

XI. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA
MaMeK, 2011
Miskolc, 2011. augusztus 29-31.

ÁLLANDÓSULT HŐTANI-RUGALMASSÁGTANI KOPÁSI PROBLÉMÁK
NUMERIKUS VIZSGÁLATA
Páczelt István¹, Mróz Zenon²

¹ Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék.
H-3515 Miskolc-Egyetemváros.
mechpacz@uni-miskolc.hu

² Institute of Fundamental Technological Research, PAN.
ul. Pawinskiego 5B; 02-106 Warszawa, Poland
zmroz@ippt.gov.pl

Absztrakt: Állandósult kopások ismerete fontos az üzemeletetés szempontjából, hisz ekkor a kezdeti bejáratási időszak után kialakuló testek közötti érintkezési feszültség és a kopott alak alapján megbízhatóan lehet értékelni, megbecsülni az élettartamát.

A kopás folyamatának időbeli lefutását a kopási törvény időbeli integrálásával megkaphatjuk. Egy másik lehetséges út, amire az előadás vállalkozik, megfelelő variációs elv segítségével közvetlenül megkapni az érintkezési nyomás függvényt, majd annak ismeretében a kopott alakot.

Számos példán keresztül mutatjuk be a javasolt módszer hatékonyságát azokban az esetekben is, amikor a súrlódási hővesztéséből keletkező hőmérséklet mező hatása számottevő. A jelen munka nagymértékben támaszkodik a szerzők korábbi közös munkáira, ahol még számos elméleti kérdés került tisztázásra, ill. numerikus példák igazolták az elmélet használhatóságát.

Kulcsszavak: kopás, rugalmasságtan, hővezetés, variációs elv, kopási disszipációs teljesítmény

1. BEVEZETÉS

A gépek működésénél számos elem egymáshoz képest elcsúszik, elmozdul, érintkezési felületeik mentén a súrlódás hatása miatt hő fejlődik, továbbá anyagrészek válnak le, azaz kopás lép fel. A levált, lekopott anyag következtében a kezdetileg kialakított felületek formája megváltozik, amely sok esetben a testek feszültségi állapotának lényeges változásához vezethet a kopás mértékétől függően. A várható alak gyors meghatározása fontos a gépet üzemeltető számára, a tervezőnek pedig lehetőséget ad a várható élettartam becslésére.

A kopás folyamatának numerikus szimulálása a hagyományos úton, a kopási törvény időintegrálásával nagy számítógépi időt követelő folyamat. A jelen munka arra kíván válaszolni, lehet-e más módon, valamilyen variációs elv felhasználásával, közvetlenül meghatározni az ún. állandósult kopási állapothoz tartozó érintkezési nyomást és az alkatrészek közötti csúszás miatt a Coulomb-féle törvény értelmében az érintőleges feszültséget. Látni fogjuk, hogy erre valóban van lehetőség. A szerzők korábbi munkáira alapozva foglaljuk össze az eddig elért eredményeket, kiegészítve néhány új alkalmazási példával. A feladatkör az érintkezési problémákon belül az optimalizáláshoz, a kopási folyamatok vizsgálatához tartozik. Érintkezési optimalizációs feladatokat foglalják össze Haslinger és Neittaanmaki matematikai igényességgel tárgyalt könyve [1], Hilding és társainak [2] áttekintő cikke, Páczelt [3], Páczelt és Baksa [4] különféle optimalizációs feladatok megoldását elemző munkái.

A kopási folyamatok elemzését a peremérték feladatok pontos megoldásaival Goryacheva és Dobuchin [5] foglalja össze korábbi könyvében ill. Soldatenkov [6] könyve jelent fontos forrást a téma iránt érdeklődőknek.

Érintkezési feladatokkal foglalkozó nagyszámú munka közül a numerikus technikát is alkalmazó Johnson [7], Kalker [8], Laursen [9] és Wriggers [10] által írt könyvek emelendők ki.

A jelen tanulmány 1. fejezete az érintkezési feltételekkel, a relatív sebesség definíciójával, az alkalmazott módosított Archard törvénnyel [11] foglalkozik. Ezek után kerül sor a 2. fejezetben speciális esetek vizsgálatára. Itt külön vizsgáljuk a síkfelületű érintkezési tartományok esetét különböző merevtestszerű elmozdulásoknál, majd a görbült érintkezési felületekhez tartozó pofás fők elemzésére kerül sor. Kiemelt szerepe van a mérnöki gyakorlatban a forgástesteknek, így ezeknél jelentkező kopási nyomás számítására vonatkozó összefüggések levezetésére kerül sor, különböző súrlódási modell esetén a lekopott anyagrészek mozgásával kapcsolatban. Itt is konkrét számpéldák teszik érthetőbbé az elméleti megfontolásokat. Az Appendixben pedig, néhány szerkezetre vonatkozólag, az állandósult kopásnál jelentkező érintkezési nyomás és kopási sebességre vonatkozó összefüggések kerülnek bemutatásra, illetve annak numerikus igazolása, speciális példákon keresztül, hogy az állandósult állapot létezik

1.1 Érintkezési feltételek

Az [12-16] munkáinkat követve, két rugalmas testből B_α ($\alpha=1,2$) felépített rendszer érintkezési feladatát fogjuk vizsgálni. Az esetek döntő többségében feltételezzük, hogy a B_1 test csak a kopás következtében fog kismértékű merevtestszerű mozgást végezni, míg a testek közötti nagymértékű relatív mozgást a B_2 mozgása fogja okozni. A testek felületének $S_i^{(\alpha)}$ részén a $t_o^{(\alpha)}$ terhelés működik, míg az $S_u^{(\alpha)}$ felületrészen adott az $u_o^{(\alpha)}$ elmozdulás. Az S_c felületen jöhet létre az egyoldalú kapcsolatú érintkezés. A felület normálisát $n^{(\alpha)}$ jelöli. A közel azonos érintkezési felületek miatt a felületen lévő pontokat az $n_c = n^{(1)}$ normális mentén párba állítjuk. Ezen normális az érintkezési normálisnak fogjuk nevezni. Az érintkezési normál feszültség $\sigma_n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)} \cdot \sigma^{(\alpha)} \cdot n^{(\alpha)}$, amiből a nyomás $p_n = -\sigma_n^{(1)} = -\sigma_n^{(2)}$. A rugalmas elmozdulás normális és tangenciális irányban az érintkezési felületen $u_{e,n}^{(\alpha)}$ és $u_{e,\tau}^{(\alpha)}$, míg ezek sebessége $\dot{u}_{e,n}^{(\alpha)}$ és $\dot{u}_{e,\tau}^{(\alpha)}$. A merevtestszerű elmozdulásokat jelölje rendre $u_{R,n}^{(\alpha)}$ és $u_{R,\tau}^{(\alpha)}$, míg sebességüket $\dot{u}_{R,n}^{(\alpha)}$ és $\dot{u}_{R,\tau}^{(\alpha)}$. Az $n_c = n^{(1)}$ normális irányába eső elmozdulást röviden normál elmozdulásnak fogjuk nevezni: $u_n^{(\alpha)} = u^{(\alpha)} \cdot n_c$, a kezdeti hézagot jelölje g . A terhelés felvitele után az alakváltozás következtében kialakuló, az érintkező testek közötti normális irányba eső hézagot $d = u_n^{(2)} - u_n^{(1)} + g$ összefüggéssel számolhatjuk. Az egyoldalú kapcsolatokból adódóan normális irányában állnak az un. Signorini feltételek:

$$d \geq 0, \quad p_n \geq 0, \quad d p_n = 0 \quad x \in S_c. \quad (1)$$

A száraz súrlódást jellemző Coulomb-féle törvény és a nem asszociációs csúszási feltételek értelmében

$$\begin{aligned} f &= \|\tau_n\| - \mu p_n \leq 0, \\ \tau_n &= \mu p_n \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|}, \quad \text{ha } \dot{u}_\tau \neq 0, \quad x \in S_{\text{slip}} \\ \|\dot{u}_\tau\| &\geq 0, \quad f \leq 0, \quad \|\dot{u}_\tau\| f = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ahol $\tau_n = \tau_n^{(1)} = -\tau_n^{(2)} = \sigma^{(1)} \cdot n_c + p_n n_c$ az érintkezési felületen fellépő csúsztató feszültség, μ a súrlódási tényező, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_\tau^{(2)} - \dot{u}_\tau^{(1)}$ pedig a relatív érintőleges sebesség. $f = 0$ a csúszási felületet jelöli ki, míg az f negatív értéke a tapadási feltételhez tartozik.

Az érintkezési feladatok végelelemes tárgyalásával, megoldási módszerek, algoritmusok ismertetésével bővebben Laursen [9] és Wriggers [10] munkáiban találkozhatunk.

1.2 Relatív sebesség

Az érintőleges relatív csúszási sebesség két részből áll, a rugalmas elmozdulásból és a merevtestszerű mozgásból:

$$\dot{u}_\tau = \dot{u}_{e,\tau}^{(2)} + \dot{u}_{R,\tau}^{(2)} - (\dot{u}_{e,\tau}^{(1)} + \dot{u}_{R,\tau}^{(1)}) = \dot{u}_{e,\tau} + \dot{u}_{R,\tau}. \quad (3)$$

Maga a merevtestszerű sebesség két összetevővel rendelkezik. Egyik a tangenciális, másik a normális:

$$\dot{u}_{R,\tau} = \dot{u}_{R,\tau}^{(s)} + \dot{u}_{R,\tau}^{(w)}, \quad \dot{u}_{R,n} = \dot{u}_{R,n}^{(w)} \quad (4)$$

Itt a felső w index a kopásból származó mennyiségekre utal. Az s index a szerkezet működéséből, a merev testszerű mozgásból származó, előzetesen ismert un. *Csúszási sebességre* fog utalni. Tehát a két test egymáshoz képesti merevtestszerű mozgásából származó csúszási sebessége

$$\dot{u}_{R,\tau}^{(s)} = \dot{u}_R^{(s)} + \Omega_R^{(s)} \times \Delta r, \quad (5)$$

alakban számolható, ahol $\Delta \mathbf{r}$ a koordináta rendszer C_0 pontjából induló helyvektor, $\dot{\mathbf{u}}_R^{(s)}$, $\boldsymbol{\Omega}_R^{(s)}$ a testek közötti relatív eltolódási sebesség és forgási szögsebesség, amelyek természetesen a peremfeltételek által meghatározottak és adottak.
A másik fajta relatív sebesség a *kopási sebesség*, ami a merevtestszerű mozgásból származik, normális és tangenciális összetevővel rendelkezik.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{R,n}^{(w)} &= (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_c, \\ \dot{\mathbf{u}}_{R,\tau}^{(w)} &= (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}) - \dot{\mathbf{u}}_{R,n}^{(w)} \mathbf{n}_c\end{aligned}\quad (6)$$

Itt $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F$ és $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M$ a kopás által generált, a relatív merevtestszerű mozgásból származó sebességek, amelyek előzetesen nem ismertek, azokat a peremérték-feladat megoldása fogja szolgáltatni.

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban nagymértékű csúszásoknál fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$\|\dot{\mathbf{u}}_{R,\tau}^{(w)}\| \ll \|\dot{\mathbf{u}}_{R,\tau}^{(s)}\| \quad (7)$$

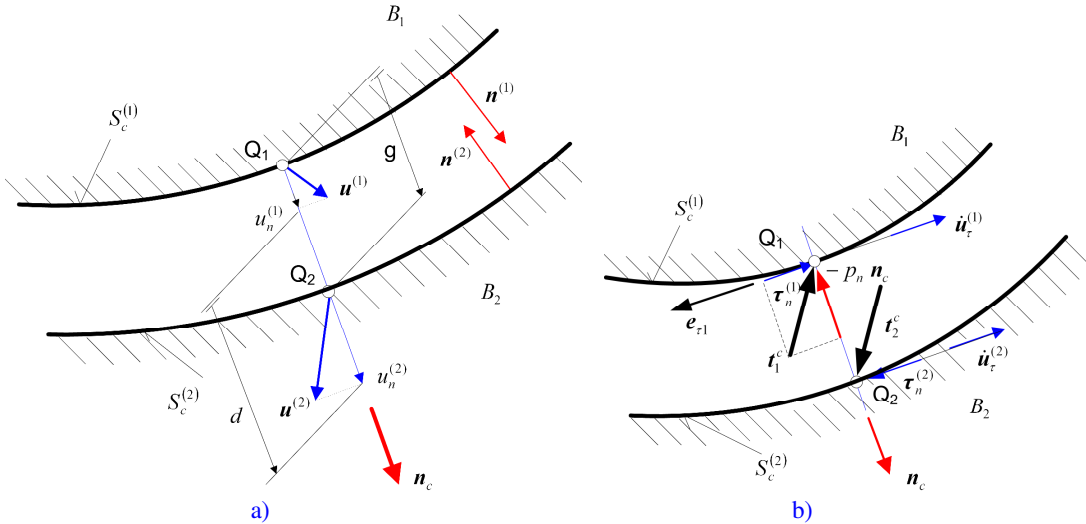
(Peródikus mozgásoknál, Fretting problémáknál ez már nem érvényes.)

Mivel a jelen tanulmányban nagymértékű relatív csúszásokat fogunk csak vizsgálni, amikor is a rugalmas relatív sebesség jóval kisebb a merevtestszerű sebességekhez képest, állnak az alábbiak

$$\|\dot{\mathbf{u}}_{e,\tau}\| \ll \|\dot{\mathbf{u}}_{R,\tau}\|, \quad \|\dot{\mathbf{u}}_{e,\tau}\| = v_r \quad (8)$$

vagyis a kopások analízisében a kopási törvényben szereplő, az érintkezési felület pontjában fellépő relatív sebességet egyenlőnek fogjuk venni a merevtestszerű mozgásából származó relatív csúszási sebességgel

$$\|\dot{\mathbf{u}}_{e,\tau}\| \equiv \|\dot{\mathbf{u}}_{R,\tau}^{(s)}\| = v_r.$$



1. ábra. Két test érintkezése: a) az $u_n^{(a)}$ normál elmozdulás és a kezdeti g hézag értelmezése, b) tangenciális sebességek: $\dot{\mathbf{u}}_{\tau}^{(2)}$, $\dot{\mathbf{u}}_{\tau}^{(1)}$ és az érintkezési feszültség: $t_1^c = -t_2^c$.

1.3 Kopási törvény

A kopás időbeli megváltozását különböző törvények jellemzik. Ezek közül kiemelkedik, egyszerűségével az un. Archard törvény [11], amely szerint a felület normálisánál irányában a lekopott rétegváltozásnak a sebessége arányos a testek között kialakult relatív sebességgel, az érintkezési nyomással, továbbá a kopási kísérletekből nyert, a felületi érdességtől, keménységtől függő anyagállandóval. Ezt a törvényt általánosítva, a vizsgálatainkban az alábbi törvényt fogjuk felhasználni. Feltételezésünk értelmében az érintkezési felület normális irányú megváltozását a következő izotróp kopási törvény írja le [12,13]

$$\dot{w}_{i,n} = \beta_i(\tau_n)^{b_i} \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|^{a_i} = \beta_i(\mu p_n)^{b_i} \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|^{a_i} = \beta_i(\mu p_n)^{b_i} v_r^{a_i} = \tilde{\beta}_i p_n^{b_i} v_r^{a_i}, \quad i=1,2 \quad (9)$$

ahol a kísérletekből nyert kopási anyagállandók β_i, a_i, b_i a kopási sebességet jellemzik, $\tilde{\beta}_i = \beta_i \mu^{b_i}$, p_n, τ_n - az érintkezési nyomást és az érintőleges feszültséget jelöli, μ - a súrlódási tényező az elcsúszási irányban, $v_r = \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|$ - a két test közötti relatív sebesség.

Általános esetben a kopást kopási vektorral jellemezhetjük [14]. A kopási vektort az érintkező testek közötti relatív merevtestszerű mozgás határozza meg. A kopási vektor $\dot{\mathbf{w}}_R$ a felület transzformálását és lekopott anyag tangenciális irányú mozgását jellemzi.

A B_1 és a B_2 test közötti érintkezési feszültséget a következő összefüggés

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{t}_1^c = -\mathbf{t}_2^c = -p_n (\mathbf{n}_c \pm \mu \mathbf{e}_{\tau 1}) - \mu_d p_n \mathbf{e}_{\tau 2} = -p_n \boldsymbol{\rho}_c^{\pm} \quad (10)$$

írja le, ahol μ_d - a keresztirányú kopási sebesség irányhoz tartozó súrlódási tényező. Az $\mathbf{e}_{\tau 1}, \mathbf{e}_{\tau 2}, \mathbf{n}_c$ vektorok kísérő triédert alkotnak az S_c kontaktfelületen (lásd 2. ábra). Itt \mathbf{n}_c a B_1 test érintkezési normálisa, $\mathbf{e}_{\tau 1}$ - a relatív sebességgel egybeeső érintősíkba eső egységvektor, $\mathbf{e}_{\tau 2}$ - a keresztirányú érintővektor.

Azonos irányítottság alapvető szabálya alapján [14,15] a kopási vektor sebessége $\dot{\mathbf{w}}_R$ párhuzamos a merevtestszerű kopási sebességgel

$$\dot{\mathbf{w}}_R = \dot{\mathbf{w}}_R \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{e}_R = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_R}{\|\dot{\boldsymbol{\lambda}}_R\|} = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}}{\|\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}\|} \quad (11)$$

ahol $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F$ és $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M$ - kopás által keletkezett merevtestszerű eltolódás és forgás sebessége, $\Delta \mathbf{r}$ - C_0 ponthoz viszonyított helyvektor.

A 2. ábra alapján a normális és tangenciális irányú kopási sebességek

$$\dot{w}_n = \dot{w}_R \cos \chi, \quad \dot{w}_\tau = \dot{w}_R \sin \chi = \dot{w}_n \tan \chi, \quad (12a)$$

ahol χ az \mathbf{n}_c és \mathbf{e}_R közötti szög. Továbbá

$$\dot{w}_{\tau 1} = w_R \sin \chi \cos \chi_1, \quad \dot{w}_{\tau 2} = w_R \sin \chi \sin \chi_1 \quad (12b)$$

ahol a χ_1 szög az S_c -re vetített $\dot{\mathbf{w}}_R$ és $\mathbf{e}_{\tau 1}$ közötti szögnek felel meg.

Fel fogjuk tételezni, hogy az S_c (mérete) időben nem változik. Az 1-es test az álló bélyegnek, a 2-es test a mozgó testnek fog megfelelni, vagyis állandósult állapotban az 1-es test feszültségállapota időben nem változik, míg a 2-es testben az a szállítósebességgel mozog.

1.4 Minimalizálendő funkcionálok, érintkezési nyomás

Az [12,13] -ban három funkcionál nyert bevezetést.

$$1. \text{ az általánosított kopási térfogat sebessége} \quad \dot{W}^{(q)} = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{S_c} (\dot{w}_{i,n})^q dS \right)^{1/q}, \quad (13a)$$

$$2. \text{ az általánosított súrlódási teljesítmény} \quad D_F^{(q)} = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{S_c} (\mu p_n v_r)^q dS \right)^{1/q}, \quad (13b)$$

$$3. \text{ az általánosított kopási disszipációs teljesítmény} \quad D_w^{(q)} = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{S_c} (\mathbf{t}_i^c \cdot \dot{\mathbf{w}}_i)^q dS \right), \quad (13c)$$

először egy [12], majd két test [13, 14] vonatkozásában. Itt a q tényező nagyobb, mint zérus.

A vizsgálatok azt mutatták ki, hogy az időben nem változó un. állandósult kopást - speciális esetet kivéve - csak a kopási disszipációs teljesítmény minimalizálásával lehet elérni $q=1$ -nél. A kopási térfogat sebességének minimalizálása nem írja le az állandósult állapotot, az állandósult állapotban a kopási térfogat sebessége nagyobb, mint az 1. alatti minimalizálásnál kapott érték.

Tehát az előzetes vizsgálataink szerint [14,15], a következő általánosított kopási disszipációs teljesítményt kell minimalizálni

$$D_w^{(q)} = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{S_c} (\mathbf{t}_i^c \cdot \dot{\mathbf{w}}_i)^q dS \right) \quad , \quad (14)$$

az 1-es testre vonatkozó egyensúlyi egyenletekkel, mint mellékfeltételekkel

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= - \int_{S_c} \boldsymbol{\rho}_c^+ p_n dS + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{m} &= - \int_{S_c} \Delta \mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho}_c^+ p_n dS + \mathbf{m}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

ahol \mathbf{f}_0 és \mathbf{m}_0 a B_1 testre ható külső terhelés redukált vektorkettősének erő és nyomaték vektora.

Bevezetve a $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F$ és $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M$ Lagrange –féle multiplikátorokat, az optimalizációs feladathoz az alábbi Lagrange-féle funkcionál rendelhető a $b = b_1 = b_2$ paraméterek egyenlősége mellett

$$L_{D_w}^{(q)} = L_{D_w}^{(q)}(p_n, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_F, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M) = D_w^{(q)}(p_n) + (b+1)(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F \cdot \mathbf{f} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \cdot \mathbf{m}) \quad (16)$$

Kielégítve a (16) -ból nyert $\delta_{p_n} L_{D_w}^{(q)} = 0$ stacionaritási feltételt, a kontaktnyomásra nyerjük, hogy

$$p_n = \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+ + (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+}{\left[(\tilde{\beta}_1 v_r^{a_1})^q C_1^{\frac{1-q}{q}} + (\tilde{\beta}_2 v_r^{a_2})^q C_2^{\frac{1-q}{q}} \right]} (1 \mp \mu \tan \chi \cos \chi_1 - \mu_d \tan \chi \sin \chi_1)^{-q} \right)^{\frac{1}{(b+1)q-1}} \quad (17a)$$

illetve a $\delta_{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M} L_{D_w}^{(q)} = 0$ feltételekből a (15) alatti egyensúlyi egyenletekhez jutunk.

$q=1$ esetén az állandósult (stacioner) kopási folyamatra vonatkozó érintkezési nyomás vezethető le

$$p_n = \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+ + (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+}{\left[(\tilde{\beta}_1 v_r^{a_1}) + (\tilde{\beta}_2 v_r^{a_2}) \right]} (1 \mp \mu \tan \chi \cos \chi_1 - \mu_d \tan \chi \sin \chi_1)^{-1} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (17b)$$

A $K = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}$, $Q = 1 \mp \mu \tan \chi \cos \chi_1 - \mu_d \tan \chi \sin \chi$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F}{K}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M = \frac{\dot{\boldsymbol{\lambda}}_M}{K}$ mennyiségek bevezetésével a nyomás

$$p_n = \left((\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+ + (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M \times \Delta \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_c^+) \frac{1}{Q} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (17c)$$

alakban írható fel. Látható, hogy a nyomás $p_n = p_n(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M)$ és az egyensúlyi egyenletek $\mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M) = \mathbf{0}$,

$\mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M) = \mathbf{0}$ csak a $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M$ függvényei. Ez azt jelenti, hogy az egyensúlyi egyenletből nyert $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_F, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_M$ nem

függvénye a K -nak, vagyis a nyomás megoszlása nem függ a $\tilde{\beta}_i, a_i, i=1,2$ kopási paraméterektől és a relatív

v_r sebességtől. Természetesen a $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_F, \dot{\boldsymbol{\lambda}}_M$ merevtestszerű kopási vektorok, a K -n keresztül, már függvényei az

említett paramétereknek: $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{F,M} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{F,M} K$. A (17) alapján úgyszintén látható, hogy a nyomás erősen függ a b paramétertől és a μ súrlódási tényezőtől.

Megjegyzendő a (15),(17) egyenletrendszer erősen nemlineáris, megoldására a Newton-Raphson módszer javasolt. A (16) minimalizálásánál feltételeztük, hogy a nyomás az S_c tartomány minden pontjában pozitív, tehát az S_c nem csak a szóba jöhető érintkezési tartományt jelöli ki, hanem egyúttal a ténylegest is.

Megjegyzések 1:

1. Általános esetben $q > 0$. A [13,14]-ben számos konkrét esetben vizsgáljuk a q paraméter hatását,

kitérve a szingularitást adó esetekre is, amikor bizonyos helyeken igen nagy érintkezési nyomás lép fel erőteljes kopást okozva.

2. [13]-ban nyert bizonyítást, hogy az állandósult (időben nem változó kopási feltételek) kopáshoz a $b = b_1 = b_2$ feltételnek fenn kell állnia.

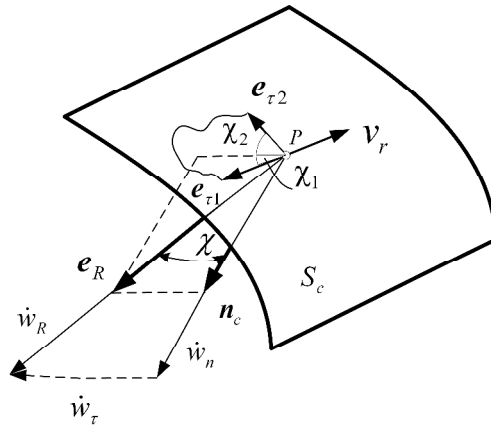
3. Állandósult kopásról csak akkor beszélünk, ha az érintkezési tartomány (S_c kiterjedése) időben nem változik, továbbá a merevtestszerű kopási sebességek $\dot{\lambda}_F$ és $\dot{\lambda}_M$ vektorai állandóak. Ez azzal jár, hogy feszültségállapot időben változatlan. Tehát a gépek bejáratási időszakának végén kialakuló kopás, csak akkor lesz állandósult kopás, ha a $\dot{\lambda}_F$ és $\dot{\lambda}_M$ vektorok időben állandóak, azaz nem fognak megváltozni.

4. Az elmélet fontossága abban áll, hogy az állandósult állapothoz tartozó nyomás anélkül meghatározható, hogy a (9) alatti kopási törvényt időben integráltuk volna.

5. Mivel az érintkezési nyomás ismert, a Coulomb-féle törvény értelmében a csúsztató feszültség is az lesz. A kiszámolt érintkezési feszültséget, mint ismert terhelést működtetve a szerkezeti elemekre, az optimális nyomáshoz tartozó kezdeti hézag már könnyen meghatározható [3,4,12]. A számítás elvégezhetősége érdekében a B_1 test merevtestszerű mozgása miatt, a szétszedett rendszer különálló terhelési vizsgálatánál a B_1 testet nagymerevségű rúgókkal „fiktíven” meg kell támasztani, hogy a merevségi mátrix szingularitását elkerüljük.

6. A kezdeti hézagot abból a feltételből határozzuk meg, hogy az alakváltozás után kialakuló rés legyen zérus: $d = u_n^{(2)} - u_n^{(1)} + g = 0$. Ebből a szakadás mértéke $[u_n] = u_n^{(1)} - u_n^{(2)}$. Megkeresve a legkisebb értéket $\min[u_n] = \min(u_n^{(1)} - u_n^{(2)})$, a hézagot oly módon állítjuk be, hogy a minimális helyen legyen a hézag zérus: $g^0 = [u_n] - \min[u_n]$. Az 1-es test alakját meghatározó függvény első közelítésben $g^{(1),0} = g^0 - g^{(2)}$. Itt feltételezzük, hogy a kopásból következő $g^{(2)} \geq 0$ hézag meghatározható. A $g^{(1),0}$ minimumát megkeresve $g^{(1),0}_{\min} = \min g^{(1),0}$, beállítható olyan alak, aminél az érintkezési tartomány egy pontjában, nevezetesen a $g^{(1),0}_{\min}$ pontban a hézag zérus lesz: $g^{(1)} = g^{(1),0} - g^{(1),0}_{\min}$. Ily módon a teljes hézag $g = g^{(1)} + g^{(2)}$, ahol $g = g^0 - g^{(1),0}_{\min}$. Állandósult kopáshoz tartozó optimális nyomás csak akkor lesz azonos a kopási disszipációs teljesítmény minimumához tartozóval, ha fenn tud állni a $g^{(1)} \geq 0$ egyenlőtlenség.

Ha a kopási folyamatban csak az egyik test, nevezetesen csak a 2-es test kopik, és ez előre kiszámolható, legyen ez $g^{(2)}$, akkor az optimális nyomáeloszlás csak akkor valósul meg, ha $g^{(1)} = 0$, azaz $g = g^{(2)}$ fennáll. (Itt g az optimális megoldáshoz tartozó érintkezési feszültségnél meghatározott teljes hézag). Ez általában nem áll fenn. Ekkor, ha az állandósult kopás egyéb feltételei léteznek, akkor a kopás a peremértékfeladat megoldásából nyert, szingularitást is tartalmazó nyomásmegoszlás mellett fog végbemenni. Erre fogunk példát látni az Appendix B-ben.



2. ábra. Az S_c felületen értelmezett koordinárendszer, kopási sebességek, azonos irányítottság elve a \dot{w}_R és e_R vektorokkal.

2. HŐVEZETÉSI PROBLÉMA

2.1 Alapvető összefüggések

Ezek után vizsgáljuk a kopási feladatot az érintkezési felületen keletkező súrlódási hőfejlődés mellett. A vizsgált hőtani-rugalmasságtani kapcsolt problémában a hőfejlődésből származó elmozdulások jelentősen befolyásolják a testek elmozdulását, feszültségállapotát, és ezzel az állandósult állapothoz tartozó kopási alakot

is. Nagyon fontos, hogy az állandósult kopásnál jelentkező érintkezési feszültséget, a hődilatáció, azonban nem folyásolja be.

