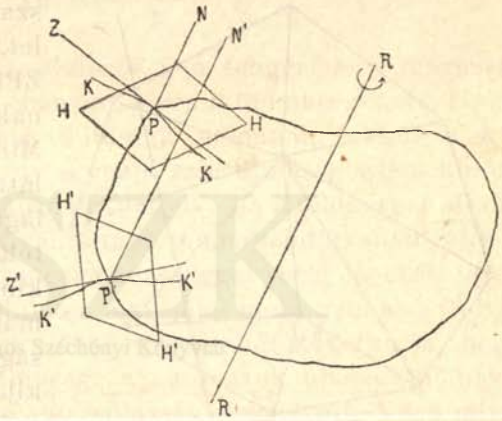
XIX. FEJEZET.

A geoid kijelölése a sphaeroiddal szemben.

Minthogy zárt analytikai formula a geoid számára nem található, a fokmérések tehát előírt képletek szerint nem számíthatók ki, nem marad más hátra Bruns szerint, mint hogy valamely, de egy és ugyanazon geoidnak lehetőleg sok pontjáról pontos coordinátajegyzéket készítsünk és minden pontban megadjuk V és g értékét. Ezekből azután graphikai képe vezethető le a Földnek, mely általában véve épp oly kevéssé fordítható le analytikai nyelvre, mint valamely tetszésszerinti más topographiai felvétel. A főkérdés most az: eszközölhető-e ily módon a Föld alakjának meghatározása előzetes hypothezis nélkül a pontosság relativ maximumával? Ha e kérdésre nemmel kellene felelni, akkor minden tökéletlenség mellett mégis csak a fokmérésekhez hasonló eljárást kellene követni: egy elég közelítést biztosító niveausphaeroid egyenletét felállítani és annak állandóit úgy határozni meg, hogy az összes megtett megfigyelések lehetőleg jól visszaadassanak.

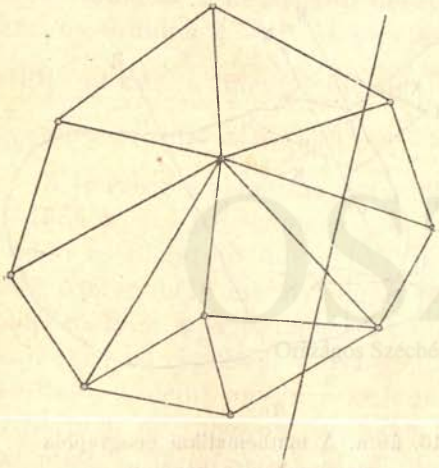


213. ábra. A mathematikai geographia alapfogalmai a geoidon.

Szerencsére azonban a feladat teljesen szabatos megoldása is lehetséges, ha három egymástól teljesen független műveletet alkalmazunk, melyek közül eddig mindegyiket külön-külön tartottuk képesnek arra, hogy czélhoz vezessen. A három művelet: a csillagászati és trigonometriai mérés, a szintezés és a nehézségi erő lemérése, melyek a modern fokmérés alapprogrammját teszik.

A csillagászati és trigonometriai felvételben számos eddig megszokott kifejezés tágabb definitiót igényel, melyet a 213.

ábra közvetít. Ha P és P′ a geoidfelület két tetszésszerinti pontja és K K, K′ K′ e pontban az erővonalak, akkor a geoidfelülettel való metszési pontokban húzott érintők a Z ésZ′ csillagászati zenithet jelölik ki. Ezekre merőlegesen áll a horizont, HH és H′H′, a geoidfelületnek érintősíkja a P és P′ pontokban. Ha e két pontból párhuzamost húzunk az RR forgási tengelylyel, akkor ezen egyenesek szögletei a horizonttal adják a csillagászati sarkmagasságot, vagy a ZPN és Z′P′N′ szögletek ennek kiegészítőjét 90°-hoz. E szögletek szárain át fektetett sík, ZPN és Z′P′N′ a két helyen a meridián síkját szolgáltatja és ZPP′ a két pont csillagászati zenithtávolsága. A szöglet, melyet ZPN meridiánsíkja ZPP′ síkkal képez, a P′ pontnak P-re vonatkozó azimuthja. Mindezen szögmennyiségek — látnivaló — közvetlenül csillagászati úton megmérhetők, tehát csak geometriai vagy kinematikai elemeket tartalmaznak, kivéve a sarkmagasságot, melybe már a zenith kijelölése miatt a nehézségi erő is belejátszik.



214. ábra.
A Földet behálózó fokmérési polyaeder.

A szorosabb értelemben vett fokmérés tehát lényegileg nem tesz mást, minthogy kijelöl a térben egy háromszögekből álló soklapot, meghatározván minden oldal és szöglet nagyságát, úgyszintén ez oldalok hajlását a Föld forgási tengelyéhez (214. ábra). De magában véve a mérés semmi felvilágosítást sem adhat arra nézve, hogy a forgási tengely a polyaeder mely pontjain halad át. Ennek kitüntetésére a tengelyt szándékosan a polyaeder középpontján kívül, de a világtengelylyel párhuzamosan fektettük.

A fokmérések kiszámításánál idáig úgy jártunk el, hogy kerestük azon gömb, sphaeroid vagy háromtengelyű ellipsoid méreteit, mely e polyaederbe a lehető legkisebb hibák hátrahagyásával beilleszthető. E czélból a polyaeder csúcspontjait,

azaz a fokmérés fixpontjait a geoid helyébe tett sphaeroidra vetítettük, a mi által geodéziai háromszögek egész lánczolatához jutottunk, melyek azután ismeretes módon meg voltak oldhatók. De ha a Föld alakjára vonatkozólag előzetes feltevéstől tartózkodunk, akkor a csillagászati és trigonometriai művelet csupán egy soklapot jelöl ki a térben, megadja ennek méreteit, a forgási tengelyhez való irányítását és a csúcspontokban a függélyes irányát. Ennél többet a módszertől kívánni sem szabad.

A következő lépést a szintezés adja meg. A sokszor idézett

$$\triangle h = -\frac{\triangle V}{g}$$

egyenlet miatt ugyanis a szintezés nem tengerfeletti magasságok külömbségét adja, hanem niveaukülömbségeket. Ha a geoidfelületek párhuzamos felületek volnának, akkor a két fogalom összeesnék, de így egyenlő szinttávolságokhoz különböző geoidtávolságok tartoznak. Vagyis: ha a földkérget alkotó geoidok seregéből egyet kiválasztunk tengerszint gyanánt, akkor az összes, ugyanazon tengermagassággal bíró pontok ezen geoidnak egy parallel-felületét alkotják, mely azonban tudvalevőleg nem geoid is. Az előbbi egyenletből következik, hogy két hely tengerszintkülömbsége azonos azok niveaukülömbségével, ha ezt az uralkodó gyorsulással elosztottuk. Vagy mivel a gyorsulás helyről-helyre csak lassan és folytonosan változik, írhatunk

$$h = \frac{V - V'}{g_0},$$

a hol g_0 a két niveaufelület között uralkodó közepes gyorsulást jelenti.

A szintezés ennélfogva az előbbi műveletet a következő módon egészíti ki: ha a csillagászati és trigonometriai műveletek által kijelölt soklapba fektetjük a szokásos földsphaeroidot, akkor ismeretesek egyszersmind a fixpontok vertikális távolságai ezen sphaeroid felett. A szintezés ellenben ugyanezen pontok vertikális távolságát adja a hozzátartozó geoidtól, a mi által a geoid is a Föld geometriai alakjára vonatkozólag ki van jelölve.

Most már bővebb indokolásra nincs szükség, hogy a szintezést kisérő szükséges művelet az ingagyorsulás meghatározása leend; hiszen a szintezés csak niveaukülömbséget ad és belőle a tengermagasság csak a nehézségi gyorsulás ismerete után számítható.

A Föld geometriai alakjának meghatározása tehát csak a szükséges kezdet, és a feltevés nélküli alakmeghatározást czélzó újabb fokmérés tényleg ott kezdődik, a hol eddig már befejezettnek véltük tekinthetni. Minden fixpont lehetőleg teljes meghatározást kiván, mert geographiai hosszúsága és szélessége, azimuthja és nehézségi ereje külön-külön határozandó meg. A legkisebb négyzetek elmélete azután rendkívül complikált utasításokat ad, hogyan egyenlítendők ki első sorban a szintezés által nyert niveaukülömbségek, majd az azimuthok, végre a lemért zenithtávolságok; a kiegyenlítés azután a polyaeder legjobban megfelelő alakját adja.

Ha a szintezés és a nehézségmérések által talált tengermagasságokat a polyaederszögletekből vertikálisan felrakjuk, akkor az egyes állomásoknak megfelelő bizonyos határozott geoidnak egyes pontjait ismerjük coordinátái szerint, pl. azon geoidét, mely a kiindulási pontul szolgált zéruspontban a tenger szintjén halad át. Ezen úgynevezett főhálózat, mely az elsőrendű fixpontokon halad át, másodrendű, azaz kevésbbé teljesen megfigyelt pontok interpolatiójára szolgálhat.

Rendkívül tanulságos a tudomány haladására azon gondolatmenet, melyet itt követtünk, s mely a gömbön, a sphaeroidon, a háromtengelyű ellipsoidon át a Föld alakját végül egy geometriailag szigorúan már nem definiálható mechanikai felülettel azonosítja. Ennek előnye, hogy a Föld szabálytalan felülete helyébe most egy összefüggő, folytonos, szakadás, él és csúcs nélküli felületet nyertünk, mely a Föld felszini szabálytalanságait mintegy elsimítva adja vissza; szükségessége pedig elutasíthatlan, mert rendelkezésünkre álló mérő módszereink egyike sem függ össze a Föld geometriai alakjával, hanem kizárólagosan csak niveaufelületeinek alakjához simul.

Az óriási mű, melyet a modern fokmérés ily módon kijelöl, kezdetén van csak és véget soha nem érhet, valamint hogy teljes pontossággal a geoidot ábrázoló végtelen sor sem állítható elő. De ehhez járul még, hogy a Föld alakja folyto-

nos változásoknak van alávetve, mert hiszen a földfelületi erők sem állandók. Ott vannak a meteorologiai faktorok, melyek a tenger szintjét folytonosan, bár túlnyomóan periodikusan megváltoztatják; ott van az égi testek vonzása, mely a nehézségi erőt minden pillanatban megváltoztatja és ezáltal nemcsak a vízburkolatnak tengerjárását, hanem éppen érezhető módon a Föld szilárd kérgének hullámzását is előidézi. Áramlások és földrengések folytonos tömegáttételeket idéznek elő, melyek a sarkmagasság változásaiban árulják el létezésüket, és a continensek lassú emelkedései és sülyedései, nemkülönben a lánczhegységek felgyürődései, valamint a sarki jégtömegek növekedése vagy fogyása szintén nem elhanyagolható részt kérnek a nehézségi erő lassú időbeli változásából, a miről a régi szinlők és egyéb orographiai formák tesznek beszédes tanuságot.

Mielőtt e fontos tárgyat elhagynók, a nehézségi erővel kell még foglalkoznunk; fontossága folytán megkivánhatjuk, hogy értékét lehetőleg sok helyen ismerjük, nagyság és változásai szerint. Lássuk tehát ezek meghatározását és a következtetéseket, melyeket belőle levonhatunk.

XX. FEJEZET.

A nehézségi változások.

A nehézség absolut meghatározása az ingával történik ugyan, de ha már e fontos állandó kellő számú helyen ismeretes, akkor egyszerűbb módszerek, az úgynevezett relativ nehézségmérések is vezetnek elég pontosan czélhoz. Lényegük abban áll, hogy változatlan ingát figyelünk egyrészt oly helyen, a hol absolut mérések által a gyorsulás már jól ismeretes, azután a meghatározandó helyen. Az ingának visszavitele a kiindulási állomásra jó ellenőrzésül szolgál. E módszer mestere Sterneck ezredes, úgy pontos műszere miatt, mint bámulatos szorgalma folytán. Lehetőleg sok helyen egységes terve szerint végzett nehézségi mérések dolgában ma monarchiánk első helyen áll. A legszükségesebb tudnivalókat a következő leírás közli.

Von Sterneck ingája erősen aranyozott sárgarézből készült, mintegy 25 cm. hosszú és közel 1110 gr. súlyú. Rúdja

8·5 mm. vastag, kerek pálcza, mely a lencsével, alapjával egybekapcsolt két csonka kúppal, merev egészet képez. A rúd felső vége az achátból készült forgási élek foglalatját hordja és elölső oldalán kis síktükörrel is el van látva. A foglalat a rúd mindkét oldalán két 80° oldalhajlással bíró achátból csiszolt élt tart; a szélsők, az úgynevezett segédélek az inga előzetes beigazításánál szerepelnek, míg a belsőkön az inga csak a tulajdonképeni megfigyelések alatt nyugszik. Az inga állványa egyetlen darabból öntött, kúposan összehajló háromláb, melyet alul és felül erős rézgyürű zár be. Az alsó gyürű vízszintezésre szolgáló három lábcsavart hord, a felső, alkalmasan megerősített achátlemezt, melyen az inga élei nyugosznak, s mely e czélból érzékeny libellával vízszintesre állítható. Az inga lengési síkjában fekvő láb az ingalencse magasságában kettéoszlik, hogy a lengésokozta légáramlatnak útját ne állja. A felső achátlemez hosszúkás áttöréssel bír; a nyilás hossztengelye mentén az inga élfoglalatjával kényelmesen átdugható, míg azután 90°-kal megforgatva, éleivel a lemezre ráfekszik. E nyilás kisebbik tengelye irányában még két más, sárgaréz-hengerrel kitöltött nyilás van, melyre az inga segédélei feküsznek úgy, hogy a tulajdonképeni élek mintegy fél mm.-nyire az achátlemez fölött lebegnek. E két rézhenger közös emelővel süllyeszthető és emelhető; a süllyesztés ráfekteti az ingát tulajdonképeni éleivel a lemezre, midőn is a segédélek a rézhengerek fölött maradt nyilásaiba süllyedvén, tovább szerepet nem játszanak; az emelés ellenben kiakasztja ismét az ingát. Az emelő lassújáratú csavarral mozgatható, úgy hogy minden zökkenés ki van zárva. A felső gyürű, melyen az achátlemez természetesen feszültség nélkül nyugszik, még egy álló síktükröt is hord, mely az inga nyugalmi helyzetében az ingán levő tükörrel két csavar segélyével párhuzamosan állítható. Az állvány alsó gyürűje még egy megakasztót is hord, mely az ingát minden kivánt amplitudóban fogva tartja és elforgatás után zökkenés nélkül eleresztve, lengésbe hozza.

Az egész műszert légáramlások, por és gyors hőmérsékleti változások ellen üvegszekrény védi, mely mindazonáltal az ingán szükséges valamennyi műveletet kívülről is enged megtenni. Igen pontos és különösen az ingarúd közepes hőmérsékletét mutató thermometer a műszer fontos kisérő része.

A lengési idő meghatározására szolgáló úgynevezett coincidentia-készülék a következő berendezéssel bír. Prismatikus, 20 cm. hosszú, 10 cm. széles és 14 cm. magas sárgaréz-szekrényen vagy nyolczszoros nagyítású, fonalkereszttel ellátott távcső nyugszik. A szekrény előlső oldalán fehér üvegre festett skálát hord, oldalán pedig nyilás van, melyen át a szekrény belsejében lévő tükör segélyével a skála hátulról megvilágítható. A távcső úgy állítandó, hogy az inga tükrében a skála reflektált képét lássuk, még pedig fel és le mozogva, ha az inga leng. A skála O pontja át van törve; mögötte egyenlő magasságban kis fémlemez van, melynek 0·5 mm. széles vízszintes rése a skála O pontját pótolja. A távcsőben tehát a skála O pontja helyett fényes vonal fog látszani. E lemez mögött néhány mm.-re még másik egészen hasonló réssel ellátott lemez is van, mely azonban egy elektromágnes emelőjére van erősítve; áramzárás pillanatában a lemez lefelé, áramnyitás pillanatában ellenrugó segítségével felfelé mozog. Természetes, hogy most a távcsőben fénycsíkot csak akkor fogunk láthatni, ha a két lemez rései összeesnek. A mozgó lemez úgy állítható, hogy ez összeesés a horgony mozgása közben létesüljön, úgy hogy áramzárás- és nyitáskor is egy-egy fényvillám létesül. Ha az electromágnest másodperczes chronometerrel kapcsoljuk össze, akkor a rés fényes képe másodperczenkint kétszer villan fel, és ha az áramzárással járó kevésbbé szabatos képet egészen figyelmen kívül hagyjuk, a következő jelenséget tapasztalhatjuk: lengő inga mellett, melynek lengési ideje (vagy annak egész többszörösei vagy aliquot törtrészei) nem vág össze egészen pontosan az óra áramzárási közeivel, a fényes csík a távcső látmezejének mindig más-más pontján jelenik meg: eleinte a horizontális fonal felett, majd ehhez lassan közeledik, vele összeesik, azután lefelé vándorol, megfordul és bizonyos idő mulva ismét a horizontális fonálra esik. Világos jelenség, mert az inga a másodperczenkint szabályosan egymásra következő áramnyitások pillanatában mindig más-más helyzetet foglal el a távcsővel szemben, és ugyanazon helyzetet csak akkor, ha a csík is a látmező ugyanazon, pl. a fonalkereszt horizontális fonala által megjelölt pontjában áll. Ez időközökben az inga egy teljes lengéssel többet vagy kevesebbet végzett, mint az óra áramzárást, és ennélfogva a

nagyon kényelmesen észlelhető coincidentiák időpillanataiból az inga lengési ideje igen nagy pontossággal meghatározható. Az óra járásának lehetőleg kis befolyásolása végett az electromágnest különben csak a coincidentiák közeledtekor csatolják be. Az inga amplitudója a távcsőben fel- és lelengő skálaképen pontosan leolvasható és minden tekintetben nagy előny, hogy a kilengés 10—20 ívpercznyi közön belül marad. Az állványhoz erősített és nyugvó inga mellett amannak tükrével párhuzamosan állított tükör természetesen szintén adja a skála képét, mely azonban teljesen nyugodtan áll. Ennek helyzete a fonalkereszthez biztosít arról, hogy megfigyelés közben a műszer helyzete nem változott, vagy lehetővé teszi, hogy az esetleges változásokat a távcső helyzetében eltüntessük.

Az inga ugyancsak transportabilis, mintegy 320 kilogr. súlyú, két részre bontható és gipszszel összekötött kőpilléren nyugszik, mely rövid negyedóra lefolyása alatt felállítható. A coincidentia-műszer szintén szétbontható, stabilis asztalon nyugszik. Az ingának a számításra szükséges változatlan állandói természetesen otthon, kényelmes helyiségben határozhatók meg.

Az ingamegfigyelésekkel párhuzamosan haladnak az időmeghatározások is, melyek az áramot szakító óra pontos járásának ismeretéhez vezetnek. Ezeket napmagasságmérések szolgáltatták 20 cm. átmérőjű körökkel bíró universale segélyével. Az időn kívül sok helyen meghatározták ugyancsak csillagászati úton a geographiai szélességet is, mely a pontos katonai térképek adataival összehasonlítva, megadja a geodéziai és csillagászati zenith különbségét, tehát a függőón eltérést. Az ívmértékben kifejezett függőón eltérés, szorozva az illető helyen észlelt nehézségi gyorsulással, szolgáltatja a nehézségi erőnek a meridián síkjába észak felé eső vízszintes változását, mely szintén fontos segédeszköz földalatti tömegek helyének és jellegének kikutatására.

Von Sterneck tapasztalatai szerint az ingamérések pontosságát nem annyira az időmeghatározásoknak, mint az összehasonlításra szánt chronometerek száma dönti el, s azért többnyire 4—5 chronometerrel és 4 ingával történtek a megfigyelések az egyes helyeken. Megjegyzendő még, hogy a teljes állomás 4 ingából, 2 ingaállványból, 2 kőpillérből és a távcső-

leolvasás számára 2 asztalból állott. Ha most tekintetbe veszszük, hogy minden egyes megfigyelő helyen nem éppen csekély munka az isolált oszlop beásása a földbe, az inga és a csillagászati műszerek felállítása, melyek fölé a legtöbb esetben még védősátrat is kellett emelni, igazán csodálkoznunk kell, hogy esetleges időjárási zavaroktól eltekintve, naponként egy teljes állomás volt absolválható. Sőt Magyarországon naponként két állomás került megfigyelés alá és csak Budapesten folytak hosszabb ideig a megfigyelések, hogy ez állomáson újabb vizsgálódások számára új kiindulási pont nyeressék.

Miután az egyes helyeken az inga lengési ideje a műszer állandóinak tekintetbevételével és különösen a hőmérséklet és levegő nyomásának változása miatt redukáltatott, számítja belőlük von Sterneck a helyi megfigyelt nehézségi gyorsulást azon értékkel, mely a kiindulási helyül szolgáló ponton érvényes. E pont a katonai földrajzi intézet pinczepillérje $+48^{0}$ 12′ 40″ szélesség, 34^{0} 1′ Ferrói kel. hosszúság, 183 m tengermagasság alatt, melyen a nehézségi gyorsulás 9·80876, és a másodperczinga hossza 0·933835 m. A gyorsulásnak helyi megfigyelt értékeit visszavezeti most von Sterneck a tengerszintre az által, hogy tekintetbe veszi a hely tengermagasságát, a tenger szintjétől a megfigyelő lábáig emelkedő földtömeg vonzását és azon vonzást, melyet a megfigyelő fölé emelkedő környező tömegek gyakorolnak. Ezen redukált és a táblázatos kimutatásban g_0-val jelölt értékek most közvetlenül összehasonlíthatók ama theoretikus $\gamma_0 = 9{\cdot}780\,(1 + 0{\cdot}005310 \sin^2 \varphi)$ gyorsulással, melyet Helmert a normális, különös tömegeltérésekkel nem bíró Föld számára felállít. Ha a megfigyelt és e képletből számított gyorsulás között eltérés nincs, akkor a földkéreg a megfigyelő alatt különös eltéréseket nem mutat. Ha azonban a megfigyelt érték a számítottnál nagyobb vagy kisebb, akkor a földkéreg e helyen nyilván nagyobb, illetőleg kisebb sürűségű tömegeket rejt magában, a megfigyelési hely alatt, röviden szólva, tömeghalmozódás vagy tömegfogyatkozás van. Sőt a tömegek nagyságáról is szerezhetünk magunknak fogalmat. Ha a tengerre redukált gyorsulást g_0-val jelöljük, akkor a $g_0 - \gamma_0$ különbség milliomszorosa méterekben kifejezve a tengerszinten képzelt azon, a földkéreggel egyenlő sürűséggel bíró réteg magassága, mely a megfigyelési hely

nehézségi eltéréseit magyarázni képes. Így pl. von Sterneck összeállításában szereplő eltérések az 5-ik tizedes egységeiben kifejezve — 150 és + 90, összesen tehát 240 egységben különböznek, a mi a tengerszinten képzelt 2400 m. magas háborgó tömeg-plateaunak felel meg. Budapesten $g_0 - \gamma_0 = + 0{\cdot}00064$, ugyanakkora, mintha alattunk a tengerszint magasságában 640 m. magas kőplateau terjedne. Természetes, hogy az említettem szabály csak háborgó tömeg jelenlétét mutatja ki, a nélkül, hogy igazi helyéről vagy igazi nagyságáról helyes fogalmat adna. Hosszadalmasabb számítással ez is lehetséges, mint ez egy újabb morphometriai módszer bemutatásánál ki fog tünni. Legyen itt elég annak a kiemelése, hogy négy különböző pontban végzett ingamegfigyelés teljesen elegendő bármily földalatti gömbalakú tömeg tömegének és pontos helyzetének megállapítására. Nem gömbalakú tömegek pontos kimutatása nagyobb nehézségek nélkül nem eszközölhető, és első sorban szükséges, hogy az e tárgygyal foglalkozni óhajtó geologus a különben egészen elemi módon tárgyalható gömbfüggvények elméletével foglalkozzék. Ha különben szomszédos állomásokon a nehézségi eltérések nagyon különbözők, vagy éppen ellentett előjelűek, akkor bizton feltételezhetjük, hogy a háborgó réteg mélysége nem lehet tetemes.

Most lássuk azon következtetéseket, melyeket von Sterneck méréseinek megbeszéléséhez köt. Itt mellőzöm a függőóneltéréseket, azon befolyás felemlítését, melyet a nehézség változása a szintezésre gyakorol és a geoid emelkedéseit a sphaeroid fölé, noha mindezen jelenségek geologiailag is értékesíthetők. A cseh-morva állomások egyennehézségű görbék szerkesztésére is szolgáltak, a mi a többi állomásnál, lánczolatos elrendezésüknél fogva, nem volt lehetséges.

A térkép megszemlélésénél a legfeltünőbb jelenség az, hogy a hegységek, különösen az Alpok alatt tömeghiányok, a síkságok, különösen a magyar Alföld alatt tömeghalmozódások vannak. E szabály alól azonban mégis kivételt képez az Alpok déli része az Adige mentén, a Semmering északi lejtője, a Kárpátok gerincze és egész déli lejtője, a stájer drávamelléki Bacher-hegység és Szarajevo. A síkságok közül kivételes magaviseletűek a bajor síkság Münchentől délre, a Lemberg és Stryj közötti, a Pó melléki síkság Mantuában és

a magas fekvése ellenére is tömeghalmozódást feltüntető Mezőség Erdélyben. Mindezen tömegeltérések semminemű összefüggésben sem állanak a Föld felszinén látható tömegekkel, és tisztán csak a földkéreg szerkezeti sajátságaiban lelhetik magyarázatukat. A folyamvölgyek, legalább az Alpokban, nem mutatnak összefüggést a nehézségi erővel, mert ezek mentén minden irányú eltérés észlelhető. Éppen úgy függetlenek tőle a hegyi tavak, melyek nehézségi viszonyai általában a környezetével egyeznek. De a folyamirányok, legalább az Adige, a Dráva, Mura, az Inn és a Moldva esetében határozottan a nehézségi erővel állanak kapcsolatban, mert a tömeghiányok területéről a tömeghalmozódás területe felé mutatnak. Az Alpok alatti tömegfogyatkozás, tekintet nélkül a hegység magasságára, kelet felé folyton kisebbedik és Grácz tájékán véget ér. Dél felé ellenben átmenet nélkül Mori táján szakad meg. A magyar Alföld tömeghalmozódása nyugot felé Bécsig és Gráczig terjed, miközben lápos és tavas vidékek a legnagyobb tömegszaporodást tüntetik fel. Vízválasztókon vagy körülfolyt vidékeken ellenben a nehézség kissé kisebb, úgy hogy teljes sík területen a folyók vagy más vizek kisebb tömeghalmozódású tájak által vannak szétválasztva. Úgy látszik tehát, hogy a hegységben talált viszonyokkal ellentétben a síkságon a víz előfordulása lényeges függvénye a nehézségnek.

Különben szem előtt tartandó, hogy a nehézségi eltéréseknek háborgó tömegekkel való magyarázása egyelőre csak relativ értékkel bír. Mert ha Bécsben a kiindulási ponton a nehézségi erőt kisebbnek tételeznők fel — az eddigi absolut meghatározások ily feltevésnek még mindig engednek kis teret — akkor az összes megmért vonalon a tömeghalmozódások kisebbednek, a fogyatkozások pedig ugyanazon magassággal nagyobbodnak.

A Magyarországon eszközölt mérések rövid értelmezése a következő: A galicziai síkság alatt mintegy 400 m. magas tömegdefectust találunk, mely a Kárpátok északi lejtője alatt 600 m.-nyire emelkedik és azután átmenet nélkül véget ér. Most kezdetét veszi a nagy süllyedő terület, melyhez a nehézségi mérések értelmében nemcsak hazánk legnagyobb része, hanem a Kárpátok gerincze és déli lejtője is tartozni látszik. Szolyva alatt a tömeghalmozódás a legnagyobb és 600 m. ma-

gasságot tesz ki; e rétegmagasság lényegesen változatlan marad az észak-magyar síkságon, de Nyiregyháza felé mintegy felére redukálódik. A megfigyelések szerint még legalább is Szolyva a magyar Alföldhez sorolandó. Túzsér, Kis-Várda, Demecser, Kemecse és Nyiregyháza vidéke a Tisza által nagy ívben körülfolyt vidék, mely egyebek között különösen látszik bizonyítani, hogy a Tisza és más vizek folyása is valamely összefüggésben áll a nehézség nagyságával. Valamennyi a Tisza, a Berettyó és a Kőrös völgyében fekvő állomás nagyobb nehézséget tüntet fel, mint a közbeeső terület állomásai. A Dobsina-marosvásárhelyi mérési vonalon Dobsina mellett kis halmozódás mutatkozik, mely valószínűleg északon csakhamar véget ér. Tornalja, Putnok és Vadna táján, a barlangdús mészplateau vidékén hatalmas, 600 m. magas tömeghalmozódásra bukkanunk, mely Tisza-Luczon 200 m.-nyi magasságra apad le. Ez állomás a Tisza és Sajó között hasonlóan fekszik, mint az előbb említett Nyiregyháza melletti állomások a Tisza-kanyarulatban, Szerencs, Tokaj és Királytelek állomásokkal együtt földalatti tömegeiket illetőleg egyenesen olyanoknak tekinthetők, mint a melyek a Tisza mentén elterülő tömeghalmazok szélein feküsznek.

Nagyváradtól keletre, a Kőrös mentén ismét tömeghalmozódással van dolgunk. A Kőrös és Szamos vízválasztójának legmagasabb pontján, Bánffy-Hunyadon ellenben a Bihar-hegység északi határán tömegfogyatkozás mutatkozik, teljes egyetértésben ama mindenütt igazolható tapasztalati ténynyel, hogy a tömeghalmozódással bíró vidékek tertiaer- vagy jelenkori lerakodásokkal kitöltött süllyedő területeken vannak, a tömegfogyatkozásos területek ellenben régibb formatiókhoz tartoznak. A nehézségi mérések alapján ugyanis valószínű, hogy a legújabbkori formatiók alkotta takarót áttörve, e helyen is régibb formatiókra bukkanánk.

Dobsinától a Bihar-hegységig a mérések lánczolata átszeli az észak-magyar Alföldet, mely mint láttuk, általában süllyedő terület, melyben különösen a folyamvidékek hatalmas földalatti tömegek fellépte által tünnek ki, míg a közbeeső területek még csak kisebb süllyedést szenvedtek. Vajjon e viszonyok immár stabilissá vált egyensúlyt jellemeznek-e, azt természetesen csak későbbi megfigyelések fogják eldönthetni.

Az erdélyi Mezőség alatt magas fekvése ellenére is tömeg-

halmozódás észlelhető, mely valószinűleg Marosvásárhelytől keletre véget ér. Ez esetben a tömeghalmozódást körösköril defectusok határolnák, a mennyiben Erdély összes határhegységei a palaeozoos és mezozoos formatiókhoz tartoznak.

Von Sterneck — bármily csábítónak is találja — a nehézségi változásokat nem hozza összefüggésbe geologiai ismereteinkkel, e feladat megoldását tisztán a szakemberre bízza. De lépten-nyomon kimutatja ama szoros kapcsolatot, a mely geologia és geodézia között fennáll és teljes mértékben csatlakozik Helmert azon nézetéhez, hogy az ingamérések lehető széles kiterjesztése mindkét tudomány számára egyaránt hasznot hozó. Sőt egyenesen mondhatjuk, hogy az ingamérések a Föld alakjának meghatározásában jövőben csak akkor szerepelhetnek, ha minden tekintetben beható geologiai discussión mentek át.

Még számos más módszerünk van részint a nehézség relativ megmérésére, részint változásainak kitüntetésére.

Reichenbach indítványára a libella is felhasználható a nehézségi változások megfigyelésére. Ha vízszintesen beállított libella tengelyébe 11 972 kgnyi gömböt állítunk, akkor a libella buboréka mintegy 0″.04-czel tér ki, a mi érzékeny műszeren még éppen észrevehető mennyiség. A súlynak a másik oldalra való átvitele után e kitérés természetesen kétszeres értékében olvasható le. Libellával számos megfigyelést eszközölt Plantamour, d'Abbadie, Foerster, s mindannyi azon eredményre jut, hogy a talaj úgynevezett spontán mozgásokat végez; sőt Foerster szerint a berlini csillagvizsgáló meridiánkörének oszlopai ugyanazon periodikus mozgást mutatják, mint a napfoltok gyakorisága. Bizonyára jeléül annak, hogy a spontán talajmozgás seismikus hatásoktól eltekintve, lényegesen csak a nehézségi erő változásaival azonos, melyek részben meteorologiai, részben pedig cosmikus factorokhoz vannak kötve.

Másik módszer a Jolly-féle rúgós mérlegen alapszik; ha ugyanis egyik végén megerősített spirális rugót megterhelünk, akkor a rugalmasság határán belül a rugó megnyulása a megterheléssel arányos. Ha a rugós mérleget más helyre viszszük, melyen a gyorsulás γ-val nagyobb, akkor a drót γ-val arányos meghosszabbodást fog mutatni, mert a rárakott m tömeg nehézsége tudvalevőleg mg-vel egyenlő, helyről-helyre tehát változó,

míg a drót rugalmassága a gyorsulástól nem függ. Azon tömeg, mely az aequator alatt 1000 grammot nyom, a polus alatt $\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = 0{\cdot}005\,202$-szer nyom többet grammonként, a mi 1000 grammnál már 5·202 grammot tesz ki. E súlyszaporodás természetesen csak rugós mérlegen mutatható ki; a közönséges mérleg mindkét csészéjébe tett tömeg ellenben ugyanabban az arányban változtatja meg nehézségét, úgy hogy az egyszer egyensúlyozott mérleg egyensúlyban marad, bárhová viszszük. Persze, ha a mérleg rúdja kellőképen hosszú, akkor már itt is észlelhető e különbség. — A nehézségi változás ugyanis $5{\cdot}0875 \sin^2\varphi$; ha tehát a két csésze $\delta\varphi$ geographiai szélesség különbség alatt van, akkor a változás $\delta g = 5{\cdot}0875 \sin 2\varphi\, \delta\varphi$. Ha a mérleg rúdja l hosszúsággal bír, a Föld sugara pedig r, akkor $\delta\varphi = \frac{l}{r}$ és $\delta g = 5{\cdot}0875 \sin^2\varphi . \frac{l}{r}$. Innen 45° szélesség alatt 1 m hosszú mérlegrúd két csészéjében a gyorsulási különbség 0·000 000 7987, ha a mérleg a meridián irányában van felállítva. Egy kilogrammnyi tömeg az egyik csészében a másikban tehát 1 kg + 0·799 milligrammal egyensúlyozható. Igen finom mérlegeléseknél e különbség észrevehetővé válik.

Ugyanazon elven, mint a Jolly-féle rugós mérleg, alapszik számos más műszer. Mascart például a nehézségi változásokat higanyoszlop magasságával méri, mely elzárt, állandó hőmérsékletű levegő nyomásával van egyensúlyozva. A műszer tehát lényegesen a barometer alakjával bír, csakhogy éppen ellenkezőleg a hosszabb cső nyitott, a rövidebb, a higanynyomást egyensúlyozó, levegőt tartalmazó cső zárt. A higany nyomása függ ugyanis a higanyoszlop magasságától, sürűségétől és a nehézségi gyorsulástól, míg az elzárt levegő rugalmassága ugyanazon hőmérséklet mellett állandó. Ez nyilván az előbbi eset spirálisát képviseli. Valamivel pontosabb Issel készüléke, mely a higanyoszlop magasságának változását capilláris csőben eltolódó folyadékcsepp állásából határozza meg. Mindkét készüléknek hátránya, hogy a levegő hőmérsékletének legkisebb változása tetemes eltéréseket hoz létre a rugalmasságában.

Kissé jobb, de teljesen ugyanazon elven alapszik a Siemens-féle bathometer, melyben a rugalmas erőt levegő helyett ane-

roid-doboz szolgáltatja. A készülék alul tölcséralakúan táguló aczélcső, mely higanynyal van megtöltve; fenekét hullámos bádog képezi, melyet négy alkalmasan választott rugó is tart a csőhöz. A cső higanya igen vékony capillaris csőben végződik, melynek mentén skála van alkalmazva. Ha most a készüléket oly helyre viszszük, a hol a nehézségi erő nagyobb, akkor a higanytömeg súlya nagyobbodik, míg az aczélbádog rugalmasságában változás nem esik; ezt tehát jobban megterheli, a capillaris folyadékfonal visszahuzódik a csőben. A négy rugó úgy van megválasztva, hogy a higanynak kiterjedését a hőmérsékletváltozás folytán kiegyenlítsék. A készülék eredetileg a tengeri mélységeknek közvetett meghatározására szolgált. Tengeren ugyanis a nehézségi erőt a Föld szilárd magván kívül egy bizonyos magasságú vízoszlop vonzása hozza létre; a tömeg homogeneitása folytán természetes, hogy a vonzás nagysága lényegesen a vízoszlop magasságától függ. A készülék tehát vagy számítás által, vagy kisérletileg úgy osztályozható, hogy indexe mindjárt azon közepes mélységet adja, mely fölött a hajó éppen áll. A Faraday nevű hajón 1872-ben tett mérések jó eredményekhez vezettek, mindazonáltal a műszer nem terjedt el.

Ugyanazon külömbség, mely fennáll a közönséges mérleg és a Jolly-féle rugós mérleg között, észlelhető a barometer és az aneroid között. Amaz, mint közlekedési cső, oly mérlegnek felel meg, melynek egyik csészéjében a levegő, másikában pedig vele egyenlő tömegű higanyoszlop áll. Éppen nem légsúlymérő tehát a barometer, hanem inkább légtömegmutató. Az aneroid ellenben Jolly-féle mérlegnek tekinthető: a csészéjébe rakott légoszlopot az aneroid-doboz rugalmassága tartja egyensúlyban. Ha tehát bizonyos helyen a barometert és aneroidot összeigazítottuk, akkor más nehézséggel bíró helyen külömbség fog mutatkozni, mely abban rejlik, hogy a barometeres magassági formulában az ismeretes

$$(1 + 0{\cdot}002\,623 \cos 2\varphi)\ (1 + 0{\cdot}000\,000\,314\,h)$$

nehézségi javítás fordul elő, mely az aneroiddal való magasságmérésben kiesik; ebben φ a geographiai szélességet, h a tengermagasságot jelenti. Ha tehát egy és ugyanazon helyen

az aneroid p′, a barometer p nyomást jelzi, holott a tenger szinén 45° szélesség alatt együtt mutattak, akkor

$$(g' - g)\, hs = p' - p$$

egyenlet adja a nehézségi változást, ha h és s a higanyoszlop magassága és sürűsége, vagy egyszerűbben

$$U = \frac{p' - p}{s}$$

adja e változásnak megfelelő potentiált. Ha tehát egyidőben leolvassuk H magasságban, pl. egy hegy tetején a barometert b és az aneroidot b′-et, akkor ezen két értéknek valamely magassági képletbe való helyettesítése két különböző magasságot ad, melyeknek külömbsége h, a megfigyelési helyen uralkodó nehézségi gyorsulással megszorozva, megadja a hegy potentiálját. A legkényelmesebb formulát szolgáltatja a Babinet-Bruns-féle magassági képlet, ha az alsó állomás nyomása helyébe b′-et, a felsőébe b-t írunk, s a nehézségi javításoktól eltekintünk. E szerint

$$U = 16\,002\,(1 + 0{\cdot}003\,9t)\, g \frac{b' - b}{b' + b},$$

ha t a megfigyelési helyen a levegő hőmérsékletét jelenti, s a páratartalom a hőmérséklet lineáris függvénye gyanánt tekinthető. Fokozottabb igényeknek teljesen megfelelhet a Mendelejeff és Hann-féle törvény felhasználásával készült formula.

Pontosabb eredményeket ad természetesen maga az inga; egy tekintet Sterneck ingaméréseire mutatja, hogy hegyes vidéken g-nek már harmadik tizedese is változik, a miből következik, hogy ez úton a hegy sajátos vonzási gyorsulása elég pontosan meghatározható. Egy már levezetett formula értelmében

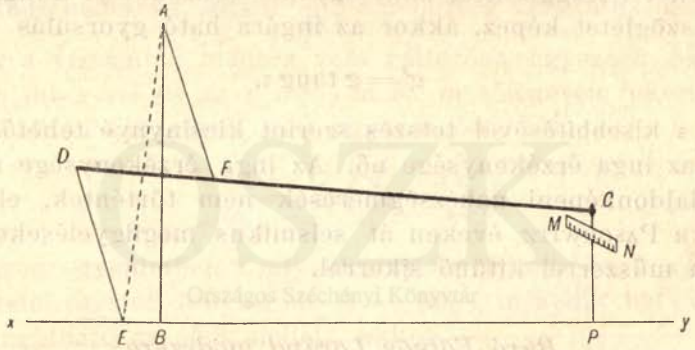
$$g' - g = 2g \frac{T' - T}{T}$$

az inga lengési idejének megváltozása annál nagyobb, minél nagyobb az inga lengési ideje maga. Hosszú ingák nem állíthatók elő ugyan, de hosszú lengésűek aránylag könnyen;

ilyen pl. maga a mérleg, melynek lengési ideje érzékenységével tetemesen nő.

Az ingát természetesen minden esetben óra is pótolhatja, melynek járása, mint Richer példájában, a nehézségi változásokat elárulja. Ide tartozik a pontos óra járásának azon sajátságos háborgása is, melyet feltüntet, valahányszor az órasúlyok az inga közelében vannak.

Darwin bifilár felfüggesztésű tükröt használ a nehézségi változások kimutatására; a tükör két egyenlő hosszú coconszál segítségével egyrészt valamely inga lencséjéhez, másrészt ennek állványához van erősítve. E készülékkel a nehézségi irány megváltozásában még $\frac{1}{200}''$ is észlelhető.



215. ábra. A Zöllner-féle horizontális inga.

Perrot a Jolly-féle mérleg spirálisára tükröt erősít; a rugó megnyulása mindig forgással is jár, mely sokkal pontosabban és érzékenyebben meghatározható.

Még számtalan módot találhatunk könnyű szerrel; Laška pl. a Newton-féle szingyürűket használja fel. Ezek tudvalevőleg úgy jönnek létre, hogy sík üveglapra csekély domborúságú lencsét fektetünk. Minél nagyobb valamely helyen a nehézség, annál szorosabb az érintkezés a két üveg között, és ennek mértékében tovavándorolnak a gyürűk. Ha pl. húrt feszítünk ki súly segítségével, akkor a nehézségi változás a húr hangjának magasságában is nyilvánul; ha e súly alá 12 000 kg.-nyi gömböt helyezünk, akkor a rezgési szám

$$\frac{n' - n}{n} = \frac{1}{5\,\text{milliom}}$$

arányban megnagyobbodik. Ha pl. $n = 1000$, a mi körülbelül a magas h-nak felel meg, akkor $n' - n = \frac{1}{5000}$, a mi húros chronograph mellett már érezhető lehet.

Mindezen módszerek azonban egy-kettőnek kivételével szintén abban a lényeges hibában szenvednek, hogy a mindig kis változást a tetemes gyorsulás mellett mérik le, a mi a megfigyelést pontatlanná, a módszert pedig érzéketlenné teszi.

E hibától ment a Zöllner-féle horizontális inga (215. ábra), melyet már a század elején Hengler használt fel hasonló mérésekre. Az inga vízszintes rúd, melyet két fonál tart meg közel vízszintes helyzetében. Ha a két fonál felfüggesztési pontja ugyanazon függélyesben fekszik, akkor az inga labilis, ha ellenben a két felfüggesztési pont egyenes összekötője a függélyessel ε szögletet képez, akkor az ingára ható gyorsulás

$$g' = g \operatorname{tang} \varepsilon,$$

tehát ε kisebbítésével tetszés szerint kicsinynyé tehető, a mi által az inga érzékenysége nő. Az inga érzékenysége mellett is tulajdonképeni nehézségmérések nem történtek, ellenben Rebeur Paschwitz éveken át seismikus megfigyeléseket végzett a műszerrel kitünő sikerrel.

Báró Eötvös Loránd módszere.

A legjobb és e mellett még legegyszerűbb műszer azonban, mely az összes methodusok koronáját alkotja, a torsiós mérleg a báró Eötvös-féle kivitelben. Alkalmazásából kitünik, hogy a nehézségi erő változásai minden azimuthban mások és mások, és annyi új szempontot nyit a geologiában és a földtektonika tanulmányozásában, hogy e tárgygyal való foglalkozás a legnagyobb haszonnal jár. Meg fogjuk tehát vizsgálni a csavarási inga mozgását azon esetben, hogy nem állandó erőmezőben forog, hanem azon feltevés alatt, hogy az erő az inga terében egyenletesen változik.

A közönséges inga adja a nehézségi gyorsulást a függélyesben, a Jolly-féle mérleg annak változását ugyancsak a vertikálisban, az Eötvös-féle módszer a változást tetszőleges azimuthban a horizontálisban. Így a három módszer teljesen kiegészíti egymást és a nehézségi erőnek irány és nagyság

szerint való teljes kijelöléséhez vezet, még pedig a módszereknek érzékenysége folytán néhány deciméternyi terekben. Kiindulásul szolgál az 554. oldalon levezetett Laplace-féle egyenlet, és általában mindazon vonatkozások, a melyek az erő térbeli változására vonatkozólag felállíttattak. Az ott teljesen határozatlannak meghagyott coordinátarendszert fektessük úgy, hogy a z tengely függélyesen lefelé álljon, az x és y tengely pedig a megfigyelési helyen, szabatosabban a műszer forgási pontján át a Föld két főgörbületi sugarának egymásra merőlegesen álló síkjába essék. Az xy sík tehát vízszintes, a műszer forgási pontján átmenő niveaufelület érintője és egyszersmind az ingarúd lengési síkja. Ha g a coordináták kezdőpontján uralkodó nehézség, akkor $\frac{\delta X}{\delta x}$, a nehézség vízszintes összetevőjének a vízszintes mentén való változása egyszerű összefüggésbe jut g-vel és az x irányon át merőlegesen fektetett sík ρ_1 görbületi sugarával. Volt ugyanis (553. l.):

$$\frac{\delta X}{\delta x} = f m \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3 x^2}{r^5} \right).$$

Ha ezen egyenletben x oly kicsiny — a mint hogy a kisérlet feltételei szerint tényleg az is — hogy második hatványa elhanyagolható az első mellett, akkor

$$f m = r^2 g$$

egyenlet tekintetbevételével lesz:

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \frac{g}{r}.$$

Ezen egyenlet első sorban gömbalakú Földre érvényes; ha ellenben a Föld sphaeroidikus, vagy éppen szabálytalan, akkor természetesen ama referentiás ellipsoid lép helyébe, a mely a Földet az inga forgási pontjában érinti. Ennek sugara azonban éppen — mint ezt az ellipsisnél is láttuk, a Föld görbületi sugara ρ_1. Ha tehát ρ_2-vel jelöljük az Y tengelyen átmenő vertikális síkban fekvő görbületi sugarat, akkor nyerjük a két nevezetes egyenletet:

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \frac{g}{\rho_1} \text{ és } \frac{\delta Y}{\delta y} = \frac{g}{\rho_2}.$$

E szerint tehát a vízszintes erőösszetevő megváltozása a vízszintes síkban egyszerűen vissza van vezetve a nehézségi erő és a változás irányába eső görbületi sugár viszonyára.

$\frac{\delta Z}{\delta z}$ jelenti a vertikális erő változását lefelé. Minthogy ez a Jolly-féle mérlegelési módszerrel megállapítható, nyerjük a Laplace-féle egyenlet által a következő vonatkozást:

$$g\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)+\frac{\delta Z}{\delta z}=-2\omega^2,$$

úgy hogy mérleg és inga együttvéve bármily helyen közvetlenül adja a Föld két főgörbületi sugara reciprok értékeinek összegét. Ha még ezen értékek különbségét is sikerülne meghatározni, akkor egyenként ρ_1 és ρ_2 is megvan, azaz egyrészt megállapítható a Föld alakja egyetlenegy ponton eszközölt nehézségváltozási mérésekből, másrészt megvan az előbb levezetett két egyenlet alapján $\frac{\delta X}{\delta x}$ és $\frac{\delta Y}{\delta y}$ is.

Egészen hasonló módon felállíthatunk más definitiókat azon $\frac{\delta X}{\delta z}$ és $\frac{\delta Y}{\delta z}$ erőváltozások számára, a melyeket nyerünk, ha a Z tengely mentén z kis útdarabbal megyünk tova és z végpontján keressük a nehézség vízszintes összetevőjét. Ezek már nem lehetnek a régiek, a melyek a coordináta kezdőpontban uralkodtak, hanem az x, illetve y-menti összetevő megváltozott $\frac{\delta X}{\delta z}$ z, illetve $\frac{\delta Y}{\delta z}$ z-vel. Minthogy e pontban az egész gyorsulás függélyes irányban g, úgy

$$\varepsilon_1=\frac{1}{g}\frac{\delta X}{\delta z} \text{ és } \varepsilon_2=\frac{1}{g}\frac{\delta Y}{\delta z}$$

nyilván azon szögletek (szabatosabban, tangensei ama kis szögeknek), melyekkel a nehézség iránya a Z tengelytől, a hosszegységgel lefelé haladva, a két főgörbület síkjában eltér.

Ha most az inga vízszintes rúdjának tengelye az egyik főgörbület irányába eső x tengelylyel α szögletet képez, akkor a nehézség forgásmomentuma, a mint ezt elemibb eszközökkel csak hosszadalmasabban eszközölhető számítás mutatja:

$$F = g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) K(1-\varepsilon)\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

a hol K a rúd tehetetlenségi momentuma, tehát

$$\Sigma(\xi^2 + \eta^2)\, m = K,$$

ha m jelenti a rúd tömegét tevő egyes tömegrészecskéket és $\xi^2 + \eta^2$ ezeknek a felfüggesztő dróttól való távolságát. $K(1-\varepsilon)$ pedig adva van:

$$K(1-\varepsilon) = \Sigma m(\xi^2 - \eta^2)$$

által, és hosszúkás, vékony rúd alkalmazása mellett η mindig oly kicsiny ξ-hez képest, hogy K és $K(1-\varepsilon)$ lényegesen nem tér el egymástól; azaz ε kicsiny, sőt a legtöbb esetben egészen el is hanyagolható. Ha a fellépett forgásmomentum folytán a felfüggesztő fonál ϑ szöglet körül csavarodott, akkor torsiós rugalmasság lép fel, melynek momentuma a szöglettel arányos és így

$$F = \tau\vartheta,$$

a hol τ a csavarodási együttható. Az ingarúd tehát, minthogy a két momentum egymás ellen működik, akkor lesz egyensúlyban, ha a két forgásmomentum egymással egyenlő, vagyis az egyensúly egyenlete

$$\tau\vartheta = g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) K(1-\varepsilon)\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

A drót csavarási szögletét persze nem ismerhetjük, ha a rudat egyetlenegy állásban figyeljük. De ha az egész mérleget forgatható asztalra helyeztük és mint egészet úgy forgatjuk, hogy a rúd tengelye az x tengelylyel az előbbitől eltérő α' szögletet képezze, akkor a drót csavarási szöglete is megváltozik, ϑ' lesz és az elforgatás $\vartheta' - \vartheta$ a rúdhoz és a mérlegszekrényhez erősített mutatók vagy jobban tükröknek viszonyos elfordulásából lemérhető és ezzel egyenlő.

E szerint világos, hogy a rúdnak három állásában való leolvasása, azaz a drótban létesülő csavarási változások észlelése elegendő arra, hogy úgy az α szögletet, mint az $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ mennyiséget megkaphassuk. Ezzel tehát adva lesz a két fő-

görbületi sugár reciprok értékeinek különbsége, és az ingarúd nyugalmi helyzetének iránya a főgörbületi sugár irányához képest. A számítás azonban jobban áttekinthető és könnyebb is, ha négy állást létesítünk, úgy hogy az állások közül kettő-kettő egymásra merőleges, e két pár pedig egymással 45°-nyi szögletet képezzen.

Az eredeti állásban lesz:

$$\vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) g \frac{\sin 2\alpha}{\alpha},$$

és erre merőlegesen, a midőn $\alpha' = \alpha + 90^0$:

$$\vartheta' = -\frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) g \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}.$$

Az eredeti állástól 45°-ra $\alpha'' = \alpha + 45^0$, és ezért

$$\vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) g \frac{\cos 2\alpha}{2}$$

és erre ismét merőlegesen, a midőn $\alpha''' = \alpha + 135^0$:

$$\vartheta'_1 = -\frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) g \frac{\cos 2\alpha}{2}.$$

E négy egyenlet páronként levonva ad:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_2}\right) g \sin 2\alpha,$$

$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right) g \cos 2\alpha$$

és ezekből az egyenletekből következik:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta'_1 - \vartheta_1}$$

és

$$\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1} = \frac{\tau}{g\,K(1-\varepsilon)}\sqrt{(\vartheta'-\vartheta)^2+(\vartheta'_1-\vartheta_1)^2}.$$

Az első egyenlet az α szöglet számára természetesen két, egymástól 90°-kal különböző értéket ad; az egyik adja ρ_1, a másik a ρ_2 főgörbület irányát a rúd eredeti irányához képest.

Az ε, a mely amúgy is nagyon kicsiny, a rúd méreteiből adódik, a másik $\frac{\tau}{K}$ faktor szintén könnyen beszerezhető, ha az ingát légüres térben pusztán rugalmassága folytán okozott lengései közt észleljük. Ha ugyanis a lengési idő T, akkor már ismert egyenlet alapján:

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T^2}.$$

A levegő ellenállása és a nehézségi változásokból eredő forgásmomentum befolyása azonban változást hoz létre, melynek folytán a lengési idő a complikáltabb

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha - \beta^2$$

egyenletből számítandó, ha β a levegő surlódásától függő állandó, mely az amplitudók fogyásából igen nagy pontossággal számítható. Ellenállás nélküli térben valamely inga kilengése, mint már tudjuk,

$$s = a \sin \pi \frac{t}{T},$$

ellenben ellentálló mediumban

$$s = a e^{-\beta t} \sin \pi \frac{t}{T},$$

ha e a természetes logarithmusok alapszámát jelenti. Míg az első esetben az amplitudó minden lengésnél ugyanaz marad, addig az utóbbi esetben az egyes amplitudók, azaz a kilengések nagyságai az egyes lengési idők közepén, midőn

$$t = \frac{T}{2}, \frac{3T}{2}, \frac{5T}{2} \ldots$$

a következők:

$$s_1 = a e^{-\frac{T}{2}\beta}, \quad s_2 = -a e^{-\frac{3T}{2}\beta}, \quad s_3 = +a e^{-\frac{5}{2}T\beta}, \quad s_4 = -a e^{-\frac{7}{2}T\beta}$$

úgy, hogy két egymásra következő amplitudó viszonya szolgáltatja β-t. Ugyanis az előjeltől eltekintve:

$$e^{\beta T} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \frac{s_3}{s_4} = \dots$$

Ha az ingarudat előbbi helyzetére merőlegesen lengetjük, α helyébe tehát $\alpha + 90^0$-ot írunk, akkor

$$\frac{\pi^2}{T'^2} = \frac{\tau}{K} + g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha - \beta^2,$$

minthogy az új állásban a forgásmomentum, tehát a lengési idő is más. A két egyenlet összege ad:

$$\pi^2\left(\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T'^2}\right) = 2\frac{\tau}{K} - 2\beta^2,$$

mely egyenlet $\frac{\tau}{K}$ kiszámítására már teljesen alkalmas. Ugyanígy a két egyenlet különbsége

$$\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2}\right) = 2g\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)(1-\varepsilon)\cos 2\alpha$$

és két más, az előbbiekkel 45^0-nyi szöget képező állásokban

$$\pi^2\left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_1'^2}\right) = 2g\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)(1-\varepsilon)\sin 2\alpha.$$

Ennélfogva pusztán lengésekből is meghatározható úgy a két főgörbületi sugár reciprokainak különbsége, mint ezeknek a rúd eredeti állásával bezárt szöglete.

Ha az amúgy is kicsiny ε mennyiséget egészen elhanyagolnók, és a lengési idő értékét pusztán a drót rugalmassága folytán T_0-val jelöljük, akkor elegendő közelítéssel a következőkben mondhatjuk ki eddigi eredményeinket: a Coulomb-féle mérleg drótja a mérlegszekrény és torsiófejnek együttes forgatása közben megcsavarodik; e csavarodás nagysága a rúdnak 90^0-kal való elforgatásánál

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} g\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\sin 2\alpha.$$

A mérlegrúd lengési ideje ugyanilyen forgatásnál szintén megváltozik; 90^0-os forgatásnál e változás

$$T' - T = \frac{T_0^3}{\pi^2} g\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\cos 2\alpha,$$

és $\vartheta' - \vartheta$ maximum, ha $\alpha = 45^0$ és $\alpha = 135^0$; $T' - T$ maximum, ha $\alpha = 0$ és $\alpha = 90^0$. E maximum értékek között a következő egyszerű vonatkozás áll fenn:

$$(T' - T)_{max} = T_0 (\vartheta' - \vartheta)_{max}.$$

Báró Eötvös Loránd a Coulomb-féle mérlegnek még egy másik faját is szerkesztette. Ez alaknál a 21 hosszú vízszintes rúdnak csak egyik végén van golyó, a másik végén a vonzó golyó h hosszúsággal lejebb függ a rúd végéhez erősített fonálra függesztve. Ennek a forgásmomentumában előfordul éppen úgy, mint a Clairaut-féle egyenlet levezetése alkalmával a Föld esetében, az $\Sigma m \xi \zeta$ kifejezés, mely ez egyszerű esetben könnyen számítható. A felfüggesztett gömb ugyanis egyetlen m tömegű pont gyanánt tekinthető, mely a forgási tengelytől, a felfüggesztő dróttól a rúd fél hosszával, l-lel áll el. És minthogy h mélységben függ a rúd alatt, egyszerűen

$$\Sigma m \xi \zeta = hlm$$

leend. Ezen szerkezet forgásmomentuma:

$$F = g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) K (1 - \varepsilon) \frac{\sin 2\alpha}{2} + (\varepsilon_2 \cos \alpha - \varepsilon_1 \sin \alpha) g \, . \, hlm,$$

a hol ε_1 és ε_2 a korábban említett két szögletet, illetve irányváltozást jelenti. Ha a mérlegrudat előbb az α tengely irányába állítjuk, a midőn is $\alpha = o$, akkor egyensúly esetén ismét

$$\tau \vartheta = \varepsilon_2 \, g \, h \, l \, m.$$

Ha az egész mérleget változatlanul 180^0 körül forgatjuk, akkor $\alpha = 180^0$, és

$$\tau \vartheta' = - \varepsilon_2 \, g \, h \, l \, m.$$

Ha azonban a rudat előbb 90^0-kal, majd 270^0-kal állítottuk a főgörbületi sugár irányára, akkor

$$\tau \vartheta_1 = - \varepsilon_1 \, g \, h \, l \, m, \text{ illetve } \tau \vartheta_1' = \varepsilon_1 \, g \, h \, l \, m.$$

Az egyes ϑ, ϑ', ϑ_1 és ϑ'_1 ugyan ismeretlen, de az időközi $\vartheta' - \vartheta$, $\vartheta_1' - \vartheta$ a készülék álló és mozgó tükrének elfordulásával adott. Ennélfogva:

$$\vartheta' - \vartheta = - 2 \varepsilon_2 \, . \, gh \frac{lm}{\tau} \text{ és } \vartheta'_1 - \vartheta_1 = 2 \varepsilon_1 \, . \, gh \frac{lm}{\tau},$$

úgy hogy immár a nehézségi erő lefelé mért irányváltozása is két egymásra merőleges irányban ismeretes. Az $\frac{lm}{\tau}$ mennyiség vagy az eszköz méreteiből, vagy a függő súlyra kívülről ható vonzó tömegek által okozott kitérésből könnyen meghatározható, míg h egyenesen lemérhető.

A Coulomb-féle mérleg ezen két alakja tehát megadja a nehézség szintfelületének főgörbületi irányait és e főgörbületek különbségét $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$, másrészt a nehézség változását a niveaufelület érintősíkjában, azaz a vízszintesben és e változásnak irányát. A Jolly-féle mérlegelés adja a nehézség lefelé való változását $\frac{\delta Z}{\delta z} = \frac{\delta g}{\delta z}$-t, és ennélfogva a Laplace-féle egyenlet a főgörbületek összegét is, mert

$$g\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = -2\omega^2 - \frac{\delta g}{\delta z},$$

és így a geoid mérete egyetlenegy ponton eszközölt megfigyelések által adott.

A Jolly-féle mérlegelési módszernél sokkal tökéletesebb lenne a nagy lengési idejű nehéz inga, csakhogy annak megvalósítása a vízszintes forgási tengely szabatos előállításának nehézségei folytán egyelőre nagy akadályokba ütközik.

Kérdés már most, mily rendűek a lemérendő mennyiségek, és lehet-e elég érzékeny eszközöket szerkeszteni? E czélból vegyük elő Listing typikus földsphaeroidját, a mely számára

$$a = 637\,736\,500 \text{ c}, \quad b = 635\,529\,800 \text{ c}$$

és

$$g = 978{\cdot}0728 + 5{\cdot}0875 \sin^2 \varphi \text{ c}.$$

Budapest számára ($\varphi = 47^0\ 30'$) nyerünk ez adatokból:

$$g = 980{\cdot}838$$

$$g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 4836.10^{-12}.$$

Ha δg a nehézség legnagyobb változása a niveaufelület mentén, akkor a számítás szerint

$$\delta g = 7\,960.10^{-12}$$

és

$$E = \frac{\delta g}{g} = 8\,115.10^{-15} = 0{\cdot}000\,001\,673''$$

és a nehézség lefelé való változása

$$\frac{\delta g}{\delta z} = 3\,080.10^{-9}.$$

A drót elcsavarodása az első fajú Coulomb-féle mérlegen legnagyobb, ha $\alpha = 45^0$ és 135^0, azaz, a mikor a rúd tengelye a meridiánnal mindkét oldalon 45^0-nyi szögletet képez. Ha a mérleg lengési ideje $T_0 = 1000^s$ volna, akkor az előbb idézett egyenlet alapján

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{1000^2}{\pi^2}\, 4\,836.10^{-12} = 0{\cdot}000\,490 = 1'.7.$$

Ha pedig a lengési idő a meridián körül T, arra merőlegesen T', akkor

$$T - T' = T_0\,(\vartheta' - \vartheta) = 0^s.49.$$

A Coulomb-féle mérleg másik fajánál, a mikor a rúd egyik súlyát mélyebbre függesztjük és a rudat a meridiánra merőleges két állásba helyezzük, lesz az elcsavarodás a két állás között:

$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = + 2\,\varepsilon_1\, g\, h\, \frac{l\,m}{t}.$$

Ám ez esetben a nehézségi erő irányeltérése maximum, $\varepsilon_1 = E$, és ennek folytán $\varepsilon_1\, g = \delta\, g$. Egyik, tényleg alkalmazásban volt eszköznél $h = 100\,c$, $l = 13{\cdot}33\,c$, $m = 30\,gr$ és $\tau = 0{\cdot}4$, úgy hogy

$$\vartheta_1' - \vartheta_1 = 2 \times 7960.10^{-12}\, 100\,000 = 0{\cdot}001\,492 = 5'.1.$$

Ezen elcsavarodások mind biztosan lemérhető mennyiségek, feltéve, hogy sikerül ingákat előállítani, a melyek lengési ideje legalább is 1000^s vagy 17^m s melyek egyensúlyi helyzetüket biztosan tartják meg.

Báró Eötvös Loránd-nak sikerült előállítani ily igényeknek megfelelő készülékeket, a melyek még sokkal nagyobb lengési

idő mellett bámulatosan tartották meg úgy egyensúlyi helyzetüket, mint mozgásuk szabályosságát, még pedig nemcsak jól védett pinczékben, hanem a laboratoriumnak bármely helyiségében, sőt éjjel egyszerű vászonsátor alatt a szabadban is. Az egyetlen fogás abban állt, hogy a mérlegrudat kettős falú és kismagasságú fémszekrénybe zárta. E szekrény majd vízszintes hengercső volt, mely a rúdat szorosan körülzárta, majd lapos, hosszúkás parallelepipedon, majd meg alacsony körhenger. Ez utóbbi alak természetesen a legelőnyösebb, mert a rúd benne mozgásának minden phásisában ugyanazon symmetrikus helyzetet foglalja el a szekrény falaihoz képest.

A szekrények kettős, 0·5 — 1 c-nyi levegőréteg által egymástól elválasztott falai 2—4 mm vastag sárgarézből készültek s ilyen kettős falúak s ugyanakkora vastagságúak a drótot bezáró csövek is. A belső szekrényben ily módon az egyoldalú melegedések hatása jelentékenyen kisebbedik s a külső hőmérsékletváltozások a minden részükben lehetőleg egyenlő vastagságú fémfalakon és légrétegeken át minden oldalról majdnem egyidejűleg hatolnak a rudat környező térbe. A csak két vagy három centimeter magas lengési térben a felfelé irányított légáramlások hatása is alig lesz érezhető. Ehhez hozzátéve még azt, hogy a minden oldalról jól vezető környezet a külső elektromos befolyásokat is teljesen kizárja, magyarázatát adtuk az Eötvös-féle eszközökben észlelt a Coulomb-féle mérleggel eddig tett tapasztalatok után bizonyára meglepő állandóságnak.

A mérleg rúdja rendesen 100—150 c hosszú platinadróton függött, a melyet előzetesen már hónapok óta ráfüggesztett súlyok nyujtottak. A rendesen használt drót átmérője 0·04 mm, hordképessége 120—130 gr, a reá felfüggesztett szerkezet súlya pedig 80—100 gr. volt. A drót egy méter hosszúságú részére vonatkozólag átlagban $\tau = 0{\cdot}3$.

Boys nyomán kisérletek téttettek ugyanakkora hordképességű és hosszúságú quarczfonalakkal is, melyeknek elkészíttetésük után azonnal bámulatosan állandó rugalmassága sok előnynyel kecsegtet. Hordozható eszközöknél azonban a platinaszál előnyösebb, mert e nagy hordképességű merev quarczfonalak nagyon könnyen törnek. Érzékenységük is kisebb a platináénál, alig sikerült olyan 100 grammot hordó quarczfona-

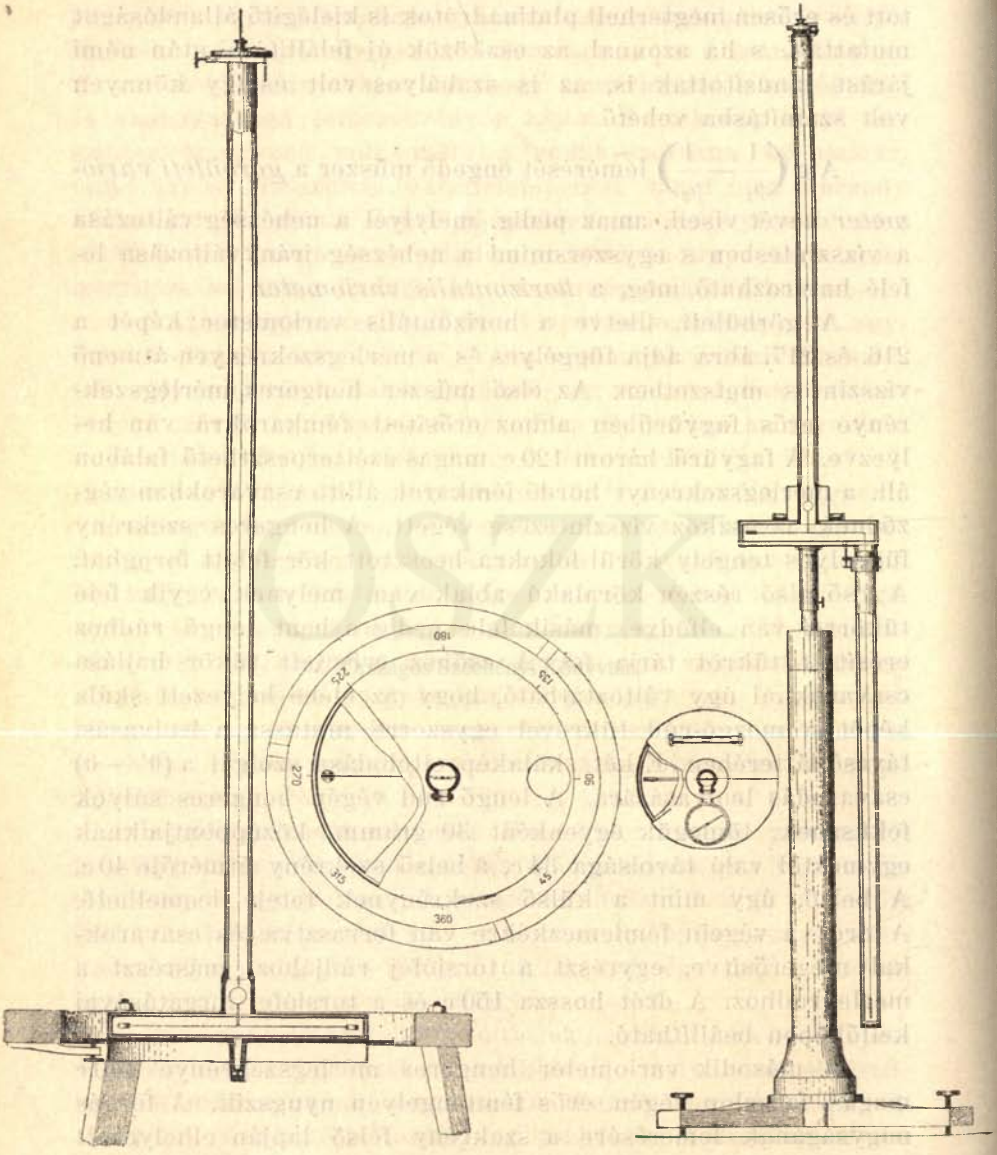
lat készíteni, melynek egy méter hosszú darabjára vonatkozólag τ az egységnél kisebb lett volna. A hosszú időn át kinyujtott és erősen megterhelt platinadrótok is kielégítő állandóságot mutattak, s ha azonnal az eszközök új felállítása után némi járást tanusítottak is, az is szabályos volt és így könnyen volt számításba vehető.

A $g\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ lemérését engedő műszer a *görbületi variometer* nevét viseli, amaz pedig, melylyel a nehézség változása a vízszintesben s egyszersmind a nehézség irányváltozása lefelé határozható meg, a *horizontális variometer.*

A görbületi, illetve a horizontális variometer képét a 216. és 217. ábra adja függélyes és a mérlegszekrényen átmenő vízszintes metszetben. Az első műszer hengeres mérlegszekrénye erős fagyürűben ahhoz erősített fémkarokra van helyezve. A fagyürű három 120 c magas szétterpeszthető falábon áll, a mérlegszekrényt hordó fémkarok állító csavarokban végződnek az eszköz vízszintezése végett. A hengeres szekrény függélyes tengely körül fokokra beosztott kör felett foroghat. A cső alsó részén köralakú ablak van, melynek egyik fele tükörrel van elfödve, másik fele pedig a bent lengő rúdhoz erősített tükröt tárja fel. A csőhez erősített tükör hajlása csavarokkal úgy változtatható, hogy az elébe helyezett skála képét a mozgó-rúd tükrével egyszerre mutassa a leolvasási távcső látterében. E két skálakép eltolódása szolgál a $(\vartheta' - \vartheta)$ csavarodás leolvasására. A lengő rúd végén hengeres súlyok feküsznek, tömegük egyenként 30 gramm, középpontjaiknak egymástól való távolsága 34 c, a belső szekrény átmérője 40 c. A belső, úgy mint a külső szekrénynek teteje leemelhető. A drót a végein fémlemezkékre van forrasztva és csavarokkal megerősítve, egyrészt a torsiófej rúdjához, másrészt a mérlegrúdhoz. A drót hossza 150 c és a torsiófej forgatásával kellőképen beállítható.

A második variometer hengeres mérlegszekrénye 140 c magas faoszlop végén erős fémtengelyen nyugszik. A forgás nagyságának lemérésére a szekrény felső lapján elhelyezett iránytű szolgál. A rúdra függesztett hengeres súly kettősfalú csőben van elzárva, a mely a szekrény fenekén alkalmazott csavarokkal függélyesen állítható. A csavarodás lemérésére

szolgáló tükrök úgy vannak elhelyezve, mint a görbületi variometeren. A felső mérődrót hossza 110 c, a függő henger súlya



216—217. ábra. Báró Eötvös görbületi és horizontális variometere.

30 gramm, forgási karja 13·2 c, felfüggesztő drótjának hossza pedig 100 c.

Az eszközökkel tett eddigi megfigyelések már egy épület belsejében rendkívül nagy nehézségi változásokat tüntetnek fel, és különösen szembeszökő a pinczehelyiségnek megfelelő üreg látszólagos taszítása. A Gellérthegy hatása a Rudasfürdő igazgatósági épületének földszintjében szintén nagyon szembeszökő. A görbületi variometer rúdjának lengési ideje e helyen a hegy felé irányított egyensúlyi állás körül $564^s.6$, arra merőlegesen $572^s.2$ volt. Az elcsavarodás a mérlegrúd két egymásra merőleges, az előbbi iránynyal 45^0-nyi szöget képező állítása közben 45′, alig 1′-czel eltérően attól az adattól, a melyet a lengési időkből számíthatunk. A tudományos Akadémia egyik első emeleti termében a készülék rendkívüli érzékenységgel mutatta a Duna legcsekélyebb áradását és két hónap megfigyelési sorozat a vasmegyei Sághhegyen a műszernek szabadban való alkalmazhatósága mellett is tanúskodik.

Báró Eötvös Loránd a gravitatiós multiplikálás és a gravitatiós compensálás néven rendkívül fontos módszereket dolgozott ki, a melyeknek segítségével egyrészt gyors csillapodásuk miatt nem pontosan megfigyelhető lengések a legnagyobb élességgel levezethetők s másrészt a műszer érzékenysége majdnem a végtelenig fokozható. Kétségtelen, hogy ezen methodusok, a melyek egyenlő haszonnal alkalmazhatók és alkalmaztattak már is a földmágnesség tanában, és melyek a Föld közép sűrűségének oly pontos értékéhez vezettek és a nehézség függetlenségét az anyag mineműségétől értékének $\frac{1}{20\,000\,000}$-ig kimutatták, a földrajz, különösen annak geologiai és tektonikai részének egyik legfontosabb műszere leend.

XXI. FEJEZET.

A földfelület morphometriája.

Miután már a Föld alakját, mint egészet meghatároztuk, hátra van még, hogy egyes felületi alakzatairól is szóljunk különösen. A tárgy nem csupán az összehasonlító geographia szempontjából fontos, hanem genetikusan is jelentős, mert sok esetben összehasonlítható számadatok nyomán fogalmat

és mértéket alkothatunk azon erők és azoknak hatásmodora számára, melyek a szóban forgó alakot létesítették.

A szorosabban vett morphometria Humboldt kezdeményezése után Sonklar „Allgemeine Orographie“-jával vette kezdetét; czélja volt a hegységek amaz általános méreteinek meghatározása, melyek a hegyek térbeli viszonyait összehasonlíthatókká teszik. Benne a hypsometria az adatgyűjtő, az orometria pedig a feldolgozó tudomány, mely ma már teljes geometriai elmélettel és azon alapuló monographiákkal bír, melyek, ha egyebet nem, legalább annak szükségességét dokumentálják, hogy a hegyek alakulása számára habár schematikus fogalmakat is alkothassunk magunknak.

Sonklar szerint a hegységek térbeli viszonyainak jellemzésére 12 orometriai elem szükséges és elegendő; ezek: 1. a közepes csúcsmagasság; 2. a közepes réselés; 4. a közepes gerinczmagasság; 5. a gerincz közepes lejtése. Mindez öt elem megadja a gerinczvonal magasságát, minőségét és a hegység meredekségét. Ezeken kívül 6. a völgyek közepes magassága; 7. a völgyek közepes esése; 8. a hegység általános párkánymagassága és 9. a visszonylagos gerinczmagasság megadják a völgyek mélységét és hajlásviszonyait, valamint a gerincz relativ emelkedését a hegység általános táblatömege fölött. Végül 10. A hegy talpazata és valamennyi gerincz térfogata; 11. az egész hegység tengerszint feletti magassága és 12. a hegységgel egyenlő térfogatú tábla magassága mintegy mértékét szolgáltathatják azon hegyet emelő erőnek, melynek a hegység lételét köszöni.

Az 1. és. 2. elem a hegység valamennyi csúcsának, illetve nyergének absolut magasságából képezett közép, míg a 3. elem e kettőnek egyszerűen külömbségével egyenlő. Ha nincs megmérve valamennyi csúcs, akkor természetszerűen azokat kell választani, melyek lehetőleg egyenletesen el vannak oszolva a gerincz mentén. Ugyanez szól természetesen a nyergekről is. Általában pedig itt mindazon szabályok mérvadók, melyek a több számból vett átlag képzésénél állanak. A közepes réselés, mint a közepes csúcs és nyeregmagasság külömbsége egyrészt a hegység szakadozottságát szabja meg, másrészt pedig könnyebb vagy nehezebb átjárhatóságát és festői szépségét méri. A közepes nyeregmagasság meghatározása némi óvatos-

ságot igényel, mert trigonometriai felvételeknél a nyergek nem valami jól láthatók, úgy hogy általában nagyobb a megmért csúcsok száma, mint a nyergeké.

Ha a közepes csúcs és nyeregmagasságból ismét közepet veszünk, akkor a gerincz közepes magasságát nyerjük. Ez nyilván azon vízszintes egyenesnek magassága, mely keletkeznék, ha a csúcsokat és nyergeket elsimítanók. A közepes réselés és gerinczmagasság tehát nem független elemek, hanem az első két elemből egyszerű módon kiszámíthatók. E mellé kiegészítésül adhatjuk a legmagasabb csúcs és a legmélyebb nyereg magasságát. A közép gerinczmagasság meghatározása a hegységet nyilván fekvő, három oldalú prismává alakítja, vízszintes, azaz mindenütt egyenlő magas felső éllel.

Mindezen adatok természetesen a mellékgerinczekre is vonatkoztathatók; ha tehát a gerincz és résmagasság az egész hegységre határozandó meg, akkor az egyes gerinczek számára nyert adatokat a gerinczek hosszával szorozzuk és e szorzatok összegét az összes gerinczek hosszával elosztjuk. Itt nyilván oly középképzésről van szó, melyben az egyes hegyágak gerinczhosszúsága a súlyt képviseli.

Az 5. elemet, a gerincz közepes lejtését megkapjuk, ha a közepes gerinczmagasságot egynehány alkalmasan választott völgypont magasságának levonása által relativ magasságra redukáljuk, és a gerincznek e völgypontoktól való vízszintes távolságával osztjuk. Ezen elem a hegységet alkotó anyag kohaesió és súrlódási factora útján jellemző, és a hegységnek úgy járhatóságát, mint növényzettel való burkolatát, mint a róla lefolyó meteoros vizek esését engedi mérlegelni. Ha ezen lejtést ismét a gerinczvonalak hosszúságának súlybavetésével középpé egyesítjük, megkapjuk az egész hegység közepes lejtését. A 6. elem a völgy hosszán lehetőleg egyenletesen elosztott pontok közepes magassága, tehát magassága azon parallelegrammnak, mely a völgy hosszúsági szelvényével egyenlő területtel és alapvonallal bír. A 7. elem a völgy fejétől a völgy torkolatáig húzott egyenes hosszának viszonya a völgy hosszához. A völgy fejének meghatározása Sonklar szerint nem minden nehézség nélkül történhetik, alkalmas interpolatió azonban jó térkép segítségével czélhoz vezethet.

A hegység párkányán érti Sonklar amaz, a tenger szintjén

kezdődő prismatikus földtömeget, melynek horizontális felületén a hegygerinczek, mint háromszögű prismák nyugosznak; alapja a hegység vízszintes talpa, mely a térképből könnyen kivehető. Ennek meghatározása által a hegység két könnyen mérhető testre bomlik: a párkányra és az összesített gerinczekre. A 8. elem, a párkánymagasság, maga a gerinczet mindkét oldalon kisérő völgyek közepes magassága, ha e közepet is a völgyek hosszúságának súlybavetésével képezzük. A 9. elem ismét a 4. és 8. külömbségével egyenlő. Ezek után már a hegység térfogatának kiszámítása sem okoz nehézségeket. A talpazat vagy párkány térfogata ugyanis a hegy horizontális területének és a talp közepes magasságának mérőszámaiból képezett szorzat, míg az összes gerinczek térfogata az összes gerinczhosszúság, a gerinczek relativ magasságának négyzetéből és a közepes lejtés cotangenséből képezet szorzat, megfelelően ama felfogásnak, hogy a gerinczek a párkányon fekvő háromoldalú prismák, melyek hossza az összes gerinczek hosszával, és magassága a gerinczek relativ magasságával egyenlő. A párkány és a gerinczek egyesített térfogata szolgáltatja a 10. elemet, míg a 12. ezen térfogatnak s a hegy vizszintes alapjának viszonyából a hegységgel térfogatilag felérő tábla magasságát adja.

Látnivaló tehát, hogy ezen 12 elem közül 5 nem független; ezek a 3., 4., 9., 11. és 12., úgy hogy a hegység teljes jellemzésére Sonklar szerint végre csak 7. egymástól független adat marad, és ezen kevés adatban sürítjük össze azt a sok mérést, melyet valamely hegység megmérése czéljából eszközlünk, s melyek mindegyike magában véve is teljesen jellemző számadat, melynek az általános középben teljesen elmosódnia nem volna szabad.

Sonklar elméletét az Alpesek egynehány csoportjára alkalmazta; a legérdekesebb számadatok azok, melyek az egész hegység lejtésére vonatkoznak s melyek szerint a Hochschwab csoport közepes lejtése 17° 11′, a Zillervölgyi alpoké 26° 13′, az Ötzthali csoporté 20° 17′. Látnivaló tehát, hogy ezen lejtések még a magashegység esetében is igen kis számok, s hogy nagyobbak gneisz és gránitnál (25°—26°), mint csillámpala esetében (20°.3—23°.7). Épp ily érdekes a közép talpmagasság adata is, mely mutatja, hogy nem mindig a legmagasabbra

törő alakok állanak hatalmas talpon. Az Alpokat tevő egyes csoportokban a közép talpmagasságnak nyugotról kelet felé való fogyása élénken mutatja a közepes magasság csökkenését az Alpok keleti végződése felé.

A Sonklar-féle utasítások számtalan, gyakran csak a számoló geographus személyes ízlése szerinti átalakulásokon mentek át és elvégre is egy egész geometriai rendszert alkottak, melyet különösen dr. Albrecht Penck a „Morphologie der Erdoberfläche“ II. kötetében ír le. Az egész, és bármely morphologiai elemre alkalmazható gondolatmenet a következő: ha valamely $F = \Sigma f_n$ vízszintes területen álló alakzat f_n nagyságú területelemén az ω_n morphologiai érték (magasság, lejtés, vagy hasonlók) uralkodik, akkor ez alak számára a jellemző morphologiai érték Ω az

$$\Omega = \frac{\Sigma f_n \omega_n}{\Sigma f_n}$$

egyenlet által fejezhető ki, mely elvben az ω értékeknek a hozzájuk tartozó f területek súlybavételével számított középértékével azonos. Ezen egyenlet, noha magában véve világos, könnyen igazolható. Az $F = \Sigma f_n$ végtelen kis, m számú egyenlő területelemre bontjuk, úgy hogy mindegyiknek $f = \frac{\Sigma f_n}{m}$ nagysága leend; a morphologiai középérték pedig, ha ennek értéke az egyes területi elemeken ω_n,

$$\Omega = \frac{\Sigma \omega_n}{m}$$

leend. Ha számláló és nevezőben f-vel szorozzunk, lesz:

$$\Omega = \frac{f\omega_1 + f\omega_2 + .. + f\omega_m}{F}.$$

A számlálóban most összefoglalhatjuk mindazon területi elemeket, melyeken ugyanazon ω_1, ugyanazon ω_2 .. elem uralkodik: ha ezen területek sorban f_1, f_2 .. akkor végre

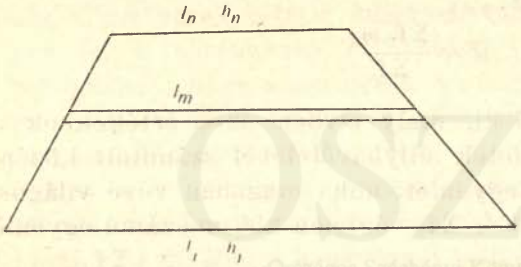
$$\Omega = \frac{f_1\omega_1 + f_2\omega_2 + .. + f_m\omega_m}{mf},$$

a mi az adott egyenletünkkel azonos. A mód, melyen az alak vízszintes alapját végtelen elemekre bontjuk, teljesen közöm-

bös, és mindig ugyanazon értékhez jutunk, ha a felületi elemek végtelen kicsinyek, de különben bármily alakúak is. A végtelen kis részekre való bontás azonban csak akkor sikerül szigorúan, ha az alakot geometriai felülettel tudnók azonosítani. Miután ez geographiai alkalmazásokban nem lehetséges, nem marad egyéb hátra, minthogy lehetőleg kis, véges számú területelemekre bontsuk. E mellett természetesen a felbontás módja már nem közömbös, s így lehetséges, hogy egy és ugyanazon morphologiai fogalomra oly sok eltérő formulánk van.

Lássuk a legfontosabb elemeket kissé közelebbről s lehetőleg pontos közelítő számítással.

Gondoljunk (218. ábra) egy egyenletesen emelkedő trapezet, mely a h_1 és h_2 magassággal bíró isohypsák l_1 és l_n ívdarabjai között emelkedik, s keressük ennek középmagasságát. Ha a trapezet végtelen keskeny $\frac{d}{n}$ szélességű sávokra bontjuk, azáltal, hogy magasságát d-t egyenlő n részre osztjuk, akkor az l_m isohypsa-darabnak megfelelő területi elem f_m, melyen mindenütt ugyanazon magasság van,



218. ábra. Egyenletes lejtő közepes magassága.

$$f_m = l_m \frac{d}{n}$$

által fejezhető ki. Az egész trapez közepes magassága, ha területét F-fel jelöljük, lesz:

$$H = \frac{d}{nF}[h_1 l_1 + h_2 l_2 + \ldots + h_n l_n],$$

mely egyenletben azonban úgy h_m, mint l_m a sávolynak l_1-től való távolságától függ. Könnyen beláthatólag

$$h_m = h_1 + \frac{m}{n}(h_n - h_1) \text{ és } l_m = l_1 - \frac{m}{n}(l_1 - l_n).$$

Innen

$$h_m l_m = h_1 l_1 + \frac{m}{n}[(h_n - h_1) l_1 - (l_1 - l_n) h_1] - \frac{m^2}{n^2}(h_n - h_1)(l_1 - l_n)$$

és a középmagasság képletébe behelyettesítve:

$$H = \frac{d}{nF}\left\{n h_1 l_1 + [l_1 (h_n - h_1) - h_1 (l_1 - l_n)] \frac{1 + 2 + .. + n}{n} - (h_n - h_1)(l_1 - l_n) \frac{1^2 + 2^2 + .. + n^2}{n^2}\right\}.$$

Ámde:

$$1 + 2 + .. + n = \tfrac{1}{2} n (n + 1)$$

és

$$1^2 + 2^2 + .. + n^2 = n + \frac{3 n (n - 1)}{2} + \frac{n (n - 1)(n - 2)}{3},$$

s ha ezért $n = \infty$, akkor egyszerűbben

$$H = \frac{d}{F}[h_1 l_1 + \tfrac{1}{2}\{l_1 (h_n - h_1) - h_1 (l_1 - l_n)\} - \tfrac{1}{3}(h_n - h_1)(l_1 - l_n)].$$

És mivel végre

$$F = \tfrac{1}{2} d (l_1 + l_n):$$

$$H = \frac{2}{l_1 + l_n}\{h_1 l_1 + \tfrac{1}{2} l_1 (h_n - h_1) - \tfrac{1}{2} h_1 (l_1 - l_n) - \tfrac{1}{3}(h_n - h_1)(l_1 - l_n)\}$$

vagy kellőképen összevonva:

$$H = \frac{1}{3 (l_1 + l_n)}\{h_1 (2 l_1 + l_n) + h_n (l_1 + 2 l_n)\}$$

s ez közepes magassága azon sík lejtőnek, mely két isohypsa darab között fekszik. Ha parallelegrammal van dolgunk, akkor $l_1 = l_n$ és $H = \frac{h_1 + h_n}{2}$, mint ez magától is értetődik; ha a lejtő háromszög alakú és csúcsa h_1 magasságba esik, tehát $l_1 = o$, akkor $H = \frac{1}{3}(h_1 + 2 h_n)$; ha ellenben csúcsa az l_n isohypsán fekszik, akkor $l_n = o$ és $H = \frac{1}{3}(h_n + 2 h_1)$.

Trapezre, parallelegrammra vagy csúcsával lefelé vagy felfelé néző háromszögre bontható minden lejtőség, úgy hogy most bármely lejtő közepes magassága számítható. Természetesen kénytelenek vagyunk feltételezni azt, hogy a térképen rajzolt két szomszédos isohypsa h_1 és h_n között a lejtés egyenletes.

Ha valamely egész hegység közepes magasságát akarjuk számítani, akkor ugyancsak

$$H = \frac{f_1}{F} H_1 + \frac{f_2}{F} H_2 + .. + \frac{f_n}{F} H_n$$

egyenlethez folyamodunk; ebben F az egész palástfelületet jelenti, f_m pedig két egymásra következő isohypsadarab által kijelölt palástfelületet, melynek közepes magassága H_m. Ha a h_1, h_2.. isohypsa kerülete sorban Λ_1, Λ_2.., akkor az előbbiek szerint ezek közepes magassága ismeretes, a mennyiben ezek lefejtve Λ_1 és Λ_2, Λ_2 és Λ_3.. oldalhosszakkal bíró trapezeket adnak. E szerint:

$$H = \frac{f_1}{F}\left[\frac{h_1(2\Lambda_1 + \Lambda_2) + h_2(2\Lambda_2 + \Lambda_1)}{3(\Lambda_1 + \Lambda_2)}\right] +$$

$$+ \frac{f_2}{F}\left[\frac{h_2(2\Lambda_2 + \Lambda_3) + h_3(2\Lambda_3 + \Lambda_2)}{3(\Lambda_2 + \Lambda_3)}\right] + .. +$$

$$+ \frac{f_n}{F}\left[\frac{h_n(2\Lambda_n + \Lambda_{n+1}) + h_{n+1}(2\Lambda_{n+1} + \Lambda_n)}{3(\Lambda_n + \Lambda_{n+1})}\right],$$

a hol az n + 1-dik isohypsa esetleg a hegy csúcsára vonatkozhatik; ez esetben h_{n+1} a csúcsmagasságot jelenti, $\Lambda_{n+1} = o$.

Ha az egymásra következő isohypsák hosszkülömbsége közelítésben egyenlő, akkor egyszerűbben

$$H_1 = \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad H_2 = \frac{h_2 + h_3}{2} ..$$

tehető, és

$$H = \frac{f_1}{2F}(h_1 + h_2) + \frac{f_2}{2F}(h_2 + h_3) + .. + \frac{f_n}{2F}(h_n + h_{n+1}).$$

Mivel:

$$h_2 = h_1 + (h_2 - h_1); \; h_3 = h_1 + (h_2 - h_1) + (h_3 - h_2); ..$$
$$h_{n+1} = h_1 + (h_2 - h_1) + .. + (h_{n+1} - h_n),$$

a fenti egyenlet más alakban is írható:

$$H = \frac{1}{F}\left\{h_1(f_1 + f_2 + .. + f_n) + (h_2 - h_1)\left(\frac{f_1}{2} + f_2 + .. + f_n\right) +\right.$$
$$\left. + (h_3 - h_2)\left(\frac{f_2}{2} + f_3 + .. + f_n\right) + .. + (h_{n+1} - h_n)\frac{f_n}{2}\right\}.$$

Ámde

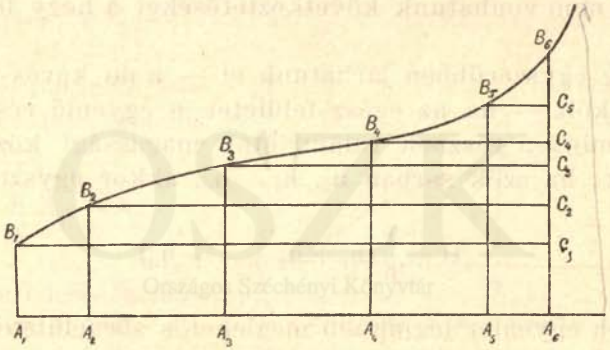
$f_1 + f_2 + .. + f_n = F$ az egész h_1 isohypsa felett fekvő palástfelület

$f_2 + .. + f_n = F_2$ „ „ h_2 „ „ „ „

$f_n = F_n$ „ „ h_n „ „ „ „

és ezért

$$H = \frac{1}{F}\left\{h_1 F + (h_2 - h_1)\frac{F + F_2}{2} + (h_3 - h_2)\frac{F_2 + F_3}{2} + .. + (h_{n+1} - h_n)\frac{F_n}{2}\right\}.$$



219. ábra. Hypsographikus görbe.

