. alatt a 02′, illetve 03′.. íveket teszi meg. Ha ezen íveket sorban az 1., 2., 3. pontokból a megfelelő parallelákra rakjuk, újabb 1″, 2″.. pontokat nyerünk, melyek értelme a következő: 3^s alatt pl. a pont a nyugvó Földön az A3 utat teszi meg; ha tisztán a Föld forgását tekintjük, akkor a 3. pont 3^s után 3″-be jut. A két mozgás együttessége folytán tehát a mozgó A pont 3^s után tényleg 3″-ben leend, s így minden más pont számára. Ennek következtében az A1″2″.. görbe, melyet tehetetlenségi görbének szokás nevezni, azon pálya, melyet a mozgó pont tényleg a forgó Földön befut. A déli pólus számára hasonló rajz érvényes, csakhogy az ellentétes forgás miatt a tehetetlenségi görbe az A4 pályának bal oldalán fekszik. E rajz némi módosítással tetszésszerinti szélességre lévén kiterjeszthető, kimondhatjuk, hogy a Föld forgása miatt az északi féltekén minden mozgás ~~jobbra, a déli félgömbön pedig~~ nyugotra tér el. Ez az oka a meteorologiában alapvető Buys Ballot-féle törvénynek. Nyugvó Földön minden barometrikus külömbség a legrövidebb úton, a barometrikus maximumot és minimumot összekötő legnagyobb kör íve mentén egyenlítődnék ki. Tényleg azonban az északi félgömbön a maximumtól a minimum felé áramló levegő jobbra tér ki s logarithmikus spirális alakjában beáramolva a minimum terébe, a külömbségek kiegyenlítését is hátráltatja. Innen a fontos szabály: ha a szélnek hátat fordí-

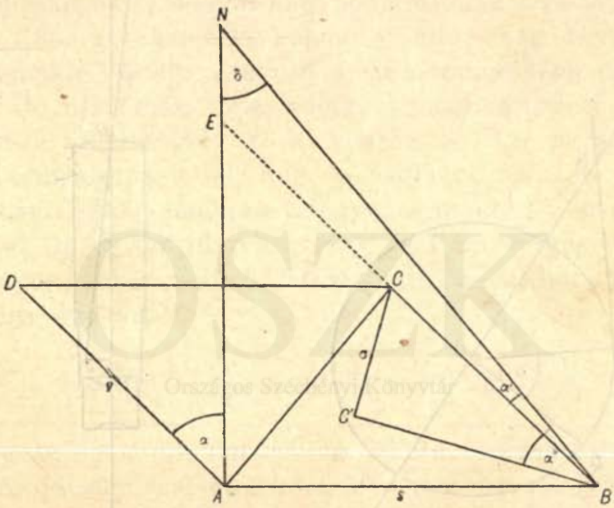


132. ábra. A mozgás eltérítése a forgó Földön.

tunk, akkor a bal, kissé előre tartott kéz a minimum, a jobb, kissé hátraemelt kéz a maximum helye felé mutat.

Ugyanezen oknál fogva mutatnak irányeltérést a passatszelek is. Az alsó passatszél, mely tengelyforgás nélkül tisztán északi szél volna északkeletivé, a déli féltekén délkeletivé változik, míg a felső passát az északi és déli féltekén illetve délnyugoti és északnyugoti iránynyal bír. Különösen szembeötlők a szélirányok változásai, ha a légáramlat, mint monsun vagy különösen, mint viharczentrum az aequatort lépi át. Az aequatorban való irányváltozás következtében — hiszen tőle délre és északra a mozgás illetve balra és jobbra tér ki — jönnek létre ama sajátságos parabola alakú görbék, melyek a viharcentrumok pályái számára oly jellemzők.

Közelítésben az eltérítés nagysága is levezethető elég egyszerűen. Legyen v (133. ábra) az A pont által φ geographiai szélességgel bíró helyen nyugvó Földön 1^s alatt megtett útja AD, míg az A hely a tengelyforgás következtében ugyanez idő alatt AB = s utat teszi meg. A tényleges mozgás nagyság és irány szerint AC diagonálisba fog esni. A forgás következtében A-ból B-be jutott megfigyelő azon benyomást fogja nyerni, mintha az A pont tényleg a BC útat tette volna meg. Ha N az északi pólust jelenti, akkor a mozgás kezdeti azimuthja $NAD = \alpha$, végazimuthja $NBC = \alpha'$, s a kettő között, tekintettel



133. ábra. A mozgás eltérítése a forgó Földön.

AD és BC párhuzamosságára, $\alpha - \alpha' = \delta$ vonatkozás áll fenn, a hol δ az 1^s alatti hosszúságváltozást jelenti. Tegyünk most: $NBC' = \alpha$, azaz vigyük át a kezdeti azimuthot a megfigyelő helyzetébe, akkor a fenti vonatkozás értelmében $CBC' = \delta$ nyilván az eltérítéssel egyenlő, melyet e háromszögben $CC' = \sigma$ oldal mér, ha $BC' = BC$-t teszünk. A megfigyelő azt kénytelen hinni, hogy az A pont tőle σ darabbal eltávozott, mert azimuthváltozása folytán BC út helyett BC' utat látszott megfutni. Az ANB és CBC' egyenszárú háromszögek hasonlatossága folytán áll:

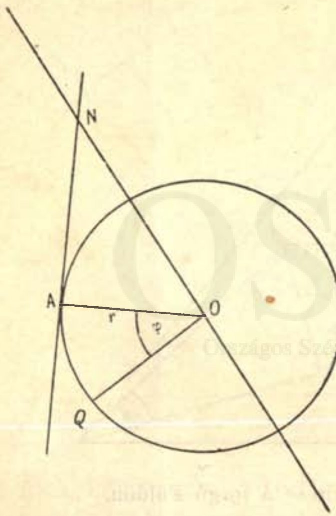
$$\frac{\sigma}{s} = \frac{v}{AN}.$$

De AN a Földet az A ponton átmenő parallelkör mentén érintő kúp palástvonala (134. ábra), hossza tehát, a földsugarat r-rel jelölve:

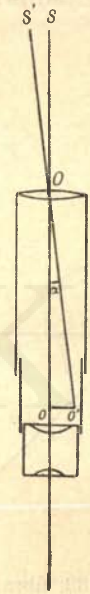
$$AN = r \cot \varphi, \text{ míg } s = r \cos \varphi \,.\, \omega, \text{ hol } \omega = \frac{2\pi}{86164},$$

ha ω a föld szögsebességét jelenti. Ebből

$$\sigma = v\,\omega \sin \varphi,$$



134. ábra.
A Földet érintő kúp palást vonala.



135. ábra.
A fény aberratiója.

a mi az eltérítés közelített nagyságát adja; ez tehát arányos a mozgó test sebességével és a geographiai szélesség sinusával, ellenben legalább ezen közelített levezetés szerint független a mozgás irányától, azimuthjától. Fingernek nagyon gondos erre vonatkozó elméletéből következik azonban, hogy az azimuth befolyást gyakorol az eltérítés nagyságára; ez maximum, ha a test a parallelkör mentén kelet felé, minimum, ha nyugot felé mozog.

Ez eltérítés némi szerepet játszik a Baer-féle szabály alapján a folyamok jobb- és balpartjának átalakulásában, a jobboldali vasúti sínre nehezedő nagyobb nyomásban, a lövegek eltérítésében, a tengeráramlások irányában, sőt a folyadékok kifolyási jelenségeiben is. Ha ugyanis nyugodt edény fenekén nyílást engedünk a folyadéknak, akkor ez az északi féltekén jobbra hajló spirálisú sugarakban ömlik ki.

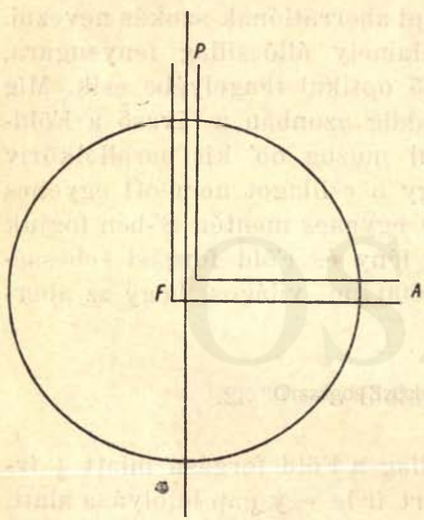
Még számos más, első pillanatra egészen különösnek látszó tényekben nyilatkozik meg a Föld tengelyforgása. Mivel a Föld forgási sebessége $\frac{2\pi r}{T} = 0{\cdot}464\,\text{km}$. a fény terjedési sebességéhez mérten nem észlelhetetlen kicsiny, a csillagok helyzetében eltolódás mutatkozik, melyet napi aberratiónak szokás nevezni. Legyen a 135. ábrában Oo valamely állócsillag fénysugara, mely a nyugodt Földön a távcső optikai tengelyébe esik. Míg a fény az Oo utat teszi meg, addig azonban a távcső a Földdel együtt a világtengely körül mozog oo′ kis parallelkörív mentén. Természetes tehát, hogy a csillagot nem oO egyenes folytatásában, S-ben, hanem o′O egyenes mentén S′-ben fogjuk látni. Mivel Oo és oo′ illetve a fény és Föld forgási sebességével arányos, amaz pedig 300 000 km., világos, hogy az aberratió kicsinysége miatt

$$\alpha \operatorname{tg} 1'' = \frac{v}{V}, \text{ a miből } \alpha = 0''.32.$$

Ennélfogva az égen minden csillag a Föld forgása miatt $\frac{1}{3}$ ívmásodpercznyi sugárral bíró kört ír le egy nap lefolyása alatt, mely kör a csillag helyzete szerint ellipsisbe, sőt az aequator alatt egyenesbe is megy át. Ezen aberratió természetesen akkor is meg volna ugyanazon nagyságban, ha a Föld helyett az ég forogna tényleg.

A tengelyforgással jár a Föld lapultsága is, mint ezt már Newton is következtette, még pedig a hibás Picard-féle fokméréssel szemben. Legyen (136. ábra) F a folyós vagy legalább plastikus gömbalakú Föld középpontja, és képzeljünk benne két csatornát PF és FA, melyek tengelyében, illetve aequatorsíkjában feküsznek. Ezek közlekedési csövet képeznek, melynek nyugvó Földön mindkét szárában a folyadék ismeretes physikai törvény alapján egyenlő magasságban áll. Ha azonban a Föld FP tengelye körül forog, akkor centrifugális erő lép fel, mely az aequator alatt legnagyobb, t. i.

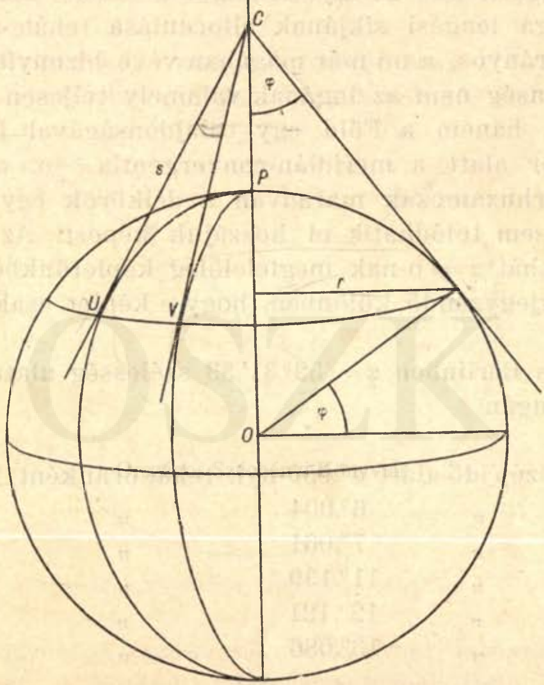
$\frac{4\pi^2}{T^2}r$ és a póluson 0. Az aequatori centrifugális értékkel kisebbedik a nehézségi erő az aequator alatt, míg a póluson változatlan marad. Míg tehát P felett a folyadékoszlop nyomása g-vel arányos, addig A felett $g - \frac{4\pi^2}{T^2}r$-rel arányos, azaz A-ban az egész oszlop $\frac{4\pi^2 r}{T^2 g} = \frac{1}{289}$-del magasabb. Ez egyszersmind Newton egyszerű feltevése mellett a Föld lapultsága. S mivel a tényleges mérések ehhez nagyon közel eső értéket szolgáltatnak, a Föld lapultsága egyenes bizonyítéka is a Föld tengelyforgásának.



136. ábra.
A Föld lapultsága Newton szerint.

Másképen is következtethetünk; későbben módunkban lesz minden feltevés nélkül azon általános törvényt felállítanunk, mely szerint a különböző geographiai szélességek alatt az ingával közvetlenül lemérhető nehézségi erő gyorsulása változik. A változás koefficiense természetesen gyakorlatilag is meghatározható és a Föld alakján kívül lényegesen tengelyforgásától függ. Ha ugyanezen törvényt tisztán a nyugvónak képzelt Föld alakjára vonatkozólag vezetjük le, eltéréseket kapunk az ingamérésekkel szemben, melyek messze túlhaladván a megengedhető észlelési hibák határát, közvetlenül bizonyítékot szolgáltatnak a tengelyforgás mellett.

A legközvetlenebb bizonyítékot mégis a Foucault-féle ingakisérlet szolgáltatja ugyancsak a tehetetlenség alapján. A lengő inga ugyanis lengési síkját megtartja; ha tehát alatta a Föld elfordul, akkor az észlelő azt kénytelen hinni, hogy az inga fordult ki síkjából, mivel a tengelyforgás tudatával nem bír. Ha valamely inga pontosan a pólus felett lengene, természetes, hogy síkja minden órában 15^0-kal fordulna el keletről nyugot felé. — Más szélességek alatt e forgás lassúbb és értéke legalább közelítésben könnyen megtalálható. — Ha a 137. ábrában valamely inga U pontban φ geographiai szélesség alatt a meridián irányában leng, akkor τ idő mulva a meridián UV parallelkör ívével elfordulván, az ingának előbbi



137. ábra. a FOUCAULT-féle ingakisérlet.

lengési síkjával párhuzamosan leng, de éppen ezért a meridián új fekvésével szögletet képez, mely UCV szöglettel, az úgynevezett meridián-convergentiával azonos. Ezen szöglet értékét könnyen találhatjuk. A parallel egyes pontjából C-hez húzott s sugarak ugyanis körkúpot képeznek, mely egy palástvonal mentén felhasítva a 138. ábrában látható körsectort adja. Ennek területe egyrészt, ha középponti szögletét szintén C-vel jelöljük: $s^2\pi\frac{C}{360}$, másrészt pedig, mivel UU kerülete a parallelkör $2r\pi$ kerületével azonos, $2r\pi \cdot \frac{s}{2} = rs\pi$. A 137. ábra szerint áll azonban tovább $s = \frac{r}{\sin\varphi}$ és ezért a parallelkör egész kerületének megfelelő convergentiaszöglet

$$C = 360^0 \sin\varphi, \text{ vagy óránként } C = 15^0 \sin\varphi,$$

mivel a teljes forgás 24^h-nyi csillagidőnek felel meg.

Az inga lengési síkjának elfordulása tehát a szélesség sinusával arányos, a mi már magában véve bizonyítéka annak, hogy a jelenség nem az ingának valamely teljesen ismeretlen sajátságára, hanem a Föld egy tulajdonságával függ össze. Az aequator alatt a meridián-convergentia = o, azaz forgás alatt is párhuzamosak maradván a délkörök egymással, az inga síkja sem tolódhatik el hozzájuk képest. Az elforgatás nagysága tehát φ = o-nak megfelelőleg képletünkből is o-nak adódik. Megjegyzendő különben, hogy e képlet csak közelítésben helyes.

Martus Berlinben $\varphi = 52^0 31'.33$ szélesség alatt egy Foucault-féle ingán

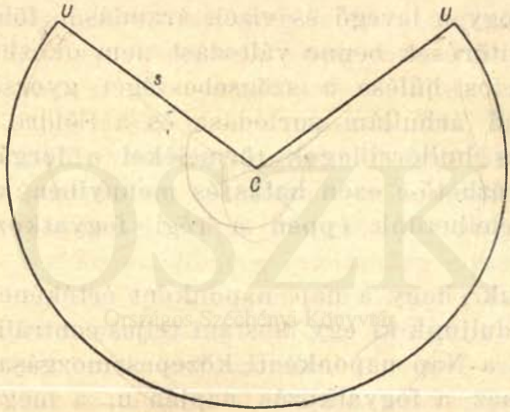
$24^m 54^s.0$	közép idő alatt	$4^0.950$-nyi,	tehát óránként	$11^0.928$-nyi,
$30^m 15^s.5$	„	$6^0.004$	„	905 „
$35^m 27^s.5$	„	$7^0.061$	„	948 „
$55^m 43^s.0$	„	$11^0.139$	„	996 „
$60^m 38^s.5$	„	$12^0.121$	„	993 „
$65^m 51^s.0$	„	$13^0.086$	„	923 „

középben tehát $11^0.949$-nyi elforgást észlelt. Mivel 24^h csillagidőben 86 164 középmásodpercz van, azért $\frac{86\,164}{86\,400} \times 11^0.949 = 11^0.916$-nyi forgást ad egy óra csillagidő alatt. A képlettel elméletileg helyes érték $11^0.902 = 11^0 54'.1$ az észlelt $11^0 55'.0$ helyett.

Legelőnyösebben sikerül a Foucault-féle ingakisérlet, ha a felfüggesztési drótot két egymásra merőleges élre erősítjük és az inga gömbjét fonállal térítjük ki, melyet a gömb teljes nyugalmának beállta után minden rázkódtatás kikerülése végett elégetünk. Ezen felfüggesztéssel késleltetjük az inga azon törekvését, hogy már rövidebb idő után is elliptikus lengéseket tegyen. Ha az inga nyugalmi helyzete körül amplitudójának megfelelő sugárral kört írunk le és ennek peremén pálczikákat állítunk fel, akkor az ingagömb tűje ezeket egymás után le fogja lökni. Ily módon aránylag rövid ingával a jelenséget nagyon szépen be lehet mutatni.

Minden lengő készülék hasonlóképen használható fel; így például a Föld forgása az ismert Lissajous-féle hangidomokon is mutatható ki.

Ha ugyan szükség volna rá, a Föld tengelyforgását per analogiam is lehetne bizonyítani. Minden bolygó, melynek felü-



138. ábra. A földet érintő kúp lefejtése.

letén foltok láthatók, a távcsővel szemmel láthatólag forog tengelye körül. A Földnél tetemesen kisebb Hold lassabban, a kisebb Mars és Vénus szintén lassabban, ellenben a nála nagyobb Jupiter és Saturnus sokkal sebesebben. A Nap is foltjain kimutatható tengelyforgással bír. Míg tehát a Föld akár szög, akár vonalos sebességének nagysága ellenvetést nem képezhet, addig igen is figyelemre méltó dolog, hogy a Nap és Hold, valamint minden bolygó egy és ugyanazon irányban, nyugotról kelet felé forog. Vagyis forgásuk, tengelyük északi pólusából nézve, az óramutató járása ellen történik, éppen úgy, miként a Földnél. Az égi testek tengelyforgása, még pedig egyenirányú forgása, általános szabály is a bolygórendszeren belül.

A Föld tengelye, eltekintve azon lassú változásoktól, melyeket a praecessió és nutatió okoz, állandóan párhuzamos marad önmagával, mint ezt már COPPERNICUS is állította, hiszen az égnek mindig ugyanazon pontja felé mutat. E mellett a Föld esetleges helyváltozása a térben nem is jöhet szóba, mert a csillagok távolságát a bevezetésben elmondottak értelmében oly nagyoknak kell tekintenünk, hogy hozzá képest minden mérete bolygórendszerünknek végtelen kicsiny. Kérdés azonban, vajjon a tengelyforgás tartama, a napnak hosszúsága is változatlan-e vagy sem?

Ha a Föld teljesen magára hagyott rideg szerkezet, akkor ez a mechanika tanai értelmében kétséget nem szenved. Kimutatható, hogy a levegő és vizek áramlásai, földrengések és vulkánikus kitörések benne változást nem okozhatnak. De a Föld évszázados hűlése a szögsebességet gyorsítja, a Hold járását követő árhullám surlódása és a Földre lehulló kosmikus por és hullócsillagok törmelékei a forgást lassítják. Vajjon megérezhető-e ezen hatás és mennyiben, erre gyakorlatilag megfelelhetünk éppen a régi fogyatkozások taglalása által.

Gondoljuk, hogy a nap naponként értékének α-részével rövidül és induljunk ki egy mostani teljes centrális napfogyatkozásból. Ha a Nap naponkénti közepes mozgása n, a Holdé N, akkor amaz a fogyatkozás napján n, a megelőző napon $n(1+\alpha)$, előtte való napon $n(1+2\alpha)$ stb íveket írta le, mert hiszen minden megelőző nap a rákövetkezőnél feltevésünk értelmében α-val hosszabb. Egy t nappal fogyatkozásunk előtt beállt centrális teljes napfogyatkozás napján a Hold tehát $n[1+(t-1)\alpha]$ ívet futotta be. Ezen naponkénti utak öszszege:

$$n+n(1+\alpha)+n(1+2\alpha)+\ldots$$
$$+n[1+(t-1)\alpha]=nt+\tfrac{1}{2}nt(t-1)\alpha,$$

a mi helyébe a hosszú időközre való tekintetből $nt+\frac{1}{2}nt^2\alpha$ is írható. Hasonlóképen ad a Hold t nap alatt megtett útja: $Nt+\frac{1}{2}Nt^2\alpha$ és nyilvánvaló, hogy a két fogyatkozás között a két út külömbsége a 360^0-nak egy teljes egész számú sokszorosát fogja adni. E külömbségben $(n-N)t+\frac{1}{2}(n-N)t^2\alpha$ az első tag nyilván nem egyéb, mint a Holdnak relativ közepes mozgása a Naphoz képest, mint ezt a *mai* csillagászati táblázatokból kivehetjük. Ha ezen tag már magában is két teljes centrális napfogyatkozás között egész számú kerületet ad, akkor α nyilván 0, a nap hossza ez idő óta a megfigyelés határain belül változatlan. Ha ellenben $(n-N)t$ nem pontosan a 360^0 egész számú sokszorosával azonos, akkor a többlet az $\frac{1}{2}(n-N)t^2\alpha$ tag érezhető befolyására vezetendő vissza, ezzel egyenlő, a miből α is számítható. A babyloni régi fogyatkozások feljegyzéseit véve alapul, mondhatjuk, hogy babyloni időkben a nap nem volt még hosszabb $0^s.01$-czel sem, mint ma.

Egy dologra mindazonáltal figyelmessé tettek hasonló számítások, arra, hogy a Hold egy évszázad alatt mintegy 10″.23-nyi gyorsulást mutat, mely a Hold mozgását tisztán a Newton-féle törvényre fektetve, eddig nem volt kimagyarázható. E gyorsulás valódi vagy látszó lehet. Az utóbbi esetben azt jelentené, hogy a nap hossza nagyobbodott, mert hosszabb nap alatt (a miről azonban magunknak egyébként tudomást nem szerezhetünk) a Hold természetesen nagyobb utat is tesz meg. A Hold közepes siderikus mozgása folytán ez utat $18^s.64$ alatt futja be, s ezért ez időt egy évszázadra elosztva, naponta $0^s.000\,510$-czel nő meg a nap hossza. Ezt, mint említettem, vagy az árapály surlódására, vagy a Föld tömegnagyobbodásának rovására írhatjuk, mely csillaghullásból eléggé magyarázható.

Ha Oppolzer számításai szerint az évszázadonként lehullt kosmikus por a Földön közel 3 mm. magas réteget képez, akkor ez az érintett változás magyarázatára elégséges.

Valójában Coppernicus azon feltevése is csak közelítés, a mely szerint a Föld forgási tengelye a praecessió és nutatiótól eltekintve is, állandó volna.

Minden tengelyforgással bíró test, mint azt a mechanikából tudjuk, három egymásra merőleges szabad tengelylyel bír, melyek az úgynevezett főtehetetlenségi tengelylyel összeesnek. Az állócsillagok declinatiómeghatározására kiváló csillagdákon rendszeresen folytatott szélességmeghatározások azon meglepő tényre vezettek, hogy a geographiai szélesség nem állandó, hanem periodikus változásoknak van alávetve. A periodus tartama, a mennyiben a mozgás két periodikus mozgásra szétbontható, 10 és 14 hónap és amplitudója közel $\frac{1}{2}$ ívmásodpercz. Mivel az európai elég szomszédos csillagvizsgálók közel párhuzamos menetet mutattak a szélességi változásokban, mindenesetre kétségen kívül állt, hogy reális változásokkal van dolgunk, azonban nem lehetett constatálni, vajjon a földkéreg mint egész tolódik-e el a tengelyhez képest, avagy csak kisebb felületi részek végeznek-e úgynevezett szabályos talajmozgásokat. A kérdést a honolului expeditió oldotta meg. Honolulu ugyanis Berlintől közel 180°-ra fekszik, ott tehát a sarkmagassági változás ellentétes menetet mutat, mint Berlinben, ha ugyan a tengelynek tényleges mozgására vezethető vissza a jelenség. A tapasztalat az utóbbi feltevés mellett döntött. E szerint a Föld momentán forgási tengelye a főtehetetlenségi tengely körül meglehetősen complikált pályát ír le, mely a geographiai szélesség és kisebb mértékben a hosszúságok megváltozását is okozza.

A mozgás okát illetőleg kétség alig lehet, hogy ez meteorologiai factorokkal, helyesebben az ezekkel járó tömegáttételekkel függ össze. A meteorologiai év lefolyása alatt — s éppen ez periodusa is ezen változásoknak — víz és légtömegek vándorolnak át az aequator egyik oldaláról a másikra, s ezek befolyása a momentán forgási tengely helyzetében nagyítva jut kifejezésre.

XXXI. FEJEZET.

A bolygók látszó mozgása.

Az állócsillagokon kívül a régiek hét bolygót ismertek, a Napot, Holdat, Mercurt, Vénust, Marst, Jupitert és Saturnust, melyek látszó mozgásait elég pontosan megfigyelték. E később is folytatott megfigyelések és a hozzáfűzött elmélkedések megállapították utolsó elemzésben a modern mechanikát és a Newton-féle törvényt és ezzel együtt nemcsak az astronomiát, hanem a physikát is. A csillagos ég megértésében követett gondolatmenet az, melyet minden exact tudománynak fejlesztése céljából követnie kell. És ha nem is képezné szorosan vett tárgyát a mathematikai geographiának a bolygók mozgása, foglalkoznunk velük már csak azért is kellene, mert ez volt az alap, a melyen a tudományos geophysika felépült.

A Nap és Hold látszó mozgását a Föld körül és az állócsillagok között már bőven leírtuk. Ismétlésül kiemelhető, hogy e mozgás állandóan kelet felé tartó irányban történik, változó sebességgel ugyan, de mégis megállás vagy éppenséggel hátráló mozgás nélkül. A Nap és Hold tehát, mint mondani szoktuk, állandóan előrefutók, direct mozgásúak és tényleges mozgásuk nem tér el túlságosan közepes mozgásuktól, úgy hogy első durva közelítésben egyenletes körmozgásúaknak mondhatók.

E két égi testtel szemben a többi bolygó tetemesen elütően viselkedik. Ugyan ők is állandóan az állatöv csillagai között tartózkodnak, de nagyon is változó sebességgel haladnak nemcsak nagyság, de még irány szerint is. E bolygók ugyanis időnként megállanak — stationálóvá válnak — s hosszabb-rövidebb ideig ellenkező irányban, keletről nyugot felé haladnak. Ezen retrograd mozgásnak ismételt megállás vet véget. A bolygók tehát futásukban valóságos hurkokat képeznek.

A régiek, kik a bolygók körmozgásából, mint valami magától érthető dologból indultak ki, a mozgás ezen „szabálytalanságát“ a bolygókeringés második egyenlőtlenségének mondották, míg az első egyenlőtlenség neve alatt, mint már említők, azt értették, hogy a Hold s Nap látszó sugara, tehát távolságuk a Földtől is változik.

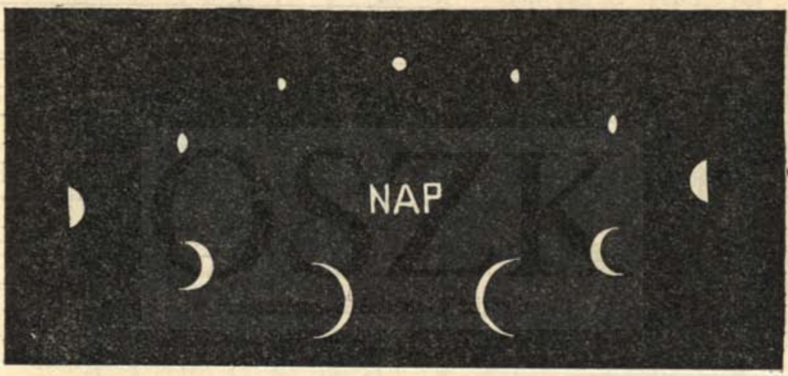
De lássuk most tüzetesen a bolygók mozgásának leírását. Csakhamar éles ellentét mutatkozik Mercur és Vénus, meg a többi bolygó között. E két égi test sokkal gyorsabban halad kelet felé, mint a Nap, sugaraiból kibontakozva tehát gyorsabban mindjobban látható alkonycsillaggá válnak. Egy bizonyos út megtétele után mozgásuk lassul, a bolygó megáll s növekedő sebességgel nemcsak a Nap felé visszatart, hanem sugaraiban való időzése, tehát láthatatlansági periodusa után, még jóval nyugot felé tér ki, mindig korábban és korábban a Nap előtt kelő hajnalcsillagot alkotván. De a nyugot felé való mozgás bizonyos idő mulva szintén lassul, a bolygó végre megáll és megfordulva, a kelet felé siető Napot csakhamar utóléri s a mozgás játéka ismétlődik. E két bolygó tehát mindig a Nap közelében marad, tőle a Mercur esetében legfölebb egy negyed, Vénus esetében mintegy fél derékszögnyi szöglettel tér ki s röviden szólva a Nap körül, mint egyensúlyi helyzet körül, ingalengésekhez hasonló kitéréseket végez.

Azon pillanatot, melyben valamely bolygó a Nappal együtt áll, azaz ugyanazon órakört vagy ugyanazon szélességi kört foglalja el, aequatori, illetve ekliptikális conjunctiónak szokás nevezni. A teljes mozgási cyclus alatt Mercur és Vénus kétszer jutnak conjunctióba: egyszer, mikor direct, egyszer, midőn retrograd mozgással bírnak. Amazt a conjunctiót felső- vagy külsőnek, emezt belső vagy alsó együttállásnak nevezzük.

Távcsővel fegyverkezve, csakhamar számot adhatunk a távolsági viszonyokról is. A bolygók ugyan a conjunctió alkalmával rendszerint a Nap korongja felett vagy alatt haladnak el, de ritka esetekben és csak alsó együttállás alkalmával apró fekete korongok gyanánt észlelhetők a Nap tányérján magán. Ekkor a napfogyatkozáshoz teljesen hasonló jelenséggel van dolgunk — a Hold helyét pótolja a kisebb korongú Mercur vagy Vénus — a melyből közvetlenül következik, hogy a két bolygó e pillanatban a Napnál közelebb van a Földhez. Az összes jelenségek tehát arra utalnak, hogy Mercur és Vénus nem a Föld, hanem a Nap körül kering, még pedig felülről, körülbelül az ekliptika északi pólusából nézve, az óramutató járása ellen, azaz nyugotról kelet felé. Alsó conjunctiójuk alkalmával legközelebb állanak a Földhez, felső együttállásukkor legtávolabb vannak tőle.

E következtetések megerősítést nyernek, ha ugyancsak távcsővel figyelve észreveszszük, hogy mindkét bolygó legkisebb átmérővel bír a felső, legnagyobb látszó átmérővel az alsó együttállás alkalmával, s hogy mindkettő a Hold mintájára phasisokat mutat. A korong sötét az alsó, teljesen meg van világítva a felső conjunctió alkalmával; a sarló annál keskenyebb, illetve szélesebb, minél közelebb áll a bolygó az alsó, illetve felső együttálláshoz (139. ábra) és a megvilágított szél mindig a Nap felé mutat. A nyugoti kitérésben lévő Vénus, a hajnalcsillagnak keleti, a keleti kitérésben levő alkonycsillag nyugoti széle telt, a legnagyobb kitérések alkalmával a korong éppen félig van megvilágítva. Ezen — a régiek előtt természetszerűen ismeretlen tényből még az is következik, hogy e két bolygó sötét test, mely mint a Hold a bolygón való napsütést reflectálja. A phasisok különösen a Vénusnál észlelhetők jól, mert e bolygó a Naptól jobban távolodik, s mert erősebb fénye mellett könnyű szerrel nappal is megfigyelhető.

Ha — a mi természetesen már pontosabb mérőeszközöket tételez fel — Vénus és Mercur látszó átmérőit megmérjük és meggondoljuk, hogy ezek a távolságokkal mindig viszszás arányban állanak, akkor a Földtől való viszonylagos távolságokat meg lehet állapítani az alsó és felső együttállásban, vagy bármily más, tetszés szerinti időpillanatban. A számítás, melynek helyét egyszerű rajz is pótolhatja, arról győz meg, hogy Vénus pályája a Mercurét bezárja, s hogy még



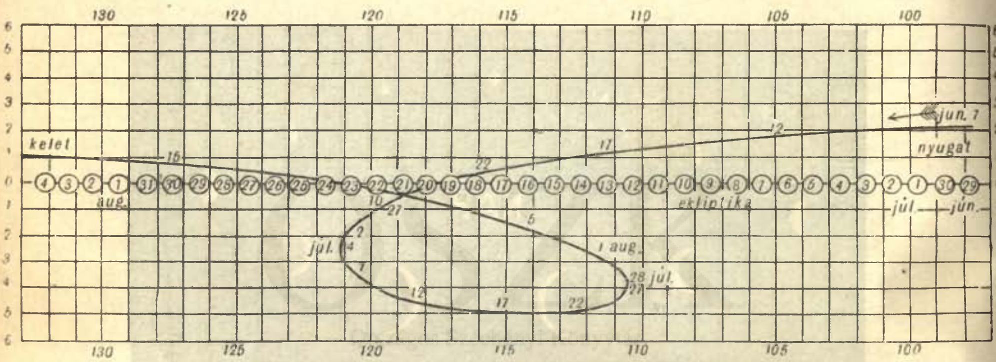
139. ábra. A Vénus phasisai.

amazon kívül foglal helyet a Föld. Némileg világos ez már azon tényből is, hogy Mercur és Vénus látszó legkisebb átmérői 4″.4 és 9″.5, legnagyobb átmérői 12″ és 62″. Amaz felső és alsó együttállás között mintegy 3-szor, emez 6·5-szer nagyobbítja a Földtől való távolságát.

A többi bolygó ugyan szintén kivétel nélkül kerül együttállásba a Nappal, de soha sem vonul el a Nap korongja előtt; látszó átmérője a conjunctió alkalmával a legkisebb és korongja, mely azonkívül sem mutat élesebb phasisokat, mindig telt. Ebből következik, hogy Mercur- és Vénustól eltekintve a többi bolygó mind a Nap mögött vonul el.

De mozgásuk más külömbségeket is mutat, melyek megfigyeléséhez távcső nem kell. Kivétel nélkül lassabban haladnak kelet felé, mint a Nap, mely őket hamar utóléri a conjunctióban. Erre mindjobban elmaradnak a Naptól, míg a két égi test távolsága rectascensióban vagy hosszúságban 180^0-ra nem rúg. E pillanatban a bolygó aequatori, illetve ekliptikai oppositióban, szembenállásban van a Nappal. A bolygó ekkor kel napnyugtakor, delel éjfélkor és nyugszik napkelte alkalmával, úgy hogy egész éjjel látható. Ezen jelenséget Mercur és Vénus soha sem mutatja; mindkettő, mint hajnal- vagy alkonycsillag mindig közel szomszédságban marad a Nappal.

A nagy bolygók is időről-időre retrograd mozgásúak, de nem, mint Mercur és Vénus a conjunctió, hanem ellenke-

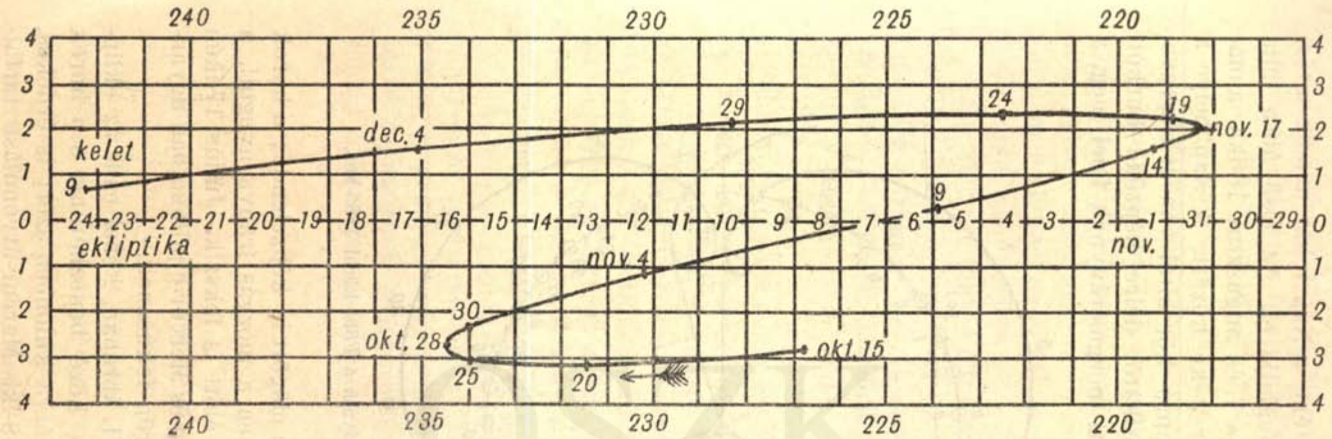


140. ábra. Merkur látszó pályája 1881. nyarán.

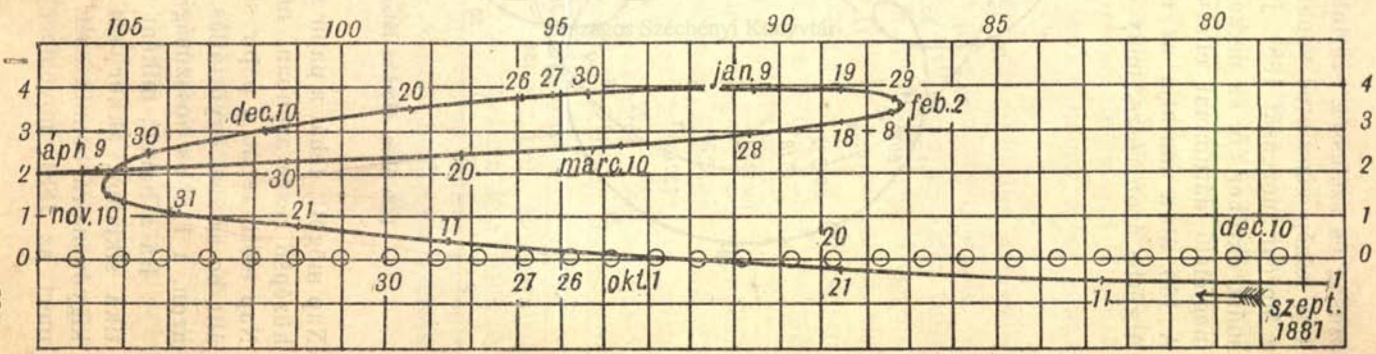
zőleg az oppositió pillanata körül. Azután a Naphoz képest még tovább maradnak hátra, azaz a Nap az ellenkező oldalról ismét megközelíti őket, míg a következő conjunctióban ismét utól nem éri.

Azon körülmény, hogy az utóbb leírt bolygók csak egy (még pedig felső) conjunctióval, de azonkívül oppositióval bírnak, kétségen kívül mutatja, hogy egyszersmind a Nap és a Föld körül keringenek, vagy más szóval, hogy pályájuk a Napnak pályáját a Föld körül bezárja.

E mozgások tanulmányozása legsikeresebb, ha ephemeridagyűjtemény segítségével berajzoljuk a bolygót a Nappal együtt alkalmas térképbe. Így keletkezett a 140., 141., 142. és 143. ábra, mely a Mercur, illetve a Mars mozgását adja megfelelő hosszú időn át. A térkép ekliptikális, a helymeghatározás hosz-

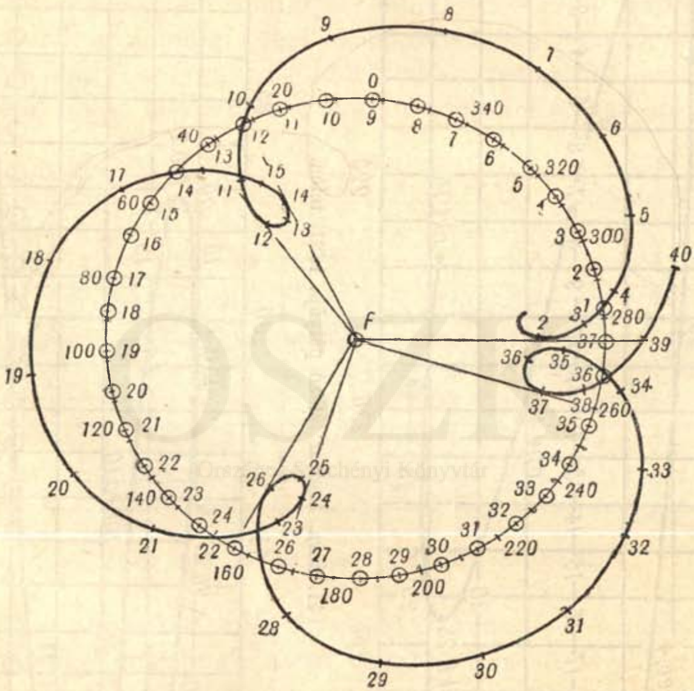


141. ábra. Merkur látszó pályája 1881. telén.



142. ábra. Mars és a Nap látszó mozgása 1881—82-ben.

szúság és szélesség szerint történt, a Nap tehát mindig a térkép közép vízszintes vonalát foglalja el. Az első ábra adja a Mercur mozgását 1881. június 7. és augusztus 18-ika, a második október 15. és deczember 9-ike között. A Nap helye a megfelelő dátummal ellátva, apró kör által van jelképezve. A 140. ábra mutatja az ekliptikától délre képződő hurkot. A görbe azon része, mely keleti mozgásiránynak felel meg, a



143. ábra. Merkur látszó pályája a Föld körül 1885-ben.

Nap mögött, tehát a papir síkja mögött is képzelendő; a hurok középső része azonban, melyben a mozgás iránya nyugoti, a Nap előtt, tehát a papir síkja előtt is fekszik. Július 17-ikén állt be az alsó együttállás. Nap és Mercur e pillanatban ugyanazon, a 115°-os hosszúsági körön feküsznek.

Ha a hurok, miként a 141. ábrában, közel esik az ekliptika síkjához, akkor két ága közé benézhetünk s a hurok kígyóvonalra bomlik szét. Ez ábra különben azért is érdekes, mert az 1881. november 7—8-iki Mercur-átvonulást tartalmazza. November 7-ikén Mercur az ekliptika alatt $226^0.6$-nál 8-ikán az ekliptika felett $225^0.0$ alatt foglalt helyet. A november 7—8-iki északán áthaladt tehát Mercur a csomópontján, s mivel ugyanott a Nap is tartózkodott, alsó együttállásában elvonult korongja előtt.

Már ez ábrából is, de még inkább a napfogyatkozásokkal való analogiából látszik, hogy a nevezetes Mercur- és Vénus-átvonulások csak azon alsó conjunctiók alkalmával jöhetnek létre, melyek nagyon közel esnek az ekliptikához, a bolygónak tehát egyik csomójához.

Ha Mercur vagy Vénus mozgását az ekliptika pólusából nézzük, akkor a hurokképződés még feltünőbben látható. A 143. ábra feltünteti helyes arányokban Mercur pályáját 1885. január 1-től 1886. január 26-ig a Nap helyeivel együtt. Mercur a Föld közelségében lassú retrograd mozgással bír, általában pedig kelet felé halad, legnagyobb sebességgel, mikor a Földtől legtávolabb áll, és megáll, ha a Földről a Mercurhoz húzott egyenes pályájának érintőjével azonos.

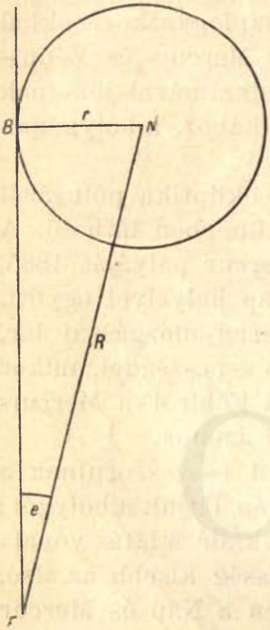
Az előbbi két ábrában Mercur helyei összeszorulnak a húrok szélein, mert ezekben pályája mentén látjuk a bolygót; ritkulnak a conjunctiók alkalmával, mert ekkor a látás vonala merőlegesen áll Mercur mozgására. A sebesség kisebb az alsó, mint a felső conjunctiókor, mert emebben a Nap és Mercur sebessége egyirányú, amabban pedig ellentétes.

A bolygó legnagyobb keleti vagy nyugoti elongatióját könnyen ki is számíthatjuk. Ha a 144. ábrában F a Föld, N a Nap, B pedig a bolygó, Mercur vagy Vénus, akkor a Földre nézve legnagyobb szögtávolsága a Naptól beáll, ha a látásvonala a körnek feltételezett pályáját érinti. Ebből

$$\sin e = \frac{r}{R}.$$

Ha a Nap közepes távolságát egységül veszszük, akkor, mint látni fogjuk, a Mercur és Vénus számára $r = 0{\cdot}38710$, illetve $0{\cdot}72333$, és ezért Mercur és Vénus elongatiója illetve $22^0\ 46'$ és $46^0\ 20'$. A bolygópálya azonban pontosabban kifejezve ellipsis, s ezért a számított legnagyobb szögkitérés csak közepes, bár nem nagyon változó értéket képvisel.

A stationálás nem esik össze a legnagyobb elongatió pillanatával. Ha pl. az első conjunctió idejéből indulunk ki, akkor a bolygó retrograd mozgásával a Nap mögött elmarad és folyton lassuló mozgás után megáll. De direct mozgásba is csak gyorsulva mehet át, tehát az egyenletesen haladó Naptól a bolygó még jobban elmarad. A stationálás tehát időbelileg a két legnagyobb elongatió közé esik és a Naptól kisebb távolságban áll be. Két alsó conjunctió közötti idő Mercur és Vénusnál 116 és 584 nap; a két elongatió távolsága 22^0 $46'$ és 46^0 $20'$ és időközük $43\frac{1}{2}$ és $141\frac{1}{2}$ nap. A stationálás ellenben a Naptól 18^0 és 28^0-nyi távolságban áll be és a retrograd mozgás a két bolygónál 22 és 42 napig tart.



144. ábra. Belső bolygó legnagyobb elongatiója.

Egy másik bolygónak, pl. a Marsnak mozgását oppositiója körül, mutatja a 142. ábra, 1881. szeptember 1. és 1882. április 9. között. A köröcskék most nem a napot jelentik, hanem azon helyeket, melyek a Nappal diametrálisan szemben feküsznek, melyeken tehát a Föld maga áll a Napból nézve.

Az oppositió deczember 26. és 27-ike között állt be, körüle a Mars 77 napon át $18\frac{1}{2}^0$-nyi íven retrograd mozgást tanusított.

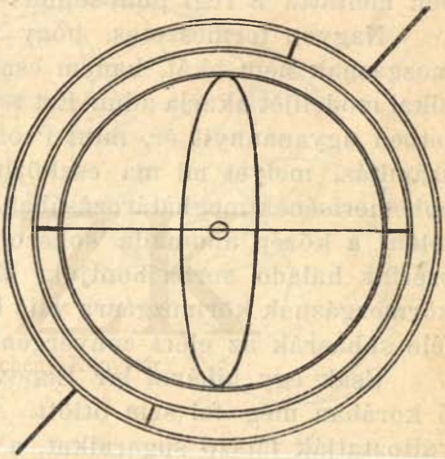
A stationálás november 17. és február 2-án volt észlelhető.

XXXII. FEJEZET.

A bolygómozgás magyarázata.

A bolygók mozgási viszonyai, eltekintve azon adatoktól, melyeket csak a távcső szolgáltathat, már az ó-korban is ismeretesek voltak, s tudtunk szerint Eudoxus volt az első, ki a Kr. e. IV. században a bolygók mozgásának tényleges leírását is adta.

Szerinte minden bolygó egy kristálysphaera aequatorához van kötve. A sphaera egy vele concentrikus héjhoz erősített tengely körül forog (145. ábra), az utóbbi ismét ugyancsak külön tengely körül a primum mobile sphaerájához van kapcsolva. Az egész rendszer tehát a Cardani-féle suspensióhoz hasonlít, csakhogy az egyes tengelyek nem éppen derékszögeket képeznek egymással. Most már világos, hogy legalább első közelítésben, a három sphaerával három feltételt nyerve, ábrázolhatjuk a bolygóknak a régiek szerint hármas mozgását: az állócsillagokkal közös napi forgást, a kelet irányú közepes mozgást és annak sebességváltozásait, illetve a stationálást és retrogressiót.



145. ábra. Eudoxus világrendszere.

A bolygórendszer ezen ábrázolását a homocentrikus sphaerák rendszerének nevezik. Knidosi Eudoxus a Nap és Hold járásának ábrázolására 3–3, a többi bolygóé számára négy-négy, összesen tehát a primum mobile héjával együtt 27 sphaerát igényelt. Kalippos követője a már pontosabban ismert mozgások előállítására 34, Aristoteles 56 sphaerát használt fel.

Nagyon természetes, hogy minden újonnan hozzálépő sphaera tengelyhajlása és forgási ideje szerint egy feltételi egyenletet ad, melyet úgy lehet megoldani, hogy a bolygó pályájának egy-egy darabját a megfigyelések pontosságán belül ábrázolja. Ha tehát a sphaerák számát kellőképen szaporítjuk, akkor természetesen a bolygók mozgása minden megkivánt pontossággal írható le.

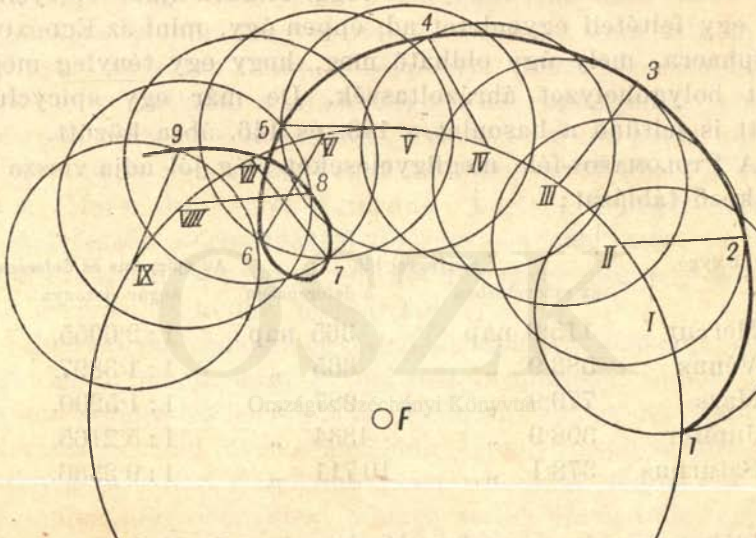
A problema megoldása komplikált gömbi háromszögtani feladat; a bolygó pályája gömbi görbe, az úgynevezett hippopede, mely a hurokképződést már Eudoxus egyszerű systemájában meglepően adja vissza. Aristoteles discredidálta ez elméletet, a középkor nem érve be Ptolomaeos rendszerével, ismét hozzája fordult, és újabban Schiaparelli teljes mértékben méltatta a régi philosophus valóban geniális gondolatát.

Nagyon természetes, hogy Eudoxus elmélete a bolygómozgásnak nem okát, hanem csak kinematikai képét, mechanikai modelljét akarja adni. Ezt teljességgel el is éri és e tekintetben ugyanannyit ér, mint Ptolemaeos rendszere, vagy azon számítás, melyet mi ma eszközlünk a bolygók geocentrumos ephemerisének meghatározásában, ha a bolygók mozgását végtelen, a közép anomalia sokszorosainak sinusai és cosinusai szerint haladó sorba bontjuk. Ez tényleg nem egyéb, mint körmozgásnak körmozgásra való halmozása, tehát az Eudoxus-féle sphaerák az elért convergentiáig szaporítása.

Csak egy hibával bír Eudoxus rendszere, mely talán az ő korában még fel sem ötlött. A Nap és Hold ugyanis megváltoztatják látszó sugaraikat, a többi bolygó ellenben fényét. Ebből az következik, hogy a Földhöz való távolságuk változó, a mit Eudoxus hippopedéje, mint gömbi görbe nem juttat kifejezésre. De ez még modern szempont alatt sem veszteség, mert hiszen a csillagászati helymeghatározás ma is csupán irányszögletmérésre, nem pedig távolságmérésre is szorítkozik. — A geocentrumos ephemerisben csak hosszúság és szélesség, vagy rectascensio és declinatió szerepel lényeges helymeghatározó gyanánt, nem pedig távolság is.

Hogy Hipparchos miként oldotta meg excentrumos körével a Nap, illetve Hold pályakérdését, már láttuk. Ugyanő a bolygók mozgásának más felfogását is találta fel, mely, mivel Ptolemaeos művében, az Almagestben maradt fenn, rendesen ezen nagy csillagász nevéhez fűződik. Ez az úgynevezett epicyklus-elmélet.

A mindenség középpontját a mozdulatlan Föld foglalja el. Körülötte kering excentrumos körben sorban a Hold, azontúl mindig növekedő távolságban epicycloisokban a Mercur, Vénus, ismét excentrumos körben a Nap, és epicycloisokban Mars, Jupiter és Saturnus. A távolságok sorrendjét egészen helyesen, a sorrend szerint folyton kisebbedő sebességből állapították meg. Az epicycloidális mozgásnak lényege most már a következő: az egyes bolygók (a Nap és Hold kivételével) nyugotról keletre epicyclusban mozognak, azaz egyenletes kör-



146. ábra. A HIPPARCHOS-PTOLEMAEOS-féle epicyclikus mozgás.

mozgást végeznek oly körben, melynek középpontja az úgynevezett deferens körön ugyancsak egyenletesen s ugyanazon irányban halad. A bolygó pályája ez esetben az úgynevezett epicyclois.

A 146. ábrában a gördülő kör, az epicyclus egyenlő időközök mulva az I., II., III... helyzeteket foglalja el a deferens körön; a bolygó az egyes időközök alatt a Földhöz húzott radiusvectorhoz képest ábránkban $\frac{1}{8}$ kerületet tesz meg, epicyclusában tehát az egyes időpillanatokban az 1, 2, 3.. helyet foglalja el, melyek összesége az epicycloidát adja.

Látnivaló, hogy ily módon a hurokképzés minden nehézség nélkül magyarázható. Hogy azonban e hurokba betekinthessünk, szükséges azon feltevés, hogy vagy a Föld az ábra sikján kívül áll, vagy hogy az epicyclus síkja a deferens síkjával szöget képezzen. E feltevés nélkül az epicycloida legnagyobb kör gyanánt vetül az égre, a bolygó tehát csak legnagyobb körben halad előre és hátra látható csomóképzés nélkül.

Az epicycloida alakja tisztán csak a két kör sugarának s a két sebességnek viszonyától függ. Minden újabb epicyclus tehát egy feltételi egyenletet ad, éppen úgy, mint az Eudoxus-féle sphaera, mely úgy oldható meg, hogy egy tényleg megfigyelt bolygóhelyzet ábrázoltassék. De már egy epicyclus mellett is feltünő a hasonlat a 143. és 146. ábra között.

A Ptolomaeos-féle megfigyeléseket elég jól adja vissza a következő táblázat:

Bolygó	Keringési idő az epicyclusban	Keringési idő a deferensben	Az epicyclus és deferens sugár-viszonya
Mercur	115·9 nap	365 nap	1 : 2·6055.
Vénus	583·9 „	365 „	1 : 1·3897.
Mars	779·9 „	687 „	1 : 1·5200.
Jupiter	398·9 „	4334 „	1 : 5·2165.
Saturnus	378·1 „	10 711 „	1 : 9·2336.

Idők folyamán a megfigyelések száma és jósága nagyobbodván, mind több bolygó-helyet kellett előtüntetni ezen egyszerű mechanismus által. Mivel ily viszonyok között az egyszerű Hipparchos-féle epicycloida nem adott már kielégítő eredményeket, az epicyclusok számát szaporítani kellett. A régi epicyclus egy újabbnak deferense lett, és í. t. A középkor végén az egyes bolygók mozgásának ábrázolására már annyi epicyclus kellett, hogy X. Alfonz castiliai király ismeretes keserű kritikájába tört ki, mely trónjába került.

Eredeti alakjában e rendszer hibás volt, a mennyiben szerinte Mercur és Vénus is oppositióba kerülhet. A hiba elkerülése legegyszerűbb, ha a Mercur és Vénus deferenséül magát a Nap pályáját választjuk, a mit annál is inkább szabad, mivel nem a deferens kör sugarának absolut nagysága, hanem csupán az epicyclushoz való viszonya dönt. Ily módon keletkezett a pontosabb Herakleides Pontikos-féle, rendesen aegyptusinak nevezett rendszer, melyben a Mercur és Vénus a Nap körül kering.

A Coppernicus-féle rendszer után talán nem is komoly pillanatban keletkezett Tycho de Brahe-féle rendszer, mely az aegyptusinak továbbfejlesztése volna, érthetetlen és ezért teljesen mellőzhető.

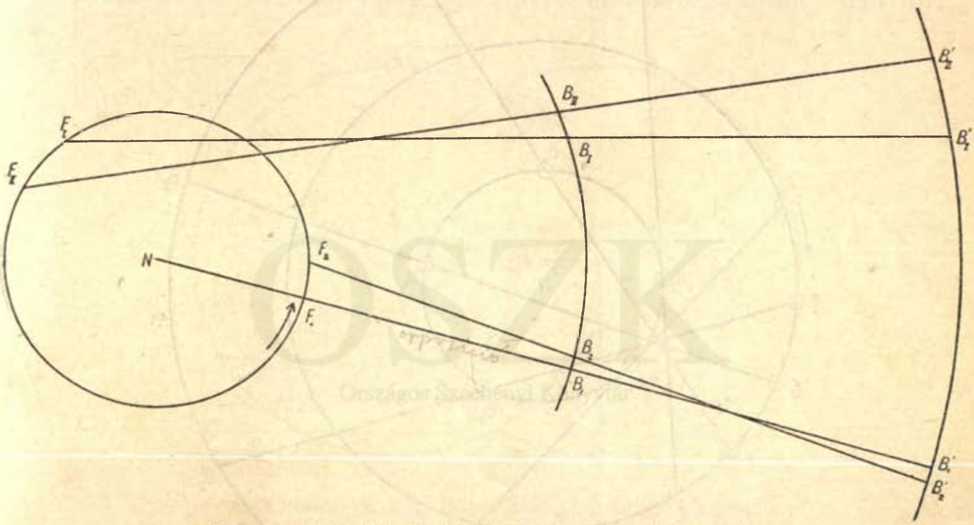
Coppernicus rendszere rendkívüli egyszerűsége által tünik ki egyrészt, másrészt, hogy a bolygók mozgásait nem úgy magyarázza, a mint tényleg látjuk, hanem a mint látnók, ha megfigyelő helyünk a Nap középpontja volna. Szerinte a Nap fekszik mozdulatlanul a mindenségnek középpontjában; körüle keringnek részben concentrikus, részben excentrumos körökben sorban a Mercur és Vénus, a Föld, mely körül a Hold mozog, Mars, Jupiter és Saturnus. A görög felfogás szerint legtökéletesebb körmozgással Coppernicus sem mert és nem tudott szakítani, sőt egyes bolygóknál ezért még egy epicyclikus mozgást is kellett megtartania.

Coppernicus tanának egyetlen bizonyítékát sem adja, mindössze annyit mond, hogy az égi testek mozgását éppoly egyszerűen és teljesen lehet belőle levezetni, s hogy az évszakok változásai, a Föld övei s hasonlók éppúgy megmaradhatnak, mintha akár a Nap látszó mozgását valódinak fogjuk fel. Sőt a legkomolyabb ellenvetést ő maga tette: Ha a Föld egy év lefolyása alatt megkerüli a Napot, akkor minden állócsillag az égen való fekvése szerint kört vagy ellipsist fog leírni közepes helye körül, éppen úgy, mint valamely lámpa a szoba mennyezetén ellenkező irányban ugyanily természetű pályát ír le látszólag, mint a minőben mi körüle mozgunk. Más szóval az állócsillagok parallaxist — úgynevezett évi parallaxist — fognak mutatni a Föld keringése miatt. Ilyennek azonban sem Coppernicus, sem kortársai nyomát sem észlelhették, s így Coppernicus kénytelen volt kijelenteni, hogy az állócsillagok sphaerája oly távol van tőlünk, hogy ezen távolsághoz képest a Föld pályája a térben is csak pontnak tekinthető. Míg tehát egyrészt az új rendszer a bolygók mozgásának legegyszerűbb képét adta, addig másrészt csodálatos és addig nem sejtett mértékben bővítette az ég tereit.

Egy ilyen parallaktikus eltolódás azonban mégis mutatkozott tisztán, a bolygókon. Az epicyklois hurokképződése nyilván a Coppernicus-féle rendszerben nem más, mint a Föld Nap körüli útjának tükörképe. A hurok átmérője vagy a retrograd mozgás tartama, helyesebben pedig a bolygó epicyclusa tehát visszás arányban fog állani a bolygónak a Földtől való távolságával. És ezen egyszerű gondolatmenettel volt képes Coppernicus a Ptolemaeus-féle rendszer segítségével megállapítani a bolygók közép naptávolságait, ha egyiket, például a Föld távolságát a Naptól, egységül veszi. Így legalább a bolygók sorrendje egyszer s mindenkorra pontosan meg volt állapitva, kitudódott, hogy a Naptól távolabb álló bolygók lassabban keringenek, és Coppernicus ideje óta felfedezett 2 nagy bolygó, az Uranus és Neptunus, továbbá a Mars és Jupiter között keringő több mint 400 apró bolygó szintén teljesen mesterkéletlenül illeszkedett rendszerébe. Sőt ezen rendszer lett az alap, a melyen Kepler a bolygók mozgásának mathematikai törvényeit, ezekből ismét Newton az általános tömegvonzás törvényét olvashatta ki.

Így az egész modern csillagászat négy lángelmének felépitménye. Hipparchos leírta a bolygók mozgását a Föld körül, Coppernicus a Nap körül. Kepler e mozgást mineműsége, Newton okai szerint írta le.

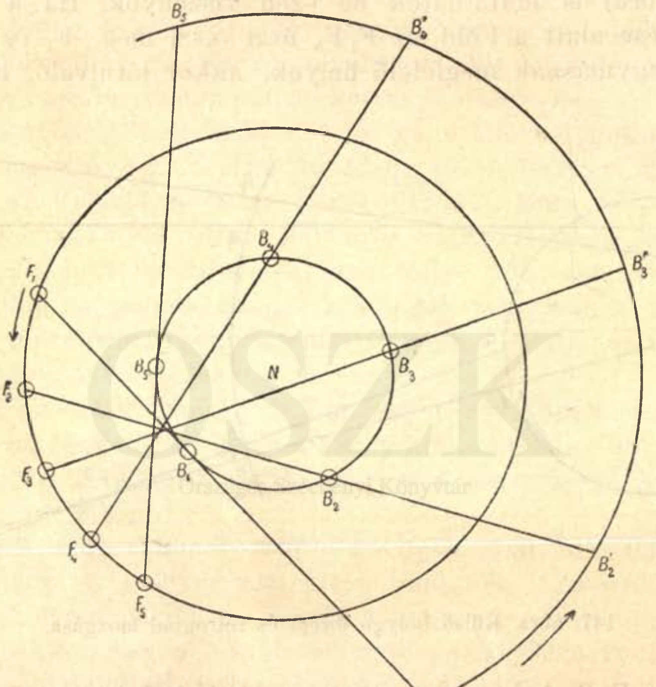
A 147. ábra valamely a Föld pályáján kívül álló B bolygó látszó mozgását magyarázza. Ha a Föld két egymásután következő helyzetéből F_I és F_{II}-ből a bolygó B_I és B_{II} helyeire nézünk, akkor ezeket az állócsillagok sphaerájára vetítve B'_I és B'_{II}-ben látandjuk. Ez esetben a bolygó látszólag is ugyanazon mozgási irányt követi, mint a Föld, tehát direct mozgású. Az oppositió pillanatához közel azonban a Föld adott időben az $F_1 F_2$, a bolygó $B_1 B_2$ ívet írja le. Noha ezen két mozgás is egyenlő irányú, vetülete B'_1 és B'_2 retrograd mozgásnak felel meg. Az ábra közvetlenül megtanít arra, hogy a látszó mozgás minden egyenetlensége tisztán a Nap, a Föld s a bolygó állásának különösségéből következik. A bolygó direct mozgású, ha a Földről a bolygóhoz húzott látósugarai egymást a Föld s a bolygó pályáján belül metszik, retrograd, ha a metszés a bolygó pályáján túl történik, és stationáló, ha a látósugarak egymással egy ideig közel párhuzamosan haladnak. A belső bolygók, Mercur és Vénus mozgását ugyanazon ábrán mutathatjuk be, csakhogy akkor B veendő a Föld helyett, F Mercur vagy Vénus helyett. A balra, egészen az állócsillagokig megnyújtott látósugarak mutatják azután, hogy a felső és alsó conjunctió alkalmával a mozgás direct és retrograd, s hogy stationálás lép fel azon pontokban, melyekben a Földről a bolygóhoz húzott sugarak a pályát érintik. Külön ábrában (148. ábra) is mutathatók be ezen viszonyok. Ha a bolygó keringése alatt a Föld az $F_1 F_5$ útat teszi meg, F_1 és B_1, F_2 és B_2 egymásnak megfelelő helyek, akkor látnivaló, hogy az



147. ábra. Külső bolygó direct és retrográd mozgása.

$F_1 B_1$ és $F_5 B_5$ helyzetek a legnagyobb keleti és nyugoti elongatiónak, az $F_3 B_3$ a felső conjunctiónak felel meg. A két elongatió között fekvő hosszabb pályadarabon a bolygó direct, a közöttük lévő rövidebb íven retrograd mozgású.

Mint bennünket különösebben érdeklő esetet végül még a Nap látszó mozgását is tárgyalhatjuk. Legyen a 149. ábrában F_1 és N_1 a Föld és Nap egy összetartozó helye, $F_1 F_2 F_3$ a Földnek a Nap körüli körnek vett pályája. A Föld bizonyos idő mulva F_2-be jutott, de mi, kik e mozgásáról közvetlenül tudomást nem szerezhetünk, a Napot most is a régi irányban keressük. Ha tehát F_1-ből, a mozgás kiindulási helyéből párhuzamost vonunk az új látóvonalhoz $F_2 N_1$-hez, akkor a távolság megtartása mellett N_2 ponthoz jutunk. Oda teszszük ítéletünkben az állócsillagok közé a Napot. Az $N_1 N_2$ ív ugyanakkora, mint $F_1 F_2$, és ugyancsak az óramutató járásával ellentétes irányú. A Földnek Nap körüli útja tehát teljesen azon látszatot kelti, hogy a Nap ugyanazon pályában ugyanazon irányban kering. A Föld mindenkori sebességét ugyanabban a

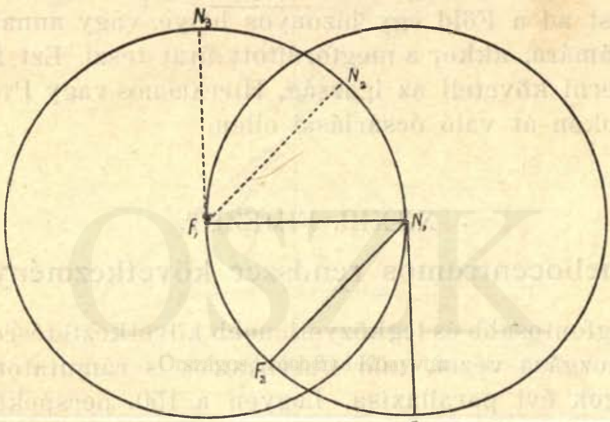


148. ábra. Belső bolygó direct és retográd mozgása.

nagyságban átruházzuk a Napra és csak azon külömbség van, hogy a Nap az égen a Föld helyétől mindig 180°-kal eláll.

Az ekliptika vagy nappálya tehát tulajdonképen a földpálya nevét érdemli; a Nap és Föld ennek legnagyobb körében mindig 180°-kal állnak el egymástól. Ennek tekintetbevételével a Nap látszó mozgására tett korábbi számításaink azonban egyéb módosítás nélkül helyesek maradnak.

Ismeretes azon áldatlan háború, melyet a COPPERNICUS-féle reform létesített, mely még a különben elfogulatlan Tycho-t, a kitünő észlelőt is arra bírta, hogy bár pillanatnyilag teljességgel érthetetlen világrendszerét fogalmazza. E háború elkeseredését ma teljességgel nem értjük többé. Hipparchos és Coppernicus két teljesen congeniális elme; mindkettő, a mit akart, a legjobban keresztül is vitte. Hipparchos a bolygók látszó mozgását a Föld körül kívánta leírni, s e feladatát az epicyclikus mozgással teljességgel megfejtette, oly jól, hogy a modern csillagász betűről-betűre Hipparchos eljárásai szerint számol. Coppernicus ellenben a bolygók mozgását úgy írja le,



149. ábra. A Nap látszó mozgása a Föld körül.

mintha ezeket a Napról néznők. A két rendszer tehát nem egyéb, mint közönséges coordinátatransformatió, mely minden bonyolódottabb geometriai és mechanikai problemában előfordul, s melyet ma egyszerűen az egyszerűsítésre törő fogásnak nevezünk.

Minden bolygómozgás, sőt minden a természetben egyáltalában végbemenő mozgás a körmozgások végtelen számára vezethető vissza. Valamely, az idővel arányos szöglet, pl. a középanomália sokszorosainak sinusai vagy cosinusai szerint haladó, úgynevezett Fourier-féle sor minden mozgást, minden geometriai képletet visszaadhat, pedig lényegében nem egyéb, mint Hipparchos-féle, végtelenül szaporított epicyclusok. A Nap és Hold középponti egyenlítése ilyen sornak a kellő pontosságot már biztosító kezdő tagjai. Noha e sorokat Hipparchos nevét eszünkben sem tartva, az égi testek mozgási elméletéből vezettük le, mégis ugyanazon eredményhez jutunk, mintha a Ptolemaeus-féle rendszerből indultunk volna ki s az epicyclusok számát kellőképen fokoztuk volna. Ezért igazságosabb, ha a Ptolemaeus-féle rendszert geocentrumosnak, a Coppernicus-félét heliocentrumosnak mondtuk.

Mikor a csillagász a Földön tett megfigyelésekből levezeti a bolygók pályáit, akkor voltaképen egyebet nem tesz, minthogy átmegy a Ptolemaeus-féle rendszerből a Coppernicus-félére. És ha e pályákból a bolygó helyét előre számítja, ephemerist ad a Föld egy bizonyos helye, vagy annak középpontja számára, akkor a megfordított útat teszi. Ezt felsorolni és beismerni követeli az igazság, Hipparchos vagy Ptolemaeus évszázadokon át való ócsárlásai ellen.

XXXIII. FEJEZET.

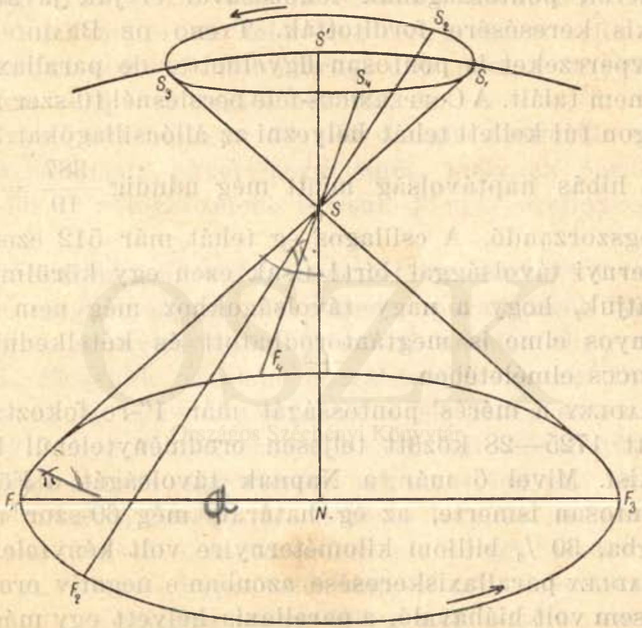
A heliocentrumos rendszer következményei.

A legfontosabb és legközvetlenebb következtetésre, melyre a Föld mozgása vezet, már Coppernicus is rámutatott, ez az állócsillagok évi parallaxisa. Legyen a 150. perspektivikusan rajzolt ábrában N a Nap, $F_1 F_2$ .. a Föld pályája és S egy csillag, melynek SN iránya merőlegesen áll az ekliptikára. Ha a Föld egymásután az $F_1 F_2$ .. helyzeteket foglalja el, akkor a csillagnak az éggömbre való vetülete S_1, S_2 .. leend. Egy év lefolyása alatt tehát a csillag a Földről nézve ennek mozgásával ellentétes (az óramutató irányában fekvő) kört ír le, mely a Föld pályájával hasonló, csakhogy a csillag e pályájában mindig 180^0-kal nagyobb, azaz diametrálisan szemközt fekvő állásokat foglal el. Ha az SN vonal az ekliptika felé hajlik, akkor a csillag pályáját mindig elnyúltabb vetületben látjuk, ellipsist alkot, mely az ekliptikában fekvő csillagok számára elvégre egyenesbe megy át. A csillag szélső helyeit természetesen egy fél év lefolyása alatt foglalja el.

Az NSF_1 szöglet, mely alatt a csillagból a földpálya sugarát látjuk, ha a csillag merőlegesen állana az ekliptika fölött, a csillag évi parallaxisának nevét viseli. Meghatározása azonos a csillag távolságának megállapításával, mert mihelyt e szög, melyet az $S'S_1$ eltolódás mér, π ismeretes, kiszámítható SF_1N háromszögből $NS = D$ csillagtávolság $F_1N = a$ naptávolság segítségével. Ugyanis

$$D = \frac{a}{\operatorname{tang}\pi}, \text{ vagy } \pi \text{ kicsinysége folytán } D = 206\,265\,\frac{a}{\pi},$$

ha π másodperczekben, illetve annak törtrészeiben van adva.



150. ábra Az állócsillagok évi parallaxisa.

A számfactor, mint ismeretes, sin 1″ reciprok értéke. Ha tehát 1 parsek egy állócsillagnak csak 1″-re rúgó parallaxisa volna is, távolsága 206 265-szor volna nagyobb, mint a Napé, s ha e parallaxis 1′-re emelkednék, e távolság a Napénak még mindig 3437·75-szeresét tenné ki.

Ha Coppernicus ismerte volna a Nap igazi távolságát, melyet korában 19 holdtávolsággal tettek egyenlővé, holott középben 387-szer oly távol van, mint a Hold, valószinűleg nem merte volna kimondani, hogy az állócsillagok oly messzeségben vannak, hogy mellette még e távolság is puszta pont.

Az ő idejében a mérőeszközök 10′-nyi pontossággal bírtak, nézete szerint tehát az állócsillagok legalább is 344 × 19 = 6536-szoros holdtávolságban, azaz 2508 millió km.-nyi távolságban állanak.

Az ég mérhetetlenségének gondolatától visszahökkenve, a parallaxis nem létezése képezte Coppernicus elleneseinek szemében a legnyomósabb argumentumot tana ellen. Követői ellenben részint a megfigyelési módok szigorításával, részben a műszerek pontosságának fokozásával erejük javarészét a parallaxis keresésére fordították. Tycho de Brahe már az egyes ívperczeket is pontosan figyelhette, de parallaxist még mindig nem talált. A Coppernicus-féle becslésnél 10-szer nagyobb távolságon túl kellett tehát helyezni az állócsillagokat. És ezen szám a hibás naptávolság miatt még mindig $\frac{387}{19} = 20{\cdot}4$-del volt megszorzandó. A csillagos ég tehát már 512 ezer millió kilométernyi távolsággal bírt! Csak ezen egy körülménynyel igazolhatjuk, hogy a nagy távolságokhoz még nem szokott tudományos elme is megtántorodhatott és kételkedni tudott Coppernicus elméletében.

Bradley a mérés pontosságát már 1″-re fokozta, mind a mellett 1725—28 között teljesen eredménytelenül keresett parallaxist. Mivel ő már a Napnak távolságát a Földtől is elég pontosan ismerte, az ég határait még 60-szor nagyobb távolságba, 30 $^2/_3$ billiom kilométernyire volt kénytelen tenni.

Bradley parallaxiskeresése azonban e negativ eredménye mellett sem volt hiábavaló, a parallaxis helyett egy más eltolódást talált, az aberratiót, mely épp oly fényes, egyenes bizonyítéka volt a Föld keringő mozgásának.

Az összefüggés kedveért azonban végezzünk a parallaxissal teljesen.

A jelen század harminczas éveiben Bessel a königsbergi csillagda új heliometerével, a csillagászatnak kis ívek mérésére legpontosabb eszközével, a 61 Cygni nevű állócsillagot kezdte vizsgálni. E csillag tetemes évi mozgással bír, tehát eleve is valószinű volt, hogy aránylag közel fekszik Napunkhoz. És mivel az egyenes, közvetlen mérés eddig mindig sikertelen volt, a csillagot nap-nap után két közel álló gyenge csillaghoz viszonyította, melyekről — miután önmozgást nem mutattak — fel volt tehető, hogy messze mögötte feküsznek 61 Cygninek. És most tényleg mutakozott a kivánt irányban évi eltolódás, mely mindkét csillaghoz képest közel $\frac{1}{3}''$-et tett ki. A módszer tulajdonképen csak a két csillagnak parallaxis-külömbségét adja, de minthogy mindkét összehasonlító csillag ugyanazon külömbséghez vezet és 61 Cygnivel szemben valóban állócsillagok, feltehető, hogy ezek parallaxisa még sokkal kisebb, azaz mérhetetlen. 61 Cygni parallaxisa tehát $\frac{1}{3}''$, vagy e csillag 618 795-szer oly messze áll tőlünk, mint a Nap. Ez 92 billió kilométernek felel meg, vagy mivel a fény másodperczenként 300 000 kilométernyi útat tesz, a fény 9·705 évig van úton, míg e csillagtól hozzánk ér.

Ez idő óta mintegy 40 állócsillagnak sikerült megállapítani parallaxisát; egyetlenegy sincs, melynek parallaxisa az 1″-et elérné, a legközelebb is csak $\frac{3}{4}''$-nyi parallaxissal bír, α Centauri.