Megjegyzendő, nagy csúszási sebességnél a kapcsolt problémánál instabil jelenségek lépnek fel az érdekes csúcspontnál jelentkező helyi erős felmelegedés miatt (hot spots). Ezek vizsgálatával találkozhatunk a következő cikkekben Anderson és Knapp [17], Barber [18-20], Lee és Barber [21], Thuresson [22,23], Geijselaers és Koning [24], Ciavarella és társai [25]. Tranziens hőtani analízist dinamikai mechanikai vizsgálatokkal kombinálják Linck és társai [26] a hőtani instabilitás meghatározására.

Zagrodzki [27] cikkében a tranziens és állandósult hővezetési feladatot oldja meg csúszási érintkezési feladatoknál tengelyszimmetrikus fékek vonatkozásában. Choi és Lee [28,29] végelem modellt fejleszt ki tárcsafékre, tengelyszimmetrikus esetben vizsgálva a hőinstabilitás körülményeit a kopás hatásának figyelemkívüli hagyásával. Az instabilitással kapcsolatban további munkák találhatók a [30-39] munkák alatt.

Hőrugalmasságtani érintkezési és kopási feladattal találkozunk végelem-módszer felhasználásával Johansson és Klarbring [40], Wriggers és Miehe [41], Zavarise és társai [42], Strömberg [43], Páczelt és Pere [44], Pantuso és társai [45], Iremán és társai [46], Yi [47] munkáiban. Analitikus megoldással találkozunk Yevtushenko és Ivanyuk [48] munkájában. A mozgó hőforrás számítási lehetőségeiről add jó áttekintést Laraqi munkája [49].

A tranziens hőmérséklet lefutását az un. Peclet szám jellemzi. Amikor a Peclet szám egy kritikus értéket meghalad, akkor a klasszikus végelelemes technikák felmondják a szolgálatot, a valóságos viszonyok helyett oszcillációval rendelkező megoldást adnak pl. Floquet és Dubourg [50]. Floquet és Dubourg [50, 51] egy hibrid módszert javasol kombinálva a gyors Fourier transzformációt és a végelem-módszer tengelyszimmetrikus mozgó hőforrás estére. Gao és társai [52,53] -ban egy új analitikus megoldást javasolnak változó sebességgel mozgó hőforrásra, Váradí és társai [54] szerint, ha a $Pe \geq 0.5$, akkor a probléma nagy sebességű csúszási feladatot jelent és ehhez a tranziens (időben lefutó folyamatot szimuláló) végelem-módszert kell használni.

Végezetül fontos megemlíteni, hogy Bogdanovich és Tkachuk [55] igen alapos áttekintő, elemző munkájukban - 92 hivatkozást megemlítve - a hőtani-mechanikai problémák kezelésének történetét foglalják össze, kezdve Blok [56] klasszikus munkájától napjainkig.

Az irodalomban számos munka foglalkozik hőtani-rugalmas-képlékeny érintkezési feladatokkal. Itt csak néhány alapvető munkára hívnánk fel a figyelmet. Chen és Wang [57] munkájában egy fél tér csúszik egy gömb felett, amelyet a gyors Fourier féle transzformációval és konjugált gradiens módszerrel oldottak meg. A szimuláció során a gömb hőmérséklettől függő rugalmas-képlékeny, míg a féltér rugalmas anyagúnak tekintett. Ye és Komvopoulos [58] 3D-s feladatát vizsgálja annak az esetnek, amikor egy rugalmas gömb végez csúszó mozgást a rugalmas-képlékeny többretegű féltér felett. Összehasonlítják az eredményeket homogén féltérnél kapottakkal a feszültségek és a hőmérsékletmező vonatkozásában. Vizsgálják a rétegek vastagságának, a csúszási sebességnek és a hővezető képességnek a hatását a feszültségkoncentrációra.

Ibrahimbegovic [59, 60] -ban az érintkezési feladatokat plasztikus alakváltozással tárgyalja az akadozó-csúszás lehetősége mellett. [61]-ban a fentiekén túl a súrlódási tényező a csúszási sebesség függvénye. Mivel a jelen vizsgálatainkban csak az állandósult csúszást vizsgáljuk, ily módon az akadozó-csúszás nem lesz a vizsgálat tárgya. Az akadozó-csúszás egy periódikusan visszatérő jelenség, amivel egy új típusú kvázi-állandó kopás jelenségének leírása fogalmazható meg.

Ezek után foglaljuk össze a hővezetéssel kapcsolatos alapvető egyenleteket.

A Fourier-féle hővezetés alapvető egyenletei [62,63]

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho c \dot{\theta}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla \theta, \quad (18)$$

ahol ∇ - a nabla deriválási operator, \mathbf{q} - a hőfluxus vektor, θ - a hőmérsékletmező, ρ - a sűrűség, c - a fajhő és \mathbf{K} -a hővezetési állandókat magában foglaló tenzor.
A hőátadás során a testbe áramló hőfluxus

$$\bar{q}^{(i)} = h_c^{(i)} (\theta_a - \theta^{(i)}) \quad i=1,2 \quad \mathbf{x} \in S_q^{(i)} \quad (19)$$

ahol $h_c^{(i)}$ a hőátadási tényező, θ_a - a környezet hőmérséklete.

A súrlódási hővesztés az érintkező testek között adott hőforrásnak tekinthető

$$q_F = \tau_n v_r = \mu p_n v_r \quad (20)$$

amely a két test és a forgács (kopadék) között oszlik szét, vagyis

$$q^d = \gamma^d q_F, \quad \hat{q}_F = q_F - q^d = \gamma^d q_F \quad \mathbf{x} \in S_c$$

Itt $\gamma^d = 1 - \gamma^d$ és $0 < \gamma^d < 1$ a lekopott részekenél jelentkező hőpartíciós tényezők. Ismételt hangsúlyozzuk, hogy a hőfluxust a $-\mathbf{n}^{(i)}$, $i=1,2$ normális irányában tekintjük pozitívnak. Tökéletes érintkezést feltételezve az $S_c^{(1)}, S_c^{(2)}$ felületeken a hőmérséklet különbség elhanyagolható és így állnak

$$\hat{q}_F^{(1)} + \hat{q}_F^{(2)} = \hat{q}_F, \quad \theta^{(1)} = \theta^{(2)} \quad \mathbf{x} \in S_c \quad (21)$$

egyenletek, ahol $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ - az 1-es és 2-es testek S_c felületén lévő hőmérsékletei. Ebben az esetben a hőpartíció (a hőfluxus megoszlása testek között) egyszerűen $\hat{q}_F^{(i)} = \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \nabla \theta^{(i)}$, $i=1,2$ összefüggés révén számolható. Különböző hőmérsékletet a testek közötti ún. harmadik test (lekopott anyagból összeálló vékony réteg) okozza. Ekkor a testekbe beáramló hőfluxus

$$q_c^{(1)} = (1 - \hat{\alpha}) \hat{q}_F - \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}), \quad q_c^{(2)} = \hat{\alpha} \hat{q}_F - \hat{h}_c (\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) \quad \mathbf{x} \in S_c \quad (22)$$

amelyben az $\hat{\alpha}$ -ra és a \hat{h}_c -ra vonatkozólag [45,64] ben különböző javaslattal élnek, $0 \leq \hat{\alpha} \leq 1$. Ekkor \hat{h}_c a nyomástól függ, továbbá, $\hat{q}_F^{(1)} + \hat{q}_F^{(2)} = \hat{q}_F$.

Számításainkban a (21) alatti feltétellel fogunk élni, az anyagállandók a hőmérséklettől, nem fognak függni. Állandósult állapotban a B_1 test (bélyeg) áll, a hőmérséklet mező nem változik, míg a B_2 test v_r sebességgel haladó mozgást végez. Ekkor a hőmérsékletmezők időszerinti deriváltjai

$$\dot{\theta}^{(1)} = 0, \quad \dot{\theta}^{(2)} = (\theta^{(2)} \nabla) \cdot \mathbf{v}_r, \quad (23)$$

A kapcsolt hőtani-rugalmasságtani problémát ún. operátor felbontási technikával oldjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a mechanikai és hővezetési feladatot, egymást követően, egyikben a hőmérséklet mező, a másikban a mechanikai mezők lerögzített értékei ismeretében oldjuk meg, természetesen iterációs folyamat révén. Ha egy időben lejátszódó kopási folyamatot szeretnénk végigkövetni, akkor a kopás hatását a kopási törvény (9) időintegrálásával határozzuk meg.

2.2 Kopási törvény integrálása

Jelölje az s dik és az $s+1$ -dik időlépésben kapott érintkezési nyomást $p_{n,s}$ és $p_{n,s+1}$. Hasonlóan a kopás értékei w_s és w_{s+1} , a relatív sebesség $v_{r,s}$ és $v_{r,s+1}$ és a kialakult hézag g_s és g_{s+1} .

A (9) alatti kopási törvény időbeli integrálására az alábbi sémát használjuk

$$w_{s+1} = \sum_{i=1}^2 \left\{ w_{i,s} + \Delta t \tilde{\beta}_i (v_{r,s} (1 - \gamma) + v_{r,s+1} \gamma)^{a_i} (p_{n,s} (1 - \gamma) + p_{n,s+1} \gamma)^{b_i} \right\} \quad (24)$$

ahol Δt az időlépés, $0 \leq \gamma \leq 1$. Mivel a (24)-ben az $s+1$ -dik időlépésbeli $p_{n,s+1}$ nyomás és $v_{r,s+1}$ relatív sebesség szerepel a w_{s+1} kopás csak iterációval kapható meg. Jelölje

$$v_r^{(j)} = v_{r,s} (1 - \gamma) + v_{r,s+1} \gamma, \quad p_n^{(j)} = p_{n,s} (1 - \gamma) + p_{n,s+1} \gamma \quad (25)$$

és így az $s+1$ időpillanatban a j -dik iterációban a kopás mértéke

$$w_{s+1}^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \left\{ w_{i,s} + \Delta t \tilde{\beta}_i (v_r^{(j)})^{a_i} (p_n^{(j)})^{b_i} \right\} \quad (26)$$

A kérdéses j típusú iterációs folyamat addig ismétlődik, míg a következő konvergencia feltétel nem teljesül, azaz

$$e_w = 100 \left| \int_{S_c} (g_s + w_{s+1}^{(j)}) dS - \int_{S_c} (g_s + w_{s+1}^{(j-1)}) dS \right| / \int_{S_c} (g_s + w_{s+1}^{(j-1)}) dS \leq 0.01 = \tau_w \quad (27)$$

Itt g_s az $s+1$ -dik lépés megkezdésekor kialakult rés. Ebben az időlépésben $j=1$ nél $w_{s+1}^{(0)}=0$, továbbá az érintkezési feladat megoldása $p_{n,s+1}^{(1)}, v_{r,s+1}^{(1)}$. A kopási folyamat szimulálásnak a kezdetén $s=0$ és

$$w_0 = \sum_{i=1}^2 w_{i,0} = 0, \text{ a nyomás } p_{n,0}, \text{ a relatív sebesség } v_{r,0}, \text{ továbbá } p_{n,1}^{(0)} = p_{n,0}.$$

Megjegyzés: A (27) alatti egyenlőtlenség egy jó korlát a j - típusú iteráció befejezésére. Tételezzük fel, hogy a kezdeti hézag zérus, a kopás 10^{-3} -os nagyságrenddel bír. A $w_{s+1}^{(j)}$ és $w_{s+1}^{(j-1)}$ közötti különbség 10^{-x} -es nagyságrendű. Ekkor $e_w \approx 100 \frac{10^{-x}}{10^{-3}} = 10^{-x+5} \leq 0.01$, amiből $x=-7$, vagyis az iteráció akkor nyer befejezést, amikor a hézag változása kisebb mint az eredeti 10^{-4} -szerese.

1. Időlépés $s=0,1,\dots$

2. Hőmérsékleti iteráció $f=1,2,\dots$

3. Kopási iteráció $j=1,2,\dots$

4. Érintkezési iteráció $k=1,2,\dots$

Érintkezési feladat megoldása adott geometriánál:

p_n érintkezési nyomás, feszültségek, érintkezési tartomány,
adhézió-csúszási zónák

a háló modifikálása konvergencia kritériumokat betartva pl. [66]

ha $e_c = e_c(t^c) \leq \tau_c$ teljesül, akkor lépés 3-ra.

k ciklus vége

Új érintkezési feszültségek számítása,

Relatív sebesség, kopás, új alak: $p_n^{(j)}, t_{s+1}^c, v_r^{(j)}, w_{s+1}^{(j)}$

ha $e_w \leq \tau_w$ teljesül, akkor lépés 2-re.

j ciklus vége

A t_s időponthoz tartozó hőmérsékletmező transzformálása az új hálóra, pl. [69]

Hőmérsékletmező meghatározása $\theta_{s+1} = \theta_{s+1}(x, t_{s+1})$ a (34, 37, 38) diszkretizált egyenletből

Konvergencia ellenőrzése: $e_\theta = 100 \left\| \theta_{s+1}^{(f)} - \theta_{s+1}^{(f-1)} \right\| / \left\| \theta_{s+1}^{(f)} \right\| \leq \tau_\theta$, ha teljesül lépés 1-re.

f ciklus vége

s ciklus vége

Doboz 1: A kapcsolt hőtani-mechanikai kezdeti-peremérték feladat megoldási algoritmus

2.3 Gyenge megoldáshoz tartozó funkcionálok

A mechanikai és a hőtani mezők iterációval nyernek meghatározást felhasználva a megoldandó egyenletek nyerésére az egyensúlyi egyenlet és a hővezetési egyenlet gyenge alakját, variációs egyenletét.

Legyen ismert az s -dik időlépésben a kialakult hőmérsékletmező: $\theta_s = \theta_s(x, t)$.

Lerögzítve θ_s -t, az elmozdulásmező, az alakváltozási és feszültségi tenzormezők az $s+1$ -dik időlépéshez tartozóan nyernek majdan kiszámítást.

Az $u_{s+1}, \varepsilon_{s+1}, \sigma_{s+1}$ mezők kielégítik a rugalmas anyagot feltételező a Hooke féle anyagegyenletet

$$\sigma_{s+1}^{(j)} = D : [\varepsilon(u_{s+1}^{(j)}) - \varepsilon_{\theta,s}], \quad \varepsilon_{\theta,s} = \alpha_\theta \theta_s \mathbf{I} \quad (28)$$

ahol \mathbf{D} a rugalmas anyagállandókat tartalmazó 4-ed rendű tenzor, α_θ a fajlagos hőtágulási együttható, \mathbf{I} egységtenzor, \cdot a tenzorok kétszeres skaláris szorzást jelöli, míg \cdot a skaláris szorzás jele.

Numerikus számításainkban majdan feltételezzük, hogy a B_1 és B_2 testek homogén, izotróp rugalmas testek.

2.3.1 A virtuális munka elv szerint $i = 1, 2$ testnél áll

$$\delta M = \delta M(\mathbf{u}_{s+1}^{(j)}, \theta_s(\text{rögzített})) = \sum_i \int_{V_{s+1}^{(i)(j-1)}} \delta \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma}_{s+1}^{(j)} dV - \delta W_{s+1}^{(j)} = 0 \quad (29)$$

$$\delta W_{s+1}^{(j)} = \sum_i \left\{ \int_{S_{f,s+1}^{(i)(j-1)}} \delta \mathbf{u}_{s+1} \cdot \mathbf{t}_o dS + \int_{S_{c,s+1}^{(i)(j-1)}} \delta \mathbf{u}_{s+1} \cdot \mathbf{t}^c dS \right\} \quad (30)$$

A mechanikai mezők számításakor minden iterációs lépésben a testek térfogata, peremének alakja újra kiszámítást nyer. Mivel p -kiterjesztésű végelemeket használunk, a feszültségmező sima lefutása érdekében az érintkezési tartományon az elemek csomópontjai a tényleges érintkezési tartomány határára kell, hogy kerüljenek, pozicionálással, mozgatással, ill. a csúszási és adhéziós altartományok határán is hasonló a helyzetet kell teremteni. Ellentétes esetben ezen határpontokban (3D-s kontakt feladatnál határgörbén) a feszültségmező a polinomos közelítésből adódóan nem tud majd a megfelelő deriváltbeli szakadással rendelkezni [65-68].

Amikor a (27) -es feltételek kielégültek, a következő számítási lépés a hőmérsékletmező meghatározása. Ekkor az elmozdulásmező, alakváltozásmező, feszültségmező mindkét testben ismert, az $s+1$ beli hőmérsékletmező meghatározása ezek lerögzített értékei mellett történik. A térfogat, a felület rögzített, a j -dik típusú iteráció végét jelölje $j = m$.

2.3.2 Galjorkin elv alapján felépített variálandó funkcionál az alábbi alakot ölti

$$\begin{aligned} \delta \Gamma = \delta \Gamma(\mathbf{u}_{s+1}^{(m)}(\text{rögzített}), \theta_{s+1}) = \\ \sum_i \left\{ \int_{V_{s+1}^{(i)(m)}} \delta \theta [-\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \theta) + \rho c \dot{\theta}] dV - \int_{S_{q,s+1}^{(i)(m)}} \delta \theta [h_c^{(i)} (\theta_a - \theta) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta] dS \right\} \\ + \int_{S_c^{(1)}} \delta \theta^{(1)} [\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{K}^{(1)} \cdot \nabla \theta^{(1)} - \hat{q}_F^{(1)} + \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)})] dS \\ + \int_{S_c^{(2)}} \delta \theta^{(2)} [\mathbf{n}^{(2)} \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \nabla \theta^{(2)} - \hat{q}_F^{(2)} - \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)})] dS \\ + \int_{S_c^{(1)}} \delta \theta^{(1)} (\hat{q}_F^{(1)} + \hat{q}_F^{(2)} - \hat{q}_F) dS = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

ahol az 1-es és 2-es integralok a (18), (19) -ből származnak, a további tagok az érintkezési tartomány mentén a hőfluxusra vonatkoznak. Az alábbi deriválási szabállyal

$$(\nabla \cdot (\delta \theta \mathbf{K} \cdot \nabla \theta)) = \delta \nabla \theta \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta + \delta \theta (\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \theta)) \quad (32)$$

továbbá a Gauss integrál átalakítással a funkcionál új alakja

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \int_{V_{s+1}^{(i)(m)}} \delta \nabla \theta \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta dV + \int_{V_{s+1}^{(i)(m)}} \delta \theta \rho c \dot{\theta} dV - \int_{S_{q,s+1}^{(i)(m)}} \delta \theta h_c^{(i)} (\theta_a - \theta) dS \right\} \\ - \int_{S_{c,s+1}^{(m)}} \hat{q}_F \delta \theta^{(1)} dS + \int_{S_{c,s+1}^{(m)}} (\delta \theta^{(1)} - \delta \theta^{(2)}) \hat{q}_F^{(2)} dS + \int_{S_{c,s+1}^{(m)}} (\delta \theta^{(1)} - \delta \theta^{(2)}) \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) dS = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Ha az $S_c^{(i)}$ a hőmérsékletek azonosak, akkor $\delta \theta^{(1)} = \delta \theta^{(2)}$ és az $\int_{S_{c,s+1}^{(m)}} (\delta \theta^{(1)} - \delta \theta^{(2)}) \hat{q}_F^{(2)} dS = 0$.

A hőmérséklet azonossága büntetőparaméteres technikával biztosítható. E célból az utolsó tagot szorozzuk meg $1+999$ értékkel. Végezetül a variációs egyenletünk:

$$\sum_i \left\{ \int_{V_{s+1}^{(i),(m)}} \delta \nabla \theta \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta \, dV + \int_{V_{s+1}^{(i),(m)}} \delta \theta \rho c \dot{\theta} \, dV - \int_{S_{q,s+1}^{(i),(m)}} \delta \theta h_c^{(i)} (\theta_a - \theta) \, dS \right\} - \int_{S_{c,s+1}^{(m)}} \hat{q}_F \delta \theta^{(1)} \, dS + \int_{S_{c,s+1}^{(m)}} (\delta \theta^{(1)} - \delta \theta^{(2)}) 1000 \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}) \, dS = 0 \quad (34)$$

Az $S_c^{(i)}$ felületeken a stacionaritási feltétel

$$\hat{q}_F^{(1)} = (1 - \hat{\alpha}) \hat{q}_F = \mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{K}^{(1)} \cdot \nabla \theta^{(1)} = \hat{q}_F - 1000 \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}), \quad (35)$$

$$\hat{q}_F^{(2)} = \hat{\alpha} \hat{q}_F = \mathbf{n}^{(2)} \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \nabla \theta^{(2)} = 1000 \hat{h}_c (\theta^{(1)} - \theta^{(2)}). \quad (36)$$

összefüggéseket szolgáltatja.

Sima megoldás elérésre az alapidifferenciál egyenletet és a hőátadási feltételekkel kapcsolatos egyenletet egy modifikált próbafüggvénnyel szorozzuk meg (upwind/Petrov-Galjorkin formulations) [63, 70]. A továbbiakban ezt módosított Petrov-Galjorkin féle variációs elvnek fogjuk nevezni. A (34)-hez hozzáadott tagok:

$$+ \int_{V_{s+1}^{(i),(m)}} \delta \theta' [- (\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \theta)) + \rho c \dot{\theta}] \, d\Omega - \int_{S_{q,s+1}^{(i),(m)}} \delta \theta'' [h_c^{(i)} (\theta_a - \theta) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta] \, dS \quad (37)$$

ahol

$$\delta \theta' = f \frac{\mathbf{v}_r}{\|\mathbf{v}_r\|} \cdot \nabla \delta \theta, \quad \delta \theta'' = f_b \frac{\mathbf{v}_r}{\|\mathbf{v}_r\|} \cdot \nabla \delta \theta \quad (38)$$

és amelyben f, f_b - tényezők a sima megoldáshoz megfelelően megválasztott értékek.

A (34)-ben lévő utolsó tag a büntetőparaméteres technika miatt biztosítja az érintkezési felületeken a testek azonos hőmérsékletét $\theta^{(1)} = \theta^{(2)} \quad \mathbf{x} \in S_c$. A megválasztott büntető tag numerikus kísérleteink szerint elegendő a kérdéses feltétel betartatására. A felületek közötti hőpartíció automatikusan létrejön mindenfajta további iteráció, vagy speciális függvény alkalmazásának [71] kényszere nélkül.

A (37) ben a hővezetési egyenlet és a hőátadási peremfeltétel szerepel. Az f tényező alacsonyfokú approximációval dolgozó végelemek esetén függ az elem mértétől és az elemhez tartozó Peclet számtól. A

[70] javasolja, hogy legyen $f = \alpha_c \frac{h}{2}$, ahol $\alpha_c = \coth Pe - \frac{1}{Pe}$ és az elem Peclet száma $Pe = \frac{\|\mathbf{v}_r\| h}{2 a_d}$, amelyben

szereplő hődiffúzió mértéke $a_d = \frac{K^{(2)}}{\rho^{(2)} c^{(2)}}$, továbbá h az elem mérete a \mathbf{v}_r relatív sebesség irányában.

p -verziójú elemekre vonatkozóan nem ismeretes hasonló javaslat. Mi a számításainkban f és f_b -t oly módon választjuk meg, hogy az sima megoldáshoz vezessen.

A hőmérsékletmező a t_{s+1} időpontban a (34, 37, 38) diszkrétizálásával, az időszerinti deriválást figyelembevevő trapéz módszerek révén (pl. [63]) nyert algebrai egyenletrendszerből határozható meg.

A kapcsolt rendszer algoritmus a 1 es dobozban van összefoglalva. Állandósult kopás esetén a sémában $s=0$, az érintkezési nyomás közvetlenül (17b) –ből nyerhető. Az érintkezési tartomány rögzített, vagyis a No. 4 iteráció szükségtelen. Mivel a végelemek háló nem változik a hőmérsékletmező átszámítása is szükségtelen.

A (29) -es egyenletben az új hézagot is meghatározzuk a j típusú iteráció révén. Amikor ez teljesül $j = m$. Ez az

állapot új térfogatot, felületet jelöl ki a testek számára: $V_{s+1}^{(j),(m)}$, $S_{c,s+1}^{(m)}$. Megoldva a (34, 37, 38) egyenletet a

mechanikai feladatból kapott geometriával, az újonnan meghatározható hőmérsékletmezőt jelölje $\theta^{(f)}$. Folytatva az időlépésen belüli megoldásokat a (29) és (34, 37, 38) egyenletek megoldásainak pontosítása megszakad, ha a hőmérsékletmező kielégíti az $e_\theta = 100 \left\| \theta^{(f+1)} \right\| - \left\| \theta^{(f)} \right\| / \left\| \theta^{(f)} \right\| \leq \tau_\theta$ egyenlőtlenséget, ahol

$\left\| \theta^{(f)} \right\| = \sum_i \int_{V_{s+1}^{(i),(m)}} (\theta^{(f)})^2 \, dV$. A gyakorlatban $f = 1, 2, 3$ és $j = 1, \dots, 4 = m$.

3. SPECIÁLIS ESETEK VIZSGÁLATA

3.1 A kezdeti állapotban az érintkezési tartományok síkfelületűek

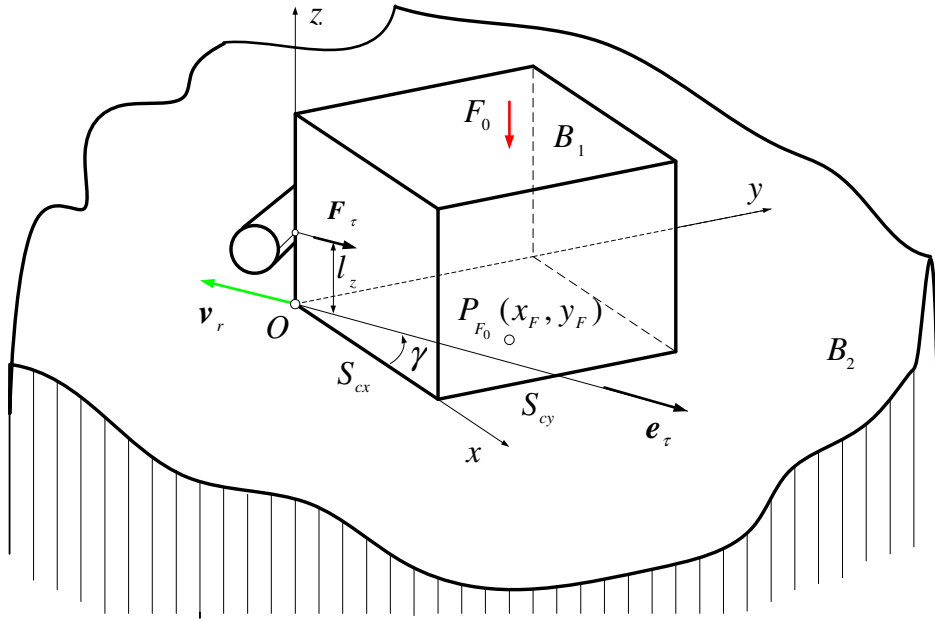
Ebben az esetben az S_c tartomány normálisa párhuzamos a z tengellyel, vagyis $\mathbf{n}_c = -\mathbf{e}_z$, továbbá $\rho_c^\pm = -\mathbf{e}_z \pm \mu \mathbf{e}_\tau$, $\chi = 0$, $q=1$.

3.1.1 A B_1 test merevtestszerű elmozdulása a z tengellyel párhuzamos

A terhelés eredője $\mathbf{f}_0 = -F_0 \mathbf{e}_z$, a merevtestszerű kopás vektora $\dot{\lambda}_F = \dot{\lambda}_F \mathbf{n}_c = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z$ és a szögsebesség értéke $\dot{\lambda}_M = 0$. Könnyen bizonyítható [12], hogy az érintkezési nyomás állandó, ($p_n = F_0 / S_c$) és a lokális kopási sebesség úgyszintén állandó: $\dot{w}_n = \dot{w}_R = \sum_{i=1}^2 (F_0 / S_c)^b \tilde{\beta}_i v_r^{\alpha_i} = \text{const}$. Ha a kopási paraméterek $b_1 \neq b_2$, akkor a kopási folyamat nem tudja biztosítani az állandó nyomást. Az érintkezési felületen, ekkor nem alakul ki állandó nyomás, vagyis a kopási folyamat nem tudja elérni az állandósult állapotot.

3.1.2 A B_1 bélyeg haladó és forgó mozgással rendelkezhet

Első eset: A B_1 test az alsó test $v_r = \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| = \|\dot{u}_x \mathbf{e}_x + \dot{u}_y \mathbf{e}_y\|$ nagyságú csúszási sebessége miatt a kopás következtében függőleges irányú eltolódással és az x, y érintkezési síkba eső tengely körüli szögelfordulással rendelkezik. A merevtestszerű eltolódási és szögelfordulási sebességeket jelölje $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z$ és $\dot{\lambda}_M = \dot{\lambda}_M^x \mathbf{e}_x + \dot{\lambda}_M^y \mathbf{e}_y$. A testre ható függőleges lefele mutató F_0 erő támadáspontjának az érintkező felületen lévő x, y koordinátái a P_{F_0} -ban x_F, y_F . A B_1 test vízszintes síkbeli elmozdulását az $x=0, y=0, z=l_z$ pontba a sebesség irányára merőleges hengeres rúddal akadályozzuk meg. (lásd. 3. ábra). Ezt azt jelenti, hogy az itt keletkező $\mathbf{F}_\tau = -\mu F_0 \frac{v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y}{v_r} = F_0 \mathbf{e}_\tau$ szintén befolyásolja a B_1 test egyensúlyát. Továbbiakban feltételezzük, hogy $v_x = \dot{u}_x \leq 0$, $v_y = \dot{u}_y \leq 0$. A külső ismert terhelés redukált vektorkettőse $\mathbf{f}_0 = -F_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{F}_\tau$,



3. ábra. A B_1 test alatt a B_2 test v_r sebességgel mozog. A felső bélyegnek az érintkező síkkal párhuzamos elmozdulását test $x=0, y=0, z=l_z$ pontjában érintkező henger akadályozza meg.