Ha végül az isohypsák közös állandó távola, a térképnek úgynevezett aequidistantiája:

$$h_2 - h_1 = h_3 - h_2 = .. = h_{n+1} - h_n = h,$$

akkor végre

$$H = h_1 + \frac{h}{F}\left(\frac{F}{2} + F_2 + F_3 + .. + F_n\right).$$

Ezen eljárásnak megfelelőleg ábrát is szerkeszthetünk, mely némi képet ad a hegy közepes magasságára. Ha ugyanis a 219. ábrában az abscissvonalra az egyes isohypsaszeletek felületét rajzoljuk, úgy hogy $A_1 A_2 = f_1$, $A_2 A_3 = f_2$.. és ezeknek megfelelőleg az ordinátákat a hozzá tartozó középmagassággal teszszük egyenlővé, úgy hogy $A_1 B_1 = h_1$; $A_2 B_2 = h_2$..

akkor az úgynevezett hypsographikus görbét nyerjük, és az ábra területe $A_1A_6B_6B_1$:

$$T = f_1 \frac{h_1 + h_2}{2} + f_2 \frac{h_2 + h_3}{2} + .. + f_n \frac{h_n + h_{n+1}}{2}$$

ugyanaz, mint az előbbi formula szerint FH. Ha tehát ezen területet planiméterrel kimérve T-nek találtuk, akkor tekintettel arra, hogy az alak bázisa $A_1A_6 = F$, a közepes magasság

$$H = \frac{T}{F}$$

leszen. A hypsographikus görbe alakjából természetesen közvetlenül nem vonhatunk következtetéseket a hegy felületének alakjára.

Még egyszerűbben járhatunk el — a mi kevés adat mellett indokolt — ha az egész felületet n egyenlő részre bontjuk, és minden résznek valami úton magassági középértékét keressük; ha ezek sorban h_1, h_2.. h_n, akkor egyszerűen

$$H = \frac{1}{n}(h_1 + h_2 + .. + h_n).$$

Ezen egyenlet leginkább meglehetős sík felületekre alkalmazható, mint tengerfenékre és kontinensek számára, továbbá ott, a hol kevés magassági adat áll rendelkezésünkre. Tapasztalat szerint elég jó eredményt kapunk, ha 100 km²-enként a középmagasságot a legnagyobb és legkisebb magasság közepével teszszük egyenlővé.

Másik fontos elem a hegyoldal közepes lejtése, mely alatt a lejtési szöglet trigonometriai tangensét szokás érteni. Ha h két isohypsa állandó magassági különbsége és d_m a kettő vízszintes távolságával egyenlő, akkor

$$\alpha_m = \frac{h}{d_m},$$

és a középérték természetesen

$$A = \frac{f_1}{F}\alpha_1 + \frac{f_2}{F}\alpha_2 + \ldots$$

Ha továbbá l_m és λ_m az isohypsák azon darabjai, melyek a felületet határolják, akkor

$$f_m = \frac{\lambda_m + l_m}{2} d_m$$

és szorzás által

$$f_m \alpha_m = \frac{h}{2}(\lambda_m + l_m).$$

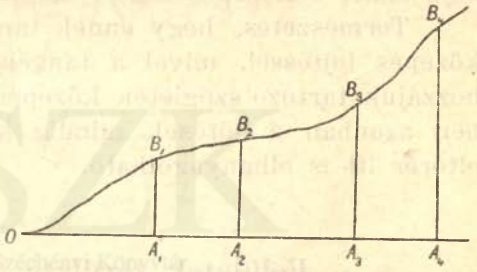
A tekintetbe vett terület közepes lejtése tehát két isohypsa palástfelületén:

$$\Lambda_1 = \frac{h}{F_1}\left(\frac{\Lambda_1 + l_1}{2} + \frac{\lambda_2 + l_2}{2} + \ldots + \frac{\lambda_n + l_n}{2}\right),$$

a hol $\Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ és $\Lambda_2 = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ a két határoló isohypsa kerülete. Ennélfogva végre

$$\Lambda_1 = \frac{h}{F_1}\frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2}.$$

Ezt az eredeti formulába bevive, leend,



220. ábra. Klinographikus görbe.

$$\Lambda = \frac{h}{F}\left(\frac{\Lambda_1}{2} + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} + \ldots + \frac{\Lambda_{n-1} + \Lambda_n}{2} + \frac{\Lambda_n}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{F}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_n).$$

Ezt a számítást is végezhetjük graphikusan, a Finsterwalder által bevezetett klinographikus görbe által. Ha ugyanis a 220. ábrában az abscissatengelyre felrakjuk az isohypsák magasságait, az ordinátatengelyre a kerületüket, akkor a végpontokat összekötő görbe a hegy klinogrammja. Az ábra területe OA_4B_4 nyilván $h(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots \Lambda_n)$, planimeterrel lemérhető, a mire az alak már előbb talált felületével való osztás által a közepes hajlás adódik.

Hasonló ábrázolást ad az ugyane szerző által bevezetett hypsoklinographikus görbe (220. ábra). Itt ugyanis $OA_1 = f_1$; $OA_2 = f_1 + f_2$; $OA_3 = f_1 + f_2 + f_3$; .. és $A_1B_1 = h\Lambda_1$, $A_2B_2 =$

$h(A_1 + A_2)$.. és a görbe területe ismét felvilágosítást ad úgy a lejtési, mint a magassági viszonyokról.

Mindezen egyenletekbe még behozható a Föld felületének eltérése a siktól; ha a Földet gömbnek tekintjük, akkor correctió tagok lépnek fel, melyek azonban a lejtésnél pl. még 8800 m. magas hegy esetében is csak 4'-et tesznek ki, melyek tehát a módszerek megbizhatatlansága mellett teljesen elhanyagolhatók. A közepes lejtési szöglet közvetlenül sraffos térképekből vehető ki, ha az egyenlően sraffozott területeket határozzuk meg; ha ezek f_n, a hozzátartozó lejtési szöglet α, akkor

$$A = \frac{\Sigma f_n \alpha_n}{\Sigma f_n}$$

adja ismét a közepes lejtési szögletet.

Természetes, hogy ennek tangense nem lehet azonos a közepes lejtéssel, mivel a tangensek közepe nem azonos a hozzájuk tartozó szögletek közepének tangensével. A mennyiben azonban a lejtések mindig kicsinyek szoktak lenni, az eltérés itt is elhanyagolható.

Felületek területe és fejlettsége.

Valamely vonal vagy felület fejlettségén értendő azon szám, mely mutatja, hányszor nagyobb valamely alakzat, mint a minő minimumban lehetne. Vagy a morphologiai alkalmazásokban valamely felület fejlettsége azon viszony, mely tényleges területe és azon minimum felület között van, melyet magassági viszonyai mellett a földkérgen elfoglalhatna. Ama minimum felület legegyszerűbben a közepes magassághoz tartozó niveaufelület vagy horizontális sík. A minimumfelületet egyes, egyenlő magasságú g területekre bontjuk, mely f alapjához a gömbi sugarak négyzeteinek viszonyában áll; tehát

$$\frac{g}{f} = \left(\frac{r+h}{r}\right)^2 = 1 + 2\frac{h}{r},$$

ha a $\frac{h^2}{r^2}$ igen kis tagot $2\frac{h}{r}$ mellett elhanyagoljuk. Ennélfogva véges Q területre, mely F tengerszini alappal bír:

$$\frac{Q}{F}=\frac{1}{F}(g_1+g_2+..+g_n)=1+\frac{2}{r}\left(\frac{h_1 g_1}{F}+\frac{h_2 g_2}{F}+..\right)$$

vagy a közepes magasság bevezetése után:

$$Q=F\left(1+2\frac{H}{r}\right).$$

A minimális felület tehát ugyanakkora, mint a közepes magasságba emelt alap területe. Ezen különbség azonban csak nagyon pontos számításoknál vehető tekintetbe.

Legyen most o_n a felület egy felületi része, α_n a hozzátartozó lejtési szöglet és H_1 közepes magassága, akkor

$$\frac{o_1}{g_1}=\sec\alpha_1 \text{ és } g_1=f_1\left(1+2\frac{H_1}{r}\right).$$

A felületi fejlettség tehát:

$$\Omega=\frac{f_1}{F}\sec\alpha_1+\frac{f_2}{F}\sec\alpha_2+..$$

és a felület maga

$$O=\Sigma o=f_1\left(1+2\frac{H_1}{r}\right)\sec\alpha_1+f_2\left(1+2\frac{H_2}{r}\right)\sec\alpha_2+..$$

a minek helyébe bátran

$$O=\left(1+2\frac{H}{r}\right)[f_1\sec\alpha_1+f_2\sec\alpha_2+..]=F\,\Omega\left(1+2\frac{H}{r}\right)$$

tehető. E szerint mondhatjuk:

Valamely alak felülete egyenlő ennek minimumfelületével, szorozva közepes fejlettségével. Ω meghatározására meghatározzuk sraffos térképekben ugyanazon árnyékolással bíró területet, isohypsás térképeken azon területet, melyen az isohypsák horizonttávolsága ugyanaz.

Határfejlődés és területi tagozottság. Valamely alak területe F és kerülete K között általában véve megszabott viszony nincs, és $\frac{F}{K}$ csak geometriai alakoknál bír bizonyos, meghatározható értékkel. Határfejlődés a viszony a tényleges és minimális kerület között. Adott térfogat mellett a gömbfelületen

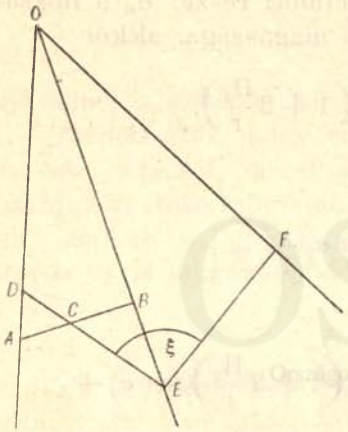
a calotta bír legkisebb kerülettel; ha ennek gömbi sugara ρ, akkor

$$F = 2r^2\pi(1 - \cos\rho) \text{ és } K_0 = 2r\pi\sin\rho,$$

a miből a minimális kerület

$$K_m = 2\sqrt{F\pi}\sqrt{1 - \frac{F}{G}},$$

ha G a Föld egész felületét jelenti. A határfejlődése egy F területtel és K kerülettel bíró alak számára tehát:



221. ábra.
A határfejlettség mértéke.

$$\Pi = \frac{K}{2\sqrt{F\pi}\sqrt{1 - \frac{F}{G}}},$$

a hol $\frac{F}{G}$ mindig nagyon kicsiny. Ha $F < 255\,000$ km^2, akkor e tag teljesen elhanyagolható, és

$$\Pi = \frac{K}{2\sqrt{F\pi}},$$

a minimális kerület egyszerűen egyenlő területű sík körre van vonatkoztatva.

Miként a magassági fejlettség, úgy ez is könnyen szöglet által határozható meg, melynek secansa a határfejlettség értékével azonos. A gömbsüveg kerületét 2n egyenlő részre osztjuk, melyek oly kicsinyek legyenek, hogy egyenesekül tekintethessenek. Legyen a 221. ábrában AB egy ilyen rész, tehát $\frac{K_m}{2n}$, míg $\frac{K}{2n}$ az igazi kerületnek megfelelő része, DE. Ha AB a calottasugárhoz képest nagyon kicsiny, akkor AO és BO sugarak párhuzamosaknak tekinthetők és DE oly módon húzható meg, hogy ez is C-ben feleztessék AB által. Ekkor

$$\sec ACD = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{K}{2n}}{\frac{K_m}{2n}} = \Pi.$$

Ha most a többi $2n - 1$ egyenest is úgy húzzuk, mint DE-t és EF-et, akkor a páronkint egybeszögellő kerületi darabok n csúcsú csillagot adnak, melyben

$$\sin \frac{\xi}{2} = \frac{1}{\Pi}$$

a határfejlődés csipkeszöglete. A tett feltevések mellett ugyanis $\frac{\xi}{2} = 90^0 - ACD$.

A szerint, a mint a határfejlődés szöglete mélyebben bevág a területbe, ez többé vagy kevésbbé tagozott. Valamely terület tagozottsága tehát egyes darabokra való oly eloszlásában áll, melyek határai beugró szögletekben találkoznak. A tagozottság kifejezhető a terület és a legnagyobb beírt vagy legkisebb körülírt, nem tagozott területének viszonya által.

Még két más mód van a tagozottság kifejezésére: a közép centrumtávolság és a közép határtávolság segítségével. Valamely terület közép centrumtávolsága összes részeinek középpontjától való távolságának közepével egyenlő.

$$E_m = \frac{\Sigma f e}{F}.$$

Meghatározása graphikai úton könnyen eszközölhető; a középpont körül concentrikus köröket húzunk; a sugarakat abscissákul, a körgyürűk területét ordinátákul rakjuk fel. A görbe vonal és az abscissatengely által határolt terület $F.E_m$, a miből E_m planimeteres mérés után könnyen levezethető.

Analog módon meghatározhatjuk a közép határtávolságot. A kivánt távolsággal húzunk a határ minden pontja körül köröket. Azon görbe, mely minde köröket érinti, a kivánt határtávolság görbéje. Ha ennek minden pontja körül ismét állandó sugárral köröket írunk le, akkor ezek burkolója ismét egy újabb határgörbét ad. Ha a távolságokat abscissa, az egyes határtávolságú görbék által képezett gyürűk területét ordináták gyanánt felrakjuk, akkor az úgynevezett chorographikus görbét nyerjük, melynek az abscissatengelylyel bezárt területe az alak területének és közép határtávolságának szorzatával egyenlő. Minde görbéknek középpontja van, mely a legnagyobb határtávolsággal bíró ponttal azonos; ez azonos a beírt calotta középpontjával.

A körbe és kör körül írt szabályos sokszögek számára ezek nagyon egyszerű kifejezések. A kör körül írt egyenes vonalú alakok számára e távolság $E'_m = \frac{r}{3}$, szabályos be- és körülírt sokszögek számára $E_m + E'_m = r$. Oly calotta számára, melynek fél centrumszöge c, az r sugarú gömbön:

$$E_m = r \frac{\text{arc } c - \sin c}{1 - \cos c}.$$

Térfogatszámítás. Az alak térfogata összetehető lefelé vékonyodó oszlopokból, melyek alapja f, középmagassága h; egy oszlop térfogata

$$v_1 = f_1 \frac{\frac{4}{3}(r + h_1)^3 \pi - \frac{4}{3} r^3 \pi}{4 r^2 \pi} = f_1 h_1 \left(1 + \frac{h_1}{r}\right).$$

Ennélfogva az egész alak számára

$$V = f_1 h_1 + f_2 h_2 + .. + \frac{f_1 h_1^2}{r} + \frac{f_2 h_2^2}{r} + .. = FH + V,$$

a hol V a hypsographikus görbével analog szerkesztéssel meghatározható. Tetős alakoknál, melyek a tengerszinten kezdődnek: $h_1 = 1\,h$; $h_2 = 2\,h$.. $h_n = n\,h$ és $f_1 = f_2 = .. = f_n$, és ezért lesz:

$$V = FH\left(1 + \frac{4H}{3r}\right).$$

Pyramisoknál

$$V = FH\left(1 + \frac{3H}{2r}\right)$$

és általában tehető, mivel minden alak tetős és gúlás elemekből tehető össze,

$$V = FH\left(1 + 1{\cdot}4\,\frac{H}{r}\right).$$

Látnivaló tehát, hogy a középmagasság és térfogat úgy függnek össze, hogy egyik a másikból meghatározható.

Direct eljárásokhoz jutunk, ha az alakot parallelszelvények által elbontjuk. Ha ezek aequidistansok, akkor Simpson szabálya használható. Két szomszédos réteg térfogata, melyet s_1, s_2, s_3 szelvény h távolságban kimetsz:

$$v_1 = \frac{h}{3}(s_1 + 4s_2 + s_3).$$

Ha tehát s_1 és s_{2n+1} határfelület között $2n$ réteg van, akkor:

$$V = \frac{h}{3}[s_1 + s_{2n+1} + 4(s_2 + s_4 + .. + s_{2n}) + 2(s_3 + s_5 + .. + s_{2n-1})].$$

Morphologiai problemákban két metszési faj van: profilek és rétegek. Az utóbbiak területe a tengerszinten van lemérve; az isohypsa magasságában a területe tehát $F\left(1 + 2\frac{H}{r}\right)$.

Ezt az előbbi képletbe téve, leend

$$V = \frac{h}{3}\left\{F + F_{2n}\left(1 + \frac{4nh}{r}\right) + 4\left[F_1\left(1 + \frac{2h}{r}\right) + F_3\left(1 + \frac{6h}{r}\right) + ..\right.\right.$$

$$\left. + F_{2n-1}\left(1 + \frac{2(2n-1)h}{r}\right)\right] + 2\left[F_2\left(1 + \frac{4h}{r}\right) + F_4\left(1 + \frac{8h}{r}\right) +\right.$$

$$\left.\left. .. + F_{2n-2}\left(1 + \frac{2(2n-2)h}{r}\right)\right]\right\},$$

minthogy $s_1 = F$ magában a tengerszintben van lemérve. Közelítésben írható:

$$V = \frac{h}{3}[F_1 + F_{2n} + 4(F_1 + F_3 + .. + F_{2n-1}) +$$

$$+ 2(F_2 + F_4 + .. + F_{2n-2})]\left(1 + \frac{nh}{r}\right),$$

a hol még maximumban is $n\frac{h}{r} = 0{\cdot}0007$. Ha az isohypsák közel állanak egymáshoz, akkor ezen érték nem különbözik nagyon FH szorzattól.

Profiloknál éppen úgy járunk el, ha páros számú metszet van és ezek elég közel állanak egymáshoz. Ha a metszetek száma páratlan, akkor a páros legnagyobb számot kiválasztva, e számára határozzuk meg a térfogatot, az utolsót külön az által, hogy pyramis vagy prismadarabnak tekintjük. Ennek térfogata

$$V = \frac{h}{3}(s_1 + \sqrt{s_1 s_2} + s_3).$$

Ha azonban ezen utóbbi képletből indulunk ki, és az isohypsák tengerszinti területét ismét F_n-nel jelöljük, akkor

$$V = \frac{h}{3}\left\{F + \sqrt{FF_1}\left(1+2\frac{h_1}{r}\right)^{1/2} + F_1\left(1+2\frac{h_1}{r}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{h_2 - h_1}{3}\left\{F_1\left(1+2\frac{h_1}{r}\right) + \sqrt{F_1F_2}\left(1+2\frac{h_1}{r}\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+2\frac{h_2}{r}\right)^{1/2} + F_2\left(1+2\frac{h_2}{r}\right)\right\} + \ldots + \frac{h_n - h_{n-1}}{3}\left\{F_{n-1}\left(1+2\frac{h_{n-1}}{r}\right)\right\},$$

a hol még $\frac{h_n}{r}$ elhanyagolható, a mi által

$$V = \frac{h}{3}(F + \sqrt{FF_1} + F_1) + \frac{h_2 - h_1}{3}(F_1 + \sqrt{F_1F_2} + F_2) + \ldots$$

$$+ \frac{h_n - h_{n-1}}{3} F_{n-1};$$

a hol mindkét egyenletben h_n a csúcsmagasságot adja, úgy hogy $F_n = o$ tehető. Ha végül az isohypsák aequidistantiája h állandó, akkor

$$V = \frac{h}{3}[F + 2F_1 + 2F_2 + \ldots + F_{n-1} + \sqrt{FF_1} + \sqrt{F_1F_2} + \ldots$$

$$+ \sqrt{F_{n-2}F_{n-1}}].$$

Hasonló formulák nagy mennyiségben állíthatók fel; az egyik vagy a másik szigorúbb, mint a Sonklar eredeti egyszerű módszere, de lényegesen többet az sem mond.

Legszebb diadalait aratta az orometria a Hold hegységeinek tanulmányozása alkalmával. Felületes vizsgálódás mellett azt hihetnők, hogy tisztán vulkáni termékek, és ez volt a legelterjedtebb nézet is, míg mások azon véleményben voltak, hogy az egykor plastikus kérget kitörő gáztömegek felduzzasztották, mire e buborékok elpattanva, félgömb alakú mélyedéseket hagytak hátra. Ismét mások szerint a holdkraterek cosmikus anyagnak porladozó alapra esése által jöttek létre.

A Hold orometriája mind e nézeteket a leghatározottabban visszautasítja és helyökbe oly orogenetikus elméletet tett, a melynek alapján a holdhegységek relativ méreteik szerint

egészen híven kisérletileg is előállíthatók. A Hold felületét alkotó anyag mineműsége és petrographiai jellege teljesen igazat ad ez elméletnek, a mely főleg a Hold testét egykor mozgatott árapályjelenséggel operál, míg amaz ellenvetés, hogy a Föld felületén ily képződmények nem léteznek, magától esik el ama meggondolás által, hogy a levegő jelenléte s ezzel együtt az összes denudáló faktorok már régen feltöltötték a bolygónknak egykori eredeti felületét.

Ily jelentős eredményt még a földi orometria nem ért el.

XXII. FEJEZET.

Újabb morphometriai módszer. Az oroid.

Ugyanazon ellenmondás, mely a Föld alakjának meghatározásában, mondhatnám czél és eszköz között fennállt, észlelhető itt is: a magasságmérések leginkább aneroiddal, a mélységmérések legalább részben bathometerrel eszközöltettek, két műszer által, mely talán nem éppen a legpontosabb adatot szolgáltatja, de elvénél fogva tiszta dynamometer lévén, inkább physikai vagy mechanikai, mint geometriai magasságmérőnek definiálható. De ugyanezen ellenmondás forog fenn még akkor is, ha a hegyek magasságát akár trigonometriai úton, akár szintezés által határozzuk meg: a libella itt is főfactor s ez tudvalevőleg nem a geometriai vízszintesbe, hanem a Föld és hegy közös szintfelületének érintősíkjában helyezkedik. Másik hátránya a geometriailag értelmezett morphologiai elemnek, mely azon mértékben válik érezhetővé, a melyben a fokmérési műveleteket, szintezéseket, csillagászati és geodéziai helymeghatározásokat és ingaméréseket a hegységekre is kiterjesztik, hogy teljesen idegenül állanak szemben azon fontos ingagyorsulásokkal és függőóneltérésekkel, melyet hegyek közelében észlelnek.

Ezzel szemben némileg csodálatosnak kell tartani, hogy az eljárás, mely a geodéziában oly nagy előnyöket tüntet fel, s mely a physikai geographiához oly szorosan tartozó földmágnesség tanában szóról-szóra ismét előfordul — tényleg a geoid megállapítása és a földmágnesség Gauss-féle elmélete

mathematikailag ugyanazon egy problema — a morphometriában oly elszigetelt használatú. A morphometriában nyomát sem találjuk, daczára annak, hogy bevezetésére a megfigyelési módszerek egyenesen ráutalnak.

A következőkben kimutatjuk, hogyan vezethető be a hegymérés tanába és általában a morphometriába a szintfelület fogalma, melyet ez esetben — ha ugyan új elnevezés szüksége fenforog — oroidnak lehetne nevezni, akár domború, akár mélyített alakról van szó.

Az oroidnak, mint szintfelületnek, tetszésszerinti pontossággal megadhatjuk mathematikai kifejezését; e felület mindenütt folytonos, szakadás nélküli, és sem csúcsokat, sem éleket nem tartalmaz, mindazonáltal a hegység alakulásától függ, és ezért ábrázolására alkalmas. Nem szenvedhet kétséget, hogy ezen ábrázolás is csak schematikus lehet, de bizonyára sokkal kevésbbé az, mint azon kép, melyet magunknak valamely hegység kevés és szűkszavú orometriai elemeiből képezünk, vagy melyet a hegység hypsographikus, klinographikus és hasonló görbéi közvetítenek. Világos továbbá, hogy az oroidból egyszerű mathematikai műveletekből bármely pontban levezethetjük az ingagyorsulás nagyságát és a függőóneltéréseket, tehát éppen azon legfontosabb elemeket, melyek a geometriai orometriából nem adódnak. És míg ott felette sok, magában véve is jellemző számadat egy közös átlagban elmosódik, itt minden egyes mérés megtartja individuálitását és befolyását az eredményre, onnan könnyen kivehető, hogy jobbal vagy többel potólható legyen.

Mielőtt azonban ezen újabb morphometriai módszert tárgyalnók, egy fontos gyakorlati kérdésre kell felelnünk. Világos ugyanis, hogy az oroid kifejezése, éppen úgy, mint a Föld niveausphaeroidjának kifejezése, a potentiálkifejtés bizonyos számú első tagjainak összege. A szintsphaeroid esetén a sor elég gyorsan összetart, úgy hogy első két tagja már kifejezi a Clairaut-féle két egyenletet és igen csekély különbségektől eltekintve a geoid a legtöbb kérdésben már is a niveausphaeroiddal felcserélhető. Kérdés, vajjon e kedvező összetartás a hegypotentiál esetében is feltételezhető-e? Mathematikai szempontból e kérdésre csak szabályos alakú, adott tömegeloszlású hegy esetén adhatunk határozott feleletet, szabálytalan alakú

és ismeretlen tömegeloszlási hegy forogván szóban, csak utólag felelhetünk, a mennyiben a kifejtésben folytatólagosan oly magas tagokig kell haladnunk, míg a hegységnek valamely pontjában számított és észlelt potentiálja között csak a megfigyelési hibákkal egyenlő rendű mennyiségekben mutatkozik különbség. Ámde a potentiál legelső tagja magában véve azt mondja, hogy a hegy kifelé úgy hat, mintha egész tömege egy belső pontjában — tömegközéppontjában — volna egyesítve. Ha csak ezen első és legegyszerűbb tagját a potentiálnak tekintjük is, a Föld sűrűsége számára egyszerűbb alkotású hegyek esetében már elfogadható értékeket kapunk, akár a hegy talpán észleljük a függőóneltérést (mint Maskelyne és James a Shehallien hegynél, a kik földsűrűség gyanánt 4·7, illetve 5·32-t találtak), akár a hegy tetején az ingagyorsulást (mint Mendenhall a Fusiyama esetén, a ki a Föld sűrűségét 5·77-nek határozta meg). Tekintve, hogy a sorfejtés minőségénél fogva az elhanyagolt tagok éppen a hegy tövénél és csúcsán tüntetnek fel legnagyobb különbséget, remélhető, hogy az oroid általában, minden esetben már kevés számú tag által ábrázolható, annál kevesebbel természetesen, minél szabályosabb alakú és tömegeloszlású a hegy és minél önállóbban emelkedik a síkságból. És szabad lesz megállapítanunk, hogy az oroid valamely földfelületi alak potentiálkifejtésének azon első tagjait jelemezze, melyek magukban véve az alak bármily felületi pontján eszközölt megfigyelés alapján pontos értékét szolgáltatják a Föld sűrűségének.

Az eddig mondottak szerint (585. és 586. l.) az oroid első tagjai:

$$V=(a_0^{(0)}r^{-1}+\alpha_0^{(0)})+(a_0^{(1)}r^{-2}+\alpha_0^{(1)}r)\cos z+$$

$$+(c^{(1)}r^{-2}+\gamma_1^{(1)}r)\sin z\cos a+(s_1^{(1)}r^{-2}+\sigma_1^{(1)}r)\sin z\sin a+$$

$$+(a_0^{(2)}r^{-3}+\alpha_0^{(2)}r^2)(\cos^2 z-\tfrac{1}{3})+(c_1^{(2)}r^{-3}+\gamma_1^{(2)}r^2)\sin z\cos z\cos a+$$

$$+(s_1^{(2)}r^{-3}+\sigma_1^{(2)}r^2)\sin z\cos z\sin a+(c_2^{(2)}r^{-3}+\gamma_2^{(2)}r^2)\sin^2 z\cos 2a+$$

$$+(s_2^{(2)}r^{-3}+\sigma_2^{(2)}r^2)\sin^2 z\sin 2a+..$$

s ezekben az állandó V jellemző úgy határozható meg legkényelmesebben, hogy az oroid az alak kulmináló csúcsán vagy legmélyebb pontján haladjon át; erre elegendő, hogy V

a csúcsnak megfelelő (r, z, a) helyen az észlelt potentiál értékével bírjon. z a zenithtávolságot jelenti emelkedő alakoknál, a nadirtávolságot mélyített alakok esetében, a mi kényelmesebb, mintha a magasságot vezettük volna be, melynek a két különböző alak esetében ellenkező előjele van. A felírt kifejezéshez hozzátehetjük még a centrifugális erő potentiálját is, mely azonban csak elenyésző befolyást gyakorol, minthogy csupán a centrifugális erő külömbségei lépnek fel.

Az oroid állandóinak meghatározása és az oroid geometriája.

A legközvetlenebb műszer a potentiál megmérésére a Siemens-féle bathometer és az aneroid, mely mindkettő tulajdonképen rugós mérleg. A mérés alapgondolata a következő: legyen a Föld — melyet morphometriai vizsgálódásoknál bátran homogén rétegekből összetett gömbbel azonosíthatunk — tengerszinti potentiálja

$$U_0 = G_0 R + \tfrac{1}{2} \omega^2 R^2 \cos^2 \varphi,$$

a hol G_0 a Föld tömegvonzásának gyorsulása a tenger szintjén. A megfigyelőnek H tengerszini magasságában ezen potentiál, ha az alak nem volna ott:

$$U_H = G_0 \frac{R}{R+H} + \tfrac{1}{2} \omega^2 (R+H)^2 \cos^2 \varphi,$$

mely az igen kis $\frac{H}{R}$ tört négyzetének elhanyagolása után ad:

$$U_H = U_0 - G_0 H + \omega^2 RH \cos^2 \varphi.$$

Ha a mérés H magasságban valamely alak felületén van mérve, akkor ennek vonzása miatt a tengerszini gyorsulás G_0 helyett G lesz, a hol G nagyobb vagy kisebb, mint G_0, a szerint, a mint az alak hegy vagy teknő. Az alak jelenléte miatt tehát a H magasságban a potentiál

$$U'_H = U_0 - GH + \omega^2 RH \cos^2 \varphi,$$

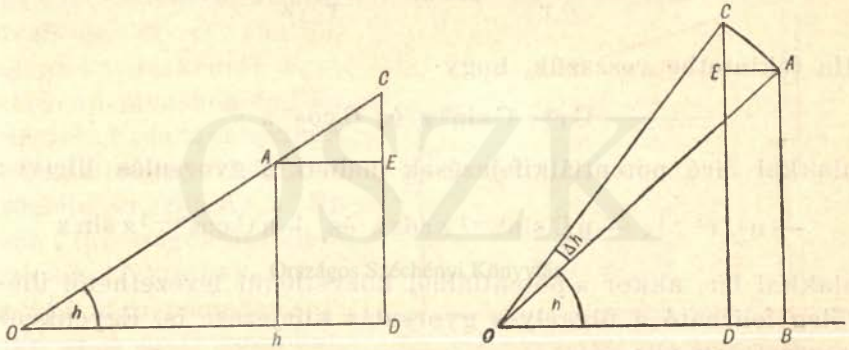
és a kettő külömbsége:

$$U'_H - U_H = (G_0 - G)\,H = U$$

nyilván nem más, mint maga a hegy vonzási potentiálja. G_0 a Clairaut-féle ingaegyenletből számítható, és GH közvetlenül a bathometerről leolvasható. Aneroid és barometer együttes leolvasásából már előbb vezettük le

$$U = 16\,002\,(1 + 0{\cdot}0039\,t)\,g\,\frac{b' - b}{b' + b}$$

alakban a potentiált. Ha az ingát használjuk, akkor nem a potentiált magát figyeljük, hanem a függélyesbe eső gyorsu-



222. és 223. ábra. Az erőváltozás a sugár és a vertikális kör mentén.

lást, mely tudvalevőleg belőle könnyen levezethető. Ha ugyanis az A megfigyelési helyből (222. és 223. ábra) a végtelenül szomszédos C pontba megyünk át, akkor megváltozik az első esetben a távolság $AC = \triangle r$-rel, a másodikban a magasság $\triangle h$ szöggel, vagy $AC = r\triangle h$ ívvel. Ha tisztán úgy megyünk tova, hogy az azimuth változik, r és h pedig változatlan marad, akkor nyilván elmozdulás a függélyesben nincs, tehát ebből függélyesen ható erő sem keletkezhetik, míg az előbbi két esetben a függélyes elmozdulás CE-vel jelölhető mindkét ábrában. Ha A-ban a potentiál U, akkor C-ben értéke illetve $U_{r+\triangle r}$ és $U_{h+\triangle h}$, a mennyiben t. i. a C pontban a potentiált kapjuk, ha r helyébe $r + \triangle r$-et, illetve h helyébe $h + \triangle h$-t, vagy z helyébe $z - \triangle z$-t teszünk. Mindkét esetben természetesen $\triangle r$

és $\triangle z$ végtelen kicsinynek tételezendő fel. A C mentén tehát a gyorsulás illetve

$$g' = \frac{U_r - U_{r+\triangle r}}{\triangle r} \text{ és } g'' = \frac{U_z - U_{z-\triangle z}}{-r\triangle z}, \text{ a hol } \lim \triangle r = o, \lim \triangle z = o.$$

A függélyes összetevői ezen gyorsulásoknak:

$$g_1 = g' \cos z \text{ és } g_2 = g'' \sin z,$$

úgy hogy az összes erő, mely a tömegegységre hatván, a gyorsulást adja:

$$g = g_1 + g_2,$$

vagy

$$G = \frac{U_r - U_{r+\triangle r}}{\triangle r} \cos z - \frac{U_z - U_{z-\triangle z}}{r\triangle z} \sin z.$$

Ha tekintetbe veszszük, hogy

$$C r^n;\ C \sin^n z \text{ és } C \cos^n z$$

alakkal bíró potentiálkifejezések mellett a gyorsulás illetve:

$$-n C r^{n-1};\ -n C \sin^{n-1} z \cos z \text{ és } +n C \cos^{n-1} z \sin z$$

alakkal bír, akkor a potentiálból közvetlenül levezethető, illetőleg felírható a függélyes gyorsulás kifejezése is. Egyenként nevezetesen áll:

$$g_1 = \frac{a_0^{(0)}}{r^2} \cos z + \frac{2}{r^3} [a_0^{(1)} \cos^2 z + c_1^{(1)} \sin z \cos z \cos a +$$

$$+ s_1^{(1)} \sin z \cos z \sin a] + \ldots$$

$$g_2 = \frac{1}{r^2} [a_0^{(1)} \sin^2 z - a_1^{(1)} \sin z \cos z \cos a - s_1^{(1)} \sin z \cos z \sin a] + \ldots$$

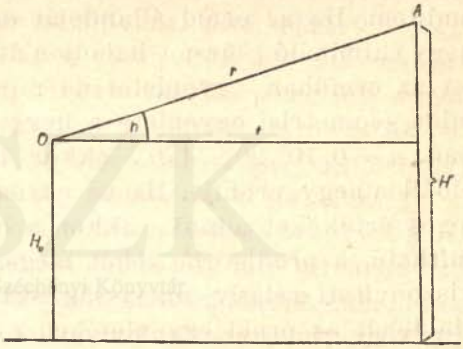
úgy, hogy ugyancsak az oroidban szereplő együtthatók is meghatározhatók.

Az ingával való megfigyelés különösen akkor válnék nagyon pontossá és kényelmessé, ha a hegy lejtőjének különböző pontjaiban jól járó ingaórát állíthatnánk fel hosszabb időre; ennek késése vagy mélyített alak esetében sietése, pontos értékét szolgáltatná az illető ponton uralkodó függélyes gyorsulásnak.

A legpontosabb értékeket természetesen itt is a Coulomb-féle mérleg fogja adni, mert ez a nehézségi erő változását magában méri, nem a nagy gyorsulási érték mellett.

Nem szükséges, hogy az észlelő megfigyelési helyének absolut geographiai helymeghatározását eszközölje, hogy az oroid egyenletében szereplő r, z, a adatokat megadhassa. Ezek tisztán számítás útján adódnak, ha az észlelő megjelöli helyzetét a hegy lejtőjén jó térkép segítségével, a mi interpolatorikus módon mindig nehézség nélkül eszközölhető.

Legyen a hegy O pontja, melyet czélszerűen közel választunk a hegytömeg súlypontjához H_0 tengermagasságban, az észlelő magassága H. Mindkét adat isohypsás térképből könnyen beszerezhető, éppen úgy az észlelő vízszintes távolsága az O ponttól, melyet a térképről egyszerűen leolvasunk és l-lel jelölünk. Ezen távolságnak az északiránynyal képezett szöglete az azimuth a. Ha ezen l távolságon át függélyes síkot fektetünk, akkor ez (224. ábra) magában foglalja az A és O pontokat, melyeknek valóságos távolsága r. A emelkedése O fölött $H - H_0$, mely vízszintes távolságukra vonatkoztatva ad:



224. ábra. Az észlelő hely coordinátái.

$$\operatorname{tang} z = \frac{l}{H - H_0}, \quad r = \frac{l}{\sin z},$$

úgy hogy ily úton r, z és a ismeretes.

Ha most elegendő számú megfigyeléssel rendelkezünk, akkor az a, c, s keofficienseket a már bemutatott képletekkel levezethetjük, legkényelmesebben planimeter segítségével tisztán mechanikai úton.

Húzzunk ugyanis a térképbe rajzolt O ponton át p egyenlő szögtávolságban álló egyenest és q számú $\sin z_1$, $\sin z_2$..$\sin z_q$-val arányos sugarú kört, a hol z_1, z_2..z_q számtani haladványt képezzenek, oly módon, hogy pq a megfigyelések száma. Most

U-nak tényleg megfigyelt értékeit interpoláljuk a körök és egyenesek metszési pontjai számára, a mi graphikus módon is megtehető. Végezzük állandó z mellett az integratiót a szerint valamennyi körön planimeterrel, majd az összes körök integralértékeiből egy görbét képezve, integráljunk z szerint is. Vagy pedig, ha az oroid egyenletében cos z és sin z hatványait z sokszorosainak trigonometriai függvényeire bontjuk, egy Fourier-féle sor első tagjait nyerjük, melynek segítségével a fellépő együtthatók, melyek most az a, c és az s, a, γ és σ linearis alakjai lesznek, szintén könnyen meghatározhatók.

Az állandók meghatározása után vajmi egyszerű dolog a morphologiailag fontos értékeket pl. Sonklar értelmezése szerint levezetni, és elegendő lesz, ha a legszükségesebbeket említem. Ha az oroid állandóját úgy határoztuk meg, hogy a hegy culmináló csúcsán haladjon át, akkor az a = const. egyenlet az oroidban egyenletet ad r és z között. Ez nem egyéb, mint geometriai egyenlete a hegy profilmetszeteinek. Ha sorban $a = 0, 10^0, 20^0 .. 170^0$, akkor tíz-tíz foknyi szögközökben előáll a hegy profilje. Ha ez egyenletben z-nek sorban tetszőleges értékeket adunk, akkor a hozzávaló r könnyen kiszámítható, a profilgörbe tehát megszerkeszthető. Az O ponthoz viszonyított relativ magasság számára áll; $H - H_0 = r \cos z$. Ha tehát az oroid egyenletében $r \cos z$ állandó, akkor az isohypsák egyenletét nyerjük és minden tetszőlegesen választott azimuthhoz meghatározható a hozzátartozó vezérsugár. A csúcsok, nyergek, völgyek, gerinczek vagy völgyfenékek felkeresése egyszerű maximum-minimum problemák, a lejtés meghatározása tangensszerkesztési problema, és a közepes értékek levezetése egyszerű, mindig végrehajható integratiókat követel, melyek egyszerű módon planimeterrel is végezhetők.

Az alak talpvonala ott keresendő, a hol az oroid a Föld valamelyik niveausphaeroidját szeli. Ha a Földet, mint gömböt tekintjük, tehát lapultságát s a vele egyenlő rendű centrifugális erőt is elhanyagoljuk, a niveausphaeroid egyenlete $U_0 = gR$, vagy vonatkoztatva az alak O pontjára, melyből a talpvonalhoz húzott radiusvector a Föld gömbalakú niveaufelületét érinti

$$U_0 = g r_0 \operatorname{tang} z_0,$$

ha r_0, z_0 a talpvonalhoz tartozó valamely pont helyzete és U_0

a Föld potentiáljának jellemző állandója. Ha az oroid egyenlete segélyével z-t eliminálju k, kapjuk e talpvonal poláris egyenletét s ha benne a tengerszinen érvényes g-t használjuk, akkor az alak tömegéhez a Sonklar-féle hegypárkány értelmében hozzászámítjuk azon tömeget is, mely a tengerszinten kezdődik és a hegy látható tövéig terjed. Ha azonban g alatt értenők a hegy tövének magasságában észlelt gyorsulást, akkor az oroid egyenletébe a hegynek csupán csak a síkságból kiemelkedő tömege van beleértve.

Az oroid első állandója nyilván

$$a_0^{(0)} = f\,M,$$

ha M az alak tömegét jelenti. Ez ismeretes összetétel mellett a hegy térfogatához vezet, és a talpvonal által bezárt F területtel könnyű szerrel adja azon tábla közepes magasságát, melynek az alakkal egyenlő térfogata van. És a szerint, a mint a talpvonalat a tenger szinén vagy a síkságban veszszük fel, nyerjük Sonklar értelmezése folytán az egész hegységnek vagy pusztán párkányzatára felrakott gerinczeinek térfogatát.

Ezzel a Sonklar-féle orometriai elemek az oroid számára is megvannak, és hasonló módon fejthetők még ki azon elemek is, melyeket Sonklar követői felveendőknek gondoltak. Kétséget nem szenved, hogy valamely alaknak szintvonalakkal és szelvényekkel való ábrázolása érthetőbben szól értelmünkhez, mint a legteljesebb morphometriai egyenlet. De ha összehasonlítás kedvéért már egyáltalán szükségünk van számbeli értékekre, s ezek a dolog természeténél fogva csak schematikus képet nyujthatnak, be kell vallanunk, hogy a követett út a geometriai méretek közepes értékeinél jobb és bővebb adatokhoz vezet, eltekintve még azon számbavehető előnytől is, hogy az oroid egyenletében minden önálló mérés önálló szerepet játszik, s hogy levezetésénél fogva a morphometria most ugyanazon alapon áll, mint a geodézia vagy a földmágnesség tana.

XXIII. FEJEZET.

Perturbatiók.

A tömegvonzás általánossága magával hozza, hogy a Napon kívül valamely bolygóra az összes többi bolygó is gyakorol hatást, és hogy némely bolygónak a homogén rétegekből összetett gömbalaktól való eltérése miatt eltérések fordulnak elő az egyszerű KEPLER-féle elliptikus mozgástól. Valamint a zonban aphysikában a BOYLE-GAY-LUSSAC-féle törvényhez ragaszkodunk, annak csak közelítő helyessége mellett is, úgy az astronomiában is a KEPLER-féle törvényeket továbbra is helyeseknek tekintjük, és az eltéréseket háborgásoknak vagy perturbatióknak nevezzük. Ezen háborgások részben a bolygó keringésére, részben pedig tengelyforgására terjednek ki, részben pedig a bolygó alakját is befolyásolják. Egynémelyike közülök geographiailag is fontos, s ezért általánosságban is kénytelenek vagyunk róluk szólani.

Három, a NEWTON-féle törvény szerint egymást vonzó test mozgásának szigorú levezetése szigorúan mathematikailag ma is megoldatlan problema, noha NEWTON ideje óta minden híres mathematikus és csillagász e kérdéssel foglalkozott. A feladat nehézségei folytán indokolt, hogy az egész megoldhatlan kérdést a három test problemájának nevezik. Noha azonban a problema mathematikai szempontból megoldatlan, physikailag, azaz gyakorlati igényeknek megfelelőleg teljesen kielégítő választ adhatunk; a módszerek, melyekkel a bolygók pontos mozgását tanulmányozzuk, a háborgási vagy perturbatiós számítás elnevezését viselik. A számítás, melynek részletei természetesen nem ide tartoznak, sokféle módon eszközölhető. Rendesen megállapítjuk a bolygó helyét az egyszerű KEPLER-féle szabályok alapján, és azután hozzáadjuk azon kis javításokat vagy háborgásokat, melyek a többi bolygó hatásaiból keletkeznek. Ez az úgynevezett coordinátaháborgás. Vagy pedig szigorúan ragaszkodunk a KEPLER-féle mozgáshoz, és úgy számítjuk a bolygó helyzetét, mintha mindig ellipsisben járná körül a Napot, csakhogy magát az ellipsist úgy alak, mint fekvés szerint változónak tekintjük. Az egy bolygó esetében

állandó pályaelemek több bolygó jelenléte miatt az idővel lassan változó mennyiségek lesznek. A perturbatiószámítás ezen felfogását az állandók variatiójának mondjuk. De még így is lehet különbség a számítás eszközlésében: ha a háborgásokat analytikai kifejezések alakjában adjuk, úgy hogy ezek értéke bármilyen általánosan meghagyott időre kiszámítható, akkor a számítás módszerét az általános perturbatiók nevével illetjük; ha ellenben mintegy a csillagász pillanatnyi szükségének engedve, a háborgásokat csak bizonyos időre numerikusan adjuk, akkor speciális háborgásokról szólunk. A számításnak első módja a tulajdonképeni tudományos módszer, mely betekintést enged a bolygórendszer mechanizmusába; a második módszer ezen előnynyel ugyan nem bír, de gyorsabban czélhoz vezet, s csak arra való, hogy az egyszer felfedezett apró bolygó vagy üstökös ismételt visszatérése után könnyen fel legyen található, vagy hogy végleges pályaszámítása alkalmával a háborgó bolygók befolyása a megfigyelésekre mérlegelhető legyen.

A rendkívül bonyodalmas problemát valóban csak a bolygórendszer természetében rejlő egyszerű viszonyok engedik annyira-mennyire megoldani. Az egyes bolygók nagyon közel gömbalakú testek, melyeknek tömege a Napéhoz képest igen kicsiny, s melyek méretei a kölcsönös távolságokhoz képest igen kicsinyek. Ezenkívül a bolygók közel ugyanazon síkban, az ekliptikában fekvő közel köralakú pályákat írnak le. Minde kedvező körülmények folytán az együttesen fellépő háborgások helyébe ezek successiv értékeit tehetjük: azaz az apró rezgésekben fellépő elvet, a superpositiók elvét alkalmazhatjuk. Más szóval: minden bolygó háborgása úgy tekinthető, mintha a befolyást gyakorló bolygók perturbatiói egyszerűen összegeződnének, a nélkül, hogy a perturbált bolygó visszahatását a perturbáló bolygóra tekintetbe kellene venni.

Ily módon sajátságos, csak a számítás gyakorlata által indokolható nomenclatura fejlődött: beszélünk perturbáló és perturbált bolygóról, a nélkül azonban, hogy e külömbség a természetben is megvolna: mindkettő elvileg egyenértékű. Ha pl. a Hold mozgását keressük a Föld körül, akkor a Föld a középponti test, a Hold a háborgatott bolygó, míg a többi bolygó, különösen pedig a Nap, a perturbáló test szerepét

játsza. A Föld mozgásában a Nap körül ellenben a Föld a háborgatott bolygó, a Nap a centrális test és a Hold, valamint a többi bolygó a háborgást okozó testek.

A problemát általánosságban, szigorú algebrai formulákkal megoldani, mint említém, a mathematika mai álláspontja mellett nem lehetséges. Mindazonáltal felállíthatunk 10 egyenletet, mely minden centrális erők által mozgatott mechanikai rendszerre, tehát a bolygórendszerre is érvényes, s melyeket a mechanika általános elveinek szokás nevezni. Ezek a következők: a bolygórendszer súlypontja a térben egyenesen s egyenletesen halad tova; a bolygók tömegéből és területi sebességéből képezett szorzatok összege az egész bolygórendszer számára állandó, és a bolygórendszer erélye, azaz potentiáljának és eleven erejének összege állandó. Az első tétel a súlypont, a második a területek megmaradásának tétele, a harmadik az eleven erő tétele. Bruns azután kimutatta, hogy újabb algebrai egyenletek a mozgásban szereplő elemek között nem állíthatók fel, és Poincaré mélyértelmű dolgozata a nagy problema megoldása körül szintén csak negativ kilátásokat nyit.

Nem marad tehát egyéb hátra, minthogy a háborgásokat végtelen sorok alakjában állítsuk elő, melyekből annyi tagot veszünk, mint a mennyi a tényleges megfigyelések pontosságának megfelel. E sorok, melyekre a számítás vezet, lényegesen kétfélék: vagy valamely időtől függő szöglet sokszorosainak sinusai és cosinusai szerint haladnak, vagy pedig a folyó idő hatványai szerint rendezkednek; tehát vagy

$$a_0 + a_1 \cos \mu t + a_2 \cos 2\mu t + .. \; + b_1 \sin \mu t + b_2 \sin 2\mu t + ..,$$

$$\text{vagy } c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ..$$

alakkal bírnak. Az első sor nyilván bizonyos időszakok után eredeti értékét ismét visszanyeri, s ezért az ily módon előállítható háborgásokat periodikusoknak nevezhetjük, míg az utóbbi haladó idővel folyton növekedő és többé vissza nem térő értékeket vesz fel, miért is az ezen sor által jellemzett háborgásokat saeculárisoknak lehet nevezni. Megjegyzendő azonban, hogy ezen lényegesnek látszó különbség is csak a számítás módszerében indokolt. Ha ugyanis valamely hábor-

gás periodikus, pl. $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ alakú, a háborgás periodusa T azonban nagyon hosszú, akkor $\frac{2\pi}{T}t$ kicsinysége mellett tudvalevőleg (32. l.)

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{2\pi}{T}t - \frac{1}{3!}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^3 . t^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^5 . t^5 - ..$$

alakban is írható, és rövid t idejű megfigyelés nem fogja eldönthetni, vajjon periodikus vagy saeculáris változással van-e dolgunk. Tény, hogy a periodikus perturbatiók is igen hosszú periodussal bírhatnak; ilyen pl. az úgynezett nagy egyenlítés, mely Saturnus és Jupiter között fennáll, s melynek jellemzője $\sin(5\mathfrak{h} - 2\mathfrak{4})$, a hol $\mathfrak{h}$ és $\mathfrak{4}$ illetve a Saturnus és Jupiter hosszúságát jelenti. Mivel e két bolygó periodusa csak 29 napnyi különbséggel ugyanazon arányban áll, mint 2:5-hez, úgy e különbség csak 930 év alatt rúg fel 360°-ra és ez egyszersmind a nagy egyenlítés periodusa is.

Hogy a háborgások mily értékre rúghatnak, azt legjobban mutatja egy példa. Az Erato kis bolygó, felfedezése szerint a 62-ik, két elemrendszerét közlöm; mindegyik azon ellipsisre vonatkozik, mely ez epocha és osculatio pillanatában a bolygónak úgy helyzetét, mint sebességét tünteti fel. Az aequinoctium mindkét esetben ugyanaz, a praecessio tehát időközben tekintetbe van véve.

Az Erato (62) asteroida pályaelemei.

Epocha és osculatio 1871. szept. 13. Epocha és osculatio 1874. decz. 26.

Kp. berlini idő; közép aequinoctium 1870·0.

M	328° 30′ 11″.12	180° 40′ 48″.9
L	5° 56′ 24″.90	219° 8′ 6″.8
π	37° 26′ 13″.78	38° 27′ 17″.9
Ω	125° 48′ 50″.06	125° 42′ 39″.7
i	2° 12′ 29″.34	2° 12′ 23″.9
φ	9° 46′ 26″.99	9° 59′ 14″.9
μ	641″.33958	640″.89605

Az első két elem, mely a középanomáliát és a középhosszúságot adja, természetesen nem egyezhetik, mert a két osculatio pillanata nem teljes keringések idejével különbözik. A többi, háborgások nélkül állandó elemek azonban tetemes változásoknak vannak alávetve már 3 évnyi időközben is, melyek tekinteten kívül hagyása egyes esetekben az apró bolygó ismét való feltalálását tetemesen megnehezíthetik. A jegyzékben φ azon szög, melynek sinusa az excentrumossággal egyenlő, μ pedig a bolygó közép napi mozgása, tehát $\mu = \frac{360 \times 60 \times 60''}{T}$, ha T a közép napokban kifejezett keringési időt jelenti.

Ezen két egyenletrendszer egy speciális háborgási számításnak eredménye, melyben Jupiter és Saturnus hatása van csak tekintetbe véve.

Ugyancsak a háborgások osztályába tartoznak azon mozgási eltérések, melyek a bolygók alakjából és heterogénitásából keletkeznek. Ilyen a Hold mozgásában a már említett

$$\delta l = 4360''(\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}) \sin D \text{ és } \delta b = -4959''(\alpha - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{g_0}) \sin D'$$

periodikus tag, mely a Föld lapultságától függ, és a praecessio, nutatio, az ekliptika ferdeségének változása s hasonlók. Ide tartoznak azon deformatiók is, melyeket a Nap és Hold vonzása a Föld vízburkolatában és szilárd kérgében is előidéz, s melyek a tengerjárás neve alatt ismeretesek.

A közvetlen csillagászati érdekkel bíró háborgások között is vannak olyanok, melyek a geographiát legalább közvetve érdeklik. Ilyenek első sorban a földpálya excentrumosságát és perihéliumhosszát befolyásoló változások, mint a melyek az évszakok hosszát és a hősugárzást, az ekliptika ferdeségéé, mely a zónák elterjedését szabályozza, s melyet sokan a jégkorszak magyarázatául szerettek idézni. Ilyenek továbbá a praecessio és nutatio, mely minden csillagászati hely- és időmeghatározásba belejátszik, és a Holdnak minden, legalább nagyobb perturbatiója, mely részint a tengerjárásban visszatükröződik, részben a holdtávolságok által számítandó hosszúságmeghatározásokban szerepel.

XXIV. FEJEZET.

A bolygórendszer stabilitása.

De mindezen kérdések egy másik, közvetlen érdekű problemával függnek össze, s ez a bolygórendszer stabilitásának kérdése. Ugyanis oly rendszerben, melyben csupán NEWTON törvénye szerint ható erők működnek, eleve semmi biztosíték sincs adva az iránt, hogy a rendszer változatlanul fennáll örök időkre; összeütközések eleve nincsenek kizárva, épp oly kevéssé azon eshetőség, hogy az egyik vagy másik pályaellipsis nagy tengelye vég nélkül megnövekszik, a mi által a pálya parabolába megy át és a bolygó a rendszer kötelékéből visszatérés nélkül eltávozik. Hasonló hatása lehet az excentrumosság vég nélküli megnövekedésének, és a hajlások folytonos változása az egyik vagy másik bolygót retrograd mozgásúvá teheti, holott most minden bolygó kivétel nélkül ugyanazon irányban, nyugotról kelet felé kering a Nap körül. A stabilitás kérdése természetesen csak akkor tárgyalható kimerítően, ha a háborgási számítás teljes megoldást talált; mert ha a fellépő képleteket úgy alakítjuk át, hogy bennök az idő elő ne forduljon, akkor ezek mindig egy stabilitási feltételt adnak. Úgyszintén megtudhatnók e képletekből, vajjon a bolygórendszernek mi az állapotja végtelen hosszú idővel ezután? LAPLACE-nak mindazonáltal sikerült egynéhány általános érvényességű stabilitási tételt találnia, természetesen csak azon feltevés alatt, hogy a bolygók tömegei igen kicsinyek. E tételek a következők:

A nagy tengelyek saeculáris változásokat szenvednek. Periodikusan visszatérő apró változásoktól eltekintve tehát, a bolygópályák ellipsiseinek nagy tengelyei nem növekedhetnek meg vég nélkül, úgy hogy a rendszerhez tartozó bolygó nem távolodhatik a végtelenségbe, de még annyira sem, hogy két bolygó egymással találkozhatnék. Viszont kisebbedésnek sincs helye, azaz pusztán NEWTON-féle erők befolyása folytán soha bolygó nem eshetik a Napra.

Az excentrumosságokra vonatkozólag találja Laplace a következő vonatkozást:

$$\Sigma m e^2 \sqrt{a} = \text{constans},$$

minden időre nézve. A nagy tengely, mint láttuk, saeculárisan állandó, és a két előjellel bíró $\sqrt{a}$ mindig positiv jellel veendő, ha az összes bolygók ugyanazon irányban keringenek a Nap körül. A bolygók tömege nagyon kicsiny, éppen ilyen jelenleg az excentrumosság, tehát még inkább annak szintén mindig positiv négyzete. A bolygó tömegéből, excentrumosságának négyzetéből és fél nagy tengelyének négyzetgyökéből képezett szorzatok összege tehát jelenleg tényleg kicsiny, és ezért mindig kicsiny is fog maradni. Ha tehát az egyik bolygó excentrumossága nő, akkor egy vagy több más bolygóé ugyanakkor fogyni fog. Épp úgy az sem lehetséges, hogy az összes pályák egyidőben körökké legyenek, mert akkor minden $e = o$ volna, a mi az összeg állandó értéke mellett nem lehetséges. Ha azonban csak egyetlenegy bolygó is retrograd volna, akkor a különben csak positiv mennyiségekből alkotott összegben *egy* tag negativ volna és összes okoskodásunk megdőlne, mert akkor egy possitiv és a negativ $m e^2 \sqrt{a}$ tagban e^2 a végtelenségig nőhet, és összegük mégis véges és állandó marad. Látnivaló tehát, hogy a bolygók egyirányú mozgása minő fontos körülmény a rendszer stabilitása érdekében.

Ha a mondott összeget csak Jupiter és Saturnus, a bolygórendszer két leghatalmasabb tagja számára képezzük, a következő számokat nyerjük:

Idő	Jupiter: $m' e'^2 \sqrt{a'}$	Saturnus: $m'' e''^2 \sqrt{a''}$	$m' e'^2 \sqrt{a'} + m'' e''^2 \sqrt{a''}$
16 000 Kr. e.	0·000 001 98	0·000 006 08	0·000 008 06
840 Kr. u.	4 74	3 09	7 83
1840 „	5 07	2 77	7 84
2840 „	5 41	2 47	7 88
17 000 „	7 84	0 11	7 95.

A két szélső időpontban Jupiter és Saturnus illetve maximális és minimális értékét veszi fel. A táblázat mutatja tehát, hogy Jupiter és Saturnus már magában véve is nagyon közel állandó összeget ad, úgy hogy a többi bolygó ez összeget már alig

változtatja meg. Látnivaló, hogy e két hatalmas test mintegy önmagában véve egyenlíti ki a bolygórendszer háborgásait, mintegy önmagukban egyensúlyozzák egymást. Ha e két bolygó között kisebbek volnának, akkor e kis bolygók igen nagy háborgásoknak volnának alávetve. A kis bolygók általában véve nagy excentrumosságú pályákban mozognak és ezért e^2 változásai aránylag kisebbek, mintha e kisebb volna.

Hogy a bolygók hajlására és csomópontjára nézve is stabilitási feltételt nyerjünk, mindenekelőtt szilárd fekvésű alapsíkra van szükségünk, melyre a pályák fekvését vonatkoztathatjuk. Ilyen síknak nem tekinthető az ekliptika, a földpálya síkja, mert ez folytonos változásoknak van alávetve. A Nap aequatorsíkja megfelelne, de fekvése pontosan meg nem határozható, még perczekre sem. Maga a rendszer mechanikai viszonyai adnak azonban ilyen síkot, melyet Laplace-féle síknak szokás nevezni, s melynek létezését már Kepler is sejtette. E sík fekvése szoros kapcsolatban áll a területi sebességekkel, a mennyiben ezen síkra vonatkozólag e sebességek maximumok és minimumok. Meghatározása a következő módon eszközölhető: fektessünk a Nap középpontján át tetszőleges síkot, pl. magát az ekliptikát, melyre a bolygók pályaelemeit már ismerjük. Kössük össze egyenesekkel a Nap középpontját a bolygók csomóival, és vágjunk le a Napból kiindulva ez egyeneseken a pályahajlás tangenseivel arányos hosszúságokat, melyek végpontjaira a bolygók tömegével arányos tömegeket alkalmazzunk. Az arányossági faktor a pályaparameter négyzetgyökéből és a pályahajlás cosinusából alkotott szorzat. Ha most ezen új rendszer súlypontjához a Napból egyenest húzunk, akkor ennek hossza ugyanazon faktor szerint arányos a szilárd sík hajlásának tangensével, és iránya a szilárd sík csomópontjának irányát adja az ekliptikához képest. Vagy képletileg; ha

$$\Sigma m \sin i \sin\Omega \sqrt{a(1-e^2)} = c_1 \; ; \; \Sigma m \sin i \cos\Omega \sqrt{a(1-e^2)} = c_2 \; ;$$

$$\Sigma m \cos i \sqrt{a(1-e^2)} = c_3 ,$$

a hol c_1, c_2 és c_3 állandókat jelentenek, és i és Ω az ekliptikára vonatkozó pályahajlás, illetve pályacsomó hosszúsága, akkor

$$\operatorname{tang} i_0 \sin\Omega_0 = \frac{c_1}{c_3} \text{ és } \operatorname{tang} i_0 \cos\Omega_0 = \frac{c_2}{c_3}$$

adják a szilárd sík hajlását és csomóhosszát az ekliptikára vonatkozólag. Ha az 1800-iki ekliptikát veszszük kiindulási pontul, akkor Laplace számításai szerint $i_0 = 1^0\ 34'\ 36''.29$ és $\Omega_0 = 103^0\ 13'\ 45''$, míg a bolygók pontosabb tömegével és Neptunust is beleszámítva: $i_0 = 1^0\ 35'\ 27''.90$ és $\Omega_0 = 106^0\ 0'\ 49''.0$.

Ezen sík — melyhez hasonló minden, külső behatásoknak alá nem vetett mechanikai rendszerben feltalálható — mindaddig állandó, míg a bolygórendszerben csak belső erők működnek, külső önkényes beavatkozás nélkül. Miután már a legrégibb történeti feljegyzések is a mérések pontosságán belül ugyanazon értékekhez vezetnek, egyszersmind bizonyítékot nyertünk aziránt, hogy történeti idők lefolyása alatt bolygórendszerünk ily önkényes külső beavatkozást nem szenvedett. Ezen állandó síkra vonatkozólag azt találja Laplace, hogy

$$\Sigma m \sqrt{a} \operatorname{tg}^2 i = \text{const}; \quad \Sigma m \sqrt{a} \operatorname{tg} i \sin \Omega = \text{const};$$

$$\Sigma m \sqrt{a} \operatorname{tg} i \cos \Omega = \text{const},$$

s ezen egyenletek éppen úgy tárgyalhatók, mint az excentrumosságra vonatkozó. A hajlások, melyek ma mind igen kicsinyek, e szerint mindig kicsinyek is maradnak, mert $\operatorname{tang}^2 i$ mindig positiv lévén, az összeg állandó csak úgy maradhat, ha az egyik bolygó pályahajlásának megnövekedése egy vagy több más bolygó hajlásának kisebbedésével jár. Egyszersmind a ma direct mozgású bolygók közül egyetlenegy sem válhatik retrográddá, mert ehhez szükséges volna, hogy a pálya feleegyenesedjék és a merőleges álláson is túlmenjen. De a merőleges állás esetében $i = 90^0$, tehát $\operatorname{tang} i = \infty$, és mivel egyetlenegy $\operatorname{tang} i$ sem lehet az összeg állandó értéke mellett végtelen, ilyen átalakulás lehetetlen. Ha azonban ma akár csak egy bolygó is retrograd volna, akkor — az előbbiekhez hasonló okoskodások szerint — bármennyi bolygó is válhatnék hátrafutóvá.

A következő két egyenletre ezen okoskodás nem alkalmazható, mert $\sin \Omega$ és $\cos \Omega$ úgy positiv, mint negativ előjelű lehet. Ennek következtében, noha e két függvény állandóan -1 és $+1$ határok között marad, Ω vég nélkül megnövekedhetik, mert e két függvénynél az átmenet a negativ értékekbe 0 értéken át történik, nem mint a tangens esetében ∞-en át.

Éppen úgy, mint a csomó hossza, a perihélium hosszúsága is vég nélkül megnövekedhetik; mindkét mozgás természetesen körmozgás lévén, már magában véve is periodikus.

Első tekintetre úgy látszanék, mintha a bolygók keringési ideinek commensurabilitása is végtelenül megnövekedő háborgásokra adhatna okot. Ez esetben ugyanis két bolygó helyzete bizonyos időközök mulva egészen pontosan ismétlődik, s így a hatás egyoldalúlag mindig ugyanazon irányban tetszőleges nagyságig fokozódik. Így pl. Jupiter és Saturnus esetében az $5\,\mathfrak{h} - 2\,\mathfrak{U}$ argumentum igen hosszú időn át majdnem teljesen állandó marad, s innen e két bolygó kölcsönös háborgása nemcsak hosszú idő alatt játszódik le, hanem egyszersmind igen tetemesre megnövekedik is. A commensurabilitás hiányát bolygórendszerünkben tehát sokan a stabilitás biztosítékának tekintették. És e mellett tényleg bizonyítani látszanak az úgynevezett Kirkwood-féle hézagok és a Saturnusgyürű oszlásai. A kis bolygók övében ugyanis éppen ott hiányoznak teljesen az asteroidák, a hol keringési idejük a Jupiter keringés $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$..-nek megfelelne. Hasonlóképen hézagos a Saturnusgyürű is mindazon helyeken, a melyeken valamely gyürűrészecske a Saturnusholdak valamelyikével kis egész számokkal pontosan összemérhető keringési idővel bírna.

A dolog tényleg Hansen kutatásai szerint egészen másképen áll. Ha ugyanis a commensurabilitás valamikor közelítésben megvolt, akkor a háborgás e viszonyt legalább rövid időre tökéletessé teszi, de azután a pontos összemérhetőség körül ingalengésszerű eltérések lépnek fel. Az egyik bolygó mozgása ugyanis lassul, a másik gyorsul a kölcsönös behatás folytán, a keringési idők tehát az összemérhetőség felé közelednek, és ezt végül el is érik. Ekkor a háborgás eddig változó argumentuma állandóvá válik s vele együtt a háborgás maga is. Az egyik bolygó tehát még jobban lassul, a másik gyorsul s a kitérés most az összemérhetőség másik oldal felé történik. Ugyanez okból egyenlő a Hold forgási és keringési ideje egészen az alig 1 ívmásodpercznyi libratióig, s ugyanez oknál fogva végez ingaszerű mozgásokat Mercur gömbje a Naphoz húzott radiusvector körül; ezek hijában ennél is forgási és keringési sebesség azonos volna.

Az összemérhetőség legtökéletesebb példáját a Jupiter

rendszer szolgáltatja; ugyanis ha μ_1, μ_2, μ_3 a három belső Hold közép napi mozgása, akkor

$$\mu_1 + 2\mu_3 = 3\mu_2,$$

s e viszony mindig szigorúan is állt, mert különben ingadozások volnának észlelhetők ez állapot körül, melyek tényleg nem vehetők észre.

Möbius a stabilitási problemát illetőleg hasonló eredményhez jut: szerinte a bolygórendszer állandósága határtalan hosszú időre biztosítva van, ha a bolygóknak a Naptól való középtávolságai, tehát keringési idejük is, állandók; ha az excentrumosság mindig kis tört marad, s ha a térben változatlan sík konstruálható, melylyel a bolygók pályái kis szögeket képeznek.

Az állandósági problemában azonban nem szerepelnek az üstökösök; ezek tömege a bolygóéknál is sokkal kisebb, mert valóságban teljesen mérhetetlen, de visszont mozgási irányuk egészen tetszőleges, a mennyiben a directfutásúak mellett retrograd üstökösök is vannak. Azonkívül a legtöbb üstökös pályája parabola, azaz nagy tengelye végtelen nagy, úgy hogy nem illeszkednek közvetlenül a Laplace-féle egyenletekbe. Mindazonáltal a stabilitást éppen roppant kis tömegük folytán nem dönthetik meg beláthatóan hosszú idők alatt. Eredetileg ugyanis minden üstökös parabolás pályában közeledik a végtelenségből a Nap felé, és ugyancsak a végtelen ürbe visszatér, ha a bolygórendszeren belül való tartózkodása alatt tetemes háborgást nem szenved. Ha ellenben ez utóbbi eset előfordul, akkor az eredetileg parabolikus pálya könnyen átváltozik elliptikussá, azaz az üstökös ekkor a rendszer állandó tagjává válik. Ezen átváltozás természetesen annál valószinűbb, minél hosszabban tartózkodik az üstökös a rendszer terén belül, tehát minél kisebb pályájának hajlása az ekliptika felé. Innen magyarázható, hogy a periodikus vagy elliptikus üstökösök, azaz a naprendszerhez állandóan tartozók, majdnem kivétel nélkül kis hajlásokkal bírnak.

Az eddig mondottak azonban a bolygórendszernek csak mechanikai stabilitására vonatkoznak, mely kedvező elintézés után is még mindig kételyeket hagy rendszerünk jövője iránt. A kérdés teljes megoldására szükségünk van azon energia

tanulmányozására is, mely a rendszerben nemcsak mint tömegmozgás, hanem mint láthatatlan mozgás is jelen van, s ez a hő. A hő mechanikai elmélete két tételt szolgáltat, melyekkel a kérdés megoldható, s ezek Clausius foglalatjában a következő módon fejezhetők ki: A világegyetem energiája állandó, és a világegyetem entropiája maximum felé tör.

Az első tétel szerint az összes úgy látható, mint láthatatlan mozgások energiája együttvéve állandó; ha tehát különben változatlan körülmények között egy tömeg mozgását hirtelenül megsemmisítenők is, akkor az e mozgásnak megfelelő energia nem vész el, hanem helyette ugyanakkora energiának megfelelő hőmennyiség lép fel. Az entropia elnevezés azon arányt fejezi ki, melyben látható tömegmozgás hővé alakul. A természetben ugyanis kivétel nélkül azt tapasztaljuk, hogy az összes mozgások (súrlódás, ellentállás s hasonlók folytán) maguktól is hővé alakulnak, ellenben soha nem alakul hő magától munkává; erre mindig szükséges, hogy valami más compensatio történjék, hogy pl. meleg a melegebb testből hidegebb testbe menjen át, mint az a gőzgépben történik. Clausius ezen második tétele tehát azt mondja, hogy a természetben lévő összes mozgások idővel hőmozgássá fognak átalakulni, és a végállapot e szerint az, hogy a világür minden pontjában ugyanazon hőmérséklet uralkodik. Mihelyt ez fellépett, minden látható tömegmozgás véget ért. A hőmérsékletnek mindenütt egyenlő értéke tehát a világrendszer igazi vége.

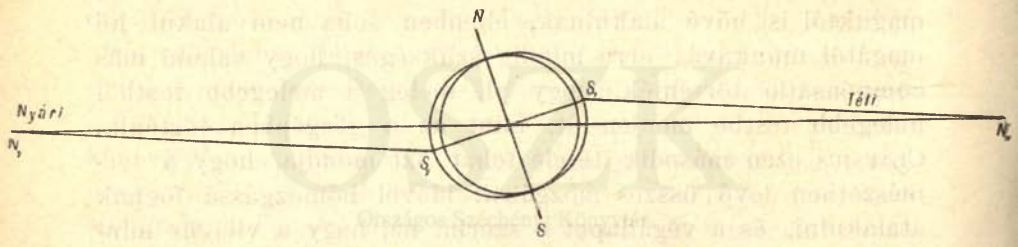
Egynéhány reánk nézve fontossággal bíró háborgással mi is közelebbről foglalkozunk: a praecessióval és tengerjárással, mely már azért is fontos, mert alkalmas tárgyalása némi betekintést enged a Föld belső szerkezetébe.

XXV. FEJEZET.

A praecessio és nutatio.

A praecessio a Földnek a gömbalaktól eltérő alakja és az ekliptika ferdesége folytán jön létre. A Földet ugyanis meglehetős — elemi tárgyalásnál kielégítő — pontossággal homogen gömbbel azonosíthatjuk, melynek átmérője a forgási tengely

hosszával egyenlő, s melynek aequatorára ellipsoidikus héj vagy dudorodás van ráfektetve (225. ábra). A Nap s a bolygók a belső, gömbalakú magra éppen úgy hatnak, mintha e gömbnek csak középpontja volna jelen; e gömbtől tehát teljesen el is tekinthetünk. A hatás az aequatori dudorodásra azonban teljesen más, ezek súlypontjai az aequator síkjában S_1 és S_2-ben feküsznek, s ezeket támadja meg a Hold, a Nap s a bolygók vonzási ereje. Ha ez égi testek mind az aequator síkjában, azaz a Föld forgási tengelyére merőleges síkban mozognának, akkor a két súlyponton át ez égi testekhez húzott egyenesek még mindig párhuzamosak volnának, s a Föld középpontján haladnának át. De ez égi testek tényleg az ekliptikához közel mozognak, — a Nap maga az ekliptikában — s ezért mindegyiknek folytonos törekvése, hogy a Föld aequatorát az



225. ábra. A praecessió magyarázata.

ekliptikába ejtse, vagy más szóval, hogy a Föld forgási tengelyét felegyenesítse. Ha a Nap N_1-ben áll, akkor a rajz a téli solstitiumnak megfelelő állását adja a Földnek és Napnak, N_2-ben a nyári solstitiumnak megfelelő elhelyezést. N_1 vonzza S_1-et és a nagyobb távolság miatt valamivel gyengébben S_2-t; az S_1-re gyakorolt hatás a forgási tengelyt felegyenesíteni, az S_2-re való vonzás még jobban lebillenteni igyekszik. De mivel az első hatás nagyobb, ennek megfelelő törekvés marad hátra. Egészen hasonlóan állanak a dolgok a nyári solstitium alkalmával. Most ugyanazon jelenség lép fel, melyet a ferdén állított pörgettyűnél tapasztalunk, vagy melyet vastengelyű forgó pörgettyű mutat, ha tengelyéhez mágnessel közeledünk: a tengely nem tartja meg többé függélyes állását, hanem a térben kúppalástot ír le, minek folytán a pörgettyű geometriai aequatorának az asztal lapjával való metszési vonala ez utóbbin foly-

ton tova vándorol. Szakasztott ugyanezen minta szerint megy végbe a már korábban ismertetett praecessió, mely azonban jóval bonyolódottabb problema. A Nap ugyanis az aequator felé nem mindig ugyanazon hajlást mutatja; a vonzási irány az aequatorral a téli solstitium alkalmával $-23^{0}28'$, a nyári solstitium alkalmával pedig $+23^{0}28'$-nyi szögletet képez, az aequinoctiumok alkalmával pedig az ekliptikával teljesen összeesik, úgy hogy e pillanatban praecessiót létesítő törekvése a Napnak nincs. Ezenkívül pedig a Nap az egyik félévben közelebb áll a Földhöz, a másikban távolabb tőle, úgy hogy e szerint a hatás nagyobb, illetve kisebb; mindkét befolyás folytán a pracessio nem állandó, hanem egy év lefolyása alatt tetemes változásoknak van alávetve.

Még nagyobb mértékben, mint a Nap, gyakorolja nagyobb közelsége folytán befolyását a Hold. Ez újabb complicatiókat hoz be, a mennyiben a Hold sem mozog az ekliptikában, hanem egy ehhez mintegy 5^{0} alatt hajló síkban, s nem egy év, hanem már egy hónap alatt, még pedig ugyancsak változó távolságban a Földtől. Így a jelenségbe egy újabb, rövidebb tartamú periodus is vitetik, mely annál bonyolódottabb, minthogy a Hold csomói aránylag igen gyors változást szenvednek, a Naphoz képest tehát igen gyorsan eltolódnak azon pontok, melyekben a Hold praecessionális hatása null, illetve maximum.

A praecessiónak állandó középértéke az, melyet eddig a praecessio állandójának neve alatt ismertünk meg, míg a periodikus jellegű tagok ez állandóknak mintegy megváltozásait adják, és nutatio néven foglaltatnak össze. Ha a nutatiót elhanyagoljuk, akkor kapjuk az égi testeknek úgynevezett középhelyeit, melyek a közép aequinoctiumra vonatkoznak, épp úgy az ekliptika közép ferdeségét, melyet a praecessio a tropikus év hosszúságával együtt szintén megváltoztat. Ha drótból körgyürűt alkotunk, s a ferdén felállított forgásba hozott pörgettyűt tengelyével hozzá támasztjuk, akkor a pörgettyű mozgása a közép praecessiót utánozza; ha azonban a drótgyürűt még hullámzatosan meghajlítjuk, akkor a tengely a nutatio jelenségét is adja vissza. Közelítésben ugyanis azt a képet nyerjük, mintha a Föld forgási tengelye egy $9''.2$ nagy és $6''.9$ fél tengelyekkel bíró ellipsisen mozogna, melynek

középpontja ismét az égi pólus körül az ekliptika ferdeségével egyenlő sugarú kört írt le.

Hogy a praecessio és nutatio hatása oly kicsiny, s hogy periodusa oly nagy, annak oka, hogy úgy a Föld gömbi eltérése, mint a vonzó erők különbségei nagyon kicsinyek, egyrészt a Hold és Nap nagy távolsága miatt, másrészt mert a vonzási erők irányai az ekliptikához nagyon kevéssé hajlottak.

A praecessio jelenségeit a pörgettyű helyett az úgynevezett gyroscopokkal is érzékenyíthetjük, melyek mechanikája a praecessiójával egyenlő.

A praecessio, mint már korábban láttuk, megfigyelések által minden előzetes elmélet nélkül meghatározható; de tisztán számítás útján is állapíthatjuk meg értékét, ha ismerjük a Föld alakját és belsejében a tömegeloszlás módját. Ez utat nyit, a Föld belsejének tanulmányozására, melyet először a siker némi látszatával Hopkins követett. Ha ugyanis a Föld belseje számára tetszőleges hypotheziseket állítunk fel, akkor az ezek alapján számított praecessió megfigyelt értékével hasonlítható össze. A két szám azonossága mindenesetre bizonyítéka annak, hogy az alapul vett hypothezis egyike azon sokaknak, melyek a praecessio kérdését megoldhatják, míg a két szám különbsége a felvett hypothezist mindenesetre elítéli. Törekedhetnénk azután még továbbá oda is, hogy a felvett hypothezis egyszersmind megfeleljen a Föld lapultságának és azon tehetetlenségi momentumoknak is, melyek az ingamérésekből következtethetők.

A szép gondolat, melyet Hopkins-on kívül számos más tudós is követett, fájdalom, sikerrel nem járt, mert a két legszélső feltevés is, hogy t. i. a Föld merőben folyékony és merőben merev, oly praecessio értékhez vezet, mely a ténylegesen megfigyelttől alig tér el. Jeléül annak, hogy a praecessio nem annyira a Föld belső tömegeloszlása, mint inkább a ható erők hatásmodorára jellemző. Talán valamivel több kilátással kecsegtet a nutatio elméleti tárgyalása; de mivel ez mintegy 8-szor kisebb, mint a praecessio, már előre is várható, hogy az abból vont következtetések kisebb bizonyító erővel fognak bírni.

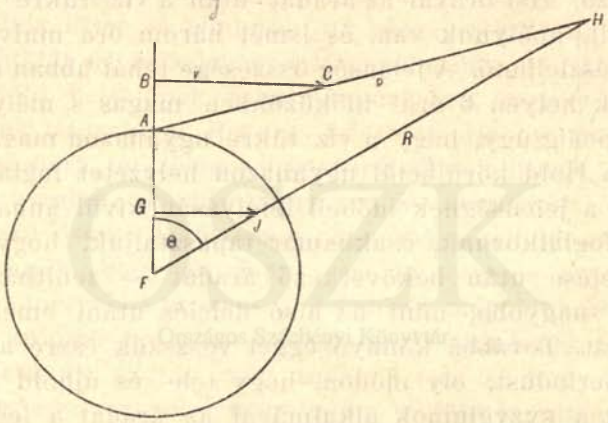
XXVI. FEJEZET.

A tengerjárás.

Egy másik fontos háborgás, mely mint látszik, általános kosmikus fontossággal bír, az árapály vagy tengerjárás jelensége. Rövid idővel a Hold delelése után a tenger legmagasabban áll és ezután nem sokára sülyedni kezd. Az apadás gyorsasága mintegy 3 órával a magas víz után legnagyobb, akkor a mikor a vízszin közepes magasságát érte el, és azután ismét fogyni kezd. Hat órával az áradat után a víz tükre a legmélyebben áll, apályunk van, és ismét három óra mulva a rendes szint észlelhető. A jelenség összesége tehát abban áll, hogy valamelyik helyen 6 órai időközökben magas s mély víz lép fel, még pedig úgy, hogy a víz tükre ugyanazon magasságban van, ha a Hold körülbelül ugyanazon helyzetet foglalja el az égen. Ha a jelenségnek időbeli lefolyásán kívül annak méreteivel is foglalkozunk, csakhamar tapasztaljuk, hogy a Hold felső delelése után bekövetkező áradat — zenitháradat — valamivel nagyobb, mint az alsó delelés utáni emelkedés, a nadiráradat. Továbbá könnyűséggel veszszük észre a mintegy 14 napi periodust, oly módon, hogy tele- és újhold alkalmával, tehát a syzygiumok alkalmával az áradat a legnagyobb — szökő ár — a holdnegyedek, quadraturák alkalmával ellenben legkisebb, vak áradat. Helyről-helyre e viszonyok tetemes változásoknak vannak alávetve, és különösen változékonyak azon időközök, melyekkel a magasvíz a Hold delelése után fellép. A tele vagy újhold után fellépő első magasvíz csillagászati helyi ideje a kikötő idő (tide hour, establishment) nevét viseli. Mivel ekkor a Hold a Nappal együtt delel, ez egyszerűen a syzygiális áradat felléptének helyi ideje. Általában véve pedig kikötő idő, vagy közepes establishment alatt értenünk kell azon idők évi közepét, melylyel a magasvíz a Hold deleléséhez képest késik.

Már a legkezdetlegesebb tapasztalatok is elutasíthatatlanul feltüntették azon kapcsolatot, mely a tengerjárás és a Hold futása között fennáll, de csak a tömegvonzás felfedezése adhatta meg az oki összefüggést. A tengerjárás első, úgyneve-

zett statikai vagy egyensúlyi elmélete Newton-tól való és a jelenségekről némileg már helyes fogalmat adhat. Képzeljük, hogy a Föld gömb, melyet egyenletesen tenger borít, és legyen a 226. ábrában H a Hold. A valamely hely, melytől a Hold $BAC = \vartheta$ látszólagos és $BFH = \theta$ geocentrumos zenithtávolságban van. A-ban a nehézségi erő a Hold vonzása folytán kisebbedik AB értékkel, ha AC az erő, melylyel H az A pontban lévő vízrészecskét vonzza; de a Hold a Föld középpontjára is gyakorol nagyobb távolsága miatt az előbbinél kisebb hatást, mely a nehézségi erő irányában FG componenst adja. Nyilvánvaló, hogy AB — FG azon erő, melylyel a Hold jobban vonzza



226. ábra. A tengerjárás statikai elmélete.

az A pontot, mint a középpontot, tehát azon tényleges gyorsulási kisebbedés, mely valóban észlelhető. A dolog másképen is fejezhető ki: a Hold FJ vonzása folytán emelkedik a Föld FA sugár irányában FG-vel; az A-ban lévő víztömeg AB-vel. Ha a relativ emelkedést keressük a *nyugvó* Földhöz képest, akkor AB-ből nyilván FG levonandó. Ámde, ha m a Hold tömegét jelenti:

$$AC = \frac{fm}{\rho^2} \text{ és } FJ = \frac{fm}{R^2}, \text{ míg}$$

$$AB = AC \cos \vartheta \text{ és } FG = FJ \cos \theta,$$

úgy, hogy az árkeltő erő, azaz a nehézségi gyorsulás kisebbedése

$$\triangle g = f\frac{m}{\rho^2}\cos\vartheta - f\frac{m}{R^2}\cos\theta.$$

Az AFH háromszögben áll:

$$\rho^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta \text{ és } R^2 = r^2 + \rho^2 + 2\rho r\cos\vartheta;$$

a két egyenletből következik

$$\cos\vartheta = \frac{R\cos\theta - r}{\rho},$$

és ezért

$$\triangle g = f\frac{m}{\rho^3}(R\cos\theta - r) - f\frac{m}{R^2}\cos\theta,$$

vagy minden távolságot a Hold távolságában kifejezve:

$$\triangle g = \frac{fm}{R^3}\left[1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \frac{r^2}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}(R\cos\theta - r) - f\frac{m}{R^2}\cos\theta.$$

Ha a jobboldalon álló trinomot $\frac{r}{R}$ második hatványáig kifejtjük, lesz:

$$\triangle g = f\frac{m}{R^2}\left[1 + 3\frac{r}{R}\cos\theta - \tfrac{3}{2}\frac{r^2}{R^2}(1 - 5\cos^2\theta)\right](\cos\theta - \frac{r}{R}) - f\frac{m}{R^2}\cos\theta$$

$$= f\frac{mr}{R^3}\left[(3\cos^2\theta - 1) - \tfrac{3}{2}\frac{r}{R}(3\cos\theta - 5\cos^3\theta)\right],$$

mely kifejezésben a $\frac{r^3}{R^3}$ tag szintén el van hanyagolva. Az árapályt keltő erő, mint két különböző távolságokra ható vonzó erő különbsége tehát a távolság köbével visszásan arányos, s ezen törvény áll egyáltalában minden perturbáló erőre nézve, tehát arra is, mely a praecessiót okozza. Ha a nehézségi gyorsulás a gömbalakú Föld tengerszintjén

$$g = f\frac{M}{r^2},$$

akkor azon magasságban, melyig a vízrészecske emelkedik:

$$g' = g\frac{r^2}{(r+h)^2} = g\left(1 - 2\frac{h}{r}\right) = f\frac{M}{r^2}\left(1 - 2\frac{h}{r}\right)$$

értékkel bír, úgy hogy a gyorsulás kisebbedése

$$g' - g = \triangle g = -2f\frac{M}{r^3}h.$$

A két $\triangle g$ érték egyenlítéséből keletkezik a következő egyenlet:

$$h = \frac{mr^4}{2MR^3}[1 - 3\cos^2\theta + \tfrac{3}{2}\frac{r}{R}(3\cos\theta - 5\cos^3\theta)],$$

mely a tengerszint magasságát adja, ha a Hold θ geocentrumos zenithtávolsággal bír. Ugyanezen egyenlet a potentiálelmélettel is vezethető le; ha valamely vízrészecskének távolsága a Föld középpontjától r', akkor a ráható erők potentiálja

$$V = f\frac{M}{r'} + f\frac{m}{\rho} - f\frac{m}{R^2}r'\cos\theta.$$

Az első két tag közvetlenül érthető; az utolsó tagban $f\frac{m}{R^2}$ az erő, melyet a Hold a Földre, mint egészre gyakorol, tehát $f\frac{m}{R^2}.r'\cos\theta$ a munka, melyet a Hold végezne, ha a Földet a vonzott vízrészecske irányában emelné, szóval a Holdnak a Földre gyakorolt relativ potentiálja, melyet $f\frac{m}{\rho}$-ból le kell vonnunk, ha a Földet a Hold behatása mellett is állónak képzeljük. A vízrészecskék természetesen az előbbi egyenlet által ábrázolt potentiálfelületben helyezkednek el, s ezért oly vízrészecske számára, mely a Föld felületén az R egyenesben fekszik, ugyancsak:

$$V = f\frac{M}{r} + f\frac{m}{\rho_1} - f\frac{m}{R^2}r,$$

a hol ρ_1 azon értéke ρ-nak, mely $\theta = 0$ számára következik. Ámde úgy, mint előbb:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}[1 + \frac{r}{R}\cos\theta - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}(1 - 3\cos^2\theta)] \text{ és}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R-r} = \frac{1}{R}\left[1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \ldots\right].$$

A niveaufelület két egyenletének különbsége:

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{m}{M}\left\{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} + \frac{r'}{R^2}\cos\theta - \frac{r}{R^2}\right\},$$

vagy ρ és ρ' értékeinek behelyettesítésével:

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{m}{M}\frac{r}{R^2}\left\{(1-\cos\theta) + \frac{3r}{2R}(1-\cos^2\theta) + \frac{r'}{r}\cos\theta - 1\right.$$

$r' - r$ mindig nagyon kicsiny, és ezért a jobb oldalon, melyen ez igen kis mennyiség még $\frac{mr}{MR^2}$ kis törttel van megszorozva, elhanyagolható, vagy $\frac{r'}{r} = 1$ vehető. E szerint

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{3mr^2}{2MR^3}\sin^2\theta,$$

vagy elég közel

$$r - r' = \triangle r = \tfrac{3}{2}\frac{mr^4}{MR^3}\sin^2\theta,$$

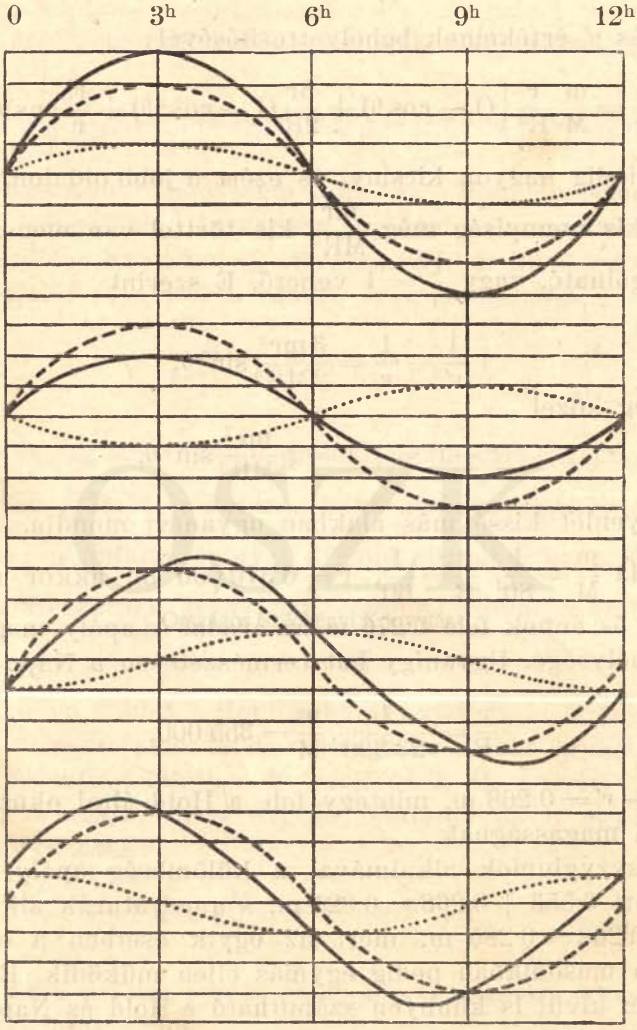
mely egyenlet kissé más alakban ugyanazt mondja, mint az előbbi. Ha $\frac{m}{M} = \frac{1}{80}$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{60}$, $r = 6\,370\,000$ m, akkor $r' - r = 0{\cdot}553$ m, és ennek fele $0{\cdot}276$ m az áradat és apály magassága, illetve mélysége. Ugyanígy hat természetesen a Nap:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{23\,300}, \quad \frac{m}{M} = 355\,000,$$

tehát $r - r' = 0{\cdot}268$ m, mintegy fele a Hold által okozott tengerjárási magasságnak.

A syzygiumok alkalmával a különbség apály és áradat között $0{\cdot}553 + 0{\cdot}268 = 0{\cdot}821$ m, a quadraturák alkalmával $0{\cdot}553 - 0{\cdot}268 = 0{\cdot}285$ m, mert az egyik esetben a két test együtt, a másodikban pedig egymás ellen működik. Ezen két időponton kívül is könnyen számítható a Hold és Nap együttes hatása, de könnyebben járunk el graphikusan, ha a Hold és Nap hullámát egyszerűen superponáljuk, azaz úgy járunk el, mint a phasiskülömbséget mutató hullámok interferentiájának ábrázolásában. A 227. ábra mutatja körülbelül helyes arányban a Hold és Nap okozta hullám összetételét az egyes állásokban.

Az ábra legfelső diagrammja holdtöltére és újholdra, tehát a syzygiumokra vonatkozik, a második a negyedekre, a quadraturákra érvényes, a harmadik az első és harmadik oktánsra,



227. ábra. A Hold és Nap árhullámának összetétele.

a negyedik a második és negyedik oktánsra. A Hold keltette árhullám vonalas, a Napé pontozott görbe, míg a teljesen kihúzott görbe a két hullám superpositióját adja. Az első diagrammban megegyezik a két eredeti hullám phasisa, a máso-

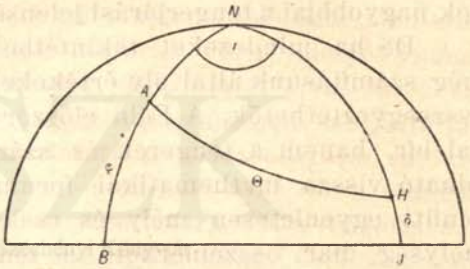
dikban az egyik hullám hegye a másik hullám völgyének felel meg. A harmadik diagrammban a phasiskülömbség egy negyed, a negyedikben háromnegyed periodusra rúg fel, s e szerint az eredő hullám amplitudója és annak fekvése a Hold állásához képest is mindig más és más.

A Nap a Földet 24^h közép napi időben járja körül, a Hold azonban átlag $24^h\ 50^m$-t igényel egy teljes körfutásra. Innen van, hogy a két hullám periodusa nem azonos, a Napé 12^h, a Holdé $12^h\ 25^m$, a mi már complicatiót hoz be a problemába.

A Föld alakja tehát a tengerjárás által megváltozik, a mennyiben a Hold és Nap irányában megnyúlik. De a két hullám nem külön-külön lép fel, hanem interferentia által egygyé olvad. Ha a víz emelkedése a gömbfelület fölé x, sülyedése az apály helyén a gömbfelület alá y, akkor a tömeg és térfogat megmaradása követeli, hogy

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi(r+x)^2(r-y),$$

vagyis x és y kicsinysége mellett r-hez képest: $2x = y$ legyen.



228. ábra. A tengerjárás periodusai.