Formailag tehát a Coppernicus-féle rendszer közvetlen bizonyítéka megvan ugyan, de a lemért parallaxisok kicsinysége mellett, e bizonyíték nem tekinthető minden ellenvetés fölött állónak. Siessünk azonban hozzátenni, hogy ma ily bizonyítékra szükség sincs. A Coppernicus-féle heliocentrumos reform elvégre is hypothezis, melytől csak azt követeljük, hogy a megfigyelt tények megértésére alkalmas legyen. Ennek megfelel nemcsak a Coppernicus ismerte bolygók számára, hanem azon több mint 400, ezóta felfedezett bolygó esetében is. Sőt Neptunus bolygó e hypothezés alapján volt eleve kiszámítható, még mielőtt csillagász szeme bolygónak ismerte volna fel, és az apró bolygók és üstökösök közül még egy sem veszett el szem elől, és évekre előre kiszámított helyük összevág pontosan azon helyzettel, melyet éppen a Coppernicus-féle rendszer alapfektetésével számolunk. Mindenesetre azonban kivánatos, hogy közvetlenebb folyományait is lássuk, s erről lesz szó a következőkben.

XXXIV. FEJEZET.

Az aberratió.

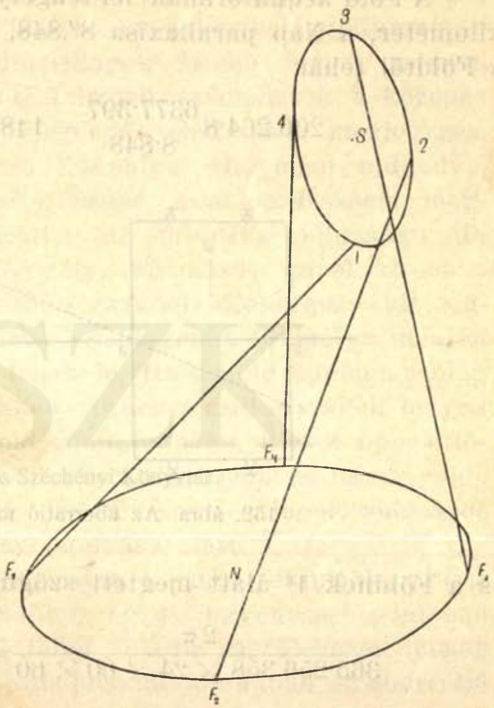
Bradley a parallaxis felkeresése kedvéért 1725. deczembertől 1726 deczemberéig szakadatlanul figyelte γ Draconis csillagot. Minthogy az ő idejében a refractió pontosan ismeretes nem volt, oly égi testet választott, mely a megfigyelő hely zenithjéhez közel áll, mivel a zenith körül a sugártörés 0 vagy legalább igen kicsiny lévén, könnyen tekintetbe vehető. A mondott csillag megfelel a feltételeknek, mert γ Draconis declinatiója 1725-ben $51^0 32' 8''$, míg Bradley észlelő helye, Kew geographiai szélessége $51^0 28' 6''$, úgy hogy a csillag csak $4' 2''$-czel halad északra a zenithtől a meridiánon át. A csillag hosszúsága és szélessége $\lambda = 264^0 8' 9''$ és $\beta = 74^0 57' 38''$ volt.

A Föld ugyanazon heliocentrumos (azaz a Nap $264^0 8' 9'' - 180^0$ geocentrumos) hosszúsággal június közepén bír, tehát a Napról nézve akkor áll ugyanazon oldalon, mint a csillag, deczember közepén tehát a másik oldalon van, távolabb tőle. Deczember közepétől június közepéig a Föld állandóan közeledik a csillaghoz, az év második felében távolodik tőle.

Ha most a csillagnak érezhető parallaxisa van, akkor látóvonala a mondottak értelmében felegyenesedik az ekliptikához képest deczembertől júniusig, ellenben lehajlik az ekliptikához az év második részében. Épp azon módon látjuk magasabban a torony csúcsát, ha tövéhez közeledünk. A csillag tehát június és deczember közepén illetve a legnagyobb és legkisebb szélességet fogja mutatni, míg ez szeptemberben és mércziusban közepes értékkel bír. Ugyanezt mondhatjuk a csillag zenithtávolságáról is.

Bradley megfigyelései azonban egészen más eredményhez vezettek: a csillag mutatott eltolódást, mely egy évi cyclusba volt bezárva, a szélesség maximuma és minimuma azonban illetve szeptemberre és márcziusra, közepes értéke deczemberre és júniusra esett. A megfelelő phásisok tehát mindig egy negyed évvel későbbre estek, mint ezt a parallaxis hatásánál fogva várni lehetett. (Összehasonlítandó a 150. és 151. ábra.)

Már ezen körülmény magában is mutatta, hogy jelen esetben nem parallaxisról van szó; sőt miután minden ez irányban észlelt csillag hasonló phásiseltolódást, különösen pedig ugyanazon nagyságú 20″.5-nyi helyváltozást tünteti fel középben elfoglalt helyzetéhez képest, világos volt, hogy nem a csillagok egyedenként különböző távolsága, hanem csak egy, minden csillagnál állandóan működő factorról lehet szó. Bradley a jelenség okát a fény aberratiójában találta, azon körülményben, hogy a fény terjedési sebessége nem mérhetetlen nagy a Föld keringési sebességéhez képest. Már mintegy 50 évvel ezelőtt Olaf Römer is felfedezte a fény terjedési sebességét a Jupiter-holdak fogyatkozásaiból.



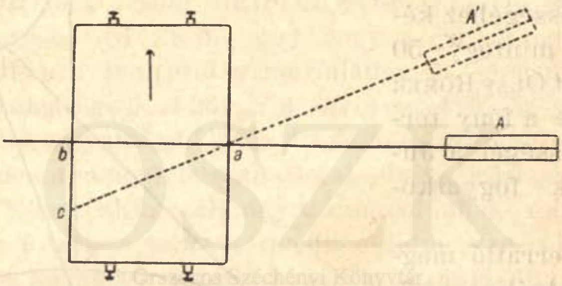
151. ábra. Az állócsillagok aberratiója.

Az aberratió megértésére szolgáljon a következő példa: Legyen (152. ábra) A a nyugodtan álló kocsi oldalára merőlegesen irányított ágyúcső, melynek golyója a kocsi oldalába a és b-nél lyukat üt. A megfigyelő természetesen az ágyú irányát egészen helyesen a két lyuk tengelye mentén, valódi A helyén fogja keresni. Ha azonban a kocsi a lövés irányára merőlegesen halad, nevezetesen a bc útat teszi meg, míg a golyó a kocsi szélességét, ab-t futja meg, akkor az a nyilás fúrása után nem b, hanem c helyet fogja találni. A kocsin menő észlelő, kinek saját mozgásáról tudomása nincs, az ágyú helyét most is a két lyuk irányában, tehát A′ helyen fogja keresni. Egészen így jár a csillagász; míg a fénysugár távcsövének tengelyét, Oo-t járja be (153. ábra), addig a Föld a Nap körüli útjában az oo′ darabbal mozog tova. A fényforrást tehát a két mozgás összetevője mentén, Oo′ folytatásában fogjuk keresni és látni is, mivel a fényforrás látszó helyében mindig az utolsó fénysugár iránya dönt.

Ez ábrából könnyen határozzuk meg az aberratió állandóját is, azaz azon ívet, melylyel a csillag közepes helyzetétől eltér, ha a Föld látósugarára merőlegesen halad.

A Föld aequatorának fél tengelye Bessel szerint 6377·397 kilométer, a Nap parallaxisa 8″.848, a Nap közepes távolsága a Földtől tehát

$$206\,264{\cdot}8\,\frac{6377{\cdot}397}{8{\cdot}848} = 148\,660\,000 \text{ km},$$



152. ábra. Az aberratió magyarázata.

és a Földnek 1^s alatt megtett szögútja

$$\frac{2\pi}{365{\cdot}256\,358 \times 24 \times 60 \times 60} = 0{\cdot}000\,000\,19885$$

A két szám szorzata a lineáris sebesség számára 29·56 kilométert ad. A fényterjedési sebesség a legújabb megfigyelések szerint 300 000 km. és ezért a két szám viszonya az aberratióállandó tangensével egyenlő. A szög kicsinysége folytán tangens és ív felcserélhető, azaz a mondott sebességek viszonya szorozva 206 265-tel, ad $\alpha = 20''.32$, s ez az aberratió állandója. Ezen, a csillagászatban nagyfontosságú adat közvetlen megfigyelések által is megállapítható. Struve szerint, ki egyenesen az állócsillagok helyváltozásaiból vezette le, $\alpha = 20''.445$, Delambre szerint, ki a Jupiter-holdak fogyatkozásaiból vezette le, $20''.255$.

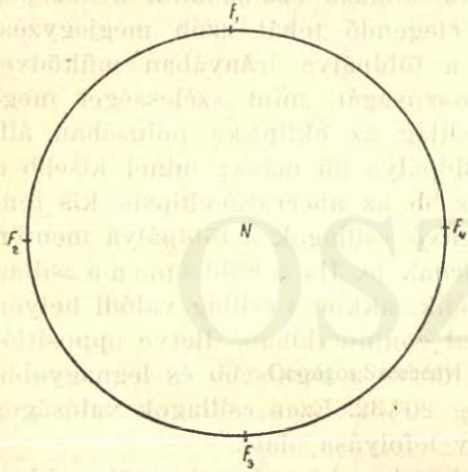
Szigorúan véve e számadat nem állandó, mivel a Föld sebessége egy fél év alatt nő, a másik félév alatt meg fogy; a sebességváltozás az egésznek mintegy $\frac{1}{60}$-a lévén, az aberratió is félévi közben 20″.0 és 20″.7 között ingadozhatik.

A csillagászok külön formulák segítségével számítják azon befolyást, melyet az aberratió minden pillanatban valamely égi test helyére gyakorol. Mi ennek levezetését annál is inkább mellőzhetjük, mivel az állócsillagok helyzete praecessió, aberratió és nutatió miatt javítva az ephemeridagyűjteményben bennfoglaltatik, az állócsillagok látszó helyei czímén, míg ezen javításokat nem tartalmazó számadatok a közepes helyekre vonatkoznak. Itt elegendő tehát azon megjegyzés, hogy az aberratió mindig a földpálya irányában működve, általában úgy a csillag hosszúságát, mint szélességét megváltoztatja. Ha valamely csillag az ekliptika pólusában áll, akkor aberratiógörbéje a földpálya hű mása; minél kisebb a csillag szélessége, annál kisebb az aberratió-ellipsis kis tengelye, és az ekliptikában fekvő csillagok a földpálya mentén 40″.7 hosszúságú egyenest írnak le. Ha a Föld éppen a csillag felé mozog vagy tőle távolodik, akkor a csillag valódi helyén látszik. Ha a csillag a Nappal conjunctióban, illetve oppositióban van, akkor hosszúsága illetve a legkisebb és legnagyobb. Mindkét esetben a külömbség 20″.32. Ezen csillagok valóságos ingalengést végeznek egy év lefolyása alatt.

Ha a Föld pályáját szigorúan körnek tekintjük, akkor a Föld mozgási iránya a Naphoz húzott egyenessel pontosan derékszöget képez. A Föld tehát mindig merőlegesen mozog a napsugarakra és ezért a Nap hosszát állandóan az aberratió állandó értékével kisebbnek figyelhetjük.

Látnivaló, hogy az aberratió felfedezése a Coppernicus-féle rendszernek épp oly szigorú, bár nem oly közvetlen bizonyítékát szolgáltatja, mint a parallaxis.

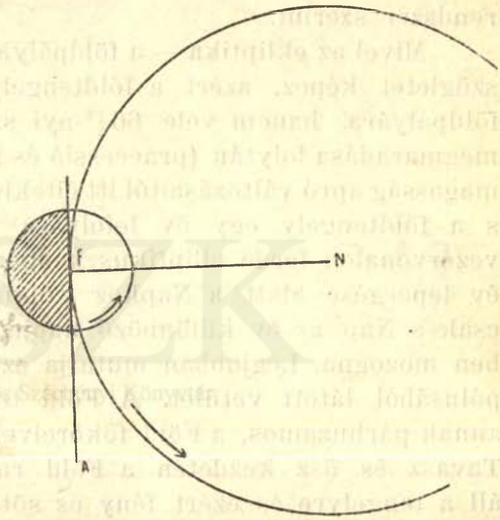
Egy más, az aberratióval szoros kapcsolatban álló jelenséget fedezett fel Olaf Römer 1675-ben a Jupiter-holdak fogyatkozásainak megfigyelése alkalmával, mely egyrészt szintén a Coppernicus-féle tan folyománya, másrészt a következőkben kitünő szolgálatot fog tenni a Nap távolságának meghatározására. E csillagász ugyanis megfigyelte (153. ábra) a Jupiterholdak be- és kiléptét a bolygó árnyékkúpjához képest, midőn a Föld F_1-ben, Jupiter tehát, a mely a megfelelő távolságban F_1 fölött képzelendő, oppositióban állt és a két bolygó e szerint egymáshoz legközelebb volt. Ezek annyira egyenlő időközök mulva léptek fel, hogy az egész évre cyclikusan kiszámíthatta bekövetkezését. Az oppositióra következő félévben azonban, míg a Föld F_2-n át F_3-ba, a conjunctióba sietett, e fogyatkozások bekövetkezése mindinkább elkésett a számított értékhez képest. Jupiter conjunctiójában, midőn a Föld F_3-ban állt, az időközök ismét állandók voltak ugyan, de minden fogyatkozás OLAF RÖMER ephemeriséhez képest mintegy 16^m 36^s-val elkésett. Az F_3 F_4 F_1 félév alatt e késést ismét behozták, úgy hogy a következő oppositióban az eredeti ephemeris ismét használható volt. OLAF RÖMER a jelenség okát csakhamar kimutathatta: abban áll, hogy a fény időben terjed és a megfigyelt 16^m 36^s-nyi késedelem nyilván nem egyéb, mint azon idő, mely alatt a fény a földpálya tengelyét, azaz a Nap és Föld kétszeres távolságát befutotta. Ha tehát e távolságot egyébként ismerjük, akkor ez adott idő, mely a fényidő nevét viseli, s mely DELAMBRE pontos számításai szerint $493^s.2$, a fényterjedési sebesség levezetéséhez használható. Ha ellenben e sebességet közvetlenül megmérjük, akkor viszont ez adatból a Nap távolsága, azaz a Nap parallaxisa számítható. Mindenesetre azonban ezen jelenség is COPPERNICUS tanának egyik folyománya.



153. ábra. A fény véges terjedési sebessége.

Még egy sajátságos jelenséget enged magyarázni a Föld Nap körüli keringése, azon tapasztalati tényt, hogy a hullócsillagok gyakorisága éjfél után folyton nő és mintegy reggeli 6^h-kor maximumot ér el. A 154. ábrában látható a Föld és pályája a Nap körül. Úgy a keringés, mint a tengelyforgás ugyanazon irányban, az óramutató járása ellen történik. —

A Föld haladásának pillanatnyi irányát az F-ben a földpályához húzott érintő szolgáltatja, és a mozgás czélpontja, A az apex nevét viseli. Az apex köralakú földpályát véve fel, pontosan egy derékszögre áll a Naptól, tehát reggeli 6^h-kor delel, mint azt a Föld éjjeli és nappali felének összehasonlítása a forgás irányával is mutatja. Az égen keresztül-kasul száguldó hullócsillagok ugyan a Föld felületének minden pontjára találnak, de legnagyobb mennyiségben természetesen mégis az előre haladó oldalát érik, azt, a mely számára az apex felső delelésben van, tehát minden helyen reggeli 6^h-kor. Triviális példát használva: valamely szúnyograjba lőtt ágyúgolyó minden oldalára tapad ugyan bizonyos számú szúnyog, de legtöbb a golyó előre haladó, legkevesebb a hátulsó oldalára.



154. ábra. A földmozgás apexe.

A heliocentrumos rendszer népszerűségét azonban nem ezen s hasonló okoskodások, hanem pusztán analogia esetek alapították meg. Az újonnan felfedezett távcsővel Galilei mindjárt a Jupiter-rendszer négy holdját fedezte fel, melyek néhány nap alatt végzik, mintegy szemünk előtt, keringésüket a főbolygó körül. Képe ez a naprendszerünknek kicsinyben, mely többeket győzött meg, a kiket tudományos gondolkodás is meggyőzhetett volna.

A posteriori még hozzávehetjük a mechanika tanait is, melyek mindannyian Coppernicus mellett szólnak. A bizonyítás azonban körkövetkeztetés, mert hiszen a mechanika javarészt éppen az égi testek tanulmányozásából fejlődött.

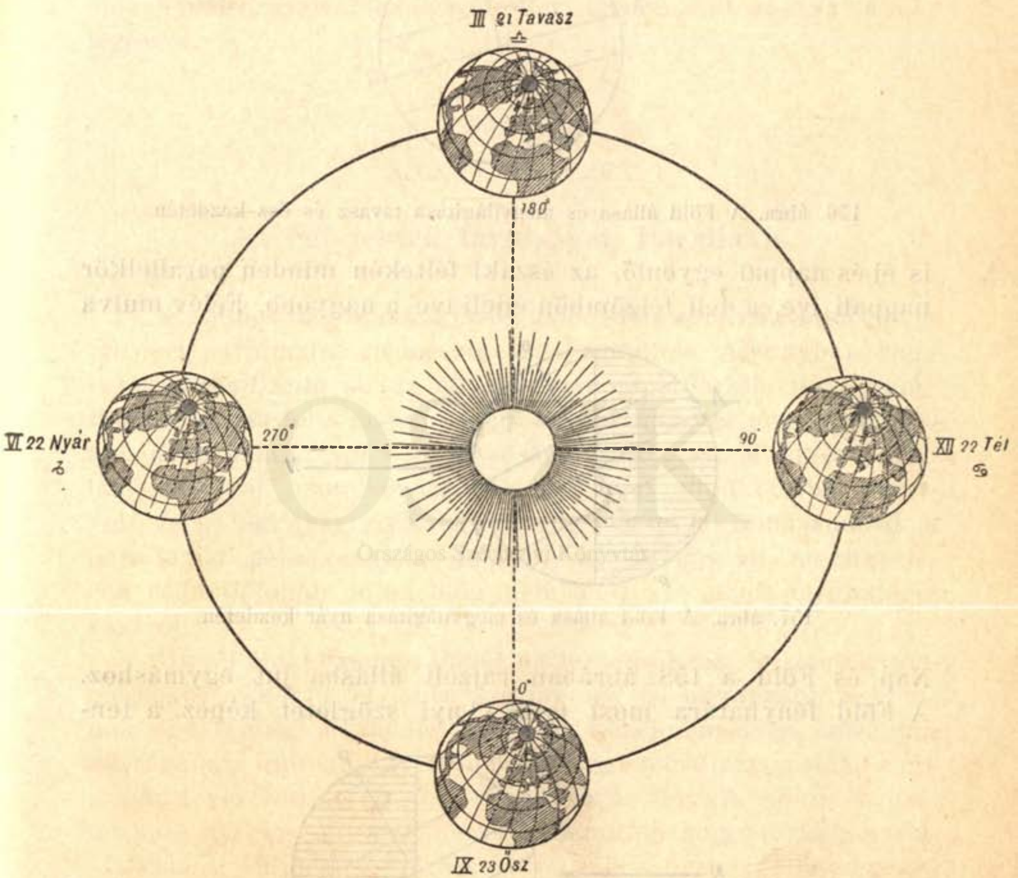
XXXV. FEJEZET.

Az évszakok és övök keletkezése Coppernicus szerint.

Épp oly egyszerűen, mint a Nap látszólagos futásából, adódnak fény és meleg eloszlása a Földön a Coppernicus-féle rendszer szerint.

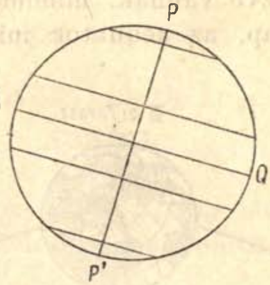
Mivel az ekliptika — a földpálya — az aequatorral $23\frac{1}{2}^0$-nyi szögletet képez, azért a földtengely nem áll merőlegesen a földpályára, hanem vele $66\frac{1}{2}^0$-nyi szögletet képez. A tengely megmaradása folytán (praecessió és nutatiótól, továbbá a sarkmagasság apró változásaitól itt eltekinthetünk) e szöglet állandó s a földtengely egy év lefolyása alatt az ekliptikán, mint vezérvonalon ferde elliptikus hengert ír le. A Föld tehát egy év lepergése alatt a Naphoz különböző állásokba jut, akár csak a Nap az év különböző napjaiban más-más parallelkörben mozogna. Legjobban mutatja ezt a 155. ábra, az ekliptika pólusából látott vetület. A Föld tengelyének megmaradását annak párhuzamos, a Föld főköreivel kijelölt fekvése mutatja. Tavasz és ősz kezdetén a Föld radius vectora merőlegesen áll a tengelyre és ezért fény és sötétség határa a Föld minden parallelkörét felezi. A kettő közt terjedő félév egyikében az északi pólus állandóan az éj, a másikban állandóan a nap határába esik. A Föld hosszúságai az ekliptikában természetesen mindig 180^0-kal vagy 6 jegygyel különböznek a Nap hosszúságától. Így tavasz kezdetén a Nap 0^0 hosszúsággal bír, vagy a Kos jegyének kezdőpontján áll, a Föld azonban a mérleg kezdetén 180^0 hosszúságot mutat.

Orthogonális projectióban mutatják a Föld különböző állásait a Naphoz képest a 156., 157. és 158. ábra. Mindezekben a párhuzamos napsugarak közül csak a Föld felületére merőlegesen beeső sugár van rajzolva. — Az elsőben, mely a Föld állását tavasz és ősz kezdetén ábrázolja, a Nap a papir síkja felett vagy alatt merőlegesen, az ábra középpontja felett képzelendő. A párhuzamos napsugarak egyike, mely az aequatort találja, merőlegesen áll a Föld felszinére, a két szélső pedig érintőt képez a pólusban. Az összes párhuzamos körök felezve vannak, mindenütt a Földön egyenlő hosszú az éj s a nap, az aequator minden pontja egy nap



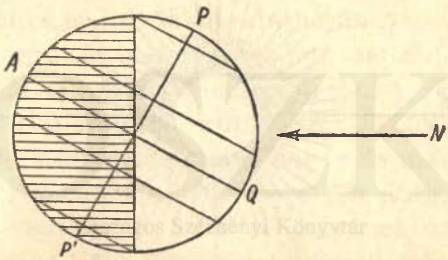
155. ábra. A Föld állása a négy évszakban.

lefolyása alatt zenithjébe kapja a Napot, a két pólus számára pedig a horizontban jelenik meg. A 157. ábra a nyár kezdő pillanatát ragadja meg. A nap és éj határa $23\frac{1}{2}^0$-nyi szögletet képez a Föld tengelyével, a merőleges fénysugár az északi térítőt találja. Ebben tehát a Nap a zenithben jelenik meg, az északi poláris öv teljességében fényben úszik, a délit épp oly teljesen éj borítja. Az aequator alatt természetesen most



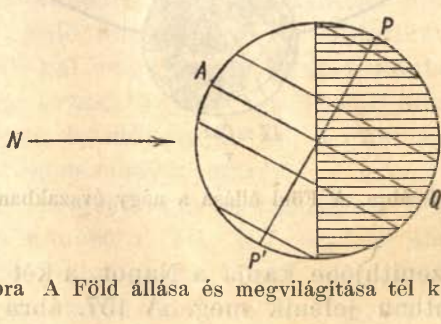
156. ábra. A Föld állása és megvilágítása tavasz és ősz kezdetén.

is éj és nappal egyenlő, az északi féltekén minden parallelkör nappali íve, a déli félgömbön éjjeli íve a nagyobb. Félév mulva



157. ábra. A Föld állása és megvilágítása nyár kezdetén.

Nap és Föld a 158. ábrában rajzolt állásba jut egymáshoz. A Föld fényhatára most is $23\frac{1}{2}^0$-nyi szögletet képez a ten-



158. ábra A Föld állása és megvilágítása tél kezdetén.

gelylyel, de fekvése ellentétes. Az északi poláris kör minden pontja felett éjjel van, a déli pedig állandóan nappalt élvez. A Nap a déli térítő zenithjében jelenik meg és a déli parallelkörök nagyobb része esik a nappali, az északi parallelák nagyobb íve az éjjeli oldalba.

A nap és éjjel határával együtt vándorol a Föld felületén a merőlegesen beeső napsugár (melynek meghosszabbítása a Föld középpontját érné) egy évnek lefolyása alatt, előidézve időbeli változásaival az évszakokat, térbeli változásával a melegöveit.

XXXVI. FEJEZET.

Az égi testek távolságai. Parallaxis.

Az állócsillagoknak a Coppernicus-féle rendszer által követelt évi parallaxisa természetesen semmiféle viszonyban vagy rokonságban nem áll az úgynevezett napi parallaxissal, mely tisztán annak folyománya, hogy a Föld méretei nem elenyésző kicsinyek némely égi test távolságához képest. Mindkét parallaxisnak csak azon közösségük van, hogy mindkettőből vezethető le az égi test távolsága. Noha eddig is felhasználtuk a parallaxist a fogyatkozásoknál és a csillagászati megfigyelések reductiójánál, mindeddig nem volt szó azok meghatározásáról.

Ha a Föld középpontjából észlelhetnők az égi testek magasságát, akkor a 71. ábra szerint egy és ugyanazon S pontnak egyidejűleg a Föld felületén és középpontjában mért magasságának külömbsége a p magassági parallaxis volna, mely a már levezetett $p = \pi \cos h'$ vonatkozás folytán könnyen számítható át horizontális, illetve horizontális aequatoriális parallaxissá. A tényleges eljárást a 159. ábra mutatja; lényegesen a Föld felületén is távolságmeghatározásokra alkalmazott triangulatióval azonos.

Két ugyanazon meridiánon lehetőleg távol fekvő A és B helyen figyeljük meg a csillag S egyidejű magasságát, tehát legkényelmesebben delelési magasságát. A delelés a meridián azonossága folytán természetesen mindkét helyen ugyanazon időben történik. Legyen a zenithtávolság a két helyen z és z′, a két hely geographiai szélessége φ és φ', akkor az AFBS négyszögben 3 szög ismeretes és a két hely magassági parallaxisának összege $p + p'$ számítható; ugyanis:

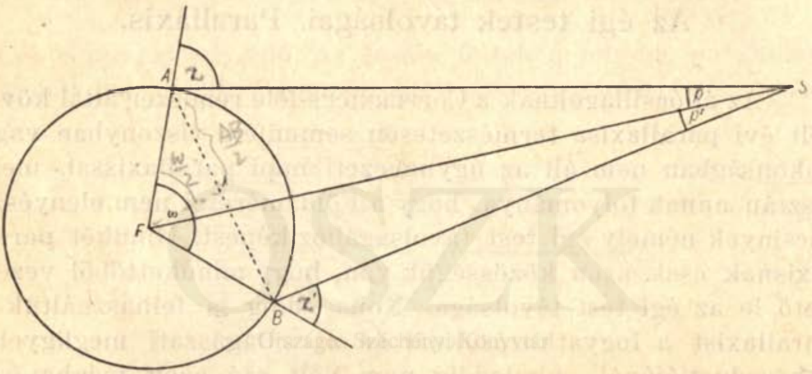
$$p + p' = z + z' - \omega, \text{ hol } \omega = \varphi + \varphi' \; ? \; \varphi - \varphi'$$

és ez összeg nyilván AB húr parallaxisával egyenlő. Mivel ennek hosszát r és ω szögletből kiszámíthatjuk:

$$AB = 2\, r \sin \frac{\omega}{2},$$

$\frac{AB}{2} = r \sin \frac{\omega}{2}$

megállapíthatjuk a földsugár, illetve az aequator sugarának parallaxisát is. Minthogy (a sinusokat most nem cserélve fel ívekkel) volt:



159. ábra. Közeli égi testek parallaxisának meghatározása.

$$\sin p = \sin \pi \cos h = \sin \pi \sin z \,; \text{ és } \sin p' = \sin \pi \cos h' = \sin \pi \sin z',$$

áll következésképen

$$\frac{\sin p'}{\sin p} = \frac{\sin z'}{\sin z}.$$

Az egység levonása és hozzáadása által, s a nyert két egyenlet elosztása után:

$$\frac{\sin p' - \sin p}{\sin p' + \sin p} = \frac{\sin z' - \sin z}{\sin z' + \sin z},$$

vagy kellő összevonás után:

$$\operatorname{tang} \frac{p' - p}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{z' - z}{2}}{\operatorname{tang} \frac{z' + z}{2}} \operatorname{tg} \frac{p' + p}{2}.$$

Ámde $\frac{p'+p}{2}$, és annál inkább $\frac{p'-p}{2}$ mindig kis szög, mely még a Hold esetében is csak ritkán éri el a fél fokot; ha tehát tangense helyébe az ívet teszszük, lesz:

$$p'-p=(p'+p)\frac{\operatorname{tang}\frac{z'-z}{2}}{\operatorname{tang}\frac{z'+z}{2}},$$

a mi a már előbb talált $p'+p$-vel együtt egyenként p-t és p'-t is adja. Most már $p=\pi \sin z$-vel számítható az észlelőhely horizontális parallaxisa, a csillag $D=206\,264{\cdot}8\frac{r}{\pi}$ távolsága és nyilván az aequatoriális parallaxis is. Ha ugyanis az aequator sugara a, az aequatoriális horizontális parallaxis π_0, akkor nyilván $D=206\,264{\cdot}8\frac{a}{\pi_0}$ lévén:

$$\pi_0=\pi\frac{a}{r}.$$

Ezen eljárás nem változik, ha a Földet a gömbalaktól eltérőnek, pl. sphaeroidnak tekintjük. Ekkor az A hely sugara r, B helyé r', mindkettő pedig, mint később látni fogjuk, a két hely geographiai coordinátáiból számítható, tehát ismeretes. Az egész külömbség most csak abban fog állani, hogy az AB húrt, melyre különben szükségünk sincs, nem az előbb adott képletből, hanem

$$\overline{AB}^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\omega$$

egyenletből fognók számítani. φ és φ' helyébe most is a geographiai hosszúságot teszszük, csakhogy akkor az F pont már nem a Föld középpontjára vonatkozik, hanem azon pontra, melyben az A és B hely függélyese egymást metszi. Tehát az r és r' kiszámítása bonyolódik valamivel.

A leírt közvetlen módszer különösen a Hold esetében kecsegtet sikerrel, mert ennek nagy közelsége miatt a parallaxis elég tetemes. Tisztán ezen czélra épült eredetileg a jóreménységfoki csillagda. — Először alkalmazta a módszert 1752-ben Lalande Berlinben és Lacaille a Cap-on, mely két csillagda igen közel ugyanazon meridiánon fekszik. Az egyidejű mérések eredménye:

A Hold zenithtávola Berlinben: $z = 32^0\ 4'\ 48''$; $\varphi = +52^0\ 31'\ 13'$
Cap városban: $z' = 55^0\ 42'\ 48''$; $\varphi' = -33^0\ 56'\ 3''$

Tehát $\omega = 86^0\ 27'\ 16''$ és $z + z' = 87^0\ 47'\ 36''$; $p' + p = 1^0\ 20'\ 20''$.

Egyenleteink szerint:

$$p' - p = \frac{\operatorname{tg}(11^0\ 49'\ 0'')}{\operatorname{tg}(43^0\ 53'\ 48'')} \times 1^0\ 20'\ 20'' = 8'\ 44''$$

és ennélfogva $p = 31'\ 26''$; $p' = 48'\ 54''$.

Tovább számítva

$$\pi = \frac{p}{\sin z} = \frac{31'\ 26''}{\sin(32^0 4' 48'')} = 59'\ 11'' \text{ és } D = \frac{r}{\pi}\, 206\ 264{\cdot}8 = 58{\cdot}09\ r.$$

A földsugár Berlinben 6364·664 km., az aequatori sugár 6377·397 km., tehát a Hold aequatori horizontális parallaxisa a megfigyelés pillanatában

$$59'\ 11'' \times \frac{6377{\cdot}397}{6364{\cdot}664} = 59'\ 18''.1.$$

Ha tudjuk, hogy a megfigyeléskor a Hold látszó sugara 16′ 8″.4 volt, akkor könnyen kiszámíthatjuk a középes parallaxist is. E sugár ugyanis 14′ 43″.9 és 16′ 46″.5 között váltakozhatik, és mivel a távolságok visszás arányban állanak a látszó sugarakkal, a legnagyobb és legkisebb távolság

$$\frac{968{\cdot}4}{883{\cdot}9} D = 63{\cdot}643\ r \text{ és } \frac{968{\cdot}4}{1006{\cdot}5} D = 55{\cdot}891\ r$$

lehet. A középérték 59·767 r, vagy aequatori sugarakban 59·64 a, a mihez $\pi_0 = 57'\ 38''.6$ közép horizontális aequatori parallaxis tartozik.

Számos megfigyelésből vezette le Hansen a pontosabb értéket; e szerint a Hold középtávolságában 15′ 34″ látszó sugár mellett a horizontális aequatori parallaxis 57′ 2″.06, a mi 60·2778 aequatorsugárnyi, vagyis 384 460 km.-nyi távolságnak felel meg.

Már előbb találtuk, hogy az aequatori horizontális parallaxis és az égi test látszó sugarának viszonya állandó; volt ugyanis (72. ábra)

$$\frac{\pi}{\rho} = \frac{r}{R}.$$

Ezen viszony a Hold számára $\frac{57'\,2''}{15'\,34''} = 3{\cdot}6638$ vagy közel $3^2/_3$, s a parallaxis állandója nevét viseli. Ez állandó segítségével a Holdnak könnyen meghatározható látszó sugarából megállapíthatjuk a távolságát, vagy a horizontális aequatori parallaxist. Ugyanis

$$\pi = 3{\cdot}6638\,\rho, \text{ és } D = \frac{206\,264{\cdot}8}{3{\cdot}6638}\,\frac{r}{\rho} = \frac{56\,300\,r}{\rho}.$$

A Hold mindenkori horizontális aequatori parallaxisa tehát látszó sugarának $3^2/_3$-szorosa, és a Földtől való aequatorsugarakban kifejezett távolsága 56 300-nek és a másodperczekben kifejezett látszó sugárnak quotiense. De a fenti viszony egyszersmind $\frac{r}{R}$-rel, a Föld és Hold valódi sugarainak viszonyával is egyenlő; ebből

$$R = \frac{r}{3^2/_3} = \frac{3}{11}\,r = 1739 \text{ km.},$$

úgy hogy a Hold sugara $\frac{3}{11}$-ed földsugárral, vagy 1739 km.-rel egyenlő.

Most már a Hold közepes pályasebessége is számítható; másodperczenként 0″.549 015-nyi ívet fut be középben, a mi ezen középsebességnek megfelelő 384 170 km.-nyi távolságban 1·023 km.-t tesz ki. Legnagyobb sebessége a perigaeumban 1·143, legkisebb sebessége a földtávolban 0·917 km.

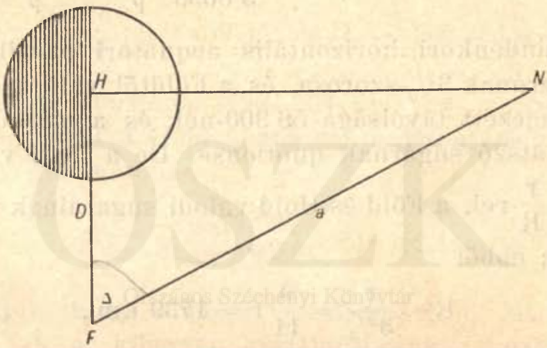
Ugyanezen módon határozható meg a Vénus, a Mars és a Földet jobban megközelítő asteroidák parallaxisa. Csakhogy ekkor a parallaxis kis értéke mellett nem fogunk absolut zenithtávolságméréseket eszközölni, hanem e helyett inkább úgynevezett relativ mérésekkel élünk, meghatározva a csillag helyét és fekvését közel álló állócsillaghoz képest. Ezen eljárás kis mennyiségek leméréseben mindig nagyobb pontosságot nyujt.

A Kepler-féle harmadik törvény értelmében a bolygók keringési idejének négyzetei ugyanazon arányban állanak, mint a Naptól való középtávolságok köbei. Ha tehát a Föld távolságát egységül veszszük a bolygórendszer méreteinek kifejezésében, akkor egy T nap siderikus keringési idővel bíró bolygó közép naptávolsága egyszerűen:

$$R = \frac{T^{2/3}}{365{\cdot}256\,358^{2/3}}$$

quotiens által van adva. Ily módon egyszerű időmeghatározás a relativ távolság igen pontos ismeretéhez vezet.

Az évi parallaxis az állócsillagok távolságát ugyancsak a Nap-Föld távolságaiban fejezi ki. Annál fontosabb természe-



160. ábra. Aristarchos eljárása a Nap parallaxisának meghatározására.

tesen a hosszegység pontos ismerete, azaz a Nap parallaxislemérése, mely ezenkívül a Nap egyéb méreteinek megismerésére is vezet.

A naptávolság meghatározására már samosi Aristarchos geniális és elvileg egészen helyes módszert gondolt ki, melyet a 160. ábra értelmez. Azon pillanatban ugyanis, melyben a fényhatár a Holdat felezi, a Nap, Föld és Hold ez utóbbi középpontjában derékszögű háromszöget képez, melynek egyik D oldala, a Föld és Hold távolsága, már a régiek előtt is eléggé ismeretes volt. Ha e pillanatban még megmérjük a Hold és Napnak szögtávolságát, azaz az F-nél lévő szöget, akkor a Nap távolsága könnyen számítható.

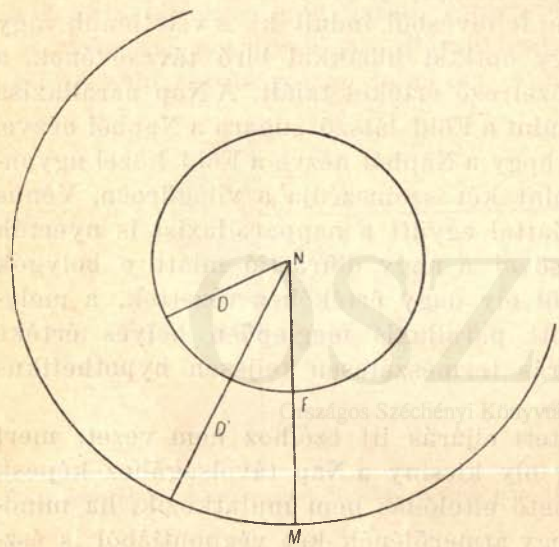
Aristarchos ily módon azt találta, hogy a Nap 19-szer van távolabb, mint a Hold, holott az igazi távolság több mint

20-szor nagyobb. A siralmas eredmény oka, hogy nem állapítható meg pontosan ama pillanat, melyben a fényhatár éppen a Hold középpontján megy át. Itt a távcső használata sem segíthet, mert benne az éj és nappal elválasztó vonala a holdfelület egyenlőtlenségei miatt még kevésbbé hasonlít egyenes vonalhoz. Az F szöglet a valóságban csak 8′ 53″-czel különbözik a derékszögtől, holott ARISTARCHOS 3^0 1′-nyi külömbséget talált. Mindazonáltal ezen eredmény egészen KEPLER idejéig talált hitelt, s KEPLER, noha a Napot sokkal távolabb állónak sejtette, sem volt képes helyébe jobbat tenni.

HUYGENS merőben feltevésből indult ki, s véletlenül, vagy helyesebben hála nagy optikai hibákkal bíró távcsövének, a valósághoz nagyon közel eső értéket talált. A Nap parallaxisa ugyanis nem egyéb, mint a Föld látszó sugara a Napból nézve. Ha tehát feltehetnők, hogy a Napból nézve a Föld közel ugyanakkorának látszik, mint két szomszédja a világürben, Vénus és Mars, akkor ez adattal együtt a napparallaxist is nyertük volna. HUYGENS távcsövei a nagy diffractió miatt e bolygók korongjának véletlenül oly nagy értékéhez vezettek, a melyből a 10″-re számított parallaxis meglepően helyes értéke következett. Az eljárás természetesen teljesen hypothetikus és így megbízhatatlan.

A Holdnál követett eljárás itt czélhoz nem vezet, mert minden földi távolság oly kicsiny a Nap távolságához képest, hogy biztosan lemérhető eltolódás nem mutatkozik, ha mindjárt a Napot a Föld egy átmérőjénék két végpontjából is észlelnők. A Nap parallaxisa ugyanis egyenlő azon eltolódással, melyet valamely 1800 m. távolságban álló tárgy mutat, ha felváltva jobb és bal szemmel figyeljük, vagy egyenlő egy milliméternyi vonal látószögével 23 m. távolságban. És mivel a távolság a parallaxissal visszás arányban áll, következik, hogy ez annál pontosabban határozandó meg biztos távolsági adat nyerése végett, minél kisebb. Ha pl. a Hold parallaxisát, mely 3420″-czel egyenlő, 1″-czel hibásan határoznók meg, a Hold távolságát is $\frac{1}{3420}$-dal, azaz 112 km.-rel hibásan kapnók; ugyanezen hiba a napparallaxisban a Nap távolságát körülbelül $\frac{1}{9}$-del, azaz $16\,{}^3/_4$ millió kilométerrel hamisan adná.

Azonban a KEPLER-féle harmadik törvény ezen bajból is kisegít; ha ugyanis valamely bolygónak sikerült megállapitani távolságát a Földtől, akkor a Napét is számíthatjuk. Tekintettel erre és az aberratióra vonatkozólag mondottakra, két útunk van ezen fontos csillagászati állandó megállapításában: vagy megállapítjuk közvetlen mérésekből a fényterjedési sebességet és ennek segélyével az aberratió állandóból vagy a fényidőből a Nap távolságát, vagy pedig közvetlenül lemérjük egy a Földet megközelítő bolygó parallaxisát. Az utóbbi eljárásban vagy a Mars, vagy valamely apró bolygó oppositióját alkalmazhatjuk (161. ábra) — ekkor a bolygó legközelebb áll a Földhöz és éjfélkor delelvén, legkényelmesebben figyelhető — vagy pedig a Mercur és Vénus azon alsó — tehát hozzánk szintén legközelebb eső — conjunctióit használhatjuk fel, melyben a bolygók a Nap korongja előtt elvonulnak.



161. ábra.
Mars távolsága a Földtől oppositiója alkalmával.

Vannak azonkívül még indirectebb módszerek is, melyekre a tárgy fontosságára való tekintetből szintén röviden rátérek.

A Jupiter-holdak fogyatkozásaiból a fény időértéke $493^s.2$, másrészt meg a fény sebessége Fizeau szerint (1849) 315 000, Foucault (1862) szerint 298 000, Cornu (1876) szerint 300 400, Michelson (1880) szerint 299 944, Young és Forbes (1882) szerint 301 382 km. másodperczenként. A középérték nagyon közel áll 300 000-hez s ezért a Nap távolsága $493{\cdot}2 \times 300\,000$ kilométer, a mi

$$\pi = 206\,264{\cdot}8 \frac{a}{D}$$

egyenlet értelmében, hol a a Föld aequatori sugarát jelenti, 8″.89-nyi parallaxisnak felel meg.

A parallaxisnak az aberratió állandóból való levezetése azon feladat megfordítása, melyet röviden ezelőtt oldottunk meg. Ha ugyanis D a Nap távolsága, T a siderikus év tartama másodperczekben, akkor a Föld lineáris sebessége

$$v = \frac{2 \times 3{\cdot}1415 \ldots D}{T},$$

tehát az aberratió állandója, ha V a fény sebességét jelenti:

$$\alpha = 206\,264{\cdot}8 \frac{v}{V}.$$

A kellő értékek behelyettesítése után és D-t a parallaxis által fejezve ki, lesz:

$$\pi = \frac{2 \times 3{\cdot}1415 \ldots \times (206\,265)^2 a}{\alpha . V . 365{\cdot}25637 \times 24 \times 60 \times 60}.$$

Ha a = 6378 km., $\alpha = 20''.445$ és V = 300 000 km., akkor a Nap parallaxisa számára $\pi = 8''.81$-et nyerünk.

Mivel a fény terjedési sebessége, az aberratió-állandó, vagy a Jupiter-holdak fogyatkozásai bármikor elég pontosan és kényelmesen meghatározhatók, úgy módunkban áll a Nap parallaxisát is bármikor és a megfigyelések tetszőleges halmozásával meghatározni.

A Mars parallaxisát legelőször Richer mérte meg 1672-ben Cayenneben, míg Párisban egyidejűleg Picard és Römer végezték mérésüket. Ezek abban állottak, hogy Mars oppositiója körül épp úgy, mint a Holdnál, megállapították a Mars zenithtávolságát. A parallaxist $25\,^1/_3{}''$-nyinek találták. Ha a Föld és Mars középtávolságát a Naptól D és D′-vel, évüket T és T′-vel jelöljük, akkor a 3-ik Kepler-féle törvény értelmében

$$\frac{D'}{D} = \left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3}$$

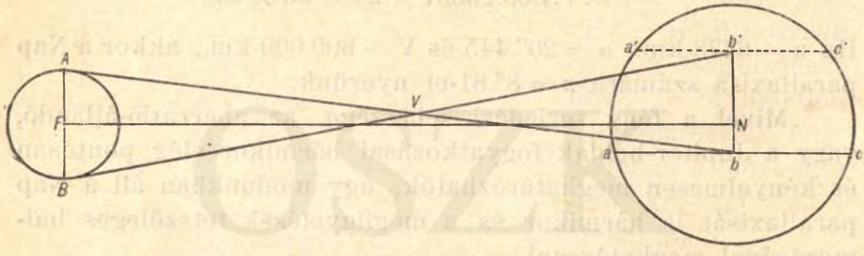
quotiens ismeretes. Ámde az oppositió pillanatában (ld. 161. ábrát) a Marsnak a Földtől való távolsága D′ — D. Ha tehát a Mars parallaxisát π'-vel jelöljük, áll:

$$D' - D = 206\,264{\cdot}8 \frac{a}{\pi'}; \quad \pi = 206\,264{\cdot}8 \frac{a}{D'},$$

mely utóbbi egyenlet a két első segítségével most már könynyen megoldható. A megfigyelés pillanatában $D' - D = 0{\cdot}372$ volt a naptávolság egységeiben kifejezve. Az egységnyi távolságban tehát a parallaxis $25^1/_3 \times 0{\cdot}372 = 9''.42$, s ez a keresett napparallaxis. Ez volt e fontos adatnak első megbízhatóbb meghatározása, mely a Picard-féle fokméréssel együtt már a Nap távolsága számára is elég közelített értéket adhatott.

Winnecke tervezete szerint felhasználták Marsnak 1862-iki nagyon kedvező oppositióját is, a mennyiben e bolygót mindkét félteke számos csillagvizsgálója észlelte. Hasonlóképen felhasználták Galle utasításai szerint 1873-ban, illetve 1874-ben a Flora és Juno kis bolygók oppositióját, melyek ekkor a Földhöz nagyon közel jártak.

A napparallaxis meghatározásának klassikus módszere



162. ábra. Vénus-átvonulás.

azonban a Vénus átvonulása volt alsó conjunctiója alkalmával. Ennek köszönjük az első pontos ismeretét ezen alapvető adatnak. És noha a két utolsó átvonulás 1874. és 1882-ben nem járt a pontosságnak várt fokozásával, s a módszer ismétlésére a jövő században sem lesz alkalom, sőt a csillagászok e módszert a már felemlítettek kedvéért a jövőben talán kevesebbre is fogják becsülni, még sem mellőzhetjük hallgatással.

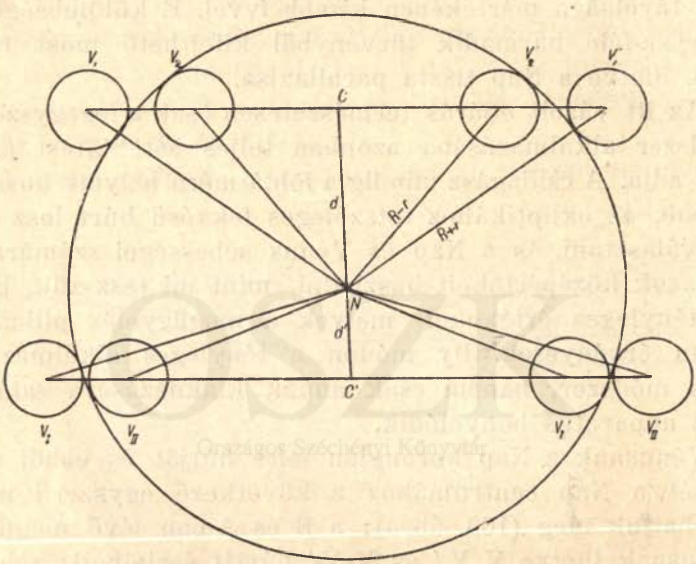
A Mercur és Vénus átvonulása alkalmával apró fekete korong képében jelenik meg a fényes Nap tányérján. Helymeghatározása a Nap középpontjához tehát igen nagy pontossággal, s mint látni fogjuk, pusztán időmeghatározás alapján is eszközölhető. Hogy e helymeghatározás miként vezet a parallaxis ismeretére, azt ábrázolja a 162. ábra.

Képzeljük (162. ábra), hogy két megfigyelő A és B-ben, az ekliptikára merőleges földátmérő végpontján figyeli a Vénus V átvonulását a Nap korongján. A bolygó minden észlelő számára egy, pályájával párhuzamos húrt fog leírni, melyet a Vénus csekély, még 3^0 30′-et sem tevő pályahajlása folytán, az ekliptikával párhuzamosnak tekinthetünk. A két megfigyelő azonban a húrt a Napnak nem ugyanazon pontjában fogja látni, hanem az északibb megfigyelő délre, a déli megfigyelő északra eltolva. Az eltolódás nyilván nem más, mint a Vénus és a Nap kétszeres parallaxisának különbsége: mert hiszen a Vénussal együtt tolódik el maga a Nap is, csakhogy nagyobb távolsága mértékében kisebb ívvel. E külömbségből és a Kepler-féle harmadik törvényből kifejthető most már a Vénus, illetve a Nap tiszta parallaxisa.

Az itt vázolt eljárás természetesen csak a legegyszerűbb, a módszer alkalmazásába azonban teljes betekintést engedő esetet adja. A csillagász mindig a földátmérő helyett hosszabb-rövidebb, az ekliptikához tetszőleges fekvésű húrt lesz kénytelen választani, és a Nap és Vénus sebességei számára sem fogja azok középértékeit használni, mint mi teszszük, hanem azon tényleges értékeket, melyek a megfigyelés pillanatára valóban érvényesek. Ily módon a tényleges alkalmazásban nem a módszer, hanem csak annak kiaknázására való számolási apparatus bonyolódik.

Vénusnak a Nap korongján leírt húrját és ebből e húr fekvését a Nap centrumához a következő egyszerű módon állapíthatjuk meg (163. ábra): a B és A-ban lévő megfigyelő a Vénusnak illetve $V_1 V_1'$ és $V_I V_I'$ húrját észlelheti; a bolygó a Nap keleti (bal) szélén lép a korongba. Jól járó és járására a megfigyelés előtt és után külön időmeghatározásokkal megvizsgált órával figyeljük a Vénus külső és belső érintését a belépésnél és ugyanazon momentumokat a kilépés alkalmával. A két egymásnak megfelelő időkülömbség adja azon időt, mely alatt a Vénus a $V_1 V_1'$, illetve a $V_2 V_2'$ húrt írta le. A külső, illetve belső érintésnek megfelelő húr ugyan túlságosan nagy, illetve kicsiny, de annak a Nap korongjának centrumától való távolsága, mely itt dönt, változatlan marad.

A Vénus és Föld csillagászati táblázatai adják ennek a bolygónak és a Napnak relativ mozgását minden pillanatban. Mi, a kik a vénusátvonulásról általában szólunk, természetesen csak középszámokkal élhetünk. A Napról nézve a Vénus napi mozgása 5768″, órai mozgása tehát 240″; a Földé 3548″, illetve óránként 148″. A Vénus tehát a Földet óránként 240 — 148 = 92 ívmásodperczczel előzi meg. A Földről nézve azonban e mozgás 2·6-szor nagyobb, mert ennyiszer áll közelebb a Vénus hozzánk, mint a Naphoz. A Vénus közép naptávolsága ugyanis 0·72333, a Földé = 1. E távolságok kevéssé változnak, mert a földpálya excentrumossága $\frac{1}{60}$, a Vénusé még ennyi sem. Az alsó conjunctió alkalmával a Vénus távolsága a Földtől tehát 0·27667, s így a Vénus távolsága a Földtől és Naptól az át-



163. ábra. Vénusnak a Nap korongján leirt húrja.

vonulás pillanatában $\frac{0{\cdot}27667}{0{\cdot}72333} = \frac{1}{2{\cdot}6}$ arányban áll egymással. 92″ relativ mozgás helyett tehát $92 \times 2{\cdot}6 = 239''$-nyi mozgásunk van óránként, vagy kikerekítve 4′-nyi órai vagy 4″-nyi perczenkénti mozgásunk van. Mivel a Nap látszó mozgása ugyanaz, mint a Föld való mozgása, azért a Vénus a nyugvó Naphoz képest perczenként 4″-nyi utat tesz. Ha tehát a külső és belső érintkezések perczekben kifejezett időkülömbsége τ és τ' az egyik; τ_1 és τ_1' a másik állomásra vonatkozólag, akkor

$$2\,h = 4''\tau\,;\; 2\,h' = 4''\tau'\,;\; 2\,h_1 = 4''\tau_1\,;\; 2\,h_1' = 4''\tau_1'$$

adja a megfelelő húrok hosszát.

Legyen a Nap és Vénus látszó sugara az átvonulás idejekor R és r, akkor a külső érintkezéskor a két égi test középpontjának távolsága $R + r$, a belső érintkezés alkalmával $R - r$ leend. Ha a húr távolságát a Nap középpontjától még d-vel jelöljük, akkor VNC derékszögű háromszögben áll:

$$d^2 = (R + r)^2 - h^2 \text{ és } d^2 = (R - r)^2 - h'^2$$

a külső és belső érintkezés pillanatában a B állomásra, vagy a felső húr számára; az alsó húr számára analog egyenlet állván, lesz a két húr egymástól való távolsága:

$$d \pm d' = \sqrt{(R+r)^2 - h^2} \pm \sqrt{(R+r)^2 - h_1{}^2}$$
$$= \sqrt{(R-r)^2 - h'^2} \pm \sqrt{(R-r)^2 - h'_1{}^2},$$

hol a felső vagy alsó jel veendő, a szerint, a mint mindkét húr a Nap korongjának különböző vagy ugyanazon felében fekszik. Noha a Vénus érintkezése a Nap szélével elég jól figyelhető jelenség, a külső és belső érintkezés húrjának távolsága a Nap középpontjától az elháríthatatlan megfigyelési hibák miatt mégis eltérő leend. A további számításban tehát a két érintkezésből számított távolság közepesét vehetjük.

A két párhuzamos húr távolsága $d \pm d'$ természetesen szintén merőleges az ekliptikára és ezért az AB földátmérővel párhuzamos. A 162. ábrából következik tehát, hogy az AB földátmérő és a két húr vonalos távolsága ugyanazon arányban áll, mint a Vénus távolsága a Földtől és a Naptól. De a bb′ vonal látószöge a Földről nézve az előbb talált $d \pm d'$. A földátmérő látószöge a Napról tehát $\frac{0{\cdot}27667}{0{\cdot}72333}(d \pm d') = \frac{d \pm d'}{2{\cdot}6}$ és ezért a Nap parallaxisa $\frac{d \pm d'}{5{\cdot}2}$. A módszer legnagyobb előnye, hogy a két húr távolságában elkövetett hiba 5-szörös kicsinyítésben megy át a parallaxisba.

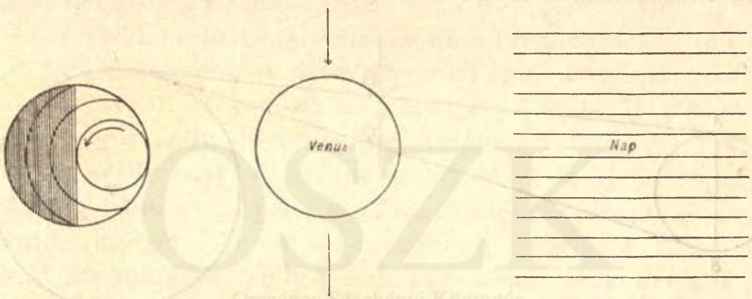
A Mercur-átvonulások nem adnak ily kedvező eredményt. A Mercur távolsága a Naptól felszálló és leszálló csomójában tekintélyes excentrumossága folytán elég változó, t. i. 0·314 és 0·452 illetőleg. A Földtől való távolságok az alsó conjunctió pillanatában tehát illetve 0·686 és 0·548. E távolságok viszonya

$\frac{686}{314} = 2{\cdot}18$ és $\frac{548}{452} = 1{\cdot}21$ és ugyane viszonyban áll a földátmérő a két húr távolságához a napkorongra nézve. Míg tehát a Vénus húrtávolságának leméréseben elkövetett hiba a parallaxisba 5-ször kisebbítve ment át, úgy itt 2·4—4·3-szor nagyítva fog általmenni. Noha tehát a Mercur-átvonulások sokkalta gyakrabban fordulnak elő, a parallaxis meghatározására mégis fontossággal alig bírnak.

Vegyük most azon esetet, melyben a két hely tetszőleges helyzettel bír. Ez esetben a két hely által megszabott húr az ekliptikát ferde szöglet alatt fogja metszeni, de nem e húr hossza dönt a tünemény létrejöttében, hanem kizárólag e húr vetülete az ekliptikára merőleges egyenesre, azaz a két hely legrövidebb távolsága az ekliptikától. Ennek kiszámítása semmi nehézséget nem okoz; rectascensió és declinatió ugyanis teljesen megfelel a Földön a geographiai hosszúságnak és szélességnek, és valamely helynek az ekliptikától való merőleges távolsága azonos e hely szélességével. Ugyanazon formulákkal, melyekkel rectascensióból és declinatióval az ekliptikai hosszúságot és szélességet számítjuk, számolhatjuk a két hely geographiai coordinátáiból azoknak ekliptikai távolságát is. És a szerint, a mint a két hely az ekliptikának ugyanazon vagy különböző oldalán fekszik, e két távolság külömbsége vagy összege veendő. E merőleges távolság játsza most a továbbiakban ugyanazon szerepet, mint előbb a földátmérő; nevezetesen tehát a két húr távolságához szintén az 1 : 2·6 viszonyban álland. A parallaxis, azaz a földátmérő fél látószöge a Napról nézve most úgy aránylik a húrok távolságához, mint a földátmérő maga a két hely ekliptikai távolságához. A miből következik, hogy az átvonulás megfigyelésében elkövetett hiba most nagyobb mértékben fogja befolyásolni az eredményt, mint ezelőtt. Sőt, ha mindkét hely az ekliptika síkjában fekszik, akkor a módszer teljesen hasznavehetetlenné válik, a mennyiben akkor a két húr egymásra vetül, távolságuk tehát 0-val válik egyenlővé.

A mondottakon kívül az eddig teljesen mellőzött földforgás is hoz be újabb bonyodalmakat (ld. 164. ábra). A vénusátvonulások ugyanis a két solstitium közelében jönnek létre, mint később látni fogjuk, s ekkor a Nap egyidőben az északi vagy déli pólus mindkét oldalán látható. A Vénushoz közelebb fekvő helyek azonban a földforgás következtében a Vénussal ellentétes iránynyal bírnak, ennek relativ mozgását nagyobbítják és az átvonulás rövidebb ideig tart. Azon helyek ellenben, melyek a pólus ellentett oldalán feküsznek, a Vénussal együtt haladnak, s ezért ezek számára a tünemény hosszabb tartamú leend. Ezen körülmény nem mellőzhető tekintetbevétele az amúgy is bonyolódott számítást természetesen még áttekinthetetlenebbé teszi.

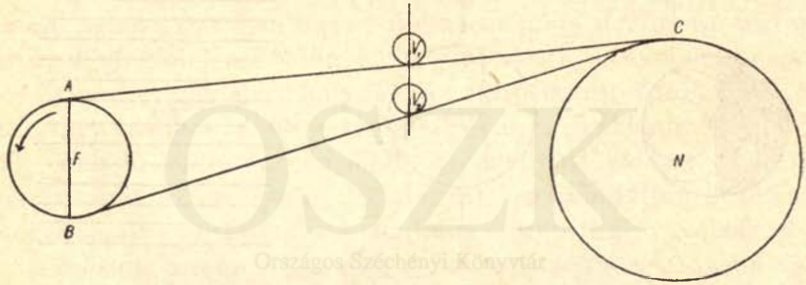
A centrális átvonulás közepes tartamát megkapjuk, ha a Vénus átmérőjétől eltekintve, a Nap átmérőjét elosztjuk a Vénus relativ mozgásával; amaz 32′, emez 4′ óránként. E tar-



164. ábra. A földforgás befolyása a Vénus-átvonulás tartamára.

tam tehát 8^h és így általában a nem centrális átvonulás is órákig eltart. Előnye tehát a módszernek másodsorban az is, hogy a húrok kis távolságát igen hosszú időközök tartamával mérjük. A két húr távolsága a legkedvezőbb esetben is csak 5-ször akkora lehet, mint a napparallaxis, tehát legfölebb 44″, a mi kisebb, mint a Vénus átmérője (62″ alsó együttállásában) és kevesebb, mint a napátmérő 40. része. A módszer a legkedvezőtlenebb, ha a húrok közel esnek a Nap középpontjához, mert akkor ugyan az időközök nagyok, de a két húr hosszának külömbsége kicsiny és bizonytalan. Ilyen átvonulás fellép, ha a Vénus nagyon közel áll alsó conjunctiója alkalmával egyik pályacsomójához.

Más módon is számítható még a napparallaxis a Vénus átvonulásából, mint ezt Delisle fejtette ki (165. ábra). Ha ugyanis F a Föld, V a Vénus és N a Nap, és AC, BC a Föld és Nap közös érintői, akkor az A hely, mely számára a Nap éppen lenyugvóban van, a Föld minden helyénél előbb észlelheti a Vénus külső érintkezését a Nap szélével, ha e bolygó az AC érintő vonalba lép. Bizonyos idő mulva a Vénus V_2-ben a BC érintőt éri, és ekkor B azon hely, mely valamennyi között napkeltekor utolsónak látja a Vénus külső érintését a belépés alkalmával. Ha tehát megfigyeljük azon időpillanatokat, melyben két kelet-nyugot irányban fekvő hely napnyugta és keltekor illetve legelőször és legutoljára látja a Vénus külső érintkezését a belépés alkalmával, akkor az időköz megfelel azon időnek, mely alatt a Vénus az ACB szöglettel egyenlő ívet futotta be. A Vénus relativ mozgása ismeretes lévén, kiszámítható maga e szöglet, mely nyilván a parallaxis



165. ábra. DELISLE módszere a Nap parallaxisának meghatározására.

kétszeresével egyenlő. Éppen úgy figyelhetők a pontosság növelése czéljából a belső érintkezés is, valamint a két érintkezés a kilépés pillanatában. Minthogy Vénus órai mozgása a Földhez képest 92″, a kettős parallaxis pedig 17″.7, azért ez időköz átlag $\frac{17\cdot 7}{92}$ órát vagy $11^m\,33^s$-t fog kitenni, ha a két hely egy földátmérő végpontjain fekszik, de megfelelőleg rövidebb lesz, ha e helyett a Földnek valamely kisebb húrját teszszük. A módszer pontossága a tüneménynek már rövidebb tartama miatt is sokkal kisebb, és hozzá jár, hogy az időmérésben elkövetett hibák sokkal kisebb osztóval mennek át az eredménybe.

Az előbb tárgyalt, és classikusnak mondott módszert HALLEY dolgozta ki, midőn 1677-ben Szt. Helenán egy Mercurátvonulást figyelt. A legközelebbi, 1761-ben történt átvonulást ennek megfelelőleg gondosan tanulmányozták, s ebből s a 8 évvel rá következőből vezette le ENCKE azon értéket, mely hosszú ideig a tudományban szerepelt.

Az újabb átvonulásokon a mérés mesterségének minden fortélyával észleltek. Az átvonulás ideje alatt jól meghatározott pillanatokban lefényképezték a Napot, és ugyancsak heliométerrel figyelték meg a Vénus helyzetét a Nap középpontjához képest. Az érintkezés pillanatában fellépő zavaró optikai jelenségekre (a két égi test széle jóval az érintkezés előtt és után összefolyik) külön e czélra készített modelleken készültek a csillagászok, a kik a költséges expeditiókban részt vettek. A mérési eljárásokat s minden megfigyelő teendőjét nemzetközi kongressus szabta meg.

A szabad szem ez átvonulásokból természetesen mit sem lát. A távcső felfedezése után az első Vénus-átvonulást KEPLER jósolta meg 1631. deczember számára; az 1639-ikit látták ugyan, de fontosságot a tüneménynek nem tulajdonítottak. Az 1761-iki átvonulás eredményei is gyérek, mert rossz időjárás és egyéb, magával a tüneménynyel összefüggő jelenség megakadályozta a pontos mérést. Annál szorgosabban készültek azután az 1769-iki átvonulásra, mely reánk nézve már csak azért is fontos, mert HELL MIKSA hazánkfia Vardőhusban észlelte. Számadatai meglepően pontosak, amaz időben azonban mérései elég méltatlanul nem dicséretet, hanem gáncsot hoztak. A parallaxis egyes értékei 8″.50 és 8″.84 között ingadoztak, és ENCKE végleg 8″.57-nek számította ki e fontos számadatot.

XXXVII. FEJEZET.

A Vénus-átvonulások feltételei.

A Vénus-átvonulás és a fogyatkozások analogiájára már rátaltam, és természetes, hogy létrejöttük feltételei is teljesen analogok. Ha a Vénus pontosan az ekliptikában keringene, akkor minden alsó conjunctió ilyen átvonulással, még pedig centrális átvonulással járna. Mivel azonban pályahajlása 3°23′.5, úgy a Vénus alsó együttállásakor többnyire a Nap felett vagy alatt halad el, megjelenik azonban korongja előtt, ha az együttállás elég közel történik az ekliptikához, azaz egyik pályacsomójához.

Az előbbi, a napfogyatkozásra érvényes képleteket felhasználva, mindenütt a Hold helyébe a Vénust fogjuk tenni és a számítást a közepes viszonyoknak megfelelőleg végezni. A Vénus közepes naptávolsága 0·72333, a Földé 1, tehát Vénus távola a Földtől alsó conjunctiója alkalmával 0·27667. A Vénus látszó sugara az egységnyi távolságban 8″·78, tehát az együttálláskor $\frac{8''\cdot 78}{0\cdot 27667} = 32''$, a Napé középben 16′ 2″. A Vénus parallaxisa ugyanakkora, mint sugara; mert a Földdel egyenlő nagyságú lévén, látszó sugara a Földről nézve ugyanaz, mint a Föld látszó sugara a Vénusról nézve. A Nap parallaxisát kerek számban 9″-nak véve, kapjuk a külső érintés pillanatában a két égi test középpontjának távolságát:

$$\triangle = R + r + p - \pi = 16' 57''$$

$$\text{és } \sin d = \frac{\sin \triangle}{\sin (3^0 23'.5)}\text{-ből: } d = 4^0\, 46'\, 50''.$$

A Földről nézve ily távolságon belül kell állania a Napnak a Vénus csomójától alsó conjunctió alkalmával, hogy átvonulás létrejöhessen. A Napból nézve ez ív $\frac{0\cdot 27667}{0\cdot 72333}$ arányban kisebb, tehát $1^0\, 49'.7$. Ha tehát a Föld Vénus alsó conjunctiója alkalmával távolabb áll a Vénus egyik csomójától, mint $1^0\, 50'$-re, akkor Vénus-átvonulás egyáltalában nem jöhet létre. A Föld közép napi mozgása 3548″.2 lévén, ez ívet 1·855 nap alatt futja be. S mivel a határ ugyanaz a csomó mindkét oldalán, a Vénus-átvonulás időbeli játszótere 3·71 nap a csomó mindkét oldalán.

A Vénus felszálló csomójának hossza $75^1/_2{}^0$, a leszálló tehát $255^1/_2{}^0$-nál fekszik a Nap középpontjából nézve. A Föld e pontokban deczember 7. és június 6-án áll, ennek következtében átvonulás a felszálló csomó körül csak az előbbi, átvonulás a leszálló csomóban csak utóbbi napon lehetséges, legfölebb 1 nap és $20^h\, 31^m$-nyi idővel előbb vagy utóbb.

A visszatérés periodusát ez esetben is Vénus synodikus és draconitikus éve adja. A Vénus és Föld siderikus keringése illetve 224·70 079 és 365·25 637 nap. A synodikus keringés tehát

$$\frac{365\cdot 25637 \times 224\cdot 70\,079}{365\cdot 25637 - 224\cdot 70\,079} = 583^d\cdot 92\,128 = 583^d\, 22^h\, 6^m\, 38^s.6.$$

Ezen idő alatt a Föld siderikus mozgása $575^0\ 31'\ 5''.31$. Vénus csomói sem állandók, hanem évente hátrálnak éppen úgy, mint a Hold, vagy az aequator csomója, az aequinoctium. E mozgás siderikusan véve $-17''.346$ egy év alatt. A synodikus keringés tartama alatt ez $-27''.735$-et tesz ki. A Föld relativ mozgása a Vénus csomójához tehát a két mozgás külömbsége, vagyis $575^0\ 31'\ 33''.05 = 575^0.52\,585$.

Azon időközök alatt, melyek számára a Földnek e mozgása a 180^0-nak egy egész számú sokszorosával egyenlő, a Föld a Vénus-pálya egyik vagy másik csomójában álland annak alsó együttállása alkalmával, Vénus-átvonulás tehát ismétlődni fog. A két szám visszonya tehát lehetőleg közel egész számok viszonya által fejezendő ki, mi czélból láncztörtbe való fejtést eszközlünk: Ámde

$$\frac{575{\cdot}52\,585}{180} = 3 + \frac{1}{5+}\frac{1}{14+}\frac{1}{1+}\cdots$$

a következő $\frac{16}{5}, \frac{227}{71}, \frac{243}{76}$ .. közelítési törtekkel.

Fokozódott pontossággal tehát a Vénus

5 synodikus keringése	= 16 fél körkerület	= 8	év
71 „ „	= 227 „	$= 113^1/_2$	„
76 „ „	= 243 „	$= 121^1/_2$	„

és az első viszonyt véve fel, a találkozás a félkerületek páros száma miatt ugyanazon, a többi két viszony esetében az ellenkező csomónál történik. E viszonyok hibái a következők:

5 syn. kering. $= 5 \times 575^0\ 31'.55 - 16 \times 180^0 = -2^0\ 22'.25$
ugyanazon csomótól.

71 syn. kering. $= 71 \times 575^0\ 31'.55 - 227 \times 180^0 = +2^0\ 20'.1$
a másik csomótól.

76 syn. kering. $= 76 \times 575^0\ 31'.55 - 243 \times 180^0 = -0^0\ 2'.1$
a másik csomótól.

Az első két viszony pontosságában alig van külömbség, és a hátramaradó hiba nagyobb, mint az átvonulás lehetséges határa $1^0\ 50'$. 8 év mulva egy átvonulás csak akkor ismétlődhetik, ha a megelőző nem pontosan a csomóban történt, hanem azon túl. Hasonlóan 71 synodikus keringés, azaz $113\frac{1}{2}$ év mulva átvonulás csak úgy jöhet létre, ha a megelőző ugyanannyival a csomó előtt ment végbe. De $121\frac{1}{2}$ év mulva a hiba kis voltára való tekintettel átvonulás biztosan ismétlődik. A két percznél valamivel nagyobb hiba természetesen idővel fokozódik, a conjunctiók a lehetséges határhoz közelednek, s akkor az átvonulás elesik. De elmaradhat már korábban a Vénus és Föld nem teljesen egyenletes mozgása folytán. Az eddig megfigyelt Vénus-átvonulások mind a hosszabb perioduson kívül a 8 évi ismétlést mutatják.

XXXVIII. FEJEZET.

Közvetett módszerek a napparallaxis meghatározására.

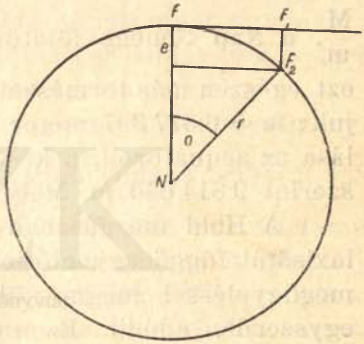
A kijelölt, már szintén nem közvetleneknek nevezhető methodusokon kívül még számos mással rendelkezünk, melyek a Nap távolságának ismeretéhez vezetnek. Mindannyian azon előnynyel bírnak, hogy bármely időpillanatban alkalmazhatók, s hogy ezen fontos állandónak eddig levezetett értéke számára szivesen látott igazolást adnak.

Egynéhányat ismertetni fogok ezen módszerekből, hangsúlyozva, hogy hasonló számításokat ismételni fogunk, ha a Föld nagyságának és alakjának csillagászati úton való meghatározásáról lesz szó.

A Hold — miként ezt a mechanika elveiből tudjuk — nem a Föld geometriai középpontja körül végezi keringését, hanem a Föld és Hold rendszerének közös súlypontja körül. Mivel a Hold tömege a Földének mintegy 81-edrészét teszi és a két test távolsága középben 384 460 km., azért a két égi testből álló rendszernek közös súlypontja $\frac{384\,460}{81+1} = 4688{\cdot}5$ kilométerrel esik a Föld geometriai centrumán túl. A Föld ezen súlypont körül ugyanazon időben mint a Hold, e testével hasonló ellipsist ír le. Mi, a kik e mozgást nem érezzük, azt fogjuk hinni, hogy a Nap a holdpálya síkjában egy hónap lefolyása alatt egy $6''.50$-nyi elongatióval bíró ingalengést végez, a mennyiben az adott szám ama súlyponttávolságnak, vagy a Föld ezen kis pályájának látszó nagysága a Napból nézve.

Ha tehát a Napnak a Hold egy siderikus keringése alatt lejátszó eltolódását tényleg megmérjük, akkor belőle viszont a Nap távolsága is meghatározható. Igaz, hogy ezen érték a keresendő parallaxisnál kisebb, de viszont meg tetszőlegesen gyakran megfigyelhető.

A Nap parallaxisa ugyancsak levezethető a földfelületi nehézség gyorsulásából. A Földnek mozgása a Nap körül a Nap vonzása és a Föld tehetetlenségéből tehető össze. Amannak lefolyása alatt a Föld az első másodperczben (166. ábra) az e mennyiséggel esik a Nap felé, emennek hatása alatt magára hagyatva az FF_1 egyenest futná meg. A tényleges út az átlóba eső FF_2. Ha a Föld szögsebessége, melyet az 1^s alatt befutott ív mér, θ, akkor



166. ábra.
A Föld esése a Nap felé.

$$e = r(1 - \cos\theta) = 2r\sin^2\frac{\theta}{2},$$

a mi helyett θ kicsinysége mellett bátran

$$e = r\frac{\theta^2}{2}\sin^2 1''$$

tehető. Ebben θ a siderikus év tartamából jól ismert mennyiség, tudniillik

$$\theta = \frac{360 \times 60 \times 60}{365{\cdot}25\,637 \times 24 \times 60 \times 60} = 0''.04\,107.$$

Ha a Nap tömege M, a Földé m, akkor a két égi testnek egymás felé való együttes e_0 esésének tudvalevőleg $\frac{M}{M+m}$-ed része hárul a Földre, míg $\frac{m}{M+m}$-szeresével esik viszont a Nap a Föld felé. A Nap e′ esése a Föld felé az első másodpercz alatt tehát a siderikus keringésből következő $e = e_0\frac{M}{M+m}$ esésnek $\frac{m}{M}$-szerese, vagyis

$$e' = \frac{m}{M}e = \tfrac{1}{2}\frac{m}{M}r\,\theta^2\sin^2 1''.$$

Ámde ez esés a Newton-féle törvény értelmében visszás arányban áll a Föld középpontjától való távolságok négyzetével. Az esés nagysága a Föld felületén, a Föld a sugara mellett tudvalevőleg $\frac{g}{2}$, a Nap r távolságában tehát $\frac{g}{2}\frac{a^2}{r^2}$. Ennek következtében

$$\frac{m}{M} r\, \theta^2 \sin^2 1'' = g \frac{a^2}{r^2},$$

vagy a parallaxist hozva be, $r = \frac{a}{\pi \sin 1''}$ egyenlet alapján

$$\pi^3 = 206\,264{\cdot}8 \frac{m}{M} \frac{a}{g} \theta^2.$$

$\frac{M}{m}$, a Nap tömege földtömegekben kifejezve 327 100, miként ezt egészen más természetű csillagászati megfigyelésekből tudjuk; $a = 6\,377\,397$ méter és g, a Föld tömegvonzási gyorsulása az aequatoron, a később tárgyalandó Listing-féle formula szerint 9·814 640 m. Mely értékekkel $\pi = 8''.84$ adódik.

A Hold mozgásában van egy, közvetlenül a Nap parallaxisától függő egyenlőtlenség; ha ennek nagyságát közvetlen megfigyeléssel megmérjük, akkor belőle a Nap távolsága is egyszerűen adódik. Ezen úton számították ki a napparallaxist és 8″.838 és 8″.848 között fekvő értékekhez jutottak.

Hasonló módon a Föld mozgásában is van egy a Hold befolyását tanusító tag, mely a Nap absolut távolságával összefügg. Miután e mozgás nagysága közvetlenül megfigyelhető, alakja pedig — mint az előbbi esetben is — az elmélet által adott, ez is szolgálhat a parallaxis levezetésére. A belőle talált érték több csillagdának megfigyelése szerint: 8″.809.

Látni való, hogy mindezen meghatározások legfőlebb a másodpercz századrészeiben különböznek és az általános közép, melyet Newcomb a két utolsó vénusátvonulás eredményeit még tekintetbe nem véve, az egyes methodusok megbízhatóságának mérlegelésével levezetett, $8''.848 \pm 0''.013$. A legvalószinűbb érték tehát 8″.848, annak valószinű bizonytalansága pedig nem nagyobb, mint az egész 0·00 147-ed része, vagy 0·147 %. E távolságnak megfelel kerek számban 23 300 aequatori földradius, vagy 148 ½ millió kilométer.

legujabb: 149½ mill. (Deseten)

E szám nagyságáról fogalmat nyerünk, ha meggondoljuk, hogy a fény, mely másodperczenként 300 000 km.-nyi utat tesz, $8\frac{1}{4}$ perczig van úton, míg a Napról hozzánk leér; az 500 m. kezdeti sebességét megtartó ágyúgolyó 9 év és 5 hónap alatt érné a Napot és az óránként 60 km.-t tevő vasúti vonat, mely a Földet 4 hétnél kevesebb idő alatt futná körül, 282 év és 4 hónapon át szakadatlanul haladhatna, míg a Napot elérné.

A Nap látszó, vagy a mi egyre megy, a Föld tényleges közepes pályasebessége, melyet már az aberratió alkalmával számítottunk, 29·552 km. másodperczenként, legnagyobb sebessége a periheliumban 30·563 km., legkisebb az apogaeumban 28·582 km. A pálya excentrumossága 0.016 755, megszorozva a középtávolsággal, ad vonalos excentrumosság gyanánt 2 488 000 km., mely értékkel a középtávolságnál nagyobb az aphelium, kisebb a perihelium távolsága; amaz tehát kerek számban 151, emez 146 millió kilométer.

A Nap látszó sugarának és parallaxisának viszonya: $\frac{961·82}{8·848} = 108·68$ adja közvetlenül a Nap vonalos sugarát földsugarakban kifejezve, mely tehát 693 000 km.-nek felel meg. Ezen 108·68 viszonyszám egyszersmind a parallaxis állandójának felel meg. Ha ugyanis valamely időben a Nap látszó sugarát ρ-nak találjuk, akkor ugyanezen távolsághoz tartozó parallaxis

$$\pi = \frac{\rho}{108·68}$$

és éppen úgy távolsága:

$$D = 206\,264·8 \times 108·68 \,.\, \frac{1}{\rho},$$

hol ρ ívmásodperczekben fejezendő ki.