$\mathbf{m}_0 = M_0^x \mathbf{e}_x + M_0^y \mathbf{e}_y$. Jelen esetben $M_0^x = -F_0 y_F - \mu F_0 l_z \sin \gamma$, $M_0^y = F_0 x_F + \mu F_0 l_z \cos \gamma$, ahol $\tan \gamma = \frac{v_y}{v_x}$. A

helyvektor $\Delta \mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$. Az érintkezési felületen a B_1 testre ható kontakt feszültség $\mathbf{t}_1^c = -p_n (-\mathbf{e}_z + \mu \mathbf{e}_\tau) = -p_n \boldsymbol{\rho}_c^+$. Mivel a külső terhelésnek a z tengelyre számított nyomatéka zérus, ebből következik, hogy a $\boldsymbol{\tau}_n = -\mu p_n \mathbf{e}_\tau$ csúsztató feszültségnek a nyomatéka is zérus kell legyen, vagyis a B_1 test z körüli elfordításával kell biztosítani ezen feltétel kielégítését. Tehát

$$m_z = 0 = \mathbf{e}_z \cdot \int_{S_c} \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{t}_1^c dS = \mu \int_{S_c} p_n (y \cos \gamma - x \sin \gamma) dS, \quad (39)$$

amit a γ megváltoztatásával lehet elérni.

A Lagrange-féle $\dot{\lambda}_F$, $\dot{\lambda}_M^x$, $\dot{\lambda}_M^y$ multiplikátorok a (15) egyenletrendszerből kapott

$$f_z = F_0 - \int_{S_c} p_n dS = 0, \quad m_x = M_0^x + \int_{S_c} y p_n dS = 0, \quad m_y = M_0^y - \int_{S_c} x p_n dS = 0 \quad (40)$$

egyenletrendszerből számíthatók a (17b) –ből levezethető nyomásra vonatkozó összefüggés felhasználásával

$$p_n = \left(\frac{\dot{\lambda}_F - \dot{\lambda}_M^x y + \dot{\lambda}_M^y x}{\left(\sum_i \tilde{\beta}_i v_r^{a_i} \right)^b} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (41)$$

A levezetésnél felhasználtuk, hogy $\chi_1 = 0$, a kopadék \mathbf{v}_r irányában távolodik el a testek közül, azaz $\mu_d = 0$. $b = 1$ esetén a nyomás lineáris függvénye az x, y koordinátáknak.

Példa 1:

Legyen a B_1 test egy $S_{cx} = 20 \text{ mm}$, $S_{cy} = 30 \text{ mm}$ alaprajzú hasáb. A test felső lapján működő függőleges terhelés $F_0 = 10 \text{ kN}$ eredője az $x_F = 10 \text{ mm}$, $y_F = 15 \text{ mm}$ ponton halad át, továbbá $l_z = 10 \text{ mm}$. A testek közötti relatív sebesség abszolút értéke $v_r = 100 \text{ mm/s}$. A kopási sebességet az alábbi tényezők jellemzik: $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 5 \cdot 10^{-6}$, $a = b = 1$, továbbá a $\mu = 0.25$ súrlódási tényező.

A (39)-(41) alatti nemlineáris feladatot a MATLAB program [72] segítségével megoldva, kezdeti sebesség irányt $\gamma^{noopt} = 30^\circ$ -ra, a Lagrange féle multiplikátorokat (a B_1 test merevtestszerű kopási sebessége) $\dot{\lambda}_F^{(noopt)} = 0.0002 \text{ mm/s}$, $\dot{\lambda}_M^{x(nopt)} = -0.00001 \text{ rad/s}$, $\dot{\lambda}_M^{y(nopt)} = 0.00001 \text{ rad/s}$ értékre beállítva az optimalás az alábbi eredményt szolgáltatja: $\gamma^{(opt)} = 56.3099^\circ$, $\dot{\lambda}_F^{(opt)} = 27.99 \cdot 10^{-4} \text{ mm/s}$, $\dot{\lambda}_M^{x(opt)} = -4.622 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$,

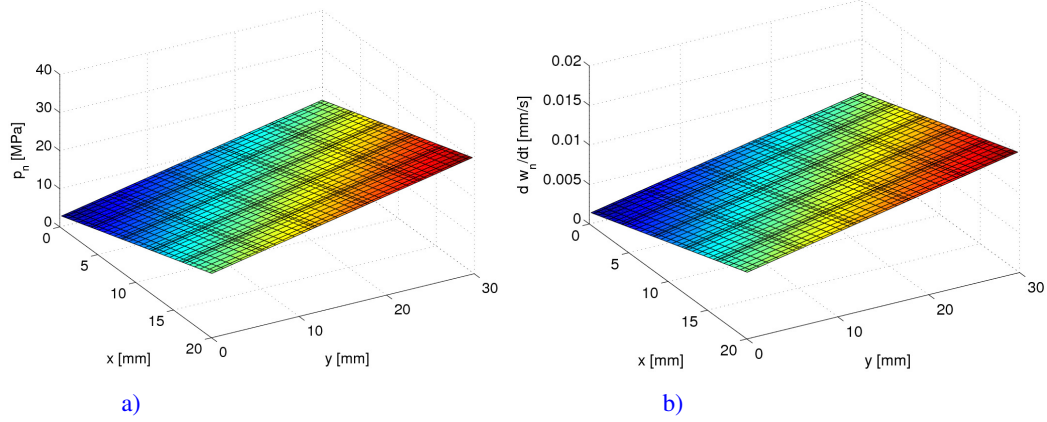
$\dot{\lambda}_M^{y(opt)} = 6.934 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$. A kapott érintkezési nyomást és a kopási sebességet a 4a és 4b. ábrák szemléltetik. A $\gamma^{(opt)} \neq \gamma^{(noopt)}$ azt jelenti, hogy a felsőtest elfordul a z tengely körül, kielégítve a (39) alatti feltételt. A kapott szög pontosan egybeesik az érintkezési téglalap tartomány átlójának irányával. A nyomás a teljes S_c tartományban pozitív, ami az egyoldalú érintkezés feltételének kielégítését is jelenti. Ha valahol negatív értéket kaptunk volna, akkor az optimalási feladat megoldása nem esik egybe a valóságos viszonyokkal (a testek az érintkezési tartomány bizonyos részein elválnak egymástól). Például, jelen példánkban, csak az l_z értékét változtatva, értékének növelésével ilyen állapotot könnyen el lehet érni. $l_z \geq 12.1$ -nél a kapott megoldás már nem lesz helyes.

Második eset: Vizsgáljuk most olyan esetet, amikor a szögelfordulás tengelye nem esik bele az érintkezési síkba. A [14]-es munkában az érintkezési nyomás kiszámítására vonatkozó összefüggés, illetve a merevtestszerű kopási sebesség koordinátáinak meghatározására vonatkozó egyensúlyi egyenletek már levezetést nyertek. A 2-es test jobbra és balra csúszik (lásd 5. ábra) \mathbf{v}_r sebességgel. Az 1-es test részeként kezelt O pontbeli csap függőlegesen el tud mozdulni, a test pedig e csap körül el tud fordulni.

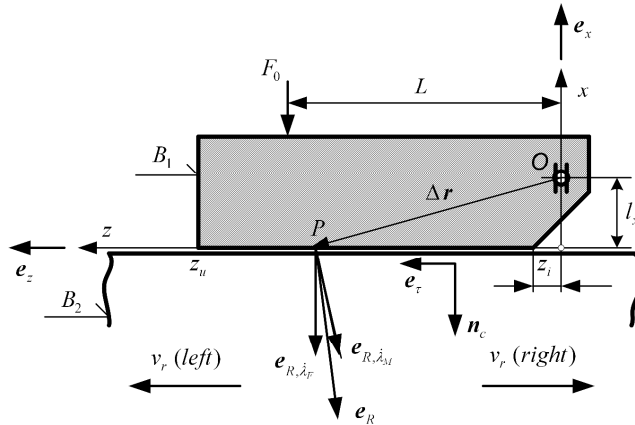
Az O pont helykoordinátái: $(x, z) = (l_x, 0)$. A függőleges kopási sebesség $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_x$, a szögsebesség $\dot{\lambda}_M = -\dot{\lambda}_M \mathbf{e}_y$, vagyis az érintkezési felület pontjában a merevtestszerű kopási sebesség az alábbi iránnyal fog bírni

$$\mathbf{e}_R = -(\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_x + \dot{\lambda}_M \mathbf{e}_y \times \Delta \mathbf{r}) \frac{1}{H} = \frac{-(\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M z) \mathbf{e}_x - \dot{\lambda}_M l_x \mathbf{e}_z}{H} = -\cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_z \quad (42)$$

ahol $H = \sqrt{(\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M z)^2 + (\dot{\lambda}_M l_x)^2}$



4. ábra. Állandósult kopási állapotban keletkező a) p_n nyomás, b) \dot{w}_n kopási sebesség.



5. ábra. Az egyes test forgási és eltolódási merevtestszerű szabadságfokkal rendelkezik.

A levezetett nyomás [14]
$$p_n = \left(\frac{\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M (z \mp \mu l_x)}{\sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}} \right)^{1/b} Q^{-1/b}(\alpha) \quad (43)$$

ahol $Q(\alpha) = 1 \mp \mu \tan \alpha$, [\mp : felső jel (-) : a B_2 test jobb irányba csúszik, alsó jel (+) : a B_2 test sebessége balra mutat]. A merevtestszerű kopási sebességek, $\dot{\lambda}_F$ és $\dot{\lambda}_M$, az alábbi egyensúlyi egyenletből számíthatók:

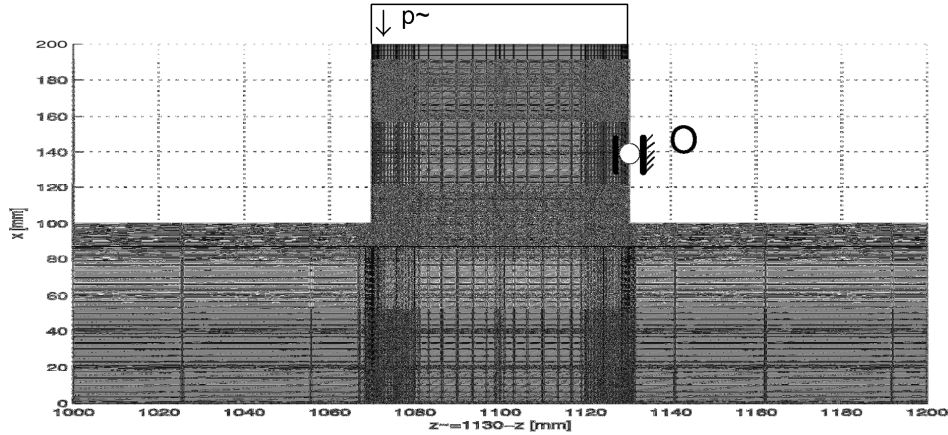
$$\int_{z_i}^{z_u} \left(\frac{\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M (z \mp \mu l_x)}{\sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}} \right)^{1/b} Q^{-1/b}(\alpha) t dz = F_0$$

$$\int_{z_i}^{z_u} \left(\frac{\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M (z \mp \mu l_x)}{\sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}} \right)^{1/b} Q^{-1/b}(\alpha) (z \mp \mu l_x) t dz = M_0 \quad (44)$$

Itt külön érdemes hangsúlyozni, hogy $Q(\alpha) = 1 \mp \mu \tan \alpha$ (42) alapján a $\dot{\lambda}_F$ és $\dot{\lambda}_M$ függvénye.

Példa 2: Végtelen hosszú sáv és bélyeg hőtani-mechanikai feladata

Vizsgáljuk a 6. ábrán vázolt szerkezetet. A vizsgált B_1 bélyeg az O pontjában függőlegesen mozoghat, illetve ezen csap körül a test el tud fordulni. A B_2 sáv $v_r = \text{const}$ sebességgel vízszintesen mozog jobbra, vagy balra. A végtelen távoli pont a $-\tilde{z}$ irányban található. A szerkezet középső részének végeselemes felosztása a 6. ábrán látható. A számításokat p -verziójú végeselemekkel [73,74] végeztük el.



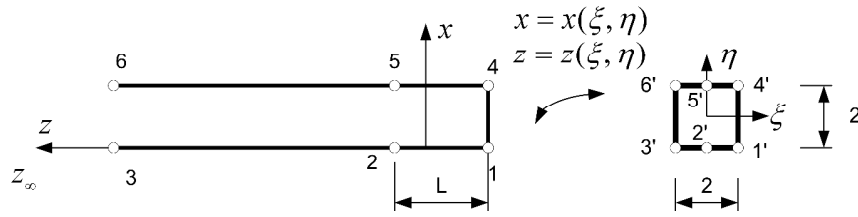
6. ábra. Vizsgált szerkezet középső részének végeselemes felosztása. A vízszintes és a függőleges vonalak a Lobatto-féle integrálási pontokon haladnak keresztül. Az érintkezési tartományon vízszintesen 8 elem, és függőlegesen mindkét testen 7 elem van.

A testek vastagsága $t = 10 \text{ mm}$, a bélyeg szélessége $L_c = 60 \text{ mm}$, magassága $h = 100 \text{ mm}$. A bélyeg a felső peremen $x = 200 \text{ mm}$ állandó intenzitású p^- nyomással terhelt, aminek eredője $F_0 = 10.0 \text{ kN}$. A bélyeg a kopás következtében függőlegesen mozoghat és elfordulhat. A bélyeg felső részének és a sávnak az anyaga azonos, (lásd 1. táblázat: Anyag 1), a bélyeg alsó 20 mm magasságú részének anyaga a 2. típusú, (lásd 1. táblázat).

Fel fogjuk tételezni, hogy a környezet hőmérséklete θ_a zérus, a sűrűlási tényező $\mu = 0.25$. A végtelen távoli $\tilde{z} = -\infty$ peremen, ill. a $\tilde{z} = 1670 \text{ mm}$ peremen, továbbá a \tilde{z} tengelyre eső peremen a hőmérséklet zérus értékkel előírt. A megmaradó szabad peremeken $\mathbf{x} \in S_q^{(i)}, i = 1, 2$ és a testek határoló síkján (síkfeszültségi állapot a feltételezett) hőátadás zajlik le.

	Hőveze- tési tényező	Érintkezési kapcsolat és perem hőátadási tényezői	Fajhő	Fajlagos hőtágu- lási együttható	Young modulus	Poisson tényező	Sűrűség
	$K^{(i)}$ [W/(m K)]	$\hat{h}_c, h_c^{(i)}$ [W/(m ² K)]	$c^{(i)}$ [J/(kg K)]	$\alpha_\theta^{(i)} \cdot 10^5$ [1/K]	$E^{(i)} \cdot 10^{-5}$ [MPa]	$\nu^{(i)}$	$\rho^{(i)}$ [kg/m ³]
Anyag 1 (acél)	55	80	460	1	2	0.3	7800
Anyag 2 (kompozit)	5	80	1200	3	1.3	0.23	846

1. táblázat. Mechanikai és hőtani paraméterek



7. ábra. A végtelen elem leképezése a négyzetre.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(1-\eta) z_1 + \frac{1}{2}(1+\eta) z_4 - \frac{0.5(\xi-1)}{1+0.5(\xi-1)} L, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \\ x &= \frac{1}{2}(1-\eta) x_1 + \frac{1}{2}(1+\eta) x_4 \end{aligned} \quad (45)$$

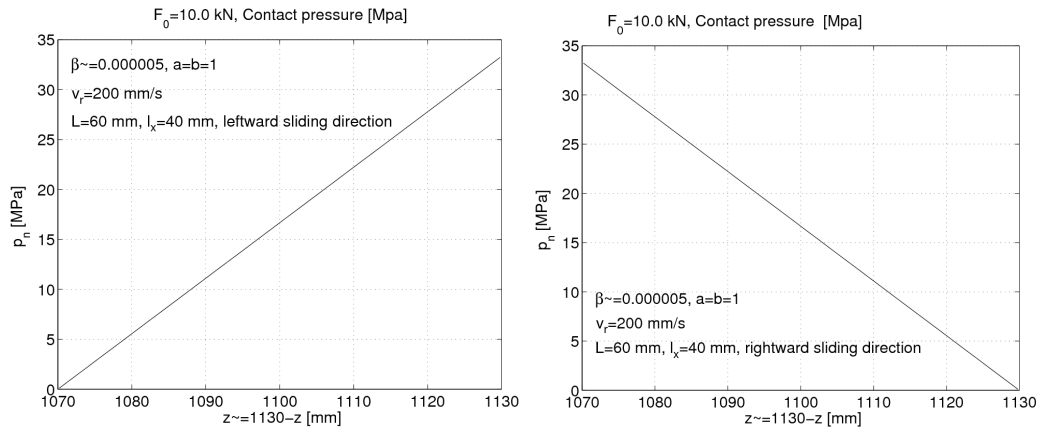
A számításokra végtelen elemet használunk $L = 2.5 \cdot L_0 = 2.5 \cdot 178 \text{ mm}$ paraméterrel a $-\infty \leq \tilde{z} \leq 178$ intervallumban. A leképezés összefüggései (45) alatt találhatók.

Az állandósult kopásnál kialakuló nyomás a (43), (44) egyenletrendszer megoldásából nyerhető. A relatív csúszási sebesség $v_r = 200 \text{ mm/s}$. A kopást jellemző paraméterek: $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 5 \times 10^{-6}$, $a_1 = a_2 = b = 1$.

A kiszámolt nyomás függvénye az alsó test mozgásának irányától függően a 8a. és 8b. ábrán látható. Mivel a bélyeg függőlegesen elmozdul és az O csap körül elfordul a kapott nyomás nem állandó $p_n \neq p^-$, hanem lineárisan változik. A nagyobb nyomás a belépő oldalon lép fel. Az egyenletrendszer megoldásra a MATLAB rendszert használtuk [72]. A megoldást a balra történő csúszásnál a $\dot{\lambda}_F = 0.06666 \text{ mm/s}$, $\dot{\lambda}_M = -0.001111 \text{ rad/s}$, a jobbra történő csúszásnál a $\dot{\lambda}_F = 0. \text{ mm/s}$, $\dot{\lambda}_M = 0.001111 \text{ rad/s}$ merevtestszerű kopási értékek jellemzik.

A (34), (37), (38) alatti hőtani probléma módosított Petrov-Galjorkin féle variációs elv szerinti megoldása a 9., 10. ábrákon feltüntetett megoldásokhoz vezet. A bélyegben ébredő hőmérséklet a 9a. ábrán, az alsó testben a 9b. ábrán ábrázolt.

Nem beépítve a modellbe a végtelen végelelemet, továbbá előírva a $\tilde{z} = 0$ peremen a zérus hőmérsékletet, ha csak a klasszikus Galjorkin elvet használjuk ((34) megoldása), akkor erős oszcillációval jellemzett megoldáshoz jutunk (lásd 10a. ábra). Még mindig véges sávot használva, de már a hőtani feladatot a módosított Petrov-Galjorkin (34), (37), (38) alatti egyenletekre alapozzuk, azt megoldva, a 10b. ábra eredményéhez jutunk. Végtelen elem és a módosított Petrov-Galjorkin séma használata a 10c. ábrán vázolt, szép sima lefutású hőmérsékletmezőt biztosítja. A (38) tagban a sebesség $v_r = 200 \text{ e}_z$ és $f_b = 0$, $f = 2.25$.



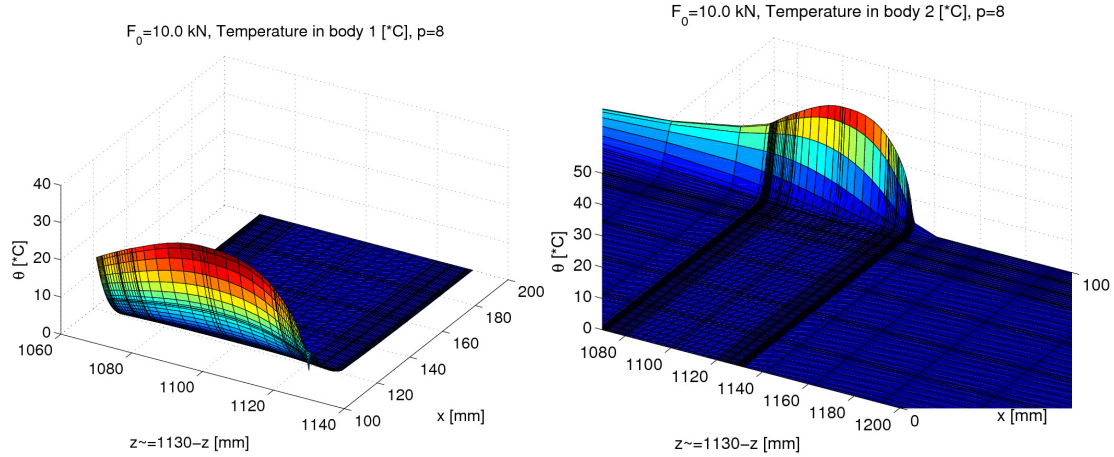
a)

b)

8. ábra. Állandósult kopásnál kialakuló nyomás, a) a sáv balra mozog, b) a sáv jobbra mozog.

A testek alakját a 11. ábra szemlélteti. A hőtágulás, disztorzió x irányban $d(\theta) = u_n^{(2)}(\theta) - u_n^{(1)}(\theta)$ képlettel számolható, az ábrán + jellel tüntettük fel. Az eredő hézag $g_{res} = -(u_n^{(2)}(p^-, p_n) - u_n^{(1)}(p^-, p_n)) - d(\theta)$, ahol az első tag az adott p^- terhelésből, az érintkezési nyomásból, a súrlódó feszültségből ($p_n, \mu p_n$) származik, míg a második tag a hőmérsékletből. A teljes hézagot a 11. ábrán (---) jelöli. Hőhatás nélkül a teljes hézag (o)-val

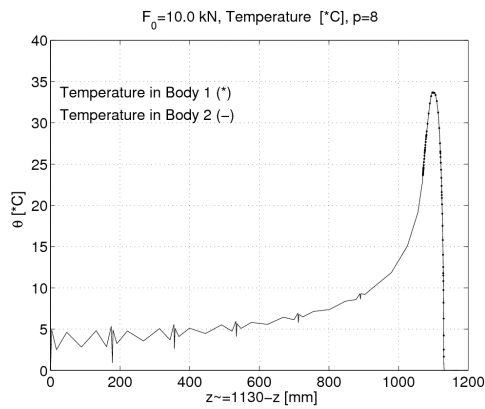
jelölt. Az alsó sávban a hézagot a $\dot{w}_{2,n} = \tilde{\beta}_2 p_n v_r$ kopási sebességből számolhatjuk. Az időintegrálás megadja a kopási árok mélységét (-.): $w_{2,n} = \int_0^{\Delta\tau} \tilde{\beta}_2 p_n v_r d\tau = \int_0^z \tilde{\beta}_2 p_n dz, z \leq L_c; w_{2,n} = w_{2,n}(L_c), z \geq L_c$. A (-) és (..) jelű görbék eltérő jellege jól érzékelteti a hőmérsékletmező befolyását a kialakuló kopott alakra. Láthatóan a hőmérsékletnek erős a hatása.



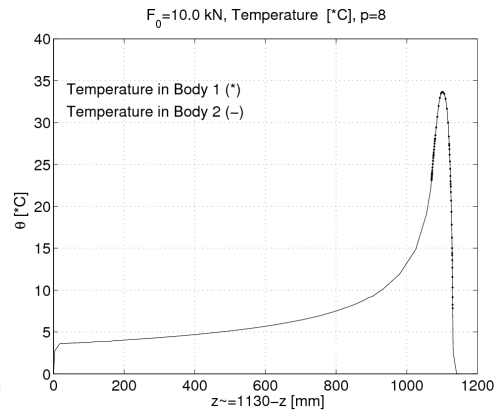
a)

b)

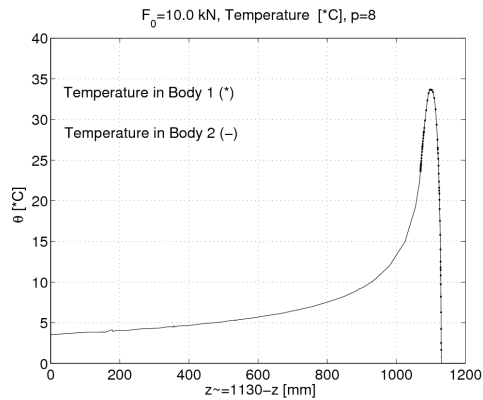
9. ábra. Állandósult kopás hőmérséklet mezei a) a bélyegben, b) a sávban.



a)

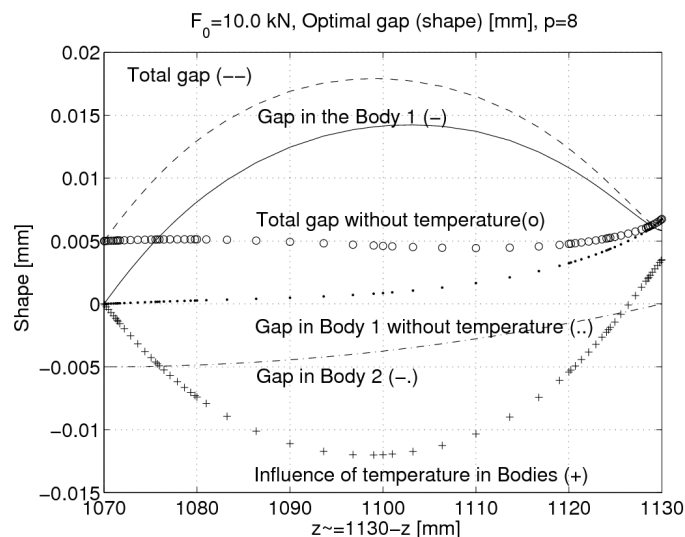


b)



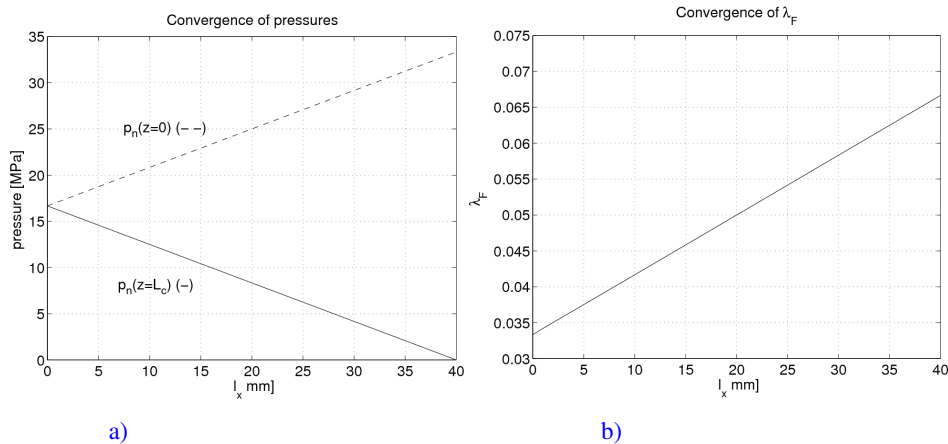
c)

10. ábra. Hőmérséklet a sáv felső peremén $x=100$, a) véges sáv, megoldás Galjorkin elvvel, b) Véges sáv, megoldás módosított Petrov-Galjorkin elvvel, c) végtelen sáv, megoldás módosított Petrov-Galjorkin elvvel.



11. ábra. Állandósult állapotban az érintkező peremek alakja, a hőtágulás hatása.

A (43), (44) egyenletrendszer helyességét le tudjuk ellenőrizni az l_x hatásának elemzésével a $\dot{\lambda}_F$ merevtestszerű kopási sebesség, az érintkezési nyomás érintkezési tartomány peremén ébredő értékein keresztül: $p_{\min} = p_n(L_c)$, $p_{\max} = p_n(0)$, amikor a sáv balra halad. Elméletileg $l_x = 0$ -nál, a kontakt nyomásnak állandónak kell lennie és meg kell egyeznie a külső terhelés p^- nyomásával. A 12a. ábra demonstrálja ezt a helyzetet. A $\dot{\lambda}_F$ értékének változását a 12b. ábra szemlélteti. Az l_x kicsiny értékeinél a konvergencia valódiságáról a 2. táblázat ad hű képet.