A tünemény periodikus lefolyását a magassági egyenletben szereplő $\sin^2\theta$ faktor tanulmányozása adja. A 228. ábraképviselje az éggömböt a Föld középpontjától tekintve. A a megfigyelési hely zenithje, H a Hold helye. Minthogy valamely hely zenithjének declinatiója a hely geographiai szélességével egyenlő, azért $AN = 90_0 - \varphi$, és NB az A hely meridiánja. A θ szöglet tehát a két pont gömbi távolsága, és t a Hold vagy a Nap óraszöglete. E szerint

$$\cos\theta = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

és ebből alkalmas transformatio után:

$$\sin^2\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi - \tfrac{1}{4}\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos 2\delta$$

$$- \tfrac{1}{4}\cos^2\varphi\,[\cos 2\delta + \cos 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2(\delta + t) + \tfrac{1}{2}\cos 2(\delta - t)]$$

$$- \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\,[\sin 2(\delta + t) + \sin 2(d - t)].$$

A periodus megítélésére ugyanis előnyös, ha az idővel változó trigonometriai függvények csak az első hatványban fordulnak elő. Ha egyelőre a Holdat tekintjük, akkor a következő periodikus tagjaink vannak: $\cos 2t$, $\cos 2\vartheta$, $\cos 2(\vartheta \pm t)$. $2t$ nyilván egy fél holdnap alatt, tehát átlag $12^h\ 25^m$ alatt tesz ki 360^0-ot; ϑ pedig egy hónap lefolyása (siderikus keringés) alatt veszi fel összes értékeit, tehát 2ϑ a félhónapi periodust képviseli; $2(\vartheta \pm t)$ egy újabb periodus, mely a félhavi és fél holdnapi periodusból tevődik össze. A mennyiben azonban a nap a hónapnak csak aránylag kis része, ez is a félhavi periodushoz közel áll. A Nap esetében e periodusok illetve a fél soláris nap és a fél év. Ezenkívül azonban változnak ez égi testek távolságai is, a mi újabb bonyodalommal jár, és a Hold helye az égen a háborgások által is megmásul, melyeknek nagyobbjai a tengerjárási jelenségekben visszatükröződnek.

De ha mindezeket tekintetbe vennők is, nem kapnánk még számításunk által oly értékeket, melyek a megfigyeltekkel összeegyeztethetők. A Föld először nem egyenletes víztakaróval bír, hanem a tengerek és szárazulatok eloszlása nem is adható vissza mathematikai formulával. A tenger nem mindenütt egyenletesen mély és csekélyebb helyeken, a hol a mélység már összemérhető a tengerjárás magasságával, a superpositio elve nem áll pontosan. Ekkor az egyes periodusokkal bíró hullámok combinatiohullámokat adnak, melyek rezgési száma az egyesek összegével és különbségével egyenlő. Az egyszer fellépett tengerjárási hullám hosszabb ideig marad fenn, és a következő a közelebbivel interferálhat. A kosmikus periodusokon kívül vannak még hasonló periodusokhoz kötött meteorologiai jelenségek, a légnyomás, a szél, a csapadékok, melyek a kosmikus hullámokkal egyesülő úgynevezett meteorologiai hullámokat adják. A legnagyobb hiba azonban az, hogy az ársphaeroid nem egyensúlyi alak, hanem mozgási állapot. A Föld ugyanis nyugotról keletfelé forogván, mintegy elforog a Hold irányában állandóan megmaradó árhullám alatt, és ezért minden pillanatban más és más vízrészecskék azok, melyek az emelkedésben és sülyedésben részt vesznek. E mellett tekintetbe kell természetesen venni, hogy a vízrészecskék mozgásukat nem surlódás nélkül végezik, és hogy a Föld tengelyforgása is eltérítő befolyást gyakorol. A statikai elmélet-

nek számai közelítésben a nyilt óczeán kis szigetei mellett észlelhetők, de a szárazföldek közelében egészen hamis értékeket adnak.

Laplace volt az első, a ki a tengerjárást mozgási tüneményül fogta fel, és ennek dynamikai elméletét adta; utána különösen Darwin, Airy és Thomson foglalkozott a problémával, legszerencsésebben Airy és Thomson. Az előbbi a Föld felületén keskeny gyürűs csatornákat képzel, melyekben a tengerjárás jelenségeit tanulmányozza; ezen csatornákból tehető azután össze véges szélességű tenger is. Ha a csatorna az aequatorral esik össze, akkor benne két hullám kering, melynek hossza a Föld fél kerületével azonos; ha ellenben a meridián mentén fekszik, akkor egyszerűen váltakozó vízmagassággal van dolgunk. Az elmélet tüstént mutatja a tüneményben fellépő periodusokat, de a víz emelkedése, tehát a hullám magassága, számos tapasztalati faktortól függ, melyek megfigyelések által határozandók meg. Tekintettel arra, hogy az elmélet csupán a periodikus tagok argumentumát szolgáltatja, az amplitudók ellenben tapasztalatilag a mareograph adataiból vezetendők le, Thomson egy módszert állít fel a tengerjárás elemzésére és előre való kiszámítására. Ha a tengerjárási jelenséget hullám-problémának tekintjük, akkor ezt számtalan hullám superpositiójaképen állítjuk elő, úgy hogy a tengerszint magassága tetszőleges időben Thomson szerint

$$h = a_0 + a_1 \sin n_1 + a_2 \sin n_2 + \ldots$$

végtelen sor által ábrázolható, melyben n_1, n_2.. a Nap és Hold helyzetei által elméletileg is adott szögletek, holott az a_0, a_1, a_2.. tapasztalati coefficiensek, melyek minden egyes hely számára hosszabb ideig folytatott limnographikus feljegyzésekből vezetendők le. Lényegében véve az adott sor egy Fourier-féle sorral azonos, melylyel általában minden természeti tüneményábrázolható, s ezért Thomson eljárása nem elméletet nyujt, hanem csak módszert. Az a_0, a_1, a_2.. coefficiensek meghatározása egyszerű módon történhetik, mint ezt Börgen elemi úton is bebizonyította.

Az elmélettől való helyi eltérések megbeszélése, különösen azon feltünő jelenségek, hogy egyes pontokban bizonyos

periodusok kimaradnak, vagy éppen fölös számban vannak meg, már inkább az oczeánographia keretébe tartozik. Itt még csak azon általános szerepről kell szólanunk, melyet a tengerjárás mint cosmikus jelenség játszik.

XXVII. FEJEZET.

A Föld szilárd kérgének deformatiója.

Könnyű belátni, hogy a legszigorúbb elmélet által adott hullámmagasságok is csak akkor lehetnek helyesek, ha a Föld szilárd kérge teljesen merev, azaz az égi testek vonzása alatt alakváltozásokat nem szenved. Ha ellenben a Föld kérge szintén enged, akkor nyilván mindig csak a víz és szárazföld hullámzásának különbségét fogjuk észrevehetni, éppen úgy, mint hajón, mely a vízzel együtt emelkedik és süllyed, nem észlelhető a tengerjárás. Íme tehát oly módszer birtokába jutottunk, melynek segítségével megítélhetjük a Föld kérgének rugalmasságát, és talán a Föld belsejére is vonhatunk következtetést. Darwin és Thomson végeztek erre vonatkozó számításokat, melyek eredménye, hogy a szilárd kéreg „árhulláma“ $^2/_3$-a, illetve $^3/_5$-e a vizének, ha a Föld kérge illetve az üveg vagy angol aczél merevségével bír.

Az elméleti árhullámnak a megfigyelttel való összehasonlításának megvannak azonban a maga nehézségei, a mennyiben az oczeánok ismeretlen mélységtörvénye és a földfelületi configuratio szabálytalansága folytán az elméletből csupán a jelenség periodusait kölcsönözzük, míg az egyes periodusokhoz tartozó emelkedéseket alkalmas helyeken felállított mareographokon empirikusan határozzuk meg. Szerencsére azonban már e periodusok némely következtetésre jogosítanak.

Említettük, hogy a tengerjárási jelenség félnapos, félhavi és félévi periodussal bír. A szilárd kéreg hullámzásának befolyása a félnapos periodusban nem várható; a szárazulatok nagy tehetetlensége és tetemes súrlódása meg ellentállása nem engedheti meg ama aránylag gyors deformatiókat, melyek szükségesek volnának, hogy a naponként kétszer megjelenő árhullámra észrevehető befolyást gyakoroljanak. A félévi perio-

dus jelenségeiből a földkéreg rugalmas magaviselete szintén nem hámozható ki, minthogy e periodus egyszersmind a meteorologiai tünemények periodusával esik össze. A folyók megváltozott vízbősége, a légnyomás megváltozott elhelyezése, hőmérsékletek változása túlságos nagy és szintén szigorúan nem mérlegelhető befolyást gyakorolnak. Marad tehát a Föld rugalmas magaviseletének megítélésében a félhavi periodus. Ámde ez a legmegbízhatóbb mareograph-feljegyzések alapján a vizek emelkedésében fel nem fedezhető, a mi azt bizonyítaná, hogy a félhavi periodusban a Föld kérgének hullámzása körülbelül a vízével egyenlő. A földkéreg tehát nem tekinthető absolute merevnek, a mit különben már az is bizonyít, hogy benne földrengési hullámok terjedhetnek.

Az erre vonatkozó számítások elég bonyolódottak, de igen egyszerű módon is végezhetők, ha az előforduló physikai állandóknak nem annyira pontos értékét, mint inkább nagyságrendjét keressük. A számítás tanulságos és annál érdekesebb, minthogy a tünemény látszólag egymástól távolfekvő jelenségek között is kapcsolatot teremt.

Ha felteszszük, hogy a Föld absolut merev testét mindenütt egyenlő mély tenger borítja, akkor a tengerjárás közönségesen ismert statikai elmélete alapján a tengerszin változása $\triangle r$ két oly pont között, melyek egyikének zenithjében áll a Hold, míg a másiktól θ foknyira fekszik:

$$\triangle r = \tfrac{3}{2} \frac{m}{M} \left(\frac{r}{R}\right)^3 r \sin^2 \theta,$$

a hol $\frac{m}{M} = \frac{1}{80}$ a Hold tömege a Föld tömegének egységeiben kifejezve, $\frac{R}{r}$ a Hold távolsága földsugarakban kifejezve. Az ismeretes értékek behelyettesítése után

$$\triangle r = 0{\cdot}553 \sin^2 \theta \text{ (méter)}.$$

Azon gömbi háromszögből, mely a Hold, a megfigyelési hely zenithje és az északi pólus között szerkeszthető θ a Hold távolsága, mint előbb is, kiszámítható, és könnyen látnivaló, hogy a 14 napi periodusnak, azaz $\cos 2\delta$-nak faktora $^1/_4$ lesz. A 14 napos periodusban a víz emelkedése tehát körülbelül 0·138 méter lesz.

Gondoljuk most, hogy a Föld belsejében akár szabálytalan üreg van, melynek radiusvectora azon hely irányában, melynek zenithjében a Hold áll, r_0 legyen. E helyen tehát a földkéreg vastagsága $r - r_0$. Az üreg maga tetszésszerinti folyékony vagy gáznemű anyaggal lehet kitöltve.

A Hold irányában, jelenleg tehát a földsugár irányában is bontsuk fel a kérget 1 mm² keresztmetszetű prizmákra; ezek egyikének tömege

$$\mu = 0{\cdot}0001\, r \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) s \text{ kg},$$

ha $r = 63.700{,}000$ dm és s a kéreg közepes sürűsége. Ez ugyan ismét $r - r_0$ függvénye gyanánt állítható elő. A Roche-féle törvény értelmében ugyanis a sürűség ρ távolságban a Föld középpontjától (ha egységül a földsugarat választjuk)

$$s = S(1 - \alpha\rho^2); \quad S = 10{\cdot}10, \quad \alpha = 0{\cdot}764,$$

a miből r_0 és r között a középsürűség könnyen kiszámítható. Itt azonban teljesen elegendő, ha ennek valamely állandó 2·8 és 5·5 között fekvő értéket adunk, a mi a képleteket egyszerűségükben meghagyja.

Az erő, melylyel a Hold jobban vonzza egy ilyen oszlop tetejét, mint alját,

$$f\frac{m}{(R-r)^2} - f\frac{m}{(R-r_0)^2} = 2f\frac{m}{R^3}(r - r_0),$$

ha magasabbrendű tagoktól eltekintünk, s ez egyszersmind az oszlopot a Hold irányában nyujtó erő, ha az oszlop tömege $\mu = 1$ volna. A valódi nyujtó erő tehát, ha még a földfelületi nehézségi gyorsulást egyszerűen

$$g = f\frac{M}{r^2}$$

alakban írjuk,

$$p = 0{\cdot}0002\, g \frac{m}{M}\frac{r^3}{R^3}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 rs,$$

a hol, mint előbb, $\frac{r}{R} = \frac{1}{60}$, $\frac{m}{M} = \frac{1}{80}$ és r deciméterekben feje-

zendő ki. Ezen erővel arányos az oszlop hosszegységének megnyúlása, úgy hogy

$$\frac{\triangle r}{r - r_0} E = p,$$

a hol E a rugalmassági modulust és $\triangle r$ a prizma megnyúlását jelenti. Áll ennélfogva az egyenlet:

$$\triangle r = 0{\cdot}0002\, g \frac{m}{M}\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3 r^2 \frac{s}{E},$$

vagy kiszámítva:

$$\triangle r = 46\,050 \frac{s}{E}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3 \text{(méter)}.$$

E kifejezésben $1 - \frac{r_0}{r}$ a földkéreg vastagsága a sugár részeiben kifejezve. Ha tehát a Föld elasticitási modulusa akkora volna, mint az öntött aczélé (E = 20,000 kb.), akkor

$$\triangle r = 6{\cdot}9\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3 \text{méter}$$

lenne, a miből már is következik, hogy a kéreg vastagsága aránylag kicsiny, legfölebb $^1/_2$ lehetne. Ha ellenben a kéreg vastagsága 0·1 volna, akkor a deformatio már csak 7 mm-t tesz ki.

A felírt egyenlethez mindenesetre sok szó fér. Először kifogás alá esik, hogy itt is az egyensúlyi elméletre támaszkodtunk, holott ez tudomásunk szerint a tengerjárási jelenségekben rossz vagy csak durván közelítő értékeket ad. Az eljárás mindazonáltal menthető, mert a lefolyás periodusa a félnap alatt visszatérő árhullámhoz viszonyítva oly hosszú, hogy a deformatióhullám csak nagyon lassan vándorol a Föld körül. A dynamikai hatás csak jelentéktelenül lehet nagyobb, mint a statikai alapon kiszámított emelkedés. Nagyobb aggodalomra adhat okot, hogy egyenletünk csak azon földoszlopnak adja megnyúlását, mely számára a Hold a zenithben áll. Nagyobb zenithtávolsággal bíró kéregrészecskék deformatiója természetesen a zenithtávolság cosinusának négyzete szerint kisebb. Minthogy az egyes oszlopok a Föld merevségének mértéke szerint összefüggnek, a távolabbiak mindenesetre akadályoz-

zák a szabad terjedést, úgy hogy a tényleges deformatio mindenesetre kisebb, mint a képletből számított „árhullám". A két ellenkező hatású befolyás mindenesetre kisebbíti az elkövetett hibát, melytől első közelítésben bátran el is tekinthetünk.

Egyenletünkből könnyen eliminálható az $\frac{E}{s}$ quotiens, ha figyelmünket a földkéreg egy másik rugalmas megnyilatkozására fordítjuk. Valamely földrengési lökés terjedési sebessége ugyanis

$$c^2 = g\frac{E}{s}$$

képlet által adott, melyet már Newton állított fel. A behelyettesítésnél természetesen tekintetbe kellene venni, hogy $\frac{E}{s}$ az egyik, úgy mint a másik esetben a kéreg különböző mélységeiben fekvő pontjaira vonatkozik. Noha e körülményt szigorúan lehetne aránylag kis fáradsággal számbavenni, mégis eltekintek tőle e helyen. A behelyettesítés eredménye

$$c^2 \triangle r = 451\,800\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3.$$

Ha tehát valamely helyen a földkéreg valamely lökést $500\frac{m}{sec}$ sebességgel közvetít, mint ezt a gránitos talaj tenné, akkor a Hold okozta zenithális deformatio

$$\triangle r = 1{\cdot}8\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3 \text{ méter},$$

úgy hogy $\triangle r = 225$ mm, illetve 2 mm a szerint, a mint a kéreg vastagsága a földsugár felével, vagy tizedével egyenlő.

A félhavi árhullám kimaradása feljogosít arra, hogy magasságát a víz emelkedésének negyedrészével azonosítsuk; téve tehát $\triangle r = 0{\cdot}138$ m-t, nyerjük végre a következő egyenletet:

$$c = 1809\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \frac{\text{méter}}{\text{sec}},$$

mely kapcsolatot létesít a földrengés terjedési sebessége és a földkéregnek ezen helyen való vastagsága között. A földrengés maximális terjedési sebessége ezen egyenlet szerint kerek

számban 1800 $\frac{m}{sec}$; hogy némely helyen ezen értéknél nagyobb értékeket vezettek le, tévedés, a mennyiben a rendesen alkalmazott elmélet csak egyenes sugarakban terjedő lökésekről tud. A szigorúbb kutatás azonban általában is görbült földrengési sugarakat mutat ki, s ezekben a terjedési sebesség mindig lényegesebben kisebb, mint azon számadatok, melyek egyszerűen a befutott út s az idő elosztásával jönnek létre.

Az Amt-Gehreni, a St.-Goari, a Basilicatai nagy földrengések számára volt sorban c = 742, 567, 260 méter. E szerint e helyeken a földkéreg vastagsága sorban $1 - \frac{r_0}{r} = 0{\cdot}55$, 0·46, 0·27 földsugárnyira tehető. Megjegyzem, hogy ezen számadatok nagyságrendje teljesen összevág ama számítások eredményeivel, melyeket más kutatók szilárdságtani vagy más alapon levezettek.

Mindenesetre érdekes, hogy a földrengések egészen keresetlenül összefüggésbe hozhatók a Föld testének deformatióival, úgy hogy indokolt a remény, hogy az egyik jelenségcsoport tanulmányozása a másikat is fogja előbbrevinni és mindkettő némi betekintést enged a földkéreg szerkezetébe.

XXVIII. FEJEZET.

A tengerjárás mint általános érdekű kosmikus jelenség.

A tengerjárási jelenségek messze kiható cosmikus jelentőséggel is bírnak. A Hold hegyei, melyek első tekintetre tisztán vulkánikus eredetűeknek látszanak, valójában egészen más származásúak, mert egyetlenegynek relativ orometriai mérete sem egyeztethető össze földi vulkán méretével. A Hold valamikor a maitól eltérő, tán gyorsabb tengelyforgással bírt. Midőn folyós testét már egyes salakok födték, ezek közein áthatolt a folyós magma a Föld és a tőle elirányított pont felé, ellenben visszahúzódott a Földtől 90°-ra álló helyeken. Minden magmakiömlés után a kifolyási nyilást körülvevő megdermett gyürű maradt, mely a tünemény periodikus ismétlése által folyton nagyobbodott és a nyilás tetszés szerinti alakja

mellett is mindinkább köralakot vett fel. Ha könnyen olvadó ötvényt, pl. Wood-féle fémet folyós állapotban szivattyú által, melynek játékával a tengerjárási jelenséget szintén utánozhatjuk, valamely vízszintes tányér nyilásán át hajtjuk és visszaszívjuk, a holdhegységekhez teljesen hasonló alakulatokat nyerünk, melyek még orometriai adataiban is megegyezők. Mivel azonban a Hold a Föld felé irányított árhullám alatt elforogni kénytelen, természetes, hogy a forgás eleven ereje idők folytán felemésztődik, és a Hold az árhullámhoz képest megáll. De éppen e pillanatban a Hold tengelyforgása ugyanazonossá lett a Föld körül való keringési idővel. A Föld okozta árhullám a Holdon természetesen a tömegek arányában, tehát mintegy 81-szer nagyobb, mint egyenlő viszonyok között a Hold okozta hullám a Földön.

A tengerjárással járó súrlódás és különösen az árhullámnak a kontinensek keleti partjaihoz való folytonos ütközése ugyancsak felemészti idővel a Föld forgásának eleven erejét, és a nap hosszát nagyobbítja. Részben talán ide vezethető vissza a Holdnak korábban említett évszázados acceleratiója.

Sok változó és kettős csillag fényváltozása, továbbá tán egyik vagy másik új csillag feltünése árapályjelenségekre vezethető vissza. Azon arányban, a mint valamely állócsillag a térben való folytonos hülése következtében kérgesedik, elvész fénye is, sőt elég alacsony felületi hőmérséklet mellett teljesen láthatatlanná is válhatik. Ha azonban ily csillag valamely hatalmas vonzási centrum szomszédságába ér, a rajta okozott hullámzás megrepesztheti a kérget, és kifolyásra késztetheti a belső, még izzón folyós anyagot. Ha ezen folyamat csak egyszer történik, új csillaggal van dolgunk; ha, mint talán némely kettős csillagnál periodikusan, akkor szabályosan változó csillagot észlelünk. De a hullámzás hatása a bolygórendszerünkben is észlelhető. Az összes bolygók közel egy síkban való elrendezése közel köralakú pályákban, a keringés és forgási iránynak azonossága tudvalevőleg Kant-ot, és tőle függetlenül később Laplace-t is azon feltevésre késztette, hogy az egész bolygórendszer valamikor egyetlenegy, a Neptunus pályáján túl terjedő gázgömböt képezett, mely tengelyforgásából keletkező centrifugális ereje által választotta le egymásután az egyes bolygókat. E hypothezis, az úgyneve-

zett cosmogonikus elmélet elég jó és annál inkább volt sajnálandó, hogy Uranus és Neptunus holdjai teljesen ellentmondó magaviseletet tanusítanak, a mennyiben mindkét bolygónak összesen 5 holdja retrograd mozgással bír, azaz keletről nyugot felé kering a főbolygó körül. A KANT-LAPLACE-féle hypothezis eddigi javítói nem nagy sikert értek el; újabban sikerült azonban MAXWELL-nek kimutatnia, hogy a leválás pillanatában minden Hold retrograd mozgással kell, hogy bírjon. Ha azonban az újonnan keletkezett rendszer közel van valamely hatalmas háborgó testhez, pl. éppen a Naphoz, akkor ennek hatása alatt a retrograd mozgás lassan ellenkezőjébe megy át. A retrograd mozgás tehát MAXWELL kutatása szerint a priori is várható a Naptól távol lévő bolygók holdjain. Ez is teljesen ugyanazon eset, mint a mely a tengerjáráshoz általában is tartozik. Ennek köszöni végül alakját a Hold is, mely a Föld felé megnyult ellipsoid, s mely ezért a pályájára merőleges tengely körül ingalengéseket végez. A gömbtől való eltérés azonban nagyon csekély, a mennyiben a Föld felé való nyulvány csak mintegy 75 métert tesz ki.

A tengerjáráshoz hasonló hullámzás természetesen a Föld légkörében is jön létre, csakhogy ez teljességgel érezhetetlen. A számítás mutatja, hogy a légtenger fenekén, melyen mi élünk és észlelünk, a barometeringadozás a lég árhullámának elvonulása alatt 0·03 mm-rel változik, egy oly kis mennyiség, mely a leggondosabb statisztikai feljegyzésekből sem bontható ki. Mindenesetre tehát nagyon kevéssé indokolt azok eljárása, a kik ezen jelenségeket meteorologiai prognozisokra iparkodnak felhasználni.

Mindezekből eléggé következik, hogy a nehézségi erő a Föld felületén még egy és ugyanazon helyen sem állandó, a mennyiben a Nap és Hold a helyhez való állásuk szerint értékét megmásítják. Nagyon könnyű kiszámítani, hogy a Hold vonzása 0″.01-re rugó függőóneltéréseket hozhat létre, melyek pontos és érzékeny módszerek mellett még kimutathatók.

V. SZAKASZ.

EGYÉB FÖLDFELÜLETI ERŐNYILVÁNULÁSOK.

I. FEJEZET.

A földmágnesség. Előismeretek. A mágneses elemek.

Ha a bevezetésben körülírt elvhez szigorúan ragaszkodunk és a mathematikai geographiát a pontos helymeghatározás tanának mondtuk, akkor a földmágnesség tana benne méltán helyet kérhet, mert geographiai helymeghatározások mágneses megfigyelések szerint nemcsak képzelhetők, hanem hosszabb ideig divatban is voltak. Különösen a régebben nagyon nehezen eszközölhető hosszúságmeghatározásokat igyekeztek mágneses megfigyelések által helyettesíteni, és általában azon voltak, hogy a mágneses szerkezetek tüntessék ki valamely hajó pontos helyét, ha felhők a csillagászati helymeghatározást lehetetlenné teszik. De még más szempont is ide utalja a mágnességről szóló tant. Ennek elmélete ugyanis, mint látni fogjuk, teljesen azonos a Föld alakjának elméletével; természetes, hiszen a mágnesség is épp úgy, mint a tömegvonzás, a távolság négyzetével visszásan változó erő, és a Föld alakját éppen nehézségi niveaufelülete által definiáltuk.

A földmágnesség tulajdonképeni fölfedezője az angol William Gilbert (1600), a ki a mágneses testek viselkedését már összefüggésbe hozta bizonyos geographiai faktorokkal. A vízszintes irányban szabadon forgó vagy vizen uszó mágnestű irányítását azonban már a khinaiak ismerhették a Kr. u. 265-től 419-ig uralkodott Tsin-dynastia alatt. Onnan a saracénokhoz

került, legalább 1282-ben írja Bajlak, hogy a hajósok a syriai partokon használják. Nem tudni bizton, vajjon Marco Polo ismerte-e, noha a khinaiak sivatagi utazásokon is alkalmazták; biztos csak annyi, hogy Guiot de Provins (1190) és Neckam voltak az első európaiak, a kik a tű irányításáról, mint ismeretes dologról írnak. Flavio Gioja érdeme úgy látszik abban áll, hogy vagy skálával, vagy a Cardan-féle felfüggesztéssel látta el a tűt.

Gilbert szerint a Föld valóságos mágnes, melyet az úgynevezett terrellával, mágneses aczélgolyóval utánzott, s melynek állapota — szerinte — bizonyára nem következménye tengelyforgásának. Aczéltárgyakat a Földhöz képest már fel tud állítani úgy, hogy mágnesesekké váljanak. Utána — hogy csak a legkiválóbbakat említsem — különösen Leibnitz, Halley, Tobias Mayer, Euler, Hansteen, Humboldt működtek. Gauss lángelméje egészen új és nagyon pontos észlelési módszereket állapított meg és megteremtette a Föld mágneses elméletét, Weber-rel egyetemben pedig egyszersmind kiválóan fontos gyakorlati méréseket is eszközölt. Utána különösen Lamont szerzett érdemeket az új tudáság körül. Leibnitz már sürgetett alkalmas eloszlású mágneses megfigyelési hálózatot, de csak Humboldt létesítette azt tényleg, és csak Gauss fellépte után iparkodott minden állam a maga területén lehetőleg pontos mágneses állandókat beszerezni.

A mágneses alaptulajdonságokat e helyen ismeretesnek tételezhetjük fel; mindössze tehát annak említésére szorítkozunk, hogy minden mágnesnek két különböző viseletű mágneses vége van, melyek egyike, ha a mágnes szabadon foroghat, közel észak, másika közel dél felé mutat. Ennek folytán északi és déli mágneses végekről szoktunk szólani. Tudva van az is, hogy két egynemű vég egymást taszítja, két különnemű vég pedig vonzza, míg a kifelé való hatásokban, melyek tetszőleges közegeken át távolságban is észlelhetők, az egynemű végek egymást erősítik, a különneműek pedig egymást gyengítik.

Ha valamely mágneshez lágy vasat közelítünk, akkor az érintkezés vagy közelség ideje alatt ez is mágnessé vált, még pedig olyanná, hogy a mágnes és lágy vas közelebbi végei ellentettek, a távolabbiak ellenben egyneműek. Innen van, hogy vasreszelékbe helyezett mágnesre egész pamatokban helyez-

kedik el a reszelék, melynek minden részecskéje teljes mágnest képez, mely a szomszédos részecskét ismét mágneses tulajdonságokkal ruházhatja fel. A vasreszelék legsürűbben tömörül a mágneses végek felé, és sugaras elrendezést tüntet fel a mágneses erővonalak mentén; jól észrevehetni, hogy e sugarak nem egy pontból indulnak ki, miért is a közelhatásokról beszélve, jobb a pólus elnevezés helyett a határozatlanabb véget használni. A mágnes közepe táján mágneses vonzás nem mutatkozik, de ha e helyen a mágnest eltörjük, akkor a törés helyén a két véggel ellentétes új vég keletkezik, úgy hogy minden töredék ismét teljes mágnessé válik. Végül pedig felemlíthetjük még, hogy a mágnesezés nem közlés által történik, s hogy valamely test mágnesezése után súly- vagy tömegváltozást nem szenvedett.

Mindezek alapján föltehetjük, hogy a mágnességet két súlyamérhetetlen folyadék okozza, melyből a test minden legkisebb részében is mindkét fajból egyenlő mennyiség van jelen. Minden testnek *összes* mágnessége, vagy *összes* mágneses tömege tehát nullával egyenlő, és a testet mágnesnek vagy természetes állapotúnak mondjuk, a szerint, a mint belső molekuláris mágnesei javarészt egyirányúlag helyezkednek el, vagy rendezetlenül feküvén, egymást kifelé való hatásukban közömbösítik. Mágnesnek nem mágneses testhez való közelítése a részecskék elrendezését szabályozza, úgynevezett mágneses inductio jön létre. Ennek hatása állandó, ha a mágnes eltávolítása után a mágneses elrendezés az indukált testben legnagyobbrészt megmarad, ellenben időleges, ha a mágneses behatás megszüntével a mágneses állapot is megszünik. Az előbbi tulajdonsággal bír az aczél, az utóbbival a lágy vas. Ezen két anyagon kívül azonban számtalan más anyag is bír mágneses tulajdonságokkal, különösen a nickel és cobalt és valamennyi vulkánikus kőzet.

A mágnesség idéztem hypothezisénél ma már sokkal jobbal is rendelkezünk, a mennyiben már nincs szükségünk az a priori lehetetlen súlytalan folyadékok feltevésére. Maxwell elektromágneses hypothezise nem csupán a mágnesség és elektromosság minden jelenségét magyarázza, hanem e tüneményeket a fénynyel is hozza szoros kapcsolatba. Azon jelenségcsoportok azonban, a melyekkel mi foglalkozunk, egészen jól

beleillenek az első helyen hangoztatott hypothezisbe, a miért is ezt fogadjuk el.

Felhasználhatjuk az alkalmat annak a kijelentésére, hogy a hypothezisektől soha nem várjuk azt, hogy igazak, avagy csak valószinűek is legyenek. Mindössze kényelmes segédeszköz, a mely több észlelt jelenséget *egy* szempont alá foglalni enged. Valamely általánosan is elfogadott feltevés megdőltének soha sem vallotta kárát a tudomány, valaminthogy a tudományt előbbre nem viszi, a ki csupán az egyik hypothezis helyébe egy másikat állít.

Coulomb volt az első, a ki a mágneses erő nagyságát meghatározta. Ha a Coulomb-féle mérleg rúdját lehetőleg hosszú mágnesrúddal helyettesítjük, és ennek végére ugyancsak hosszú mágnes végét engedjük hatni, akkor a felfüggesztő fonal megcsavarodása után bizonyos egyensúlyi helyzet jön létre. Ha vagy a hatás távolságát, vagy a vonzó mágnest változtatjuk, a megváltozott erőnek megfelelőleg új és új kitérés jön létre, melyek összehasonlításából következtette Coulomb, hogy a mágneses erő két mágneses tömegpont között egyenes arányban áll e tömegekkel és fordított arányban a köztük lévő távolság négyzetével; vagy

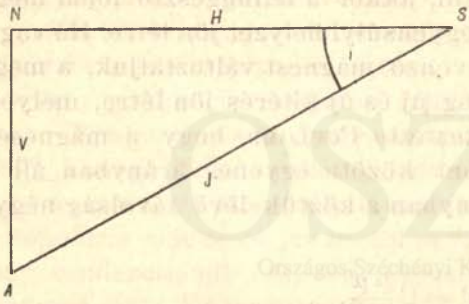
$$P = C\frac{\mu\,\mu'}{r^2}.$$

Mivel az erő lemérésére már van egységünk, ez összefüggést a mágneses tömegek definitiójára használhatjuk fel. E czélra az egyenlet legegyszerűbb alakját választjuk, t. i. $C = 1$, és most $\mu' = \mu = 1$ és $r = 1$ téve, lesz $P = 1$. Azaz: a mágneses tömegek egységéül azon mágneses tömeget választjuk, mely a vele egyenlő nagyságúra a távolság egységéből az erő egységét gyakorolja. Ily módon minden mágneses hatás absolut mértékrendszerben, másodpercz, gramm és centiméter által fejezhető ki.

Meg kell jegyeznünk, hogy a Coulomb-féle kisérlet csak tapogató eszköz, mely a levezetett törvényhez csak akkor vezetne, ha a két mágnes egymás felé fordított végeiben a mágneses tömegek pontokban volnának concentrálva, s ha a távolabbi végek semmiféle hatást nem fejtenének ki. A törvény tehát elvileg ugyanazon érvényű, mint a Newton-féle

tömegvonzási törvény, a maga tiszta egyszerűségében nem bizonyítható, hanem csak következményeiben. Ha ugyanis ezen elemi törvény segítségével most véges mágnesek hatását keressük, akkor — mint ezt Gauss-nak külön e czélra eszközölt nagyon pontos megfigyelései mutatják — a számítás eredménye minden esetben összevág a megfigyelési adatokkal.

Mielőtt még tovább mehetnénk, egynéhány új fogalommal kell tisztában lennünk. Valamint a távolhatásnál nehéz tömegek egyetlenegy pont vonzása által helyettesíthetők, ha ugyanis a vonzott test mérete a távolsághoz elenyésző kicsiny, vagyis ha a test állandó erőmezőben van, úgy a két különnemű mágneses tömegek is két-két pontban gondolhatók összetömörítve, ha a mágnes méretei a különben fenforgó távolságokhoz képest kicsinyek, vagyis, ha a mágnesre párhuzamos erők gyakoroltatnak. A két mágneses súlypontot rendesen polusnak szokás nevezni, és az őket összekötő egyenes a test mágneses tengelye. A polusok nem esnek össze a mágnesrúd geometriai végeivel, és tengelye nem azonos a test geometriai tengelyével.



229. ábra. A földmágneses erő s összetevői.

Azon okot, mely a földfelületen a mágnestű irányítását eszközli, földmágnességnek szokás nevezni; a mágneses tömegegységre gyakorolt földmágnességi erőt röviden földmágneses intenzitásnak nevezzük. Az erő teljes meghatározása tudvalevőleg az erő irányának és nagyságának adatát követeli. Ha valamely helyen a földmágneses erőn át vertikális síkot fektetünk, akkor ezen sík a csillagászati meridiánnal szögletet képez, melyet mágneses declinatiónak vagy elhajlásnak szokás nevezni. Ezt positivnek tekintjük, ha a vertikális sík a meridián északi részétől nyugotra fekszik; így Budapesten a mágneses declinatio jelenleg $+7^{0}\,35'$, vagy $7^{0}\,35'$ W. Ha a mágneses meridiánban — így nevezhetjük a csillagászati meridiántól mindig csak kevéssé eltérő síkot — vízszintes vonalat húzunk, akkor a mágneses erőnek szögletét a horizontálissal inclinatió-

nak vagy lehajlásnak hívjuk. Az inclinatiót positivnek tekintjük, ha a mágnestű északi fele hajlik a horizon alá; e szög értéke jelenleg Budapesten 62° 37′.

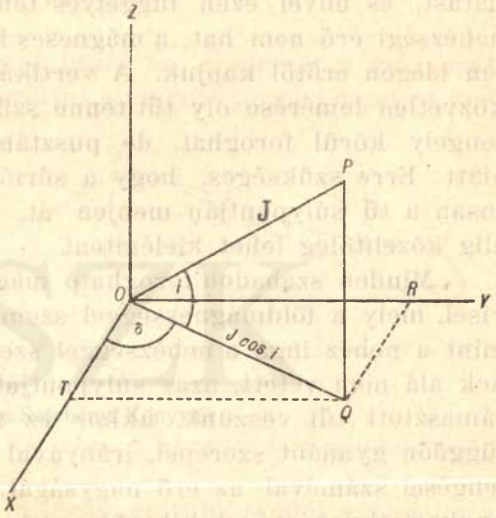
Ha a 229. ábrában a papir síkja a mágneses meridián síkját jelenti, és SN a mágneses meridián, akkor J az intenzitás, i a lehajlás és V meg H a földmágnesség vertikális és horizontális összetevője, vagy egyszerűen a vertikális és horizontális intenzitás. Ez egyes mennyiségek között nyilván a következő egyenletek állanak:

$$H = J \cos i; \quad V = J \sin i,$$

tehát

$$J^2 = V^2 + H^2 \text{ és } \operatorname{tang} i = \frac{V}{H}$$

úgy, hogy kettőnek ismeretéből a többi kettő adódik.



230. ábra.
A földmágnesség három térbeli összetevője.

Ha — mint a 230. ábrában — az intenzitást általában három egymásra merőleges komponensre bontjuk, akkor a declinatio szerepe is kitünik. A coordináta rendszer X tengelyét a csillagászati észak, Y tengelyét nyugot felé fordítjuk, akkor OPQ sík szöglete XOZ síkkal, vagyis OQ horizontális vetület szöglete X-szel a declinatio, míg i, az intenzitásnak horizontális vetületével képezett szöglete az inclinatio. PQ = Z, QR = OT = X és TQ = OR = Y nyilván az erőnek vertikális, és horizontális északi és nyugoti összetevője. A horizontális összetevő OQ = J cos i lévén, áll:

$$X = J \cos i \cos \delta; \quad Y = J \cos i \sin \delta; \quad Z = J \sin i,$$

mely három egyenletből úgy J, mint i és δ adódik.

II. FEJEZET.

A mágnestű mechanikája.

A gyakorlatban különösen fontos szerepet játszik a horizontális összetevő, mert legegyszerűbben és legpontosabban határozható meg. A szabadon felfüggesztett mágnestűre, mely csak horizontális síkban foroghat, ezen összetevő gyakorol hatást, és mivel ezen függélyes tengely körül forgó tűre a nehézségi erő nem hat, a mágneses intenzitást tisztán és menten idegen erőtől kapjuk. A vertikális vagy teljes intenzitás közvetlen lemérése oly tűt tenne szükségessé, mely vízszintes tengely körül foroghat, de pusztán a mágnesség befolyása alatt. Erre szükséges, hogy a súrlódás nélküli tengely pontosan a tű súlypontján menjen át, oly követelmény, melyet alig közelítőleg lehet kielégíteni.

Minden szabadon forgható mágnes mágneses ingát képvisel, mely a földmágnességgel szemben éppenúgy viselkedik, mint a nehéz inga a nehézséggel szemben. Ha tehát más erőnek alá nem vetett, azaz súlypontjában súrlódás nélkül megtámasztott tűt veszünk, akkor ez a mágneses erőre nézve függőón gyanánt szerepel, irányával kijelölve az erő irányát, lengései számával az erő nagyságát. Mint említém azonban, gyakorlati nehézségek kikerülése végett mindig ez erőnek csak a vizszintesbe eső öszetevőjét határozzuk meg.

Legyen a 231. ábrában a papir síkja a horizontális sík, C tehát a mágnesnek egészen tetszőlegesen fekvő függélyes tengelye. A mágneses északi polus legyen μ tömegű, akkor magától érthetőleg a déli $-\mu$ tömeggel bír. A tengely hossza legyen l és a mágneses tömegegységre ható vizszintes összetevője a földmágnességnek, a horizontális intenzitás H. Ha AC és BC erőkarokat húzzuk, akkor μH. AC forgási momentum a mágnest az óramutató járása ellen, μH. BC momentum ugyancsak ez irányban iparkodik forgatni, és ezért az egész forgásmomentum

$$F = \mu H (AC + CB) = \mu H . AB = \mu H l \sin \theta,$$

a hol θ jelenti azon szögletet, melyet a mágnes északi tengely-

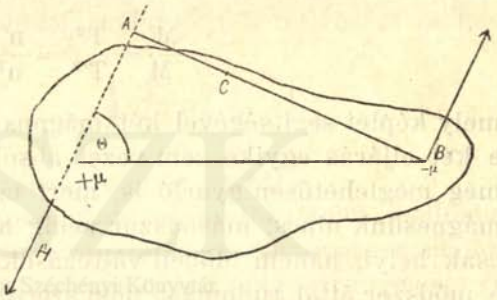
vége a mágneses erő irányával, azaz a mágneses meridiánnal bezár. A nehéz inga forgási momentuma (203. ábra) hasonlóképen $Mgs\sin\theta$ egészen analogon kifejezés, s az összes különbség csak abban áll, hogy a mágneses ingában két egyenlő, de hatásaiban ellentétes tömeg működik, miáltal a forgási tengely fekvése teljesen közömbössé válik. Mivel magában sem μ, sem l közvetlenül nem határozható meg, szorzatuk azonban a forgási momentum által lemérhető, czélszerű lesz a

$$\mu l = M$$

szorzat helyébe új elnevezést hozni be; e szorzat a mágneses momentum nevét viseli. E szerint a mágnes forgási momentuma

$$F = MH \sin \theta.$$

Egyensúly esetében a forgási momentum O tartozik lenni, a mi csak úgy lehet, ha $\theta = o$, mert sem M, sem H nem lehet általában véve az. A mágnes tehát egyensúlyban van, ha mágneses tengelye a mágneses meridiánba esik. Ez a legegyszerűbb módot szolgáltatja a declinatió meghatározására.



231. ábra. A mágnestű forgásmomentuma.

Valamint az inga a függélyes körül lengéseket végez, mielőtt benne egyensúlyba jutna, úgy a mágnestű is csak lengések után állapodik meg a mágneses észak-délirányban. A lengés tartama itt is az inga egyenletével fejezhető ki, t. i.

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}},$$

hol a nevező, mint az inga esetében is, a forgási momentumtumnak a szögkitéréstől független része. E képlet tehát, épp úgy, mint az inga esetében, csak végtelen kis kitérésekre érvényes, melyek számára a sinus az ívvel felcserélhető.

Ezen képlet segítségével meghatározható a mágneses momentum és a horizontális erő intenzitásnak szorzata, mert

$$MH = \frac{\pi^2 K}{T^2} \text{ vagy } = \pi^2 K n^2,$$

ha n a mágnestűnek időegységenként tett lengéseinek száma. Ha tehát egy és ugyanazon változatlannak tekinthető mágnes lengéseit figyeljük két helyen, hol a horizontális intenzitás H és H′, akkor

$$\frac{H'}{H} = \frac{T^2}{T'^2} = \frac{n'^2}{n^2},$$

vagyis a horizontális intenzitás két helyen visszás arányban áll ugyanazon változatlan mágnesrúdnak lengési ideinek négyzetével. Ha ellenben ugyanazon helyen egyszerre lengetünk két különböző mágnest M és M′ momentummal, akkor ugyancsak

$$\frac{M'}{M} = \frac{T^2}{T'^2} = \frac{n'^2}{n^2},$$

mely képlet segítségével két mágnes összehasonlítható. Persze e két eljárás egyike sem vezet absolut értékekhez, és az első még meglehetősen gyarló is, mert egyrészt teljességgel állandó mágnesünk nincs, másodszor pedig a mágneses intenzitás nem csak helyi, hanem időbeli változásokat is tüntet fel, melyekről e módszer által tudomást nem szerezhetünk. De nemcsak lengések, hanem kitérítések által is állapíthatjuk meg az MH szorzatot. Képzeljük, hogy a mágnest hordó fonál nincs megcsavarva, ha a mágnesrúd tengelye a meridiánban fekszik; ha most ω szöglettel megcsavarjuk a drótot, akkor a mágnes kitér az ω-nál kisebb u szöglettel, úgy hogy a drót csavarodása csak ω — u leend. Ha az u kitérésnél egyensúly jön létre, akkor nyilván a mágneses forgási momentum egyenlő a csavarási momentummal, vagy

$$M H \sin u = \tau (\omega - u),$$

ha τ a drót csavarodási coefficiensét jelenti. Ha a kitérési szöglet nagyon kicsiny, akkor $\sin u = u$ tehető, és egyszerűbben:

$$MH u = \tau (\omega - u).$$

Ha tehát egy és ugyanazon helyen és időben, azaz állandó H mellett, két különböző mágnesnek ugyanazon csavarási mérlegen ugyanazon szögkitérést adjuk, mire a drótot ω és ω′

szöglettel kell megcsavarnunk, akkor szigorúan, bármily nagy u mellett is

$$\frac{M'}{M} = \frac{\omega' - u}{\omega - u},$$

és ha a kisérletet különböző helyeken, de ugyanazon mágnessel végezzükk, akkor

$$\frac{H'}{H} = \frac{\omega' - u}{\omega - u},$$

azaz úgy a momentumok, mint a horizontális intenzitások egyenes arányban állanak a csavarási szögletekkel, melyekkel ugyanazon szögkitérés állítható elő. A drót torsiócoefficiense nagyon könnyen kiszámítható: mert ha a mágnest fölcseréljük oly nem mágneses rúddal, melynek tehetetlenségi momentuma szintén K, akkor

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{\tau}}$$

lengési idő közvetlenül τ ismeretéhez vezet.

A tehetetlenségi momentum tekintetbevételét mellőzhettük a nehéz inga esetében a reversióinga alkalmazása mellett, itt azonban tényleg meghatározandó. Ha a mágnesrúd geometriai egyszerű alakkal bír, és tömege szigorúan homogén, akkor a

$$K = \Sigma m r^2$$

egyenlet közvetlenül számítható. Egy példában bemutatom a számítás menetét, azonkívül csak egyes fontosabb eredményeket közlünk.

Vegyünk egy a sugarú, b vastagságú körkorongot, melynek sürűsége s, tehát tömege

$$m = \pi a^2 bs,$$

s tegyük fel, hogy a b vastagság a sugárhoz képest igen kicsiny. A korongot a középpontjában lévő, síkjára merőleges tengely körül forgatjuk. Ha a középpont körül r és $r + \triangle r$ sugárral két végtelenül közel eső kört húzunk, akkor ezek egy $\triangle r$ szélességű körgyürűt metszenek ki, melynek minden tömegelemére mondhatjuk, hogy a forgási tengelytől egyenlő r távolságra van. Annál pontosabban mondhatjuk azt, minél

kisebb $\triangle r$, és egészen szabatosan, ha $\triangle r$ minden képzelhető mennyiségnél kisebb. A gyürű tömege nyilván $2r\pi.\triangle r.bs$, és ennélfogva tömegének és a forgási tengelytől való távolsága négyzetének szorzata $2r^3\pi\triangle r.bs$. A tehetetlenségi momentum tehát

$$K = 2\pi bs\Sigma r^3\triangle r,$$

a hol az összegezés a korong minden tömegpontjára, vagy a testnek elemi részekre való felbontásának általunk választott módjánál, a korong minden képzelhető sugarára $r = o$-tól $r = a$-ig terjesztendő ki. A $2\pi bs$ szorzat a korong minden pontjára állandó lévén, természetesen közös faktorul kiemelhető. Hogy a végtelen sok, végtelen kis $r^3\triangle r$ elemeket összegezhessük, fordított utat választunk, megfigyelve, mi lesz

$$y = ax^n$$

alakú kifejezés egy végtelen kis eleme. Ha x-et megnöveljük $\triangle x$ kis mennyiséggel, akkor megnövekszik y is $\triangle y$ mennyiséggel, és áll az új egyenlet:

$$y+\triangle y = a(x+\triangle x)^n = a[x^n + nx^{n-1}\triangle x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\triangle x^2 + ..].$$

Ha azonban $\triangle x$ minden képzelhetőnél kisebb, akkor $\triangle x^2$, $\triangle x^3$.. elhanyagolható $\triangle x$ első hatványa mellett és marad

$$y + \triangle y = ax^n + anx^{n-1}\triangle x,$$

vagy az eredeti egyenletre való tekintetből

$$\triangle y = anx^{n-1}\triangle x.$$

Az ax^n alakú kifejezés változása tehát ugyanazon alakkal bír, mint a mi adott elemünk; t. i. $an = 2\pi bs$, $n-1 = 3$, $x = r$, s ebből következik, hogy eredeti alakja, mely az összes elemek összegével egyenlő,

$$ax^n = \tfrac{1}{2}\pi bsr^4$$

alakkal bírt. Minthogy a korong sugara $r = a$ és tömege $m = a^2 b\pi s$, nyilván lesz:

$$K = \frac{m}{2}a^2.$$

Minthogy ebben b, a korong vastagsága nem is szerepel külön, ez nyilván tehetetlenségi momentuma oly véges b magasságú és a sugarú körhengernek is, mely geometriai tengelye körül forog.

Hasonló, esetről-esetre könnyebb-nehezebb úton találjuk az összes geometriai alakkal bíró homogén testek tehetetlenségi momentumát tetszőleges tengelyre vonatkozólag. Az r sugarú és h magasságú henger momentuma, vonatkoztatva a geometriai tengely felében rá merőlegesen emelt forgási tengelyre

$$K = \frac{m}{4}\left(\frac{1}{3}h^2 + r^2\right).$$

Gömb tehetetlenségi momentuma középpontján átmenő tengelyre

$$K = \frac{2}{5} m a^2,$$

a hol a a gömb sugarát jelenti.

a, b, c oldalakkal bíró homogén prisma tehetetlenségi momentuma oly tengelyre, mely a c éllel párhuzamosan a prisma közepén megy át:

$$K = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

Mindezen számítások eredményei azonban bizonytalanok, mert soha sem tudhatjuk biztosan, hogy valamely test valóban homogén-e. Ezért bír fontossággal a következő segédtétel, melynek segítségével most már bármily test tehetetlenségi momentuma könnyen megállapítható.

Legyen ugyanis a 232. ábrában C egy a test súlypontján átmenő tengely, melyre vonatkozólag a tehetetlenségi momentumot K-t ismerjük. Ez lényegesen a tengely fekvésétől függvén, kereshetjük a K′ momentumot egy a súlyponton átmenő tengelylyel párhuzamos, z távolságban álló C′ tengelyre vonatkozólag. Ha m a testnek egy tömegpontja, akkor

$$K = \Sigma m r^2 \quad \text{és} \quad K' = \Sigma m r'^2$$

a két momentum, az összegezést a testnek minden tömegelemére terjesztve ki. Ámde

$$r'^2 = (x - z)^2 + y^2, \quad \text{és} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

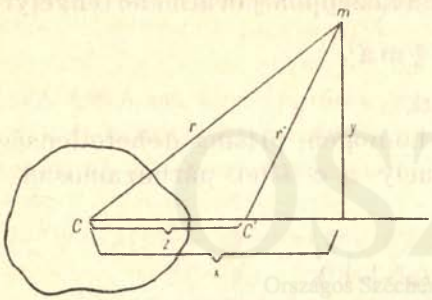
és ezért

$$K' = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz) = \Sigma m(x^2 + y^2) + \Sigma mz^2 - 2\Sigma mxz.$$

A jobb oldalon álló első tag nyilván maga K, a második tagból z^2, mely minden tömegpont számára egy és ugyanaz — hiszen a két tengely távolságát jelenti — kiemelhető, és $\Sigma mxz = o$, ha a C tengely tényleg a test súlypontján megy át. Ekkor ugyanis minden mx szorzathoz a súlypont egyik oldalán tartozik egy ugyanoly nagy, de ellentett jelű szorzat a másik oldalán, és ilyen, páronként o-t adó szorzatokra bontható fel az egész test. Ennélfogva áll:

$$K' = K + mz^2,$$

azaz: ha valamely test tehetetlenségi momentuma a súlypontján átmenő tengelyre vonatkozólag K, akkor e tengelylyel párhuzamosan z távolban álló tengelyre vonatkozólag $K + mz^2$, a hol m a test tömegét jelenti.



232. ábra.
Segédtétel a tehetetlenségi momentumra

E fontos tétel a tehetetlenségi momentum meghatározására a következő módon használható: lengessünk egy mágnesrudat végtelen kis kilengésekkel, s legyen lengési ideje T; akkor nyilván

$$MH \cdot T^2 = \pi^2 K.$$

A forgási tengelytől, azaz a fölfüggesztő fonáltól r_1 távolságban alkalmazzunk mindkét oldalon két egyenlő m tömegű súlyt, melynek tehetetlenségi momentuma a súlyponton átmenő tengelyre nézve k; ha a súlyok maguk a rúd lengése alatt nem foroghatnak, akkor a lengési időt T_1-vel jelölve, lesz az előbbi tétel értelmében a súlyok egyenkénti momentuma $k + mr_1^2$, tehát

$$MH \cdot T_1^2 = \pi^2 [K + 2(mr_1^2 + k)],$$

és ugyanígy, ha a súlyokat r_2 távolságban alkalmazzuk, miáltal a lengési idő T_2 lett:

$$MH \cdot T_2^2 = \pi^2 [K + 2(mr_2^2 + k)].$$

A két utolsó egyenlet különbsége ad:

$$MH(T_2^2 - T_1^2) = 2\pi^2 m(r_2^2 - r_1^2),$$

tehát az elsővel együtt:

$$K = 2m \frac{r_2^2 - r_1^2}{T_2^2 - T_1^2} T^2,$$

míg maga MH:

$$MH = 2\pi^2 m \frac{r_2^2 - r_1^2}{T_2^2 - T_1^2}$$

egyenlet által van adva.

Ha nem mágneses rúdnak tehetetlenségi momentumát keressük, akkor a rúdra ható forgásmomentum egyedül a drót csavarodási momentuma, tehát mindenütt τ teendő MH helyébe.

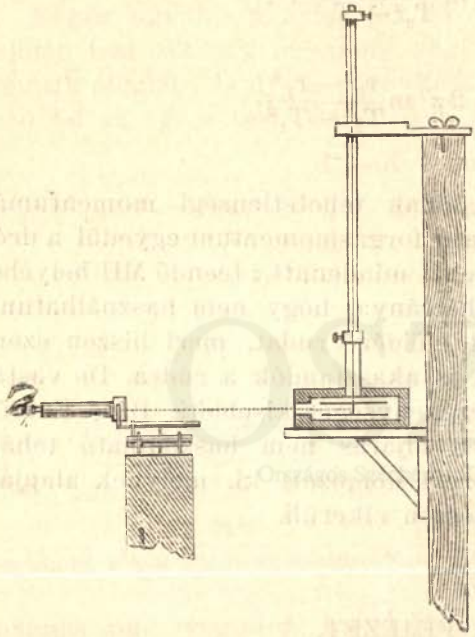
A módszer egyetlen hátránya, hogy nem használhatunk a megterhelés maximumát előidéző rudat, mert hiszen ezenkívül még idegen tömegek is akasztandók a rúdra. De vastagabb sodrony a műszer érzékenységét kisebbíti. Báró Eötvös csavarási mérlegeiben ezen eljárás nem használható tehát, minek folytán ő oly módszert dolgozott ki, melynek alapján a momentum ismeretét egészen elkerüli.

III. FEJEZET.

Mágneses absolut megfigyelések.

A mágneses megfigyelések pontos és kényelmes eszközlésére szolgál a Gauss-féle magnetométer, melyet a classikus „Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam revocata“ (Göttingen 1833) művében írt le. Lényegében véve torsiómérleg, melynek rúdja csavarható fonalon függő sárgaréz hajóban nyugszik. Merőlegesen a mágneses tengelyre tükör forog együtt a szerkezettel, ezzel szemben vizszintes skála fekszik, melynek közepe alatt reá merőlegesen álló leolvasó távcső foglal helyet (233. ábra). A mágnes természetesen légáramlatok és hőmérsékleti változások ellen lehetőleg jól van védve, ennek

folytán lengésbe hozatala leginkább egy feléje közelített segéd mágnessel történhetik. A készülék helyes felállítására szükséges, hogy a fonal torsió nélkül legyen, ha a mágnes egyensúlyban van. Ennek eszközlésére a mágnes helyett nem mágneses sárgarézrúdat alkalmazunk, és a drótot addig csavarjuk torsió fejével, míg a két rúd ugyanazon nyugalmi állást nem mutatja. A tükör, mely a skála képét a távcső látómezejébe veti, merőlegesen álljon a mágneses tengelyre. Ha s_0 a távcső fonalkeresztjével egyenlő függélyesben álló skálarész, míg a távcsőben az s_1 rész látszik, akkor fordítsuk át a mágnest úgy, hogy előbb alsó fele most felsővé váljék, a midőn is a fonalkereszten az s_2 skálarész látszik. Ha most a tükröt állítócsavarjaival addig állítjuk, míg a fonalkereszten $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ leolvasás nem látszik, és az eljárást ismételjük, a mágnest jobb és bal oldalára fektetve, akkor a tükör normálisa összeesik a mágneses tengelylyel. Végül pedig a távcső úgy állítandó fel, hogy az objectiven átmenő a skála közepét jelző skálarész lássék a látmező középpontjában, a fonalkereszten. Ezzel a magnetométer minden megfigyelésre be van rendezve.



233. ábra. Tükör- és távcső-leolvasás a Gauss-féle magnetometernél.

A mágnes lengései tetszőlegesen nagyíthatók vagy kicsinyíthetők egy kívülről közelített mágnesrúddal, az úgynevezett tompítóval. Ha ugyanis a lengési időnek megfelelő periodusban vonzó vagy taszító hatást gyakorolunk a lengő mágnesrúdra, akkor a lengések multiplikálódnak, illetve tompulnak. Az egyensúlyi helyzet és a lengési idő pontos meghatározása ugyanoly

módon történik, mint a csavarási méreginél általában, és némi külömbséget legfölebb azon körülmény hoz be, hogy a mágnesrúd lengései általában véve igen gyorsak, csillapodása pedig ezért kicsiny. Ily esetben elegendő, ha az egyensúly meghatározására páratlan számú elongatiót figyelünk; minden oldalon az egymásra következő fordulópontokból közepet veszünk, és a két közép közepe akkor az egyensúlyi helyzet. Ezt megjelölve, figyeljük meg az időt, melyben az egyensúlyi helyzet tükörképe a látmező fonalkeresztje mellett elhalad. Tíz vagy húsz átmenet már meglehetősen pontos eredményt ad, úgy hogy a lengési idő közelített ismerete föltételezhető. Kiszámíthatjuk tehát már azon időt is, mely mulva a rúd 100 vagy 200 lengést végzett lesz. Ez idő mulva ismét veszünk egynéhány lengésből álló sorozatot, és a két sorozat összehasonlítása már igen pontos értéket ad a lengési idő számára.

Ezen lengési idő most egy egész sereg javítást igényel. Ha ugyanis a lengés amplitudója α, akkor a végtelen kis lengésekre redukált lengési idő T:

$$T = T'(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + ..),$$

ha T' a megfigyelt idő. Ha a a skálán leolvasott amplitudo, mely helyébe lassan csillapodó lengéseknél mindig az első és utolsó amplitudo középértéke tehető, és r a tükör és skála távolsága, akkor nyilván

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{r},$$

a mennyiben a tükör által reflektált kép mindig kétszer akkora szögeltérést mutat, mint a tükör maga. α kicsinysége miatt $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{4r}$ is tehető, és ezért

$$T = T'\left(1 - \tfrac{1}{64}\frac{a^2}{r^2}\right),$$

úgy hogy az észlelt lengési időhez $-\frac{1}{64}\frac{a^2}{r^2}T'$ kis javítás adandó.

A fonál, mely a mágneses meridiánban ugyan csavarodás nélküli, lengés közben csavarodik, s így a mágnesrudat a meri-

diánba visszavezető mágneses momentumhoz lép még az ugyanily irányú torsiómomentum. A megfigyelt lengési idő tehát

$$T' = \pi \sqrt{\frac{K}{MH + \tau}},$$

holott a mágneses momentum MH része

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}}$$

egyszerűbb egyenletből vezetendő le. Ebből

$$T^2 = T'^2 \left(1 + \frac{\tau}{MH}\right) \text{ vagy } T - T' = \frac{T'^2}{T + T'} \frac{\tau}{MH},$$

a mi helyett T és T′ csekély különbsége miatt

$$T - T' = \frac{T'}{2} \frac{\tau}{MH}$$

is tehető; ez azon correctio, mely a fonal csavarodása miatt adandó a megfigyelt lengési időhöz. A $\frac{\tau}{MH}$ viszony egyszerűen levezethető: ha ugyanis — mint már előbb — a fonalat ω szög körül csavarjuk, akkor a mágnes a kis u szöglettel tér ki és egyensúlyba jut, ha

$$MH\,u = \tau(\omega - u), \text{ a miből } \frac{\tau}{MH} = \frac{u}{\omega - u}.$$

Nagyon természetes, hogy a megfigyelésnél használt óra járása is tekintetbe veendő, továbbá a hőmérséklet is. Ennek nagyobbodtával a mágneses momentum fogy, a tehetetlenségi momentum nő, a lengési idő tehát szintén meghosszabbodik. Ha valamely mágnes momentumának egysége 1° C hőmérsékletnövekedés mellett μ-vel fogy, akkor

$$M' = M(1 - \mu t),$$

a hol M a mágneses momentumot jelenti 0° C mellett, míg a tehetetlenségi momentum, ha α a test kiterjedési coefficiense,

$$K' = \Sigma mr^2(1 + \alpha t)^2 = \Sigma mr^2 + 2\alpha t \Sigma mr^2,$$

azaz:

$$K' = K(1 + 2\alpha t),$$

a hol ismét K a 0^0 C melletti tehetetlenségi momentumot jelenti. Ennélfogva a t hőmérséklet mellett észlelt lengési idő

$$T'^2 = \frac{\pi^2 K(1+2\alpha t)}{MH(1-\mu t)} = T^2(1+2\alpha t+\mu t),$$

ha a kis α és μ négyzeteit és szorzatait elhanyagoljuk; ebből ismét

$$T - T' = -\frac{T'}{2}(2\alpha+\mu)t$$

az észlelt lengési időhöz adandó hőmérsékleti javítás.

Megtörténhetik, hogy a megfigyelés tartama alatt a horizontális intenzitás is változik, miről alkalmasan felállított variometer leolvasása által győződhetünk meg. Ha a megfigyelés egyik szakaszában a lengési idő H′ intenzitás mellett T′ volt, akkor a változatlan H intenzitásra vonatkozó T lengési idő számára áll:

$$T^2 - T'^2 = \frac{\pi^2 K}{MH'}\left(\frac{H'}{H}-1\right),$$

vagy elegendő közelítéssel:

$$T - T' = \frac{T'}{2}\,\frac{H'-H}{H},$$

a mi az észlelt időhez adandó, ha időközben a horizontális intenzitás H′ — H változást mutatott.

Végül pedig a földmágnesség inductiv hatása más a lengő mágnes esetében, más, ha a mágnesrúd nyugszik. Az ebből keletkező javítás Kohlrausch szerint:

$$T - T' = \tfrac{1}{4}\triangle T,$$

ha $\triangle$ a mágnes inductiócoefficiense.

A declinatiómeghatározás most már meglehetősen egyszerű; ha egyensúly alkalmával a torsiófonal nincs megcsavarva és a tükör merőlegesen áll a mágnes tengelyére, akkor a tükör normálisa kijelöli a mágneses meridiánt. Ha a mágnest felfordítjuk — a mit óvatosságból mindig kell tenni — akkor a tükörnormális két esetleg eltérő irányának közepese lesz azonos a mágneses tengelylyel, tehát a mágneses meridiánnal is. Ha a csillagászati meridiánt valami mirével már

ezelőtt kijelöltük, akkor közvetlenül leolvasható a két irány szöglete, mely a declinatióval azonos.

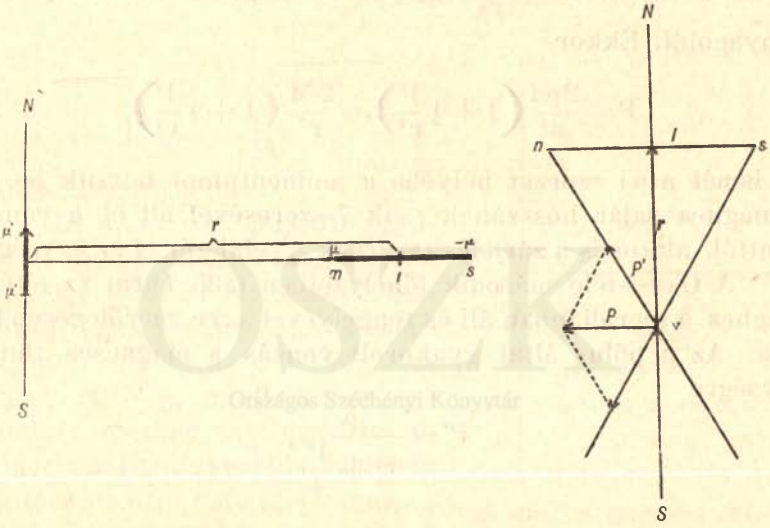
Minthogy a mágneses tengely nem figyelhető meg, a mágnes irányítását mindig csak geometriai tengelyének fekvése szerint ítélhetjük meg. A kettő általában véve nem esik össze egymással; de ha a mágnest felfordítjuk, akkor a geometriai tengely az egyik fekvésben ugyanakkora szöglettel hajlik balra, mint a minővel a másik helyzetben jobbra. A rendes használatban levő mágnestű adata tehát mindig kétséges, mert a tű fel nem fordítható, ellenben egészen pontosan használható akkor, ha csak szögkülömbségeket mérünk, vagy ha hibáját egyszer s mindenkorra meghatároztuk, azaz a tű állását leolvastuk, mikor a magnetométerrel absolut declinatiómeghatározást eszközöltünk.

Az intenzitás meghatározása, mint láttuk, közvetlenül csak az MH szorzatot szolgáltatja, még pedig úgy lengések, mint kitérések megfigyelése által, azaz úgy dynamikai, mint statikai úton. A gyakorlati kivitelben mindig az első módot választjuk, mert pontosabb eredményeket ad; kitérítések alkalmával ugyanis az egyensúlyi helyzet nem mindig szükségképen azonos a nyugalmi helyzettel, mert surlódás vagy a levegő ellenállása megakaszthatja már a rúd mozgását, ha az igen kicsiny, még mielőtt az egyensúlyi helyzet létrejönne. Éppen ezért is pontosabb, ha úgy a declinatiómeghatározásoknál, mint az alább leirandó kitérítési kisérleteknél a nyugalom beálltát meg sem várjuk, hanem az egyensúlyi helyzetet egyszerűen lengésekből, a fordulópontok megfigyelése által határozzuk meg.

Az MH szorzat tehát az előbbiek szerint könnyen meghatározható, ha a mágnesrudat lengetjük és a lengési időt a szükséges correctiók tekintetbevételével figyeljük. Ebből a H-ra nem lehet természetesen következtetni, és ezért még más megfigyelési módra is van szükség, mely a két M és H mennyiség egy másik combinátióját adja. Gauss kimutatta, hogy az $\frac{M}{H}$ viszony is meghatározható, ha az előbb lengő mágnesrúddal egy más mágnest kitérítünk és ennek szögeltérését figyeljük. A módszer egyszersmind mutatja, miként kell egész mágneseknek hatását tekintetbe venni, miután már mágneses tömege-

ket elkülöníteni képesek nem vagyunk. Gauss általában két tetszőleges és tetszőlegesen fekvő mágnesrúd hatását tanulmányozta, azon czélból is, hogy a Coulomb-féle törvény helyességét vizsgálja. Nekünk csak két egyszerű, speciális helyzetre van szükségünk, melyeket Gauss az első és második főhelyzetnek mond.

Legyen a 234. ábrában NS a mágneses meridián s benne egy kis mágnestű $\mu'\mu'$, míg az előbbi kisérletnél szerepelt mágnesrúd ns a mágneses kelet-nyugot vonalban áll. A két



234. és 235. ábra. A Gauss-féle első és második főhelyzet.

mágnesrúd mágneses tengelye úgy ezen első, mint a következő második főhelyzetben egy vízszintes síkban feküdjék. Ha a mágnesrúd tengelye l hosszúsággal bír és középpontjának távolsága μ' pólustól r, akkor a közelebbi és távolabbi n és s pólus hatása a μ' mágnestű pólusára mágneses tömegegységenként

$$P' = \frac{\mu}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \text{ és } P'' = \frac{\mu}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}.$$

Az egész mágnes által gyakorolt hatás nyilván a kettőnek különbségével egyenlő:

$$P = \frac{\mu}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{\mu}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\mu}{r^2}\left[\left(1-\frac{l}{2r}\right)^{-2} - \left(1+\frac{l}{2r}\right)^{-2}\right].$$

Ha $\frac{l}{r}$ kellőképen kicsiny, azaz, ha a távolság nagy a mágnes méreteihez képest, és csak ez esetben helyettesíthető a mágnesrúd mágneses tömegének hatása két pontjának hatása által, akkor az előbbi képletben szereplő binomok kifejthetők és szabad lesz $\frac{l}{r}$ negyedik és magasabb hatványait elhanyagolni. Ekkor

$$P = \frac{2\mu l}{r^3}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}\right) = \frac{2M}{r^3}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}\right),$$

ha ismét a μl szorzat helyébe a momentumot hozzuk be. Ha a mágnes saját hosszának csak 7-szeresével áll el a vonzott ponttól, akkor is a zárjeles tag csak $\frac{1}{100}$-dal tér el az egységtől.

A Gauss-féle második főhelyzetben (235. ábra) az eltérítő mágnes a meridiánban áll és tengelyével erre merőlegesen fekszik. Az n pólus által gyakorolt vonzás a mágneses tömegegységre

$$P' = \frac{\mu}{r^2 + \frac{l^2}{4}},$$

minthogy az $n\nu$ távolság r és $\frac{l}{2}$ által a Pythagoras-féle tétel értelmében kifejezhető. Ugyanekkora, de ellentett irányú az s pólus hatása is, úgy hogy a két erő eredője P a mágneses meridiánra merőlegesen áll. Az $n\nu s$ és a $P'P$ oldalakból képezett két háromszög hasonló lévén, áll:

$$\frac{P}{P'} = \frac{l}{n\nu},$$

vagy maga az eredő

$$P = \frac{\mu l}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Ha ismét a momentumot hozzuk be, és a binom kifejtésében

$\frac{l}{r}$ magasabb hatványait a negyediktől fogva elhanyagoljuk, lesz:

$$P = \frac{M}{r^3}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}\right),$$

úgy, hogy másodrendű hibáktól eltekintve, különben egyenlő távolságok mellett a Gauss-féle első helyzetben a hatás kétszer akkora, mint a másodikban. A két képletet összefoglalva, írhatunk:

$$P = \frac{\varepsilon M}{r^3}\left(1 + \eta\frac{l^2}{r^2}\right),$$

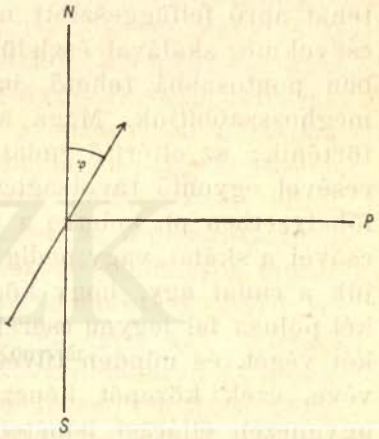
a hol

$\varepsilon = 2$, $\eta = +\frac{1}{2}$ az I.;

és

$\varepsilon = 1$, $\eta = -\frac{3}{8}$ a II.

Gauss-féle helyzetben.



236. ábra. A mágnestű eltérése a Gauss-féle első főhelyzetben.

Ha most a P pontban gyakorolt hatás alatt a mágnestű φ szöglettel tér ki a mágneses meridiánból (236. ábra), akkor a szöglet, melyet a tű az erő irányával képez, $90^0 - \varphi$, minthogy az erő mindkét esetben merőlegesen áll a meridiánra. Egyensúly esetében a kitérített tűre ható földmágneses forgási momentum $M'H \sin\varphi$ egyenlő tartozik lenni a kitérítő rúd okozta forgási momentumával $M'P \sin(90^0 - \varphi)$. P ugyanis, mint a tömegegységre ható erő, ugyancsak a mesterséges mágneses mező intenzitását adja. A két forgási momentum egyenlítéséből keletkezik a

$$H \sin\varphi = \frac{\varepsilon M}{r^3}\left(1 + \eta\frac{l^2}{r^2}\right)\cos\varphi$$

egyenlet, mely a kitérített tű mágneses momentumától teljesen független, s mely $\frac{H}{M}$ viszonyt adja. Ha a kitérítést egy másik r' távolságban is eszközöljük, a mi mellett a kitérés φ' lesz, akkor az egyenletben előforduló ismeretlen l eliminálható, és lesz:

$$\frac{M}{H} = \frac{r^5 \operatorname{tg} \varphi - r'^5 \operatorname{tg} \varphi'}{\varepsilon (r^2 - r'^2)},$$

a hol $\varepsilon = 2$ vagy $\varepsilon = 1$, a szerint, a mint a Gauss-féle első vagy második főhelyzetben feküdt a kitérítő mágnes. Kisebb pontosság mellett a második távolságból való kitérítés el is maradhat, és akkor 1 helyébe közelítésben a mágnesrúd hosszának $\frac{5}{6}$-a tehető.

A kitérített mágnestűnek kicsinynek kell lennie, hogy azon feltevés, mely szerint a mágnesrúd behatása alatt állandó mezőben forog, túlságosan el ne térjen a valóságtól. Rendesen tehát apró felfüggesztett mágneses tükröt választunk és távcsővel meg skálával észlelünk. Apró boussola leolvasása ellenben pontosabbá tehető, ha a tűt nem mágneses mutatóval meghosszabbítjuk. Maga a megfigyelés a következő módon történik: az eltérítő rudat saját hosszának legalább is 7-szeresével egyenlő távolságban állítjuk fel — az első Gauss-féle főhelyzetben pl. keletre a boussolától — és leolvassuk a távcsővel a skálát, vagy pedig a tű mindkét végét. Most átfordítjuk a rudat úgy, hogy középpontja helyét ne változtassa, de két pólusa fel legyen cserélve. A tűnek ismét leolvassuk mindkét végét, és minden tűvég két beállásának fél különbségét véve, ezek közepét képezzük. A nyert kitérítés legyen φ_1; ugyanezen eljárást ismételjük ugyanazon távolságban a nyugoti oldalon is, miáltal φ_2 kitérést kapunk, és a kettő közepese a formulában szereplő φ. Ezután beállítjuk a mágnesrudat mindkét oldalon r′ távolságba, mely czélszerűen 1·73-szor nagyobbnak választandó, mint r volt, és eljárunk hasonlóan, miáltal a φ' szöglethez jutunk. A rúd pólusainak felcserélésével eliminálju k azon hibát, hogy a mágneses tengely középpontja nem esik össze a geometriai középponttal, és mindkét oldalon való észlelés által kiesik a tű skálájának esetleg hibás nullpontja. Ha még pontosabbak akarunk lenni, akkor ismételjük az egész mérési sorozatot felfordított és egyes oldallapjaira fektetett mágnessel, azaz szabaddá teszszük magunkat azon hibától is, hogy az eltérítő rúd mágneses tengelye nem fekszik a tűvel ugyanazon vízszintesben.

Itt is jobb, ha az egyensúlyi helyzetet a tű lengéseiből határozzuk meg, és ha boussola helyett felfüggesztett tükörrel

észlelünk, akkor az eltérési szögletek $1+\frac{\tau}{MH}$-val megszorzandók, mert akkor az egyensúly nem csupán a mágnesrúd és földmágneses forgási momentuma miatt, hanem a fonál csavarodási viszonyának befolyása alatt is jön létre. Minthogy továbbá lengés közben a mágnesség kissé nagyobb, mint a kitérés mellett, az intenzitást túlságos nagynak találjuk; ennélfogva H helyébe $\frac{H}{1-\frac{1}{2}\triangle}$ teendő, a hol $\triangle$ az inductiócoefficiens, mely tapasztalat szerint mintegy $\frac{1}{4}$ m, ha m a lengő kis mágnes grammokban kifejezett súlyát jelenti. Nagyon természetes, hogy itt is ugyanazon correctiók egy nagy része alkalmazandó, melyeket az első kisérletnél, MH meghatározása alkalmával említettünk. Első sorban (tükör- és skálaleolvasást tételezve fel) az ívre való reductiót, a mennyiben a tangensek közepesei nem felelnek meg pontosan a szögek közepei tangensének és viszont, a kitérítő rúd hőmérséklete miatt, mely annak momentumát megváltoztatja, az intenzitásjavítás, ha ugyan ebben lengés és kitérítés közben külömbség mutatkozik, és a declinatióváltozás miatt, ha a kitérítési kisérletekben ezen elem változásoknak volna alávetve. Ez esetleges változásokat külön felállított declinatióvariometeren észleljük. Ha végül a kitérítő mágnes, mint rendesen, fémsinen nyugszik, mely osztással el van látva, akkor az r és r′ távolság is corrigálandó a sin hőmérsékleti kiterjedése miatt.

Ha ily módon $MH = a$ és $\frac{M}{H} = b$ meg van állapítva, a hol a és b a megfigyelés által adott számértékeket jelentenek, akkor

$$M = \sqrt{ab} \text{ és } H = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

egyenként is ismeretes.

Gauss ugyan az absolut mértékrendszert használja H kifejezésére, de egységekül a millimétert, a milligrammot és a másodperczet választja, holott a mai physika alapegységei a másodperczen kívül a centiméter és a gramm. Az átszámítás az egyik rendszerből a másikra nagyon egyszerű; az erő ugyanis

$$P = \frac{\mu\mu'}{r^2} = \left(\frac{ml}{t^2}\right),$$

a hol a jobb oldali kifejezés azt mutatja, hogy az erő egy tömeg, egy hosszúság és egy időelem negativ második hatványának szorzata, a mennyiben az erő mindig tömeg és gyorsulás szorzata által mérhető. Ebből következik, hogy mágneses tömeg

$$\mu = \frac{m^{1/2} l^{3/2}}{t}$$

méretszámmal bír, azaz szorzata egy tömeg négyzetgyökének, egy hosszúság $\frac{3}{2}$ hatványának és az idő —1-ik hatványának. A mágneses momentum, mint mágneses tömeg és egy hosszúság szorzata

$$M = \frac{m^{1/2} l^{5/2}}{t}$$

mérettel bír. Végül pedig

$$H = \frac{\pi^2 K}{M t^2}$$

lévén, a hol K mint tehetetlenségi momentum tömeg és hosszúság négyzetével mérhető, áll H mérete számára:

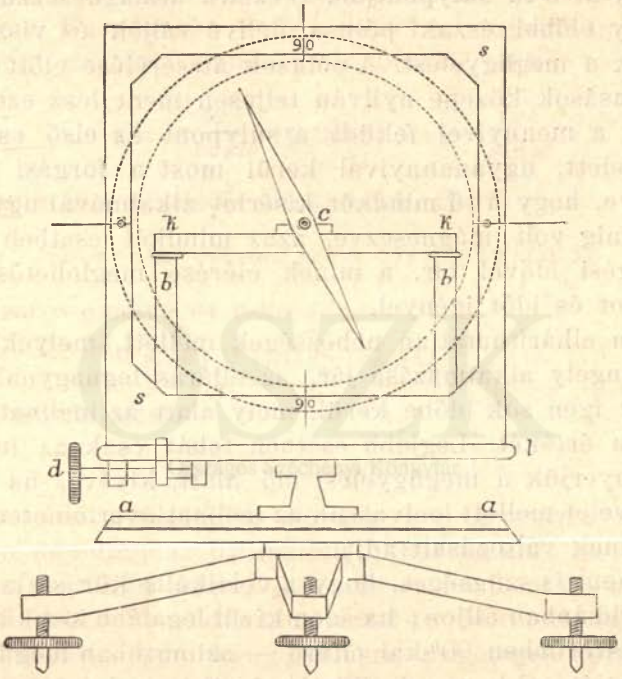
$$H = \frac{ml^2}{t^2} \cdot \frac{t}{m^{1/2} l^{5/2}} = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}.$$

Az absolut CGS rengszerben a tömeg 1000-szer, a hosszúság 10-szer akkora, mint a Gauss-féle rendszerben, míg az idő egysége ugyanaz marad. Tehát $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = 10$ az átváltozási szám, melylyel a CGS rendszerben adott intenzítás szorzandó, hogy a Gauss-féle számolási módra mehessünk át. Így Budapesten az intenzitás a CGS rendszerben 0·2, míg a Gauss-féle millimeter, milligramm, secundarendszerben 2·0 egységgel egyenlő.

A földmágneses elemek között az inclinatió meghatározása a legnehezebb és legkevésbbé pontos. Műszerül a Dover-féle inclinatoriumot használjuk (237. ábra), mely tökéletesített kiadása a közönséges iskolai inclinatoriumnak. Ez mint ismeretes, vertikális kör, melynek középpontja körül súlypontjában átmenő vízszintes tengelye körül forog egy mágneses tű. A vertikális kör vízszintes kör körül forgatható, úgy hogy síkjának azimuthja ismeretes. A tűleolvasás parallaxisa is kikerülhető, ha a körosztást tükröző lapra alkalmazzuk, és a tű

állását akkor olvassuk le, midőn a tű és képe fedik egymást: akkor ugyanis a látásvonala merőlegen áll az osztás síkjára.

A vertikális kört beállítjuk a mágneses meridián síkjába, úgy hogy a tű pl. a keleti oldalon legyen, és leolvassuk a tű mindkét végének állását, lehetőleg nem nyugalmi helyzetében, hanem lengéseiből. A két tűvég leolvasásának közepe meglehetősen ment lesz a tengely elkerülhetetlen súrlodásától és



237. ábra. Inclinatorium.

a forgási tengelynek excentrikus helyzetétől. Most kiakasztjuk a tűt és megfordítjuk úgy, hogy előbbi befelé fordított oldala külsővé váljék és ismételjük a leolvasást. Ezáltal elimiáljuk azon hibát, mely a geometriai és mágneses tengelynek különbözőségéből ered; a két tűállásban tett leolvasás közepe ugyanis ezen hibától teljesen ment. Végül pedig átfordítjuk a vertikális kört 180°-kal, úgy hogy a tű most a körlap nyugoti oldalán foglaljon helyet és leolvassuk újból a tű egyensúlyi helyzetét. Ezáltal kiküszöböljük azon hibát, hogy

az osztás 0^0 és 180^0-át összekötő átmérő nem vízszintes. A mennyivel ugyanis a 0 pont az egyik oldalon túlságosan magasan állt, az inclinatiót tehát túlságos nagynak adta, ugyanannyival áll a másik oldalra átfordítva túlságosan alacsonyan, úgy, hogy a keleti és nyugoti oldalon tett megfelelő leolvasások ezen hibától mentek. Végre pedig, és ez a legnehezebb művelet, ki kell küszöbölni azon hibát, hogy a forgási tengely nem megy át a tű súlypontján. E czélra átmágnesezzük a tűt, úgy, hogy előbbi északi pólusa délivé váljék és viszont, és ismételjük a megfigyelést. A pólusok átcserélése előtt és után tett leolvasások közepe nyilván teljesen ment lesz ezen hibától, mert a mennyivel feküdt a súlypont az első esetben a tengely felett, ugyanannyival kerül most a forgási tengely alá, feltéve, hogy a tű mindkét kisérlet alkalmával ugyanazon momentumig volt mágnesezve, azaz mindkét esetben ugyanazon lengési idővel bír, a minek elérése meglehetősen sok gyakorlatot és időt igényel.

Azon elháríthatatlan nehézségek mellett, melyekkel vízszintes tengely alkalmazása jár, az eljárás legnagyobb hátránya, hogy igen sok időbe kerül, mely alatt az inclinatió megváltoztatja értékét. Legjobb esetben tehát csak az inclinatió közepét nyerjük a megfigyelési idő alatt, kivéve, ha minden egyes művelet mellett leolvassuk az inclinatióvariometert, mely ezen elemnek változásait adja.

De nem is szügséges, hogy a vertikális kör síkja a mágneses meridiánban álljon; ha azon kívül legalább két különböző — legczélszerűbben 90^0-kal eltérő — azimuthban megfigyeljük az inclinatiót, akkor a declinatió értékét is kapjuk, feltéve, hogy a vízszintes kör elég finom osztással bír. Ha ugyanis a 230. ábrában az X és Y tengely tetszőleges irányítással bír, akkkor a δ szöglettel jelzett szög nem éppen a declinatió, hanem a vízszintes körön a mágneses északpontból, mint kezdőpontból leolvasható azimuth α. Az α azimuthban leolvasott inclinatió i_α számára áll tehát

$$\operatorname{tang} i_\alpha = \frac{Z}{X} = \frac{J \sin i}{J \cos i \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} i}{\cos \alpha},$$

ha i a mágneses meridiánban mért tulajdonképeni inclinatió. Látnivaló, hogy i_α minden azimuth számára nagyobb, mint i.

A mágneses meridiánban lemért inclinatió tehát minimum, a mágneses első vertikálisban észlelhető inclinatió 90^0, mert $\alpha = 90^0$ számára $\operatorname{tang} i_\alpha = \infty$.

Ha tehát teljesen hibátlan és nagyon érzékeny tűt tételezve fel a vertikális kört addig forgatjuk, míg a tű függélyesen maga alá mutat, akkor a mágneses kelet-nyugot vonalat jelöltük ki, melynek eltérése a csillagászati első vertikálistól a declinatióval azonos. Ezen módszer azonban kevés pontosságot biztosítana. Ha ellenben α és $\alpha + 90^0$ azimuthokban figyeljük meg a fent mondott módon az inclinatiót, akkor

$$\operatorname{tg} i_\alpha = \frac{\operatorname{tg} i}{\cos \alpha} \text{ és } \operatorname{tang} i_{\alpha+90} = \frac{\operatorname{tg} i}{\sin \alpha},$$

ha az inclinatió előjelétől eltekintünk. Ebből

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} i \cot i_{\alpha+90} \text{ és } \cos \alpha = \operatorname{tg} i \cot i_\alpha$$

és négyzetre emelve és összeadva:

$$\cot^2 i = \cot^2 i_\alpha + \cot^2 i_{90+\alpha},$$

továbbá osztás által:

$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tg} i_\alpha \cot i_{\alpha+90}.$$

Ha tehát a vertikális körnek két egymásra merőleges állásában figyeljük az inclinatiót, akkor ezekből levezethető a mágneses meridián azimuthja a műszer horizontális köréhez és benne az inclinatió, azaz az inclinatió és declinatió együttvéve.

A helyett, hogy két egymásra merőleges körfekvésben észlelünk, észlelhetünk n aequidistáns azimuthban is, tehát

$$\alpha,\ \alpha + \frac{360^0}{n},\ \alpha + 2 \cdot \frac{360}{n}, \ldots \alpha + (n-1)\frac{360}{n}$$

azimuthokban, melyekben a lehajlás sorra i_0, $i_1 \ldots i_{n-1}$ legyen. Minden egyes esetben áll az előbbiek szerint:

$$\cot i_m = \cot i \cdot \cos \alpha_m$$

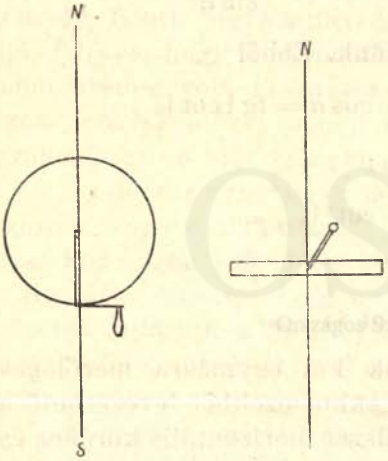
és ennélfogva négyzetre emelés és összegezés által

$$\sum_0^{n-i} \cot^2 i_m = \cot^2 i \sum_0^{n-i} \cos^2 \left(\alpha + m\frac{360}{n}\right),$$

a hol m minden egész számot jelenti o-tól n—1-ig. Mivel a jobb oldali összeg könnyen kimutathatólag $\frac{2}{n}$-vel egyenlő, áll:

$$\cot^2 i = \frac{2}{n}(\cot^2 i_0 + \cot^2 i_1 + \ldots + \cot^2 i_{n-1}).$$

Szabatos eredményt a megfigyelések nagyobb száma mellett is természetesen csak akkor érhetünk el, ha mindazon elővigyázattal élünk, melyet az egyszerű meghatározásnál felsoroltunk.



238. és 239. ábra.
A Weber-féle földinductor elve.

Sokkal tökéletesebb eljáráshoz jutunk, mely egyszersmind igen nagy pontosságot is ad, ha azon elvből indulunk ki, hogy valamely mágnes minden feléje mozgatott vezetőben elektromos áramot inducál, melynek intenzitása a mágnes intenzitásával arányos. Ha tehát egyszerű körvezetéket veszünk, mint a 238. és 239. ábrában, ezt vízszintesen fektetjük és a mágneses meridiánnal párhuzamos vízszintes tengely körül 180°-kal forgatjuk, a Föld vertikális intenzitása V behatása alatt inducált áramot kapunk, melynek intenzitása

$$J_v = V.C = CJ \sin i,$$

a hol C egy, tisztán a vezeték méreteitől és sajátságától függő állandó. Ha most ugyanezen vezeték síkját merőlegesen állítjuk a mágneses meridiánra és benne fekvő vertikális tengely körül forgatjuk 180°-kal, akkor a vízszintes H intenzitás indukál egy áramot, melynek intenzitása

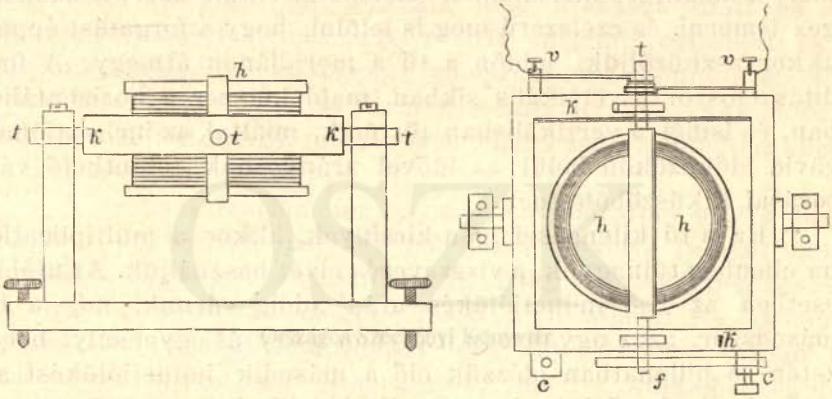
$$J_h = CH = CJ \cos i$$

leend, s mely számára C természetesen ugyanazon értéket képviseli, mint az első esetben. A két egyenletből következik osztás által:

$$\text{tang}\, i = \frac{J_v}{J_h},$$

azaz, a lehajlás tangense azon áramintenzitások viszonya, melyeket a földmágnesség vertikális és horizontális intenzitása egy és ugyanazon vezetőben indukál.

A készüléket, melynek segítségével ezen elv gyakorlatilag kivihető, a Weber-féle földinductort a 240. és 241. ábra mutatja be. Egyszerű vezeték helyett az áramintenzitás fokozása czéljából egész tekercs szerepel, mely két egymásra merőleges tengely körül pontosan 180°-kal forgatható, a mi alkal-



240. és 241. ábra. A Weber-féle földinductor.

masan állított ütközőkkel érhető el. Ez sokkal pontosabb módszer, mint a direct meghatározás, és független az inclinatió változásaitól, mivel a mérés csak nagyon rövid időt vesz igénybe. Weber első méréseinek eltérései alig rúgtak 1—2′-re.

A műszer vezetékébe természetesen érzékeny galvanométer van beigtatva, melyet szintén tükör és skálával olvasunk le. A műszer felállítása és kezelése röviden előadva, a következő:

Az inductor forgási tengelyét beigazítjuk a közép mágneses meridiánba; vízszintes és vertikális felállítása libellával történik. Midőn a 180° körüli forgatás után az ütköző a tovább forgást akadályozza, kell, hogy a tekercs mágneses tengelye teljesen függélyesen álljon; ez szintezéssel nem érhető el, mivel ez csak a geometriai tengelyt igazíthatja be, holott a két ten-

gely csak sík, és a geometriai tengelyre merőleges vezetőnél esnék össze. Weber ezen feltétel elérésére azon ívet keresi, mely körül az inductort forgatni kell, hogy a keletkezett indukált áramok megsemmisüljenek. Az ív közepe nyilván az ütköző helyét jelöli meg. Az újabb inductoriumokban ezen különben ritkán eszközlendő javítás a következő módon történik: hajlítható dróttal a forgantyú forgását mindkét oldalon vagy 30°-kal kisebbítjük; az ütközők azután oda illesztendők, hol jobb és bal oldalon a galvanometertű kitérései egyenlők.

A galvanometer leolvasása pedig czélszerűen úgy rendezendő be: mindenekelőtt felkeressük a tű nyugalmi helyzetét, mely a mágneses meridiánnal azonos. Ezt már azért is szükséges ismerni, és czélszerű meg is jelölni, hogy a forgatást éppen akkor eszközöljük, midőn a tű a meridiánon átmegy. A fordítás először a vertikális síkban, majd kétszer a horizontálisban, és ismét a vertikálisban történik, miáltal az inclinatiónak rövid időközökön belül az idővel arányosnak tekinthető változásai kiküszöböltetnek.

Ha a tű kilengései igen kicsinyek, akkor a multiplicatió, ha ellenben túlnagyok, a visszaverés elvét használjuk. Az utóbbi esetben az első inductiólökés után addig várunk, míg a tű másodszor, azaz ugyanazon irányban megy át egyensúlyi helyzetén, e pillanatban idézzük elő a második inductiólökést az elsővel ellenkező irányban. Ez által a tű visszaverődik s ezen eljárás többszöri ismétlése után gyorsan állandó nagyságú kilengés jön létre. E pillanattól fogva periodikus lengések uralkodnak, melyekben kisebb és nagyobb amplitudók szabályszerűen váltakoznak. A multiplicatió módszerénél ellenben ugyancsak a tű lengés idejének megfelelő periodusokban egyenirányú inductiólökéseket gyakorolunk, miáltal a tű kitérései hamar nagyobbodnak és a csillapodás által megszabott állandó nagyságot érnek el.

A bemutatott módszerek mind az absolut meghatározások nevét viselik, mert valóban minden előzetes feltevés nélkül külön-külön határoznak meg minden egyes elemet, mely a számításban szerepel. Csupán az inclinatorium nem nevezhető teljes joggal absolut meghatározást létesítő műszernek, és minden esetben a pontosabb és gyorsan czélhoz vezető Weber-féle földinductorral helyettesítendő.

IV. FEJEZET.

Mágneses variacziós megfigyelések.