A Nap valódi nagyságáról is alig szerezhetünk magunknak helyes fogalmat. A fok hossza, mely a Földön 111 kilométer, a Napon 12 090 km., tehát Európa legészakibb pontjától Afrika déli csúcsán túlnyúlna, és az előbb említett ágyúgolyó és vasúti vonat kerületének megtételére illetve 100 napot és 8 év 103 napot igényelne.

Ha a Földet 1 cm átmérőjű golyónak rajzoljuk, akkor a Nap 1·087 méter átmérőjű glóbusként áll elő. A Hold ezen centiméteres Földet 30.138 cm sugarú körben futja körül. Tehát a Föld a Holddal együtt nemcsak a Nap testében zavartalanul folytathatná mozgását, hanem majdnem kétszer (pontosan 1·8-szor) akkora távolba helyezhetnők a Holdat, a nélkül, hogy a Nap gömbjéből kilépni volna kénytelen.

A Föld a Nap távolságában csak egy alig 9″ látszó sugárral bíró kerek napfolt képében tünnék fel.

XXXIX. FEJEZET.

A naptár. Időszámítás.

A Hold a Föld [illegible] nem egészen [illegible] forgásidejének.

Az időszámítás gyakorlati egységét maga a természet szolgáltatja; ez alacsony és közepes szélességek alatt kifejezetten a napnap, míg a gyakorlati szempontból tekintetbe nem jövő sarkvidékeken éppoly kifejezetten az év lett volna. A chronologia érdekében tehát a legegyszerűbb eljárás mindenesetre az lett volna, hogy valamely tetszőlegesen választott kezdőponttól fogva az elfolyt napokat egyszerűen olvassuk és bizonyos, a *számrendszernek* megfelelő egész számú napot magasabb egységbe olvasztunk. A tényleges kivitelt az bonyolítja, hogy a napok magasabb egységeit szintén a természetben keressük és hogy az olvasás kezdőpontja sem állandó, hanem idők folytán mindig más és más fontosaknak ítélt eseményekhez kapcsoltatott.

A legközelebbi magasabb egységet szolgáltatta a Hold feltünő és a legtöbb nép vallási szertartásaiban szerepet játszott fényváltozása, a hónapot, mely a synodikus keringésnek, kerek számban $29\frac{1}{2}$ napnak megfelelőleg a hónap tartamát felváltva 29 és 30 napnyinak szabta meg. A csillagászatban már jóval nagyobb jártasságot tételezett fel — különösen alacsonyabb szélességek alatt — a tropikus év felismerése.

A hét fogalmát nem fedezi semmiféle csillagászati periodus; egészen önkényes időegység, a mely — úgy látszik — a hét bolygónak megfelelő napok révén inkább astrologiai jelentőséggel bírhatott.

A különböző (régi) időszámítások kúszált voltát és időbeli gyakori változását most már abban fogjuk találni, hogy időmérőkül rendesen úgy a Napot, mint a Holdat tekintették, hogy az év sem egész számú napot, sem teljes számú lunatiót nem tartalmaz, sőt hogy annak a tartamát csak idők folytán sikerült mind pontosabban megállapítani. Hozzájárul még ama törekvés is, a mely pl. a gregori naptár berendezését is vezérelte, hogy az évszakokhoz kötött, nevezetesen gazdasági teendők lehetőleg mindenkorra az év ugyanazon napjára essenek. Ez eleve követelte az évszakokat meghatározó tropikus, nem siderikus napév bevezetését.

Mindezen conventionális követelmény lassú kifejlődése és egymásután alkalmazása érthetővé teszi, hogy a régi népek chronologiájának ismertetése és a mi időszámításunkkal megegyeztetése már terjedelmes tudományággá fejlődhetett, a mely sikereit kiválóképen annak a körülménynek köszönheti, hogy a régi népek fenmaradt írásemlékei sűrűn tesznek említést csillagászati tüneményekről, a melyek könnyű szerrel e régi időkig visszafelé számolhatók. Ezek különösen a teljes napfogyatkozások, némely csillagnak — különösen a Siriusnak (aegyptusiasan Sothis), a Plejádoknak s hasonlóknak — hajnali, úgynevezett heliakus kelte és a nagy bolygók kölcsönös conjunctiói.

Régente mindenesetre nagyon ingadozó volt úgy az év kezdete, mint az évszakok fogalma és beállta. Hesiodus még csak aratási és szántás szakáról szól; amaz a Plejádok heliákus keltével kezdődik, emez kosmikus lenyugvásukkal. 800 évvel Kr. e. és $+38^0$ szélesség alatt ezen égi tünemények a mi naptárunk szerint május 11-én és október 26-án álltak be. A mai értelemben vett ősz kimutathatólag csak Hippokratesnél fordul elő. Az évszakok kezdetét még azután is soká kizárólag a csillagok heliákus keltéhez és nyugtához kötötték és csak jó későn a napéjegyenlőségekhez és napfordulókhoz.

A napi mozgás chronologiailag fontos momentumai különösen valamely csillagnak a Naphoz viszonyított kelte és lenyugta. Heliákusan kel a csillag, ha a Nappal való conjunctiója, tehát szabad szemre nézve többhavi láthatatlansága után először jelenik meg a hajnali szürkületben. Megfelelőleg a heliákus lenyugvás (alkonyati lenyugvás) a Nappal való conjunctió előtti utolsó eltűnése az esti szürkületben.

A kosmikus lenyugvás volt a csillag első látható lenyugta a hajnali szürkületben, az akronyktikus kelte az utolsó látható kelte az esti alkonyatban.

A Nap és Hold chronologiailag fontos periodusainak viszonya könnyen megállapítható; a feladat ugyanis, megkeresni a tropikus évek oly sokszorosát, a mely egyszersmind lehetőleg közel a synodikus hónapok egy egész számú sokszorosával azonos. A megoldás ismét láncztörtbe bontás dolga. A tropikus év és a synodikus hó viszonya

$$\frac{365{\cdot}242\,198}{29{\cdot}530\,589} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + \dots}}}}}}$$

a következő: $\frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{136}{11}, \frac{235}{19}, \frac{4131}{334} \dots$ közelítő törtekkel.

Mind fokozódó pontossággal tehát

25 synodikus hó = 2 tropikus évvel
37 „ „ = 3 „ „
99 „ „ = 8 „ „ s í. t.

Tényleg azonban:

25 syn. hó = 738·264 725 nap; 2 trop. év = 730·484 396 nap;
különbség = + 7·780 329 nap.

37 syn. hó = 1092·631 793 nap; 3 trop. év = 1095·726 594 nap;
különbség = — 3·094 801 nap.

99 syn. hó = 2923·528 311 nap; 8 trop. év = 2921·937 584 nap;
különbség = + 1·590 727 nap.

136 syn. hó = 4016·160 104 nap; 11 trop. év = 4017·664 178 nap;
különbség = — 1·504 074 nap.

235 syn. hó = 6939·688 415 nap; 19 trop. év = 6939·601 762 nap;
különbség = + 0·086 653 nap.

4131 syn. hó = 121 990·863 159 nap; 334 trop. év = 121 990·894 132 nap; különbség = — 0·030 973 nap.

Az első négy viszony nem elegendő pontos, az utolsó oly nagy időközt foglal magában, hogy kényelmetlen volna az alkalmazásban, s így az ötödikre vagyunk utalva. E szerint 19 tropikus év csak $2^h 4^m 47^s$-val rövidebb, mint 235 synodikus hó vagy 235 lunatió. 19 tropikus év után a Hold phásisai tehát középben ugyanazon napokra esnek; tényleg a Hold nem egyenletes járása által 1 napnyi eltolódás előfordulhat. A cyclust METON görög csillagász találta a Kr. e. V. században és a keresztény egyház ünnepszámításában is mérvadó, a mennyiben Husvét ünnepe és vele együtt az összes mozgó ünnepek bizonyos holdphásishoz vannak kötve.

Minthogy a 19 évi cyclus minden egyes évének napjai bizonyos holdphásissal bírnak, mely természetesen ugyanezen cycluson belül ugyanazon a napon nem ismétlődhetik és az első év az, melynek első újholdja január 1-ére esik, úgy teljesen elegendő tudnunk, hogy valamely adott év a 19 éves holdcyclus hányadika. A görögök időszámításában, nem kevésbbé a mi egyházi ünnepi számításunkban e rendszám fontos szerepet játszik s ezért az *aranyszám* nevét nyerte. Az utolsó Krisztus születése előtti év kezdőéve volt ilyen cyclusnak és innen a következő, úgy a júliusi, mint a gregori naptárra érvényes szabály: Valamely év aranyszámát megkapjuk, ha az évszámhoz 1-et adunk s a 19-czel való osztás maradékát keressük. E cyclikus számítás *egyházi* czélokra elegendő pontossággal szolgáltatja az év valamely napjára eső holdphásist.

Az aranyszámmal szoros kapcsolatban van az epakta, azaz a Hold kora az adott év első napján. Az epakta tehát azon szám, mely az ó-év utolsó újholdja óta elfolyt napokat méri. Minthogy 12 synodikus hó 10 nappal és 21 órával rövidebb, mint a tropikus év, úgy az epakta évente 11 nappal megnő, vagyis az újhold ennyi nappal előbbre esik. A Krisztus születése évében — a melyet a chronologusok Kr. e. 1-nek, a csillagászok ellenben 0-nak neveznek — az utolsó újhold a 354. napra esett, a Kr. u. 1. évben az epakta tehát XI a júliusi naptár szerint. A hozzátartozó aranyszám, mint azt előbb is láttuk, 1. Az összefüggés immár világos: míg az aranyszám egy egységgel nő, addig az epakta 11 egységgel növekszik. A dolog természetében fekszik, hogy XXX-nál nagyobb epaktából 30-at le kell vonni.

A gregori naptárban a naptár javítása után tudvalevőleg 10 nap esett el, a gregori az 1 aranyszámhoz tartozó epakta tehát, ez időben I-re szállt le. 1700-ban kiesett a júliusi naptárral szemben ismét egy nap (az úgynevezett napegyenlítés), tehát leszállt 0-ra. 1800-ban nem esett változás. Egy szökőnap ugyan kiesett a napegyenlítés folytán, de a holdegyenlítés egy napot ismét hozzátett az epaktához. Ugyanis 235 synodikus hó közel $1\frac{1}{2}$ órával $= \frac{1}{16}$ nappal rövidebb, mint a 19 júliusi év (365·25 nap) és ezért $16 \times 19 = 304$ év mulva a hiba éppen egy teljes napot tesz ki, melylyel az epakta megtoldandó. A javítás 1800-ra esett, az epakta tehát a két egyenlő nagy és ellentétes javítás eszközlése után egészében változatlan maradt. 1900-ban ismét a napegyenlítés áll fenn, tehát a jelen századhoz képest az epakta ismét 1 egységgel kisebbedik.

Az immár könnyen átlátható összefüggést az aranyszám és az epakta között a következő táblázat mutatja be úgy a júliusi, mint a gregori naptár jelen és következő százada számára:

Aranyszám	Júliusi	Gregori		Aranyszám	Júliusi	Gregori	
		XIX. sz.	XX. sz.			XIX. sz.	XX. sz.
	epakta				epakta		
1	XI	0	XXIX	11	I	XX	XIX
2	XXII	XI	X	12	XII	I	0
3	III	XXII	XXI	13	XXIII	XII	XI
4	XIV	III	II	14	IV	XXIII	XXII
5	XXV	XIV	XIII	15	XV	IV	III
6	VI	XXV	XXIV	16	XXVI	XV	XIV
7	XVII	VI	V	17	VII	XXVI	XXV
8	XXVIII	XVII	XVI	18	XVIII	VII	VI
9	IX	XXVIII	XXVII	19	XXIX	XVIII	XVII
10	XX	IX	VIII				

A niceai zsinat határozata értelmében Husvét napja a tavaszi napéjegyenlőséget követő (cyclikusan számított) holdtölte utáni vasárnapon ünneplendő. Ha ezen tavaszi telehold vasárnapra esnék, akkor Húsvét a következő vasárnapon tartandó. A tavaszi telehold az, a mely cyclikus számítás szerint márczius 21-ére vagy legközelebb ezután esik. Innen van, hogy Húsvét legkorábban márczius 22-ére és legkésőbben április 25-ére található.

Ezen határozat a keresztény egyházban különben is fontos vasárnapoknak fokozódott jelentőséget ad és ezért könnyű meghatározásukra a vasárnapi betűt hozták be, mely különben az örök naptárak szerkesztésében vagy adott keletekhez tartozó heti napok meghatározásában is szerepel.

Az év napjait január 1-jével kezdve, általában A, B.. G betűkkel jelölvén, akkor a hét ugyanazon napja, tehát a vasárnapok is, ez évben mindig ugyanazon betűt kapják. Az adott évben a vasárnapra eső betű a vasárnapi betű nevét viseli. A közönséges év 365 nap = 52 hét + 1 nap, tehát ugyanazon nappal végződik, a melylyel kezdetét vette. Ha ez vasárnap volt, akkor az év minden vasárnapja természetesen az A betűt kapja. A következő év hétfővel kezdődik, s minthogy az év első napjának A a jele, a vasárnapi betű egy helylyel hátrál, tehát G lesz. A szökőévben a hátrálás 2 betűt tenne ki; hogy ez ne történjék, a szökőévben február 23-ának és 24-ének ugyanazon betűt adjuk; a szökőév tehát két vasárnapi betűt kap, az egyik február 23.-a előtt, a másik ezután érvényes. A vasárnapi betűk periodusa tehát $4 \times 7 = 28$ év, és ezen cyclust a *napkörnek* szokás nevezni.

Minthogy ilyen cyclus Kr. e. 9-ben vette kezdetét, áll a következő, a júliusi és gregori naptárban érvényes szabály: Valamely év napkörét nyerjük, ha a 9-czel nagyobbított évszámot 28-czal elosztjuk és a maradékot veszszük. A mondott év hétfővel kezdődött és azonkívül szökőév volt, tehát az 1 napkörnek megfelel a júliusi naptárban GF. A gregori naptárban természetszerűen a vasárnapi betű annyi betűvel tolódik előre, a hány napnyi külömbség van a két naptár között. A jelen században e külömbség 12, vagyis 7-nek lehetőleg nagy sokszorosát levonva 5, úgy hogy a júliusi GF-nek a gregori ED felel meg. 1900-tól fogva GF-nek FE fog megfelelni s í. t. Ezek után magától világos a következő táblázat:

Napkör:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Júl. vasárn. betű:		GF	E	D	C	BA	G	F	E	DC	B	A	G	FE	D
Gregori vasárn. betű	XIX. sz.	ED	C	B	A	GF	E	D	C	BA	G	F	E	DC	B
	XX. sz.	FE	D	C	B	AG	F	E	D	CB	A	G	F	ED	C

Napkör:		15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Júl. vasárn. betű:		C	B	AG	F	E	D	CB	A	G	F	ED	C	B	A
Gregori vasárn. betű	XIX. sz.	A	G	FE	D	C	B	AG	F	E	D	CB	A	G	F
	XX. sz.	B	A	GF	E	D	C	BA	G	F	E	DC	B	A	G

Már csak tisztán conventionálisan vette át a keresztény naptár a rómaiból az indictiócyclust, a mely 15 évet foglal magában, s melynek kezdetét az időszámításunk előtti 3-ik évre teszik. Valamely évnek sorszámát e cyclusban a *római adószámnak* nevezzük. Ez e szerint a 3-mal nagyobbított évszámnak 15-tel való osztása után jelentkező maradék.

A nap-, hold- és indictiócyclus tartamainak szorzata, $28 \times 19 \times 15 = 7980$ év adja az úgynevezett júliusi periodust, melynek első éve a Kr. e. 4713. A júliusi periodus valamely évét találjuk e szerint, ha a Kr. e. évet 4714-ből levonjuk és a Kr. u. évet 4713-hoz adjuk.

Krisztus születését azon év deczember 25-ikére teszik, a mely a mai időszámítás 1. évét megelőzi. A Kr. e. 1. évre következik közvetlenül 1 Kr. u., míg a csillagászati chronologiában a Krisztus születését magában foglaló évet 0-évnek neveznek.

Ha a júliusi periodus egy éve A, ennek napköre a, aranyszáma b és római adószáma c, akkor a mondottak folytán könnyen megállapítható ez egyenlet:

$$A = 4845\,a + 4200\,b + 6916\,c - 7980\,n,$$

a hol n oly nagy egész számnak veendő, hogy $A < 7980$ legyen.

A Húsvét kiszámításának legegyszerűbb formuláját Gauss adta. Ha N az adott évszám, melyben a Húsvét dátumát keressük, akkor képezzük a következő mennyiségeket:

$\frac{N}{19}$ maradéka legyen a

$\frac{N}{4}$ „ „ b

$\frac{N}{7}$ maradéka legyen c

$\frac{19a + x}{30}$ " " d

$\frac{2b + 4c + 6d + y}{7}$ " " e

akkor a Husvét vasárnap keletje

márczius $(22 + d + e)$-ike vagy április $(d + e - 9)$-ike,

feltéve, hogy a gregori naptár számára:

1583—1699-ig $x = 22$, $y = 2$
1700—1799-ig $x = 23$, $y = 3$
1800—1899-ig $x = 23$, $y = 4$
1900—2099-ig $x = 24$, $y = 5$.

A táblázat könnyen bővíthető, mert x nő 1 egységgel, ha az epakta 1-gyel fogy és y nő 1 egységgel a közönséges százados évekkel. A júliusi naptárban ellenben $x = 15$, $y = 6$ állandóan. Megjegyzendő azonban, hogy április 26-ika helyett mindenkoron április 19-ike veendő, április 25-ike helyett is április 18-ika az esetben, ha $d = 28$ és $a > 10$.

Ezen általános jelölések után, melyek ugyan különösen a mi ünnepszámításunkkal függnek össze, de melyek a chronologiában sem mellőzhetők, lássuk kellő rövidségben a fontosabb naptárrendszereket. Az egyes chronologiai átszámításokat illetőleg külön szakmunkákra kell utalnunk, a melyek a kivánt adatokat átnézhető táblázatok segítségével, számítás mellőzésével szolgáltatják.

A legegyszerűbb időszámítással élnek kétségenkívül a *mohamedánok*, a kik tiszta holdévek szerint számolnak, tehát a Napra ügyet sem vetnek. A Hold synodikus keringésének megfelelőleg a hónapok felváltva 29 és 30 naposak, az év hossza tehát 354 nap. Egy 30 éves cycluson belül azonban a 2., 5., 7., 10., 13., 15., 18., 21., 24., 26. és 29. év 355 napos szökőév, melyben az utolsó hónap is 30 napos. A hónapok nevei: moharrem, szafar, rebî-el-avvel, rebî-el-akher, dsemâdi-el-avvel, dsemâdi-el-akher, redseb, sabân, ramadân, sevvâl, dsû-l-kade és dsû-l-hedse. A hét ötödik napja, a dsuma, pihenő nap. Csak két ünnepet ismernek, ezek is állandók: a nagy és kis bairam. Amaz a bőjti hónapot (ramadân-t) rekeszti be sevvâl 1-én, emez dsû-l-hedse 10-én a Mekkába való zarándoklás végét jelenti.

Az arabsok a kiktől ezen naptárrendszer származott, az évszakok szerint nappal és éjjel különböző hosszúságú óráik voltak; a törökök már egyenlő hosszúságú órákat vezettek be, de a napot napnyugtával kezdik. A mohamedán aera, az időolvasás kezdőpontja Kr. u. 622. július 16-ika, az úgynevezett hedsra, vagyis Mohamed Medinába menekülése. Minthogy a mohamedán év 11 nappal rövidebb, mint a tropikus napév, úgy 228 tropikus napév = 235 török évvel és mintegy 20 880-ban Kr. u. velünk már ugyanazon évszámot fogják írni.

Egészen hasonló évbeosztás dívott eredetileg *a görögöknél* és *rómaiaknál.* A hónap kezdete eleinte a holdsarló első megjelenésével esett össze. Minthogy azonban ennek megfigyelése nem mindig sikerült, a mi kétségtelenül zavarokat idézhetett elő, cyclikus kiszámításhoz kellett folyamodni. Megszabták, hogy a hónapot a 30. napon be kell rekeszteni, ha borús idő miatt a holdsarló első feltünése nem volt megfigyelhető, majd pedig bizonyos sorrendben teljes 30 napos és csonka 29 napos hónapokat váltakoztattak.

E kezdetleges holdév azonban csakhamar alkalmas beiktatások által a tropikus napévvel lehetőleg összhangba hozatott, azaz *kötött holdévvé* vált. Kr. e. 594-ben már Solon rendelte el, hogy négyévenként 30 napos hónapot, a II. Poseidont iktassák be. Kleostratos Kr. e. 500 körül már pontosabban járt el, a mennyiben nyolcz évi periodusban, az oktaeteris-ben csatolt a holdévhez egy-egy hónapot, még pedig a cyclus 2., 5. és 8. évében. A hiba nyolcz év alatt még mindig $1^1/_2$ napra rúgott, tehát már egy emberöltő alatt is könnyű szerrel észlelhető volt. 432-ben Kr. e. keletkezett azután a már ismertetett Meton-féle 19 éves holdcyclus (enneadeketeris), a mely ezóta, bár különböző alakban, a legtöbb nép naptárába ment át. Ennek hibája 19 év mulva alig több, mint 2 óra, és ezért csak 228 év mulva egy teljes nap. A Meton-féle cyclusnak még az az előnye is van, hogy közel összeesvén a Sarossal, benne a nap- és holdfogyatkozások is közel ismétlődnek. A 19 évi cyclus szökőévei voltak a 3., 5., 8., 11., 13., 16. és

19-ik. A hónapok nevei: hekatombaion, metagitnion, boëdromion, pyanepsion, maimakterion, poseidon, II. vagy szökőposeidon, gamelion, anthesterion, elaphebolion, munychion, thargelion és skirophonion. Ezek ugyan 29 és 30 naposak voltak, de a cyclus különböző éveiben különböző hosszúsággal is bírtak. Kalippos, Aristoteles kortársa, mintegy 300-ban Kr. e. 76 éves periodust vezetett be, mely 1 nap híján 4 Meton-féle cyclusból állt. Ezen javítás az év középhosszát pontosan $365\frac{1}{4}$ napra hozta, mint a júliusi naptárban.

Egy későbbi Hipparchos-féle javaslat nem ment át a gyakorlatba.

Az ismeretes négy évi periodus, az olympias, kizárólag csak összefoglaló egység volt; a hold- és napév megegyeztetésére soha nem szolgált. Az olympiádok éraja Kr. e. 776-ra esik, de e mellett évüket a királyok, majd az archonok szerint olvasták.

A hetet nem ismerték eredetileg a görögök, a hónapot három dekádra osztották. A napi időt az árnyék hosszából határozták meg, rendesen az emberi árnyék hosszából. Így Aristophanesnél egy athenei polgár barátjait a 10 lábra nőtt árnyék idejére hívja. Később általánossá vált a napórák használata.

A rómaiak a nap és éjjel óráit eredetileg a Nap állásának durva becslésével osztották be. A város alapítása utáni V. században azonban már találkozunk nap- és vizi órákkal. A napkeltétől napnyugtáig terjedő nappalt 12 órára osztották, ezek tehát igen különböző és változó hosszúsággal bírtak. — A legrégibb római év márczius hónappal kezdőleg 10 hóból állt és 304, vagy mások szerint 360 napot számlált. Tél idejét — úgy látszik — ekkor egyszerűen tekintetbe sem vették; Numa kapcsolta a 10 hónaphoz a januáriust és februáriust, de ezek hosszát nem ismerjük, sem nem tudunk oly szabályokról, melyek segítségével ezen tökéletlen naptár az éggel öszszeegyeztetett volna. Ily szabály híján az év hossza tetemes, önkényes változásoknak volt alávethető. Természetellenesen meghosszabbodott, midőn arról volt szó, hogy valamely hatalmas konzul hivatalában maradhasson; csudálatosan megrövidült, ha az új konzul korábban el akarta foglalni hivatalát. Julius Caesar vetett véget ezen — különösen a polgárháborúk óta nagyon botrányos — zavaroknak, melyek annyira mentek, hogy a 708. év A. U. C. 445 tizenöt hóra eloszlott nappal bírt.

Júliusi naptár. Sosigenes aegyptusi mathematikus tanácsára a Holdat teljesen mellőzték időmérőül. A tropikus év hosszát önkényesen $365\frac{1}{4}$ napnyinak állapították meg, noha ez időben az aegyptusiak tartamát már pontosabban ismerték. Megszabták tehát, hogy a közönséges év 365 napból álljon, s hogy minden negyedik év február 23-ika után egy szökőnapot nyerjen. A közép júliusi naptári évnek e szerint 11^m 15^s-val túlnagy és ezen hiba 128 év mulva egy egész napot tesz ki. Az évszakok tehát, bár hosszú idők mulva, mégis csak más hónapokra esnek.

Mindazonáltal ezen naptár annyira kényelmes, hogy igen sok esetben a csillagászok is alkalmazzák, a chronologusok meg éppen minden adatot júliusi naptár szerint számítanak át. A júliusi naptár behozatalának első éve volt 709. A. U. C. vagy Kr. e. 44. Már kezdetben is követtek el hibát, a menynyiben félreértvén a „quartus annus“ rendelkezését az 1., 4., 7.. évet tették szökőévnek. A hibát csak 40 év mulva vették észre és javították ki.

A régi rómaiaknak Numa által már megtoldott hónapjai voltak: márczius, április, május, június, quintilis, sextilis, september, october, november, deczember, január és február. A római birodalom térfoglalásával az új consul már nem márczius 1-én, újévkor foglalta el hivatalát, hanem már január 1-én. Ez okból minden nép, mely a júliusi naptárt elfogadta volt, ezen nappal kezdte évét. Caesar és Octavianus tiszteletére az 5. és 6. hónap július és augusztus lett, az év utolsó négy hónapja ellenben, ellenére a megbolygatott sorrendnek, melytől nevét vette, megtartotta elnevezését.

A rómaiak hetei (nundinae), melyekkel különben csak későbben találkozunk, a mieinknél egy nappal többel bírtak. A napok olvasása egy hónapon belül három külön névvel jelölt naptól történt előre és hátra. E napok: calendae, minden hó elseje, nonae (márcz., máj., júl. és októberben a 7-ik, a többi hóban az 5-ik nap) és az idus (a nevezett hónapok 15-ike, a többiekben a 13-ik nap).

A rómaiak aerája mindvégig ugyanaz volt; éveiket ab Urbe condita számították, a mi Kr. e. 753-ra esett.

Gregori naptár. JULIUS CAESAR naptárreformja értelmében a tavaszi napéjegyenlőségnek márczius 21-ére kellett esnie. A nicaeai zsinat (Kr. u. 325) idejében az eltérés az éghez képest már 3 napra rúgott; a hibát egyszerűen kicorrigálták, a nélkül, hogy forrását is megszüntették volna, minek folytán ugyanazon hiba a következő századokban természetesen ismét megjelent. CUSA és D'AILLY elvi jelentőség nélküli javításai után 1474-ben IV. SIXTUS pápa REGIOMONTANUS neves csillagászra bízta a naptárreformot, mely azonban a tudós kora halála miatt nem jött létre. Végre XIII. GERGELY pápa vette kezébe az ügyet, melyben másoktól eltekintve, különösen LILIUS ALAJOS kalabriai csillagász volt segítségére. A tavaszi napéjegyenlőségben ismét már 10 napos hiba mutatkozott s ezért elrendelte GERGELY, hogy 1582. október 4-ike után 10 nap elhagyásával irassék azonnal október 15-ike. A tropikus év hosszát az alfonzi táblák értelmében $365^d\ 5^h\ 49^m\ 16^s$-nak vette fel. — 400 ily év tehát $146{,}097^d\ 26^m\ 40^s$, míg 400 júliusi év $146{,}100^d$, tehát 3 nappal több. Ez alapon megszabta GERGELY pápa, hogy a 4-gyel osztható évek, mint a júliusi naptárban, ezután is legyenek ugyan szökőévek, de minthogy 400 évben 3 júliusi szökőnapot mellőzni kellett, közönséges éveknek tekintessenek ama százados évek, a melyek 400-zal nem oszthatók. Míg tehát a júliusi naptár szerint minden százados év, 1600, 1700.. szökőév, addig GERGELY szerint csak 1600, 2000.. lehetnek szökőévek. Még így is marad ugyan kis hiba, mely az igazi tropikus év tartamát tekintve 3300 év mulva rúg fel 1 napra. DELAMBRE, majd HEIS ezt is kicorrigálta ugyan, de javaslataik eddig legalább nem fogadtattak el.

Minthogy GERGELY idejében a júliusi vagy ó-naptár az újhoz képest 10 nappal hátra van, 1700 és 1800 az új naptár szerint szökőév nem volt, a külömbség ma már 12 napra rúg és 1900 márczius 1-én már 13 nap lesz.

Megjegyzendő különben, hogy a GERGELY-féle reformnál jobb berendezés már a XI. században ismeretes volt. Szerzője a perzsa CHEIAM OMAR. Ugyanis 33 évi cyclust vezetett be, mely 25 közönséges, 365 napos évet és 8 366 napos szökőévet számlál. Az év hossza szerinte tehát $365^d\ 5^h\ 49^m\ 5\frac{5}{11}^s$, a mi $6\frac{6}{11}^s$-val pontosabb, mint a GERGELY-féle év.

A gregori középév hossza különben $365^d\ 5^h\ 49^m\ 12^s$, míg a tropikus év tartama $365^d\ 5^h\ 48^m\ 46^s.17$. Ez utóbbi tudvalevőleg idők folytán változó és ezért minden időre szóló, a Gergely-féle értelemben helyes naptár egyelőre nem is szerkeszthető.

A leírt naptár bevezetése számos ellentmondásra és ellenszegülésre talált és igazság szerint meg kell vallani, hogy a sokadalom józan esze ez esetben majdnem helyesebben ítélt, mint a tudósok bölcsesége. Ha megerősítést nyer ama hír, hogy az ó-naptárt még jelenleg is használó görög kereszténység a Gergely-féle naptárt fogadja el, akkor ez tudományos szempontból valóban nagyobb áldozatot jelent, mintha mi ismét a júliusi egyszerű naptárhoz térnénk át.

Aegyptusi naptár. Az aegyptusiak már a legrégibb időkben is napévek szerint számoltak, noha a Hold különösen az ünnepszámításban fontos szerepet játszott. Évük eredetileg 365 napból állott; hónapjaik voltak: thot, phaophi, athyr, chöak, tybi, mechir, phamenoth, pharmuthi, pachon, payni, epiphi és meszori, melyek kivétel nélkül 30 napot számoltak. Ezekre következtek az 5 igtatott napot tevő epagomenai. Évük e szerint mozgó napév volt, a mennyiben kezdete minden évben $5^h\ 48^m\ 46^s$-val hátrált, úgy hogy 1461 aegyptusi év alatt az évszakok váltakozása csak 1460-szor esett meg. E tetemes külömbség, melyet már néhány emberöltő is vehetett észre, az 1460 évi Sothisperiodus bevezetésére adott alkalmat, a melynek elmultával a csillagok ugyanazon napon keltek ismét heliákusan. A periodus kezdete azon év, melyben Sirius thot 1-én kelt heliákusan. A számítás azt mutatja, hogy ezen periodus Kr. e. 1318-ban kezdődött. A Sirius ezen hajnali kelte volt egyszersmind a régi időkben a Nilus áradásának előhírnöke.

A Sothisperiodus mellett, melyet még akkor sem mellőztek, midőn a napévet sokkal pontosabban ismerték és számításba vették, dívott még a 25 évi, 309 synodikus hónapot felölelő apisperiodus és az 500 évi phönixperiodus. Mindkettő, bár már neveik szerint is vallási ünnepek kiszámítására szolgáltak, tisztán csillagászatiak. Az első az új apis koronáztatásának meghatározására szolgált, a mely mindig holdtöltekor történt és az ezen periodusban megmaradó 1 napi hibát a phönixperiodus egyenlítette ki.

Mint keleten általában, az aegyptusiak is királyok szerint olvasták éveiket; a régi királyi táblák a hieroglyphákból, és a bennük foglalt astronomiai adatok visszaszámításából való helyreállításának tehát igen nagy fontossága van.

A kanopusi rendelet értelmében az új évet Sothis heliákus keltével kezdték. Ptolemaeus vezette be a Kr. u. II. században az egységes Nabonasszar-féle aerát, mely Kr. e. 748-ban veszi kezdetét. Később a Kr. e. 324-ben kezdődő filippi aerát is akalmazták. A napot estével kezdték, a hét fogalma tőlük ment át a naptárakba.

A babyloniak és chaldaeusok holdév szerint számoltak, de ezt az általuk önállóan feltalált 19 évi szökőcyclussal a Nap évével egyeztették. A babyloniaktól vették át a zsidók úgy ezen 19 évi szökőcyclust, mint a hónapok neveit. A szökőhó rendesen a II. adar volt, kivételes — opportunitás által javasolt esetekben — a II. ululu. Tőlük ered a saros fogyatkozási cyclus is. — Aerájuk a Kr. e. 312-ben kezdődő Seleucidák aerája volt.

A zsidók időszámítása az ó-testamentom révén messze követhető, a nélkül természetesen, hogy róla alaposabb felvilágosításokat szerezhetnénk. Az úgynevezett Noah-féle év, mely 12 harmincznapos hóból állt, mindenesetre későbbi átlagszámítás eredménye. Mindazonáltal sikerült a biblia némely helyét ősrégi fogyatkozásokkal azonosítani. Az Ábrahám-féle fogyatkozás pl. Kr. e. 1764. október 8-án következett be, az aegyptusi kilenczedik csapás a Kr. e. 1335. márczius 13-iki teljes napfogyatkozással azonos és a Coppernicus-féle rendszer elterjedésének oly sokáig útját álló Józsua-féle „Sta sol, ne moveare“ ma szintén kétségtelenül a Kr. e. 1296. január 31-én beállt napfogyatkozásra vonatkozik.

Évük mindenesetre holdév volt, valaminthogy ma is kötött holdév. Csak néhány hónap neve maradt meg: szio (a második), ethonim (a hetedik) és bul (a nyolczadik). Minthogy azonban a hónapot újholddal kezdték és az ünnepek bizonyos holdphásisokhoz és évszakokhoz voltak kötve, kétségtelen, hogy valamelyes cyclicus számolási szabály birtokában lehettek. A 49 éves jubiláris periodus ilyen csillagászati jellegű cyclus semmiesetre nem lehetett.

A zsidók mai naptára nagyjából a babyloni, és természetszerűen a babyloni fogságból való; végleges alakját a második templom lerombolása után vette fel.

Az évet tisri 1-ével kezdték; a többi hónap: marchesván, kiszlev, tebeth, sebat, adar, niszán, ijár, sziván, thammusz, ab és ellul. Ezek a rendes, közönséges évben felváltva 30 és 29 nappal bírnak. A hónapok kezdetét eleinte még megfigyelés szerint állapították meg. Minthogy ily úton tévedéseknek elejét venni nem lehetett, elrendelték, hogy az ünnepek két egymásra következő napon tartassanak, hogy az ünneplés egyidejűsége legalább egy napon messze vidéken is biztosítva legyen. A nappalokat ugyan 12 órára osztották, de nem az éjjeleket, melyek eleinte 3, majd 4 vigiliára oszlottak. Az évszakok szerint tehát úgy ezen órák, mint vigiliák különböző hosszúságúak voltak.

A babyloniaktól átvett 19 éves cyclus megegyezteti a zsidó évet a Napéval, de számos szertartási rendelet szertelen bonyolítja a különben egyszerű számítást és különösen az év kezdetének megállapítását. Ez a Gergely-féle naptár szerint szeptember 6-ika és október 7-ike között ingadozik. Ily módon 6 különböző évhossz jő létre, a hiányos, rendes és feles közönséges év és a hiányos, rendes és feles szökőév. Ezek tartama sorban 353, 354, 355; 383, 384 és 385 nap. A szökőhónap a II. adar vagy veadar és az év jellege szerint marchesván és kiszlev is majd 29, majd 30 nappal bír. Szökőévek a 19 évi cyclus 3,, 6., 8., 11., 14., 17. és 19. éve.

A napot a zsidók estével kezdik és velünk megegyezőleg 24 órára osztják; az óra 1080 chalakim, 1 chalakim = 76 regaim. A zsidó hó középtartama 29 nap, 12 óra, 793 chalakim, a mi jelenleg $0^s.5$-czel több, mint a közép synodikus hó. Azonban értéke teljesen megegyezik a Hipparchos-féle adattal és e szerint valószinűleg görög kölcsön, míg a 19 évi cyclus semmiesetre sem az.

Régente nemzetségek szerint számítottak, később az Aegyptusból való kivándorlás (Kr. e. 1335. márcz. 27.), majd a királyok uralkodása képezte aerájukat. Rabbi Hillel Hanaszi Kr. u. 358-ban végre a világ teremtését vezeti be aeráúl, a melyet Kr. e. 3760-ban kezd.

Noha a nyugot történetében kis szerepet játszik, mint a Kelet leghatalmasabb és legelterjedtebb kulturájának kifejezője nem mellőzhető teljes hallgatással *a khinai időszámitás,* melyet aerájával és periodusaival együtt a khinaiakon kívül a japánok, koreaiak és kokhinkhinaiak ma is alkalmaznak történetírásukban. A naptárkészítés szabályai Yau császártól (2357—2255. Kr. sz. e.) származnak és az Öt klassikus könyv *(Vu-king)* másodikában, a *Su-king* (Történeti okmányok könyve)-ben vannak leírva. Ezen könyvnek szerzője, vagy inkább szerkesztője Konfuczius volt 551—478-ban Kr. sz. e. Addig is létezett már khinai naptár, mely, úgy látszik, tisztán a Hold mozgásán alapulhatott. 2269-ben Kr. e. reformálta e naptárt Yau a híres Hi és Ho csillagászok közreműködésével, megegyeztetvén a Hold és Nap évét a Meton-féle cyclushoz teljesen hasonló igtatási periodus segítségével. Kr. u. 1210-ben magyarázta e nagyszabású munkát tüzetesebben egy hozzáértő commentator, a ki maga is csillagászati megfigyeléseket tett, még pedig oly nagy pontossággal, mely a nyugoti egykorú csillagászati megfigyelések megbízhatóságát messze fölülmulja.

A khinai csillagász az eget, teljesen a Nap járásának megfelelőleg $365\frac{1}{4}^0$ra osztja, úgy hogy a khinai fok $0^0.98\,562$-kal egyenlő. A siderikus és tropikus év külömbségét már Kr. e. 350-ben, tehát két évszázaddal Hipparchos előtt ismerték, mindazonáltal a naptári napévet kerek számban $365\frac{235}{940}$ napnyinak vették, a mi véletlenül egészen pontosan a júliusi év hosszával vág. Lehetséges ugyan, hogy 1210 körül a júliusi naptár híre eljutott már Khinába is, de valószinűbb, hogy az év ezen kerek értéke egyszerűen a régi megfigyeléseken és az ezekből folyó ekliptikális beosztáson alapul.

A Nap és Hold közép napi mozgása (átszámítva a mi fokainkra) $0^0.98\,562$ és $13^0.17626$, holott a tényleges értékek $0^0.98\,561$ és $13^0.17638$. Már e néhány szám összehasonlítása mutatja a régi khinaiak kitünő megfigyeléseit. A synodikus hó tartamát $29\frac{499}{940}$ napnyinak vették, úgy hogy a 12 lunatióból álló holdév $354\frac{348}{940} = 354^d\ 8^h\ 53^m\ 6^s.37$, csak $4^m\ 21^s.77$-czel túlságos nagy. E számokban már bennrejlik minden, a khinai időszámítás megértéséhez szükséges adat, ha még megemlítjük, hogy a napnak 940 részre osztása épp oly önkényes szokás, mint a mi felosztásunk 1440 perczre.

Az eredetileg használt, úgynevezett Noah-féle év tizenkét

30 napos hónapból állott; ugyanezen évvel találkozunk kezdetben a zsidóknál és tizennyolcz 20 napos hóra osztva a mexikóiaknál. A Nap éve már most $5\frac{235}{940}$ nappal, az úgynevezett ki-jing vagy többlettel hosszabb, a holdév ellenben $5\frac{592}{940}$ nappal, a hiánynyal, vagy szo-heu-vel rövidebb, mint ezen kerekszámú napból álló év. A Nap és Hold évének külömbsége tehát a ki-jing és szo-heu összege, vagy $10\frac{827}{940}$ nap. Ha ezt egyszerűen elvetnők, tehát tiszta holdévek szerint számolnánk, akkor három év alatt a hiba már $32\frac{601}{940}$ napra, egy holdhónapnál többre rúgna és — mint a Su-king commentárja mondja — a tavasznak egy egész hónapja átvándorol a nyárba, a tizenegyedik hónap a tizenkettedikbe. Ha ez 12-szer történik, e vándorlás másodszor esett meg és egy egész év veszett el.

Yau észlelte több mint 18 századdal Meton előtt, hogy a ki-jing és szo-heu kiegyenlíthető, ha 19 évi cyclusban hét hónapot közbeigtatunk. A holdév megegyezik a Napéval, ha évente $10\frac{827}{940}$ napot hozzácsatolunk. Ez 19 év alatt $10\frac{827}{940} \times 19 = 206\frac{673}{940}$ napot tesz ki. A beigtatott 7 holdhó ugyancsak pontosan $29\frac{499}{940} \times 7 = 206\frac{673}{940}$ napot ad, s ezért 19 év multán a lunáris és soláris év ismét együtt veszi kezdetét.

A khinaiak polgári éve váltakozó 29 és 30 napos hónapokból áll, melyek közé minden harmadik évben egy szökő hónap beiktattatik. Pontosabban 19 évre esik hét, avagy a 60 éves cyclusra 22 szökő hónap. Az év kezdetét a téli solstitium szabja meg; az erre következő második újhold, vagy a Napnak a vízöntő jegyébe való lépésére következő újhold napja a khinaiak újéve. Középben tehát összeesik a Napnak a vízöntő 15^0-ába lépésével. Az új év kezdete ehhez képest a január 21. és február 20. közti időszakba eshetik és e szerint történik a szökőhónapnak beiktatása a holdcyclus közönséges évei közé.

Minthogy a hónapok a különböző években a közbeigtatás megtörténte vagy elesése miatt nagyon változnak az igazi évszakokhoz képest, azért az időbeosztásra magát a Napot is alkalmazzák, megkülönböztetvén külön ama szakaszokat, a melyekben a Nap 15^0-ot tesz meg az ekliptikában. E czélra a khinai naptárak (melyekben a mi naptárainkból sem kimarasztható astrologia a kormány különös tekintélyével szentesített szerepet játszik) különösen kiemelik ama napokat, melyeken a Nap az egyes állatövi jegyek kezdő és felező pontjaiba lép. Ezen szakaszok azután természetesen teljesen megfelelnek a mi félhónapjainknak.

A Nap beosztását a Ta-Tsing-lü-li törvénykönyv szabályozza, a melynek eredetijét először 1647-ben tették közzé, és melynek legutolsó kiadása 1829-ből származik. Szerinte „a nap teljesnek tekintendő, ha száz osztályrésze elmult. A napi munka azonban csak napkeltétől nyugtáig számolandó. A nagy év 360 teljes napból álljon, de az ember kora a cyclusban elmult évek száma szerint veendő, mióta nevét és születését felvették a nyilvános jegyzékbe“.

Ma a nap 96 részre oszlik, tudniillik 12 órára és mindegyik 8 kih-re, úgy hogy 1 kih a mi negyedóránkkal azonos. Az órákat nem számozzák, hanem mindegyiknek külön neve van, mely névvel az egymásra következő hónapok és — mint látni fogjuk — a hatvanéves cyclus minden 12-ik éve is bír. Az első, esti 11 órakor kezdődő óra neve tsze. Az első, még Kr. e. 1130-ban készült vizi óra a régi napbeosztásnak megfelelőleg még 100 kih-re van osztva; télen 40 kih esik a nappalra, 60 az éjjelre, nyáron megfordul a viszony és tavaszszal meg télen a beosztás egyenletes. Míg a vizi órák nagy tökéletességgel készültek, addig a napórák, melyek talán csak a mohamedánok által hozattak be, nem terjedtek, noha árnyékmegfigyeléseket már Yau is közöl Su-king-jában. Sok helyt látni még ma is fél napig elízzó illatos füstölő pálczákat és tekercseket, a melyek az óráknak megfelelőleg be vannak osztva.

Noha az éveket általánosan mint más népek is a mindenkori császár trónralépésétől számolják, még 60 éves cyclusok szerint is megjelölik azokat; pl. 1888. márczius hó 15-e a Kuang-Szü sih-szü nien, Moucze öhl-jüe szan-cze = Kuang-Szü császár 14. éve, vagyis a 76-ik cyclus 25. éve második havának 3-ik napja.

Ekként tökéletes chronologiai rendszerrel élnek, a melynek kezdete Kr. e. 2637-ra esik. Ez volt Sih-Hoang-Ti császár uralkodásának 61-ik éve. A 60 éves cyclus ismerete régi keletű, rendszeres használata azonban valószinűleg csak a mi időszámításunkkal egyidős. A cyclus éveinek megjelölésére a régi napbeosztás 10 és az új felosztás 12 óranevéből alkotnak párokat oly módon, hogy az első sorozatot hatszor, a másodikat ötször ismétlik. — Az első sorozat nevei: *kia, ji, ping, ting, mou, ki, köng, hszin, zsen, kuéi;* a második sorozaté: *cze, csou, jin, mau, sön, sze, vu, véi, sönn, ju, szü* és *hai.* A cyclus első éve: *kia-cze,* a második *jih-csou,* a tizedik *kuéi-ju,* a 11-ik *kia-szü,* a 60-ik *kuéi-hai.*

A jelenlegi 76-ik cyclus 1864-ben kezdődött, az 1898. év tehát a khinai időszámításnak január hó 22-dikén kezdődött *mou-szü,* azaz 35-ik éve, vagy Kuang-Szü császár uralkodásának 24-ik éve.

A japáni időszámítás teljesen azonos a khinaival, csakhogy ők a 60 évi periodust, a nino-t, az állatövi jegyek és a 10 elem combinatiójából származtatják. A napot 12 órára osztják, de ezekből az egész éven át hat jut a nappalra, hat az éjjelre, úgy hogy az egyes órák a napszakok szerint igen különböző hosszúsággal bírnak. Az óra különben szintén 8 részre oszlik. Az éjfél és dél a japáni napbeosztás 9-ik órájára esik (kokonots), napkelte és nyugta állandóan 6 órával (mutsu-doki) van jelezve.

A nin-o periodus mellett a közönséges életben a nengo periodus is járja, a mely teljesen szabálytalan, rendesen azonban 20 évnél rövidebb. Egészen a mikadó tetszésétől függ, hogy valamely nevezetesnek vélt eseménynyel, pl. valamely új templom építésétől egy újabb nengot keltezzen. A mindenkori mikadó trónraléptétől is olvassák az éveket, még pedig félreértések kikerülése végett oly módon, hogy az év, melyben valamely uralkodó lemond vagy elhal, még egész végéig viseli régi nevét.

A merre csak figyelik az eget, ott az állatkör és ennek 12 részre való mintegy természetes osztása ismeretes. A khinai és japáni állatkör jegyei a szokott sorrendben az egér, a tehén, a tigris, a nyúl, a sárkány, a kígyó, a ló, a kecske, a majom, a kakas, a kutya és a medve. Helyeik csak közelítésben felelnek meg a mi állatkörünknek. Khina azonkívül az égnek $365\frac{1}{4}$ és újabban 360^0-ra való beosztásának megfelelőleg még két más mintegy mesterséges vagy legalább is teljesen önkényes zodiakust ismer, melynek jegyei azonban teljesen szabálytalan 2^0 és 31^0 között váltakozó hosszúsággal bírnak.

IV. SZAKASZ.

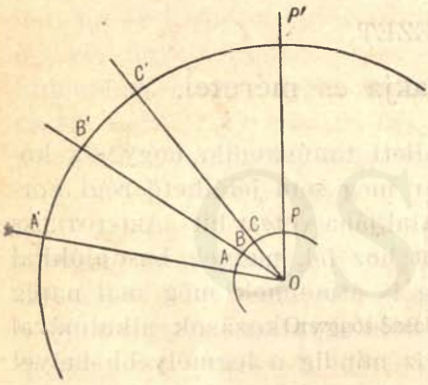
A FÖLD.

I. FEJEZET.

A föld ideális alakja és méretei.

Noha az első látszat a mellett tanúskodik, hogy sík korongon mozgunk, mégis ma már meg sem jelölhető régi korban szilárdan állt a Föld gömbalakjába vetett hit. Aristoteles e mellett egynéhány bizonyítékot hoz fel, melyek hasonlókkal kibővítve a legtöbb tankönyvbe is átmennek még mai napig is. Szerinte a Föld árnyéka a holdfogyatkozások alkalmával mindig köralakú; minthogy a víz mindig a legmélyebb helyet igyekszik elfogadni, természetes, hogy legalább a tenger felszine csak akkor lehet egyensúlyban, ha minden részecskéje egyenlő távolságban van a Föld középpontjától. De ezen feltétel csak akkor van betartva, ha a Föld legalább tengerrel borított része gömbi felület. Mindkét bizonyíték gyenge; az első, mivel pontosabb mérések szerint a Föld árnyéka, melynek a Hold tányérján mindig csak nagyon kis részletét látjuk, nem is köralakú, a másik, mert Aristoteles korában mechanikai okok nélkül kimondva, tisztán a speculativ deductió értékével bír. A Föld körülhajózása nem döntő érv, mert minden alakú test körülhajózható, távoli tárgyak eltünése és megjelenése, tengeren kivált, szintén csak akkor bírna bizonyító erővel, ha a tárgy látható részére és az észlelőtől való távolságra vonatkozólag pontos és bizonyára nem könnyű méréseket végeznénk. A többi bolygóra való hivatkozás szintén hamis, mert alakjukról legtöbb esetben csak jó távcsövön képezhetünk magunknak fogalmat, s ez alak a legtöbb esetben nem is gömbnek mutatkozik.

Az egyetlen helyes és szigorú bizonyítékot, mely épp oly módon érvényes a Föld szárazulatai, mint tengereire nézve, már Eratosthenes és Ptolomaeus ismerte; fontosságát emeli, hogy csak két igen általános és elemi módon beszerezhető tapasztalatra támaszkodik. Legyen (167. ábra) ABC, észak-dél irányában fekvő három egyenlő távolságú hely, tehát AB=BC; állítsuk fel ezekben a függő ónt, mely ezen helyek A′, B′, C′ zenithjét jelöli ki. Ha a zenithpontok távolságát mérjük a P′ égi pólusától, akkor az A′P′, B′P′ és C′P′ íveket nyerjük, melyek külömbségei A′B′, B′C′ íveket adják. A tapasztalat szerint e két ív egyenlő, tehát okvetlenül az A, B, C és A′, B′, C′ pontok két concentrikus körön feküsznek.



167 ábra. Az Eratosthenes-féle bizonyitás a Föld gömbvolta mellett.

Kissé általánosítva a dolgot, mondhatjuk: Ha dél-észak irányban a Földön egyenlő útdarabokkal tovamegyünk, akkor a sarkcsillag egyenlő ívekkel emelkedik a láthatár fölé (111.306 kilométernyi útnak mindig 1^0 emelkedés felel meg). — Ebből következik, hogy a Föld a meridián mentén gömbi görbültséggel bír. Lehet tehát gömb, vagy bármilyen, tengelyével kelet-nyugot irányban fekvő forgási test, pl. henger, vagy kúp. De ha nyugot-kelet irányban is utazunk egyenlő útdarabokkal, akkor egy és ugyanazon csillag egyenlő időközökkel kel, delel vagy nyugszik korábban. (Minden a φ geographiai szélesség alatt megtett 111.306 cos φ kilométernyi útnak 4^m-nyi korázás felel meg.) Ebből következik, hogy a Föld a kelet-nyugot vonalban is kör görbültségével bír. De olyan test, mely két egymásra merőleges irányban gömbi görbültséggel bír, szükségképen csak gömb lehet.

Ezen kifogástalan bizonyíték mellé csak egyet állíthatunk még, mely e mellett némileg helyt állhat. Ha egy pontban függélyesen emelkedünk a földfelület fölé, akkor szemhatárunk köralakú és mindig is az marad, bármely helyen tegyük is e kisérletet. Az emelkedés nagyobbodtával tágul e kör átmérője, a mi szintén arra mutat, hogy gömbön állunk. A bizonyíték csak azért hiányos, mert emelkedésünk korlátoltsága mellett ily módon a Föld felületének csak igen kis részét tekinthetjük át, s csak nehézkes és igen pontos mérések győzhetnek meg a láthatár köralakjáról, melynek méretét a nehezen számbavehető földi sugártörés is torzítja.

A szárazföldön már első tekintetre is észlelhető mélyedések absolute nem jönnek tekintetbe, sőt a legmagasabb hegyek sem torzítják észlelhető módon a Föld gömbalakját. A Föld később levezetendő méreteiből látjuk, hogy a legmagasabb hegy is a földsugárnak csak 720-ad részét teszi ki, akkora, mint egy porszem egy méter átmérőjű glóbuson. Különben könnyű szerrel megtehetjük, hogy minden mérést a tenger szinére redukálunk, s szigorúságban csak a vizek felszine számára követeljük a gömbalakot.

Ha tehát a legelső, néhány ívperczet pontosságban meg nem haladó csillagászati méréseket alapul elfogadjuk, akkor a Földet, különösen pedig a tenger felszinét gömbalakúnak tekinthetjük.

A gömb mérete egyetlenegy adattal, a sugár ismeretével meg van határozva. A gömbalakú Föld sugarának meghatározása képezi tehát most legközelebbi feladatunkat. A leghelyesebb. már Eratosthenes által választott módszer az, melyet a gömbalak bizonyításánál felhasználtunk. — Eratosthenes, alexandriai akadémikus (276—195. Kr. sz. e.) tudni vélte, hogy a nyári solstitium alkalmával a delelő Nap Syene városa egy kútjának fenekét süti; zenithtávolsága tehát 0. Ugyanakkor a nézete szerint Syenével ugyanazon meridiánon fekvő Alexandriában a Nap déli zenithtávolsága $7^0\ 12'$, vagyis a körkerület $\frac{1}{50}$-e volt. A 168. ábra érzékíti e viszonyokat. A syenei kút S a földsugár irányában fekvén, kijelöli egyszersmind folytatásával a zenithet, melyben a Nap áll, Alexandriában pedig a Napnak párhuzamos sugarai (a Nap csekély parallaxisától e helyen teljesen eltekinthetünk) a skaphe pálczájának árnyékát $7^0\ 12'$-nyire vetették a skaphe középpontjában kezdődő osztályzatra. Az aegyptusi katasteri felmérések szerint a két város távolsága 5000 stadion volt, a Föld egész kerülete tehát $50 \times 5000 = 250.000$ stadionnal egyenlő. A nyert számot ERATOSTHENES önkényileg 252.000 stadionra emelte, hogy a fok hosszát kerek számban 700 stadionra tehesse. A kerületből természetesen a ludolphi szám kétszeresével való osztással a sugarat is kaphatjuk.

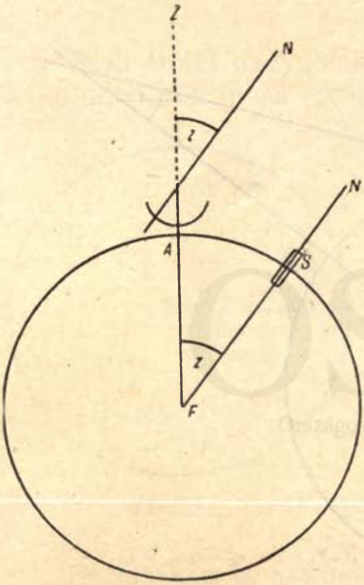
A módszer elvi helyessége kétségen kívül áll; a Föld ma követett felmérésének ugyanazon gondolat fekszik alapjául, csak a kivitele a távolságmérésnek lényegesen más, pontosabb. Még az sem képezhet kifogást e módszer ellen, hogy ERATOSTHENES hamis feltevésből indult ki, a mennyiben a két város nem ugyanazon meridiánon fekszik, hanem tényleg 2^0 $59'$ hosszkülömbséggel bír. A két hely szélességkülömbsége pedig 7^0 $12'$ helyett 7^0 $6'.4$.

A következő felmérést, melyről tudunk, ALMAMUN kalifa végeztette 827-ben a tadmori síkságon, Sindsar sivatagjában. A fok hosszául $56\,{}^2/_3$ arab mérföldet talált. Mindkét eredmény pontosságáról nem alkothatunk magunknak képet, mert sem az arab mérföldet, sem a stadiont nem redukálhatjuk ismert mértékre.

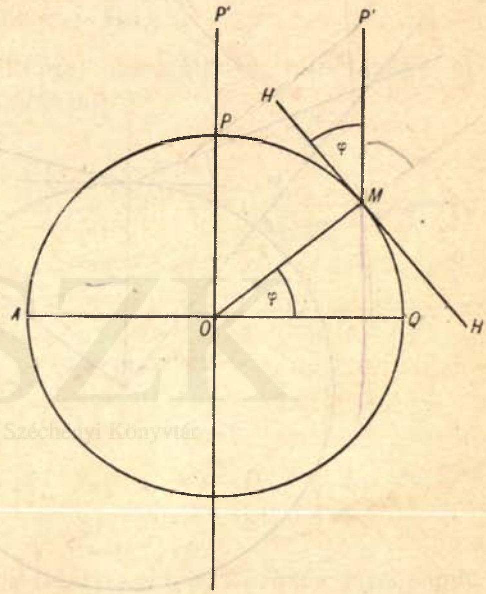
Ugyancsak ERATOSTHENES szellemében járt el 1525-ben FERNEL franczia orvos, a ki a páris-amiensi egyenes úton 1^0-ot tett meg s közben kocsikerekének fordulatait olvasta. Az út majdnem pontosan a meridiánban fekszik, a mennyiben az amiensi székesegyház csak $2'$-czel fekszik nyugotra a párisi observatoriumtól. Eredménye 56 747 régi, vagy 57 070 új toise a fok hosszára, a mi véletlenül oly pontosan vágó eredmény, hogy a hamisítás gyanuja is foroghat fenn.

Még számos más út is van a Föld sugarának meghatározására, természetesen egy sem bír azon pontossággal, mint ERATOSTHENES közvetlen methodusa. Mielőtt ezeket már elméleti érdekességüknél fogva is tárgyalnók, néhány szóval vissza kell mennünk a Földet borító coordinátarendszerre.

Mi sem világosabb, mint hogy a Föld meridiánjai, aequatora és parallelkörei annak gömbi felfogása mellett, csakugyan körök. És minthogy a körív mértéke a hozzá tartozó szögletnek, kizárólag *gömbi Föld* számára mondhatjuk, hogy a geographiai szélesség valamely hely aequatortávolsága, hogy geographiai hosszúsága egy tetszőleges kezdőmeridiántól számított távolsága az aequatoron mérve. Épp így világos, hogy az illető hely függélyese összeesik a földsugárral — ennek meghosszabbítása az égig jelöli ki a zenithet — s hogy a hely horizontja a gömbnek a sugárra mindig merőlegesen álló érintősíkja. Ily módon a 169. ábrában tüstént világos a sarkmagasság és geographiai szélesség azonossága. Az égi pólus P′ a Föld méreteihez képest végtelen távolságban lévén, P′O és P′M látósugarak egymással párhuzamosak. De HH horizont mint



168. ábra. Az Eratosthenes-féle fokmérés.



169. ábra. A sarkmagasság és geographiai szélesség azonossága.

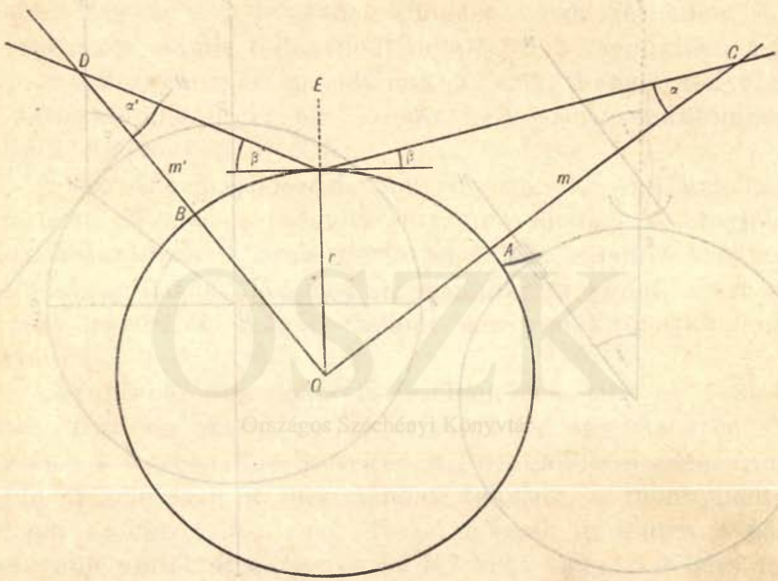
érintő sík merőlegesen áll a sugárra, a P′M-mel párhuzamos tengely merőlegesen az aequatorra, a HMP′ szöglet, mely a pólus emelkedése a horizont felett, ezért egyenlő az MOQ szöglettel, mely a hely geographiai szélességét méri.

Minthogy a függélyes egyszersmind a szabad esés iránya is, megtoldhatjuk az eddig mondottakat még azzal, hogy gömbalakú és nyugvó Földön a nehézségi erő iránya a Föld középpontja felé tart.

Vannak módszerek — s éppen ezek a legérdekesebbek — melyek segítségével a Föld méretei meghatározhatók a nélkül, hogy észlelési helyünket elhagynók, s módszerek, melyek helyváltoztatást követelnek. Ez utóbbiak közé tartozik ERATOSTHENES módszere is és a modern fokmérés.

Ha m magassággal emelkedünk a Föld felülete fölé, akkor (73. ábra, 149. lapon) a szemhatár depressziója φ és már levezetett egyenlet alapján áll:

$$\cos\varphi = \frac{r}{r+m}, \text{ a miből } r = \frac{m}{2}\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$



170. ábra. A Föld sugarának meghatározása DUFOUR szerint.

A módszer hátránya, hogy a nagy földsugár ennek igen kis törtrészét tevő m emelkedésből számítandó, és hogy a horizont depressziójába szigorúan tekintetbe nem vehető módon belejátszik a földi sugártörés. Rendesen — mint már korábban tettük — megfordítva használjuk a módszert a horizont depressziójának meghatározására.

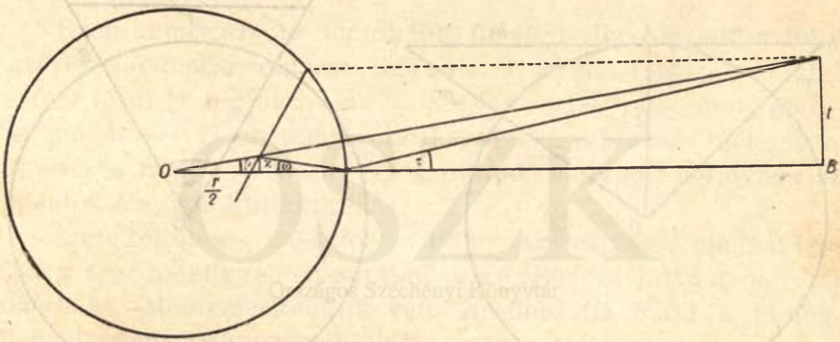
DUFOUR a tükrözés jelenségeit használja fel. Legyen (170. ábra) C valamely fényforrás, mely A észlelőhelyen m magasságban van, s melynek képe az E tóban tükrözve, B helyen m′ magasságban D-ben észlelhető. A fénysugarak a függélyessel α és α' szögletet képezzenek, azaz a tóban látott tükörképnek a két helyen mért nadirtávolsága α és α' legyen. Tekintettel a beesési és visszaverődési szöglet egyenlőségére, a sinustétel alkalmazása az OEC és OED háromszög mindegyikében ad:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{r+m}{r} \text{ és } \frac{\sin\beta}{\sin\alpha'}=\frac{r+m'}{r},$$

a miből β eliminatiója után

$$r=\frac{m\sin\alpha - m'\sin\alpha'}{\sin\alpha' - \sin\alpha}.$$

A módszer annál nagyobb sikerrel használható, minél nagyobb és különbözőbb m és m′ magasság.



171. ábra. Távoli tárgy képe a gömbi Föld viztükrében.

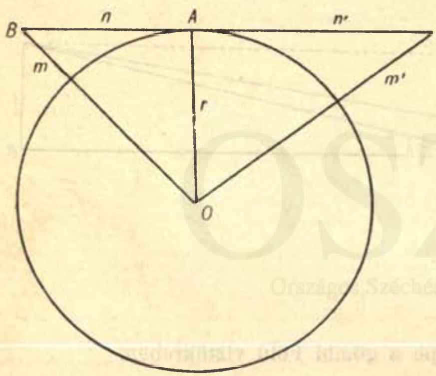
De máskép is használja fel Dufour a tükrözés jelenségét. Minden nagyobb kiterjedésű vízfelület (nagyobb méretek csak kapilláris és a partoktól származó vonzási deformatiók hiánya miatt kivánatosak) gömbi domború tükröt képvisel, melynek gyújtóponttávolsága tudvalevőleg a sugár felével egyenlő. Végtelen távolságban álló tárgy képe e gyujtópontban jön létre és kisebb, mint a tárgy maga. Ha ezt t-vel, amazt k-val jelöljük, akkor a 171. ábra szerint

$$\frac{k}{t}=\frac{r/2}{D},$$

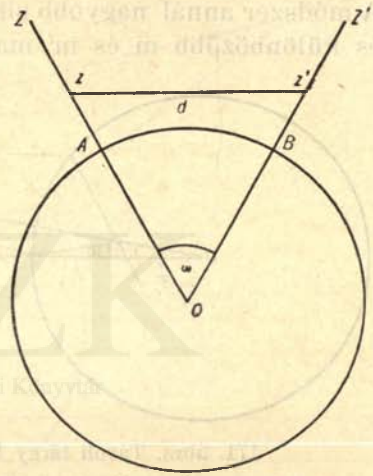
a hol D a t tárgy távolságát jelenti a Föld középpontjától. Ha τ és $\varkappa$ a tárgy és képének látszó nagyságát, sugarát jelenti. akkor a Föld felületén álló észlelő számára $\varkappa$ ugyanaz, mint a kép és tárgynak a Föld középpontjából nézett látszó ρ sugara, τ ellenben a kisebb D — r távolságból látott sugár. Mivel a látszó sugarak (addig, míg ívük a sinussal felcserélhető) viszszás arányban állanak a távolságokkal, lesz:

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{D-r}{D} \quad \text{vagy} \quad \frac{\varkappa - \tau}{\tau} = \frac{r}{D} = \pi \sin 1''.$$

Ez pedig teljesen ugyanazon egyenlet, melylyel a parallaktikus sugárnagyobbodást számítjuk. A Nap számára a kép és tárgy külömbsége csak 0″.04, de a Hold esetében $\frac{1}{4}'$-nél is nagyobb,



172. ábra. GHETALDI módszere a gömbi Föld sugarának meghatározására.



173. ábra. KLOSE földmérése.

és még nagyobb, ha a Holdnak valamely állócsillagtól való távolságát tekintjük tárgy gyanánt. A $\varkappa - \tau$ külömbség ekkor egyszerűen a holdtávolságnak a Föld középpontjára való reductiójával egyenlő, melyet egy korábbi alkalommal már levezettünk.

GHETALDI módszere abban áll, hogy (172. ábra) 2 helyen, B és C-ben m, illetve m′ magasságban jelt állítunk fel úgy, hogy ezek a közbeeső A észlelőhely horizontjában álljanak. Ekkor C-ből nézve úgy az A hely, mint a B jel ugyanazon egyenesben fekszik. Ha AB = n és AC = n′, akkor a PYTHAGORAS-féle tétel kétszeres alkalmazásából lesz:

$$(r+m)^2 - n^2 = (r+m')^2 - n'^2,$$

a miből

$$r = \frac{m'^2 - m^2 + n^2 - n'^2}{2(m - m')}$$

levezethető.

Klose pedig (173. ábra) két magas A és B helyből megméri a helyek mindegyikéből a másiknak zenithtávolságát és a két pont gömbi távolságát, a d ívet. Az ábrából közvetlenül következik:

$$\omega = z + z' - 180^0 \text{ és } \frac{\omega}{360} = \frac{d}{2r\pi},$$

a miből ismét

$$r = \frac{d}{\pi} \frac{180^0}{z + z' - 180}.$$

Ezen módszert is leginkább fordítva használjuk a földi légtörés meghatározására. Ugyanis a gyakorlatban — mint később látni is fogjuk — az $\omega = z + z' - 180^0$ egyenlet, melyben magát ω-t is meghatározzuk, nincs pontosan kielégítve. Az eltérés a fénytörés rovására irandó, melynek befolyása ez egyenlet alapján kiszámítható.

Igen tökéletes módszert a Föld nagyságának meghatározására egy megfigyelési pontból báró Eötvös Loránd is dolgozott ki. Megismerkedünk vele később, ha majd a tömegvonzási jelenségeket tárgyaljuk.

Még egy eredeti módszert, a Föld nagyságának meghatározására egy állópontból, a csillagászat is nyujt.

A Hold közép gyorsulása a Föld és Hold közös súlypontja felé az egyenletes körmozgás törvénye szerint

$$\gamma = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} . r,$$

ha r a Hold közepes távolságát, v lineáris sebességét, T siderikus keringését jelenti. Ha M és m illetve a Föld és Hold tömege, akkor e gyorsulás a Föld középpontja felé

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} r \frac{M}{M + m}.$$

Azonban a Nap hatása ezen gyorsulást állandóan csökkenti: a conjunctióban a Holdat vonván el a Földtől, az oppositióban ellenkezőleg a Földet távolítván el a Holdtól. Ezen hatás természetesen a Nap, Hold és Föld viszonyos állásától függ és ennek periodikus függvénye. Állandó része ezen hatásnak — mint azt a Hold mozgási egyenletének ide nem tartozó, de magában is könnyen levezethető taglalása mutatja — $\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{n'}{n}\right)^2$, a hol n és n′ a Hold, illetve Nap közepes siderikus mozgását jelenti. Sietek különben kijelenteni, hogy ezen tagnak teljes elhanyagolása az eredményt csak egy negyed perczenttel változtatná meg. A Hold tiszta gyorsulását a Föld vonzása folytán most már

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} r \frac{M}{M+m}(1+\nu)$$

alakban írhatjuk. De ez máskép is kiszámítható. Ha a Föld tömegvonzásának gyorsulása annak felületén g_0, aequatori sugara R, akkor a Newton-féle törvény értelmében

$$\gamma = g_0 \frac{R^2}{r^2}$$

is tehető. Ha még a Hold távolságát Π parallaxisával fejezzük ki, írván

$$r = \frac{R}{\sin \Pi},$$

akkor az egyenlet kellő megoldása

$$R = \frac{M+m}{M(1+\nu)} \cdot g_0 \sin^3 \Pi \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

eredményhez vezet. Ez természetesen azonos amaz egyenlettel, melylyel előbb a Nap parallaxisát számítottuk, csakhogy a Föld és Nap esetében a ν correctiótaghoz hasonló tag természetszerűen nem szerepel.

Az egyenletben szereplő egyes mennyiségek könnyen beszerezhetők. A siderikus keringés $27^d\, 7^h\, 43^m\, 11^s.5 = 2\,360\,591^s.5$ a Hold ugyanazon állócsillaghoz való visszatérésének időköze. A Hold tömege a Föld részeiben kifejezve, pontosan levezethető a tengerjárási jelenségekből; $\frac{m}{M} = 0{\cdot}012\,552$. A földvonzási gyorsulás g_0 állandója ingamérésekből levezethető, később bőven tárgyalandó módon; az aequator alatt $g_0 = 9{\cdot}814\,640$ méter. A $\nu = 0{\cdot}002\,7976$ faktor könnyen kiszámítható a Hold és Nap siderikus mozgásából, mely szerint $n = 13^0\,10'\,35''.0 = 47\,435''$ és $n' = 3548''.2$. Végül pedig a Hold parallaxisa szükségből ugyancsak egy és ugyanazon helyről határozható meg, ha nem akarnók már régen pontosan ismert értékét adoptálni.

A Hold hosszúsága és szélessége, mint láttuk, tetszésszerinti pillanat számára kiszámítható; ismeretes tehát rectascensiója és declinatiója is minden kivánt időben. E két adattal számíthatjuk a Hold magasságát tetszőleges napon, kelte és delelése között. Ha magasságát meg is figyeljük, akkor a keletpillanattól a delelésig folyton fogyó külömbséget fogunk észlelhetni, mely éppen a Hold magassági parallaxisával egyenlő. Ebből levezethető a horizontális parallaxis és a Holdnak ugyancsak megmért látszó sugarával a közepes horizontális aequatori parallaxis, mint már korábban egy példában is tettük. Ha $\Pi = 57'\,2''.06$-ban állapodunk meg, akkor a számítás szerint a Föld sugara $R = 6\,388\,216$ méter.

Ha az eddigi fontosabb fokmérések átlagos eredményét veszszük, akkor a gömbi Földnek sugara

Bessel	számítása	szerint	6 370 283 m.
Clarke	„	„	6 370 990 m.
Listing	felvétele	„	6 370 000 m.

mely értékek közül különösen az utolsó tünik ki könnyű megtarthatósága miatt. Tényleges számításainkban mindig ezt fogjuk megtartani.

A fokmérésekben lényeges haladást jelez Snellius hollandus fellépése. A mérés legnehezebb része ugyanis a meridián egy ívének pontos lemérése ismert hosszúságegységgel. Snellius ezt kikerüli a triangulatió-módszer segítségével. Lehetőleg sík és alkalmas talajon egy rövidebb vonalat mér, az úgynevezett bázist, de ezt a lehető legnagyobb gonddal. A bázis két végpontjáról theodolittal egy harmadik, mindkét pontról látható pontot irányítunk be (triangulatiós jelt, toronycsúcsot s hasonlót), megmérve azon azimuthszögleteket, melyeket e harmadik ponthoz húzott látósugár az alappal képez. A háromszögben ismeretes immár az alap és két mellette fekvő szöglet, tehát a többi két oldal kiszámítható. — Ezek egyike új bázisául szolgálhat egy második háromszögnek s í. t. Ha a jelek körülbelül a meridián irányában feküsznek, akkor a háromszöglánczolat is a meridián mentén húzódik el. Ha végül még az alap azimuthját is megmértük, akkor ennek és a többi háromszög oldalainak hajlása a meridiánhoz pontosan ismeretes és könnyű szerrel számíthatók azon meridiánívdarabok, melyek a fixpontokból a meridiánra húzott merőlegesek között feküsznek. Ezek összege a meridián azon íve, mely a legészakibb és legdélibb fixpont merőleges vetülete között áll ismert hosszegységben kifejezve. Ha az ív két végpontján most még a geographiai szélességeket is meghatározzuk, akkor ezek külömbsége az ív hosszát fokmértékben is megadja. E külömbség $\varphi' - \varphi$, az úgynevezett amplitudo. Ez úgy áll a 360^0-hoz, valamint a meridiánív hossza a Föld kerületéhez, a mely arányosságból a Föld sugara immár levezethető.

A gyakorlati kivitelben még két körülmény tartandó szem előtt: az egyes háromszögek síkjai és oldalai különböző hajlással bírnak a horizonthoz és különböző tengermagasságban feküsznek. Minél nagyobb ez, annál nagyobbnak adódik természetesen a lemért fok. Ezért szokás minden háromszögelést a tenger niveaujára redukálni, úgy hogy a fokmérés tulajdonképen abban áll, hogy meghatározzuk a tisztán tengerrel borított Föld méreteit, azon feltevés alatt, hogy a tenger mintegy számtalan csatornában folytatódik a continensek alatt. Ezért szükséges, hogy a háromszög oldalainak hajlását és tengerfeletti magasságát is meghatározzuk, a mit legpontosabban szintezéssel eszközlünk. A fokmérés háromszöglánczolatát tehát czélszerűen egészen a tengerig folytatjuk. Az utolsó háromszögek egyik oldalát rendesen szintén — mintegy második bázisul — mérjük meg. Ez oldal azonban egyszersmind ki is számítható, s a két eredmény külömbsége ellenőrzi a mérések pontosságát. Egyik vagy másik jelző pont geographiai szélességének, vagy valamely háromszögoldal azimuthjának megmérése ugyancsak ellenőrzésül szolgálhat. Az egész művelet legnehezebb része a bázis pontos megmérése; a többi művelet mind szögmérésre vezethető vissza, mely minden megkívánható pontossággal eszközölhető.

A következőkre igen fontos megjegyzés, hogy a fokmérés művelete lényegesen két teljesen elütő részből áll. Az egyik tisztán geodéziai, a másik tisztán csillagászati; emez adja a meridiánív nagyságát fokokban, amaz hosszmértékben kifejezve. És tovább menve: méréseink tisztán hosszmérésből és szögmérésekből állanak. Amazok teljesen függetlenek a Föld felületi erőítől, emezek azonban a libella vagy a vele egyjelentőségű függőón szükséges használata miatt lényegesen a Földnek nehézségétől függnek a mérés helyén, vagy a tömegeloszlástól a műszer körül. Ezen pontnak fontosságára egy újabb fejezetben térünk át.

Az első mérés, melyet Snell maga 1615-ben Alkmar és Bergen op Zoom között végzett, meglehetősen rossz; szerinte 1^0 hossza 55021 toise, a mi azonban a módszer elvi fontosságából mitsem von le. Még rosszabb Riccioli és Grimaldi olasz fokmérése 1645-ben, mely 1^0 nagyságát 62 650 toiseban állapítja meg.

Az első hasznavehető eredményt Picard érte el 1670-ben a Snell-féle módszerrel. Malvoisine és Amiens között szerinte 1^0 hossza 57 060 toise. Ugyanazon helyen majdnem ugyanazon számot nyerte, mint másfél század előtt Fernel, de Picard eredménye megbízhatóbb és két szempontból is nevezetes a fokmérések történetében. Picard alkalmazta először mérőeszközein a távcsövet, a mi sokkal nagyobb szabatosságot biztosított, és eredményéből vezette le Newton az általános tömegvonzás felismerésére oly fontos tényt, hogy a Holdat ugyanazon erő tartja meg körpályájában, melynek folytán a testek a Föld felületén esnek. Az e tárgyra vonatkozó korábbi számítások a földsugár tökéletlen ismerete miatt eredményhez nem vezettek volt.

A történeti hűség kedveért a fokmérésekben régebben használt toise mértéket tartom meg; ezért megjegyzem mindjárt e helyen, hogy a méter pontos hossza

$$1 \text{ m} = 0{\cdot}513\,074 \text{ toise} = 443{\cdot}296 \text{ vonal},$$

mely utóbbi számot külön törvény is megállapított.

II. FEJEZET.

A Föld sphaeroidos felfogásban.

Már a Picard-féle fokmérés idejében merültek fel kétségek a Föld gömbi alakja ellen, melyeket Newton és Huygens elméleti okokra utalva, támasztottak. Ha ugyanis, mint ők vélték, a Föld valamikor folyós, vagy csak plastikus is volt, akkor tengelyforgása következtében fellépő centrifugális ereje az aequatort kiduzzasztja, a forgási tengelyt megrövidíti, úgy hogy a meridián többé nem kör, hanem ellipsis. A Föld tehát e két tudós felfogásában valamely ellipsisnek kis tengelye körül való forgásából származott felület, melyet röviden sphaeroidnak, vagy rotatiós ellipsoidnak, vagy kéttengelyű ellipsoidnak szokás nevezni.