12. ábra. A nyomás konvergenciája: a), a merevtestszerű eltolódási sebesség: b).

l_x [mm]	$\dot{\lambda}_F$ [mm/s]	$p_{\min} = p_n(L_c)$ [MPa]	$p_{\max} = p_n(0)$ [MPa]
0.1	0.03341	16.625	16.708
0.01	0.03334	16.6625	16.6708
0.001	0.033334	16.66625	16.66708
0.0001	0.0333334	16.666625	16.666708

2. táblázat

3.2 Állandósult kopás vizsgálata görbült érintkezési felületek esetén, pofás fék esete

Példa 3: Vizsgáljuk a 13a. ábrán lévő fék rendszert. A testek vastagsága $t=10\text{ mm}$ a gyűrű magassága ($h=20\text{ mm}$), középen $p \sim \text{áll}$ terhelés működik. A fékpofa függőlegesen mozgásra képes, az $x = \pm 100\text{ mm}$ peremein görgősen megtámasztott, az $R_0=200\text{ mm}$ sugarú tárcsa $\omega=10\text{ rad/s}$ szögsebességgel végez forgó mozgást az óramutató járásával ellentétesen.

A szerkezetet, az origóra vonatkozó anti szimmetria tulajdonság miatt, a számítási modell ismeretlenjeinek csökkentése céljából, a felének felosztásával fogjuk modellezni (lásd 13b. ábra). Ekkor a hőmérséklet mezőre áll $\theta(x, z) = \theta(-x, -z)$, míg az x tengely mentén $u(x) = -u(-x)$, $\theta(x) = \theta(-x)$ korlátok fognak fennállni.

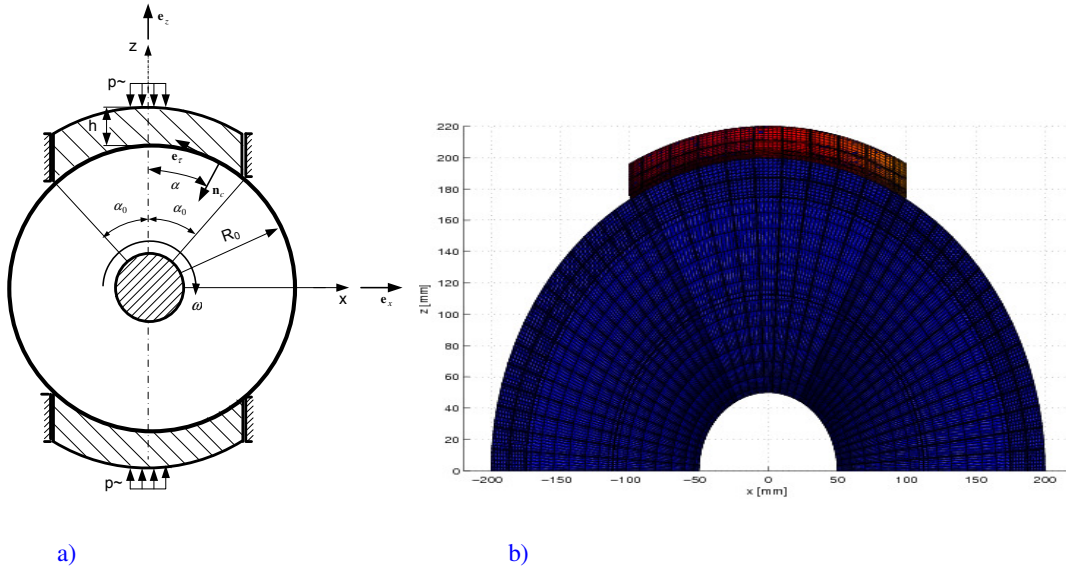
Ebben az esetben a merevtestszerű kopási sebesség $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F e_z$ és a relatív csúszási sebesség $v_r = R_0 \omega$.

$$\text{Ekkor } \mathbf{e}_R = \frac{\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r}}{\|\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M \times \Delta \mathbf{r}\|} = -\mathbf{e}_z, \quad \chi = \alpha, \quad \mathbf{n}_c = -\cos \alpha \mathbf{e}_z - \sin \alpha \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_\tau = \sin \alpha \mathbf{e}_z - \cos \alpha \mathbf{e}_x, \quad \rho_c^\pm = \mathbf{n}_c \pm \mu \mathbf{e}_\tau$$

[\pm : felső jel (+) az óramutató járásával egyező forgáshoz tartozik (13 a. ábra), az alsó jelnél (-) a forgás óramutató járásával ellentétes]

A (17b) -be behelyettesítve a fenteket, az érintkezési nyomás [\mp : felső jel (-) az óramutató járásával egyező forgás, alsó jel (+) a forgás óramutató járásával ellentétes] az alábbi képlettel számolható

$$p_n = \left(\frac{\dot{\lambda}_F (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha)}{[\tilde{\beta}_1 v_r^{a_1} + (\tilde{\beta}_2 v_r^{a_2})]} (1 \mp \mu \tan \alpha)^{-1} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (46)$$



13. ábra. Pofás fék a) geometria és a terhelés: nyomás $\tilde{p} = 4.95\text{ MPa}$ és annak eredője $F_0 = 1.0\text{ kN}$, b) a fél szerkezet végeleselemes felosztása

Az

$$I_{D_w}^{(q=1)} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) (\cos \alpha)^{\frac{1}{b}} R_0 t d\alpha \quad (47)$$

integrál bevezetésével a fékpofa függőleges egyensúlyi egyenletéből

$$-\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_n (\mathbf{n}_c \pm \mu \mathbf{e}_\tau) \cdot \mathbf{e}_z R_0 t d\alpha = F_0 \quad (48)$$

a p_n -re kapott összefüggést behelyettesítve

$$\frac{F_0}{I^{\frac{1}{q-1}}_{D_w}} = \left(\frac{\dot{\lambda}_F}{\sum_{i=1}^2 (\tilde{\beta}_i v_r^{a_i})} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (49)$$

és ily módon a nyomás

$$p_n = \frac{F_0}{I^{\frac{1}{q-1}}_{D_w}} (\cos \alpha)^{\frac{1}{b}} \quad (50)$$

Az érintkezési normális irányába eső kopási sebesség

$$\dot{w}_n = (\tilde{\beta}_1 (R_0 \omega)^{a_1} + \tilde{\beta}_2 (R_0 \omega)^{a_2}) \left(\frac{F_0}{I^{\frac{1}{q-1}}_{D_w}} \right)^b (\cos \alpha) \neq const \quad (51a)$$

De, mivel áll $\dot{w}_R = \dot{w}_n / \cos \alpha$ kapcsolat, a függőleges kopási sebesség már állandó

$$\dot{w}_R = (\tilde{\beta}_1 (R_0 \omega)^{a_1} + \tilde{\beta}_2 (R_0 \omega)^{a_2}) \left(\frac{F_0}{I^{\frac{1}{q-1}}_{D_w}} \right)^b = const \quad (51b)$$

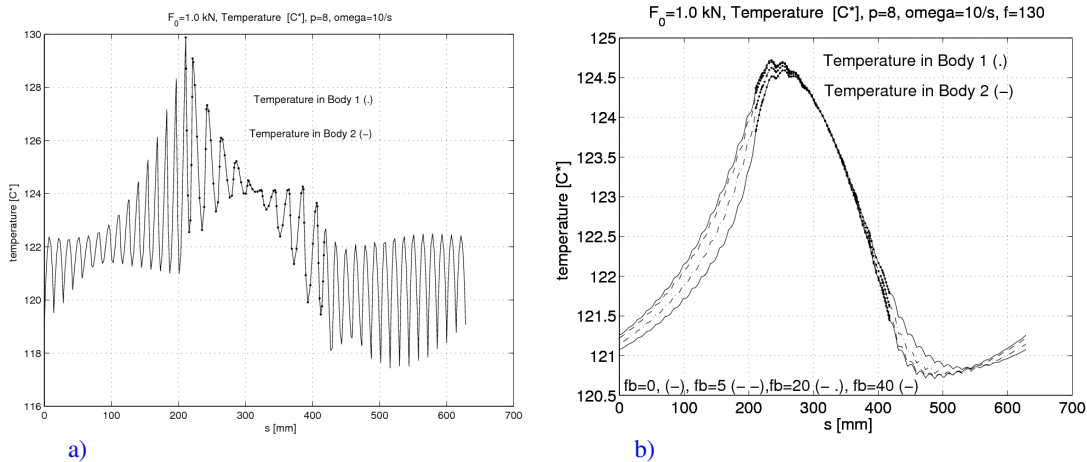
(49) felhasználásával az is látható, hogy $\dot{\lambda}_F = \dot{w}_R$, azaz valóban az állandósult kopás fennáll, hisz a teljes függőleges kopási sebesség megegyezik a fékpofa merevtestszerű kopási sebességével.

Számításainkhoz az 1. táblázat Anyag 1 jellemzőit fogjuk használni.
Definiáljuk a Peclet számot

$$Pe = \frac{v_r L_c / 2}{2 \cdot a_D}, \quad a_D^{(i)} = \frac{K^{(i)}}{\rho^{(i)} c^{(i)}}, \quad a_D = \min(a_D^{(1)}, a_D^{(2)}), \quad (52)$$

ahol $L_c = 209.433 \text{ mm}$ az érintkezési tartomány ívhossza, $a_D^{(i)}$ az i -dik test hődiffúziója. Esetünkben $a_D^{(i)} = 15.328873 \text{ mm}^2 / \text{s}$, és így $\omega = 10 \text{ rad / s}$ szögsebességnél $Pe = 6831.3345$.

p -verziójú végelemeket használva mind az elmozdulásmező, mind a hőmérséklet közelítésére $p = 8$ polinom foknál az alábbi eredmények adódnak:
A tárcsa szélén fellépő hőmérséklet megoszlását a 14a. ábra mutatja a hagyományos Galjorkin elv alkalmazásával. A megoldás igen nagy oszcillációval rendelkezik. A módosított séma már igen szép sima megoldást ad, lásd 14b. ábra.

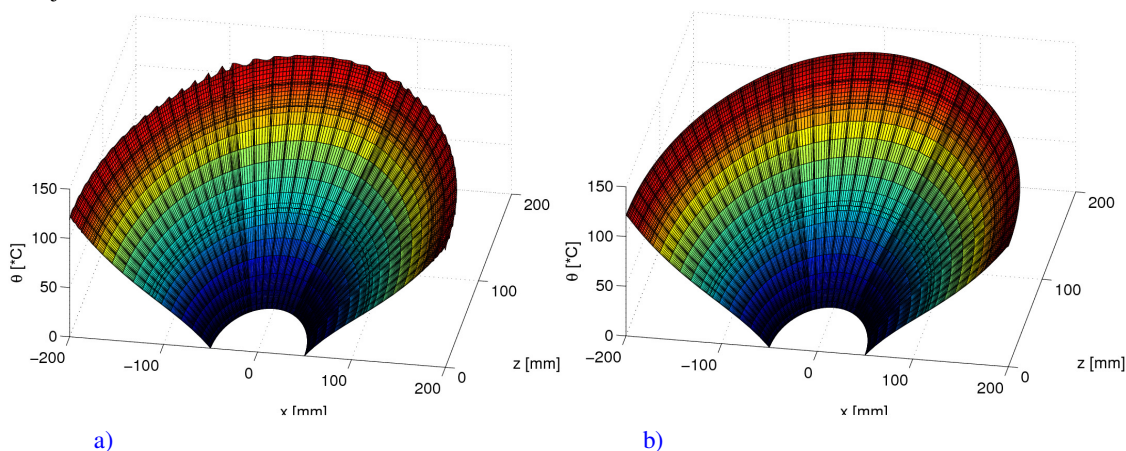


14. ábra. Hőmérséklet megoszlása az $R_0 = 200 \text{ mm}$ felületen, a) $f = f_b = 0$ tényezőknél, b)

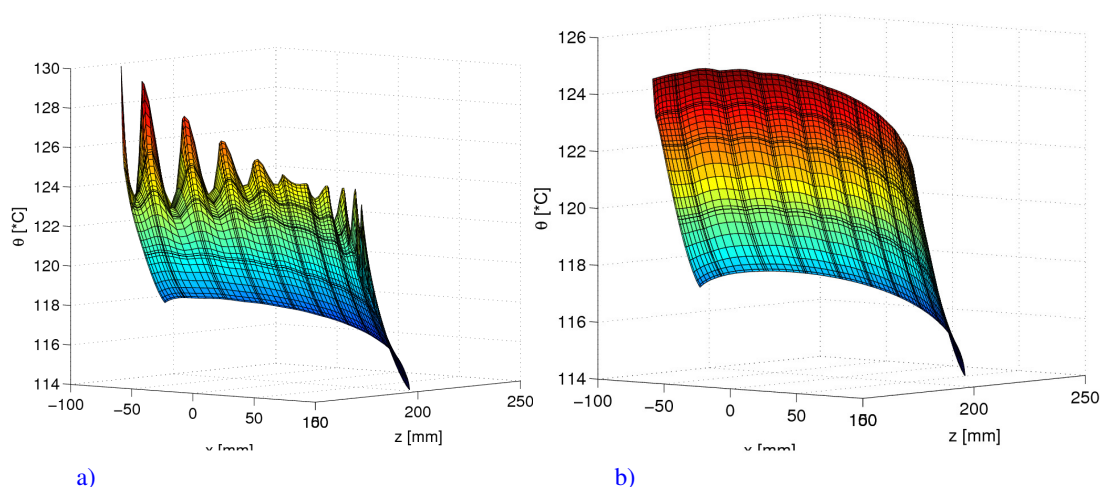
$f = 130, f_b = 0, 5, 20, 40$ értékeknél.

A hőmérsékletmezőt mutatják az 15-16. ábrák. Jól látható, hogy a hagyományos Galjorkin féle approximáció hullámos megoldást ad, míg a (37, 38) taggal számított eset már szép sima megoldást biztosít.

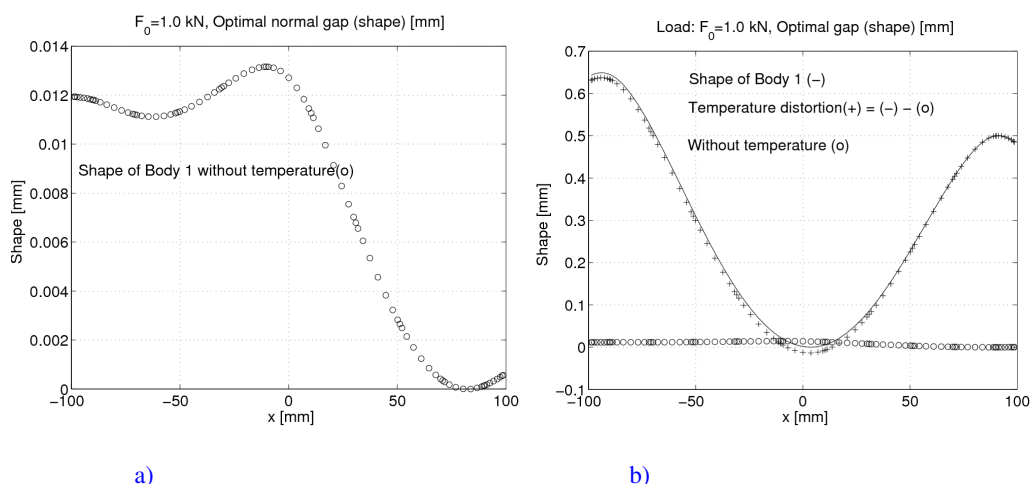
A fékpofa kopásából adódó alakot hőhatás nélküli és hőhatás melletti esetekben a 17. ábra diagramjai mutatják. A hőmérséklet hatása ebben az esetben is számottevő.



15. ábra. Hőmérséklet mező a tárcsában a) Galjorkin-féle séma szerinti eredmény, b) módosított Petrov-Galjorkin-féle megoldás $f = 130$, $f_b = 0$ értékeknél.



16. ábra. A fékpofa hőmérséklete a) Galjorkin-féle sémával, b) módosított Petrov-Galjorkin -féle sémával $f = 130$, $f_b = 0$ értékeknél.



17. ábra. A fékpofa kopásából származó normális irányú hézag: a) hőhatás nélkül, b) hőhatással

3.3 Forgástestek vizsgálata

Ebben a fejezetben tetszőleges meridiánnal rendelkező forgástesteket vizsgálunk, feltételezve, hogy a felső-test (bélyeg) forgómozgást végez egy lerögzített, úgyszintén forgástest felett. Két, a kopadék mozgásával kapcsolatos általánosított súrlódási modellt nézünk meg [16], majd ezek birtokában levezetjük az érintkezési nyomás kiszámítására vonatkozó összefüggést.

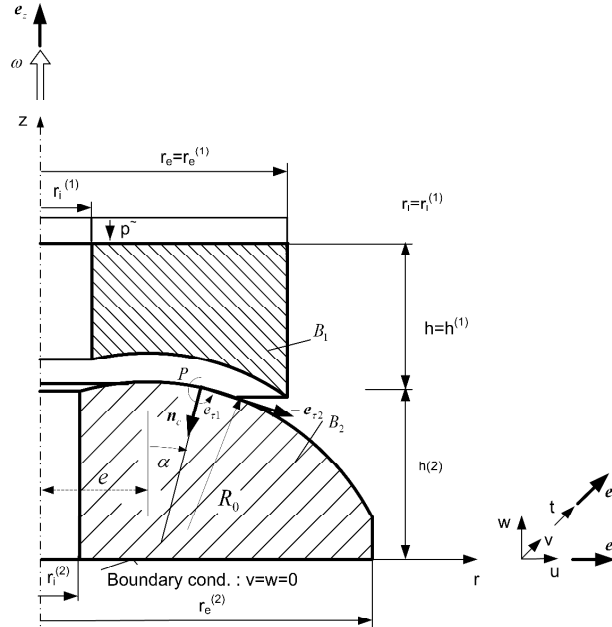
A B_1 felső test a $-z$ tengely irányú ω szögsebességgel végez forgó mozgást, a B_2 test forgásában megakadályozott. A meridián $f_{merid} = f_{merid}(r)$ egyenlettel jellemzett. A testek közötti relatív csúszási sebesség $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau^{(2)} - \dot{\mathbf{u}}_\tau^{(1)}\| = v_r = r\omega$, ennek iránya \mathbf{e}_y . Az érintkezési normális $\mathbf{n}_c = -(\sin\alpha \mathbf{e}_r + \cos\alpha \mathbf{e}_z)$, míg az érintő síkba eső egységvektorok $\mathbf{e}_{r1} = -\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_{r2} = -\cos\alpha \mathbf{e}_r + \sin\alpha \mathbf{e}_z$.

A felső test a kopás miatt függőlegesen $\mathbf{e}_R = -\mathbf{e}_z$ irányban tolódik el, vagyis a merevtestszerű kopási vektor $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z$. Az $\mathbf{e}_R, \mathbf{n}_c$ vektorok az r, z síkba esnek, továbbá $\chi_1 = \pi/2$, $\chi = \alpha$.

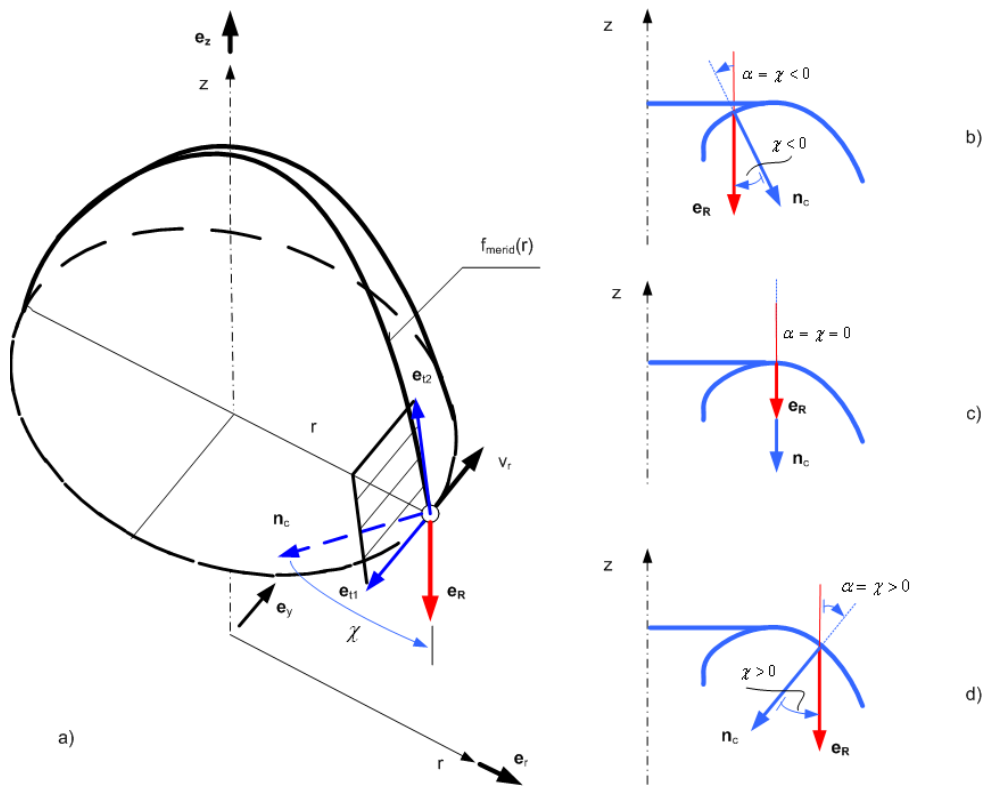
3.3.1 Súrlódási modell, amikor a lekopott anyagi részecske forgó mozgással távolodik el a testek közül (D' modell)

Feltételezésünk értelmében a centrifugális erő hatására a levált részecske $-\mathbf{e}_{r2}$ irányában gördülő mozgással távolodik el a testek közül. Hivatkozva a [16] -ban kidolgozott eredményre, az érintkezési feszültség $\mathbf{t}^c = -p_n \{ (-\sin\alpha \mathbf{e}_r - \cos\alpha \mathbf{e}_z - \mu \mathbf{e}_y + \mu_d (-\cos\alpha \mathbf{e}_r + \sin\alpha \mathbf{e}_z)) \}$ és a kopási disszipációs teljesítmény

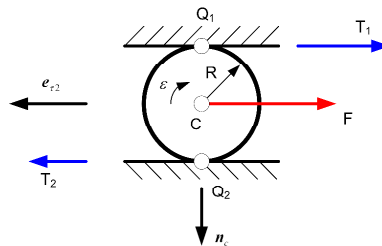
intenzitása $\chi = \alpha$ jelöléssel $\sum_{i=1}^2 \mathbf{t}_i^c \cdot \dot{\mathbf{w}}_i = p_n [(\dot{w}_{1,n} + \dot{w}_{2,n}) - \mu_d \text{sign}\alpha (\dot{w}_{1,\tau} + \dot{w}_{2,\tau})] = p_n (\dot{w}_{1,n} + \dot{w}_{2,n}) [1 - \mu_d \tan\alpha]$



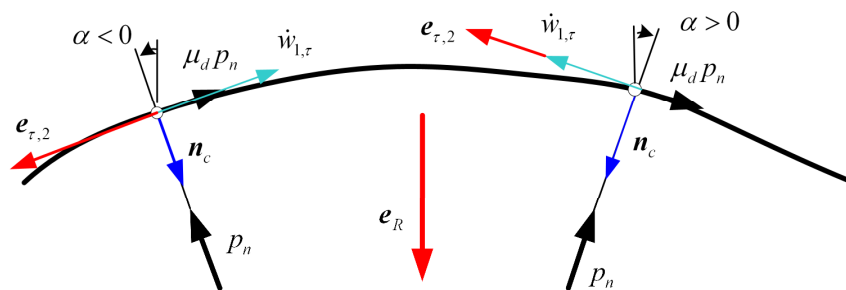
18. ábra. Forgástestek kopása, az $\mathbf{e}_{r1}, \mathbf{e}_{r2}, \mathbf{n}_c$ kisérőtriéder és az α szög értelmezése



19. ábra. Forgástest meridiánja és a v_r relatív sebesség, az e_{r1}, e_{r2}, n_c kisérőtriéder, további mennyiségek értelmezése.



20. ábra. A levált részecske gördülő mozgása



21. ábra. (D^r modell): Érintkezési feszültség összetevők (normális p_n , tangenciális $\mu_d p_n$), érintőleges kopási sebesség $\dot{w}_{1,\tau}$ az 1-es test vonatkozásában.

3.3.2 Sűrűlódási modell a kopási csúszás figyelembevételével (W^s modell)

Ebben a modellben a kopadék mozgása elhanyagolt [16]. Az érintőleges feszültséget a kopási csúszás hozza létre, iránya a $\dot{w}_{1,\tau}$ -vel ellentétes. Ekkor az érintkezési feszültség

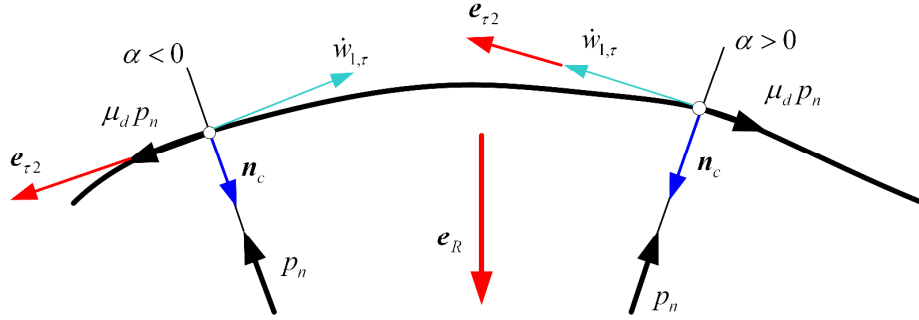
$\mathbf{t}^c = -p_n \{ (-\sin \alpha \mathbf{e}_r - \cos \alpha \mathbf{e}_z - \mu \mathbf{e}_y + \mu_d (-\text{sign} \alpha)(-\cos \alpha \mathbf{e}_r + \sin \alpha \mathbf{e}_z) \}$, míg a kopási disszipációs teljesítmény intenzitása $\sum_{i=1}^2 \mathbf{t}_i^c \cdot \dot{\mathbf{w}}_i = p_n [(\dot{w}_{1,n} + \dot{w}_{2,n}) + \mu_d (\dot{w}_{1,\tau} + \dot{w}_{2,\tau})] = p_n (\dot{w}_{1,n} + \dot{w}_{2,n}) [1 + \mu_d \text{sign} \alpha \tan \alpha]$

3.3.3 Érintkezési nyomás, kopási sebesség.

A fenti súrlódási modellekhez tartozóan az egyensúlyi egyenlet az alábbi alakot ölti

$$f = F_0 - 2\pi \int_{r_i}^{r_e} r p_n \begin{bmatrix} \cos \alpha - \mu_d \sin \alpha \\ \cos \alpha + \mu_d \sin \alpha \text{sign} \alpha \end{bmatrix} \sqrt{1 + f_{merid}^{\prime 2}} dr = 0, \text{ ahol } (f_{merid}' = df_{merid} / dr)$$

ahol a belső és külső érintkezési tartomány sugara r_i, r_e .



22. ábra. (W^s modell): Érintkezési feszültség összetevők (normális p_n , tangenciális $\mu_d p_n$), érintőleges kopási sebesség $\dot{w}_{1,\tau}$ az 1-es test vonatkozásában.

Az alábbi integrálok bevezetésével

$$\tilde{I}_{D_w}^{(q=1)|D'} = \omega^{-a/b} 2\pi \int_{r_i}^{r_e} r^{1-a/b} (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) (\cos \alpha)^{1/b} \sqrt{1 + f_{merid}^{\prime 2}} dr = \omega^{-a/b} I_{D_w}^{(q=1)|D'} \quad (53a)$$

$$\tilde{I}_{D_w}^{(q=1)|W^s} = \omega^{-a/b} 2\pi \int_{r_i}^{r_e} r^{1-a/b} (\cos \alpha + \mu_d \sin \alpha \text{sign} \alpha) (\cos \alpha)^{1/b} \sqrt{1 + f_{merid}^{\prime 2}} dr = \omega^{-a/b} I_{D_w}^{(q=1)|W^s} \quad (53b)$$

az érintkezési nyomásra vonatkozó egyszerű kifejezéshez jutunk

$$p_n = \frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)|W^s}} (\cos \alpha)^{\frac{1}{b}} r^{-\frac{a}{b}} \quad (54)$$

A modifikált Archard kopási törvény (9) és a nyomásra vonatkozó összefüggés felhasználásával a vertikális, a merevtestszerű mozgás irányába eső kopási sebesség

$$\dot{w}_R = \dot{w}_n / \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i p_n^b (r \omega)^a \right\} = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i \left(\frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)|W^s}} \right)^b \omega^a = \text{const} \quad (55)$$

Látótóan ez nem függ a helykoordinátától, annak ellenére, hogy a relatív sebesség a sugár lineáris függvénye, ami alátámasztja, hogy a kopás állandósult.