Az absolut meghatározások magukban véve nem adnak még felvilágosítást sem a földmágneses erő térbeli, sem időbeli változásairól, mert a dolog természetéből következőleg a műszerek nem könnyen transportabilisek és felállíthatók, és a pontos meghatározás sok időt és fáradságot igényel. Ezért ezen pontos módszereket leginkább csak állandó mágneses observatoriumokban alkalmazzuk, míg utazások alatt és az időbeli változások lemérésére relativ meghatározásokat eszközlünk, melyeket az absolut módszerekhez könnyű szerrel csatolhatunk. A mágneses elemek relativ értékeit vagy időbeli változásait feltüntető műszereket mágneses variométereknek szokás nevezni.

A declinatióvariometer egyszerűen sodratlan szálra függesztett mágnesrúd, melynek mágneses tengelye tudvalevőleg mindig a mágneses meridiánban áll. Tükör- és skálaleolvasással mindig pontosan megmondható a tű állása. Ha absolut mérés által a skála nullpontja meg van állapítva, akkor a változások közvetlenül ismeretesek, mert a külömbségekből a mágneses tengely eltérése a tükör normálisától természetszerűen kiesik.

Változatosabban construálhatjuk az intenzitási variometereket, noha az alapelv mindig ugyanaz. A mágneses forgási momentum $MH \sin \theta$ mellett alkalmazunk t. i. egy más — és pedig lehetőleg állandó — erő forgásmomentumát, úgy hogy a kettő a mágneses meridiánon kívül θ szögkitérésben egyensúlyozza egymást. Ha most a horizontális intenzitás változik, akkor megváltozik θ szöglet is. Íme egynéhány példa.

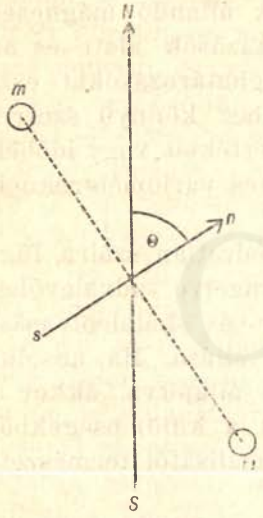
A mágneses meridiánban sodratlan szálat ω szög körül forgatjuk, mire a mágnes a kisebb u szöglettel tér ki. Egyensúly esetében tudvalevőleg

$$MH \sin u = \tau(\omega - u), \text{ a miből: } H = \frac{\tau}{M} \frac{\omega - u}{\sin u}.$$

Ha a hőmérsékletet lehetőleg állandóan tartjuk meg, akkor

a jobb oldalon csak u változó; a mágnessel együttforgó tükör helyzete a skálán leolvasva tehát u változásaiból a horizontális intenzitás változásait is adja. Ha absolut meghatározás és a variometer együttes leolvasása útján ismerjük H értékét egy bizonyos kitérés számára, akkor valamennyi számára ismeretes.

Megcsavart drót helyett használhatjuk az úgynevezett kettős fonalú felfüggesztést: a mágnest két szálon függesztjük fel, de szintén úgy, hogy a két szálon át fektetett sík a mágneses meridiánnal szögletet képezzen. Vagy a felfüggesztő sodrony torsiórugalmassága helyett alkalmazhatunk egy másik erőt, pl. mágneses erőt. Ha ugyanis a 242. ábrában a mágnestű kitérítését két oldalt alkalmazott m és m mágnessel eszközöljük, akkor, ha ezek összekötője merőlegesen áll a tűre:



242. ábra. Deflectoros intenzitás variometer.

$$MH \sin \theta = C \cos (90^0 - \theta),$$

a hol C a két úgynevezett deflector állandó mágneses forgási momentumát jelenti. Ebből következik, ha valamely más pillanatban H és θ értékei H′ és θ′ lettek:

$$\frac{H'}{H} = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \theta'}$$

úgy, hogy a szögkitérésből ismét a horizontális erő értéke adódik, ha absolut meghatározás segítségével megállapítjuk időről-időre azon kitérést, mely egy határozott intenzitásnak megfelel.

Mindezen módszerek azt tételezik fel, hogy a használt mágnesek momentumai változásoknak nincsenek alávetve. A momentum azonban hőmérsékleti változások, különösen rázkódtatások által időbelileg is változik, s noha a hőmérsékleti változás legnagyobbrészt ártalmatlanná tehető, ez mégis folytonosan számításba veendő, s a műszer állandói absolut meghatározások által időről-időre ellenőrizendők.

Hőmérsékleti változások ellen javarészt érzéketlen mág-

neseket compenzált mágneseknek szokás nevezni. Ez két különböző kemény aczélrúdból álló mágnes, mely ellentétes végeivel van egymásra fektetve. Ha az egyik mágnes momentuma M, és ennek megváltozása 1^0 C hőmérsékletváltozásra μ, a másik számára ugyane mennyiségek M′ és μ', akkor

$$M'(1 - \mu' t) - M(1 - \mu t) = M' - M - (\mu' M' - \mu M) t$$

adja a mágnesrendszer momentumát. A minus előjel természetesen onnan van, hogy az ellentétesen fekvő két mágnes egymásnak hatását lerontja. A mágnes független a hőmérsékleti változásoktól, ha anyagát és momentumait úgy sikerül megválasztani, hogy

$$\frac{M'}{M} = \frac{\mu}{\mu'}$$

legyen, azaz, hogy momentumaik visszás arányban álljanak ezek specifikus változásával a hőmérséklet változása közben.

Az inclinatió változásainak meghatározására alkalmazhatunk egy nagy tűvel bíró inclinatoriumot, melynek végén mikroskóppal olvassuk le az osztást. Minthogy itt csak változásokról van szó, a tűvég egyszerű leolvasása elegendő, ha egyidejű absolut meghatározások által megállapítjuk a műszer leolvasása és az inclinatió közötti külömbséget.

Pontosabb eljárást ad Lloyd, a ki ismét a mágneses inductióból indul ki. Ha ugyanis valamely lágy vaspálczát függélyesen tartunk, akkor benne a vertikális intenzitás mágnességet indukál, melynek momentuma

$$M = a J \sin i,$$

a hol a egy a lágy vaspálcza méreteitől, hőmérsékletétől és anyagi mineműségétől függő állandó. Ha ezen lágy vaspálczát vertikális helyzetében arra használjuk, hogy vele egy m momentumú rudat a mágneses meridiánból kitérítsünk, akkor nyilván áll

$$mH \sin \varphi = \varepsilon \frac{mM}{r^3} \left(1 + \eta \frac{l^2}{r^2}\right) \cos \varphi,$$

éppen úgy, mint a Gauss-féle főhelyzetekben, ha a függélyes pálcza egyik pólusa ugyanazon vízszintesben áll, melyben a tű

foroghat, és tőle r távolságra lévén, φ-vel téríti ki a meridiánból. Minthogy $H = J \cos i$ és $M = a J \sin i$, lesz ez egyenletből:

$$\operatorname{tang} i = \frac{r^3}{\varepsilon a}\left(1 + \eta \frac{l^2}{r^2}\right)^{-1} \operatorname{tang} \varphi,$$

vagy mivel a szerkezet változatlan felállítása mellett $\operatorname{tang} \varphi$-nak faktora állandó:

$$\operatorname{tang} i = C \operatorname{tang} \varphi,$$

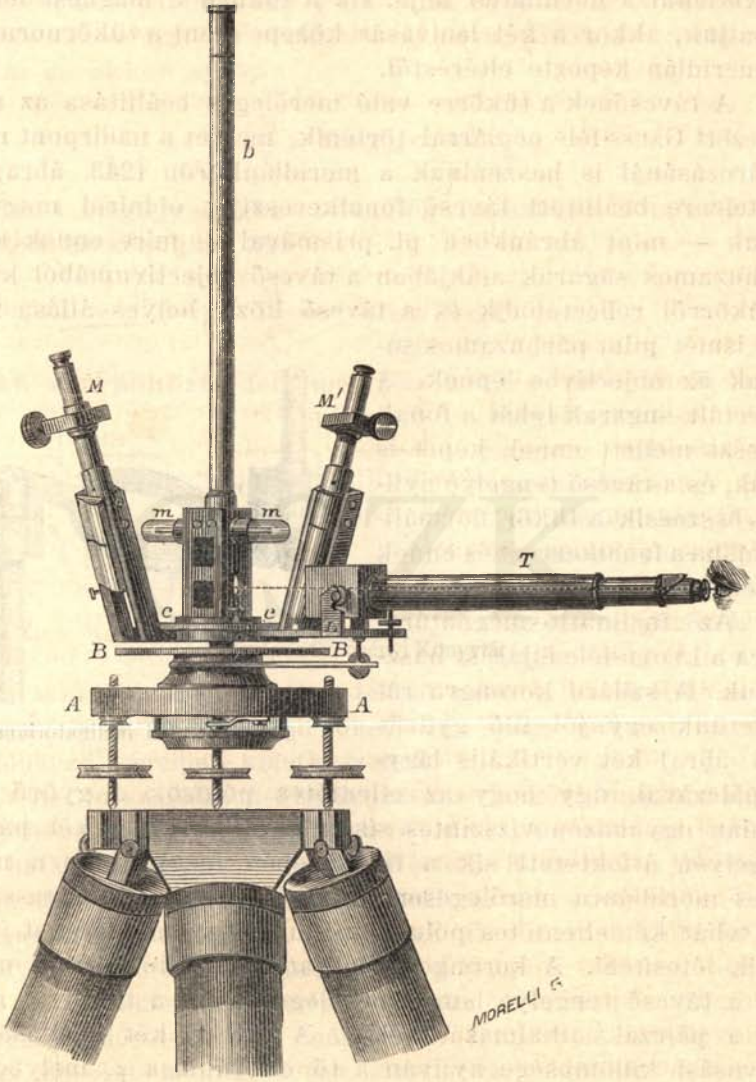
a hol a C állandó absolut meghatározásokból levezethető, és függése a hőmérséklettől is megállapítható. Ily módon a kitérítés szögletéből egyszerű módon levezethető az inclinatió és ennek változása. Mivel azonban teljesen lágyvas nincs, úgy az inductió mindig hátrahagy egy kis remanens mágnességet, melynek hatása kikerülhető, ha a pálczát megfordítjuk, azaz északi pólussá teszszük, a mi előbb déli pólus volt.

Hasonló elven alapszik a Wild-féle inclinatorium és a Lloyd-féle mérleg, melynek karja compenzált mágnes és az inclinatió változása szerint különböző lehajlással bír.

Mindezen variometerek tükörleolvasásra berendezhetők s megszabott órákban naponta bizonyos terv szerint leolvasandók. De folytonos önműködő registrálásra is rendezhetők be könnyen. Ezen czélra elsötétített szobában fénysugarat vetítünk a mágnessel együtt forgó tükörre, mely alkalmas lencseszerkezet által photographiai papirral behúzott hengerre egy vékony résnek képét vetíti. Vízszintesen forgó tükör esetében a hengert vízszintesen állítjuk, és azt óraművel 24 óra lefolyása alatt egyenletesen egyszer körülforgatjuk. A mágnesrúdnak lengése így az idővel ismeretesen összefüggő módon széthúzódik, úgy hogy a kitérés minden pillanatban ismeretes. Természetes, hogy a hőmérsékleti javításokat itt is tekintetbe kell venni, de jól temperált termekben e javítás elég kicsiny lesz.

Utazások közben, midőn lehető rövid idő alatt lehetőleg sok hely mágneses magaviseletét akarjuk meghatározni, ismét más eljárásokat követünk; a főműszer a mágneses theodolit, melynek mintája a Lamont-féle utazási theodolit (243. ábra). Lényegében szilárd azimuthkörből áll, melyen egy korong a mágnest védő tokkal együtt foroghat, a melyhez a leolvasási távcső is hozzá van erősítve. A declinatió meghatározására

beállítjuk a távcsövet a csillagászati meridiánba, a mi a tok eltávolítása után elég egyszerűen eszközölhető, ha valamely

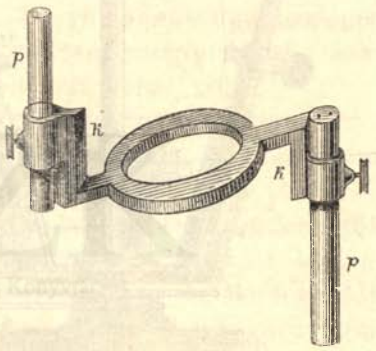


243. ábra. Mágneses úti theodolit.

távoli jel, toronytemplomnak például csillagászati azimuthját meghatároztuk volt. Azután beállítjuk a távcsövet merőlegesen a mágnestűhez erősített tükörre, melynek normálisa a mág-

neses tengelylyel már előzetesen meghatározott szöglettel tér el. A távcső két helyzetének leolvasása az azimuthális körön közvetlenül a declinatiót adja. Ha a tokban a mágnest felfordíthatjuk, akkor a két leolvasás közepe ment a tükörnormális és meridián képezte eltéréstől.

A távcsőnek a tükörre való merőleges beállítása az úgynevezett Gauss-féle oculárral történik, melyet a nadirpont meghatározásánál is használnak a meridiánkörön (243. ábra). A végtelenre beállított távcső fonalkeresztjét oldalról megvilágítjuk — mint ábránkban pl. prismával — mire ennek képe párhuzamos sugarak alakjában a távcső objectivumából kilép, a tükörről reflectálódik és a távcső közel helyes állása mellett ismét mint párhuzamos sugarak az objectivbe lépnek. A reflectált sugarak tehát a fonalkereszt mellett ennek képét is adják, és a távcső tengelye nyilván összeesik a tükör normálisával, ha a fonalkereszt és ennek képe egymást födi.



244. ábra. Úti inclinatorium.

Az inclinatió-meghatározásra a Lloyd-féle eljárást használjuk. A szilárd korongra ráfektetünk egy jól illő gyürűt (244. ábra) két vertikális lágyvaspálczával, úgy hogy az ellentétes pólusok a gyürű két oldalán ugyanazon vízszintes síkba kerüljenek. A két pálcza tengelyén átfektetett sík a tű közepén megy át és a mágneses meridiánra merőlegesen állíttatik be. A tű magasságában tehát két ellentétes pólus van, mely egyenlő forgást iparkodik létesíteni. A korongot elforgatjuk a kitérített tű után, míg a távcső tengelye ismét merőlegesen áll a tükörre, mint állt a pálczák alkalmazása előtt. A távcső két beállásának leolvasási külömbsége nyilván a tű elfordulása φ, melyben a földmágneses forgási momentum $MH \sin \varphi$, míg a lágyvaspálczáké cV. Innen

$$MH \sin \varphi = cV, \text{ vagy } \operatorname{tang} i = \frac{M}{c} . \sin \varphi,$$

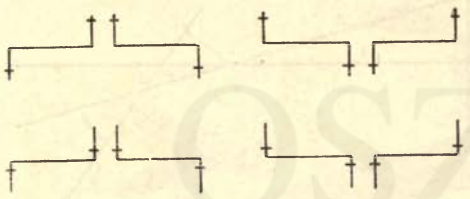
a hol az $\frac{M}{c}$ factor egyszersmindenkorra meghatározható annak hőmérsékleti javításával együtt. Ha ugyanis az absolut meghatározás szerint az inclinatió i_0 és ugyanakkor a theodolit adata φ_0, akkor nyilván

$$\frac{M}{c} = \text{tang } i_0 \text{ cosec } \varphi_0$$

és ha a megfigyeléseket lehetőleg különböző hőmérsékletek mellett eszközöljük, akkor

$$\frac{M}{c} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

alakú sor állítható fel, melyben a c_0, c_1 és c_2 coefficiensek megállapíthatók. A remanens mágnesség és excentrumossági hibák kiküszöbölése végett egy megfigyelés helyett nyolczat eszközlünk, miközben a gyürűt úgy állítjuk, mint ezt a 245. ábra mutatja, azaz minden lehető módon felcseréljük a pálczákat, meg is fordítván őket, úgy hogy pólusai a pálcza különböző végeiben keletkezzenek.



245. ábra. Az úti inclinatorium alkalmazása.

Az intenzitás meghatározására lengési megfigyeléseket tehetnénk itt is; de a rendesen rövid tű lengési ideje kevésbbé jól határozható meg, mint az eltérítés. E czélból a theodolitra vízszintes és beosztott rézsínt alkalmazunk, melyen az eltérítő mágnesrúd talál helyet. Ha ennek alkalmazása előtt és után a távcsövet merőlegesen állítjuk a mágnes tükrére, akkor a két távcsőállás különbsége nyilván az eltérítés szögletével egyenlő. Időről-időre a mágnesrúd lengése is megfigyelhető, hogy absolut megfigyelések alapján a mágneses momentum időbeli változásairól tudomást szerezhessünk.

Számos hasonló mágneses utazókészülék közül még csak a Dover-féle inclinatoriumot említem. Mivel horizontális köre távcsővel és finom osztással bír, úgy az inclinatió meghatározása két egymásra merőleges vertikális síkban a declinatió

ismeretéhez vezet, ha a távcsövet valamely ismert azimuthtal bíró tárgyra állítjuk be. Az intenzitás meghatározására a tű déli végébe r távolságra a forgási tengelytől egy m tömegű peczket verünk, miáltal az inclinatió kisebbedik és i helyett ι-t mutat (246. ábra). Ha φ a szöglet, melyet a megnehezített tű az összes J intenzitás irányával képez, akkor

$$\varphi = i - \iota.$$

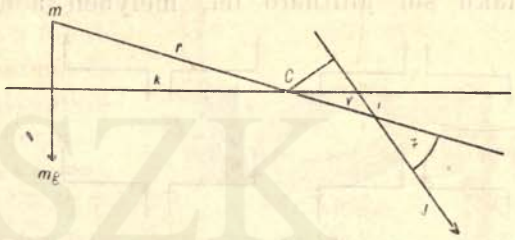
A tű nehézségi forgásmomentuma, ha peczek nélkül a C tengely a súlyponton megy át, egyszerűen az m forgásmomentumával egyenlő, tehát $mgr\cos\iota$, míg a mágneses erő forgásmomentuma $MJ\sin\varphi$ vagy $MJ\sin(i-\iota)$. Egyensúly esetében e kettő egymással egyenlő és áll

$$MJ\sin(i-\iota) = mgr\cos\iota,$$

a miből az intenzitás

$$J = \frac{mr}{M} \cdot g \frac{\cos\iota}{\sin(i-\iota)}$$

kiszámítható, ha előzetesen az inclinatiót meghatároztuk és a megterhelt tű ι inclinatióját figyeljük. Az $\frac{mr}{M}$ egy és ugyanazon tű számára állandó, míg a mágneses momentum is az. A műszer közvetlenül a teljes intenzitást adja, mely cos i-val való szorzással a horizontális intenzitásba megy át. A műszerrel ugyan eltérítéseket is lehet létesíteni, de ezen eljárás nagy bonyolódottsága mellett kevésbbé ajánlható.



246. ábra. Intenzitásmeghatározás megterhelt tűvel.

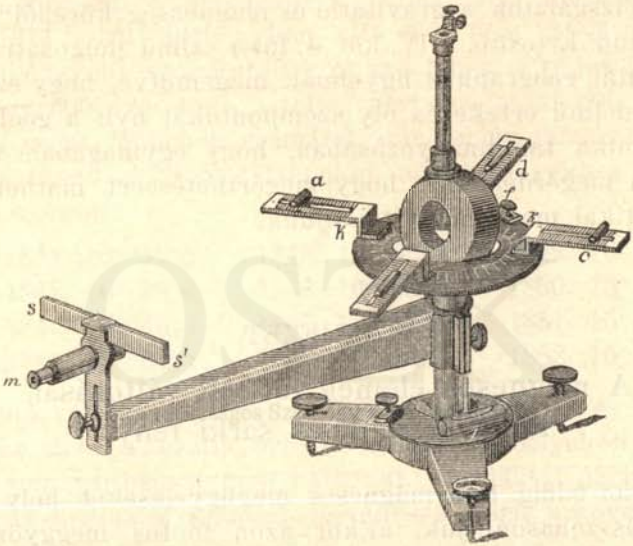
Ha csak a horizontális intenzitás helyi változásait keressük, különösen kis távolságokban, akkor előnyel használható a Kohlrausch-féle localis variometer. Ez kis magnetometer, melynek tokja körül négy mágnest hordó keret forgatható (247. ábra); a forgás nagyságát két ütköző szabályozza. Ha a keret az első ütközőn nyugszik, akkor a mindkét oldalán tükröző tükör körülbelül 90°-kal tért ki és a távcső skálaleolvasása s. Ha most a deflectorokat hordozó keretet a másik ütközőig forgatjuk, a mágnes ismét közel 90°-kal tér el, de ellenkező oldalra, s a távcsőben az s′ skálarész olvasható le.

Ha egy más helyen a horizontális intenzitás H_1 és az ismételt kisérletben a skálaleolvasások illetve s_1 és s_1', akkor

$$\frac{H_1}{H} = 1 + \frac{(s_1 - s_1') - (s - s')}{4A} \operatorname{tang} \varphi,$$

a hol A a skálának távolsága a tükörtől, 2φ pedig azon szög, mely körül a két ütköző között a keret elfordult.

Mindezen méréseknél is természetesen csak közelítésben helyes ama feltevés, hogy a mágnestű állandó mágneses mező-



247. ábra. A KOHLRAUSCH-féle helyi variometer.

ben forog, azaz, hogy az erővonalak a két pólushoz húzva, egymással párhuzamosak. Ha ezen feltevést elejtjük és az eddig leírtaknál pontosabb és érzékenyebb észlelési módszereket választunk, akkor képesek vagyunk megállapítani egyrészt a mágneses erő változásait, másrészt ezen erő translatorikus, haladtató nagyságát. Ha ugyanis szigorúan párhuzamosak az erővonalak, akkor természetesen a mágnestűre csak irányító, forgató erők hatnak, de ha e feltevés nem szigorú, akkor nyilván haladó mozgás is jöhet létre, mely azonban annak kicsinysége és a mágnestű nehéz tömegének nagysága mellett mindeddig nem volt észlelhető. Csak az „Ezeregyéji-" s ezekhez hasonló kalandos mesék tesznek említést ily translatorikus moz-

gásról, melyet hajók vagy azok vasalkatrészei mágneses hegyek befolyása alatt végeztek. Báró Eötvös-nek sikerült azonban ezen rendkívül kis erőt is pontosan lemérni, s egyáltalában meghatározni az erő változásait egy pont körül, miáltal a geologiai megfigyelési módoknak egy egész új osztályát teremtette meg. A megfigyelési eljárások elvben ugyanazok, a melyeket a nehézségi erő változásainak lemérésében használt, de közel fekvő okoknál fogva még complikáltabbak. Ezért csak arra szorítkozhatom, hogy a M. Tud. Akadémia nagy díjával kitüntetett „Vizsgálatok a gravitatió és mágnesség köréből“ (Math. és Termtud. Értesítő, XIV. köt. 4. füz.) című dolgozatra terelejem a fiatal geographus figyelmét, megemlítve, hogy ezen *egy* kis terjedelmű értekezés oly szempontokat nyit a geologia és geotektonika tanulmányozásában, hogy egymagában teljesen és bőven megérdemelné, hogy megérthetéseért mathematikát és analytikai mechanikát tanuljunk.

V. FEJEZET.

A mágneses elemek időbeli változásai. Földi áramok és sarki fény.

Ha az eddig tett mágneses megfigyeléseket hely és idő szerint összehasonlítjuk, akkor azon fontos meggyőződésre jutunk, hogy az egyidejű mágneses elemek a Föld felületének különböző pontjaiban különbözők, s hogy egy és ugyanazon helyen is idővel folytonos változásoknak vannak alávetve. Lássuk először a mágneses elemek időbeli változásait, az úgynevezett variatiókat.

A megfigyelési anyag statisztikai feldolgozása — más módszert nem alkalmazhatunk, mivel a változások okait nem ismerve, lefolyásában deductive nem járhatunk el — azt mutatja, hogy e változások egyes periodusokhoz vannak kötve, melyeknek hossza szerint osztályozni lehet a variatiókat. Így megkülönböztetünk saeculáris, tizenegyévi, napi és aperiodikus változásokat.

A saeculáris vagy évszázados változás abban áll, hogy a földmágnességi összes elemek mintegy 400—600 évi perio-

dusban ingaszerű lengéseket végeznek egy közepes érték körül. A legjobban van ez természetesen a declinatió számára kimutatva, melynek meghatározása legrégebbre terjed vissza. Így volt pl. a declinatió Párisban

1580. 11° 30′ E	1780. 19° 55′ W	1822. 22° 11′ W
1618. 8° — E	1805. 22° 5′ W	1832. 22° 3′ W
1663. 0° — E	1814. 22° 34′ W	1842. 21° 55′ W
1770. 8° 10′ W	1819. 22° 29′ W	1852. 20° 20′ W,

tehát 1663-ban a mágnestű a csillagászati meridiánban állt, míg 1814 körül legnagyobb kitérését érte el. E szerint, ha ugyan nagyobb szabályosságról szó lehet, a teljes lengési idő mintegy 300 évet tesz, a teljes periodus tehát 600 év.

Lamont München számára, minden év január elsejére a következő declinatióértékeket adja, melyekben a kitérés mind nyugoti:

1841. 16° 57′.5	1845. 16° 30′.4	1849. 16° 2′.5
1842. 16° 50′.4	1846. 16° 23′.5	1850. 15° 53′.9
1843. 16° 43′.4	1847. 16° 17′.4	1851. 15° 49′.4
1844. 16° 37′.1	1848. 16° 10′.3	1852. 15° 40′.1.

Hasonló változások megfigyelhetők minden egyes helyen, de sem az elemek absolut értékei különböző helyeken nem állandók, sem változásai nem haladnak egymással párhuzamosan.

Az inclinatió számára ugyancsak Páris a következő adatokat nyujtja:

1671. 75° —	1820. 68° 20′
1780. 71° 48′	1825. 68° 0′
1806. 69° 12′	1831. 67° 40′
1814. 68° 36′	1835. 67° 24′,

míg Lamont müncheni megfigyelései a megjelölt évek első napjain:

1841. 65° 22′.0	1845. 65° 12′.0	1849. 65° 2′.0
1842. 65° 19′.5	1846. 65° 9′.5	1850. 64° 59′.5
1843. 65° 17′.0	1847. 65° 7′.0	1851. 64° 57′.0
1844. 65° 14′.5	1848. 65° 4′.5	1852. 64° 54′.5.

Az inclinatió változása a különböző helyeken szintén egészen elütően történik, párhuzamos menet sehol sem mutatkozik.

A horizontális intenzitásra vonatkozólag még kevés megfigyelésünk van; a következő adatok Lamont szerint Münchenre vonatkoznak a jelölt évek első napjára, és bennük az inclinatióváltozás még bennrejlik. Az intenzitás teljes értékét kapjuk, ha minden számot az előbbi táblázat megfelelő inclinatiójának cosinusával osztjuk.

1841. 0·19 300	1845. 0·19 374	1849. 0·19 437
1842. 0·19 339	1846. 0·19 397	1850. 0·19 523
1843. 0·19 373	1847. 0·19 417	1851. 0·19 549
1844. 0·19 374	1848. 0·19 432	1852. 0·19 508

és különböző helyeken ezen elem járása is egészen különböző.

A Münchenre vonatkozó adatokból következtetni lehet, hogy a nyugoti declinatió és az inclinatió jelenleg Közép-Európában fogy, az intenzitás ellenben nő.

Ezen százados lassú változások okait eddig még közelítésben sem ismerjük.

Az összes elemek variatióiban egy $11\frac{1}{9}$ évi periodus is felfedezhető, mely a legszorosabb kapcsolatban áll a Nap felületének foltokkal való borítottságával, mely tudvalevőleg ugyanezen periodushoz van kötve. De nem csupán a periodus tartama ugyanez, hanem foltgyakoriság és variatió olyannyira párhuzamos menetet tanusít, hogy az egyik jelenségből a másikra következtetni lehet. Mivel a Napon látható foltok területének meghatározása nehéz és időtrabló feladat, R. Wolf gyakorlatilag rövidebben járt el; megolvassa a foltok számát f és a csoportok számát c, melyet e foltok képeznek. Az e két számból

$$r = 10\,c + f$$

egyenlet mintájára nyert összetett számot relativ számnak nevezte. Ha most v valamely mágneses elemnek — különösen a declinatióra terjedtek ki ezen megfigyelések — variatióját jelöli, α és β pedig két állandó, mely egyrészt a megfigyelési hely fekvését, másrészt a relativ szám levezetésénél használt távcső optikai erejétől függ, akkor

$$v = \alpha + \beta r,$$

úgy hogy variatió és foltgyakoriság egymással lineáris kapcsolatban állanak. Mindkettő görbéje tehát egymással teljesen

párhuzamosan halad, s az összes különbség csak az, hogy a variatió elongatiója egy állandó mennyiségen kívül a relativ szám görbéjének β-szorosa.

R. Wolf tette ezen nevezetes felfedezést, mely a variatió egyik periodusának legalább kosmikus okot tulajdonít; Hansteen azután ugyanezen periodust az inclinatió és intenzitás számára is kimutatta. Alfréde Gautier Wolf-al egyidőben vette észre a sajátságos összefüggést napfoltgyakoriság és variatió között, de a tulajdonképeni első felfedező Sabine, a ki azonban észrevételeit nem tette volt közzé. Ezóta ezen összefüggés annyi oldalról nyert megerősítést, hogy a biztos tények közé sorolható. Fritz megfigyelései szerint a foltmaximum mindig a tű nagyobb haladó mozgásának felel meg; kisebb mozgások, sőt retrograd kitérés a foltminimum alkalmával szokott fellépni.

Hogy a napi variatió a hőmérséklettel, tehát a Nap állásával függ össze, már eleve is valószinűnek látszott. Baxendell ki is mutatta, hogy a közép napi hőmérséklet változásai a horizontális erővel a legszorosabban függnek össze. Közép-Európában a declinatiótű magaviselete a következő: reggel 8^h-kor a legkeletibb állást foglalja el, azután gyorsan nyugot felé halad, míg d. u. 1^h és 2^h között ismét meg nem fordul. Azután ismét kelet felé vándorol, még pedig este és délután gyorsabban, éjjel lassabban. A magasabb északi szélességek alatt a napi változás egyszerűen periodikus, a másodlagos maximum és minimum elmarad. Az általános magaviseletet a következő táblázat tünteti fel legjobban:

Állomás	II Maxim. és min.		I Maxim. és min.	
München, Göttingen, Berlin, Breslau	4^h r	8^h r	1^h e	10^h e
Barnaul	6	9	3	2^h r
Pétervár, Christiania	5	8	1	10^h e
Philadelphia	2	8	1	10
Fort Chippewyan + 58°, 1843—44.	0	5	2	10
Point Barrow + 71°, 1852—54.	11 e—0 r	8	1—2	9—10
Port Bowen + 73°, 1824—25.	—	—	11 r—8 e	10
Port Foulke + 78°, 1860—61.	—	—	1 e	1^h r
Polaris Bay + 82°, 1871—72.	—	—	4—5	3—4
Nares telelője + $81\frac{1}{4}$ és + $82\frac{1}{2}$°; 1875—76.	—	—	10 r—1 e	0—1

A közepes szélességekben e szerint nagyjában ugyanazon járást tünteti fel a declinatiótű.

A napi variatió amplitudója az évszakoktól függ és nyáron nagyobb, mint télen. Göttingen számára a napi variatió közepes amplitudóját például a következő táblázat adja:

Jan.	6′.7	Ápr.	13′.9	Júl.	12′.1	Okt.	10′.5
Febr.	7′.4	Máj.	13′.5	Aug.	13′.0	Nov.	6′.9
Márcz.	11′.0	Jún.	12′.5	Szept.	11′.8	Decz.	5′.0.

A variatiók az egész mágneses északi féltekén ugyanezen menetet mutatják, csakhogy a mágneses szélesség kisebbedésével az amplitudó is fogy. Arago és Humboldt tapasztalatai szerint létezik állítólag a mágneses és geographiai aequator között egy görbe, melynek mentén a napi variatió amplitudója 0. A déli féltekén annyiban fordítva áll minden, a menynyiben ott a tű déli vége végzi ugyanazon mozgásokat, melyeket az északi félgömbön az északi vég tüntet fel.

Az inclinatió is 24 órai időközű periodushoz van kötve: reggel 10^h-kor az inclinatió legnagyobb, 12 órával később minimum. Ugyanezen menetet, de a maximum és minimum felcserélésével mutatja az intenzitás is. Mindkét elemnél tehát a periodus nagyon élesen van kifejezve, de a változás menete magában véve sokkal bonyolódottabb, mint a declinatió esetében. Közeli helyeken is a maximális és minimális értéke a két elemnek egészen más időpontokra esik, sőt ugyanazon helyen is nagyon változékony és teljesen meg is fordulhat.

Évi periodus is mutatkozik a variatiókban, még pedig nemcsak azok amplitudójában, hanem magának a változás menetében. Így pl. a variatió München és Hobartownban tett megfigyelések szerint (ívperczekben) az egyes hónapokban:

Hónap	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Variatió	6·83	7·81	8·51	8·24	7·46	7·02

Hónap	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Variatió	7·06	7·89	8·38	8·99	7·93	7·53,

úgy hogy az aequinoctiumokban a variatió maximum, a solstitiumokkor minimum. De ez korántsem általánosan érvényes szabály, mert különböző helyeken a főphásisok is különböző

időkre esnek; J. A. Brown tapasztalatai szerint pl. a declinatió közép napi változása minimuma deczemberben lép fel magas északi szélességek alatt; az északi térítőn a minimum ideje november, január és február, a mágneses aequator táján márczius és október, a déli térítőn április, május, szeptember és augusztus, magas déli szélességek alatt a minimum júniusra és júliusra esik.

Az intenzitás és inclinatió ugyanezen évi törvényt követik, de ellenkező értelemben, a mint ezt a két elemnek egymástól való függésmódja is sejteti. Sabine és Hansteen szerint a déli és északi félgömbön lévő állomások számára az intenzitás októbertől februáriusig nagyobb, áprilistól augusztusig kisebb, mint az évi közép, úgy hogy a Nap közelsége itt is érvényesíti befolyását. Brown szerint a horizontális erő a solstitiumok alkalmával maximum, az aequinoctiumokban minimum, mihez jól illik ama másik jól ismert tény, hogy az inclinatió maximuma, illetve minimuma az aequinoctiumokra, illetve solstitiumokra esik.

Ezen szabályos lefolyású periodusokon kívül, melyekhez még azt is sorolhatjuk, hogy a variatió nemcsak a Nap, hanem a Hold állása szerint is mutat napi periodust, s hogy a Nap forgásával annyira kapcsolatos, hogy Hornstein a variatiókból a Nap synodikus tengelyforgását egészen pontosan 26¼ napra tudta levezetni, vannak még olyanok, melyek megszabott periodushoz kötve nincsenek, s melyeket ezért aperiodikus változásoknak, vagy röviden háborgásoknak szokás nevezni. Humboldt kieszközölte, hogy 1828 és 1830 között Berlinben, Freibergben, Nicolajewben és Kasanban meghatározott napokon óránként figyeljék meg a declinatiót. Már ezen, mint a későbbi megfigyelési sorozatokból is nevezetes párhuzamos menet volt észlelhető a háborgásokban. A felállítható általános szabályok a következők: a háborgások rendesen olyneműek, hogy a mágnestű közepes napi járását még jobban kiemelni iparkodnak, vagyis a háborgások lengések a declinatió közepes menete körül. Összefüggő háborgási sorozatban is nagyon változékonyak, egyik napon nagyon erősek, más napon igen csekélyek.

A declinatió háborgásai annál tetemesebbek, minél inkább megyünk észak felé. Éppen nem lokális jelentőségűek, mert

mindenütt párhuzamosan haladnak, a mi különösen azon helyeken észlelhető, melyek ugyanazon meridiánon feküsznek. A déli féltekén a háborgás éppen ellentett jelű az északi félgömbön észlelt egyidejű háborgással, különösen, ha a két hely ugyanazon geographiai hosszúsággal bír. Egyenlő parallelkörön fekvő helyek ellenben más magaviseletet tanusítanak. A háborgás ugyanis minden helyről kelet és nyugot felé fogyó erősséggel terjed, és a maximális háborgás helyétől 90°-ra keletre és nyugotra háborgás egyátalában nincs. Azontúl a háborgás előjele megfordul és a maximumeltérés helyétől 180°-ra ismét maximum. Teljesen hasonló háborgásoknak vannak alávetve az inclinatió és intenzitás.

Minden aperiodikus jelleg mellett is ki lehetett mutatni statisztikailag, hogy a háborgások gyakoriságának napi és évi periodusa van. Amannak maximuma Berlinben középben reggeli 3^h-ra, egy kisebb maximum esti 6^h-ra tehető; távolfekvő helyek ugyanezen magaviseletet tanusítják. Az évi maximum pedig többeknek megfigyelése szerint az aequinoctiumokra esik.

A hazai megfigyelések, melyeket a meteorologiai és földmágnességi országos intézet fennállása óta eszközölt, Steiner Lajos szerint a következőkben foglalhatók össze:

év	declin.	inclin.	horizontális intenzitás	
1871.	9° 43′.2	62° 48′.0	0·20 972	0·21 026
1872.	—	43′.2	—	—
1873.	30′.4	39′.3	21 013	20 989
1874.	25′.1	37′.4	21 049	21 053
1875.	19′.9	37′.5	21 071	21 065
1876.	13′.8	34′.6	21 104	21 103
1877.	7′.5	34′.1	21 121	21 129
1878.	0′.3	33′.8	—	21 125
1879.	8° 52′.8	34′.4	—	21 140
1880.	47′.1	32′.6	—	21 151
1881.	40′.8	30′.4	—	21 083
1882.	36′.5	36′.4 (?)	—	21 079
1883.	31′.6	31′.3	—	21 038
1884.	26′.5	33′.0	—	21 066
1885.	21′.9	30′.0	21 088	21 084
1886.	14′.6	30′.0	—	21 101

év	declin.	inclin.	horizontális intenzitás	
1887.	8° 9′.5	—	—	—
1888.	7′.4	—	—	—
1889.	3′.3	—	—	—
1893.	0′.0	62° 44′.8	0·21 022	—
1894.	7° 58′.1	44′.0	21 042	—
1895.	52′.0	44′.2	21 082	—
1896.	47′.2	38′.0	21 106	—
1897.	44′.3	—	21 114	—
1898.	38′.2	37′.2	21 114	—

E táblázatban az utolsó rovat a horizontális intenzitásnak január 1-én figyelt értékét adja, míg a többi rovat a megfelelő elemeknek évi közepeit tartalmazza. A kilenczvenes évek elején mutatkozó hézag onnan van, hogy ez előtt a mágneses variometerek Budapesten, azután pedig Ó-Gyallán voltak fölállítva. A hézagok teljesen megbízható számadatokkal nem tölthetők ki, a mennyiben ez években absolut megfigyelések hiányoznak, úgy hogy a variatiós megfigyelések teljes biztonsággal nem redukálhatók. Tekintve azonban, hogy a horizontális intenzitás két rovatának számadatai között tetemes különbség nincs, a hiányok elég könnyen pótolhatók.

A declinatiók és a horizontális intenzitás közepei elég megbízható számértékek; az inclinatió-mérések részben a Dover-féle inclinatoriummal, részben földinduktorral eszközöltettek, és minthogy ezen elem számára variometer nem volt felállítva, a közepeket csak az év folyamán eszközölt absolut mérésekből lehetett levezetni. Az inclinatió ezen közepei tehát mindenesetre nagy megbízhatósággal nem dicsekedhetnek.

Minthogy ezen megfigyelések ideje alatt még önműködő magnetograph nem állt rendelkezésre, az elemek napi menete csak geographiailag hasonlóan fekvő mágneses observatoriumok adatainak egybevetésével vezethető le. Ily összehasonlítás alapján azt találja Steiner, hogy a declinatió főmaximuma d. u. 2^h körül, a téli hónapokban már d. u. 1^h körül lép fel; a főmaximum reggeli 8^h tájt esik. Egy második minimum mutatkozik este 10^h körül s ez különösen a téli hónapokban oly erős, hogy néha a főminimum szerepét ölti. Egy második maximum reggel 3^h, a nyári hónapokban reggel 1^h körül észlelhető.

Az inclinatió főmaximuma d. e. 10^h körül lép fel, a főminimum nyáron e. 8^h, télen r. 6^h körül áll be. A minimum ideje nem oly praegnáns, mint a többi elemeknél és az esti 6^h-tól reggeli 6^h-ig terjedő időszakba esik.

A horizontális intenzitás főminimuma d. e. $10—11^h$ körül, főmaximuma nyáron este 8^h, télen reggel 6^h körül lép fel. Nyáron a másodmaximum éjfél körül van.

A vertikális intenzitás főminimuma dél körül, főmaximuma este 6^h körül esik; egy második maximum és minimum észlelhető illetve reggel 8^h és reggel 3^h körül.

A totális intenzitás maximuma végre este 6^h, minimuma d. e. 11^h körül lép fel.

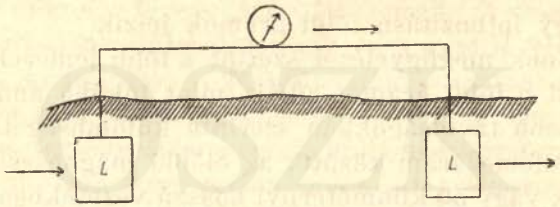
Valamennyi elemnél a napi változás amplitudója kisebb télen, mint nyáron; a háborgások legkisebbek dél körül, legnagyobbak az esti 6^h-tól este 10^h-ig terjedő időközben, még pedig úgy a declinatió, mint a horizontális és vertikális intenzitásban.

Két jelenséget ismerünk, melyek nemcsak a földmágnességgel magával, hanem különösen annak háborgásaival oly szoros kapcsolatban állanak, hogy a földmágnesség tanában nem mellőzhetők: ezek a földi áramok és a sarki fény, s ezekben kereshetjük a háborgások okait is, vagy helyesebben talán e jelenségek a mágneses háborgásokkal együtt közös okkal bírnak. Egyéb okok nem igen találhatók: a zivatar határozottan hatás nélkül marad a mágnestűre, és földrengés, valamint vulkánikus kitörések közvetlenül legalább talán csak mechanikailag hatnak; közvetve mindenesetre azáltal, hogy tektonikus változások befolyásolják a földi áramok irányát és erősségét. Különösen a vulkánikus hullám egy időben igen távol helyeken is érvényesül.

A földi áramok első észlelője volt 1847-ben Derby állomáson Barlow. Később Baumgartner a Bécs-gráczi telegraphvonalon tette megfigyeléseit, legtöbbet foglalkozott azonban e kérdéssel Lamont. Ma a földi áramok megfigyelése a fontosabb mágneses observatoriumok programmjába tartozik, és a vezuvi observatoriumon prognostikus küldetésük is van, a mennyiben Palmieri megfigyelései szerint a horizonthoz hajlott, tehát a hegy lejtőjén felkúszó vezetékben a vulkán nyugalmi

állapotában csak felszálló áramok észlelhetők. Mihelyest azonban a hegy vulkánikus tevékenységének stadiumába lép, ez áramok intenzitása fogy, sőt irányuk ellenkezőbe megy át, leszálló áramok keletkeznek.

Ha — mint a 248. ábrában — két teljesen azonos fémből készült lemezt a földbe sülyesztünk s a talajon kívül vezető összeköttetésbe hozunk, akkor áramnak nem szabad keletkeznie, a mennyiben ugyanazon két fém között elektromos különbség nem lép fel. Mindazonáltal a vezetékbe csatolt galvanometer áram jelenlétét árulja el, mely azonban még mindig onnan jöhet, hogy a két lemez felülete nem teljesen ugyanazon anyagi minőséggel bír. Ha a két lemezt azonban egymástól messze elválasztjuk, akkor ezen valóban galvanikus áram az LL földoszlop nagy ellentállása miatt elenyésző



248. ábra. A földi áramok megfigyelése.

kicsiny lesz. És ha, mint ez tényleg úgy is van, mindamellett a galvanometer tetemes áramot árul el, akkor ez csak földi áram lehet, mely a nyilak által jelölt irányt követi, holott az LL lemezpár, mint elem között, a földfelületen észlelt árammal ellentétes áramirány uralkodnék. Az utóbbi esetben különben természetes, hogy a lemezek helycseréje által ellentétes áramot kapnánk, holott a megfigyelés szerint e körülménynek tényleg befolyása az áramirányra nincs. Hogy a Föld különben jó vezető, ezt von Steinheil felfedezése óta tudjuk, a mennyiben táviratozásra egyetlen egy sodrony elegendő, a két állomás közötti földréteg képviselvén a vezeték másik, bezáró részét.

Lamont kisérleteiben a két lemez távolsága körülbelül 100 és 200 m volt és ezekben nagyobb és kisebb, gyors lefolyású áramokat észlelt, melyek egymással párhuzamos vezetékekben ugyanazon időben és intenzitásban léptek föl, további

bizonyítékául azon ténynek, hogy ezek nem a lemezek és a talaj között végbemenő chémiai processusra vezetendők vissza. A lemezpár földfeletti vezetékével együtt tehát csak mellékvezetéket képvisel, melybe a földi áram belép és ugyanazon irányban a második lemezből ismét kilép.

A müncheni Bogenhauseni csillagdában voltak ilyen vezetékek, részben párhuzamosan a csillagászati és mágneses meridiánnal, részben erre merőlegesen. A galvanometerek pillanatnyi kitérései a meridiánnal párhuzamos vezetékekben teljesen megfelelnek a declinatió variatiójának, úgy hogy a nyugoti declinatió megnövekedésének mindig egy észak-déli iránynyal bíró földi áram felel meg. A meridiánra merőleges vezetékben fellépő áramok a horizontális intenzitással függnek össze, úgy hogy az intenzitás megnövekedése egy kelet-nyugot irányú árammal kapcsolatban áll. Tetemes mágneses háborgásokat mindig nagy intenzitású földi áramok jelzik.

Wild-nek megfigyelései szerint a földi lemezek nem annyira magát a földi áramot adják, mint inkább annak hullámzásait. Kisebb távolságokban szerinte külömbség teendő földáram és földlemezáram között; az előbbi mágnesesen nyugodt időben csak vagy 50 kilométernyi hosszú vezetékben észlelhető.

A földi áramok okaira vonatkozólag csak feltevéseket tehetünk; a legfontosabbakat a földi mágnesség elméletében fel fogom említeni, a hol nekik befolyásos szerep jut.

Fontos pótlásul kiemelem, hogy báró Eötvös Loránd műszerével a földi áramok közvetlenül, mesterséges vezeték nélkül, mágneses távolbahatásaikból észlelhetők. Midőn szent-lőrinczi kertjében műszere mellől egy 2 méter hosszú és 1 méter széles és mély árkot vágott ki, kiigtatta a földből azon áramdarabot, melyet az árok térfogata magában rejtett. A hatás ugyanaz volt, mintha az árok közepéből egy mintegy 100 (CGS) egységnyi momentumú mágnesrudat távolítottak volna el. Természetesen közelebbi megfigyelések nélkül nem lehet eldönteni ez adatból, mily rész esik ebből a földi áramra magára, és mekkora azon befolyás, mely a kihányt föld mágnességének rovására irandó.

A másik fontos tünemény, mely szoros kapcsolatban áll a földmágneses jelenségekkel, a sarki fény, melyet — ha ugyan homályos leírásokra adhatunk valamit — már Aristote-

LES, PLINIUS és TACITUS ismerhetett. LUTHER idejében különösen sok északi fény volt észlelhető, de csak GESSNER KONRÁD-nak 1561-ben adott jó leírása után kezdtek e tárgygyal behatóbban foglalkozni. GASSENDI 1621-ben adta a jelenség nevét, aurora borealist, mely ezóta legalább a latinból származó nyelvekben megmaradt. MAIRAN munkája óta a tünemény tudományos figyelemben is részesült és ARGELANDER-nek leírása 162 sarki fényről, melyet 1823—31 között Åbó-ban észlelt, classikus marad.

COOK és FORSTER utazásai után már déli fényről is szólhatunk, úgy hogy az összefoglaló sarki fény elnevezés jogosult. Gyönyörű és typikus leírást közöl a tüneményről WOHLGEMUTH, az osztrák-magyar sarki utazás dirigense is.

„Az északi fény képződésének első stadiuma páranemű sávoly keletkezésében nyilvánul, melynek nyugot és kelet felé futó végei látszólag a szemhatárra támaszkodnak és a továhaladásnak mintegy forgási pontját képezik. A második pillanatban a fénysávoly intenzitása nőtt s a zenith felé nyomult. Több fényív követi ezt; a fénytünemény sugaras szerkezetet tüntet fel és a sávolyok különösen lefelé elég éles határolást mutatnak. A legfényesebb helyek hullámzó továterjedése észlelhető, körülbelül azon módon, mint ezt a GEISSLER-féle csövekben láthatjuk. A sávolytöredékek minden ingása és helyváltozása daczára valamennyi sugár a mágneses zenith felé concentrálva marad, azaz az inclinatiótűvel párhuzamos irányt követ. A most következő továfejlődött stadium megismerni engedi, hogy a korona képződése küszöbön áll. A sávolyok keleten és nyugoton egyesültek, azaz a zenith körül terjedő oválisokat képeznek; az északi szalagtöredékek vagy északról felszálltak vagy az északi égbolt valamely helyén hirtelenül keletkeztek. A mágneses zenith, tehát a jelenség középmezeje körül egy sugárlegyező töve keletkezik, mely többnyire és túlnyomóan amaz oldal felé terjed, mely felől a jelenség kezdetét vette, itt tehát dél felé. Erre következik a kifejlődött északi fénykorona. A mágneses zenithtől kezdve észak felé egy második sugárkúp képződött, és az elbeszélésnél is gyorsabban a közepes mezők fölé fénytenger áramlik, mely számára hiába keresek jellemző kifejezést, ha csak meg nincs engedve, hogy számára a dal- és zeneköltő szavát, a „lobogó lángot“ (wabernde Lohe) használjam. Meggyujtott alkohol,

melynek lángját léghuzam hajtja a lángoló fénymező széle felé, tán legjobban adja vissza a fényeffektust. A fényjelenség lüktető mozgása azonban a lángénál sokkal gyorsabb; a fénymező színezete világos fehéres, időnkénti gyors változásaival minden fényárnyalatnak: helyenként meggyvörös, időnként kékes árnyalatot ismerünk fel. A szalagdísz fényessége és színe is intenzivebbé vált; a felső szél világoszöld, a közepe fehér, az alsó széle vörös s ilyen amaz oldal is, mely felé a fény hullámzása egészen fellép. Minél inkább közelednek a lassan magasabbra törő szalagok a zenith felé, annál gyorsabbak a rángató és kigyószerű hullámmozgások, melyeket talán egy gyorsan emelkedő szinházi függöny nehéz szegélyének csapkodásával hasonlíthatunk össze. A következő stadium a fénykorona halványodása; a közepes mező alaktalan, kelet-nyugoti irányban terjedő fényfolttá megy át, mely eleinte még a vöröses színt, később már csak a közönséges északi fény párájának színét mutatja; a fény azonban gyakran még akkor is oly nagy, hogy mellette közönséges újságnyomtatás olvasható. A draperiák vagy a zenith felé tartó útjokban a közepes mezőbe vesztek, vagy fénytelen párasávolyokká halványodtak, melyek lassan elenyésznek, hogy más alakoknak adjanak helyet. A leírt tünemény 1—10 percznyi idő alatt játszódik le; a korona teljes kifejlődése gyakran csak másodperczekre, ritkán egy, legfeljebb 3 perczre szorítkozik.“ Ezen koronák feltünése Wohlgemuth szerint Jan Mayen szigetén éjjelente 9—10-szer észlelhető.

Ezen leírás már mindent magában foglal. a mi Fritz szerint jellemző; ezen jellemző elemek: a fényív az alatta levő segmentummal, az előbbiből kilövelt sugarak, melyek együttvéve a sugárzó északi fényt adják. Ez Wohlgemuth szerint átmenő episod, de más tájakon szabály. A sugarak convergentiája a koronát alkotja. Jellemzők továbbá: a szalagok lobogó mozgásukkal; a fonalak, finom legyező alakban elrendezett sugarak s az egész fénylepellel burkolt égen tovahaladó hullámok. Mindezen elemek egyesülése adja a ritkább és bizonyos geographiai keletkezési feltételekhez kötött draperiás vagy függönyös sarki fényt. Mindig jelen van a kevésbbé felötlő sarki fényi felhőzet, mely végül a sarki fényi párába megy át.

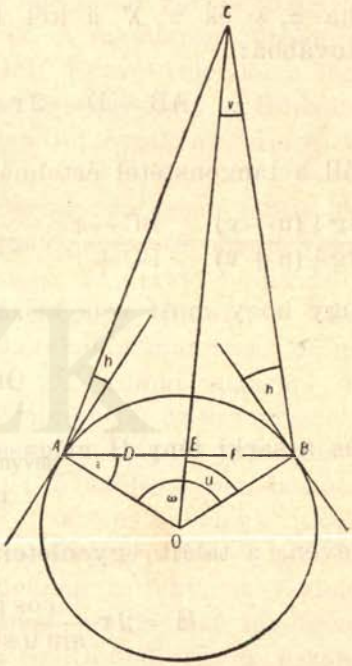
Még nincs megmagyarázva, hogy úgy e felhőzet, mint a

sugarak nemcsak átbocsájtják a csillagok fényét, hanem azok tündöklését még erősítik is. Necker és Forbes szerint Skócziában csak sarki fény alkalmával vehető észre a csillagok pislogása. Montigny scintillometrikus megfigyelések útján azon eredményhez jut, hogy a csillagok scintillatiójának intenzitása különben ugyanazon meteorologiai viszonyok között mindig sokkal erősebb a sarki fény alkalmával, mint közvetlenül ez előtt vagy után.

Régebben általános volt a vélemény, hogy a sarki fény sajátságos zörejjel is jár, de Humboldt és Fritz megjegyzése szerint a sarki fény azon mértékben válik hallgatagabbá, a minő mértékben az észlelők megbízhatósága nő.

Most már teljesen berendezett észlelési állomások vannak a sarki fény megfigyelésére, de pontos mérések nélkül is minden adat haszonnal jár; és különösen azon kérdés fontos, vajjon minden északi fénynek megfelel-e déli fény is?

A sarki fény magasságát már 1718 óta mérték meg, C. v. Wolff és Kalmus voltak az első ez irányban működő kutatók. Egyszerű, a távcső helyett csak vonalzót hordozó theodolit, az úgynevezett meteoroscop a legmegfelelőbb műszer, de a nélkül is pontos méréseket eszközölhetünk, ha az idő megjelölésével a sarki fény egyes pontjainak fekvését az állócsillagokhoz képest adjuk.



249. ábra. A sarki fény magasságának meghatározása.

Az eljárás természetesen lényegében ugyanaz, mint a melyet a holdparallaxis lemérésénél alkalmazunk.

Legyen a 249. ábrában C egy pontja a sarki fénynek, melyet egyidőben A és B állomásból h és h′ magassága szerint figyelünk. A két helyet összekötő húr hossza legyen D, ennek megfelelő középponti szöglete, azaz a két hely gömbi

távolsága ω. Akkor az ABC háromszögben, tekintettel arra, hogy a gömb érintője mindig merőlegesen áll a sugárra:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin(h + 90 - \varepsilon)}{\sin(180 - h - h' - \omega)} = \frac{\cos(h - \varepsilon)}{\sin(h + h' + \omega)},$$

a hol, mint azonnal látni:

$$2\varepsilon = 180^0 - \omega \text{ és } \cos\omega = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda'),$$

ha φ, λ és φ', λ' a két hely geographiai coordinátái. Mivel továbbá:

$$AB = D = 2r \sin\frac{\omega}{2} \text{ és } u + v = 90 - h',$$

áll a tangenstétel értelmében:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u - v)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u + v)} = \frac{BC - r}{BC + r} \text{ vagy } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u - v) = \frac{BC - r}{BC + r} \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{h'}{2}\right),$$

úgy hogy most v is kiszámítható. Ezután már

$$OC = BC \frac{\cos h'}{\sin u}$$

és a sarki fény H magassága

$$H = OC - r$$

lévén, a talált egyenletek lánczolatos behelyettesítése után:

$$H = 2r \frac{\cos h' \cos(h - \varepsilon)}{\sin u \sin(h + h' + \omega)} \sin\frac{\omega}{2} - r.$$

Némely mérés szerint a sarkfény legfelsőbb ívének közepes magassága 770 km. Fritz, a ki igen lelkiismeretesen tárgyalja az észlelési adatokat, határozott számot nem ad, de szerinte a magasság valószinűleg kisebb. Hogy a mérések mindenesetre igen nehezen eszközölhetők pontosan, azt már azon körülményből is következtethetjük, hogy a látszat rendkívül csalékony; a német sarkexpeditió néhány tudományosan is képzett tagja a sarki fény sugarait kézzel vélte elérhetni. Annyi mindenesetre tény, hogy a jelenség a legritkább légrétegekben játszódik le, s hogy azon mértékben le is ereszkedhetik, mint a milyenben a pólushoz közeledünk; majdnem

bizonyos, hogy Grönlandban a felhőleplen innen is észleltek már sarki fényt.

A jelenség gyakorisága és láthatósági határai tisztán a megfigyelési hely geographiai fekvésétől függenek. Fritz mindazon helyek összeségét, melyek évente ugyanazon számú sarki fényt látnak, isochásmának nevezi, s az első isochásma természetesen mindazon helyeket köti össze, melyek egy év lefolyása alatt átlag egy északi fényt látnak. E görbék nagyjában a parallelkörökkel párhuzamosak. A maximum görbéje a sibériai partokról $+70^0$ szélesség alatt Észak-Amerikába lép, átszeli a Nagymedve tavát, $+60^0$ szélesség alatt a Hudson-öblöt, elvonul Grönlandtól délre, Islandtól északra és Európát az északi fokon érinti.

Nordenskiöld telelő helyén a Bering-szorosban fontos és a Fritz-féle adatokat sok tekintetben kiegészítő megfigyeléseket tett, melyek eredményét bármely, az északi pólus környékét ábrázoló térképen könnyen szemléltethetni. — Vonjunk ugyanis Bathurst szigete körül, tehát a mágneses pólus szomszédságában 14^0, 20^0, 27^0, 33^0 és 38^0 gömbi sugárral öt concentrikus kört, melyek közös középpontja, az úgynevezett Nordenskiöld-féle pont. a sarki fény láthatóságára vonatkozólag fontos szerepet játszik. A legkülső 5^0 széles övben látható a draperiás sarki fény, a következő, 6^0 széles övben ez ritkul, és helyette már a közönséges sugaras fény lép fel. A harmadik 20^0 és 27^0 sugarak közötti gyürűben a fény az észlelő zenithjéhez áll közel és ezáltal jellemző alakja már majdnem teljesen elenyészik. Még beljebb, a Smith-öböl és az északnyugoti átkelés környezetében a fényív a közönséges, rendes tünemény. Mivel a sarki fény befelé ritkán lövel sugarakat, már eleve következtethetjük, hogy a Nordenskiöld-féle pont körül a sarki fény ritka és csak a horizonton, még pedig minden azimuthban észlelhető. Ennek megfelel teljesen a maximum-isochásmától északra húzott görbe, mely a láthatóság neutrális irányának görbéje, s azon helyek összeségét adja, melyeken a sarki fény a horizont minden pontjában látható.

Parry és Nares Nordenskiöld ezen elméleti következtetéseit eléggé igazolják, bár a Nordenskiöld-féle pontig tulajdonképen még senki sem hatolt.

A megfigyelések a jelenségnek physikai tulajdonságaira

is kiterjeszkednek, nevezetesen annak fényelemzésére, színére, fényének intenzitására, spectrumára és polározódására. A túlnyomó szín, mint már említők, a vörös, intenzitása azonban csak ritkán nagyobb, mint a teleholdé. Úgy a keverékszín, mint a fényesség megmérése azonban nagyon nehéz, és tulajdonképeni mérőmegfigyelések talán nem is történtek még. Az összehasonlításnál segédfényforrásul leginkább csak Geissler-féle csövek használhatók. Polározódás nem vehető észre, a mi szintén arra mutat, hogy nem idegen fényben ragyog az ég.

A fényesebb sarki fény spectrumában mintegy 9 vonal látható, melynek legjellemzőbbje $\lambda = 556{\cdot}7$ milliomod millimeternyi hullámhosszúsággal bír. E vonal eredete és hovatartozósága ismeretlen, de Ångström szerint ugyanazon vonal, mely az ég állandó gyenge phosphoreskáló fényében is fellelhető. Az ugyancsak jellemző 522·7, 470·7 és 428·2 hullámhosszúságú vonalak Hasselberg megfigyelései szerint gyenge elektromos kisülés alkalmával alacsony hőmérsékletnél izzó levegő spectrumát jellemzik. Ezen megfigyelések kiváló fontosságot nyernek a sarki fény elméletében.

A sarki fény határozottan láthatósági periodusokhoz van kötve, melyek közül egyeseket már régebben mutattak ki, de összefüggésben csak Fritz tárgyalta a problemát. Szerinte van napi, évi és saeculáris periodus, az utolsó elnevezést nem a szokásos értelemben véve.

Az egyszerű napi periodusnak maximuma a legtöbb vidéken és különösen közepes szélességek alatt esti 10 órára esik, tehát körülbelül az inclinatió maximumával együttesen lép fel. A déli fény maximuma eddigi megfigyeléseink szerint ugyanaz. Mivel a fénykifejlődés határozott egymásutánt követ, természetes, hogy a sarki fény minden egyes pházisának megvan a maga napi periodusa. Így pl. Bossekop számára Finnmarkenben $+70^0$ szélesség alatt: a sarki ív fellép középben esti $7^h\ 52^m$-kor, a sugarak $8^h\ 26^m$, a felhőzet $11^h\ 18^m$, a hullámzó mozgás $13^h\ 12^m$ és $13^h\ 53^m$-kor. A legintenzivebb színezet $10^h\ 11^m$-ra és a tünemény legpompásabb kifejlődése $10—11^h$-ra esik.

Az évi periodust, ha a Nordenskiöld-féle beosztás legbelső öveit kiveszszük, két maximum és két minimum jellemzi. Az egész Föld számára akkor van általános maximum,

ha a Föld a két aequinoctium között a perihéliumon át mozog. A második maximum legfölebb igen magas szélességek alatt marad ki. E periodusra a nap hosszának különbözősége befolyást nem gyakorol.

A sarki fény gyakorisága teljesen párhuzamosan halad a napfoltok gyakoriságával és a mágneses elemek variatióival, és ez nemcsak a periodus tartamára, hanem a maximum és minimum idejére és a görbe elongatiójára is vonatkozik. A periodus hossza e szerint $11\frac{1}{9}$ év, úgy hogy egy század éppen 9 teljes periodust foglal magában. Ezen kívül van még egy szabatosan megállapítható periodus is, mely a sarki fényeknek Kr. sz. előtti 503-tól a mai napig folytatott feljegyzéseiből kifejthető. Ennek hossza 55·6 év, tehát majdnem egészen pontosan a napfoltperiodus 5-szöröse.

Vajjon a meteorologiai factorok gyakorolnak-e befolyást, ma is vitás kérdés, mely csak nagyon gondos statisztikai feldolgozás útján dönthető el; a barometerre nézve összefüggést legalább sejtenek. Bizonyos azonban, hogy a Hold, noha mágneses hatásai vannak, észrevehető befolyást nem gyakorol, s hogy a cirrusfelhők, melyek úgyis gyakran hordozói a sarki fénynek, nem közömbösek. Ezek gyakran északirányban rendezkednek el és ekkor a sarki fénynyel s mágneses jelenségekkel határozottan valamelyes összefüggésben álló polársávolyokat képezik.

A mágneses háborgásokkal a sarki fények nagyon szoros rokonságban állanak. Dalton 1786 és 1793 között Kendalban tett megfigyeléseiből a következő szabályok vezethetők le: a tű háborgásai kicsinyek, gyakran észrevehetetlenek, ha a sarki fény csak 5—15°-kal áll a horizont felett, de soha nem hiányoznak, ha a sugarak a zenithig érnek föl. A mágnestűnek napi közepes állása körül jobbra és balra körülbelül egyenlő nagyságú szabálytalan lengéseiből állanak ezen háborgások, melyek amplitudója Kendal számára mintegy 30′ volt. A fénytünemény megszüntével, vagy röviden ezután a tű rendes állásába tér vissza. Hasonló tapasztalatokat szerzett Weyprecht a Ferencz József-földön. A tű háborgásai annál nagyobbak, minél inkább teszi a sarki fény a közelség benyomását. Gyenge, nem sugárzó vagy majdnem mozdulatlan tünemények majdnem

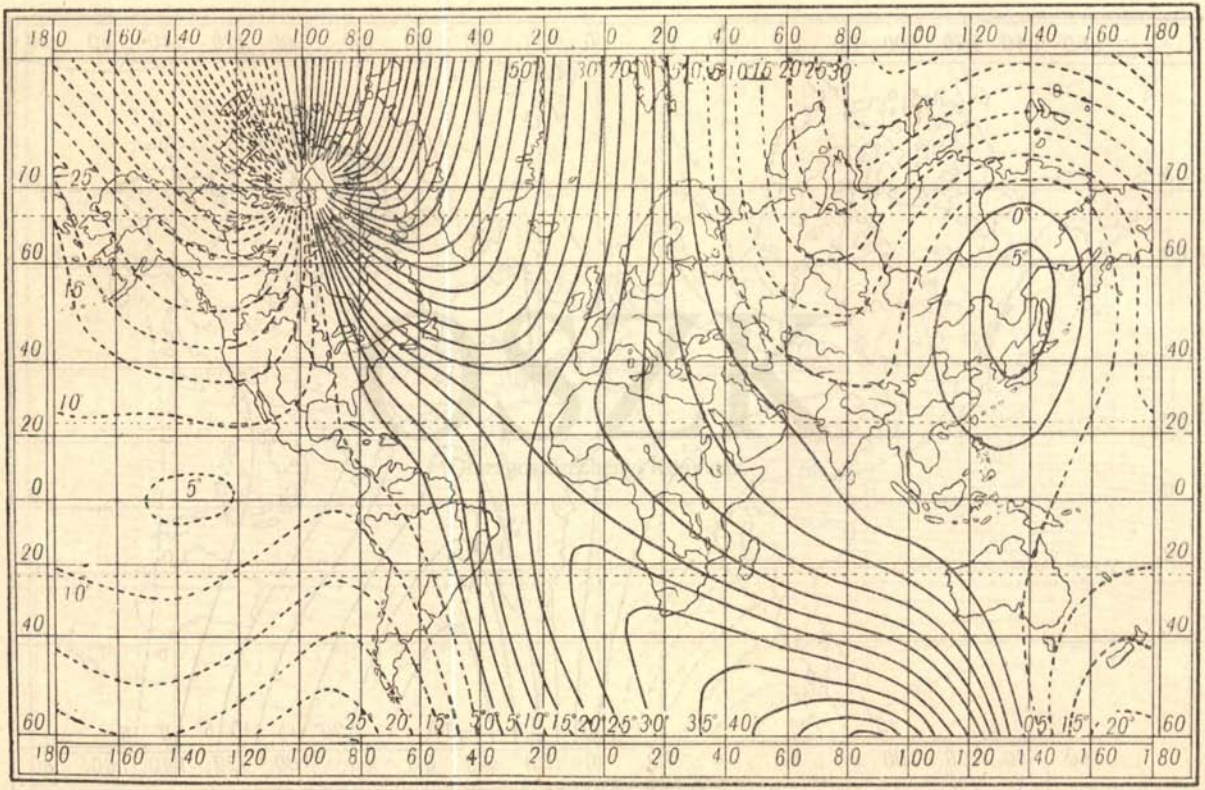
észrevehető befolyás nélkül mulnak el, de háborgásuk annál nagyobb, minél határozottabb és élénkebb a tünemény. Minden háborgás alkalmával a tű kelet felé tért ki, a horizontális intenzitás fogyott, az inclinatió nőtt.

VI. FEJEZET.

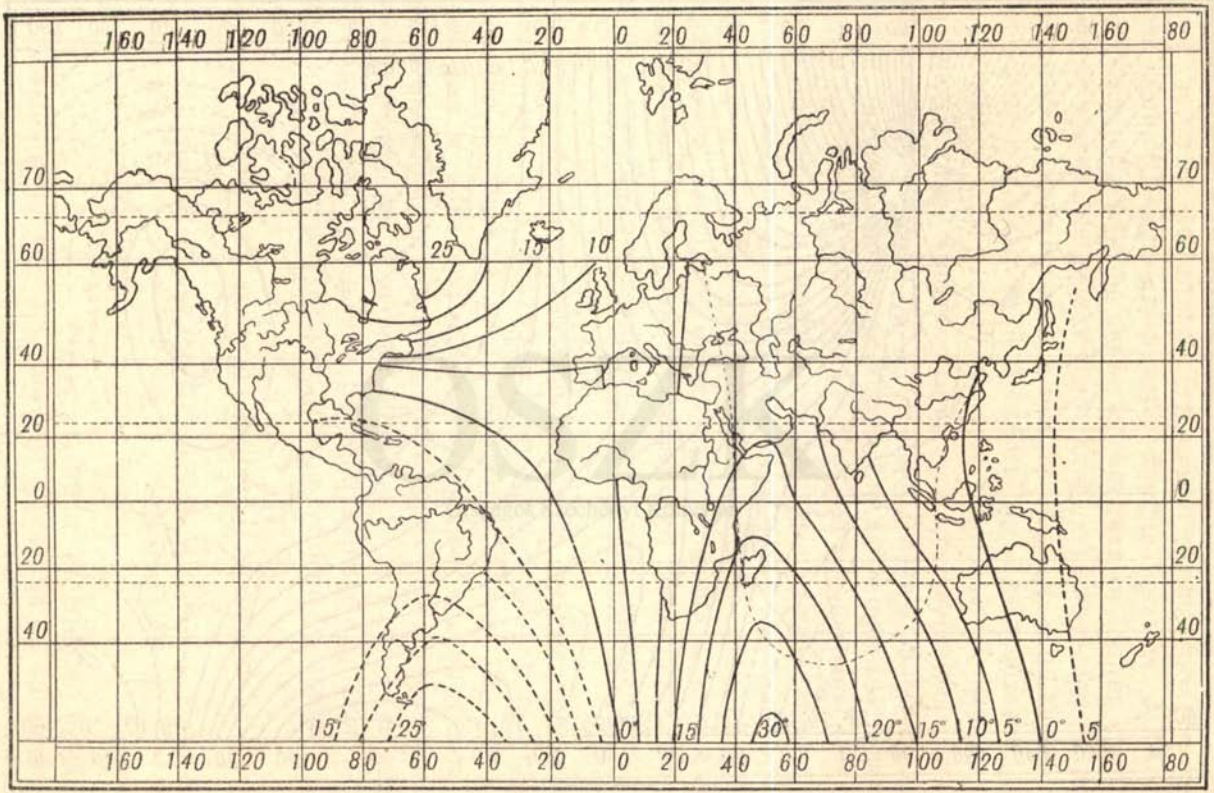
A mágneses elemek térbeli változásai.

A mágneses elemek időbeli változása után figyeljük most meg az egyidejű elemek helyi változásait. A legszemléltetőbb eljárás az, hogy a Föld felületén mindazon helyeket felkeressük, melyeken egyik vagy másik mágneses elem állandó értékkel bír. Mindazon helyek összesége, melyeken a declinatió ugyanaz, egy isogonán feküsznek; az egyenlő inclinatióval bíró helyek az isoklinát alkotják, az egyenlő horizontális (vagy összes) intenzitással bíró helyeket összekötő görbe az isodynáma.

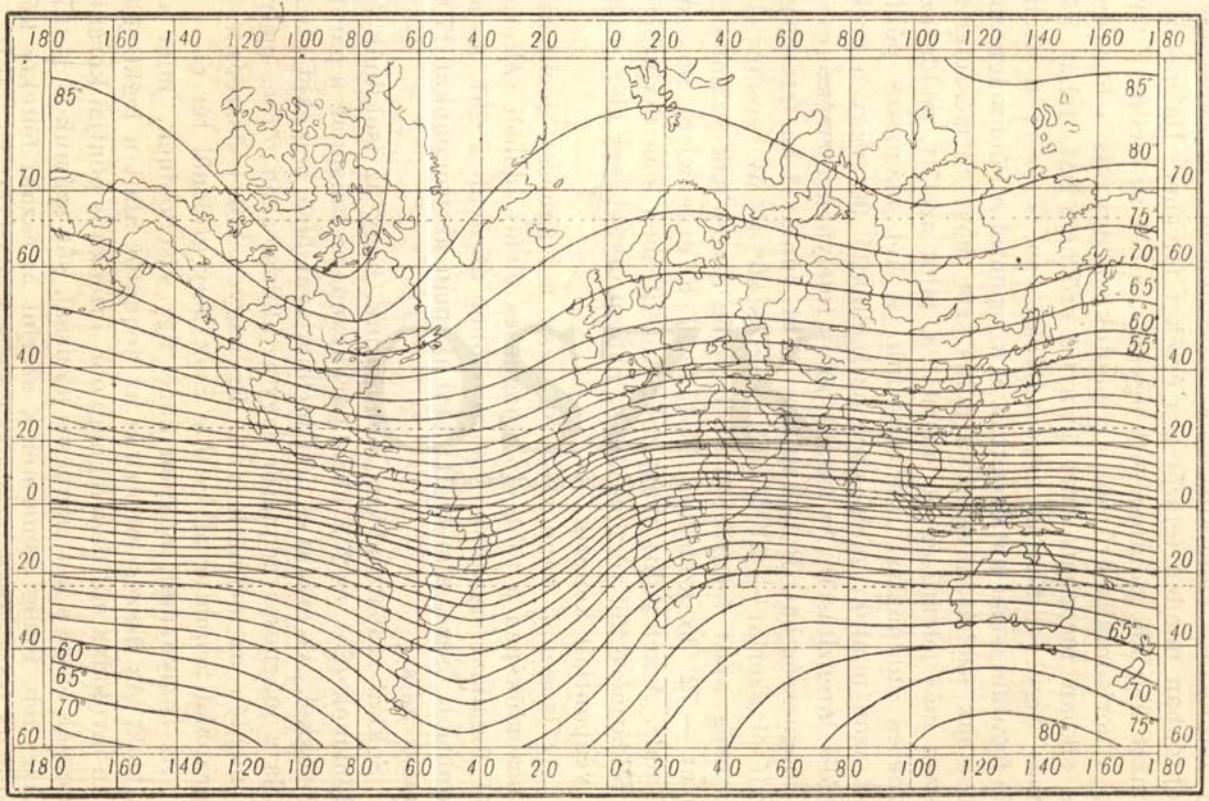
Az isogonok (250. ábra) igen durva közelítéssel a meridiánokkal haladnak párhuzamosan, de pontos leírásuk még hézagos, mert éppen a legfontosabb pontokon, a két pólus közelében kellő számú megfigyelésünk nincs. A 0 declinatió görbéje az agona nevét viseli, és azon vonal, melynek mentén a tű a csillagászati meridiánnal esik össze. Mindenesetre magában zárt vonalból áll, melyből azonban eddig csak két különvált ágat ismerünk. Az egyik áthalad a Hudson-öblön, Észak-Amerika keleti részén, belép $+73^0$ W. greenwichi hosszúság és $+38^0$ szélesség alatt az Atlanti-óczeánba, elvonul keletre a nyugotindiai szigetektől, átszeli Dél-Amerika keleti csúcsát és 40^0 W. hosszúság és -20^0 szélesség alatt ismét a tengerbe lép. A másik ág 45 és 50^0 E. hosszúság között átvonul Orosz-Ázsián, átszeli a Kaspi-tengert, átmegy keleti Arábiába és azután gyorsan kelet felé hajlik Ausztráliába. Az agona európai oldalán nyugoti eltérés van, a másik oldalán keleti declinatió észlelhető, mely annál nagyobb, minél inkább távolodunk az agonától. Valamennyi isogona a két geographiai pólusban metszi egymást, mert ott a declinatió teljesen határozatlan. A tűnek ugyan e két pontban teljesen megszabott iránya van, de mivel a pólu-



250. ábra. Isogon vonalak 1885 elején.



251. ábra. Isogon vonalak 1700 számára HALLEY szerint.



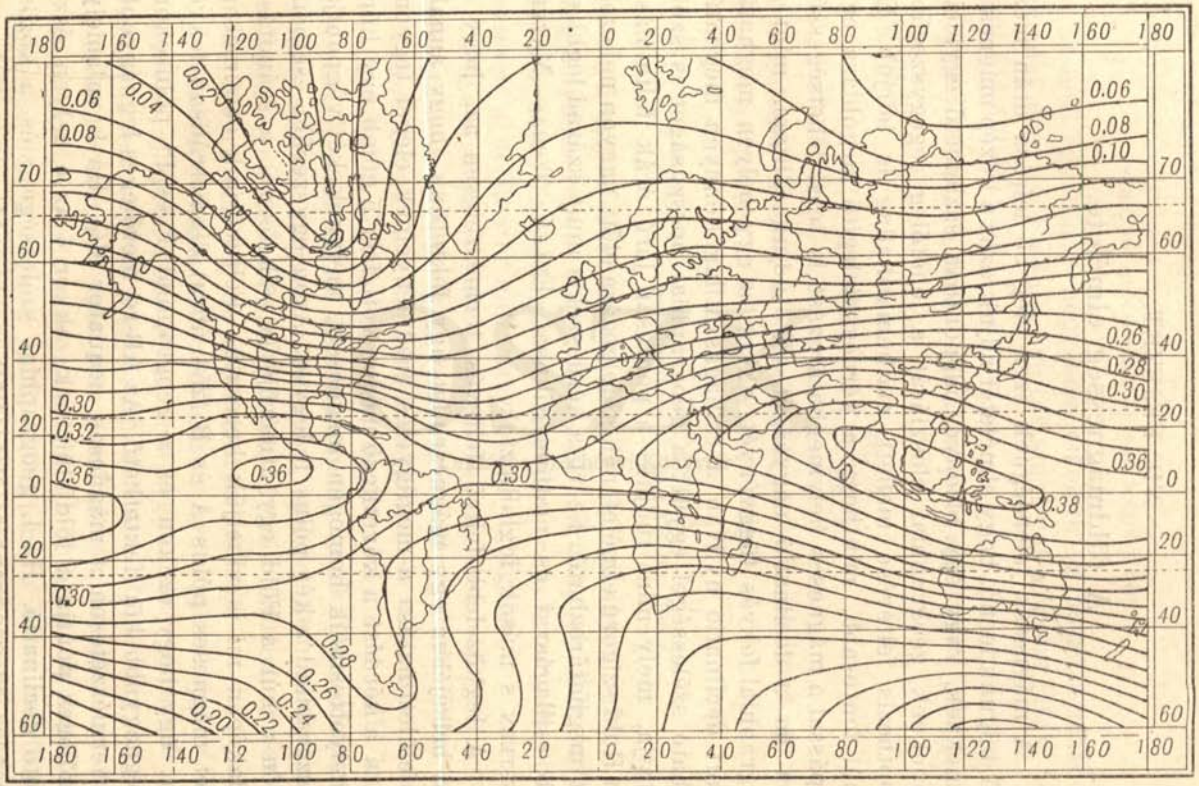
252. ábra. Isoklin vonalak 1885 elején.

sokon az összes meridiánok haladnak át, egészen tetszőleges, mily meridiánra vonatkoztatjuk a declinatiót; ez ennélfogva e pontokban minden tetszőleges értéket felvehet. De metszik egymást még két pontban, ott ugyanis, a hol az inclinatió 90°, azaz a horizontális erő null. E pontokban ugyanis a horizontális síkban forgható tűre irányító erő nem hat, tehát közömbös vagy indifferens egyensúlyban van, s ezért a declinatió fogalma ismét határozatlan. E két pontot a Föld mágneses pólusainak szokás nevezni, a pólus szót most természetesen egészen más jelentőségben használva, mint azelőtt, midőn ezt mágneses súlyponttal azonosítottuk. A két mágneses pólus tehát azon pontok, melyekben az inclinatió 90° vagy a horizontális intenzitás 0. Az északi pólus (melyben természetesen déli mágnesség hat) Ross kapitány 1831. június 1-én tett megfigyelései szerint +70° 5′ szélesség és 96° 47′ W. greenwichi hosszúság alatt fekszik; a déli pedig Gauss-nak számításai szerint —72° 35′ szélesség és 152° 30′ E. greenwichi hosszúság alatt. A két pólus tehát még közelítésben sem tekinthető egy földátmérő két végpontjának, hanem inkább egy elég rövid húr végpontjait képezik.

Az isogonok vándorlásáról, azaz a mágneses declinatió (és hasonlóképen a többi földmágneses elem) időbeli változásáról fogalmat nyerünk, ha az előbbi ábrával a 251. ábrát hasonlítjuk össze, a mely Halley nyomán az isogonokat 1700 számára adja.

Sokkal szabatosabban mondhatjuk, hogy az isoklinák és isodynamok (251. és 252. ábra) párhuzamosan haladnak a parallelkörökkel. Az északi és déli inclinatióval bíró helyeket elválasztja a mágneses aequator vagy az aklina, azon görbe, melynek mentén az inclinatió null. Ez nagyon közel összeesik a geographiai aequatorral és tőle csak lényegtelenül tér el.

Az isodynamok nagyon közel úgy viselkednek, mint az isoklinok. Az összes intenzitás az aequator alatt a legkisebb, onnan távolodva nő, de a legnagyobb intenzitás pontjai korántsem esnek össze a két mágneses pólussal, sőt számuk is kettőnél nagyobb. Eddigi ismereteink szerint az északi féltekén két maximális intenzitású pont van: az egyik Észak-Amerikában, a másik Észak-Ázsiában fekszik, s az intenzitás ezekben körülbelül kétszer akkora, mint az aequator alatt.



253. ábra. A horizontális intenzitás isodynam vonalai 1885 elején.

VII. FEJEZET.

A földmágnesség elmélete.

A mágneses jelenségnek ezen elég bő leírása után most első dolgunk leend, hogy elméletét adjuk, azaz a közép mágneses elemeknek, vagy egy bizonyos időpontban észlelhető egyidejű elemeknek geographiai eloszlását a lehetőleg legegyszerűbb hypothezis feltevése mellett mathematikailag is leírjuk. Ez annál fontosabb, minthogy a kérdés kielégítő megoldása egy csapással a mágneses helymeghatározást is teszi lehetségessé; mert ha a declinatió nagyságát elő tudjuk állítani, mint a geographiai fekvés függvényét, akkor az egy helyen meghatározott declinatió nyilván a csillagászatilag könnyen meghatározható szélességel együtt a geographiai hosszúságot is szolgáltatja, mely mint tudjuk, a pontosan járó órák feltalálása és a Hold szigorú elméletének kidolgozása előtt nagyon nehezen volt meghatározható. Ezért a kérdéssel a mult század leghiresebb csillagászai és mathematikusai, Euler, Tobias Mayer, Hansteen s mások foglalkoztak.

A legközelebb fekvő feltevés természetesen az, hogy a Föld belsejében egy mágnesrudat úgy fektetünk, hogy annak földfelületi hatása a megfigyelés eredményeinek eleget tegyen. Euler a kérdést a következő módon veti fel: a gömb egy húrját helyettesítsük homogén mágnessel, melynek két végpontja egyszersmind a két pólus is legyen. Azon egyszerűbb esetben, midőn a húr a Föld egy átmérőjével esik össze, a számítást példaképen mi is vihetjük keresztül. Feltevésünk értelmében a két mágneses pólus A és B (254. ábra) diametrálisan fekvő pont, úgy hogy ezeken és a geographiai P és P′ pólusokon át legnagyobb kör fektethető. Az AB-re merőleges legnagyobb kör természetesen a mágneses aequator MQ. Ha L valamely tetszőleges pontja a földfelületnek, akkor δ az e helyen észlelhető declinatió. Ha L geographiai szélessége φ és a közös mágneses és geographiai MPAQP′B meridiántól olvasott hosszúsága λ, az AL mágneses pólustávolság $90^0 - \varphi$ és AP állandó ív pedig a, akkor

$$\frac{\sin \delta}{\sin \lambda} = \frac{\sin a}{\cos \psi} \text{ vagy } \cos \psi \sin \delta = \sin a \sin \lambda,$$

a hol

$$\sin \psi = \cos a \sin \varphi + \sin a \cos \varphi \cos \lambda.$$

Ha az első egyenletet négyzetre emeljük és hozzá a második egyenlet négyzetét adjuk, miután $\sin^2 \delta$-val megszoroztuk, lesz némi átalakítás után:

$$\sin^2 \delta [1 - (\cos a \sin \varphi + \sin a \cos \varphi \cos \lambda)^2] = \sin^2 a \sin^2 \lambda,$$

a miből

$$\text{tang}^2 \delta = \frac{\sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \delta}$$

képlettel már tang δ is számítható. A hosszadalmas, de egyszerű helyettesítés némi összevonás után

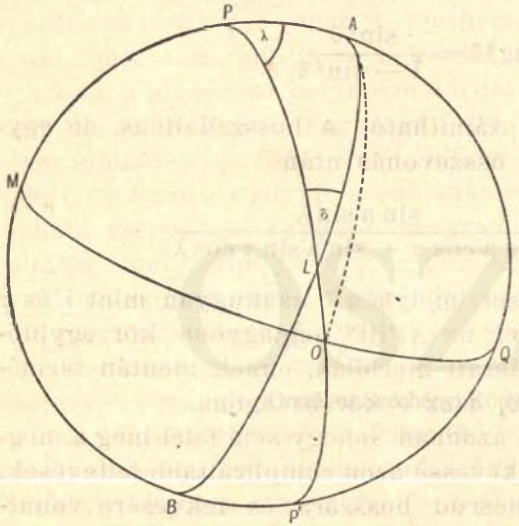
$$\text{tang } \delta = \frac{\sin a \sin \lambda}{\cos a \cos \varphi - \sin a \sin \varphi \cos \lambda}$$

egyszerű egyenlethez vezet, melyben δ csakugyan mint λ és φ függvénye szerepel. Mivel az APBP′ legnagyobb kör egyidőben mágneses és csillagászati meridián, ennek mentén természetesen a declinatió null, azaz e kör az agona.

Ez egyszerű elmélet azonban sehogy sem felel meg a megfigyeléseknek és épp oly kevéssé azon complicáltabb feltevések, melyeket Euler a mágnesrúd hosszára és fekvésére vonatkozólag tett. Tobias Mayer, Biot és Mollweide hasonló hypothezisekből indulnak ki. Hansteen pedig két különböző fekvésű és momentumú mágnest tételez fel, szintén nem sokkal jobb eredménynyel. A declinatióban az eltérés elmélet és észlelet között 30^0-ra rúg fel, az inclinatióban 13^0-ra.

Mindezen számítások világosan mutatják, hogy a Föld mágneses állapota nem olyan, mely egynéhány egyszerű mágnespálcza feltevésével magyarázható volna. Éppen úgy vagyunk itt, mint Ptolemaeus epicyclus elméletével; természetes, hogy a mágnesrudak kellő szaporításával utóbb annyi declinatiót és mágneses elemet fogunk tudni előállítani, a hány megfigyelés fölött rendelkezünk, de ez nem elmélet, mert ennek nem szabad annyi hypothezist feltételeznie, mint a hány tényt akar magyarázni.

Gauss találta meg itt is a helyes utat, a mennyiben azon nevezetes potentiálelméleti tételre támaszkodik, a mely szerint a külső térben a mágneses hatás teljesen leírható, ha a mágneses tömegek tényleges elhelyezése helyett ezeknek egy bizonyos felületi elhelyezését tételezzük fel. Vagy más szavakkal kifejezve: a Föld mágneses magaviselete az egész külső térben egészen pontosan leírható a Föld felületén eszközölt egynéhány megfigyelés alapján. Hogy az összes mágneses elemeket egy csapásra vezethessük le, a potentiált keressük, mert ebből az erőt tetszőleges irányban kapjuk, és az erőből mindhárom földmágneses elemet.



254. ábra.
A mágneses declinatió közelítő kiszámítása.

Mivel a mágnesség épp úgy, mint a tömegvonzás, a távolság négyzetének viszszás arányában ható erő, azért potentiálja ugyancsak mágneses tömegpontonként $\frac{\mu}{R}$ és így az egész Föld számára

$$V = \Sigma \frac{\mu}{R},$$

a hol az összegezés a földmágnességet okozó összes mágneses tömegekre terjesztendő ki, melyek nem szükségképen csak a Föld belsejében találhatók. Sőt mivel legalább a változások némelyike cosmikus okra utal, egész helyesen és általánosan járunk el, ha az összegezést a végtelen tér minden mágnestömegére keressük. A centrifugális erőnek itt természetesen nincs befolyása, mint a nehézségi potentiálban, mert ez csak nehéz tömegre gyakorolt erő.

A potentiál tényleges kiszámításában éppen úgy járunk el, mint ezt a 205. és 206. ábra alapján a Föld, illetőleg valamely hegy tömegvonzása számára tettük; az eltérések csak

lényegtelenek és azon különbségben rejlenek, mely nehéz és mágneses tömeg között fennáll. A coordinátarendszer kezdőpontját a Föld geometriai középpontjába helyezzük, a Z tengelyt a forgási tengelybe ejtjük, az X és Y tengely az aequatorban fekszik és pedig illetve a kezdő meridiánra és ettől 90° W. hosszúságban fekvő meridiánra mutat. A Földet ugyanis e kérdésben bátran azonosíthatjuk sphaeroiddal, sőt, mint maga Gauss is tette, gömbbel. A középpont körül leírunk azután a ponton átmenő gömbfelületet, mely a külső és belső mágneses tömegeket elválasztja. Ha egyelőre csak az utolsókra vagyunk tekintettel, akkor a kezdőponttól való távolság fogyó hatványai szerint haladó végtelen sort kapunk, melynek első tagja most is $\frac{\Sigma\mu}{r}$, a hol $\Sigma\mu$ a gömbön belül, tehát a Föld testén belül fekvő összes mágneses tömeg. Tegyük fel egyelőre, hogy a külső mágneses tömegek a belsőkhez képest elhanyagolhatók — a feltevés helytelensége magától mutatkozik abban, hogy a kiszámított potentiál a megfigyelttel nem egyezik — akkor $\Sigma\mu = 0$ okvetlenül, mert hiszen valamely mágneses testben ugyanannyi positiv mágnesség van, mint negativ.

A nehézségi potentiálban a kifejtésnek

$$\Sigma m'x' = \Sigma m'y' = \Sigma m'z' = 0 \quad \text{és} \quad \Sigma m'x'y' = \Sigma m'x'z' = \Sigma m'y'z' = 0$$

hat tagja elesett az által, hogy a coordinátakezdőpontot a Föld súlypontjába, tengelyeit pedig a főtehetetlenségi tengelyek irányába ejtettük. Ezen eljárásnak itt nem volna értelme, mert hiszen a Föld belsejében sem a mágneses súlypontot, a pólus fekvését nem ismerjük, sem pedig a mágnesség főtengelyeinek fekvését. Ha tehát ezen egyszerűsítéssel itt is akarnánk élni, akkor helymeghatározásunkat oly coordinátarendszerre vonatkoztatnók, melynek fekvését nem ismerjük, a miáltal nyilván csak hátrányokat vezetünk be a problemába. Ennélfogva a kifejtésben az $\frac{1}{r^2}$ taggal szorzott coefficiens bennmarad, és szerepet játszanak a mágneses tömegekből s két különböző coordinátából alkotott szorzatok összege is. Vagyis a mágneses potentiál teljesen ugyanazon alakkal bír, mint az oroid egyenlete, csakhogy benne nehéz tömeg helyébe mindenütt mágneses tömeg teendő. A fellépő $\Sigma m' x' = \Sigma\mu' r' \cos\beta' \cos\lambda'$ s hasonló

kifejezések itt is kiszámíthatók, ha a Föld alakját és mágneses tömegeloszlását ismernők. Ennek hiányában pedig állandókkal helyettesíthetők, melyek a Föld mágneses magaviseletét jellemzik s melyek a Föld felületén tett észlelésekből utólag számbelileg is levezethetők.