E felfogásban minden a Föld tengelyére merőleges metszet kör, de minden a tengelyt magában foglaló metszet ellipsis. Az aequator és parallelák tehát továbbra is körök maradnak, de a meridiánok mind összevágó ellipsisek. Mivel most a Föld teljes jellemzésére legalább is két adat kell, az aequatori fél tengely a és a forgási tengely b, melyek egyszersmind a meridiánellipsis fél tengelyei lesznek, egyetlen egy fokmérés természetszerűen nem elegendő, hanem legalább is kettő kell két különböző geographiai szélesség alatt.

Newton és Huygens már meg is állapították volt a Föld lapultságát számítás útján. Lapultságon értjük az aequatori és forgási féltengely külömbségét az aequatori féltengely egységeiben kifejezve. α-val jelölve a lapultságot,

$$\alpha = \frac{a - b}{a}.$$

Numerikus lapultság (ez az alakra jellemző)

E mennyiség szoros kapcsolatban áll a meridiánellipsis alakjával; ha ugyanis ennek excentrumosságát e-vel, numerikus excentrumosságát ellenben ε-nal jelöljük, hol is

$$\varepsilon = \frac{e}{a},$$

a-b lineáris lapultság

akkor tudvalevőleg

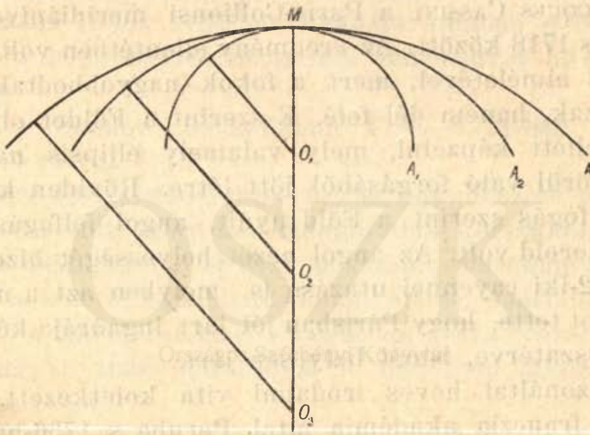
$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

a mi a lapultság egyenletével együtt

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \text{ vagy } \varepsilon^2 = 1 - (1 - a)^2$$

egyenlethez vezet.

A Föld alakjának és méretének kifejezésére rendesen vagy a két féltengelyt, vagy az aequatori féltengelyt a lapultsággal vagy ritkábban az excentrumossággal adjuk. Adhatjuk



174. ábra. Különböző görbületekhez tartozó ivek.

végül azon gömb sugarát is, mely a valódi Földdel egyenlő térfogattal bír, az úgynevezett közepes sugarat és a lapultságot. A sugarak egyike a Föld méretét szabja meg, a lapultság vagy excentrumosság az alakját, azaz a meridiánellipsis többé vagy kevésbbé elnyúlt voltát. A Föld behorpadásáról vagy belapultságáról szólani teljesen hamis dolog.

Newton a Föld lapultságát a 136. ábrához kötött gondolatmeneten $\frac{1}{289}$-ednek találta és ugyanazazon számhoz jutott Huygens is, csakhogy kevésbbé megbízható úton. E lapultság folytán az egyes fokok hossza most már nem egyenlő — hiszen az ellipsisben az ív hossza nem szolgálhat mértékéül a középponti szögletnek — hanem annál nagyobbak, minél inkább megyünk északra. Erről könnyen győződünk meg a 174. ábra segítségével, melyben egyenlő középponti szögletek által elmetszett különböző sugarú, de közös érintéssel bíró körívek láthatók. Minél kisebb az ív görbültsége, azaz minél nagyobb a hozzátartozó sugár, annál nagyobb az ugyanazon középponti szöglethez tartozó ív. Sphaeroid alakjánál fogva a Föld a forgási tengely végpontjaiban kisebb görbültséggel bír, mint az aequator alatt, emitt a fokok tehát rövidebbek, amott hosszabbak.

Az egyelőre kérdésül odavetett problema megoldására elhatározta a franczia akadémia, hogy a Picard-féle mérést észak és dél felé folytattatja. Lahire az Amiens Dunquerque, Dom. és Jacques Cassini a Paris-Collionsi meridiánívet mérte meg 1683 és 1718 között. Az eredmény ellentétben volt Newton és Huygens elméletével, mert a fokok nagyobbodtak ugyan, de nem észak, hanem dél felé. E szerint a Földet oly sphaeroidnak kellett képzelni, mely valamely ellipsis *nagyobbik* tengelye körül való forgásából jött létre. Röviden kifejezve: franczia felfogás szerint a Föld nyúlt, angol felfogás szerint lapult sphaeroid volt. Az angol nézet helyességét bizonyította Richer 1672-iki cayennei utazása is, melyben azt a nevezetes tapasztalatot tette, hogy Párisban jól járt ingaórája késik, míg Párisba visszatérve, ismét helyesen járt.

Mindazonáltal heves irodalmi vita keletkezett, melyet 1735-ben a franczia akadémia által Peruba s 1736-ban Lapplandba küldött expeditió volt hivatva eldönteni. Világos volt ugyanis, hogy a lapultság okvetlenül kis értéke mellett a meridiánívek kevéssé különböző szélességek alatt nem lehetnek vajmi különbözők, úgy hogy ily kedvezőtlen viszonyok mellett a megfigyelés elkerülhetetlen hibái nagy befolyást gyakorolnak. A perui expeditió tagjai voltak Bouguer és Lacondamine, a lapplandié Maupertuis és Clairaut, Camus, Lemonnier, Outhier és Celsius. — A két expeditió eredménye volt, hogy $1^0\ 31'\ 0''$ déli szélesség alatt $1^0 = 56\ 737$ toise, $66^0\ 20'\ 10''$ szélesség alatt ellenben $1^0 = 57\ 437$ toise. Ezáltal a Föld lapultsága az elmélettől kivánt irányban ki volt mutatva és csupán pontos meghatározása maradt vissza. Sőt a Lahire-Cassini-féle mérés revideálásánál ez is teljes harmoniába jutott Newton elméletével.

Ez időtől fogva sürűbben következnek egymásra az egyes fokmérések. Lacaille a Hold parallaxisának lemérése alkalmával 1750-ben a Jó-Remény fokán — 33° 18′ alatt a fok hosszát 57 037 toiseban állapította meg.

Boscovich és Lemaire Róma mellett + 43° szélességben, 1751—53-ban a Via Appián a fok hosszát 56 979 toisenyinak találták.

Liesganig Ausztriában s Magyarországban egy-egy mérést végzett; amaz + 48° 13′ alatt adott 1° = 57 086, emez + 45° 47′ szélesség alatt 1° = 56 881 toiset.

Beccaria és Canonica Turin mellett 44° 41′ szélesség alatt 1764-ben a fok hosszúságát 57 069 toisenyinak mérték.

Mason és Dixon 1764-ben Pennsylvániában + 39° 12′ szélességben a régi Eratosthenes-féle módszerrel 56 888 toiset találtak és

Reuben Burrow Bengáliában 1790—1791-ben + 23° 18′ alatt 56 725 toiset.

Az erre következő fokmérés az úgynevezett nagy franczia fokmérés volt, mely két szempontból korszakalkotó. Először is az eddigieknél sokkal hosszabb meridiánívet karolt fel és ezt a lehető legszabatosabban mérte, másodszor pedig egyenesen a méterrendszer megállapítására vezetett, mely ezóta — ugyan más definitióval — majdnem általánosan elfogadtatott.

Ezen, az újabb fokméréseknek is mintául szolgált művelettel kissé behatóbban is fogunk foglalkozni.

III. FEJEZET.

A nagy franczia fokmérés.

1790-ben Talleyrand követ, később külügyi minister, a nemzetgyűlésben egységes, minden időben állandó és mindig könnyen reconstruálható mértékrendszer megállapítását indítványozta. Az indítvány, mely a városról városra különböző mértékkel bíró Francziaországot is egységesebbé tehette s a művelt világ rokonszenvére méltán számíthatott, az akadémiához tétetett át. Ez idők leghíresebb mathematikusai, csillagászai és physikusai (Borda, Condorcet, Lagrange, Laplace, Monge) 1791. márczius 19-iki jelentésükben a három szóba jöhető hosszegységről nyilatkoztak: a másodperczinga, az aequator és a meridián hosszúságáról.

Az elsőnek behozatalát elvetették, mert benne a hoszszúsággal idegen elem, az idő és a napnak 86 400 másodperczre való osztása szerepel. A többi két mérték közül a meridiánt választották, még pedig a következő okoknál fogva: az aequator szabályos kör alakja nem bizonyosabb, mint a meridiánok hasonlósága; íveinek amplitudója csillagászati módon nem határozható meg oly pontosan, mint a meridiánívek; minden ország választhat kényelmes fekvésű meridiánt, míg az aequator aránylag kevés és csak civilizálatlan országokon halad át. A második ponthoz azon megjegyzés füzendő, hogy az aequator íve csak hosszúságkülömbségek meghatározása által mérhető le, a mi amaz időben, az electromos távíró hiányában, még a szélességmeghatározással egyenlő pontosan nem volt eszközölhető.

Mértékegységül választotta a bizottság a meridiánnegyed tízmilliomod részét, méter néven. Meghatározására javasolták a franczia meridiánív újból való lemérését, még pedig Dunquerquetől Barcelonáig $9^2/_3{}^0$ terjedelemben. A Spanyolország felé való folytatást azért tartották kivánatosnak, hogy a középső 45^0-os paralleltől délre is legyen mintegy $3^2/_3{}^0$-nyi részlet ismeretes, mindkét végpont a tenger szinében feküdjék s a Pyrenaeusok vonzó befolyása kiegyenlíttessék. A részletes munkaprogramm a következőben volt megszabva:

1. A dunquerque-barcelonai sarkmagasság-külömbség meghatározása, általában pedig az egész vonalon szükséges összes astronomiai mérések eszközlése.

2. A bázisok lemérése.

3. Az előbbi háromszögeléseknél használt háromszögek újból való mérése és kiterjesztése Barcelonáig.

4. Ingamegfigyelések a 45-ik szélességi fokon. Meg volt határozandó egy tetszőleges inga lengésszáma a 45^0-os parallelkörön, 0^0 hőmérsék mellett, légüres térben, a tenger szinén, hogy ezen inga hosszából a meridiánquadrans tízmilliomodrészével való összehasonlítás útján ez utóbbi hossza mindig reconstruálható legyen.

5. Határozott térfogatú destillált víznek súlymeghatározása légüres térben, az olvadó jég hőmérséklete mellett.

Az akadémiai bizottság e javaslatait a nemzetgyűlés 1791. márczius 26-iki ülése elfogadta és tüstént a kivitelhez láttak. Ennek foganatosítása mindazonáltal késedelmet szenvedett, mert a szükséges műszerek csak mintegy 15 hó mulva készültek el. 1792. június végén kelt útra Delambre és Méchain; amaz a Dunquerquetől Rodezig terjedő 380 000 toise és két bázis, emez a Rodeztől Barcelonáig terjedő 170 000 toise megmérését vállalta el. A munka Méchain előnyére volt osztható, mivel az északi ívet már két ízben megmérték. A minden időre classikus mérés történetét és lefolyását Delambre „Base du systéme métrique décimal“ (3 köt. Páris, 1806—1810.) czímű nagy művében írja le, melynek discours préliminaire-je valóságos regényszámba megy. A királyi ajánlólevelek a forradalom kitörésének küszöbén többet ártottak, mint használtak. Méchain útjának már harmadik postaállomásánál feltartóztattatott és csak ügygyel-bajjal szabadult. Minél távolabbra jutott azonban délre, annál szabadabban mozoghatott. Spanyolországban zavartalanul dolgozhatott, de a következő évben baleset folytán két hónapig ágyhoz volt kötve, s jobb karjának egy álló évig nem vehette hasznát. E pillanattól fogva a szerencse kerülte őt és a következő négy év csak bánatot és kellemetlenségeket szerzett neki. Spanyolországban befejezte munkáját, de a Francziaországban rá eső részébe nem foghatott, mivel a Spanyolországgal való háború kitörése után fogságba esett. Később szabadon bocsátották s megengedték, hogy Olaszországba mehessen.

Delambre szenvedései még sokkal nagyobbak voltak, s már Montlhéryben vették kezdetüket. Jelzőpóznáját lerombolták, s noha a község helyreállíttatta, csakhamar ismét eltünt. Malvoisineben a trignonometriai jel felállításához fogni sem mert. Montjaiben fegyveres csőcselék akadályozta őt. Jonquièresben csak hasonló nehézségek leküzdése után észlelhetett s Belle Assiseben alig fejezhette be megfigyeléseit, midőn fegyveres csoport fogságba ejtette, szakadó esőben Lagnybe hurczolta; fogságából csak a következő reggel szabadult ki. Ezentúl is minden lépésen feltartóztatták, a permanensen ülésező községi tanács elé vitték, mely esetről-esetre döntött, vajjon szabadon mehessen, avagy fogságban maradjon.

A már nem létező kormány papirjait a nemzetgyűlés közoktatásügyi bizottságának ajánló-levelével cserélte fel, de nem jobb sikerrel. Epinayben ismét feltartóztatták DELAMBRE-t; kénytelen volt műszereit kibontani s az egybegyűlt csőcseléknek megmagyarázni használatukat. Minden újonnan jött kiváncsi az előadás ismétlését követelte. A vége mégis csak az volt, hogy fegyveres fedezet alatt St. Denisbe kisérték. A piaczon ácsorgó fegyveres csapatokon át kellett küzdenie magát, kibontani ismét műszereit, feltörni összes ajánló-leveleit. Az est közeledése csak növelte az emberek türelmetlenségét, a kik az adott geodéziai előadásból vajmi keveset értettek és már hallatszott hang, mely az akkor divatos minden nehézséggel gyorsan végező eszközt javasolta. A kerületi elnök jóindulatilag meg akarta menteni DELAMBRE-t, műszereit és irományait lepecsételtette és hivatalosan elzárta, ügyének vizsgálatát pedig elhalasztotta. Így időt nyert DELAMBRE, előadhatta a nemzetgyűlésnek helyzetét, és már harmadnapon a nemzetgyűlés decretumát kapta, mely vállalatát az összes állami és községi hatóságoknak és a nemzetőrségnek védelmébe ajánlotta. Ez segített és a munka most zavartalanul folyhatott tovább.

De már a következő években ismét komoly nehézségek merültek fel. A nemzeti conventus kiváló republikánus erények hiányának ürügye alatt BORDÁ-t, LAVOISIER-t, LAPLACE-ot, COULOMB-ot, BRISSON-t és DELAMBRE-t letették a commission des poids et mesures tagságáról, mert a fokmérés hosszú munkáját sokalták, s az akadémia mellőzésével provisorikus métert állapítottak meg törvényhozólag. DELAMBRE kérelmére ugyan még rövid halasztást nyert, de 1794. január 24-én ő is kénytelen volt méréseit befejezni és megfigyeléseit meg számításait beszolgáltatni.

1795-ben végre jobbra fordult ismét a dolog; e conventus a munkálatok folytatását határozta s DELAMBRE és MÉCHAIN ezek befejezésével bízattak meg. DELAMBRE 1797. augusztus vége felé készült el háromszögeinek mérésével s 1798 nyarán a két bázis mérését is fejezhette be. MÉCHAIN sokféle kellemetlenség által tartóztatva, csak 1798 őszén készült el. Midőn a két tudós ez év novemberében végre Párisba visszatért, már azon külföldi tudósokat is ott találták, a kik a kormány meghívása folytán a számításokban s a mérések tanulmányozásában résztvettek. A számításokat TRALLES, SWINDEN, LEGENDRE és DELAMBRE külön-külön végezték. Szerintük a Dunquerque-

Barcelonai ív $9^0 6738$ és hossza 551 584·72 toise du Pérou 13^0 R. mellett. Ebből a lapultság értéke $\frac{1}{334}$ és a meridianquadrans 513 0740. Utóbbi számból levezethető már a méter: 1 m = 0·513 074 toise = 443·295 936 vonal, melyet a VII. év messidor 6-ikán (1799. június 24.) hozott törvény 1 m = 443·296 vonalának mondott ki a perui fokmérésnél használt toisenak 13^0 R. hőmérséklet mellett.

Lenoir azután platinából és iridium keverékéből készítette az étalon protype du mètre-t, mely 0^0 mellett a törvényes hosszúsággal bír. Ezt 1799. június 23-ikán elhelyezték az Archives nationales de la République-ban, később pedig az Observatoriumba, majd a Sèvresben levő „Bureau international des poids et mesures“-be került.

Ha ez étalon elveszne, akkor a fokmérés tudósainak véleménye szerint legegyszerűbben a másodperczinga hosszúságából volna levezethető; Borda, Cassini és Méchain annak hosszát a párisi observatoriumban légüres térben 440·5593 toise du Pérou vonalának, vagy 0·9938 m.-nyinek találta.

Itt megjegyezzük mindjárt, hogy a keresett méter tulajdonképen teljesen eszményi hosszúságegység, mely újabb fokmérések által korántsem ellenőrizhető. Ha pl. Bessel vagy Clarke számításait veszszük alapul, akkor a meridián 40 milliomodrésze már nem egy méter leend, hanem Bessel-nél 0·085, Clarke-nál 0·189 mm.-rel, tehát nagyon is mérhető menynyiséggel több. Ennek folytán ma a métert nem a földquadrans 40 milliomodrészének definiáljuk, hanem azon étalonnak 0^0 hőmérséklet melletti hosszául, melyet nevezett intézetben őriznek s melynek hiteles másolatai ma már majdnem minden nemzet archivumában megvan.

Egy absolut hosszegységnek eszménye azért ma is felvethető még, de alig van rá kilátás, hogy ezt más, mint optikai úton oldjuk meg. Egy határozott szinű fénynek — pl. a natriumgőz sárga fényének — hullámhosszúsága, vagy, hogy menten minden esetleges hypothetikus feltevésről szólhassunk — interferentia-köze teljesen állandó, nemcsak a Földön, hanem még a világürben is mindenütt. Ezen aránylag könnyen megmérhető mennyiség a Fraunhoffer-féle D_1 vonal számára például 0·000 589 499 mm. Hátránya csak az, hogy ez egység oly kicsiny, hogy a mérés elkerülhetetlen hibái mellett nagyobb egységhez csak tetemesen nagy számmal való szorzás által jutunk, a mi által az elkövetett hiba is természetesen ugyanazon arányban nagyobbodik, tehát könnyen érezhetővé válik.

A Föld meridiánjának kerülete különben elpusztíthatlan mértéket már csak azért sem adhat, mert állandóságáról bizonyítékunk nincs. Sőt a valószinűség, mint a nap tartamáról már megjegyeztük, éppen ellenkezője mellett szól.

A franczia fokmérés műszerei a röviden ezelőtt feltalált Borda-féle ismétlőkörök voltak, melyek Lenoir híres műhelyéből kerültek ki. Már 1787-ben sikerrel használták őket a párisi és greenwichi csillagda astronomiai összekapcsolásában az addig használt kényelmetlen fali quadránsok és sectorok helyett. Köreik körülbelül 20 cm sugárral bírtak s 400^0-ra, ezek mindegyike 10 részre, voltak osztva. Nonius segítségével e fokok századrészét lehetett még leolvasni és a négy mikroskop használata mellett még az ezredfok némileg biztosan becsülhető volt. Ez a szokásos körosztás szerint 3″.24-nek felelt meg. A kör középpontjában mozgó távcső a körrel együtt a horizonthoz tetszőleges fekvésbe hozható és az osztási hibákat lehetőleg mellőzi az ismétlési kör, mely éppen úgy működik, mint ezt a repetitiós theodolitnál leírtuk.

A főbázist Delambre a Páristól délre fekvő Melunba vezető országútnak keleti szélén tűzte le, mely különösen Melun és Lieursaint között kedvezően, egyenesen és síkon halad. A mérésre együttesen négy teljesen egyenlő platinvonalzót használt, melyek szintén Lenoir keze alól kerültek ki. Hosszúságuk 2 toise, szélességük és vastagságuk 6, illetve 1 vonal volt. A legnagyobb és legrövidebb vonalzó külömbsége Delambre mérései szerint az egész hosszúságnak csak 500 000-edrészét tette ki, a hosszúság pedig a toise du Pérou 13^0 R. hőmérséklet mellett kétszerese volt. Minden platinvonalzót egy körülbelül $\frac{1}{2}$ lábbal rövidebb vörösréz-vonalzó födött, mely egyik oldalán a platinlemezzel szilárdan össze volt kötve, különben pedig szabadon rajta nyugodott. Ily módon hőmérsékletváltozások következtében minden lemez görbülés nélkül terjedhetett, s hosszaságaik külömbsége minden pillanatban a hőmérséklet mértékéül is szolgálhatott. E külömbség pontos mérése czéljából a rézlemez szabad végének közepe bevágást tartalmazott, melyben a platinlemezre erősített osztás mozoghatott. A rézvonalzón erősített nonius segítségével a különbség az egész hosszúságnak 200 000-edrészéig pontosan le volt olvasható, amiből a platinrúdnak 0^0-ra redukált hosszúsága pontosan számítható.

A platinlemez szabad vége szánvezetésben eltolható nyelvvel bírt, melynek hossza vagy kitolása ugyancsak osztás és nonius segítségével az egész lemez 200 000-edrészéig, vagy mikroskóp használatával egy milliomod toiseig pontosan határozható meg. A bázisméréshez ugyanis a négy vonalzó szándékosan szabad közök meghagyásával állott egymásután. E közök megmérésére szolgált a kitolható nyelv.

A kettős vonalzók erős faléczen nyugodtak oldalt alkalmazott peczkek között, úgy hogy a meleg folytán teljesen szabadon terjedhettek, de oldallagos eltolódást nem szenvedtek. A léczet két erős vasháromláb hordta, a mely állítócsavarjával közel vízszintesen volt beállítható. E háromláb nem a földön, hanem három erős vascsúcscsal bíró czölöpön állt; az utóbbi mélyen besülyesztve a talajba az egész bázismérő eszköznek változatlan hosszúságot biztosított.

A napsugárzás ellen a vonalzót a léczre erősített födél védte, mely egyszersmind a mikroskópokat is tartalmazta. Hogy a vonalzók egymásután egyenes vonalban lefektethetők legyenek, minden födél gerinczvonalán két dioptra állott.

A vonalzók hajlását a horizont felé úgynevezett klinometer mérte. Az egyenszárú háromszög alapja a vonalzó hosszának körülbelül $\frac{1}{3}$-át tette és libellával ellátott forgatható karral bírt, melynek elforgatása noniussal 1′-re pontosan le volt olvasható. A kart a libella beálltáig kellett forgatni, majd az operátiót átfektetett klimometerrel ismételni. A két leolvasás félkülömbsége adja a hajlást. Befolyása könnyen mérlegelhető; ha ugyanis a vonalzó hossza l, hajlása a horizonthoz i, akkor horizontális vetülete l cos i. Mivel i mindig nagyon kicsiny, ezért cosinusa mindig annyira közel áll az egységhez, hogy a hajlásnak egész perczekre való ismerete teljesen elegendő. Ugyanez oknál fogva a számításnál előnyösebb, ha a mérés javítását keressük, azaz $l - l \cos i = 2 l \sin^2 \frac{i}{2}$, mely érték mindig levonandó a vonalzó l hosszából, ha ez i hajlással bír.

A műszerek megismerése után lássuk most magát a műveleteket.

A bázis mérése.

E leírásban egészen Delambre-t követem; jelentése egyrészt pontos képét adja az egész műveletnek, másrészt pedig élénk világításba helyezi azon példás gondot, melylyel a megfigyelések eszközöltettek.

Az első dolog volt a bázis két végpontjának maradandó kijelölése. A sziklás altalajt felkeresve, ezen tartós oszlopot emeltek, melynek tetejét $\frac{2}{3}$ toise oldalhoszszal bíró négyzetes kőlap képezte. Az oszlop felett emelt jel csúcsából függélyest bocsátva le, ennek talppontja körül kört húztak a lapra. E körön belül kivájta Delambre a követ és a mélyedésbe vörösréz-hengert sülyesztett, melyet ólom beöntése által rögzített meg. Felső felületén azután több, a kőlapon levő körrel concentrikus kört vont, melyek közös középpontja a bázis egyik végpontja. Az északi Lieursaintnél, a déli Melunnál fekszik. Mindkét helyet azután kőlappal jól megvédettek és betakartak.

A végpontok kijelölése után az egész bázis hosszában 100 toisenyi távolságban egyenes vonalban czölöpöt hajtottak a Földbe annak felületéig. A mérést az 1-ső számú vonalzó kezdte; Delambre végpontját lehetőleg a bázis kezdőpontjába illesztette és a vonalzó tetején levő dioptrán át az első, 100 toisenyi távolságban álló czölöpre helyezett vertikális mirére irányította. Az 1-ső vonalzó után fektették le a többi 3-at, mindegyik között kellő közt hagyva s mindegyiket úgy, hogy a négy vonalzó 8 dioptrája a miréül szolgáló rúd középvonalán legyen.

A niveaut most ráhelyezték az 1-ső vonalzóra, libellájával keletnek; a leolvasás két észlelőkönyvbe jegyeztetett és összeolvastatott tüstént. A libella megfordítása után ugyanazon elővigyázattal éltek, s teljesen így jártak el a többi három vonalzóval is. Delambre azután a thermometerül szolgáló noniust olvasta le, majd a platinvonalzók nyelvét tolta előre addig, míg a szomszédos vonalzót nem érintette, s a leolvasások szintén a kettős könyvben jegyeztettek fel. Egy segéd a beállítást és a mikroskópon való leolvasást gondosan ellenőrizte. Azután következett ugyanazon operatió a 2-ős és 3-as számú vonalzón. Ennek befejezése után két háromlábat erősítettek meg a 4-es vonalzó előtt, s erre tették az 1-es vonalzót, úgy hogy most a 4-es előtt feküdt. Ennek beirányítása és hajlásának leolvasása után leolvasták a 4-es vonalzón a hőmérőt és az 1-es vonalzóval való érintésig kitolt nyelv hosszát. Azután került hasonló módon az 1-ső vonalzó elé a 2-ik s így sorban, a bázis végéig. Ha az este véget vetett a megfigyeléseknek, akkor Delambre méréseit mindig az 1-ső vonalzóval szakította meg, ugyanannál, melylyel másnapon ismét kezdte. Ezt ugyanis provisorikusan beirányította és felállította, szabad vége alatt czölöpöt vert a földbe egészen a talaj felülete alá, s erre ólomlemezt erősített. Az 1-es vonalzó hajlásának, a mögötte fekvő 4-es vonalzó hőmérsékletének és nyelvének leolvasása után függélyest bocsátottak 1-nek végponjából az ólomlapra, a talppontot kis keresztező egyenessel jelölve meg. Erre az ólomlapot födéllel betakarták, a lyukat pedig behantolták. Másnap ellenőrizték az 1-ső vonalzó helyzetét és a művelet folytatódott.

Delambre négy munkással és három segéddel dolgozott. Amazok a czölöpök és a vonalzó szállításával, emezek a beállításával és a könyvek vezetésével voltak megbízva. Delambre a mikroskópok és noniusok leolvasását és az egész operatió minden részében való ellenőrizését vállalta el. Minden este Delambre másolatot vett minden megfigyelésről, melyet a két észlelőkönyvvel való szorgos összehasonlítás után segédeivel együtt aláírt. E másolatok lehetetlenné tették, hogy a legkisebb 1792. júniusától 1798. szeptemberéig észlelt adatot is megváltoztassák.

A bázis alignementja (beirányítása) a VI. év floréal 1-sén (1798. április 20.) kezdődött, a mérések floréal 5-én (április 24.) és végződtek prairial 15-én (június 3-án). A bázis hossza minden szükséges reductió megtétele után a tengerszín magasságában és 13^0 R. hőmérséklet mellett 6075·900 069 toiset tett ki.

Ugyanazon gonddal mérte Delambre a második ellenőrző bázist Salces és Vernet között a Narbonnetól Perpignanig vezető úton; alignementje 1798. július 31-én kezdődött, mérése augusztus 7-től szeptember 17-ig tartott. Ennek hossza ugyanazon körülmények között 6006·249 toiset tett ki.

Az észlelési könyv bemutatása kedvéért álljon itt a bázismérés kezdete az első négy vonalzóval és ezek legelső átfektetése után.

Vonalzó	Fémhőmérő	Nyelv	Libella		Kétszeres hajlás	Horizontra reductió
1	416·0	409·8	53·2	66·2	13·0	9·0
2	416·5	235·9	81·4	38·0	43·4	101·4
3	415·0	346·4	50·4	68·4	18·0	17·3
4	420·4	506·6	72·1	48·1	24·0	30·5
1	418·3	464·8	83·3	36·0	47·3	119·8
2	420·0	406·7	72·1	47·4	24·2	31·5
3	417·0	415·7	66·4	53·4	13·0	9·0
4	424·1	464·7	75·2	44·3	30·4	50·2.

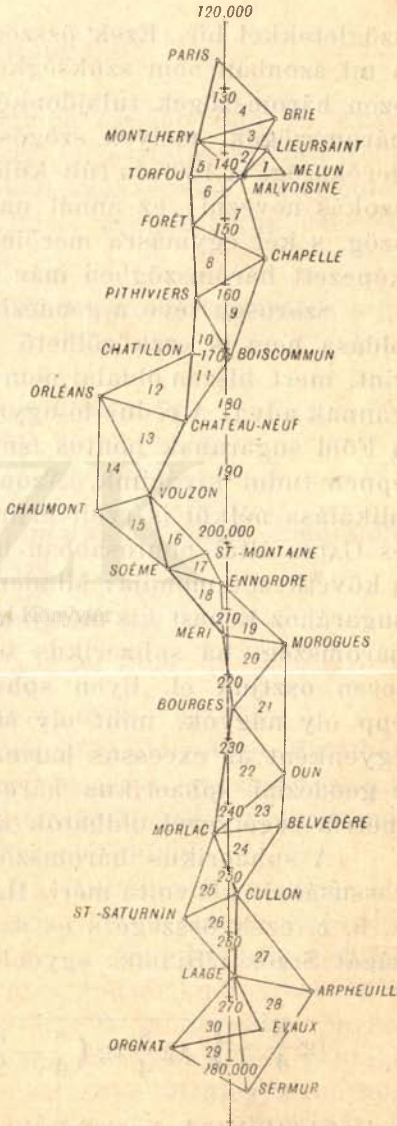
Az első rovat a vonalzó számát jelenti; ezek mindig változatlan sorrendben következnek egymásra; a második rovat a fémhőmérő leolvasását adja; mind a négy eléggé párhuzamos járást tanusít; a harmadik rovat a szomszédos vonalzók érintkezéséig kihúzott nyelv hosszát adja a toise 100 000-edrészeiben kifejezve. E leolvasás minden egyes vonalzó hosszához teendő. A negyedik oszlop első rovata a niveau leolvasása, ha a libella keletnek, a második, ha nyugotnak mutat. A két szám összege közel állandó, jeléül annak, hogy a mérések alatt zéruspontja nem változott. A két szám külömbsége adja az 5-ik rovatban a kétszeres hajlást a niveau részeiben kifejezve, mely 5′ értékű. Az első 13·0 leolvasás megfelel tehát 65′.0-nek, az egyszerű hajlás e szerint 32′ 30″. Az utolsó oszlop végre a $2 l \sin^2 \frac{i}{2}$ mennyiséget tartalmazza, melyet a mérőrúd hosszából le kell vonni, hogy vízszintes hosszát kapjuk.

Minden távolság toiseban van kifejezve, melynek hossza pontosan az első vonalzó felével azonos. Ezen vonalzó szolgált azután a métre prototype elkészítésénél is alapul.

A triangulatió.

A háromszögek lánczolata egészben 115 háromszöget tartalmazott és Dunquerque mellett kezdődve a barcelonai fort Montjouy-ban végződtek. A két végponton kívül még Párisban, Evauxban és Carcassonneban történtek szélességmérések is, úgy hogy a meridiánív nemcsak egészében, hanem négy részre osztva is ki volt számítható. A háromszögoldal azimuthját szintén öt helyen mérték meg, Wattenben Dunquerque mellett, Párisban, Bourgesban, Carcassonneban és Montjouyban. A triangulatió teljes megértésére legjobb lesz, ha ennek legalább egyik darabját önállóan mi is számítjuk. Felhasználjuk a Páris és Evaux közötti darabot, melynek két végpontján sarkmagasságmeghatározásunk van, melyben a főbázis fekszik, s melynek egyik azimuthját is mérte Delambre. Adatokul felhasználjuk a mondottakon kívül az egyes háromszögek lemért és a tengerszinre redukált szögleteit. A háromszögek ezen lánczolatát igen közel 1 : 3 millió arányban a 175. ábra tünteti fel.

As első háromszög: Melun-Lieursaint-Malvoisine 6075·90 toisenyi bázissal és



175. ábra. Részlet a nagy francia fokmérés háromszöglánczából.

Melun	=	63° 43′ 34″.08
Lieursaint	=	75° 39′ 29″.81
Malvoisine	=	40° 36′ 56″.81

szögletekkel bír. Ezek összege 0″.70-czel nagyobb, mint 180°, a mi azonban nem szükségképen észlelési hiba. Hiszen mindezen háromszögek tulajdonképen nem sík, hanem sphaerikus háromszögek, melyek szögösszege mindig nagyobb, mint két derékszög. A 180°-on túli külömbséget sphaerikus excessusnak szokás nevezni; ez annál nagyobb, minél nagyobb a háromszög, s két egymásra merőleges meridián s az aequator által képezett háromszögben már 90°-ot tesz ki.

Szorosan véve a geodéziai sphaerikus háromszögek megoldása nem is eszközölhető a gömbi trigonometria tana szerint, mert hiszen oldalai nem fok-, hanem hosszúságmértékben vannak adva. A reductió ugyan lehetséges, de megkivánja már a Föld sugarának pontos ismeretét, melyet a fokmérés által éppen tudni kivánunk. Azonban a számításnak minden complikálása nélkül is czélt érünk egy Legendre által felfedezett és Gauss által pontosabban is bizonyított tétel alapján, mely a következőt mondja: Minden gömbi háromszög, mely a gömb sugarához képest kis méretekkel bír, úgy tekinthető, mint sík háromszög, ha sphaerikus excessusát a szögletekre egyenletesen osztjuk el. Ilyen sphaerikus háromszög oldalai tehát épp oly nagyok, mint oly síkháromszögé, melynek szögletei egyenként az excessus harmadával kisebbek. E szerint tehát a geodéziai sphaerikus háromszögek teljesen a sík trigonometria segélyével oldhatók meg.

A sphaerikus háromszög relativ kicsinységét éppen excessusának kis volta méri. Ha a sphaerikus háromszög oldalai a, b, c, ezek összege s és az excessus E, akkor ennek nagyságát Simon l'Huilier egyenlete alapján

$$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{s}{4}-\frac{a}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{s}{4}-\frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{s}{4}-\frac{c}{2}\right)},$$

számíthatjuk. A gyakorlatban alig fordul elő oly háromszög, melynek minden oldala 1°, tehát 111 km. vagy 57 000 toise volna. De téve ezen esetet, kapunk

$$\operatorname{tang}\frac{E}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} 45'.\,(\operatorname{tg} 15')^3},$$

vagy mivel kis szögletek tangensei az ívekkel arányosak:

$$\frac{E}{4}\sin 1'' = \sqrt{3}(\operatorname{tang} 15')^2,$$

a miből $E = 27''.2$ következik. Midőn később Biot és Arago a franczia fokmérést a Balearokig terjesztette ki, egy rendkívül nagy háromszög fölvétele vált szükségessé. Noha ennek oldalai 82 556, 72 960 és 56 559 toise, a sphaerikus excessus mégis csak 39″.

Ha $\frac{0''.7}{3} = 0''.23$-et a fent említett háromszög minden szögletéből levonunk, marad:

Melun	=	63^0 43′ 33″.84
Lieursaint	=	75^0 39′ 29″.58 és
Malvoisine	=	40^0 36′ 56″.58.

A második háromszöghez támaszkodó oldal, Lieursaint-Malvoisine a sinustétel segítségével

$$6075{\cdot}90\,\frac{\sin(63^0\,43'\,33''.84)}{\sin(40^0\,36'\,56''.58)},$$

a minek logarithmusa gyanánt 3·922 6826-t nyerünk.

Ezen értékkel a második, Lieursaint-Malvoisine-Montlhéry háromszögben meghatározzuk ugyancsak a sinustétel és a lemért szögletek segítségével a Malvoisine-Montlhéry oldalt, mely ismét a harmadik háromszög kapcsoló oldala.

Ily módon a következő táblázat keletkezett, melynek első rovata a harmincz fellépő háromszög folyó számát, másodika fixpontjait, harmadika sphaerikus, a tengerszinre redukált szögleteit adja. A negyedik rovat a sphaerikus excessust, az ötödik ennek harmadával kisebbített sík szögleteknek másodperczeit adja. A sinustétel alkalmazása végül a 6-ik rovatban közölt kapcsoló oldal logarithmusát adja. Megjegyzem, hogy a fixpontok két elseje mindig a háromszög alapját, a hatodik rovatban levő kapcsoló oldal logarithmusa tehát mindig a következő háromszög első két pontjának távolságát adja. Az 5., 6., 10., 11., 17., 18. háromszögben az excessus negativ, a mi az elkerülhetetlen megfigyelési hibák rovására irandó. Ez esetben az excessus harmadát hozzáadtuk a gömbi szögletekhez:

Háromszög száma	Fixpontok	Sphaerikus szöglet	Excessus	Sikszög	Kapcsoló oldal logarithmusa
	Melun	63° 43′ 34″.08		33″.84	
1.	Lieursaint	75° 39′ 29″.81	0″.70	29″.58	3·922 6826
	Malvoisine	40° 36′ 56″.81		56″.58	
	Lieursaint	53° 37′ 55″.00		54″.70	
2.	Malvoisine	76° 47′ 43″.28	0″.90	42″.98	3·947 0824
	Montlhéry	49° 34′ 22″.62		22″.32	
	Malvoisine	74° 8′ 42″.35		41″.99	
3.	Montlhéry	65° 18′ 40″.77	1″.08	40″.41	4·117 3051
	Brie	40° 32′ 37″.96		37″.60	
	Brie	55° 51′ 49″.40		48″.75	
4.	Montlhéry	62° 54′ 23″.97	1″.97	23″.31	4·092 3989
	Paris (Panthéon)	61° 13′ 48″.60		47″.94	
	Montlhéry	55° 10′ 0″.10		1″.03	
5.	Malvoisine	43° 52′ 2″.31	—2″.80	3″.25	3·866 7520
	Torfou	80° 57′ 54″.79		55″.72	
	Torfou	81° 36′ 49″.23		49″.90	
6.	Malvoisine	53° 22′ 24″.25	—2″.03	24″.93	4·012 5032
	Forêt	45° 0′ 44″.49		45″,17	
	Malvoisine	70° 51′ 38″.40		37″.77	
7.	Forêt	62° 47′ 30″.17	1″.89	29″.54	4·128 3420
	Chapelle	46° 20′ 53″.32		52″.69	
	Forêt	68° 36′ 0″.17		59″.16	
8.	Chapelle	51° 5′ 14″.27	3″.03	13″.26	4·158 4244
	Pithiviers	60° 18′ 48″.59		47″.58	
	Chapelle	31° 58′ 53″.92		52″.87	
9.	Pithiviers	91° 55′ 6″.75	3″.15	5″.70	3·963 3212
	Bois Commun	56° 6′ 2″.48		1″.43	
	Pithiviers	31° 53′ 1″.64		2″.40	
10.	Bois Commun	52° 33′ 4″.73	—2″.26	5″.48	3·688 1718
	Chatillon	95° 33′ 51″.37		52″.12	
	Bois Commun	62° 31′ 29″.63		30″.34	
11.	Chatillon	93° 0′ 16″.56	—2″.14	17″.27	4·018 9703
	Chateauneuf	24° 28′ 11″.67		12″.39	

Háromszög száma	Fixpontok	Sphaerikus szöglet	Excessus	Síkszög	Kapcsoló oldal logarithmusa
	Chatillon	50° 28′ 6″.71		6″.42	
12.	Chateauneuf	87° 35′ 9″.23	0″.88	8″.93	4·081 1256
	Orléans	41° 56′ 44″.94		44″.65	
	Chateauneuf	73° 48′ 14″.28		13″.62	
13.	Orléans	58° 27′ 25″.74	1″.96	25″.09	4·194 2523
	Vouzon	47° 44′ 21″.94		21″.29	
	Orléans	22° 7′ 35″.90		35″.18	
14.	Vouzon	87° 38′ 40″.00	2″.16	39″.28	3·796 5778
	Chaumont	70° 13′ 46″.26		45″.54	
	Chaumont	58° 19′ 4″.89		3″.25	
15.	Vouzon	94° 40′ 25″.41	4″.91	23″.77	4·069 3102
	Soême	27° 0′ 34″.61		32″.98	
	Vouzon	25° 3′ 49″.05		47″.67	
16.	Soême	94° 42′ 20″.69	4″.14	19″.31	3·757 7464
	St.-Montaine	60° 13′ 54″.40		53″.02	
	St.-Montaine	95° 54′ 57″.31		58″.00	
17.	Soême	34° 34′ 52″.02	— 2″.07	52″.71	3·874 3649
	Ennordre	49° 30′ 8″.60		9″.29	
	Soême	35° 7′ 26″.45		26″.82	
18.	Ennordre	108° 17′ 53″.34	— 1″.12	52″.71	3·859 1121
	Méri	36° 34′ 40″.09		40″.47	
	Ennordre	47° 23′ 37″.64		37″.35	
19.	Méri	99° 42′ 6″.96	0.″87	6″.67	3·991 0121
	Morogues	32° 54′ 16″.27		15″.98	
	Méri	77° 55′ 22″.78		21″.90	
20.	Morogues	58° 39′ 22″.23	2″.62	21″.36	4·144 1088
	Bourges	43° 25′ 17″.61		16″.74	
	Morogues	33° 36′ 18″.27		16″.81	
21.	Bourges	110° 27′ 12″.64	4″.40	11″.17	4·118 5793
	Dun	35° 56′ 33″.49		32″.02	
	Bourges	40° 27′ 27″.32		25″.92	
22.	Dun	101° 48′ 17″.34	4″.19	15″.94	4·143 9518
	Morlac	37° 44′ 19″.53		18″.14	
	Dun	41° 17′ 14″.39		13″.18	
23.	Morlac	35° 21′ 27″.64	3″.64	26″.42	3·975 2919
	Belvedère	103° 21′ 21″.61		20″.40	
	Belvedère	55° 25′ 2″.31		0″.46	

Háromszög száma	Fixpontok	Sphaerikus szöglet	Excessus	Sikszög	Kapcsoló oldal logarithmusa
24.	Morlac	74° 5′ 49″.75	5″.55	47″.90	4·003 5294
	Cullan	50° 29′ 13″.49		11″.64	
	Morlac	37° 28′ 27″.33		27″.14	
25.	Cullan	92° 36′ 35″.19	0″.58	35″.00	3·904 0022
	St.-Saturnin	49° 54′ 58″.06		57″.86	
	St.-Saturnin	80° 51′ 29″.37		28″.60	
26.	Cullan	60° 16′ 9″.44	2″.32	8″.67	4·100 7700
	Laage	38° 52′ 23″.51		22″.73	
	Cullan	33° 18′ 3″.72		1″.77	
27.	Laage	114° 54′ 55″.29	5″.84	53″.34	4·118 7791
	Arpheuille	31° 47′ 6″.83		4″.89	
	Arpheuille	84° 11′ 25″.85		25″.36	
28.	Laage	56° 19′ 32″.67	1″.46	32″.18	4·313 1792
	Sermur	39° 29′ 2″.94		2″.46	
	Sermur	50° 27′ 50″.45		48″.96	
29.	Laage	42° 53′ 42″.05	4″.48	40″.56	4·201 1041
	Orgnat	86° 38′ 31″.98		30″.48	
	Orgnat	38° 0′ 40″.10		38″.80	
30.	Laage	61° 12′ 38″.73	3″.89	37″.43	3·996 1996
	Evaux	80° 46′ 45″.06		43″.77	

Ha a számítást ez utolsó állomáson túl Perpignanig folytatjuk, akkor a második ellenőrző bázishoz jutunk és összehasonlíthatjuk a számítás eredményét a közvetlen méréssel. Delambre számítása szerint volt e bázis 6006·089 toise, a közvetlen mérés szerint 6006·249, úgy hogy az összes hiba 0·16 toise. Ez annál jobb eredmény, minthogy a két bázis 330 000 toisenyi távolságban fekszik egymástól s közöttük 53 háromszög fekszik.

Mindaddig nem sikerült ily pontosságot elérni, a perui és lapplandi fokmérés sokkal nagyobb hibákat hagyott hátra.

A Páris és Evaux között elterülő harmincz háromszögoldalból most lehetőleg a meridiánhoz kis hajlású oldalokból alkotott összefüggő lánczolatot választunk ki, melynek végpontjaiból merőlegeseket vagy egyszerűen parallelköröket bocsájtunk a meridiánra. Ezáltal ez annyi darabra oszlik, a hány háromszögoldalból áll a láncz és összegük a meridián-amplitudó hosszával egyenlő. Czélunkra a legmegfelelőbb a következő sorozat: Páris, Montlhéry, Torfou, Forêt, Pithiviers, Chatillon, Chateauneuf, Vouzon, Soême, Méri, Bourges, Morlac, Cullan, Laage, Evaux. — E 14 oldalból a megelőző táblázatunk hatot már tartalmaz, tehát csak további nyolcznak a kiszámítása marad hátra. A sinustétel alkalmazása a következő eredményhez vezet:

logarithmus:

Montlhéry-Torfou	= 3·793 2335
Torfou-Forêt	= 3·921 6400
Forêt-Pithiviers	= 4·080 4851
Pithiviers-Chatillon	= 3·865 1386
Chateauneuf-Vouzon	= 4·142 4057
Soême-Méri	= 4·076 6463
Méri-Bourges	= 4·085 3171
Bourges-Morlac	= 4·322 5043.

Az oldalak meridiánvetületét a 176. ábrából határozzuk meg. S a megmért oldal, melynek végpontjai AP és A'P meridiánokon feküsznek; azimuthjai A és A'. AB és A'B' az oldal végpontjain átmenő parallelák, meridiánvetülete tehát BB'-tel egyenlő. A PAA' háromszög megoldása a Napier-féle analogiákkal, melyek ez esetben határozott előnyt nyújtanak,

$$\operatorname{tg}\frac{PA'-PA}{2}=\frac{\sin\dfrac{A-A'}{2}}{\sin\dfrac{A+A'}{2}}\operatorname{tang}\frac{S}{2}.$$

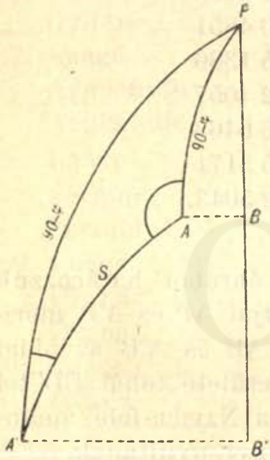
Ámde PA' — PA az S oldal geographiai szélesség-terjedelmével, $\varphi-\varphi'$-tel, vagy BB' ívvel azonos; úgy ez, mint a háromszög S oldala oly kicsiny, hogy a tényleges gyakorlatban mindig felcserélhető annak tangense magával az ívvel. Azonkívül a két meridián oly közel párhuzamosan halad éppen S kicsinysége folytán, hogy $A+A'=180^0$ közel, és még inkább $\sin\frac{A+A'}{2}=1$ tehető. Ezek előrebocsájtása után az előbbi egyenlet egyszerűen

$$BB' = S \sin \frac{A - A'}{2}$$

egyenletbe megy át.

Az oldaloknak a számításnál szükséges azimuthját ugyanezen háromszög szolgáltatja. A Napier-féle analogiák adnak ugyanis:

$$\operatorname{tg} \frac{A + A'}{2} = \frac{\cos \frac{(90 - \varphi') - (90 - \varphi)}{2}}{\cos \frac{(90 - \varphi') + (90 - \varphi)}{2}} \operatorname{cotg} \frac{P}{2},$$



176. ábra.
A fokmérő háromszögek meridiánvetületei.

ha P-vel jelöljük egyszerűen a két meridián hosszkülömbségét. A bal oldalon

$$\operatorname{tg} \frac{A + A'}{2} = \cot\left(90^0 - \frac{A + A'}{2}\right)$$

téve és az egyenletet megfordítva, lesz:

$$\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{A + A'}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \operatorname{tg} \frac{P}{2}.$$

A gyakorlati kivitelben $\frac{P}{2}$ mindig nagyon kicsiny, s mivel $A + A'$ — mint említők — közel áll a 180^0-hoz, $90^0 - \frac{A + A'}{2}$ is annyira kicsiny, hogy tangenseik helyébe az ívet tehetjük. Ekkor

$$180^0 - (A + A') = P \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \text{ vagy } A' = 180^0 - A - P \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}.$$

Az egyenlet első alakja adja az azimuthok összegének eltérését a 180^0-tól, mutatja tehát, hogy e két ponton átmenő meridián mennyivel tér el a párhuzamosságtól. Ezen szögletet, mely a Foucault-féle ingakisérletben és több térképvetítésben is szerepel, a meridián-convergentiának szokás nevezni. Ezen utóbbi alkalmazásokban a két pont mindig ugyanazon parallelkörön fekszik, $\varphi' = \varphi$ tehát, s a meridián-convergentia egyenlete a

$$180^0 - (A + A') = P \sin \varphi$$

egyszerű alakot ölti, a hol P a parallelkörív hosszúságkülömbsége.

P számára ad a sinustétel:

$$\frac{\sin P}{\sin A} = \frac{\sin S}{\cos \varphi'}, \text{ vagy } P = S \frac{\sin A}{\cos \varphi''}$$

a hol természetesen P és S ugyanazon mértékben, pl. ívperczekben fejezendő ki. E czélra anticipálnunk kell a sugár ismeretét. Mivel a fok hossza nagyon közel 57 060 toise, azért 1'-re 951 toise esik. Ha tehát S toiseokban van adva, akkor 951-gyel való elosztása után P ívperczekben adódik és

$$A' = 180^0 - A - \frac{S}{951} \cdot \frac{\sin A}{\cos \varphi'} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}.$$

Ezen képlet még mindig eléggé bonyolódott, mert az összes, Páris és Evaux között fekvő fixpontok geographiai szélességszámítását látszik követelni. A bonyodalom azonban csak látszólagos. Mert S kicsinysége folytán a megfigyelési hibákon belül eső hibát követünk csak el, ha $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ helyébe φ-t vagy φ'-t teszünk, s $\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} = 1$-nek veszszük fel. Sőt még egyszerűbben az egész meridiánív közepének állandó sarkmagasságával számíthatunk. Ha ezt φ_0-nak nevezzük, akkor végre

$$A' = 180^0 - A - \frac{S}{951} \sin A \operatorname{tang} \varphi_0.$$

A nagy franczia fokmérés számára $\varphi_0 = 47^0\, 30'\, 46''$, tehát

$$A' = 180^0 - A - [7{\cdot}05996]\, S \sin A,$$

a hol a zárjeles mennyiség $\log \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{951}$-gyel egyenlő.

A és A' az északponttól keletre és nyugotra olvasott —

a csillagászatitól eltérően — geodéziainak nevezett azimuthok; ábránkban A nyugoti, A′ keleti azimuthnak felel meg.

Ha egy oldal azimuthja ismeretes, akkor a többi mind található; az oldal kezdőpontján meghatározott azimuth legyen A, akkor az imént levezetett egyenlet az oldal végpontjában az azimuthot, A′-t adja. A triangulationál megmért szögletekkel átmehetünk azután a többi oldal azimuthjaira is. A franczia csillagászok négy azimuthot mértek, a melyek közül a Bourges-Dun oldalnak Bourgesban mért azimuthja: 149° 10′ 41″ E feladatunk körébe esik. Ebből indulunk ki, segítségül véve a 175. ábrát. A számítás menete a következő:

Bourges-Dun azimuthja = E 149° 10′ 41″.
A Bourges melletti szöglet a 21. háromszögben = 110° 27′ 11″.
A „ „ „ a 20. „ = 43° 25′ 17″.
Ezek összege: 153° 52′ 28″ levonandó, marad

Bourges-Méri azimuthja	=	4° 41′ 47″ W.
Ennek kiegészítője 180°-hoz	=	175° 18′ 13″,
Meridián-convergentia levonva	=	1′ 9″,
Marad: Méri-Bourges azimuthja	=	175° 17′ 4″ E.

Ha a számítást így folytatjuk, a szögek számítását a háromszögek fekvésétől téve függőkké, akkor a következő összeállításhoz jutunk:

Vonal neve és iránya	Azimuth	Kapcsolószög	Converg.
	1. Észak felé.		
Bourges-Dun (mérés)	149° 10′ 41″.E	— 153° 52′ 28″	1′ 9″
Bourges-Méri	4° 41′ 47″.W		
Méri-Bourges	175° 17′ 4″.E	— 214° 12′ 9″	8′ 36″
Méri-Soême	38° 55′ 5″.W		
Soême-Méri	140° 56′ 19″.E	— 164° 24′ 39″	5′ 22″
Soême-Vouzon	23° 28′ 20″.W		
Vouzon-Soême	156° 26′ 18″.E	+ 230° 3′ 24″	7′ 7″
Vouzon-Chateauneuf	26° 29′ 42″.E		
Chateauneuf-Vouzon	153° 23′ 11″.W	— 161° 23′ 23″	1′ 40″
Chateauneuf-Chatillon	8° 0′ 12″.E		
Chatillon-Chateauneuf	171° 58′ 8″.W	+ 188° 34′ 9″	0′ 5″
Chatillon-Pithiviers	0° 32′ 17″.W		

Vonal neve és iránya	Azimuth	Kapcsolószög	Converg.
Pithiviers-Chatillon	179° 27′ 38″.E	— 184° 6′ 56″	1′ 7″
Pithiviers-Forêt	4° 39′ 18″.W		
Forêt-Pithiviers	175° 19′ 35″.E	— 176° 24′ 14″	0′ 11″
Forêt-Torfou	1° 4′ 39″.W		
Torfou-Forêt	178° 55′ 10″.E	— 162° 34′ 46″	2′ 0″
Torfou-Montlhéry	16° 20′ 24″.E		
Montlhéry-Torfou	163° 37′ 36″.W	+ 183° 23′ 4″	3′ 11″
Montlhéry-Paris	12° 59′ 20″.E		
Paris-Montlhéry	166° 57′ 29″.W		

2. Dél felé.

Bourges-Dun (mérés)	149° 10′ 41″.E	+ 40° 27′ 26″	4′ 2″
Bourges-Morlac	170° 21′ 53″.W		
Morlac-Bourges	9° 34′ 5″.E	+ 147° 11′ 32″	4′ 34″
Morlac-Cullan	156° 45′ 37″.E		
Cullan-Morlac	23° 9′ 49″.W	+ 152° 52′ 44″	1′ 0″
Cullan-Laage	176° 2′ 33″.W		
Laage-Cullan	3° 56′ 27″.E	+ 152° 55′ 29″	4′ 28″
Laage-Evaux	156° 61′ 56″.E		
Evaux-Laage	23° 3′ 36″.W		

A harmadik rovatban levő szögletek a háromszögekből képezett azon combinatió, melyet saját előjelével a vele egy sorban álló azimuthhoz kell adni, hogy a következő sorban levőt találjuk. Ha ennek supplemenséből levonjuk a kapcsolószöggel ugyanazon vonalon álló convergentiát, akkor a másod rákövetkező sor azimuthját, azaz a megelőző oldal végpontjában mért azimuthot kapjuk.

Ha az oldal két végpontjának azimuthjából fél külömbséget veszünk és a megfelelő oldalt is melléjegyezzük, akkor a következő táblázat áll elő:

Fixpontok	$\frac{A - A'}{2}$	lg oldal	Vetület a meridiánon
Paris, Montlhéry	76° 59′ 5″	4·092 3989	12 053·02 toise.
Montlhéry, Torfou	73° 38′ 36″	3·793 2335	5 960·61 „
Torfou, Forêt	88° 55′ 15″	3·921 6400	8 347·63 „
Forêt, Pithiviers	85° 20′ 8″	4·080 4851	11 996·22 „
Pithiviers, Chatillon	89° 27′ 40″	3·865 1386	7 330·26 „

Fixpontok	$\frac{A - A'}{2}$	lg oldal	Vetület a meridiánon
Chatillon, Chateauneuf	81⁰ 58′ 58″	4·018 9703	10 344·39 toise.
Chateauneuf, Vouzon	63⁰ 26′ 45″	4·142 4057	12 416·29 „
Vouzon, Soême	66⁰ 28′ 59″	4·069 3102	10 756·03 „
Soême, Méri	51⁰ 0′ 37″	4·076 6463	9 272·82 „
Méri, Bourges	85⁰ 17′ 39″	4·085 3171	12 129·72 „
Bourges, Morlac	80⁰ 23′ 54″	4·322 5043	20 719·41 „
Morlac, Cullan	66⁰ 47′ 54″	4·003 5294	9 266·24 „
Cullan, Laage	86⁰ 3′ 3″	4·100 7700	12 581·65 „
Laage, Evaux	66⁰ 54′ 10″	3·996 1996	9 118·26 „

melynek utolsó rovata már a 452. oldalon levő képlettel számított meridiánvetület. E vetületeknek összege 152 292·55 toise, a meridiánívnek Páris és Evaux fixpontjai között elterülő hossza. Ámde a párisi Panthéon geographai szélessége 48⁰ 50′ 49″.37, Evaux sarkmagassága 46⁰ 10′ 42″.54, úgy hogy a lemért ív amplitudója 2⁰ 40′ 6″.83 = 2⁰.668 564.

Ebből következik aztán, hogy a Paris—Evaux-i meridiánívnek 1⁰-ára az ív közepén 47⁰ 30′ 46″ szélesség alatt 57 069·1 toise esik.

Hasonló módon számította Delambre a meridiánív többi darabjait is, csakhogy nagyobb pontosságot adó teljesebb képletekkel. Eredményeit a következő táblázat tünteti fel:

Fixpont	Sarkmagasság	Amplitudo	Az iv hossza toiseokban	A fok hossza toiseokban	Az ív közepének sarkmagassága
Dunquerque	51⁰ 2′ 9″.20				
		2⁰ 11′ 19″.83	124 944·8	57 082·63	46⁰ 56′ 29″.29
Páris (Panth.)	48⁰ 50′ 49″.37				
		2⁰ 40′ 6″.83	152 293·1	57 069·31	47⁰ 30′ 45″.95
Evaux	46⁰ 10′ 42″.54				
		2⁰ 57′ 48″.24	168 846·7	56 977·36	44⁰ 41′ 48″.42
Carcassonne	43⁰ 12′ 54″.30				
		1⁰ 51′ 9″.34	105 499·0	56 946·68	42⁰ 17′ 19″.63
Montjouy	41⁰ 21′ 44″.96				
Összeg, illetve közép		9⁰ 40′ 24″.24	551 583·6	57 020·66	46⁰ 11′ 57″.08

A mi számításunk szerint az egész meridiánív Páris és Evaux között csak fél toise-szal, a foknak hossza csak 0·2 toise-szal rövidebb, mint Delambre pontos számítása szerint.

Az egész lemért ív hossza 9⁰.67340, illetve 551 583.6 toise, s ezért átlag 46⁰ 11′ 57″ geographiai szélesség alatt 1⁰ hosszára

57 020.66 toise esik. A táblázat világosan mutatja, hogy már magában a franczia fokmérés is észak felé folyton nagyobbodó meridiánfokokhoz vezet.

Már jóval előbb, 1784—1788-ban kapcsolta Roy tábornok Dunquerquet a greenwichi csillagvizsgálóhoz, míg Biot és Arago a franczia fokmérést dél felé Formentera szigetéig folytatta. E két mérés szervesen fűződik a tárgyalt fokméréshez, mely ezen bővítéssel immár $12^0.813\,008$ amplitudóval és 730 500.8 toisenyi hosszúsággal bír. Ennek következtében az ív középpontja $45^0\,4'\,17''$ szélesség alatt $1^0 = 57\,012.44$ toise.

Hogy most a fokmérésekből úgy a Föld nagyságát, mint alakját, meridiánellipsisének nagy tengelyét és lapultságát levezethessük, szükségünk van az ellipsis egyenletére egyrészt és egy az összes természettudományokra nagyfontosságú számolási eljárásra, a legkisebb négyzetek elméletére másrészt.

IV. FEJEZET.

Az ellipsis egynéhány analytikai tulajdonsága.

A síknak minden pontja, mint ezt a bevezetésben tanultuk, két derékszögű tengelyrendszerre vonatkozó coordináta által fekvése szerint teljesen meg van határozva. Ha a tekintetbe vett pont mozog, akkor mindkét coordinátája minden pillanatban más-más értékű leend, s ha a mozgás geometriailag definiálható pályán történik, akkor a két coordináta között egy feltételi egyenlet fog állani, mely éppen azon kényszert fejezi ki, hogy a pont a mondott pályán maradni kénytelen. Ezen feltételi egyenlet egy tetszőleges pont két coordinátája között tehát joggal a pálya, vagy általában a síkgörbe egyenletének nevezhető. Belőle bármily tetszőleges pont egyik adott coordinátájából a másik meghatározható. Foglalkozzunk most röviden azon görbék egyenleteivel, melyek tárgyunkban szerepet játszanak.

Ha a coordinátarendszerben tetszőleges egyenest húzunk (177. ábra), mely az abscissatengelylyel α szögletet képez és a két tengelyből az a és b darabokat elvágja, akkor az egyenes jellemző tulajdonságául kimondhatjuk, hogy a benne mozgó pont mozgási iránya változatlanul α szögletet képez az x tengelylyel. Bárhol feküdjék tehát a P pont, mindig áll

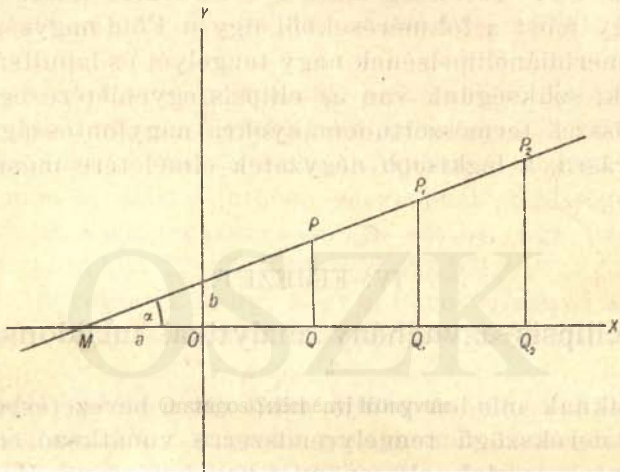
$$PQ = MQ \operatorname{tang} \alpha; \quad P_1Q_1 = MQ_1 \operatorname{tang} \alpha \quad \text{s. i. t.}$$

De $PQ = y$ az egyenes tetszőleges pontjának ordinátája, $OQ = x$ pedig ugyanezen pont abscissája; mivel

$$OQ = MQ - MO, \text{ vagy } x = MQ - a,$$

áll:

$$y = (x + a) \operatorname{tang} \alpha,$$



177. ábra. Az egyenes egyenlete.

vagy más alakban írva:

$$y = px + q.$$

Ha tetszőlegesen választott x-hez a p és q állandók segítségével számítjuk az y-t és a nyert x, y pontokat ismét felrakjuk, csakugyan egyenesben fekvő pontokat nyerünk. Számítva is könnyen meggyőződünk erről; két egészen tetszőleges abscissa legyen x_1 és x_2; a hozzá tartozó ordináták

$$y_1 = p\,x_1 + q \quad \text{és} \quad y_2 = p\,x_2 + q.$$

Levonás által látjuk, hogy

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = p = \text{állandó},$$

azaz: vonalunk azon tulajdonsággal bír, hogy ordinátái ezt hasonló derékszögekre bontják, e vonal tehát csak egyenes lehet. A levezetett egyenlet tehát az egyenes analytikai egyenlete és viszont minden elsőfokú egyenlet két változó között egyenest ábrázolván, ezt lineáris egyenletnek nevezhetjük. Benne $p = \tan g \alpha$, azaz az abscissa coefficiense az egyenesnek az abscissatengely positiv ágával képezett szögletének trigonometriai tangense és $q = a \tan g \alpha = b$ azon darab, melyet az egyenes a positiv Y tengelyből lemetsz. Egy és ugyanazon egyenes számára p és q természetesen állandók és az egyenes fekvésére jellemzők, x és y változók; de míg x minden tetszőleges értéket felvehet $-\infty$ és $+\infty$ között, addig y csak azokat, melyek $px + q$-val egyenlők.

Ha valamely pont x_1, y_1 coordinátái által van adva, akkor felkereshetjük azon egyenest, mely e ponton átmegy. A feladat tehát valamely egyenes egyenletét, nevezetesen p és q jellemzőjét megkeresni azon feltételből, hogy az x_1, y_1 pontot magában foglalja. Az egyenlete mindenesetre ismét

$$y = px + q,$$

de ebben p és q még ismeretlen. Ha az egyenes x_1 y_1 ponton átmegy, akkor e pont is az egyenes egy pontja, s számára is álland:

$$y_1 = px_1 + q.$$

Levonás által

$$y - y_1 = p(x - x_1), \text{ vagy } y = px + (y_1 - px_1).$$

A p meghatározására több föltételünk nincs, ez tehát határozatlan marad. Más szóval: egy ponton át számtalan tetszőleges hajlású egyenest vonhatunk, a mit természetesen előre is tudtunk. Ha azonban az egyenesnek még egy másik x_2, y_2 coordinátákkal bíró ponton is át kell mennie, akkor áll e három egyenlet:

$$y = px + q; \quad y_1 = px_1 + q; \quad y_2 = px_2 + q.$$

Az első azért, mert a kérdéses egyenes okvetlenül ismét az egyenlet ezen alakjával bír; a többi kettő azért, mert az x_1, y_1 és x_2, y_2 pont az egyenes egy pontja gyanánt is fogható fel. A két utolsó egyenletből következik:

$$p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ és } q = \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1},$$

a mi által az egyenes jellemzői egyértelműen vannak meghatározva. Ezeket az egyenes egyenletébe írva, leend:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1},$$

vagy más írásmodorban:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

A p és q számára más megoldás nem található, két ponton át tehát csak egyetlenegy egyenes vonható. Ha a 177. ábrában P_1 és P_2 az adott két pont, akkor a második alakban adott eredmény azt mondja, hogy az egyenes és az abscissatengely az ordináták által arányosan osztatik.

Ha két p, q és p′, q′ jellemzőik által adott egyenesünk van, mint a 178. ábrában, akkor ezen jellemzők által úgy a két egyenes M metszési pontja, mint a kettő által képezett ω szöglet meghatározható. Az M eddig még ismeretlen coordinátái legyenek ξ, η; jellemezve van azáltal, hogy közös pontja úgy az egyik, mint a másik egyenesnek. A két egyenes egyenlete tehát még akkor is ki van elégítve, ha folyó coordinátái x és y helyébe ξ és η-t teszünk. Azaz:

$$\eta = p\xi + q \text{ és } \eta = p'\xi + q'$$

egyszerre fennálló két egyenlet megoldása:

$$\xi = \frac{q' - q}{p - p'} \text{ és } \eta = \frac{pq' - p'q}{p - p'}$$

szolgáltatja a metszési pont coordinátáit.

Az ω szöglet számára a 178. ábra közvetlenül a következő kapcsolatot adja:

$$\omega = \alpha' - \alpha \text{ vagy } \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)$$

és ennélfogva

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}.$$

Ámde az egyenes egyenletének jelentése folytán:

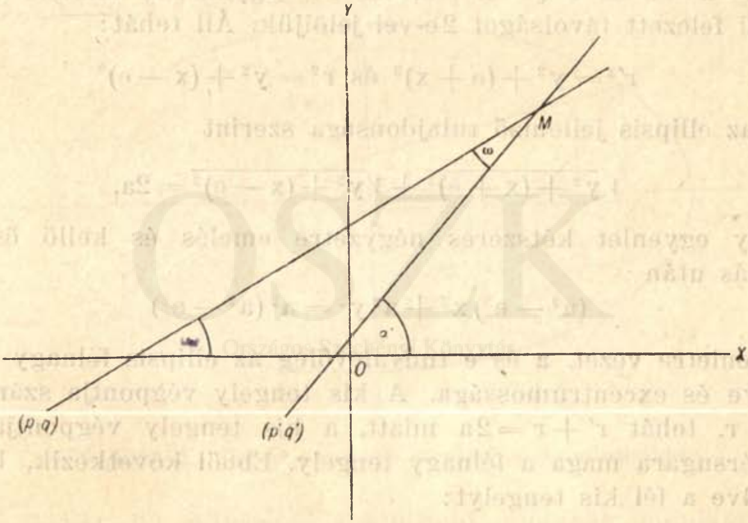
$$\operatorname{tg}\alpha' = p', \ \operatorname{tg}\alpha = p$$

és így:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{p' - p}{1 + pp'}.$$

A két egyenes párhuzamos egymással, ha $\omega = 0$, azaz $p' = p$; merőlegesen áll egymásra, ha $\omega = 90^0$, $\operatorname{tang}\omega = \infty$, tehát ha $pp' + 1 = o$, vagy $p' = -\frac{1}{p}$. Az

$$y = p x + q \text{ és } y = p x + q',$$



178. ábra. Két egyenes metszése.

ennélfogva két párhuzamos, az

$$y = p x + q; \ y = -\frac{1}{p} x + q'$$

egyenletek két egymásra merőleges egyenest ábrázolnak. Ha azt akarnók, hogy akár az egyik, akár a másik vonalpár egyik alkotója valamely adott x_1, y_1 ponton menjen át, akkor természetesen a határozatlanul hagyott q vagy q' is megállapítható.

Számos más feladat mellőzésével térjünk át mindjárt az ellipsis egyenletére. Az ellipsis jellemző tulajdonsága, hogy két állandó pontból bármelyik pontjához húzott vezérsugarak összege állandó.

Fektessük a coordinátarendszert úgy, hogy középpontja az ellipsis középpontjába, tengelyei az ellipsis tengelyeibe essenek (179. ábra). Ha P az ellipsis egy tetszőleges pontja, akkor az F és F_1 szilárd pontokból P-hez húzott vezérsugarak számára áll:

$$r' + r = 2a,$$

ha 2a-val jelöljük azok állandó összegét. Úgy r, mint r' az FQP és F'QP derékszögű háromszögből meghatározható; PQ = y, FQ = x — e és F'Q = x + e, ha FF' ugyancsak állandó és O által felezett távolságot 2e-vel jelöljük. Áll tehát:

$$r'^2 = y^2 + (e + x)^2 \text{ és } r^2 = y^2 + (x - e)^2$$

és az ellipsis jellemző tulajdonsága szerint

$$\sqrt{y^2 + (x + e)^2} + \sqrt{y^2 + (x - e)^2} = 2a,$$

mely egyenlet kétszeres négyzetre emelés és kellő összevonás után

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2)$$

egyenletre vezet. a és e tudvalevőleg az ellipsis félnagy tengelye és excentrumossága. A kis tengely végpontja számára r' = r, tehát r' + r = 2a miatt, a kis tengely végpontjának vezérsugara maga a félnagy tengely. Ebből következik, b-vel jelölve a fél kis tengelyt:

$$b^2 = a^2 - e^2,$$

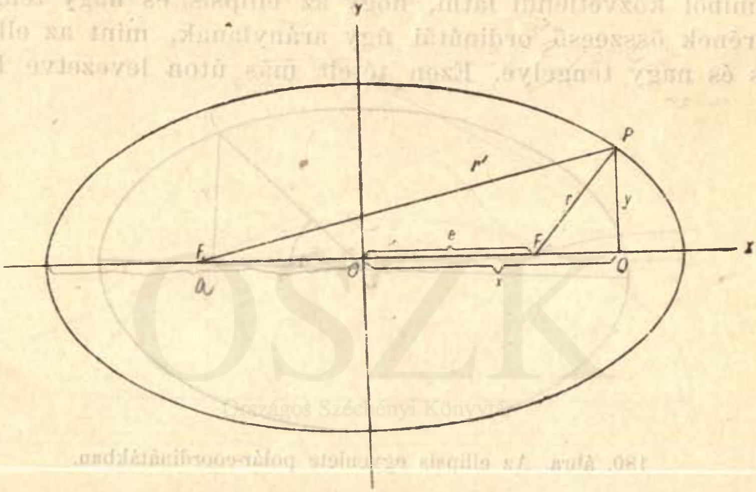
a mit az ellipsis egyenletébe bevive:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \text{ vagy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakot hoz létre. Az utolsó alak symmetrikus volta miatt tünik ki, a mennyiben az abscissa és ordináta, illetve az abscissa és ordinátatengely részeiben kifejezett négyzeteinek összege 1-gyel egyenlő.

Az egyenletből levezethető immár az ellipsisnek minden ismert tulajdonsága. Mivel csupán x és y-nak négyzete fordul elő, azért egyenlő nagy positiv vagy negativ coordinátaértékek behelyettesítése külömbséget nem hoz létre. Az ellipsis tehát symmetrikus úgy az abscissa, mint az ordinátatengely körül. A nagy tengely végpontjai abscissáit kapjuk, ha $y = o$ teszünk, ezek $\pm a$; a kis tengely végpontjait, ha $x = o$ veszünk fel, s ezek $y = \pm b$.

Az egyenlet a központi egyenlet nevét viseli, mert coordináta-kezdőpont és ellipsis-középpont összeesnek és közvetlenül felhasználható úgy a kör, mint az ellipsis poláris egyenletének levezetésére.



179. ábra. Az ellipsis egyenlete derékszögű coordinátákban.

A kör oly ellipsisnek tekinthető, melynek mindkét féltengelye egyenlő; téve tehát $b = a$, lesz a kör középponti egyenlete:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Ha továbbá a 180. ábrában a P pont fekvését a középpontból húzott radius vectorral és a v anomáliával kivánjuk kifejezni, akkor

$$y = r \sin v \text{ és } x = r \cos v$$

miatt közvetlenül áll:

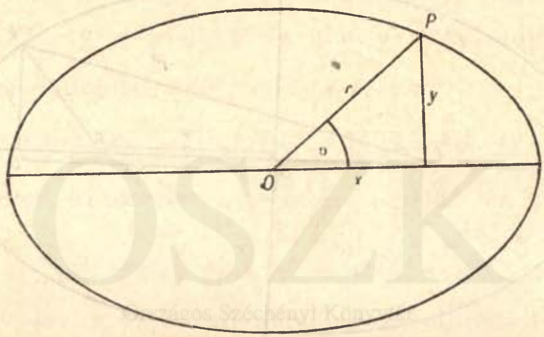
$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v},$$

mely egyenlet a derékszögű coordinátákban adottól csupán csak alakilag, nem tartalmilag is tér el.

Ha a nagy tengely, mint átmérő felett kört írunk le s annak egyik pontjából merőlegest bocsájtunk a nagy tengelyre, akkor ezen merőleges közös ordinátája a körnek és ellipsisnek, melynek ugyanazon abscissa felel meg. A kör ordinátája

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ az ellipsisé } y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

a miből közvetlenül látni, hogy az ellipsis és nagy tengelykörének összeeső ordinátái úgy aránylanak, mint az ellipsis kis és nagy tengelye. Ezen tételt más úton levezetve hasz-



180. ábra. Az ellipsis egyenlete polár-coordinátákban.

náltuk a Kepler-féle problema megoldásában (103. ábra). Egészen hasonló tételhez jutunk, ha az ellipsis kis tengelyén át írunk le kört. Ekkor ellipsis és kör összeeső abscissái ugyanazon ordinátával bírnak, s az ellipsis és kis tengely-körében összeeső abscissák úgy aránylanak, mint az ellipsis nagy és kis tengelye.

Legyen most P′ és P″ (181. ábra) az ellipsis két pontja x′, y′ és x″, y″ coordinátákkal. Ha a két ponton át egyenest fektetünk, ez nyilván az ellipsis egy szelője, secansa leend. Ez egyenes egyenlete, mint már levezettük:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

De a P′ és P″ pont egyszersmind az ellipsisen is fekszik; áll tehát:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \text{ és } \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1.$$

Levonás által ad e két utolsó egyenlet:

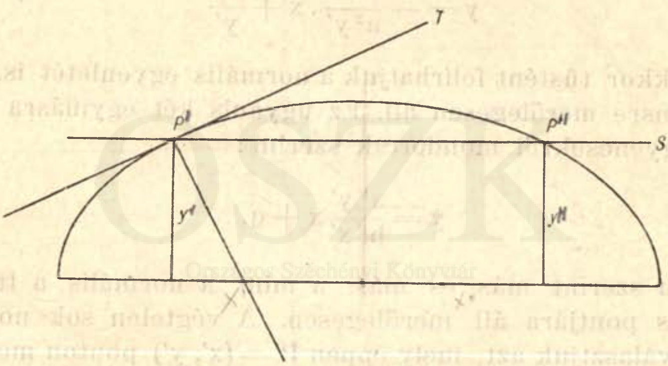
$$\frac{(x'-x'')(x'+x'')}{a^2}+\frac{(y'-y'')(y'+y'')}{b^2}=o,$$

vagy

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x'+x''}{y'+y''},$$

a mit a secans egyenletébe helyezve nyerünk:

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x'+x''}{y'+y''}.$$



181. ábra. Az ellipsis érintője.

Ha most a P″ pontot mind közelebb hozzuk a P′ ponthoz, akkor a secans P′ körül, mint tengely körül forog és a T egyenes helyzetében megáll, ha a két pont minden képzelhetőnél közelebb esik egymáshoz. Ekkor a szelőből érintő vagy tangens lett. Jellemzője tehát, hogy a P′ és P″ pont azonos, $x''=x'$, $y''=y'$. Ezt téve, leend egyenlete:

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

s ez jellemzi azon érintőt, mely valamely ellipsis x′, y′ pontján halad át. Ez egyenlet átírás által igen elegáns alakba hozható:

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2y'^2+b^2x'^2.$$

Ámde a jobb oldal, x', y' az ellipsis egy pontja lévén, $a^2 b^2$ szorzattal egyenlő; ha ezzel osztjuk az egyenletet, lesz:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

A tangens egyenlete tehát alakilag teljesen ugyanaz, mint az ellipsisé, mert ez is

$$\frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} = 1$$

alakban írható.

Ha a tangens egyenletét az egyenes egyenletének megszokott formájában

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \cdot x + \frac{b^2}{y'}$$

írjuk, akkor tüstént felírhatjuk a normális egyenletét is, mely a tangensre merőlegesen áll. Ez ugyanis két egymásra merőleges egyenesekről mondottak szerint:

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x + q,$$

hol q a szerint más és más, a mint a normális a tangens más-más pontjára áll merőlegesen. A végtelen sok normális között választjuk azt, mely éppen $P' = (x', y')$ ponton megy át; mely tehát az ellipsisnek a P' pont körüli ívére merőlegesen áll. Mivel e P' pont a feltevés szerint a normálisnak is pontja, kell, hogy az egyenlete $y = y'$, $x = x'$ helyettesítés után is ki legyen elégítve. Ebből

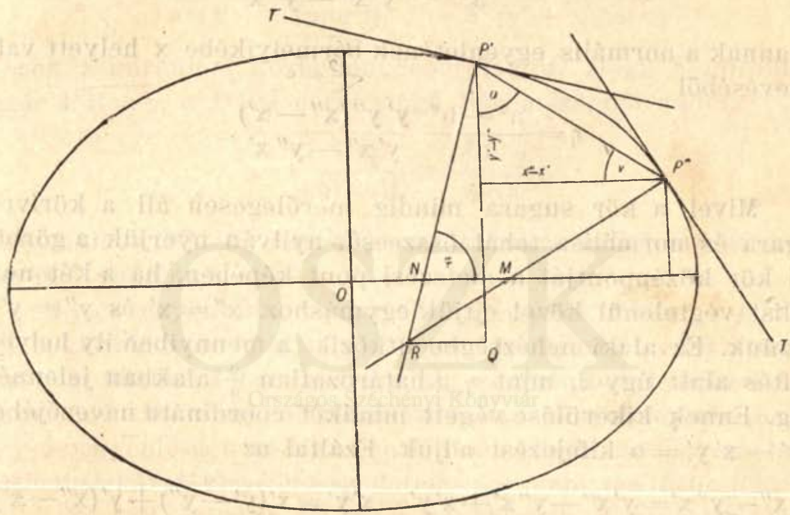
$$q = y' - \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x' = \frac{y'(b^2 - a^2)}{b^2},$$

a mit a normális egyenletébe téve:

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x - \frac{y'(a^2 - b^2)}{b^2} \text{ vagy } \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}$$

adja azon egyenes egyenletét, mely x', y' pontban az ellipsisre merőlegesen áll.