Példa 4:

Egy a 23. ábrán vázolt kúpos fékrendszert vizsgálunk. A B_1 test a $-z$ körül forog ω szögsebességgel, a kopási merevtestszerű eltolódási sebesség $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z$. Az optimalizálás folyamán feltételezzük, hogy $\tilde{\beta}_1 = 0$, $\tilde{\beta}_2 \neq 0$,

vagyis a kettes testről fognak leválni anyagrészecskék. Mivel anyag a B_2 testről válik le, az S_c tartomány lassan az r irányában tolódik el, a kopási folyamat a kvázi állandósultnak tekinthetjük [15]. Ebben az esetben, adott geometriánál, az állandósult kopásnál használatos nyomással fogunk dolgozni. A tényleges érték valójában ettől nem tér el nagyon. Feltételezzük, hogy a kopási törvényben szereplő állandók $a=b=l$. A fentiekben levezetett nyomásra vonatkozó összefüggést felhasználva, eredményül kapjuk, hogy az érintkezési nyomás

$$p_n = \frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)}} (\cos \alpha) r^{-1}, \text{ ahol } F_0 = (r_e^2 - r_i^2) \pi p^-,$$

$$I_{D_w}^{(q=1)} = 2\pi \int_{r_i}^{r_e} (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) dr = 2\pi (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) (r_e - r_i)$$

$$p_n = \frac{p^-}{2} (r_i + r_e) (\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) r^{-1} \quad (56)$$

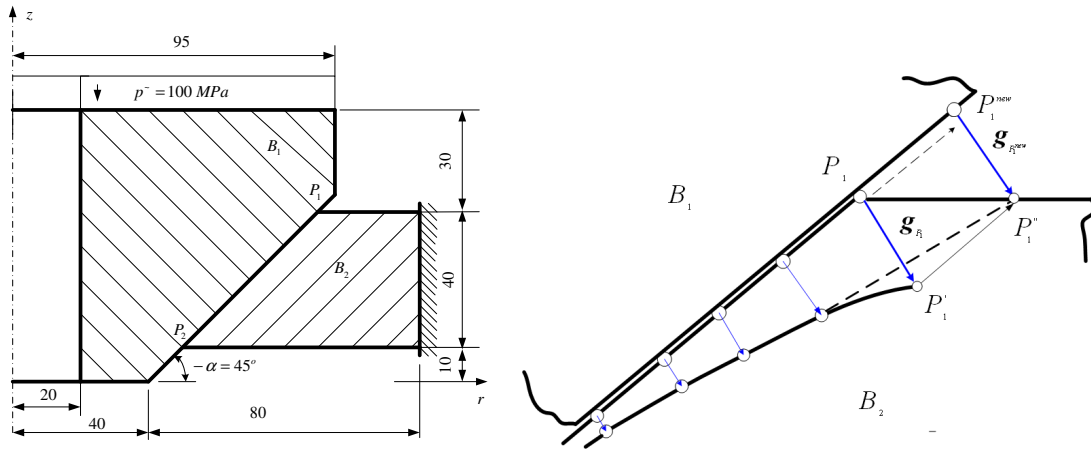
Térjünk át a B_2 test érintkezési tartomány meridiánjának meghatározására. Terheljük a szétválasztott testeket normális irányban az (56) alatti nyomással és az érintőleges irányban ható $\tau_{yz} = \mu p_n$ csúsztatófeszültséggel. A kapott elmozdulás vektorok birtokában megvizsgáljuk az S_c -n jelentkező $u_e^{(1)}$ and $u_e^{(2)}$ elmozdulásokat. Legyen $\Delta u_e = u_e^{(2)} - u_e^{(1)}$. Jelölje a Δu_e irányában lévő kezdeti vektort g_e . Ha kétoldalú kapcsolatot tételeznénk fel, akkor ebben az irányban az alakváltozás után kialakuló testek közötti távolság, a hézag zérus lenne: $d_e = u_e^{(2)} - u_e^{(1)} + g_e = 0$. Ebből az egyenletből a kezdeti hézag vektor $g_e = -(u_e^{(2)} - u_e^{(1)})$. Mivel esetünkben $\tilde{\beta}_1 = 0$, $\tilde{\beta}_2 \neq 0$, a 2-es test meridián görbéjének határa meg fog változni, a kezdeti új hézag g_e^{mod} lesz. Ezt abból a feltételből határozzuk meg, hogy egy pontban, nevezetesen a P_2 pontban (lásd 23. ábra) a hézag legyen zérus, vagyis $g_e(P_2) = -(u_e^{(2)}(P_2) - u_e^{(1)}(P_2))$, $g_e^{\text{mod}} = g_e - g_e(P_2)$. Az érintkezési meridián új helykoordinátája ezek után már egyszerűen számolható $r_e^{(2)} = r_e^{(1)} + g_e^{\text{mod}}$. A normális irányú hézag $g_n = g_e^{\text{mod}} \cdot n_e$, ahol n_e az érintkezési normális, estünkben $n_e = -(\cos \alpha e_z + \sin \alpha e_r)$.

Az alsó test felső pereme vízszintes. A lekopott réteg a perem P_1 pontjába fog kifutni. Ezzel párt alkotó P_1 pont új helyzetét (a P_1^{new} pontot) kell megtalálni. Bár a felső test nem kopik, mégis a háló módosítása válik szükségessé. A 23b. ábra szemlélteti a P_1 pont új helyzetét az egyes és a kettes testen. Nyilván ezt iterációval érjük el. A kúpos fék terhelésekor a P_1^{new} és a P_1 pontok a tér azonos pontjába kerülnek. Hasonló áll fenn a többi csomópontnál, sőt a perem minden pontjában is. Ezzel a módszerrel új módosított végelelemes hálózhoz jutunk. Az optimalizációs feladatnál p -verziós elemeket használunk, a számítási eredmények $p=8$ fokú polinomhoz rendelték, a végelelemes hálót a 24. ábra tünteti fel. Anyagállandók az 1. táblázat Anyag 1 által megadottak. A kettes test külső $r_i^{(2)} = 120 \text{ mm}$ sugarán az elmozdulás zérus, a B_1 test a felső peremen $p^- = 100 \text{ MPa}$. nyomással terhelt. Az $r_i^{(1)} = 20 \text{ mm}$ és $z = 80 \text{ mm}$ peremeken a körirányú elmozdulás úgyszintén zérus, amivel a számítás a test csavarását is figyelem beveszi. A csavarást okozó tehelést a kontakt tartományon ébredő csúsztatófeszültség okozza, $\tau_{yn} = \mu p_n$, $\mu = 0.2$. (Az elmozdulásmezők az u_r radiális, u_θ körirányú és az u_z vertikális elmozdulások). Az optimalizáció után kialakuló végelelem hálót a 24. ábra tünteti fel, a jól láthatóan, kopott réssel. A mechanikai peremérték feladat végelelemes modelljénél jelentkező ismeretlenek száma 19334.

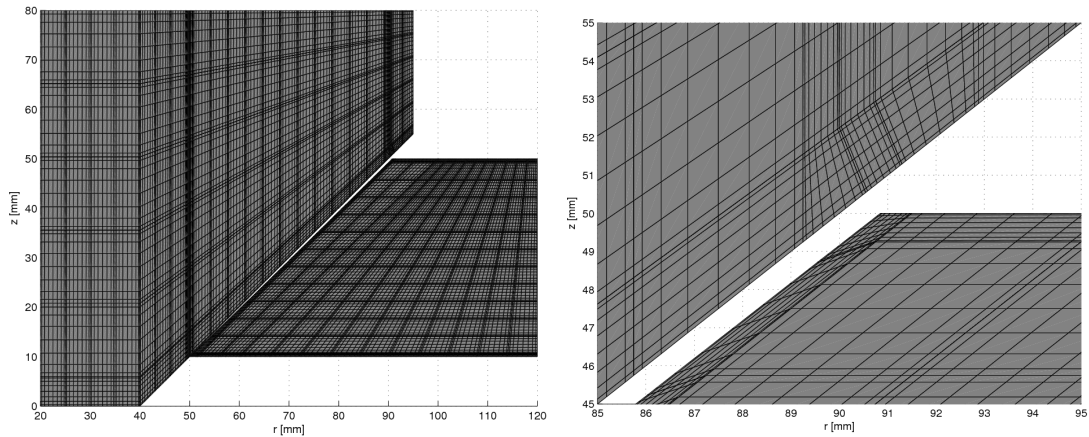
Az eredeti konstrukcióban, kopás előtt, a legnagyobb érintkezési nyomás a P_1 pontban lép fel, gyakorlatilag a teljes F_0 függőleges erő itt adódik át az alsó testre. Számításainkban $\mu_d = 0$.

A kiszámolt normálirányú hézagot a 25a. ábra, míg a nyomást a 25b. ábra tartalmazza. Az érintkezési tartomány P_1, P_2 végpontjaiban a feszültségállapot szingularitásokkal rendelkezik, a feszültségek ezen pontok környékén nagymértékben változnak. Például a P_2 előtt a perem szabad, utána felfele haladva már nagy feszültséget találunk. A feszültségállapot jobb megközelítésére ezen pontok környezetében kismértékű elemeket vettünk fel (lásd 24. ábra).

Hasonlóan az 1-es testnél az érintkezési tartományon túli szakaszokon a normál-feszültségek zérus értékkel kell, hogy rendelkezzenek, amit kismértékű oszcilláció után el is érünk. A normálirányú büntetőparaméter függvény értéke gyakorlatilag azonos az elméleti nyomással, 26. ábra.

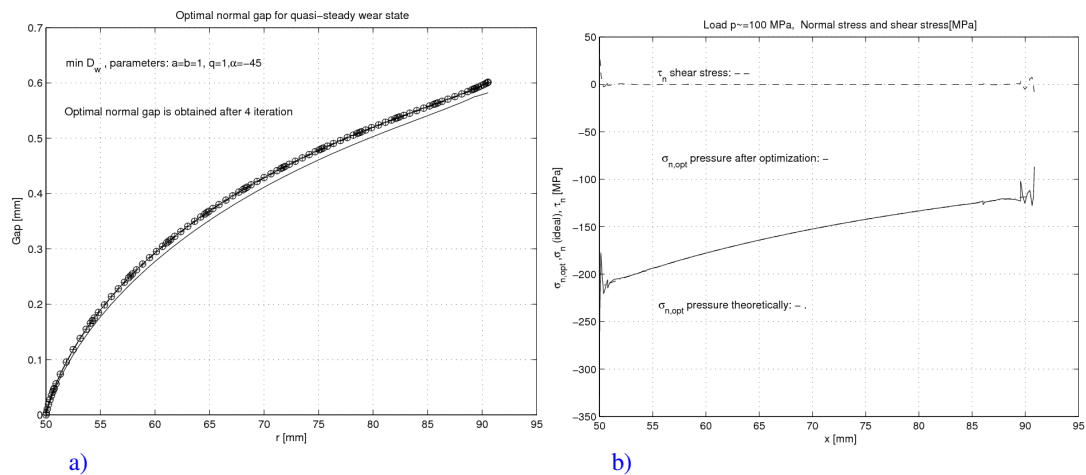


23. ábra. Kúpos fék geometriája és terhelése: a), az új perem meghatározása a B_2 testen: b)



24. ábra. Végeselemes háló az optimalizálás végén.

A Mises-féle redukált feszültséget lefutását láthatjuk a 27. ábrán. Láthatóan a 2-es test P_2 pontjában igen nagy a feszültség értéke. Ez a pont a szerkezet éles szögű sarkán van, ami nyilvánvalóan feszültséggyűjtő helynek felel meg. A további σ_r, σ_z feszültségek 1-es testbeli lefutását a 28. ábra tünteti fel. A dinamikai peremfeltételek jó kielégülését szemlélhetjük.



25. ábra. Normális irányú hézag és az érintkezési feszültségek az érintkezési tartomány mentén a (2-es test elmozdulásmezőjéből számoltan).

Hőfejlődés hatása

Vizsgáljuk az előbbi szerkezet hőtani-mechanikai problémáját, a kúpos fék S_c érintkező felületén képződő sűrűlódási teljesítményből adódó hőfluxus hatását. A hőtani anyagállandók értékei az 1. táblázat Anyag 1 alatt található. A környezet hőmérséklete $\theta_a = 0$. A 24. ábrán látható végeselemes háló alkalmazásával a hőtani feladat ismeretlenjeinek száma 7398. A hőtani feladatot kétfajta peremfeltétel mellett fogjuk megoldani.

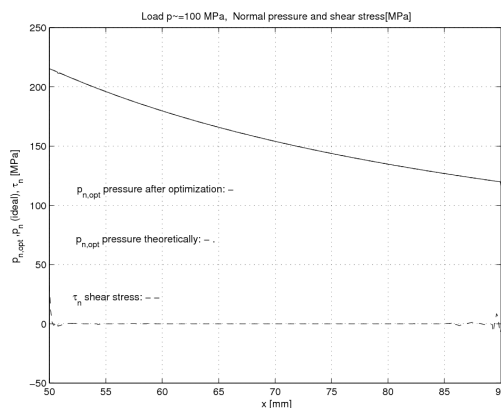
Peremfeltételek 1: Az összes perem hőátadási, kivéve a 2-es test $r = 120 \text{ mm}$ peremét, ahol előírt a $\theta_a = 0^\circ$ hőmérséklet.

A testekben kialakult hőmérséklet mezőt a 29 a-c. ábrák tartalmazzák, illetve a 2-es test normálirányban 6 iterációs lépésben kiszámolt kezdeti hézagot, alakot a 29d. ábra tünteti fel a kvázi-állandósult kopási állapothoz tartozóan.

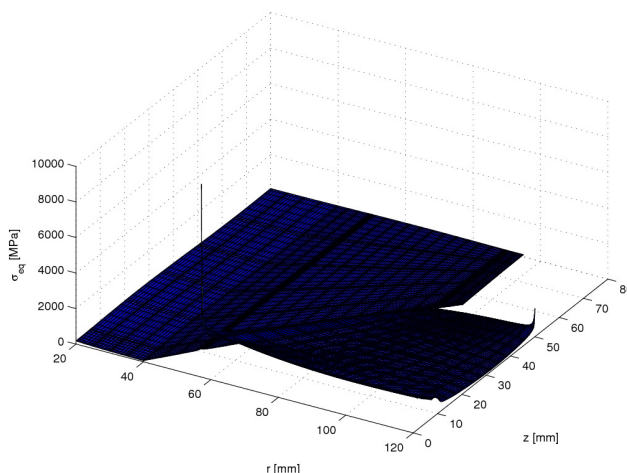
Peremfeltételek 2: Az érintkezési tartományon kívüli az összes peremen hőátadás zajlik.

A kiszámolt eredmények közül ennél a peremfeltételnél is ugyanazon diagramokat közöljük. A testekben kialakult hőmérséklet mezőt a 30 a-c. ábrák tartalmazzák, illetve a 2-es test normálirányban 6 iterációs lépésben kiszámolt kezdeti hézagot, alakot a 30d. ábra tünteti fel a kvázi-állandósult kopási állapothoz tartozóan.

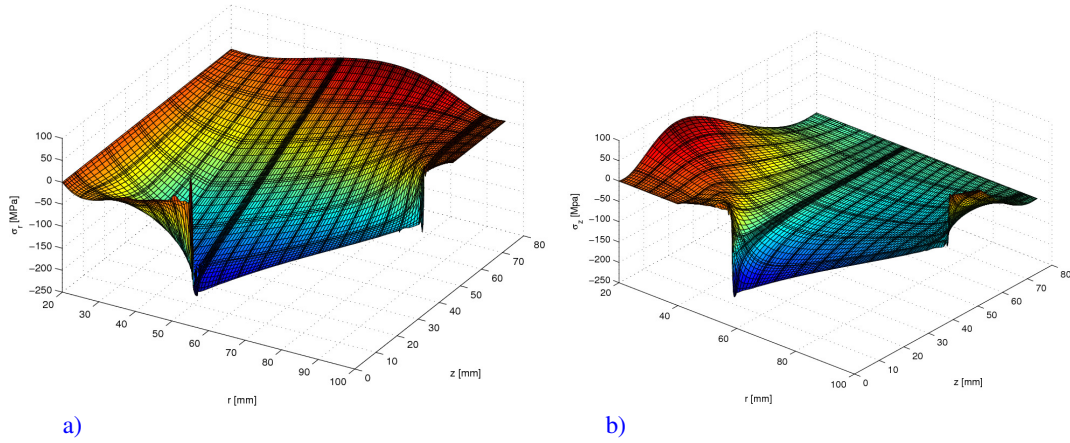
A kétfajta peremfeltétel lényegesen más megoldáshoz vezet, hisz a Peremfeltétel 1-nél a maximális hőmérséklet jóval kisebb a Peremfeltétel 2 -nél kapottakhoz képest. Ez nyilván a kezdeti hézag lefutására is befolyással bír.



26. ábra. Nyomás (p_n mint a normálirányú büntetőparaméter) függvény az érintkezési tartomány mentén.



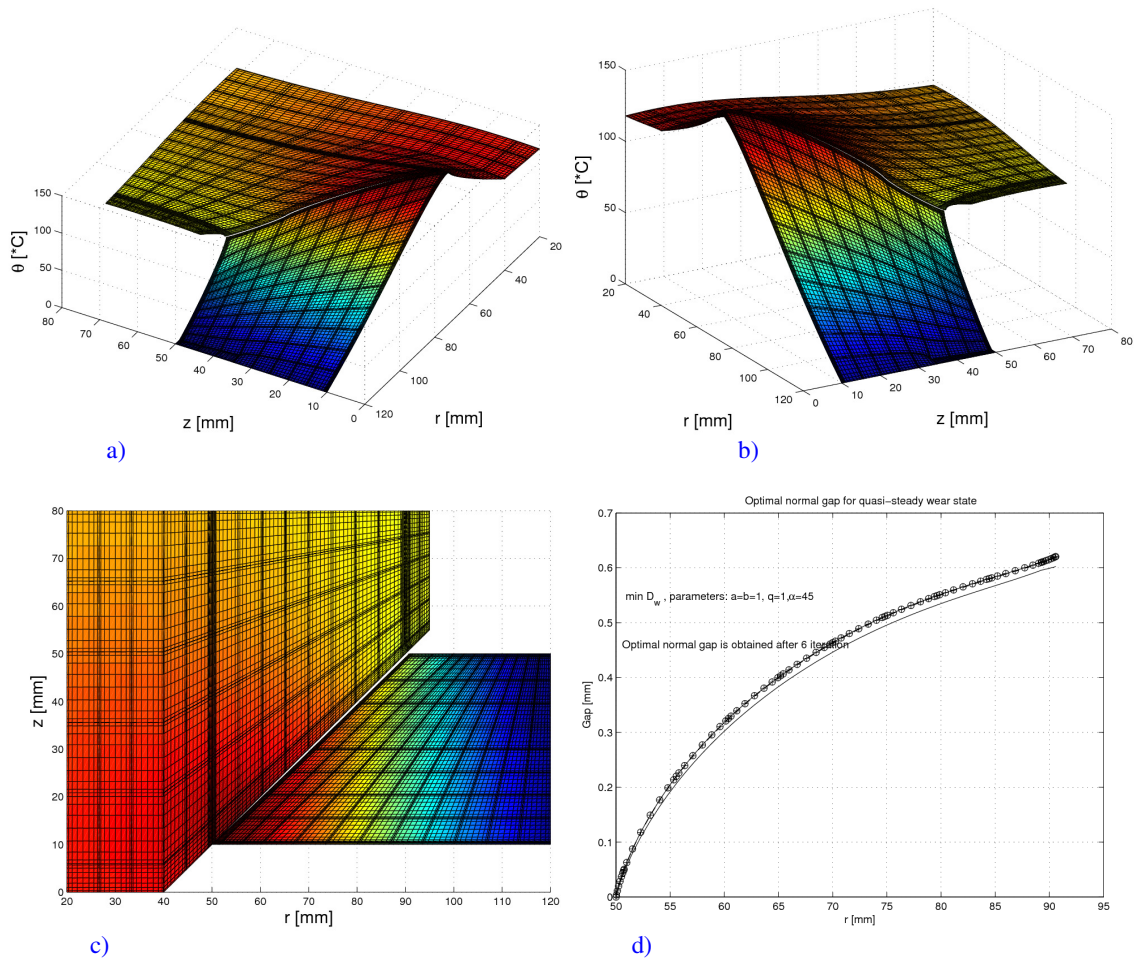
27. ábra. Mises-féle redukált feszültség kvázi-állandósult kopásnál



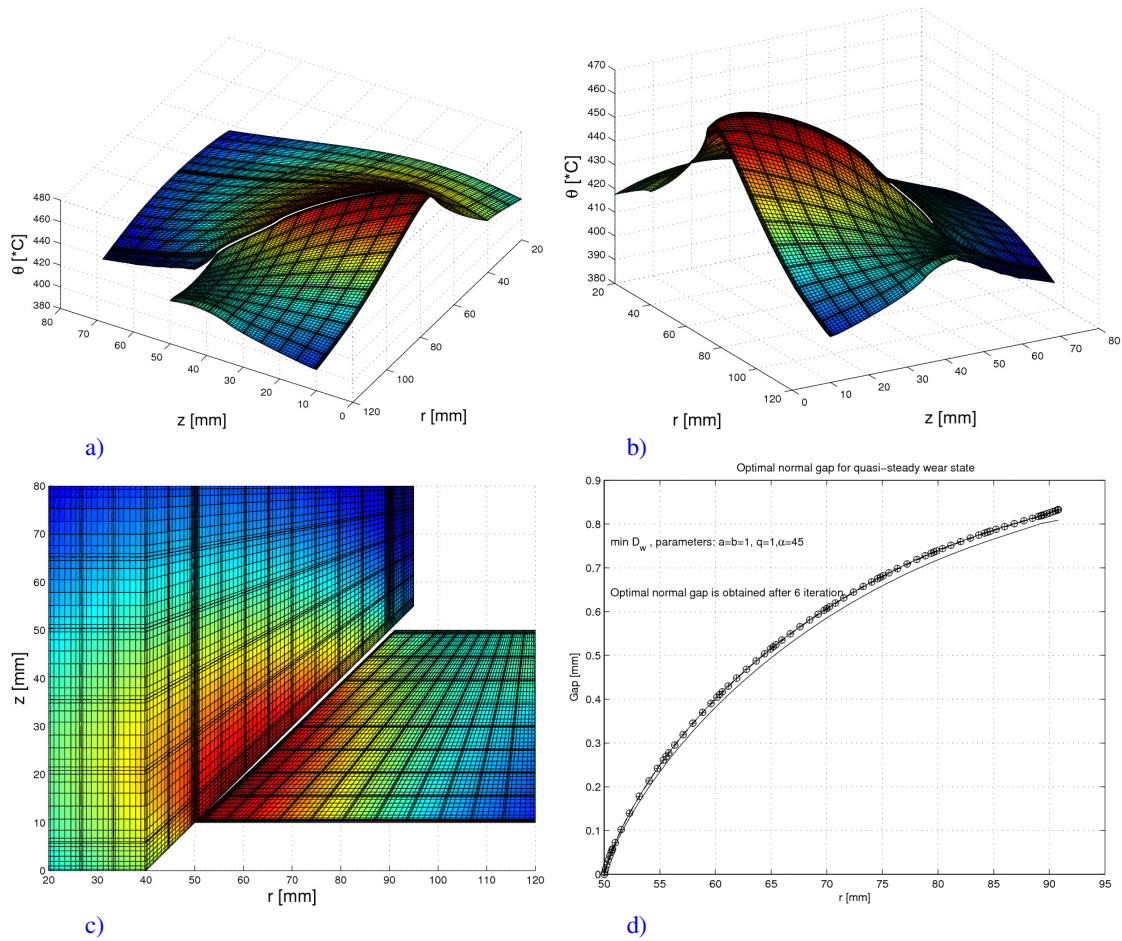
a) b)
28. ábra. Feszültségmezők a B_1 testben: a) σ_r , radiális, b) σ_z , vertikális normál feszültségek

Modellek összehasonlítása

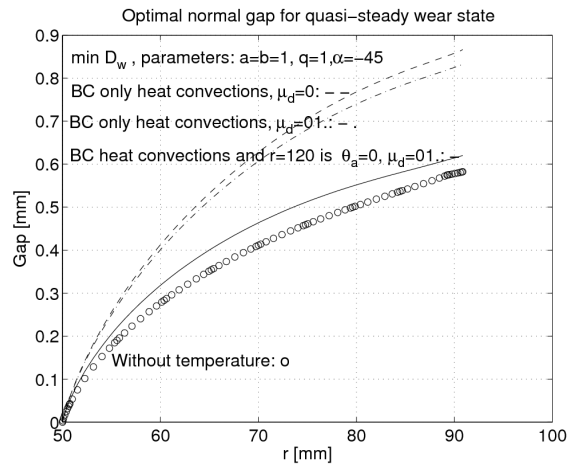
Érdekes összehasonlítani a kapott eredményeket arra vonatkozólag, hogy a D^r modellnél használt μ_d paraméter milyen hatással van a kezdeti hézagra. A számítások elvégzésével, az eredményeket összegyűjtve a 31. ábrába, láthatjuk, hogy a legnagyobb hézagot a *Peremfeltétel 2*-nél, $\mu_d = 0$ -nál kapjuk. A $\mu_d = 0.1$ kicsiny mértékben csökkenti a maximumot. A *Peremfeltétel 1* eredménye csak kismértékben növeli a hézag függvényét a hő nélküli esethez képest.



c) d)
29. ábra. Peremfeltétel 1 -nél: a)-c) Hőmérséklet mezők, d) Normális hézag a testek között.



30. ábra. Peremfeltétel 2- nél: a)-c) A testek hőmérséklet mezői, d) Normális hézag a testek között.



31. ábra. Normális hézag, különböző hőtani peremfeltételeknél és a lekopott anyag mozgását figyelembevevő D' modell μ_d paraméterének hatásával.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Az irodalomban a kopás folyamatának szimulálásával sok munka foglalkozik. Számosan kimutatták pl. [75,76], hogy egy bizonyos idő eltelte után a kopás stabilizálódik, állandósul, ami azt jelenti, hogy a kialakult érintkezési feszültségek nem változnak, a testek közötti közeledés sebessége, a fentiekben használ

szóhasználat, a merevtestszerű kopás sebessége állandóvá válik. Numerikus szimulációnál az állandósult állapot eléréséhez nagyon sok időlépés szükséges és az időlépésenkénti kopásból adódó új testalakok a merevségi mátrixok időnkénti átszámolását is megkövetelik, ami vésősoron a számítási időt igen megnöveli. A jelen munkában bemutatott kutatási eredmények azt mutatják, hogy az állandósult állapothoz tartozó érintkezési feszültség közvetlenül a kopási disszipációs teljesítmény minimalizálásával meghatározható. Ezek ismeretében az ún. érintkezési nyomás részleges vezérlési technikájának felhasználásával [3,4,12] a testek kopott alakja is meghatározható. A számításokhoz a gyors konvergenciájáról ismert, a görbült alakot jól leíró p -verziójú végelem-módszert használjuk [73,74], mind a mechanikai, mind a hőtani probléma megoldásakor.

A vizsgálat másik lényeges eleme, hogy feltételezésünk értelmében a terhelések olyanok, hogy képlékeny alakváltozások nem lépnek fel, a mechanikai és hőtani probléma anyagállandói nem függenek a hőmérséklettől, vagyis a kétféle feladatot, egymást követően oldhatjuk meg: Egyiknél a lerögzített hőmérsékletmező, másiknál a lerögzített alak és elmozdulásmező mellett számoljuk ki a mechanikai mezőket, a kopott új alakot, ill. a hőmérsékletmezőt, lásd a Doboz 1-beli algoritmust.

A kopásnál, a gyakorlat által jól visszaigazolt modifikált Archard-féle kopási törvényt használjuk. Egyszerűségével jól leírhatók az izotróp súrlódási esetek. Más, anizotróp súrlódási törvényekkel [77-80] alatti munkákban találkozunk. A szerzőknek nem ismeretes olyan munka, amely anizotróp súrlódásnál elemezné az állandósult kopás fennállásának körülményeit. Banichuk és társai munkáiban további érdekes érintkezéssel és kopással kapcsolatos optimalizációs feladatokkal találkozunk [81,82].

Az állandósult állapot a gépek üzemeltetésénél az ún. *Bejáratás* után kialakuló állapotnak felel meg. Mivel az állandósult állapot körülményei az általunk felállított optimalizációs feladtból közvetlenül következnek, a tervező számára ez hasznos információul szolgálhat.

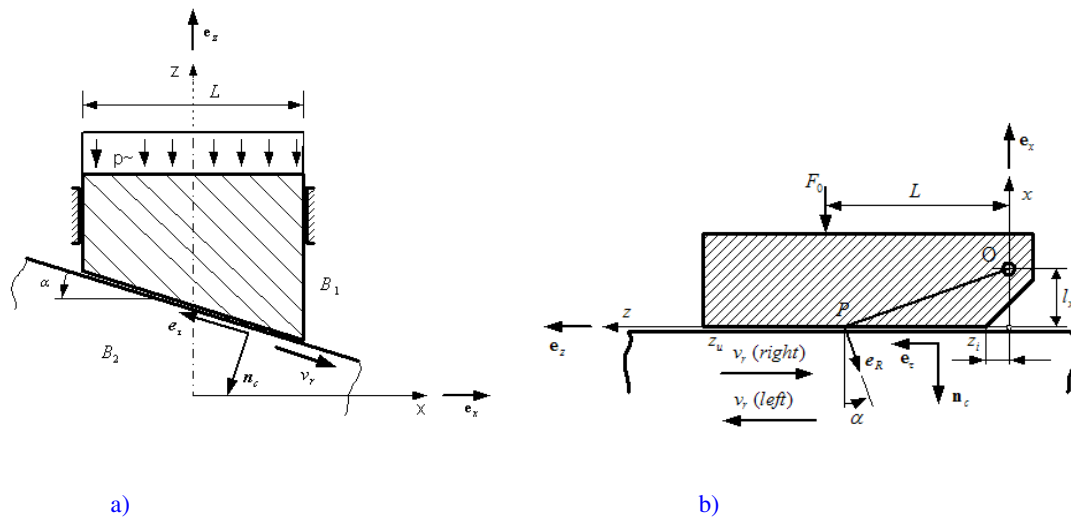
Köszönetnyilvánítás

A jelen munkát elősegítette magyar részről az OTKA K67825 pályázat, a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV program támogatása, lengyel részről a Lengyel Tudományos és Oktatási Minisztérium no.POIG.01.03.01-14-013/08-00 szerződéses megbízása.