Gauss a mágneses potentiált — éppen úgy, mint mi az oroid egyenletét az $\frac{1}{r^5}$ tagig bezárólag számította; az öt tag együttvéve tehát $5^2 = 25$ ismeretlen, megfigyelésekből levezetendő állandót tartalmaz, melyek száma — mivel az első állandó $\Sigma\mu' = 0$ volt — 24-re redukálódik. 24 különböző helyen tett megfigyelésekből Gauss ezen állandók értékét kiszámítja és CGS rendszerre átszámítva, a potentiálnak következő kifejezését találja:

$$V = \frac{1}{r^2}[92{\cdot}5782\sin\beta + 8{\cdot}9024\cos\beta\cos\lambda - 17{\cdot}8744\cos\beta\sin\lambda]$$

$$+ \frac{1}{r^3}[-2{\cdot}2059(\sin^2\beta - \tfrac{1}{3}) - 1{\cdot}4123\sin\beta\cos\beta\cos\lambda$$

$$- 0{\cdot}6030\sin\beta\cos\beta\sin\lambda + 0{\cdot}0493\cos^2\beta\cos 2\lambda - 5{\cdot}1174\cos^2\beta\sin 2\lambda]$$

$$+ \frac{1}{r^4}[-1{\cdot}8868\sin\beta(\sin^2\beta - \tfrac{3}{5}) + 12{\cdot}2936\cos\beta(\sin^2\beta - \tfrac{1}{5})\cos\lambda +$$

$$+ 4{\cdot}7794\cos\beta(\sin^2\beta - \tfrac{1}{5})\sin\lambda - 7{\cdot}3193\sin\beta\cos^2\beta\cos 2\lambda -$$

$$- 2{\cdot}2766\sin\beta\cos^2\beta\sin 2\lambda + 0{\cdot}1396\cos^3\beta\cos 3\lambda - 1{\cdot}8750\cos^3\beta\sin 3\lambda]$$

$$+ \frac{1}{r^5}[-10{\cdot}8855(\sin^4\beta - \tfrac{6}{7}\sin^2\beta + \tfrac{3}{35}) +$$

$$+ 15{\cdot}2589\cos\beta(\sin^3\beta - \tfrac{3}{7}\sin\beta)\cos\lambda +$$

$$+ 6{\cdot}4112\cos\beta(\sin^3\beta - \tfrac{3}{7}\sin\beta)\sin\lambda - 4{\cdot}5791\cos^2\beta(\sin^2\beta - \tfrac{1}{7})\cos 2\lambda -$$

$$- 4{\cdot}2573\cos^2\beta(\sin^2\beta - \tfrac{1}{7})\sin 2\lambda + 1{\cdot}9774\sin\beta\cos^3\beta\cos 3\lambda -$$

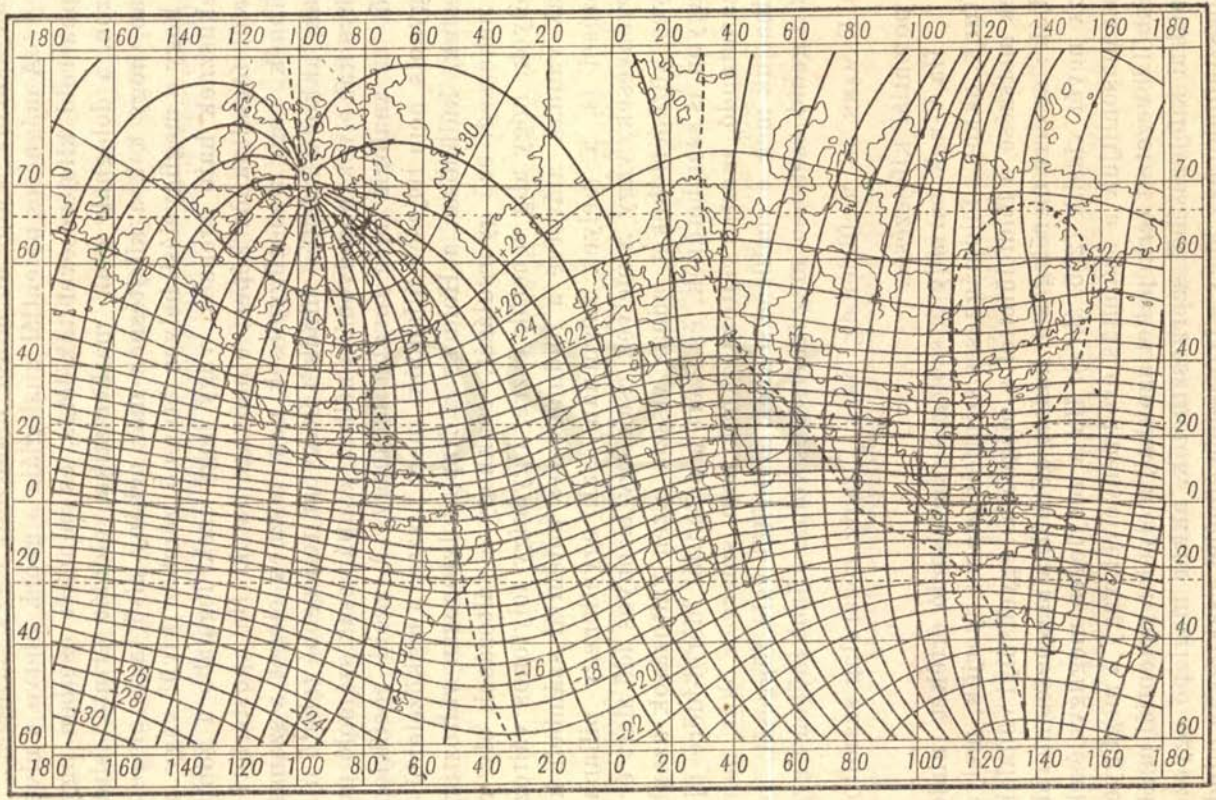
$$- 0{\cdot}0178\sin\beta\cos^3\beta\sin 3\lambda + 0{\cdot}4127\cos^4\beta\cos 4\lambda + 0{\cdot}3175\cos^4\beta\sin 4\lambda].$$

E kifejezés teljesen ugyananazon alakú, mint az oroidé, csakhogy az itt előforduló gömbfüggvényekben a zenithtávolság helyett mindig a pólustávolság $90^0 - \varphi$, az azimuth helyett a geographiai hosszúság szerepel. r jelenti mindenütt a megfigyelési helynek geocentrumos radiusvectorát a közepes földradius-

ban, mint egységben kifejezve. Ha tehát a Földet gömbalakúnak akarjuk tekinteni, akkor mindenütt $r = 1$ teendő.

A mágneses potentiál analogiája a geoid, illetve a niveausphaeroid kifejezésével tökéletes, és mindkét esetben ugyanazon, a dolognak csak mathematikai oldalát érintő feltevés van, hogy t. i. a kifejtésnek már néhány első tagja elegendő, s hogy a megfigyelési helyen átmenő gömbön kívül vagy nem feküsznek ható agensek, vagy hogy ezek legalább a gömbön belül foglaltakhoz képest elhanyagolhatók. Ha aposteriori kitünnék, hogy a megfigyelések nem tesznek eleget a számításnak, akkor a kifejtés mindkét irányban teljesebbé tehető újabb physikai elvek hozzávonása nélkül, csupán csak számoló úton. Sőt az analogia még tovább is megy. A geoid coefficiensei ugyanis nem teljesen állandók, mert hiszen a legközelebbi égitestek, különösen a Hold és a Nap, folytonosan változtatják a nehézségi erő gyorsulását, csakhogy e változások oly csekélyek, hogy alig vehetők észre. Ugyanígy folytonos változásnak vannak alávetve a földmágneses potentiál számbeli kifejezései is, a melyek szigorúan csak egyetlenegy pillanatra érvényesek, vagy a melyek csak egy bizonyos idő alatt érvényes középértékeket adnak vissza. Ezen változások azonban nagyon is szembetünők, és ezért a potentiál időről-időre újból számítandó, mert a változásoknak nem ismervén okát, nem is adhatjuk meg e coefficienseknek az időtől való függését, mint ez a geoid esetében még lehetséges volna. Újabb időben Peters és Ermann 48 coefficiensig, azaz $\frac{1}{r^7}$ tagig bezárólag számította a potentiál kifejezését.

Ha V-nek bármily tetszőleges, de állandó értéket tulajdonítunk, akkor a földmágneses szintfelületeket nyerjük, melyeknek metszése a földfelülettel a mágneses egyensúlyi vonalakat adják; az erre merőlegesen húzott görbék a mágneses meridiánok nevét viselik (255. ábra). Ha a tényleges megfigyeléseket összehasonlítjuk a számitás eredményeivel, vagy a megfigyelésekből levezetett térképeket azokkal, melyek a potentiál mathematikai kifejezéséből szerkeszthetők, akkor meglepő egyezést tapasztalunk, úgy hogy a Gauss-féle elmélet csakugyan minden pontjában helyesnek nevezhető. Ha a végtelen sort teljesen ki tudnók számítani, akkor a megegyezés természetesen tökéletes



255. ábra. A mágneses egyensúlyi- és meridián-görbék 1885 elején.

volna, így csak közelítő, valaminthogy a niveausphaeroid is csak közelítő kifejezése a geoidnak. Ezt kifejezendő, a földmágneses potentiálból valamely hely számára levezetett elemeket normálisoknak nevezzük, és a tényleges megfigyelésekhez való különbséget lokális eltérésnek tekintjük, épp úgy, mint azt a nehézség esetében tettük.

Lássuk most első sorban, miként adódnak az egyes elemek a potentiálból. Ha a földsugár mentén δr kis mennyiséggel emelkedünk, akkor a potentiál kis δV változást mutat, s az erő és potentiál közt lévő összefüggést szem előtt tartva,

$$Z = -\frac{\delta V}{\delta r}$$

lesz a sugárba eső erőcomponens. Mivel a sugár és a függélyes iránya nagyon közel összeesik, e kifejezés egyszersmind a függélyes összetevő értékéül is tekinthető. Ha a meridiánon $r\delta\varphi$ végtelen kis ívdarabbal haladunk észak felé, akkor az észak felé működő vízszintes erőösszetevő

$$X = -\frac{\delta V}{r\delta\beta}.$$

Hasonlóképen kapjuk a nyugot felé működő erőt, ha a parallel mentén $r\cos\beta d\lambda$ ívdarabbal haladunk tova nyugot felé. Ily módon

$$Y = -\frac{\delta V}{r\cos\beta\, d\lambda}.$$

Mindhárom erőcomponens tehát magából a potentiálból vezethető le, és a korábban talált összefüggés folytán:

$$I = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2};\ \operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X} \text{ és } \operatorname{tang} i = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

a földmágnesség három meghatározó eleme is adódik.

Miután a Gauss-féle elméletben semmi feltevést nem tettünk a mágneses tömegeknek eloszlása iránt a Föld belsejében, sőt e tömegeloszlást földfelületi tömegek alkalmazásával helyettesítettük, természetes, hogy visszafelé következtetést nem vonhatunk a Föld belsejének mágneses magaviseletére. Nehány fontos következtetést azonban mégis tehetünk. —

Az egyenletből levezethető, hogy a mágneses elemek a földfelület fölé való emelkedéssel nem változnak tetemesen, s az elméletnek s megfigyelés közel azonossága bizonyíték arra nézve, hogy a potentiál másik tagja, mely a távolság növekedő hatványai szerint halad, elhanyagolható. Mindkét körülmény bizonyíték arra nézve, hogy a földmágneses erő főszékhelyét a Föld belsejében, nem pedig azon kívül is kell keresni. Mert ha a Földön kívül tetemes mágneses hatású tömegek volnának, a földmágnesség oka például, mint Faraday vélte, a levegő oxygéniumában keresendő, akkor a potentiál második, teljesen elhanyagolt sora tetemes befolyást nyernè. A potentiál most a földmágnesség minden kérdésére — kivéve éppen ennek okait — felel. A

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X} = \text{const} \quad \text{és} \quad \operatorname{tang} i = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \text{const}$$

egyenletek feltevése a potentiál egyenletével együtt összefüggést ad β és λ között, kijelölvén mindazon helyeket, melyeken a declinatió, illetőleg az inclinatió ugyanaz. Ez egyenletek tehát az isogonok és isoklinok egyenletei. Ha ellenben

$$X^2 + Y^2 = H^2 = \text{const} \quad \text{és} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = I^2 = \text{const},$$

akkor az isodynamok egyenletét kapjuk a horizontális és teljes intenzitás számára. A $V = \text{const}$ és $r = 1$ egyenlet együttvéve az egyensúlyi vonalok egyenletét adja, a rá merőleges trajectoriák egyenlete a mágneses meridiánokat jellemzi. — A $\operatorname{tang} i = \infty$, azaz $H = \sqrt{X^2 + Y^2} = o$ egyenlet megszabja az úgynevezett mágneses pólusokat, melyeknek helyzete tehát kiszámítható, a nélkül, hogy ezek szomszédságában tényleges megfigyelések történtek volna. Ha végül a sor coefficienseit bizonyos időre ismerjük, akkor minden mágneses elemnek, pl. a declinatiónak egy helyen való meghatározása nyilván egyenletet ad β és λ között, úgy hogy a megfigyelési hely egyik geographiai coordinátája kiszámítható, ha a másik ismeretes. Ha végül a declinatió mellett még pl. a horizontális intenzitást, vagy az inclinatiót is határozzuk meg, akkor a megfigyelési hely geographiai fekvése teljesen tisztán mágneses megfigyelésekből vezethető le. Hogy az eljárás gyakorlati alkalmazásban nincs, annak oka, hogy csillagászati úton a hely-

meghatározás pontosabban és kényelmesebben eszközölhető, hogy a potentiál számfactorai tényleg minden pillanatra nincsenek kiszámítva, s hogy e számítás a potentiál nehézkes kifejezésével nagyon terhes.

Valamint az elméleti gyorsulásnak összehasonlítása a ténylegessel, azaz az úgynevezett helyi változások a legnagyobb érdekkel bírnak és a földkéregnek úgy geologiai, mint tektonikai szerkezetére vonatkozólag fontos következtetéseket engednek meg, úgy, és talán még nagyobb mértékben, fontosak a mágneses helyi eltérések a normális vagy elméleti értéktől. Az eddigi megfigyelések szerint ezek vagy mágneses kőzetek közelében, tehát érczbányák és vulkánikus kőzet szomszédságában, vagy fontos tektonikai vonalok mentén fordulnak elő. Az erre vonatkozó tanulmányokat Naumann Edmund („Die Erscheinungen des Erdmagnetismus in ihrer Abhängigkeit vom Bau der Erdrinde", Stuttgart, 1887.) állította össze, a ki mint a japáni topographiai és geologiai felmérésnek igazgatója, e téren sok tapasztalatot szerezhetett.

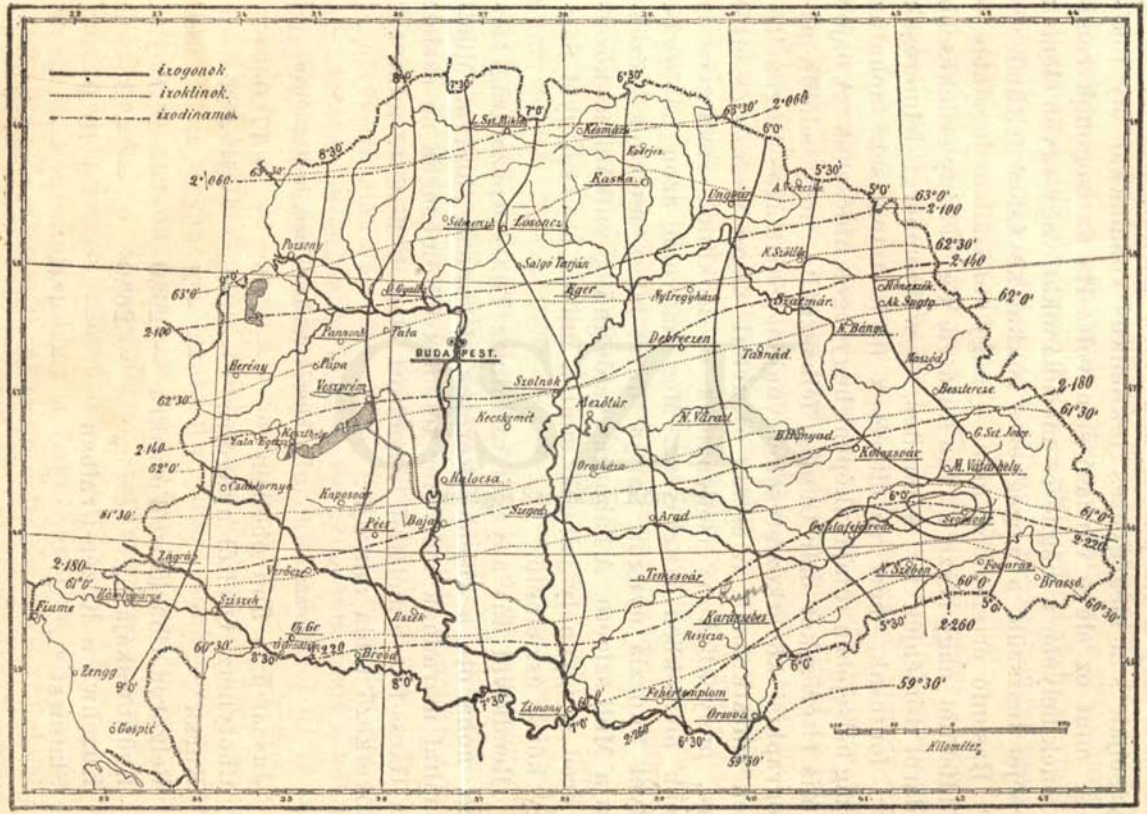
Már Kreil is észrevette 1849-ben s e tapasztalatait úgy későbbi saját, mint Lamont s mások megfigyelései megerősítették, hogy lényeges eltérés mutatkozik a mágneses elemekben, ha síkságon vagy hegységekben észlelünk. És legtöbb esetben a declinatió azon elem, mely a legfeltünőbb változást mutatja, vagy más szóval, az isogonok rendszere az, mely tektonikus vonalak által a legszembetünőbb elhajlásokat szenvedi. A dolog eléggé érthető, mert az isogonok mintegy egyetlen görberendszerben két görberendszert egyesítenek, a mennyiben a mágneses irányt a Föld egy másik fontos vonalrendszeréhez, a meridiánokhoz viszonyítva adják, holott a többi elem idegen vonatkozások által nem zavart észleleti adatokat nyujt. Azonkívül az isogonokban éppen a fontos horizontális erő nyilatkozik meg, mely egyrészt a nehézségi erőtől teljesen független, másrészt azon irányt követi, mely a geophysikában szereplő erőkre nézve egyébként is jelentős. Az isogonok tehát leginkább jellemzik a földfelület és ennek közvetlen szomszédságának tektonikáját, az inclinatió és a vertikális összetevő legalább idővel tán a Föld belsejének tektonikáját tárja fel.

Az isogonoknak rendhagyó menetére klassikus példa Japán. A szigetek a nyugoti declinatióval bíró isogonok egy

zárt görberendszerébe esnek, s ezek menete egészen szigorúan simul a hegyek hajlásához. Ezt különösen az 5° W isogona mutatja a Fossa magna körül; az árok körül a hegység élesen kanyarodik és az isogona híven követi a hegység menetét, nyilván azért is oly feltünően, mert a hegység vele párhuzamosan fekszik. Az Alpokban fedezték fel legelőször ezen befolyást, noha az ott, a két iránynak merőleges volta miatt, sokkal kevésbbé érezhető.

Nagyon feltünők ismét ez eltérések Erdélyben. Míg úgyanis a háborgások az Alpokban nagyon bonyodalmas menetűek, addig a Kárpátokban, különösen azok délkeleti, sőt dél felé való áthajlása miatt a viszonyok kedvezőbbek, mert itt is párhuzamosság lép fel a hegység és az isogonok általános iránya között. A Kreil-féle első észleletek alapján rajzolta Schenzl Guidó az 1850-re redukált megfigyelések térképét, melyekben különösen a 3° 40′ W isogona párhuzamos menete a Kárpátokkal szembeötlő. Ezen isogona Fogarasnál megfordul és nyugot felé egészen Fehérvárig húzódik. Még szorosabban simul az erdélyi hegységek vonulatához a 10° 0′ W isogona, mely Erdély hegyövezte kerületének megfelelőleg valóban hurkot képez; a csomó Felvincz és Kolozsvár közé esik, középpontja Marosvásárhelyhez fekszik közel. A Kreil-féle megfigyelések csak 8 állomásra vonatkoztak, Schenzl ellenben 1877-ben ugyane viszonyokat 26 állomáson vizsgálta meg és a Kreil-évei teljesen egyező menetet kapott. (Schenzl Guidó, „Az isogonok rendhagyó menetéről Magyarország erdélyi részeiben“. Ért. a termtud. kör. Budapest, 1877.) Az egyetlen külömbség természetesen az, hogy a saeculáris változások miatt más isogonok azok, melyek Erdélybe esvén, hurokképződéshez jutnak. 1850-ben a 9° 20′ W isogona a Kárpátok keleti szélén haladt el, 1875-ben már Budapestig vándorolt és a síkságnak megfelelőleg természetesen a normálishoz közelebb fekvő irányt vett fel. A 256. ábra, mely Kurländer Ignácznak a Magy. Tud. Akadémia megbízásából végzett megfigyeléseit mutatja be, az 5° 30′-es és 6°-os isogonán ugyanazon hurokképződést tünteti fel.

Még érdekesebbé válik ezen hurokképződés, ha a szomszédos geologiai viszonyokat is tekintetbe veszszük. A neogen lerakódásokkal kibélelt medencze kellő közepére esik a hurok;



256. ábra. Magyarország földmágnességi elemei 1895. év elején.

nyugoti oldalán felépül az erdélyi érczhegység, mely tudvalevőleg a Kárpátokkal párhuzamos lánczot alkot. Az isogonok rendszerét úgy a Kárpátok, mint ezen párhuzamos láncz befolyásolják s a megegyezés tektonikus vonalakkal oly tökéletes, mint ez eleve várható sem volt. Ha az isogonok rendszerének helyébe a mágneses meridiánokat, vagy egyéb elemek görbéjét teszszük, a megegyezés sokkal kevésbbé feltünő.

Hasonló értelemben már — nagy vonásaiban legalább — a földfelület nagy része át van kutatva. Egynéhány érdekesebb példáról történjék itt is említés. A würtembergi felmérések azért fontosak, mert az eltérések itt is tetemesek, noha az ország belsejében tulajdonképeni hegységek nincsenek. A bajor lokális eltéréseket már Gümbel felhasználta, hogy belőlük palaeographiai következtetéseket vonjon. Sajátságos isogoneltérések mutatkoznak az északi és keleti tenger mentén és ettől délre, melyekben az isodynamok és isoklinok rendszere is kisebb mértékben részt vesz. Még nagyobb azon háborgás, melyet Skóczia nyugoti partja tüntet fel, s melynek középpontja Mull szigete. A háborgás valószinűleg vulkánikus kőzettől ered s ugyanoly jellegű, mint a milyen a vasmegyei Sághegy körül észlelhető.

Rendkívül dús anyagot tartalmaz Tillo oroszországi térképe, noha ott a kisebb eltérések el vannak simítva. Mindazonáltal maradnak még elég tetemes különbségek az észlelt és a Gauss-féle elméletből számított elemek között, mint ezt a következő tábla mutatja:

Állomás	Eltérés declinatióban,	inclinatióban
Jussar-ő, a finn öbölben	+ 15°.8	+ 17°.0
Chotynetz, Oreltől nyugotra	— 10°.6	+ 4°.3
Kursk	+ 4°.1	—
Belgorod, Charkowtól északra	— 29°.0	— 2°.5
Krükowskája „ „	— 26°.9	— 4°.3
Kuschwa a Közép-Uralban	—	+ 10°.0
Slatowst „ „ „	— 4°.0	—

Tehát a sík földön, szemre nézve egyszerű tektonikus talajon is hatalmas háborgások fordulnak elő, melyeknek okai bizonyára mélyen a Földben honolnak. Ugyanott Schweizer

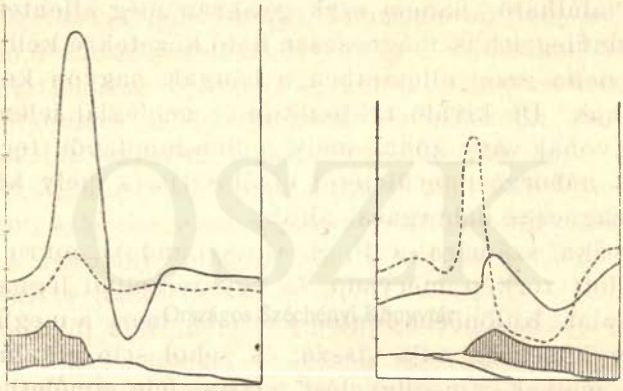
ingamérései szerint tetemes anomáliák mutatkoznak a nehézségi erőben is, melyekből tekintélyes földalatti üregekre vagy legalább tömegfogyatkozásokra kell következtetni. Van-e e kétfajú eltérés között összefüggés, és milyennemű az, erre ma még feleletet nem adhatunk. Orel, Kursk és a két Charkow melletti állomás ugyanazon NNW — SSE irányban húzó vonalba esnek, és épp oly érdekes az Ural és a Fekete-tenger nyugoti és északnyugoti partjain fekvő háborgási terület.

Legérdekesebb azonban a Finn-öböl mágneses szabálytalansága, mely már sok hajónak vesztét is okozta; éppen ezért már a század elején határozták meg Jussar-ő mellett vagy 100 helyen a mágneses declinatiót. Itt nemcsak számos mágnespólus található, hanem ezek gyakran még ellentett jelűek is. Valószinűleg itt is mágnesesen ható kőzetekre kell hárítani az okot, noha ezzel ellentétben a bányák nagyon kevés vasérczet adnak. De kiváló tektonikus és geologiai jelentőséggel bír azon vonal vagy zóna, mely a finn-lapplandi területet a déli vidék háborgási területétől elválasztja, s mely különösen kiválik mágneses háborgásai által.

Amerika számára a U. S. Coast and Geodetic Survey által kiadott térkép mérvadó, és egyszersmind legnagyobb e nemű vállalat. Különösen fontos azért is, mert a megfigyeléseket teljes hűségben adja vissza, és sehol sem alkalmaz correctiókat, melyek a megfigyelést a Gauss-féle elmélethez közelíteni iparkodnának. — Észak-Amerika isogonjai rendkívül szabálytalan alakulást mutatnak; két nagy és széles háborgási öv különböztethető meg keleten és nyugoton, mely a két legnagyobb hegységnek felel meg. Hurokképződéssel itt is találkozunk: a 7° 30′ isogona a Salemtől keletre fekvő 202 m-rel a sík fölé emelkedő Pilot Knob erupcziós fészke körül csavarodik. Locke ugyancsak északi Amerikára vonatkozó mágneses felvételei nagyon fontosak, mert eredeti módon kapcsolatba hozza ezeket a talaj geologiai szerkezetével. Ezenkívül felkereste a legnagyobb intenzitás pontját is +52° 19′ szélesség alatt, és konstatálta, hogy a Lake Superior déli partjain az inclinatió helyenként alig 150 m. távolságokban is 1°-kal változik.

Fölötte érdekes szemléltető módszere van Locke-nak a mágneses jelenségek és geologiai szerkezet vonatkozásainak ábrázolására. Az inclinatió és intenzitás számára görbéket

szerkeszt, melyek ordinátái a mondott két elem értéke, abscissája a horizontális távolság, mely felett ez értékek észleltettek; ebbe Locke az állomások geologiai átmetszetét is rajzolja be. „Ezen vonalak legfeltünőbb magaviselete, úgymond Locke, abban áll, hogy alakjuk, a mint látszik, az átszelt vidék geologiai minősége által meghatározott.“ Horizontálisan rétegezett sedimentaer kőzetek fölött a görbe egyneműen halad, inversió nélkül, de eruptiv kőzetek fölött igen erős hullámokat vet. Annyi bizonyos, hogy az egymásra következő kőzetek általános természete a mágneses elemekből megállapítható, és ez értelemben a mágneses műszerek a mesebeli varázspálcá-



257. ábra. Mágneses helyi variatiók a Hudson Pallisadok és New-Jersey fölött.

hoz hasonlíthatók, tán érzékenység dolgában még jogosabban, mint a nehézségi variometerek. Továbbá kimutatható, hogy ott, hol az inclinatió hirtelenül és abnormisan nő, ott a totális intenzitás megfelelő fogyást mutat és fordítva.

A 257. ábrában rajzolt görbék hatalmas triasz periodusbeli új vörös homokkőbe ágyazott dioritoszlopok fölött vonulnak el. De nem e pallisadok a szabálytalanság okai, hanem ezeknek megfelelő vetődési hasadás, mivel kőzetmágnességről, melyre Locke különösen ügyelt, nem lehet szó. Sajnos, hogy ezen kutatások óta ezen irányban mi új lépés sem történt.

Ázsiában is legnagyobb érdekkel bírnak a vulkánikus vidékek, különösen Japán és Jáva, és a hátsó-indiai archipelagus. A tengeren haladó isogonok a szigetek előtt tömörülnek,

mintha csak a szárazföld az isogonvonalakra valamelyes coercitiv erőt gyakorolna. Noha e szigetek geologiai viszonyai nem eléggé ismeretesek még, mégis mindenütt tisztán látni, hogy az isogonok e földrészben is mindenütt nagyszabású tektonikus vezérvonalakkal haladnak együtt.

Ausztráliában nagyon feltünő azon háborgás, melyet a Melbourne közelében felhalmozott régibb eruptivkőzet gyakorol. A Sandwich-szigeteken ugyanez okoknál fogva szintén elég tetemes eltérések észlelhetők. De talán sehol sem oly mértékben, mint Uj-Seelandon, a hol egy domb tetején a declinatió normális értéke 16° 20′ E, holott a megfigyelés 6° 54′ E declinatiót ad. 10 m.-nél kisebb távolságra északra a declinatió 9° 36′ W, ugyanily távolságban nyugotra és keletre a declinatió illetve 5° 4′ E és 46° 44′ E. Épp oly nagy eltérések mutatkoznak Island szigetén is; e befolyás általában véve 5—6, helyenként azonban 20—30 tengeri mérföldig is észlelhető.

Már Humboldt is sejtette, hogy a mágneses hatások és a geologiai faktorok között valamelyes összefüggés áll fönn, de még nem látja be a vonatkozás mineműségét. Hogy is állhat kapcsolatban a folytonosan változó mágneses görberendszer az állandó jellegű hegylánczolatokkal? Oly kérdés, melyre megfelelni még máig sem tudunk.

Régebben szükségesnek tartották, hogy hegymágnesség és kőzetmágnesség között külömbséget tegyenek; az első befolyásolta a mágneses méréseket általában, az utóbbi csak igen szűk térre szorítkozó helyi zavarokat idéz elő. De az eddigiekből is látszik, hogy legalább az első elnevezés teljesen fölösleges, a mennyiben ez a Föld általános mágnességétől el nem választható.

A kőzetmágnességre ellenben nagy gondot kell fordítani, ha méréseinket nagyobb terület méréseibe be akarjuk illeszteni, mert csakugyan idegen elemet hoz be, melynek a Föld általános mágneses magaviseletéhez köze nincs. Leginkább hatnak: serpentin, granit, syenit, porphyr, diorit, trachyt, andesyt, bazalt stb., de általában minden kőzet, s különösen a vulkánikus kőzetek. Figyelemre méltó továbbá, hogy a mágneses érczek másképen hatnak a Föld méhében, mint a felületen: ott alig van hatásuk, emitt e hatás tekintélyesen nagy, mintha csak az elmállásnál előforduló vegyi folyamok szük-

ségesek volnának a fokozottabb mágneses hatás keltésére. Kreil például Eisenerzben, a legkiadóbb bányában sem kapott nagyobb intenzitáseltéréseket, mint a minőket észlelési hibákból is magyarázhatott ki.

Sajátságos, hogy mindenütt, a hol nagy mágneses zavarok mutatkoznak, vasérczeket keresnek, és ezen gyakorlati czél ellenére sem tudunk sokat a két tényező viszonyáról. Ha mágnestűvel vasat keresünk, akkor ez eljárás mindenesetre csak akkor vezethet sikerhez, ha a megfigyelést a tágabb környezet pontos mágneses felvétele kiséri. Amerikában már régen így járnak el és New-Jersey mágnesércz bányáinak nagy részét az inclinatorium segítségével keresték.

Bármily szegényesek is a kőzetmágnességre vonatkozó ezen megfigyelések, annyi biztos, hogy a kőzetmágnesség a Föld felületéhez kötött jelenség. Ez már abból is következik, hogy egyes darabokon sokféle és teljesen szabálytalanul eloszlott pólusokat találunk, miért is tetemesebb távolhatások nem várhatók. Ezt már Lamont is tudta, kimondván, hogy a földkéreg nem tartalmaz kiterjedt hatáskörű mágneses anyagokat, hogy ennélfogva a mágneses görbék hajlásai a Föld magvának szabálytalan mélyedéseinek és emelkedéseinek tudhatók be, azaz, hogy a mágneses térképek a földmag felületét jellemzik. Hogy Lamont e tétele nem oly képtelen, azt legjobban mutatják Japán, Jáva, a Pilot Knob s hasonlók példája; vagy nem emelkedése-e az eruptiv közet a Föld magvának?

A Gauss-féle elméletnek egyik legszebb következtetése, hogy a földmágnesség székhelye a Föld belsejében keresendő; a mágneses anomáliák tehát a mélységbe vezetnek általában és a mágnestűben érütését észleljük egy előttünk még ismeretlen életnek, melyet talán csak úgy közelíthetünk meg, ha ezentúl a mágneses felvételeket mindig geologiai kutatásokkal együtt eszközöljük.

VIII. FEJEZET.

A földmágnesség magyarázata.

A földmágnesség és kisérő jelenségeinek oki magyarázata már kívüle esik a mathematikai földrajznak, mely csak a tünemények leírását köteles adni, de teljesség szempontjából nem mellőzzük ezt sem.

Minden nép meséjében szerepelnek mágneses tömegek, melyek a mondottak folytán ugyan nem attractive, hanem csak irányítólag hatnak. Az ezekbe vetett hit oly erős volt, hogy Ptolomaeus is szükségesnek tartotta ezek helyzetének meghatározását; szerinte Taprobane sziget közelében találhatók. Ily tömegek tényleg vannak; mellőzve az előbbi fejezetben mondottakat, gondoljunk csak Magnesia városára és az újabban Lapplandban Luleå-ban talált óriási méretű mágnes vasérczhegyre. A hóvíz üledékében is fordulnak elő apró vasgömböcskék gyenge mágneses hatással, és Nordenskiöld és Tissandier az északi hómezőkön található mágnesgömböcskéket kosmikus eredetűnek ismerik fel. Fracastor és Normann tehát a declinatiótűt irányító pontot a Földbe helyezte, és ugyanígy járt el Gilbert és Galilei, a kik a Földet valóságos mágnesnek tekintették. Columbus, Paracelsus és Cortez azonban azt hitték, hogy a mágneses pólus az égen van, közel a világpólus szomszédságában. Igen eredeti felfogása van Halleynak, melyet sokkal később Steinhäuser német physikus menteni és felújítani iparkodik. Eszerint a Föld kérge által bezárt üregben egy intratellurikus mag forog, egy valóságos belső bolygó, melynek a Föld kérgéhez való különböző állásából keletkeznek a mágneses ingadozások; a tengelyforgás ideje mintegy 440 évet venne igénybe. Ugyanezen hypothezis már a Gauss-féle elmélet után is felelevenedett még egyszer. Ha a belső magot az újabb felfogás értelmében a felületi sebességnek csak $\frac{1}{600}$-ával kisebb sebességgel forgatnók, ez Raulin szerint már elegendő volna az eddig megfigyelt saeculáris változás magyarázatára.

Ismeretes physikai törvényekre támaszkodnak a következő feltevések:

Ampére szerint a Földet számtalan elemi elektromos áram futja körül, a melyek a mágnességen kívül egyszersmind a Föld belső melegét is adnák. E hozzátevés nélkül az Ampére-féle nézet meglehetős általánosan elfogadott, de az ismeretlen ok most az áramok okára van áthárítva.

Wettstein és Gringmuth szerint a Föld egyes részei különböző szögsebességgel mozognak — különösen állna ez a Föld belsejét tevő gázmagra — a mi által elektromos áramok keletkezhetnek.

Perry és Ayrton a Földet statikai elektromossággal megtöltöttnek gondolja, mely természetesen csak a felületre oszlik el. Ha statikai elektromossággal megtöltött vezetőt mozgatunk, akkor az elektromosság az áramló elektromosság minden sajátságát mutatja, mint ezt Rowland-nak Helmholtz laboratoriumában eszközölt kisérletei mutatják. A reciprocitás elve folytán ugyanis mechanikailag tovavitt elektromosság éppen úgy viselkedik, mint áramló elektromosság. A Föld forgása következtében az E mennyiségű statikai elektromosság tehát elektromágneses hatást nyer, melynek potentiálja $\frac{2}{3}\omega E\frac{\sin\varphi}{\rho}$, a hol ω a forgás szögsebessége és φ a hely geographiai szélessége, míg ρ annak vezérsugara. Ezen felfogás esetleg a Gauss-féle elméletnek mélyítésére is szolgálhat, különben ismét találkozunk vele Siemens neve alatt is.

Faraday a földmágnesség székhelyét a légkör oxygéniumában látja, Parker mágnességet és gravitatiót egyesít, de kosmikus faktoroknak is enged befolyást, és Skalweit a variatiókat csak mágneses faktorokra szeretné visszavezetni.

Kissé magasabb tudományos szinvonalon állanak azon hypothezisek, melyek a földi áramokból indulnak ki. Lamont szerint a Nap s a bolygók állandó elektromos töltéssel bírnak, melyek a Föld elektromosságára tengerjárásforma hatással lehet. A földi áramok ugyanazon kutató szerint a földfelületi statikai elektromosságnak kiegyenlítődése, a miből azon tény is magyarázható, hogy villámcsapások a közelben ez áramokat mindig erősítik.

Zöllner a Nap felületén észlelhető és a Föld belsejében meglévő áramlásokat fekteti alapul. Ez anyagátvitelek vagy driftáramlások elektromos áramokat, az úgynevezett convectió-

áramokat, váltják ki. Ha ugyanis két egyenlő anyagú lemezt valamely folyó gyorsabban és lassabban folyó vizébe mártunk s ezeket vezetőleg összekötjük, akkor tisztán az áramlás miatt. eltekintve minden chémiai hatástól is, elektromosságot kapunk, melynek iránya túlnyomóan a folyadék áramlásirányába esik. A Föld felületén, még pedig annak északi félgömbjén, a felső passát ily folyadékáramlás, mely déltől nyugotra tartó áramot létesít; a Föld belsejében ennek következtében az áram körútja észak-kelet irányban bezárul, s ezen belső áram az, melyre a földmágnesség visszavezethető. Egy támpont már az is, hogy a Gauss-féle elmélet értelmében a mágnesség székhelye főleg a Föld belsejében keresendő. A belső áramlás lassú változása, mely számára még elmélettel nem szolgál a tudomány, a saeculáris változás oka lehetne. Támogatja e hypothezist azon körülmény is, hogy az isoklinok, isodynamok és egyensúlyi görbék mind az erősen nyugot felé eltérített tengeri vagy légköri aequatoráramlatok jellegével bírnak.

Zöllner-rel egyidőben beszél ily felfogásról Menzer is, sőt ő a szárazföldek configuratiójából meg is határozza a földi áramnak mindenkori irányát, s ez alapon meghatározza a Föld mágneses északi pólusát; ez Menzer szerint 289° 37′ 28″.5 E ferrói hosszúság és + 69° 11′ 53″.8 szélesség alatt fekszik, míg Hansteen ugyanezen számokat 290° 21′ és + 69° 30′-ben állapítja meg. A megegyezés mindenesetre feltünő nagy. Ezen felfogásból igen egyszerűen adódik azután az összefüggés mágneses háborgás és földrengés vagy vulkánikus kitörés között, különösen pedig az is, hogy a háborgások a napi variatiókat erősítik, és adódik e háborgások tovaterjedési módja parallel- és meridiánkör mentén. Továbbá azonban nagyon érthetővé teszi azon összefüggést is, mely a mágneses görberendszer és a földkéreg tektonikus szerkezete között fennáll. Minden tektonikus vonal természetszerűen eltéríti a földi áramokat. a mi nem maradhat látható mágneses hatás nélkül a földfelületen.

De ez elmélet még többet is tesz, a mennyiben a szükséges kosmikus okokat is ugyanezen alapon hozza be. A Nap ugyanis ugyanazon oknál fogva mágneses test; ha ugyanis a folyadék a Napon éppen úgy viselkedik, mint a Földön, akkor a Nap és a Föld mágneses pólusai ellentétesen fekvők. A Nap ugyanis nem bír még, mint a Föld szilárd kéreggel, tehát más

irányú áramlás jön létre, míg a tengelyforgás iránya mindkét égi testnél ugyanaz. A Napon tehát a Földével megfelelő helyen negativ pólus jön létre, ha a Földön positiv pólussal van dolgunk. Egészen általánosan mondhatjuk tehát, hogy minden tengelyforgással bíró égi test mágneses pólusokkal bír, melyek az árameltérítés miatt nem esnek össze a forgás pólusaival. A hűlés folyamán a polárosság jelváltást mutat, úgy hogy izzó folyós világtest polárossága ellentétese a már elkérgesedettnek. A mágnesség elenyészik kétszer: a jelváltás idejében, tehát a változó csillagok állapotában és a teljes megszilárdulás után, ha ugyan esetlegesen mágneses érczek jelenlétét nem tételezzük fel.

A napfoltmaximum alkalmával az áramlások kimutathatólag sebesebbek és több surlódással is járnak, a belőlük keletkező convectióáramok erősebbek és a Nap mágnessége is az. Így tehát a kapcsolat a foltok számával és a mágneses variatiókkal megvan, sőt ugyanazon okra van visszavezetve, melyre a földmágnességet egyáltalában fektettük. Az északi fény szintén kapcsolatba hozható így a napfoltok gyakoriságának periodusával, ha ezt mágneses inductió által magyarázzuk. Ez érthetővé teszi azon már említett körülményt is, hogy Hornstein a tű variatiójából képes volt levezetni a Nap tengelyforgását.

E hypothezis, mely lényegbe nem vágó módozatokkal tekintélyes elterjedésnek örvend, kissé más alakban Siemens Werner-nél is előfordul, a ki ily módon a Nap mágnességét William fivérének a Nap energiájának megmaradása elméletével kapcsolja össze. A Nap forgási tengelye mentén — a hol csak tömegvonzó erő van, de centrifugális erő nincs — a világürből behatolnak az ott lebegő dissociált anyagok. A bejutott anyag sürűsödik, elég, és a pólusoktól az aequator felé nyomul; eközben surlódik a forgó Nap testéhez, elektromossá válik és az aequatori centrifugális erő által ismét a térbe szóródik. Innen a Nap magas elektromos potentiálja, melynek feltételezését az üstökösök jelenségei is teszik szükségessé. A földmágnesség eszerint tehát talán nem más, mint elektrodynamikai következménye a Föld elektromos töltésének és tengelyforgásának a Nap befolyása alatt. A Nap influáló hatása természetesen nagyobb a Nap felé fordult oldalán és leginkább

a cseppfolyó izzó, tehát jól vezető földalatti tömegek felületén található. Ugyanezt állította más szavakkal — mint láttuk — Lamont is, és innen érthető a Nap okozta napi variatió is teljesen. Miután Kreil megfigyelései szerint a Hold is hasonló hatással bír, a felhozott okok minden valószinűség szerint ő reá is vonatkoznak.

E helyen czélszerűnek tartom megemlíteni, hogy pulkowai megfigyelések szerint az egyes bolygók mágneses befolyását is sikerült kimutatni a mágnestűre.

Az északi fényre vonatkozólag is számos hypothezisünk van, a melyekből természetesen eleve is kizárandó minden, a mi a mágnestűre való hatást figyelmen kívül hagy. Az északi fény is, miként a mágnesség, általános kosmikus jelenség, és azon phosphoreskáló fény, mely a Vénus-bolygó sötét oldalán látszik az alsó conjunctió ideje körül, újabb vizsgálódások szerint minden valószinűséggel északi fénynyel azonosítható. Ezen gondolatnak már Kant is adott kifejezést, midőn mondja, hogy a Földnek van egy jelensége, mely az üstökösök csóvájának kiterjedésével azonosítható, t. i. az északi fény. Ebben legalább implicite a tünemény elektromos volta már kifejezést talál.

Halley és utána Celsius állította először, hogy az északi fény mágneses jelenség: Ussher felfedezte a vonatkozást a sarki fény egyes részei és a mágneses erő között, hogy a fényív a mágneses meridiánban terjed, a korona a mágneses zenith körül képződik s sugarai az inclinatiótűvel párhuzamosak. Humboldt meg éppen odáig ment, hogy az északi fényt és a mágneses zivatart egymástól elkülöníthetetlennek tartotta. Elektromos természetére Arago következtetett azon tapasztalatból, hogy a sarki fény a táviratozást gátolja, még pedig legjobban a mágneses meridiánra merőleges vezetékekben. A zivatarok napi periodusa azonban független a sarki fényétől; az évi periodusok úgy vágnak össze, hogy az egyik jelenség maximuma a másik minimumának felel meg.

Halley felfogásában a földmágnességet gerjesztő intratellurikus bolygó mágneses folyadéka kisugárzik a póluson. Canton az elektromos tojással való analogiából indul ki, Priestley, Lichtenberg és Franklin a póluson felhalmozott elektromosság lassú kiegyenlítődésére gondolnak. De la Rive hypothezise szerint a felső passat positiv elektromosságot

visz a negativ töltésű poláris levegőréteghez, s ezen gondolat alapján sikerült neki mesterséges északi fényt is létesíteni, sőt annak koronáját és mozgását is utánozni. Hogy a sarki fényben szereplő elektromosság forrása a passát surlódása, azt Mayer Róbert, Secchi és Kelley is gondolták s Fritz szerint ennek s a zivatar elektromosságának egy és ugyanazon forrása van.

Elektromágneses vagy áramló elektromossággal operáló feltevések a következők: Muncke szerint a Föld nagy thermoelemnek tekinthető, melyre a Nap melege hatást gyakorol. Faraday felfedezését az unipoláris inductióra vonatkozólag Edlund használta föl Weber egy kisérlete alapján: ha ugyanis valamely mágnest gyorsan forgatunk tengelye körül, akkor pólusa és aequatora között elektromos áram keletkezik, melynek iránya a forgás irányától függ. A Föld tényleg ily forgó mágnes, melyet jól vezető kéreg, és alsó rétegeiben rosszul, felső rétegeiben ellenben igen jól vezető levegő borít. A positiv elektromosság a magasba száll, s az emelkedés erélye legnagyobb az aequator alatt, elenyésző a póluson. Tehát ismét a de la Rive-féle elmélethez állunk közel, persze most egészen más alapon. Alacsony szélességek alatt a kiegyenlítődés mindig szikra alakjában, zivatar útján történik, s ezért a zivatart aequatorfénynek is lehetne nevezni. De minél kedvezőbb a lassú kiegyenlítődés feltétele, annál inkább közeledik a jelenség a Geissler-féle csőben észlelhető fénytüneményhez. Közepes szélességek alatt a kisülés mindkét alakja előfordulhat, mint zivatar és mint Szt.-Ilona tüze. A sarki fény maximális övének fekvése az elméletben természetesen a mágnes pólus helyzetétől függ, és ez nagyjában véve Lemström és Tromholt nézete is, ki a földi áramokat is természetszerűen most már unipoláris inductióra vezeti vissza.

Látnivaló tehát, hogy a lényegesebb hypothezisekben az egyetlen külömbség csak az elektromosság keltésének módjában áll. Egészen eredeti és tisztán kosmikus hypothezist dolgozott ki Baumhauer, Ohnstedt és Töpler. Csillagászati okokból és Nordenskiöld egyenes megfigyelései alapján fel kell tételeznünk, hogy az egész bolygórendszer üre úgynevezett kosmikus porral van megtöltve, melynek sürűségét is sikerült meghatározni, s mely határozottan mágneses tulajdonságok-

kal bír. A vasmeteorrészecskék természetesen a mágneses pólus felé vonzatnak, és mivel a forgási tengely mentén eltávolító centrifugális erő nincs, a vonzás tehát egészen a végtelenségig háborítatlanul terjedhet, a részecskék e tengely szomszédságában a Föld felületére lejuthatnak. A gyors esés közben természetesen izzóvá válnak, mint a Földre lehulló hullócsillagok is. Ha az erőket ismerjük, kiszámíthatjuk azon tölcséralakú nyilás helyét és alakját is, mely a mágnesrészecskére ható erők egyensúlyi felületén marad, s mely a Nordenskiöld-féle pont körül nyiló parabolikus tölcsérrel azonosítható. Ha ezen át az izzó mágneses meteorrészecskék beáramlanak, s a beáramlás éppen az erők működése folytán csak a két pólus körül lehetséges, akkor a megfigyelő helyzete szerint más és más lesz a kép, melyben a tünemény észlelhető, és tényleg előállíthatók ily módon azon főbb alakok, melyeket a sarki fény ölt. Förster az elektromos hypothezisek megtartása mellett ezen feltevésnek is enged tért, s szabatosan kifejezve tehát a sarki fényt eredetileg terrestrikus jelenségnek mondhatjuk, melyre kosmikus okok is gyakorolnak befolyást.

Mesterséges északi fény előállításában Lemström még sokkal nagyobb sikereket ért el, mint de la Rive. Miután többször azt tapasztalta, hogy sarki fény hegyormok felett a felhőtakarón innen is képződik, kisérletileg oly erős intenzitású feszültségeket iparkodott létrehozni, melyeket lassú kisülések maguktól is követnek. Az északi Finnország két, 800 és 1100 m. magas hegyén, melynek háta magas plateaut képez, volt a kisérleti állomás, melyen többszáz, félméter távolságban egymástól vertikálisan állított fémrúd alkalmaztatott. Ezek egy a föld szine felett 2 m. magasan kifeszített sodronyhálóra voltak erősítve, mely fémsodrony segítségével a villámhárítók módjára a Földbe le volt vezetve. Az egész berendezés tehát nem egyéb, mint nagymérvű villámhárító rendszer. Ha a drótháló vezető összeköttetésbe hozták a földdel, folytonos, változó erejű áramok voltak észlelhetők, s az elektroskop a föld felé áramló positiv elektromosságot árult el. A Szent-Ilona tüzéhez hasonló nagy terjedelmű fényjelenség keletkezett, mely a sarki fény jellemző spektrumvonalait is mutatta. Lemström és Tromholt újabb kisérletei hasonló sikerrel jártak.

VI. SZAKASZ.

A FÖLD ÉS ÉGGÖMB ÁBRÁZOLÁSA.

I. FEJEZET.

A vetületek általános tulajdonságai.

Minden helymeghatározás eredménye utolsó elemzésben egynehány coordinátaérték számbeli adata, sőt a Föld alakjának legpontosabb meghatározását egy teljes coordinátajegyzék felállításában állapítottuk meg. Természetesen ezen eljárás, bármily tökéletes legyen is, nagyon kevéssé szól szemlélő képességünkhez, sőt még az analytikailag adott kifejezéseket is gyakran a könnyebb áttekintés kedvéért rajzban is állítjuk elő. A Föld alakjának legszabatosabb alakmeghatározása sem ment fel tehát azon kötelesség alól, hogy a Földet egyszersmind ne rajzoljuk is, valamint hogy a legtökéletesebb csillagkatalogus is úgy adja valóban világos képét a csillagos égnek, ha térképpel együtt tanulmányozzuk. Ehhez járul még, hogy puszta, bármily teljes coordinátajegyzékkel igen sok szükséges geographiai számolást csak óriási fáradság révén tudnánk végezni, holott mechanikai eszközökkel, térkép segítségével a feladat megoldása rendkívül könnyű és egyszerű. Sőt mondhatjuk: valamint minden analytikai számítás rajzzal pótolható, úgy a geographust érdeklő minden számítás a Föld s az ég térképén elvégezhető, tisztán mechanikai vagy graphikai úton. A mi nem zárja ki természetesen azt, hogy egyik vagy másik művelet közvetlenül való keresztülvitele mégis csak nem egyszerűbb, mint térképpel való közvetett megoldása.

A térképrajzolás legközvetlenebb módja mindenesetre az volna, hogy a Föld felületén látható vonalrendszereket, tehát folyamokat, hegygerinczeket, vagy a szárazulatok partvonalait papirra vetjük. Ezen eljárásnak azonban kettős hátránya volna: a lerajzolt térkép mindig igen speciális jellegű maradna, s az említett vonalak geometriai szabálytalansága folytán a vetítés törvénye élesen és könnyen áttekinthetőleg soha sem fejeződnék ki. Ezért inkább közvetett módszert használunk, s a Földön tényleg meglevő vonalrendszer helyett azon képzelt vonalsereget rajzoljuk le, melylyel a Földön a helymeghatározást eszközöljük, azaz lerajzoljuk a Földet borító coordinátarendszert, a parallel- és meridiánkörök összeségét. Ezáltal a síkban is a helymeghatározásra alkalmas coordinátahálózatot nyertünk, melybe minden tetszőleges pont geographiai fekvése szerint interpolatióval könnyen berajzolható. Ily módon rajzunk mindjárt azon előnynyel is jár, hogy benne a helymeghatározás éppen oly könnyen eszközölhető, mint magán a Földön.

Lássuk most mindenekelőtt, hogy a Föld mily alakjából kell kiindulnunk, hogy a lehető leghívebb képet kapjuk, de azért túlzott pontossággal ne dolgozzunk. Bizonyos kérdésekben mindenesetre teljesen elegendő, ha a Földet tökéletes gömbnek tekintjük, mint ez a térképek túlnyomó számában történt is. Minél speciálisabb azonban a térkép, annál inkább észrevehető már a gömbalaktól való eltérés. Felvetjük tehát a következő kérdéseket: Mily méretű térképeken hanyagolható el a Földnek gömbi eltérése, és mily méretek mellett jön már tekintetbe a sphaeroid és niveausphaeroid különbsége is?

A közepes földsugárral bíró földgömb egy fokának hossza

$$g = \frac{\pi}{180} r = \frac{\pi}{180} \sqrt[3]{a^2 b} = \frac{\pi}{180} a (1 - \alpha)^{1/3},$$

vagy kellő közelítéssel α^3 elhanyagolásával

$$g = \frac{\pi}{180} a (1 - \tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{1}{9}\alpha^2),$$

a hol

$$g_0 = \frac{\pi}{180} a$$

az aequator egy fokát jelenti. A sphaeroidos Földön ellenben volt φ geographiai szélesség alatt:

$$g_\varphi = g_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2},$$

vagy az excentrumosság és lapultság összefüggése folytán

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

lévén:

$$g_\varphi = g_0 \left[1 - 2\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sin^2 \varphi\right]^{-3/2} =$$

$$= g_0 [1 + 3\alpha \sin^2 \varphi - \tfrac{3}{2} \alpha^2 (1 - 5 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi + \ldots].$$

Ha tehát a térkép felső és alsó széle φ'' és φ' geographiai szélességgel bír, akkor e szélességkülömbségnek megfelel a gömbalakú Földön

$$g_0 (1 - \tfrac{1}{3} \alpha) (\varphi'' - \varphi')$$

hosszegység, a sphaeroidikus Földön ellenben

$$g_0 (1 + 3\alpha \sin^2 \varphi) (\varphi'' - \varphi')$$

hosszegység, ha φ most a térkép közepének geographiai szélességét jelenti. A két hosszúság külömbsége elosztva a térkép m mértékével, nem lehet nagyobb, mint azon legkisebb n hosszúság, mely pontos mérésnél még leolvasható, s melyet 0·1 mm.-re lehet tenni. Innen az egyenlet:

$$\frac{g_0}{m} (\varphi'' - \varphi') \frac{\alpha}{3} (1 + 9 \sin^2 \varphi) \leq n,$$

a miből

$$m \geq \frac{\alpha g_0}{3n} (1 + 9 \sin^2 \varphi) (\varphi'' - \varphi').$$

Ha $\alpha = \frac{1}{300}$, $g_0 = 111\,306$ m., akkor

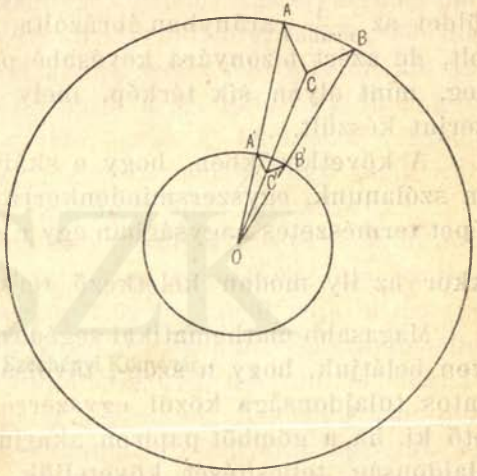
$$m \geq 1\,236\,730 (1 + 9 \sin^2 \varphi) (\varphi'' - \varphi').$$

Ha tehát valamely térkép $\varphi = 45^0$ közepes parallel számára készült, és 1° szélességkülömbséggel bíró övöt ábrázol, akkor $m \geq 6\,802\,015$-nek kell lenni, hogy a térkép felső és alsó oldala között a gömbalaktól való eltérés 0·1 mm.-re rúgjon. Ha a kisebbítés mértéke kisebb, mint ezen m, akkor a Föld már sphaeroidikusnak veendő.

Egészen hasonlóan járunk el azon esetben, midőn már a sphaeroid és niveausphaeroid különbsége is feltünő kezd lenni.

Egyelőre csupán csak a gömbalakú Föld vetítésével foglalkozunk, mivel később nagyon egyszerű szabályokat találunk majd, hogy a sphaeroidikus eltérést tekintetbe vegyük.

Mivel a Föld — mint gömbfelület — a síkra nem terjeszthető ki, nem is várható, hogy papiron a Földnek minden tekintetben hű mását nyerjük. A gömb a síkkal mindig csak egyetlen egy pontban érintkezik, és ezért a teljes hasonlatosság legfölebb a végtelen kis felületi elemekben lehet meg. Teljesen hű mása ismét csak gömbre vetíthető. s a vetítés eljárása körül kétség sem foroghat fenn. Ha a két gömböt concentrikusan állítjuk fel, mint a 258. ábrában, akkor a Föld felületének valamely ABC idomának minden pontjához vezérsugarakat húzhatunk, melyek a kisebb gömb felületét a megfelelő A′B′C′ pontokban metszik. Ha a nagyobb gömb sugara R, a kisebbiké r, úgy hogy $r = \frac{R}{m}$, akkor m a glóbus kicsinyítési mértéke. Az ABC és A′B′C′ idomok természetesen hasonlók, azaz az idom egyes szögletei egyenlők, a távolságok a sugarak, a területek a sugarak négyzeteinek arányában állanak, vagyis



258. ábra. Gömb leképzése gömbre.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{r}{R} = \frac{1}{m}; \quad \frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{m^2}.$$

A képmás tehát az eredeti felületen rajzolt bárminő szöget változatlanul adja vissza, vagyis a vetítés szögtartó, conformis, a távolságok képei mindig ugyanazon faktor szerint arányosak maradnak, vagyis a kép távolságtartó, aequidistans. Végül pedig a területek is a kép tetszőleges helyén ugyanazon faktor

szerint arányosak maradnak az eredetinek területével, a térkép tehát területtartó, vagy aequivalens. Ezen három tulajdonság az, melyre a modern térképvetítés a legnagyobb súlyt fekteti, mert mindegyik a térképet egy-egy fontos sajátsággal ruházza fel. Mindhárom tulajdonság természetszerűen magától megvan, ha a felületet egy vele egyenlő felületre rajzoljuk. de elvesznek legalább részben, ha a gömb vetítését síkra eszközöljük. Pedig ezt kívánja a térképrajzolás, mert a glóbus, noha teljes hűség jellemzi őt, alakjánál fogva nem alkalmas segédeszköz a legtöbb geographiai kérdés megoldásában. Az utolsó párisi kiállításon tudvalevőleg volt egy glóbus, mely a Földet az $\frac{1}{1\text{ millió}}$ arányban ábrázolta. Kerülete ennélfogva 40 m. volt, de azért bizonyára kevésbbé pontos méréseket engedett meg, mint olyan sík térkép, mely nála ötször kisebb skála szerint készült.

A következőkben, hogy e skáláról külön-külön ne kelljen szólanunk, egyszersmindenkorra feltételezzük, hogy a térképet természetes nagyságban egy r sugarú glóbusról vetítjük; akkor az ily módon keletkező térkép skálája $m = \frac{R}{r}$ leend.

Magasabb mathematikai segédeszközökkel aránylag könnyen belátjuk, hogy a szög-, távolság- és területtartás három fontos tulajdonsága közül egyszerre csak egyetlenegy elégíthető ki, ha a gömböt papiron akarjuk lerajzolni. Ha két ilyen tulajdonság teljesítését követeljük, akkor a leképezés már nem történhetik síkon, hanem csak az eredetivel egynemű felületen, a mi által a harmadik tulajdonság már magától is ki van elégítve. Viszont pedig egy ilyen tulajdonság követelése nem határozza meg a térképet teljesen, úgy hogy végtelen sokféle conformis, végtelen sokféle aequidistans és aequivalens térkép gondolható, de egyetlen sík térkép sem, mely a mondott tulajdonság kettejét egyesítené. Ha ennélfogva egy, pl. a conformitás tulajdonságával bíró térképet követelünk, akkor még végtelen sok módunk van a követelmény kielégítésére, megszabhatjuk például a rajzolás módját, megállapítván, hogy ez a perspektivitás törvényei szerint eszközöltessék; vagy megszabhatjuk, hogy a meridiánok és parallelák képei előre meghatározott görbe vagy egyenes vonalak legyenek s í. t. Ezen szempontokból kiindulva, már könnyen osztályozhatjuk a tér-

képeket. A három főtulajdonság tekintetbevételén kívül ábrázolhatjuk a gömböt a síkon, vagy valamely a gömböt körülvevő lefejthető felületre, pl. hengerre vagy kúpra, melyet azután egy palástvonala mentén felhasítunk s a síkba kiterjesztünk. Ily módon nyerjük a sík és lefejthető vetületeket. És minden egyes esetben történhetik a rajzolás a perspektivitás szabályai vagy önkényesen megállapított rajzolási szabályok szerint. Eszerint perspektivikus és conventionális vetületeket különböztetünk meg.

Minden esetben világos, hogy a térkép mértéke, azaz megfelelő hosszúságok viszonya a képen s az eredetiben pontról-pontra és általában véve irányról-irányra más, és hogy általában a térkép közepétől annak szélei felé folyton nő, azaz hogy a térkép torzulása a középtől a szélekig folyton nagyobbodik. Ha a térkép szögtartó, azaz a legkisebb részeiben hasonló, akkor természetes, hogy a mérték egy pont körül minden irányban ugyanaz, de pontról-pontra változó.

A térképek a mértéket ugyan adják, de ez — mint most már magától érthető — nem a rajz minden pontja számára érvényes, hanem csak a térkép közepe körül adja az iránytól függő mérték középértékét. Hogy úgy ezen mértékszámot ellenőrizhessük, vagy, ha nem volna megadva, magunk is meghatározhassuk, a következő módon járunk el: A térkép azon pontjában, melyben a mértéket ismerni óhajtjuk, lemérjük egy meridián- vagy parallelkör ívét; legyen ennek hossza centiméterekben kifejezve l. Ugyanezen ív hossza a Földön L lévén, természetes, hogy $\frac{l}{L} = \frac{1}{m}$ adja a mértéket a két egymásra merőleges irányban. Mivel, mint később látni fogjuk, a Föld felületén bárhol rajzolt kicsiny kör a térképen általában véve ellipsist ad kép gyanánt, azért a mérték bármily irányban azon ellipsis radiusvektora leend, a melynek kis és nagy tengelye a meridiánba és parallelkörbe eső skála, feltéve, hogy a két irány a térképben is merőlegesen áll egymásra. Ha tehát u azon iránynak északtól számított azimuthja, melyben a mértéket keressük, m′ a meridián, m″ a parallelkör mentén talált skálaérték, akkor az ellipsis törvénye szerint:

$$m = \frac{m' m''}{\sqrt{m'^2 \sin^2 u + m''^2 \cos^2 u}}.$$

De általában ferde irányban is határozhatjuk meg a mértéket, ha két metszési pontnak távolságát keressük a hálózatban s ezt a közvetlenül lemérttel összehasonlítjuk. Ha a két metszési pont φ és φ' szélességhez, λ és λ' hosszúsághoz tartozik, akkor ezek gömbi távolsága

$$\cos D = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda),$$

vagy mivel a térképen mért távolság mindig kicsiny, D tehát cos D-ből pontosan ki nem vehető, az egységből való levonás után:

$$2\sin^2\frac{D}{2} = 1 - \sin\varphi \sin\varphi' - \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda).$$

Írva $\cos(\lambda' - \lambda) = 1 - 2\sin^2\frac{\lambda' - \lambda}{2}$, lesz:

$$\sin^2\frac{D}{2} = \sin^2\frac{\varphi' - \varphi}{2} + \cos\varphi \cos\varphi' \sin^2\frac{\lambda' - \lambda}{2},$$

a miből D nagy pontossággal kivehető. Ezután

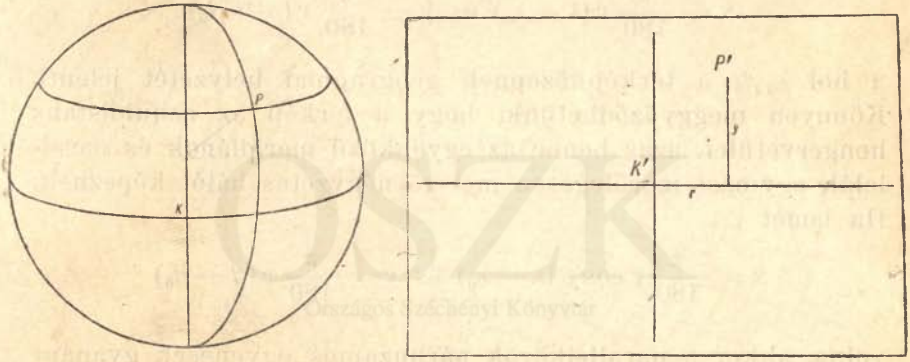
$$L = \frac{\pi}{180} rD$$

a legnagyobb kör mentén leolvasott távolság a Földön, mely l lemért hosszúsággal együtt ismét $m = \frac{L}{l}$ skálaértéket adja. Azonban ezen eljárás sem teljesen hibátlan, mivel a két metszési pont között húzott legnagyobb körnek képe nem szükségképen azon egyenes, mely a két metszési pont között a térképen húzható. Legjobb eljárás marad tehát mindig, ha a meridián és parallelkör mentén mérjük a skálát és más irányokban az egyes térképeknek megfelelő képletekkel számítjuk ezt.

Hogy a térkép három főtulajdonsága nincs egyesítve egy és ugyanazon térképen, sőt hogy vannak vetületek, melyekben egy sem talál kielégítést, azt később a posteriori számos példában fogjuk látni. Itt még csak néhány lényeges megjegyzés. Ha a térképet síkon vetitjük, akkor a legtermészetesebb eljárás, hogy a gömb a síkot az ábrázolandó terület közepén érintse, vagy pedig a lefejthető hengert vagy kúpot azon kör mentén, mely a leképzendő terület közepén megy át, mert a

térképen a középtől számított távolsággal nő a torzulás. Ha minden pont a térkép középpontjától húzott ugyanazon azimuthban fekszik az eredetin s másán, akkor a vetület azimuthális vagy zenithálisnak nevezhető; ez azonban még korántsem szabja meg, hogy a térkép conformis legyen, a mennyiben ezen követelmény csak a középponthoz való iránymegtartást írja elő.

A mathematikus az összes képzelhető végtelen sok vetületet a conformitás, aequivalentia és aequidistantia három elvéből egységesen vezeti le. Mi, kik az itt szükséges analytikai segédeszközökkel nem rendelkezhetünk, egyenként vezetjük le a fontosabb s tényleges alkalmazásban levő vetületeket.



259. ábra. Gömb leképzése síkra.

A mathematikus szempontjából legérdekesebb és legfontosabb a conformitás elve, a geographusnak legfontosabb térképe az aequivalens, mert ebben a területek változatlanok maradnak, a mi lényeges. Az aequidistantia a legkevésbbé fontos követelmény, annál is inkább, mivel csakis azt az egyet érhetjük el, hogy a térkép közepétől számított távolság változatlanul maradjon meg; tehát csak úgynevezett zónatérképekben nyerhetne némi fontosságot.

Mivel a gömbnek síkra való másolásában természetszerűen oly egyszerű és közelfekvő elv nem található, mint a minőt a glóbus elkészítésénél a 258. ábra alapján választottunk, azért általános vezérelvet kell felállítanunk. Az eddigi tapasztalataink szerint is ez elvnek nagyon általánosnak kell lennie, hogy minden képzelhető vetületnek megfeleljen. Leké-

pezni a mathematikus felfogása értelmében annyit jelent, mint az eredeti minden pontja mellé tetszőleges törvény szerint a másolat egy pontját melléosztani. Ha tehát a 259. ábrában K a másolandó terület közepe és ennélfogva K′ a térkép középpontja, P a földfelület egy pontja, mely λ és β geographiai coordinátái által van adva és P′ ezen pontnak képe, melynek x és y coordináták felelnek meg, akkor az előbbi elv csak annyit mond, hogy egyenként x és y egész tetszőleges, mathematikailag kifejezhető függésbe jusson λ és β-tól. A képzelhető legegyszerűbb eset az, midőn egyenként x és y arányos λ és β-val, úgy, hogy

$$x = \frac{\pi}{180} r(\lambda - \lambda_0) \text{ és } y = \frac{\pi}{180} r(\beta - \beta_0),$$

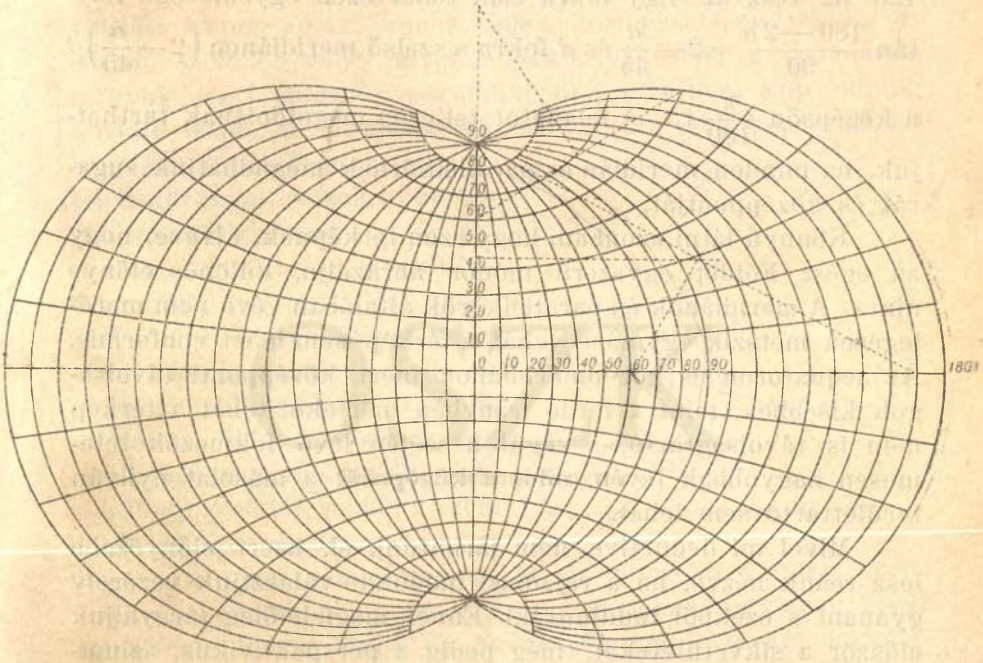
a hol $\lambda_0 \beta_0$ a térképközépnek geographiai helyzetét jelenti. Könnyen meggyőződhetünk, hogy a térkép az aequidistans hengervetület, azaz benne az egyenközű meridiánok és parallelák egymást merőlegesen metsző négyzetes hálót képeznek. Ha ismét

$$x = \frac{\pi}{180} r \cos\beta(\lambda - \lambda_0) \text{ és } y = \frac{\pi}{180} r(\beta - \beta_0)$$

volna, akkor a parallelkörök párhuzamos egyenesek gyanánt rakandók fel ugyanazon távolságban, mint a Földön következnek, és minden parallelkörön a fokok természetes nagyságukban metszendők le. Az ily módon keletkező térkép a Flamsteed-Sanson-féle, és ezen példákat természetesen a végtelenségig lehetne szaporítani. Ha azonban már előre követeljük, hogy a térkép conformis vagy területtartó legyen, akkor némi megszorítás jön létre a függés módjában, mindazonáltal még mindig végtelen sok megoldás lehetséges. Meg fogunk arról győződni, midőn a conformis és aequivalens leképezésnek legalább elveit mutatom be.

Hogy mennyire önkényesen járhatunk el a térképek készítésében, azt legjobban mutatja egy példa, a Beaumont-féle vetület (260. ábra), melynél önkényesen megállapítjuk, hogy az egész Földet akarjuk ábrázolni kör alakú meridiánokkal és parallelákkal. Az aequator kerületét $2r\pi$ egyenes vonalnak rajzoljuk, felező pontjában merőlegest emelünk, melyre fölfelé

és lefelé a meridián negyedét rakjuk, úgy hogy az egész függélyes hossza $r\pi$ legyen. Ha 10^0-ról 10^0-ra akarjuk húzni a meridiánokat és parallelákat — mint ezt ezentúl mindig feltételezzük — akkor az aequator egész hosszát 36, a középső meridiánét 18 egyenlő részre osztjuk. A középső meridián két végpontja a két pólusnak képe, s ezen s az aequator megfelelő osztási pontján át megy minden meridián; a szélsők is.



260. ábra. Beaumont-féle vetület 1 : 333⅓ millióhoz.

Ha tehát a pólust s a térkép közepétől számított λ hosszúsággal bíró aequatorpontot összekötjük s ez egyenes felezőjében merőlegest emelünk, akkor ennek metszési pontja az aequator képével adja a meridiánkör középpontját. A szélső meridiáné a középtől számított $67^0.5$ hosszúságban fekszik, a miről könnyű számítás győz meg. Ha a szélső meridián kerületét is 18 egyenlő részre osztjuk, akkor minden parallelkör számára ismét három pontot nyertünk, egyet a középső meridiánon, két megfelelőt a szélsőn, melyeken át felezett húrok segítségével ismét könnyen körök fektethetők. Ily módon szer-

kesztés által a térkép igen könnyen és gyorsan adódik. De számítva is járhatunk el. Jelölvén a (0^0, 180^0, 90^0) szöget α-val, az ábrából közvetlenül látható, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}r\pi}{r\pi} = \frac{1}{2}, \text{ és ebből } \alpha = 26^0\ 34',$$

úgy, hogy a meridiánquadrans képének hossza $180 - 2\alpha = 126^0\ 52'$ tesz ki. Egy fokra esik tehát ezek egyenlősége folytán $\frac{180 - 2\alpha}{90} = 2 - \frac{\alpha}{45}$ és β fokra a szélső meridiánon $\left(2 - \frac{\alpha}{45}\right)\beta$ a középsőn $\frac{\pi}{180} r\beta$. A feladatot teljesen megoldottnak tarthatjuk, ha minden meridián és parallelkörnek megadhatjuk sugarát és középpontját.

Könnyű látni azonban, hogy ezen térképnek, kivéve, hogy az egész Földet egyszerű módon ábrázolja, különös előnye nincs. A meridiánok és parallelkörök általában véve nem merőlegesen metszik egymást, tehát a térkép nem lehet conformis. Az aequatoron és középmeridiánon mért középponti távolságok kisebbek, mint a ferde irányban mérteké, tehát a térkép nem is távolságtartó, s végül a szélén levő fokmezők tetemesen nagyobbak lévén, mint a középsők, a másolat nyilván területtartó sem lehet.

Mivel mi deductive nem járhatunk el, azért előnyösebb lesz reánk nézve, ha a rajzolási módokat választjuk vezérelv gyanánt s ezekből indulunk ki. Ennek megfelelőleg tárgyaljuk először a síkvetületeket, még pedig a perspektivikus, azimuthális és conventionális rajzolási mód szerint, azután a henger- és kúpvetületeket ugyanezen osztályok szerint.

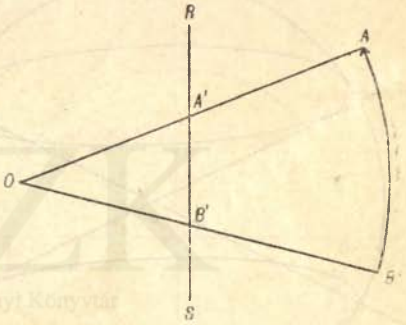
II. FEJEZET.

Perspektivikus sík vetületek.

A vetítő perspektivikus eljárás abban áll, hogy az O szemnek (261. ábra) egy AB tárgyhoz húzott látósugarait a középső látósugárra merőleges rajzsíkkal metszük. Minden A pontnak A′ képe tehát ott keletkezik, a hol az eredeti

ponthoz húzott látósugár a rajzsíkot metszi. Ily módon mindig hasonló alakok keletkeznek, bárhol feküdjék is a rajzsík, azaz a rajzsík helyzete tisztán csak a térkép mértékére van befolyással, de különben a térkép relativ méreteit nem változtatja meg. Ellenben a szem fekvése igenis hoz létre változást, a mennyiben ennek közelítése vagy távolítása a térkép alakját lényegileg is megváltoztatja.

Az összes, a tárgyhoz húzott látósugarak együttvéve a vetítési kúpot adják, ennek csúcsa természetesen mindig az észlelő szemben van; mivel a térképvetítésben a másolandó tárgyak meridiánok és parallelkörök, a vetítési kúp mindig körkúp leend, de a rajzsík fekvése szerint ezek képei általában véve kúpmetszetek lesznek, tehát körök, ellipsisek, hyperbolák, parabolák vagy egyenesek. A szem helye szerint megkülönböztetünk gnómonos vagy centrális vetületet, melyben a szem a Föld középpontját foglalja el, stereographikus vetületet, midőn a szem a Föld felületének egy pontjában van, orthogonális vagy parallelprojectiót, midőn a szem végtelen távolságban van, a vetítési kúp tehát hengerbe megy át, és intern vagy extern vetületeket, melyekben a szem a Föld belsejében vagy azon kívül tetszőleges helyet foglal el. Ezenkívül még a térkép közepének geographiai fekvése is dönt, és nemcsak a perspektivikus vetületeknél, hanem az összes térképeknél is szereplő beosztást hoz létre. A térkép tetszőleges horizontra vonatkozik, hogyha a térkép közepe $\lambda_0 \beta_0$ általános értékű geographiai coordinátákkal bír; poláris, ha a lerajzolandó terület közepe a pólus, rajzsíkja tehát az aequatorral párhuzamos; aequatori, ha a térkép közepe az aequator egy pontja, midőn tehát a rajzsík a meridiánok valamelyikével esik össze vagy ezzel párhuzamos.

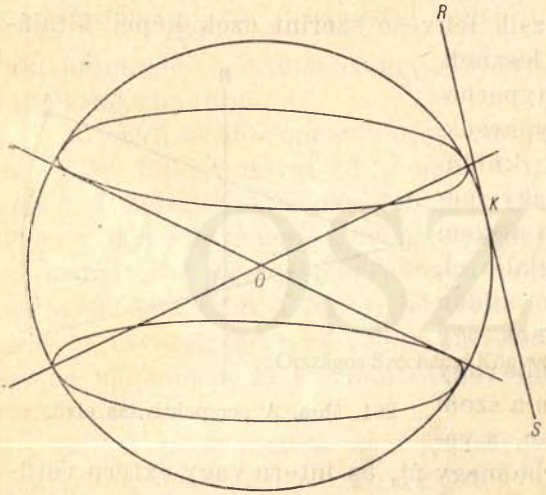


261. ábra. A perspektivitás elve.

Mivel a perspektivikus vetületeknél a térkép középpontjának látósugara merőleges a rajzsíkra, azért a másolás ezen neménél a szem geographiai fekvése mindig ugyanaz, mint a

térkép közepeé. Ennélfogva a perspektivikus vetületek egynehány közös tulajdonságát mindjárt felsorolhatjuk.

A poláris vetület esetében a szem a Föld tengelyében áll, tehát minden meridián síkja átmegy a szemen is. Ennélfogva minden perspektivikus poláris vetületben a meridiánok képei egyenesek, melyek egymással ugyanazon szögleteket képezik, mint az eredetiben; ezek tehát közvetlenül felrajzolhatók. A parallelkörök oly vetítési kúpokat adnak, melyeknek tengelye mind a Föld tengelyébe esik, mely tehát merőlegesen áll a rajzsíkra. Ennek folytán a parallelkörök képei kivétel nélkül körök.



262. ábra. A parallelák képe a gnómonos vetületben.

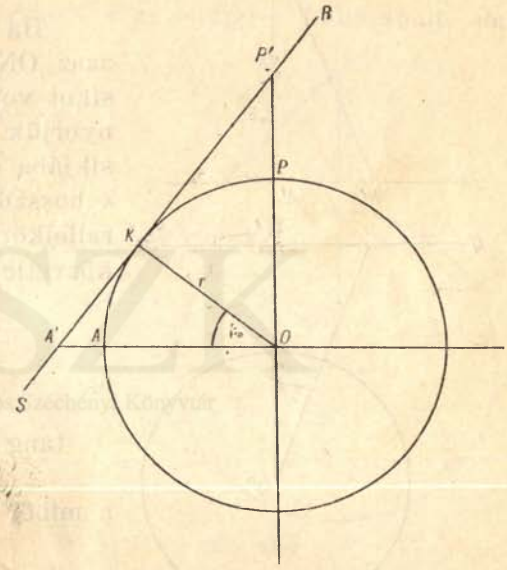
Az aequatori vetületben az aequator képe ugyanez oknál fogva egyenes, és egyenesegyszersmind azon meridián képe is, mely a térkép közepén halad át. Nem szükséges azonban, hogy a középső meridián a kész térképben szerepeljen is, mert nem szükséges, hogy hosszúsága valamely egész kerek szám által legyen kifejezve. Ilyen esetben a középmeridián egyszerűen a szerkesztésnél fontos segédvonalat ábrázol. Az aequatorvetület többi görbéi mind az egyenestől eltérő kúpszeletek.

De az általános horizontra való vetületben is mindig van egy meridián és egy parallelkör, melynek képe a térképen egymásra merőleges egyenes; az tudniillik, melynek síkja a szemen megy át. Ezen egyenesek, ha tán nem is szerepelnek a kész térképben, mindig igen fontos szerkesztési vonalak.

Lássuk most egyenként a fontosabb perspektivikus vetületeket.

A gnómonos vagy centrális perspektivikus vetület. A gnómonos vagy centrális projectió perspektivikus művelet, a

melynél a szem a Föld középpontját foglalja el. A rajzsík a másolandó terület közepét érinti. Mivel minden legnagyobb kör a Föld középpontján, tehát a szemen is áthalad, azért minden legnagyobb kör képe egyenes. Ez jellemző tulajdonsága ezen térképnek. Ez oknál fogva a meridiánok és az aequator egyenesek, és a parallelkörök hyperbolák, mivel ezek vetítési kettős kúpját a rajzsík (262. ábra) úgy metszi, hogy mindkét rész át van szelve. A térkép különösen az újabb hajózási gyakorlatban fontos, mert a legrövidebb út a Föld felületén a térképen egyenes vonal által van kijelölve, és fontos bizonyos csillagászati problemákban, mint pl. a hullócsillagok kisugárzási pontjának meghatározására.



263. ábra. Metszet a középmeridiánon át.

A szerkesztése elég egyszerű és a következő megfontolások által eszközölhető. — Legyen a 263. ábrában K a lerajzolandó terület középpontja, λ_0 és β_0 geographiai helyzete. Mivel az ábra a K meridiánsíkjában fekszik, a K-ban érintő rajzsík az RS egyenes metszőt adja. Ezen P′ és A′ a pólus, illetve az aequator egy pontjának képe, és ezek távolsága a térkép közepétől

$$A'K = r\,\mathrm{tang}\,\beta_0;\quad P'K = r\,\mathrm{cotg}\,\beta_0,$$

továbbá:

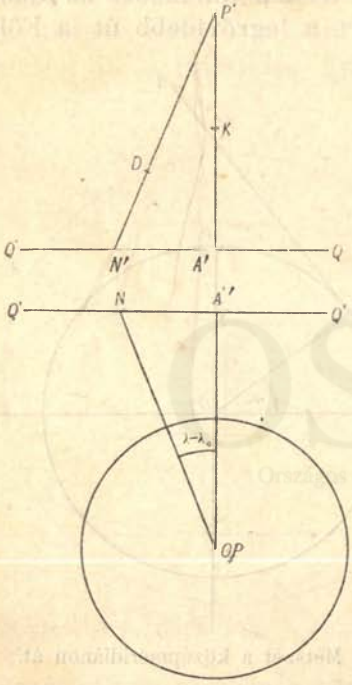
$$A'O = \frac{r}{\cos\beta_0};\quad P'O = \frac{r}{\sin\beta_0}.$$

A 264. ábra alsó része az aequator, a felső része a rajz síkjában fekszik, s ennek megfelelőleg az OP pont a Föld középpontja s egyszersmind pólusa is. — A′O természetesen ugyanazon jelentőséggel bír, mint az előbbi ábrában. Ha most

a középmeridián mellé a $\lambda - \lambda_0$ hosszkülömbséggel bíró meridiánt rajzoljuk, akkor A'N, az aequator képén való távolsága a középmeridiántól

$$A'N = A'O \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) = r \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)}{\cos \beta_0},$$

és hasonlóképen



264. ábra. A rajzsík és metszet az aequatoron át.

$$ON = \frac{A'O}{\cos(\lambda - \lambda_0)} = \frac{r}{\cos\beta_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}.$$

Ha most a λ meridiánon át, azaz ON egyenesen át függélyes síkot vonunk, akkor a 265. ábrát nyerjük. ON ismét az aequator síkjába esik, s ezért a D pont a λ hosszúságú és β szélességű parallelkör metszőpontja. Az ábrából közvetlenül látni, hogy

$$\frac{DN}{ON} = \frac{\sin\beta}{\sin(u + \beta)},$$

és

$$\operatorname{tang} u = \frac{OP'}{ON} = \frac{\cos(\lambda - \lambda_0)}{\operatorname{tang}\beta_0},$$

a miből

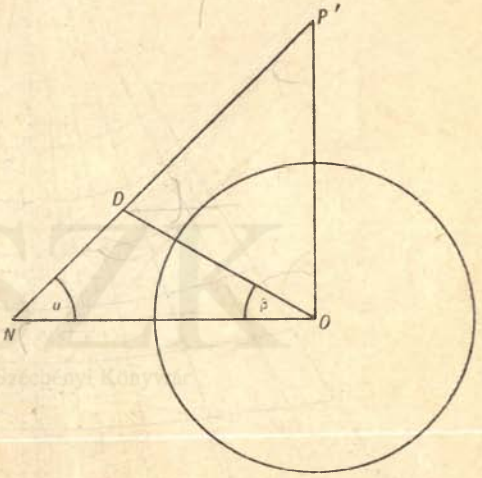
$$DN = \frac{r \sin\beta}{\cos\beta_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \sin(\beta + u)}.$$

Az így nyert DN távolságot most a 264. ábra felső részére, az aequatortól fölfelé rakjuk fel, s ezzel a hálózat egy pontja megvan.

A szerkesztés menete tehát a következő: a papirlap középpontjában húzzunk egy függélyes vonalat, melyre a 263. ábrából kiveendő KP' és KA' hosszúságokat rakjuk fel. A P' pont a pólus képe, az A' ponton át a középső egyenes meridiánra merőlegesen húzott egyenes az aequator képe. Most a 264. ábra előírása szerint a középső meridiántól jobbra-balra felrakjuk az ehhez való hosszúsági külömbségeket 10^0—10^0-ra, s ezek által az aequatortól leszelt darabjait felrakjuk rajzun-

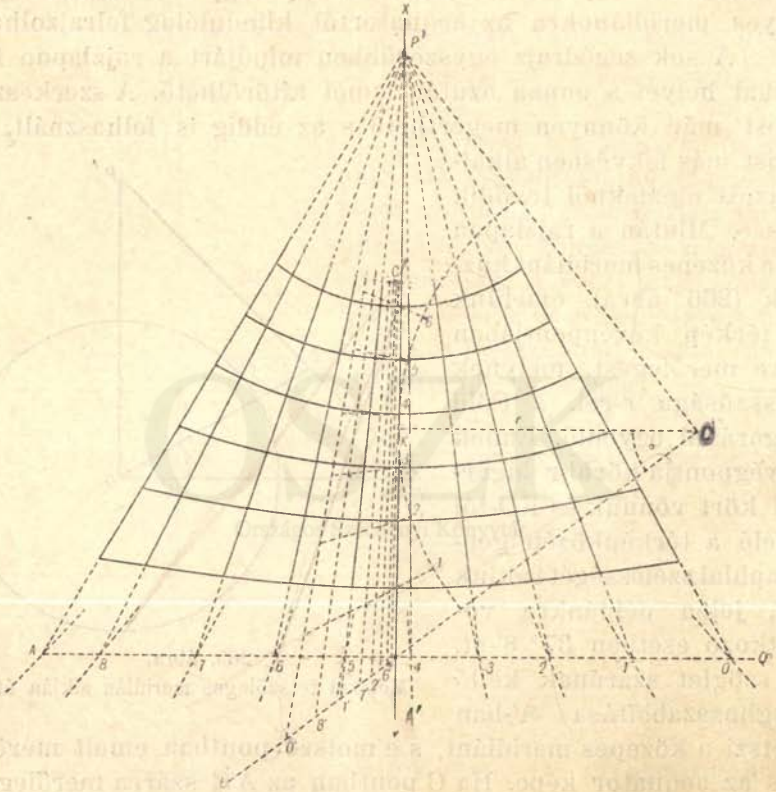
kon ugyancsak az aequatortól jobbra vagy balra. Az így nyert pontokat összekötjük a pólus képével, miáltal az egyenes meridiánokat nyertük. A 265. ábra, mely minden meridián számára külön szerkesztendő (mint a 267. ábrában), adja végül, ha a kört az ON egyenestől fogva 10°-onként osztjuk, az összes parallelkörök metszését az egy P'N meridiánnal, úgy hogy DN hosszúság az egyes meridiánokra az aequatortól kiindulólag felrajzolható.

A sok segédrajz egyszerűbben mindjárt a rajzlapon foglalhat helyet s onnan azután ismét kitörölhető. A szerkesztés most már könnyen megérthető s az eddig is felhasznált, de most más fekvésben alkalmazott elemekből tevődik össze. Miután a rajzlapon át a közepes meridiánt húztuk (266. ábra), emelünk a térkép középpontjában erre merőlegest, melynek hosszúsága r-rel, a Föld sugarával egyenlő. Ennek O végpontja körül r sugárral kört vonunk és KO-tól lefelé a térképközép geographiai szélességét rakjuk fel, jelen példánkra vonatkozó esetben 37° 8'-et. A szöglet szárának kellő meghosszabbítása A'-ban metszi a közepes meridiánt, s e metsző pontban emelt merőleges az aequator képe. Ha C pontban az A'C szárra merőlegest emelünk, akkor ez P' pontban szolgáltatja a pólusnak képét. Legyen most az A'P' száron A' C' = A' C és rakjuk fel C' pontból jobbra és balra az egyes hosszkülömbségeket. Az aequatorral való metszési pontokat összekötve a P' pólussal, megkapjuk a meridiánokat. Legyen most továbbá C'6 = C6' s í. t. A szerkesztést minden szereplő meridiánra eszközölvén, kapunk CA' mentén egy sor-pontot, melyek P'-tel kötendők össze s a CK kör azon sugaraival metszendők, melyek az A'C egyenestől 10°-onként felrakott geographiai szélességekhez tartoznak. A metszetek azután a P' 1, P' 2.. meridiánokra az aequatortól kiindulólag



265. ábra.
Metszet tetszőleges meridián síkján át.

veendők át. Ha a közepes meridián maga nem szerepel a kész térképen, akkor e körül a szerkesztés természetesen nem symmetrikus, de szintén minden nehézség nélkül való. Ha elegendő hely áll rendelkezésre, akkor az áttekinthetőség kedveért czélszerűbb, ha a C kör középpontját az aequator képétől lefelé



266. ábra. Gnómonos térkép hálózata; a földsugár 1 : 167·6 millióhoz.

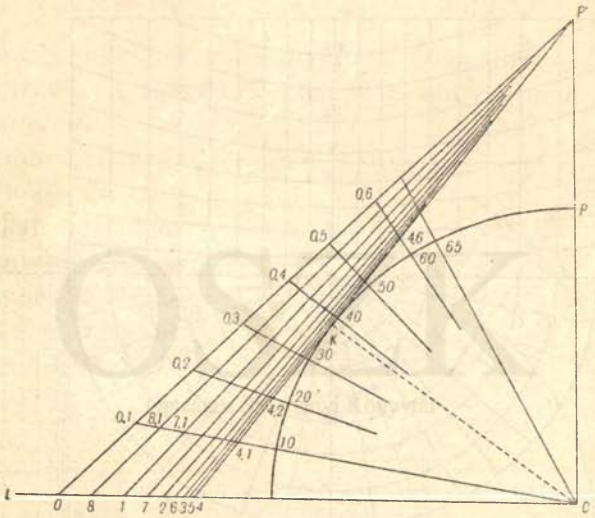
rakjuk fel. A meridiánok és parallelák metszési pontjai különben, mint a 267. ábrában történt, a kész hálón kívül külön is szerkeszthetők.

Ily módon nyerjük az összes parallelkörök metszési pontjait az összes meridiánokkal, melyek folytonos görbe vonallal — ez esetben, mint már tudjuk, hyperbolával — kötendők össze. Az eljárás egyszerűbb, mintha a parallelákat közvetlenül mint hyperbolákat szerkesztenők.

Ha ellenben számítva akarunk eljárni, akkor sorban $\lambda - \lambda_0 = 0^0, 10^0, 20^0 \ldots$ értékeket veszszük fel, s ezekkel számítjuk a kardinális pontok megállapítása után

$$A'N = r \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)}{\cos \beta_0} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} u = \frac{\cos(\lambda - \lambda_0)}{\operatorname{tg} \beta_0}$$

értékeket. Azután számítunk minden egyes $\lambda - \lambda_0$ értékhez sorban $\beta = 0^0, 10^0, 20^0 \ldots$-ot véve:



267. ábra. Meridiánok és parallelák metszési pontjainak szerkesztése.

$$DN = \frac{r \sin \beta}{\cos \beta_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \sin(\beta + u)},$$

miáltal a meridiánok és azok metszési pontjai a parallelákkal megvannak.

A gnómonos poláris és aequatoriális térkép nagyon könnyen adódik az általános formulákból, ha $\beta_0 = 90^0$, illetve $\beta_0 = 0^0$ tétetik, s a szerkesztés hasonlóképen egyszerű. Mindkettő egyesítve van a 268. ábrában, melynek felső része az aequatori, alsó része a poláris térképet adja.