A fokmérések kiszámításában főszerepet játszik a meridiánellipsis görbületi köre és görbületi sugara. Valamely érintő ugyanis az ellipsissel két közös ponttal bír, a mennyiben egyenes vonal két pont által van meghatározva teljesen. E két pont végtelenül közel összeesik egymással, tehát az ellipsis az érintkezési pont körül fekvő végtelen kis íve az érintő egy vonalelemével azonosnak mondható. Még szorosabb összeesést fogunk kapni, ha az egyenes helyett kört választunk; a kör ugyanis három pont által lévén adva, az ellipsis ívén három végtelenül közel eső pontot kell vennünk, hogy ezen át kört fektethessünk. Ez természetesen az ellipsishez még szorosab-



182. ábra. Az ellipsis görbületi sugara.

ban simul, s e három pont körül az ellipsis íve a körével összeesőnek tekinthető. Ezen érintő vagy osculáló kör sugara az ellipsisnek az érintkezési ponton való görbületi sugara, maga a kör a görbületi kör nevét viseli.

A görbületi sugár természetesen az ellipsisnél pontról-pontra változó, mert kizárólag csak a kör esetében állandó. Legnagyobb lesz a görbületi sugár a kis tengely, legkisebb a nagy tengely végpontjában. Meghatározásával a 182. ábra alapján foglalkozunk.

Legyen P′ és P″ az ellipsis két pontja, melyen át normálisokat vontunk; ezek egyenletei, ha a két pont coordinátái x′, y′ és x″, y″:

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x - \frac{y'(a^2 - b^2)}{b^2} \text{ és } y = \frac{a^2 y''}{b^2 x''} x - \frac{y''(a^2 - b^2)}{b^2}.$$

Ha a két egyenletet együtt fennállóknak tekintjük, akkor a megoldásukból következő x és y a két normális átmetszési pontjának coordinátái lesznek. Ezeket megkülönböztetés végett a folyó y és x-től ξ-vel és η-val jelölhetjük. A két egyenlet levonásából következik közvetlenül:

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \frac{(y' - y'')x'x''}{y'x'' - y''x'}$$

és annak a normális egyenletének bármelyikébe x helyett való betevéséből

$$\eta = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{y'y''(x'' - x')}{y'x'' - y''x'}.$$

Mivel a kör sugara mindig merőlegesen áll a körívre, sugara és normálisa tehát összeeső, nyilván nyerjük a görbületi kör középpontját a metszési pont képében, ha a két normálist végtelenül közel ejtjük egymáshoz, $x'' = x'$ és $y'' = y'$-t teszünk. Ez alaki nehézségbe ütközik, a mennyiben ily helyettesítés alatt úgy ξ, mint η a határozatlan $\frac{o}{o}$ alakban jelennék meg. Ennek kikerülése végett mindkét coordináta nevezőjéhez $x'y' - x'y' = o$ kifejezést adjuk. Ezáltal az

$$y'x'' - y''x' = y'x'' - y''x' + x'y' - x'y' = x'(y' - y'') + y'(x'' - x')$$

alakot nyeri, és számláló és nevező, illetve $y' - y''$ és $x'' - x'$-vel elosztható. Most

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \frac{(y' - y'')x'x''}{x'(y' - y'') + y'(x'' - x')} = \frac{(a^2 - b^2)x'x''}{a^2\left[x' + y'\dfrac{x'' - x'}{y' - y''}\right]}$$

és hasonlóan

$$\eta = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{y'y''(x'' - x')}{x'(y' - y'') + y'(x'' - x')} = \frac{(a^2 - b^2)y'y''}{b^2\left[x'\dfrac{y' - y''}{x'' - x'} + y'\right]}.$$

Ábránk szerint azonban

$$\frac{x'' - x'}{y' - y''} = \operatorname{tang} u \text{ és } \frac{y' - y''}{x'' - x'} = \operatorname{cotang} u.$$

Ha P″ most mindinkább közeledik P′ ponthoz, akkor P′P″ szelő a P′ ponton átmenő T′ tangensbe alakul át. Az u szöglet ekkor átmegy azon szögletbe, melyet az érintő az ordinátával képez. Ámde a tangens merőleges a normálisra, az ordináta a nagy tengelyre, és ezért a tangens és ordináta képezte szöglet ugyanaz, mint a melyet a normális a nagy tengelylyel képez. Ezt φ-vel jelölve, és P″ és P′ pont összeesésének megfelelőleg $x'' = x'$, $y'' = y'$-t téve, leend:

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)x'^2}{a^2(x' + y' \operatorname{tang} \varphi)}, \quad \eta = \frac{(a^2 - b^2)y'^2}{b^2(y' + x' \cot \varphi)},$$

s ezek a görbületi középpont coordinátái. Maga a görbületi sugár $P'R = \rho$, a $P'RQ$ derékszögű háromszögből adódik:

$$\rho = \frac{P'Q}{\sin P'RQ} = \frac{\eta + y'}{\sin \varphi},$$

a mennyiben $P'M = y'$ és $MQ = \eta$, tekintet nélkül az itt nem szereplő előjelre.

Ha ez egyenletbe beviszszük η értékét, akkor a görbületi sugár ki van fejezve a P′ pont coordinátái és φ szöglet által; a feladat tehát geometriai szempontból befejezettnek tekintendő. De a mi alkalmazásunkban kényelmesebb, ha x' és y' az egyenletben nem szerepel. Ezen eliminatió ugyan elemi mathematikával kissé hosszadalmas, de nem mellőzhetjük.

ON (182. ábra) a fél nagy tengelynek a normális által leszelt darabja, azaz a normális azon pontjának x-e, a mely számára $y = o$. Ezt a normális egyenletébe téve, leend

$$o = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x - \frac{y'(a^2 - b^2)}{b^2}, \text{ a miből } x = ON = \frac{x'(a^2 - b^2)}{a^2}.$$

Továbbá

$$MN = OM - ON = x' - \frac{x'(a^2 - b^2)}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} x',$$

és

$$P'M = y' = MN \operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} x' \operatorname{tg} \varphi,$$

a miből megfordítva:

$$x' = \frac{a^2 y'}{b^2} \cot \varphi$$

következik. Ez egyenlet segítségével x' fejezhető ki y' által. Téve ezt a görbületi középpont η coordinátájába és írva

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

a hol ε a numerikus excentrumosságot jelenti:

$$\eta = \frac{\varepsilon^2 y'}{1 - \varepsilon^2 + \cot^2\varphi} \text{ vagy } \eta = \frac{\varepsilon^2 y' \sin^2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}.$$

Ehhez adva y'-t:

$$\eta + y' = \frac{y'}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi},$$

a miből még y' eliminálandó, hogy a görbületi sugár kifejezésének számlálóját kapjuk a kivánt alakban.

Ámde

$$y' = P'N \sin\varphi$$

és

$$\overline{P'N}^2 = \overline{P'M}^2 + \overline{MN}^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4} x'^2.$$

Az ellipsis egyenlete szerint:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

a miből

$$\frac{b^4}{a^4} x'^2 = \frac{b^4}{a^2} - \frac{b^2 y'^2}{a^2}$$

és ezért

$$P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^2} - \frac{b^2 y'^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} y'^2 + \frac{b^4}{a^2},$$

vagy

$$P'N^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} P'N^2 \sin^2\varphi + \frac{b^4}{a^2}.$$

Ebből azután

$$P'N = \frac{b^2}{a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}.$$

Most már

$$y' = P'N \sin\varphi = \frac{a(1 - \varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

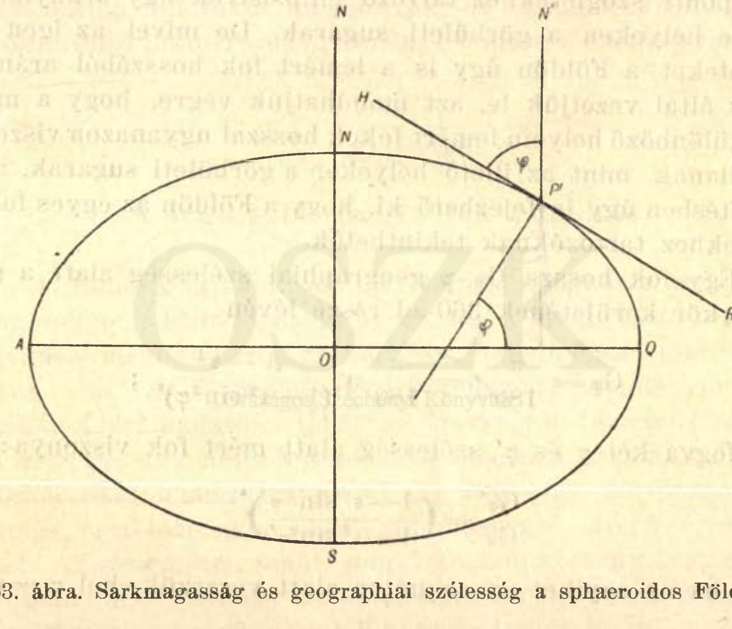
és ennélfogva

$$y' + \eta = \frac{y'}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}},$$

a miből végre a görbületi sugár értéke

$$\rho = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^3}},$$

tisztán a meridiánellipsis méretei és a φ szöglet által van adva.



183. ábra. Sarkmagasság és geographiai szélesség a sphaeroidos Földön.

A φ szöglet, melyet a normális az aequator síkjával képez, nyilván nem egyéb, mint a P′ hely geographiai szélessége. A normális ugyanis a nehézségi erő iránya, a reá merőleges érintő sík a horizont. A sarkmagasságot megkapjuk, ha P′ helyből (183. ábra) a földtengelylyel párhuzamost vonunk. A φ sarkmagasság szögletének szárai merőlegesen állanak azon szöglet száraira, melyet a normális és aequator képeznek egymással.

A nagy és kis tengely végpontjában φ illetve 0^0 és 90^0, a görbületi sugár tehát

$$\rho_0 = a(1 - \varepsilon^2) \text{ és } \rho_{90} = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

egyszersmind legkisebb és legnagyobb. Ezen viszonyokon alapszik az ismeretes közelítő szerkesztés, melynek segélyével az ellipsis négy körívvel rajzolható.

A legutóbb levezetett egyenlet adja már most a módot a Föld alakjának fokmérésből való meghatározására. Ugyanis egyenlő középponti szögletekhez tartozó körívek különböző körökben tudvalevőleg úgy aránylanak, mint a körök sugarai. Tekintettel a görbületi kör tulajdonságaira tehát azt is mondhatjuk, hogy az ellipsis különböző pontjain egyenlő, igen kis középponti szögletekhez tartozó ellipsisívek úgy aránylanak, mint e helyeken a görbületi sugarak. De mivel az igen kis szögleteket a Földön úgy is a lemért fok hosszából arányos osztás által vezetjük le, azt mondhatjuk végre, hogy a meridián különböző helyein lemért fokok hosszai ugyanazon viszonyban állanak, mint az illető helyeken a görbületi sugarak, a mi közelítésben úgy is fejezhető ki, hogy a Földön az egyes fokok körívekhez tartozóknak tekinthetők.

Egy fok hossza $G\varphi$ φ geographiai szélesség alatt a görbületi kör kerületének 360-ad része lévén

$$G\varphi = \frac{\pi}{180}\rho = \frac{\pi}{180} a . \frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{3/2}};$$

ennélfogva két φ és φ' szélesség alatt mért fok viszonya:

$$\frac{G\varphi'}{G\varphi} = \left(\frac{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi'}\right)^{3/2}$$

vagy, ha az egyiket az aequator alatt veszszük, hol $\varphi = o$:

$$G\varphi = \frac{G_0}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{3/2}}$$

és megfordítás által

$$G\varphi^{2/3} - G\varphi^{2/3}\varepsilon^2 \sin^2\varphi = G_0^{2/3},$$

a miből az aequator és φ szélesség alatt meghatározott fokból az excentrumosság számítható. Ha ez megvan, akkor már korábban levezetett egyenlet alapján

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}\text{-ből}$$

a lapultság is ismeretes.

Az excentrumosság levezetésére szolgáló egyenlet két ismeretlent tartalmaz, magát ε-t és G_0-t, az aequator alatti meridiánfok hosszát. Két fokmérés tehát a kérdés megoldására szükséges és elegendő is. Tényleg azonban a fokmérések száma nem kettő, hanem, mint látni fogjuk, igen nagy és napról-napra szaporodik, egyszersmind pedig ezek egyike sem teljesen hibátlan, hanem a megfigyelés elkerülhetetlen hibáival el vannak látva. E hibák a lapultság levezetésében annál veszedelmesebben szerepelnek, minél kisebb a szélességkülömbség, mely alatt a két fokot megmértük, de viszont közel parallelkörökön mért fokmérések eredménye sem mellőzhető egyszerűen.

V. FEJEZET.

A legkisebb négyzetek elmélete.

A Föld alakjának és méreteinek meghatározása tehát tulajdonképen túlhatározott problema, a mennyiben két ismeretlennek meghatározására nem két, hanem ennél több egyenletünk van. Az ismeretlenek coefficiensei megfigyelés által beszerzett számadatok, tehát az igazságtól bizonyos mértékben eltérők, úgy hogy két-két tetszőlegesen kiválasztott megfigyelés a két ismeretlennek mindig más-más, bár pontos megfigyelés esetében nem nagy külömbséggel eltérő értékeihez vezet. Az egyenletek tehát, mint mondani szoktuk, egymásnak ellenmondók, csakhogy az ellenmondás nagysága csupán az elkerülhetetlen megfigyelési hibákban indokolt.

Ha tehát ez egyenletekből nem vagyunk képesek levezetni a keresett ismeretlen valódi értékét, akkor legalább legvalószinűbb értékét kereshetjük, azt, mely az összes tett megfigyeléseket a lehető legjobban elégíti ki.

Ezen problema az összes mérő természettudományokban sürűn ismétlődik, s ezért egészen különös számolási algorithmust teremtett, melyet mindjárt kitüntetendő oknál fogva a legkisebb négyzetek elméletének neveznek. Régebben az ilyen kérdésnél úgy jártak el: Ha

$$a_1 x + b_1 y = n_1 ;\ a_2 x + b_2 y = n_2 \,..\ a_m x + b_m y = n_m$$

m számú egyenlet volt adva a két ismeretlen x és y meghatározására, melyekben az a_1, a_2 .. b_1, b_2 .. n_1, n_2 .. n_m számadatok részben vagy teljesen megfigyelésekből szereztettek be, akkor az x meghatározására úgy csoportosították az egyenleteket, hogy az x coefficiense mindig positiv legyen. Az egyenletek összeadása által nyilván x a lehető legnagyobb coefficienst kapta. Az új egyenlet

$$Ax + By = N$$

alakot nyerte, hol $A = \Sigma a$ az egyenlő jelűvé tett x coefficiensek összege. Azután hasonlóképen megváltoztatták az y coefficiens előjeleit úgy, hogy minden b coefficiens positiv legyen. Az egyenletek összege

$$A'x + B'y = N'$$

végegyenlethez vezet, melyben $B' = \Sigma b$ nyilván a lehető legnagyobb y coefficiens. A két egyenlet most ugyan x és y meghatározását lehetővé teszi, de semmi módunk nincs arra, hogy a nyert két érték jóságáról meggyőződést szerezzünk, sőt az egész eljárás meglehetősen önkényes, mondhatnók mathematikai principium nélkül való.

A legkisebb négyzetek elméletét mai alakjában Gauss dolgozta ki; a kiindulási pont azon köznapi és mondhatnók magától érthető elv, hogy valamely többször lemért adat legvalószinűbb értéke a sorozat arithmetikai közepe. Ugyanis világos, hogy részint érzékeink, részint műszereink fogyatékossága folytán, minden egyes mérés bizonyos hibával van ellátva. De nagy kiterjedésű sorozatban a valószinűség a mellett szól, hogy ugyanazon hiba mindkét lehetséges irányban, tehát positiv és negativ előjellel ellátva forduland elő, úgy hogy az összegből kiesik. Ez elv kétségen kívül annál szigorúbban helyes, minél nagyobb a megfigyelések száma, és ha nem egy irányban működő, úgynevezett systematikus hibák fordulnak elő, mint pl. a műszer helytelen felállítása s hasonlók. A legkisebb négyzetek elmélete tehát csak a megfigyelési, nem pedig a systematikus hibákat is teszi ártalmatlanná.

Lássuk most az egész módszer elvét. Mérjünk le példának okáért egy hosszat, melynek igazi, ismeretlen értéke x; minden egyes mérés egy $\triangle x$ hibával el van látva, mely adott esetben positiv, negativ, némelykor egészen 0 is lehet, mely általában azonban kicsiny lesz. Ha a mérés eredménye sorban $x_1, x_2, x_3 .. x_m$, akkor ezen mérések hibái nyilván

$$\triangle x_1 = x_1 - x; \ \triangle x_2 = x_2 - x; .. \ \triangle x_m = x_m - x.$$

Most felállíthatunk teljesen conventió szerint valamely mathematikai elvet, melynek ezen hibákból alkotott combinatiónak megfelelni tartozik. Követelhetnők pl. azt, hogy az összes hibák összege minimum legyen. Ekkor az ismeretlen x hosszúság a lemért $x_1, x_2 .. x_m$ adatból úgy volna meghatározandó, hogy

$$\Sigma \triangle x = x_1 + x_2 + .. + x_m - mx$$

lehetőleg kicsiny legyen. Ámde ez elv éppen nem czélszerű, mert hiszen a hibák összege igen kicsiny, pl. 0 is lehet akkor is, ha egyes hibák igen nagyok, de ellentett irányúak. Egy oly elvet kell tehát választanunk, hogy a hibák ne előjelükkel hassanak, hanem kizárólag csak nagyságuk folytán. Ezt elérjük, ha pl. a hibák helyett ezek négyzetét választjuk, mert ekkor egyenlő, de ellentett jelű hiba tényleg ugyanazon hibanégyzetet adja. Követelhetjük tehát, hogy a lemért adat legvalószinűbb értéke úgy legyen meghatározandó, hogy a hátramaradó hibák *négyzeteinek* összege minimum legyen.

Látnivaló, hogy az egész eljárás pusztán conventionális elven alapszik. Épp oly joggal választhatnánk egy más vezérgondolatot, csak arról van szó, hogy ez azután következetesen keresztülvitessék. A választott elvnek — mely szerint az egész eljárás a legkisebb négyzetek elmélete nevét nyerte — mindazonáltal megvan azon előnye, hogy az arithmetikai középhez vezet, mint legvalószinűbb értékhez.

Az előbbi példában tehát az ismeretlen x hosszúság legvalószinűbb értéke az leend, mely számára a hibák négyzeteinek összege, azaz:

$$(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 + \ldots + (x_m - x)^2 = \text{minimum}.$$

Ezen egyenlet x szerint való megoldására a következő gondolatmenetet követjük: Ha x-et megnöveljük a végnélkül kis δx mennyiséggel, akkor nagyobb értéket kapunk, ha apasztjuk e kis mennyiséggel, szintén nagyobb értéket kapunk a hibák összegéből, mert hiszen ezek a követelmény szerint x legvalószinűbb értéke esetében minimumot adnak. x-nek legvalószinűbb, a fenti egyenletet kielégítő értéke tehát csak az lehet, mely a δx-nek coefficiensét 0-val teszi egyenlővé. A hibanégyzetek összege, ha x helyébe $x + \delta x$ lép, hol δx, mint említők, végtelen kicsiny, a következő:

$$(x_1 - x - \delta x)^2 + (x_2 - x - \delta x)^2 + .. + (x_m - x - \delta x)^2,$$

vagy a négyzetre emelést végezve és δx mellett a még kisebb $(\delta x)^2$-et elhanyagolva:

$$(x_1 - x)^2 - 2(x_1 - x)\delta x + (x_2 - x)^2 - 2(x_2 - x)\delta x + ..$$
$$+ (x_m - x)^2 - 2(x_m - x)\delta x,$$

és másképen írva:

$$(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + .. + (x_m - x)^2 -$$
$$- 2\delta x\,[(x_1 - x) + (x_2 - x) + .. + (x_m - x)].$$

Minthogy ezen kifejezés első sora már magában véve a követelt minimum, minimum gyanánt ez alakban is csak úgy állhat fenn, ha a végtelen kis, de különben tetszőleges δx coefficiense o, tehát, ha

$$(x_1 - x) + (x_2 - x) + .. + (x_m - x) = x_1 + x_2 + .. + x_m - mx = o.$$

Ezen egyenlet megoldása

$$x = \frac{x_1 + x_2 + .. + x_m}{m} = \frac{\Sigma x}{m}$$

csakugyan azon elvet mondja ki, hogy egy többször lemért adatnak legvalószinűbb értéke annak átlagával egyenlő.

Ha a megfigyelések nem mind egyenértékűek, hanem különböző gyakorlottságú észlelőktől erednek vagy már magukban is különböző terjedelmű észlelési sorozatok közepei, akkor az előbbi képlet egyes adatai különböző szavazati jogot nyernek az átlagban, melyet a megfigyelés súlyának szokás nevezni. Ezen súly megállapitása gyakran csak a számoló érzékére van bízva, némelykor azonban szabatosabban is kifejezhető. Ha pl. az x_1, x_2 .. x_m szám magában véve már p_1, p_2 .. p_m számú egyes és egyenlő pontosságú megfigyelés közepe, akkor nyilván x_1, x_2 .. számadat az általános középben

p_1, p_2.. súlylyal dönt. Tehát ugyanazon eredménynyel van dolgunk, mintha az x_1 számot p_1-szer, az x_2-t p_2-szer s í. t. észleltük volna. Az elkövetett hiba, valamint négyzete természetesen ugyane számarányban fordul elő és ezért az elmélet most annak megoldására a

$$p_1(x_1-x)^2+p_2(x_2-x)^2+\ldots+p_m(x_m-x)^2=\text{minimum}$$

egyenletet szolgáltatja, melynek az előbbihez teljesen hasonló úton nyert megoldása:

$$x=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_mx_m}{p_1+p_2+\ldots+p_m}=\frac{\Sigma px}{\Sigma p}.$$

Ez ugyanazon egyenlet, a melylyel egy egyenesben elhelyezett p_1, p_2.. anyagi pontok súlypontjának helyzetét számítjuk, s mely a társas szabályra emlékeztető

$$x=\frac{p_1}{p_1+p_2+\ldots+p_m}x_1+\frac{p_2}{p_1+p_2+\ldots+p_m}x_2+\ldots$$
$$+\frac{p_m}{p_1+p_2+\ldots+p_m}x_m$$

alakban írva, kimondja, hogy minden mennyiség az egészhez való súlyarányában vett szavazójoggal vesz részt az átlagban. Ezen egyenlet, mint később látni fogjuk, egyszersmind a földfelületi morphometria alapegyenlete.

Míg a kimondott elv egyrészt valamely ismeretlen mennyiség legvalószinűbb értékének levezetését megengedi, addig másrészt ezen érték valószinű hibáját is szolgáltathatja, a mi az eredmény szavahihetőségének mintegy fokát adja. A valószinűség, hogy mérési sorozatunkban valamely éppen x és $x+\delta x$ között fekvő hibát követtünk el, ide nem tartozó levezetések alapján

$$w=Ae^{-h^2x^2}\delta x$$

alakban írható. Ebből számítható az átlagnak és az egyes mérések külömbségeiből azon hiba, melynek valószinűsége éppen $\frac{1}{2}$. Ha pl. a napparallaxis Newcomb adta legvalószinűbb értékét $\pi=8''.848\pm0''.013$ alakban írjuk, akkor ez annyit jelent, hogy egy fogadható egy ellen, hogy e parallaxis az adott értéknél $0''.013$-czel nem nagyobb s nem kisebb.

Megjegyzendő azonban, hogy a valószinű hiba kiszámításának csak ott van jelentősége, a hol a megfigyelések száma igen nagy; ha kevés számú megfigyelés alapján számítjuk, akkor a nevezőjében fellépő nagy $m(m-1)$ osztó miatt oly kis eredményt kapunk, hogy a hiba rendesen a valóságosnál kisebbnek látszik, tehát az eredmény jósága illetőleg megtévesztheti. Legnagyobb hasznát veszi a valószinű hibaszámításnak ennek alapján a csillagászat és a geodézia, a hol a megfigyelések száma tényleg minden esetben igen nagy.

Ha a keresendő adat nem közvetlenül megmérhető, hanem egyenletből vezetendő le, melynek coefficiensei képezhetik csak a lemérés anyagát, akkor ugyanazon elv megtartása annyi egyenlethez vezet, a hány ismeretlenünk van és ezek megoldása a legvalószinűbb értékeit szolgáltatja. Tegyük, hogy az ismeretlen legvalószinűbb értékek x, y, z.. s hogy ezek

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + .. = n_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + .. = n_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y + c_m z + .. = n_m \end{array}$$

lineáris egyenletből számítandók, melyekben az egyenletek m száma nagyobb, mint az ismeretlenek száma, s melyben az a_1, b_1, c_1 .. a_m, b_m, c_m .. coefficiensek megfigyelésből levezetett mennyiségek. Ha az egyenletek csoportjából mindig az ismeretlenek számával egyenlő számú egyenletet választanánk ki, akkor ezek megoldása az elháríthatatlan megfigyelési hibák miatt, mint már tudjuk, az ismeretleneknek mindig más-más értékeihez vezetnének. Ha tehát az egyenletekbe sorban a még egyelőre ismeretlen legvalószinűbb x, y, z.. értékeket helyezzük, akkor az $a_1x + b_1y + c_1z + .. - n_1$ kifejezés nem lehet 0, hanem a nulltól eltérő mennyiség leend, mely a megfigyelés jósága szerint kisebb-nagyobb, s melyet az egyenlet hibájának nevezhetünk. A legvalószinűbb értékek behelyettesítése tehát sorban a következő hibákhoz vezet:

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + .. - n_1 = \triangle_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + .. - n_2 = \triangle_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y + c_m z + .. - n_m = \triangle_m \end{array}$$

és ismét ragaszkodunk azon elvhez, hogy legvalószinűbb ismeretlenek rendszere alatt értjük azon x, y, z.. értékeket, melyek számára a hibák négyzeteinek összege minimum lesz. Ez szolgáltatja a következő meghatározó egyenletet:

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2)^2 + \ldots$$
$$+ (a_m x + b_m y + c_m z + \ldots - n_m)^2 = \text{minimum}.$$

Ha a legvalószinűbb értékeket a végtelen kis, de különben tetszőleges δx, δy.. mennyiségekkel növeljük vagy apasztjuk, a hibák négyzeteinek összege növekedni fog, mert hiszen $\delta x = o$, $\delta y = o$.. számára ez összeg éppen minimum. Ha tehát x, y, z.. helyébe $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$..-t írunk és tényleg négyzetre emelünk, δx, δy.. mellett azonban e végtelen kis mennyiségek négyzeteit és kettenkénti szorzatait, mint másodrendű kis mennyiségeket elhanyagoljuk és a δx, δy, δz.. szerinti könnyű rendezést elvégezzük, a következő egyenlethez jutunk:

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2)^2 + \ldots$$
$$+ (a_m x + b_m y + c_m z + \ldots - n_m)^2 +$$
$$+ 2\delta x [a_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1) + a_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2) + \ldots$$
$$+ a_m (a_m x + b_m y + c_m z + \ldots - n_m)] +$$
$$+ 2\delta y [b_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1) + b_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2) + \ldots$$
$$+ b_m (a_m x + b_m y + c_m z + \ldots - n_m)] +$$
$$+ 2\delta z [c_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - n_1) + c_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - n_2) + \ldots$$
$$+ c_m (a_m x + b_m y + c_m z + \ldots - n_m)] + \ldots$$

Minthogy ez egyenlet első része már magában is a követelt minimum, a hibák négyzeteinek összege csak úgy maradhat minimum, ha a δx, δy..-val szorzott mennyiségek egyenként nullával egyenlők, ezek tehát az eredményhez semmiképen nem járulhatnak. Egyenként azért tartoznak nullával egyenlők lenni, mert δx, δy.. egymástól teljesen független, mindegyik ugyan végtelen kicsiny, de azért teljesen tetszésszerinti maradhat. Ha rövidítésül a következő szokásos jeleket hozzuk be:

$$[aa] = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a^2_m$$
$$[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m$$
$$[ac] = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[an] = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_m n_m$$
$$[bb] = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b^2_m$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$[cn] = c_1 n_1 + c_2 n_2 + \ldots + c_m n_m,$$

a hol természetesen:

$$[ab] = [ba],\ [ca] = [ac],\ [cb] = [bc]$$

és így folytatva, könnyen áttekinthető módon, akkor sorban δx, δy.. coefficienseit 0-vá téve, a következő egyenletekhez jutunk:

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots = [an]$$
$$[ba]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots = [bn]$$
$$[ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z + \ldots = [cn]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

melyeknek száma természetesen az adott ismeretlenek számával megegyező; megoldásuk az ismeretlenek legvalószinűbb értékeihez vezet.

Itt is megállapíthatjuk a megoldást az esetben, hogy az egyes megfigyelések különböző súlylyal bírnak, s meghatározhatjuk ugyancsak a hátramaradó hibákból az ismeretlenek valószinű hibáját. Ha ugyanis az első, második... egyenlet sorban p_1, p_2.. súlylyal bír, akkor az eredeti egyenletcso p(r helyett a következőt:

$$a_1 p_1 x + b_1 p_1 y + c_1 p_1 z + \ldots = p_1 n_1$$
$$a_2 p_2 x + b_2 p_2 y + c_2 p_2 z + \ldots = p_2 n_2$$
$$\vdots$$
$$a_m p_m x + b_m p_m y + c_m p_m z + \ldots = p_m n_m$$

épp úgy fogjuk tárgyalni, mintha egyenlő súlyú megfigyelések kifejezője volna.

Könnyen belátható, hogy csak ezen módszer alkalmazása teszi igazán értékessé a megfigyeléseket, mert csak a valószinű hiba nagysága mondja meg, hogy valamely lemért adat mennyire megbízható, hogy reá tehát minő biztonsággal alapíthatók további következtetések. Midőn Bessel az első csillagparallaxist mérte s ezt 61 Cygni esetében $0''.348 \pm 0{\cdot}019$ találta, ezen csekély $\frac{1}{3}''$-czel egyenlő szám bizony keveset mond. De a valószinű hiba azt mutatja, hogy e szám értékének legfölebb $\frac{1}{18}$ részével lehet hamis, tehát ez aránylag szűk határ a különben kis és ezért kevésbbé megbízható számot értékessé teszi.

VI. FEJEZET.

Újabb fokmérések.

A nagy franczia fokmérés ugyan elegendő adatot tartalmaz, hogy belőle a Föld alakját és nagyságát levezessük, de az egyes meridiánívek geographiai szélességei oly közel egyenlők, hogy a megfigyelési hibák okvetetlenül torzítani fognák az eredményt. Ezért még az újabb fokméréseknek is adom lajstromát.

A perui és lapplandi mérésről ugyan volt már szó, de ez utóbbira meg kell említeni, hogy 1801—1803-ban ismételtetett Svanberg által. Keletindiában a mult században eszközölt mérésnél sokkal terjedelmesebbet végzett Lambton és Everest ezredes. A lemért ívnek hossza majdnem kétszer oly nagy, mint a Greenwichtől Formenteráig folytatott franczia ív. Még nagyobb terjedelmű az orosz fokmérés, melyet 1817-ben Struve V. és Tenner ezredes kezdett, és mások (Hansteen, Selander stb.) közreműködésével az északi jegestengerig és a Dunáig folytatott. A munka 40 évig tartott, a 259 háromszög által közrefogott meridiánív hossza 25° 20′.10 bázis és 13 geographiai szélességmeghatározást tartalmaz, úgy hogy az ív 12 részre oszlik.

A fokmérések történetében nevezetes a következő három, aránylag csak igen kis ívre terjedő mérés: a dán mérés, melyet Schuhmacher csillagász 1817—21 között eszközölt Alsen szigetén, s melyet később ő és mások észak felé egész Dánországon át folytattak, Kopenhága mellett új bázist mérve föl. Eredeti amplitudója: 1° 31′ 53″. A hannoveri ívet Gauss mérte 1821—24 között a legnagyobb gonddal; amplitudója alig 2° 1′; a keletporosz ív kiméréséenek érdeme Bessel és Baeyer-é 1831—34 között. A Memel és Trunz között terjedő ív hossza 1° 30′ 29″.

Ugyancsak fontos, mert a déli féltekén fekszik, MACLEAR mérése 1842—52 között, ki a mult században eszközölt LACAILLE-féle ívet újból határozta meg; ez ív amplitudója 4^0 36′ 48″. Terjedelménél fogva jelentős a nagy angol fokmérés, melyet 1783-ban WILLIAM ROY és DALBY kezdett, s melyet MUDGE, KATER és JAMES később a Scilly-szigetektől a Shetlandokig folytatott; hossza majdnem 4^0-ot tesz ki, 6 bázist és 250 állomást tartalmaz, melyek közül 32 csillagászatilag fel van mérve. Ezen fokmérés kapcsolása a franczia fokméréssel, az ismert meridiánívet a Shetland-szigetektől a Balearokig terjeszti.

Táblázatosan összeállítva ezen fontosabb fokmérések a következők:

	Az ív közép φ-je	1^0 hossza $= G_\varphi$	$\lg G_\varphi^{2/3}$	$\lg \sin^2 \varphi$	amplitudo	hossza
Lappland	66° 20′ 10″.0	57 195·83	3·171 5763	9·923 7110	1° 37′ 19″.6	92 778·0
Oroszország	58° 0′ 7″ 08	144·29	3152	856 8596	25° 20′ 8″.29	1447 786·783
Angolország	55° 21′ 36″.25	123·30	2089	830 5257	10° 56′ 4″·7	624 622·6
Poroszország	54° 58′ 25″.9	144·45	3160	826 4515	1° 30′ 29″.0	86 177·0
Dánia	54° 8′ 13″.65	093·09	0557	817 4217	1° 31′ 53″.3	87 436·5
Hannover	52° 32′ 16″·5	126·44	2247	799 3740	2° 0′ 57″.4	115 163·7
Francziaország	45° 4′ 16″.58	012·44	170 6464	700 0490	12° 48′ 46″.83	730 500·8
Kelet-India	18° 50′ 9″.85	56 795·97	169 5450	018 0328	21° 21′ 17″.3	1212 866·6
Peru	— 1° 31′ 0″.34	736 8	2433	6·845 4877	3° 7′ 3″.12	176 877
Jóreményfok	— 32° 2′ 42″.0	891·21	170 0301	9·449 5102	4° 36′ 48″.6	262 278

A táblázat $\lg G_\varphi^{2/3}$ és $\lg \sin^2\varphi$ rovataiban mindjárt azon mennyiségeket is adja, melyek a lapultság meghatározására szolgáló

$$G_0^{2/3} + G_\varphi^{2/3} \sin^2\varphi \,.\, e^2 = G_\varphi^{2/3}$$

egyenletben szerepelnek. Ha ezekben $G_0^{2/3}$ és e^2-t ismeretleneknek tekintjük, két ismeretlennel bíró vonalos egyenletünk van, mely az előbbi utasítások szerint közvetlenül megoldható.

Az utolsó fokmérésnek elhagyásával a felsorolt mérések a következő egyenletrendszerhez vezetnek:

	a	x	b	y	n
Lappland	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 1245·3383	e^2	= 1484·4868
Oroszország	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 1067·0255	e^2	= 1483·5945
Angolország	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 1004·0019	e^2	= 1483·2313
Poroszország	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 994·8726	e^2	= 1483·5972
Dánia	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 973·8172	e^2	= 1482·7083
Hannover	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 934·5418	e^2	= 1483·2856
Francziaország	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 742·4982	e^2	= 1481·3117
Kelet-India	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 154·2025	e^2	= 1477·5596
Peru	1 .	$G_0^{2/3}$	+ 1·0345	e^2	= 1476·5367.

A coefficiensek kiszámítása a következő értékeket adja:

$$[aa] = 9\,;\ [ab] = 7117{\cdot}3325\,;\ [an] = 13\,336{\cdot}3117\,;$$

$$[bb] = 7\,083\,917{\cdot}35\,;\ [bn] = 10\,555\,930{\cdot}41,$$

tehát az ismeretlenek kiszámítására a következő két egyenletet:

$$9\ G_0^{2/3} + 7117{\cdot}3325 \,.\, e^2 = 13\,336{\cdot}3117$$

$$7117{\cdot}3325\ G_0^{2/3} + 7083\,917{\cdot}35\, e^2 = 10\,555\,930{\cdot}41.$$

Ezek megoldásából következik:

$$e^2 = \frac{84\,408{\cdot}7}{13\,098\,831{\cdot}7} = 0{\cdot}006\,443\,988 \text{ és } G_0^{2/3} = 1476{\cdot}27\,197,$$

vagy $G_0 = 56\,721{\cdot}73$ toise, továbbá

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

alapján

$$\alpha = 0{\cdot}003\,2272 = \frac{1}{309{\cdot}87}.$$

Ha nem a legkisebb négyzetek elmélete szerint számolunk, hanem az idézett fokméréseket egyszerűen páronként egyesítjük, pl. úgy, hogy az északi féltekén eszközölt mérést a perui déli méréssel kapcsoljuk, akkor a már idézett

$$\frac{G\varphi'}{G\varphi} = \left(\frac{1 - e^2 \sin^2\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi'}\right)^{3/2}$$

egyenletből folyó

$$e^2 = \frac{G\varphi^{2/3} - G\varphi'^{2/3}}{G\varphi^{2/3}\sin^2\varphi - G\varphi'^{2/3}\sin^2\varphi'}$$

egyenletből számíthatjuk a lapultságot. Az eredmények a következők:

Combinatio	Lapultság
Lappland-Kelet-India	1 : 314·53
Lappland-Peru	1 : 312·54
Oroszország-Kelet-India	1 : 302·01
Oroszország-Peru	1 : 301·58
Angolország-Kelet-India	1 : 299 17
Angolország-Peru	1 : 299·14
Poroszország-Kelet-India	1 : 277·98
Poroszország-Peru	1 : 281·02
Dánia-Kelet-India	1 : 317·87
Dánia-Peru	1 : 314·75
Hannover-Kelet-India	1 : 272·06
Hannover-Peru	1 : 276·14
Francziaország-Kelet-India	1 : 313·09
Francziaország-Peru	1 : 310·06
Jóreménységfok-Peru	1 : 310·15.

Az utolsó combinatió legalább az egy, rendelkezésünkre álló példán mutatja, hogy a déli félgömb lapultsága az eltérések határán belül lényegesen ugyanaz, mint az északi félgömbé.

Látnivaló, hogy az eltérések meglehetősen nagyok, sőt azok közepe sem vág össze azon lapultsági értékkel, melyet a legkisebb négyzetek elmélete ad. Ezen eltérések azonban inkább látszólagosak, mint ténylegesek és nem okvetlenül annak bizonyítéka, hogy a Föld különböző meridiánjai különböző ellipsiseknek felelnek meg. Erről később meg fogunk győződni még, ha a nehézségi erő változásának a fokmérésekre gyakorolt befolyásáról fogunk szólani és azon hibákról, melyeket ez szükségkép behoz. Ha el is tekintünk az elháríthatlan hibáktól, melyek minden mérést torzítanak, gondoljuk csak meg, hogy az ív amplitudójában 0″.06-nyi eltérés már a fok hosszát 1 toiseszal változtatja meg, minthogy ugyanis $1^0 = 3600'' = 57060$ toise közel. Egynéhány másodperczynyi eltérés a geographiai szélességben azonban nagyon könnyen létesülhet. Annak meghatározására ugyanis — hiszen ez nem egyéb, mint a hely zenithjének declinatiója — a zenithpont ismeretére van szükségünk, melyet minden körülmény között csak libellával, tehát folyadékfelület irányával jelölhetünk ki. Ha a közelben nehéz tömegek vannak, akkor a libella buborékja a tömegvonzás folytán eltér, nem mutatja többé a helynek a Föld testéhez húzott érintősíkját, hanem egy más, a Föld tömegeloszlásától függő zenithpontot jelöl ki. Ezen hiba, az úgynevezett függőóneltérés, különösen nagy a keletindiai fokmérésben, mert a meridiánív északi része a hatalmas tömegvonzást gyakorló Himálaja hegységhez támaszkodik, míg a déli részében eszközölt szélességmeghatározás ily hibától ment. Az ív amplitudója tehát hibás és a keletindiai fokmérés kihagyása a lapultság értékét tetemesen megváltoztatja. Ezen hiba a nagy franczia fokmérésben legalább is kisebbítve van. a mennyiben a mérések a Pyrenaeusokon túl, azok mindkét oldalán terjednek. A minő befolyást gyakorol tehát ezen hegytömeg az északi lejtője közelségében meghatározott szélességekre, ugyanolyat gyakorol legalább közelítésben a déli lejtőjéhez közel, úgy hogy a geographiai szélességek külömbsége, az ív amplitudója meglehetősen függetlennek mondható e hegylánez vonzó befolyásától.

Ezen okoskodásokra később még bőven rátérünk, itt csak azon megjegyzésre szorítkozom, hogy a legnagyobb és legkisebb kiszámított lapultság, $\frac{1}{272}$ és $\frac{1}{318}$ között fennálló külömbség gyakorlatilag elenyésző. Ha ugyanis a Földet valamely közeli bolygó távolságában távcsővel figyelhetnők, akkor a lapultságnak még a legpontosabb csillagászati mérések mellett is alig találnók nyomát, e két lapultság külömbségét pedig éppenséggel nem vehetnők észre. 1 m átmérőjű gömbön a lapultság nagyobb értéke mellett a tengely mindkét vége 1·8 mm-rel, kisebb értéke mellett 1·5 mm-rel lenne rövidebb, mint az aequatori tengely, a mi csakugyan észrevehetetlennek mondható.

Mindenesetre nagy vívmány, hogy ily kis mennyiséget egyáltalában le lehetett mérni, sőt megadni azon határokat is, melyeken belül ez érték valódi nagyságának mozognia szabad. A mi azonban a lapultság értékének különös hitelt ad, azon körülmény is, hogy közel áll a Newton által elméletileg kiszámított értékhez és hogy elég szoros harmoniában áll azon lapultsági adattal is, melyet a Hold mozgásából levezethetünk.

Ha ugyanis a Föld nem gömb, akkor vonzó hatása a közel álló Holdra már nem olyan lesz, mint a mely középpontjának vonzása által helyettesíthető, ha ebben a Föld egész tömegét egyesítve gondoljuk. A hatás ellenkezőleg ekkor a Föld alakjától is fog függni. Ha a Földet sphaeroidnak képzeljük, melynek lapultsága kicsiny, akkor a vonzó hatás, mint azt a következőkben látni fogjuk, egy $\alpha - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}$ alakú tagot tartalmaz, melyben α a lapultságot, ω a Föld szögsebességét, a az aequatori radiusát és g_0 aequatori gyorsulását, $\frac{\omega^2 a}{g_0}$ tehát a centrifugális és nehézségi erő gyorsulásának viszonyát jelenti az aequator alatt. Ezen tagnak a gömbalakú Föld vonzásához való hozzájárulása a Hold hosszúságában és szélességében egy

$$\delta l = 4360''\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right)\sin D \text{ és } \delta b = -4959''\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right)\sin D'$$

alakú correctiótagot hoz létre, melyekben D és D′ az időtől függő szögleteket jelentenek.

Ha tehát most a Hold járását azon föltevés alatt számítjuk, hogy a Föld gömbalakú és az ily módon kiszámított hosszúságát vagy szélességét a ténylegesen megfigyelhető helyével összehasonlítjuk, eltérést fogunk kapni, mely eltérés nagysága a szélességben, illetve hosszúságban δb és δl-val egyenlő. A könnyebben észlelhető szélességi változásból határozta meg Hansen és Faye a $\sin D'$ faktorát, s ezt illetve 8″.382 és 8″.59-nek találta. Áll tehát

$$4959\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right) = 8''.382 \text{ vagy } 8''.59,$$

a miből a lapultságnak, $\frac{\omega^2 a}{g_0}$ már korábban is közlött értékével ($\omega^2 a = 3{\cdot}39\,117$ cm, $g_0 = 978{\cdot}0728$ cm)

$$\alpha = \frac{1}{296{\cdot}2}, \text{ illetve } \alpha = \frac{1}{292{\cdot}6}$$

értéke következik. Mint látnivaló, ez közelebb áll ugyan a NEWTON-féle $\frac{1}{289}$ értékhez, de nagyon nem távolodik a fokmérések által talált értékektől sem. Minthogy már előbb, ugyancsak a Hold mozgásából megállapíthattuk a Föld közepes sugarát, LAPLACE joggal mondhatta, hogy a csillagász meghatározhatja a Föld nagyságát és alakját, a nélkül, hogy távcsöve mellől távozni kénytelen volna.

A lapultságnak ezen csillagászati úton való meghatározása annál fontosabb, mivel ez nem — mint a fokmérés — egyes meridiánokat tüntet ki, hanem mintegy az összes meridiánok lapultságának közepesét adja; mindenesetre tehát bizonyítékul szolgál arra, hogy az egyes meridiánok görbültsége lényegesen ugyanaz.

Ha már a lapultság vagy excentrumosság ismeretes, akkor bármelyik φ szélesség alatt megmért fokhossz az aequator sugarát szolgáltathatja. Ugyanis egy már talált egyenlet alapján

$$G\varphi = \frac{\pi}{180}\, a\, \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}},$$

a kifejezhető $G\varphi$ által. Ha az aequator fokát választjuk, mivel már az előbbi fokmérések kiszámítása ennek legvalószinűbb értékéhez vezetett, akkor

$$G_0 = \frac{\pi}{180}\, a\, (1 - e^2), \text{ a miből megfordítva: } a = \frac{180}{\pi}\, \frac{G_0}{1 - e^2}.$$

Ha $G_0 = 56\,721{\cdot}73$ toise és $e^2 = 0{\cdot}006\,443\,988$, akkor $a = 3\,272\,475{\cdot}49$ toise, vagy a törvényes viszony szerint (1 m $= 443{\cdot}296$ vonal, 1 toise $= 1{\cdot}949$ m)

$$a = 6\,378\,175{\cdot}44 \text{ m}; \quad b = 6\,356\,642{\cdot}21 \text{ m},$$

hol az utolsó érték $b = a\sqrt{1 - e^2}$ egyenletből van számítva.

A lapultság *absolut* értéke tehát $21{\cdot}533$ kilométer, az aequator kerülete $40\,075{\cdot}260$ km és annak 40 milliomodrésze $1001{\cdot}8815$ mm, úgy hogy a méter definitiója már ezen fokmérések alapján nem vág az eredetileg elérni óhajtott eszménynyel. Az aequator foka $111{\cdot}32017$ km és ennek 15-öd része, vagy $7421{\cdot}34$ m a geographiai, 60-ad része, vagy az aequator 1 ívpercze $1855{\cdot}33$ m a tengeri mérföld.

Az összes, addig ismeretes fokmérésekből több csillagász és geodéta számította lehető nagy gonddal a földsphaeroid méreteit és alakját. ENCKE, LINDENAU, FISCHER, BESSEL, SCHUBERT, CLARKE és LISTING a kiválóbb számolók. Legnagyobb elterjedésnek örvend BESSEL és CLARKE eredménye, melyet a következő táblázatban állítottam össze, LISTING úgynevezett typikus sphaeroidjával együtt. A hosszúságok méterekben vannak adva.

	BESSEL	CLARKE	LISTING
Lapultság	1 : 299·1528	1 : 294·979	1 : 289·000
a	6 377 397·16	6 378 206·51	6 377 365
b	6 356 078·96	6 356 583·88	6 355 298
log e	8·912 2052	8·915 2558	8·919 6901
Aequatorquadrans	10 017 596	10 018 862	10 017 542
1 aequatorfok	111 306·6	111 320·7	111 306·0
1 német geogr. mérföld	7420·44	7421·38	7420·4
1 angol „ „ (= 1 aequator perczczel)	1855·11	1855·34	1855·10
1 merídiánfok az aequator alatt	110 563·74	110 567·20	110 537·07
Közép merid. fok	111 120·63	111 132·10	111 113·53
1 tengeri mérföld (= 1 köz. merid. perczczel)	1852·01	1852·20	1851·89
Meridiánquadrans	10 000 855·76	10 001 887	10 000 218·00
Közép földsugár	6 370 283	6 370 990	6 370 000

Mindhárom adat szerint a meridiánquadrans tízmilliomodrésze már nem lényegtelenül tér el a méter hosszától.

LISTING typikus sphaeroidjára vonatkozólag meg kell jegyeznünk, hogy ez azon rotatiós ellipsoiddal azonos, melynek lapultsága önkényesen $\frac{1}{289}$-ednek, s melynek térfogata szintén önkényesen a kerek 6 370 000 m-nyi sugarúnak vett gömbi Földdel azonos.

Az a és b féltengelyekkel bíró sphaeroid térfogata a stereometria tanai szerint $\frac{4}{3}\pi a^2 b$, míg az r sugarú gömbé: $\frac{4}{3}\pi r^3$, a mi az előbbiből is következik, ha a két főtengelyt egymással egyenlőknek tekintjük. Az egyenlő térfogatú ellipsoid és gömb számára áll tehát:

$$a^2 b = r^3; \quad b = a\sqrt{1 - e^2}; \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2},$$

a miből a, b, e számítható, ha r és α adva van.

Már a Bessel és Clarke-féle eredmények összehasonlítása is mutatja, hogy a külömbségek az egyes sphaeroidok méretei között tetemesen nagyobbak, mint az a mérések jósága mellett várható volna. Így pl. a Delambre-féle két bázis — mint láttuk — 0·16 toisera pontosan volt megmérve, noha a kettő között 330 000 toisenyi távolság feküdt. A földsugár mintegy 10-szer akkora, tehát a hiba, mely a Föld méretében várható, szintén vagy 10-szer nagyobbnak vehető, tehát mintegy 3—4 m-t tesz ki. Tényleg Bessel és Clarke között sok százszor nagyobb külömbségek mutatkoznak. Ezek folytán a következő tapasztalatot mondhatjuk ki: az egyes fokmérésekből levezetett földsphaeroidok méretei nagyobb külömbségeket tüntetnek föl, mint a minők azok pontossága mellett várhatók volnának, vagy az egyes fokmérések a geodéziai mérések pontosságán belül nem illeszthetők be ugyanazon sphaeroidba.

1834-ben Jacobi híres mathematikus azon fölfedezést tette, hogy a térben szabadon lebegő folyadéktömeg, mely tisztán csak saját részei vonzási erejének és tengelyforgásnak van alávetve, a háromtengelyű ellipsoid alakjával is bírhat egyensúlyi alak gyanánt. A háromtengelyű ellipsoid minden metszete síkkal ellipsis, tehát nemcsak a meridiánok azok, hanem az aequator és a parallelkörök is, és ennek folytán a meridiánok is mind különböző lapultsággal bírnak.

E fontos fölfedezésből természetesen a mathematikai geographia is húzott hasznot, és Schubert, meg James és Clarke az eddigi fokméréseket ezen bonyolódottabb alak feltételezése alatt számították. Az eredmény a következő:

	Schubert	James és Clarke
Az aequator nagyobbik féltengelye:	a = 6 378 556	6 378 294
Az aequator kisebbik féltengelye. .	b = 6 377 837	6 376 350
A forgási féltengely	c = 6 356 719	6 356 068
Az aequator nagy féltengelyének keleti hosszúsága Greenwichtől .	λ = 41° 4′	15° 34′

Az eredmény itt sem kedvező; a két alak méretei nem vágnak jobban, mint az egyszerű sphaeroidéi, s ezért a két tudósnak idézett számításait inkább történeti érdekük miatt hozom fel, annál is inkább, mert a háromtengelyű ellipsoid elfogadása az összes geodéziai és csillagászati számításokat majdnem áttekinthetetlen módon nehezíti.

Az eddigi fokmérések történetét és lényegét tehát a következő módon foglalhatjuk össze: A Föld alakja számára egészen tetszőlegesen szabályos geometriai alakot tételezünk fel, a fejlődési menetnek megfelelőleg először a gömböt, majd a két-, majd — bár csak rövid időre — a háromtengelyű ellipsoidot és azok méreteit úgy iparkodunk meghatározni, hogy a fokmérésekben hátramaradó hibák négyzetei minimum legyen. Az eredmény azonban minden esetben negativ volt, mert nem találunk oly egyszerű geometriai alakot, melyre minden fokmérés pontosságának határán belül illeszthető volna, és még inkább áll ez, ha a Föld alakját — mint később teszszük — az ingával is meghatároztuk majd.

Ebből azonban senki ne következtesse azt, hogy az eddigi mérések haszon nélküliek, vagy éppen feleslegesek. A csillagászatnak és geographiának legeslegtöbb kérdéseiben teljesen elegendő, ha gömbi Földről szólunk és csak igen ritkán kell a Földnek második közelítésben helyes alakjára, a sphaeroidra átmennünk. A csillagászatban jobbadán csak a Hold és legfölebb még egynéhány közeli bolygó parallaxisa esetében, a földrajzban a nagyterjedelmű térképekben és a nehézségi erőre vonatkozó kérdésekben. Az eddigi számítások azonkívül alapul szolgálnak a Föld alakjának későbbi, pontos meghatározásában is.

Annyit mindenesetre már most is látunk, hogy a fokmérések pontosan csak úgy ábrázolhatók a Föld valamely szabályos geometriai felületével, ha ennek egyenletében annyi meghatározandó méretet tartunk fenn, a hány fokméréssel általában rendelkezünk. Ha a Földet gömbnek tekintjük, egyetlenegy mérés elegendő, a sphaeroidos Föld két fokméréssel teljesen meg van határozva, mert e felületben csak két méret szerepel. Mivel azonban a fokmérések száma folytonosan nő, a törekvés nyilván oda irányul, hogy a földfelület lehetőleg minden pontjának megadjuk geographiai szélességét, hosszúságát és radiusvectorát. Ez ideális czél elérése egyszersmind a Föld alakjának geometriai értelmezhetőségéről való teljes lemondásunkat jelenti. Különben látni fogjuk a következőkben, hogy ily coordinátajegyzék magában véve nem is elegendő az alak meghatározására, hogy a geometriától és a csillagászati helymeghatározástól teljesen idegen elemeket is kell behoznunk, melyek azonban viszont az alak más, mechanikai értelmezését engedik meg. Mielőtt ezen, az egész mathematikai és physikai geographiában mindinkább fontosabb szerepet játszó tárgyra átmennénk, lássuk még azon főfontosságú számításokat, melyek gömb- és sphaeroidos Földre eszközölhetők.

Utólag íme meggyőződést szerezhettünk arról is, hogy a métercommissió, mely annak idején csak a franczia fokmérésre támaszkodott, ideális czélját nem érhette el; a méter, mint a meridiánquadrans tízmilliomodrésze, minden fokmérés alkalmával más nagyságúnak adódik, egyrészt, mert a mérés műszerei és methodusai mindig tökéletesednek, másrészt, mert a különböző meridiánok minden bizonynyal különböző kerülettel bírnak. Hozzájárul még, hogy ezen kerületet nagyságához képest csak igen kis, tényleg lemért ívből vezethetjük le. A méter tehát sem nem természetes, sem nem elpusztíthatlan hosszúságegység, mely még a párisi másodperczingából sem reconstruálható, mert a constructió pillanatától fogva nyilván ez venné át az egység szerepét. A dolog történetéből különben következik, hogy a tulajdonképeni eredeti egység a párisi toise hossza. Ebből készítették a méter-prototypot, ezzel mérték a Földet, a Nap, a bolygók, sőt még az állócsillagoknak távolságát is.

Noha az egység immár egyszerű étalon, a méterrendszer mégis minden izében tökéletes, egyrészt számrendszerünknek megfelelő tizedes osztása miatt, másrészt, mert egyszerű viszonyban áll a súlyegységgel is. A tömegegység t. i. a kilogramm, egy köbdeciméter destillált legsürűbb ($+ 4^0$ C hőmérsékletű) víz tömege. Helyesebb definitió szerint ismét azon étalon lehetőleg hű mása, melyet a párisi commission des poids et mesures kilogramme prototype gyanánt őriz.

A középmásodperczczel együtt a centiméter és gramm alkotják az úgynevezett absolut mértékrendszert (C. G. S. rendszer), melynek segítségével a mechanika minden mennyisége lemérhető, a nélkül, hogy új, tetszőleges egység behozatala szükségessé válnék. Ily módon lemérjük a területeket, a sebességet, forgási momentumot, sőt a mágneses és elektromos tömegeket is.

VII. FEJEZET.

Sphaerikus és sphaeroidikus problemák.

A sphaeroidikus vagy gömbi Földön a következő számítások ismétlődnek legtöbbször és bírnak kiváló fontossággal:

A meridiánellipsis egy foka φ geographiai szélesség alatt, mint már többször idéztük,

$$G\varphi = \frac{\pi}{180} a \frac{1 - e^2}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}.$$

A gömb alakú Földön $e = o$ és a fokok hosszai természetesen mindenütt egyenlők. Ez egyenletből most már tetszőlegesen hosszú ívet vezethetünk le, ha darabonként számítjuk az ív hosszát és az eredményeket összeadjuk. Ez természetesen csak közelítő eredményt adhat, mert hiszen a fokok megnövekedése nem ugrásos, hanem folytonos, de az elkövetett hiba számításba sem jön. A quadrans hossza:

$$Q = \frac{\pi}{2} a \left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3.e^2}{2.4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - .. \right],$$

mely sor könnyen folytatható, vagy LISTING szerint a lapultság második hatványáig:

$$Q = \frac{\pi}{2} a \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{16}\right).$$

A Föld közepes sugarát, azaz azon sugarat, melylyel bírna, ha a forgási ellipsoidot egyenlő térfogatú gömbbé változtatnók, szintén levezettük már. E sugár

$$r = \sqrt[3]{a^2 b}$$

egyenletből számítható s nagyon közel 6 370 000 m-rel egyenlő.

A sphaeroidikus Föld köbtartalma

$$K = \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^3 \left[1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1.e^4}{2.4} - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 - - . \right];$$

noha ez egyenlet zárt alakban is előállítható, a sorfejtés e kicsinysége mellett mindig ajánlatos; ily módon

$\frac{4}{3}\pi a^3$ a tőérték, melyet $\frac{4}{3}\pi a^3 \frac{e^2}{2}\left[1+\frac{e^2}{4}+\frac{1.3}{4.6}e^4+..\right]$

értékkel kisebbíteni kell. Ezen utóbbinak kiszámítása már kevés számú logarithmussal is lehetséges, holott az eredeti képlet pontos kiszámítására igen sokjegyű logarithmus kellene. A gömbalakú Föld számára a köbtartalom természetesen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

A Föld felülete

$$F = 4\pi a^2\left[1-\frac{e^2}{1.3}-\frac{e^4}{3.5}-\frac{e^6}{5.7}-..\right]$$

könnyen folytatható végtelen sorból származik; a gömbalakú Földé természetesen $4\pi a^2$.

Valamely φ_2 és φ_1 geographiai szélesség között fekvő zóna területe a gömbi Földön, mint ezt a 96. ábra alapján levezettük:

$$f = 4\pi r^2 \sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}.$$

Ha két meridiánt húzunk λ_1 és λ_2 geographiai hosszúságok alatt, akkor ezek a zónából egy gömbi trapezet szelnek ki, melynek területe f' természetesen annyiad része a zóna egész f területének, a hányad része a $\lambda_2-\lambda_1$ hosszkülömbség a 360^0-nak. Innen

$$f' = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{360^0}f \text{ vagy } f' = \frac{\pi}{90^0}(\lambda_2-\lambda_1)r^2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2},$$

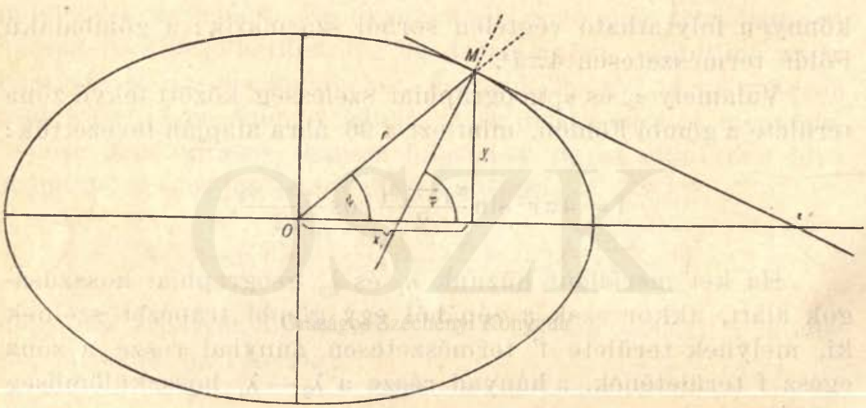
mely egyenlet a térképek kiméréśénél gyakori alkalmazást nyer. A sphaeroidikus Földön az egyenlet nem oly egyszerű; kiszámítását azonban fölöslegessé teszik egyebeken kívül a Behm, Geographisches Jahrbuch III. kötetében foglalt táblázatok. Ezek egyike adja az aequatortól a φ parallelkörig terjedő zóna területét; ha ezt φ_2 és φ_1 számára kikeressük, a két számot levonjuk, akkor megkapjuk a területét a φ_2 és φ_1 között fekvő zónának; ennek 360-ad része oly gömbi trapez területe, mely φ_2 és φ_1 parallelák és 1^0 hosszúságkülömbséggel bíró meridiánok között fekszik.

Ha a gömbi zóna képletében $\varphi_2 = 90^0$ és a geographiai szélesség helyett a sarki távolságot hozzuk be $\varphi_1 = 90^0 - \theta$ egyenlet alapján, akkor

$$f = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

adja általában azon gömbcalotta felületét, mely θ gömbi sugárral van leírva; ezen egyenlet ugyancsak a morphologiában fontos.

A sphaeroidon — mint említők — a geographiai szélesség azon szöglet, melyet a hely normálisa az aequator síkjával képez. Ettől különböző (184. ábra) a radiusvector és az aequator szöglete ψ, melyet geocentrumos vagy javított szé-



184. ábra. Geographiai és geocentrumos szélesség.

lességnek neveznek, s mely úgy az astronomiában, mint a geographiában fontos szerepet játszik. A két szélesség közötti viszony könnyen megállapítható; az ellipsis normálisának egyenlete ugyanis

$$y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x + q,$$

s ebben x coefficiense tudvalevőleg azon szöglet tangense, melyet az egyenes az abscissák tengelyével bezár, jelen esetben tehát éppen tang φ. Áll tehát

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Másrészt azonban az M pont x_1 és y_1 coordinátái adnak:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{y_1}{x_1},$$

úgy hogy egyszerűen:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi \quad \text{vagy:} \quad \operatorname{tg}\psi = (1 - e^2)\operatorname{tg}\varphi.$$

Minthogy a Föld excentrumossága kicsiny, nem előnyös ez egyenlet, hanem sokkal egyszerűbb lesz, ha közvetlenül ψ és φ mindig igen kis külömbségét keressük. Írva:

$$\frac{\sin\psi}{\cos\psi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -e^2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

lesz némi átalakítás után:

$$\sin(\psi - \varphi) = -e^2 \sin\varphi \cos\psi.$$

Minthogy $\psi - \varphi$ nagyon kicsiny, a sinus helyett az ívet tehetjük, s jobb oldalon is ψ helyébe egyszerűen φ-t írva, származik:

$$\psi - \varphi = -206\,264{\cdot}8\, e^2 \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

A pontosabb számítás és a Bessel-féle excentrumosság behelyettesítése ad:

$$\psi = \varphi - 11'\,30''.65 \sin 2\varphi + 1''.16 \sin 4\varphi - 0''.003 \sin 6\varphi + \ldots$$

a hol a 3-ik tag mindig elhagyható; már a második tag elhanyagolása is átlag csak 1″-nél kisebb hibát ad.

Úgy ezen, mint az eredeti képlet mutatja, hogy a geographiai és geocentrumos szélesség azonos az aequator és a pólus alatt, s hogy 45^0 szélességben az eltérés 11′ 30″.65 elég tekintélyes értéket éri el. A két szélesség közötti külömbség egyszersmind azon szöglet, melyet a nehézségiránya a Föld középpontjához húzott iránynyal képez. A függő ón tehát — minthogy φ mindig nagyobb, mint ψ — nem a Föld centruma felé, hanem mindenütt a radiustól dél felé hajlik.

Minthogy a két szélesség külömbsége aequator és pólus alatt null és $\varphi - \psi$ mindig positiv, kell, hogy aequator és pólus között valahol a külömbség maximum legyen. Mely parallelkörön történik ez? A feladat megoldására az eredeti egyenletet hozzáadjuk és levonjuk $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ egyenletből; a két új egyenlet viszonya:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi} = \frac{e^2}{2 - e^2},$$

vagy a tangenseknek felbontása által:

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{e^2}{2 - e^2} \sin(\varphi + \psi).$$

$\sin(\varphi - \psi)$ és ezzel együtt $\varphi - \psi$ is maximum, ha $\sin(\varphi + \psi) = 1$, tehát $\varphi + \psi = 90^0$. De ekkor $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{cotg}\varphi$, a mit az eredeti egyenletbe téve:

$$\cot\varphi_0 = (1 - e^2)\operatorname{tg}\varphi_0;$$

ha φ_0 jelenti azon parallelkört, melyen a nevezett külömbség maximuma. Ebből

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

a mi — e mindig kisebb lévén, mint az egység — 45^0-on felül fekvő parallelnek felel meg. Ebből $\varphi_0 = 45^0\ 5'\ 48''.8$, tehát $\psi_0 = 44^0\ 54'\ 11''.2$ mint complementum és $\varphi_0 - \psi_0 = 11'\ 37''.6$. A keresett parallel körülbelül Turin városának felel meg. A függőón iránya tehát a radiustól maximumban közel $12'$-czel tér el.

A sphaeroidikus Föld sugarai természetesen a szélesség szerint változnak és minden nehézség nélkül levezethetők az ellipsisnek már talált poláris egyenletéből:

$$a^2 r^2 \sin^2\psi + b^2 r^2 \cos^2\psi = a^2 b^2,$$

melynek csak azon hátránya van, hogy a geographiai szélesség helyett a geocentrumosat tartalmazza. Hogy az utóbbit vezessük be, megszorozzuk az egyenletet $\frac{1}{b^2}$-vel és lesz:

$$r^2 \cos^2\psi + \frac{1}{\frac{b^2}{a^2}} r^2 \sin^2\psi = a^2.$$

De $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sin\psi\cos\varphi}{\cos\psi\sin\varphi}$, és ezért

$$r^2 \cos\psi(\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) = a^2\cos\varphi,$$

vagy

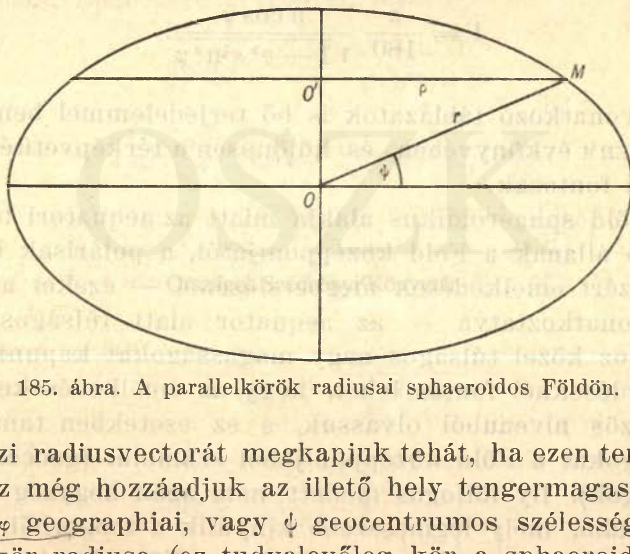
$$r = a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\psi\cos(\varphi-\psi)}}.$$

Kellő átalakítás és sorbabontás itt is kényelmesebb közelítő kifejezéshez vezet, mely tüstént r logarithmusát adja; ugyanis

$$\lg\frac{r}{a} = 9{\cdot}999\,2747 + 0{\cdot}000\,7271\cos 2\varphi - 0{\cdot}000\,0018\cos 4\varphi,$$

a hol csak a geographiai szélesség szerepel már.

Ezen sugár természetesen csak a tengerszinre vonatkozik, mert hiszen erre redukáltuk a fokméréseket. Valamely



185. ábra. A parallelkörök radiusai sphaeroidos Földön.

hely igazi radiusvectorát megkapjuk tehát, ha ezen tengerszini sugárhoz még hozzáadjuk az illető hely tengermagasságát.

A φ geographiai, vagy ψ geocentrumos szélességgel bíró parallelkör radiusa (ez tudvalevőleg kör a sphaeroidon is) a radiusvectorból már könnyen megállapítható. Ha ezt (185. ábra) ρ-val jelöljük, akkor MOO' derékszögű háromszögből

$$\rho = r\cos\psi$$

és ugyanazon vonatkozás áll a gömbre nézve is, csakhogy ebben r állandó és ψ maga a geographiai szélesség is. A radiusvector értékével:

$$\rho = a\sqrt{\frac{\cos\varphi\cos\psi}{\cos(\varphi-\psi)}},$$

mely egyenlet azonban nem előnyös, minthogy benne φ és ψ vegyest szerepel. Ha azonban a nevezőt a cosinustétel szerint felbontjuk és $\operatorname{tang}\psi = (1-e^2)\operatorname{tang}\varphi$-t írunk, akkor lesz:

$$\rho = a\sqrt{\frac{\cos\varphi\cos\psi}{\cos\psi(\cos\varphi + \sin\varphi\operatorname{tg}\psi)}} = a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + (1-e^2)\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi}},$$

vagy végre:

$$\rho = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Gömbalakú Földön $\rho = a\cos\varphi$, tehát mindig valamivel kisebb, mint a sphaeroidos Földön. Ebből a parallelkör egy fokának hossza:

$$\Gamma = \frac{\pi}{180}\,\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Az erre vonatkozó táblázatok is bő terjedelemmel bennfoglaltatnak Behm évkönyvében, és különösen a térképvetítés szempontjából fontosak.

A Föld sphaeroidikus alakja miatt az aequatori tengerek messzebb állanak a Föld középpontjától, a polárisak közelebbek és ezért emelkedések megbecslésénél — ezeket a tengerszinre vonatkoztatva — az aequator alatt túlságos kis, a pólusokhoz közel túlságos nagy magasságokat kapunk. Bizonyos kérdéseknél fontos lehet, hogy az emelkedéseket szigorúan közös niveauból olvassuk, s ez esetekben tanácsos a magasságokat a Föld középpontjából számolni (geocentrumos magasságok). Ily fölfogás mellett nem azon hegység volna a legmagasabb, mely legmesszebb kinyúlik a tengerből, hanem az, melynek csúcsa legtávolabb áll a Föld középpontjától. Hogy azonban túlságos nagy számokat ne kapjunk, levonhatjuk az emelkedések radiusvectoraiból a Föld közepes sugarát, azaz minden magasságot tényleg azon tengerszinre vonatkoztatunk, melyet nyernénk, ha a Földet térfogatának épségben tartásával gömbbé változtatnók.

Ily átalakulás mellett a tenger mindenütt megváltoztatná mélységét: az aequator alatt sekélyebb, a pólusokon mélyebb lenne, és változást csak ott nem tüntetne fel, a hol a tényleges radiusvector a közepessel egyenlő, a mi nyilván egy egész parallelkör mentén áll. Ha φ' azon szélesség, melyben a tényleges sphaeroidikus radiusvector a közepessel egyenlő, akkor áll együttesen ezen két egyenlet:

$$a^2 r^2 \sin^2 \psi + b^2 r^2 \cos^2 \psi = a^2 b^2 \text{ és } r^3 = a^2 b.$$

Az első $a^2 b^2 \cos^2 \psi$-vel való osztás után:

$$\frac{r^2}{b^2} \operatorname{tang}^2 \psi + \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{\cos^2 \psi} = 1 + \operatorname{tang}^2 \psi$$

alakban írható, melyből

$$\operatorname{tang}^2 \psi = \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}$$

következik. Ebbe téve r értékét, lesz:

$$\operatorname{tang}^2 \psi = \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 - a^{4/3} b^{2/3}}{a^{4/3} b^{2/3} - b^2}$$

vagy $\frac{b^{4/3}}{a^{2/3}}$ faktor kiemelése után:

$$\operatorname{tang}^2 \psi = \frac{b^{4/3}}{a^{2/3}} \frac{a^{2/3} - b^{2/3}}{a^{4/3} - b^{4/3}} = \frac{b^{4/3}}{a^{2/3}} \frac{1}{a^{2/3} + b^{2/3}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{4/3} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}}.$$

Mivel végre

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

volt, lesz:

$$\operatorname{tang} \varphi' = \left(\frac{a}{b}\right)^{4/3} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}}}$$

vagy egyszerűbben az excentrumosság által fejezve ki:

$$\operatorname{tang} \varphi' = (1 - e^2)^{-2/3} \left[1 + (1 - e^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

e értékével $\varphi = \pm 35^0\ 24'\ 5''$-nyinak adódik.

E két parallelkör, mely Afrikát, déli Ázsiát, Ausztráliát és a két Amerika subtropikus övét magában foglalja, mintegy a két sarok, a mely körül a tenger szine ily változás mellett ingalengésekben nyugalomra térne. A két parallelán belül a tengerek sülyednének, kívüle pedig emelkednének. A Listing-féle méretekből indulva ki, a legnagyobb sülyedés $a - r = 6\,377\,365 - 6\,370\,000 = 7365$, a legnagyobb emelkedés $r - b = 6\,370\,000 - 6\,355\,298 = 14\,702$ m-rel lenne egyenlő. Ily átalakulás mellett Európában az Alpesektől északra nem maradna száraz pont, a Montblanc is csak 960 m.-rel emelkednék ki a tengerből, ellenben az aequatori tengerek óriási hegységekkel borított szárazulatokat hoznának napfényre. A hegyóriásokat a tropusok alatt a geocentrumos magasság még hatalmasabbaknak tüntetné föl.

A 73. ábra alapján kiszámítottuk egyrészt a horizont depresszióját, másrészt a földsugárt is. De megállapíthatjuk most már könnyű szerrel a szemhatár sugarát BC-t is, azaz azon távolságot, a melyig a szem szabadon ellát.

Sphaeroidikus Föld számára a számítás ugyan kissé hosszadalmas, de egyszersmind jelentőségtelen is, mert hiszen a refractió nagyobb hibákat hoz be, mint a Föld sphaeroidikus eltérésének elhanyagolása. Tehát tisztán gömbalakra szoritkozunk.

A depressiót közelítve, tekintettel a refractióra

$$\varphi = 107''.8 \sqrt{h},$$

vagy képletben

$$\varphi = \frac{13{\cdot}8}{14{\cdot}8 \,.\, \sin 1''} \sqrt{\frac{2}{r} \,.\, h}$$

alakban találtuk, a hol a $\frac{13{\cdot}8}{14{\cdot}8}$ factor éppen a sugártörés miatti befolyást veszi tekintetbe. A hozzá tartozó ív $BC = R$ éppen a látmező sugara.

$$R = \frac{\pi}{180} r \varphi$$

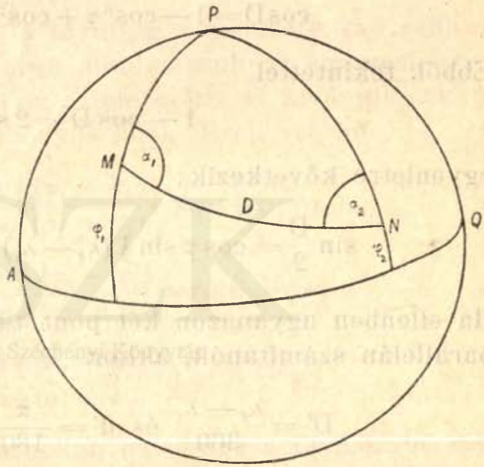
vagy a kellő értékek behelyettesítése után:

$$R = 3{\cdot}295 \sqrt{h} \text{ kilométer},$$

ha h a szemnek méterekben kifejezett tengermagasságát jelenti. Egy méterrel a tenger felett tehát közel $3\frac{1}{3}$ kmnyi sugarú kört látunk be, 10 000 m. magasságban 330 kmig látunk el.

5000 m. magasságban a depressió közel $2^0\ 6'$, még oly kis szöglet, melyet a szem alig vesz észre. Közel vízszintesen nézve még mindig a horizontot látjuk, holott szemünk alatt tetemes mélység terül el. Mi sem természetesebb, mint azon csalódás, hogy léggömbön a Földet vájtnak gondoljuk, magunkat pedig a kivájásnak középpontjában képzeljük.

Fontossággal bírnak még reánk nézve a földfelület két pontja között lévő legrövidebb távolság meghatározására szolgáló egyenletek. A legrövidebb távolságot valamely felület két pontja között megkapjuk, ha közöttük teljesen hajlítható, absolut kiterjeszthetetlen fonalat fektetünk. A fonal által alkotott görbe vonal a geodéziai görbe nevét viseli. Kiszámítása éppen nem egyszerű és a magasabb mathematikai segédeszközök nélkül nem eszközölhető. A gömb esetében a legrövidebb távolság azonban a két pontot összekötő legnagyobb kör íve, és a geographiai problemák ezen fajánál a Föld minden aggodalom nélkül gömbbel azonosítható. Ez esetben (186. ábra) az M és N pont sarktávolsága a keresett D távolsággal gömbi háromszöget képez; $MP = 90^0 - \varphi_1$; $NP = 90^0 - \varphi_2$; $MPN = \lambda_2 - \lambda_1$, úgy hogy a cosinustétel szerint:



186. ábra. Gömbi távolságok.

$$\cos D = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)$$

a legnagyobb kör mentén számított és szögmértékben kifejezett távolság található. Ha a távolságot hosszmértékben kifejezve d-vel jelöljük, akkor nyilván D a d ívhez tartozó középponti szöglet, tehát

$$d = \frac{\pi}{180} r D,$$

a hol D fokokban fejezendő ki, r pedig a Föld közepes sugarát jelenti.

Ha a két hely ugyanazon meridiánon fekszik, akkor $\lambda_2 = \lambda_1$, tehát

$$D = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{és} \quad d = \frac{\pi}{180} r (\varphi_2 - \varphi_1),$$

mint az közvetlenül természetes is; ha ellenben a két hely ugyanazon parallelkörön van, úgy hogy $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$, akkor

$$\cos D = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos(\lambda_2 - \lambda_1),$$

vagy

$$\cos D = 1 - \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ebből, tekintettel

$$1 - \cos D = 2 \sin^2 \frac{D}{2}$$

egyenletre következik:

$$\sin \frac{D}{2} = \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad \text{és} \quad d = \frac{\pi}{180} r D.$$

Ha ellenben ugyanazon két pont távolságát a rajtuk átmenő parallelán számítanók, akkor

$$D' = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{360} \quad \text{és} \quad d' = \frac{\pi}{180} r \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1)$$

adódnék, a mi minden esetben nagyobb, mint a legnagyobb kör mentén számított távolság.