APPENDIX A: Néhány szerkezet állandósult kopásához tartozó összegzett eredmények

Példa A1:

Az A1a. ábrán vázolt fékberendezés p^- nyomással terhelt. A B_2 jelű test jobbra (az ábrán feltüntetett) vagy balra v_r állandó sebességgel mozog. A testek közötti súrlódási tényező μ . A testek vastagsága t .



A1. ábra. Súrlódó fékek.

A kialakuló nyomás

$$p_n = \frac{F_0}{I_{\pi(q=1)}^{D_n}} (\cos \alpha)^{\frac{1}{p}} \quad (A1)$$

ahol

$$I_{D_w}^{(\mp(q=1))} = \frac{Lt}{\cos \alpha} (\cos \alpha)^{1/b} (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) \quad (A2)$$

ami

$$p_n = \frac{F_0}{\frac{Lt}{\cos \alpha} (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha)} \quad (A3)$$

alakra egyszerűsíthető. A \mp összegzés felső jele a jobbra az alsó jele a balra történő csúszásnak felel meg.

Példa A2:

Az A1 b. ábrán vázolt szerkezet felső része az O csap körül el tud fordulni. A terhelése F_0 erő. Ekkor [14] alapján, $c = (b+1)q - 1$ jelöléssel

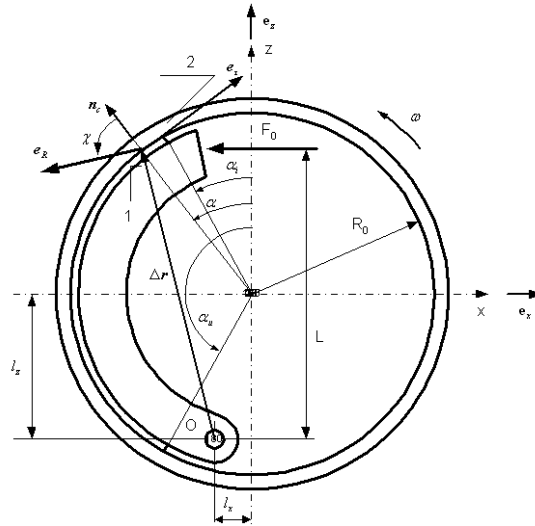
$$I_{D_w}^{(\mp(q))} = \int_{z_i}^{z_u} (z \mp \mu l_x)^{1+(1-q)/c} z^{q/c} t dz, \quad p_n = \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{(\mp(q))}} (z \mp \mu l_x)^{(1-q)/c} z^{q/c} \quad (A4)$$

amiből $q = 1$ paraméternél az állandósult kopási állapot érintkezési nyomása és merevtestszerű kopási sebessége az alábbi

$$p_n = \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{(\mp(q=1))}} z^{1/b}, \quad \dot{w}_n = \dot{\lambda}_M z, \quad \dot{w}_R = \frac{\dot{w}_n}{\cos \alpha} = \dot{\lambda}_M \sqrt{l_x^2 + z^2} \quad (A5)$$

Példa A3: Dobfék esete

A dob ω szögsebességgel forog az óramutató járásával ellentétesen. A fékpofára ható F_0 erő nyomatéka az O csapra $m_0 = F_0 L$. A testek közötti súrlódási tényező μ . A fékpofa az O csap körül elfordulva fejti ki fékező hatását, amint látni fogjuk, az α központi szög függvényeként közel sem állandó intenzitású megoszló érintkezési nyomás mellett. A merevtestszerű kopási vektor iránya az elfordulásból adódóan az e_R -el esik egybe.



$$R_0 = 100 \text{ mm}, \quad l_x = 20 \text{ mm}, \quad l_z = 80 \text{ mm}, \quad \alpha_i = 30^\circ, \quad \alpha_u = 150^\circ$$

A2. ábra. Dobfék.

Az alábbi mennyiségek bevezetésével

$$m^\mp(\alpha) = [l_z \sin \alpha + l_x \cos \alpha] \mp \mu (l_z \cos \alpha - l_x \sin \alpha + R_0), \quad I_{D_w}^{(\mp(q))} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_u} (m^\mp(\alpha) (1 \mp \mu g \alpha)^{-q})^{1/c} m^\mp(\alpha) R_0 t d\alpha, \quad A(\alpha) = \sqrt{(l_x - R_0 \sin \alpha)^2 + (l_z + R_0 \cos \alpha)^2} \quad (A6)$$

a nyomás állandósult kopásnál

$$p_n = \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{\mp(q=1)}} (A(\alpha) \cos \chi)^{1/b} = \frac{F_0 L}{I_{D_w}^{\mp(q=1)}} (l_x \cos \alpha + l_z \sin \alpha)^{1/b} \quad (A7)$$

$$\text{ahol } \cos \chi = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{e}_R = (l_x \cos \alpha + l_z \sin \alpha) \frac{1}{A(\alpha)}.$$

Az észlelt kopási sebességek, úgyszintén állandósult kopásnál

$$\dot{w}_R = \frac{\dot{w}}{\cos \chi}, \quad \dot{w}_R = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i \left(\frac{F_0 L}{I_{D_w}^{\mp(q=1)}} \right)^b (R_0 \omega)^{a_i} A(\alpha), \quad \dot{w}_R = \dot{\lambda}_M A(\alpha) \quad (A8)$$

Ellentétes forgásiránynál a \mp jel alsó tagját kell figyelembe venni.

Példa A4: Pofásfék további vizsgálata a pofák különböző megtámasztásainál

1. a pofa csak merevtestszerű eltolódással rendelkezik

Ezt az esetet részletesen vizsgáltuk a 3.2 pont alatt. Ekkor a merevtestszerű kopási sebesség $\dot{\lambda}_F = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z$, a nyomás pedig az alábbi alakban számolható

$$p_n = \left(\frac{\dot{\lambda}_F (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha)}{[\tilde{\beta}_1 v_r^{a_1} + \tilde{\beta}_2 v_r^{a_2}]} (1 \mp \mu \tan \alpha)^{-1} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (A9)$$

2. a pofa, felső sarkának környékén elhelyezett csap körül el tud fordulni (A3. ábra O_R megtámasztás)

A csap külön-külön, a pofa felső bal, ill. a jobb sarkánál nyerhet elhelyezést. A csap középpontjának helykoordinátája: $x = x_F$, $z = z_F$, a szögelfordulási Lagrange szorzó $\dot{\lambda}_M = -\dot{\lambda}_M \mathbf{e}_y$. A csapon átmenő y tengellyel párhuzamos tengelyre számított F_0 terhelés nyomatéka $M_0^y = -F_0 x_F$.

Az A3. ábrán felvett \mathbf{e}_τ -ra és az \mathbf{n}_c érintkezési normálisra tekintettel az érintkező testek kopási sebesség vektorai az alábbiak szerint számíthatók:

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = -\dot{w}_{1,n} \mathbf{n}_c + \dot{w}_{1,\tau} \mathbf{e}_\tau = -\dot{w}_{1,n} (\mathbf{n}_c + \tan \chi \mathbf{e}_\tau) = -\dot{w}_{1,R} \mathbf{e}_R, \quad \dot{\mathbf{w}}_2 = \dot{w}_{2,n} \mathbf{n}_c - \dot{w}_{2,\tau} \mathbf{e}_\tau = \dot{w}_{2,n} (\mathbf{n}_c + \tan \chi \mathbf{e}_\tau) = \dot{w}_{2,R} \mathbf{e}_R \quad (A10)$$

amennyiben az érintkezési normális és a kopási sebesség vektor közötti szöget akkor fogjuk pozitívnak tekinteni, ha a kopási vektor az \mathbf{e}_τ -ra pozitív vetülettel rendelkezik, azaz $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_\tau \geq 0$. Ez a feltétel a A4. ábrán felvett két megrajzolt esetben a P_2 pontban áll fenn.

Legyen

$$T = (x_F - R_0 \sin \alpha)(\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) - (z_F - R_0 \cos \alpha)(\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha), \quad (A11)$$

továbbá az érintkezési feszültség

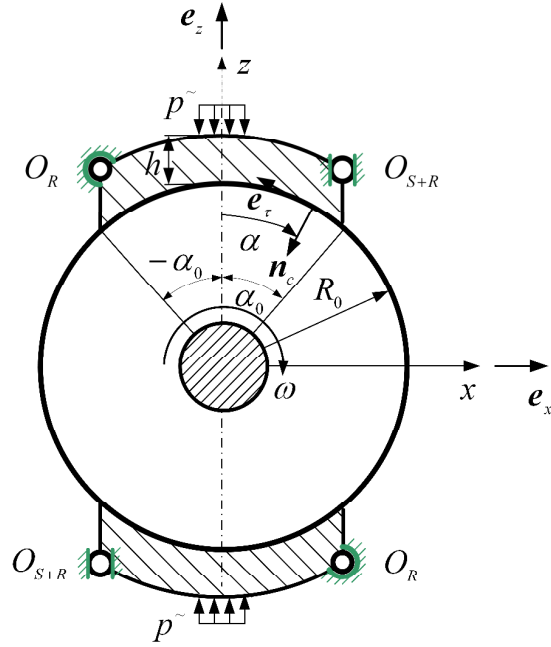
$$\mathbf{t}_1^c = -p_n (\mathbf{n}_c \pm \mu \mathbf{e}_\tau) = -p_n \boldsymbol{\rho}_c^\pm, \quad (A12)$$

ahol $\boldsymbol{\rho}_c^\pm = \mathbf{n}_c \pm \mu \mathbf{e}_\tau = -(\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) \mathbf{e}_z - (\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha) \mathbf{e}_x$ [\pm : felső jel (+) az óramutató járásával egyező forgáshoz tartozik (13. ábra), az alsó jelnél (-) a forgás óramutató járásával ellentétes].

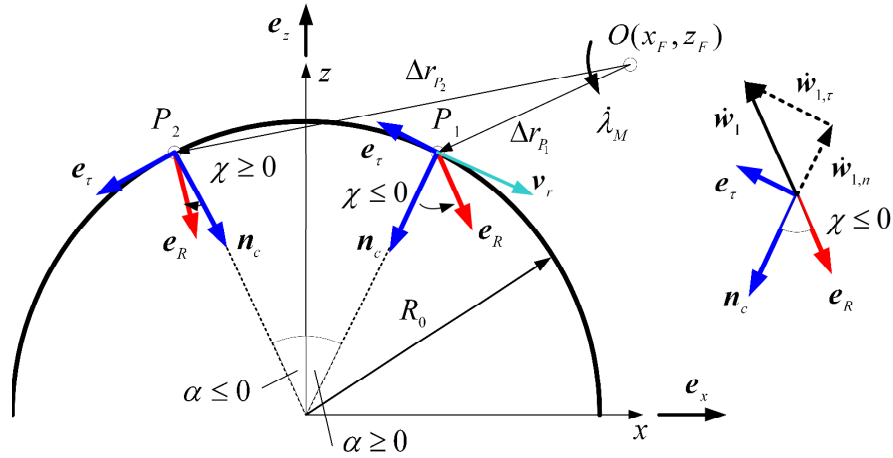
A fentiekre tekintettel a nyomásra vonatkozó általános (17b) összefüggésből

$$p_n = \left(\frac{\dot{\lambda}_M T}{[\tilde{\beta}_1 v_r^{a_1} + \tilde{\beta}_2 v_r^{a_2}]} (1 \pm \mu \tan \chi)^{-1} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (A13)$$

összefüggés vezethető le.



A3. ábra. Pofák lehetséges megtámasztásai. Egy időben O_R vagy O_{S+R} megtámasztások léteznek. O_R esetén a pofák elfordulnak, O_{S+R} esetén a pofák függőlegesen eltolódnak és a megvezetésnél lévő csap körül elfordulnak.



A4. ábra. χ előjelének eldöntése $e_R \cdot e_\tau$ szorzat alapján. e_R merőleges a Δr helyvektorra.

A $\dot{\lambda}_M$ meghatározására a nyomatéki egyensúlyi egyenlet szolgál, azaz $e_y \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \Delta r \times t_1^c t R_0 d\alpha + M_0^y = 0$, ami a kijelölt műveletek elvégzése után az alábbi

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_n T t R_0 d\alpha - F_0 x_F = 0 \quad (A13)$$

A p_n behelyettesítésével az egyensúlyi egyenletből a $K = \sum_{i=1}^2 \tilde{\beta}_i v_r^{a_i}$ jelöléssel

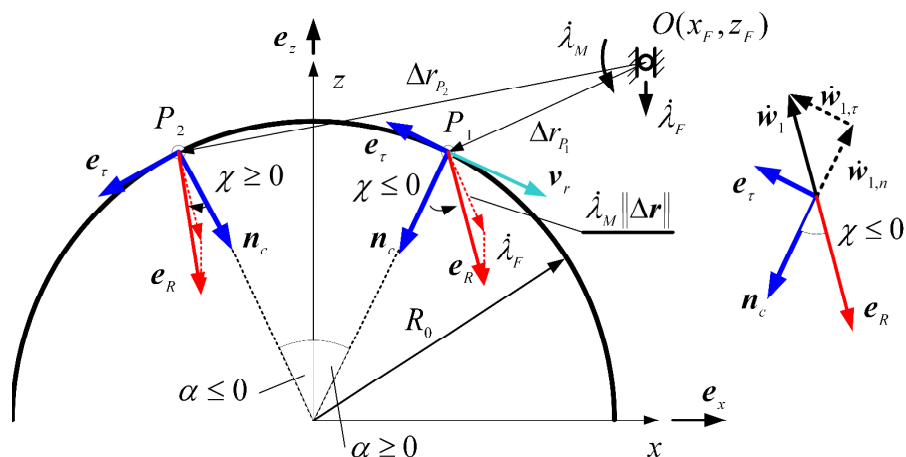
amiből következik, hogy a nyomás nem függ a $\tilde{\beta}_j, a_i, i = 1, 2$ kopási paramétereiktől

továbbá a merevtestszerű kopási szögsebesség lineáris függvénye K -nak:

3. a pofa, felső sarkának környékén elhelyezett csap mentén függőlegesen megvezetett, továbbá a csap körül el tud fordulni (A3. ábra O_{csap} megtámasztás)

Ez az általános eset a fenti két aleset kombinációja. A kopási sebesség a kétféle merevtestszerű elmozdulásból származik: $\dot{\mathbf{w}}_R = \dot{w}_R \mathbf{e}_R$, ahol $\mathbf{e}_R = \frac{\dot{\hat{\mathbf{r}}}_R}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}_R\|}$, $\dot{\hat{\mathbf{r}}}_R = -\dot{\lambda}_F \mathbf{e}_z - \dot{\lambda}_M \mathbf{e}_y \times \Delta \mathbf{r}$, amelyben $\dot{\lambda}_F, \dot{\lambda}_M$ jelentik az ismeretleneket.

Az A5. ábra jelöléseit is figyelembe véve $\dot{\lambda}_R = \dot{\lambda}_M(z_F - R_0 \cos \alpha) \mathbf{e}_x - (\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M(x_F - R_0 \sin \alpha)) \mathbf{e}_z$, aminek abszolút értéke $\|\dot{\lambda}_R\| = \sqrt{[\dot{\lambda}_M(z_F - R_0 \cos \alpha)]^2 + [\dot{\lambda}_F + \dot{\lambda}_M(x_F - R_0 \sin \alpha)]^2}$.



A5. ábra. A fékpofa (B_1 test) merevtestszerű mozgása: λ_F eltolódás és λ_M szögelfordulás

Egyszerű vetítéssel $nr = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{e}_R$, $tr = \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_R$. Ha $tr \geq 0$, akkor $tg\chi = \frac{\sqrt{1-nr^2}}{nr}$, ha $tr \leq 0$, akkor

$$tg\chi = -\frac{\sqrt{1-nr^2}}{nr} \quad (\text{lásd A5. ábra}). \text{ A } \dot{\lambda}_F, \dot{\lambda}_M \text{ meghatározására két egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre}$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} t_1^c \cdot e_z t R_0 d\alpha - F_0 = 0, \quad e_y \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \Delta r \times t_1^c t R_0 d\alpha + M_0^y = 0, \text{ amelyek az alábbi egyszerű alakkal rendelkeznek}$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_n (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) t R_0 d\alpha - F_0 = 0, \quad \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_n T t R_0 d\alpha - F_0 x_F = 0 \quad (A16)$$

A nyomás

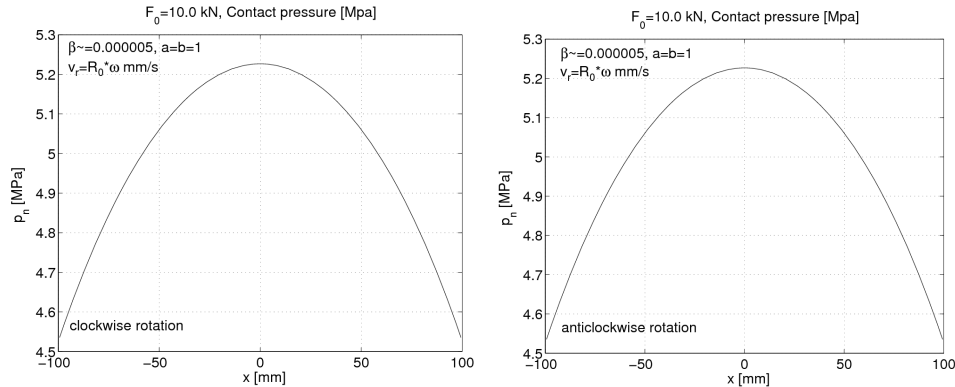
$$p_n = \left(\frac{\dot{\lambda}_p (\cos \alpha \mp \mu \sin \alpha) + \dot{\lambda}_M T}{K} (1 \pm \mu \operatorname{tg} \chi)^{-1} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad K = \left(\tilde{\beta}_1 v_r^{a_1} \right) + \left(\tilde{\beta}_2 v_r^{a_2} \right) \quad (A17)$$

Ebben az esetben is a nyomásnak a $\tilde{\beta}_i, a_i, i=1,2$ kopási paramétereiktől való függetlensége könnyen igazolható, vagyis a nyomás a K -ban szereplő relatív sebességtől sem függ. A nyomásra kapott összefüggésből a megtámasztás 1. és 2. aleseteire vonatkozó összefüggések közvetlenül megkaphatók. Megjegyzendő az 1. merevtestszerű eltolódási mozgásnál $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \chi$.

A pofa merevtestszerű mozgásának különbözősége miatt a keletkező nyomás erős eltérést mutat. Nézzünk néhány esetet. A súrlódási tényező $\mu = 0.25$. A kopási paraméterek a nyomáslefutását bemutató diagramokon olvashatók. A tárcsa szögsebessége $\omega = 10/s$, a tárcsa sugara $R_0 = 200 \text{ mm}$. A szerkezet vastagsága $t = 10 \text{ mm}$. A fékpofa közepén ható p megoszló terhelés erdője $F_0 = 10.0 \text{ kN}$.

1. eltolódás (megtámasztás 13a. ábra szerint)

A nyomást az A6. ábra tünteti fel. A széleken $p_n(x = -100) = p_n(x = 100) = 4.5265 \text{ MPa}$, a merevtestszerű kopási sebesség $\dot{\lambda}_F = 0.10453 \text{ mm/s}$.



A6. ábra. A nyomás megoszlása független a tárcsa forgás irányától

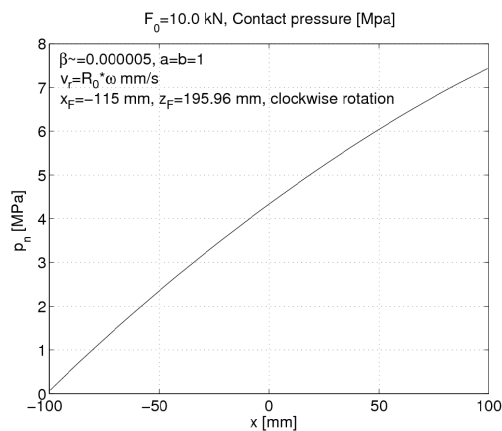
2. elfordulás az $x = x_F, z = z_F$ pontba elhelyezett O csap körül (A3. ábra O_R megtámasztás)

A feladatoknál, láthatóan, a csap a pofa bal és jobb oldalán helyezkedik el, mégpedig a 13a. ábrán vázolt fékpofa $x = -100, x = 100$ koordinátájú oldalainak felső sarka közelében.

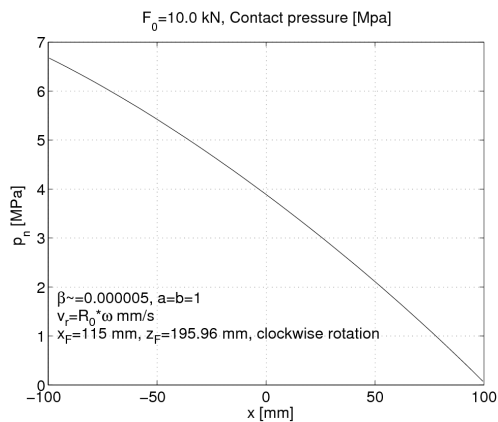
A forgásiránytól természetesen függ a megoldás. A szerkezethez csatolt O csap és a forgás viszonyától függően, az A6. ábrán az a) és a d), ill. a b) és a c) esetben állnak a $p_n^{(a)}(x) = p_n^{(d)}(-x)$, ill. a $p_n^{(b)}(x) = p_n^{(c)}(-x)$ nyomások közötti összefüggések. Ezen diagramok a nyomás kiszámítására vonatkozó eljárás helyességéről tanúskodnak. A merevtestszerű elfordulás kopási sebességét az A1. táblázat foglalja össze a különböző oldalon történő megtámasztás és forgásirány tekintetében. A kapott eredmények helyállóságát jól mutatják a $\dot{\lambda}_M$ értékeinek előjelbeli különbözősége pl. az $x_F = -115$ és $x_F = 115$ csap elhelyezésnél mindkét irányú forgásnál.

x_F [mm]	Forgás iránya óramutató járással	$\dot{\lambda}_M \cdot 10^5$ [rad/s]
-115	egyező	-7.536
-115	ellentétes	-6.764
115	egyező	6.764
115	ellentétes	7.536

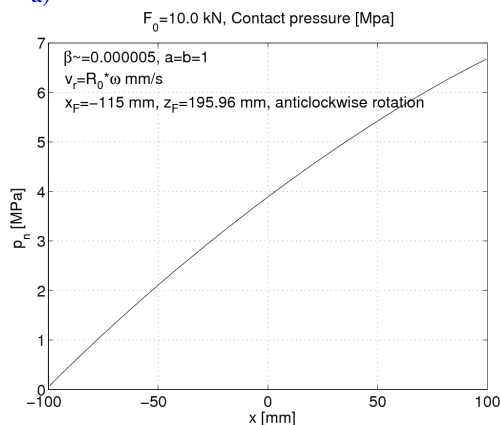
A1. táblázat



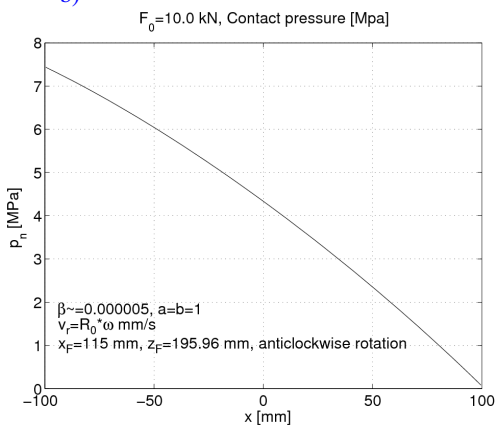
a)



b)



c)

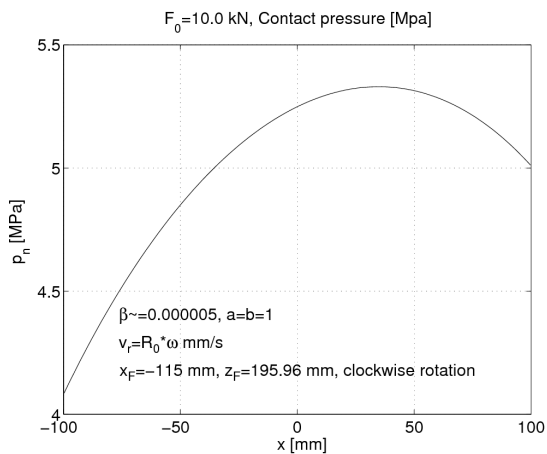


d)

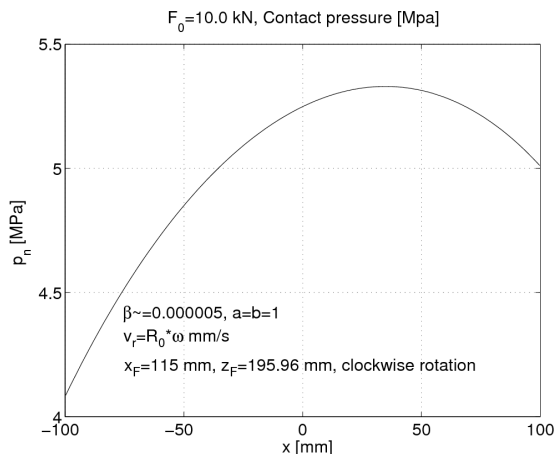
A7. ábra. Nyomáslefutások a pofa O csap körüli szögelfordulásakor. A nyomások az egyes ábrákhoz tartozóan $p_n^{(a)}(x), \dots, p_n^{(d)}(x)$ -ként jelöltek. Az a), b) esetek az óramutató járásával egyező forgáshoz, a c) és d) eset az óramutató járásával ellentétes forgáshoz tartozik.

3. eltolódás és szögelfordulás az O csap A5. ábrán vázolt megvezetésével (A3. ábra O_{S+R} megtámasztás)

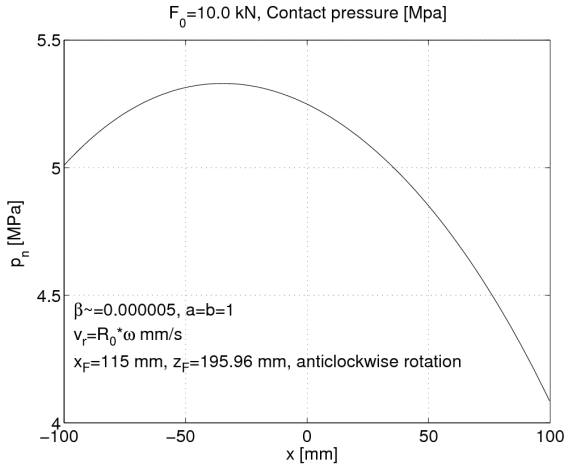
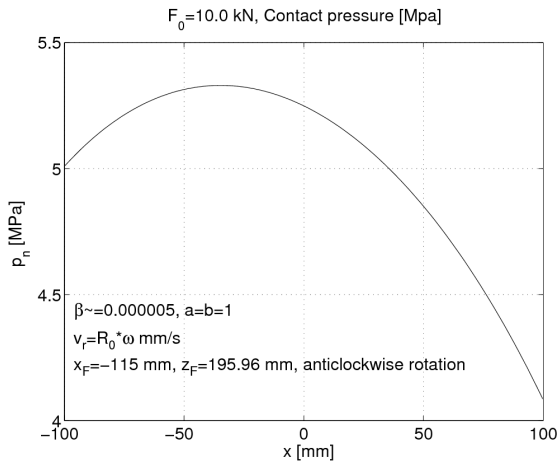
Erre az esetre is érvényesek az előző estben megemlített nyomásra vonatkozó tulajdonságok.



a)



b)



c)

d)

A8. ábra. Nyomáslefutások a pofa O csapjának függőleges megvezetésekor és a pofa ezen csap körüli szögelfordulásakor. A nyomások az egyes ábrákhoz tartozóan $p_n^{(a)}(x), \dots, p_n^{(d)}(x)$ -ként jelöltek. Az a), b) esetek az óramutató járásával egyező forgáshoz, a c) és a d) eset az óramutató járásával ellentétes forgáshoz tartozik.