Az előbbiben a pólus végtelen távolságba esik, a meridiánok tehát egymással párhuzamos, az aequator képére

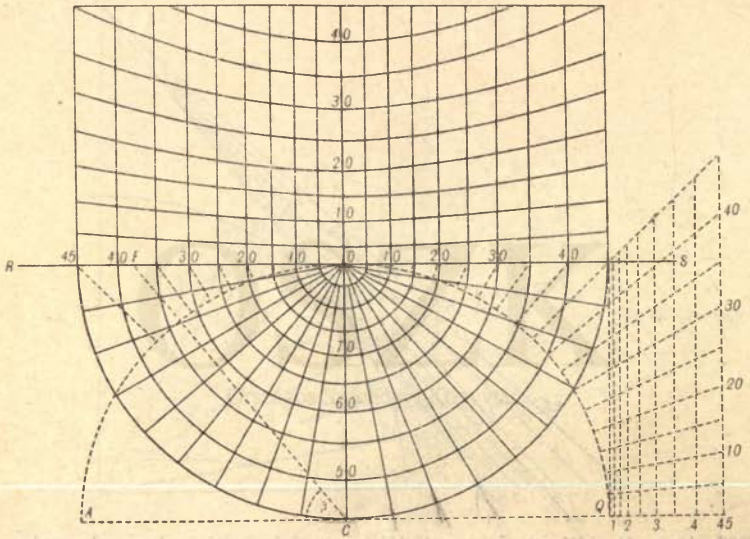
merőleges egyenesek, melyek távolsága a közepes meridiántól egyszerűen

$$A'N = r \operatorname{tang} (\lambda - \lambda_0)$$

értékével egyenlő. Hasonlóképen

$$DN = r \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos (\lambda - \lambda_0)},$$

úgy hogy a szerkesztés a következő:



268. ábra. Gnómonos aequator- és pólusvetület, a földsugár 1 : 190·7 millió.

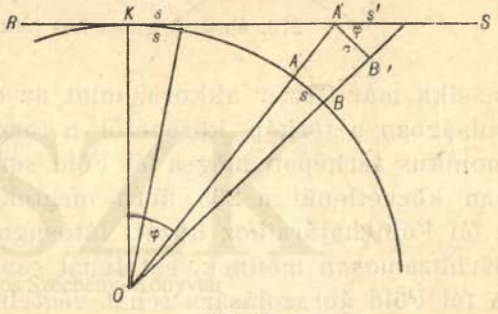
A rajzlap közepén átmenő aequator alatt ezt érintve a földsugárral kört irunk le, melyet az érintési pontból jobbrabalra 9 egyenlő részre osztunk. Az aequatorig meghosszabbított sugarak ezen oly darabokat metszenek le, melyeknek a közép meridiántól való távolsága r tang $(\lambda - \lambda_0)$, melyek tehát az aequator és meridiánok metszőpontjai. Ha ellenben az aequatorig meghosszabbított sugarakat, melyek hossza nyilván r sec $(\lambda - \lambda_0)$ a CQ vonalra rakjuk, a végpontjaikban merőlegeseket emelünk s ezeket a körosztási pontokon át húzott sugarakkal metszük, akkor a lemetszett darabok nyilván r sec $(\lambda - \lambda_0)$ tang β hosszúsággal bírván, a parallelkörök által

a meridiánon lemetszett ívek lesznek. Ezen metszetek viendők át a megfelelő meridiánokra, hogy azok összesége hyperbolikus ívvel összekötve a parallelköröket adja.

A poláris vetületben egyenlő szögtávolságban fekvő, a pólus képében egymást metsző sugarat rajzolunk, s ezeket concentrikus körökkel szeljük, melyek sugarai ugyanakkorák, mint az aequatoriális vetületben a meridiánok közei. A szerkesztés értelmében ugyanis

$$A'N = OF = r \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) = r \operatorname{cotg} \beta.$$

A térkép nagyítási viszonyait a 269. ábra segítségével tanulmányozzuk. A térkép K közepe körül végtelen kis szögletnek megfelelő ív és képe teljesen összeesőnek tekinthető, de már φ távolságban a térkép közepétől s ív és s′ képe között tetemes különbség lép fel. A térkép közepén átmenő RS irányban ugyanis



269. ábra.
A gnómonos vetület torzitási viszonyai.

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{OA'}{OA} = \frac{r \sec \varphi}{r} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

és másrészt

$$\sigma = s' \cos \varphi,$$

úgy hogy

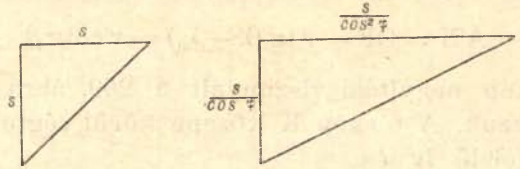
$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

Ha az OB′ szárt kiemeljük a papir síkjából, és OA′ tengely körül 90°-kal forgatjuk, akkor OB′ = OA′ miatt a σ ív szintén a rajzsíkba kerül, még pedig oly vonalnak az eleme leend, mely a térkép közepén átmenő egyenesre merőlegesen áll. Ennek hossza, mint már az imént találtuk,

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

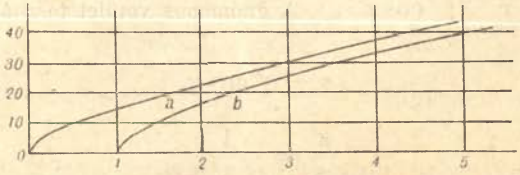
által van adva. Ha tehát a Földön egy derékszögű egyenszárú kis háromszöget szerkesztünk (270. ábra), melynek egyik szára

kellőképen meghosszabbítva a térkép közepén megy át, akkor ennek ezen oldala a térképen $\frac{s}{\cos^2\varphi}$, a rá merőleges oldal $\frac{s}{\cos\varphi}$ hosszúsággal fog bírni. Tehát tetemes, egyenlőtlen nagyítás jön létre, a miből következik, hogy a térkép sem conformis, sem távolság- és területtartó nem lehet. A térkép közepétől 45^0-nyi távolságban a kis háromszög egyik oldala már $\sqrt{2}$,



270. ábra. A gnómonos térkép torzítása.

másika már 2-szer akkora, mint az eredetiben. 90 foknyi távolságban a térkép közepétől a torzulás ∞ nagy, azaz gnomonikus térképen még a fél Föld sem ábrázolható. Ez különben közvetlenül a 263. ábra megtekintéséből is következik; a fél Föld határaihoz húzott látósugarak ugyanis a rajzsíkkal párhuzamosan mennek, ezt tehát csak a végtelenben találják. A fél Föld ábrázolására tehát végtelen nagy kiterjedésű rajz-

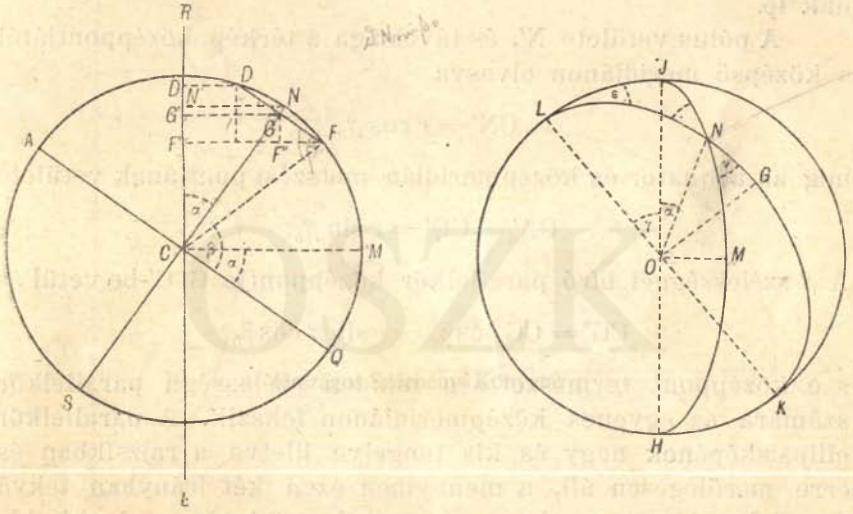


271. ábra. Mérték a gnómonos vetülethez.

lap kellene, és a torzulások a térkép szélei felé végtelen nagyok volnának. Rendesen tehát az egész Föld ábrázolásában úgy járunk el, hogy a Föld körül ezt érintő hexaedert vagy egyéb szabályos polyaedert írunk le és ennek lapjaira vetítjük a felületet gnomonos vetület szerint. Ily módon összefüggő képét a Föld felületének természetesen nem nyerjük.

A mondottak alapján könnyű szerrel mértéket lehet szerkeszteni, mely a térkép bármely pontján alkalmazható. Vízszintes egyenesre (271. ábra) rakjuk a térkép közepének meg-

felelő hosszúságokat; tetszés szerinti, de egyenlő távolságokban vonjunk párhuzamosokat, melyekre ugyane hosszúságokat rakjuk, miután illetve $\sec\varphi$ és $\sec^2\varphi$-vel szoroztuk, a hol $\varphi = 10^0, 20^0, 30^0 \ldots$ a térkép közepétől számított távolságot jelenti. A megfelelő osztási pontokat az egyes vízszinteseken összekötve, görbéket nyerünk, melyek az egyes vízszinteseken a φ távolságban kimetszik a hosszegység értékét, még pedig a térkép közepén átmenő irányban, ha $\sec^2\varphi$; az ezen irányra merőleges irányban, ha $\sec\varphi$-vel szoroztunk. Így a mi ábránkban ab a hosszúságegység értéke a térkép közepétől 20^0 távolságban.



272. és 273. ábra. Az orthographikus vetület szerkesztése.

Hasonló módon járhatunk el minden térkép kimérésénél, feltéve, hogy a görbéket a térkép torzítási viszonyainak megfelelőleg szerkesztjük.

Orthographikus vagy parallel vetület. Az orthographiai vagy parallel vetület létrejön, ha a Földet végtelen nagy távolságból nézzük, azaz párhuzamos látósugarakkal vetítjük. Mivel a vetítési kúp ez esetben hengerbe megy át, az összes meridiánok és parallelák ez esetben általánosságban ellipsisek lesznek. A térkép, mely a félgömb ábrázolására alkalmas, leginkább a csillagászati topographiában szerepel, mert a bolygók felületeit tényleg orthographiai vetületben látjuk; a Föld ábrázolására rendesen csak akkor, ha annak nagyobb távolságból

látott képét akarjuk bemutatni. A photographia, melyet valamely távoli glóbus hálózatáról felveszünk, orthographiai vetület, s ezért érthető, hogy ezen vetület a legplastikusabb benyomást teszi, s szemre nézve a legszebbek közé tartozik.

Szerkesztése tetszőleges horizontra a 272. és 273. ábra alapján egyszerű. Ha a rajzsíkot merőlegesen fektetjük a gömb középpontján át a párhuzamos látósugarakra, melyek közepese $CM\alpha = \beta_0$ geographiai szélességnek felel meg, akkor az ANMS meridián, mely a szemen halad át, egyenes vonalat ád, a középmeridián képét; a többi körök mind ellipsis képében rajzolódnak le.

A pólus vetülete N′, és távolsága a térkép középpontjától a középső meridiánon olvasva

$$CN' = r \cos \beta_0,$$

míg az aequator és középmeridián metszési pontjának vetülete

$$CA' = CQ' = r \sin \beta_0.$$

A β szélességgel bíró parallelkör középpontja G G′-be vetül és

$$CG' = CG \cos \beta_0 = r \sin \beta \cos \beta_0,$$

s e középpont természetesen minden szélességű parallelkör számára az egyenes középmeridiánon fekszik. A parallelkör ellipsisképének nagy és kis tengelye illetve a rajzsíkban és erre merőlegesen áll, a mennyiben ezen két irányban fekvő parallelsugár az, mely a perspektiva folytán a legkisebb, illetve a legnagyobb rövidülést mutatja. A nagy féltengely természetesen a parallelkör sugarával azonos, tehát

$$a = r \cos \beta,$$

a kis féltengely pedig

$$b = F'G' = G'D' = r \cos \beta \sin \beta_0.$$

A meridiánellipsisek nagy féltengelyei mind a gömb sugarával azonosak, t. i. r, de tengelyük különböző hajlással bír a középmeridiánhoz; a kis tengelyek ellenben azon szög cosinusának arányában kisebbek, melylyel a meridián síkja a középmeridiánhoz hajlik. Ha tehát a 273. ábrában NM a középmeridián, LN a $(\lambda - \lambda_0)$ hosszúságkülömbséggel a középsőtől

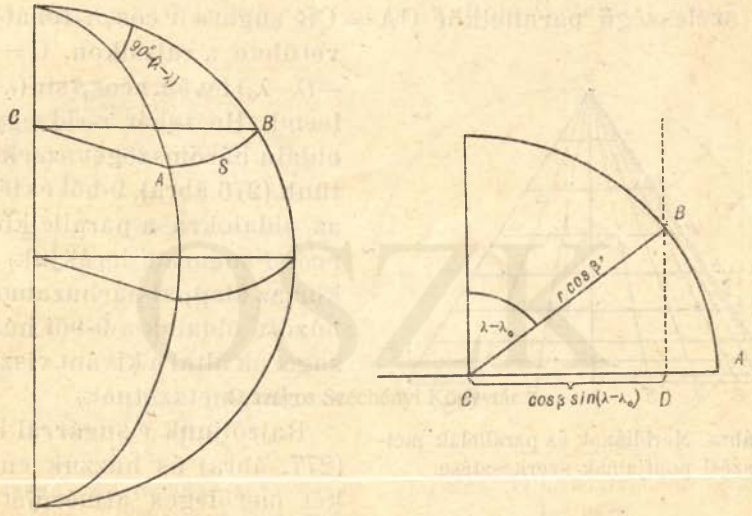
elálló meridián, akkor ennek fél nagy tengelye $r \cos \varepsilon$ és nagy tengelyének hajlása a középmeridiánhoz γ. Az LJN gömbi háromszögből, mely J-nél derékszögű, következik

$$LJ = \gamma\,;\ JN = \alpha = \beta_0 \text{ és } LNJ = \nu = \lambda - \lambda_0,$$

s ennek folytán

$$\cos \varepsilon = \cos \beta_0 \sin (\lambda - \lambda_0) \text{ és } \operatorname{tang} \gamma = \sin \beta \operatorname{tg} (\lambda - \lambda_0),$$

mivel az ábra a rajz síkjában fekszik, s a pólus annak felső

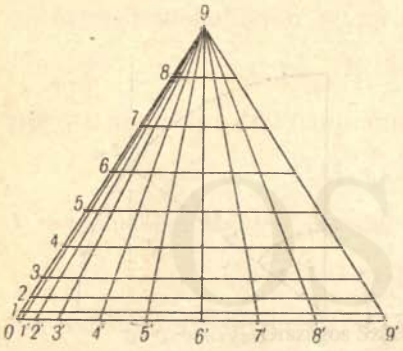


274. és 275. ábra. A meridiánsík hajlása a rajzsíkhoz.

szélétől a térképközép geographiai szélességével hajlik el. A meridiánok e szerint ellipsisek, melyek fél nagy tengelye r, melyek fél kis tengelye $r \cos \varepsilon = r \cos \beta_0 \sin (\lambda - \lambda_0)$, s melyek nagy tengelyei a középső meridiánhoz $\operatorname{tang} \gamma = \sin \beta \operatorname{tg} (\lambda - \lambda_0)$ egyenlet által adott szöglettel hajlanak. A térkép tehát ellipsis-szerkesztéssel könnyen lerajzolható.

Rendesen azonban az aequatori vetületet használjuk, a mely számára $\beta_0 = 0$, s a szem az aequator síkjában fekszik. Ekkor a parallelkörök síkjai mind a végtelen távol szemen mennek át, azaz egyenesek, melyek hossza a parallel sugarával egyenlő. Egyenleteink szerint is a parallelkörök ez esetben $r \cos \beta$ fél nagy és O kis tengelylyel bírnak, s $CG' = r \sin \beta$

távolságban állanak az aequatortól. A meridiánok tovább is ellipsisek r nagy féltengelylyel, azonban $\gamma = o$ lévén, mindegyik a középmeridiánba esik. A kis féltengelyek, melyek eszerint mind az aequator képébe esnek, $r \sin(\lambda - \lambda_0)$ hosszúsággal bírnak. A térkép tehát most is könnyen szerkeszthető ellipsisek rajzolása által, de kényelmesebben pontonkénti szerkesztés által is előállítható, ha a meridiánok metszeteit keressük az egyes parallelkörökkel. A $\lambda - \lambda_0$ hosszúságkülömbségű meridián síkja (274. és 275. ábra) $90^0 - (\lambda - \lambda_0)$ szöglettel hajlik a rajzsíkhoz, mely a szélső, köralakú meridiánt tartalmazza. A β szélességű parallelkör $CA = CB$ sugara $r \cos \beta$, tehát CD vetülete a rajzsíkon, $C = 90^0 - (\lambda - \lambda_0)$ lévén, $r \cos \beta \sin(\lambda - \lambda_0)$ leend. Ha tehát r-rel egyenoldalú háromszöget szerkesztünk (276. ábra), 9-ből és 9'-ből az oldalakra a parallelkörök $r \cos \beta$ sugarait lerakjuk, akkor az alappal párhuzamosan húzott oldalak a 9-ből húzott sugarak által a kivánt viszony szerint metszetnek.



276. ábra. Meridiánok és parallelák metszési pontjainak szerkesztése.

Rajzoljunk r sugárral kört (277. ábra) és húzzuk ennek két merőleges átmérőjét. A körnegyedeket 9 egyenlő részre osztjuk és az egyenlő geographiai szélességgel bíró pontokat egyenesekkel kötjük össze. Ezekre rárakjuk jobbra és balra a középmeridiántól az előbb talált szelvényeket, s ily módon pontokat nyerünk, melyek a meridiánok és parallelák metszéseit ábrázolják.

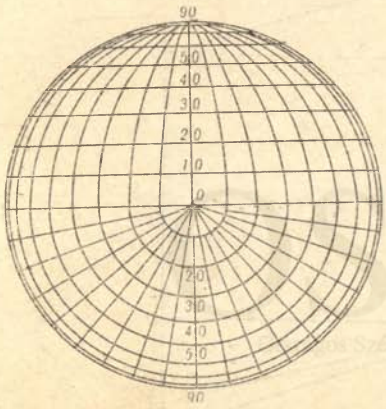
A poláris vetületben $\beta_0 = 90^0$, a parallelkörök képei tehát concentrikus körök a természetes $r \cos \beta$ sugarakkal, a meridiánok egyenesek, melyek a póluson átmennek és a hosszkülömbséggel egyenlő szögleteket képeznek. Szerkesztése a 277. ábrából közvetlenül érthető: a 9 egyenlő részre osztott körnegyedből lebocsátott merőlegesek a vízszintesen $r \cos \beta$ nagyságú darabokat vágnak le. E metszetek tehát az egymásra következő parallelkörök sugarai.

A torzulási viszonyokat a 278. ábra tünteti fel. A φ távol-

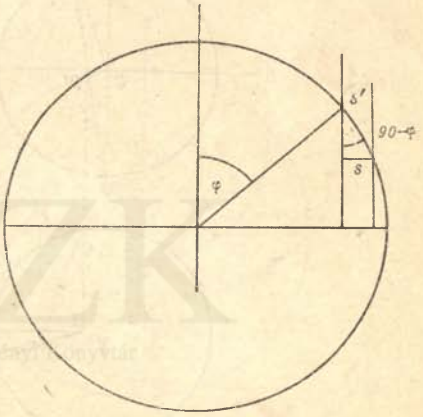
ságban a középtől álló s ívelem a párhuzamos látósugarak által s′ nagyságban vetül le, s e szerint

$$\frac{s'}{s} = \cos\varphi,$$

vagyis a térkép közepén átmenő vonal minden része a középtől való szögtávolság cosinusának arányában kisebbedik; az ezen vonalra merőleges irányban nagyítás vagy kicsinyítés nincs. A térkép szélén, ha ez félgömböt ábrázol, $\varphi = 90^0$, és $\frac{s'}{s} = 0$, azaz a térkép közepe felé irányított ívelemek elenyész-



277. ábra. Orthographikus aequator- és pólusvetület, a földsugár 1:265·4 millió.

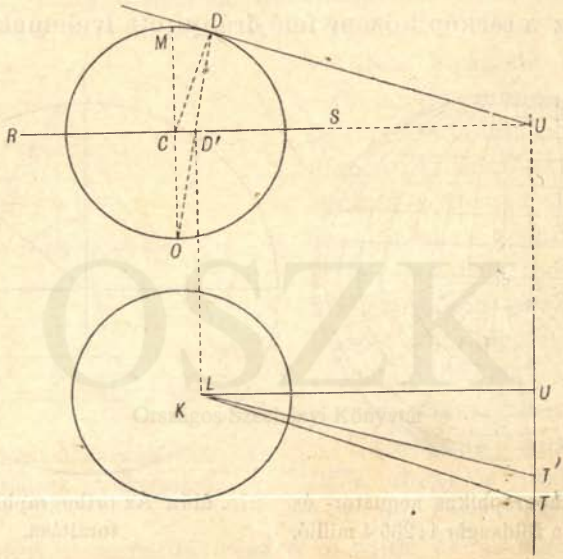


278. ábra. Az orthographikus vetület torzitása.

nek. Ez közvetlenül az ábrákból is látszik, mert hiszen a szélső látósugarak érintik a gömböt, az ezekbe eső érintett ívelem tehát projectióban nem látszik. A térkép ennélfogva nem lehet sem területhű, sem távolságtartó, és mivel a meridiánok és parallelák egymást általában ferde szögletek alatt metszik, a conformitás tulajdonságával sem dicsekedhetik.

A stereographikus vagy sik perspektivikus szögtartó vetület. A stereographiai vetület előáll, ha a szem a Föld felületében áll és valamennyi között a legfontosabb, mert szögtartó. Ennek kimutatására tekintsük meg a 279. ábrát, melyben O a szem helyzetét, RS a Föld középpontján átmenő rajzsíkot jelenti. A D ponton át húzzunk két egymással tetszőleges szögletet képező egyenest, DT és DT′-t, mely természetesen

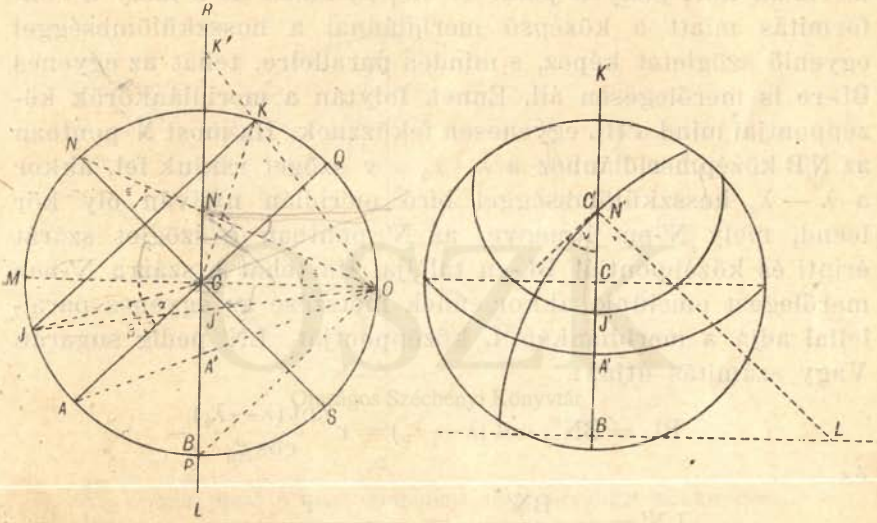
az oldalnézetben összeesik, s melynek metszési pontjai a rajzsíkkal egy a papir síkjára merőleges egyenest adnak. Felülről nézve, azaz a rajz síkjában az ábra alsó részét kapjuk, melyben ez egyenes UTT′ által van ábrázolva. A szem sajátos helyzete folytán a gömb felületében a D′DU és DD′U szögek egymással egyenlők és ennélfogva a TLT′ szög UT körül, mint tengely körül lehajlítható a rajz síkjába, a nélkül, hogy nagysága megváltoznék. Mivel ez minden tetszőleges D helyzetű és nagyságú szögre érvényes, be van bizonyítva, hogy TLT′=



279. ábra. A stereographikus vetület szögtartósága.

TDT′, azaz, hogy a szögek változatlanul lerajzolódnak. Ebből mindjárt egy másik fontos tulajdonság is következik. Ha a Föld felületén egy tetszőleges kört vonunk s ehhez az érintési kúpot szerkesztjük, akkor ennek minden palástvonala merőlegesen áll a kör peremére. A kúpot együtt képezve le a gömbbel, kapunk egy pontból, a kúp csúcsának képéből kiinduló sugarakat, melyek a szögtartás folytán az érintő kör képét minden pontban merőlegesen metszik. De azon görbe, mely egy pontból kiinduló sugárrendszert merőlegesen metsz, csak kör lehet. Ebből következik tehát, hogy a földfelület minden köre a térképben is kör leend, a mi a szerkesztést sok tekintetben tetemesen könnyíti.

Ha a térkép közepe tetszőleges $\beta_0 = \alpha$, λ_0 fekvésű, akkor a félgömb képét határoló meridián r sugarú kör, melynek függélyes átmérője a középső meridián, s a $\lambda - \lambda_0$ hosszúságkülömbségű meridián s β szélességgel bíró parallelkör szerkesztését a 280. és 281. ábra közvetíti. Az O szem a térkép M közepével diametrálisan szemközt fekszik. Mivel $\varepsilon = \frac{1}{2}$ MCN $= \frac{1}{2}$ OCS, mint peripheriás szöglet, lesz OCN′ háromszögből a pólus N′ képének távolsága számára a térkép közepétől a középső meridiánon számítva:



280. és 281. ábra. A stereographikus vetület szerkesztése.

$$CN' = r \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta_0}{2}\right).$$

Az aequatornak a térképen látható metszési pontja a középmeridiánnal A′ és

$$CA' = r \operatorname{tang} \frac{\beta_0}{2},$$

mivel az O-nál lévő szög, mint MCA peripheriás szöglete, $\frac{\beta_0}{2}$-lel egyenlő. A szerkesztésre nézve fontos, hogy van egy parallelkör, mely egyenes alakjában ábrázolódik, az természe-

tésen, melynek síkja a szemen megy át, tehát OP. A középmeridiánnal való metszésének képe B, s ennek távolsága

$$CB = r \operatorname{tang} \beta_0$$

s a parallelkör egyenes képe mindenesetre a középmeridiánra merőlegesen áll. E parallel fontos szerepet játszik még akkor is, ha a térkép határán kívül esnék, a mi mindig történik, ha $\beta_0 > 45^0$.

A stereographikus térkép tulajdonságainál fogva minden meridián kör, mely a pólus N′ képén halad át s mely a conformitás miatt a középső meridiánnal a hosszkülömbséggel egyenlő szögletet képez, s minden parallelre, tehát az egyenes BL-re is merőlegesen áll. Ennek folytán a meridiánkörök középpontjai mind a BL egyenesen feküsznek. Ha most N′ pontban az N′B középmeridiánhoz a $\lambda - \lambda_0 = v$ szöget rakjuk fel, akkor a $\lambda - \lambda_0$ hosszkülömbséggel bíró meridián nyilván oly kör leend, mely N′-en átmenve, az N′ pontban e szöglet szárát érinti és középpontját BL-en találja. Ha tehát e szárra N′-ben merőlegest emelünk, akkor ennek metszése az egyenes parallellal adja a meridiánkép L középpontját, LN′ pedig sugarát. Vagy számítás útján:

$$BL = BN' . \cot(\lambda - \lambda_0) = r \frac{\cot(\lambda - \lambda_0)}{\cos \beta_0}$$

és

$$LN' = \frac{BN'}{\sin(\lambda - \lambda_0)} = \frac{r}{\cos \beta_0 \sin(\lambda - \lambda_0)},$$

miután OP és AQ párhuzamossága miatt

$$BOC = NCN' = \beta_0,$$

CN′O tehát $\varepsilon + \beta_0$ lévén, BON-nel egyenlő. BO tehát BN′-nel egyenlő, vagy

$$BN' = \frac{r}{\cos \beta_0}.$$

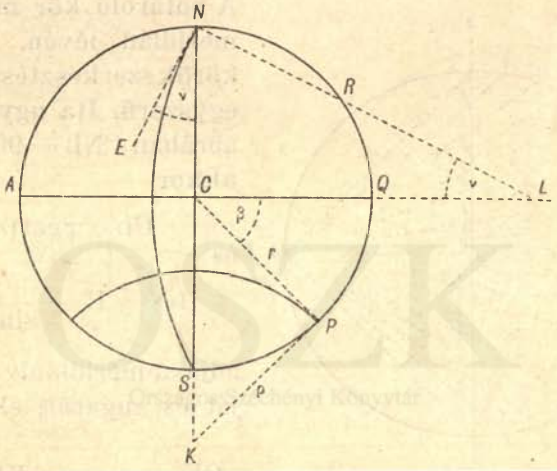
Ha tehát az N′ pont körül irányokat rakunk fel, melyek a középmeridiánnal sorban 10^0, 20^0.. szögleteket képeznek, akkor ezek meghosszabbítása az egyenes parallelig adják a meridiánképek centrumát, melyek mind a pólus képén mennek át.

A parallelkörök szintén körök, melyek minden meridiánt, tehát a középsőt is merőlegesen metszik. Ennek folytán ezek centrumai mind a középmeridiánon feküsznek, s a kör teljes meghatározására elegendő, ha a középvonallal való két metszését ismerjük. Legyen az JK a β szélességgel bíró parallel, akkor az említett két metszési pont képe J′ és K′. Ámde

$$MOJ = \tfrac{1}{2} MCJ = \tfrac{1}{2}(\beta_0 - \beta)$$

és

$$MOK = \tfrac{1}{2} MCK = \tfrac{1}{2}(180^0 - \beta_0 - \beta) = 90 - \tfrac{1}{2}(\beta_0 + \beta).$$



282. ábra. A stereographikus aequatorvetület szerkesztése.

Ebből következik továbbá:

$$CJ' = r \operatorname{tang} \frac{\beta_0 - \beta}{2} \quad \text{és} \quad CK' = r \operatorname{cotg} \frac{\beta_0 + \beta}{2}.$$

Ha C′ (281. ábra) a β parallel középpontjának képe és C′J′ = C′K′ annak sugara, akkor nyilván:

$$CC' = \frac{r}{2}\left(\cot \frac{\beta_0 + \beta}{2} - \operatorname{tang} \frac{\beta_0 - \beta}{2}\right)$$

és

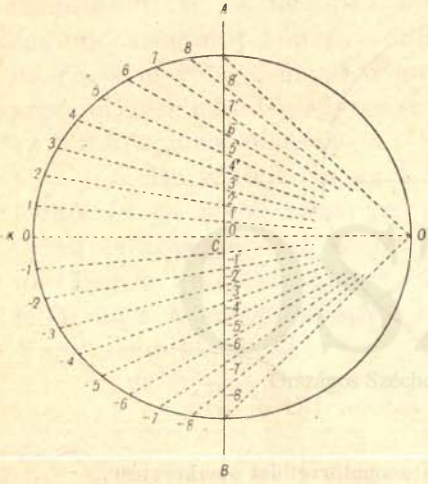
$$C'J' = \frac{r}{2}\left(\cot \frac{\beta_0 + \beta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\beta_0 - \beta}{2}\right).$$

Az aequator számára $\beta = o$ teendő, tehát ez oly kör, melynek sugara és centruma:

$$C'A' = r \cot \beta_0 \text{ és } CC' = r \operatorname{cosec} \beta_0,$$

vagyis a mely a határmeridián vízszintes átmérőjének két végpontján megy át, a mit onnan is látni, hogy a rajzsíkot egy a papirra merőleges, a C ponton átmenő egyenesben metszi.

Ha a stereographikus aequatervetületet keressük, akkor az előbbi formulákban mindenütt $\beta_0 = 0$ teendő. A félgömböt határoló kör sugara ismét r, a függélyes és vízszintes átmérő a középmeridián és az aequator képe. Amazon feküsznek az összes parallelák, emezen az összes meridiánok középpontjai.



283. ábra. A stereographikus aequatorvetület más szerkesztése.

A határoló kör most szintén meridián lévén, a parallelkörök szerkesztése különösen egyszerű. Ha ugyanis a 282. ábrában $CNL = 90^0 - (\lambda - \lambda_0)$, akkor

$$CL = r \cot(\lambda - \lambda_0)$$

és

$$LN = R = \frac{r}{\sin(\lambda - \lambda_0)}$$

adja a meridiánív középpontját és sugarát, ellenben

$$CK = \frac{r}{\sin \beta} \text{ és } KP = r \cot \beta$$

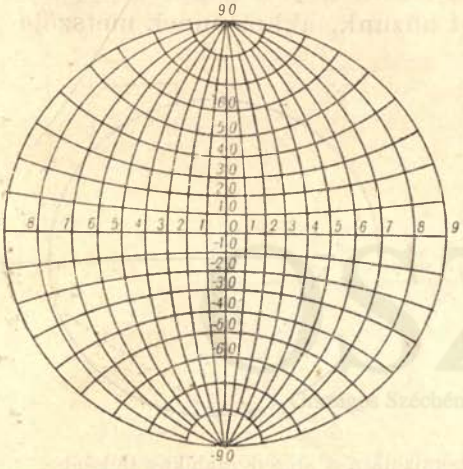
a β szélességű parallel centrumát és sugarát. Ha ugyanis a β geographiai szélességnek megfelelő sugarat húzzuk, és ennek végpontjában érintőt emelünk, mely a középmeridiánt K-ban metszi, akkor a KP sugarú kör merőlegesen fog állani úgy KC-re, mint a határoló meridiánra. Szembetünő a kölcsönösség a két formularendszer között; az egyikben β ugyanazon szerepet játsza, mint a másikban $\lambda - \lambda_0$.

A szerkesztés még másként is történhetik. Ha a meridián osztási pontjaihoz (283. ábra) a szemből látósugarakat vonunk, akkor ezek a rajzsíkot és a közép AB meridiánt a jelzett pontokban metszik. A parallelák tehát körök, a melyek az 11′1, 22′2.. pontokon mennek át. Minthogy az aequator a meridiánok által teljesen úgy osztatik, mint ezek a parallelák által,

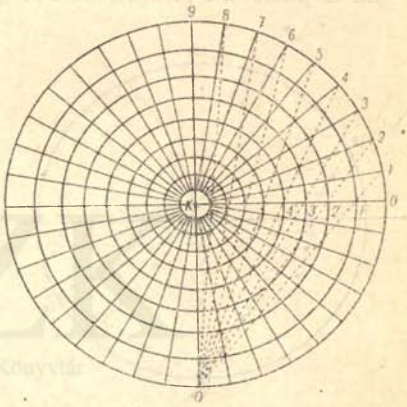
úgy az aequator képén ugyanazon beosztás eszközlendő, mint AB-n és a meridiánok körök lesznek, a melyek ezen osztási pontokon és a két póluson mennek át.

A kész hálózatot a 284. ábra tünteti fel.

Még egyszerűbb a stereographikus poláris vetület. A meridiánok ismét egyenesek, melyek a póluson mennek át s egymást a hosszkülömbséggel egyenlő szögletek alatt metszik, a parallelák concentrikus körök. Sugaraikat megkapjuk, ha a 9 egyenlő részre osztott körnegyed osztási pontjaihoz a látó-



284. ábra. Stereographikus aequatori vetület. 1 : 227·8 millió.



285. ábra. Stereographikus poláris vetület. 1 : 265·4 millió.

sugarakat húzzuk (285. ábra) s ezek metszését a rajzsikkal megjelöljük. E sugarak nagysága

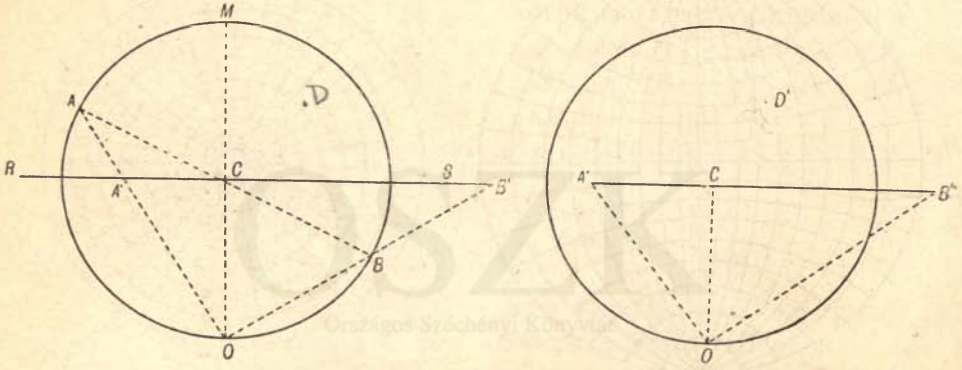
$$\rho = r \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right),$$

mint az közvetlenül az általános formulákból is következik, ha bennök $\beta_0 = 90^0$.

Minden eddig és később tárgyalandó poláris projectiónál ugyan derékszög alatt metszik egymást a meridiánok és parallelkörök, de azért ezek nem szögtartók, azaz nem tartja meg eredeti nagyságát minden tetszőleges fekvési szöglet; csak a stereographikus vetület bír ezen tulajdonsággal.

Mivel e vetületben minden körnek képe is kör, nagyon

könnyen rajzolható e térképbe két pont között lévő legrövidebb távolság. Ez ugyanis azon legnagyobb kör íve, mely a két adott A′ és D′ pont között fekszik (286. ábra). A szerkesztés tüstént lehetséges, ha a legnagyobb körnek még egy harmadik pontját, például A-nak B antipodus-pontját ismerjük. Ennek megfelelőleg az első rajz a térkép közepén és az A ponton megy át, és természetesen a B pontot is magában foglalja. A megfelelő képpontok A′ és B′. Ha tehát az adott térképen A-t összekötjük a térkép közepével, s itt az összekötőn a CO merőlegest húzzuk, akkor O a szem helyéül fogható fel. Ha az O pontban A′O-ra merőlegest húzunk, akkor ennek metszője



286. ábra. A legrövidebb távolság berajzolása a stereographikus térképbe.

az A′C-vel a keresett antipodus-pont B′ képe. A kör, tehát most úgy szerkesztendő, hogy A′, D′, B′ pontokon menjen át.

A térkép torzulási viszonyai a 287. ábrából adódnak, megjegyezvén, hogy a conformitás miatt e torzulás egy pont körül minden irányban ugyanaz. Az ábra szerint:

$$u = s\cos\varphi \text{ és } v = s'\cos\varphi, \text{ úgy hogy } \frac{u}{v} = \frac{s}{s'}.$$

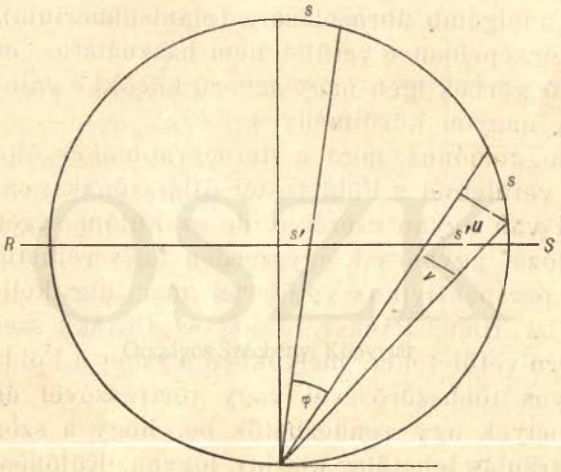
De u és v egyszersmind oly körív gyanánt tekinthető, mely ugyanazon centrális szöglethez és $2r\cos\varphi$, illetve $\frac{r}{\cos\varphi}$ sugárhoz tartozik, úgy hogy

$$\frac{u}{v} = \frac{2r\cos\varphi}{r\sec\varphi} = 2\cos^2\varphi.$$

Innen:

$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

még pedig teljesen függetlenül az iránytól. Ennek következtében a térkép mértéke is más ugyan pontról-pontra, de ugyanaz valamely pont körül húzható tetszésszerinti irányban. A térkép közepén $\varphi = 0$ és e kép kétszer kisebb, mint eredetije, a félgömböt ábrázoló térkép szélén $\varphi = 45$ és $\frac{s'}{s} = 1$, minden hosszúság tehát a térkép szélén kétszer akkora minden irány-



287. ábra. A stereographikus térkép torzitása.

ban, mint a térkép közepén, területek tehát a szélen 4-szer nagyobbak, mint a térkép közepén. A térkép tehát nem távolság, sem területtartó, a mint ezt a conformitás különben már eleve is kizárja.

E vetület segítségével a fél Földnél nagyobb terület is ábrázolható, sőt az egész Föld is, azon kis terület kivételével, melyen a szem fekszik. Az egész Földet ábrázoló térkép széle számára $\varphi = 90^0$, a torzulás tehát végtelen nagy. Mivel azonban a torzulás már a fél gömb határán túl gyorsan nagyobbodik, azért ezen túl nem szokás alkalmazni.

Mivel a mérték egy pont körül vont kör belsejében az iránytól független, könnyű módon szerkeszthetünk mértéket,

mely a térkép tetszésszerinti pontjában alkalmazható. A 271. ábra előírása szerint rakjuk fel a mértéket, mint ez a térkép közepe számára érvényes. Vele párhuzamosan, egyenlő, de tetszésszerinti közökben vonjunk egyeneseket, melyek a mértéket 10^0, 20^0.. középponti távolságban adják. Az egymásra következő egyenesekre rárakjuk a legalsó mérték $\sec^2 10^0$, $\sec^2 20^0$..-szorosát és összekötjük a megfelelő pontokat folytonos görbe vonal által. Az ab vonal pl. a mértékegység értékét adja 20° távolságban a térkép közepétől, a melylyel e pont körül minden távolság lemérhető.

Könnyű szerkesztése folytán e térképet előszeretettel használják a félgömb ábrázolására (planisphaerium), de kisebb területek térképeiben e vetület nem használatos, mert a hálózatot alkotó görbék igen nagy sugarú körökké válnak, melyek berajzolása nagyon körülményes.

Úgy a gnomónos, mint a stereographiai és általában minden intern vetületnél a Föld testét átlátszónak gondoljuk. Bal és jobb fel van ugyan cserélve, de ez külömbséget nem tesz, mert a hálózat ugyancsak egyszerűen felcserélhető.

Több perspektivikus vetülettel már alig kell foglalkoznunk. De la Hire, Parent, James és Clarke szerkesztettek ugyan extern vetületeket, melyekben a szem a Föld sugarának egy bizonyos többszörösével vagy törtrészével áll a felület fölött, s melyek úgy rendezhetők be, hogy a szög, távolság és területtorzulás lehetőleg kicsiny legyen. Különösebb előnyei azonban e vetületeknek nincsenek s az eddig mondottak folytán bárki képes lesz meghatározott szempont számára bármily perspektivikus vetületet szerkeszteni és számítani.

III. FEJEZET.

Azimuthális sík vetületek.

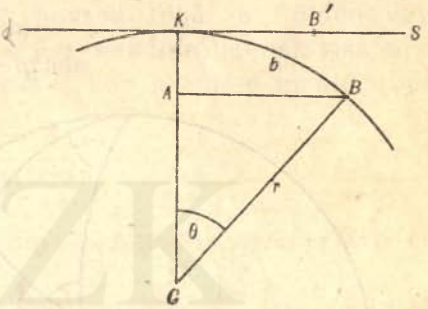
A perspektivitás elvével magától is jár az azimuthálitás elve, mely szerint minden képpont a térkép közép irányával változatlan azimuthot tüntet fel. Ha ugyanis a középső látósugáron át és az eredeti egy pontján át síkot fektetünk, akkor ezen síkban mindenesetre a perspektivikusan rajzolt térkép

képpontja is foglaltatik. Most a perspektivitás elvét elejtve, az azimuthalitását továbbra is megtartjuk, s más rajzolási módot vezetünk be, mely egyenesen aequidistáns és aequivalens térképhez vezet.

A Postel-féle aequidistáns azimuthális vetület. Mint neve is mondja, minden képpont ugyanazon távolságban van a térkép közepétől, mint az eredetin. Legyen a 288. ábrában RS a rajzsík, mely a Földet a térkép közepén érinti. Ha B a földfelület egy lerajzolandó pontja, akkor a követelménynek eleget tettünk, ha

KB′ egyenes = KB ívvel,

még pedig úgy, hogy B és B′ mindig ugyanazon a KC egyenest magában foglaló síkban feküdjék. Az utolsó tétel az azimuthálitást biztosítja. Ha a KB = b ívhez tartozó centrális szöglet ϑ, K és B geographiai coordinátái β_0 λ_0, illetve β, λ, akkor a 289. ábra szerint



288. ábra. A Postel-féle aequidistáns térkép szerkesztése.

$$\cos\vartheta = \sin\beta_0 \sin\beta + \cos\beta_0 \cos\beta \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$\sin z = \sin(\lambda - \lambda_0)\frac{\cos\beta}{\sin b} \quad \text{és} \quad b = \frac{\pi}{180} r\vartheta.$$

B helyébe természetesen mindig egy kerekszámú parallel és meridián metszési pontját teszszük. A szerkesztés elég egyszerű: a rajzlap közepén át vonunk egy függélyes egyenest (290. ábra) s ezen felveszszük alkalmasan a K középpontot. Azután tegyünk $\beta = o$ és ezen β számára sorban $\lambda - \lambda_0 = 0^0$, 10^0, 20^0.. éppúgy $\beta = 10^0$ és ismét $\lambda - \lambda_0 = 0^0$, 10^0, 20^0.. s. i. t. Ily módon kapjuk sorban az egyes parallelák metszési pontjait minden meridiánnal kifejezve z és ρ által. A z szögletet felrakjuk, mint ezt a 290. ábra mutatja, kelet felé, ha positiv s szárára ráviszszük a K pontból a b távolságot. Az összetartozó metszési pontokat alkalmasan simuló görbékkel kötjük össze.

Tetemesen egyszerűbb az aequatorvetület, mely számára $\beta_0 = 0$ teendő. Az egyenletrendszer ekkor:

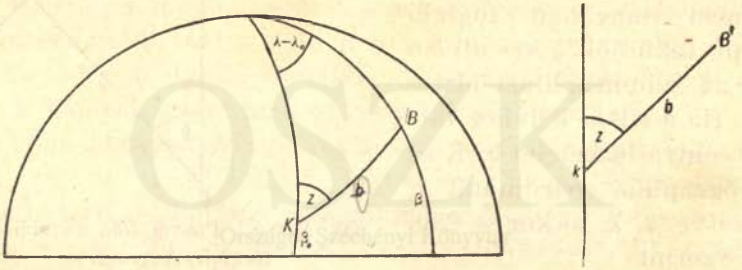
$$\cos\theta = \cos\beta\cos(\lambda - \lambda_0);\ \sin z = \sin(\lambda - \lambda_0)\frac{\cos\beta}{\sin\theta} \text{ és } b = \frac{\pi}{180} r\theta.$$

Ha a második egyenletből sin θ értékét kiveszszük, négyzetre emeljük és a szintén négyzetre emelt első egyenlethez hozzáadjuk, akkor az

$$1 = \cos^2\beta\left(\cos^2(\lambda - \lambda_0) + \frac{\sin^2(\lambda - \lambda_0)}{\sin^2 z}\right)$$

egyenlet keletkezik. Ebből

$$\sin^2 z = \frac{\sin^2(\lambda - \lambda_0)}{\sec^2\beta - \cos^2(\lambda - \lambda_0)},$$



289. és 290. ábra. A Postel-féle aequidistáns-térkép szerkesztése.

tehát

$$\cos^2 z = 1 - \sin^2 z = \frac{\sec^2\beta\sin^2\beta}{\sec^2\beta - \cos^2(\lambda - \lambda_0)},$$

és ennek folytán

$$\operatorname{tang} z = \sin(\lambda - \lambda_0)\operatorname{cotg}\beta.$$

Ezen térkép számára kényelmes táblázatok vannak, melyek β és $\lambda - \lambda_0$ argumentummal θ és z-t adják, úgy hogy a pontonkénti szerkesztés minden számítás nélkül eszközölhető.

Különösen egyszerű a poláris vetület; ez concentrikus, egyenlő távolságban álló körökből áll, melyeket egyenlő szögtávolságban álló sugarak metszenek. Mivel $\beta_0 = 90^0$, azért $\cos\theta = \sin\beta$, vagy $\theta = 90^0 - \beta$ és ezért a körök sugarai $b = \frac{\pi}{180} r(90^0 - \beta)$. A térképpel az egész Föld felülete másolható; mivel a térkép

közepének antipóduspontja minden azimuthban 180°-nyira fekszik ezen középponttól, azért ezen antipóduspont képe nyilván πr sugarú kör leend. A torzulások tehát a térkép széle felé nagyon tetemesek, hiszen a térkép közepének diametrális pontját körré húzzák szét.

A torzulások is a 288. ábrából adódnak. A térképközéphez húzott irányban a mérték nyilván mindenütt ugyanaz, torzulás tehát nincs, de annál nagyobb ez az ezen irányra merőlegesben, azaz a középpontot körülvevő kör kerületén. A B′ képpont ugyanis oly körön fekszik, melynek sugara $b = \frac{\pi}{180} r\theta$. míg a B eredeti pont az AB húr végpontjában. Az egyenlő θ távolsággal bíró pontok tehát a Földön egy $r \sin\theta$ sugarú körön vannak, s a két kör kerületének viszonya adja nyilván a torzulás mértékét e kör kerülete mentén; ez

$$\frac{s'}{s} = \frac{\pi}{180} \frac{\theta}{\sin\theta}.$$

Addig, míg θ kicsiny, $\frac{\pi}{180}\theta$ és $\sin\theta$, mint kis szöglet íve és sinusa közel összeesik. Ha $\theta = 30°$, akkor már $\frac{s'}{s} = \frac{30\,\pi}{\frac{1}{2}.180} = \frac{\pi}{3} = 1{\cdot}047$ és a félgömb szélén $\theta = 90°$, tehát $\frac{s'}{s} = \frac{\pi}{2} = 1{\cdot}571$. A középponton átmenő egyenesre merőleges irányban tehát minden távolság a térkép szélén 57 perczenttel túlzott; az egész Föld esetében $\theta = 180°$ és $\frac{s'}{s} = \infty$, azaz az antipodus pont többé nem pontképű, hanem véges vonal, mint ezt tényleg láttuk.

A térkép jó szolgálatokat tesz, ha ábrázolni akarjuk azon helyek összeségét, mely egy adott helytől egyenlő távolságra van.

Ha az azimuthalitás elvével kapcsoljuk a területmegmaradás követelményét, akkor keletkezik

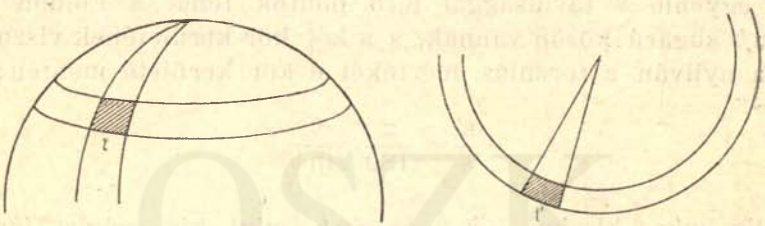
Lambert aequivalens azimuthális vetülete. Ha a térkép középpontja körül a Földön körgyürűt írunk le, akkor ennek képe a vetületen is körgyürű legyen, a mi az azimuthalitást fejezi ki. Ha a két gyürű területe ugyanaz, akkor nyilván ezek n-ed részei is egyenlők. Azaz apró trapezeket kapunk (291. ábra), melyek alakra nézve ugyan különbözők lehetnek,

melyek területei azonban egyenlők. Ilyen apró, concentrikus körök és ezeket metsző gömbi sugarakkal határolt végtelen kis trapezre bontható azonban minden véges és tetszőleges alakú terület, és ennélfogva az aequivalentia követelménye, hogy (292. ábrában) a KBA calotta felülete egyenlő legyen az azt ábrázoló kör területével. Ha a még ismeretlen képkör sugarát ρ-val jelöljük, és a calotta magasságát DK = h tesszük, akkor

$$2r\pi h = \rho^2\pi \text{ vagy } \rho^2 = 2rh,$$

mely egyenlet

$$\frac{KB}{KD} = \frac{KO}{KB}$$



291. ábra. A területtartóság elve.

alakban is írható, a miből következik, hogy ρ a calottának húrja. Ezért egyszerűbben:

$$\rho = 2r\sin\frac{\theta}{2},$$

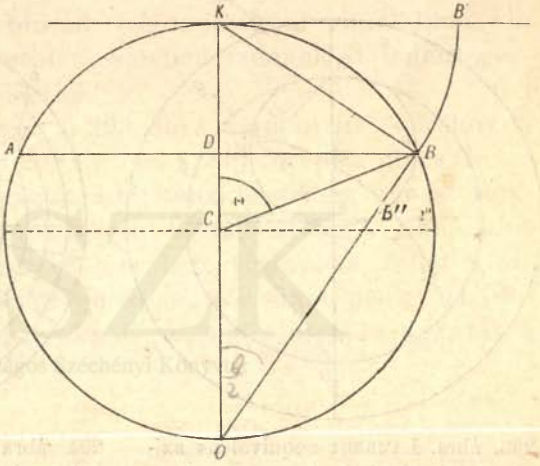
a hol, mint az előbbi vetületnél is:

$$\cos\theta = \sin\beta\sin\beta_0 + \cos\beta\cos\beta_0\cos(\lambda - \lambda_0) \text{ és } \sin z = \sin(\lambda - \lambda_0)\frac{\cos\beta}{\sin\theta}.$$

A térkép számítás útján való előállítása tehát majdnem teljesen ugyanaz, mint a megelőzőé, s az egész külömbség csak abban áll, hogy θ és z kiszámítása után a 290. ábrának megfelelve nem $b = \frac{\pi}{180} r\theta$, hanem $\rho = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ hosszúságot rakunk fel a z azimuth alatt meghúzott egyenesre. Ha β_0 és λ_0 adva van, akkor egyszer s mindenkorra táblázatok számíthatók, melyek $\lambda - \lambda_0$ és β argumentummal adják a parallelák és meridiánok metszési pontjainak poláris vagy orthogonális

coordinátáit. Az előbbi eset számára LAMBERT, az utóbbi számára M. TÓTH ADOLF számított terjedelmes táblázatokat.

Tisztán szerkesztő úton is járhatunk el azonban, ha a lerajzolandó terület stereographikus térképe már megvan, a miről a 292. ábra megtekintése könnyen meggyőz, ha O-ban a szemet képzeljük és a stereographikus B″ képnek viszonyát keressük a B képponthoz. Minden további magyarázat nélkül könnyen érthető lesz a következő eljárás. Legyen (293. ábra) a félgömb stereographikus térképe és B egy tetszőleges parallel és meridián metszési pontja. Mivel a LAMBERT-féle térkép azimuthális, azért ezen pont az új vetületben is KB egyenesen lesz, mert hiszen SKB az azimuthalitás elve miatt ugyanaz marad, mint a szögtartó stereographikus vetületen. Legyen KB′ = KB és vonjunk OB′-en át húrt, mely a kört T-ben metszi. Ekkor ST = ρ azon húr, mely a LAMBERT-féle vetületben a B képpontját magában foglaló kör sugarával azonos. Ha tehát ST-t körzőbe veszszük és a térkép közepétől felrakjuk KB irányra, úgy hogy KB″ = ST, akkor B″ a LAMBERT-féle azimuthális aequivalens térképnek megfelelő pontja. A félgömböt határoló kör, azaz Q pont számára



292. ábra.
LAMBERT aequivalens azimuthalis térképe.

$$\rho = 2r \sin 45^0 = \sqrt{2}.r, \text{ vagy } SQ = \sqrt{r^2 + r^2},$$

úgy hogy a LAMBERT-féle vetületben a határoló kör sugara $\sqrt{2} = 1{\cdot}41$-szer akkora, mint a stereographikus térképben.

Az aequatoriális projectió szerkesztése szintén nagyon egyszerű. Vagy az aequatori stereographikus vetületből indulunk ki, vagy pedig a POSTEL-féle megfelelő vetület egyszerű képleteit használjuk:

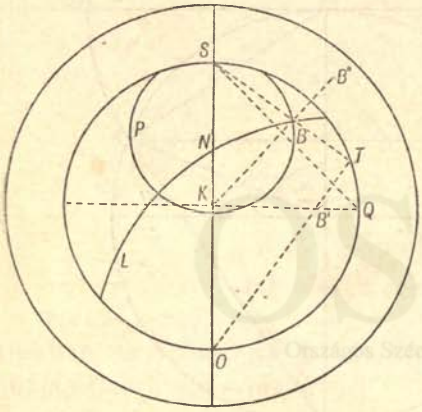
$$\cos\vartheta = \cos\beta\cos(\lambda - \lambda_0) \text{ és } \operatorname{tang} z = \cot\beta\sin(\lambda - \lambda_0),$$

melyekhez még

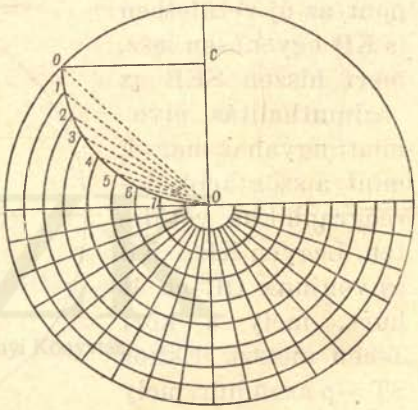
$$\rho = 2\,r\sin\frac{\vartheta}{2}$$

járul. Ezen vetület számára már egyszerű táblák szerkeszthetők, melyek minden β és $(\lambda - \lambda_0)$-val adják z és ρ poláris coordinátákat.

A poláris vetületben a meridiánok ismét a hosszkülömbséggel egyenlő szögletek alatt egymást metsző sugarak, a



293. ábra. LAMBERT aequivalens azimuthális térképének szerkesztése.



294. ábra. LAMBERT aequivalens azimuthális pólvetülete, földsugár 1:246 millió.

parallelák concentrikus körök, melyek sugarai könnyen meghatározhatók. Ha ugyanis 0 a pólus, akkor ϑ a pólustávolság, vagy $90^0 - \beta$ és ennek folytán

$$\rho = 2\,r\sin\tfrac{1}{2}(90^0 - \beta),$$

vagyis a β szélességű parallelkör radiusa egyenlő pótszögének húrjával. Ha tehát a 294. ábrában az egymást merőlegesen keresztező tengelyeket felvettük, akkor rárakjuk az O pontból $OC = r$ hosszúságot és C körül leírunk r sugarú kört, melynek negyedét 9 egyenlő részre osztjuk. Az O pontból meghúzzuk ezen osztási pontokhoz a húrokat, melyek végpontjain átmennek az egyes parallelkörök képei.

A LAMBERT-féle vetülettel ugyan az egész Föld is ábrá-

zolható, s ez esetben $\theta = 180^0$ lévén, $\rho = 2r$, de rendesen csak félgömböt vagy kisebb területet rajzolnak le segítségével. Tetszetős alakjánál, könnyű szerkesztése és különösen az alkalmazásokra fontos aequivalentia miatt minden esetben nagyon ajánlható. Ha a másolatot az egész Földre terjesztenők ki, akkor a térképközép antipóduspontja, mint az előbbi Postel-féle vetületben, szintén 2r sugarú körré húzódik szét és ezért e pontot környező calotta képe vékony körgyürűvé válik, a mi mindenesetre az ily tág határokban alkalmazott vetület nagymérvű torzulását mutatja.

Végül pedig meg akarom említeni, hogy a két utolsó térkép hálózata igen complikált trigonometriai vonalakból áll, melyek csak a poláris vetület esetében mennek át ismert görbékké: körré és egyenesekké.

A torzulási viszonyok a 292. ábra alapján itt is könnyen tanulmányozhatók. A térkép közepe körül torzulás nincs, továmenve azonban, a távolságok a térkép közepéhez képest folytonosan kisebbednek, mert hiszen a húr mindig kisebb, mint a hozzátartozó ív. A sugárra merőleges irányban, tehát a térképközép körül leírt kör peremén, a távolságok pedig nagyobbak a természetes távolságoknál. A sugár mentén ugyanis a nagyítási viszony

$$\frac{s'}{s} = \frac{\text{KB húr}}{\text{KB ív}} = \frac{2r\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\pi}{180}r\theta} = \frac{180}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}},$$

és tudvalevőleg mindig áll

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\pi}{180}\,\frac{\theta}{2}} < 1,$$

úgy hogy a távolságok, az eredetieknél kisebbek, kivéve azon környezetben, melyben a szöglet ívét sinusával szabad felcserélni.

A kerület mentén ellenben a torzulás

$$\frac{s'}{s} = \frac{\text{KB húr}}{\text{BD}} = \frac{2r\sin\frac{\theta}{2}}{r\sin\theta} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

a mi mindig nagyobb, mint egy. A Földön ugyanis a B pontok egy BD sugarú parallelkörön feküsznek, míg ennek képe a vetületen a KB húrral, mint sugárral leírt kör. Mivel azonban $\cos\frac{\theta}{2}$ nagyobbodó távolság mellett csak nagyon lassan nő, azért a vetület torzítása általában véve kicsiny. A félgömb szélén $\theta = 90^0$, tehát a sugármenti torzulás $\frac{s'}{s} = \frac{4}{\sqrt{2}\pi} = 0{\cdot}901$, ellenben a kerületmenti nagyítás $\frac{s'}{s} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414$. Az egész Föld számára $\theta = 180^0$ és e két torzulás illetve $\frac{2}{\pi} = 0{\cdot}637$ és ∞, azaz a térképközép diametrális pontja véges görbévé torzul.

Önkényes síkvetületek. A síkra való vetítésnek még egynéhány conventionális példáját is adhatjuk. Az Arrowsmith-féle vagy globuláris vetület igen alkalmas planiglobium előállítására. A határkör két merőleges átmérője illetve a középmeridiánt és a fél aequatort jelenti. Úgy ezeket, mint a félkört 18 egyenlő részre osztjuk, s a megfelelő osztási pontokat körívekkel kötjük össze. A parallelák áthaladnak a határkör és a középső meridián megfelelő osztási pontjain, a meridiánok a két póluson és az aequator egy pontján.

A térkép némileg hasonlít a stereographikus aequatori térképhez, de sem nem szögtartó, sem nem aequivalens vagy távolságtartó. Ha az egyenlő mértékben készült két mondott vetületet egymásra fektetjük, akkor födik egymást a két merőleges átmérő, a határoló kör és a parallelköröknek ezzel való metszési pontjai, ellenben nem esik össze a meridiánok és a parallelák metszése a középmeridiánnal. Ha a többi szerkesztés változatlan meghagyásával a parallelköröket oly körívekül szerkesztjük, melyek átmennek a határoló kör egyenlő közeire osztott pontjain és a középső meridián azon pontjain, melyek a stereographikus és globuláris vetület között középen feküsznek, akkor nyerjük az úgynevezett Neill-féle módosított globuláris vetületet, mely valamivel közelebb áll a stereographikus vetülethez, mint amaz.

E szerkesztés alapján minden nehézség nélkül megadhatnók a fellépő körök középpontjainak fekvését és sugarait, ha ugyan kivánatos volna. Egyik vagy másik planiglobium ugyan e vetületben készült, általában véve pedig igen csekély elterjedésnek örvend.

IV. FEJEZET.

Vetületek lefejthető felületekre.

Áttérünk most, noha a síkra való vetítésnek még szokásban volt szerkesztései sincsenek kimerítve, azon másolatokra, melyeket lefejthető felületekre rajzolhatunk. Itt természetesen csak a kúp és a henger jöhet szóba. A kúpvetület tulajdonképen a legáltalánosabb vetület, mert azon kúp, melynek csúcsa a végtelenségbe esik, henger, és a melynek csúcsa a Föld felületével esik össze, sík.

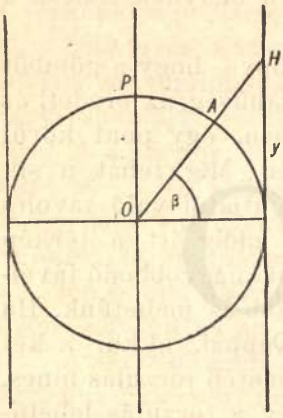
A lefejthető vetületeknek legfőbb előnye, hogy a gömböt egy kör mentén érintik, hogy tehát teljes hűség az eredeti és másolata között, nem mint a sík esetében, egy pont körül található, hanem egy egész vonal mentén. Míg tehát a sík vetületekben a torzulás a térkép középpontjától való távolodással általában minden irányban nőtt, addig itt a térkép közepén átmenő vonal két oldalán van csak nagyobbodó távolsággal nagyobbodó torzulás. De még tovább is mehetünk. Ha a gömböt metszük a hengerrel vagy a kúppal, akkor a két felületnek két közös köre van, melynek mentén torzulás nincs, s melyek fekvése úgy szabható meg, hogy a torzulás lehetőleg egyenletesen oszoljék el. A síkkal is megtehetnők ugyan, hogy érintő helyett metsző síkra vetitünk, midőn is elérnők azt is, hogy a hűség egy kör mentén meglegyen. De ennek nem volna valami nagy előnye, mert ezzel szemben a térkép legfontosabb része, a közép, annál nagyobb torzulást mutatna.

A vetítés modora e mellett még mindig teljesen önkényes. Vagy a perspektivitás elvét használhatjuk itt is, vagy az azimuthalitáshoz közel álló elvet, vagy teljesen conventionálisan járhatunk el. Mivel itt nem egy térképi középpontról, hanem középvonalról van csak szó, az azimuthalitás követelménye előbbi foglalatjában nem állhat meg. Legczélszerűbb helyébe azon követelményt tenni, hogy mindazon pontok, melyek a középvonalra merőleges függélyes síkban feküsznek, a térképen is a középvonalra merőlegesen álló egyenesben találjanak helyet. Bármily módon is készült legyen azonban a térkép, a

hengert vagy kúpot egy palástvonala mentén felhasítjuk és a síkba kiterjesztjük.

Lássuk legelőbb a fontosabb hengervetületeket, noha analytikai szempontból nem szükséges különbséget tenni ezek s a kúpvetület között. A leglényegesebbnek látszó különbség még az lehetne, hogy a henger a gömböt legnagyobb kör mentén érinti, míg a kúp egy kisebb kör mentén. Ezáltal a hengervetületek vagy az aequatort, vagy valamely meridiánt részesítenek előnyben, míg a kúpvetületek bármely parallelre. mint középvonalra vonatkozhatnak.

Perspektivikus hengervetület. A perspektivikus hengervetület (295. ábra) létrejön, ha a hengert az aequator mentén érintjük a Földdel, úgy hogy tengelye a Föld tengelyébe essék, s a Föld középpontjából vetítjük látósugarakkal az egyes pontokat a henger palástjára. A meridiánok, mint a Föld és henger tengelyén átmenő síkok, egyenlő távolságban álló palástvonalakat metszenek ki, úgy hogy a háló a henger lefejtése után egyenes aequatorból és erre merőlegesen álló egyenlő távolságokban következő párhuzamos meridiánokból áll. A parallelkörök síkjai merőlegesen állnak a henger tengelyére, lefejtésük után tehát az aequatorral párhuzamos, a meridiánokat merőlegesen metsző egyeneseket kapunk. Ez minden hengervetületnek közös tulajdonsága, ha az érintkezés az aequator mentén történik, és csupán a parallelák távolsága az aequator képétől változhatik a rajzolási mód szerint. A perspektivikus vetületnél e távolság nyilván



295. ábra. Perspektivikus hengervetület.

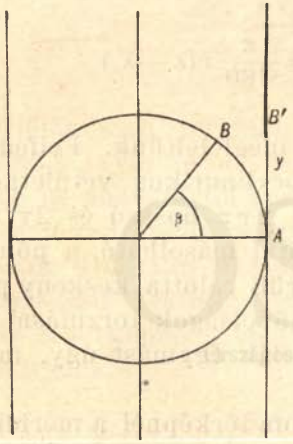
$$y = r \operatorname{tang} \beta,$$

míg az összes hengeres aequatori térképvetületek számára a meridiánok távolsága a kezdeti meridiántól

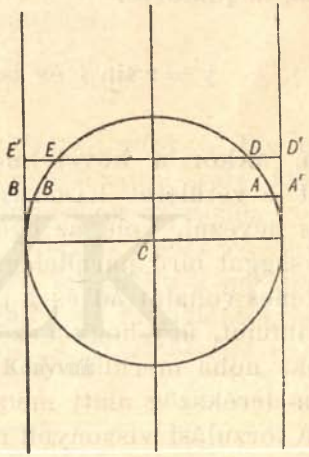
$$x = \frac{\pi}{180} r (\lambda - \lambda_0)$$

által van adva. A perspektivikus térkép nem adhatja az egész Föld mását, mert a pólus számára $y = \infty$, mivel a látósugár ez esetben a henger tengelyével esik össze. E térkép semmi különös előnyt nem tüntetvén fel, használatban nincs.

Aequidistáns hengervetület. Az aequidistantia a lefejthető vetületeknél természetesen csak a középvonaltól való távolságra vonatkozhatik, úgy hogy a távolságok a hengervetület esetében az aequator mentén és a rá merőleges meridiánok hosszában megmaradnak. E szerint az aequidistans aequatori hengervetületben (296. ábra) ismét



296. ábra. Aequidistáns hengervetület.



297. ábra. Aequivalens hengervetület.

$$x = \frac{\pi}{180} r (\lambda - \lambda_0)$$

maradván, y-t úgy választjuk, hogy AB′ egyenes AB ívvel legyen egyenlő, azaz

$$y = \frac{\pi}{180} r\beta.$$

A hálózat e szerint csupa négyzetből áll és lehető legegyszerűbb vetület, mely képzelhető, mert minden úgynevezett milliméterpapirossal azonos. Mindazonáltal az aequator táján elég jó képet ad, s ezért a tropikus vidékeken való utazásokban jó szolgálatot tesz, s egyszersmind itinerariumok készítésénél is használható. Az egész Föld ábrázolható segítségével, de a

két pólus az aequatorral párhuzamos egyenessé fajul, melyeknek távolsága az aequatortól $\frac{\pi}{2} r$ mindkét oldalon.

Aequivalens hengervetület. Aequivalens hengeres aequatori térkép is szerkeszthető minden nehézség nélkül, ha azon stereometriai ismert tételre gondolunk, hogy egyenlő alapon álló henger és félgömb számára az alappal párhuzamos szeletek palástfelületei egyenlők, ha magasságaik azok. Az ABDE gömböv (297. ábra) és A'B'D'E' hengeröv palástja tehát ugyanaz. Ha tehát a β szélességű parallelt úgy fektetjük, hogy távolsága az aequatortól

$$y = r \sin \beta \text{ és ismét } x = \frac{\pi}{180} r(\lambda - \lambda_0)$$

legyen, akkor a követelménynek megfeleltünk. Felfedezője szerint e vetületet Lambert-féle isocylindrikus vetületnek is szokás nevezni. Vele az egész Föld $2r\pi$ hosszú és $2r$ teljes magassággal bíró parallelegramm által másolható, a pólus itt is egyenes vonalat ád és a pólus körüli calotta keskeny parallelegrammot, úgy hogy a szöglet és távolságok torzulásai mind nagyok, noha meridiánok és parallelák egymást úgy, mint a Földön derékszög alatt metszik.

A torzulási viszonyok mindhárom térképnél a meridiánok és parallelák mentén nagyon könnyen megadhatók. A β szélességű parallelkör igazi hossza a Földön $2r\pi \cos\beta$, míg az összes aequatori hengervetületeknél az aequator kerületével azonosak; tehát

$$\frac{s'}{s} = \frac{2r\pi}{2r\pi\cos\beta} = \sec\beta.$$

Torzulás tehát csak az aequator mentén nincs; a póluson a torzulás ∞, megfelelőleg azon ténynek, hogy a pont alakú pólus egyenessé van kinyujtva. A meridián mentén a torzulást az y viszonya méri azon ív hosszához, melyet ábrázol. Az $\frac{s'}{s}$ tehát az egységgel egyenlő, azaz torzulás nincs az aequidistáns hengervetületnél, ellenben a perspektivikus és aequivalens térképen:

$$\frac{s'}{s} = \frac{r \operatorname{tang} \beta}{\frac{\pi}{180} r\beta} = \frac{180}{\pi} \frac{\operatorname{tang} \beta}{\beta},$$

úgy hogy a képtávolság mindig nagyobb, mint az eredeti távolság. Mivel azonban a $\frac{\operatorname{tang} \beta}{\frac{\pi}{180} \beta}$ viszony kis szélességek mellett csak lassan nő, a térkép az aequator szomszédságában egészen jó másolatot ad. Az aequivalens térképen

$$\frac{s'}{s} = \frac{r \sin \beta}{\frac{\pi}{180} r\beta} = \frac{180}{\pi} \frac{\sin \beta}{\beta}$$

a meridiánmenti torzulás ugyanakkora, mint a Postel-féle aequidistáns vetületnél, ha a térképközéptől való távolság helyébe az aequatortól számított távolságot teszszük.

A Mercator-féle vetület. A conformis hengeres vetületet Mercator (Gerhard Krämer) fedezte fel, a ki a parallelákat úgy iparkodott fektetni, hogy a parallel és meridiánfok közötti viszony a térképen is megmaradjon. A β szélességű parallelfok nagysága

$$s = \frac{\pi}{180} r \cos \beta,$$

míg annak képe minden hengervetületnél tudvalevőleg állandóan

$$s' = \frac{\pi}{180} r,$$

s ugyanekkora a meridiánfok hossza a Földön is. A viszony meridián és parallelfok között a Földön ennélfogva

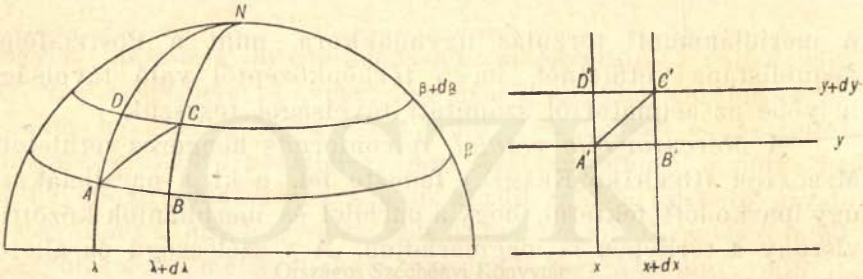
$$\frac{s'}{s} = \sec \beta,$$

és ugyanezen viszony áll fenn a hengervetületben is, ha a parallelák távolságát az aequatortól úgy választjuk, hogy

$$y = \frac{\pi}{180} r \sec \beta$$

legyen.

Ezen vetület, melyet eredeti MERCATOR-féle vetületnek lehetne nevezni. nem szigorúan conformis, mert arra szükséges, hogy a viszony a két ív között ne véges, hanem végtelen kis méreteiben legyen meg. Közelítőleg azonban, ha pl. a parallelákat a levezetett törvény értelmében fokról-fokra rajzoljuk, annak tekinthető. A szabatos, rendesen így jelölt MERCATOR-féle vetület, a következő módon jön létre. A 298. ábrában két végtelen közel egymáshoz fekvő meridiánt és parallelát húztunk, a mi által egy végtelen kis ABCD gömbi trapezet nyerünk. A hengervetületben a két meridiánnak az x és x + dx távolságban az aequatorra húzott merőleges, a két parallelnek az y és y + dy távolságban vont parallelák



298. ábra. A szögtartóság kifejezője hengeres vetületeknél.

felelnek meg, melyek az ABCD trapez képéül az A′B′C′D′ parallelegrammot adják. Ha most az AC átlót húzzuk, melynek a térképen A′C′ felel meg, akkor szögazonosság van, ha az ABC és A′B′C′ háromszögek hasonlók. E hasonlóság természetesen csak akkor állhat fenn, midőn mindkét idom végtelen kicsiny. úgy hogy az AB, BC és AC oldalok egyenesekkel legyenek azonosíthatók. Ennélfogva a szögtartás feltétele:

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}.$$

Ámde

$$B'C' = dy \text{ és } A'B' = dx,$$

míg

$$BC = \frac{\pi}{180} r\, d\beta \text{ és } AB = \frac{\pi}{180} r \cos\beta\, d\lambda,$$

úgy hogy az előbbi arány

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta}{\cos\beta\, d\lambda}$$

alakba megy át. Ámde a hengervetületek általános tulajdonságai folytán a $d\lambda$ hosszúságkülömbség a gömbön és hengeren ugyanaz, azaz

$$dx = \frac{\pi}{180} r\, d\lambda,$$

a mi által végre

$$dy = \frac{\pi}{180} r \frac{d\beta}{\cos\beta}$$

egyenlet keletkezik. Ez közvetlenül nem oldja meg a feladatot, mert nem azt mondja, hogy a β szélességű parallela mily ordinátával rajzolandó a térképbe, hanem csak azt, hogy mennyivel rajzolandó feljebb vagy lejebb a $\beta + d\beta$ szélességű parallelkör, mint a β-ik. Ha $d\beta = 1^0$-nak volna vehető, akkor az egyenlet az eredeti Mercator-vetülethez vezetne.

Ezen egyenlet, mely csak végtelen kis külömbségek között ad összefüggést, differentiálegyenletnek neveztetik, s megoldása, azaz a véges mennyiségek között fennálló kapcsolat levezetése, az integrálszámítás dolga. A mathematikus kimutatja, hogy az egyenlet megoldása

$$y = \frac{\pi}{180} r \,\text{lognat tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right),$$

a hol a lognat nem Briggs-féle logarithmusokat jelent, melyeknek alapja 10, hanem az úgynevezett természetes logarithmusokat, melyeknek alapszáma az ismeretes (32. l.)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2{\cdot}718\,2818$$

végtelen sor értéke. Miután a két logarithmus vonatkozása

$$\text{lognat}\, x = 2{\cdot}302\,5851\, \text{lg brigg}\, x$$

által van adva, ez egyenlet

$$y = 2{\cdot}302\,5851 \frac{\pi}{180} \text{lg brigg tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

alakban is adható. Helyességéről utólag könnyen győződünk meg mathematikai úton, ha β helyébe tényleg $\beta + d\beta$-t teszünk, a mi által y-ból $y + dy$ lesz, s felteszszük, hogy $d\beta$ minden képzelhetőnél kisebb mennyiség. Ekkor

$$\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2} + \frac{d\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{d\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{d\beta}{2}\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)}$$

s tekintve, hogy $\operatorname{tg}\frac{d\beta}{2} = \frac{d\beta}{2}$ tehető s második hatványa elhanyagolható:

$$\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\left[1 + \frac{d\beta}{2}\operatorname{cotg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) + \frac{d\beta}{2}\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

alakban is írható, ha a nevezőt a Newton binomtétele szerint kifejtjük, s mindenütt $d\beta$ első hatványainál megállunk. Mivel továbbá

$$\tfrac{1}{2}\cot x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin 2x}$$

egy ismeretes trigonometriai formula szerint, azért

$$\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2} + \frac{d\beta}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right).\left(1 + \frac{d\beta}{\cos\beta}\right),$$

és mivel (32. l.)

$$\operatorname{lgnat}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots,$$

úgy

$$y + dy = \frac{\pi}{180}\,r\,\operatorname{lgnat}\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\pi}{180}\,r\,\frac{d\beta}{\cos\beta},$$

vagy a jobb és bal oldal első tagja egyenlő lévén:

$$dy = \frac{\pi}{180}\,r\,\frac{d\beta}{\cos\beta},$$

a mi által a kiindulásul szolgált egyenlet visszaállt.

De gyakorlatilag is járhatunk el. Ha pl. 7 jegyű logarithmuskönyv segítségével $d\beta = 10''$ számára az $y = 8{\cdot}68504\,\frac{d\beta}{\cos\beta}$ értékeket számítjuk, akkor a következő táblázathoz jutunk:

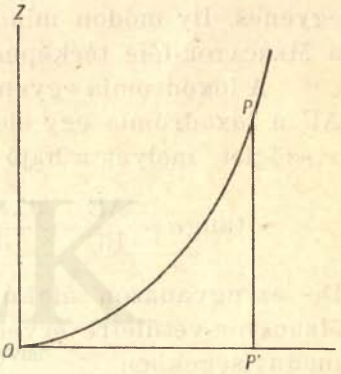
$\beta = 0^0$	$y = 0{\cdot}000\,0421$, míg $\beta' =$	45^0	számára Diff log tg $\beta' = 0{\cdot}000\,0421$
20	4482	55	0448
40	5496	65	0549
60	8421	75	0843
80	2425	85	2426.

A két differentia tehát egymással egyenlő, ha β' mindig $45^0 + \frac{\beta}{2}$-vel egyenlő.

Általános módon is győződhetünk meg az egyenlet helyességéről, ha az integratiót a planimeter segítségével eszközöljük: ez mindig lehetséges, mert mint láttuk, a planimeter használata nem egyéb, mint az integratió mechanikai elvégzése. — E czélra megrajzoljuk derékszögű coordinátákban a

$$z = \frac{\pi}{180} r \sec \beta$$

görbéjét (299. ábra), abscissákul a β-t, ordinátául a z-t választva. A görbe területe OPP′, ha $OP' = \beta$ a planimeter pontosságának határán belül azonos lesz a keresett y-nal, a miről utólagos számítással is meggyőződhetünk.



299. ábra. A Mercator-féle egyenlet megoldása planimeterrel.

Mivel $\beta = 90^0$ számára tang $\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = \infty$ és végtelen annak logarithmusa is, a Mercator-térkép az egész Föld ábrázolására szintén nem használható, de ugyanazon méret mellett is mégis magasabb szélességeket ábrázol még, mint a perspektivikus vetület. Igen jó és szemléltető gyakorlat, ha a perspektivikus, aequidistáns, aequivalens és Mercator-féle eredeti és szabatos vetületet egyenlő méretben rajzoljuk egymás mellé. Mindezeknél meridián és parallel ugyan derékszög alatt metszi egymást, de azért minden irányban csak a Mercator-vetület tartja meg változatlanul a szögeket. A hosszakat és területeket természetesen a pólushoz közeli szélességekben

nagyon torzítja, de azért kedvelt eszköz geographiai és meteorologiai görbék ábrázolására, mert e görbék mindenütt ugyanazon szögletek alatt metszik a meridiánokat és parallelákat, mint a Földön. Az, hogy a magas szélességek kiesnek, nagy jelentőséget nem bír, mert a pólusok közelében rendesen az ábrázolandó észlelési anyag is hiányzik.

A legnagyobb fontossággal bírnak azonban a Mercator-térképek a hajózásban, midőn ez a mágnestű szerint, azaz ugyanazon irány megtartásával történik. A hajó ez esetben a loxodromia nevű görbét írja le a Föld felületén, melynek képe a Mercator-vetületen a kiindulási és czélpontot összekötő egyenes. Ily módon minden, a loxodromiára vonatkozó feladat a Mercator-féle térképen graphikusan könnyen megoldható.

A loxodromia egyenlete a 298. ábrából adódik. Ha ugyanis AC a loxodromia egy eleme, következéskép ACB azon állandó α szöglet, melyet a hajó iránya a meridiánnal bezár, akkor

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{d\lambda \cos\beta}{d\beta}, \text{ a miből } d\lambda = \operatorname{tang}\alpha \frac{d\beta}{\cos\beta}.$$

De ez ugyanazon alakú differentiálegyenlet, mint a mely a Mercator-vetületre érvényes, következéskép megoldása véges mennyiségekben

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{180}{\pi} \operatorname{tang}\alpha \lg \text{nat} \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right),$$

a mely, minthogy

$$\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)},$$

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{180}{\pi} \operatorname{tang}\alpha \lg \text{nat} \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)$$

alakban is írható, a hol λ_0 azon meridián hosszúsága, mely alatt a loxodromia az aequatort metszi (ld. 509. lap).

A $\frac{180}{\pi}$ faktor hozzátevése azért szükséges, hogy λ-t ne ív, hanem szögmértékben kifejezve kapjuk. Ha $\alpha = 0^0$, illetve $= 90^0$, akkor a loxodromia átmegy a meridián, illetve a parallelkör egyenletébe.

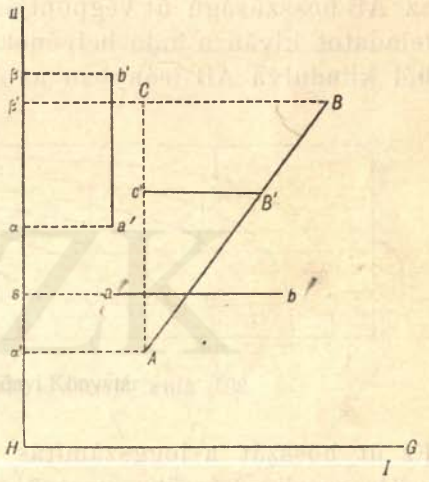
A loxodromikus távolság is nagyon könnyen levezethető az előbb használt ábra alapján. Mivel $AC = ds$ a loxodromia egy íveleme, a kis, síkháromszöggel felcserélhető BAC idomban

$$AC = BC \sec \alpha \text{ vagy } ds = \sec \alpha \,.\, d\beta \,.\, \frac{\pi}{180} r,$$

a miből minden nehézség nélkül véges mennyiségekben

$$s = \frac{\pi}{180} r \sec \alpha \,(\beta - \beta_0),$$

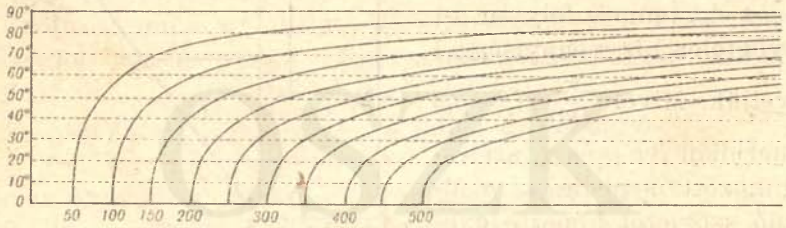
a hol s a loxodromiának β és β_0 parallelák között fekvő ívét jelenti. Az egyenlet helyességéről azonnal meggyőződünk, ha β-t $d\beta$, ennek folytán s-t ds végtelen kis mennyiséggel növeljük. Mivel $\frac{\pi}{180} r(\beta - \beta_0)$ a meridián íve β és β_0 szélesség között, s pedig az α állandó szögletet képező loxodromia íve, úgy a meridián, parallelkör és a loxodromia íve által képezett gömbi háromszög éppen úgy tárgyalható, mintha derékszögű síkháromszög volna.



300. ábra. Távolságok lemérése a MERCATOR-vetületen.

A hajózásban előforduló legfontosabb loxodromikus számításokat graphikailag a 300. ábra oldja meg. Az eljárás közvetlenül megérthető, ha az előbbi egyenletet szem előtt tartjuk, általában pedig meggondoljuk, hogy minden meridiánmenti hosszúság a MERCATOR-térképen sec β-szorosan van nagyítva. Ha az ab parallelív lemérendő, akkor egyszerűen megkeressük, hányszor foglaltatik benne a vele egyenlő szélességben fekvő hosszegység, melynek értéke a II-vel jelzett oldalskálán található. Ha ugyanis az aequatori I skála pl. perczekre, azaz tengeri mértföldekre van osztva, s ezek hossza az aequatori I skálán σ, akkor az ab β szélesség alatt fekvő vonal $s = \frac{\sigma}{\cos \beta}$

hosszegységgel mérendő. Az a'b' meridiánív hossza pedig egyszerűen az α és β pontok között fekvő ívperczek vagy tengeri mértföldek összegével egyenlő. Ha végre az AB ferdén fekvő loxodromikus ív hossza lemérendő, akkor ezt AC és BC meridián és parallelmenti összetevőre bontjuk. Az AC hossza $= \frac{\pi}{180} r(\beta - \beta_0)$ közvetlenül az α_1 és β_1 között fekvő osztályrészek számával olvasható le. Ha ugyanazon osztályzatok számát az I skála szerint körzőbe veszszük és A-ból AC-re rárakjuk, nyerjük a C' pontot, melynek geographiai szélessége az AB hosszúságú út végpontjának felel meg. Egészen hasonló feladatot kiván a hajó helyének meghatározása, ha az A pontból kiindulva AB irányban az AB' hosszúságú útat tette meg.



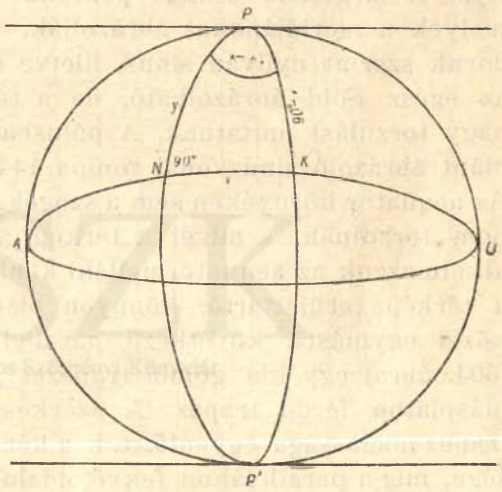
301. ábra. Mérték a Mercator-féle térképhez.

Ez út hosszát a loggszámítás adja. Az AB' út hosszát az I skála szerint körzőbe veszszük, és rárakjuk AB-re. A B' pontban meghúzzuk a parallelt B'C'-t és leolvassuk az AC' hosszúságot az I skálán. Ennek értékét B' pont geographiai szélessége körül körzőbe veszszük a II skála szerint, és felrakjuk A-ból az AC hosszát. Ha C-ből parallelt húzunk, akkor ennek metszése az AB loxodromiával szolgáltatja B-ben a hajó helyét. Ha a helymeghatározás csillagászati úton történt, akkor természetesen B hosszúsága és szélessége szerint van meghatározva, tehát közvetlenül berajzolható a térképbe.

A Mercator-féle vetület szögtartó lévén, a mérték ugyan pontról-pontra változik, de egy és ugyanazon pont körül minden irányban ugyanaz. Ennek folytán könnyen készíthetünk mértéket, melylyel a térkép minden pontján meghatározhatjuk a távolságokat. A 301. ábra legalsó vonala a Mercator-féle vetület aequatori beosztása, mely pl. közvetlenül perczeket

vagy tengeri mértföldeket ad. Ha az alapvonallal párhuzamos egyeneseket húzunk tetszőleges, de egyenlő közökben, s ezekben sorban az aequatori beosztás sec 10^0, sec 20^0..-szorosát rakjuk fel, akkor az egyes vonalokon közöket kapunk, melyekkel közvetlenül 10^0, 20^0.. szélesség alatt minden irányú távolság lemérhető.

Cassini-Soldner vetülete. A henger természetesen az aequator helyett a Földet valamely meridián mentén is érintheti, de ekkor a hálózat sokkal komplikáltabb alakot nyer. Ezen vetületek nem is nagyon divatosak most, s ezért csak egynek a leírásával akarok foglalkozni, melyet Cassini fedezett fel s Soldner is használt. Legjobb előnye, hogy a trigonometriai felvétel alkalmával nyert coordináták minden további átszámítás nélkül a térképbe berajzolhatók.



302. ábra. Cassini-Soldner vetülete.

Legyen a 302. ábrában K a térkép azon pontja, melyből a coordinátákat olvassuk és bocsássunk merőlegesen egy legnagyobb kört az N pont meridiánján át. Ha a sphaerikus coordinátákat a megjelölt módon x és y-nal jelöljük, lesz az N-nél derékszögű gömbi háromszögből:

$$\sin x = \sin(\lambda - \lambda_0)\cos\beta, \quad \operatorname{tang} y = \cos(\lambda - \lambda_0)\operatorname{cotg}\beta,$$

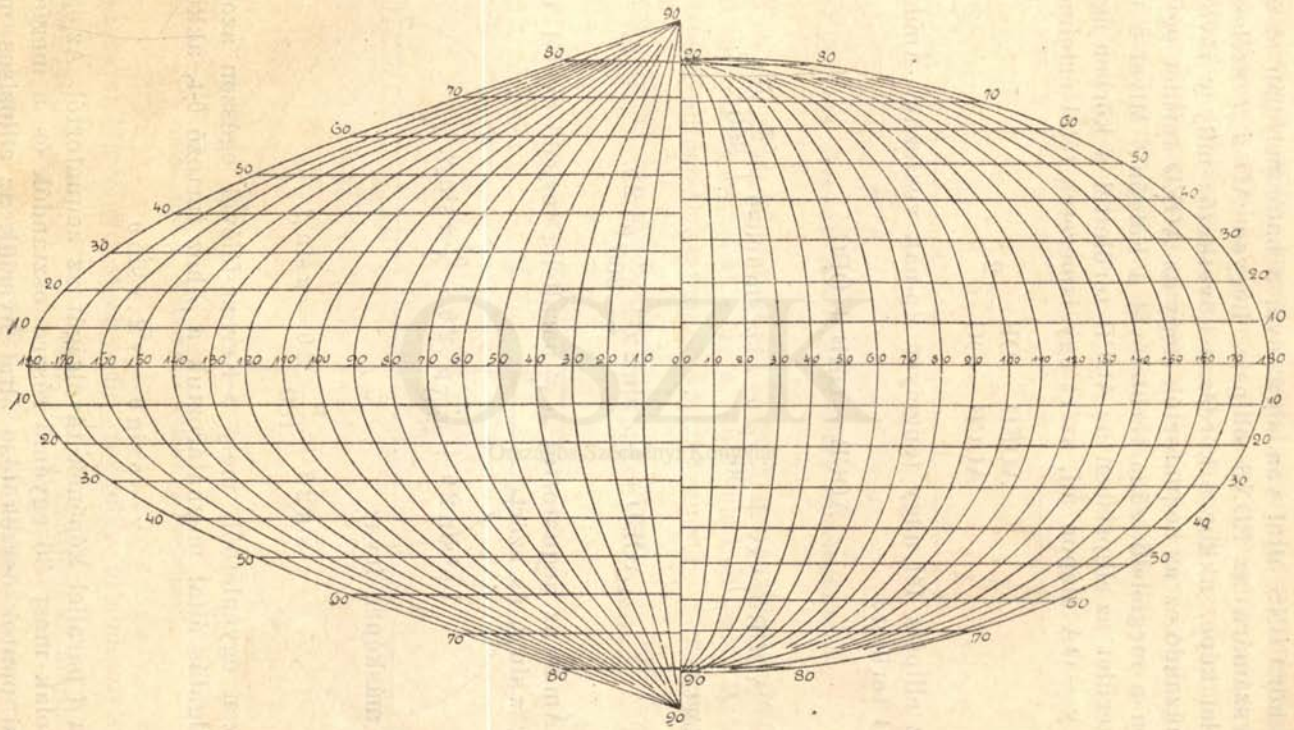
miáltal a helymeghatározás és mellérendelés megvan. A kész térképet a 316. ábra jobb oldala tünteti fel.