Ha a legrövidebb távolságot biztosító út azimuthját α-val jelöljük (186. ábra), akkor ez a kiindulási pont számára

$$\sin \alpha_1 = \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos \varphi_2}{\sin D},$$

a megérkezés helyén hasonlóan

$$\sin \alpha_2 = \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos \varphi_1}{\sin D}$$

által van adva. Az azimuth természetesen pontról-pontra változik és a főkör mentén már megtett úttól függ. Ez út közelebbi kijelölésére szolgálhat még azon Q pont fekvése is, melyben a legnagyobb kör a parallelt érinti, mely tehát az út legészakibb részének felel meg. Ha a 187. ábrában MNP az előbbi gömbi háromszög, RQS a Q ponton átmenő parallel, akkor a Q pont geographiai szélessége és hosszúsága könynyen meghatározható, mivel PQ merőlegesen áll úgy a parallelra, mint a távolsági ívre. A megoldás:

$$\sin q = \sin\alpha_1 \cos\varphi, \text{ vagy } \sin q = \sin\alpha_2 \cos\varphi_2 \text{ és}$$

$$\operatorname{cotg}(\lambda - \lambda_1) = \operatorname{tg}\alpha_1 \sin\varphi_1 \text{ vagy } \operatorname{cotg}(\lambda_2 - \lambda) = \operatorname{tg}\alpha_2 \sin\varphi_2,$$

a mivel $90^0 - q$ geographiai szélesség és M-hez vagy N-hez való hosszkülömbség ismeretes.

Ha egyszerűen csak a távolság ismeretére van szükségünk, akkor legczélszerűbben alkalmazzuk az egyszerű cosinusegyenletet. Ha ellenben az azimuthokat is kivánjuk, akkor a Napier-féle egyenletek előnyösebbek. Ezek szerint:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1);$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)} \cot\tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1);$$

$$\operatorname{tang}\frac{D}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

és az első kettő az azimuthokat, az utolsó a távolságot adja.

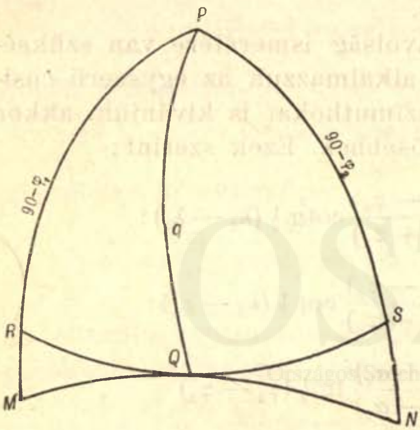
Pl. a hamburgi gőzösök mindig Havreban kötnek ki, a honnan azután egyenesen Newyorkba mennek. Mekkora s mily fekvésű a legrövidebb út?

Havre:	$\varphi_1 = +49^0\,29'.3$	$\lambda_1 = 0^0\,6'.5$ E Greenwich
Newyork:	$\varphi_2 = +40^0\,43'.0$	$\lambda_2 = 74^0\,0'.4$ W „

$\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$: 8·8835	$\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$: 9·9988	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$: 8·8847
$\cot\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$: 0·1220	$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$: 0·1220	$\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$: 9·9451
9·0055	0·1208	8·8298
$\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$: 9·8487	$\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$: 9·8502	$\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$: 9·1524
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$: 9·1568	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$: 0·2706	$\operatorname{tg}\frac{D}{2}$: 9·6774
$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = 8^0\,9'.9$	$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = 61^0\,47'.7$	$\frac{D}{2} = 25^0\,26'.7$

Ebből azután $\alpha_1 = 69^0\ 57'.6$ és $\alpha_2 = -53^0\ 37'.8$, $D = 50^0\ 53'.4 = 50^0.890$ és $d = \frac{\pi}{180} r D = 5657$ km. Továbbá: $q = 37^0\ 36'.5$ vagy $90^0 - q = 52^0\ 23'.5$ és $\lambda_1 - \lambda = 25^0\ 38'.5$ W Havre vagy $\lambda = 25^0\ 32'$ W Greenwichtől.

A Havretől Newyorkba vezető legrövidebb út 5657 km; felkeresésére Havreből kiindulva $2\frac{1}{2}^0$-kal délre WNW-től kormányzunk, nyugoti irányban $52^0\ 24'$ északi szélesség és $25^0\ 32'$ W. greenwichi hosszúság alá irányítunk és a newyorki kikötőbe 14^0-kal északra ENE-től érkezünk. Pusztán a távolság magában a következő módon számíttatnék:



187. ábra. Gömbi távolság kijelölése.

$\sin\varphi_1$: 9·8809	$\cos\varphi_1$:		9·8126
$\sin\varphi_2$: 9·8144	$\cos\varphi_2$:		9·8797
a) 9·6953	$\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$:		9·4373
addit: 0·1045		b)	9·1296
$\cos D$: 9·7998		$\frac{b)}{a)}$:	9·4343
$D = 50^0\ 54'.0$			

közel ugyanazon eredmény, mint előbb.

Hogy mily külömbség van a parallelákon és a legnagyobb kör ívén tett út között, azt legjobban a következő tanulságos példa mutatja: tegyük meg a Föld körüli utat Montevideóból a Fokvárosba, onnan Sydneybe és vissza Valparaisoba. Mindnégy város közel ugyanazon parallelán fekszik.

Montevideo	$\varphi = -34^0\ 54'.5$	$\lambda = 56^0\ 12'.3$ W	Greenw.
Fokváros	$-33^0\ 54'.5$	$18^0\ 25'.3$ E	„
Sydney	$-33^0\ 51'.7$	$151^0\ 14'.9$ E	„
Valparaiso	$-33^0\ 2'.2$	$71^0\ 37'.4$ W	„

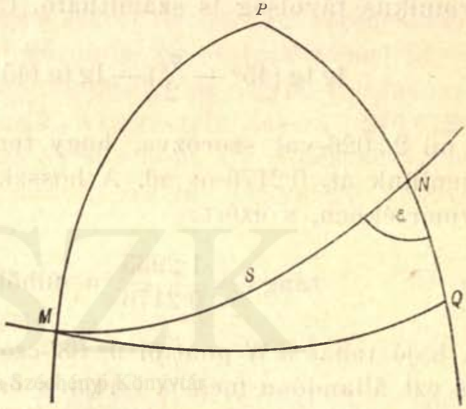
két-két pont között azok közepes paralleláján az út

Montevid.-Capváros	= 6 845 km,	mig a	legrövid.	út	= 6 672 km	
Capváros-Sydney	= 12 259 „	„	„	„	= 11 014	„
Sydney-Valparaiso	= 12 721 „	„	„	„	= 11 330	„

a teljes kerülő tehát összesen 2809 km, annyi, mint Havre-

Newyork fél útja. Ezzel a legrövidebb út előnye eléggé ki van tüntetve.

Ha az út tartama nem dönt, ugyanazon irány megtartása mellett hajóznak, azaz a hajó útja az összes meridiánokat ugyanazon szögletek alatt metszi, vagy — mágneses declinatióváltozásoktól eltekintve — a hajó mágnestűje állandóan ugyanazon irányt tartja be. Az előny az, hogy a hajó útja ez esetben az úgynevezett tengeri térképeken egyszerűen a kiindulási és megérkezési kikötőt összekötő egyenesével azonos. A hajó ez esetben sajátságos csavarvonalat ír le a Földön, a loxodromát, mely a pólust végtelen sok csavarodásban körüljárja, a nélkül, hogy véges, bármily nagy számú csavarodás után elérné. A loxodroma egyenlete, mely az egész térképvetítés tanában alapvető fontosságú, s melyet annak idején magunk is fogunk levezetni:



188. ábra. Loxodromikus távolság.

$$\lambda = \lambda_0 - \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{lgnat} \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) - 2 n \pi.$$

Itt λ_0 azon geographiai hosszúság, mely alatt a loxodroma az aequatort metszi, ε azon állandó szöglet, mely alatt a meridiánokat szeli és $2n\pi$ a körkerület azon egész számú többszöröse, mely λ-t 360^0-nál kisebbé teszi. Mint annak idején látni fogjuk, a loxodromikus távolság igen egyszerűen

$$s = \frac{\pi}{180} r (\varphi_2 - \varphi_1) \sec \varepsilon$$

által adódik és tisztán a két hely geographiai szélességkülömbségétől függ. Ha a 188. ábrában MN a loxodromikusan összekötött két hely, MQ egy parallelkör, akkor MQN Q-nál derékszögű háromszög, melynek egyik oldala egy meridiánív, másik két oldala egy loxodromikus és parallelkörív. Az előbbi egyenlet alakilag teljesen ugyanaz, mintha a mondott háromszöget síkháromszögnek tekintenők. Ez a loxodromának legfontosabb tulajdonsága. Az előbbi példában a loxodromikus út Havre és Newyork között a következő módon adódik: A loxodromikus egyenlet Havre és Newyork számára felírva és levonva ad:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{lgnat} \frac{\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)},$$

a miből a hajó kurzusszöglete következik; ezzel azután a loxodromikus távolság is számítható. Ugyanis:

$$\lg \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi_2}{2}\right) - \lg \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right) = 0{\cdot}0945,$$

a mi 2·3026-val szorozva, hogy természetes logarithmusokra menjünk át, 0·2176-ot ad. A hosszkülömbség $74^0\ 6'.9 = 1{\cdot}2935$ ívmértékben, s ezért:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{1{\cdot}2935}{0{\cdot}2176}, \text{ a miből } \varepsilon = 80^0\ 27'.0.$$

A hajó tehát a W ponttól $9^0\ 33'$-czel délre fekvő cursust vesz és ezt állandóan meg is tartja. ε értékével azután $s = 52^0\ 51'6$ vagy 5878 km. Ha $\varepsilon = 0^0$ vagy 90^0, a loxodroma a meridiánnal, illetve parallellel esik össze. A loxodromikus út eltérése a legkisebb távolságtól annál nagyobb, minél ferdébb a loxodroma fekvése.

VIII. FEJEZET.

Parallelfokmérés.

A fokmérés újabb időben még egy tekintélyes segédeszközzel tökéletesedett. Ha ugyanis az összes meridiánok egymás között congruensek, akkor az egyenlő szélességgel bíró pontok körökön feküsznek, melyek ívei egyenlő hosszkülömbség mellett állandók. Ha ellenben az egyes fokmérések adatainak eltérése reális, akkor a parallelívek is fokonként különböző hosszúsággal fognak bírni. A triangulatió itt is teljesen ugyanazon módon végeztetik, mint a meridianív esetében, és csupán az ív amplitudójának meghatározásában van külömbség. Míg amaz a két végpont geographiai szélességének külömbségével azonos, addig a parellelkörív amplitudóját két végpontjának hosszkülömbsége adja. Ily mérés haszonnal tehát csak az elektromos távíró felfedezése óta eszközölhető, azelőtt a hosszkülömbség lemérése csak igen kis pontossággal volt eszközölhető. Mégis ez időből is nagy gondal eszközölt fokmérésről tudunk, mely a 45° 43′ 12″-es parallelán 15° 32′ 26″.77 amplitudóval bír, és Bordeauxtól Fiuméig terjed. Ránk nézve e fokmérés már azért is nevezetes, mert később kelet felé, egészen Orsováig folytatták. Az ív franczia részét Brousseaud ezredes mérte 1820-ban, az olasz részét a sardiniai és osztrák tábori kar. A fokmérés két bázismérésen alapszik: az egyik Bordeaux, a másik a Ticino mellett fekszik. Az egész ív hossza 1 210 672·56 m., úgy hogy 1° hossza átlag 77 903·00 m. De 8 hosszúságmeghatározás folytán 7 részre oszlott, melyek nagyságát a következő táblázat adja.

Fixpont	Geogr. hosszúság	Amplitudo	Hosszúság m.	1° méterben.
Marennes	3° 26′ 40″ W. Páris			
		0° 57′ 14″.85	74 414·96	77 992·88
St.-Preuil	2° 29′ 25″ „ „			
		1° 35′ 46″.41	124 194·79	805·32
Sauvagnac	0° 53′ 39″ „ „			
		1° 42′ 50″.87	133 359·09	799·86
Isson	0° 49′ 12″ E. „			
		2° 59′ 27″.30	233 111·08	939·68
Génève	3° 48′ 39″ „ „			
		3° 2′ 23″.55	236 741·48	878·68
Milano	6° 51′ 3″ „ „			
		2° 41′ 20″·75	209 279·52	825·19
Padova	9° 32′ 24″ „ „			
		2° 33′ 23″.04	199 571·64	78 067·46
Fiume	12° 5′ 47″ „ „			
Összeg, illetve közép:		15° 32′ 26″.77	1 210 672·56	77 903·00

Az egyes fokok megegyezése éppen nem valami kielégítő, különösen azért nem, mert az eltérések nem mutatnak szabályos menetet, a mint lennie kellene, ha az eltérés egyetlen oka a parallelkör a körgörbülettől eltérő görbülete volna. Az 1° hossza ezen parallelkörön az elmélet szerint 77 854·5 m. volna, s ezen számtól is jóval tér el a hét ív egyes adata úgy, mint közepe.

Mindenesetre fontos azon megjegyzés, hogy ezen mérésekben a nehézségi erő helyi változása ugyanezt a szerepet játsza, mint a meridián fokmérésében. A hosszkülömbséget ugyanis valamely csillagnak meridián átmenetéből határozzuk meg, a meridán pedig a poluson és zenithen átmenő legnagyobb kör lévén, meghatározására éppen úgy szorul a függő ónra, illetve libellára, mint maga a zenithpont a geographiai szélesség meghatározásában.

A parallelfokmérések természetesen szintén a Föld alakjának és méreteinek meghatározására fordíthatók önállóan is; hiszen φ geographiai szélesség alatt a parallelkör sugara sphaeroidos Földön:

$$\rho = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

ennélfogva a foknak hossza

$$\Gamma_\varphi = \frac{\pi}{180} a \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Ha tehát két különböző parallelán megmérjük a fok hosszát, akkor két egyenletünk van, melyből a és e meghatározható. A pontosság annál nagyobb, minél különbözőbb a két parallelkör szélessége, de egyszersmind minél közelebb fekszik egyikük az aequatorhoz. A hosszkülömbség meghatározásán kívül, itt természetésen a szélesség ismerete is szükséges.

IX. FEJEZET.

Európai fokmérés.

A Föld alakjának pontos meghatározására, illetve az e problemával kapcsolatos minden kérdés tanulmányozására lépett életbe Baeyer tábornoknak 1861-ben tett indítványára az európai fokmérés, melynek közvetlen czélja volt, az egyes országok fokméréseit kiterjeszteni és egymással kapcsolatba hozni. E czélból Törökország kivételével minden európai állam egyesült — a fokmérés ma már Europán túl is terjedt internationális művelet — s képviselői három évenként üléseznek:

először 1864-ben és 1867-ben Berlinben. A munkaprogramm mindazon műveleteket tartalmazza, melyek segítségével a Föld alakja pontosan, és minden feltevés nélkül levezethető, mely műveletek szükségességét azonban csak a következő fejtegetések alapján érthetjük meg. Az egyes pontjai a következők: Triangulatiók meghatározott meridiánok és parallelkörök mentén, és ezzel kapcsolatosan, lehetőleg sok pont astronomiai szélesség- és hosszúság-meghatározása. Ugyanezen pontok pontos tenger-magasságának lemérése praeciziós szintezés által. A nehézségi gyorsulás megmérése ingával és a földfelületi tömegeloszlások által okozott függőón eltérések meghatározása.

Az európai háromszögelés a kontinens legészakibb pontjától Siciliáig és Spanyolországig, sőt ezeken túl Afrika északi részéig terjed és az Uraltól az Atlanti Oceánig húzódik. Az elektromos távíró segítségével számos pontos hosszúság meghatározás felett rendelkezünk, és a szintezések az egyes tengerek szinét is kapcsolták össze. Függő ón eltérések ismeretesek az Alpesekből, ezek déli lejtőin 60″-re rúgnak, a Harzból, a hol 10″, az Uralból, a hol 40″-et tesznek ki. Mértékegységül szolgálnak új pálczák, melyeket Brunner 90% platina és 10% iridiumból állított elő, s melyek pontosan össze vannak hasonlítva az eredeti mètre protype-pel.

A nehézségi mérések szükségességét eddig leginkább a függő ón eltérések miatt látjuk be; ezekkel hamisíttatik meg a geographiai szélességben való fellépésük miatt az amplitudó, és így a lemért ívet az eltérés előjele szerint hol nagyobb, hol kisebb szöglethez tartozónak gondoljuk, a mi természetesen a Föld alakjára, úgy mint méreteire a legnagyobb befolyással van.

Nem hiányzottak nézetek, melyek szerint a Föld eredeti alakja mégis csak gömb, s hogy a lapultság lényegesen csak erosió műve. E nézetek szerint, ha nem is a Föld felülete, de bizonyára a tengerek feneke megtartotta volna eredeti gömb voltát. Ha valamely helyen az elliptikus radius vector r, és a tenger mélysége m, akkor e nézet értelmében

$$r - m = \text{állandó}$$

minden hely számára. Ezen felfogást azonban alapjában megdöntötték a mélységmérések, különben magukban már azon elméleti okoskodások is, melyeket a lapultsághoz szőttünk.

Sokkal komolyabb azon ellenvetés, melyet FERGOLA tett a csillagászati geographia alaptétele ellen; ugyanis semmi kezességünk nincs adva az iránt, hogy a Föld legrövidebb tengelye valóban összeesik a forgási tengelylyel az úgynevezett kinematikai tengelylyel. FERGOLÁ-nak első számításai szerint a két tengely tényleg tetemes, $1^0\ 8'\ 24''$-re rugó szögletet képezhet egymással. A számítás ismétlése azonban szerencsére megmutatta, hogy az eltérés, ha létezik is, gyakorlati czélokra nézve teljességgel elhanyagolható. Hogy tényleg megvan, arról a sarkmagassági változásoknál már szó volt. Ilyen külömbség, ha érezhető mértékben, megvolna, a legnagyobb zavarokra adna okot, a mennyiben most a csillagászati geographia minden eleme geometriailag és kinematikailag definiálva, tehát kétszer fordulna elő. Geometriai meridián volna pl. azon sík, mely a Föld geometriai tengelyét foglalja magában, az erre merőlegesen a Föld középpontján áthaladó sík a geometriai aequatort adná. A csillagászati délkör felkeresése már komplikált operatió volna: a földsphaeroid normálisán át a forgási tengelylyel párhuzamos síkot kell szerkesztenünk. Ha mindazon helyeket kötjük össze, melyekben a helyi meridiánsíkok párhuzamosak, akkor ezen pontok összesége a Föld felületén a csillagászati meridiánt jelöli ki. És minden pont, melynek normálisa a forgási tengelylyel ugyanazon szögletet képezi, egy parallelkörön fekszik, holott a geometriai parallelkör ismét más, a geometriai tengelyre hivatkozó definitióval bír.

Az eltérések rendkívül kis és változó volta miatt azonban a rotatiós sphaeroid NEWTON-féle elméletét bátran elfogadhatjuk. A következőben azonban a jelenségek új csoportjával ismerkedünk meg, melyek a sphaeroid tanát lényegesen befolyásolják.

A mathematikai geographia eddigi elemei voltak a geometria és az égi testek mozgása, a mennyiben a szükséges coordinátarendszer geometriai elveken, ennek meghatározása ellenben a csillagos ég mozgásán alapult. Most mechanikai elveket is vagyunk kénytelenek behozni a problemába, a mi által az alakmeghatározás látszólag tisztán geometriai problemájába egy teljesen transcedens idegen elem lép be. Mindazonáltal eljárásunk már most is teljességgel indokolható, mert minden magára hagyott test alakját nem a geometriai elvek szabják meg, hanem a testre ható erők. Valamely folyadék alakja ugyan az edény geometriai alakjától függ, de felszine ettől független, és mindig merőleges a ráható erőre. Éppen így — hogy triviális példával éljek — a kiöntött buza halmot képez, melynek alakja, lejtése tisztán csak a szemek nehézségétől és súrlódásától függ, tehát nem geometriai, hanem erőviszonyoktól.

X. FEJEZET.

Tömegvonzási jelenségek.

Kepler Tycho de Brahe-nek, a kiváló észlelő megfigyelései alapján levezette empirikus módon a bolygók mozgásának törvényeit, melyek, mint ismeretes, a következők:

1. Valamennyi bolygó ellipsisben kering a Nap körül; az ellipsis egyik focusát a Nap foglalja el.

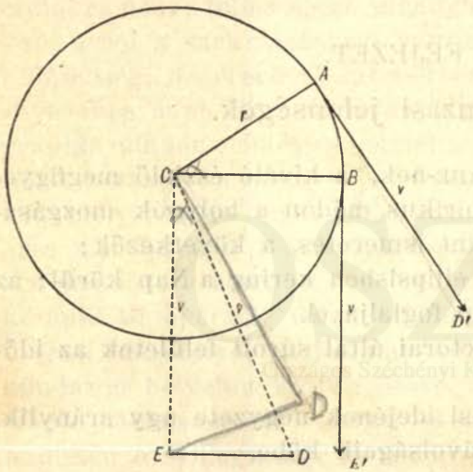
2. A bolygók radiusvectorai által súrolt felületek az idővel arányosak.

3. Két bolygó keringési idejének négyzete úgy aránylik, mint a Naptól való középtávolságaik köbe.

A három törvény empirikus lévén, deductiv bizonyításra nem szorulhat, a legtöbb tankönyv ellenkező eljárása tehát elítélendő. A mechanika mai nyelvén e három törvényt bizonyára másképen foglalnók szavakba, a régi keretet azonban a történeti kegyelet szivesen tartja meg. Az első törvény a pálya alakját, a második a sebességet, a harmadik a mozgás idő és térviszonyait fejezi ki.

Kepler-rel körülbelül egy időben tanulmányozta Galilei a szabadon eső testek mozgását és felállította a tehetetlenség axiomáját. A szabadon eső és elhajított testek mozgásának megismerése a mechanika alapját adta meg. Az elhajított testek mozgása ugyanis két mozgásra bontható szét: az egyik egyenes egyenletes mozgás, mely a hajítás irányába esik és annak kezdeti sebességével bír, a másik a szabad esés; amaz tisztán a tehetetlenség, ez gyorsulást létesítő erő folyománya.

Jóval később, a XVII. század közepe táján fedezte fel Huygens az egyenletes körmozgás törvényeit is. Tapasztalta, hogy itt is működik mindig a körpálya centruma felé irányított gyorsulás, melynek nagysága a következőképen adódik. Legyen (189. ábrában) A a körben egyenletesen mozgó pont egy helyzete. Sebessége $AD' = v$ az érintő irányába esik. Végtelen rövid τ idő mulva a test B-be jutott; sebessége most is v, de iránya megváltozott. Hogy a változás nagyságát és ebből a gyorsulást, γ-t megállapíthassuk, rajzoljuk az A és B helyzetben a sebességeket közös kezdőpontra vonatkozólag, mely számára önkényt a C középpont adódik; legyen tehát CD és CE egyenlő és párhuzamos AD', illetve BE'-vel. Az ACB és DCE szöglet nyilván egyenlő egymással, mert száraik, mint sugár és érintő a körben, egymásra merőlegesen állanak; azonkívül száraik egyenlő hosszúak, mert AC és $BC = r$; $CD = CE = v$. A CD sebességből a pontnak A-tól B-be való útja alatt CE lett. Ez utóbbi sebesség előáll, ha CD-hez az ED sebességváltozást adjuk. Az ACB és CED háromszögek hasonlók, tehát



189. ábra. Egyenletes körmozgás gyorsulása.

$$\frac{ED}{AB\,\text{húr}} = \frac{v}{r} \text{ vagy } \frac{\gamma\tau}{AB} = \frac{v}{r},$$

ha $\gamma\tau$ a τ idő alatti sebességváltozást jelenti. Ámde, ha τ idő minden képzelhetőnél kisebb, akkor minden képzelhetőnél nagyobb közelítéssel az AB húr az AB ívvel azonosítható. Ez ív azonban a τ idő alatti út, tehát $v\tau$. Innen a már egynéhányszor felhasznált egyenlet:

$$\gamma = \frac{v^2}{r},$$

és ED iránya nyilván AB végtelen kis volta mellett a C középpont felé tart. Az egyenletes körmozgásnál van tehát gyorsulás, mely mindig a pálya középpontja felé irányított, s mely a sebesség négyzetével egyenes, a pálya sugarával visszás arányban áll. Ha a pálya nem volna kör, akkor az egyenlet még mindig helyes marad, csakhogy a pályának csak azon végtelen kis darabjára alkalmazható, mely végtelen kis hiba mellőzésével körrel azonosítható. Ez esetben természetesen r a pálya görbületi sugara azon pontban, melyben a sebesség v.

Körmozgás esetében az egyenlet más módon is írható. Ugyanis a pont keringési idejét T-vel jelölvén, kifejezhető a lineáris sebesség ezen idő és a tartama alatt befutott egész pálya kerületével:

$$v = \frac{2r\pi}{T},$$

és innen

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r.$$

$\frac{2\pi}{T}$ az egységnyi sugarú kör azon íve, melyet a pont egy másodpercz alatt fut be; ha ezen úgynevezett *szögsebességet* hozzuk be, akkor

$$\gamma = \omega^2 r, \text{ a hol } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Teljesen ugyanezen egyenlet levezethető a 166. ábrából is, midőn egyenesen a körben egyenletesen mozgó pontnak esését figyeljük meg a kör középpontja felé.

Külön említésre sem szorul, hogy ugyanezen egyenlet a centrifugális erő egyenletét is tartalmazza. A centrifugális erő gyorsulása — mivel ω a Föld minden pontja számára ugyanaz — tehát egyszerűen a forgási sugárral arányos. Ez pedig φ geographiai szélesség alatt a parallelkör sugarával azonos lévén,

$$\gamma_\varphi = \omega^2 r \cos \varphi,$$

a hol most r a gömbi Föld sugarát jelenti. A centrifugális erő tehát maximum az aequator (γ_0, hn $r = a$) alatt, minimum a pólusokon, hol 0-lal egyenlő. Jegyezzük meg egyszer s mindenkorra, hogy a Föld számára $T = 86\,164^s.09$, hogy tehát

$$\omega = 0{\cdot}000\,072\,920, \text{ és } \gamma_0 = \omega^2 a = 3.39\,117 \text{ cm}.$$

Minthogy az idő egysége a közép másodpercz, a Föld forgási ideje is ebben fejezendő ki 24^h csillagidő helyett.

A körmozgás egyenlete már jelentős elvet tartalmaz, azt tudniillik, hogy a gyorsulás, tehát az erő is, tisztán csak a pontnak helyzetétől függ.

Elődeinek tapasztalatait Newton a Philosophiae naturalis principia mathematica czímű munkájában végre a következő három tételben, helyesebben axiomában foglalhatta össze:

1. Minden test nyugszik, vagy egyenletesen és egyenesen mozog, ha rá külső erő nem hat.

2. Az erő a mozgás változásának oka, vele arányos és annak irányába esik.

3. Minden hatásnak megfelel ugyanoly nagy ellentett irányú ellenhatás.

Az első axioma a tehetetlenség tétele; magától a test nem léphet ki nyugalmából mozgási állapotba, de meglevő mozgását is egyenes úton állandó sebességgel örökre megtartja. A tétel első része mintegy magától érthető, második része inductive megérthető, ha a mozgásnak akadályaitól, levegő ellenállásáról, súrlódástól s hasonlóktól eltekintünk. Az égi testek mozgása az űrben az inductió valószinűségét nagyon támogatja, az egész mechanika pedig az axioma aposteriori bizonyítékát adja.

A mozgás nagyságát vagy mennyiségét a mozgó pont tömegével és sebességével mérjük. E mennyiség változása — a tömeg állandó lévén — csak a sebesség megváltozása lehet nagyság és irány szerint. A mozgásmennyiség megváltozása tehát

$$mv' - mv = m(v' - v) = m\gamma\tau,$$

és ennek az időegységre redukált értéke $m\gamma$ az erő. Áll tehát a fontos egyenlet:

$$P = m\gamma,$$

azaz: az erő mértékét a tömeg és a rá ható gyorsulás szorzata szolgáltatja. Az erő természetesen csak kényelmes elnevezés a gyakran előforduló $m\gamma$ szorzat számára, de korántsem magyarázó. Az egyenlet egyszersmind az erő egységét is definiálja: az erő egysége azon erő, mely a tömegegységnek a gyorsulás egységét kölcsönzi, azaz mely egy grammot másodperczenként 1 cm sebességváltozással mozgat.

A második tétel egyszersmind magában foglalja azon fontos tényt, hogy több, egymással egyidőben ható erő egymástól teljesen függetlenül működik. Az erők tehát az erőpolygon ismeretes szerkesztése által összetehetők.

A harmadik axiomát Newton állította fel, és szintén magától érthető. A csavarprés azért nem mozog a csavar okozta nyomóerő daczára, mert ez a szerkezet által teljesen ugyanakkora, de ellentett irányú nyomást szenved.

Ennyi előismeret után már ki lehetett olvasni azon természeti törvényt, mely a nehézkesen kifejezett Kepler-féle törvényekben rejlik. A bolygók mind nagyon közel köralakú pályákban keringenek a Nap körül — a pályák ezen alakja különben kifejezést nyer a harmadik Kepler-féle szabályban, mely a bolygók *közepes* naptávolságáról szól — tehát Huygens törvénye értelmében gyorsulás hat reájuk, melynek székhelye a kör középpontjában, a Napban van. A gyorsulás erőt tételez fel, és Newton-nak érdeme volt azon geniális felfogás, hogy az erő a világűr minden pontja számára tisztán e pont helyzete által adott, úgy, hogy bármely pont mozgása előállítható, ha csak helyzetét és pillanatnyi sebességét ismerjük: mert hiszen e két adattal ismerjük jelenlegi helyét és azt is, melyet a következő pillanatban el fog foglalni, és ismerve e pontokon az erőket, megmondhatjuk a mozgást a következő pillanat számára.

Csak azon felfogás helyességét kellett tehát megvizsgálni, vajjon az erő tényleg csupán a pont helyzetétől függ-e, és erre elegendő segédeszközt adott a körmozgás egyenlete és Kepler harmadik szabálya: amaz szerint két bolygó gyorsulásának viszonya:

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\frac{4\pi^2}{T'^2}r'}{\frac{4\pi^2}{T^2}r}=\frac{r'T^2}{rT'^2},$$

emez szerint pedig

$$\frac{T^2}{T'^2}=\frac{r^3}{r'^3},$$

a hol a jelzett mennyiségek az egyik, a nem jelzettek a másik bolygóra vonatkoznak. E két egyenlet egyesítéséből keletkezik:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{r^2}{r'^2} \text{ vagy } \gamma' = \frac{\gamma r^2}{r'^2},$$

úgy hogy a bolygóra ható gyorsulás egyszerűen a Naptól való távolság négyzetével visszásan arányos.

A levezetés egyelőre szigorúan csak körpályákban egyenletesen mozgó bolygókra érvényes, de érvényes általánosságban is, a mint arról a tett számításhoz hasonló, de komplikáltabb számítás útján meggyőződhetünk.

Az erő maga, mely a bolygókra hat, a gyorsulás és tömegük szorzatával egyenlő, az erő tehát arányos a bolygó tömegével és visszás arányban áll a Naptól való távolság négyzetével. Hogy azonban a törvényt általánosságban kimondhassuk, függetlenül csillagászati alkalmazásától, még egynéhány okoskodásra van szükségünk.

Világos, hogy az erő nagysága nem csak a vonzott pont, hanem a vonzó test tömegétől is függ és vele arányos. Ezt követeli a hatás és ellenhatás egyenlősége. Szerepel azután a Newton-féle törvényben a két tömeg kölcsönös távolsága is. Mit értsünk ezen? A bolygók oly nagy távolságban állanak a Naptól, hogy azok méretei e távolsághoz képest elenyészők, vagyis a bolygók a távolságokhoz képest pontok gyanánt tekinthetők. Ehhez járul még, hogy közel gömbalakúak, úgy hogy vonzásuk, miként azt már Newton is kimutatta, ugyanaz, mintha egész tömegük középpontjukban volna egyesítve. — Eszerint a Newton-féle törvény csak oly tömegekre alkalmazható, a melyek méretei a különben előforduló távolságokhoz képest elenyésző kicsinyek, vagy most már egészen általános és szabatos foglalatban:

Két anyagi pont egymásra olyan vonzó hatást gyakorol, mely az anyagi pontok tömegével egyenes, a közöttük lévő távolság négyzetével visszás arányban van, vagy

$$P = f\frac{m\,m'}{r^2},$$

a hol f az úgynevezett attraktionális állandó. Mivel ugyanis az erő egységét már választottuk, az f factor fejezi ki a mondott szorzatnak az erővel való arányosságát. E factor nyilván azon vonzás, melyet a tömegegység a tömegegységre a távolság egységében gyakorol, azaz azon vonzás, melyet egy grammnyi tömeg ugyanilyen tömegre egy centiméter távolságban gyakorol. Az f állandó meghatározása, mint látni fogjuk, azonos a Föld tömegének meghatározásával, és ezért geographiailag is nagyon fontos számadat.

Ki kell emelnem, hogy e tömegvonzási erő elnevezés Newton szerint is csak egyszerű kép és egyszerű szólam, mely korántsem kivánja megmagyarázni az erő mivoltát vagy okát. A Newton-féle törvény, mint mathematikai kifejezője egy mechanikai hatásnak, minden kétségen fölül áll, és a Newton-féle gondolatmenetet a physika minden ágában iparkodtak alkalmazni. A szerint, a mint ez jobban, vagy kevésbbé sikerült, a physika illető ága előbbrehaladottabb, vagy fejletlenebb. A mágnesség és elektromos hatásokat sikerült például egészen a tömegvonzási jelenségek mintájára magyarázni, a hőhatások teljes megértése még várja a maga Newton-ját.

Ingadozók azonban ama — már inkább metaphysikai — okoskodások, melyek hivatva volnának, hogy az erő mibenlétét magyarázzák, és melyektől Newton a híressé vált „hypotheseos non fingo“ mondásával tartózkodott. Ezeket jó átnézetben Isenkrahe tárgyalja, felvetvén ama kérdést is, vajjon a tömegek hőmérséklete bír-e befolyással a vonzás nagyságára? A mai tapasztalataink szerint azt kell mondanunk, hogy ily hatásról mitsem tudunk: pedig történtek erre vonatkozólag pontos kisérletek, és az égi testek tekintet nélkül ugyancsak egymástól nagyon elütő hőmérsékletükre, úgy végezik pályafutásait, mintha a tömegvonzás a hőmérséklettől teljesen független volna.

Egy másik kérdés a jogosultság nagyobb látszatával felvethető. Az itt szereplő actio in distans majdnem kényszerítőleg azon feltevésre ösztönöz, hogy az attractió hatása is időben terjed a térben. Sőt van egynéhány csillagászati jelenségünk, mely az egyszerű, eredeti alakjával a Newton-féle törvénynek nem volt eddig kimagyarázható: ilyen az Encke üstökös folytonos acceleratiója, a Mercur-perihéliumának százados mozgásában fenmaradó és ki nem magyarázott 40″-nyi gyorsulása s hasonlók.

A kérdés összefügg egy másik ellenvetéssel: kérdés ugyanis, vajjon mozgó tömegek ugyanígy hatnak-e, mint nyugalomban lévők? Nincs-e hasonló változás, minőt nyugvó és áramló elektromosság között találunk? Ha igen, akkor a Newton-féle törvény csak kezdő tagja egy bonyolódottabb kifejezésnek. Ha pl. Weber okoskodásait követjük, az attractió terjedési sebességét c-vel, a két tömegnek egymásfelé való relativ gyorsulását a sugár mentén r″-nek, relativ sebességét r′-vel jelöljük, akkor

$$P = f\frac{m\,m'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}r'^2 + \frac{2}{c^2}r\,r''\right]$$

volna a hatás teljesebb kifejezése. Mivel c roppant nagy szám, a kifejezés tényleg alig tér el a törvény eredeti egyszerű alakjától. Ha a Weber-féle törvényt fektetjük alapul, akkor Scheibner számításai szerint a Mercur perihéliumának saeculáris változása már csak 6″.73 az előbbi 40″ helyett és Vénusé csak 1″.43, tehát már észre sem vehető.

Mindezen kérdések azonban csak az astronomia legsubtilisebb részeibe játszanak bele, földi alkalmazásokban kivétel nélkül az eredeti alak használható.

A törvény rendkívüli fontossága folytán, ha nem is szükséges már, kedvező, hogy ugyanez alakban számos más tényből vezethető le. A kettős csillagok mozgása vagy csak azon egy tény, hogy a bolygók zárt pályát írnak le, a törvénynek levezetésére elegendő, és Zöllner éppen szükséges következményéül állítja fel három dimenzionális térszemléletünknek. Mindenesetre nincs törvény, mely többféle módon és tökéletesebben volna bebizonyítva: az egész astronomia az egy Newton-féle törvény alkalmazása, és a számításnak a megfigyeléssel való szoros harmoniája az alapfeltevés igazolására is szolgál. Legszebb diadalát ülte Neptunus felfedezésével, melyet e törvény alapján az Uranusra gyakorolt igen kis hatásokból meghatároztak s találtak, még mielőtt ember szeme e bolygót látta volna. A kettős csillagok mozgása kimutatja, hogy e törvény az ég legtávolibb tájain is érvényes, és mint később látni fogjuk, helyességét számos közvetlen physikai módszerű megfigyelés is igazolta.

A Newton-féle törvény a Kepler-féle szabályokból Huygens törvénye segítségével van levezetve. Megkérdezhetjük tehát fordítva is, vajjon a KEPLER-féle szabályokkal teljesen azonos-e vagy sem? Azaz kérdezhetjük: minő mozgást végez egy oly pont, melyet egy másik pont a NEWTON-féle törvény alapján leír?

A kérdés megoldása nem ide tartozik, végeredménye, mely egyedül érdekel, a következő:

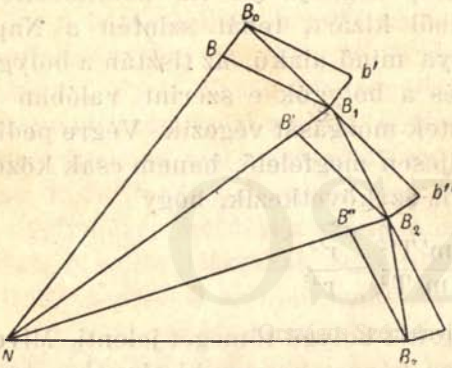
A második KEPLER-féle szabály nem jellemzi a bolygórendszert, mert a radius vector egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol, ha a hatás törvénye a távolságtól bárminő, tetszőleges függésben van. KEPLER első szabálya nem kimerítő: mert a bolygók a Nap körül bárminő kúpszeletet írhatnak le, melynek egyik focusát a Nap foglalja el. Az üstökösöket, melyeket KEPLER törvényeiből kizárt, tehát szintén a Naprendszer tagjai. Hogy a pálya minő alakú, az tisztán a bolygó kezdeti sebességétől függ, és a bolygók e szerint valóban a Nap közelében elhajított testek mozgását végezik. Végre pedig a harmadik szabály sem teljesen megfelelő, hanem csak közelítés; a deductiv levezetésből az következik, hogy

$$\frac{M + m'}{M + m} \frac{T'^2}{T^2} = \frac{r'^3}{r^3},$$

a hol M a Nap, m′ és m pedig két bolygó tömegét jelenti. Mivel a bolygók tömegei a Napéhoz képest nagyon kicsinyek, a leghatalmasabb bolygó, Jupiter tömege is a Napénak csak 1048-ad részét teszi, KEPLER a tömegek befolyását nem vehette észre TYCHO DE BRAHÉ-nak az akkori kornak megfelelő kevésbbé pontos megfigyeléseiből.

Sőt a deductiv levezetés azt is mutatja, hogy a KEPLER-féle törvények kizárólag csak akkor érvényesek, ha a Nap körül egyetlenegy bolygó mozog úgy, hogy tömege egyetlenegy pont által helyettesíthető. A valóságban az nincs úgy, a Napon kívül még több bolygó befolyásolja valamely bolygó mozgását, s ennek alakja is rendesen észrevehető módon tér el a gömbétől. A KEPLER-féle egyszerű mozgás tehát eltéréseket mutat, melyeket háborgásoknak, perturbatióknak, vagy egyenlőtlenségeknek szokás nevezni, a melyek pontos kiszámítása a csillagászatnak egyik főfeladatát teszi. A megelőzőkben megismerkedtünk már számos ilyen perturbatióval: a Hold mozgásának szabálytalanságai javarészt onnan vannak, hogy a Nap befolyásolja a Föld körül különben tiszta ellipsisben keringő Holdat és a praecessió olyan perturbatió, mely a Föld alakja miatt jön létre, ugyanily okból való a Hold mozgásában azon tag is, melyből visszafelé a Föld lapultságát tudtuk meghatározni.

A háborgások igen nagy része a tiszta földrajzban is fontos szerepű, s ezért velük külön is fogunk foglalkozni. Itt még csak azon megjegyzés, hogy csakis ez értelemben szólhatunk a Kepler-féle szabályok (deductiv) levezetéséről; eredetiségükben csakis megejtett megfigyelésekből vezethetők le, mint ezt egynémelyik esetben — pl. a nappálya alakjának és a Nap sebességének levezetésében — mi is tettük.

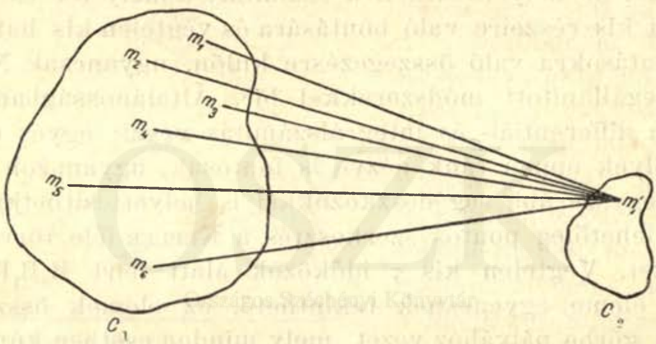


190. ábra A bolygó napkörüli keringésének levezetése.

Mindhárom törvény levezetése elég sok analytikai ismeretet tételez fel; az út azonban, mely a megoldáshoz vezet, könnyen bemutatható és egész általánosságban megadja a gondolatmenetet, melyből a tényleges mozgást levezethetjük olyan esetben, melyben az erő mint a tér függvénye adott. Legyen a 190. ábrában N a Nap és B_0 a bolygó kezdő helyzete, B_0b' kezdeti sebessége. Egy végtelen rövid τ idő alatt a bolygó tisztán sebessége, azaz tehetetlensége folytán b′-be jutna. De a B_0 helyzetben hat rá a Nap is, melynek befolyása alatt ugyanez idő alatt B_0B darabbal esik a Nap felé. A két elmozdulás együttessége folytán a bolygó tényleg τ idő végén a két elmozdulás parallelegram-átlójának végpontjában, B_1-ben álland. Világos, hogy a szerkesztés csak ily rövid τ időközre érvényes, mely alatt a Naptól gyakorolt hatás elegendő közelítéssel állandónak tekinthető. A B_1 ponton túl a bolygó tehetetlensége folytán magában a B_0B_1 folytatását, a vele egyenlő B_1b''-t írná le. De a Nap hatása alapján — a Nap folytonos hatása helyébe minden τ időszak kezdetére eső lökésszerű hatást tételezünk fel — B_1B' úthosszszal esik a Nap felé és tényleges helye ismét a két út parallelegramja által megszabott B_2 leend. A két τ időpillanat alatt a bolygó radiusvectora a B_0NB_1 és B_1NB_2 háromszögeket súrolta, melyek területe nyilván ugyanaz, noha B_0B és B_1B' különböző is lehet. Minthogy ugyanis egyenlő alappal és magassággal bíró háromszögek területei egyenlők, úgy $NB_0B_1 = NB_1b''$ egyrészt és másrészt $NB_1b'' = NB_1B_2$, a miből a radiusvector által a két egyenlő τ idő alatt súrolt területre következik: $NB_0B_1 = NB_1B_2$. A szerkesztés annál inkább megközelíti a tényleges mozgás képét, minél kisebb a választott időköz, és helyes lesz akkor, ha τ minden képzelhetőnél kisebb. Természetes, hogy a szerkesztés ez esetben a bemutatott módon véges idő alatt már nem eszközölhető, de helyettesítheti a számítás, a mely tér és időnek végtelen kis részeire való bontására és végtelen kis hatásokat véges hatásokra való összegezésre külön, ugyancsak NEWTON által megállapított módszerekkel bír. Általánosságban e feladatot a differentiál- és integrálszámítás végzi; egyes esetekben, melyek éppen ránk nézve is fontosak, ugyanazon műveleteket egyszerűbb segédeszközökkel is helyettesíthetjük.

A lehetőleg pontos szerkesztés a KEPLER-féle törvényekhez vezet. Végtelen kis τ időközök alatt leírt $B_0B_1B_2$.. út minden eleme egyenesnek tekinthető, ez elemek összessége azonban görbe pályához vezet, mely minden esetben kúpszelet, melynek közelebbi jelleme pusztán csak B_0b' kezdő sebességtől függ. A területmegtartás elvét már fent hoztuk le, a harmadik törvény a teljes kerület megtételére szükségelt τ időközök összegének viszonya a közepes radiusvectorhoz. Így járunk el mindig, ha mozgást akarunk levezetni adott erőből. A mozgó B_0 pont ugyanis adott kezdeti sebessége és rövid idő alatt rá gyakorolt hatás folytán B_1 új helyzetbe jön. Ámde, ha az erőt a tér minden pontjában, tehát B_1-ben is ismerjük, levezethető a mozgás a következő végtelen kis B_1B_2 szakaszon, s í. t.

A NEWTON-féle törvény még egy szempontból igényel magyarázatot: elemi törvény lévén, csak anyagi pontokra érvényes, holott a tényleges megfigyelés tárgya nem pontok hatása, hanem véges tömegek hatása lehet csak. A kérdés itt is épp azon módon oldható meg, mint a mozgásnál és a későbbiek alkalmat is fognak adni hasonló feladatok megoldására. Ha pl. a 191. ábrában rajzolt két C_1 és C_2 test vonzó hatását keressük egymásra, akkor a következő módon kell eljárnunk. A C_1 testet felbontjuk egészen tetszőleges módon végtelen sok oly apró tömegre, m_1, m_2..-re, melyek méretei a C_2 tömeg egyik m_1' pontjától való távolságaihoz elenyésző kicsinyek legyenek. A C_1-nek hatása tehát m_1'-re az összes hatások összegéből áll. És C_1-nek hatása a C_2 véges tömegére előáll, ha mindama elemi hatások összegét veszszük, melyeket a C_1 minden pontja a C_2 minden pontjára gyakorol. Pontokról lévén szó, a kettő közötti távolság határozott fogalom, míg ezen kitétel: a C_1 és C_2 tömeg távolsága, minden értelem nélkül szűkölködik.

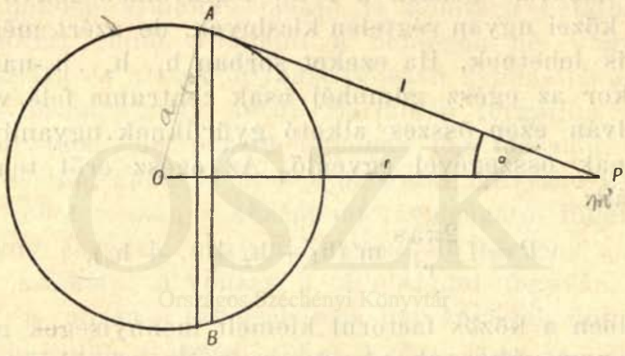


191. ábra. Az elemi vonzások összetétele véges tömegek számára.

Egy fontos esetben, t. i. gömbalakú testek számára, mi is meghatározhatjuk egészen elemi módon valamely véges tömeg vonzását. Legyen a 192. ábrában feltüntetett kör végtelen vékony gömbhéj, mely teljesen homogén, azaz minden részében egyenlő sürűségű. A gömbhéj sugara $OA = a$, felületi sürűsége s, tehát tömege $m = 4\pi a^2 s$, míg a vonzott m′ tömegű P pont középpontjától r távolságra áll. Ha az OP centrumvonalra merőlegesen két végtelenül közel fekvő síkot fektetünk h (végtelen kis) közzel, akkor ezek a gömbhéjból a végtelen vékony h és végtelen kis szélességű AB körgyürűt szelik ki, melynek sugara

$$\rho = \tfrac{1}{2} AB = OA\cos\alpha = a\cos\alpha,$$

és a melynek tömege $2\pi\rho h s = 2\pi a h s \cos\alpha$, a mennyiben e tömeg az AB alappal és h magassággal bíró, henger gyanánt tekinthető körgyürű palástfelületén oszlik el ugyancsak s felületi sürűséggel. E körgyürűt most n minden gondolhatónál nagyobb számú egyenlő részre osztjuk, a hol ezen n legalább is akkora, hogy a gyürűnek minden $\frac{2\pi a h s \cos\alpha}{n}$ tömegelemének mérete az l vagy r távolsághoz képest elenyésző kicsinynek legyen tekinthető. Ekkor minden ilyen elem pont gyanánt fogható fel és reá közvetlenül alkalmazható NEWTON elemi törvénye. Egy ilyen elem vonzása a tőle állandó, az AB gyürű minden elemére egyenlő l távolságban fekvő P pontra tehát



192. ábra. Homogén gömb vonzása.

$$p = f\frac{2\pi a h s \cos\alpha}{n} \,.\, m' \,.\, \frac{1}{l^2},$$

természetesen az l irány mentén. A gömbhéj O középpontja felé, azaz r mentén ezen vonzás az előbbinek r-re való vetülete, vagyis annyiszor kisebb, a hányszor kisebb az egész körgyürű P-től merőleges távolsága l-nél. Ez $\cos\alpha$ lévén, áll, hogy a gyürűelem vonzása P-re r mentén

$$p' = f\frac{2\pi a h s \cos^2\alpha}{n} \, m' \frac{1}{l^2}.$$

Ámde az ábra szerint, ha az OA egyenest húzva gondoljuk,

$$l = r\cos\alpha,$$

és ezért

$$p' = f\frac{2\pi a h s}{n} m' \frac{1}{r^2}.$$

Minthogy az egész gyürű n egyenlő részből tehető össze, az egész gyürű vonzása P-re nyilván az előbbi értéknek n-szerese, vagy

$$p'' = f\frac{2\pi a h s}{r^2} m'.$$

Ebből már könnyen nyerjük az egész gömbhéj vonzását is, ha ugyanis az AB két síkkal párhuzamosan végtelen közel fekvő síkokat fektetünk a gömbnek P-hez legközelebb eső részétől kezdve, egészen a P-től legtávolabb fekvő részéig. E síkok közei ugyan végtelen kicsinyek, de azért még tetszőlegesek is lehetnek. Ha ezeket sorban h_1, $h_2 \ldots h_q$-nak nevezzük, akkor az egész gömbhéj csak centruma felé való vonzása nyilván ezen összes alkotó gyürűknek ugyanily irányú vonzásainak összegével egyenlő. Az egész erőt tehát P-vel jelölve, áll:

$$P = f\frac{2\pi a s}{r^2} m'(h_1 + h_2 + \ldots + h_q),$$

a mennyiben a közös factorul kiemelt mennyiségek gyürűről-gyürűre nem változnak. Ámde az egész gömbhéjon át párhuzamosan fektethető síkok közeinek összege nem lehet más, mint a gömbhéj átmérője, vagyis

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_q = 2a,$$

a miből

$$P = f\frac{4\pi a^2 s}{r^2} m',$$

vagy, minthogy $4\pi a^2 s$ a gömbhéj tömege volt,

$$P = f\frac{m m'}{r^2}.$$

De ez megint a pontokra érvényes Newton elemi törvénye, és innen a tétel: Végtelen vékony homogén gömbhéj úgy vonz valamely külső pontot, mintha egész tömege a gömb középpontjában volna egyesítve.

Minthogy ily végtelen vékony gömbhéjakból, ha sürűségük csak egy rétegben ugyanaz, bár rétegről-rétegre változó is lehet, tetszésszerinti véges vastagságú héj, sőt egész gömb is tehető össze és a levezetett tétel mindegyikre külön-külön szól, felállítható a nevezetes szabály:

Homogén gömb, vagy még oly gömb is, melynek sürűsége concentrikus rétegekben ugyanaz, de rétegről-rétegre egészen tetszőlegesen változik, úgy vonz valamely külső pontot, mintha egész tömege középpontjában lenne egyesítve.

Gömbök vonzása tehát teljesen ugyanaz, mint ugyanily tömegű pontok vonzása.

Ugyanezen tétel, valamint a vele összefüggő két megelőző is, minden számítás nélkül is könnyen belátható. Az utóbb említett gömb, valamint a homogén héj vagy gömb tömegeloszlása és alakja ugyanis teljesen symmetrikus a 192. ábra r távolsági vonala körül. Bármikép forgatjuk tehát a gömböt, a vonzás m′ pontra ugyanaz fog maradni, noha a gömb egyes tömegpontjai m′-hez más-más fekvésbe kerülnek. A vonzás tehát tisztán a középpont távolságától függhet.

Nagyon érdekes. hogy a Newton-féle törvény az egyetlen, mely számára, a vonzás a távolsággal fogyván, e tétel áll. Ha pl. a vonzás a távolság más hatványával, mint — 2-ik hatványával volna arányos, akkor a gömb vonzása nem volna helyettesíthető középpontjának vonzása által. És érdekes az is, hogy a Newton-féle törvény az egyetlen, mely mellett a bolygórendszer ugyanazon mozgásokat végezné, habár minden méretét arányosan megváltoztatnók. A bolygókra ható gyorsulás ugyanis

$$\gamma = f\frac{M}{r^2},$$

a hol M a Nap tömegét jelenti. Ha a Nap sugarát, sürűségének megtartása mellett, n-szeresítjük, akkor az új tömeg $M' = Mn^3$ leend, és ha ugyanezt teszszük a bolygó távolságával, akkor új helyzetében $r' = rn$ lesz, míg gyorsulása γ'. Ámde

$$\gamma' = f\frac{M'}{r'^2} = f\frac{Mn^3}{r^2n} = n\gamma,$$

az új gyorsulás is tehát a réginek n-szerese lett, egyébként pedig mi sem változott.

A Föld nagyon közel megfelel oly gömbnek, melynek sürűsége rétegenként állandó, s ezért a Föld tömegvonzó ereje is nagyon közel úgy tekinthető, mintha egész tömege a geometriai középpontjában volna egyesítve. A Föld vonzásának gyorsulása tehát valamely, a Föld felülete felett h magasságban álló testre nézve:

$$\gamma_h = f \frac{Mr^2}{(r+h)^2}.$$

Minthogy $\frac{r+h}{r}$ fejezi ki a földsugár egységeiben a távolságot, addig, míg h a Föld sugarához képest kis mennyiség marad, mint ez földi emelkedések számára mindig úgy is van, a kifejezés egyszerűsíthető; ugyanis:

$$\gamma_h = fM\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-2} = fM\left(1 - 2\frac{h}{r} + 3\frac{h^2}{r^2} - \ldots\right).$$

Ámde a legmagasabb hegy számára is $\frac{h}{r} < \frac{1}{700}$; e szám 3-szoros négyzete és még inkább magasabb hatványai az első mellett elhanyagolhatók és marad, mivel fM a földfelületi gyorsulás g_0:

$$\gamma_h = g_0 - 2g_0\frac{h}{r},$$

vagy a kellő számértékeknek behelyettesítése után

$$\gamma_h = g_0 - 0{\cdot}000\,03079\,h,$$

ha h a méterekben adott tengerfeletti magasság.

Hogy a bolygók mozgásából levezetett tömegvonzás egyenlete tényleg nemcsak a bolygók mozgását szabályozza a Nap körül, hanem az anyagnak általános tulajdonsága, azt szintén már Newton mutatta ki, feltüntetvén, hogy ugyanazon erő tartja fenn a Hold mozgását, mint a milyen készteti gyorsuló esésre a földfelületi testeket. A bizonyítást közvetítő egyenlet ugyanaz, mint a melyikkel a Hold járásából levezettük a Föld méreteit. A Hold gyorsulása a Föld felé való estében, egyenletes körmozgást tételezve fel:

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{M}{M+m}(1+\nu)\,r,$$

a hol T a Hold siderikus keringését jelenti másodperczekben, r távolságát a Föld középpontjától a földsugárban mint egységben kifejezve; M és m a Föld és Hold tömege és $1+\nu$ azon javítás, melyet a Nap perturbáló hatása miatt alkalmazni kell. mely azonban nem túlságos pontos számítás esetében el is maradhat. Ha azonban γ_0 a Föld tömegvonzásának gyorsulása a felületen, akkor ez a Hold távolságában

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{r^2},$$

és a két gyorsulásnak egyenlőnek kell lennie, ha mindkettő ugyanazon erőre vezethető vissza.

Ámde $r = 60{\cdot}2778$ aequatorradius, $\frac{m}{M} = 0{\cdot}012\,5522$, $1+\nu = 1{\cdot}002\,798$ és $T = 2{\cdot}360\,591^s.5$, $g_0 = 9{\cdot}814\,640$, mely értékekkel az első és második egyenlet illetve

$$\gamma = 0{\cdot}002\,697 \text{ és } \gamma = 0{\cdot}002\,702 \text{ m-t}$$

ad. A megegyezés oly tökéletes, hogy a két erő azonossága ezzel bebizonyítottnak tekinthető.

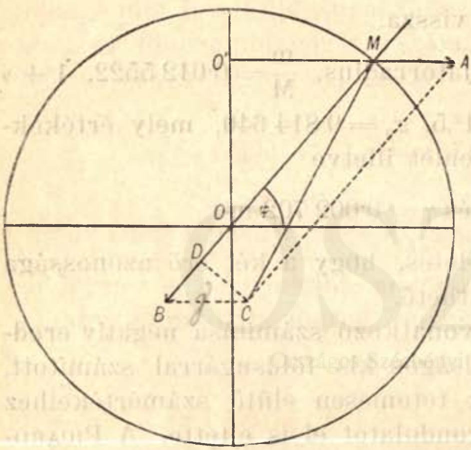
Newton-nak első, erre vonatkozó számítása negativ eredményt adott; ő ugyanis túlságos kis földsugárral számított, s ezért a két gyorsulásnak tetemesen elütő számértékeihez jutott, úgy hogy az egész gondolatot el is ejtette. A Picard-féle fokmérés azonban a Föld méreteinek már oly helyes értékét adta, hogy a két gyorsulás azonossága tüstént bebizonyult.

A vonzás általánossága azonban közvetlenül földi megfigyelésekből is következik. A gyorsulás nagyságát ugyanis az inga segítségével mérjük meg és más-más értékekhez jutnánk, ha a vonzás az anyagi minőségtől függvén, az ingát más-más anyagból állítjuk elő.

Már Newton mutatta ki, hogy ez nincs úgy; Bessel pontosabb megfigyelései a gyorsulás azonosságát minden anyagra értékének egy 60 ezredrészéig mondhatta ki, s legújabban báró Eötvös Loránd kimutatta, hogy legalább a gyorsulásnak egy 20 milliomodrészéig a vonzás minden anyagra nézve ugyanaz.

Homogén testek vonzását eddig csak nagyon kevés esetben lehetett tényleg kiszámítani. Ezen testek mind egyszerű geometriai alakkal bírnak. Reánk nézve azonban még fontos azon megjegyzés, hogy a három- és kéttengelyű ellipsoid vonzása is előállítható egyenlet segítségével, azon feltevés alatt, hogy e testek homogének, vagy hogy sürűségük concentrikus és egyenlően fekvő rétegekben ugyanaz. Ez esetben is a vonzás a test geometriai középpontja felé irányított, úgy hogy most már bátran mondhatjuk, hogy a tömegvonzás iránya nagyon közel a földsugár irányába esik.

Oly testek, melyek vonzó hatása közel helyettesíthető egyetlenegy pont vonzása által barycentrikusoknak neveztetnek; a Föld is barycentrikus test.



193. ábra. A gömbi Föld tengelyforgásának hatása.

A vonzó erő teljes tisztaságában csak nyugvó Földön észlelhető; a tengelyforgás folytán bonyolódottabb jelenséggel van dolgunk.

Minden tengelyforgással bíró mechanikai szerkezet tudvalevőleg úgy tárgyalható, mintha nyugodna, ha a különben működő erőkhöz hozzátesszük a centrifugális erőt. Minden földfelületi mozgás tehát úgy írható le, mintha az nyugodt Földön menne végbe, ha az úgy is működő tömegvonzási erőhöz még a centrifugális erőt adjuk. A Föld felületén tehát tényleg megfigyelés alá eső erőt a 193. ábra alapján számíthatjuk ki. MB nagyság és irány szerint a tömegvonzás gyorsulása G, mely tudvalevőleg mindig közel a Föld középpontján halad át. A tengelyforgás folytán az M pont $O'M = r \cos \varphi$ sugárral kört ír le egy nap lefolyása alatt ω szögsebességgel. Az MA centrifugális gyorsulás tehát

$$\gamma = \omega^2 r \cos \varphi,$$

és a két erő eredője MC azon erő, mely tulajdonképen a megfigyelés tárgya lehet. Ezen erő folytán esnek légüres térben a Föld felületén a testek, és ezen eredő az, melyet *nehézség*-

nek szokás nevezni. A nehézség tehát a Föld részecskéinek tömegvonzásából és a tengelyforgás centrifugális erejéből keletkező összetevő.

Ha CD-t merőlegesen húzzuk MB-re, akkor BD a centrifugális erő azon része, mely a tömegvonzás ellen működik, s mivel BMC mindig a geographiai és geocentrumos szélesség külömbségével egyenrendű, tehát kis szöglet, MC = MD vehető. De

$$BD = BC \cos\varphi = \omega^2 r \cos\varphi \cos\varphi$$

és ezért

$$g = G - \omega^2 r \cos^2\varphi \text{ vagy } g = (G - \omega^2 r) + \omega^2 r \sin^2\varphi,$$

ha g-vel — mint általánosan szokás — jelöljük a nehézségi erő gyorsulását. A nehézségi erő gyorsulása a Föld felületén tehát nem állandó, hanem a geographiai szélesség sinusának négyzetével arányosan nő és általánosan

$$g = a + b \sin^2\varphi$$

alakba hozható. Itt $\underline{a}$ nyilván az aequatori nehézségi erő gyorsulását jelenti, $\underline{b}$ pedig a poláris és aequatori gyorsulás külömbségét és gömbalakú Földön nyilván

$$a = g_0 = G - \omega^2 r, \quad b = \omega^2 r \text{ vagy } g_{90} = a + b = G.$$

A tömegvonzás gyorsulása tehát könnyen kiszámítható a nehézségi erő gyorsulásából, a centrifugális erő hozzáadása által. LISTING szerint

$$g_0 = 978{\cdot}0728 \text{ és } \omega^2 r = 3{\cdot}39117 \text{ volt,}$$

úgy hogy

$$G = 981{\cdot}4640 \text{ cm,}$$

mint ezt már többször fel is használtuk. Azonkívül látjuk, hogy a gömbi Földön az aequatori és poláris gyorsulás külömbsége egyszerűen az aequatori centrifugális erő gyorsulásával, azaz 3·39 117 cm-rel egyenlő.

Alakilag teljesen ugyanazon képlethez jutunk, ha második közelítésben a Földet sphaeroidnak tekintjük (194. ábra). A tömegvonzás gyorsulása ismét közel a Föld középpontján halad át, a centrifugális erő ismét $\omega^2\rho$, a hol ρ a sphaeroidikus Föld φ szélességű parallelkörének sugarát jelenti, úgy hogy

$$\omega^2\rho = \frac{\omega^2 a \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}.$$

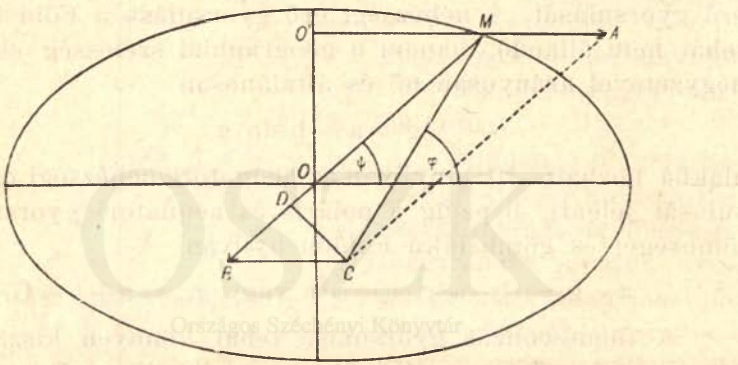
Ha ismét M-ből MC sugárral a CD ívet írjuk le, akkor $BD = BC \cos\psi$ és minthogy $\varphi - \psi$ kicsinysége mellett $MC = MB - BD$ tehető, áll:

$$g = G - \frac{\omega^2 a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \cos\varphi \cos\psi.$$

Ámde:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} = 1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} e^4 \sin^4\varphi + ..$$

$$\cos\psi = \cos[\varphi - \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi] = \cos\varphi + \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi . \sin\varphi,$$



194. ábra. A sphaeroidikus Föld tengelyforgásának hatása.

ha t. i. a kis $\frac{e^2}{2} \sin 2\varphi$ ívet a sinussal, cosinusát pedig 1-gyel cseréljük fel, s ezért:

$$g = G - \omega^2 a (\cos^2\varphi + e^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi)(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2\varphi),$$

$$g = (G - \omega^2 a) + (1 - \tfrac{3}{2} e^2)\omega^2 a \sin^2\varphi + ..,$$

a mi tehát ε^2 második hatványáig szintén

$$g = a + b \sin^2\varphi$$

alakba hozható, csakhogy most már a fellépő coefficiensek más értékekkel bírnak.

Ha a Földet nyugvónak tekintjük, akkor ugyanazon törvényhez jutunk; a nehézségi gyorsulás, mely ez esetben a tömegvonzáséval azonos, a középponttól mért távolság négyzetével visszásan arányos, tehát

$$g = g_0 \frac{a^2}{r^2},$$

a hol g_0 az aequatori gyorsulást jelenti és

$$r = \frac{a\sqrt{\cos\varphi}}{\sqrt{\cos\psi\cos(\varphi-\psi)}} = \frac{a\cos\varphi}{\cos\psi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

ha az ismert

$$\operatorname{tg}\psi = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi$$

vonatkozást szem előtt tartjuk. Ennélfogva

$$g = g_0 \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi}(1-e^2\sin^2\varphi).$$

Ámde

$$\operatorname{tg}^2\psi = (1-e^2)^2\operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\psi - 1, \text{ vagy } \frac{1}{\cos^2\psi} - 1 = (1-e^2)^2\operatorname{tg}^2\varphi,$$

a miből

$$g = g_0 \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\,[1+(1-e^2)^2\operatorname{tg}^2\varphi]} = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-(2e^2-e^4)\sin^2\varphi},$$

vagy sorbabontással, melyben e^2 tagjainál megállhatunk,

$$g = g_0(1+e^2\sin^2\varphi),$$

vagy másképen írva:

$$g = g_0 + e^2 g_0 \sin^2\varphi.$$

A számítás szerint $e^2 g_0 = 6{\cdot}5507$ cm, holott a tényleges megfigyelések szerint 5·0875 cm adódik; már ezen tény magában is bizonyíték a Föld forgása mellett. Később módunkban lesz ezen egyenletet egész általánosságban, a Föld alakjára tett minden előzetes hypothezis nélkül, levezetni. Itt, a nélkül, hogy a számértékek beszerzésének módjáról számot adnánk, csak azt jegyzem meg, hogy a *tapasztalat* szerint

$g = 978{\cdot}0728 + 5{\cdot}0875\sin^2\varphi$, ha Listing és
$g = 978{\cdot}1116 + 5{\cdot}0459\sin^2\varphi$, ha Albrecht

számításait követjük.

A magában álló számérték a nehézségi gyorsulás az aequator alatt, a $\sin^2 \varphi$ coefficiense annak változása az aequatortól a polusig; a poláris gyorsulás tehát LISTING és ALBRECHT szerint illetve

$$g_{90} = 983{\cdot}1603 \text{ és } 983{\cdot}1575 \text{ cm},$$

mely számértékek csak 0·03 milliméternyi külömbséget tüntetnek fel.

XI. FEJEZET.

A potentiál.

Tárgyunk tovafejlesztésében fontos mechanikai fogalomra van szükségünk, a munkáéra. Munkán értjük az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzatát, tehát

$$A = Ps \text{ vagy } A = m\gamma s,$$

ha $P = m\gamma$ az erőt és s az ennek irányába eső utat jelenti. A sajátságos összetétel teljesen mása a munka köznapi megbecsülésének, a mennyiben ezt pénzértékkel fizetjük. Az épülő házba téglát hordó munkás munkát végez a nehézségi erő ellenében, értéke tisztán attól függ, hogy mennyi téglát mennyi emeletre vitt fel. E mellett közömbös az idő, közömbös az út, a melyen a felvitel történt, sőt befolyást az sem gyakorol, ha időközben egynéhány téglát ismét leejt. Látjuk tehát, hogy a munka csupán a tömegtől, a gyorsulástól függ, de független a mozgás pályájától. Mi a munka értékével azon két esetben foglalkozunk, midőn az erő a tömegvonzás és a centrifugális erő. E mellett megszorítást nem képez, ha a mozgó pont tömegét az egységgel teszszük egyenlővé; mert ha nem az, akkor az ily módon nyert munka m-szerese adja az m-szeres tömegre gyakorolt munkát. Ha az m tömegvonzása folytán az A tömegegységű pont (195. ábra) az AA′ végtelen rövid utat teszi meg, azaz oly utat, melynek hossza az r és r′ távolságokhoz képest elenyésző kicsiny, akkor a munka

$$A = P \,.\, A'B,$$

a mennyiben A′B az AA′ = s útnak az erő irányába eső öszszetevője. Ezt nyilván megkapjuk, ha az A pontból az erő irányára merőlegest húzunk. Ha s végtelen kicsiny, akkor AB körívnek tekinthető és $BA' = r' - r$, úgy hogy

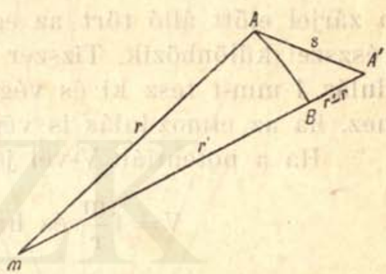
$$A = P(r' - r) \text{ vagy } A = f\frac{m}{r^2}(r' - r),$$

a hol többször ismételt feltevés szerint az s út oly kicsiny, hogy annak mentén minden pontban az erő állandónak tekinthető. A munka értékét is így fejezhetjük ki:

$$A = f\frac{m\,.\,r}{rr'.\,r'}(r' - r),$$

számlálót és nevezőt r-rel megszorozva. Ha most az rr' nevezővel tényleg beosztunk, lesz:

$$A = fm\frac{r}{r'}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$



195. ábra. A tömegvonzás munkája végtelen kis elmozdulás mellett.

Ha az út végtelen kicsiny, akkor $\frac{r}{r'}$ viszony mindinkább az egységhez közeledik és határátmenetelnél végtelenül kis elmozdulásokhoz:

$$A = fm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \text{ vagy } A = f\frac{m}{r} - f\frac{m}{r'}.$$

Láthatjuk tehát, hogy a munkát két teljesen egyenlő szabású kifejezés külömbsége gyanánt írhatjuk fel; e két kifejezés fontos volta mellett külön elnevezés alatt szokott előfordulni, és a potentiál nevét viseli. $f\frac{m}{r}$ a potentiál a kezdőpontban, $f\frac{m}{r'}$ a végpontban; $f\frac{m}{r'} - f\frac{m}{r}$ tehát a potentiál változása az elmozdulás alatt és ezért mondhatjuk, hogy a végzett munka a potentiál negativ változásával, vagy a potentiál külömbségével egyenlő. A potentiál speciálisan felírt alakja természetesen csak a tömegvonzásra érvényes, más erőt más potentiál jellemez. A tömegvonzási potentiál tehát egyenes arányban áll a vonzó test tömegével és visszás arányban a távolsággal. Más definitiót kissé későbben adhatunk.

A levezetés gondolatmenetét illustráljuk egy példával. A gömbalakú Föld (eltekintve tengelyforgásától) minden testet úgy vonz, mintha egész tömege a felületétől 637 000 000 cm-nyi távolságban levő középpontjában volna egyesítve. Képzeljünk 1 grammnyi tömeget a földfelület fölött 1 cm-rel. Ha ez leesik, akkor a vonzás által végzett munka

$$A = f\frac{M}{637\,000\,000^2}(637\,000\,001 - 637\,000\,000),$$

vagy az utóbbi írásmodorban:

$$A = fM\frac{637\,000\,000}{637\,000\,001}\left(\frac{1}{637\,000\,000} - \frac{1}{637\,000\,001}\right)$$

a zárjel előtt álló tört az egységtől csak egy 637 milliomodrészszel különbözik. Tízszer kisebb a külömbség, ha az elmozdulás 1 mm-t tesz ki és végnélkül közel áll a tört az egységhez, ha az elmozdulás is végtelen kicsiny.

Ha a potentiált V-vel jelöljük, azaz

$$V = f\frac{m}{r} \text{ és hasonlóan: } V' = f\frac{m}{r'},$$

akkor a végzett munka

$$A = V - V'$$

alakban írható. A levezetett úgynevezett elemi munka természetesen csak végtelen kis elmozdulásra érvényes. Mi sem könnyebb azonban, mint a munka fogalmát egészen tetszőleges alakú útra kiterjeszteni, a mire a 196. ábra szolgál. Tegye meg a tömegegységű A pont az m pont vonzása folytán az AA' tetszőleges utat. Oszszuk ezt n végtelen sok pont közbeiktatása által oly kis útelemekre, melyek egyeneseknek tekinthetők, s melyeken belül az erő érezhetően nem változik. Ezen egyes pontok $r_1, r_2 \ldots r_n$ távolságban legyenek az m ponttól, míg a kezdeti és végtávolság r és r' és e pontokban legyen a potentiál $V_1, V_2 \ldots V_n$, a végpontokban V és V'. Az egyes útelemeken végzettmunkák lesznek:

$A_1 = V - V_1$ . . . . az első útelemben

$A_2 = V_1 - V_2$ . . . . a második „

$A_3 = V_2 - V_3$ . . . . a harmadik „

$$A_{n-1} = V_{n-2} - V_{n-1} \ . \ \text{az } n-1\text{-dik útelemben}$$
$$A_n = V_{n-1} - V_n \ . \ . \ . \ \text{az } n\text{-dik} \quad „$$
$$A_{n+1} = V_n - V' \ . \ . \ . \ \text{az utolsó} \quad „$$

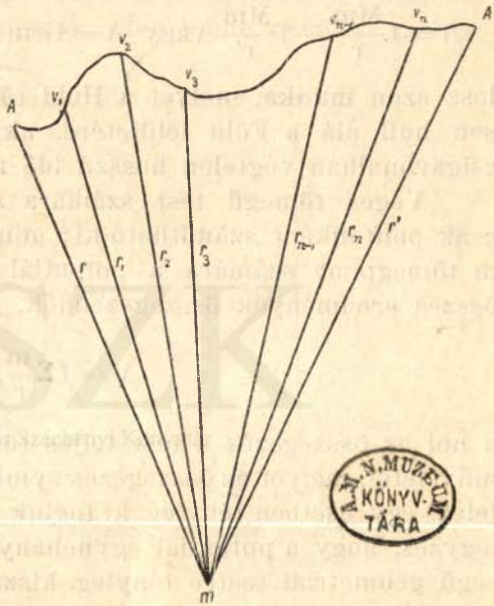
Az egész úton megtett munka A nyilván ezen elemi munkák összegével egyenlő. Ámde a közbeigtatott pontok mindegyikében a potentiál kétszer fordul elő, egyszer $+$, az előtte való sorban $-$ előjellel és csupán a V és V′ potentiál fordul elő egyszer. Az összeg tehát

$$A = V - V',$$

azaz ismét: a végzett munka a kezdet és véghelyzet potentiáljának külömbségével egyenlő, még pedig bármilyen alakú és nagyságú úton. Ez előzmény után a potentiálnak igen egyszerű definitióját adhatjuk: ugyanis volt

$$A = V - V' = f\frac{m}{r} - f\frac{m}{r'}$$

és ezen egyenlet különösen egyszerű alakot öltene, ha $r' = \infty$ volna, a mennyiben akkor $V' = o$ miatt



196. ábra. Az erő munkája véges elmozdulás esetén.

$$A = V$$

marad. Eszerint a potentiál azon munka, melyet az m tömegű pont végez, midőn az általa vonzott tömegegységet jelenlegi helyzetéből a végtelenségbe viszszük.

Ha a Földet gömbnek tekintjük, akkor felületén a potentiál

$$V = f\frac{M}{r}, \text{ míg a gyorsulás } G = f\frac{M}{r^2}.$$

Ezekből a Föld potentiálja

$$V = Gr$$

alakban adódik. Ha valamely 1 grammos hullócsillag (eltekintve a levegő ellenállásától és a Föld forgásától) a Földre esik, akkor ez oly munkát végez, mely a Föld felületi potentiáljának mértékéül szolgálhat. Ha pl. egy liter vízbe esik és ennek hőmérsékletét t^0-kal emeli, akkor a potentiál t kilogrammcaloriával egyenértékű. És ha a Holdnak grammokban kifejezett tömege m, távolsága a Föld középpontjától centiméterekben számítva r', akkor

$$A = f\frac{Mm}{r} - f\frac{Mm}{r'} \text{ vagy } A = Grm - Grm\frac{r}{r'} = Grm\left(1 - \frac{r}{r'}\right)$$

lesz azon munka, melyet a Hold tömege végez, akár egyenesen hull alá a Föld felületére, akár végtelenül keskenyedő csigavonalban végtelen hosszú idő alatt száll alá.

Véges tömegű test számára a potentiál természetesen csak pontonként számítható ki; minden egyes, a testet alkotó m tömegpont számára a potentiál külön számítandó, és az összes eredmények összegezendők, úgy hogy ez esetben

$$V = f\Sigma\frac{m}{r},$$

a hol az összegezés a test teljes tömegére terjesztendő ki. A műveletet, melyet az összegezés symboluma természetesen csak jelez, egy esetben tényleg ki fogjuk számítani, itt elég a megjegyzés, hogy a potentiál egynéhány egyszerű, homogén sűrűségű geometriai testre tényleg kiszámítható. Mivel a concentricus héjakban egyenlő sűrűségű gömb úgy vonz, mintha összes tömege a középpontjában volna egyesítve, azért ennek potentiálja:

$$V = f\frac{m}{r} \text{ vagy } V = \frac{4}{3}\pi f s\frac{R^3}{r},$$

ha s jelenti a gömb közepes sűrűségét, R pedig sugarát. A gömb felületén $r = R$. tehát a felületen a potentiál értéke

$$V = \frac{4}{3}\pi f s R^2.$$

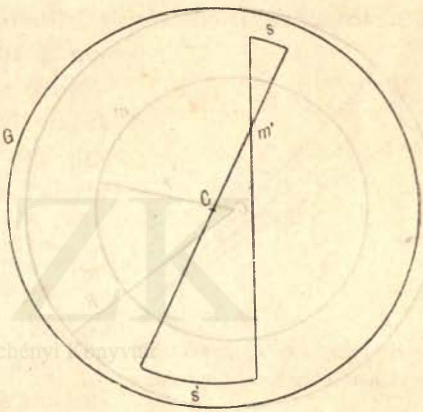
Gömbhéj belsejében ellenben a potentiál értéke állandó, a mi már abból is következik, hogy a gömbhéj belsejében a vonzás nagysága o. Mert a végzett munka, tehát az erő is, véges elmozdulásnál csak akkor lehet o, ha a potentiál külömbsége az, ha tehát a gömbön belül mindenütt a potentiál ugyanazon értékkel bír.