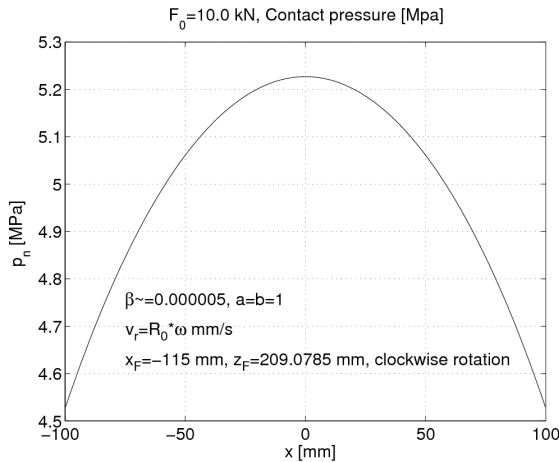
x_F [mm]	Forgás iránya óramutató járással	$\dot{\lambda}_F$ [mm/s]	$\dot{\lambda}_M \cdot 10^6$ [rad/s]
115	ellentétes	0.009409	9.462
115	egyező	0.01158	-9.462
-115	ellentétes	0.01158	9.462
-115	egyező	0.009409	-9.462

A2. táblázat

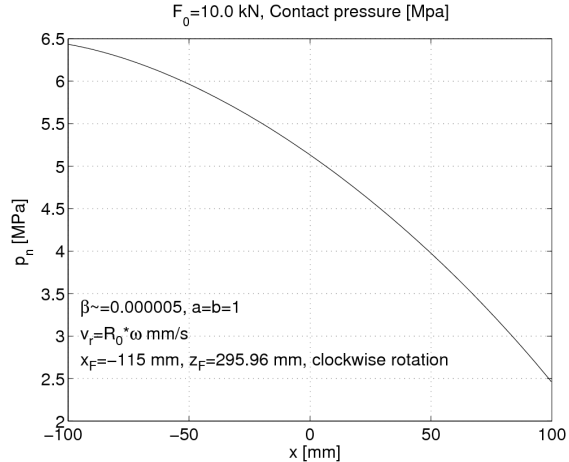
Növelve a z_F értékét $z_F = 209.0785 \text{ mm}$ -nél gyakorlatilag az A6. ábrán kapott megoldáshoz jutunk. Pl. $x_F = -115 \text{ mm}$ nél és óramutató járásával egyező forgás esetén $\dot{\lambda}_F = 0.010454 [\text{mm/s}]$, $\dot{\lambda}_M = 4.5488 \cdot 10^{-9} [\text{rad/s}]$, a nyomások a fékpofa szélein $p_n(\alpha = -30^\circ) = 4.52675 \text{ MPa}$, $p_n(\alpha = 30^\circ) = 4.52628 \text{ MPa}$, ami praktikusán szimmetrikus nyomásmegoszlást jelent.

A nyomásmegoszlás alakja átbillen a másik irányba, ha a z_F -t tovább növeljük. Álljon példaként a $z_F = 295.96 \text{ mm}$ megtámasztás esete. Ekkor $\dot{\lambda}_F = 0.01335 [\text{mm/s}]$, $\dot{\lambda}_M = 2.6883 \cdot 10^{-5} [\text{rad/s}]$.

A nyomások lefutását az A9. ábra tünteti fel.



a)



b)

A9. ábra. Nyomáslefutások a pofa O csapjának függőleges megvezetésekor és a pofa ezen csap körüli szögelfordulásakor különböző z_F értékeknél, a) $z_F = 209.0785 \text{ mm}$, b) $z_F = 295.96 \text{ mm}$.

Még egy érdekes összehasonlítás. Ha kiszámoljuk a $D_F = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \mu p_n R_0 \omega t R_0 d\alpha$ súrlódási disszipáció értékét az

1. megtámasztásnál és a 3. megtámasztás $x_F = -115 \text{ mm}$, $z_F = 195.96, 209.0785, 295.96 \text{ mm}$ eseteiben, rendre a következőt kapjuk:

1. megtámasztás $D_F = 5.2268 \cdot 10^6 \text{ Nmm/s}$,
3. megtámasztás 1. esetet: $D_F = 5.2487 \cdot 10^6 \text{ Nmm/s}$, 2. esetet $D_F = 5.2267 \cdot 10^6 \text{ Nmm/s}$, 3. esetet $D_F = 5.1326 \cdot 10^6 \text{ Nmm/s}$.

Ez azt jelenti, hogy a z_F növelésével a súrlódási disszipációs teljesítmény csökken, tehát a fékezőhatás romlik.

Ha összegyűjtjük a merevtestszerű eltolódási kopási sebesség értékeit, láthatjuk, hogy

1. megtámasztás $\dot{\lambda}_F = 0.10453 \text{ mm/s}$,
3. megtámasztás 1. esetet: $\dot{\lambda}_F = 0.009409 \text{ mm/s}$, 2. esetet $\dot{\lambda}_F = 0.010454 [\text{mm/s}]$, 3. esetet $\dot{\lambda}_F = 0.01335 [\text{mm/s}]$.

A fékpofa oldalmagassági felezőpontjának $z_F = 184 \text{ mm}$ es magasságát választva kérdéses mechanikai mennyiségek az üzemeltetés szempontjából még kedvezőbbek, hisz a fékezőhatás nő, a kopás meg csökken.

$D_F = 5.2708 \cdot 10^6 \text{ Nmm/s}$, $\dot{\lambda}_F = 0.008173 \text{ mm/s}$.

Példa A5: A 18. ábrán vázolt tórusz felületű érintkező forgástestek este

Ebben az esetben mivel $r = e + R_0 \sin \alpha$, az (54)-ből nyerhető érintkezési nyomás

$$p_n = \frac{F_0}{I_{D_w}^{D', W^s}} (e + R_0 \sin \alpha)^{-a/b} (\cos \alpha)^{1/b} \quad (\text{A18})$$

ahol

$$I_{D_w}^{(q=1) \left| D' \right|_{W^s}} = 2\pi \int_{\alpha_i}^{\alpha_e} (e + R_0 \sin \alpha)^{1-a/b} \left[\frac{(\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha)}{\cos \alpha + \mu_d \sin \alpha \operatorname{sign} \alpha} \right] (\cos \alpha)^{1/b} R_0 d\alpha, \quad (\text{A19})$$

$\alpha_i = \alpha(r_i^{(1)})$, $\alpha_e = \alpha(r_e^{(1)})$, továbbá a zárójeles rész felső tagja a D' , alsó tagja a W^s súrlódási modellhez tartozik. A felső bélyeg merevtestszerű mozgásának irányába eső kopási sebesség

$$\dot{w}_R = \dot{w}_{1,R} + \dot{w}_{2,R} = (\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) \left(\frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1) \left| D' \right|_{W^s}}} \right)^b \omega^a = \text{const} \quad \text{és} \quad \dot{\lambda}_F = \dot{w}_R. \quad (\text{A20})$$

Amennyiben $R_0 \Rightarrow \infty$, $\alpha \Rightarrow 0$, akkor a síkfelületű érintkezési tartománnyal rendelkező hengeres testekre vonatkozó eredményeket kapjuk meg [12]

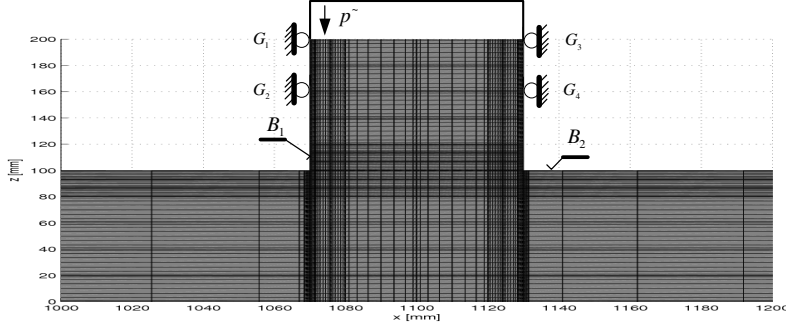
$$p_n = \frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)}} (e + R_0 \sin \alpha)^{-a/b} = \frac{F_0}{I_{D_w}^{(q=1)}} r^{-a/b}, \quad \dot{\lambda}_F = \dot{w}_R = \dot{w}_n, \quad I_{D_w}^{(q=1)} = \int_{r_i}^{r_e} 2\pi r^{(1-\frac{a}{b})} dr \quad (\text{A21})$$

APPENDIX B: Blokk és sáv állandósult kopásának vizsgálata különböző kopási paramétereknél

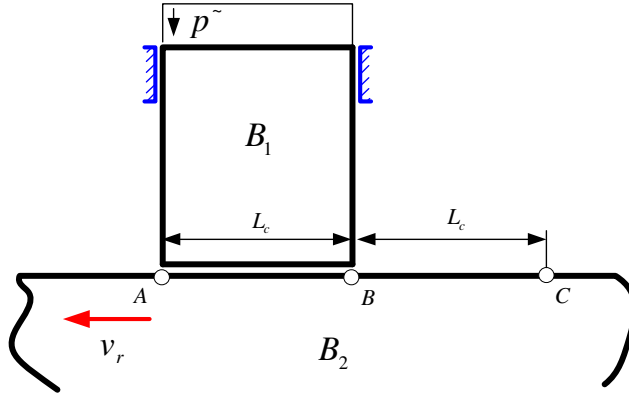
Az Appendix célja megvizsgálni azt, hogy az állandósult kopás valóban fennáll, ha az optimális alakból indulunk ki, kihagyva a bejáratás időszakát. Azt is vizsgáljuk, mi van akkor, ha az egyik test (a blokk) nem kopik, és milyen lesz ekkor az érintkezési nyomás. A számításokat p -verziós végelemekkel végezzük el, $p=8$ esetén. A felső test, a megtámasztásból következő, a kopás mértékétől függő mozgásra képes, miközben az alsó test vízszintesen balra állandó sebességgel mozog.

Első eset, csak az alsó test kopik

Áleset 1: A felső test rugalmas, az alsó merev, a kopási paraméterek a következők: $\tilde{\beta}_1 = 0$, $\tilde{\beta}_2 = 5 \cdot 10^{-7}$, $a_1 = a_2 = 1$, $b = 1$, a blokk terhelése $p^- = 16.6666 \text{ MPa}$, a rugalmassági anyagállandók azonosak a Példa 2 1. táblázatában foglaltakkal. A súrlódási tényező $\mu = 0.25$. Legyen a megfogás a B1. ábrán vázolt. Vagyis ebben az esetben a felső test nem kopik.



B1. ábra. Végesselemes háló és az B_1 test (blokk) megfogása.



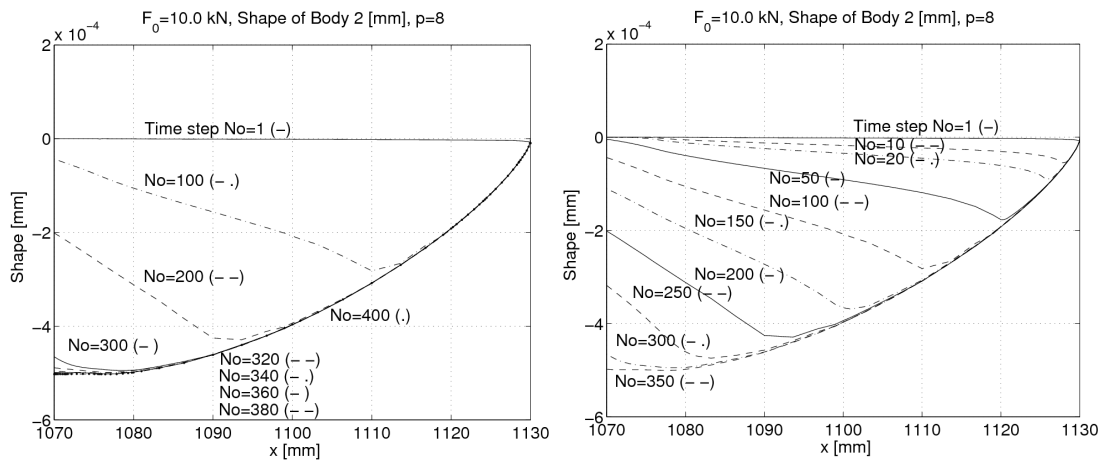
B2. ábra. B_2 -es test kopása a $B-C$ szakaszon.

A kopást a B_1 test alatt fogjuk számolni oly módon, hogy feltételezzük a B_2 -es test balra történő mozgását. Az érintkezési tartományt k_{poin} részre osztjuk fel. Minden időlépésben a B_2 test $\Delta \tilde{x} = L_c / k_{\text{poin}}$ értékkel mozdul el balra. Ez alatt fellépő kopás az alábbi összefüggéssel számolható:

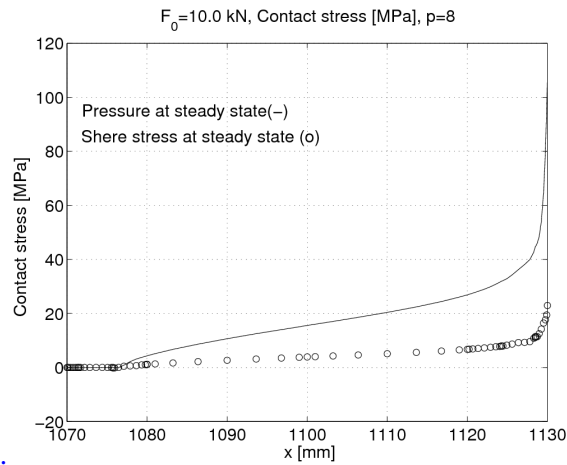
$$\Delta w_2(\tilde{x}) = \int_0^{\Delta t} \tilde{\beta}_2 p_n(\tilde{x}) v_r^{a_2} d\tau = \int_0^{\Delta t} \tilde{\beta}_2 {}^{t+\Delta t} p_n(\tilde{x}) v_r^{a_2-1} v_r d\tau = \tilde{\beta}_2 {}^{t+\Delta t} p_n(\tilde{x}) v_r^{a_2-1} \Delta \tilde{x}, \quad {}^{t+\Delta t} w_2 = {}^t w_2 + \Delta w_2. \quad (\text{B1})$$

Itt ${}^{t+\Delta t} p_n$ nyomást iterációval határozzuk meg a (25) szerint a (27) alatti korlát betartásával. Számításainkban $\gamma = 2/3$ (Galjorkin séma) értékkel dolgozunk.

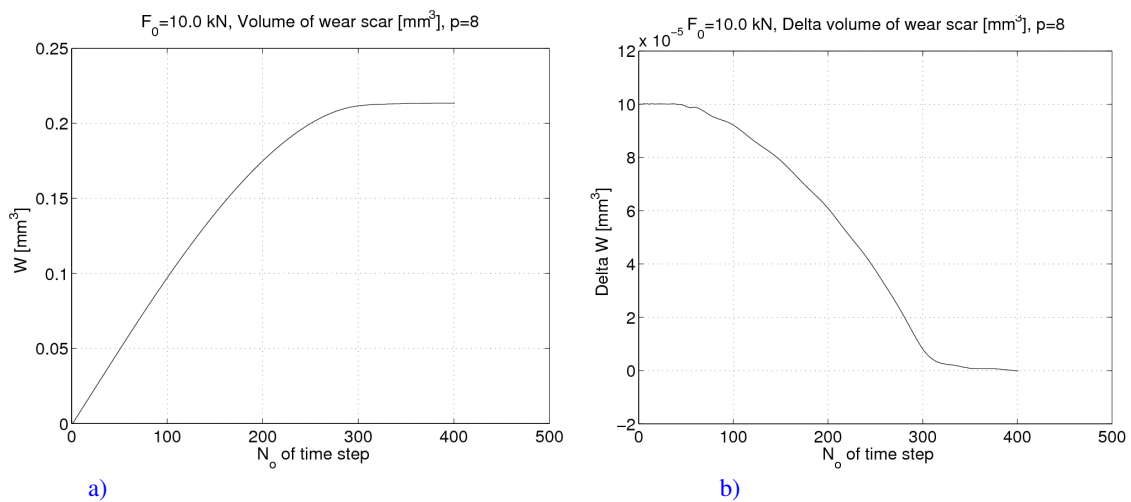
A végesselemes hálót megtartva, a B_2 testnél kialakult kopás szolgáltatja alak (peremgörbe) minden időlépésben balra tolódik $\Delta \tilde{x}$ értékkel. Ekkor csak a kontakt tartomány alatti az érintkező elemek geometriáját fogjuk megváltoztatni a módosított hézaggal. Ennél az új kezdeti alaknál megoldjuk az érintkezési feladatot és kiszámoljuk újfent a kopás Δw_2 növekményét. Ezt a folyamatot addig ismételjük, míg a gondolatban C pont az eredeti B pont helyzetébe kerül, vagyis a B_2 test további balra történő mozgása már a lekopott perem eltolódásával, azonos körülmények között zajlik, tehát állandósult kopás kialakulása mellett. Ezt láthatjuk a B3 b. ábrán a (...) görbe révén. Számításainkban $k_{\text{poin}} = 300$. A közelítő számítás miatt az állandósult állapotot $N_o \geq 330$ felett érzékeljük. Az érintkezési feszültségek megoszlását a B4. ábra mutatja. A B pontban igen magas a nyomás értéke, a $1070 \leq x \leq 1075$ intervallumban gyakorlatilag zérus.



B3. ábra. A 2-es test alakja a B pont különböző pozícióiban: $x_B = 1130 - \Delta x \cdot No$. Ha $No \geq 300$ a kopás állandósult állapothoz tartozik.



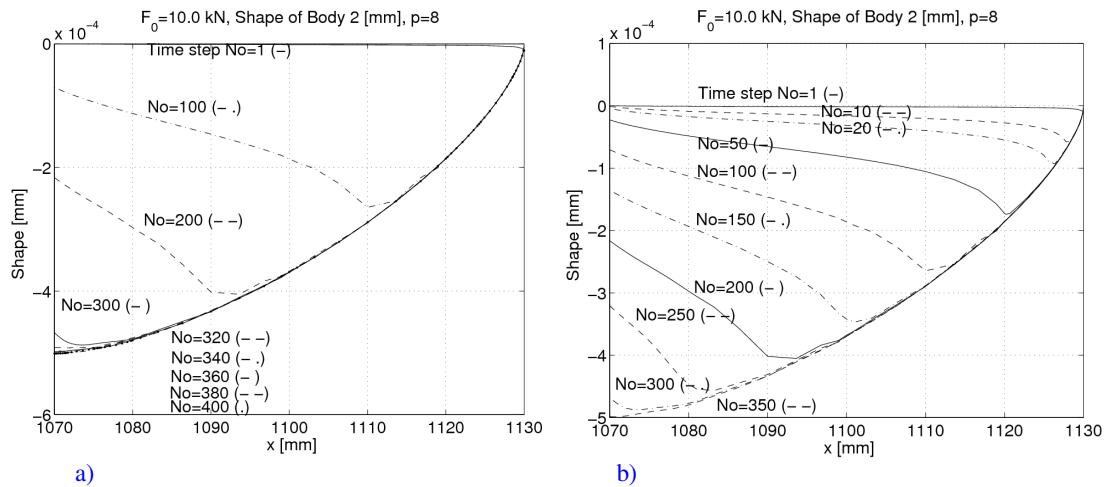
B4. ábra. A peremértékfeladat megoldásával kapott érintkezési feszültségek állandósult kopásnál.



B5. ábra. Különböző időlépésben a bélyeg alatti kopási térfogat: a) , az időlépések közötti térfogatváltozás: b).

A kopás által eltávolított anyagrész köbtartamát, annak figyelembevételével határozzuk meg, hogy a modellünkben, a kopott elemek mindig csak a felső test alattiak lesznek. Ekkor az állandósult állapotban ez a térfogat már nem változik. A B5. ábra diagramjai ezt visszaigazolják, mivel $No \geq 300$ felett a térfogat gyakorlatilag állandó, másrészt az egymást követő időlépésben a térfogatok különbsége zérushoz tart.

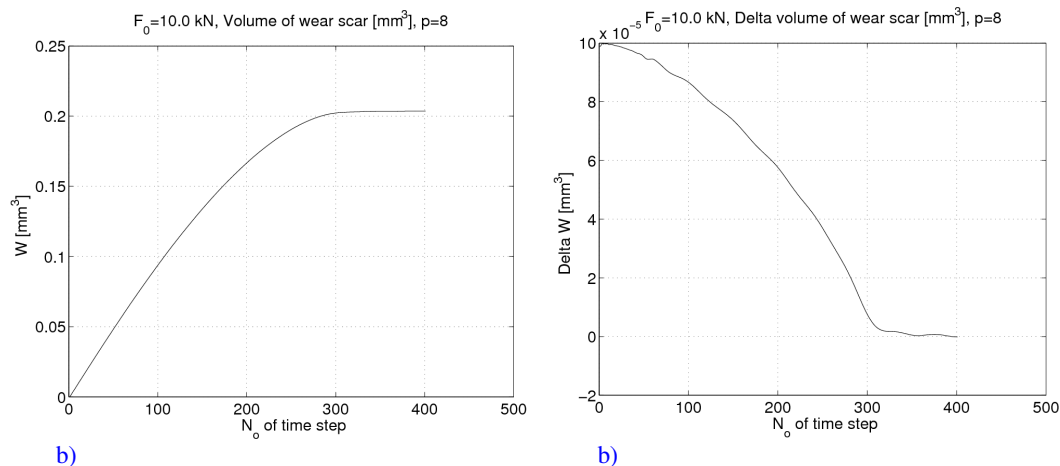
Aleset 2: Mindkét test rugalmas, de csak az alsó kopik. Hasonló számítások után az eredmények a B6. ábrán láthatóak. A kialakult állandósult kopás nyilvánvaló. Számításainkban itt is $k_{poin} = 300$.



B6. ábra. A 2-es test lekopott alakja különböző időlépésben. Elvileg, ha $No \geq 300$ a kopás állandósult.

A kapott kopott alakot összehasonlítva azzal az esettel, amikor az alsó test merev (B3. ábra), azt láthatjuk, van eltérés. Ez nyilvánvaló, hisz ezen utolsó esetben az alsó testnek is van visszarugózása. A mostani esetben az „árok” lassabban veszi fel a legmélyebb értékét. A közelítés miatt a numerikus számítás állandósult kopási állapota $No \geq 330$ -nál következik be.

Az előző esethez hasonlóan, most is meghatározzuk a kopás által eltávolított anyagrész köbtartamát. A lekopott köbtartalom maximuma kisebb, mint az előző, merev alsó testnél kapott érték. A B7. ábra diagramjai szerint az állandósult állapot $No \geq 330$ felett bekövetkezik, e felett az egymást követő időlépésben a térfogatok különbsége is a zérushoz tart. Megállapítható, hogy a numerikus szimuláció igazolta az állandósult kopás fennállását.

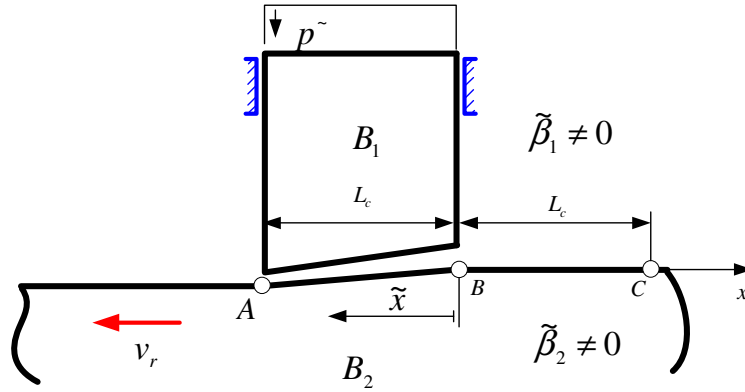


B7. ábra. Különböző időlépésben a bélyeg alatti kopási térfogat: a) , az időlépések közötti térfogatváltozás: b).

Második eset, mindkét test kopik

Aleset 1: Az alsótest merev. Legyenek a kopási paraméterek: $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 5 \cdot 10^{-6}$, $a_1 = a_2 = 1$, $b = 1$, azaz mindkét test kopik. A megoldandó feladat a B1-2. ábrán vázolt szerkezetre vonatkozik a B1. ábrán vázolt végeleemes felosztással, azzal a megjegyzéssel, hogy a G_2, G_4 görgős támaszok z koordinátja

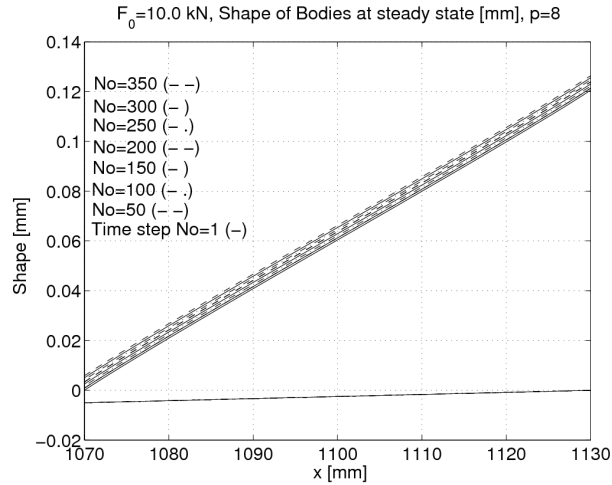
$z_{G_2} = z_{G_4} = 180 \text{ mm}$. Ebben az esetben az állandósult kopáshoz tartozó nyomás $p_{n,opt} = \tilde{p}$. A kopás számítását az optimalizációból származó alakból indítjuk a B_2 -es test balra mozgásával (lásd B8. ábra).



B8. ábra. Az állandósult kopás számítása a B_2 test balra mozgásával.

A kopás számítása azonos módon történik amint azt az **Első eset**-ben tettük. A kopást a (BI) szerint számoljuk az illető testre vonatkozó kopási paraméterek mellett. Az időlépés kezdetén a B_2 testet itt is balra mozgatjuk $\Delta \tilde{x}$ értékkel. Mivel a nyomás állandó, a w_2 függvény lineáris \tilde{x} -ben.

Ha a számítás alapján az 1-es test optimális alakja függőlegesen, mint egy merev vonal eltolódik, továbbá a 2-es testnél kiszámolt alak minden lépésben azonos alakra kopik vissza, akkor azt mondhatjuk, hogy az állandósult állapot valóban létezik. Ezt igazolja vissza a B9. ábra.



B9. ábra. Különböző időlépésekhez tartozó alakok a B_1 és B_2 test vonatkozásában az érintkezési tartományban.

Numerikus szimulációnál azonban fontos a számítás hibájának meghatározása. Vizuálisan a B9. ábra az állandósult kopást mutatja. Nézzük meg ezt pontosabban. Defináljuk az A pontban a kopásból származó adatok birtokában az alább értelmezett relatív hibát

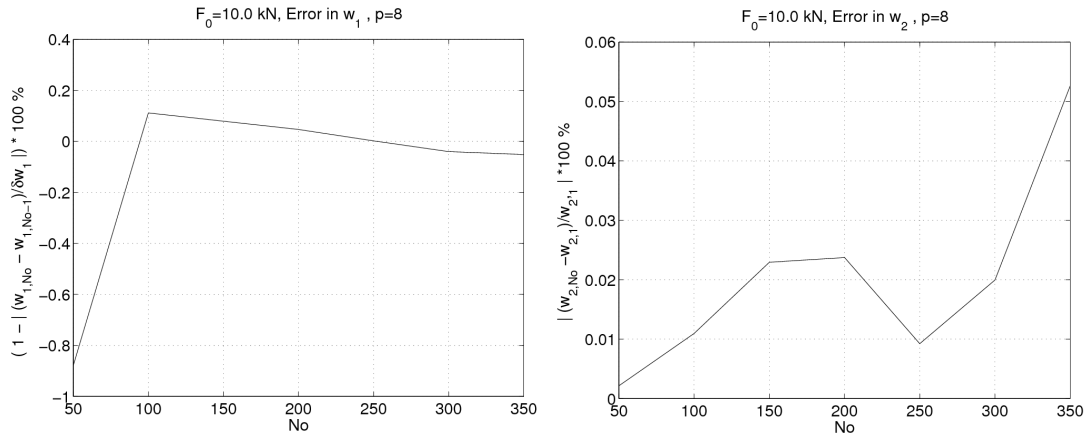
$$error_{w_1} = 100 \left(1 - \frac{|w_{1,No}(A) - w_{1,No-1}(A)|}{|\Delta w_1(A)|} \right) \% \quad (B2)$$

ahol $\Delta w_1(A) = \tilde{\beta}_1 p_{n,opt} \Delta \tilde{x} \cdot 50 = 8.3333 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ az 50 időlépés alatt, elvileg kiszámolható, pontos növekmény és $\Delta w_{1,No}(A)$ a kopási algoritmus alapján az A pontban kiszámolt kopási növekmény értéke. A B10 a. ábra szerint a hiba igen kicsiny érték, az nem haladja meg a 1 % -ot a $No \leq 350$ időlépési tartományban.

A B_2 testnél a hiba

$$error_{w_2} = 100 \frac{|w_{2,No}(A) - w_{2,1}(A)|}{|w_{2,1}(A)|} \% \quad (B3)$$

ami a B10 b. ábra szerint kisebb, mint 0.06 % .

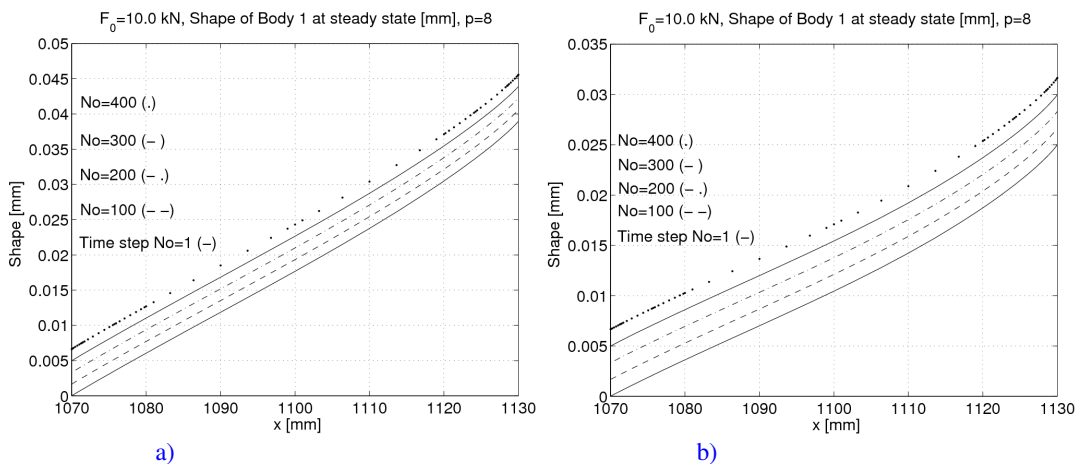


B10. ábra. A kopási algoritmus hibája, a) a w_1 , b) a w_2 vonatkozásában.