Önkényes hengervetületek, Flamsteed-Sanson vetülete. A conventionális hengervetületek között tárgyaljuk a két legfontosabbat, a Flamsteed-Sanson és a Mollweide-félét vagy a Babinet-féle homalographikus vetületet.

A Flamsteed-féle vetület egyenes, egyenlő közű parallelákból és sinusgörbékből alkotott meridiánokból áll. Egyenes vonal alakjában felrajzoljuk az aequator $2r\pi$ kerületét (303. ábra bal fele) és annak középpontjában reá merőlegesen mindkét oldalt a meridián negyedét $\frac{\pi}{2}r$, emezt 9, amazt 36 egyenlő részre osztván. A középmeridián osztási pontjain át párhuzamosakat húzunk az aequatorral s ezekre rakjuk a megfelelő szélességi fokokat természetes viszonyuk szerint, úgy, hogy a 10^0, 20^0.. parallelnek képhossza $2\pi r \cos 10^0$, $2\pi r \cos 20^0$.. lesz. A megfelelő osztási pontokat görbékkel kötjük össze, melyek a meridiánokat ábrázolják, s melyek keletkezési modoruk szerint nyilván sinus, illetve cosinusgörbék. Ily módon az egész Föld ábrázolható, de a térképek szélei és pólusai nagy torzulást mutatnak. A pólusban a két, a határoló meridiánt ábrázoló sinusvonal tompa $144^0\ 41''$-nyi szögletet képez. Az aequator környékén sem a szögek, sem a távolságok nagyon nem torzulnak, s mivel a térkép aequivalens, előszeretettel alkalmazzuk az aequatormelléki kontinensek másolására. Hogy a térkép területtartó, könnyen bizonyítható. Két végtelenül közel egymásra következő parallel és meridián a gömbön (304. ábra) egy kis gömbi trapezet jelöl ki, melynek képe a másolaton ferde trapez. A szerkesztés értelmében mindkét trapez magassága egyenlő, t. i. a két parallel szélességkülömbsége, míg a parallelákon fekvő oldalak szintén egyenlők, mivel a hosszúsági fokokat természetes viszonyuk szerint másoltuk le. Ezért a két trapez egyenlő térfogattal bír, s ily területtartó végtelen kis trapezekre bontható minden tetszőleges alakú véges terület is. A hosszúságbeli torzulás a parallelák és a középmeridián mentén null, de annál nagyobb az egyes meridiánok mentén.

Mollweide vetülete. A Mollweide-féle vetületre nézve előírjuk, hogy aequivalens legyen, egyenes parallelákból és ellipsisalakú meridiánokból álljon. A kész térképet a 303. ábra jobb fele mutatja be, a szerkesztés elvét a 305. ábra szemlélteti. A fél Föld felületét ábrázoljuk egy ρ sugarú kör területe által; ennélfogva:

$$\rho^2\pi = 2r^2\pi, \text{ a miből } \rho = \sqrt{2}.r.$$



303. ábra. A Sanson-Flamsteed és Mollweide-féle (Babinet homalographikus) vetület.
Az ábrázolt gömb sugara r = 2·71 cm. Mérték 1 : 235 000 000.

Ezen kör CBNS által van ábrázolva, a határmeridián az egész Föld számára az EDNS ellipsis. Legyen AD a β szélességű parallel képe, akkor a kérdés a következő: mily y távolságban húzandó ez az aequatortól, hogy az AOED terület egyenlő legyen a megfelelő zóna területével a Földön? Mivel a mondott terület az ellipsisben az AOCB területtel a körben ugyanazon $y = OA$ alapon áll, azért egy ismeretes tétel értelmében

$$\frac{AOED}{AOCB} = \frac{OE}{OC} = 2,$$

ha az ellipsis fél nagy tengelyét 2ρ-nak veszszük. Ámde az AOCB terület:

$$AOCB = OAB + OBC,$$

vagy

$$AOCB = \tfrac{1}{2}xy + \frac{\pi}{360}\rho^2\theta = \tfrac{1}{2}\rho^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{\pi}{360}\rho^2\theta,$$

és ezért

$$AOED = \tfrac{1}{2}\rho^2 \sin 2\theta + \frac{\pi}{360}\rho^2 . 2\theta.$$

Ámde az aequatortól a β parallelig terjedő öv fél területe $r^2\pi \sin\beta$, és ezért

$$\tfrac{1}{2}\rho^2 \sin 2\theta + \frac{\pi}{360}\rho^2 . 2\theta = \frac{\rho^2}{2}\pi \sin\beta,$$

vagy másképen írva:

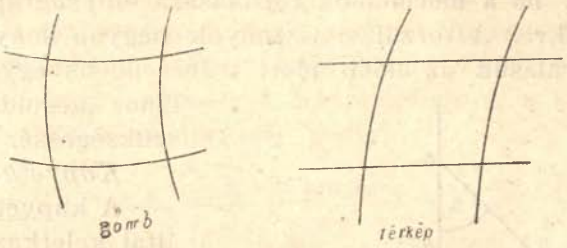
$$\sin 2\theta + \frac{\pi}{180} . 2\theta = \pi \sin\beta.$$

Ha ezen egyenletből, mely a Kepler-félével egészen azonos próbálgatás által meghatároztuk a β-hoz tartozó θ-t, akkor

$$y = \rho \sin\theta = \sqrt{2} . r \sin\theta$$

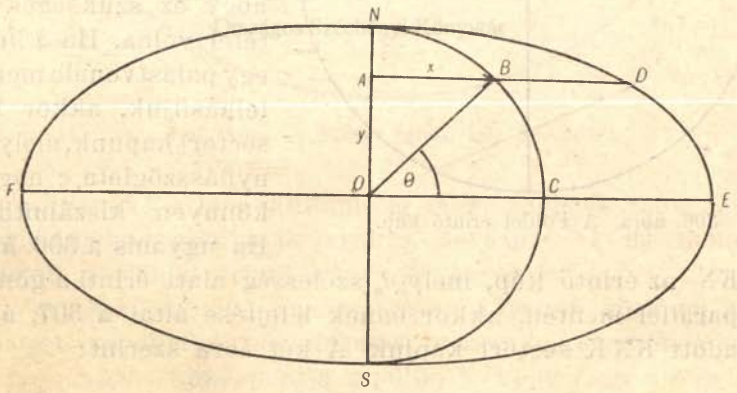
adja a β parallel képének távolságát az aequatortól. Az egyes parallelák most 36 egyenlő részre osztandók és a megfelelő osztási pontok összekötése által nyerjük az ellipsises meridiánokat. A szerkesztésnél legczélszerűbben a $\sqrt{2}r$ sugarú kör

rajzolásával kezdjük; ennek vízszintes átmérőjét meghosszabbítjuk minden oldalon $\sqrt{2}$r-rel. Azután felrakjuk az egyenes parallelákat táblázatok segítségével, melyek az y kiszámítását fölöslegessé teszik és meghosszabbítjuk mind úgy, hogy a középmeridiántól a körben fekvő részletök egyenlő legyen a körön



304. ábra. A FLAMSTEED-féle térkép területtartósága.

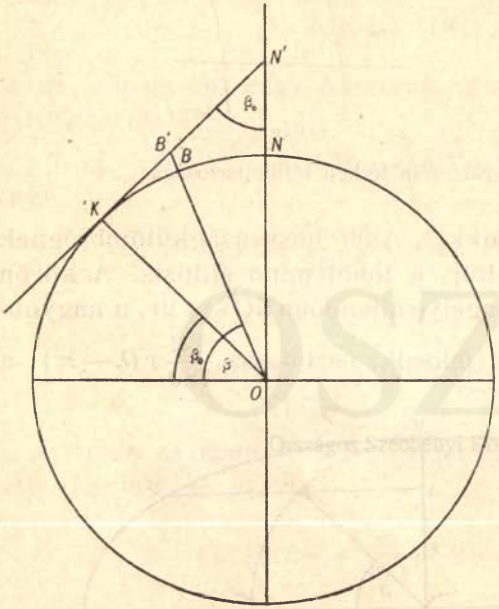
kívül eső meghosszabbításukkal. A 90° hosszúságkülömbségnek megfelelő meridián tehát kör, a többi mind ellipsis. A körön kívül fekvő ellipsisek kis tengelye állandóan NO = $\sqrt{2}$r, a nagyobbik tengely az aequatoron fekszik, és hossza $\frac{\sqrt{2}}{180}\,r\,(\lambda - \lambda_0)$; a



305. ábra. A MOLLWEIDE-vetület szerkesztése.

körön belül fekvő ellipsisek nagy tengelye állandóan NO, és kis tengelyük $\frac{\sqrt{2}}{180}\,r\,(\lambda - \lambda_0)$ lesz, mely szintén az aequatoron fekszik. A pólus ugyanis ON = $\sqrt{2}\,r$ távolságban van, mivel a θ egyenlete $\beta = 90^0$ számára $\theta = 90^0$ érték által ki van elégítve.

A Mollweide-féle vetületet sürűn alkalmazzák a Föld ábrázolására mindenütt, a hol a területmegmaradás fontos, és vagy, mint hálózatunk mutatja, egy térképen az egész Földet másoljuk, vagy pedig két planiglobium alakjában annak csak belső részét tartjuk meg. A vetület szerkesztése különösen akkor kényelmes, ha a meridiánok rajzolására ellipsograph áll rendelkezésünkre. A torzulási viszonyok nagyon bonyolódottak, mert tárgyalásuk az előbb adott transcendens egyenlet általános megoldását tenné szükségessé.



306. ábra. A Földet érintő kúp.

Kúpvetületek.

A kúpvetületek azáltal keletkeznek, hogy a Földet tetszésszerinti törvény alapján érintő vagy metsző kúpra vetítjük. A kúp rendesen egy parellel mentén érinti vagy metszi a Földet, a nélkül azonban, hogy ez szükséges feltétel volna. Ha a kúpot egy palástvonala mentén felhasítjuk, akkor körsectort kapunk, melynek nyílásszöglete c nagyon könnyen kiszámítható. Ha ugyanis a 306. ábrában KN′ az érintő kúp, mely β_0 szélesség alatt érinti a gömböt egy parallel mentén, akkor ennek lefejtése által a 307. ábrában adott KN′K sectort kapjuk. A két ábra szerint:

$$KN' = R_0 = r \operatorname{cotg} \beta_0,$$

míg a sector KK íve nyilván a β_0 szélességű parallel hosszával, $2\pi r \cos \beta_0$-val azonos. Ennélfogva

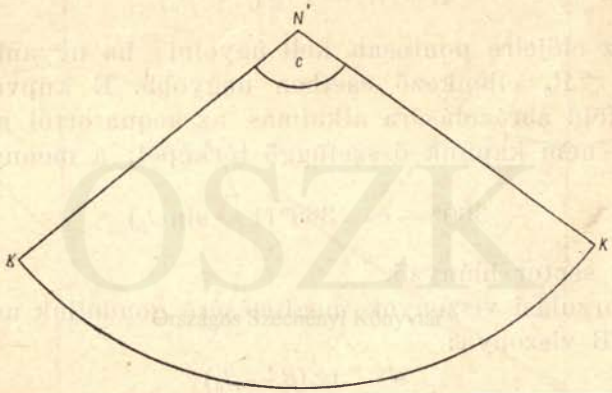
$$\frac{c}{360} = \frac{2\pi r \cos \beta_0}{2\pi R_0},$$

a miből R_0 behelyettesítése után:

$$c = 360^0 \sin \beta_0$$

következik. A kúp nyílásszöglete tehát soha sem lehet 360^0, hanem mindig kisebb, kivéve, midőn $\beta_0 = 90^0$, a kúp tehát a pólusban érintősíkba megy át. Ez már abból is világos, hogy papirlapból csak úgy készíthetünk kúpot, ha csúcspontja körül egy nagyobb-kisebb sectort kimetszünk. Ebből azután az is következik, hogy valamely λ hosszkülömbség a kúpvetületen mindig kisebbnek adódik, még pedig

$$\lambda' = \lambda \sin \beta_0$$



307. ábra. A Földet érintő kúp lefejtése.

nagyságúnak. A hosszkülömbség megkisebbedésének mértékét meridiánconvergentiának szokás nevezni. Az itt mondottak minden, a Földet érintő kúpra érvényesek.

A többi parallel természetesen a térkép közepén átmenő érintett parallellel párhuzamos, concentrikus köríveket ad, melyek közös középpontja a pólus N′ képe vagy a kúp csúcsa, Ezen át mennek sugarasan az egyes meridiánok, mint egyenes vonalak, melyek az összes parallelákra merőlegesen állanak. Mindamellett természetesen nem minden kúpvetület szögtartó egyszersmind.

Lássuk most sorban a fontosabb kúpvetületeket.

Perspektivikus kúpvetület. Ha a szemet (306. ábra) a Föld középpontjában képzeljük és a földfelületi pontokat látó-

sugarakkal vetítjük, akkor nyerjük a perspektivikus kúpvetületet. Benne a középső parallel

$$R_0 = r \operatorname{cotg} \beta_0$$

sugárral leírt kör, és a meridiánok egy ponton átmenő egyenesek, melyek a középső meridiánnal

$$\lambda' = (\lambda - \lambda_0) \sin \beta_0$$

meridiánconvergentiát képeznek. A β szélességű parallel szintén kör, melynek sugara, mint az ábra mutatja, KB′-tel kisebb, mint R_0; ennélfogva $KB' = r \operatorname{tg} (\beta - \beta_0)$ lévén:

$$R = R_0 - r \operatorname{tg} (\beta - \beta_0)$$

leend. Az előjelre pontosan kell ügyelni; ha ugyanis $\beta > \beta_0$, akkor $R < R_0$ ellenkező esetben nagyobb. E kúpvetület az egész félföld ábrázolására alkalmas az aequatortól a pólusig, csakhogy nem kapunk összefüggő térképet, a mennyiben belőle egy

$$360^0 - c = 360^0 (1 - \sin \beta_0)$$

nagyságú sector hiányzik.

A torzulási viszonyok megítélésére gondoljuk meg, hogy KB′ és KB viszonya:

$$\frac{s'}{s} = \frac{\operatorname{tg} (\beta - \beta_0)}{\frac{\pi}{180} (\beta - \beta_0)}$$

s ez a torzulás a meridiánok mentén, mely eléggé lassan növekszik, míg β közel áll a térkép β_0 középparalleléhez. A parallel mentén való torzulásra meggondoljuk, hogy B egy $2 r \pi \cos \beta$ kerületű körön fekszik, míg B′ egy $c = 360^0 \sin \beta_0$ nyilású köríven van, melynek sugara $R_0 - r \operatorname{tg} (\beta - \beta_0)$, úgy hogy az ív maga $\frac{\pi}{180} R c = 2 \pi [R_0 - r \operatorname{tg} (\beta - \beta_0)] \sin \beta_0$. A nagyítás ennélfogva a parallel mentén:

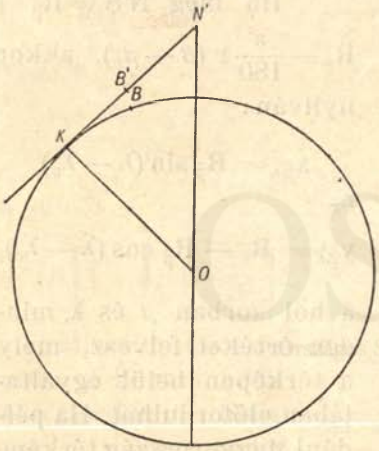
$$\frac{s'}{s} = \frac{2 \pi [R_0 - r \operatorname{tg} (\beta - \beta_0)] \sin \beta_0}{2 r \pi \cos \beta} = \frac{\cos \beta_0 - \sin \beta_0 \operatorname{tg} (\beta - \beta_0)}{\cos \beta}.$$

Aequidistáns kúpvetület. Sokkal szokásosabb az aequidistáns kúpvetület, melyben (308. ábra) a középső paralleltől

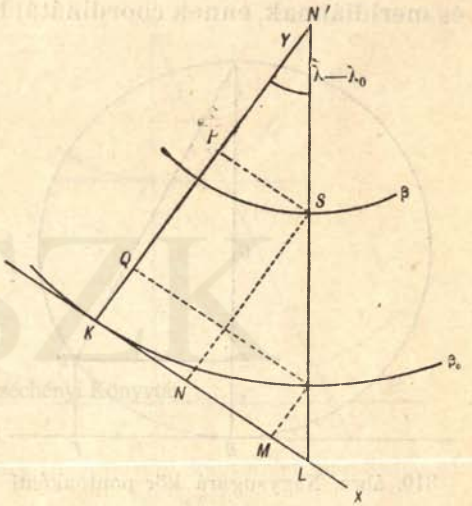
való távolság a kúpon és gömbön ugyanaz, azaz $B'K = KB$ ívvel. A β szélességű parallel képe tehát oly körív, a mely N′ közös középpontból

$$R = R_0 - \frac{\pi}{180} r(\beta - \beta_0) \text{ vagy } R = r\cot g\beta_0 - \frac{\pi}{180} r(\beta - \beta_0)$$

sugárral van leírva, míg a meridiánok ismét e középponton átmenő sugarak $(\lambda - \lambda_0)\sin\beta_0$ convergentiával. A torzulás tehát a meridiánok mentén 0, vagyis a távolság a Földön és a tér-



308. ábra. Az aequidistáns kúpvetület szerkesztése.



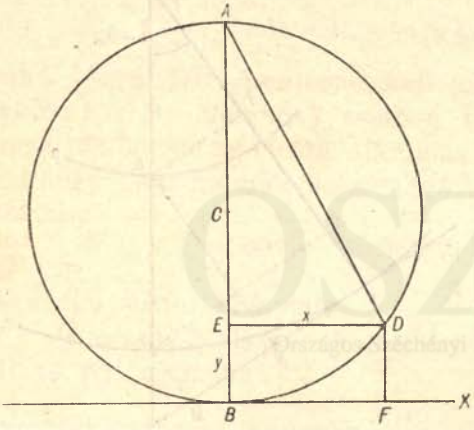
309. ábra. A meridiánok és parallelák metszési pontjainak coordinátái.

képen egyenlő, ellenben a parallel mentén hasonlóan, mint előbb

$$\frac{s'}{s} = \frac{\cos\beta_0 - \frac{\pi}{180}(\beta - \beta_0)\sin\beta_0}{\cos\beta}.$$

E vetület, melylyel ismét az egész félföld is másolható, nagyon kedvelt, és ezért igen sürű alkalmazásnak örvend. Egyetlen, különben minden kúpvetülettel közös hátránya a szerkesztés nehézkességében rejlik, ha a parallelkörök sugarai nagyon nagyok, a mi mindig előáll, ha a kúp alacsony szélességekben érinti a Földet, vagy a térkép mértéke tetemes. Igen

sok esetben a rúdkörző alkalmazása sem fog czélhoz vezetni, s ekkor előnyösebb leend a parallelák és meridiánok metszési pontjait coordinátáik szerint kiszámítani és felrakni, annál is inkább, mert ily esetben a meridiánok sem vonhatók közvetlenül a convergentiaponton át. A számítás menetét a 309. ábra mutatja be, mely az aequidistáns kúpvetület hálózatának egy darabját ábrázolja. A térkép K közepén át vonjuk a merőlegesen keresztező XY tengelyrendszerét, melynek vízszintes tengelye a középparallelt érinti, függélyes Y tengelye ellenben a középmeridiánt adja. Legyen az S metszési pontja $\beta\lambda$ parallel és meridiánnak, ennek coordinátái $KN = PS = x_{\beta\lambda}$, $SN = PK = y_{\beta\lambda}$.



310. ábra. Nagysugarú kör pontonkénti szerkesztése.

Ha még $N'S = R_\beta = R_0 - \frac{\pi}{180} r (\beta - \beta_0)$, akkor nyilván:

$$x_{\beta\lambda} = R_\beta \sin (\lambda - \lambda_0)$$

és

$$y_{\beta\lambda} = R_0 - R_\beta \cos (\lambda - \lambda_0),$$

a hol sorban β és λ minden értéket felvesz, mely a térképen belül egyáltalában előfordulhat. Ha például Magyarország térképe adandó, s a hálózatot 1°-nyi szemekkel kívánjuk rajzolni, akkor a $47^0 = \beta_0$ parallelt választván kiindulásul, $\beta = 44^0, 45^0 .. 48^0, 49^0, 50^0$ sorban, míg $\lambda - \lambda_0 = 0^0, 10^0, 20^0, 30^0$ jobbra és balra a középmeridiántól. Ha a jelölés egyszerűsítése kedvéért a β_0 parallelt nulladiknak, a $46^0, 45^0 .. -1, -2$, a $48^0, 49^0 .. +1, +2$-diknek nevezzük, s hasonlóképen a hosszúságok számára is, akkor számítandó:

$$R_{-3} = R_0 + \frac{\pi}{180} r . 3^0; \quad R_{-2} = R_0 + \frac{\pi}{180} r . 2^0;$$

$$R_{-1} = R_0 + \frac{\pi}{180} r . 1^0; \quad R_0 = r \operatorname{cotg} 47^0; \quad R_{+1} = R_0 - \frac{\pi}{180} r . 1^0;$$

$$R_{+2} = R_0 - \frac{\pi}{180} r . 2^0; \quad R_{+3} = R_0 - \frac{\pi}{180} r . 3^0,$$

és sorban

$$x_{01} = R_0 \sin 10^0;\ x_{02} = R^0 \sin 20^0;\ x_{03} = R_0 \sin 30^0$$
$$x_{11} = R_1 \sin 10^0;\ x_{12} = R_1 \sin 20^0;\ x_{13} = R_1 \sin 30^0$$

és hasonlóképen az y-ok számára is. A metszési pontok a meridiánok mentén egyenesekben feküsznek, a parallelák mentén pedig akár közönként egyenesekkel is pótolhatók.

Ha a körívek nagyon laposak, akkor még egyszerűbben járhatunk el. A 310. ábra szerint ugyanis EDB és EAD háromszögek hasonlók, úgy hogy

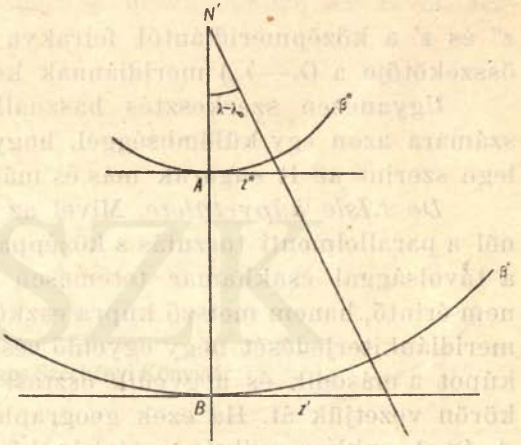
$$\frac{EB}{ED} = \frac{ED}{EA},$$

vagyis

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{2R - y},$$

a miből

$$y = R\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}\right].$$



311. ábra. Nagyméretű kúpvetület meridiánjainak szerkesztése.

Mivel $x = o$ számára a B pont ordinátáját akarjuk, mely $y = o$, nem pedig $y = 2R$, azért az előbbi egyenletben a — jel tartandó meg. Sorbafejtés által lesz:

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{1}{8}\frac{x^4}{R^3} + \frac{1}{16}\frac{x^6}{R^5},$$

a hol nagy R mellett a legtöbb esetben már a második tag is elhanyagolható kicsiny lesz. A képlet használata a következő: A térkép közepén át húzzuk a vízszintes BX egyenest, s ezen felveszünk tetszésszerinti, legjobban aequidistáns távolságokat x_1, x_2, x_3.. jobbra és balra. Azután számítsuk $R = R_0$-val a hozzátartozó y_1, y_2, y_3..-eket, miáltal a középparallel egyes pontjainak coordinátáit nyertük. Ezután ismételjük a számításokat, sorban $R = R_{+1}$, R_{+2},.. R_{-1}, R_{-2}.. téve. Az R_β-val számított y-okhoz teszszük azután az $R_0 - R_\beta$ állandó különb-

ségeket, melyek természetesen positivek, ha $\beta > \beta_0$, és negativok, tehát lefelé rakandók fel, ha $\beta < \beta_0$. Ezután külön meg kell szerkeszteni még a meridiánokat, a mi szintén nehézség nélkül megy. Ha ugyanis a középmeridiánt AB-t meghúztuk (311. ábra), akkor a térkép két legszélső paralleléhez a középmeridiánra merőleges érintőket húzunk, és nyilvánvaló, hogy

$$z'' = R'' \tang (\lambda - \lambda_0) \text{ és } z' = R' \tang (\lambda - \lambda_0),$$

a hol

$$R'' = R_0 - \frac{\pi}{180} r(\beta'' - \beta_0) \text{ és } R' = R_0 - \frac{\pi}{180} r(\beta' - \beta_0).$$

z'' és z' a középmeridiántól felrakva két pontot ad, melyek összekötője a $(\lambda - \lambda_0)$ meridiánnak képét adják.

Ugyanezen szerkesztés használható minden kúpvetület számára azon egy különbséggel, hogy az egyes vetületek jellege szerint az R sugarak más és más módon számítandók ki.

De l'Isle kúpvetülete. Mivel az aequidistáns kúpvetületnél a parallelmenti torzulás a középparalleltől északra és délre a távolsággal csakhamar tetemesen nő, De l'Isle a vetítést nem érintő, hanem metsző kúpra eszközli. A levetítendő terület meridiánkiterjedését négy egyenlő részre osztjuk, és a metsző-kúpot a második és negyedik osztási ponton átmenő parallelkörön vezetjük át. Ha ezek geographiai szélessége (312. ábra) β_1 és β_2, akkor nyilván a térkép közepének geographiai szélessége

$$u = \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$$

leend, az ezekhez tartozó parallelkörsugarak ellenben $AC = R_1$ és $BC = R_2$, melyek CBE és CAD derékszögű háromszögekből közvetlenül kiszámíthatók. Ugyanis:

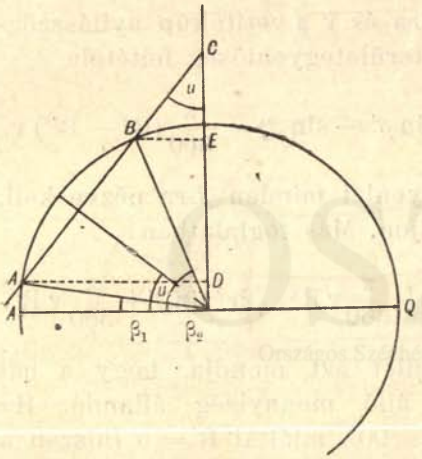
$$R_1 = \frac{r \cos \beta_1}{\sin \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)} \text{ és } R_2 = \frac{r \cos \beta_2}{\sin \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)}.$$

A többi parallelkör sugara a szélességi különbség arányában húzandó, míg a β_1 és β_2 parallelkörre a hosszúsági fokokat, illetve $\frac{\pi}{180} r(\lambda - \lambda_0) \cos \beta_1$ és $\frac{\pi}{180} r(\lambda - \lambda_0) \cos \beta_2$ nagyságban rakjuk fel, a megfelelő osztási pontokat egyenes meridiánokkal kapcsolva. E két parallelkör mentén torzulás nincs,

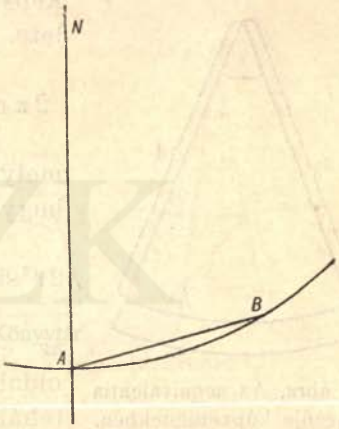
ezeken belül a térkép távolságai túlságosan kicsinyek, ezeken kívül tulságosan nagyok. Ezek szerint a β szélességű parallel sugara

$$R = R_1 - r \frac{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}{\sin\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)} \frac{\beta - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Még csak a parallelfokok helyes felrakásáról kell szólanunk, oly feladatról, mely a kúpvetületeknél gyakran előfordul. Ha a kivánt hosszúságot körzőbe veszszük és az ívalakú parallelkörre felrakjuk, nyilván hibát követünk el, mert az AB húr (313. ábra) nem azonosítható a hozzá tartozó AB ívvel, leg-



312. ábra.
De l'Isle vetülete.



313. ábra.
Ívek felrakása a kúpvetületekben.

fölebb akkor, ha a kör igen nagy sugárral bír. Ez esetben tehát mindig az adott nagyságú körívhez tartozó húrt kell kiszámítani, mert pontosan csak ez vihető át körző segítségével. Ha az illető parallelkör R sugárral van leírva és a kúp nyilásszöglete c, akkor

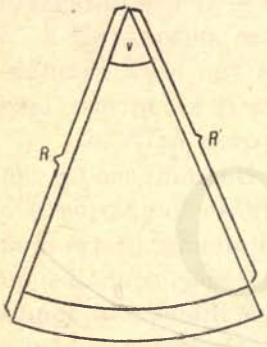
$$\lambda' = \frac{c}{360} \cdot \lambda$$

a meridiánconvergentia, tehát λ' a λ hosszúságkülömséghez tartozó centrális szöglet. R sugarú körben ennek

$$h = 2\,R \sin\left(\frac{c}{2.360}\right)\lambda$$

nagyságú húr felel meg, mely vagy e képletből kiszámítható, vagy a húrok táblázatából egyszerűen kiírható. Ha a kúp érintő kúp, akkor tudvalevőleg $c = 360 \sin \beta_0$.

Lambert aequivalens kúpvetülete. Aequivalens kúpvetületet Lambert szerkesztett. Két parallelkör által bezárt öv a kúpvetületben egy körgyürű sectora gyanánt ábrázolódik s a térkép mindenesetre területtartó, ha e gyürű s a megfelelő öv területe ugyanaz. A β és β' parallelák közt fekvő zóna területe tudvalevőleg $2\pi r^2(\sin\beta' - \sin\beta)$, míg a gyürű területe $\frac{\pi}{360}(R^2 - R'^2)v$, ha — mint a 314. ábrában — R a parallelkör képsugara és v a vetítőkúp nyilásszöglete. A területegyenlőség feltétele



314. ábra. Az aequivalentia kifejezője kúpvetületekben.

$$2\pi r^2(\sin\beta' - \sin\beta) = \frac{\pi}{360}(R^2 - R'^2)v,$$

mely egyenlet minden β-ra nézve kell, hogy álljon. Más foglalatban:

$$2r^2\sin\beta + \frac{\pi}{360}vR^2 = 2r^2\sin\beta' + \frac{\pi}{360}vR'^2$$

az egyenlet azt mondja, hogy a bal oldalon álló mennyiség állandó. Ha tehát $\beta' = 90^0$, miáltal $R' = o$ (hiszen a pólusban érintő kúp sík, melyben a pólus is csak pont, képsugara tehát o), akkor

$$2r^2\sin\beta + \frac{\pi}{360}vR^2 = 2r^2, \text{ vagy: } R = 2r\sqrt{\frac{180}{v}}\sqrt{1 - \sin\beta},$$

miáltal a sugár, mint a szelesség függvénye adott. Ha a kúp β_0 szélességben érintené a gömböt, akkor $v = 360^0 \sin\beta_0$ volna. Lambert azonban nem érintő kúpot tételez fel, és v-t úgy határozza meg, hogy β_0 szélességben a parallelfok természetes nagyságában másolódjék. A β_0 parallel kerülete $2r\pi\cos\beta_0$ és képének hossza az R_0 sugár és v középponti szöglethez tartozó ív, tehát $\frac{\pi}{180}R_0v$, vagy

$$\frac{\pi}{180}v \cdot 2r\sqrt{\frac{180}{v}}\sqrt{1 - \sin\beta_0} = 2r\pi\cos\beta_0.$$

Ebből

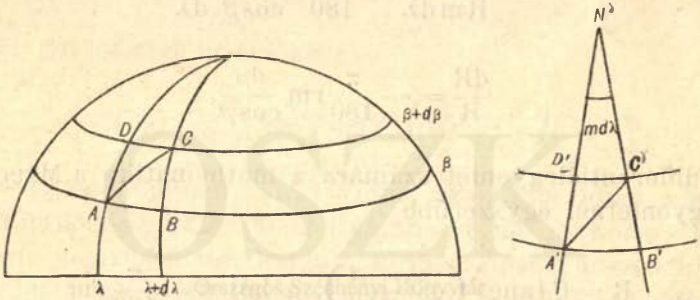
$$\sqrt{\frac{v}{180}} = \frac{\cos\beta_0}{\sqrt{1-\sin_0\beta}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\beta_0}{1-\sin\beta_0}} = \sqrt{1+\sin\beta_0},$$

miáltal v is meg van határozva. A β parallelkör sugara tehát végleg

$$R = 2r\sqrt{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin_0\beta}}$$

és a β_0 parallel sugara

$$R_0 = 2r\sqrt{\frac{1-\sin\beta_0}{1+\sin\beta_0}} = 2r\,\mathrm{tang}\left(45^0-\frac{\beta_0}{2}\right).$$



315. ábra. A szögtartóság elve a kúpvetületekben.

A háló szerkesztése tehát a következő: A térkép β_0 középparallelát meghúzzuk R_0 sugarú körív gyanánt, és a többi parallelákat ugyanazon középpontból R sugárral. A β_0 parallelra rárakjuk a természetes nagyságú parallelfokokat $\frac{\pi}{180} r\cos\beta_0(\lambda-\lambda_0)$ és az osztási pontokat összekötjük a concentrikus ívek közös középpontjával.

Lambert-Gauss szögtartó kúpvetülete. Lambert és utána Gauss conformis kúpvetületet is szerkesztett; a conformitás természetesen az értelemben veendő, hogy a hosszúságkülömbségek helyébe a náluk kisebb meridiánconvergentia lép, míg a többi szög változatlan marad. A szerkesztést a 298. ábrához hasonló 315. ábra közvetíti. Két végtelenül közel egymáshoz eső parallel és meridián a gömbön az ABCD végtelen kis gömbi trapezet jelöli ki, mely síknak tekinthető, míg ennek

képe a kúpvetületben az A′B′C′D′ trapez, melyet két sugár és két végtelen közel hozzátartozó körív képez. Az AC és megfelelő A′C′ húzása által háromszögeket kapunk, melyek hasonlóak tartoznak lenni, ha a szögletek ugyanazok maradnak. Ennélfogva ismét

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}$$

Ámde $N'B' = R$, és $N'C' = R + dR$, úgy hogy $B'C' = -dR$, és $A'B' = R \,.\, m\, d\lambda$, ha m a meridiánconvergentia. BC és AB ellenben, mint már előbb is, $d\beta$ és $d\lambda \cos\beta$. Ennélfogva

$$-\frac{dR}{R\, m\, d\lambda} = \frac{\pi}{180} r \frac{d\beta}{\cos\beta \,.\, d\lambda}$$

vagy

$$\frac{dR}{R} = -\frac{\pi}{180} rm \frac{d\beta}{\cos\beta},$$

mely differentiálegyenlet számára a mathematika a Mercator-féle egyenletnél egyszerűbb

$$R = C \operatorname{tang}^n\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right), \text{ a hol } n = \frac{\pi}{180} rm$$

megoldást adja. Benne C és n állandókat jelentenek, melyek egyrészt a térkép méretétől, másrészt pedig a meridiánconvergentiától függenek, s melyek a következő módon határozhatók meg. Ha azt kivánjuk, hogy a parallelfokok a β' és β'' parallelán a természetes hosszúsággal bírjanak, akkor nyilván

$$\frac{R'}{R''} = \frac{2\, r\, \pi \cos\beta'}{2\, r\, \pi \cos\beta''},$$

mivel egyenlő középponti szöglethez tartozó ívek úgy aránylanak, mint a sugarak. Ennélfogva:

$$\frac{\operatorname{tang}^n\left(45^0 - \frac{\beta'}{2}\right)}{\operatorname{tang}^n\left(45^0 - \frac{\beta''}{2}\right)} = \frac{\cos\beta'}{\cos\beta''},$$

a miből logarithmozás alapján:

$$n = \frac{\lg \cos \beta' - \lg \cos \beta''}{\lg \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta'}{2}\right) - \lg \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta''}{2}\right)}$$

kiszámítható. C csupán csak a térkép mértékétől függ. Az R sugarú körön 1^0 hosszúságkülömbségnek $\frac{\pi}{180} R \,.\, m$ ív felel meg, mivel m a meridiánconvergentia. A parallelkörön, ellenben az 1^0 hossza $\frac{\pi}{180} r \cos \beta$, úgy hogy

$$m\, C \operatorname{tang}^n \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) = r \cos \beta,$$

és ebből, tekintettel m értékére:

$$C = \frac{\pi}{180} \frac{r^2}{n} \cos \beta \operatorname{cotg}^n \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Ha ez egyenletben $m = 1$ volna, azaz a meridián convergentia a hosszúság különbséggel volna egyenlő, akkor a stereographikus polarvetületet kapjuk, természetesen, hiszen akkor kúpvetület helyett síkra való másolást nyerünk oly síkban, mely a pólusban érinti a Földet.

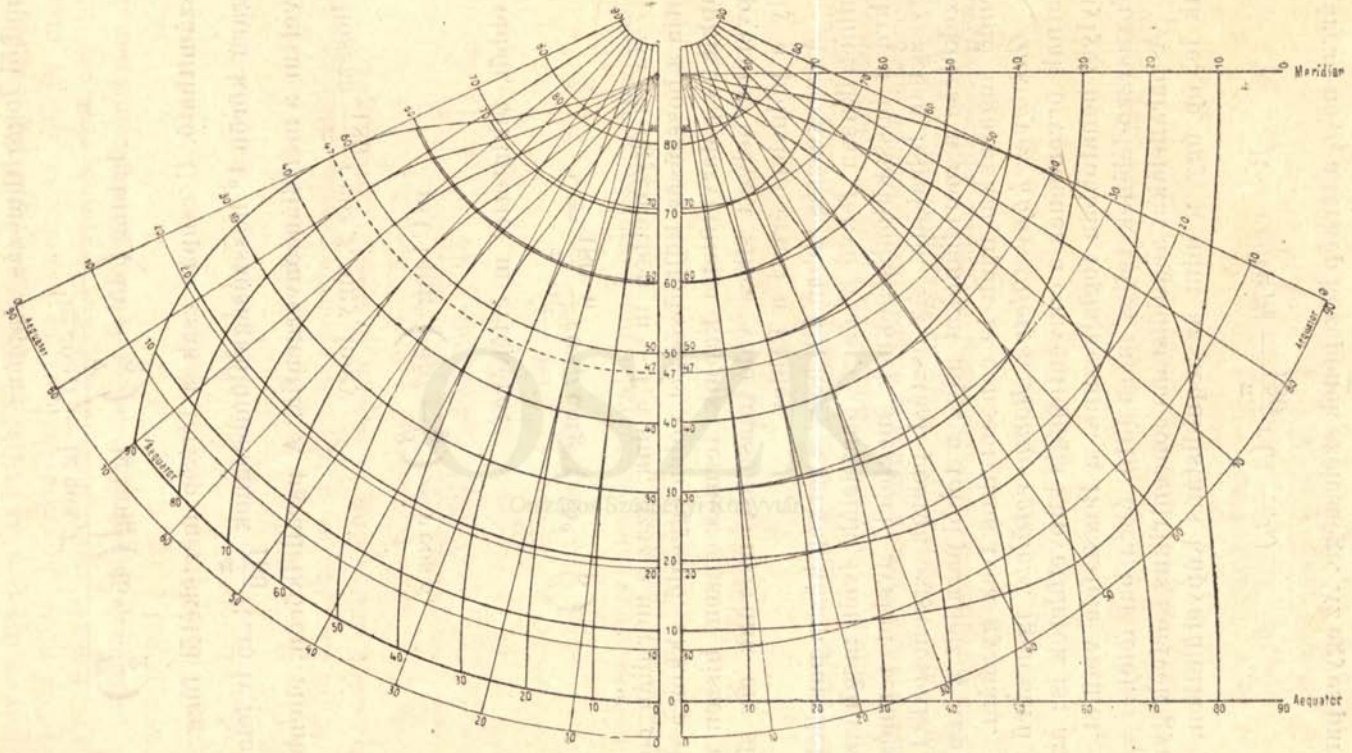
A szerkesztés abban áll, hogy a térkép közép paralleljához symmetrikusan fekvő β' és β'' parallelák íveit meghúzzuk, s ezekre a hosszkülönbségeknek megfelelő íveket természetes nagyságban felrakjuk. Az osztási pontok egyenesekkel való összekötése a meridiánokat adja, a többi parallelt a képletből veendő sugarakkal írjuk le concentrikus ívek gyanánt.

Önkényes kúpvetületek. Bonne-vetülete. Igen sürű használatnak örvendenek a conventionális kúpvetületek is; az első, melylyel behatóbban foglalkozunk, a Bonne-féle vetület, mely a Flamsteed-félének teljes mása (316. ábra bal fele).

A parallelákat aequidistáns concentrikus körívek gyanánt írjuk le, ép úgy, a mint az aequidistáns kúpvetületben, tehát

$$R = r \operatorname{cotg} \beta_0 - \frac{\pi}{180} r (\beta - \beta_0)$$

sugárral, ha β_0 a térkép közepének szélessége. Az egyes parallel-



316. ábra. —— Bonne-féle vetület. —— Tissot kúpvetülete. —— Cassini-féle vetület. —— Tissot kúpvetülete.

Az ábrázolt gömb sugara = 5·10 cm. Mérték 1 : 125 millió.

körökre rárakjuk a hosszúsági fokokat természetes nagyságukban, tehát $\frac{\pi}{180} r \cos \beta (\lambda - \lambda_0)$ és a megfelelő osztási pontokat összekötjük folytonos görbe vonallal. A meridiánok képei tehát igen bonyodalmas sinusvonalak. Ugyanazon oknál fogva, melynél a Flamsteed-féle térkép, a Bonne-féle is területtartó, s a háló egyszerű szerkezete mellett ez okozhatja, hogy oly általánosan kedvelt, különösen magasabb szélességekig felnyúló continensek ábrázolására. Szög és távolság torzulása azonban annál tetemesebb.

Ha a térkép hálózata nagyobb méretű, akkor itt is előnyösebb leend a háló egyes metszési pontjait számítás által határozni meg. Ugyanazon eljárást követhetjük, mint a 309. ábrában, csakhogy a meridián convergentia helyébe mindenütt a tényleges parallelfoknak megfelelő középponti szög teendő.

Látni fogjuk később, hogy az említett szerkesztés általános elterjedése nem indokolható.

Polykonos vetület. A polykonos vetület úgy keletkezik, hogy ugyanazon tengelybe eső kúpok egy egész sorozatával érintjük a Földet (317. ábra), vagy más szóval, minden parallelkört azon sugárral írunk le, mely szélességének megfelelne, ha érintő kúppal volna dolgunk. A parallelák tehát általában véve

$$R = r \operatorname{cotg} \beta$$

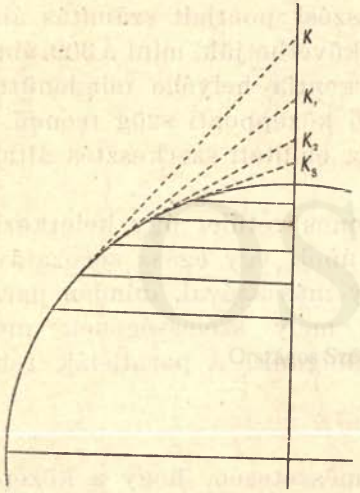
sugárral vannak leírva, úgy természetesen, hogy a középső parallel jelentősége teljesen elvész. A kúpok csúcsai természetesen annál közelebb állanak a Föld felületéhez, minél nagyobb a szélesség, s azért a parallelákat ábrázoló körívek már nem concentrikusak. A hálót tehát tulajdonképen egymásra következő igen alacsony csonka kúpok részletei képezik, melyek egy vonal mentén felhasítva a 318. ábrában látható gyürűrészletek összeségét adják. Az egymásra következő gyürűrészek ugyan szigorúan véve csak a közép meridian mentén érintkeznek, azontúl elválnak, de a hiba annál kisebb, minél több kúpot veszünk minél szorosabban egymáshoz, s minél keskenyebb hosszúsági terjedelmében a leképzendő földrészlet. Az egyes parallelkörökre rárakjuk a hosszúsági fokokat természetes viszonyaik szerint. A szerkesztés elég egyszerű és a következő műveletekből áll: meghúzzuk az egyenes középmeridiánt

és ezt beosztjuk egyenlő részekre 10—10° meridián foknak megfelelőleg. Az osztási pontokon át húzzuk, természetesen mindig más középpontból, az $r \operatorname{cotg} \beta$ sugarú köríveket, a melyekre a parallelfokokat, tehát

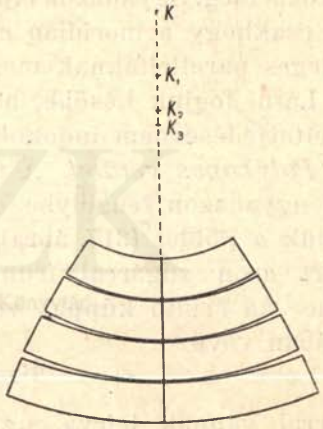
$$\frac{\pi}{180} r \cos \beta (\lambda - \lambda_0)\text{-val}$$

egyenlő hosszú darabokat rakunk. A meridiánok itt is, mint a Bonne-féle vetületben sinusgörbékhez hasonló vonalak.

A hálózat különösen meridiánmenti területek ábrázolására alkalmas és azért a U. S. Coast survey előszeretettel alkalmazza.



317. ábra. A polykonos vetület.

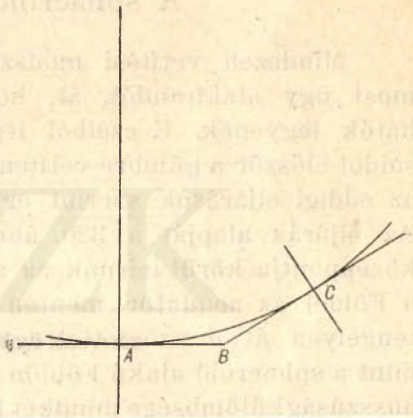


318. ábra. A polykonos vetület lefejtve.

A polykonos vetület angol módosítása. Ennek egy módosítását az angol hadügyi osztály is használja. A polykonos vetületben ugyanis meridiánok és parallelák nem metszik egymást merőlegesen. Az orthogonális polykonos vetületben ezen hibát kikerülik ugyan, de helyette a parallelák mentén fellép már távolsági torzulás. A parallelákat teljesen úgy rajzoljuk, a mint az előbbi vetületben, de a hosszúsági fokokat természetes nagyságukban csak a terület közepén átmenő parallelra rakjuk fel. Az osztási pontokon át a parallelák rendszerére merőleges trajectoriákat fektetünk, a melyek a meridián képét adják. Ha a 319. ábrában AB a β szélességű parallelra felrakandó hosszúsági fok természetes nagyságának fele, akkor

AB merőlegesen fektetendő a közép meridiánra a parallel érintője gyanánt. Ha B végpontból BC=AB hosszúsággal a körívbe bemetszünk, akkor nyerjük a C pontot; e pontok összesége összekötve az egyes parallelákon az összes parallelákat derékszög alatt metszi. A tétel bizonyítását a felsőbb geometria szolgáltatja a trajectoriákról szóló elméletben.

Polyaederes térképek. A polykonos hálózat még tovább specifikálható. A meridiánok és parallelák rendszere a Föld gömbjén csupa gömbi egyenszárú trapezet jelöl ki, melyek a pólushoz való közeledéskor folytonosan keskenyednek, a póluson egyenszárú háromszögekbe mennek át. Ha e trapezek négy végpontján át síkot fektetünk, akkor egy polyaedert kapunk, melynek egyes lapjai fölé a Föld felülete annál kevésbbé domborodik, minél kisebbek e trapezek. A felületi pontok tehát függélyesekkel levetithetők a polyaederlapokra, s így a Föld képét egyes lapokra lemásolva nyerjük. A porosz és az osztrák-magyar táborkari térkép ilyen polyaederes hálózat, az utóbbi oly módon, hogy minden egyes lap a 75000-es méretű térképen 30′ hosszúsági és 15′ szélességkülönbségnek felel meg. Az eredeti felvételek 25000-szeres kicsinyítésben eszközöltetnek és minden lapja amannak négy lapjával azonos. A polyaederes hálózat vonalai természetesen körívek, mert hiszen gömb és sík csak körívekben metszik egymást, de ez ívek oly csekély eltérést mutatnak az egyenestől, a mely alig észrevehető. A mi térképeinken alig 0·1 mm-t tesz ki, tehát kevesebbet, mint a mennyit a papir egyenetlen összehúzódása okozhat. Egy nagy hátránya van azonban ezen vetületnek, s ez az, hogy több lap egymásmellé nem illeszthető tátongás nélkül. Ha négy lapot egyesítünk egy egészszé, akkor a hiba még nem vehető észre, de 9 lapnál vagy pláne 16-nál már könnyen észrevehető. A hálózat ezen neme tehát tisztán speciális tér-



319. ábra. A meridiánok szerkesztése az angol polykonos vetületben.

képek számára ajánlható. A távolságok, területek és szögletek torzulása természetesen az egyes lapokon belül alig észrevehető, de területmeghatározásoknál azért minden esetben jó lesz, ha ellenőrzésül a lap területét lemérjük és egyszersmind a térkép szélein átmenő hálóvonalok segítségével számítjuk. Ez eljárás annál szükségesebb, minthogy csak ez úton kerülhető ki azon torzulás, a melyet a papirlap egyenlőtlen összehúzódása létesít.

V. FEJEZET.

A sphaeroid leképezése.

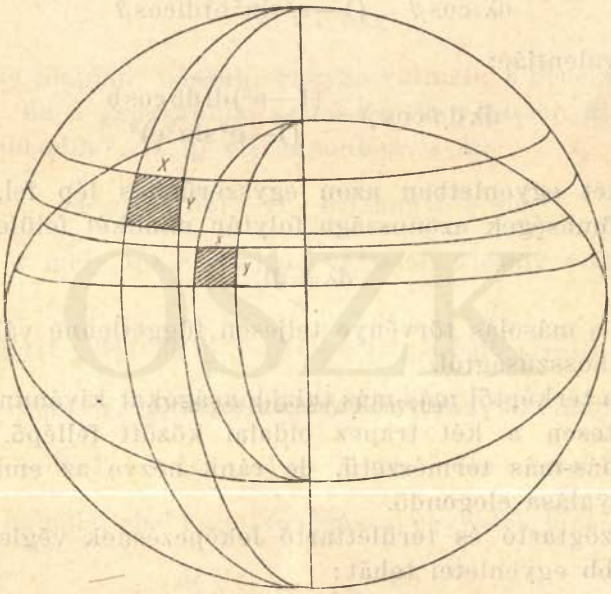
Mindezen vetítési módszerek a gömbre érvényesek, és most úgy alakítandók át, hogy a sphaeroidra is alkalmazhatók legyenek. E czélból legjobb lesz a kéttengelyű ellipsoidot először a gömbre vetítenünk, mert ha ezt tudjuk, akkor az eddigi eljárások szerint egyszerűen a gömb másolandó le. Az eljárás alapját a 320. ábra adja. A sphaeroidikus Föld középpontja körül leírunk az aequatori sugárral gömböt, mely a Földet az aequator mentén érinti. Bármely két a forgási tengelyen át α szöglettel egymáshoz hajló sík, úgy a gömb, mint a sphaeroid alakú Földön két meridiánt metsz ki, melyek hosszúságkülömbsége mindkét felületen ugyanaz, t. i. α. A hosszúságkülömbségek tehát a sphaeroidon és gömbön ugyanazok. Ha most β és $\beta + d\beta$ geographiai szélességben a gömbön és ugyancsak b és $b + db$ geographiai szélességben a sphaeroidon két végtelenül közel egymáshoz fekvő parallelt húzunk, és λ és $\lambda + d\lambda$ hosszúságok alatt meridiánokkal metszük, akkor nyerünk úgy a gömbön, mint a sphaeroidon egy-egy végtelen kis, tehát síknak tekinthető egyenszárú trapezet, melynek két-két megfelelő oldala a gömbön dX és dY helyett röviden X és Y, a sphaeroidon dx és dy helyett x és y-nal van jelölve. Ha a sphaeroidot a gömbre másolni akarjuk, akkor azt mondhatjuk, hogy az xy trapez képe XY által van adva, s felvethetjük a kérdést: mily összefüggésben állnak a trapezek geographiai koordinátái a gömbön és sphaeroidon, ha a másolatnak bizonyos előírt tulajdonságokkal kell bírnia?

A felelet nem nehéz, legalább addig nem, míg a térképek

főbb tulajdonságait, a conformitást és az aequivalentiát tartjuk szem előtt; mindenekelőtt a trapezek oldalait kell kifejeznünk. A gömb számára már többször használt egyenletek alapján

$$dX = d\lambda \cos\beta \text{ és } dY = d\beta,$$

ha egyszerűség kedveért β és λ-t, úgyszintén a sphaeroidon b és l-t ívmértékben fejezzük ki. A sphaeroidon ellenben a meridián és parallelkör mentén való görbületi sugár tudvalevőleg (476. és 502. ll.):



320. ábra. A sphaeroidikus Föld leképzése.

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 b)^{3/2}} \text{ és } \rho' = \frac{a\cos b}{(1-e^2\sin^2 b)^{1/2}},$$

a hol az utolsó kifejezés egyszerűen a b szélességű parallel sugara. Ennélfogva a kis dx és dy ívek számára áll:

$$dx = \frac{dl\cos b}{(1-e^2\sin^2 b)^{1/2}} \text{ és } dy = \frac{(1-e^2)db}{(1-e^2\sin^2 b)^{3/2}}.$$

Ha most azt akarjuk, hogy a másolat conformis, azaz legkisebb részeiben hasonló legyen, akkor kell, hogy álljon

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx};$$

a térkép ellenben területtartó, ha legkisebb részeiben is megmarad változatlanul a terület, azaz ha

$$dY\,dX = dy\,dx.$$

A conformis másolásnak feltétele tehát:

$$\frac{d\beta}{d\lambda . \cos\beta} = \frac{(1-e^2)\,db}{(1-e^2\sin^2 b)\,dl\cos\beta},$$

az aequivalentiáé:

$$d\lambda\,d\beta\cos\beta = \frac{(1-e^2)\,dl\,db\cos b}{(1-e^2\sin^2 e)^2}$$

és mindkét egyenletben azon egyszerűsítés lép fel, hogy a hosszkülömbségek azonossága folytán mindkét felületen:

$$d\lambda = dl,$$

a miáltal a másolás törvénye teljesen függetlenné válik a geographiai hosszúságtól.

Ha a térképtől más-más tulajdonságokat kivánunk, akkor természetesen a két trapez oldalai között fellépő egyenlet mindig más-más természetű, de ránk nézve az említett két eset tárgyalása elegendő.

A szögtartó és területtartó leképezésnek végleges, legegyszerűbb egyenletei tehát:

$$\frac{d\beta}{\cos\beta} = \frac{(1-e^2)\,db}{(1-e^2\sin^2 b)\cos b} \text{ és } d\beta\cos\beta = \frac{(1-e^2)\,db\cos b}{(1-e^2\sin^2 b)^2}.$$

Mindkettő differentiálegyenlet, a megfelelő véges mennyiségek között fennálló viszonyt tehát csak a felsőbb mathematika adhatja meg. Ez a conformitás számára:

$$\lg\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\beta}{2}\right) = \lg\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{b}{2}\right) - \frac{e}{2}\lg\frac{1+e\sin b}{1-e\sin b},$$

és az aequivalentia esetében:

$$\sin b = \frac{1}{2}(1-e^2)\left[\frac{\sin b}{1-e^2\sin^2 b} - \frac{1}{2e}\,\text{lgnat}\,\frac{1-e\sin b}{1+e\sin b}\right].$$

Az első egyenletet a gyakorlati alkalmazások számára elegendő közelítéssel magunk is vezethetjük le. Kiindulunk a geographiai és geoczentrumos szélességek ismert viszonyából:

$$\operatorname{tang}\psi = (1-e^2)\operatorname{tang} b, \text{ a miből } \cos\psi = \frac{\cos b}{\sqrt{1-2e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin^2 b}}$$

is tüstént levezethető, az ismert

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}$$

vonatkozás alapján. Lássuk, hogyan változik a geoczentrumos szélesség, ha a geographiai szélesség db végtelen kicsiny ívvel nagyobbodik? Az új viszonyokban is áll

$$\operatorname{tang}(\psi+d\psi) = (1-e^2)\operatorname{tang}(b+db)$$

egyenlet, a mely tekintettel $d\psi$ végtelen kicsiny voltára, így is írható:

$$(\operatorname{tang}\psi+d\psi)[1-d\psi\operatorname{tang}\psi]^{-1} = (1-e^2)(\operatorname{tg} b+db)(1-db\operatorname{tang} b)^{-1},$$

vagy sorba bontva s $d\psi^2$-t és magasabb hatványait elhanyagolva:

$$\operatorname{tg}\psi + d\psi(1+\operatorname{tg}^2\psi) = (1-e^2)[\operatorname{tg} b + db(1+\operatorname{tg}^2 b)].$$

A jobb és baloldal első tagjai egymással egyenlők lévén, marad:

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = (1-e^2)\frac{db}{\cos^2 b}$$

vagy

$$\frac{d\psi}{\cos\psi} = (1-e^2)\,db\,\frac{\cos\psi}{\cos^2 b}.$$

A baloldal tehát az adott differentiálegyenlet bal oldalával alakilag azonos. A jobboldal helyébe írjuk $\cos\psi$ előbb talált értékét, és lesz:

$$\frac{d\psi}{\cos\psi} = \frac{(1-e^2)\,db}{\sqrt{1-2e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin^2 b}\,.\cos b},$$

a mi azonban tekintettel e^2 kicsinységére, még másképen is

írható. Ha ugyanis a nevezőben álló négyzetgyököt a binom-tétele értelmében vonjuk, lesz:

$$\frac{d\psi}{\cos\psi} = \frac{(1-e^2)\,db}{(1-e^2\sin^2 b + ..)\cos b}.$$

Most már az egyenlet jobb oldala is egészen e^4-rendű tagokig megegyezik az adott egyenlet jobb oldalával, a miből következik, hogy

$$\psi = \beta.$$

Vagyis szavakban: Ha a sphaeroidot szögtartóan akarjuk lemásolni, akkor ezt egészen úgy vetítjük, mint a gömböt, melynek sugara az aequator sugarával egyenlő, csakhogy a geographiai szélesség helyébe mindenütt a geocentrumos szélesség teendő. A gömb másolatának 45°-ik parallelája tehát a sphaeroid másolatában a 44° 48′ 30″ parallelnek felel meg. A szigorú képletnek e^2 hatványai szerint való sorbabontásának pontosabb képlete:

$$\beta = b - e^2 \sin b \cos b - \tfrac{5}{6} e^4 \sin^3 b \cos b,$$

de az itt adott közelítés, a melynél az e^4 hatványú tag és a következők elesnek, minden esetben teljesen elegendő (499. l.).

Ha az aequivalens vetületekre vonatkozó szigorú képletet ugyancsak e hatványai szerint sorba bontjuk, a következő eredményhez jutunk:

$$\sin\beta = \sin b - e^2 \sin b\,(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2 b) - e^4 \sin^3 b\,(\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{5}\sin^2 b) - ..$$

vagy minden gyakorlati esetben elegendő közelítéssel:

$$\sin\beta = \sin b\,[1 - e^2\,(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2 b)].$$

A sphaeroid tehát aequivalensen leképezhető, ha az aequatori sugárral bíró gömböt ábrázoljuk, de mindenütt a geographiai szélesség helyébe egy másik szélességet β-t írunk, melynek sinusát a fenti egyenlet adja. Hogy magukra a szögletekre térhessünk át, egy kis egyszerű számolást eszközlünk. A fenti egyenlet ugyanis, ha röviden $1 - \frac{2}{3}\sin^2 b = m$,

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1 - e^2 m}{\sqrt{1 + 2e^2 m\left(1 - \dfrac{e^2 m}{2}\right)\operatorname{tg}^2 b}}\operatorname{tg} b$$

alakban, vagy e^4 elhanyagolásával

$$\operatorname{tang} \beta = \left(1 - e^2 \frac{m}{\cos^2 b}\right) . \operatorname{tg} b,$$

a mi nem túlságosan közel a pólushoz egyszerűbben

$$\beta = b - e^2 \left(1 - \tfrac{2}{3} \sin^2 b\right) \operatorname{tg} b$$

alakban is írható.

Igen sok vetületnél a sphaeroidikus alak befolyása közvetlenül is, minden számítás nélkül, tekintetbe vehető: t. i. mindazoknál, melyeknél vagy a meridián- vagy a parallelfokok közvetlenül felrakandók. A Flamsteed- vagy Bonne-féle hálózat tehát a sphaeroidikus Föld számára úgy készül, hogy a középső meridiánra nem egyenlő részeket rakunk, hanem ezt a meridián ellipsis fokainak arányában osztjuk. Ép úgy a parallelákra a sphaeroidikus parallelfokokat rakjuk. E mennyiségek vagy az ismeretes képletek segítségével kiszámítandók, vagy közvetlenül táblázatokból kivehetők.

Egyes példákból most már annyira megismerkedtünk a szögtartó és területtartó vetületek készítésével, hogy ezek mathematikai elméletébe is nyujthatunk betekintést. E czélra a 298. vagy 315. ábra bal részében rajzolt gömbi trapezet veszszük elő, és kifejezzük ennek egyik szögletét, valamint annak területét. Az A-nál lévő szöglet tangense és a trapez df területe számára pl.

$$\operatorname{tang} A = \frac{d\beta}{d\lambda \cos \beta}, \quad df = d\beta \, d\lambda \cos \beta.$$

Most egészen tetszőlegesen megállapítunk egy coordinata-rendszert a síkban, mely egész tetszőleges görbe vagy egyenes vonalokból állhat; ebben megfelel a gömbi trapeznek minden esetben egy síkbeli trapez, a melynek átlója mellett fekvő szöglete conformitás esetében A-val, területe aquivalentia esetében df-fel tartozik egyenlő lenni. Ha pl. derékszögű coordinátákat választunk, akkor a Mercator-féle és az isocylindrikus vetületet kapjuk; ha poláris coordinátákat választunk, akkor a conformis és területtartó kúpos hálózathoz jutunk. Ha az x tengely egyenes, az y tengely pedig sinusvonal vagy ellipsis, akkor az aequivalentia követelése mellett a Flamsteed-

és Mollweide-féle vetületeket nyerjük, s így a síkban való helymeghatározás minden tetszőlegesen választott módjához egy-egy meghatározott háló tartozik.

E gondolatmenetet tisztán mathematikai úton is lehet követni, a mint ezt legalább a szögtartó vetületekre vonatkozólag megkisérelhetjük.

Legyen x, y, z a lemásolandó felület egy pontja, X, Y, Z a másolatnak megfelelő pontja; a lemásolandó felület $\varphi(z, y, z) = 0$ egyenlet, a térkép felülete, mely most általában véve nem szüségképen sík lesz, $\Phi(X, Y, Z) = 0$ egyenlet által legyen adva. Miután a lemásolandó pont a felületen tartozik maradni, minden tetszőlegesen választott x és y-hoz egy egészen meghatározott z tartozik, vagy más szóval, a lemásolandó pont már két coordináta, pl. geographiai szélesség és hosszúság által teljesen meg van állapítva. Mivel ábrázolni annyit jelent, hogy az eredeti egy pontja mellé tetszőleges törvény szerint a kép egy pontját sorakoztatjuk, azért X, Y, Z valamelyes függésben áll x, y, z-vel s mivel ez utóbbi három coordináta λ és β-val kifejezhető, világos, hogy X, Y, Z is λ és β függvényei. Ha tehát λ és β megváltozik a végtelen kis $d\lambda$ és $d\beta$ mennyiséggel, akkor ezzel együtt megváltozik x, y, z és X, Y, Z is, még pedig úgy, hogy

$$dx = ad\lambda + a'd\beta; \quad dy = bd\lambda + b'd\beta; \quad dz = cd\lambda + c'd\beta, \text{ és}$$

$$dX = Ad\lambda + A'd\beta; \quad dY = Bd\lambda + B'd\beta; \quad dZ = Cd\lambda + C'd\beta$$

lesz, a hol az a, a' .. C, C' a geographiai coordinátáktól és a felületek mineműségétől függő coefficiensek.

Ha pl. gömb képezendő le, melynek sugara r, akkor

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

a gömb egyenlete, és a derékszögü coordinatáknak polárisokká való átváltoztatása után

$$x = r \cos\lambda \cos\beta; \quad y = r \sin\lambda \cos\beta, \quad z = r \sin\beta.$$

Ha λ és β helyébe $d + d\lambda$ és $\beta + d\beta$-t írunk, miáltal x, y, z-ből $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ lesz, s e változásokat végtelen kicsinyeknek tekintjük, úgy hogy sinusuk az ívvel, cosinusuk

az egységgel cserélhető fel, második hatványai és kölcsönös szorzatuk pedig elhanyagolhatók, akkor

$$dx = -r \sin\lambda \cos\beta \, d\lambda - r \cos\lambda \sin\beta \, d\beta ;$$

$$dy = r \cos\lambda \cos\beta \, d\lambda - r \sin\lambda \sin\beta \, d\beta ; \quad dz = r \cos\beta \, d\beta$$

úgy hogy ez esetben:

$$a = -r \sin\lambda \cos\beta ; \quad a' = -r \cos\lambda \sin\beta ; \quad b = r \cos\lambda \cos\beta ;$$

$$b' = -r \sin\lambda \sin\beta ; \quad c = o ; \quad c' = r \cos\beta .$$

A $d\lambda$ és $d\beta$ ivek átfogójukkal együtt a felületen végtelen kis háromszöget adnak, melynek a térképen ugyancsak végtelen kis háromszög felel meg. A két háromszög hasonló, azaz szögeik egyenlők, ha két-két megfelelő oldal viszonya ugyanaz. Ha tehát a kis háromszög átfogóját az eredetiben és képében ds és dS-sel jelöljük akkor

$$\frac{dS}{ds} = M$$

egy és ugyanazon háromszög számára állandó szám, melyet nagyításnak nevezhetünk. M a conformitás esetében egy pont körül fekvő háromszög mindhárom oldala számára ugyanaz, de háromszögről-háromszögre, azaz pontról-pontra más lehet. Ha egy általában állandóan $M = 1$ volna, akkor a kép és az eredeti minden pontban megegyeznék, mi csak úgy lehetséges, ha a másolandó és lemásolt felület ugyanazon természetű és nagyságú.

Ugy ds mint dS átlója azon kis parallelegramnak, melynek oldalai dx, dy és dz, illetve dX, dY, dZ, és ennélfogva

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ és } dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

vagy kiszámítva:

$$ds^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\, d\lambda^2 + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\, d\beta^2 +$$

$$+ 2\,(aa' + bb' + cc')\, d\lambda d\beta \text{ és}$$

$$dS^2 = (A^2 + B^2 + C^2)\, d\lambda^2 + (A'^2 + B'^2 + C'^2)\, db^2 +$$

$$+ 2\,(AA' + BB' + CC')\, d\lambda d\beta ,$$

úgy hogy most már az M nagyítás is mint λ és β, $d\lambda$ és $d\beta$ függvénye kiszámítható.

Legyen most rövidség kedvéért

$$a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2;\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = \alpha'^2;\ aa' + bb' + cc' = \beta'^2,$$

akkor

$$ds^2 = \alpha^2\, d\lambda^2 + \alpha'^2\, d\beta^2 + 2\beta'^2\, d\lambda\, d\beta.$$

A gömb számára adott értékekből a gömb leképzése esetében állana:

$$\alpha^2 = r^2 \cos^2\beta;\ \alpha'^2 = r^2;\ \beta'^2 = 0$$

és ezért

$$ds^2 = r^2 \cos^2\beta d\lambda^2 + r^2\, d\beta^2,$$

miként ez az ABC háromszögből (315. ábra) közvetlenül is adódik.

Ha most $ds = 0$-t teszünk, akkor kapunk minden pont számára egyenletet λ és β között, mely általánosan $d\lambda$ számára feloldva:

$$d\lambda = -\frac{\beta'^2}{\alpha^2}\, d\beta \pm \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\beta'^4 - \alpha^2\alpha'^2}\, .\, d\beta,$$

vagy a gömb esetében egyszerűbben:

$$d\lambda = \pm \frac{i\, d\beta}{\cos\beta},$$

ha i az imaginárius egységet jelenti. Az egyenlet jobb oldala, eltekintve az i factortól, azon ismeretes kifejezés, mely a gömb conformis leképzésében már nekünk is többször előfordult.

Általánosságban a másodfokú egyenlet megoldása a következő két egyenlethez vezet:

$$\alpha^2\, d\lambda + \beta'^2\, d\beta + i\, d\beta \sqrt{\alpha^2\alpha'^2 - \beta'^4} = 0$$

$$\alpha^2\, d\lambda + \beta'^2\, d\beta - i\, d\beta \sqrt{\alpha^2\alpha'^2 - \beta'^4} = 0,$$

a melyek minden esetben integrálhatók, azaz melyekből minden esetben a λ és β véges mennyiségek között fennálló viszony is levezethető. Mivel a két egyenlet conjugált, azért megoldásuk is conjugált lesz, azaz

$$p + iq = \text{const}, \quad \text{és} \quad p - iq = \text{const},$$

ha p és q λ és β-nak függvényeit jelentik. Ezek tényleg csak

akkor számíthatók ki, ha a felület alakját egyenlete szerint megadva, ismerjük. Ha λ és β ismét, illetve $d\lambda$ és $d\beta$ mennyiségekkel nőnek, akkor p-ből $p + dp$; q-ból $q + dq$ lesz, és mivel az állandó természetesen változatlanul marad,

$$dp + i dq = 0, \quad dp - i dq = 0$$

lesz. Ennélfogva írhatjuk az azonosan kielégített egyenletet:

$$\alpha^2 d\lambda + \beta'^2 d\beta + i \sqrt{\alpha^2 \alpha'^2 - \beta'^4}\, d\beta = R (dp + i dq)$$

$$\alpha^2 d\lambda + \beta'^2 d\beta - i \sqrt{\alpha^2 \alpha'^2 - \beta'^4}\, d\beta = R' (dp - i dq),$$

a hol R és R′ általában véve λ és β függvényei, melyek adott esetben az egységgel is lehetnek azonosak. Hozzáfüzésük az eredményt nem változtatja meg, mert hiszen úgy $dp + idq$, mint $dp - idq = 0$.

A két egyenlet szorzata:

$$\alpha^4 d\lambda^2 + 2\alpha^2 \beta'^2 d\lambda d\beta + \alpha^2 \alpha'^2 d\beta^2 = RR' (dp^2 + dq^2),$$

vagy egyszerűbben

$$ds^2 = \frac{RR'}{\alpha^2} (dp^2 + dq^2),$$

a mi még

$$\frac{RR'}{\alpha^2} = n$$

téve, a hol n a geographiai coordináták függvénye,

$$ds^2 = n (dp^2 + dq^2),$$

egyszerű alakban is írható. Teljesen azonos módon levezethető a térkép felülete számára is a megfelelő egyenlet:

$$dS^2 = N (dP^2 + dQ^2),$$

a hol a nagy és kis betűkkel jelzett mennyiségek, mint eddig is, analog jelentőséggel bírnak. Most már a nagyítási viszony könnyen kifejezhető:

$$M^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{N}{n} \frac{(dP + idQ)(dP - idQ)}{(dp + idq)(dp - idq)}.$$

A conformitás föltétele, hogy a nagyítási viszony függet-

len legyen az iránytól, a mit a jelen kifejezés nem elégít ki, mivel benne a kis változások, dp, dq, dP és dQ is előfordulnak. Ha ugyanis p-ben dp-vel, q-ban dq-val megyünk tova, akkor a $p+dp$ és $q+dq$ coordinátákkal bíró pont a p, q ponthoz képest minden tetszőleges irányban fekhetik, mert dp és dq ugyan vég nélkül kicsiny, de ezen megszorításon belül egészen tetszőleges. Az ellenmondás azonban könnyen és teljesen megszüntethető, ha nem egyenkint P és Q függvénye egyenkint p és q-nak, hanem ha

$$P+iQ=f(p+iq),$$

azaz ha $P+iQ$ függvénye $p+iq$-nak, a mivel természetszerűen jár, hogy

$$P-iQ=f(p-iq),$$

azaz, hogy $P-iQ$ ugyanazon függvénye a conjugált $p-iq$ argumentumnak.

Most már $dP \pm idQ$ változás egyszerűen $df(p \pm iq)$ függvény megváltozásával egyenlő, és

$$\frac{dP+idQ}{dp+idq}=\varphi(p+iq); \quad \frac{dP-idQ}{dp-idq}=\varphi(p-iq)$$

minden esetben kiszámítható, csak a $p \pm iq$ combinatiótól függő függvény, melyben a dp és dq, az irányváltozást jelölő mennyiségek egyenként nem fordulnak elő. Most már végleg

$$M^2=\frac{N}{n}\varphi(p+iq)\,\varphi(p-iq),$$

és az egész feladat megoldása a következő:

A lemásolandó felület egy ívelemét $ds=0$-nak veszszük fel és keressük ennek két véges egyenletét, $p+iq=\text{const}$ és $p-iq=\text{const}$ alakjában. Ha azután f valamely egészen tetszőleges functiót jelent, akkor

$$P \pm iQ=f(p \pm iq)$$

egyenletet veszszük fel, a mi a reális és imaginárius mennyiségek külön-külön való összehasonlítása után a két

$$P=F_1(p,q); \quad Q=F_2(p,q)$$

egyenlethez vezet, melyek a térkép adatait a leképzendő felületnek helymeghatározó adataival fejezik ki. Ha azután

$$\varphi(u) = \frac{df(u)}{du},$$

akkor a térkép nagyítása egy $\lambda\beta$ pont körül

$$M = \left[\frac{N}{n}\varphi(p+iq)\,\varphi(p-iq)\right]^{\frac{1}{2}}$$

kifejezés által van adva, a hol

$$n = \frac{ds^2}{dp^2+dq^2} \quad \text{és} \quad N = \frac{dS^2}{dP^2+dQ^2}$$

egyenletek segítségével kiszámítható.

A gömb leképezése esetében a $d\lambda$ számára talált két egyenlet

$$d\lambda + i\frac{d\beta}{\cos\beta} = 0 \quad \text{és} \quad d\lambda - i\frac{d\beta}{\cos\beta} = 0,$$

melyeknek megoldása ugyanaz, mint a loxodromia egyenlete; azaz véges alakban:

$$\lambda + i\,\text{lgnat tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = p + iq$$

$$\lambda - i\,\text{lgnat tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = p - iq.$$

A conformis leképezés szabályai szerint most

$$P + iQ = f\left[\lambda + i\,\text{lgnat tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\right] = X + iY,$$

teendő, hol P és Q, mivel a síkra vetítünk, közvetlenül X és Y, a két derékszögű coordinátával azonos. Ha most f számára tetszőleges függési módozatokat tételezünk fel, más-más conformis másolathoz jutunk.

A függés legegyszerűbb módja az, hogy a függvény magával az argumentum egy sokszorosával egyenlő, azaz

$$f(u) = ku.$$

Ez esetben:

$$X + iY = k\left[\lambda + i \operatorname{lgnat} \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

vagy a reális és imaginárius részek különválasztása által:

$$X = k\lambda \text{ és } Y = k \operatorname{lgnat} \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right).$$

A térképben tehát az abscissatengelyen a hosszkülömbséggel arányos részeket metszünk le, míg a parallelákat az egyenlet által adott Y távolságokban rakjuk fel a közép meridiánra. A meridiánok és parallelák nyilván, illetve az Y és X tengelylyel párhuzamos egyenesek, a vetület tehát a Mercator-féle térképet adja.

Mivel e vetület egyenlete szerint

$$p = \lambda \text{ és } q = \operatorname{lgnat} \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

úgy

$$dp = d\lambda \text{ és } dq = \frac{d\beta}{\cos\beta},$$

mint ezt már a Mercator-féle vetületben is láttuk, és ennélfogva

$$n = \frac{ds^2}{dp^2 + dq^2} = \frac{r^2(\cos^2\beta\, d\lambda^2 + d\beta^2)}{d\lambda^2 + \frac{d\beta^2}{\cos^2\beta}} = r^2\cos^2\beta$$

és a sik számára természetesen

$$N = 1.$$

Továbbá f(u) megváltozása, ha u helyébe u + du lép:

$$df(u) = k\,du,$$

a miből

$$\frac{df(u)}{du} = \varphi(u) = k.$$

A nagyítás tehát:

$$M = \sqrt{\frac{N}{n}\,k^2} = \frac{k}{r\cos\beta}$$

tisztán a szélességtől függ, mint ezt már a Mercator-vetület megbeszélése mellett is tanultuk.

Legyen egy másik esetben

$$f(u) = ke^{imu},$$

azaz a tetszőleges függvény exponentiális mennyiség. Ekkor

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{ke^{im(u+du)} - ke^{imu}}{du} = \varphi(u),$$

ha du minden képzelhetőnél kisebb. Mivel tudvalevőleg

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

lesz du^2 és magasabb hatványainak elhanyagolása után

$$\varphi(u) = ikme^{imu}.$$

Ha ismét a síkra vetítünk, P = X és Q = Y tehető, s lesz:

$$X + iY = ke^{mi\lambda} \cdot e^{-m \operatorname{lgnat} \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)},$$

vagy mivel

$$-m \operatorname{lgnat} \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = m \operatorname{lgnat} \operatorname{cot}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$\operatorname{lgnat} \operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right),$$

és egy szintén gyakran használt tétel alapján:

$$e^{mi\lambda} = \cos m\lambda + i \sin m\lambda \text{ s } e^{\operatorname{lgnat} tg^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)} = tg^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right):$$

$$X + iY = k(\cos m\lambda + i \sin m\lambda) \operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Reális és imaginárius mennyiségek elkülönítése után lesz:

$$X = k \operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) \cos m\lambda$$

$$Y = k \operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) \sin m\lambda,$$

a mi a szögtartó kúpvetületet adja derékszögű coordinátákban. A β parallelkör képe kör, sugara

$$R^2 = X^2 + Y^2 = k^2 \operatorname{tang}^{2m}\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right), \text{ a miből}$$

$$R = k \operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right),$$

mely egyenletet szintén ismerünk. Ha $m = 1$, akkor a stereographikus vetületet nyerjük. E vetületnél általában véve is

$$Y = \operatorname{tang} m\lambda \,.\, X,$$

azaz a meridiánok egyenesek, melyek a coordináta kezdő pontján mennek át, a parallelkörök körök, melyek kezdőpontja a coordináta-eredetben fekszik. Egyáltalában, minden egyenlet, melyből X és Y között β van eliminálva, a meridiánok, melyből λ hiányzik, a parallelkörök egyenletét adja.

Itt is, mint előbb,

$$dp = d\lambda \text{ és } dq = \frac{d\beta}{\cos\beta}, \quad N = 1$$

lévén, a nagyítási viszony

$$M = \frac{1}{r\cos\beta}\left\{(ikm)\, e^{mi\left(\lambda + i \operatorname{lgnat\,tg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\right)}\right.$$

$$\left.(-ikm)\, e^{-mi\left(\lambda - i \operatorname{lgnat\,tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\right)}\right\}^{1/2}$$

vagy kellő reductio után:

$$M = \frac{km}{r\cos\beta}\left\{e^{-2m \operatorname{lgnat\,tang}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)}\right\}^{1/2} = \frac{km}{r\cos\beta}\operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Ha tehát a nagyítás a két β' és β'' parallelkörben ugyanaz, akkor

$$\frac{km}{r\cos\beta''}\operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta''}{2}\right) = \frac{km}{r\cos\beta'}\operatorname{tang}^m\left(45^0 - \frac{\beta'}{2}\right),$$

a miből, mint a Lambert-féle szögtartó kúpvetületnél találtuk, volt:

$$m = \frac{\lg\cos\beta'' - \lg\cos\beta'}{\lg\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta''}{2}\right) - \lg\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\beta'}{2}\right)}.$$

Analog eljárást követünk akkor is, ha a területtartó térképeket állítjuk elő. Minden esetben, mint látni lehetett, valamennyi létező végtelen sok szög és területtartó hálózat megszerkeszthető, ha az f függvény helyébe valamennyi végtelen sok képzelhető függvényalakot írjuk.

VI. FEJEZET.

A térképek torzítási viszonyai.

A térképek torzulásait mi az egyszerűbb esetekben mindig külön-külön határoztuk meg, de valamint a térképvetítésnek, úgy ennek is általánosan érvényes szabályai vannak, melyeket Tissot tanulmányozott. A levezetések ismét felsőbb mathematikát igényelnek s ennek mellőzésével csak nagy kerülőkön hozhatók le, úgy hogy e helyen az eredmények egyszerű felsorolásával beérjük.

Kivétel nélkül minden térképen két egymásra merőleges irány húzható, melynek a Földön is két derékszög alatt egymást metsző ív felel meg. A szögtartó térképeken a Föld felületén tetszőleges irányban húzott derékszögű kereszt ugyanily módon másolódik, a nem conformis ábrázolásokban csak bizonyos irányok bírnak ezen kiváltsággal. Igy pl. a poláris vetületekben, a henger- és kúpvetületekben általában a meridiánok és parallelák derékszög alatt metszik egymást, miként a Földön is, még ha az illető hálózatok nem conformisak is. A gnomónos, Postel- és Lambert-féle azimuthális területtartó térképben pl. a térkép közepéhez és az arra merőlegesen húzott irány bír a nevezett tulajdonsággal. Ezen két egymásra merőleges irány egyszersmind az, melyben a nagyítás maximum és minimum. Ha tehát a földfelület bármely pontja körül egy kis sugárral kört írunk le, melynek sugarát egységül is vehetjük, akkor a térkép torzulása abban fog állni, hogy ezen ponton átmenő két, a térképen is merőlegesen egymásra álló irányban a sugár képe a, illetve b hosszúságot nyer. Itt egyszerszersmind a a legnagyobb, b a legkisebb nagyítás, mely a térkép ezen pontja körül tetszésszerinti irányban előfordulhat. Az $r = 1$ sugarú kör a Földön tehát a térképben egy a és b féltenge-

lyekkel bíró ellipsisbe ment át, melyet indicatrixnek szokás nevezni, mert méretei tényleg felvilágosítást adnak a térkép torzulási viszonyairól.

Ha ugyanis 2ω a legnagyobb szögtorzulás, mely az illető pont körül előfordulhat, akkor ez

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}$$

indicatrixméretek által van adva. Ha tehát $a = b$, azaz az ellipsis is körbe megy át, úgy hogy a földfelületen rajzolt kör képe a hálózatban is kör marad, akkor szögtorzulás nincs és a térkép conformis. Ha az ellipsis területe $a\,b\,\pi^2$ azonos a kör területével, $1^2\pi$, azaz:

$$a\,b = 1$$

akkor a térkép területtartó, míg

$$\frac{a}{b} = m$$

a távolság legnagyobb változását adja. A két utolsó képlet közvetlenül világos és az első is könnyen levezethető.

Ezen kriteriumokkal felfegyverkezve, most már könnyen mérlegelhetjük az egyes vetületeket s eldönthetjük minden esetben ezek értékét és megítélhetjük, hogy bizonyos czélra melyik választandó legelőnyösebb vetület gyanánt.

Tissot ezen számításokat eszközölte a főbb, szokásban lévő vetületek számára, azonban eleve rekesztette ki mindazon vetületeket, melyek egész határozott czélra szolgálnak, vagy melyeknél bizonyos pontok vonalokká torzulnak, vagy a földi pólusok a végtelenségbe vándorolnak. Ki van tehát rekesztve a gnomónos vetület, mert ezt igazán csak akkor használjuk, mikor a legnagyobb köröket egyenesekül akarjuk ábrázolni, az orthographiai vetület, mert kizárólag a bolygók felületének lerajzolására szolgál, a Mercator-féle projectió, mert a pólus a végtelenben fekszik s hasonlók.

Ha először is a félgömböt akarjuk ábrázolni, akkor a legelőnyösebb vetületek a stereographiai, a Postel-féle aequidistáns és a Lambert-féle azimuthális aequivalens vetület, mert mindegyike a jó vetület egy főtulajdonságát tartalmazza és a Földet

összefüggő kép alakjában másolja. Az egyes legnagyobb torzulások e térképek számára a következő táblázatban vannak felsorolva:

	2ω	$\frac{a}{b}$	$a\,b$
Stereographikus szögtartó vetület	0°.0	2.000	4.000
Postel azimuthális távolságtartó „	25.7	1.571	1.571
Lambert „ területtartó „	39.0	2.000	1.000
Területtartó kúpvetület	19.7	1.414	1.000

E torzulás egynémelyikének számértékét mi is találtuk már; nevezetesen tudjuk, hogy a stereographikus térkép szélein minden irányban kétszerezi a távolságokat, tehát négyszerezi a területet. A Postel-féle vetület a középhez húzott egyenesben torzulást nem mutat, arra merőlegesen, a mint mi is számítottuk, 57 perczenttel torzítja a távolságokat. A terület tehát e térkép szélén szintén 1,571-szor akkora, mint a Földön. Igaz, hogy a stereographikus térkép a távolságokat és a területeket tetemesen torzítja, de nincs conformis vetületünk, a mely ezen két utolsó elemben kisebb hibát hagyna meg. A Postel-féle aequidistáns térkép tetemes távolsági és szöghibákat hoz be, de mindazonáltal a legelőnyösebb térkép, a mely úgy szerkeszthető, hogy a térkép közepétől számított távolságok torzulás nélkül maradjanak. Ep így a Lambert-féle azimuthális területtartó térkép a legjobb a fél Föld ábrázolására, daczára annak, hogy a szögleteket a térkép szélén maximumban 39 fokkal, a távolságokat 100 perczenttel torzítja.

Sokkal kedvezőbbek azonban a viszonyok, ha lemondunk arról, hogy a Föld képét összefüggő térképen akarjuk és kúpvetületeket is engedünk meg, a melyekből tudvalevőleg egy sector hiányzik. Miután a kúpvetületekben a középső meridián semmi különös szerepet nem játszik, ez úgy fektethető, hogy ez üresen maradó sector valamelyik óczeánba essék, miáltal lényeges szerepet játszó földrészek nem választatnak el egymástól. Az előbbi táblázat utolsó sora az aequivalens kúpvetületet jellemzi, s látni való, hogy ennek legnagyobb szögtorzulása 19°.7 és legnagyobb távolságtorzulása 41,4% messze mögötte marad azon hibáknak, melyeket a többi vetület létesít.

Sokkal kedvezőbb viszonyokhoz jutunk természetesen, ha a fél Föld helyett ennek csak kisebb darabjait, pl. egyes

continenseket másolunk le. Ha 25°, 40° és 50° gömbi sugárral calottákat írunk le, akkor ezek magukba foglalhatják sorban Európát, Eszak- vagy Délamerikát vagy Afrikát vagy Ázsiát Európával együtt. Az egyes hálózatok legnagyobb torzulásai ekkor a következők:

gömbisugár =	25°			40°			50°		
	2ω	$\frac{a}{b}$	ab	2ω	$\frac{a}{b}$	ab	2ω	$\frac{a}{b}$	ab
Stereogr. conform. vet.	0°.0	1.05	1.10	0°.0	1.13	1.28	0°.0	1.22	1.48
Aequivalens kúpvet.	1.4	1.02	1.00	3.6	1.06	1.00	5.6	1.10	1.00
Postel aequidist. azim. vet.	1.8	1.03	1.03	4.7	1.09	1.09	7.5	1.14	1.14
Lambert aequiv. azim. vet.	2.7	1.05	1.00	7.1	1.13	1.00	11.2	1.22	1.10
Bonne-féle aequiv. vetület	6.4	1.12	1.00	22.6	1.49	1.00	26.2	1.58	1.00

Látjuk tehát, hogy minden esetben jóság tekintetében a kúpvetület foglalja el az első helyet, ha nem éppen a conformitásra vagy középpont-távolságtartásra fektetjük a fősúlyt és épp oly határozottan mutatkozik a Bonne-féle vetület hibás volta, mert a területtartás mellett a többi aequivalens vetület mind tekintélyesen kisebb torzulásokat tüntet fel. Ezek után e vetületnek többé jogosultsága nincs, hogy alkalmazásokban szerepeljen.

Kompenzativ vetületek. Az adott táblázatok könnyen új gondolatra is vezethetnek, melyet először szintén Tissot dolgozott ki. Ha ugyanis nem fektetünk éppen súlyt arra, hogy a térkép szög-, terület- vagy távolságtartó legyen, hanem csak azt kivánjuk, hogy e három tulajdonságból együtt lehetőleg legnagyobb rész legyen meg, akkor ismét egy új térképvetítési elvhez jutottunk, mely egészen határozottan kifejezhető. Ekkor követeljük t. i. azt, hogy az összes torzulások egyenként minimumok legyenek. Azt már tudjuk, hogy az absolut minimum, azaz a torzulások nullértékét nem érhetjük el, mert akkor a Földet csak vele egynemű felületre, nem pedig síkra kellene másolni.

A gondolat mathematikailag való beruházása a következő: ha a lemásolandó terület a Föld felületének csak kis részét teszi, azaz kis nyilású calottán fekszik, akkor a térkép közepéhez viszonyított legnagyobb előforduló szélesség- és hosszúságkülömbség b és l csak nagyon kis szám lesz. A szögek egy-

sége tudvalevőleg azon szög, a melynek íve a sugárral egyenlő s ez $\frac{180}{\pi} = 57^0.29\,578$. Ha tehát a calotta $57^0.30$ sugárral bír is, a térképen előforduló b és l legnagyobb értéke csak 1 lehet. Téve tehát

$$b = \frac{\pi}{180}(\beta - \beta_0) \text{ és } l = \frac{\pi}{180}(\lambda - \lambda_0),$$

b és l egyes országokra, sőt a kisebb continensek számára igen kis szám leend. Ha most a térkép pontjait, a melyek a b, l pontnak felelnek meg, x és y coordinátákkal határozzuk meg, akkor az x és y-nak b és l-től való függését, bármily természetű is legyen ez, b és l hatványai szerint haladó sorba bonthatjuk, a mely természetesen annál gyorsabban convergál, minél kisebb b és l, azaz minél korlátoltabb a lemásolandó terület terjedelme. E szerint

$$x = a_0 b + a_1 l + a_2 b^2 + a_3 bl + a_4 l^2 + a_5 b^3 + a_6 b^2 l + a_7 bl^2 + a_8 l^3 + ..$$

$$g = b_0 b + b_1 l + b_2 b^2 + b_3 bl + b_4 l^2 + b_5 b^3 + b_6 b^2 l + b_7 bl^2 + b_8 l^3 + ..$$

és a gyakorlati alkalmazások minden esetében b és l harmadik hatványánál magasabb hatványú tagokat tekinteten kívül hagyhatunk. A coefficiensek egyelőre még természetesen ismeretlenek, de meghatározhatók teljesen a kiszabott feltételek szerint. A meghatározás módjára nem terjeszkedhetünk itt, ennélfogva csak az utat mutathatjuk ki.

Ha két végtelen közel eső meridiánt és parallelt húzunk egy gömbi trapezet nyerünk, melynek egy sík parallelegramm felel meg x és x + dx fekvésű ordináták és y, y + dy távolságban húzott abscissák között. A gömbi trapez területe $df = r^2\,db\,dl\cos\beta$, átlója $ds = \sqrt{r^2\cos^2\beta\,dl^2 + r^2\,db^2}$ és az átló és egyik oldal által bezárt szöglet tangense: $tg\alpha = \frac{db}{dl\cos\beta}$, mint ezt már többször levezettük. A sík parallelegrammban ezen elemek sorban $df' = dx\,dy$; $ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ és $\text{tang}\,\alpha = \frac{dy}{dx}$, és feltételeink értelmében kell, hogy az eltérések lehetőleg kicsinyek legyenek, kell tehát, hogy

$$dxdy - r^2\,db\,dl\cos\beta = \text{minimum};$$

$$r^2 \cos^2\beta\, dl^2 + r^2\, db^2 - dx^2 - dy^2 = \text{minimum}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{db}{dl \cos\beta} = \text{minimum}$$

legyen. dx és dy azonban könnyen kifejezhető dl és db által; ha ugyanis b és l helyébe, illetve b + db és l + dl-t irunk, akkor

$$dx = [a_0 + 2a_2\, b + a_3\, l + 3a_5\, b^2 + 2a_6\, bl + a_7\, l^2]\, db$$
$$+ [a_1 + a_3\, b + 2a_4\, l + a_6\, b^2 + 2a_7\, bl + 3a_8\, l^2]\, dl$$

és teljesen hasonlóan dy számára is, ha mindenütt az a coefficiensek helyébe a megfelelő b coefficienseket írjuk. Ha dx és dy ezen értékeit behelyettesítjük a mondott feltételekbe, akkor elégszámú egyenletet kapunk a 18 ismeretlen coefficiens meghatározására. Tissot különben egyszerűbb módszereket is ad; ha ugyanis a lerajzolandó területről már van egy bármily vetület szerint készült térképünk, akkor a coefficiensek az indicatrix tengelyeiből és ezeknek a meridiánhoz való hajlásából vezethetők le.

Tissot kompenzativ kúpvetülete. Leginkább használatos a Tissot-féle kúpvetület, mely teljesen úgy készül, mint az aequidistáns kúpvetület, csakhogy a meridiániv helyett, mely a parallelkörök képsugaraiban rejlik, ennél valamivel nagyobbat veszünk; ha ugyanis s ezen ív hossza egy fokra, akkor

$$R = r \operatorname{cotg}\beta_0 - s(\beta - \beta_0) - \frac{1}{6a^2}\, s^3(\beta - \beta_0)^3$$

veendő, ha a az aequatori fél tengelyt jelenti. s pedig elliptikus Föld számára tudvalevőleg

$$s = \frac{\pi}{180} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\beta)^{3/2}}$$

képletből számítható vagy a Behm-féle évkönyv táblázataiból vehető ki. A kész hálózatot a 316. ábra mutatja be.