Hogy ellenben a vonzás a gömb belsejében o, azt a következő egyszerű módon lehet bizonyítani. Legyen a 197. ábrában G egy végtelen vékony gömbhéj, melynek belsejében az m′ vonzott pont fekszik. Ha m′-en, mint csúcsponton át tetszőleges pyramisokat vagy kúpokat fektetünk, akkor ezek végtelen kis nyílási szögletük mellett a felületből az s és s′ hasonló felületelemeket szelik ki, melyek a héj homogeneitása mellett a vonzó tömegekkel is arányosak. Ha m′s = r és m′s′ = r′, akkor a vonzás m′pontra e két felületi részecskéből

$$f\frac{s'}{r'^2} - f\frac{s}{r^2} = \text{p-vel}$$

egyenlő. Ámde a kúpok vagy pyramisok s és s′ alapjai ugyanazon arányban állanak, mint a magasságok négyzetei, azaz:

$$\frac{s'}{r'^2} = \frac{s}{r^2},$$



197. ábra. Homogén gömbhéj vonzása egy belső pontjára.

a miből közvetlenül p = o következik. Ha az m′ ponton át minden képzelhető sugarat húzunk, akkor az egész gömbfelület ilyen egymással szemben álló felületelemre bomlik, melyek vonzása egyenlő és ellentett jelű, úgy hogy az m′ pontra ható összes erő nullal egyenlő.

A mi az egyszerű gömbhéjra, az szól nyilván akár azon teljes gömbre is, mely homogén, de rétegről-rétegre tetszőlegesen változó sürűségű héjakból van összetéve. A potentiál értéke az a sugarú és m tömegű gömb belsejében r távolságban a gömb középpontjától álló tömegegységnyi pont számára

$$V = f\frac{m}{a},$$

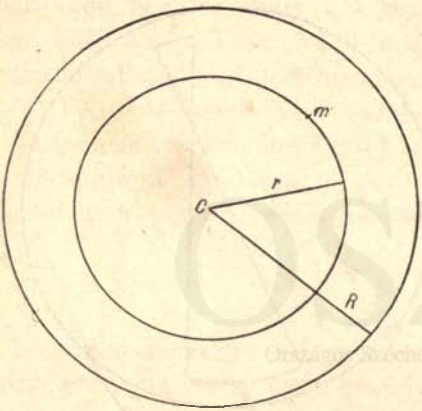
tehát teljesen független a pont r helyzetétől, vagyis állandó.

Ha tehát valamely m pont (198. ábrában) a gömb belsejében r távolságra áll a középponttól, akkor reá mindazon héjak nem gyakorolnak vonzást, melyek a pontot körülveszik, és csak azok hatályosak, melyek számára m külső pont. A vonzás tehát:

$$P = \frac{4}{3} \pi f s r,$$

a hol s a belső, r sugarú gömb középsürűségét jelenti.

Teljesen azonos okoskodások által jutunk a centrifugális erő potentiáljához. Legyen ismét a 199. ábrában AA′ azon elemi út, melyet a tömegegységű pont az O pont körül való forgásából származó centrifugális erő behatása alatt megtesz, akkor az erő által végzett munka:



198. ábra. Gömb vonzása egy belső pontjára.

$$A = \omega^2 r . (r - r'),$$

ha ugyan s út oly kicsiny, hogy annak mentén az erő tekintélyesen nem változik. Mivel a végtelen kicsinyekre való felbontásnál a felbontás módja teljesen közömbös, távolság gyanánt nem r-et, sem r′-et, hanem a kettő közepesét $r_0 = \frac{1}{2}(r + r')$-et fogjuk választani. E szerint

$$A = \omega^2 \tfrac{1}{2}(r + r')(r - r') = \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 - \tfrac{1}{2}\omega^2 r'^2,$$

s a munkát ismét két egyenlő alakú kifejezés külömbsége gyanánt állíthatjuk elő, melyeket potentiálnak nevezünk. Ha tehát a centrifugális potentiált W-vel jelöljük, akkor

$$W = \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 \text{ és } W' = \tfrac{1}{2}\omega^2 r'^2,$$

a miből ismét a munka, mint a potentiál külömbsége értelmezhető. Mivel $r' = o$ esetében, egyszerűen

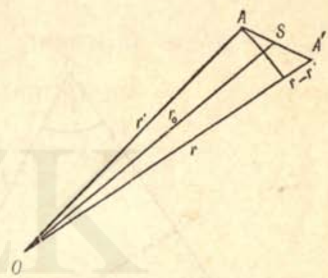
$$A = \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 = W,$$

mondhatjuk, hogy a centrifugális erő potentiálja azon munka, melynek segítségével a tömegegység jelenlegi helyzetéből a forgási középpontba (hol éppen $r = o$) szállítható. A Föld esetében volt $\omega^2 a = 3.39117 \frac{cm}{s^2}$, tehát $\frac{1}{2}\omega^2 a^2 = 1\,078\,750\,000 \frac{c^2}{s^2}$, vagy 10 787 kilogrammeternyi munka árán vihető valamely egy grammos tömeg kizárólag a Föld tengelyforgása árán a Föld középpontjába. φ geographiai szélesség alatt e mennyiség természetesen $\cos^2\varphi$-szer akkora.

A centrifugális erő potentiáljára természetesen ugyanazon tételek állanak, mint a vonzási potentiálra, nevezetesen, hogy a végzett munka ennek külömbsége által akkor is kifejezhető, ha az elmozdulás bármily véges és tetszőleges alakú útra vonatkozik. Mivel végül a nehézségi erő a tömegvonzás és centrifugális erő eredőjével egyenlő, azért ennek potentiálja U is a két erő potentiáljának összegével azonos, vagyis

$$U = V + W, \text{ vagy } U = \Sigma f \frac{m}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2,$$

a hol r a Földet alkotó m tömegelemek távolsága a vonzott ponttól, ρ pedig a vonzott pont forgási sugara, tehát általában véve a φ geographiai szélességhez tartozó parallelkör sugara.



199. ábra. A centrifugális erő munkája kis elmozdulás esetén.

A potentiál kifejezésnek igen nevezetes és lényeges tulajdonságai vannak, melyek tanulmányozásába most bocsájtkozunk. A legelső, hogy a potentiálból levezethető az erő bármily irányban. Volt ugyanis:

$$A = Ps \text{ és } A = V - V',$$

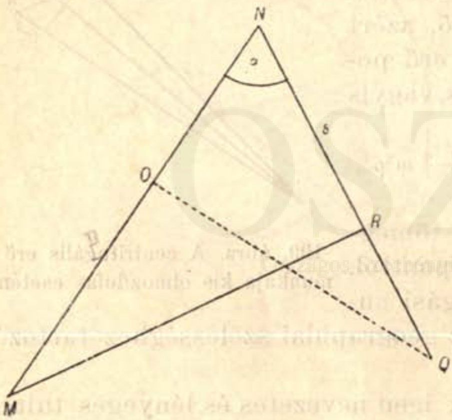
a hol s az erő irányába eső elmozdulást jelenti. Ha a 200. ábrában MN az erő és $NQ = s$ az annak befolyása alatt megtett út, mely egyenes mozgásnál egyenes, görbe pálya esetében pedig az út egy végtelen kis, tehát egyenesnek tekinthető eleme, akkor $NO = s \cos\alpha$ az erő irányába eső elmozdulás; a munka tehát

$$A = P \,.\, s \cos\alpha.$$

De ezen egyenlet még másképen is fogható fel, a menynyiben a $\cos\alpha$ faktor a P-hez vehető, s akkor $P\cos\alpha = NR$ lévén, a munka mértéke az elmozdulás s az elmozdulásba eső erő összetevő szorzata. Az utóbbi definitiót, mint megfelelőbbet, mi is választjuk.

Legyen most s egy tetszőleges irányú egyenesre vonatkozólag a mozgó pont helyzete a mozgás kezdetén, s′ a mozgás végén, akkor nyilván $s' - s$ az elmozdulás ezen egyenes mentén. Ha P jelöli az erőt ugyanezen elmozdulás irányában, akkor $P(s' - s)$ a végzett munka és

$$P(s' - s) = V - V', \text{ vagy } P = -\frac{V' - V}{s' - s}.$$



200. ábra. A munka kettős kifejezése.

Az erőt tehát megkapjuk tetszőleges irányban, ha azon irányban a potentiálváltozásnak és ennek megfelelő helyzetváltozásnak negativ quotiensét veszszük. Szükséges természetesen, hogy az $s' - s$ elmozdulás oly kicsiny legyen, hogy reá vonatkozólag az erő állandónak legyen tekinthető, vagy szigorúbban, szükséges, hogy $s' - s$ végtelen kicsiny legyen. Egy a következőkben is szükséges példa szolgáljon felvilágosításul: keressük az erő nagyságát a radiusvector mentén oly potentiállal bíró erő esetében, melynek kifejezése

$$V = Cr^n,$$

a hol n tetszőleges szám. Az s egyenes iránya itt azonos r-éval és $s' - s = r' - r = \triangle r$, mint röviden írhatjuk. Az r és r′ távolságban tehát

$$V = Cr^n \text{ és } V' = C(r + \triangle r)^n,$$

és az utóbbi kifejezés a NEWTON binomtétele értelmében

$$V' = C\left(r^n + \frac{n}{1} r^{n-1} \triangle r + \frac{n(n-1)}{1.2} r^{n-2} \triangle r^2 + ..\right)$$

alakban is írható. Ha azonban $\triangle r$ végtelen kicsiny, akkor $\triangle r^2$, $\triangle r^3$.. még sokkal kisebb, sőt $\triangle r$ mellett már végtelen kicsiny, úgy hogy elhanyagolható és marad

$$V' = C(r^n + n r^{n-1} \triangle r).$$

Ennélfogva

$$P = -\frac{C(r^n + nr^{n-1} \triangle r) - Cr^n}{\triangle r} = -n\,Cr^{n-1}.$$

Ha tehát valamely erő potentiálja Cr^n alakú, akkor az erőt a távolság mentén megkapjuk, ha a potentiál értékét $-\frac{n}{r}$ törttel szorozzuk. A tömegvonzási potentiálban

$$C = fm \text{ és } n = -1,$$

az erő tehát a radiusvector mentén:

$$P = f\frac{m}{r^2};$$

a centrifugális erő esetében, ha a forgási sugár ρ:

$$C = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \text{ és } n = 2,$$

tehát az erő

$$P = -\omega^2 \rho,$$

mint azt már előbb is tudtuk. Az utóbbi erő negativ előjele arra mutat, hogy a centrifugális erő a vonzással szemben működik. A centrifugális potentiálban $\rho = r\cos\varphi$ lévén, lesz a nehézségi erő:

$$P = f\Sigma\frac{m}{r^2} - \omega^2 r\cos^2\varphi,$$

mint azt már előbb is találtuk. A jelzett viszonyok folytán a potentiál erőfüggvénynek is nevezhető, mert tisztán számító úton, újabb mechanikai elvek hozzájárulása nélkül, az erőt szolgáltatja.

XII. FEJEZET.

Szintfelületek.

A potentiál pontról-pontra változó, de a tér minden pontjában bizonyos, csak e pont helyzetétől függő értéke van. Épp ezért összeköthetjük mindazon pontokat, melyeken a potentiál értéke ugyanaz. E pontok összesége egy felületet alkot, melyet potentiálfelületnek, aequipotentiális felületnek, niveaufelületnek vagy szintfelületnek szokás nevezni, s melynek lényeges, bennünket nagyon közelről érdeklő sajátságai vannak.

A szintfelületek minden oldalról zárt, egymást soha nem metsző, nem párhuzamos felületek. Ha metszenék egymást valahol, akkor a metszési vonalban két különböző potentiál léteznék, de ennek értéke csak a pont helyzetétől függ, ugyanazonegy pontban tehát két különböző értéke nem lehet. Az erő egyenletéből következik

$$\triangle s = -\frac{\triangle V}{P};$$

ha s-et most a felület normálisa mentén számítjuk, akkor két niveaufelület csak akkor lehet párhuzamos, ha $\triangle s$ mindenütt ugyanaz. Ámde $\triangle V$ két egymásra következő felület számára ugyanaz, míg általában véve az erő pontról-pontra változik. A szintfelületek tehát általában véve nem parallelfelületek.

Folytonos felületek, sehol szakadást, csúcsot vagy élt nem mutatnak fel. Ha ugyanis az erő egyenletében $\triangle s$ egy tetszőleges irányú végtelen kis elmozdulást jelent, akkor ehhez mindig ugyancsak végtelen kis, soha nem véges nagyságú potentiálváltozás $\triangle V$ tartozik; ellenkező esetben az erő végtelen nagy lenne, a mi ki van zárva. Ugyane sajátsággal függ össze csúcs, él vagy szakadás teljes hiánya. A csúcs vagy él szomszédságában ugyanis a potentiálfelület érintője rohamos irányváltozást tüntet fel és az ordináta mindkét oldalára tér át; hajlásszöge átmegy a 90^0-on, tehát trigonometriai tangense átmegy a ∞-en, a mi a folytonosság szempontjából ki van zárva.

A szintfelület folytonossága az egész végtelen térre nézve áll; ha pl. a vonzási potentiált veszszük, vagy általában oly erő potentiálját, mely a távolság négyzetével visszás arányban hat, akkor ennek értéke egy gömb belsejében állandó, t. i. mint már találtuk:

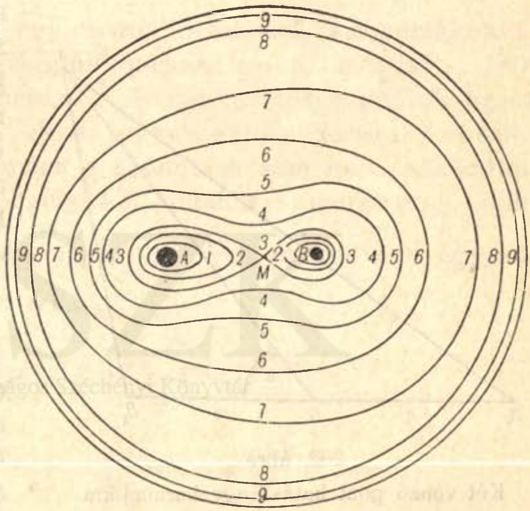
$$V_b = \frac{4}{3} \pi f s a^2.$$

A gömb felületén a potentiál ugyancsak

$$V_f = \frac{4}{3} \pi f s a^2,$$

és az egész végtelen tér számára

$$V_k = \frac{4}{3} \pi f s \frac{a^3}{r}, \quad \Big\} \frac{M}{r}$$



201. ábra. Két vonzó pont szintvonal-rendszere.

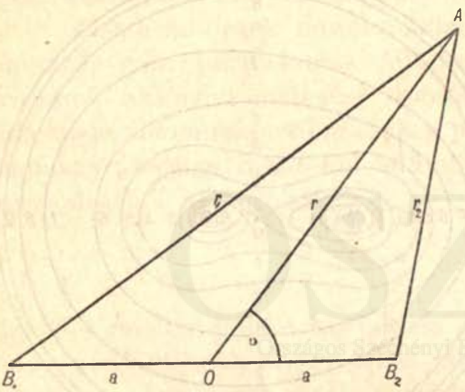
a hol r minden távolságot jelenthet a és ∞ között. A potentiál tehát csupán a felület átszelésekor szenved ugrásos változást, úgyszintén az erő maga is.

A szintfelület minden pontban merőlegesen áll az erőre és megfordítva; ha ugyanis valamely pontban a szintfelülethez érintősíkot húzunk, akkor e síkban bármily kis eltolódás alatt az erő o, mert hiszen a niveaufelületen a pont munkakifejtés nélkül mozgatható. A felületen ugyanis mindig V = const, a potentiálkülömbség tehát a felület minden pontjában o, ezzel együtt a munka és erő is. Ha az erőt három egymásra merőleges componensre bontjuk, s kettőt az érintősíkon választunk, akkor ezek o lévén, az összes erő nyilván a merőlegesbe, azaz a niveaufelület normálisába esik. Az összes erő iránya tehát merőleges a szintfelületre. Innen van, hogy szabad folyadékfelszin mindig niveaufelület, mely merőlegesen áll a nehézségi erő irányára, a miből már eleve is következik, hogy magára hagyott, csupán részecskéi tömegvonzásának és tengelyforgásából keletkező centrifugális erőnek alávetett folyadéktömeg sphaeroidikus alakot vehet fel egyensúlyi alak gyanánt.

A szintfelületek száma végtelen nagy, mert minden V=const egyenlet, a hol az állandó egészen tetszőleges értéket vehet fel, szintfelület. Ezek metszetei valamely síkkal a niveauvonalakat, vagy szintgörbéket adják, melyek minden graphikus eljárásnál fontos szerepet játszanak. Ezen szintvonalak természetesen a két dimensiós sík számára ugyanazon tulajdonságokkal bírnak, mint a felületek a háromméretű térben: tehát folytonosak, szakadás és csúcs nélküliek, egymást körülzárolók, de sehol sem metszők és általában véve nem párhuzamosak. Sűrűn állanak a szintfelületekkel együtt azon pontokban, a hol az erő nagy, távolodnak egymástól, a hol az erő kicsiny, mert

$$P = -\frac{\triangle V}{\triangle s}$$

egyenlet szerint ugyanazon állandó $\triangle V$ mellett P nagy és kicsiny, a szerint, a mint $\triangle s$ kicsiny vagy nagy.



202. ábra.
Két vonzó pont hatása egy harmadikra.

A pont vagy homogén rétegből öszetett gömb vonzási potentiálja

$$V = f\frac{M}{r},$$

a szintfelületek tehát $f\frac{M}{r} = \text{const}$, vagy $r = \text{const}$ egyenlettel bírnak. A potentiál tehát a gömb középpontjától egyenlő távolságban álló pontok összeségére ugyanaz, vagyis az összes szintfelületek concentricus gömbhéjak, a szintvonalak concentrikus körök.

Két pont számára, melyek 2a állandó távolságban állanak egymástól, s melyek tömegei m_1 és m_2 bizonyos arányban állanak, a szintfelületek metszetei a papir síkjával a 201. ábrában vannak feltüntetve. Ha az ábrát a vízszintes tengelye körül forgatjuk, akkor a térben a tényleges szintfelületek állanak elő. Kiszámítását a 202. ábra mutatja. Ha a vonzott pont távolságát a $B_1 B_2 = 2a$ vonal közepétől számítva r-rel jelöljük és e távolság poláris szögletét v-nek nevezzük, akkor nyilván

$$V = f\frac{m_1}{r_1} + f\frac{m_2}{r_2},$$

a hol is

$$r_1^2 = a^2 + r^2 + 2\,a\,r\cos v \text{ és } r_2^2 = a^2 + r^2 - 2\,a\,r\cos v.$$

Adjunk V-nek sorban egymásra következő számértékeket; minden érték számára vegyük sorban $v = o$, 10^0, 20^0. . 180^0 és számítsuk a hozzá tartozó r_1 és r_2-t, akkor a pontok egész összeségét kapjuk, melyek az egyes szintvonalakat képezik· 180^0-nál nagyobb v számára a számítást nem kell eszközölni, mert ez ábra a $B_1 B_2$ tengely két oldalán symmetrikus. Igen nagy távolságok számára, a hol már $\frac{a}{r}$ igen kis tört, egyszerűbben is járhatunk el; írva

$$r_1^{-1} = r^{-1}\left\{1 + 2\frac{a}{r}\cos v + \frac{a^2}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

és

$$r_2^{-1} = r^{-1}\left\{1 - 2\frac{a}{r}\cos v + \frac{a^2}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

kapunk a $-\frac{1}{2}$ hatványra emelésnél a Newton-féle binomtétel értelmében:

$$r_1^{-1} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{a}{r}\cos v - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\,.\,4\frac{a^2}{r^2}\cos^2 v + \ldots\right\},$$

a hol az $\frac{a}{r}$ kis tört harmadik és magasabb hatványait elhanyagoljuk. Összevonva:

$$r_1^{-1} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{a}{r}\cos v - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}(1 - 3\cos^2 v)\right\}$$

és

$$r_2^{-1} = \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{a}{r}\cos v - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}(1 - 3\cos^2 v)\right\},$$

a miből azután következik:

$$V = f\frac{m_1 + m_2}{r} + f\frac{m_2 - m_1}{r^2} a\cos v - \tfrac{1}{2} f\frac{m_1 + m_2}{r^3} a^2(1 - 3\cos^2 v) + .$$

Az első tag magában véve a potentiált éppen úgy adja, mintha O pontban egyetlenegy pontunk volna $m_1 + m_2$ tömeggel; a többi tag annál kisebb, minél kisebb az $\frac{a}{r}$ viszony. Mihelyt tehát a távolság a szerkezet méretéhez képest igen nagy, a két pont vonzása ugyanaz, mintha egyetlenegy ponttal volna dolgunk: a szintfelület gömbhéj, melynek középpontja a szerkezet súlypontja. A mi két pontra áll, az könnyen kiterjeszthető bármennyire, és innen a tétel, hogy valamely tetszőleges alakú tömeg vonzási szintfelületei nagyobbodó távolságban mindinkább a gömbalakhoz közelednek, vagy a mi egyre megy: nagy távolságokban (a távolságot mindig a test méreteihez arányítva gondoljuk) minden tetszőleges alakú tömeg egyetlen pont vonzása által helyettesíthető; e pont tudvalevőleg a szerkezet súlypontjának neveztetik.

Az előbbi potentiál különösen egyszerű alakot ölt még, ha a két pont tömege ugyanaz, $m_2 = m_1 = m$; ekkor ugyanis

$$v = f\frac{2m}{r} - f\frac{m}{r^3} a^2 (1 - 3\cos^2 \varphi) + ..$$

a második tagot nélkülöző egyszerűbb egyenlethez jutunk.

A potentiál tanából még egy fontos tételt kell bemutatnunk, melynek mi is két jelentős alkalommal hasznát veszszük, s melyet Green-féle tételnek szokás nevezni. Mathematikai beruházásától eltekintve, csak lényegét emelem ki, mert teljes jelentősége az alkalmazásoknál világossá válik úgy is. E tétel értelmében minden, a vonzást a test belsejében előidéző ágens tényleges eloszlása helyébe egy, a test felületére szorítkozó eloszlás tehető, a nélkül, hogy a külső térben a potentiál változást szenvedne. Vagy más szavakkal: ha a Földnek akár nehézségi, akár mágneses potentiálját keressük a külső térben, okvetetlenül szükségünk van a nehéz vagy mágneses tömegeknek a Föld belsejében való eloszlásának ismeretére. Tényleg ez ismeretünk több mint hézagos; mindamellett a feladat egészen szigorúan megoldható, a mennyiben a fölmerülő ismeretlenek mind a Föld felületén eszközölt nehézségi vagy mágneses mérések segítségével eliminálhatók. Ezzel természetesen lemondtunk arról, hogy földfelületi megfigyelésekkel a Föld belső tömegeloszlását teljességében megismerjük, de e lemondás nélkül a feladat másik és fontosabb oldala sem volna megoldható.

XIII. FEJEZET.

Az erő és változásainak levezetése a potentiálból.

A potentiál, miként az előzőkben röviden láttuk, nemcsak az erő nagyságát, hanem annak változását is adja, a mi reánk nézve szintén főfontosságú dolog. Az erre vonatkozó számításainknak nemcsak eredménye fontos, hanem egyszersmind menete is, a mennyiben jó példát ad, hogyan számítható a potentiálból az erő.

Képzeljünk a térben derékszögű coordinátarendszert (48. ábra), melynek tengelyei mentén az erő P-nek componenseit levezetjük. Az x tengely menti erőösszetevő legyen X, az y és z tengely mentén szétbontott erő Y és Z. A tömegvonzás potentiálja $V = f\frac{m}{r}$ ez esetben, tekintettel r-nek x, y, z által kifejezhető értékére

$$V = f\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

alakban írhatjuk. Az x tengely irányába eső összetevőt megkapjuk, ha x-et $\triangle$x-szel megnövesztjük, az így származó potentiálból az eredeti értéket levonjuk és a külömbséget $\triangle$x-szel elosztjuk. $\triangle$x-et azután minden képzelhetőnél kisebbnek tételezve fel, átmegyünk a határra végtelen kis $\triangle$x számára. Azaz:

$$X = -\frac{fm\,[(x + \triangle x)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} - fm\,[x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}}}{\triangle x},$$

ha limes $\triangle x = o$. A számláló első tagja

$$fm\,[x^2 + y^2 + z^2 + 2x\,\triangle x + \triangle x^2]^{-\frac{1}{2}}$$

alakban írható és $\triangle x^2$ a $\triangle x$ mellett elhagyható, ha ezt végnélkül kicsinynek gondoljuk. A NEWTON-féle binom kifejtése ad:

$$fm\,[x^2+y^2+z^2]^{-\frac{1}{2}} - fm\,.\,x\triangle x\,[x^2+y^2+z^2]^{-\frac{3}{2}} + \ldots,$$

ha ismét $\triangle x$ magasabb hatványait elhanyagoljuk. E szerint

$$X = \frac{fm\,x\triangle x\,[x^2+y^2+z^2]^{-\frac{3}{2}} + A\triangle x^2 + B\triangle x^3 + \ldots}{\triangle x},$$

a hol az A, B.. a $\triangle x$ magasabb hatványainak bennünket nem érdeklő coefficiensei. Ha $\triangle x$-szel osztunk, lesz:

$$X = fm\frac{x}{r^3} + A\triangle x + B\triangle x^2 + \ldots$$

és ha $\triangle x = o$, tehát minden képzelhetőnél kisebb, akkor

$$X = fm\frac{x}{r^3}$$

kifejezés marad azon vonzás számára, melyet az m tömegpont az X tengely mentén gyakorol. Mivel az r mennyiségben x, y, z teljesen egyformán szerepel, találjuk közvetlenül a többi két componenst az x, y, z betűk felcserélése által:

$$Y = fm\frac{y}{r^3} \text{ és } Z = fm\frac{z}{r^3}$$

kifejezések alakjában.

Ha a vonzott pontot a coordináták kezdőpontjától más távolságra viszszük, azáltal például, hogy x, y, z coordináták helyett sorban vagy együttesen $x+\triangle x$, $y+\triangle y$, $z+\triangle z$ coordinátákat tulajdonítunk neki, akkor nyilván az erő is más lesz, mert hiszen ez mind e coordinátáktól függ. E helyen csak azon erőváltozást számítjuk, mely X, Y, Z-ben előáll, ha sorban x, y és z helyébe $x+\triangle x$, $y+\triangle y$, $z+\triangle z$-t léptetünk. Az X erő kifejezése volt:

$$X = fmx\,[x^2+y^2+z^2]^{-3/2}$$

és változását éppen úgy számítjuk ki ezen kifejezésből, mint a hogy az erőt magát számítottuk a potentiálból. Mivel X változását csak azon feltevés alatt számítjuk, hogy benne x helyébe

$x+\delta x$ lép, czélszerű lesz a $\frac{\delta X}{\delta x}$ elnevezést behozni. E szerint

$$\frac{\delta X}{\delta x}=\frac{fm(x+\delta x)\,[(x+\delta x)^2+y^2+z^2]^{-3/2}-fmx\,[x^2+y^2+z^2]^{-3/2}}{\delta x},$$

ha limes $\delta x=o$. A számláló első kifejezésében álló zárójel ismét $(\delta x)^2$ elhanyagolásával

$$[x^2+y^2+z^2+2x\delta x]^{-3/2}=[x^2+y^2+z^2]^{-3/2}-3x\delta x\,[x^2+y^2+z^2]^{-5/2}$$

alakban is írható. Ha ezt még $x+\delta x$-szel megszorozzuk, lesz:

$$x\,[x^2+y^2+z^2]^{-3/2}+\{[x^2+y^2+z^2]^{-3/2}$$
$$-3x^2[x^2+y^2+z^2]^{-5/2}\}\,\delta x+A\delta x^2+B\delta x^3+..,$$

a hol ismét A, B.. a δx magasabb hatványainak coefficiensei. A behelyettesítés ad:

$$\frac{\delta X}{\delta x}=\frac{fm\,\{[x^2+y^2+z^2]^{-3/2}-3x^2\,[x^2+y^2+z^2]^{-5/2}\}\,\delta x+A\delta x^2+..}{\delta x}$$

és ha most δx-szel osztunk, s végtelen kis δx-ekre átmenve, $\delta x=o$-t teszünk, marad:

$$\frac{\delta X}{\delta x}=fm\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right),$$

és teljesen hasonlóképen

$$\frac{\delta Y}{\delta y}=fm\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)\text{ és }\frac{\delta Z}{\delta z}=fm\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right).$$

A három erőváltozás összege:

$$\frac{\delta X}{\delta x}+\frac{\delta Y}{\delta y}+\frac{\delta Z}{\delta z}=fm\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)\right]=o$$

és ez a fontos Laplace-féle tétel, mely minden, a távolság négyzetével visszás arányban ható erő változására szól a külső, vonzó agens által be nem töltött tér számára. Ezen egyenlet fontos feltételt szab, melynek folytán pl. $\frac{\delta X}{\delta x}$ és $\frac{\delta Y}{\delta y}$ erőváltozás megfigyelése elegendő; ha ez ismeretes, akkor a harmadik

$$\frac{\delta Z}{\delta z} = -\frac{\delta X}{\delta x} - \frac{\delta Y}{\delta y}$$

egyenletből egyszerűen számítható.

Keressük még az erőösszetevőket a centrifugális erő számára is. Ha a bevezetett coordinátarendszerre vonatkozó szerkezetünk annak Z tengelye körül forog, akkor

$$W = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \rho^2$$

erőfüggvényben ρ a forgási tengelytől számított távolságot, tehát

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

kifejezést jelenti. Mint előbb, úgy most is

$$X = -\frac{\frac{1}{2}\omega^2[(x+\delta x)^2 + y^2] - \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)}{\delta x},\ \lim \delta x = o,$$

vagy kiszámítva

$$X = -\omega^2 x \text{ és hasonlóan } Y = -\omega^2 y, \text{ holott } Z = o.$$

Az erő változása ellenben:

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \frac{-\omega^2(x+\delta x) + \omega^2 x}{\delta x} = -\omega^2$$

és hasonlóan:

$$\frac{\delta Y}{\delta y} = -\omega^2,\ \frac{\delta Z}{\delta z} = o,$$

úgy hogy itt

$$\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y} + \frac{\delta Z}{\delta z} = -2\,\omega^2$$

egyenlet áll. A nehézségi erőt megkapjuk, ha a tömegvonzás és centrifugális erő egyenirányú componenseit összegezzük, hiszen mindez erők egyenlő irányok mentén vannak felbontva. Tehát ha most X, Y, Z a nehézség erőösszetevőit jelenti:

$$X = fm\frac{x}{r^3} - \omega^2 x;\ Y = fm\frac{y}{r^3} - \omega^2 y;\ Z = fm\frac{z}{r^3}$$

és a LAPLACE-féle egyenlet:

$$\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y} + \frac{\delta Z}{\delta z} = -2\,\omega^2.$$

A levezetett egyenleteknek a nehézségi erő változásainak megfigyelésében fontos hasznát fogjuk venni.

XIV. FEJEZET.

Az erő lemérése.

Most már annyira haladtunk, hogy a nehézségi erő tényleges lemérésére gondolhatunk. Látnivaló, hogy csupán ezt vagyunk képesek megfigyelni, mert mindig a tömegvonzás és centrifugális erő eredője az, a mi a Föld felületén hat. Ha azontúl magára a Föld tömegvonzására volna szükségünk, a centrifugális erő befolyása minden szélesség alatt és minden irányban könnyen kiszámítható és eliminálható.

Első közelítésben föltételezzük, hogy azon terek, melyeken belül a mozgás a Föld felületén történik, oly kicsinyek, hogy méreteik a Föld középpontjának távolságához képest mérhetetlen kicsinyek, hogy ezeken belül tehát az erő állandónak tekinthető. Ez annyit tesz, hogy a nehézségi erő változása azon pontokon belül, melyeken belül egy test esik, vagy valamely inga leng, kisebb legyen, semhogy a megfigyelés tárgyát képezhetné. Ily tereket állandó intenzitású erőmezőknek szokás nevezni. Az erőt pedig mindig a tömegegységre vonatkoztatva határozzuk meg, s ezt intenzitásnak, vagy a nehézségi erő esetében egyszerűen gyorsulásnak is nevezünk.

A nehézségi gyorsulás meghatározásának legegyszerűbb és legközvetlenebb módja volna az eső testek megfigyelése. Ha ugyanis valamely test légüres térben h magasságon át esik null kezdeti sebességgel t másodperczig, akkor tudvalevőleg

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

a miből az esési tér és az átmérésére szükséges idő megfigyelése g-t szolgáltatja. A mérés nehézségei folytán e módszer nem alkalmazható. Nehéz légüres tért előállítani és még sokkal nehezebb az esési köz rövid időtartamát megállapítani. Ez ugyanis a mozgás kezdő és végpontjának időmeghatározását teszi szükségessé, és világos, hogy mindkét pillanatot csak bizonyos hibával lehet megbecsülni. E hiba, mely kedvezőtlen esetben az időköz kiszámításában összegeződhetik, annál nagyobb törtrészét teszi a lemérendő köznek, minél kisebb ez maga, és annál nagyobb befolyást gyakorol azután természetesen a g meghatározására.

Sokkal czélszerűbb tehát oly módszer választása, mely mellett az esés mintegy folytonosan ismétlődik, azaz mely mellett periodikus mozgások jönnek létre a nehézségi erő befolyása alatt. Ilyen mozgások az inga lengései. Az inga egyáltalában a physikusnak egyetlen jó műszere az erők leméréssére, és a Föld alakjának meghatározásában alapvető fontossága mellett tárgyalását itt nem mellőzhetjük.

Ingán, helyesebben nehéz ingán értünk minden merev, változhatlan szerkezetet, mely vízszintes tengely körül foroghat. Ha ilyen szerkezetet lengésbe hozunk és mozgását a lengési síkra merőlegesen, egyenletesen tovamozgó papirlapra önműködően iratjuk, csakhamar meggyőződünk róla, hogy a kilengés nagysága, az elongatio minden pillanatban

$$s = a \sin \frac{\pi}{T} t$$

egyenlet által ábrázolható. A jelzés nem a legpontosabban, de legkényelmesebben úgy eszközölhető, hogy az ingából lengése közben vékony szines folyadéksugarat folyatunk, mely az alatta, a lengésekre merőlegesen egyenletesen elhúzott itatós papirlapra hullámvonalat ír le. Ha a papirlapot ugyanazon körülmények között mozgatjuk másodszor is, midőn az inga nyugszik, egyenes vonalat kapunk, mely a hullámvonal tengelyét, a kitéréseknek megfelelő egyensúlyi helyzetét adja. Az inga távolsága a tengelytől, azaz elongatiója e hullámvonal bármely pontjának ordinátája; ha ezt lemérjük és a hullámvonal és abscissatengely metszési pontjától való távolsággal összehasonlítjuk, csakhamar belátjuk a fenti törvény helyességét. Benne a a kilengés legnagyobb értékét, az amplitudót jelenti, míg T a lengési idő, azaz az ingának az egyensúlyi helyzetén való kétszeri, ellentétes irányban való átmenetének időköze. Ez idő kétszeresét, t. i. az egyensúlyi helyzeten való két egymásra következő egyirányú átmenetet rezgési időnek lehetne nevezni.

Lássuk most az ingára ható gyorsulást. A közepes sebességet megkapjuk, hogyha az inga elmozdulását keressük t és $t + \tau$ idő alatt és ezen elmozdulást a reá fordított idővel, τ-val elosztjuk. A közepes sebesség átmegy a t időbeni pillanatnyi sebességbe, ha τ-t minden képzelhetőnél közelebb viszszük a 0-hoz. Tehát:

$$v = \frac{1}{\tau}\left[a \sin \frac{\pi}{T}(t + \tau) - a \sin \frac{\pi}{T} t\right], \text{ ha limes } \tau = o.$$

Mivel τ igen kicsiny, $\sin \frac{\pi}{T}\tau$ helyébe $\frac{\pi}{T}\tau$ ív és $\cos \frac{\pi}{T}\tau$ helyébe az egység írható; ezáltal

$$v = \frac{1}{\tau}\left[a \sin \frac{\pi}{T} t + a \frac{\pi}{T}\tau \cos \frac{\pi}{T} t - a \sin \frac{\pi}{T} t\right],$$

vagy

$$v = a \frac{\pi}{T} \cos \frac{\pi}{T} t$$

sebességi képlethez jutunk. A gyorsulás úgy áll elő a sebességből, mint ez az elmozdulásból; tehát e gyorsulást γ-val jelölve:

$$\gamma = \frac{1}{\tau}\left[a \frac{\pi}{T} \cos \frac{\pi}{T}(t + \tau) - a \frac{\pi}{T} \cos \frac{\pi}{T} t\right], \text{ ha limes } \tau = o,$$

és az előbbi egyszerűsítésekkel élve:

$$\gamma = - a \frac{\pi^2}{T^2} \sin \frac{\pi}{T} t,$$

vagy tekintettel az elongatio egyenletére:

$$\gamma = - \frac{\pi^2}{T^2} s.$$

Az ingára ható gyorsulás tehát minden pillanatban az elongatióval arányos és oly irányú, hogy az ingát egyensúlyi helyzetébe visszaterelni iparkodik. A lengési idő levezetésére felhasználjuk a mechanikának azon ismert tételét, hogy az eleven erő változása egyenlő a végzett munkával. Ha az inga egy tömegpontja m_1 és távolsága a C forgási tengelytől (203. ábra) r_1, akkor az m_1 pont lengése közben körívet ír le és szögsebessége

$v_1 = \omega r_1$

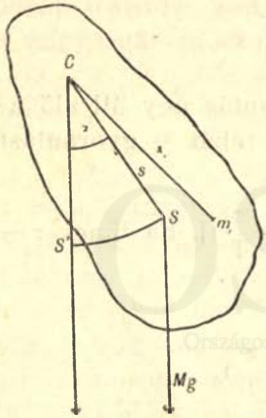
$$\omega = \frac{v_1}{r_1}$$

ugyanaz az inga minden pontja számára, ha ugyan részecskéinek kölcsönös helyzete mozgás közben nem változik. Ezért kellett az ingát merev szerkezetnek mondanunk. Az m_1 pont eleven ereje tehát, ha v_1 vonalos sebessége

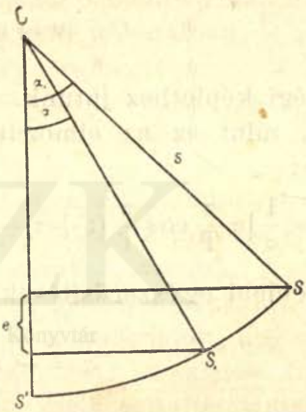
$$\tfrac{1}{2}\, m_1\, v_1{}^2 = \tfrac{1}{2}\, m_1\, \omega^2\, r_1{}^2.$$

Ha az inga egész tömegét végtelen sok elemi tömegrészre bontjuk, akkor mindegyiknek ugyanazon alakú eleven ereje lévén, az összes inga eleven ereje

$$E = \tfrac{1}{2}\, m_1\, \omega^2\, r_1{}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, \omega^2\, r_2{}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_3\, \omega^2\, r_3{}^3 + \ldots$$



203. ábra.
Az inga törvénye.



204. ábra.
Az inga súlypontjának esése.

vagy mivel az $\frac{1}{2}\omega^2$ faktor az inga változatlan volta folytán ugyanaz:

$$E = \tfrac{1}{2}\, \omega^2\, \Sigma\, mr^2.$$

A tömegpontokból és azoknak a forgási tengelyhez való távolságuk négyzetéből képezett szorzatösszeg nyilván csupán az inga tömegétől, méreteitől, alakjától és benne a forgási tengely fekvésétől függ. De nem tartalmaz semmit, a mi az inga mozgására emlékeztetne, tehát nyugvó ingán ugyanaz, mint mozgón. Ezen összeget, melyet a Föld alakjának megbeszélésében, továbbá a mágneses mérésekben ismét találunk, az inga tehetetlenségi momentumának nevét viseli, nyilván, mert az eleven erő képletében ugyanazon szerepet játsza, mint a haladó mozgás eleven erejében a tehetetlenséget kifejező tömeg. Ha tehát

$$K = \Sigma\, mr^2,$$

akkor az eleven erő

$$E = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 K$$

és ugyanekkora a változása is, ha kezdethelyzetül azon pillanatot választjuk, melyben az inga legnagyobb elongatiójában van, pillanatnyi sebessége és eleven ereje tehát pillanatnyilag éppen 0.

A végzett munkát ezen α_0 legnagyobb elongatio és egy tetszőleges α kitérés között szintén könnyen származtatjuk (204. ábra). Az inga S súlypontja tudvalevőleg, ha benne az egész inga M tömegét egyesítve gondoljuk, forgása közben ugyanazon munkát végzi, mint maga az inga: hiszen ez éppen a súlypont definitiója. Az ingára ható erő pedig Mg. A munka mértéke az erő és annak irányába eső elmozdulás lévén — jelen esetben, függélyesen működő erőről lévén szó, az erőbe eső elmozdulás helyett esést is mondhatunk — áll:

$$A = Mge = Mg\,(s\cos\alpha - s\cos\alpha_0).$$

Ha igen kis kimozdulásokat veszünk tekintetbe, úgy hogy az elongatio sinusa helyébe az ív tehető, akkor $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ vonatkozás folytán

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{és} \quad \cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0{}^2}{2}$$

írható, úgy hogy a munka:

$$A = Mgs\,\frac{\alpha_0{}^2 - \alpha^2}{2}.$$

Magát az inga szögsebességét nem figyelhetjük meg, mindig csak egy bizonyos pontjának tényleges mozgását. Ha az inga egy tetszőleges pontja, pl. az ingalencse csúcspontja l távolságban van a tengelytől, akkor vonalos sebessége

$$v = l\omega = a\,\frac{\pi}{T}\left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mivel az inga egy pontjának sebessége

$$v = a \frac{\pi}{T} \cos \frac{\pi}{T} t \text{ és } s = a \sin \frac{\pi}{T} t$$

volt. Egyszersmind a tekintetbe vett pont amplitudója

$$a = l\alpha_0 \text{ és változó elongatiója } s = l\alpha.$$

Mindezeket összevéve, ad az említett mechanikai elv:

$$\tfrac{1}{2} K\omega^2 = \tfrac{1}{2} Mgs \left(\alpha_0{}^2 - \alpha^2\right),$$

a levezetett mennyiségek behelyettesítése után:

$$Mgs \left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{s^2}{l^2}\right) = K . \frac{a^2}{l^2} \frac{\pi^2}{T^2} \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)$$

vagy egyszerűen:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Mgs}},$$

a mivel az inga lengési ideje meg van határozva. Ez függ tehát az inga tömegétől, a súlypontjának a tengelyétől való távolságától, a tehetetlenségi momentumtól és a nehézségi erő gyorsulásától.

Az utóbbi mennyiség az előbbiekből és a megfigyelt lengési idő segítségével számítható; a lengési idő pontos meghatározása pedig aránylag könnyen eszközölhető. Ha ugyanis meghatározzuk az időt egy lengés elején és pl. 1 másodperczes ingát tételezve fel 10 800 lengés, azaz 3 óra mulva, akkor az idő leolvasásában elkövetett hiba, mely egyenként közel $0^s.1$-re tehető, legrosszabb esetben az egész eredményben 0^s2-t tesz ki, úgy hogy egy lengésre csak $\frac{0 \cdot 2}{10\,800} = \frac{1}{54\,000}$-ed másodperczny hiba esik.

A tehetetlenségi momentum homogen, egyszerű geometriai testek számára ugyan számítható, de mindig kényelmesebben és pontosabban kisérletileg határozzuk meg, mint ezt később a mágneses megfigyeléseknél látni is fogjuk.

Ha előállíthatnánk egy oly ingát, mely egyetlenegy M tömegű nehéz pontból áll, s mely l hosszúságú, kiterjeszthetetlen, súlytalan fonálra van akasztva, akkor ennek lengési ideje különösen egyszerűen függ össze méreteivel. Az inga tömege ugyanis egyszerűen M, súlypontjának a tengelytől való távolsága s = a fonalhosszával egyenlő, s = l és tehetetlenségi momentuma $K = Ml^2$, úgy hogy

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Az ilyen nem létező ingát, melyet azonban vékony platinadrótra függesztett platinagolyóval némileg megközelíthetünk, mathematikai vagy eszményi ingának szokás nevezni. S ha az inga képletében

$$\frac{K}{Ms} = l$$

az úgynevezett redukált hosszúsággal tétetik egyenlővé, akkor a nehéz inga lengési ideje is az eszményi inga képletével fejezhető ki.

Az inga lengési ideje, mint a képlet mutatja, független az amplitudo nagyságától addig, míg ez általában véve oly kicsiny, hogy sinusa az ívvel felcserélhető. A szigorú képlet, mint ez az inga mozgási egyenletéből felsőbb analyzissel levezethető:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Mgs}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right],$$

a hol α az amplitudót jelenti. Ha $\alpha = 5^0$, akkor a végtelen sornak az 1-re következő tagjai a lengési időnek még mindig csak $\frac{1}{2100}$-ad, $\alpha = 1^0$ mellett éppen csak $\frac{1}{52\,524}$-ed részét teszik ki.

A gyakorlatban rendesen azon eszményi inga hosszát határozzák meg, mely másodperczenként 1 lengést végez; ha l az egyszerű másodperczinga hossza, akkor T = 1 számára

$$l = \frac{g}{\pi^2},$$

úgy hogy a nehézségi gyorsulás 9·869 6023-szer vagy közel 10-szer oly nagy, mint ezen hosszúság.

Ha ugyanazon ingát változatlanul más helyre viszszük át, a hol g′ a gyorsulás, akkor ott T′ hosszúságú lengési idővel fog bírni és

$$\frac{g}{g'} = \frac{T'^2}{T^2},$$

úgy hogy a gyorsulások egyszerűen a lengési idők négyzetével visszásan arányosak. Ha a lengési idők helyett azonban egy bizonyos idő, pl. a középnap alatt végzett lengések számát, n-et olvassuk meg, akkor ezek nyilván a lengési idővel fordított arányban állanak és a gyorsulások

$$\frac{g}{g'}=\frac{n^2}{n'^2},$$

az egyenlő idők alatt végzett lengések számának négyzetével egyenes arányban állnak. A gyorsulások helyébe természetesen mindezen arányokban az egyszerű másodperczinga hossza tehető. Az utolsó egyenlet tényleg alkalmazásban van az úgynevezett relativ nehézségi mérések esetében, a midőn is valamely hely gyorsulását csupán bizonyos ideig folytatott lengések egyszerű olvasása által hasonlítjuk össze egy oly helyével, melynek gyorsulását előzetes mérések által már pontosan ismerjük.

A közvetlenül az inga képletéből levezetett gyorsulás még számos hibaforrás miatt javítandó és azután is alkalmazandó még egynéhány, a hely fekvésétől függő javítás, hogy a különböző helyek adatai egymással összehasonlíthatókká váljanak.

A lengési időt mindenekelőtt végtelen kis amplitudókra kell redukálni; ha a közvetlenül megfigyelt lengési idő t, a képlet szerint számítandó ellenben T, akkor a már idézett egyenlet alapján

$$t=T\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+..\right],$$

és ebből, tekintettel a correctio csekélységére,

$$T=t\left[1-(\tfrac{1}{2})^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right] \text{ vagy } T-t=-\frac{t}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ha a megfigyelés alkalmával a hőmérséklet t, és c az inga anyagának terjedési coefficiense, helyesebben a $\frac{K}{s}$ mennyiség változása egy Celsius fok hőmérséklet emelkedés mellett, akkor a 0^0 C-ra redukált lengési idő, T_0 lesz:

$$\frac{T}{T_0}=\sqrt{1+ct}, \text{ a miből } T_0=\frac{T}{\sqrt{1+ct}}=T\sqrt{1-ct}.$$

Az inga a levegő felhajtása miatt könnyebb, a közvetlenül megfigyelt g tehát nem a nehézségi gyorsulást adja, hanem a súly gyorsulását. Ha D az inga, d a levegő sürűsége, akkor az inga minden köbcentiméterje a levegőben (D—d) grammot nyom csak D helyett; nehézsége tehát $\frac{D}{D-d}$ arányban nagyobb, mint súlya. Ha a közvetlenül észlelt gyorsulás g′, akkor a légüres térre vonatkozó

$$g = g' \frac{D}{D-d}$$

és az inga lengési ideje levegőben és légüres térben

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Mg's}} \quad \text{és} \quad T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{Mg's} \frac{D-d}{D}},$$

a miből a légüres tér számára

$$T_0 = T \sqrt{\frac{D-d}{D}}$$

következik. Az inga ezenkívül a hozzátapadó levegőt is mozgásba hozza, úgy hogy tehetetlenségi momentuma nagyobb, mint volna, ha a lengésben csak az inga anyaga venne részt; lengési ideje megváltozik a levegő ellentállása miatt, mely az egymásra következő lengések amplitudójának kisebbedéséből, az úgynevezett csillapodásból mérhető meg, és végül lengésbe hozza eleven erejének rovására az állványt is, melyen leng. Mindezen javítások külön-külön számításba veendők. A másodperczes inga hosszának pontos meghatározására classikus példát adott Bessel: Länge des einfachen Secundenpendels für Königsberg czímű értekezésében, a melyből az idézett javítások mikénti alkalmazása is fel van tüntetve. Bessel e meghatározásban még a tengely szerepét is tanulmányozza. Az inga ugyanis kemény akátlapra támaszkodó késél körül leng. A mennyiben azonban ez él mathematikai vonal alakjában nem állítható elő, hanem tényleg csak erős görbültséggel bíró hengerrészszel azonos, az inga nem mindig ugyanazon egyenes körül leng, hanem minden elongatióban e henger más-más palástvonala körül, a mi szintén tekintetbe vehető befolyást gyakorol.

Ha mindezen correctiók alkalmazása után az illető helyen a nehézségi gyorsulás értékét pontosan ismerjük is, általános következtetéseket még sem vonhatunk addig, míg a különböző helyeken tett megfigyeléseket egyenlő viszonyokra nem redukáljuk. Rendesen úgy számítjuk át a megfigyelt gyorsulást, mintha az észlelési hely alatt a tenger szinén eszközöltük volna. Erre vonatkozólag szükséges, hogy a magassági javítást vegyük tekintetbe és ama vonzást, melyet a tengerszintől a hely magasságáig nyúló kéreghéj meg azon tömegek gyakorolnak, melyek mint látható tömegek az inga horizontja fölé nyúlnak.

De még ezen nem teljességgel megbízható javítások eszközlése után sem lehetünk biztosak, hogy teljesen összemérhető adatokhoz jutunk, és ezért tanácsos lehetőleg sok megfigyelésre támaszkodni, a mennyiben a valószinűség szabályai szerint sok számú megfigyelés kapcsolásából a helyi vonzásoknak a véletlen hibák jellegével bíró befolyása kiesik.

A Bessel-féle megfigyelések már oly nagy pontossággal bírnak, hogy a nehézség azonosságát mindennemű anyagra nézve a gyorsulás 60 000-ed részéig tüntették ki.

Bohnenberger, különösen pedig Kater oly ingát szerkesztett, melylyel a kikerülhetetlen hosszúságmérés lehetőleg egyszerűvé van téve. A közönséges ingán ugyanis minden a súlypont távolságának a tengelytől való meghatározásán fordul meg, a mi éppen nem megbízhatóan mérhető. Azonban az ingarúd hosszában könnyűséggel kijelölhető oly pont, mely ugyanazon lengési idővel bír, mint ugyanily hosszú eszményi inga. A tengelyhez közel fekvő pontok, eszményi ingákul fogva fel, ugyanis gyorsabban, a távoliak lassabban lengenek, mint a tényleges inga. Kell tehát, hogy legyen egy pont, melynek távolsága a forgási tengelytől olyan, hogy a vele egyenlő hosszú eszményi ingával együtt leng. Ez a lengési középpont, mely a tengelytől az inga redukált hosszával egyenlő távolságra fekszik. Ha ezen át vízszintes tengelyt hajtunk, akkor az inga lengési ideje nem változik, akár előbbi tengelye, akár a lengési középpont körül leng. Az úgynevezett reversiós ingával a megfigyelés tehát a következő módon történik: Megállapítjuk a lengési időt, midőn az inga az egyik éle körül leng, azután lengetjük az ingát a másik éle körül, ez él helyzetét addig változtatva, míg a két lengési idő nem vált egyenlővé. Ekkor a két tengelynek egymástól való távolsága azon eszményi inga hossza, mely a ténylegessel egyenlő lengési idővel bír.

Ezen módszer rendkívüli előnye, hogy a súlypont fekvésének ismeretétől függetlenek vagyunk, és hogy sem a tehetetlenségi momentumot, sem az inga súlyát pontosan nem kell ismernünk, a mennyiben minde mennyiségek most már csak a javításoknál szerepelnek.

Még nagyobb előnyökkel kecsegtet a — tudtunkkal különben a gyakorlatba még át nem ment — Finger-féle commutatiós inga. Képzeljünk egy nagyobb M és egy kisebb m tömeget, mely oly módon alkalmazható az ingára, hogy ennek s a két tömegnek súlypontjai mind a forgási tengelyen átmenő síkban feküdjenek. Az M és m tömegek súlypontjainak távolsága a forgási tengelytől legyen x_1 és x_2. Ha most egy második megfigyelésben a tömegeket egyszerűen felcseréljük, úgy hogy M és m távolsága a tengelytől x_2 és x_1 legyen, akkor a lengési idő e két megfigyelés alatt változást nem mutat azon esetben, ha $x_1 + x_2 = l$, az inga redukált hosszával egyenlő.

A lengési idők megfigyelésére legnagyobb haszonnal a coincidentiák módszerét használjuk. Képzeljünk két egymás mögött álló ingát — az egyik rendesen másodperczes órainga szokott lenni — a melyek közül az egyik kissé gyorsabban leng, mint a másik. A távcső látmezejében a két inga egy bizonyos időpillanatban együtt lengve halad át a fonalkereszt mellett. Azután az inga előre siet mindjobban és már visszafelé fog mozogni, midőn az óra ingája még mindig előre tart, úgy hogy a két inga újból találkozik, de most ellentétes irányban hagyják el egymást. E pillanatban a gyorsabb inga a lassúbbhoz képest egy lengést nyert és minden következő találkozás alkalmával egy lengéssel előbbre van. Ha tehát az óra másodperczeket ad és m találkozás alatt n másodpercz telt el, akkor

$$T = \frac{n}{m + n}$$

adja a lengési időt. A két inga találkozását legczélszerűbben optikai úton jelezhetjük, egy fénysugárnak felvillanása által például, mely a találkozás pillanatában a két ingába metszett párhuzamos résen áttör, különben pedig a rések elmozdulása miatt láthatatlan marad. Ilyen coincidentia szerkezettel meg fogunk közelebbről ismerkedni a STERNECK-féle relativ mérések ismertetésekor.

A reversiós ingánál a légüres térre való reductio is elmarad, ha az inga a két tengelyére vonatkozólag symmetrikus szerkezetű.

Lássuk most azon eredményeket, melyeket az ingával való megfigyelés szolgáltatott.

XV. FEJEZET.

Az ingamérések eredményei.

RICHER csillagász volt az első, a ki 1672-ben a Mars-oppositio megfigyelésére Cayennebe tett útja alkalmával észrevette, hogy az inga gyorsulása nem minden helyen ugyanaz. Párisban jól járó órája Cayenneben $+ 4^0\ 46'$ szélesség alatt naponta $2\frac{1}{2}$ perczczel késett és $1\frac{1}{4}$ vonallal kellett megrövidíteni az ingát, hogy a helyes járást ismét létesítse. Párisba visszatérve, ugyanannyit sietett most az óra és ingáját ugyanannyival meg kellett hosszabbítani, a mi eléggé bizonyítja, hogy nem az úton történt véletlen változás foroghat fenn. A hőmérséklet rovására sem írható e változás, mint RICHER idejében némelyek tenni akarák, mert ekkora késés csak mintegy 200^0 hőmérsékletkülömbség által magyarázható meg.

A legrégibb ingaméréseket a perui fokmérés tudósai végezték, ezek között BOUGUER és LACONDAMINE egyet pontosan az aequator alatt. 16 megfigyelést végzett 1789—94 között MALASPINA $-51^0\ 21'$ és $+59^0\ 23'$ szélesség között fekvő különböző helyeken és 9 oroszországi megfigyelést RUMOWSKI és GRISCHOW $51^0\ 6'$ és $68^0\ 52'$ északi szélesség alatt.

Az újabb mérések közül jelentősek azon ingamegfigyelések, melyeket BIOT, ARAGO, MATHIEU és mások a nagy franczia fokmérés vonalán és BIOT maga északi Olaszország területén eszközölt. FREYCINET kapitány 1817—20-iki világkörüli útján a déli félteke számos helyén észlelt és KATER, BASIL HALL, Sabine, Forster, Fallows, Duperrey, Lütke és még számos más a földfelület legkülönbözőbb pontjain észlelték a gyorsulást. Most e megfigyelések száma roppantul növekedik, minthogy az internationalis fokmérés egy programmpontját teszik, s kivált Sterneck tett tökéletesített relativ gyorsulási méréseket különösen hazánk s Ausztria számos pontján.

Ha a Föld felületének mindazon helyeit kötjük össze, melyeken a gyorsulás ugyanaz, akkor az úgynevezett isogammokat kapjuk, melyek nagyjában véve a párhuzamos körökkel párhuzamos görbék; mindazonáltal egy, az aequator szomszédságában előforduló magába zárt görbe már eléggé figyelmeztet arra, hogy helyi eltérések elég számmal fordulnak elő. Különösen kiemelem a következő eredményeket:

Ha az összes javítások alkalmazása után a megfigyeléseket tőlünk telhetőleg homogénné és összehasonlíthatóvá tettük, azt tapasztaljuk, hogy kis oczeáni szigeteken a gyorsulás mindig nagyobb, mint ugyanazon szélesség alatt a szárazföldön. Alig tételezhetünk fel egyebet, minthogy a Föld kérge az oczeánok alatt sürűbb anyagokból áll, mint a szárazulatok alatt. Egészen hasonló külömbséget tanusít síkság és hegység: amaz alatt mintha tömeghalmozódás, ezalatt mintha a felemelt tömegnek megfelelően tömeghiánynyal találkoznánk. Ha pl. alapul veszszük a londoni másodperczes ingát, akkor ez -23^0 és $+28^0$ között a kontinenseken naponta 4·0 lengéssel kevesebbet, az oczeánon 3·7 lengéssel többet végez, mint Londonban, s 51^0 északi és déli szélességen túl az eltérés a szárazföldön $-0·6$, az oczeánon $+1·6$ lengés. Már pedig gyorsabb lengés nagyobb gyorsulásnak felel meg. A második esetre elegendő példát találunk Sterneck-nek hazánkra és az Alpesekre vonatkozó méréseiben. Sterneck egyszerű képletet is közöl, melynek segítségével a Föld közepes sürűségével egyenlő sürűségű azon kőlap magassága számítható, mely a talált eltérés magyarázatára elegendő. Ezen egyelőre még ugyan teljesen hozzávetőleges számítás máris az utat mutatja, melyen ingamérések segítségével a Föld belsejének megismerésébe hatolhatunk, s az orogenetikus elméletek is ezentúl majd ez eredményekkel számolni lesznek kénytelenek.

Az összes eddigi nehézségi méréseket minden kényszer nélkül empirikus egyenletbe foglalhatjuk, melynek keretét a nehézségi erő eloszlása a Föld felületén szolgáltatja. Akár gömbi, akár sphaeroidikus Föld számára találtuk a következő

$$g = a + b \sin^2 \varphi$$

egyenletet, melyben a az aequatori gyorsulást, b pedig a poláris és aequatori gyorsulás külömbségét adja. Minden megfigyelt gyorsulás g a φ geographiai szélesség alatt egy ilyen egyenletet ad, melyek a legkisebb négyzetek elmélete szerint feloldva

$$g = 978{\cdot}0728 + 5{\cdot}0875 \sin^2 \varphi - 0{\cdot}000\,308\,h, \text{ Listing és}$$
$$g = 978{\cdot}1116 + 5{\cdot}0459 \sin^2 \varphi - 0{\cdot}000\,308\,h \text{ Albrecht szerint.}$$

A gyorsulás centiméterekben van adva, a h tengermagasság méterekben. Az egyes megfigyelésekkel szemben hátramaradó hibák nem nagyobbak, mint az elkerülhetetlen megfigyelési hibák, jeléül annak, hogy képletbe hozható, tehát törvényszerű függés a geographiai hosszúságtól nem mutatkozik. Ennélfogva az ezen képletek bármelyikének megfelelő gyorsulást *normális* vagy *theoretikus* gyorsulásnak szokás nevezni és valamely helyen tényleg megfigyelt gyorsulásnak eltérését normális értékétől a helyi vonzások befolyására írjuk.

Már Newton mutatta egyszerű, a 136. ábrára támaszkodó okoskodásával, hogy a másodperczinga hosszából, vagy a gyorsulásból hogyan állapíthatjuk meg a Föld alakját, vagyis lapultságát. A Newton-féle okoskodás szerint ugyanis:

$$\alpha = \frac{g_{90} - g_0}{g_0},$$

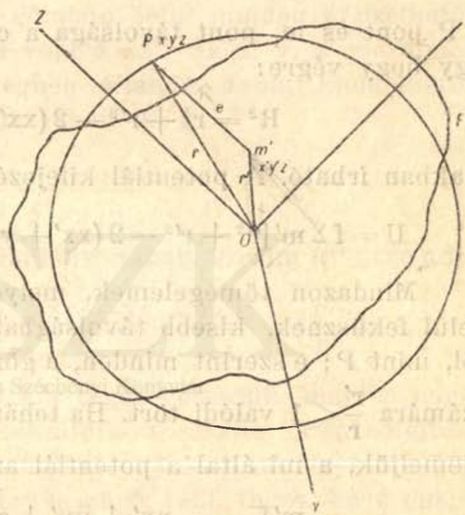
a mi lapultság számára a Listing-féle képletből $\alpha = 1:192{\cdot}2$-t ad: a gömbalakú Föld esetében $g_{90} - g_0$ egyszerűen az aequatori centrifugális gyorsulás, a melylyel a fokmérésekhez közel álló $\alpha = \frac{1}{289}$-et számítjuk ki.

Hogy a nehézségi erőnek a Föld alakjával való összefüggése számára lehetőleg minden előzetes feltevéstől ment egyenletet nyerjünk, mely egyébként is a Föld alakjának tanulmányozásában is megbecsülhetetlen szolgálatokat teend, induljunk ki tisztán mechanikai elvekből. a geometriai ismeretlen alak teljes mellőzésével.

XVI. FEJEZET.

A Clairaut-féle egyenletek. A geoid.

A Föld belsejében, tetszőleges O helyen (205. ábra) fektessünk tetszőleges irányú derékszögű coordinátarendszert. Az O kezdőpont körül, mint középpont körül vonjunk egy gömbfelületet, mely P ponton, az észlelő helyén halad át. Ezen gömb az általában véve szabálytalan Földet két részre osztja: tömegének egy része a gömbön belül van, másik kisebbik része e gömbön kívül esik, még pedig annál kevesebb, minél közelebb fekszik O a Föld geometriai középpontjához — a mennyiben erről t. i. szólhatunk — s minél kisebb a Földnek eltérése a gömbalaktól. Ha P-ben a tömegegységet gondoljuk x, y, z coordinátákkal, a Föld tömegének egy pontját pedig m′-tel jelöljük s coordinátáit x′, y′, z′-tel jelöljük, akkor a Föld potentiálja a P pontra lesz:



205. ábra. A szabálytalan Föld nehézségi potentiálja.

$$U = f\Sigma\frac{m'}{R} + \tfrac{1}{2}\omega^2\rho^2,$$

ha R jelenti a P és m′ pont távolságát, ω a Föld forgási sebességét és ρ a P pont forgási sugarát, azaz távolságát a forgási tengelytől. A potentiál ezen kifejezése már korábbról is ismeretes. A jobb oldalon álló összegezés azt jelenti, hogy minden a Föld tömegét alkotó tömegpont tömege elosztandó a megfigyelési helytől való távolsággal, s minde hányadosok összegezendők. Ezen számítást tényleg eszközölni fogjuk most minden nagyobb nehézség nélkül. Derékszögű coordinátákban kifejezve, a kölcsönös távolság tudvalevőleg:

$$R^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

vagy kiszámítva:

$$R^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) + (x^2 + y^2 + z^2) - 2(xx' + yy' + zz').$$

Ámde

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ és } x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

a P pont és m_1 pont távolsága a coordináták kezdőpontjától, úgy hogy végre:

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz')$$

alakban írható. A potentiál kifejezése e szerint:

$$U = f\Sigma m' [r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz')]^{-1/2} + \tfrac{1}{2}\omega^2\rho^2.$$

Mindazon tömegelemek, melyek a P-n átmenő gömbön belül feküsznek, kisebb távolságban vannak az O kezdőponttól, mint P; e szerint minden, a gömbön belül fekvő részecske számára $\frac{r'}{r} < 1$ valódi tört. Ha tehát az előbbi kifejezésből r^2-et kiemeljük, a mi által a potentiál az

$$U = f\Sigma \frac{m'}{r}\left[1 - 2\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right]^{-1/2} + \tfrac{1}{2}\omega^2\rho^2$$

alakot ölti, akkor $\frac{r'}{r}$ és $\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2}$ valódi tört lévén, a kifejezés Newton binomszabálya értelmében végtelen convergens sorba bontható.

Mindazon tömegelemek távolsága azonban az O ponttól, melyek a P-n átmenő gömbön kívül feküsznek, nagyobb, mint P radiusvectora, tehát ezek számára $\frac{r}{r'} < 1$, és a tömeg ezen részére a potentiál

$$U = f\Sigma \frac{m'}{r'}\left[1 - 2\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^2} + \frac{r^2}{r'^2}\right]^{-1/2} + \tfrac{1}{2}\omega^2\rho^2$$

alakban írva $\frac{r}{r'}$ hatványai szerint bontható végtelen sorba. — Minthogy r és r′ teljesen symmetrikusan fordulnak elő a kifejezésben, elegendő az egyik sorbafejtéssel foglalkoznunk; ha ez megvan, akkor a második soralak is előáll, ha mindenütt r és r′ felcseréltetik egymással. Az első alakból indulok ki, folyton hangsúlyozva, hogy a P pont szilárd, míg az m′ pont a Föld tömegének sorban minden pontjával azonossá teendő, mely a többször említett gömbön belül fekszik. Vagy más szavakkal: a fent jelzett összegezés csak az x′, y′, z′ coordinátákra terjed ki, melyek a gömbön belül minden képzelhető értéket vesznek fel, de nem vonatkozik az x, y, z coordinátákra, melyek minden összegben állandó, tehát kiemelhető factorokat jelentenek. Vegyük tehát elő a

$$f\Sigma\frac{m'}{r}\left[1-\frac{2(xx'+yy'+zz')}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right]^{-1/2}$$

kifejezést. A Newton-féle binomiális szabály szerint kifejtve ad:

$$f\Sigma\frac{m'}{r}\left[1+\frac{xx'+yy'+zz'}{r^2}+\frac{3}{2}\frac{(xx'+yy'+zz')^2}{r^4}-\frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}+\ldots\right],$$

a mennyiben először az első két tagot veszszük, majd a harmadik tag első hatványát is tekintetbe veszszük. A sorbafejtés tovafejlesztése már csak technikai munka; mi egyelőre itt megállapodunk és csak akkor veszünk több tagot, ha a megfigyelés e számítással való összehasonlítás után nem adna még kellően megegyező eredményt. Lássuk most az egyes tagokat.

A legelső tag $f\Sigma\frac{m'}{r}$, de r, mely pusztán P pontra vonatkozik ugyanaz, bárhol válaszszuk az m′ pontot a Föld belsejében. E tag tehát $f\frac{\Sigma m'}{r}$ alakban is írható, s itt $\Sigma m'$ a Földet tevő összes tömegpontok összegét, tehát a Föld M tömegét jelenti. A kifejtés első tagja tehát

$$f\frac{M}{r}$$

és azt mondja, hogy a Föld első közelítésben éppen úgy hat, mintha egész tömege egy pontban volna egyesítve.

A második tag ismét, hivatkozással P pont állandóságára,

$$f\Sigma\frac{m'}{r}\cdot\frac{xx'+yy'+zz'}{r^2}=f\frac{x}{r^3}\Sigma m'x'+f\frac{y}{r^3}\Sigma m'y'+f\frac{z}{r^3}\Sigma m'z'$$

alakban írható. Az $\Sigma m'x'$, $\Sigma m'y'$, $\Sigma m'z'$ szorzatok csak akkor számíthatók ki, ha a Föld alakját és benne a tömegek eloszlását ismerjük. A kiszámítás azonban teljesen feleslegessé válik azon megfontolás által, hogy az eddig tetszőlegesen felvett coordinátarendszer kezdőpontját bizonyos megszorításoknak megfelelőleg fektethetjük. Ha ugyanis kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába, súlypontjába fektetjük, akkor

$$\Sigma m'x'=\Sigma m'y'=\Sigma m'z'=0,$$

a mi már abból is kitetszik, hogy a tömeg a súlypont körül symmetrikusan oszlik el; minden tömegponthoz az x tengely egyik oldalán, tartozik egy másik az x tengely más ágán, melynek számára az $m'x'$ szorzat ugyanaz, de ellentett jelű, úgy hogy összegük 0. És így áll ez páronként minden tömegelem számára. Vagy: ha valamely tömegpontok tömegei m', m''.. coordinátái pedig x', x''.. akkor a súlypont abscissája ξ tudvalevőleg e pontok abscissáinak a tömegek súlybavetésével képezett közepe, azaz:

$$\xi=\frac{m'x'+m''x''+\ldots}{m'+m''+\ldots}=\frac{\Sigma m'x'}{\Sigma m'}.$$

Ha $\xi=o$, és éppen úgy a többi coordináta számára, akkor a coordináták kezdőpontja a súlypontba esik, és természetszerűen $\Sigma m'x'=o$, s hasonló egyenletek állanak a többi coordináták számára is. E megfontolás folytán az egész második tag kiesik.

A sorbafejtés két utolsó felírt kifejezése

$$f\Sigma\frac{m'}{2r}\;\frac{3(xx'+yy'+zz')^2-r^2r'^2}{r^4}=$$

$$=\frac{f}{2r^5}\Sigma m'[3x^2x'^2+3y^2y'^2+3z^2z'^2+6xy.x'y'+6xz.x'z'+6yz.y'z'$$
$$-(x^2+y^2+z^2)\,(x'^2+y'^2+z'^2)]$$

alakban is írható. A középső

$$\frac{6f}{2r^5}\Sigma\, m'(xy\,.\,x'y' + xz\,.\,x'z' + yz\,.\,y'z')$$

tagok összege ismét eltüntethető, ha a még mindig tetszőleges irányú coordinátatengelyeket a forgó Föld főtehetetlenségi tengelyébe fektetjük. Ezáltal ugyanis

$$\Sigma\, m'x'y' = \Sigma\, m'x'z' = \Sigma\, m'y'z' = 0,$$

mert a tengelyeken átfektethető sík mindkét oldalán úgy csoportosíthatók a Föld egész tömegét tevő pontok páronként, hogy az $m'x'y'$ szorzat egyenlő, de ellentett előjelű legyen. E párok összege azonban nullát ad. A hátramaradó tagokat a következőképen foglalhatjuk össze:

$$\frac{f}{2r^5}\Sigma\, m'x^2(2x'^2 - y'^2 - z^2) + \frac{f}{2r^5}\Sigma\, m'y^2(2y'^2 - x'^2 - z'^2) +$$
$$\frac{f}{2r^5}\Sigma\, m'z^2(2z'^2 - x'^2 - y'^2),$$

a hol az x^2, y^2, z^2 faktor természetesen ismét a Σ jel elé vehető.

Tekintetbe véve már most, hogy $x'^2 + y'^2$; $x'^2 + z'^2$; $y'^2 + z'^2$ az m_1 pont távolságának négyzete illetve a z, y és x tengelytől, nyilvánvaló, hogy a szóban forgó összegek a Föld tehetetlenségi momentumával függnek össze. Legyen tehát

$$\Sigma\, m'(x'^2 + y'^2) = MC;\ \Sigma\, m'(x'^2 + z'^2) = MB;\ \Sigma\, m'(y'^2 + z'^2) = MA$$

a Föld három főtehetetlenségi momentuma, akkor

$$\Sigma\, m'(2x'^2 - y'^2 - z'^2) = \Sigma\, m'(2x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2y'^2 - 2z'^2)$$

lévén, írhatunk a potentiál szóban forgó tagja helyett:

$$f\frac{M}{2r^5}[(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2].$$

Célszerűnek mutatkozik még MC a z tengelyre vonatkozó momentum helyébe egy másik állandót, K-t behozni, azáltal, hogy

$$C = \tfrac{1}{2}(A + B) + K$$

írunk. Ezáltal

$$B + C - 2A = -\tfrac{3}{2}(A - B) + K;\ C + A - 2B = \tfrac{3}{2}(A - B) + K;$$
$$A + B - 2C = -2K$$

és kifejezésünk a következő alakot ölti:

$$f\frac{M}{2r^5}[\tfrac{3}{2}(A-B)(y^2-x^2)+K(x^2+y^2-2z^2)].$$

A levezetett tagok összege adja a Föld nehézségi potentiálját végtelen sorkifejtésének első tagjaiban kifejezve; ez tehát:

$$U=f\frac{M}{r}+f\frac{M}{2r^5}[\tfrac{3}{2}(A-B)(y^2-x^2)+K(x^2+y^2-2z^2)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

és a Föld tömegén és főtehetetlenségi momentumain kívül csupán a vonzott pont coordinátáitól függ.

Tényleges alkalmazásokra azonban czélszerűbb leend a derékszögű coordináták helyébe a poláris vagy geographiai coordinátákat bevezetni. Ha a geographiai hosszúságot és szélességet illetve φ és λ-val jelöljük, akkor áll:

$$x=r\cos\varphi\cos\lambda\,;\quad y=r\cos\varphi\sin\lambda\,;\quad z=r\sin\varphi$$

és ezek behelyettesítése után:

$$U=f\frac{M}{r}+f\frac{M}{2r^3}[\tfrac{3}{2}(B-A)\cos^2\varphi\cos 2\lambda+K(1-3\sin^2\varphi)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\omega^2r^2\cos^2\varphi.$$

Ebből már ezelőtt adott utasítások szerint nagyon könnyen adódik az erő, vagy mivel ez a tömegegységre vonatkozik, a gyorsulás. A gyorsulás a radiusvector mentén, mely a geographiai és geocentrumos szélesség kis külömbsége folytán bátran tekinthető a függélyesbe eső teljes nehézségi gyorsulásnak, e szerint:

$$g=f\frac{M}{r^2}+\frac{3fM}{2r^4}[\tfrac{3}{2}(B-A)\cos^2\varphi\cos 2\lambda+K(1-3\sin^2\varphi)]-\omega^2r\cos^2\varphi$$

vagy másképen írva:

$$g=[f\frac{M}{r^2}+3f\frac{MK}{2r^4}-\omega^2r]+[\omega^2r-9f\frac{MK}{2r^4}]\sin^2\varphi$$
$$+(\tfrac{3}{2})^2f\frac{M}{r^4}(B-A)\cos^2\varphi\cos 2\lambda,$$

és ennélfogva utolsó tagjától eltekintve, teljesen ugyanazon alakkal bír, mint a gyorsulás empirikus képlete. Mint említettük, a gyorsulás nem hozható semmi szabályszerű függésbe a geographiai hosszúságtól, úgy hogy az utolsó tagnak el kell esnie. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha

$$B = A,$$

vagyis: az ingamérésekből következik, hogy a Föld két aequatori főtehetetlenségi momentuma egymással egyenlő. Ezen eredményre hivatkozva, a Föld potentiálja és gyorsulása végre a következő alakban állítható elő:

$$U = f\frac{M}{r} + f\frac{MK}{2r^3}(1-3\sin^2\varphi) + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi,$$

$$g = f\frac{M}{r^2} + 3f\frac{MK}{2r^4}(1-3\sin^2\varphi) - \omega^2 r\cos^2\varphi.$$

Az ingamérésekkel való összehasonlítás még két dologról tesz tanúságot: arról, hogy a potentiál sorkifejtésében a megjelölt tagnál az eddig elért pontosság határán belül tényleg megállapodhatunk, s arról, hogy a Föld ható tömegének legnagyobb része tényleg egy, a súlypontja körül leírt gömbhéjban foglaltatik; mindenesetre az e gömbön kívül eső tömeg az egészhez képest elenyésző kicsiny.

A két egyenlet most már teljesen elegendő a Föld alakjának meghatározására az inga segítségével. Vegyünk ugyanis egy niveaufelületet, pl. azt, mely számára $U = U_0$, és írjuk fel ennek egyenletét két pont számára, a melyek közül az egyik az aequatorban fekszik, a másik a pólus. Amaz számára legyen $r = a$, $\varphi = 0$; emez számára $r = b$ és $\varphi = 90^0$. Az eredmény:

$$U_0 = f\frac{M}{a} + f\frac{MK}{2a^3} + \tfrac{1}{2}\omega^2 a^2,$$

$$U_0 = f\frac{M}{b} - 2f\frac{MK}{2b^3}.$$

Ha a nehézségi gyorsulást is felírjuk az aequator és pólus számára, lesz:

$$g_0 = f\frac{M}{a^2} + 3f\frac{MK}{2a^4} - \omega^2 a$$

$$g_{90} = f\frac{M}{b^2} - 6f\frac{MK}{2b^4}.$$

E négy egyenlet teljesen elegendő az ismeretlen U_0, M és MK eliminatiójára, és marad egy egyenlet, mely összefüggést ad a nehézségi és centrifugális gyorsulások és a Föld alakja között. U_0 közvetlenül eliminálható az első két egyenlet levonása által; ez ad:

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 a^2 = f\frac{M}{b} - f\frac{M}{a} - 2f\frac{MK}{2b^3} - f\frac{MK}{2a^3}.$$

Célszerű lesz azonban behozni a lapultságot

$$\alpha = \frac{a-b}{b}, \text{ azaz } b = a(1-\alpha)$$

egyenlet alapján és feltételeznünk, hogy kicsinysége mellett már második hatványa, úgyszintén a lapultság és a vele egyenlő rendű centrifugális gyorsulás szorzata elhanyagolható. Ez nyilván semmi megszorítást nem hoz be; mert a lapultság behozatala nem egyéb, minthogy b állandó helyébe egy másik α állandót teszünk, s magasabb hatványainak elhanyagolása azért indokolt, mert ezek a megfigyelés tárgyát már úgy sem képezhetik. Ha a lapultság ugyanis közel $\frac{1}{300}$, akkor α^2 és épp így $\frac{\omega^2 a}{g_0}.\alpha$ közel $\frac{1}{90000}$-del egyenlő. E szerint mindig

$$\frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n}(1-\alpha)^{-n} = \frac{1}{a^n}(1+n\alpha)$$

írható. Ily módon kapjuk a következő, U_0-tól ment egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\omega^2 a &= f\frac{M}{a^2}\alpha && -3f\frac{MK}{2a^4}(1+2\alpha),\\
g_0 + \omega^2 a &= f\frac{M}{a^2} && +3f\frac{MK}{2a^4}\\
g_{90} &= f\frac{M}{a^2}(1+2\alpha) && -6f\frac{MK}{2a^4}(1+4\alpha).
\end{aligned}$$

Ha ezen egyenleteket sorban $3+\alpha$; $1-\alpha$ és -1-gyel megszorozzuk és összeadjuk, mindig tekintettel lévén arra, hogy α^2 és $\omega^2 a.\alpha$ elhanyagolható, akkor jutunk a következő nevezetes egyenlethez:

$$\tfrac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0} = \alpha + \frac{g_{90} - g_0}{g_0},$$

a mely első felfedezőjétől a Clairaut-féle egyenlet nevét nyerte. A lapultság és az aequator és pólus közötti gyorsulásváltozás viszonya az aequatori gyorsuláshoz együttvéve ugyanannyi, mint az aequatori centrifugális és nehézségi gyorsulás viszonyának $2\frac{1}{2}$-szerese.