Ezek az adatok azt igazolják, hogy valóban létezik állandósult kopás, a kopási disszipációs teljesítmény minimuma által megjelölt nyomási függvény és az ebből számolható (lásd a 6. oldalon található Megjegyzés 6) /Time step No=1/ alak mellett.

Aleset 2: Az alsó test is rugalmas, mindkét test kopik. A számítást kétféle megtámasztás mellett végezzük el. Az első esetben $z_{G_2} = z_{G_4} = 160 \text{ mm}$, míg a második esetben $z_{G_2} = 160$, $z_{G_4} = 140 \text{ mm}$. A kopás folyamatát a B11. ábra mutatja. A peremgörbék a kopás folyamán merevtestszerűen felfelé tolódnak. Egy jó ellenőrzési pont az $No = 300$ időpontoz tartozó kopott peremgörbe eltolódási mértéke. Ekkor a $\Delta w_1(A) = 8.3333 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ érték 6 szorosa kell legyen az eltolódás értéke, $g^{(1)}(A) = 49.9999 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$. Numerikus számításból /első eset/ $g^{(1)}(A)_{kopásból} = 49.651 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$. A hiba: $error_{g^{(1)}(A)_{kopásból}} = 100 \cdot (g^{(1)}(A) - g^{(1)}(A)_{kopásból}) / g^{(1)}(A) = 0.17\%$. A

fentiekben számolt további hibák hasonló nagyságrendűek. Megállapítható, hogy a vizsgált mindkét esetre vonatkozó kopási folyamat ebben az esetben is állandósult. A felső test érintkezési tartománybeli alakja azt is mutatja, hogy a felső test megtámasztása jelentősen befolyásolja azt. (Nem mindegy, hogy a görgös megtámasztások $z_{G_i}, i=1, \dots, 4$ koordinátái mekkorák.)



B11. ábra. A B_1 és B_2 test érintkezési tartománybeli alakjai különböző időpontokban: a) megtámasztás $z_{G_2} = z_{G_4} = 160 \text{ mm}$, b) $z_{G_2} = 160$, $z_{G_4} = 140 \text{ mm}$ görgő elhelyezéseknél.

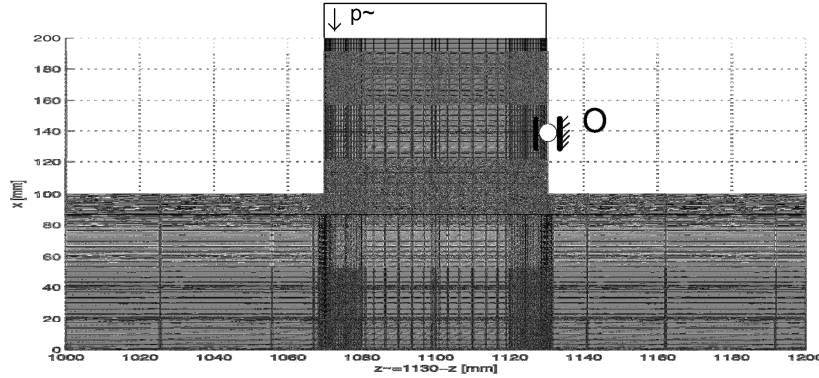
Harmadik eset

Végezetül nézzük meg a Példa 2-ben vizsgált konstrukciót, jelen esetben hőhatás nélkül. A hőhatás figyelembevétele az állandósult kopás jelenlétét nem folyásolja be, csak a kopott alakot, tetemes számítási időráfordítással. E miatt most a hőhatást nem vesszük figyelembe.

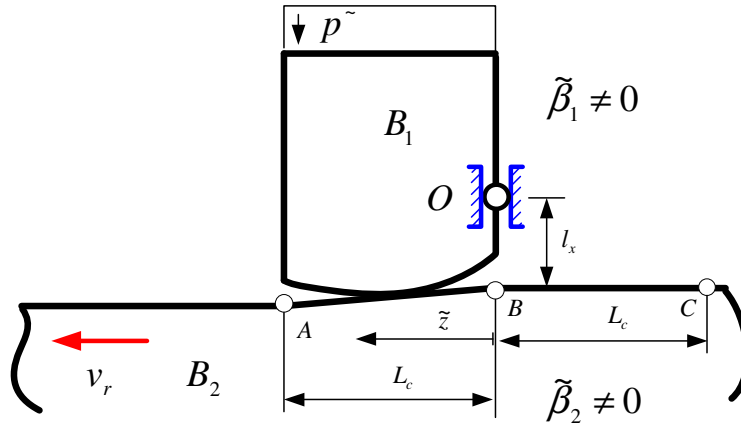
Aleset 1:

A számításnál feltételezett kopási paraméterek: $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 5 \cdot 10^{-6}$, $a_1 = a_2 = 1$, $b = 1$ mindkét test kopását írják elő. A szerkezetet a B12-13. ábrán láthatjuk. A felsőtest, az O körül el tud fordulni, ill. függőlegesen el tud mozdulni. Terhelés és az anyagállandók azonosak a Példa 2-ben megadatokkal, azzal a megszorítással, hogy a 2-es test merev.

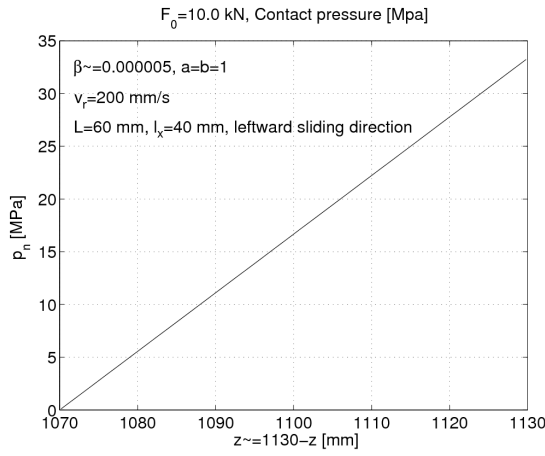
Amint már láttuk a Példa 2-ben (16. oldal), az optimális megoldásnál a merevtestszerű eltolódás és szögelfordulás sebessége: $\dot{\lambda}_r = 0.06666 \text{ mm/s}$, $\dot{\lambda}_\theta = -0.001111 \text{ rad/s}$. Az érintkezési nyomás a B14 a. ábrán látható, az optimális alakokat a B14 b. ábra tünteti fel. A kopási szimulációban nyert alakokat a B14 c. ábra tartalmazza.



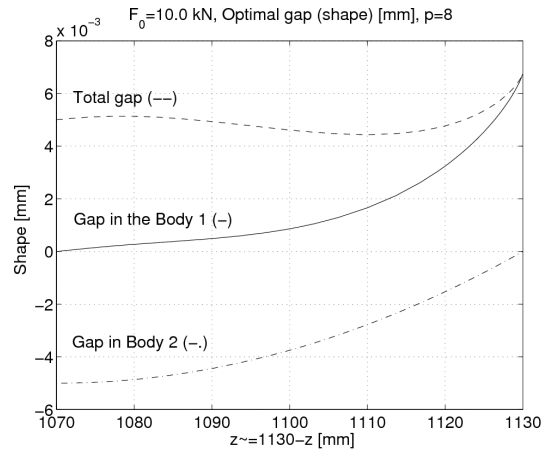
B12. ábra. Végeselemes felosztás és megtámasztás.



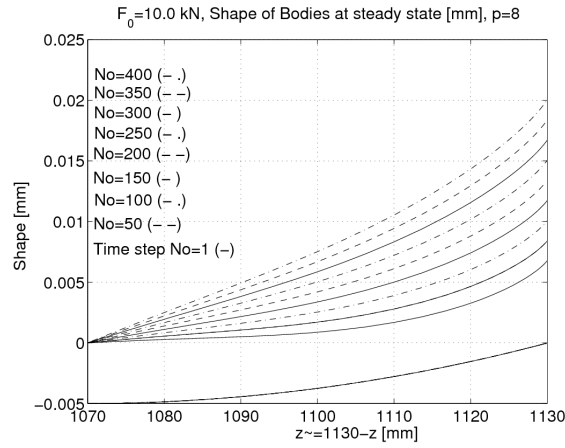
B13. ábra. Az állandósult kopás számítása a B_2 test balra mozgatásával.



a)

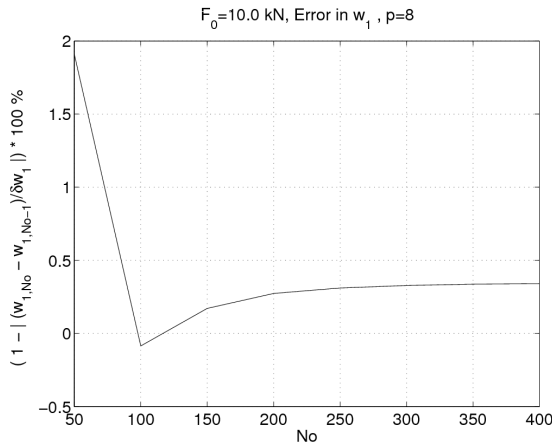


b)

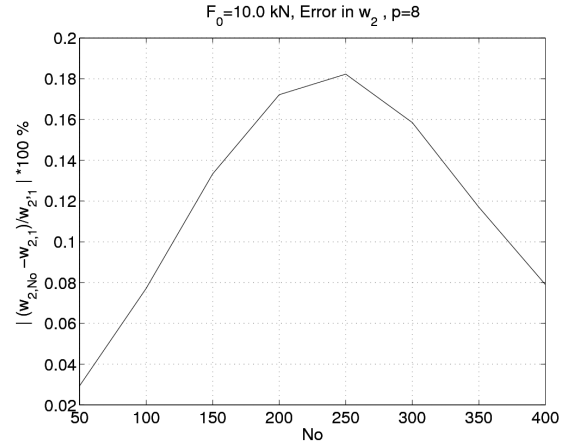


c)

B14. ábra. Kialakult nyomás: a), az optimalizációból nyert kezdeti alakok: b), a különböző időpontokhoz tartozó kopott alakok: c). Az alsó test merev, a felső rugalmas.



a)



b)

B15. ábra. A kopási szimuláció hibája, a) a w_1 -re, b) a w_2 -re vonatkozólag.

A következő hiba definíciójával

$$error_{w_1} = 100 \left(1 - \frac{|w_{1,No}(B) - w_{1,No-1}(B)|}{|\Delta w_1(B)|} \right) \% \quad (B4)$$

ahol a pontos kopási növekmény a B pontban 50 időlépés alatt $\Delta w_1(B) = \tilde{\beta}_1 \tilde{p}_{n,opt}(B) \Delta \tilde{z} \cdot 50 = 0.0016666 \text{ mm}$ és $\Delta w_{1,No}(B)$ a B pontban a kopási szimuláció No -dik lépésében számolt kopás mértéke, azt látjuk, hogy a hiba kisebb, mint 2 % a vizsgált $No \leq 400$ időlépés tartományban. Jelen esetben $\Delta \tilde{z} = 60/300 = 0.2 \text{ mm}$. A hiba lefutását a B15 a. ábra mutatja.

A 2-es testnél hasonlóan, mint az előző esetben

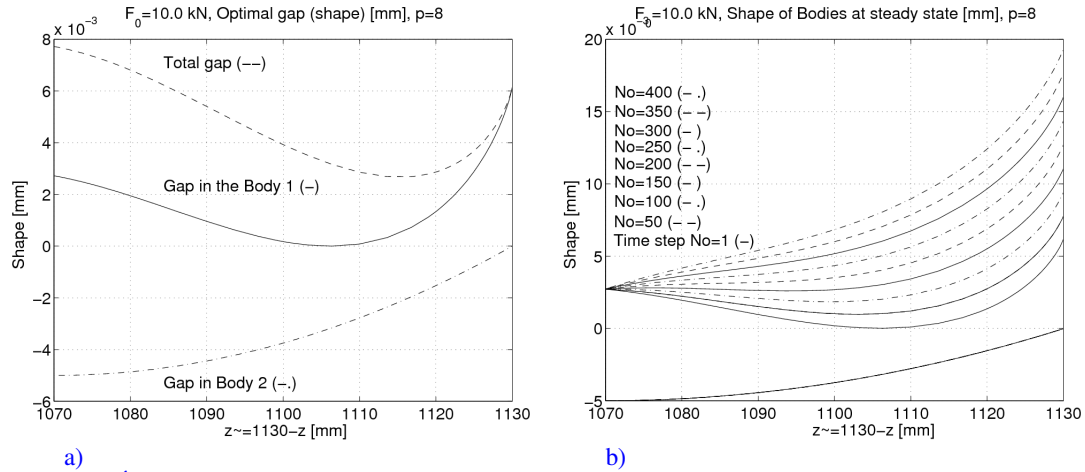
$$error_{w_2} = 100 \frac{|w_{2,No}(A) - w_{2,1}(A)|}{|w_{2,1}(A)|} \% \quad (B5)$$

ahol $w_{2,1}(A) = 0.005 \text{ mm}$. Az érzékelt hiba kisebb, mint 0.2 % az $No \leq 400$ intervallumban (lásd B15 b. ábra).

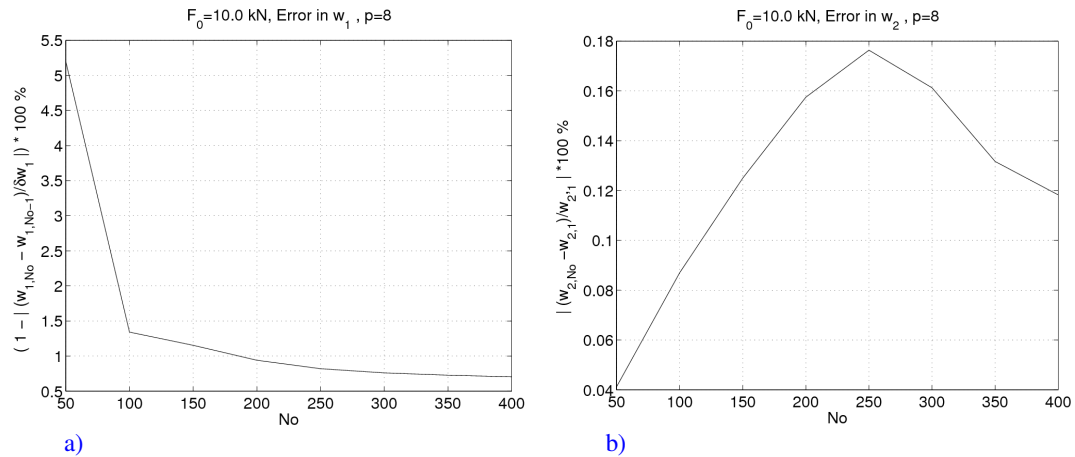
Aleset 2:

A fenti konstrukció kopását olymódon vizsgáljuk, hogy a 2-es testet is rugalmasnak tételezzük fel. Ekkor a kezdeti nyomás nyilván más lefutású, de az állandósult kopási állapothoz tartozó ugyanaz, amit az Aleset 1-ben meghatároztunk, lásd B14 a. ábra.

Az állandósult kopási alakot, amit az optimalizációs feladatból nyertünk, a B16 a. ábra, a kopási folyamatban kapottakat a B16 b. ábra tünteti fel. Itt is jól látható az állandósult állapot, hisz a meghatározott kopási különbségek a bélyeg szélein kicsiny hiba mellett azonosak, lásd B17. ábra.



B16. ábra. Állandósult kopásnál: a) az optimalizációból nyert kezdeti alakok, b) kopási szimulációval nyert különböző időpontokhoz tartozó kopott alakok, ha mindkét test rugalmas.



B17. ábra. A kopási szimuláció hibája rugalmas testek érintkezésekor, a) a w_1 -re, b) a w_2 -re vonatkozólag.

Következtetések:

1. Amennyiben mind két testnél a kopás létrejöhet, akkor fennáll az állandósult kopás lehetősége a kopási disszipációs teljesítmény minimalizálásával meghatározott nyomás lefutása és az ebből származó alakok elérése mellett.
2. A javasolt numerikus módszer igen kis hibával képes a kopás szimulációjára.
3. Az 1-es blokk merevtestszerű mozgását a $\dot{\lambda}_F, \dot{\lambda}_M$ sebességek mellett végzi, míg a 2-es testnél a kopott alak a v_r relatív sebességgel ellentétes irányban tolódik el.

HIVATKOZÁSOK

1. J. Haslinger, P. Neittaanmaki. *Finite element approximation for optimal shape design*, John Wiley & Sons Ltd., London, 1988
2. D. Hilding, A. Klarbring, J. Pettersson. Optimization of structures in unilateral contact, *Appl. Mech. Rev.*, 52:139--160, 1999.
3. I. Páczelt. Iterative methods for solution of contact optimization problems, *Arch. Mech.*, 52: 685--711, 2000.
4. I. Páczelt, A. Baksa. Examination of contact optimization and wearing problems, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 3: 61--84, 2002.
5. I. G. Goryacheva, M.H. Dobuchin. *Contact problems in tribology*, (in Russian), Mashinostroenie, Moscow, 1988.
6. I. A. Soldatenkov. *Iznosokontaktnaya zadacha*, Fizmatkniga, Moskva, 2010.
7. K. L. Johnson. *Contact Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1985.
8. J. J. Kalker. *A course of contact mechanics*, a79C, Delft University of Technology, 1985.
9. T. A. Laursen. *Computational contact and impact mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
10. P. Wriggers. *Computational contact mechanics*, J: Wiley and Sons, New York, 2002.
11. J. F. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces, *Journal of Applied Physics*, 24: 981--988, 1953.
12. I. Páczelt, Z. Mróz. On optimal contact shapes generated by wear, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 63:1310--1347, 2005.
13. I. Páczelt I, Z. Mróz. Optimal shapes of contact interfaces due to sliding wear in the steady relative motion, *Int. J. Solids Struct.*, 44:895--925, 2007.
14. I. Páczelt, Z. Mróz. On the analysis of steady-state sliding wear process, *Tribology International*, 42:275--283, 2009.
15. I. Páczelt, Z. Mróz. Variational approach to the analysis of steady state thermo-elastic wear regimes, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 81:728--760, 2010.
16. I. Páczelt, Z. Mróz. Numerical investigation of steady thermo-elastic wear regimes induced by translating and rotating punches, *Comp. Struct.*, (submitted), 2011.
17. A.E. Anderson, R. A. Knapp. Hot spotting in automotive friction systems, *Wear*, 135:319--337, 1990.
18. J. R. Barber. The influence of thermal expansion on the friction and wear process, *Wear*, 10:155--59, 1967.
19. J. R. Barber. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids, *Proc. R. Soc.*, A312:381--394, 1969.
20. J. R. Barber. Stability of thermoelastic contact for the Aldo model, *J. Appl. Mech.*, 48:555--558, 1981.
21. K: Lee, J. R. Barber. Frictionally excited thermoelastic instability in automotive disc brakes, *J. Tribology*, 115:607--614, 1993.
22. D. Thuresson. Stability of sliding contact --comparison of a pin and a finite element model, *Wear*, 261:896--904, 2006.
23. D. Thuresson. Influence of material properties on sliding contact braking applications, *Wear*, 257:451--460, 2004.
24. H. J. M. Geijselaers, A. J. E. Koning. Finite Element Analysis of Thermoelastic Instability With Intermittent Contact, *J. Tribology*, 122:42--46, 2000.
25. M. Ciavarella, L. Johansson, L. Afferante, A. Klarbring, J. R. Barber. Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability, *Int. J. Solids Struct.*, 40:5583--5597, 2003.
26. V. Linck, A. Saulat, L. Bailelet. Consequence of contact model, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 39:1664--1673, 2006.
27. P. Zagrodzki, K. B. Lam, E. Al Bahkali, J. R. Barber. Nonlinear Transient Behavior of a Sliding System With Frictionally Excited Thermoelastic Instability, *Journal of Tribology*, 123: 699--708, 2001.
28. J. H. Choi and I. Lee. Transient thermoelastic analysis of disk brakes in frictional contact, *J. Therm. Stresses*, 26:223--244, 2003.
29. J. H. Choi and I. Lee. Finite element analysis of transient thermoelastic behaviours in discs brakes, *Wear*, 257:47--58, 2004.
30. L: D. Coby, C. M. Krousgrill, F. Sadeghi. Effect of Temperature on Thermoelastic Instability in Thin Disks, *Journal of Tribology*, 124:429--437, 2002.
31. Abdullah M. Al-Shabibi, J. R. Barber. Transient solution of a thermoelastic instability problem using a reduced order model, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:451--464, 2002.
32. P. Decuzzi, G. Demelio. The effect of material properties on the thermoelastic stability of sliding systems, *Wear*, 252: 311--321, 2002.
33. L. Afferrante, M. Ciavarella, P. Decuzzi, G. Demelio. Thermoelastic instability in a thin layer sliding between two halfplanes: transient behaviour, *Tribology International*, 36:205--212, 2003.
34. L. Afferrante, M. Ciavarella, P. Decuzzi, G. Demelio. Transient analysis of frictionally excited thermoelastic instability in multi-disk clutches and brakes, *Wear*, 254:136--146, 2003.
35. Luciano Afferrante, Paolo Decuzzi. The effect of engagement laws on the thermomechanical damage of multidisk clutches and brakes, *Wear*, 257:66--72, 2004.

36. L. Baillet, V. Linck, S. D'Errico, B. Laulagnet, Y. Berthier. Finite Element Simulation of Dynamic Instabilities in Frictional Sliding Contact, *Journal of Tribology*, 127:652--657, 2005.
37. J. Voldrich, Frictionally excited thermoelastic instability in disc brakes-Transient problem in the full contact regime, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49:129--137, 2007.
38. Yong Hoon Jang, Seong-ho Ahn. Frictionally-excited thermoelastic instability in functionally graded material, *Wear*, 262:1102--1112, 2007.
39. SeungWook Lee, Yong Hoon Jang. Effect of functionally graded material on frictionally excited thermoelastic instability, *Wear*, 266:139--146, 2009.
40. L. Johansson, A. Klarbring. Thermoelastic frictional problems: modeling, FE-approximation and numerical realization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 105:181--210, 1993.
41. P. Wriggers, C. Miehe, Contact constraints within thermomechanical analysis: a finite element model, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 113:301--319, 1994.
42. G. Zavarise, P. Wriggers, B. Schrefler. On augmented Lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38:2929--2949, 1995.
43. N. Strömberg, Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 177:441--455, 1998.
44. I. Páczelt, B. Pere. Investigation of contact wearing problem with hp-version of the finite element method, In *Proceedings Thermal Stress'99*, June 13-17, Cracow, Poland, J.J. Skrypek and R. B. Hetnarski (eds), Cracow University of Technology, 81--84, 1999.
45. D. Pantuso, K. J. Bathe, P. A. Bouzinov, A finite element procedure for the analysis of thermomechanical solids in contact, *Comp. Struct.*, 75:551--573, 2000.
46. P. Iremán, A. Klarbring, N. Strömberg. Finite element algorithms for thermoelastic wear problems, *Europ. J. Mech. A/Solids*, 21:423--440, 2002.
47. Yi Yb. Finite element analysis of thermoelastodynamic instability involving frictional heating, *Journal of Tribology*, 128:718--724, 2006.
48. A. Yevtushenko and E. Ivanyk. Determination of temperatures for sliding contact with application for braking systems, *Wear*, 206:53--59, 1997.
49. N. Laraqi. An Exact Explicit Analytical Solution of the Steady-State Temperature in a Half Space Subjected to a Moving Circular Heat Source, *Journal of Tribology*, 125:859--862, 2003.
50. A. Floquet, M. C. Dubourg. Nonaxisymmetric effects for three-dimensional analysis of a brake, *Journal of Tribology*, 116 :401--407, 1994.
51. A. Floquet, M. C. Dubourg. Realistic braking operation simulation of ventilated disk brakes, *Journal of Tribology*, 118:466--472, 1996.
52. C. H. Gao, X. Z. Lin. Transient temperature field analysis of a brake in a non-axisymmetric three-dimensional model, *Journal of Materials Processing Technology*, 129:513--517, 2002..
53. C. H. Gao, J. M. Huang, X. Z. Lin, X. S. Tang. Stress analysis of thermal fatigue fracture of brake disks based on thermomechanical coupling, *Journal of Tribology*, 129:536--543, 2007.
54. K. Váradi, Z. Néder, K. Friedrich, J. Flöck. Numerical and finite element contact temperature analysis of real composite-steel surfaces in sliding contact, *Tribology International*, 31:669--686, 1998.
55. P. N. Bogdanovich and D. V. Tkachuk. Thermal and Thermomechanical Phenomena in Sliding Contact, *Journal of Friction and Wear*, 30:153--163, 2009.
56. H. Blok. Theoretical Study of Temperature Rise at Surfaces of Actual Contact under Oiliness Lubricating Conditions, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 2:222--235, 1937.
57. W. W. Chen, Q. J. Wang. Thermomechanical Analysis of Elastoplastic Bodies in a Sliding Spherical Contact and the Effects of Sliding Speed, Heat Partition, and Thermal Softening, *Journal of Tribology*, 130:041402-1--041402-10, 2008.
58. N. Ye, K. Komvopoulos. Three-Dimensional Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Layered Media Under Thermomechanical Surface Loading, *Journal of Tribology*, 125:52--59, 2003.
59. A. Ibrahimbegovic, L. Chorfi. Covariant principal axis formulation of associated coupled thermoplasticity at finite strains and its numerical implementation, *International Journal of Solids and Structures*, 39: 499--528, 2002.
60. A. Ibrahimbegovic. *Nonlinear solid mechanics: theoretical formulations and finite element solution methods*, Springer, Berlin, (ISBN 978-90-481-2330-8, E-book 978-1-4020-9793-5), 2009.
61. A. Ibrahimbegovic, E.L. Wilson. Unified Computational Model for Static and Dynamic Frictional Contact Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34:233--247, 1991.
62. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, London, 1959.
63. K. J. Bathe. *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.
64. B. B. Mikic. Thermal contact conductance: theoretical considerations. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 17:205--214, 1974.
65. I. Páczelt, B. Szabó, T. Szabó. Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method, *Computers and Mathematics with Applications*. 38:49--69, 1999.
66. I. Páczelt, T. Szabó. Solution of contact optimization problems of cylindrical bodies using hp-FEM, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 53:123--146, 2002.
67. A. Baksa, I. Páczelt. Térbeli érintkezési feladat vizsgálata, *XIII. Nemzetközi Gépész Találkozó, OGÉT 2005*, Szatmárnémeti, 2005. április 28--május 1. Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság. 39--42, 2005.
68. I. Páczelt, A. Baksa. Solution of contact problems using p-extension finite elements, *Proceedings of XXXVII Summer School "Advanced Problems in Mechanics", APM'2009*, Repino, Saint-Petersburg, Russia, June 30 - July 5, 2009. Eds. D. A. Indeitsev, A. M. Krivstov, 507--519, 2009.
69. B. Pere, I. Páczelt. A mapping technique for a heat conduction problem on moving mesh using the hp-version of the finite element method, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 3:169--191, 2002.

70. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu. *The finite element method for fluid dynamics*, Elsevier, Butterworth-Heinemann, New York, 2006.
71. R. Komanduri, Z. B. Hou. Analysis of heat partition and temperature distribution in sliding systems, *Wear*, 251:925--938, 2001.
72. MATLAB, Optimization Toolbox, fsolve solver: <http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/fsolve.html>
73. B. Szabó, I. Babuska, *Finite element analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1991.
74. I. Páczelt. *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban I. Kötet*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999.
75. K. M. Marshek, H. H. Chen. Discretization pressure wear theory for bodies in sliding contact, *Journal of Tribology*, 111:95--100, 1989.
76. P. Podra, S. Andersson. Simulating sliding wear with finite element method, *Tribology International*, 32:71--81, 1999.
77. A. Zmitrowicz. Constitutive modeling of anisotropic phenomena of friction, wear, and frictional heat, *IMP Gdansk, PAN*, 381/1342/93, 234 p., 1993
78. Z. Mróz, S. Stupkiewicz. An anisotropic friction and wear model, *Int. J. Solids Struct.*, 31:1113--1131, 1994.
79. S. Stupkiewicz, Z. Mróz. A model of third body abrasive friction and wear in hot metal forming, *Wear*; 231:124--138, 1999.
80. M. Hjjaj, Z. Q. Feng, G. de Saxcé, Z. Mróz. On the modelling of complex anisotropic frictional contact laws. *International Journal of Engineering Science*, 42:1013--1034, 2004.
81. N. V. Banichuk, S. Y. Ivanova: Optimization problems of contact mechanics with uncertain, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 37, 143--156, 2009.
82. N. V. Banichuk, F. Ragnedda, M. Sera. Some optimization problems for bodies in quasi-steady state wear, *Mechanics based Design of Structures and Machines*, 38:430--439, 2010.