Hogy fogalmunk legyen arról, mikor alkalmazandó a Tissot-féle vetület a közönséges aequivalens kúpvetület helyett, a következő okoskodással élhetünk: kérdezhetjük, hogy a térképnek mily mérete mellett tesz ki a két vetület különb-

sége a parallelkörök fekvésében egy bizonyos, még éppen észrevehető mennyiséget, pl. $\frac{1}{10}$ millimétert. Ekkor áll az egyenlet:

$$\frac{1}{6}\frac{s^3}{a^2 m}=0{,}1,$$

melynek megoldásában szabad lesz a Földet gömbalakúnak tekinteni, a mi által

$$\frac{s^3}{a^2}=\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 r\,(\beta''-\beta')^3,$$

ha $\beta''-\beta'$ azon szélességi köz, melyben az egyes parallelák egymásra következnek. Ha ez 1^0 volna, akkor

$$m = 56450$$

adódik; azaz: ha a térkép skálája kisebb vagy egyenlő 56500-zal, akkor a Tissot-féle vetület léphet a közönséges kúpvetület helyébe. Ennek előnyeit egynéhány példa legjobban mutatja be.

A franczia 1 : 80 000 speciális térkép a Bonne-féle vetület szerint készült, melynek középparallelája 45^0 szélességgel bír. Legnagyobb szögtorzulása 18′, legnagyobb távolság torzítása $\frac{1}{380}$. Ha a Tissot-féle kúpvetületet választanók s a középparallelt 47^0 30′ szélességbe fektetnők, akkor e maximális torzulások 25″ és $\frac{1}{1100}$ volnának.

A déli Közép-Európa $37\frac{1}{2}^0$—$52\frac{1}{2}^0$ szélességi terjedelemben lemásolva a Bonne-féle vetületben 14^0 40′ szögtorzulást és $\frac{1}{7}$-re menő távolsági torzulást adna. Ugyanezen térkép a Tissot-féle vetületben e hibákat 1′ 20″ és $\frac{1}{230}$-ra szorítaná le Aegyptusnak Bonne-féle térképében 25′ és $\frac{1}{250}$-ed szög- és távolságtorzulást tüntetne fel, míg a Tissot-féle térkép hibái 5″ és $\frac{1}{2000}$ lennének, úgy hogy a Tissot-féle térkép elsősége minden tekintetben elvitázhatlan.

VII. FEJEZET.

A térképek anyagának beszerzése.

A térkép kész hálózata ama keret, a melybe az eddig felkutatott geographiai részletek beilleszthetők. Ezek beszerzése természetesen első sorban a geographiai hely- és irány-meghatározás dolga, lényegileg tehát ismeretes feladatra vezethető vissza. Minthogy azonban — különösen első utazásokon — általában is gyakran kisebb pontossággal be kell érnünk, vagy pontosan meghatározott főpontok közé kisebb gonddal eszközölt helymeghatározások is haszonnal igtathatók, külön eljárásra van szükségünk, mely egyrészt ily futólagosabb helymeghatározásra tanít, másrészt ennek eredményét a valószínűségi számítás elvei szerint, de lehetőleg egyszerűbben kiigazítani engedi. Ez a topographiai felvételek tanának dolga, a mely noha a csillagászati mérésekhez elvileg hasonlít, sokkal egyszerűbb megfigyelési és számolási eszközökkel dolgozik. E disciplina tisztán gyakorlati voltánál fogva egészen külön tárgyalandó, noha ily topographiai felvételek graphikus kiegyenlítése elvileg hasonlít ama komplikált kiegyenlítési számolási módszerekhez, a melyek a geodéziában, a Föld felmérésében használatosak. Ezekre vonatkozólag lásd egyebek között: Schafarzik Fer., Kirándulók zsebkönyve; Budapest, 1888.; Dr. G. Neumayer, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen; Berlin, 1888. és Dr. K. Zöppritz, Leitfaden der Kartenentwurfs-Lehre: Leipzig, 1884. Kaltbrunner D., Manuel du Voyageur, Zürich, 1879. Freshfield D. W. & Wharton W. J. L., Hints to Travellers; London, 1893. Jordan W., Handbuch der Vermessungskunde, I—III. Band; Stuttgart, 1895.

VIII. FEJEZET.

A glóbus alkalmazása.

A térképek, különösen pedig a glóbusok a Föld s az égnek másai, részben pedig egyenesen mechanikai utánzásai, s ezért ezekkel minden feladat, mely a mathematikai geographia körébe

tartozik, mechanikailag vagy graphikailag is megoldható. — Néhány ily feladatról már a térképek esetén is volt szó, de világos, hogy ezek speciális tulajdonságai szerint ugyanazon feladat is különböző térképeken különböző megoldást nyer. A glóbusok esetében azonban általános szabályok is adhatók, s befejezésül hadd álljanak itt a gyakrabban előforduló feladatok, melyek már útmutatást fognak adni, mikép oldható meg bármilyen előforduló problema.

A glóbus a világtengelyt ábrázoló egyenes körül forgatható gömb; a tengely végén surlódással ráillesztett óraszámlap van, mely 24^h-ra van osztva; az osztás minden esetben a mozgás irányával megegyező, az égglóbuson tehát keletről nyugot felé, a földglóbuson nyugotról kelet felé halad. E tengely ugyancsak 360^0-ra osztott rézgyürűre van erősítve, mely a megfigyelési hely meridiánját ábrázolja, s ez merőlegesen a glóbus középpontján átmenő vízszintes síkba van sülyesztve, a horizontba. A horinzontot ábrázoló karima hasonlóan 360^0-os osztással van ellátva, rendesen úgy, hogy az osztás a kelet és nyugot-pontokból kiindulva észak és dél felé 90^0-ig halad. Ezenkívül a feladatok könnyebb megoldása kedvéért egy graphikai naptárt tartalmaz, melyből a Nap hossza minden egyes nap számára kivehető. Minden glóbusba be van rajzolva az ekliptika is, hogy a Nap helye úgy a Föld, mint az égglóbus számára bármely pillanatban felrajzolható legyen. A glóbus lábán rendesen boussola foglal helyet, melynek NS vonala a rézmeridián síkjába esik, úgy hogy a mágneses declinatió tekintetbevétele mellett a rézgyürű síkja a meridiánba legyen állítható.

Az első kellék mindig a glóbusnak a megfigyelési hely szerint való felállítása. E czélból a horizontot vízszintesre állítjuk és a rézgyürű síkját a meridiánba hozzuk, vagy a mágnestű segítségével, vagy azáltal, hogy a valódi dél pillanatában a glóbust addig forgatjuk, míg a gyürű árnyéka magába a gyürű síkjába esik. Ezután forgatjuk a rézgyürűt a horizontban addig, míg az északi pólus annyi fokkal áll a horizont N pontja felett, mint a mennyit a megfigyelési hely geographiai szélessége kitesz. A glóbus tengelye most a világtengelylyel párhuzamos és a horizontjának síkja is a csillagászati horizontba esik. Most már csak magának a forgó gömbnek kellő beállításáról van szó. E czélra fölkeressük a Nap

hosszát a megfigyelés napján. Megjegyzem, hogy a legtöbb glóbus nem a 360°-ig olvasott hosszat adja, hanem a régi számolási mód szerint az állatöv jegyét, melyben a Nap áll, s ezután 30°-ig menve, fokok szerint e jegyben elfoglalt állását. E szerint az egyes jegyek kezdőpontjai:

Kos	♈ = 0°	Oroszlán	♌ = 120°	Nyilas	♐ = 240°
Bika	♉ = 30°	Szűz	♍ = 150°	Bak	♑ = 270°
Kettős	♊ = 60°	Mérleg	♎ = 180°	Vízöntő	♒ = 300°
Rák	♋ = 90°	Scorpio	♏ = 210°	Halak	♓ = 330°

átmenően olvasott hosszúságoknak felelnek meg.

Ha a Nap helyét a glóbusra rajzolt ekliptikán megjelöltük és ezt a rézgyürű alá forgattuk, akkor a Nap a megfigyelési hely számára nyilván delel, a tengely végén álló óralap tehát 0^h vagy 12^h valódi időre állítandó. Ha most addig forgatjuk a glóbust, míg a vele együtt forgó óralapon a mutató a megfigyelés óráját kitünteti, akkor a glóbus irányítása szerint is teljes képét adja a Földnek vagy csillagos égnek, a Nap sugarai által tehát éppen úgy van megvilágítva, mint maga e Föld.

Az óralap, csekély terjedelme miatt, természetesen nem enged meg pontos időmeghatározást, és noha a következőkben is csak ennek alkalmazásáról fogunk szólani, mégis a gyakorlati kivitelnél ott, hol szükséges, pontosabb eljárást javasolunk. Olvassuk le ugyanis az aequator azon osztási pontját, mely a Nappal együtt áll a meridián alatt; ha most elforgatjuk a glóbust n°-kal, akkor ez nyilván 4n időpercznek felel meg, vagy viszont m órának megfelelő elforgatás 15 m foknyi forgatásnak felel meg. Mivel az aequator rendesen teljes fokokra van osztva és ezek negyede még könnyen becsülhető, ily módon perczre pontos meghatározást nyerünk.

A glóbusnak fontos kiegészítő része még egy hajlítható vonalzó, mely a gömb egy negyedét ábrázolja, és a rézmeridián zenithjében, tehát az északi pólustól délre, a sarkmagasság pótlószögletével egyenlő távolságban forgathatólag van megerősítve. Ez a horizonttal együtt az ég vagy Föld horizontális rendszerét másolja, míg a gömbön levő coordinátarendszer az aequatori vagy a napi forgás rendszerét tünteti

fel. A rézmeridián mindkét rendszernek közös legnagyobb köre. Ha a quadránst egy csillagon vagy a Nap helyén átvezetjük, akkor a quadránsnak a csillag és a zenith között való íve, a rézmeridián íve a pólus és a zenith között és a csillagon átmenő órakör része a csillag és a pólus között adják a csillagászati háromszöget, és közvetlenül leolvasható a quadránson a Nap magassága a mondott órában, valamint annak azimuthja a horizont beosztásán a kelet- vagy nyugotponttól számítva.

Megfordítva a glóbus teljes irányítása az idő meghatározására is használható. Ha ugyanis tudjuk, hogy adott napon a Nap vagy valamelyik csillag magassága h, akkor addig forgatjuk együttesen a glóbust s azon a quadránst, míg ez az adott magassági számnál át nem megy a Nap helyén. Az óralap száma ekkor a valódi napi időt adja. Ha a Nap helyett csillag szerepelt, akkor a csillagidőt nyerjük, feltéve, hogy az óra 0^h-t mutat, midőn a kos jegyének kezdete áll a meridián alatt. Ugyanígy határozhatjuk meg az időt, ha a magasság helyett az azimuth volna adva.

Ha az égi glóbust keletről nyugotra, vagy a földgömböt ellenkező irányban forgatjuk, akkor a napi mozgás hű képét nyerjük, s ha a quadránst e forgatás alatt a glóbusnak mindig ugyanazon pontján tartjuk, egyszersmind a csillagászati háromszögnek az idővel változó alakját tanulmányozhatjuk, nevezetesen tehát az óraszögnek az idővel párhuzamosan haladó növekedését és a horizontális rendszer összefüggését az idővel.

A Nap rectascensióját és declinatióját megkapjuk, ha a Napot a rézmeridián alá vezetjük és ennek osztásán olvassuk a Nap helyét az aequatortól, az aequator osztásán a távolságát a kos jegyének kezdetétől, azaz a tavaszi napéjegyenlőségtől. Ha a meridiánon leolvasnók a Nap távolát a horizonttól, akkor déli vagy delelési magasságát nyerjük, és ha a leolvasást ismételjük, miután a glóbust 180^0-kal megforgattuk, a Nap éjféli mélységét a horizont alatt is ismerjük meg. A kisérlet ismétlése az év különböző szakaiban szembetünően mutatja a Nap delelési magasságának az évszakokkal való váltakozását, tehát a napsugárzás beesési szögletét is. Ugyanily módon kapjuk természetesen bármely csillag rectascensióját és declinatióját, valamint delelési magasságát is.

Ha az északi és déli horizontban az N és S pontokban iránt teszünk a glóbusra s ezt 360°-kal forgatjuk, akkor a gömbön két parallel kört kapunk, melyek a circumpoláris folytonosan látható és folytonosan láthatatlan csillagok övét jelölik ki. Ha amazok övétől délfelé haladunk, akkor a parallel körök horizont feletti részei, a nappali ívek folyton kisebbednek, míg a déli circumpoláris ív határán nullává nem válnak.

Magának a Napnak nappali ívét nagyon könnyen jelöljük ki. Ha a Nap a meridiánban lévén, az óra 0^h-t mutat, akkor forgassuk a gömböt a horizont E pontja felé, míg a Nap a horizontba nem jut. A számlap adata a napkelte valódi ideje, a horizont osztása pedig a reggeli tágasságot adja. Ugyanezen adatokat figyelhetjük meg a glóbus W-vel jelzett nyugoti oldalán is. A kelet és delelés közötti idő természetesen a fél nap tartamát szolgáltatja. Ha az évi mozgás irányában forgatjuk a gömböt s szemünket mindig az ekliptika és a horizont metszési pontján tartjuk, akkor egy csapással belátjuk a nappalok hosszának változásait egy év lefolyása alatt, valamint a napkelet és nyugvás helyeinek ingaszerű lengéseit a kelet- és nyugotpontok körül. A legrövidebb és leghosszabb nap tartamát természetesen akkor kapjuk meg, ha a Napot az ekliptika legmélyebb, illetve legfelsőbb pontjában képzeljük.

Ha azonban a Napot nem a horizontba viszszük, hanem ez alá, még pedig 9° és 18°-kal, akkor a polgári, illetve a csillagászati szürkület kezdetének vagy végének valódi idejét kapjuk meg.

Megfordítva kereshetjük azon helyet is, melyen a nappal adott tartammal bír. E czélból beállítjuk a számlapot a nap felével egyenlő óraszámra és forgatjuk a rézgyürűt saját síkjában addig, míg a Nap a horizontba nem kerül. A leolvasható geographiai szélesség kérdésünk megoldása. Hasonlóképen járunk el, ha a napot keressük, melyen adott hely számára a nappal t óráig tart. Az illető hely geographiai szélességére beállított glóbust elforgatjuk addig, míg a számlap $\frac{t}{2}$-et nem mutat. Az ekliptikának azon pontja, mely éppen a horizontban van, adja e napon a Nap hosszúságát, mely a horizontban alkalmazott naptár segítségével a hozzátartozó időt is szolgáltatja. Természetes, hogy évenkint két nap van, mely a feladatnak megfelel.

Egészen hasonlóképen járunk el a legrövidebb szürkület problemájának megoldásában.

A csillagok keltét és lenyugtát hasonlóképen határozzuk meg; ha az óralapot 0^h-ra állítjuk, midőn a Nap delel, akkor a kelet, a lenyugvás, továbbá a delelés idejét is valódi napidőben nyerjük; ha ellenben az óralap 0 állása mellett a tavaszi napéjegyenpont delel, akkor mindez adatok csillagidőben vannak kifejezve. Ha a Nap keltének vagy nyugtának pillanatát égi glóbuson állítjuk elő, akkor kijelölhetjük mindazon csillagokat, melyek a Nappal együtt kelnek és nyugodnak, vagy a melyek kelnek, midőn amaz nyugszik s megfordítva. Ez a csillagok úgynevezett kosmikus és heliákus kelete és lenyugvása.

Ha egymásután különböző helyeket vagy csillagokat hozunk a rézmeridián alá, akkor az óralap különbségei adják ezek hosszúságkülömbségét vagy delelési idejök különbségét, és a meridiánon leolvasott osztás a szélességet, illetve declinatiót. A hajlítható quadráns kifeszítve két pont között, adja ezek gömbi távolságát.

Ha a számlapot 0^h-ra igazítjuk, mikor a tavaszi aequinoctium áll a meridián alatt, és ugyancsak a meridián alá hozzuk azután az illető nap számára kijelölt Nap helyét is, akkor az óra adata a déli csillagidő leend. Ha megfordítva a Nap delelését jelöljük 0^h-val, ekkor a számlappal együtt a glóbust adott időre forgatva, megkapjuk a pillanatnyi csillagidőt a meridián alatt levő aequatori osztáspontból, ha ezt időre változtatjuk át.

Az időegyenlítés is könnyen megállapítható, mivel ez a valódi és közép Nap rectascensiójának külömbsége. A december 24-ike óta elfolyt napok száma megszorozva 3′ 55″-czel, a Nap közép napi mozgásával, adja a közép Nap rectascensióját az aequatorban. Ha tehát a valódi Nap delelésekor az óra 0^h-t mutat, akkor az aequatorban haladó közép Nap a meridián alá hozva, a számlapon közvetlenül az időegyenlítést fogja adni.

Hogy a bolygók láthatósági viszonyai glóbus segítségével hogy ítélhetők meg, a mondottak értelmében már magában is világos.

Az ekliptika pólusa a legtöbb éggömbön szintén meg van adva, tehát ha odaillesztjük a hajlítható quadranst s ezt valamely csillagon átfektetjük, közvetlenül az égi test hosszúsága

és szélessége is leolvasható. Ha az ekliptika pólusa körül $23^0\,28'$ gömbi sugárral kört írunk le, akkor ezen kör átmegy a világtengelyen s a praecessió folytán ez utóbbi a körön a növekedő rectuscensió irányában évente 50″-czel tovasiklik. Habár a forgási tengely a glóbuson belül nem is változtatható, mégis megítélhetjük, hogy idővel miképen változik a csillagos ég valamely hely horizontjához képest.

A glóbus úgy is állítható, hogy vele az évszakok kényelmesen kimutathatók. E czélra a glóbus északi, illetve déli pólusát annyi fokkal emeljük, a mennyit a Nap északi vagy déli declinatiója kitesz. Akkor a Nap nyilván a glóbus zenithjében áll és a horizontális gyürű a Föld nappali és éjjeli határának képe. Azon hely, mely a glóbus zenithjében áll, a Napot is zenithjébe kapja, még pedig azon időben, melyet az óralap mutat, midőn előzetesen nullra állítottuk, ha a megfigyelési hely, pl. Budapest, állott a meridián alatt. Mindazon helyek, melyek a horizont nyugoti (a földglóbus esetében E-vel jelölt) oldalán állanak, látják a Napot kelőfélben, a keleti oldalon fekvők nyugvófélben. A glóbus forgatása a napsütés váltakozását mutatja egy nap lefolyása alatt, valamint azon helyeket is, melyek egy nap leolyása alatt a Napot zenithjükben látják.

Ha a rézgyürűt saját síkjában a Nap változó declinatiója szerint forgatjuk, $-23^0\,28'$-től kezdve $+23^0\,28'$-ig, akkor a megvilágítási viszonyokat nyerjük egy egész év lepergése alatt, és semmi nehézségbe sem kerül a főbb pontoknak megfelelő parallelköröket lerajzolni, melyek a Földön a zónákat jelölik ki. Ugyanezen czélt érjük, ha a solstitium-pontokat hozzuk a meridián alá és a glóbust úgy hajlítjuk, hogy az ekliptika a horizont síkjával essék össze. Ez akkor az ekliptika képét adja. Ha most ezen síkban a glóbus forgatása nélkül gyertyát viszünk körben, akkor ez megvilágításával ugyanazon meleg- és fényövöket jelöli ki, mint a Nap az égen egy év lefolyása alatt.

Ha a Nap declinatiója helyett a Holdét állítottuk volna be, akkor épp úgy nyerjük a Hold láthatósági viszonyait, mint ezt annak idején a holdfogyatkozások tanulmányozásánál láttuk már.

Ha végül a rendesen, pl. Budapest számára felállított glóbuson az óralap 0-t mutat, midőn Budapest van a meridián

alatt, akkor az óra bármely, a meridián alatt hozott hely számára megadja az időt, melyet e helyen az óra mutat, midőn Budapesten dél van. Ha Greenwich delelése esetében állítjuk az órát 0^h-ra, akkor bármely más helyre leolvashatjuk az egész óráktól eltekintve, a zónaidőt.

Mindezen feladatok természetesen térképek segítségével is megoldhatók, bár sokkal körülményesebb módon. A naptár és az óralap a térkép keretére illesztendő, melyben a térkép maga az északi pólus körül a horizontot ábrázoló kimetszés alatt forgatható. Ha a horizontot még átlátszó papirra vetített alkalmas hálóval borítjuk, akkor ezen térkép még idő-, magasság és azimuth-meghatározásra is alkalmazható. Végül pedig úgy ezen szerkezet, mint maga a glóbus is, természetesen mindennemű gömbi háromszög közelítő megoldására is szolgálhat.

VÉGE AZ I. KÖTETNEK.

ÓSZK

TÁRGY- ÉS NÉV-MUTATÓ.

Aberratio 370.
Aberratio állandója 374, 388.
Aberratio-ellipsis 375.
Ábrahám-féle fogyatkozás 417.
Abscissa 85, 258, 653.
Absolut hosszegység 443.
Absolut mágneses-declinatio meghatározás 716.
Absolut mértékrendszer 495, 701, 721.
Additio logarithmus 25.
Aegyptusi hónapok 416.
Aegyptusi naptár 416.
Aequator 106, 337.
Aequatorcoordinátarendszere 105.
Aequatoreále 128.
Aequatorealis napóra 171.
Aequatorfény 784.
Aequatorfok hossza 27, 491, 492.
Aequatori centrifugális erő gyorsulása 533.
Aequatori conjunctio 352.
Aequatori térkép 797, 798, 809, 815, 822, 825.
Aequatorquadrans hossza 492.
Aequidistáns hengervetületű térkép 64, 794, 831.
Aequidistáns kúpvetület 848.
Aequidistans vetület 789, 821, 831, 848.
Aequidistantia 789, 793.
Aequinoctium tropikus mozgása 285.
Aequinoctiumok 227, 236, 238, 267, 270, 277, 742.
Aequinoctiumok hátranyomulása 231, 282.
Aequinoctiumok kijelölése 226.
Aequipotentiális felület 546.
Aequivalens hengervetület 832.
Aequivalens kúpvetület 854, 879, 880.
Aequivalens térkép 790, 832, 842, 854, 859.
Aequivalentia 789, 793, 824, 864, 866, 867.
Agona 756.
Airy 592, 689.
Akadémiai Almanach 136.
Aklina 760.
Akronyktikus kelés 406.
Alapállás 64.
Alapvonal 64.
Albrecht 535, 536.
Albrecht-féle képlet 568, 577.
Aldebaran 158.
Alfonz (X) 362.
Alfréde Gautier 741.
Alhidade 130.
Alkonyati lenyugvás 405.
Állandó intenzitású erőmező 555.
Állandók variatiója 667.
Állatöv 234.
Állatövi csillagjel 234, 886.
Állatövi csillagkép 234.
Állócsillagok acceleratiója 115.
Állócsillagok declinatiója 137, 231.
Állócsillagok évi parallaxisa 363, 368, 381.
Állócsillagok látszólagos mozgása 100, 223.
Állócsillagok praecessiója 230
Állócsillagok tényleges rectascensiója 137, 231.
Almagest 360.
Almamun 426.
Almukantarat 104, 165.
Alsó delelés 110.
Alsó együttállás 352.
Általános perturbatiók 667.
Altazimuth 122.
Ampère 780.
Amplitudo 434, 456.
Analyzis 30, 361.
Aneroid 623, 657, 660.
Angol geogr. mérföld hossza 492.
Angström 754.
Anomália 88.
Anomalistikus hónap 277, 283, 284, 285, 287.
Antilogarithmusok 23.
Aperiodikus mágneses változások 738, 743.
Aperiodikus variatio 738, 743.
Apex 377.
Aphelium 250.
Apisperiodus 416.
Apogaeum 250, 266, 272, 283, 333.
Apsisvonal 250, 256, 271, 283.

Aquarius 234.
Aquila 234.
Ara 234.
Arabs időszámítás 412.
Arago 451, 461, 566, 742 783.
Aranyszám 407.
Árapály 681.
Archimedes 51,
Arcturus 220.
Argelander 749.
Árhullám 690.
Aries 234.
Arietis β 171.
Aristarchos 386.
Aristophanes 413.
Aristoteles 359, 360, 413, 423, 748.
Aristyllos 230.
Árnyékkör 304.
Árnyékkúp 293, 295.
Arrowsmith-féle síkvetület 828.
Astrolabium 129.
Attractio 521, 522.
Attractionális állandó 520, 578, 589.
Attractionális állandó (f) értéke 597.
Auriga 234.
Aurora borealis 749.
Ausztriai fokmérés 439.
Ayrton 780.
Azimuth 95, 104, 196, 610, 663.
Azimuthal 128.
Azimuthális vetület 793, 820, 821, 825.
Azimuthálitás elve 820, 823, 829.
Azimuthmeghatározás 185, 434.
Babinet-Bruns-féle magassági képlet 624.
Babinet-féle homalographikus vetület 841.
Babyloniak időszámítása 417.
Baer-féle szabály 342.
Baeyer 485, 512.
Bahia-Blanca 159, 169.
Baille 597.
Baily 597.
Bajlak 699.
Bak jegye 886.
Bak térítő 121, 239.
Barlow 746
Barometer 623.
Barometerskálák átszámítása 137.
Barometrikus magassági formula 32.
Barycentrikus test 532, 602.
Basil 566.
Bathometer 623, 657.
Baumgartner 746.
Baumhauer 784.
Baxendell 741.
Bázis 433.
Bázis mérése 446.
Beaumont-féle vetület 794, 795.
Beccaria 439.
Behm 497, 502, 882.
Belső bolygók mozgása 366.
Bengáliai fokmérés 439.
Benzenberg 338.
Berliner Astronomisches Jahrbuch 243, 305, 309.
Berliner Jahrbuch 136.
Bessel 370, 374, 433, 443, 484, 485, 492, 493, 531, 563, 564, 602, 603, 604.
Bika jegye 886.
Binomialis sor 30.
Biot 451, 461, 566, 763.
Bohnenberger 564.
Bolygó keringési ideje a deferensben 362.
Bolygó keringési ideje az epicyclusban 362.
Bolygó legnagyobb elongátiója 357.
Bolygó-mozgás első egyenlőtlensége 249, 351.
Bolygók csomópontja 673.
Bolygók direct mozgása 364, 672, 674.
Bolygók hajlása 673.
Bolygók keringési ideinek incommensurabilitása 675.
Bolgyók közép naptávolságai. 364.
Bolygók látszó mozgása 350.
Bolygók magassági parallaxisa 138.
Bolygók mágneses hatása 783.
Bolygók mozgásának törvényei 515, 666.
Bolygók sebessége 515.
Bolygók pályájának alakja 515.
Bolygók retrograd mozgása. 351, 697.
Bolygók retogradmozgása 364
Bolygókeringés második egyenlőtlensége 351.
Bolygómozgás magyarázata 359.
Bolygórendszer erélye 668.
Bolygórendszer keletkezése. 696.
Bolygórendszer stabilitása. 671.
Bolygórendszer súlypontja 668.
Bonne-féle vetület 89, 857, 867, 883.
Bonne-féle vetület torzulási viszonyai 880, 883.
Bootes 234.
Bootis α 220.
Borda 439, 442, 443.
Borda-féle ismétlőkör 444.
Boscovich 439.
Bossekop 754.
Bouguer 438, 566.
Boussola 720, 885.
Boyle-Gay-Lussac-féle törvény 666.

Boys 636.
Börgen 689.
Bradley 370, 372.
Brigg-féle logarithmusok 23, 28.
Brisson 442.
Brousseaud 511.
Brown 743.
Bruns 578, 603, 608, 609, 668.
Budapest geographiai fekvése 138.
Buys Ballot-féle törvény 340.
Camus 438.
Cancer 234.
Canon der Finsternisse 308, 309.
Canonica 439.
Canton 783.
Capricornus 234.
Cardan-féle felfüggesztés 699
Cardani-féle suspensio 359.
Carlini 593.
Carnot-féle tétel 13, 16.
Cassini 438, 443, 841.
Cassini-Soldner vetülete 841.
Cassiopeia 234.
Cavendish 595, 597.
Celsius 438, 783.
Centaurus 234, 371.
Centrális holdfogyatkozás 305, 307.
Centrális napfogyatkozás 296, 319.
Centrális perspektivikus vetület 797, 798.
Centralitás görbéje 309.
Centrifugális erő 532, 536, 554, 555, 764.
Centrifugalis erő egyenlete 517.
Centrifugalis erő erőösszetevői 554.
Centrifugális erő potentiálja 542, 545, 660.
Cephei α 233.
Cepheus 234.
Chacra-Pronzat 169.
Chaldaeusok időszámítása 417.
Cheiam omar 415.
Chorographikus görbe 653.
Chronodeik 168.
Chronograph 193.
Chronologia 404, 405.
Circumpoláris csillagok 113.
Clairaut 438, 578.
Clairaut-féle egyenletek 569, 576, 606, 633, 658, 661.
Clairaut-féle második egyenlet 577.
Clarke 433, 443, 492, 493, 604, 820.
Clausius 677.
Clausius-féle tételek 677.
Coast Survey 775, 860.
Coincidentiák módszere 565.
Coincidentia-készülék 615.
Collimatiohiba 126, 171, 210.
Columba 233.
Columbus 779.
Combinatióhullámok 688.
Compenzált mágnesek 731.
Complementáris szög goniometriai függvényei 6.
Condorcet 439.
Conformis leképzés 789, 867, 873.
Conformis vetület 789, 793, 794, 811, 834, 855, 878.
Conformitás 789, 793, 812, 818, 855, 863, 864, 867, 869.
Conjugált egyenlet 870.
Conjunctio 273, 352.
Conjunctio hosszúságban 273.
Conjunctio rectascensióban 273.
Connaissance des temps 293.
Convectio áramok 780.
Conventionalis hengervetületek 841.
Conventionalis síkvetületek 828.
Conventionalis vetületek 828, 841, 857.
Convergentia kriteriumai 30.
Cook 749.
Coordináta 85.
Coordinátaháborgás 666.
Coordinátahálózat 787.
Coordinátarendszerek 87, 94, 103, 106, 109, 228, 569, 609, 627, 787, 765, 867.
Coppernicus 336, 337, 348, 349, 363, 367, 369, 370, 377, 378.
Coppernicus-féle rendszer 363, 368, 375, 417.
Coradi-féle curveometer 63.
Coradi-féle gömb-planimeter 69, 73.
Coradi-féle preciziós korong-planimeter 75.
Cornu 388, 597.
Corona 234.
Correspondeáló magasságok 152, 188.
Cortez 779.
Cosinustétel 15, 17, 151, 162, 165, 187, 502, 505, 792.
Cosmogonikus elmélet 696, 697.
Cotangenstétel 17, 186, 197.
Coulomb 442, 595, 701.
Coulomb-féle mérleg 595, 632, 633, 634, 635, 636, 663, 701.
Coulomb-féle mérleg fajai 633, 635.
Coulomb-féle mérleg forgásmomentuma 633.
Coulomb-féle mérleg lengési ideje 632.
Coulomb-féle törvény 717.
Culminatio 110.
Culminatiópont 110.
Curveometer 4, 62.
Cusa 415.
Cyclikus permutatio 15.

Cygni 61, 370.
Cygnus 233
Csavarási inga 595, 626.
Csavarási inga lengési ideje 631, 632.
Csavarási mérleg 595, 706, 713.
Csavarási momentum 706.
Csillag akronyktikus kelte 406.
Csillag declinatiója 106, 887.
Csillag esti tágassága 114.
Csillag fényváltozása 696.
Csillag heliákus kelte 405.
Csillag heliákus lenyugvása 405
Csillag hosszúsága 119, 229, 889.
Csillag kosmikus lenyugvása 405.
Csillag magassága 104.
Csillag pólustávola 106.
Csillag rectascensiója 95, 887
Csillag reggeli tágassága 114
Csillag szélessége 119, 229, 889.
Csillag zenithtávola 104.
Csillagászati évkönyvek 136.
Csillagászati földrajz 350.
Csillagászati geographiai műszerek 122.
Csillagászati háromszög 150, 887.
Csillagászati megfigyelések javításai 142.
Csillagászati műszer-elmélet 205.
Csillagászati szürkület 164, 888.
Csillagászati zenith 590, 610, 616.
Csillagidő 110, 136, 137, 138, 153, 227, 244, 887.
Csillagképek 234.
Csillagnap 116, 139, 336.
Csillagok éjjeli íve 112.
Csillagok heliákus kelte 223, 888.
Csillagok heliákus nyugta 223, 888.
Csillagok nappali íve 112.
Csillagos ég 98.
Csillagtérkép 139.
Csillagvizsgálók geographiai fekvése 138.
Csomó 278.
Csomó tropikus mozgása 285
Csung tyien 171.
D'Abbadie 621.
D'Ailly 415.
Dachel oázis 199.
Dalby 486.
Dalton 755.
Dán fokmérés 485.
Darwin 625, 689, 690.
De la Hire 820.
De la Rive 783, 784, 785.
De l'Isle 395.
De l'Isle kúpvetülete 852.
Declinatio 106, 228, 230, 236, 338, 394, 702, 889.
Declinatio főmaximuma 745.
Declinatio főminimuma 745.
Declinatio variatója 739, 740, 741, 743, 744, 748.
Declinatiókör 106.
Declinatiótű magaviselete Közép-Európában 741.
Declinatiovariometer 721, 729
Deferens 362.
Deflector 730, 736
Dekád 413
Delambre 374, 376, 415, 441, 442, 444, 446, 447, 460, 493.
Delelés 110.
Delelési pont 110.
Déli circumpoláris csillagok 114.
Déli circumpoláris kör 240.
Déli fény 749, 751.
Déli magasság 109, 110, 237, 887.
Déli mágneses vég 699.
Déljavítás 169.
Délkör 108.
Délpont 109.
Délvonal 109.
Dendarahi állatkör 234.
Derékszögű coordinátaháló 86, 868.
Derékszögű coordinátarendszer a térben 94.
Derékszögű gömbháromszög megoldása 17.
Derékszögű sík coordinátarendszer 86.
Derékszögű síkháromszög megoldása 6.
Dies solaris 140.
Differentialegyenlet 835, 838, 856, 864
Differentialquotiens jelentősége 54.
Differentialszámítás 51, 525.
Differentiatio 53.
Digressio 191.
Dioptra 445, 446.
Dixon 439.
Douwes feladata 184
Dover-féle inclinatorium 722, 735, 745.
Draco 233, 234, 372.
Drakói hónap 277, 280, 284, 285, 319, 328.
Draperiás sarki fény 750, 753.
Driftáramlatok 780.
Dufour 428.
Duperrey 567.
Edlund 784.
Égboltozat 100.
Egész hegység lejtése 642.
Egész hegység tengerszint feletti magassága 640, 642.
Égglóbus 885.
Éggömb 98.
Éggömb ábrázolása 786.
Égi aequator 337.
Égi glóbus 278.
Égi testek középhelyei 679.

Égitestek távolságai 381.
Égpolus 105.
Égtengely 105.
Egyenes analytikai egyenlete 463.
Egyenes emelkedés 107.
Egyenes jellemzői 463.
Egyenletes körmozgás törvényei 516.
Egyenletes lejtő közepes magassága 644.
Egyenlítő 106.
Egyenlő munkák felülete 605.
Egyenlőtlenségek 523.
Egyházi ünnepi időszámítás 407.
Együttállás 273.
Éjfélcorrectio 169.
Éjféli magasság 239.
Éjjeli ív 114, 338.
Éjnapegyenlőségek 227.
Ekliptika 119, 121, 224, 230, 236, 243, 278, 289, 295, 333, 366, 378, 673, 678.
Ekliptika alakja 248.
Ekliptika coordinátarendszere 228.
Ekliptika excentrumossága 209.
Ekliptika ferdesége 119, 224, 229, 231, 237, 248, 278, 670.
Ekliptika kijelölése 118, 226.
Ekliptika középferdesége 679.
Ekliptika polusa 119, 229.
Ekliptikai coordinátarendszer 119.
Ekliptikális conjunctio 352.
Elektromágneses hypothezisek 700, 780, 784.
Elemi munka 538.
Eleven erő tétele 668.
Elhajlás 702.
Ellenőrző vonalzó 79.
Ellipsis analytikai tulajdonságai 461.
Ellipsis egyenlete 465.
Ellipsis érintőjének egyenlete 468.
Ellipsis excentrumossága 466.
Ellipsis görbületi sugara 471.
Ellipsis központi egyenlete 467.
Ellipsis normalisának egyenlete 470, 498.
Ellipsograph 846.
Elongatio egyenlete 556.
Első vertikális 104.
Empirikus képletek 38.
Encke 397, 492.
Encke-üstökös acceleratiója 521.
Enneadeketeris 412.
Entropia 677.
Eötvös Loránd báró 431, 531, 595, 596, 597, 626, 633, 635, 738, 748.
Eötvös Loránd báró-féle csavarási inga 626, 636, 711.
Eötvös Loránd báró módszere 626.
Epakta 407.
Ephemerisek 136, 220, 246, 278, 293, 307, 354, 375.
Epicycloida 361, 364.
Epicyclus-elmélet 360.
Epocha 669.
Erato 669.
Erato asteroida pályaelemei 669.
Eratosthenes 424, 425, 439.
Eratosthenes-féle fokmérés 424.
Eridanus 234.
Ermann 767.
Erő 518.
Erő egysége 518.
Erő lemérése 555.
Erő levezetése a potentiálból 551.
Erő mértéke 518.
Erőfüggvény 545.
Erőmező 555.
Erővonalak 606, 610.
Establishment 681.
Esti tágasság 156, 237.
Északi fény 749, 751, 782, 783.
Északi mágneses vég 699.
Északpont 109.
Eszményi inga 561.
Esztendő 223.
Étalon prototype du métre 443.
Eudoxus 359, 360.
Euler 699, 762, 763.
Európai fokmérés 512.
Evectio argumentuma 287.
Evectio 286, 287, 289.
Evectio amplitudója 287.
Evectio coefficiense 287.
Everest 485.
Év 235, 404.
Évi egyenlítés 286, 288, 289.
Évi parallaxis 363, 368, 381.
Évi variatio 742.
Évszakok 120, 378, 405, 890.
Évszakok hosszai 266, 670.
Évszakok keletkezése 236, 378.
Excentrumos anomalia 256, 257, 260, 266.
Excentrumos kör 252.
Excentrumosság 249, 476, 499, 671, 672, 674, 788.
Excentrumossági hiba 125, 133.
Exponenses és logarithmusos sorok 31.
Extern vetületek 797, 820.
Fallows 756.
Faraday 770, 780, 784.
Farafrah 181, 183.
Faye 490.
Félárnyék 293.
Feles közönséges év 418.
Feles szökőév 418.
Felső delelés 110.

Felső együttállás 352.
Felszálló csomó 278, 300, 324, 326,
Felszálló csomó hossza 289
Felületek fejlettsége 650.
Felületek területe 650.
Fény aberratiója 342, 373.
Fény időértéke 388.
Fény sebessége 376, 388.
Ferdeszögű sík coordinátarendszer 87.
Fergola 514.
Fernel 426, 435.
Ferro 111.
Filippi aera 417.
Finger 342.
Finger-féle commutatiós inga 565.
Finsterwalder 649.
Fischer 492, 602,
Fizeau 388.
Flamsteed-Sanson-féle projectio 89, 794, 841, 843, 867.
Flavio Gioja 699
Flora 390.
Foerster 621.
Fogyatkozás tartama 296.
Fogyatkozási cyclusok 319.
Fogyatkozási határok 299, 300.
Fogyatkozási periodusok 328.
Fogyatkozások 293, 295.
Fogyatkozások belépése 330.
Fogyatkozások kimaradása 330.
Fogyatkozások nagysága 296.
Fok hossza a Földön 403, 435, 438, 439, 461, 787.
Fok hossza a meridiánellipsisen 496.
Fok hossza a Napon 403.
Fokmérés 23, 92, 426, 433, 436, 438, 439, 510, 512, 599, 609, 610, 657
Fokmérési polyaeder 610.
Folyadékáramlás 781.
Forbes 388, 751.
Forgási momentum 597, 629.
Forró öv 241.
Forster 567, 749.
Foucault 388.
Foucault-féle inga 346.
Foucault-féle ingakisérlet 344, 346, 456
Fourier-féle cosinus-sor 44.
Fourier-féle sinus-sor 40.
Fourier-féle sor 40, 49, 367, 664, 689.
Fourier-féle sor koefficienseinek meghatározása 47.
Fourier-féle sorbafejtés 588.
Fourier-féle teljes sor 45.
Föld ábrázolása 786.
Föld alakjának meghatározása 476, 568, 578, 587, 599, 612, 698.
Föld alakjának változása 613, 687.
Föld árnyékkúpja 294.
Föld coordinátahálózata 92, 427.
Föld ekliptikus mozgása 140.
Föld elasticitási modulusa 693.
Föld felszini sürűsége 598.
Föld felülete 497.
Föld forgási ideje 518.
Föld főtehetetlenségi tengelyei 573, 586.
Föld gömbalakja 423.
Föld gyorsulása 575.
Föld ideális alakja 2, 423
Föld kinematikai tengelye 514
Föld köbtartalma 496, 497.
Föld közép napi mozgása 398.
Föld közepes sugara 496.
Föld közepes sürűsége 591, 592, 593, 595, 597, 598, 639.
Föld középponti sürűsége 598.
Föld lapultsága 343, 436, 437, 568.
Föld mágneses elmélete 699.
Föld mágneses polusai 760.
Föld mágneses potentiálja 550
Föld mathematikai övei 238.
Föld méretei 423, 492.
Föld nagysága 403.
Föld nehézségi potentiálja 550, 574, 575, 578.
Föld siderikus keringése 398.
Föld solaris övei 238.
Föld sphaeroidikus alakja 436.
Föld sugara 433, 500.
Föld súlypontja 572.
Föld sürűsége 589, 659.
Föld szabálytalan alakja 569, 627.
Föld szilárd kérgének deformatiója 690.
Föld szögsebessége 401, 517.
Föld tehetetlenségi momentuma 573.
Föld tengelye 337.
Föld tengelyforgása 139, 337, 339.
Föld tényleges pályasebessége 403.
Föld térbeli mozgása 336.
Föld tömege 589, 598.
Föld tömegvonzása 530, 533, 538, 555.
Föld tömegvonzásának gyorsulása 432.
Föld valóságos alakja 2.
Föld vonzása 530, 538.
Föld vonzási potentiálja 586.
Földfelület morphometriája 639.
Földfelületi morphometria alapegyenlete 481.
Földfelületi nehézségi gyorsulás 401.

Földfelületi potentiál 539.
Földfelületi zónák 241.
Földfogyatkozás 293.
Földglóbus 312, 885.
Földi áramok 738, 746.
Földi áramok okai 748.
Földkéreg vastagsága 694, 695.
Földlemezáram 748.
Földmágneses erő összetevői 702, 703.
Földmágneses forgási momentum 719.
Földmágneses intenzitás 702.
Földmágneses szintfelület 767.
Földmágnesség 698, 702.
Földmágnesség elmélete 762.
Földmágnesség magyarázata 779.
Földmágnesség potentiálja 764.
Földmágnesség székhelye 778, 780, 781.
Földmágnesség tana 657, 698.
Földmozgás apexe 377.
Földrengés terjedési sebessége 694.
Földrengési hullámok 691.
Földövek 120, 378.
Földpálya 366, 378.
Földpálya excentrumossága 392, 670.
Földsphaeroid méretei 492.
Földsugár meghatározása 425, 428
Förster 785.
Főtehetetlenségi tengely 349.
Fracastor 779.
Franklin 783.
Freycinet 566.
Fraunhoffer-féle vonalak 443.
Friedrich Wilhelm Rex 23.
Fritz 741, 750, 751, 752, 753, 754, 784.
Függélyes 103, 427.
Függélyes gyorsulás kifejezése 662.
Függélyes körrendszer 239.
Függönyös sarki fény 750.
Függő ón 424, 435, 512, 590, 704.
Függőleges napóra 175.
Függőöneltérés 489, 513, 590, 591, 602, 607, 608, 616, 657, 658, 659, 697.
Függvények és ábrázolásuk 52.
Galilei 377, 515, 779.
Galle 390.
Gassendi 749.
Gauss 410, 450, 478, 485, 602, 699, 702, 716, 717, 721, 760, 764, 765, 766, 785.
Gauss egyenletei 19.
Gauss-féle első főhelyzet 717, 719.
Gauss-féle főhelyzetek 717, 719, 731.
Gauss-féle földmágnességi elmélet 657, 764, 767, 769, 774, 775, 779, 780, 781.
Gauss-féle magnetometer 711
Gauss-féle második főhelyzet 717, 718.
Gauss-féle okulártükör 127, 734.
Gauss-féle mágneses mértékrendszer 721, 722.
Gauss-féle tétel 450.
Gautier A. 741.
Geissler-féle csövek 749, 754, 784.
Gemini 234.
Geocentrumos magasságok 502.
Geocentrumos rendszer 368.
Geocentrumos szélesség 48, 498, 533, 865.
Geodetic Survey 775.
Geodéziai azimuth 458.
Geodéziai görbe 505.
Geodéziai műveletek 23.
Geodeziai zenith 427, 590, 616.
Geographiai hosszkülönbség 111, 862.
Geographiai hosszúság 88, 95, 111, 121, 338, 426, 575, 586, 766.
Geographiai hosszúságmeghatározás 192, 286, 513, 698.
Geographiai meridián 109.
Geographiai szélesség 48, 88, 95, 110, 121, 236, 338, 349, 426, 434, 475, 498, 533, 586, 865.
Geographiai szélesség meghatározása 180.
Geographisches Jahrbuch 497.
Geoid fogalma 569, 602, 603, 605, 658.
Geoid alakja 602, 603.
Geoid egyenlete 604, 767.
Geoid kijelölése 606, 609.
Geoidos eltérések becslése 607.
Geoidos tulajdonságok 603.
Geologia és geodezia közötti kapcsolat 621.
Geometriai aequator 514.
Geometriai helymeghatározás 84.
Geometriai meridián 514.
Geometriai zenith 590.
Geonomia 1.
Georgius Monachos 309.
Gergely-féle naptárreform 415.
Gergely pápa 415.
Gerincz közepes lejtése 640, 641.
Gerincz térfogata 640, 642.
Gerinczvonal magassága 640, 641.
Gessner Konrád 748
Ghetaldi 430.
Gilbert 698, 699, 779.

Globuláris vetület 828.
Glóbus 3, 308, 312, 789, 790, 885.
Glóbus használata 884.
Gnomon 118, 180, 224.
Gnomonos aequatoriális térkép 803, 804.
Gnomonos poláris térkép 803, 804.
Gnomonos vetület 797, 798, 878.
Gnomonos vetület torzítási viszonyai 805, 806.
Goniometria 5
Goniometriai függvények 5, 23.
Goniometriai sorok 32.
Gömb leképzése gömbre 789.
Gömb tehetetlenségi momentuma 709.
Gömbalakú Föld vetítése 789.
Gömbfüggvények 49, 581, 603
Gömbfüggvényekre való fejtés 587, 588.
Gömb-planimeter 69.
Gömbi excessus 22.
Gömbi Föld 423, 627, 650, 687, 788, 765.
Gömbi Föld potentiálja 539.
Gömbi Föld sugara 433.
Gömbi Föld vonzása 538.
Gömbi háromszög területe 21.
Gömbi háromszögtan 14, 450.
Gömbi kétszög területe 21.
Gömbi távolságok 505, 889.
Gömbi távolság kijelölése 507.
Gömbcalotta felülete 498.
Gömbkétszög 21.
Görbületi kör 471.
Görbületi variometer 637.
Görög hónapok 413.
Görögök aerája 413.
Görögök időszámítása 407, 412.
Graphikus interpolatio 89, 93, 216.
Gravitatiós compensálás 639.
Gravitatiós multiplikálás 639.
Green-féle tétel 550.
Greenwich 111.
Gregori epacta 408.
Gregori középév 415.
Gregori naptár 236, 405, 407, 409.
Gregori naptári év 236.
Grimaldi 435.
Gringmuth 780.
Grischow 566.
Guiot de Provins 699.
Gümbel 774.
Gyorsulás 35, 555, 574, 587.
Gyroscopok 680.
Gyűrűs napfogyatkozás 273, 295, 299, 304, 319, 320, 321, 322.
Háborgási számítás 666.
Háborgások 523, 524, 666, 743.
Háborgások gyakoriságának periodusai 744.
Háborgó tömeg 618.
Hajlítható vonalzó 886.
Halak jegye 234, 886
Hall 566.
Halley 396, 699, 760, 779, 783.
Hann-féle törvény 624.
Hannoverai fokmérés 485.
Hansen 286, 289, 384, 490, 675.
Hansteen 485, 699, 741, 743, 762, 763, 781.
Három test problémája 666.
Háromszög 234.
Harrison 193.
Hasselberg 754.
Határfejlettség mértéke 652.
Határfejlődés 651.
Határfejlődés csipkeszöglete 653.
Hattyú 234.
Hatványsorok 30, 39.
Hazai mágneses megfigyelések 744.
Hegy talpazata 640, 642.
Hegy vonzási potentiálja 661.
Hegymágnesség 777.
Hegyoldal közepes lejtése 648.
Hegység általános párkánymagassága 640, 642.
Hegység közepes magassága 646.
Hegység közepes lejtése 641.
Hegység meredeksége 640.
Hegység párkánya 641.
Hegység tengerszint feletti magassága 640, 642.
Hegység térfogata 642.
Hegységgel egyenlő térfogatú tábla magassága 640, 642.
Heis 415.
Heliákus kelés 405.
Heliákus lenyugvás 405.
Heliocentrumos rendszer 368, 377.
Heliometer 370, 397.
Hell Miksa 397.
Helmert 608, 617,
Helmholtz 780.
Helymeghatározás 1, 84, 205, 657, 786, 787, 698, 763, 840, 884.
Helymeghatározás a lapon 85.
Helymeghatározás a térben 94.
Helymeghatározás a térképen 90.
Helymeghatározás a vonalon 84.
Helymeghatározás görbe vonalon 86.
Henger tehetetlenségi momentuma 707.
Hengervetületek 830.
Hengler 626.
Herakleides Pontikos-féle rendszer 363.
Herkules 233, 234.
Hesiodus 405.
Hét 404, 413, 417.
Hevelius 305.

Hiányos közönséges év 418.
Hiányos szökőév 418.
Hideg öv 242.
Hipparchos 230, 249, 250, 252, 286, 360, 364, 367, 368, 413, 418, 419.
Hipparchos-féle epicycloida 361, 362.
Hippokrates 405.
Hippopede 360.
Hold aequatori horizontális parallaxisa 383, 433.
Hold alakja 697.
Hold árhulláma 686, 696.
Hold árnyékhossza 298.
Hold árnyékának keresztmetszete 298.
Hold átmérője 298.
Hold csomói 278.
Hold csomóinak hátrálása 280, 281.
Hold declinatiója 137, 278, 288.
Hold első negyede 274.
Hold fénye 275.
Hold fényváltozásai 274, 404, 681.
Hold gyorsulása 431, 696.
Hold hegységei 656, 695.
Hold horizontális parallaxisa 137, 146, 433.
Hold keringési ideje 276, 675.
Hold középanomáliája 286.
Hold közepes átmérője 297.
Hold közepes hosszúsága 286, 289.
Hold közepes mozgása 286.
Hold közepes siderikus mozgása 297.
Hold középtropikus mozgása 277.
Hold látszó átmérője 296.
Hold libratiója 331.
Hold magassági parallaxisa 382, 433.
Hold meridiánátmenete 137.
Hold mozgása 272.
Hold parallaxisa 381, 433, 494.
Hold radius-vectora 275, 288, 331, 335.
Hold rectascensiója 137, 273, 278, 288.
Hold relativ mozgása 297.
Hold relativ mozgása csomópontjához 285.
Hold relativ mozgása a Naphoz 285.
Hold relativ mozgása perigaeumához 285.
Hold siderikuskeringése 277, 349.
Hold siderikus hónapja 285.
Hold sugara 137.
Hold szélessége 288.
Hold tömege 432, 598, 599.
Hold tropikus hónapja 277, 284.
Hold tropikus mozgása 285.
Hold utolsó negyede 274.
Hold valódi csomóhossza 281.
Hold valódi hossza 288, 289.
Holdév 322, 332, 411, 417.
Holdfogyatkozás 293, 304.
Holdfogyatkozás graphikus meghatározása 310.
Holdfogyatkozások kiszámítása 307.
Holdfogyatkozások váltakozása 326.
Holdhónap 404.
Holdpálya alakja 283.
Holdpálya excentrumossága 286.
Holdpálya fekvése 277.
Holdperiodusok összehasonlítása 284.
Holdtányér 273.
Holdtölte 274, 294, 295, 304, 323.
Holdváltozás 276.
Homocentrikus sphaerák rendszere 359.
Homogén gömb potentiálja 540.
Homogén gömb szintfelületei 548.
Homogén gömb vonzása 527, 541.
Homogén prisma tehetetlenségi momentuma 709.
Hónap 404.
Honolului expeditio 350.
Hopkins 680.
Horizont 102, 103, 338, 427, 475, 610, 885.
Horizont coordinátarendszere 102, 240.
Horizont depressiója 28, 138, 150, 151.
Horizontalis aequatori parallaxis 146, 381, 384.
Horizontális intenzitás 703, 705, 729, 736, 748, 756, 770, 771.
Horizontális intenzitás főmaximuma 746.
Horizontális intenzitás főminimuma 746.
Horizontális napóra 172.
Horizontális parallaxis 146, 381.
Horizontális refractio 144.
Horizontális térkép 797, 808.
Horizontális variometer 637.
Hornstein 743, 782.
Hosszúsági kör 119.
Hosszúsági libratio 332.
Hő mechanikai elmélete 677.
Hullám probléma 689.
Hullócsillagok 376, 785, 799.
Humboldt 602, 640, 699, 742, 743, 751, 777, 783
Husvét napja 407, 408, 410
Hutton 590.
Huygens 387, 436, 437, 438. 516, 519.

Huygens törvénye 516, 519, 522.
Hyadok 272.
Hydra 234.
Hipothezisek értéke 701.
Hypsographikus görbe 647, 658.
Hypsoklinographikus görbe 649.
Hypsometria 640.
Idő átváltoztatása ívre 108.
Időegyenlítés 136, 140, 245, 246, 889.
Időegyenlítés görbéje 249.
Időegyenlítés meghatározása 265.
Időmeghatározás 390, 616, 884, 886.
Időszámítás 139, 404.
Inclinatio 96, 702, 756, 770, 771.
Inclinatio főmaximuma 746.
Inclinatio főminimuma 746.
Inclinatio háborgásai 744.
Inclinatio időbeli változása 739, 742, 743.
Inclinatio meghatározása 722, 731, 732, 734.
Inclinatio térbeli változása 756, 760.
Inclinatiovariometer 724.
Inclinatorium 723, 728, 731.
Indexcorrectio 132, 169, 220.
Indiai fokmérés 439.
Indicatrix 878.
Indictiócyclus 410.
Inductio áramok 715, 726, 731, 782.
Infinitesimalis számítás 49.
Inga 556, 591, 662.
Inga elongatiója 556.
Inga lengési ideje 560.
Inga tehetetlenségi momentuma 558, 560, 563, 596.
Inga törvénye 558.
Ingagyorsulás 556, 577, 592, 657, 658.
Ingagyorsulás aknákban 592.
Ingalengés correctiói 562, 563.
Ingalengés törvénye 556.
Ingamegfigyelések 440.
Ingamérések eredményei 566.
Inga-nehézség 35.
Integrál 58.
Integrálszámítás 51, 525, 835.
Integratio 57, 664, 837, 870.
Integratios formulák 61.
Integrograph műszerek 62.
Intenzitás 555, 702, 704.
Intenzitás háborgásai 744.
Intenzitás időbeli változása 740, 743.
Intenzitás meghatározása 716, 726, 729, 730, 735.
Intenzitás térbeli változása 756, 760.
Intenzitási variometer 729.
Intern vetületek 797, 820.
Interpolatio 35. 138, 288, 307, 308, 641, 663.
Irradiatio 275.
Isenkrahe 521.
Ismétlő kör 214, 444.
Isochásmák 753.
Isocylindrikus vetület 832, 867.
Isodynámok 756, 760, 781.
Isodynámok egyenletei 770.
Isogamok 567.
Isogonok 756, 760, 771, 775, 777.
Isogonok egyenletei 770.
Isohypsák 644, 645, 646, 647, 664.
Isohypsák egyenlete 664.
Isohypsás térkép 644, 647, 651, 663.
Isoklinok 756, 760, 781.
Isoklinok egyenletei 770.
Issel 622.
Itinerariumok készítése 831.
Ivmérték átváltoztatása időmértékre 107.
Jacobi 493.
Jacques Cassini 438.
James 486 493, 591, 659, 820.
Japáni állatkör 422.
Japáni időszámítás 422.
Javított szélesség 498.
Jellemző morphologiai érték 643.
Jolly 594. 595.
Jolly-féle rugós mérleg 621, 626, 628, 634
Jordán 158, 181, 183, 188, 189, 198.
Jó-Remény foki fokmérés 439, 486.
Julius Caesar 413, 414.
Julius Caesar naptárreformja 414.
Júliusi epakta 408.
Júliusi naptár 408. 409, 414.
Júliusi periodus 410.
Juno 390.
Jupiter 137, 347, 350, 361, 362, 363, 523, 669, 670, 672, 675.
Jupiter-holdak fogyatkozásai 373, 375, 388.
Jupiterholdak látható fogyatkozásai 137.
Kalippos 359, 413.
Kalmus 751.
Kant 696, 783.
Kant-Laplace-féle kosmogonikus elmélet 697.
Kater 486, 564, 566.
Kelet 109.
Kelet-Indiai fokmérés 485, 489, 602.
Kelet-porosz fokmérés 485, 603.
Kelley 784.
Kepler 99, 256, 259, 288, 305, 364, 387, 397, 515, 523, 673.
Kepler-féle egyenlet 260, 262, 266, 267, 844.

Kepler-féle első törvény 515, 523.
Kepler második törvénye 252, 255, 259, 515, 523.
Kepler-féle mozgás 285, 599, 666.
Kepler-féle harmadik törvény 385, 387, 389, 391, 515, 519, 523.
Kepler-féle probléma 260, 468.
Kepler-féle törvények 515, 519, 522, 523, 666.
Kétszeres szög függvényei 10.
Kéttengelyű ellipsoid 436.
Kettős 886.
Kettős fonalú felfüggesztés 730.
Kew 372.
Khinai állatkör 422.
Khinai cyclusok 421, 422.
Khinai időszámítás 419.
Khinai naptár 420.
Khinai órák 421.
Khinai polgári év 420.
Khinaiak aerája 421.
Ki-jing 420.
Kiegyenesítés 62.
Kih 421.
Kiindulási epocha 267.
Kikötő idő 681.
Kimm 135.
Kirkwood-féle hézagok 675.
Kis medve 234.
Kleomedes 145.
Kleostratos 412.
Klinographikus görbe 649, 658.
Klinometer 445.
Klose 431.
Knidosi Eudoxus 359.
Kohlrausch 715.
Kohlrausch-féle helyi variometer 736.
Kolur 121.
Kompensativ vetületek 880.
Konfuczius 419.
Koordináta háló 2.
Koordináta-sík 2.
Kos jegye 234, 886.
Kosmikus lenyugvás 405.
Kör középponti egyenlete 467.
Kör pontonkénti szerkesztése 850.
Körmozgás egyenlete 516, 519.
Kötött holdév 412.
Közelítő rectificatio 81.
Közepes csúcsmagasság 640.
Közepes establishment 681.
Közepes gerinczmagasság 640, 641.
Közepes lejtési szöglet 650.
Közepes réselés 640, 641.
Közepes tengerszint 602.
Közép centrumtávolság 653.
Közép földsugár hossza 492, 496.
Közép határtávolság 653.
Közép meridián-fok hossza 492.
Közép-Nap 245.
Közép Nap rectascensiója 245.
Közép nap 140, 245.
Közép talpmagasság 642.
Közép tropikus hónap 277.
Középanomalia 260, 266, 367, 670.
Közép dél 245.
Középidő 115, 117, 137.
Középponti egyenlítés 264, 286, 289.
Kőzetmágnesség 777, 778.
Közönséges év 268, 415.
Kreil 771, 772, 778, 783.
Kreitner 170, 194.
Kristálysphaera 99, 336, 359.
Krisztus születésének éve 407, 410.
Kuang-Szü 421, 422.
Kúpvetületek 791, 829, 846, 879.
Kurländer Ignácz 772.
Különbség apály és áradat között 685.
Külső bolygók mozgása 564.
Külső együttállás 352.
Lábpont 103.
Lacaille 383, 439, 486.
Lacondamine 438, 566.
Lagrange 439.
Lahire 438.
Lalande 383.
Lambert 825, 854, 855.
Lambert aequivalens azimuthalis vetülete 823, 877, 878, 879.
Lambert aequivalens kúpvelülete 854.
Lambert-féle aequivalens síkvetület 823.
Lambert-féle isocylindrikus vetület 832.
Lambert-féle térkép torzulási viszonyai 827, 879, 880.
Lambert-Gauss-féle szögtartó kúpvetület 855, 876.
Lambton 408.
Lamont 699, 739, 740, 746, 771, 778, 780, 783.
Lamont-féle utazási theodolit 732.
Laplace 335, 439, 442, 491, 671, 672, 674, 689, 696.
Laplace-féle sík 673.
Laplace-féle tétel 553, 554, 627, 628, 634, 676.
Lapplandi expeditio 438.
Lapplandi fokmérés 438, 454, 485.
Lapultság 436, 576, 577, 606, 788.
Lapultság absolut értéke 491
Lapultság egyenlete 436, 476
Lapultság értéke 443, 487, 488, 489, 490, 492, 577.
La Roche-féle törvény 598.
Laška 625.
Láthatár 103.

Láthatár depressiója 149, 428.
Láthatatlan félgömb 102, 888.
Látható félgömb 102, 888.
Láthatóság neutrális irányának görbéje 753.
Látmező sugara 504.
Látszó horizont 145.
Lavoisier 442.
Legendre 422. 450.
Legendre-Laplace-féle törvény 598.
Leghosszabb nap 237. 888.
Leghosszabb nyár 271.
Legkisebb négyzetek elmélete 477, 568.
Legmagasabb csúcs magassága 641.
Legmélyebb nyereg magassága 641.
Legnagyobb holdtávolság 299.
Legnagyobb keleti elongatio 357.
Legnagyobb napközelség 299.
Legrövidebb nap 237, 888.
Legrövidebb szürkület kiszámítása 165.
Legrövidebb távolság a Földön 505, 818.
Legrövidebb tél 271.
Legrövidebb út a Földön 505.
Lehajlás 703.
Leibnitz 699.
Lejtő közepes magassága 644, 645.
Leképezés 794.
Lemaire 439.
Lemonnier 438.
Lemström 784, 785.
Lengési idő 556.
Lengési idő levezetése 557.
Lengési középpont 564.
Lenoir 443, 444,
Leonardo da Vinci 275.
Leo 234.
Leonis α 116.
Leszálló csomó 278. 300, 325.
Levegő sugártörése 137.
Leverrier 246, 253, 262, 289.
L'Huilier Simon formulája 23, 450.
Libella 102, 123, 171, 207, 213, 217, 435, 446, 489, 512, 590, 599, 621, 657.
Lichtenberg 783.
Liesganig 439.
Lilius Alajos 415.
Lindenau 492.
Lineáris egyenlet 463.
Lineáris planimeter 68.
Lissajous-féle hangidomok 347.
Listing 433, 492, 496, 504, 533, 535, 536, 568, 602.
Listing-féle formula 402, 568, 577.
Listing typikus sphaeroidja 492, 634.
Lloyd 731.
Lloyd-féle mérleg 732.
Locke 775, 776.
Lloyd-féle módszer az inclinatio meghatározására 731, 734.
Logarithmuskönyv 23.
Logarithmusos képletek 29.
Logarithmusos számolás 23.
Logarithmusos transformatio 18.
Logarithmustábla 23.
Lokális eltérés 769.
Loxodroma 509.
Loxodroma egyenlete 509, 838, 873.
Loxodromia 85, 838.
Loxodromikus távolság 509, 838, 839.
Luna mendax 275.
Lunatio 276.
Luther 749.
Lütke 567.
Lynx 234.
Lyrae α 220, 233.
Mac Laurin-féle sor 57.
Maclear-féle fokmérés 486.
Maestlin 275.
Magasabbfokú egyenletek 37.
Magassági kör 104.
Magassági parallaxis 145, 151, 381.
Magasságmérés 642, 644, 646, 657.
Magasvíz 681.
Mágnes 700.
Mágnesrúd mágneses vége 700.
Mágnes inductiócoefficiense 715, 721.
Mágneses absolut megfigyelések 711, 728.
Mágneses aequator 760, 762.
Mágneses állandók 699.
Mágneses declinatio 95, 702.
Mágneses declinatio háborgásai 743.
Mágneses declinatio időbeli változása 739, 743.
Mágneses declinatio meghatározása 705, 715, 729, 733.
Mágneses declinatio térbeli változása 756.
Mágneses egyensúlyi vonalak 767, 768, 781.
Mágneses elemek 698.
Mágneses elemek időbeli változásai 738.
Mágneses elemek térbeli változásai 756.
Mágneses elhajlás 702.
Mágneses erő nagysága 701, 738.
Mágneses erő összetevői 702, 769.
Mágneses erő potentiálja 764.
Mágneses erő translatorikus nagysága 737.
Mágneses erővonalak 700.

Mágneses háborgások 743, 755, 781.
Mágneses helyi eltérés 769, 771.
Mágneses inclinatio 702.
Mágneses inclinatio meghatározása 722, 731, 732, 734.
Mágneses inductio 715, 726, 731, 782.
Mágneses inga 704.
Mágneses intenzitás 702, 704.
Mágneses intenzitás meghatározása 716, 726, 729, 730, 735.
Mágneses közelhatások 700.
Mágneses lehajlás 703.
Mágneses meridián 702, 715, 762, 767.
Mágneses momentum 705, 714, 722.
Mágneses normális elemek 769, 771.
Mágneses pólusok 702, 762, 770, 781, 782.
Mágneses potentiál egyenlete 766.
Mágneses tengely 702, 716.
Mágneses theodolit 732.
Mágneses tömegek egysége 701.
Mágneses tulajdonságú testek 700.
Magneses úti theodolit 733.
Mágneses variacziós megfigyelések 729.
Mágneses variatiók 738.
Mágneses variometer 729.
Mágneses végek 699.
Mágnesrendszer momentuma 731.
Mágnesség 578, 700.
Mágnesség hypothezise 700.
Mágnestű forgásmomentuma 705.
Mágnestű használata 698, 699.
Mágnestű mechanikája 704.
Mágnestű tehetetlenségi momentuma 707.
Magnetometer 712, 736.
Magnetometer lengési ideje 715.
Magyarország földmágnességi elemei 773.
Magyarországi fokmérés 439.
Mairan 749.
Malaspina 566.
Marco Polo 699.
Mareograph 689, 690.
Mars 137, 347, 350, 361, 362, 363, 385, 387.
Mars bolygó rectascensiója 139.
Mars oppositiója 388, 566.
Mars parallaxisa 389.
Martus 346.
Mascart 622.
Maskelyne 590, 659.
Másodperczinga 440, 561.
Mason 439.
Mathematikai geographia 1, 350, 514.
Mathematikai inga 561.
Mathieu 566.
Maupertuis 438.
Maxwell 335, 697, 700.
Mayer Róbert 784.
Mayer Tóbiás 193, 194, 289, 305, 699, 762.
Mechain 441, 442, 443.
Mechanika általános elvei 668
Mechanikai integratio 59.
Megfelelkező magasságok 152.
Megfigyelés súlya 480.
Melegövek 379, 890.
Mellékgerinczek 641.
Mendelejeff-féle törvény 624.
Mendenhall 593, 659.
Menzer 781.
Mercator 833.
Mercator-féle egyenlet 835.
Mercator-féle vetület 833, 867, 874, 878.
Mercur 335, 350, 351, 352, 361, 362, 363, 675.
Mercur átvonulás 356, 393, 396.
Meridián 104, 108, 205, 338. 436, 440, 610, 787, 763.
Meridián-convergentia 345, 456, 847, 853, 855.
Meridián kitűzése 185.
Meridánellipsis excentrumossága 436.
Meridiánfok hossza 27, 403, 435, 438, 439, 461, 492, 496.
Meridiánjel 186.
Meridiánkör 129, 170, 225, 227, 243, 246, 277, 734.
Meridiánok képei 798, 830, 847, 863.
Meridiánquadrans hossza 492, 496.
Meridiánvonal 109.
Mérleg jegye 886.
Mérsékelt öv 242.
Mersenne 339.
Mérték a gnomónos vetülethez 806.
Mérték a Mercator-féle térképhez 840.
Mérték a stereographikus vetülethez 819.
Mérték szerkesztése 791, 806, 819.
Mértékrendszer megállapítása 439.
Mesterséges északi fény előállítása 784, 785.
Meteorologia 37.
Meteorologiai hullámok 688.
Meteoroskop 751.
Méter 440, 443, 491, 495.
Méter prototypusa 443, 448.
Méterrendszer 495.
Meton 407, 420.
Meton-féle holdcyclus 412, 413, 419.

Michelson 388.
Microscopium 234, 444.
Millimeterpapiros 86.
Minimalis felület 650, 651.
Mire 446, 715.
Mitchell 595.
Mohammedán év 412.
Mohammedán hónapok 411.
Mohammedán időszámítás 411.
Mohammedán ünnepek 412.
Mollweide 763.
Mollweide-féle vetület 38, 89, 841, 842, 868.
Monge 439.
Monoceros 234.
Monsun 340.
Montigny 751.
Morphologiai elem 640, 657.
Morphologiai érték 643.
Morphometria 587, 639, 640, 658, 665.
Mozgó napév 416.
Möbius 676.
Mudge 486.
Munka fogalma 536.
Munka kettős kifejezése 544.
Munka mértéke 536, 544, 559.
Multiplicatiós kör 214.
Muncke 784.
Nabonasszar-féle aera 417.
Nadir 103.
Nadiráradat 681.
Nagy angol fokmérés 486.
Nagy egyenlítés 669.
Nagy franczia fokmérés 439.
Nagy medve 234.
Nagyméretű kúpvetület meridiánjainak szerkesztése 851.
Nagysugarú kör pontonkénti szerkesztése 850.
Nap árhulláma 685, 686.
Nap declinatiója 136.
Nap declinatiója 120, 237, 238, 887.
Nap delelése 93, 886.
Nap háborgásai 286.
Nap közép siderikus mozgása 266, 297.
Nap közép tropikus mozgása 267.
Nap közepes anomaliája 289.
Nap közepes átmérője 297.
Nap közepes hossza 289.
Nap látszó átmérője 249, 296.
Nap látszó mozgása 223.
Nap látszó pályasebessége 403.
Nap magassági parallaxisa 138, 146, 481.
Nap nagysága 403.
Nap parallaxisának meghatározása 386,3 90, 895, 400.
Nap radius vectora 252.
Nap rectascensiója 136, 243, 273, 887.
Nap sebessége 263.
Nap siderikus keringése 277.
Nap sugara 136.
Nap távolsága 388.
Nap tömege 598, 599.
Nap tropikus mozgása 285.
Nap valódi anomaliája 263.
Nap valódi rectascensiója 247
Nap vonalos sugara 403.
Nap vonzása 678.
Napállás 237.
Napegyenlítés 408.
Napóra 171, 413, 421.
Napfogyatkozás 293, 295.
Napfogyatkozások ikonographiája 309.
Napfogyatkozások kiszámítása 307.
Napfogyatkozások váltakozása 325.
Napfoltok gyakorisága 740, 782.
Napfordulat 237.
Napi aberratio 343.
Napi libratio 333.
Napi mágneses változások 738, 741.
Napi mozgás 98, 887.
Napi parallaxis 381.
Napi variatio 738, 741, 742, 781, 783.
Napier analogiái 19, 456, 507.
Napier-féle logarithmusok 28.
Napier-féle szabály 17.
Napkör 409.
Napközelség 250, 403.
Napnap 140, 243, 404.
Napórák felállítása 178.
Nappali ív 114, 236, 338.
Nappalok váltakozó hossza 154, 237.
Nappálya 119, 366.
Nappálya alakja 248.
Nappálya excentrumossága 264, 265, 403.
Napparallaxis 300, 387, 390, 393, 397, 402.
Napparallaxis állandója 403.
Napparallaxis értéke 389, 390, 393, 397, 402.
Naptár 404, 891.
Naptári év 236.
Naptárrendszerek 411.
Naptávolság 250, 403.
Napüvegek 132.
„Natura non facit saltum“ 53.
Naumann Edmund 771.
Nautical Almanac 136.
Nautisches Jahrbuch 136, 159, 183, 192, 194, 198, 199, 204, 220.
Naval Observatory 136.
Neckam 699.
Necker 751.
Nehéz inga 556, 599, 704, 707.
Nehéz inga forgásmomentuma 705.
Nehézség 532, 578, 601, 639, 697.
Nehézség erőösszetevői 554, 627.

Nehézség forgásmomentuma 628.
Nehézségi erő gyorsulása 533, 535, 555, 574.
Nehézségi erő iránya 427, 475.
Nehézségi erő lemérése 555, 613, 616, 621, 622, 624, 625, 626.
Nehézségi gyorsulás egyenlete 568, 587, 600.
Nehézségi gyorsulás földfelületi eloszlása 48.
Nehézségi gyorsulás meghatározása 555.
Nehézségi mérések 513.
Nehézségi szintfelület 603, 634.
Nehézségi változások 613.
Neill-féle globuláris vetület 828.
Német geographiai mérföld hossza 492.
Nengoperiodus 422.
Neptunus 364, 522.
Neptunus holdjai 697.
Neumayer 884.
Newcomb 289, 402, 481.
Newton 343, 344, 364, 435, 436, 437, 438, 490, 514, 518, 519, 520, 521, 525, 530, 531, 568, 570, 666, 682, 694.
Newton binom sora 30, 54, 544, 549, 552, 582, 836.
Newton féle axiomák 518.
Newton-féle szingyűrűk 625.
Newton-féle tételek 518.
Newton-féle törvény 349, 350, 402, 432, 520, 521, 522, 525, 329, 666, 671, 701.
Nin-o periodus 422.
Niveaufelület 546, 575, 600, 650.
Niveausphaeroid 604, 658, 664, 665, 787, 789, 767.
Niveauvonalak 548.
Noah-féle év 417, 419.
Noñez 165.
Nonius 74, 125.
Nordenskiöld 753, 779, 784.
Nordenskiöld-féle beosztás 753, 754.
Nordenskiöld-féle pont 753, 785.
Normális 769.
Normális egyenlete 470.
Normális gyorsulás 568.
Normann 779
Numa 413, 414.
Nundinae 414.
Nutatio 282, 348, 370, 677, 679.
Nutatio periodusa 282.
Nyár 268, 272.
Nyári napfordulat 120.
Nyilas jegye 886.
Nyugot 109.
Objectiv fogyatkozás 305.
Octavianus 414.
Ohnstedt 784.
Oktaeteris 412.
Oktánsok 288.
Olaf Römer 373, 375, 376.
Oldalösszeg tétele 19.
Olympiádok aerája 413.
Olympias 413.
Ó-naptár 415.
Ophiuchus 234.
Oppolzer 308, 309, 349.
Oppositio 273, 304, 354.
Oppositio hosszúságban 273.
Oppositio rectascensióban 273
Optikai fogyatkozás 296.
Óra 205, 246, 247.
Órakör 106, 108, 150.
Óraszög 110, 150, 338.
Ordináta 85, 258.
Orion 234.
Oroid 657, 658.
Oroid állandója 664, 665.
Oroid egyenlete 659, 765.
Orometria 37, 60, 61, 640, 656.
Orometriai elemek 640, 658, 665.
Oroszlán jegye 886.
Orosz fokmérés 485.
Orthogonalis coordinátarendszer a térben 94.
Orthogonális trajectoria 605.
Orthogonális vetület 797.
Orthographikus vetület 807.
Orthographikus vetület torzítása 811.
Osculatio 669.
Outhier 438.
Önkényes hengervetületek 841.
Önkényes kúpvetületek 857.
Önkényes síkvetületek 828.
Örök naptár 409.
Ősz 268, 272, 405.
Őszi aequinoctium 107, 235.
Őszi napéjegyenlőség 228.
Őszpont 107.
Összes mágneses tömeg 700.
Összes mágnesség 700.
Palmieri 746.
Pálya egyenlete 461.
Pályavonalzó 315.
Pantograph 4.
Paracelsus 779.
Parallaktikus fogyatkozás 296.
Parallaktikus hiba 126.
Parallaktikus libratio 333.
Parallaktikus szög 151.
Parallaktikus távcső 128.
Parallaxis 99, 145, 195, 196, 198, 210, 301, 381.
Parallaxis állandója 385.
Parallela 337.
Parallelfok hossza 502, 512.
Parallelfokmérés 510.
Parallelkör 106, 205, 338, 787
Parallelkörök képei 798, 830, 847, 863.
Parallelprojectio 797, 807.
Parallelvetület 807.
Parent 820.

Parker 780.
Párkánymagasság 640, 642.
Parmenides-féle övek 239.
Parry 753.
Passage-cső 129, 170.
Passatszelek 340.
Penck 643.
Pennsylvániai fokmérés 439.
Perigaeum 247, 250, 255, 256, 264, 266, 283, 272, 333.
Perigaeum hossza 267, 269.
Perigaeum periodikus változása 289.
Perigaeum tropikus mozgása 285.
Perigaeum tropikus periodusa 269.
Perihelium 250, 670, 675.
Periodikus háborgások 668.
Periodikus sorok 30, 40.
Perrot 625.
Perry 780.
Perseus 234.
Perspektivikus eljárás 796,
Perspektivikus hengervetület 830.
Perpektivikus kúpvetület 847.
Perspektivikus sík vetületek 796.
Perspektivitás elve 797, 829.
Perturbáló bolygó 667.
Perturbált bolygó 667.
Perturbatiok 523, 666.
Perturbatiós számítás 666.
Perui fokmérés 438, 443, 454, 485, 566.
Peters 591, 767.
Physikai fogyatkozás 305.
Physikai libratio 334.
Phönixperiodus 416.
Picard 389 435.
Picard-féle fokmérés 343, 390, 435, 436, 438, 531.
Pingré 308.
Piscis austrinus 234.
Piscium η 171.
Plana 593.
Planiglobiumok 828.
Planimeter 4, 40, 46, 62, 588, 648, 649, 653, 663, 837.
Planisphaerium 820.
Plantamour 621.
Plejádok 273, 405.
Plinius 145, 749.
Poincaré 668.
Poláris coordinátaháló 88, 91, 868.
Poláris coordinátarendszer a térben 95.
Poláris gyorsulás 536.
Poláriskör 121.
Poláris planimeter 67.
Poláris sík-coordinátarendszer 87.
Poláris térkép 797, 798, 810, 817, 822, 826.
Polározódás 754.
Polgári időszámítás 141.
Polgári szürkület 164, 888.
Pólusmagasság 109.
Pólustávolság 106, 766.
Polyaederes térképek 861.
Polykonos vetület 859
Polykonos vetület angol módosítása 860.
Porosz fokmérés 485.
Port-Ross 184.
Postel-féle aequidistáns azimuthális vetület 821, 877, 878, 879.
Postel-féle térkép torzulási viszonyai 823, 879, 880.
Potentiál 536, 537. 539, 588, 658, 659, 660, 661.
Potentiál változása 537.
Potentiálfelület 546
Poynting 595.
Praecessio 228, 230, 235, 278, 348, 524, 598, 668, 670, 677, 683.
Praecessio magyarázata 678.
Praecessio periodusa 230.
Priestley 783.
Primum mobile 336, 359.
Profilmetszetek egyenlete 664
Profilok 655, 664.
Protuberantiák 295.
Provisorikus méter 442.
Ptolomaeus 287, 360, 417, 425, 763, 779.
Ptolomaeus-féle rendszer 360, 364, 368.
Pythagoras 99, 100.
Pythagoras-féle sphaera 99.
Pythagoras-féle tétel 55, 430, 718.
Quadratura 62, 81, 287, 681, 685.
Rabbi Hillel Hanaszi 418
Radius vector 88, 95, 252, 257, 259, 503.
Rák jegye 886.
Ráktérítő 120, 239.
Raulin 779.
Rebeur Paschwitz 626.
Recta ascensio 95, 107, 121, 226, 227, 230, 338, 394.
Rectificatio 62, 81.
Referenzellipsoid 604, 627.
Reflectált kép 219.
Refractio 143, 151, 195, 196, 215, 504.
Reggeli tágasság 156.
Regiomontanus 415.
Regula falsi 37.
Regulus 116.
Reich 338, 597.
Reichenbach 621.
Relativ nehézségi mérések 562, 613.
Relativ szám 740.
Rendes közönséges év 418
Rendes szökőév 418.
Részleges holdfogyatkozás 305, 320, 326' 327.
Részleges napfogyatkozás 295, 296, 300, 304, 320, 321, 322, 325.
Rétegek területe 655.
Reuben Burrow 439

Reversiós inga 564, 707.
Rex F. W. 23.
Rezgési idő 556.
Rézmeridián 885.
Riccioli 337, 435.
Richer 389, 438, 566, 625.
Roche-féle törvény 692.
Római adószám 410.
Római fokmérés 439.
Római hét 414.
Római hónapok 414.
Rómaiak aerája 414.
Rómaiak időszámítása 412, 413.
Ross 760.
Rotatiós ellipsoid 436.
Rowland 780.
Roy 461, 486.
Römer O. 373, 375, 389.
Rumowski 566.
Sabine 567, 741, 743.
Saeculáris háborgások 668.
Saecularis mágneses változások 738.
Saecularis variatio 738.
Sagittarius 234.
Sark 105.
Sárkány csillagzat 119.
Sárkány farka 278.
Sárkány feje 278.
Sarkcsillag 100, 101, 180, 190, 218, 219, 233, 424.
Sarki fény 738, 748, 783.
Sarki fény gyakorisága 753.
Sarki fény láthatósági határai 753.
Sarki fény láthatósági periodusai 754, 783.
Sarki fény magyarázata 783, 784, 785.
Sarki fény spectruma 754.
Sarki fényi felhőzet 750.
Sarki fényi pára 750.
Sarkkör 237.
Sarkmagasság 180, 427, 475, 610.
Sarktávolság 106.
Saros 328, 412, 417.
Saturnus 137, 347, 350, 362, 363, 669, 670, 672, 675.
Saturnusgyürű 675.
Scheibner 522.
Schenzl Guido 772.
Schiaparelli 360.
Schubert 492, 493.
Schuhmacher 485.
Schweizer 775.
Scorpio jegye 886.
Secchi 784.
Segédtétel a tehetetlenségi momentumra 710.
Segédtétel az ellipsisről 258.
Selander 485.
Selenographikus szélesség 333.
Selencidák aerája 417.
Serpens 234.
Sextáns 130, 164, 214, 219, 222.
Sextáns hibaelmélete 214.
Siderikus év 140, 235, 419.
Siderikus hónap 276, 284.
Siderikus napév 405.
Siemens Werner 780, 782.
Siemens William 782.
Siemens-féle bathometer 622, 660.
Sih-Hoang-Ti 421.
Sík perspektivikus szögtartó vetület 811.
Síkgörbe egyenlete 461.
Síkvetületek 791, 793, 795, 796.
Simpson formulája 59, 61, 82, 654.
Sirius 224, 234, 405, 416.
IV. Sixtus pápa 415.
Skalweit 780.
Skaphe 425.
Snellius 433, 435.
Soldner 841.
Solon 412.
Solstitium 120, 237, 267, 270, 742, 743.
Solstitiumi kolur 108.
Sonklar 640, 641, 642, 656, 664, 665.
Sonklar-féle orometrikai elemek 640, 658, 664, 665.
Sosigenes 414.
Sothis 224, 405, 417.
Sothisperiodus 416.
Speciális háborgások 667.
Sphaera obliqua 114, 115, 240, 241.
Sphaera parallela 115, 240.
Sphaera perpendicularia 114, 121, 239.
Sphaerikus excessus 450.
Sphaerikus háromszögek 450.
Sphaerikus problémák 496.
Sphaeroid 436, 787, 789.
Sphaeroid leképzése 862.
Sphaeroidikus Föld 27, 198, 383, 436, 627, 788, 765.
Sphaeroidikus Föld köbtartalma 496.
Sphaeroidikus Föld sugara 500.
Sphaerikus excessus 23.
Spontán mozgások 621.
Sraffos térképek 650, 651.
Stationálás 351, 358, 359, 364.
Stationáló azimuth 157.
Stationáló bolygók 351.
Steiner Lajos 744, 745.
Steinhäuser 779.
Steinheil 747.
Stereographikus poláris projectio 309, 817.
Stereographikus térkép torzitása 819, 879, 880.
Stereographikus vetület 797, 811, 857, 876, 878, 879.
Stereographikus vetület szögtartósága 812.
Sterneck 567, 592, 613, 616.
Sterneck ingája 613.
Sterneck-féle relativ gyorsulási mérések 566, 567, 613.

Stoll 165.
Struve 374, 485, 591.
Su-king 419.
Subarktikus zóna 242.
Subtractio logarithmus 25.
Subtropikus zóna 242.
Súlypont tétele 668.
Superpositiók elve 667, 688.
Svanberg 485.
Swinden 442.
Syene 425.
Synodikus hónap 276, 284. 285, 287, 319, 320, 322, 325, 328, 406, 419.
Syzygiák 273, 287, 307, 319, 681, 685.
Szabad esés 49.
Számrendszer 404.
Széchenyi Béla gróf 170, 194.
Szélességi kör 119.
Szélességi libratio 332.
Szembenállás 273.
Szemhatár 135.
Szemhatár depressiója 148.
Szemhatár sugara 504.
Szilárd földkéreg árhulláma 690.
Szintezés 434, 600, 611, 657.
Szintfelületek 546, 658.
Szintgörbék 548.
Szögsebesség 517.
Szögtartó térkép 789, 793, 794, 811, 834, 835, 876, 877.
Szögtartó vetítés 789, 864, 866
Szögtartóság elve 855.
Szögtartóság kifejezése hengervetületeknél 834.
Szökő ár 681.
Szökőcyclus 417.
Szökőév 268, 414, 415.
Szökőhónap 418.
Szt.-Ilona tüze 784, 786.
Szürkület tartama 165.
Szűz jegye 886.
Ta-Tsing-lü-li törvénykönyv 421.
Tacitus 749.
Tait 602.
Talcot-Horrebow-féle módszer 185.
Talleyrand 439.
Talpvonal 664.
Talpvonal poláris egyenlete 665.
Tavasz 268, 272.
Tavaszi aequinoctium 227, 235.
Tavaszi napéjegyenlőség pontja 107, 205.
Tavaszi pont 107.
Távolságok lemérése 839.
Távolságtartó vetület 789, 821, 831, 848.
Taylor-féle sor 57.
Tehetetlenség 515.
Tehetetlenség tétele 518.
Tehetetlenségi görbe 339.
Tehetetlenségi momentum 558, 560, 565, 708, 709, 710, 714.
Tél 268, 272.
Telescopium 234.
Téli napfordulat 121.
Teljes árnyék 293.
Teljes centrális fogyatkozás 296, 348.
Teljes holdfogyatkozás 84, 305, 324, 325, 326, 327.
Teljes napfogyatkozás 84, 295. 299. 304, 319, 321, 322, 405, 417.
Tengelyforgás tartama 350.
Tenger niveauja 434.
Tengerészeti időszolgálat 138.
Tengeri mérföld hossza 492.
Tengerjárás 138, 286, 331, 335, 598, 601, 670, 681.
Tengerjárás mint kosmikus jelenség 695.
Tengerjárás periodusai 687, 690.
Tengerjárás statikai elmélete 682, 691.
Tengerszint 601.
Tengerszint alakja 601.
Tengerszint változása 691.
Tenner 485.
Terrella 699.
Térfogatszámítás 654.
Térítő 237.
Térkép aequidistantiája 647.
Térkép három főtulajdonsága 790, 792.
Térképek anyagának beszerzése 884.
Térképek mértéke 791.
Térképek skálája 790.
Térképek torzítási viszonyai 877.
Térképrajzolás 787.
Térképvetítés 25, 261, 456. 502, 509.
Térképvetítés tana 35, 60, 318.
Térképvetítés tulajdonságai 790.
Természetes logarithmusok 28, 835.
Területek megmaradásának tétele 668.
Területi tagozottság 651, 653.
Területmeghatározás 62.
Területmegtartás elve 255.
Területmérő 64.
Területtartó térkép 790, 832, 842, 854, 859, 877.
Területtartóság elve 824.
Tetőpont 103.
Theodolit 122. 164, 168, 170, 185, 202, 217, 222, 433.
Theodolit collimatio hibája 208.
Theodolit hajlási hibája 208
Theodolit zenithadata 212.
Theodor v. Oppolzer 308.
Theoretikus gyorsulás 568

Thermometerskálák átszámítása 137.
Thomson 602, 689, 690.
Tide hour 681.
Tilló 774.
Timocharis 230.
Tissandier 779.
Tissot 877, 878, 880, 882.
Tissot kompenzativ kúpvetülete 882.
Tissot-féle vetület 39, 858, 882
Tizenegyévi mágneses változások 738, 740.
Tobias Mayer 193, 289, 305, 699, 762, 763.
Toise 435, 448· 491, 495.
Tompító 712.
Tompító üvegek 222.
Topographiai felvételek tana 884.
Torsiocoefficiens 596, 707.
Torsiós mérleg 595, 626.
Totális intenzitás maximuma 746.
Totális intenzitás minimuma 746.
Tóth Adolf 825.
Tömeghalmozódások 618, 619
Tömeghiányok 618, 619.
Tömegközéppont 572, 579. 659.
Tömegvonzás gyorsulása 533.
Tömegvonzási erő 521, 536, 555, 666.
Tömegvonzási jelenségek 515.
Tömegvonzási potential 537, 545, 546, 551.
Töpler 784.
Török naptár 277, 412.
Történeti fogyatkozás 307.
Tralles 442.
Transcendens egyenletek 37.
Triangulatio 381, 433, 449.
Trigonometria 5.
Trigonometriai táblázatok 7, 8
Tromholt 784, 785.
Tropikus év 235, 245, 404, 406, 419.
Tropikus hónap 277, 284.
Tropikus napév 405.
Tropikus zóna 241.
Tropus 120.
Tsin-dynastia 698.
Turini fokmérés 439.
Tycho de Brahe 287, 288, 367, 370, 515, 523.
Tycho de Brahe-féle rendszer 363.
Typikus sphaeroid 492.
U. S. Coast survey 775, 860.
Új csillagok 696.
Új naptár 415.
Újabb morphometriai módszer 657.
Ujhold 273, 295, 320.
Unipoláris inductio 784.
Universal műszer 122, 171, 616.
Uranus 364.
Uranus holdjai 697.
Ursae minoris α 100, 171, 217, 233.
Ussher 783.
Úti inclinatorium 734.
Üstökösök 676, 782.
Vak áradat 681.
Valódi anomalia 255, 257, 258, 260, 264.
Valódi horizont 145.
Valódi idő 140.
Valódi Nap rectascensiója 246, 265.
Valódi napi idő 111, 887.
Variatió 286, 287, 289.
Variometer 637, 638, 715.
Vasárnapi betű 409.
Végtelen sor 29, 264, 286.
Vénus 137, 347, 350, 351, 361, 362, 363, 385, 387, 783.
Vénus-átvonulás 159, 390, 397.
Vénus csomói 399.
Vénus drakonitikus éve 398.
Vénus közép naptávolsága 392.
Vénus parallaxisa 391, 398.
Vénus phasisai 359.
Vénus siderikus keringése 398.
Vénus synodikus éve 398, 399.
Vénusátvonulások feltételei 397.
Vertikális intenzitás 703, 771.
Vertikális intenzitás főmaximuma 746.
Vertikális intenzitás főminimuma 746.
Vertikális kör 104, 211.
Vertikális napóra 172.
Vetületek általános tulajdonságai 786.
Vetületek torzítási viszonyai 805, 811, 819, 823, 827, 877.
Vezérsugár 89, 95, 789.
Világegyetem energiája 677.
Világegyetem entropiája 677.
Világidő 142.
Világpolus 105, 337.
Világrendszer vége 677.
Világtengely 105, 238, 239 240, 337.
Virginis α 228.
Virgo 233, 234.
Viszonylagos gerinczmagasság 640, 641.
Vizi óra 413, 421.
Vizöntő jegye 886.
Vonal fejlettsége 650.
Vonalos excentrumosság 251.
Vonatkozási sphaeroid 604.
Völgyek hajlásviszonyai 640.
Völgyek közepes esése 640, 641.
Völgyek közepes magassága 640, 641.
Völgyek mélysége 640.

Vu-king 419.
Vulpecula 234.
Weber 522, 699, 728, 784.
Weber-féle földinductor 727.
Weber-féle törvény 522
Wega 220, 233.
Wettstein 780.
Weyprecht 755.
Wild 748.
Wild-féle inclinatorium 732.
William Gilbert 698.
William Roy 486.
William Siemens 782.
Wilsing 593.
Winnecke 390.
Wohlgemuth 749, 750.
Wolf R. 740, 741.
Wolff 751.
Wood-féle fém 696.
Yau császár 419, 420.
Young 388.
Yvon Villarceau 603.
Zenith 103, 425, 427, 579.
Zenithális deformatio 694.
Zenithális vetület 793.
Zenitháradat 681.
Zenithtávolság 150, 211, 610, 660.
Zenithtávolság javítása 212.
Zónaidő 142, 891.
Zónák keletkezése 236, 670.
Zónatérképek 793.
Zöllner 522, 780.
Zöllner-féle horizontális inga 626.
Zöppritz 884.
Zsidó hónapok 417, 418.
Zsidók aerája 418.
Zsidók időszámítása 417.

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár

A.M.N.MÚZEUM KÖNYV-TÁRA

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár

OSZK
Országos Széchényi Könyvtár