Ha az ingagyorsulás képletét

$$g = g_0 + (g_{90} - g_0) \sin^2 \varphi$$

alakban írjuk, akkor közvetlenül világos, hogy

$$g = g_0 + (\tfrac{5}{2} \omega^2 a - \alpha g_0) \sin^2 \varphi$$

lévén, az ingagyorsulás képletének egyik coefficienséből a lapultság számítható. A most levezetett képlet a Clairaut-féle második egyenlet nevét viseli. Két különböző geographiai szélesség alatt meghatározott gyorsulásból kiszámítható tehát g_0 és $\frac{5}{2}\omega^2 a - \alpha g_0$, és ezekből a lapultság maga. A helyi befolyások eliminálása céljából természetesen lehetőleg sok helyen eszközölt mérés a legkisebb négyzetek elmélete szerint dolgozandó fel. A már idézett Listing és Albrecht-féle gyorsulási képletből a lapultság értéke

$$\alpha = \frac{1}{288{\cdot}48} \text{ és } \alpha = \frac{1}{284{\cdot}9},$$

tehát mindkettő tetemesen nagyobb, mint a mely lapultság a fokmérésből következik, s egyszersmind közelebb állanak Newton elméleti értékéhez, mint a fokmérés eredménye.

Ha a számításokban megtartanók a másodrendű tagokat, akkor a teljesebb

$$\frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_0} (1 - \tfrac{1}{5}\alpha) = \alpha (1 + \alpha) + \frac{g_{90} - g_0}{g_0}$$

egyenlethez jutnánk, mely azonban gyakorlatilag nem ad pontosabb eredményt, mint az egyszerű levezetett egyenlet.

Ha az előbbi egyenletcsoport két első egyenletét sorban $+1$ és $1 + 2\alpha$-val szorozzuk, akkor

$$f \frac{M}{a^2} = \frac{\frac{3}{2} \omega^2 a + g_0 (1 + 2\alpha)}{1 + 3\alpha} \text{ vagy } f M = a^2 [\tfrac{3}{2} \omega^2 a + g_0 (1 - \alpha)],$$

minthogy az $1 + 3\alpha$-val való osztás $a - 3\alpha g_0$ tagon kívül csak másodrendű tagokat vezet be. Ha ellenben az első egyenletet —1-gyel, a másodikat α-val szorozzuk, akkor

$$\tfrac{3}{2} f \frac{MK}{a^4}(1+3\alpha) = g_0\alpha - \tfrac{1}{2}\omega^2 a, \text{ vagy } f\frac{MK}{2} = \frac{a^4}{3}(g_0\alpha - \tfrac{1}{2}\omega^2 a),$$

a hol az $(1+3\alpha)$-val való osztás teljesen befolyás nélküli marad. A Föld potentiálja tehát az eddig követelt pontosságig

$$U = f\frac{M}{r} + \frac{a^4 g_0}{3r^3}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right)(1 - 3\sin^2\varphi) + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$$

alakban írható, a hol

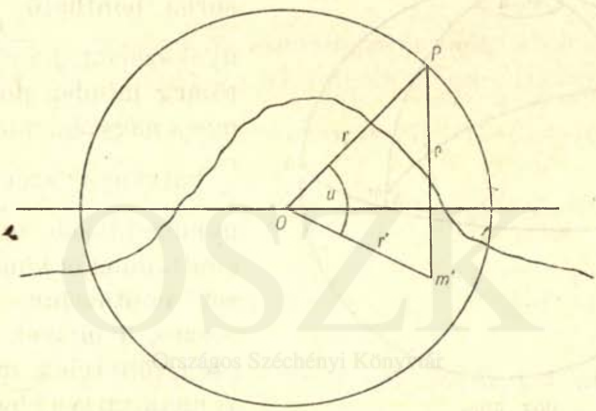
$$fM = a^2[\tfrac{3}{2}\omega^2 a + g_0(1-\alpha)].$$

A potentiál-kifejezés ez alakja magyarázza meg, hogy a Föld alakja a Hold mozgásából is vezethető le, és a második egyenlet adja a módot, a melynek segítségével a Föld tömege meghatározható, mihelyt az attractionális állandó, f, kisérleti úton meg van határozva.

A Föld alakját a felületén ható erőkkel összefüggésbe hozó egyenletet Clairaut vezette le 1740-ben Théorie de la figure de la Terre czímű művében azon feltevés alatt, hogy a Föld folyós sphaeroid volt; utána több tudós foglalkozott a fontos kérdéssel és mindegyik iparkodott az alapot képező hypothezisek számát lehetőleg apasztani. Az itt adott levezetést Bruns adta azon egyetlenegy feltevés alatt, hogy a végtelen sorkifejtésnek már harmadik tagjánál megállapodhatunk. De ezen feltevés sem szükséges; a további kifejtés mind pontosabb, de egyszersmind bonyolódottabb kifejezésekhez is vezet, melyekből, mint látni fogjuk, a Föld alakja egyesegyedül csupán ingamérésekből meghatározható.

A geographiai coordinátáktól függő kifejezések, melyek a potentiálban fellépnek, minden a nehézségre, a mágnességre, általában a távolság négyzetével visszásan ható erőkre vonatkozó kérdésekben nagy fontossággal bírnak, és különösen a nehézségnek és mágnességnek geologiai és morphographiai alkalmazásaiban ismét fordulnak elő. Ezekkel fogunk tehát még legalább annyira foglalkozni, hogy a dolog lényegében tiszta képünk legyen. Most vonzó test gyanánt nem a Földet, hanem tetszőleges tömeget, pl. egy hegyet választok, az eredmények azonban közvetlenül a Földre is alkalmazhatók. Ezenkívül a centrifugális erőtől, mely könnyű szerrel külön is tekintetbe vehető, egészen eltekintünk.

A tömeg egy belső pontján át — a mely számára egyszerűség kedveért a tömegközéppontot vagy valamely ehhez közel eső pontot választunk — fektessünk vízszintes síkot, melyre úgy a tömeget alkotó egyes pontoknak, mint a megfigyelési helynek fekvését h magasság, a azimuth és r radiusvector három meghatározó által vonatkoztatjuk. Ha a hegyet egyes m′ tömegpontokból állónak gondoljuk, r′, h′, a′ coordi-



206. ábra. Szabálytalan hegy vonzási potentiálja.

nátákkal és P pontban a tömegegységet r, a és h helyen tételezzük fel, akkor a potentiál tudvalevőleg

$$V = f \Sigma \frac{m'}{\rho},$$

ha ρ az m′P kölcsönös távolsága. Ez a 206. ábra alapján

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2\, rr' \cos u$$

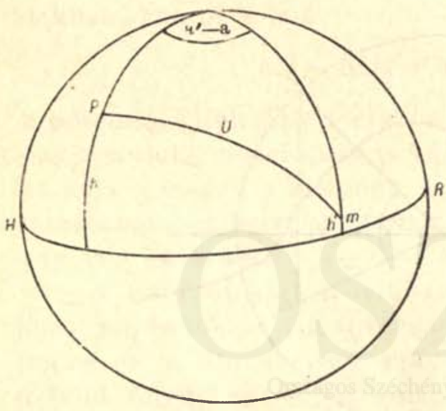
képletből számítható, a hol ismét u a két pont magassága és azimuthja által van adva. Ha ugyanis szemünket O pontban képzeljük (207. ábra) és az m′ és P pontokat az égre vetítjük, akkor a zenith és az m′, P pont között gömbi háromszöget kapunk, melynek két oldala P és m′ zenithtávolsága és harmadik oldala a két pont gömbi távolsága u. Áll tehát:

$$\cos u = \sin h' \sin h + \cos h' \cos h \cos (a' - a),$$

és itt is fontos azon megjegyzés, hogy a ρ távolság kifejezésében két lényegesen különböző jellegű mennyiség szerepel: r, h és a mindig ugyanaz marad, r′, h′, a′ pedig a vonzó tömeg térfogatán belül minden lehetséges értéket foglalja el. A potentiál kifejezése most már

$$V = f \Sigma m' [r^2 + r'^2 - 2 r r' (\sin h' \sin h + \cos h' \cos h \cos (a' - a)]^{-1/2}$$

és végtelen convergens sorba bontható $\frac{r}{r'}$ hatványai szerint, ha r′ az egész tömeg minden pontja számára nagyobb mint r, vagy $\frac{r'}{r}$ hatványai szerint, ha r′ mindig kisebb, mint r. Az adott tömeget könnyű szerrel bonthatjuk két oly részre, a melyek számára ezen föltételek mindig be vannak tartva; ha ugyanis a tömeg O pontja körül (206. ábra) a vonzott ponton átmenő gömbhéjat írunk le, akkor ez a tömeget egy belső és külső részre osztja; amabban a tömegrészecskék távolsága r′ az O ponttól nyilván mindig kisebbek vagy legfölebb egyenlők a P pontnak az O-tól való távolságával, emebben pedig a távolságok mindig nagyobbak, mint a gömb sugara. A belső tömegrészlet tehát



207. ábra.
Vonzó és vonzott pont közti gömbi távolság.

$$V_1 = f \Sigma \frac{m'}{r} \left[1 - 2 \frac{r'}{r} \cos u + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-1/2}, \quad \frac{r'}{r} < 1,$$

a külső ellenben

$$V_2 = f \Sigma \frac{m'}{r'} \left[1 - 2 \frac{r}{r'} \cos u + \frac{r^2}{r'^2} \right]^{-1/2}, \quad \frac{r}{r'} < 1$$

alakú potentiálkifejezést ad, és a kettő összege nyilván az egész tömeg potentiáljával egyenlő. Mindkét esetben tehát ugyanazon $(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)^{-1/2}$ kifejezésnek sorbabontásával van dolgunk, mely $\alpha<1$ lévén, convergens sort ad. Az α hatványai szerint haladó kifejtésnek u-tól függő coefficienseit gömbfüggvényeknek szokás nevezni, mert lényegesen egy gömbi háromszög darabjait tartalmazzák.

E gömbfüggvények kiszámítása elemi úton is történhetik, csakhogy elég körülményes. A felsőbb analyzis ellenben sokkal gyorsabban vezet czélhoz. A sorfejtés alakja:

$$(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)^{-1/2}=P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+..+P_n\alpha^n+..,$$

melyben P_n-et n-edrendű gömbfüggvénynek szokás nevezni. Eredménye pedig, minthogy a kifejezés binom-alakban is írható:

$$(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)^{-1/2}=[1-(2\alpha\cos u-\alpha^2)]^{-1/2}=1+\tfrac{1}{2}(2\cos u-\alpha^2)$$

$$+\frac{1.3}{2^2.2!}(2\alpha\cos u-\alpha^2)^2+\frac{1.3.5}{2^3.3!}(2\alpha\cos u-a^2)^3+$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}(2\alpha\cos u-\alpha^2)^4+..+\frac{1.3.5..(2i-1)}{2^i.i!}(2\alpha\cos u-\alpha^2)^i+..$$

Itt minden binom egymásra következő hatványa külön kiszámítható; a kezdő tagok:

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos u)^{-1/2}=1+\alpha\cos u+\alpha^2(\tfrac{3}{2}\cos^2 u-\tfrac{1}{2})+$$

$$+\alpha^3(\tfrac{5}{2}\cos^3 u-\tfrac{3}{2}\cos u)+\alpha^4(\tfrac{35}{8}\cos^4 u-\tfrac{15}{4}\cos^2 u+\tfrac{3}{8})+$$

$$+\alpha^5(\tfrac{63}{8}\cos^5 u-\tfrac{35}{4}\cos^3 u+\tfrac{15}{8}\cos u)+..$$

és ennek folytán:

$$P_0=1,\ P_1=\cos u;\ P_2=\tfrac{3}{2}\cos^2 u-\tfrac{1}{2};\ P_3=\tfrac{5}{2}\cos^3 u-\tfrac{3}{2}\cos u;$$

$$P_4=\tfrac{35}{8}\cos^4 u-\tfrac{15}{4}\cos^2 u+\tfrac{3}{8};\ P_5=\tfrac{63}{8}\cos^5 u-\tfrac{35}{4}\cos^3 u+\tfrac{15}{8}\cos u;..$$

Az n-edrendű gömbfüggvény tehát $\cos^n u$ hatványával kezdődik, n-nel együtt csak páros vagy páratlan kitevőkkel bír és váltakozó előjeleket tartalmaz. Mindenütt még u helyébe az előbb talált

$$\cos u=\sin h'\sin h+\cos h'\cos h\cos(a'-a)$$

teendő, úgy hogy az első három gömbfüggvény teljes alakja:

$$P_0 = 1\,;\ P_1 = \sin h' \sin h + \cos h' \cos h \cos(a' - a)\,;$$

$$P_2 = (\tfrac{3}{2}\sin^2 h' - \tfrac{1}{2})(\tfrac{3}{2}\sin^2 h - \tfrac{1}{2}) + 3\sin h' \cos h' \sin h \cos h \cos(a' - a)$$
$$+ \tfrac{3}{4}\cos^2 h' \cos^2 h \cos 2(a' - a)\,;$$

$$P_3 = (\tfrac{5}{2}\sin^3 h' - \tfrac{3}{2}\sin h')(\tfrac{5}{2}\sin^3 h - \tfrac{3}{2}\sin h) +$$
$$+ \tfrac{1}{6}(\tfrac{15}{2}\sin^2 h' - \tfrac{3}{2})(\tfrac{15}{2}\sin^2 h - \tfrac{3}{2})\cos h' \cos h \cos(a' - a) +$$
$$+ \tfrac{15}{4}\sin^2 h' \cos^2 h' \sin^2 h \cos^2 h \cos 2(a' - a) +$$
$$+ \tfrac{5}{8}\cos^3 h' \cos^3 h \cos 3(a' - a),$$

melyek hovatovább bonyolódottabbakká válnak. Ennélfogva czélszerű lesz a gömbfüggvényeket közvetlenül, nem pedig az eddigi hosszadalmas úton keresni. Volt:

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos u)^{-1/2} = \sum_0^{\infty}{}_i \frac{1.3.5..(2i-1)}{2^i.\,i\,!}(2\alpha)^i\left(\cos u - \frac{\alpha}{2}\right)^i,$$

a hol egymásután $i = 0, 1, 2..$ veendő, és az egyes eredmények összegezendők. Továbbá a Newton-féle binomtétel szerint:

$$\left(\cos u - \frac{\alpha}{2}\right)^i = \sum_0^{i}{}_k (-1)^k \frac{i(i-1)(i-2)..(i-k+1)}{k\,!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \cos^{i-k} u,$$

mely kifejezésben $k = 0, 1, 2..i$ veendő, és az egyes eredmények szintén összegezendők. Az utóbbi egyenletet az előbbibe vive, lesz:

$$(1 - 2\alpha\cos u + \alpha^2)^{-1/2} =$$
$$= \sum_0^{\infty}{}_i \sum_0^{i}{}_k (-1)^k 2^{i-k} \frac{1.3.5..(2i-1)\,i(i-1)..(i-k+1)}{2^i.\,i\,!\,k\,!}\alpha^{i+k}\cos^{i-k} u,$$

és azt jelenti, hogy sorban $i = 0.1, 2, 3, 4..$ veendő és ugyanakkor k: 0-tól i-nek éppen szóban forgó értékéig veendő.

Ámde k általában véve kisebb lévén, mint i:

$$i\,! = 1.2.3..(i-k)\,(i-k+1)..\,(i-1)\,i$$

alakban is írható, és ezért végre

$$(1 - 2\alpha\cos u + \alpha^2)^{-1/2} =$$
$$= \sum_0^{\infty}{}_i \sum_0^{i}{}_k (-1)^k 2^{i-k} \frac{1.3.5..(2i-1)}{2^i.1.2..k.1.2..(i-k)}\alpha^{i+k}\cos^{i-k} u.$$

Ha ez egyenletben i és k-t úgy választjuk, hogy összegük $i+k=n$ legyen, akkor nyilván α^n coefficiensét, tehát P_n n-edrendű gömbfüggvényt nyerjük. i és k mint binomok exponensei csak egész positiv számok lehetnek. Ennélfogva

$$P_n = \sum_{i+k=n} (-1)^k 2^{i-k} \frac{1.3.5..(2i-1)}{2^i.1.2..k.1.2..(i-k)} \cos^{i-k} u,$$

a hol i és k helyébe minden positiv szám veendő, a 0-t befoglalva, melyek összege n-et ad; kifejtve tehát:

$$P_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{1.2..n} \cos^n u - \frac{1.3.5..(2n-3)}{1.2.1.2.3..(n-2)} \cos^{n-2} u$$

$$+ \frac{1.3.5..(2n-5)}{1.2.2^2.1.2.3..(n-4)} \cos^{n-4} u + ..$$

vagy egyszerűbben:

$$P_n = 2^n \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..(2n)} [\cos^n u - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} u$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} u - ..],$$

mely sor most már nagyon könnyen folytatható. cos u hatványa minden következő tagban 2 egységgel fogy, coefficiense pedig számlálóban és nevezőben két további faktort nyer. Azután még $\cos u = \sin h' \sin h + \cos h' \cos h \cos (a'-a)$ teendő, a hol ismét czélszerű lesz $\cos^n (a'-a)$ úgy felbontani, hogy ne a két azimuth külömbsége, hanem az azimuthok egyenként szerepeljenek. A nélkül, hogy szükségünk volna a helyettesítést valóban végeznünk, könnyen belátjuk, hogy a P_n függvény most oly alkotórészre bomlott, melyek mindegyike h′ és a′, meg h és a trigonometriai függvényeinek szorzatából áll: számfaktoroktól eltekintve ugyanis minden tag

$$\sin^p h' \cos^q h' \cos r a'. \sin^p h \cos^q h \cos r a \text{ és}$$

$$\sin^p h' \cos^q h' \sin r a'. \sin^p h \cos^q h \sin r a$$

alakba hozható, a hol p, q, r egész számokat jelentenek. Ez alakban tehát az m′ változó és P állandó pontra vonatkozó coordináták egymástól el vannak különítve.

Tekintettel $(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)^{-1/2}=P_0+\alpha P_1+\alpha^2 P_2+\ldots$ sorbafejtésére, a potentiál most a következő alakban írható:

$$V_1=f\Sigma\frac{m'}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n \text{ és } V_2=f\Sigma\frac{m'}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n,$$

a mennyiben a belső és külső tömegek számára $\frac{r'}{r}=\alpha$, illetve $\frac{r}{r'}=\alpha$ teendő. Egyszerű számfaktoroktól eltekintve, melyeket c_n és c'_n-nel jelölünk, ha P_n értékét helyettesítve gondoljuk, a V_1 potentiál a következő

$$V_1=c_n f\Sigma m' r'^n \sin^p h' \cos^q h' \cos s a' . \frac{1}{r^{n+1}} \sin^p h \cos^q h \cos s a$$

$$+ c'_n f\Sigma m' r'^n \sin^p h' \cos^q h' \sin s a' . \frac{1}{r^{n+1}} \sin^p h \cos^q h \sin s a$$

és hasonlóképen V_2, ha egymással r' és r elcseréltetik. De ha ezen összeget a vonzó tömeg minden egyes pontjára képezzük, akkor az állandó $\frac{1}{r^{n+1}}\sin^p h\cos^q h\cos s a$ és $\frac{1}{r^{n+1}}\sin^p h\cos^q h\sin s a$ és hasonlóképen a V_2 kifejezésben az állandó $r^n\sin^p h\cos^q h\cos s a$ és $r^n\sin^p h\cos^q h\sin s a$ az összegjel elé vehető, úgy hogy e függvényeknek V_1-ben coefficiense lesz:

$$c_n\Sigma m' r'^n \sin^p h' \cos^q h' \cos s a' \text{ és } c'_n\Sigma m' r'^n \sin^p h' \cos^q h' \sin s a$$

és hasonlóképen V_2-ben:

$$c_n\Sigma\frac{m'}{r'^{n+1}}\sin^p h'\cos^q h'\cos s a' \text{ és } c'_n\Sigma\frac{m'}{r'^{n+1}}\sin^p h'\cos^q h'\sin s a'.$$

Mindez összegek nyilván csak a vonzó tömeg alakjától, méreteitől és tömegeloszlásától függnek, sőt ki is volnának számíthatók, ha a tömeg geometriai alakját és sürűségét pontról pontra egyenletben ki tudnók fejezni. Egynéhány egyszerű geometriai homogén test számára a számítás ugyan keresztülvihető, de geographiai alkalmazásokban ez összegek mindig az illető tömegre jellemző, ismeretlen állandók maradnak, melyek külön mérések által utólag meghatározhatók. Így számítva folytatólagosan, a következő eredményekhez jutunk:

$$f\Sigma\frac{m'}{r}P_0=\frac{f}{r}\Sigma m'=f\frac{M}{r},$$

a hol M a hegynek egész tömegét jelenti. A testnek a gömbön belül fekvő tömege tehát, a potentiál első tagját véve, ugyanazon hatást gyakorolja, mint egy vele egyenlő tömegű gömb. A második tag

$$f\,\Sigma\frac{m'\,r'}{r^2}\,[\sin h'\sin h+\cos h'\cos h\cos a'\cos a+\cos h'\cos h\sin a'\sin a]$$

s ez a mondottak folytán a következő alakban írható:

$$f\frac{\sin h}{r^2}\,\Sigma m'\,r'\sin h'+f\frac{\cos h\cos a}{r^2}\,\Sigma m'\,r'\cos h'\cos a'$$

$$+f\frac{\cos h\sin a}{r^2}\,\Sigma m'\,r'\cos h'\sin a'.$$

Ha a tömeg jellemző állandóit sorban

$$f\,\Sigma m'r'\sin h'=a_0^{(1)};\; f\,\Sigma m'r'\cos h'\cos a'=c_1^{(1)};$$

$$f\,\Sigma m'r'\cos h'\sin a'=s_1^{(1)}$$

írjuk, akkor a második tag

$$\frac{1}{r^2}\,[a_0^{(1)}\sin h+c_1^{(1)}\cos h\cos a+s_1^{(1)}\cos h\sin a]$$

alakot ölti és í. t.

Végül tehát a belső tömeg számára a következő potentiálkifejezést kapjuk:

$$V_1=f\frac{M}{r}+\frac{1}{r^2}\,[a_0^{(1)}\sin h+c_1^{(1)}\cos h\cos a+s_1^{(1)}\cos h\sin a]+$$

$$+\frac{1}{r^3}\,[a_0^{(2)}(\sin^2 h-\tfrac{1}{3})+c_1^{(2)}\sin h\cos h\cos a+s_1^{(2)}\sin h\cos h\sin a+$$

$$+c_2^{(2)}\cos^2 h\cos 2a+s_2^{(2)}\cos^2 h\sin 2a]+$$

$$+\frac{1}{r^4}\,[a_0^{(3)}\sin h(\sin^2 h-\tfrac{3}{5})+c_1^{(3)}\cos h(\sin^2 h-\tfrac{1}{5})\cos a+$$

$$+s_1^{(3)}\cos h\,(\sin^2 h-\tfrac{1}{5})\sin a+c_2^{(3)}\sin h\cos^2 h\cos 2a+$$

$$+s_2^{(3)}\sin h\cos^2 h\sin 2a+c_3^{(3)}\cos^3 h\cos 3a+s_3^{(3)}\cos^3 h\sin 3a]+$$

$$+\frac{1}{r^5}\,[a_0^{(4}\,(\sin^4 h-\tfrac{6}{7}\sin^2 h+\tfrac{3}{35})+c_1^{(4)}\cos h\,(\sin^3 h-\tfrac{3}{7}\sin h)\cos a+$$

$$+ s_1^{(4)} \cos h (\sin^3 h - \tfrac{3}{7} \sin h) \sin a + c_2^{(4)} \cos^2 h (\sin^2 h - \tfrac{1}{7}) \cos 2a +$$
$$+ s_2^{(4)} \cos^2 h (\sin^2 h - \tfrac{1}{7}) \sin 2a + c_3^{(4)} \sin h \cos^3 h \cos 3a +$$
$$+ s_3^{(4)} \sin h \cos^3 h \sin 3a + c_4^{(4)} \cos^4 h \cos 4a + s_4^{(4)} \cos^4 h \sin 4a] + ..$$

és teljesen hasonlóképen

$$V_2 = \alpha_0^{(0)} + r [\alpha_0^{(1)} \sin h + \gamma_0^{(1)} \cos h \cos a + \sigma_0^{(1)} \cos h \sin a] +$$
$$+ r^2 [\alpha_0^{(2)} (\sin^2 h - \tfrac{1}{3}) + \gamma_1^{(2)} \sin h \cos h \cos a + \sigma_1^{(2)} \sin h \cos h \sin a +$$
$$\gamma_2^{(2)} \cos^2 h \cos 2a + \sigma_2^{(2)} \cos^2 h \sin 2a] + ..$$

Látnivaló, hogy a két kifejezés trigonometriai függvényei teljesen azonosak, csupán a coefficiensek és a távolságok hatványai mások. Az azimuthoktól független coefficiensek a és α, azok cosinusát tartalmazó coefficiensek c és γ, a sinusokat tartalmazók pedig s és σ-val vannak jelölve. A felső index r hatványára, az alsó az azimuth sokszorosára vonatkozik. Az első sorban, mely r fogyó hatványai szerint halad, az első tag 1, a második 3, és minden következő tag 2 coefficienssel többet tartalmaz, mint a megelőző; $\frac{1}{r^i}$ coefficiense tehát $2i-1$ ismeretlen számadatot tartalmaz. A második sorban, mely r növekedő hatványai szerint halad, r^k coefficiense $(2k+1)$ ismeretlen számot foglal magában, úgy hogy a két kifejezés összegében, ha $\frac{1}{r^i}$ és r^k tagokig megyünk, összesen $i^2 + (k+1)^2$ ismeretlen coefficiens foglaltatik; ennyi egymástól független megfigyelésre is van szükségünk, hogy e coefficiensek számértékét meghatározhassuk.

A levezetett képlet közvetlenül a Föld vonzási potentiálját is adja, ha h magasság helyébe mindenütt a geographiai szélességet, a azimuth helyébe a geographiai hosszúságot írjuk. A V_2 kifejezésnek *ez* esetben minden coefficiense 0-nak vehető, mert a külső tömegek a belsőkhez képest elenyészően kicsinyek, és az $a_0^{(1)}$, $c_1^{(1)}$, $s_1^{(1)}$, $c_1^{(2)}$, $s_1^{(2)}$, és $s_2^{(2)}$ coefficiensek szintén 0, ha a coordinátarendszer kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába helyezzük és tengelyeit a főtehetetlenségi tengelyekkel ejtjük össze.

A coefficiensek meghatározására vagy a közvetlen képletet használhatjuk föl, a mennyiben adott fekvésű pontokban a potentiált mérjük, vagy pedig levezetjük belőle előbb az erő egyenletét, melynek megmérése által szintén ugyanazon coefficiensek adódnak. A Föld esetében legczélszerűbb lesz természetesen lehetőleg sok ponton, melyek symmetrikusan oszlanak el felületén, meghatározni az ingával a gyorsulást, és ezekből számítjuk a coefficienseket. A gyorsulás egyenlete azután:

$$g = f\frac{M}{r^2} + \frac{2}{r^3}[a_0^{(1)}\sin h + c_1^{(1)}\cos h\cos a + s_1^{(1)}\cos h\sin a] +$$

$$+ \frac{3}{r^4}[a_0^{(2)}(\sin^2 h - \tfrac{1}{3}) + c_1^{(2)}\sin h\cos h\cos a +$$

$$+ s_1^{(2)}\sin h\cos h\sin a + c_2^{(2)}\cos^2 h\cos 2a + s_1^{(2)}\cos^2 h\sin 2a] + \ldots$$

és minden további, h és a geographiai szélesség és hosszúság alatt lemért gyorsulás egyenletet szolgáltat, melyből a radiusvector kiszámítható. Ezen egyenlet tehát tényleg a Föld alakjának pontonkénti meghatározására alkalmas. A geographiai coordinátákat csillagászati mérésekből nyerjük, a radiusvectort pedig, nem mint eddig, azáltal, hogy a Föld számára valamely geometriai alakot előzetesen feltételezünk, hanem tisztán mechanikai úton, feltevés nélkül, a nehézségi erőből. Természetes, hogy ezen egyenlethez, ha a Földre vonatkoztatjuk, még a centrifugális erő gyorsulása hozzáteendő.

A coefficiensek gyakorlati meghatározásáról szó lehet, ha majd a nehézségi erő változásairól szólottunk; a morphometriában e pontra is kiterjeszkedem még. Itt még csak azon megjegyzés, hogy adott megfigyelésekből tetszésszerinti számú coefficiens aránylag könnyen és közvetlenül számítható, a nélkül, hogy a megtett megfigyelések számával egyenlő számú egyenletrendszert oldanánk meg ugyanannyi ismeretlennel. A levezetés elemi úton nem egykönnyen eszközölhető, s így inkább a gondolatmenet megjelölésével a kész eredményeket adom.

Ki lehet ugyanis mutatni, hogy minden két független változótól függő mennyiséget, pl. a gyorsulást, mely a geographiai szélességgel és hosszúsággal más-más értéket vesz fel, gömbfüggvények szerint haladó convergens sorba bontható, még pedig csak egyetlenegy módon. Legyen pl. a változó, melyet ily módon ily sorba akarunk bontani, maga a potentiál, melyet most teljesebben U_{ha}-val jelölünk, annak a megjelölése kedvéért, hogy U értéke h-tól és a-tól is függ. Legyen továbbá:

$$\overset{(n)}{\underset{i}{f}}(\sin h) = \sin^{n-i} h - \frac{(n-i)(n-i-1)}{2(2n-1)} \sin^{n-i-2} h +$$

$$+ \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \sin^{n-i-4} h - ..$$

$$+ (-1)^k \frac{(n-i)(n-i-1)\dots(n-i-2k+1)}{2.4..(2k)(2k-1)..(2n-2k+1)} \sin^{n-i-2k} h + ..$$

egy állandó számfaktortól eltekintve az (n—i)-edrendű gömbfüggvény, akkor

$$a_0^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi} \left(\frac{1.3..(2n-1)}{2.4..(2n)} \right)^2 \int_0^\pi \cos h \, dh \int_0^{2\pi} U_{ha} f_0^{(n)}(\sin h) \, da$$

$$c_i^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{[1.3..(2n-1).n(n-1)..(n-i+1)]^2}{(n-i+1)..(n+i)[2.4..(2n)]^2} \int_0^\pi dh \cos^{i+1} h \int_0^{2\pi} U_{ha} f_i^{(n)} \cos i a \, da$$

$$s_i^{(n)} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{[1.3..(2n-1).n(n-1)..(n-i+1)]^2}{(n-i+1)..(n+i)[2.4..(2n)]^2} \int_0^\pi dh \cos^{i+1} h \int_0^{2\pi} U_{ha} f_i^{(n)}(\sin h) \sin i a \, da.$$

Ezen egyenletek sorban szolgáltatják a potentiálkifejtés coefficienseit, ha U_{ha} helyébe mindig azon megfigyelt értéket teszszük, mely h a geographiai coordinátákkal bíró helyen érvényes. A számítás elég nehézkes, és egyszerűbben csak akkor vihető keresztül, ha a megfigyelések a parallelkörök és meridiánok mentén egyenletesen oszlanak el. Különben mindig könnyen végezhető mechanikai úton, szerkesztés és a planimeterrel való területmérés által, miről alkalmas helyen még szó lesz.

A gömbfüggvényekre való fejtés különben hasonló problema, mint valamely függvénynek Fourier-féle sorbafejtése, mely a geographiai gyakorlatban elég sűrűn fordul elő.

XVII. FEJEZET.

A Föld tömege és sürűsége.

Minden módszer, melynek segítségével az attractionális állandó meghatározható, egyszersmind a Földnek tömegét is szolgáltatja. Ugyanis találtuk

$$fM = a^2 g_0 \left[\tfrac{3}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0} + 1 - \alpha\right]$$

vagy gömb alakú nyugvó Föld számára közelítésben:

$$fM = a^2 g_0.$$

mely egyenlet szerint az fM szorzat ismeretes, ha ismerjük a nehézségi gyorsulás földfelületi értékét és a Föld aequatori sugarát. M a Föld tömegét jelenti és tüstént ismeretes, mihelyt az f meg van mérve. Minthogy a Föld tömege számára azonban óriási számot kapunk, szokásosabb a Föld középsürűségét meghatározni, azaz azon viszonyt, mely a Föld s vele egyenlő térfogatú víz tömege között áll fenn. Ha e közepes sürűséget s-sel jelöljük, lesz a sugarú gömb számára $M = \frac{4}{3}\pi a^3 s$, és ennélfogva

$$\tfrac{4}{3}\pi f a s = g_0 \left[1 - \alpha + \tfrac{3}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right],$$

a hol közelítésben ismét az egész jobboldal helyébe egyszerűen g_0 írható. Ha azonban a Földet forgási ellipsoidnak tekintjük, akkor tömege

$$M = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b s = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \sqrt{1 - e^2}\, s = \tfrac{4}{3}\pi a^3 (1 - \alpha) s$$

és α^2 elhanyagolásával az előbbi egyenlet

$$\tfrac{4}{3}\pi f a (1 - \alpha) s = g_0 \left[1 - \alpha + \tfrac{3}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right]$$

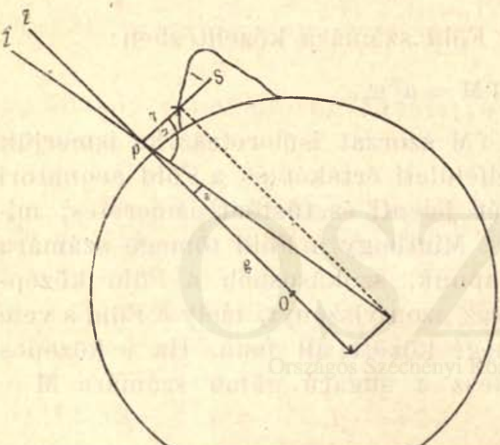
vagy a lapultság négyzetével egyenrangú mennyiségeket elhanyagolva:

$$\tfrac{4}{3}\pi f a s = g_0 \left(1 + \tfrac{3}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}\right).$$

A meghatározás gondolatmenete nyilván egyszerű; ha ismerjük ugyanis azon viszonyt, melyben valamely adott tömeg vonzása a nehézségi gyorsuláshoz áll, akkor a Föld s az adott tömeg méreteinek tekintetbevételével meghatározható egyenesen a két test tömegviszonya is.

A számos, eddig különböző sikerrel alkalmazásba jött módszerek közül a fontosabbakat a következőkben ismertetjük.

A hegyvonzás módszerét Maskelyne és Hutton alkalmazták először a Shehallien hegyen, mely Skócziában meglehetős szabályos alakkal isoláltan emelkedik a síkságból s annyira homogen összetételű, hogy tömege eléggé közel kiszámítható. Ha a hegy déli oldalán (208. ábra) függőónt (vagy libellát) állítunk fel, akkor ennek meghosszabbítása a Z′ zenith-pontot adja, holott a Föld geometriai alakja miatt, azaz a hegy jelenlététől teljesen eltekintve, a zenithnek Z-ben kellene lennie. — Más szóval, a függőón a hegy vonzása miatt a hegy felé hajlik, és a csillagászati zenithet a geometriainál túlságosan délre jelöli ki; ellenkezőképen a hegy északi oldalán. Ha tehát a hegy mindkét oldalán a meridián mentén ugyanazon csillagnak egyidejű zenithtávolságát mérjük, akkor ez nagyobbnak adódik, mint a két megfigyelő távolsága által indokolt volna. Ha e távolság d, akkor ennek megfelelő középponti szöglet:



208. ábra. A Föld tömegének meghatározása.

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \frac{d}{r},$$

s ha a két zenithtávolság külömbsége a mérések szerint φ', akkor $\varphi' - \varphi$ a hegy két oldalán tapasztalt függőónelhajlások összege. Ha a megfigyelő a hegy S súlypontjától mindkét esetben ρ egyenlő távolságra állt, akkor minden oldalra ez eltérés fele esik. Ha a hegy tömegét m-mel jelöljük, és feltételezhetjük, hogy úgy hat, mintha egész tömege a súlypontban egyesítve volna, akkor a hegy okozta gyorsulás

$$\gamma = f\frac{m}{\rho^2},$$

míg a Föld $g = f\frac{M}{r^2}$ gyorsulása közel annak középpontján halad át; a függőón természetesen a két gyorsulásból képezett parallelegramm átlójába áll, ily módon az ε függőónelhajlást képezve. Ha még a függőón és a hegy súlypontjának összekötő egyenese α szöglettel hajlik a függőón felé, akkor

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}, \text{ vagy } \frac{m}{M}\frac{r^2}{\rho^2} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha},$$

a miből ρ lemérése után a hegy ismert tömegéből M számítható.

E legelső megfigyelések a Föld közepes sürűsége számára 4·7-et adtak; James később ismételte a mérést pontosabb eszközökkel és a hegy gondosabb tanulmányozása után középsürűségül 5·32-et nyert.

A módszer hibája, hogy a hegy tömege pontosan soha nem mérhető meg, és hogy éppen nem áll az, mintha az egész tömeg vonzása egyetlen egy pont hatása által volna helyettesíthető. Peters ezért hegy alkalmazása helyett a Cheops-pyramis felhasználását javasolta, de itt is ugyanazon ellenvetések tehetők. Sokkal jobb tehát Struve terve, a ki ama függőóneltérést kivánja megmérni, melyet valamely alkalmas tengeröböl vagy csatorna mellett az áradás víztömege hoz létre. Ha az öböl vagy csatorna alakja és mérete kellőképen ismeretes, akkor e víztömeg térfogata elég pontosan határozható meg, minősége pedig ugyancsak homogen és ismeretes.

Egészen hasonló értelemben felhasználható valamely tömeg vonzásának megállapítására az inga is. Legyen a 209. ábrában h valamely akna mélysége, melynek fenekén az ingamérés G gyorsulást adott, míg a felületi gyorsulás g volt. Az utóbbi származik egy $\rho = r - h$ sugarú gömbnek és egy h vastagságú felületi gömbhéjnak vonzásából; az utóbbi sürűsége s_1, a belső gömb középsürűsége pedig tekintettel h kicsinységére a Föld középsürűségével vehető azonosnak. Minthogy tudvalevőleg a G gyorsulás létrejöttében nem szerepel a h vastagságú gömbhéj, áll:

$$G = \tfrac{4}{3}\pi f \rho s,$$

míg a felületi gyorsulás

$$g = \tfrac{4}{3}\pi f \frac{[(\rho+h)^3 - \rho^3]\, s_1 + \rho^3 s}{(\rho+h)^2} = \tfrac{4}{3}\pi f \left[(\rho+h) s_1 + \frac{\rho^3}{(\rho+h)^2}(s - s_1)\right]$$

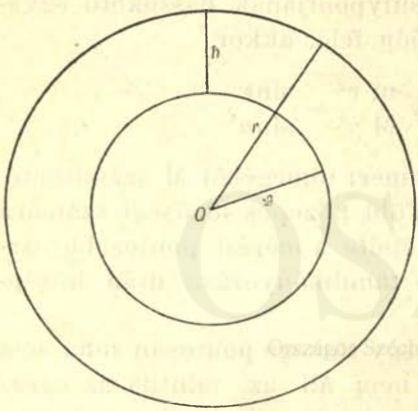
alakban írható. Minthogy azonban $\frac{h}{\rho}$ kis tört, melynek második hatványa az első mellett már bátran elhanyagolható, írhatunk továbbá:

$$g = \tfrac{4}{3}\pi f\, [(\rho - 2h) s + 3h s_1],$$

és ezért

$$\frac{g}{G} = \frac{1}{\rho}\left[\rho - 2h + 3h\frac{s_1}{s}\right] \quad \text{vagy}$$

$$\frac{s_1}{s} = \tfrac{2}{3} - \frac{\rho}{3h}\left(1 - \frac{g}{G}\right).$$



209. ábra. Ingagyorsulás aknákban.

Az akna h mélységével ismeretes ρ is, és a felületi kéreg petrographiai vizsgálata szolgáltatja s_1-et is. Airy kisérlette meg először 1826-ban e módszert, de csak 28 év mulva ért el némi sikert. A Newcastle melletti Harton szénbányában észlelt, és a felületi réteg sürűségét $s_1 = 2{\cdot}5$-nek véve, talált $s = 6{\cdot}6$.

Sterneck ezredes legújabb időben csehországi bányában is tett hasonló megfigyeléseket, de jelentős eredmény közel fekvő okoknál fogva ezen módszertől sem várható.

Hasonlóképen hegy tetején is végezhetünk a Föld sürűségének meghatározására ingamegfigyeléseket. Ha a hegy tetején a gyorsulás — eltekintve a hegy jelenlététől — g, akkor a hegy befolyása alatt g′ leend. Legyen a hegy súlypontjának távolsága az ingától ρ, és működjék úgy, mintha egész tömege a súlypontjában volna összpontositva, akkor nyilván:

$$g' - g = f\frac{m}{\rho^2},\ \text{míg}\ g = f\frac{M}{r^2}$$

tehető; a két érték viszonyából meghatározható ismét $\frac{M}{m}$ viszonya is. A hegy csúcsán uralkodó gyorsulást, g-t könnyen meg lehet állapítani vagy a síkságban tényleg végzett megfigyelésből és a hegy magasságából, vagy a gyorsulás elméleti képletéből a hegycsúcs tengermagasságának tekintetbevételével. Plana és Carlini mérései a Mont-Cenis-en a Föld középsürűségét $s = 4{\cdot}837$-nek adták, Mendenhall kisérlete a Fusiyama vulkánon, mely 138^0 nyílással bíró, a síkságból önállóan kiemelkedő kúp, $s = 5{\cdot}77$ értékhez vezetett.

Egészen hasonló azon eljárás, melyet Wilsing a potsdami csillagdán követett; ő is ingával kisérletezett és megállapította annak lengési idejét, egyszer, midőn az inga alatt meghatározott tömegű ólomgolyó feküdt, majd midőn e tömeg el volt távolítva. Ha az inga üresen leng, akkor lengési ideje:

$$T^2 = \frac{\pi^2 K}{M s g}$$

által van adva; az ólomgömb hozzátétele után a különbeni gyorsuláshoz még az ólomgömb vonzásának

$$\gamma = \tfrac{4}{3}\pi f \frac{a^3 \sigma}{\rho^2}$$

gyorsulása is járul hozzá, a hol a a gömb sugarát, σ sürűséget, ρ pedig középpontjának az inga súlypontjától való távolságát jelenti. A megváltozott lengési idő most már

$$T'^2 = \frac{\pi^2 K}{M s (g + \gamma)},$$

mely két egyenletből

$$\tfrac{4}{3}\pi f \frac{a^3 \sigma}{\rho^2} = \frac{\pi^2 K}{M s}\left(\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}\right)$$

következik. Ebben $\frac{\pi^2 K}{M s} = gT^2$, és mivel T' és T nagyon kevéssé különböző:

$$\tfrac{4}{3}\pi f \frac{a^3 \sigma}{\rho^2} = g\frac{(T' - T)2T}{T^2},$$

vagy végre g-nek a Föld sürűsége által való kifejezése után:

$$s = \frac{a^3 \sigma}{2 r \rho^2} \frac{T}{T' - T}.$$

A módszernek hiánya, hogy a lengési idők különbsége nagyon kicsiny, és ezért megbízhatóan nem figyelhető meg. Ha a legkedvezőbb esetet vennők is, hogy t. i. az inga az ólomgömb felületén leng, és közel 12 000 kilogrammos gömböt választunk is, a lengési idők különbsége csak $\frac{1}{10\,000\,000}$ másodperczet tesz ki.

Valamivel előnyösebb, de ismét más hibában sínylő JOLLY módszere, mely a mérleget használja fel. Minthogy a mérlegelési hibát 0·001 mgr-ra sikerült redukálni, JOLLY a két csésze alá 20—25 m hosszú sodronyon két újabb csészét függeszt, és valamely tömeget először a felső, majd az alsó csészében egyensúlyoz. Végre még a csésze alá nagytömegű ólomdarabot helyez, mire újra mérlegel. Ha a felső csészében kiegyensúlyozott tömeget az alsóba teszszük át, akkor p_1 súlynyereséget fogunk kapni, mert a gyorsulás, tehát maga a nehézség is, a Föld középpontjához való közeledés alkalmával nő. Az ólomgolyó vonzó hatása még egy újabb p_2 súlyszaporodást hoz létre, és nyilván $p_2 - p_1$ az ólomgolyó vonzása miatti súlyszaporodása a felső csészében egyensúlyban volt tömegnek; p_1 ugyanis tisztán a tömeg mélyebb helyzete által jött létre.

Legyen most az ólomgömb sugara a, sürűsége σ és középpontjának távolsága az alsó csészébe helyezett gömb alakú tömeg középpontjától ρ, akkor a gyorsulás

$$\gamma = \tfrac{4}{3} \pi f \frac{a^3 \sigma}{\rho^2},$$

míg a Föld gyorsulása

$$g = \tfrac{4}{3} \pi f r s.$$

E két gyorsulás azonban sorban arányos illetve $p_2 - p_1$ és p_1 súlyszaporodással, úgy hogy

$$\frac{a^3 \sigma}{\rho^2 r s} = \frac{p_2 - p_1}{p_1}, \text{ a miből: } s = \frac{p_1}{p_2 - p_1} \frac{a^3 \sigma}{\rho^2 r}.$$

Hogy a levegő felhajtó erejét külön tekintetbe ne kelljen venni, az egyensúlyozandó tömegeken kívül velük egyenlő térfogatú üres minták is szerepelnek, úgy, hogy a minta a felső csészében van, ha a tömeg az alsóban fekszik. A módszer hibája, hogy a sodrony hosszú terén belül hőmérsékletváltozások és légáramlások teljesen ki nem kerülhetők, és hogy minden egyes mérés között a mérleg rúdja felfüggesztendő. Az újabb lebocsájtás után azonban soha nem lehetünk biztosak, hogy az él hengeres keresztmetszetének ugyanazon palástvonalára fekszik-e, azaz, hogy az újabb mérlegelésnél a tengelye a mérlegnek változatlan maradt-e. Ily subtilis méréseknél természetesen a legkisebb eltérés is érezhető hibákat ad. Ennek megfelelőleg Jolly hosszú észlelési sorozatában bizony nagyon eltérő eredmények is fordulnak elő; általános közepe azonban $s = 5·692$. Poynting Manchesterben ugyanezen eljárással oly értékeket vezet le, melyek 4·415 és 7·172 között ingadoznak.

Mindezen módszereknek közös hibája, hogy oly erőket vagy gyorsulásokat mérnek le, melyek a nehézségi gyorsulás irányába esnek; egy roppant nagy erő mellett tehát igen kis változást iparkodnak megállapítani, a mi pontosan nem lehetséges; a gyorsulás nagy értéke a mellette fellépő kis változást majdnem teljesen elnyomja.

Ezen hibától teljesen ment a skót Mitchell által a mult század vége felé fölfedezett csavarási mérleg, vagy csavarási inga, mely eredetileg a napsugarak taszító hatásának kimutatására szolgált volna. Először alkalmazta tudományos kutatásokra Coulomb — innen a Coulomb-féle mérleg nevét is viseli — a ki a mágneses és elektromos erők távolbahatását állapította meg vele, és a Föld sürűségének meghatározására használta legelőször Cavendish.

A mérleg lényegileg finom sodronyra függesztett rúdból áll, melynek két végén alkalmas tömegek — legjobban gömbök — vannak erősítve. Az egész szerkezet természetesen hőmérsékleti változások és légáramlások ellen jól védő szekrénybe van zárva. Itt mindjárt azon előnyös alakját írom le, melyet e rendkívül érzékeny szerkezetnek báró Eötvös Loránd adott.

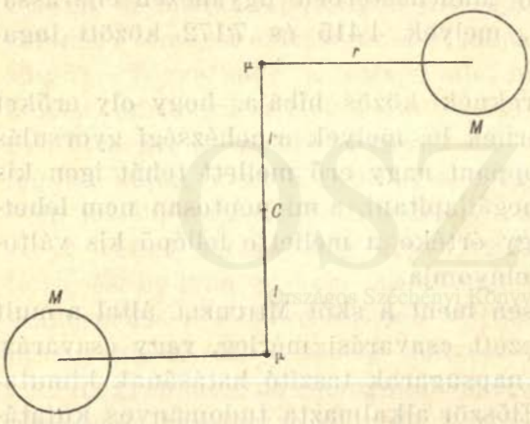
A műszer előnye nyilvánvaló: az inga függélyes sodronya mint tengely körül leng, tehát lengése közben a Föld felé nem esik, s így a nehézségi erővel szemben munkát nem végez.

A nehézségi erő alól teljesen fölmentett műszer ennélfogva bármily kicsiny erő igen pontos lemérésére kiválóan alkalmas.

Ha a rudat nyugalmi helyzetéből ω szöglettel kitérítjük, akkor a sodrony ugyanily nagyságú szöglet körül való csavarodása folytán torsio rugalmasság lép fel, melynek nagysága $\tau\omega$, a hol τ a sodrony torsiocoefficiense. $\tau\omega$ egyszersmind a rúd forgási momentuma, és ezért az inga lengési ideje

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{\tau}},$$

a hol K a szerkezet tehetetlenségi momentumát jelöli. Ha tehát az ingát üresen lengetjük, akkor a lengési idő közvetlenül a torsiocoefficiens ismeretéhez vezet, ha a tehetetlenségi momentumát a rúd számára egyszerűen kiszámítjuk, vagy pedig egyébként meghatároztuk.



210. ábra. A csavarási mérleg elve.

A tényleges kisérletet úgy adom elő, mint ezt régebben eszközölték, mivel báró Eötvös módszereiről úgyis behatóbban kell beszélnünk már csak azért is, mert a jelenlegi tárgyon kívül a geologia számára egészen új szempontokat nyit meg. Legyen a 210. ábrában a papir síkja a 2l hosszúságú rúd forgássíkja, C a rúd forgási tengelye. Végein két egyenlő μ tömegű golyót képzeljünk, és a rúdtól jobbra és balra két egyenlő r távolságban álló M tömeget, szintén golyóalakban. Ha a rúd tömegét elenyészőnek tekintjük a μ tömegekhez, az M hatását a távolabbi rúdvégre szintén elhanyagoljuk — itt csak a módszer elvéről, nem pontos kiszámításáról van szó — akkor a rúd végei és a két tömeg között fellépő erő:

$$f \frac{\mu M}{r^2}$$

által adott. A rúd forgási momentuma az erő és az erő karjának szorzata; mivel a rúd merőlegesen áll az erő irányára, az erő karja magával a rúddal egyenlő, s e momentum

$$F = 2f\frac{\mu M}{r^2}l,$$

minthogy mindkét M tömeg egyenlő irányú forgást iparkodik létrehozni. A rúd a két tömeg vonzása folytán egyensúlyi helyzetéből kitér ω szöglettel mindaddig, míg a vonzó erő és a csavarodási rugalmasság forgási momentuma egyenlővé nem vált; az egyensúlyi helyzetben áll tehát:

$$\tau\omega = 2f\frac{\mu M}{r^2}l,$$

feltéve, hogy a rúd még a kitérés után is legalább közel merőlegesen áll az erő irányára. Ha a tömegeket a másik oldalra fektetjük át symmetrikusan, akkor az ω kitérítés a másik oldalon is előáll, a hatás tehát kétszeresíthető. Egyszersmind a két oldalon tett megfigyelésből az üres rúdnak egyensúlyi helyzetében netán bennrejlő hiba eliminálható.

A szerkezet méreteiből és az üres mérleg lengési idejéből meghatározható minden adat, úgy hogy f kiszámítható. De ha ez ismeretes, akkor a nehézségi gyorsulásból és a Föld sugarából közvetlenül annak közép sürűsége is adódik. A kitérítéseken kívül az inga lengései is felhasználhatók, melyeket a két vonzó tömeg befolyása alatt végez.

A vonzó tömegek ilyetén alkalmazása természetesen igen nagy védőszekrényeket tételez fel, melyekben hőmérsékletváltozások és légáramlások mindmegannyi ellenőrizhetetlen hibaforrás.

E módszer szerint Cavendish a Föld sürűségét 5·48; Reich 1837-ben és 1847-ben illetve 5·49 és 5·583; Baily 5·66; Cornu és Baille 5·50 és 5·56 közöttinek találták. Hasonló módszerekkel, de még sokkal pontosabb kivitelben és új, rendkívül érzékeny methodusokkal határozta meg e fontos állandót báró Eötvös is; szerinte a Föld közepes sürűsége 5·53, mely érték teljes megnyugvással elfogadható. Maga az f állandó értéke:

$$f = 0{\cdot}000\,000\,0665$$

vagy közel 2 harmincz milliomod és ezen állandó legalább is $\frac{1}{5}$ perczentig helyes. Egy harminczmilliomod centiméter tehát azon út, melyen át egy gramnyi gömb egy ugyanily tömegű gömb felé esik az első másodpercz alatt, ha a két gömb középpontja 1 centiméternyi távolságban áll egymástól.

Ezen számadattal a Föld tömege: $5\,988\,420 \times 10^{15}$ köbméter víz (tonna). A Föld belsejének megértésére némi fényt vet, hogy a közepes sürűség oly tetemes, holott a felszini sürűség mintegy 2·5—2·7-re, tehát a közepesnek alig felére tehető. Ebből legalább is annyi következik, hogy a Föld nem homogen test, hanem hogy sürűsége befelé tetemesen nő. A növekedés törvénye természetesen nem állapítható meg, sem közvetlen megfigyelés által, sem pedig egyéb tüneményekből következtetés által. Mindössze felállíthatunk oly hypothetikus törvényeket, melyek segítségével az ingamérésekből következtethető főtehetetlenségi momentumok a lapultság értéke, vagy a csillagászati megfigyelések által ismert praecessio állandója előállítható, a nélkül azonban, hogy e törvényeket hypothetikus voltukból kivetköztetni sikerülne. Különösen két ily törvény szokott szerepelni, a LA ROCHE és a LEGENDRE-LAPLACE-féle törvény. Ha a Föld sürűségét ρ távolságban a középponttól s-sel jelöljük, akkor e törvények szerint illetve

$$s = s_0 (1 - \alpha \rho^2) \text{ és } s = c \frac{\sin m \rho}{\rho},$$

ha ρ a földsugár egységeiben van kifejezve. Az előforduló állandók értéke

$$s_0 = 10{\cdot}10\,;\ \alpha = 0{\cdot}764\,;\ c = 4{\cdot}426 \text{ és } m = 2{\cdot}4727 = 141^0\,40'.5$$

s az egyik szerint a Föld középponti sürűsége 10·10, a második szerint 10·94, tehát eléggé megegyező. A felszini sürűségek a két képlet szerint illetve: 2·38 és 2·75, a mi szintén elég közel áll a valósághoz.

Közvetett megfigyelések által a többi égi test tömege is aránylag könnyen meghatározható. A Holdé például a tengerjárás nagyságából, a mennyiben a tenger emelkedése közvetetlenül a Hold tömegével arányos. De meghatározható pontosabban úgy a Hold, mint a Nap tömege azon esésből, melyet e két égi test a Föld felé mutat, s mely közvetlenül a Föld vonzási erejével hasonlítható össze. Ez okoskodáson ugyanazon egyenletekhez jutunk, a melyek segítségével a Hold járásából a Föld sugarát, vagy a Föld évi mozgásából a Nap távolságát határoztuk meg, csakhogy most nem ez adatok, hanem a tömeg tekintendő ismeretlenek gyanánt. Ily módon tudjuk meg, hogy a Hold tömege a Földé $0{\cdot}012\,552\,25 = \frac{1}{79{\cdot}68}$-szorosa, a Nap tömege pedig a Földének 325 000-szeresével egyenlő.

Hasonló módon mérlegelhetők mindazon bolygók tömege is, melyek holdakkal bírnak, a mennyiben ezek keringése tényleg egyenes egyenletes mozgásból és a bolygó felé való esésből tehetők össze. Az utóbbi szabja meg a bolygó vonzó hatását, tehát a bolygó tömegét is. Különösen jó módszer azonban az égi testek tömegmeghatározására azon eltérések megfigyelése, melyeket az egyik bolygó a másiknak tisztán Kepler-féle elliptikus mozgásától létesít. Ezek közvetlenül szolgáltatják a háborgó bolygó tömegét a Nap tömegéhez viszonyítva.

És most eljutottunk tulajdonképen odáig, hogy a Föld alakjáról a nehézség alapján beszélhetünk.

XVIII. FEJEZET.

A Föld alakja.

A Föld alakjának és méreteinek meghatározásában, bármily módszer szerint járjunk is el, mechanikai elvek mindenha beleszólnak. A Föld alakja és nagysága magában véve már a nehéz ingából és a Hold mozgásából volt meghatározható, és a fokmérés, a legpontosabb eljárás, szintén két lényegesen különböző eljárásból áll; az egyik, a bázismérés és a triangulatió tisztán geodéziai mérés, hosszúság- és azimuthszögmérésből áll, melyben csak tisztán geometriai elvek jönnek alkalmazásba. De már a lemért ív amplitudóját csillagászati módon nyerjük, az ív két végpontjának geographiai szélessége által. A szélesség meghatározására azonban a zenith kijelölése kell; a zenithet a libella, vagy egyéb folyadékfelszin állapítja meg, és ez, mint láttuk, nem a Föld geometriai alakjának érintősíkjába esik, hanem a megfigyelési helyen a nehézségi szintfelület egy eleme. Az ív hosszúságát tehát a Föld látható felületén mérjük le, amplitudóját pedig ezen alakhoz tartozó szintfelületen, a mi másodperczekre, sőt egy perczre rugó külömbséget tehet, ha az ív végpontjához közel, a Föld felületének szomszédságában feltünő tömegeloszlási szabálytalanságok vannak, hegyek vagy völgyek alakjában tömeghalmozódások vagy tömeghiányok.

Ugyanebben az értelemben működik a szintezés is. Már neve is mondja, hogy libellával vízszintesre állított távcsővel haladunk tova egy vonal mentén, azon czélból, hogy egyes pontok tengerfeletti magasságát mérjük meg. Ámde a libella nem a Föld geometriai horizontját, azaz érintősíkját jelöli ki, hanem a niveaufelületet, és így nem tengerfeletti magasságkülömbségeket határozunk meg, hanem az egyes szintfelületeknek egymástól való vertikális távolságát. Ugyanis a nehézségi gyorsulás egyenlete

$$g = -\frac{\triangle V}{\triangle h},$$

a hol h két egymáshoz végtelenül közel fekvő szintfelület normálisában fekvő távolság. Ebből

$$\triangle h = -\frac{\triangle V}{g},$$

azaz tengerfeletti magasságot a niveaufelületek távolságából csak a nehézségi gyorsulásnak pontonként való tekintetbevételével kapunk. Ha ugyanis a $\triangle V$ szintkülömbségeket oly kicsinyeknek választjuk, hogy ezek között a gyorsulás érezhetőleg állandónak tekinthető, akkor a véges magasságkülömbség:

$$h = \Sigma \triangle h = \Sigma \frac{\triangle V}{g}$$

alakjában írható fel. Ismerni kell tehát a gyorsulást az egész szintezett vonal hosszúságában. Ebből sajátságos tény következik önkényt: ha valamely pontból kiindulva, magában zárt görbe mentén szintezünk, akkor a kiindulási helyhez visszatérve, a magasságkülömbség kezdet és vég között nyilván 0 tartozik lenni. Tényleg pedig még hibátlan mérés esetében sem az, mert valójában annál nagyobb az eltérés, annál nagyobb záróhiba fordul elő, minél nagyobb mértékben változik a szintezési vonal mentén a nehézségi gyorsulás. Már ezen egy körülmény magában véve mutatja, hogy a fokmérés teljes művelete szükségképen folytonos ingamérésekkel karöltve jár, és hogy minden adata, mint említettük, a Föld szintfelületére, nem pedig látható geometriai alakjára vonatkozik.

Teljesen ugyanazon megfontolások állanak a tengerszintre is, mely tulajdonképen azon felület, melyre a fokmérés eredményeit redukálni szokás. A tengerfelület már a priori sem lehet egyszerű geometriai felület, az pl., melylyel a Föld alakját azonosítani kellene, mert mint láttuk, minden elemében merőlegesen áll a rá ható erőre, tehát egyebektől eltekintve, a nehézségi potentiálfelülettel azonos. E minőségében alakja ugyan jelölhető

$$V = f \Sigma \frac{m}{R} + \tfrac{1}{2} \omega^2 \rho^2$$

egyenlettel, de tudjuk azt is, hogy ez egyenlet jobb oldalának első tagja csak symbolum, melyet ugyan tetszőleges pontossággal meghatározhatunk, melynek szigorú kifejezését adni azonban képesek nem vagyunk, hacsak végtelen sok számadatot nem figyelünk meg.

A nehézségi erő a tengeren is pontról-pontra változó, és különösen nagy eltéréseket tapasztalunk oczeánikus szigeteken, tehát a tenger belsejében és a partokon, a mi a szárazföldek tömegvonzására vezethető vissza, melynek folytán a tenger felszine emelkedik és legalább is kisebb görbültséget vesz fel a partok mentén. Ismeretes, hogy ezen emelkedés elég tetemes, ha tán nem is éppen oly nagy, hogy a régi szinlők magyarázatára elégséges volna. Hozzájárul még, hogy a szintezések tanusága szerint az egyes tengerek szintei nem is feküsznek ugyanazon magasságban, sőt hogy ez folytonos, bár valószinűleg legnagyobbrészt periodikus változásoknak van kitéve. Eltekintve a tengerjárásoktól, az egyes tengerek óriási közlekedési edényeknek tekinthetők, melyekben minden áramlás lejtést jelent, s melyekben a légnyomásnak, a hőmérsékletnek s a sótartalom változásának mindig szintváltozás is felel meg. A közepes szint meghatározása a legnehezebb feladatok közé tartozik.

Innen van, hogy Gauss és Bessel számításai a tengerszint geometriai alakjának meghatározására meddők maradtak, és már Humboldt is tisztában volt az iránt, hogy a magasságok számára absolut nullpont nem található.

Az egész kérdés elég transcedens és első pillanatra különös megoldására való tekintetből nem kell csodálkoznunk azon, hogy a Föld alakjának kérdése a 60-as évek vége felé stagnált. Fischer Fülöp műve: „Untersuchungen über die Gestalt der Erde", bár magában véve tisztán negativ eredményű, újabb haladást indított meg. Lényegében véve csak azon ellenvetéseket hozza fel, melyeket mi is jeleztünk már. A Föld geometriai alakját a priori hypothezissel állapítjuk meg, s a fokmérésekkel úgy számolunk, mintha ezekben geometriai szempontokon kívül egyébnek hozzászólása nem volna; a tenger és szárazföld, fensík és lapály nagy területekre terjedő függőóneltéréseket hoz létre, a melyek közelében eszközölt fokmérések a Föld geometriai alakjának meghatározására nem használhatók. Különösen sujtja ez a keletindiai fokmérést, melynek kihagyása után tetemesen más és az ingamérésekhez közelebb álló lapultságot kapunk. A tömegeloszlás ezen szabálytalansága magával hozza, hogy ugyanazon parallelkörön mért ingagyorsulás nem minden helyen ugyanaz, és hogy a Föld geometriai alakjában több 100 méterre emelkedő hullámok lépnek fel szabálytalan eltérés alakjában. E hullámok a tengerszinten nyugosznak, s csúcsuk a continensek felett a képzelt mathematikai felület fölé nyulik.

Listing a Föld alakjának meghatározását a geoid meghatározására vezeti vissza, értve azon a közepes tengerszintet, a mint ez a Földet tevő tömegek befolyása alatt tényleg alakul. A szárazföldek alatt tehát mintegy számtalan csatornában folytatva gondoljuk a tengert, és ennek alakját határozzuk meg, az összes vonzó tömegek behatása alatt. Listing nagy vonásaiban meg is szerkesztette ezen geoidot, de nem sikerült e geoiddal egyenlő térfogatú sphaeroidot találni, mely számára a geoidos emelkedések és mélyedések összege minimum volna.

Elméleti szempontból a geoid alakjával Thomson és Tait is foglalkozott, és így sikerült végre ennek fogalmát annyira tágítani, a mint ez a pontos meghatározhatóság szempontjából kivánatos volt. Az utolsó és legfontosabb lépést tette e kérdésben Bruns „Ueber die Gestalt der Erde“ czímű kis terjedelmű értekezésében.

Szerinte geoidon értjük azon felületet, melyen a Földet alkotó tömegelemek vonzásának s tengelyforgásából keletkező centrifugális erőnek potentiálja együttvéve tetszőleges, állandó értékkel bír. Vagy más szóval: a geoid a nehézségi szintfelület. A Föld kérgén áthaladó végtelen sok niveaufelület csupán csak állandójának vagy jellemzőjének értékében különbözik, de mindannyian teljesen ugyanazon tulajdonságokkal bírnak. A Föld kérgét képező egyetlenegy niveaufelület sem bír tehát különös előjoggal, hogy ezt tekintsük a Föld alakjának repraesentánsául, és ezért a tengerszintre sem vagyunk kénytelenek reflectálni. De igenis kiragadhatunk a Föld kérgét alkotó geoidokból egy tetszőleges individuumot, és annak a többiekkel közös tulajdonságait csakugyan geoidos tulajdonságoknak mondhatjuk. Félig öntudatlanul hódoltak ezen alapelvnek az eddigi fokmérések is, a mennyiben különösen azon felületet tüntették ki, melyben szintezésük zéruspontja feküdt.

A geoidok tehát önmaguk között éppen nem azonosak, de ha egyet ismerünk, ismerjük az összes szomszédosokat is, a többször idézett $g = -\frac{\triangle V}{\triangle h}$ vonatkozás alapján. Természetes ugyanis, hogy a geoid mindazon tulajdonságokkal bír, a melyekkel a potentiálfelület. Élekkel, szögletekkel és hasadásokkal nem bír, mindenütt magában zárt és a szomszédos felülethez való átmenetel által az illető ponton az erőt is adja. Mindazon tulajdonságokkal bír, melyek folytán tehát valamely két coordinátától függő mennyiség összetartó trigonometriai végtelen sorba bontható. Ez a gömbfüggvények sora. A keletporosz fokmérés alkalmával próbálta ezek alkalmazását Bessel, a ki a geoid számára zárt kifejezést keresett, később ugyanily irányú számításokat tett Yvon Villarceau. Noha ez úton a sor kellő folytatása által valamelyes eredményhez mégis kell jutnunk, az eljárás nem különb, mint a melyet követnénk, ha valamely ország térképét határai szerint mathematikai képletbe iparkodnánk szorítani. Bármennyire folytassuk ugyanis a sort, minden újabb megfigyelés egy újabb coefficienst határoz meg, a sor természetszerűen lassú összetartása folytán, és így nem remélhetünk zárt kifejezést, mely a mérések pontosságán belül a geoidot visszaadhatja, noha egyes darabjai szabályos geometriai felületek darabjaiból tehetők össze. Mindazonáltal sem eddigi számításaink, sem pedig az eddigi fokmérések számbeli eredménye nem haszon nélküli, sőt igen is fontosak. A geoid szigorú egyenlete

$$f\Sigma\frac{m}{R}+\tfrac{1}{2}\omega^2\rho^2=\text{const},$$

mint éppen említők, csak azon nem valósítható esetben kiszámítható, ha ismernők a Föld alakját és belsejében a tömegek eloszlását, azaz a sürűséget minden pontban. A geoid kifejezésének azonban tetszőlegesen sok tagját mi is kiszámíthattuk; az elsők:

$$f\frac{M}{r}+f\frac{MK}{2r^3}(1-3\sin^2\varphi)+\frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\varphi=\text{const}$$

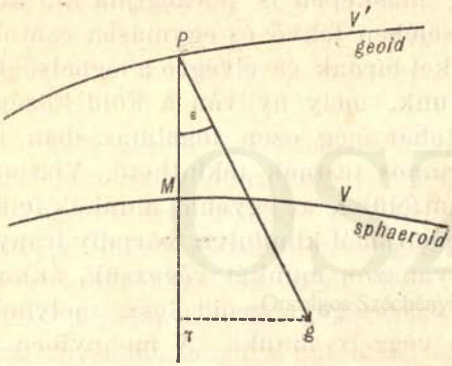
már magukban véve elegendők arra, hogy a Föld lapultságát az ingamérések pontosságával kiszámíthassuk, és számuk tetszőlegesen szaporítható. A felírt kifejezés által ábrázolt geometriai felület tehát nem a geoid, hanem ahhoz csak közel jár; annál közelebb, minél több tagot veszünk fel; ellenben mint a potentiálkifejtés egy része ugyanazon tulajdonságokkal bír, mint maga a potentiál, és ezért *niveausphaeroidnak* szokás nevezni, még pedig másodrendűnek, ha a radiusvector negativ harmadik, n-edrendűnek, ha a távolság negativ (n+1)-dik hatványáig bezárólag terjed.

A niveaufelület, mint mechanikailag definiált felület, természetesen közvetlenül nem jelölhető ki; ezért fontossággal bír mellette még mindig azon geometriai felület is, mely a Föld alakját megközelíti. A Föld mintegy ideális alakját feltüntető sphaeroid a *referenzellipsoid* — vonatkoztatási sphaeroid — nevét viseli, és erre vonatkoztatunk minden, a geoidra vonatkozó mérést. Most már természetesen teljesen közömbös, hogy a fokmérések különböző csoportosításából keletkező mely sphaeroidot választjuk vonatkozási felület gyanánt, a Bessel, a Clarke vagy másféle sphaeroidot-e? Az egész külömbség csak abban álland, hogy az egyes sphaeroidok helyenként más-más eltéréseket adnak a geoiddal szemben.

A geoid, mint minden szintfelület folytonos, de nem folytonos szükségképen görbülete is, a mely minden potentiálfelület számára ugrásos változásoknak lehet kitéve. A Föld külső kérgén áthaladó geoidok mindazonáltal kifelé mindig convexek maradnak, bár ellentétes görbület, concavitás kifelé, elvileg nem zárható ki. Ez azonban a Föld esetében csak kisebb convex görbültségbe megy át, a mit ez időszerint ismert óneltérések kis értéke bizonyít. Ha tényleges concavitások volnának, akkor ezekben a normális iránya kifelé tartana, a nehézségi erő iránya tehát a Földtől eltartana, a mire példát nem tudunk. A Föld belsejében fekvő geoidfelületek azonban kétségenkívül bírnak hullámos, váltakozó convex és concav felületekből összetett alakkal.

A geoid fogalmát még másképen is fejezhetjük ki, tán világosabban is. A Föld belsejében fekvő és egymásba csatolt geoidok mindkisebb méretekkel bírnak és elvégre a legbelsőbb, végtelen kis geoidhoz is jutunk, mely nyilván a Föld középpontjával azonos. A Föld tehát még ezen fogalmazásban is középponttal bíró barocentrumos testnek tekinthető. Viszont pedig minden geoid, mint szintfelület, az egyenlő munkák felülete. Ha tehát a Föld középpontjából kiindulva, bármily irányban haladunk, és mindig ugyanazon munkát végezzük, akkor képzelhető végállomásaink összesége a geoid lesz, melynek jellemzője éppen az állandó végzett munka. A mennyiben a végzett munka mértékéül az izomfáradságot tekinthetjük, triviális példában azt is mondhatjuk: mindazon pontok összesége, melyekbe a legbelsőbb geoidból kiindulva tetszőleg irányban ugyanazon fáradsággal eljutunk, egy geoid felületén feküsznek. A legrövidebb út természetesen az, melynek minden eleme merőlegesen áll a pillanatban metszett szintfelületre; de bármily irányú út összetehető oly darabokból, melyek részint a szintfelület normálisába, részint érintőjébe esnek. Az utóbbi mentén tudvalevőleg munkavégzés nincs, noha ezen irányú componens nagyobbodása meghosszabbítja a megtett utat.

Ha valamely szintfelületről kiindulva az összes geoidokat normálisan metszük, akkor általában véve térbeli görbe vonalat nyerünk, mely a nehézségi erő irányával összeesik, és mely két szintfelület között a mechanikai értelemben vett legrövidebb útat adja. A geoidokat merőlegesen metsző görbéket orthogonális trajectoriáinak, vagy mechanikai szempontból erővonalaknak szokás nevezni, a mennyiben, mint kimutattuk volt, az erő mindig a szintfelület normálisába esik. Az erővonalaknak épp úgy, mint a geoidnak, sem élei, sem csúcsai vagy visszatérő pontjai nincsenek, de görbületük vagy normalis síkjuk azimuthja ugrásonként változhatik, a szerint, a mint a tömegeloszlásban van szakadozottság vagy folytonosság. Ha a szintfelülettel való metszési pontban az erővonalhoz érintőt húzunk, akkor ez e pontban a nehézségi erő irányát adja, és folytatása kijelöli a zenithet. Nehéz, felfüggesztett fonal ellenben nem ad egyenes vonalat, hanem általában véve térbeli görbét, és a kő esése sem egyenesben, hanem ugyanezen térbeli görbe mentén történik.



211. ábra.
A geoid kijelölése a sphaeroiddal szemben.

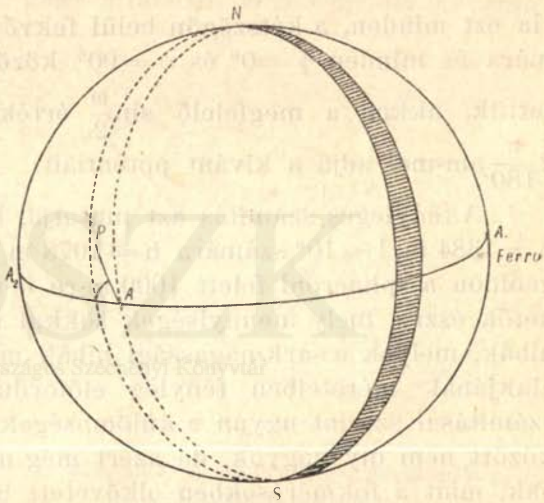
Minthogy a Clairaut-féle theoremát, és ezzel a lapultságot közel egyetértésben a fokmérésekkel már a másodrendű niveausphaeroidból sikerült levezetni, azért több tag hozzátevése már lényegesen eltérő eredményt a lapultság értékében nem adhat, vagyis: a különböző rendű niveausphaeroidok mind közel ugyanazon lapultsággal bírnak. A Föld belseje számára természetesen, a hol a vonzott ponton átmenő gömbön kívül eső tömeg már tetemes, a lapultság is más és más leend. Az ismeretes tömegeloszlás miatt a Föld felületén eszközölt mérésekből ugyan erre nézve következtetést nem vonhatunk, de felállíthatunk ismét, hasonlóképen, mint a sűrűség számára, hypothetikus törvényt, melynek állandóit úgy határozhatjuk meg, hogy a tényleges megfigyelésekkel összhangzásban legyen.

A nehézségi gyorsulás módot is szolgáltat a geoid kijelölésére a sphaeroiddal szemben. Legyen ugyanis a 211. ábrában V' és V a potentiálérték a geoidon és a sphaeroidon, a Föld geometriai alakján. Ekkor g a geoidra normális egyenes adja a gyorsulást, γ a sphaeroid normálisa pedig ennek a geometriai függélyesbe eső összetevőjét, és ε természetesen a függőón eltérésével azonos. A P és M megfelelő pontok tengerszini magasság külömbsége nyilván

$$h = MP = \frac{V' - V}{\gamma \cos \varepsilon},$$

úgy hogy $V' - V$ mértékéül szolgálhat azon emelkedés vagy sülyedés számára, melyet a geoid ugyanazon potentiál értékkel bíró sphaeroid fölött mutat.

Lássuk most, mekkora lehet a legnagyobb emelkedés, melyet a geoid a sphaeroiddal szemben feltüntet. E czélból legyen e Föld magva a sugarú homogen héjakból összetett gömb, melynek közepes sürűsége 5·55. Az oczeánokat és a kontinenseket ugyanazon körrajzú végtelen vékony tömegréteggel helyettesíthetjük, melyeknek tömege $h_1 s_1$ és $h_2 s_2$-vel arányos, ha h_1 és h_2 a tenger közepes mélysége, illetve a szárazföld közepes magassága; a sürűségek 1 és + 2·5-nek veendők.



212. ábra.
A geoidos eltérések becslése.

A Ferrótól számított keleti féltekén a kétnemű réteg hatása majdnem teljesen kiegyenlítődik, úgy hogy ezen félgömb tekinteten kívül maradhat, 212. ábránk a nyugati féltekét adja; szárazföldje helyettesíthető NS gömbi kétszög által, melyek meridiánjai $\lambda = 30^0$ és $\lambda = 75^0$ nyugoti hosszúsággal bírnak Ferrótól. Számítsuk most a potentiált azon A pontban, melyben e kétszög meridiánjainak egyike az aequatort metszi.

Ha P e kétszög egy pontja, $AP = \omega$ és $PAA_2 = \psi$, m pedig a kétszög tömege, akkor a keresett potentiál:

$$\Omega = 2\, a\, m\, \Sigma \sin \frac{\omega}{2} \triangle \psi,$$

a hol, λ-val jelölve az A pont hosszúságát:

$$\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tg} \lambda \sec \psi.$$

E kifejezést szintén Bruns állította fel, és a következő jelentéssel bír: a PAA_2 szöget igen kis részekre osztjuk (minthogy itt csak becslésről van szó, 1^0-os elemek elegendők lesznek, úgy hogy $\triangle\psi = 1^0 = \frac{\pi}{180}$) és a második képlet segítségével számítjuk a P pont geographiai hosszúsága és $\psi = 0^0$, 1^0, 2^0... értékek számára a hozzátartozó ω-t, illetve $\sin\frac{\omega}{2}$-t. Ha ezt minden, a kétszögön belül fekvő pont hosszúsága számára és minden $\psi = 0^0$ és $\psi = 90^0$ között terjedő ψ számára tettük, akkor a megfelelő $\sin\frac{\omega}{2}$ értékek összege, szorozva $2\frac{\pi}{180}$ am-mel adja a kivánt potentiált.

A tényleges számítás azt mutatja, hogy $\lambda = 125^0$ számára $h = 1384$ m, $l = 10^0$ számára $h = 1078$ m. Mindenesetre tehát a geoidon a sphaeroid felett 1000 m-re is menő emelkedések vehetők észre, mely mennyiségek sokkal nagyobbak, mint azon hibák, melyek a sarkmagassági hibák miatt a Föld geometriai alakjának méreteiben tényleg előfordulnak. Helmert újabb számításai szerint ugyan a külömbségek a geoid és sphaeroid között nem oly nagyok, de azért még mindig sokkal nagyobbak, mint a fokmérésekben elkövetett hibák.

Utólag tehát nagyon is kimutatható, hogy tetemes külömbség van az ónelhajlásokat illetőleg szárazföld és tenger között, melyek nem minden mérésnél enyésznek el, még akkor sem, ha ez igen nagy kiterjedésű. Ha pl. az előbbi számításban $\lambda = 60^0$ és $\lambda = 280^0$, akkor $h = 531$ illetve $h = 511$ m. E két helyen tehát a geoidos emelkedés és vele a függőóneltérés is közel egyenlő, holott a kiterjedt kétszög más pontjaiban igen tetemes külömbségek lépnek fel.