

Kísérleti fizika 2.

Tóth András, Koppa Pál

2013

Tartalomjegyzék

Előszó	2
1. Elektrosztatika	3
1.1. Elektromos erőhatások, az elektromos töltés	3
1.2. Az elektrosztatikus kölcsönhatás számszerűsítése, a Coulomb-törvény . .	9
1.3. Elektromos erőter és elektromos térerősség	12
1.4. Az elektromos erőter szemléltetése, erővonalkép	15
1.5. Az elektrosztatikus erőter II. alaptörvénye	21
1.6. Elektromos töltés helyzeti energiája, elektromos potenciál	29
1.7. Az elektrosztatika I. alaptörvénye	31
1.7.1. Potenciál homogén erőterben	33
1.7.2. Ponttöltés potenciálja	34
1.7.3. Folytonos töltéseloszlás potenciálja	36
1.7.4. Elektromos térerősség számítása a potenciál helyfüggésének ismeretében	37
1.8. Elektromos töltések kölcsönhatási energiája	38
1.9. Egyszerű töltéselrendezések elektromos erőtere	41
1.9.1. Gömbszimmetrikus töltéseloszlások tere	42
1.9.2. Térerősség és potenciál töltött síkok környezetében, a síkkondenzátor	44
1.10. Töltés elhelyezkedése vezetőn, töltött vezető potenciálja, a kapacitás . .	46
1.10.1. Kapacitás, kondenzátorok	48
1.10.2. A csúcshatás	50
1.11. Az elektromos dipólus	52
1.11.1. Az elektromos dipólus erőtere	53
1.11.2. Elektromos dipólus viselkedése elektromos erőterben	53
2. Az anyagok elektromos tulajdonságai	59
2.1. Elektromos erőter szigetelőkben	63
2.1.1. Az elektrosztatika I. alaptörvénye szigetelőkben	63
2.1.2. Az elektrosztatika II. alaptörvénye szigetelőkben	63
2.2. Elektromos erőter homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokban	66

2.2.1.	Az erőtér két dielektrikum határán	68
2.2.2.	A polarizáció síkkondenzátor-modellje	72
2.2.3.	Az elektromos eltolás mérési utasítása	73
2.3.	Bonyolultabb dielektrikumok	74
2.3.1.	Anizotróp, lineáris anyagok	74
2.3.2.	Maradandó polarizáció	74
2.3.3.	Piroelektromos effektus	75
2.3.4.	Piezoelektromos effektus	75
2.4.	Az elektromos erőtér energiája	75
3.	Elektromos áram	78
3.1.	Az elektromos áram leírása	80
3.1.1.	Az áramerősség	81
3.1.2.	Ohm törvény	85
3.2.	Az elektromos áram molekuláris modellje	87
3.3.	Hőfejlődés árammal átjárt vezetőben	90
3.4.	Áramvezetési mechanizmusok különböző anyagokban	92
3.4.1.	Elektromos vezetés szilárd anyagokban	92
3.4.2.	Elektromos vezetés folyadékokban	101
3.4.3.	Elektromos vezetés gázokban	103
3.5.	Elektromos áramkörök és hálózatok, Kirchhoff törvényei	109
3.5.1.	A töltésmegmaradás törvénye időben állandó áramokra, Kirchhoff I. törvénye	110
3.5.2.	Az elektrosztatika I. alaptörvénye állandó áramokra, Kirchhoff II. törvénye	116
3.5.3.	A Kirchhoff-törvények alkalmazása	122
3.5.4.	Energiaviszonyok elektromos áramkörben	125
4.	A mágneses kölcsönhatás	128
4.1.	Mágneses erőtér és mágneses indukcióvektor vákuumban	131
4.2.	Áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben	135
4.3.	Áramhurokra ható forgatónyomaték	138
4.4.	Mágneses dipólus	140
4.4.1.	A mágneses dipólus jellemzése, a mágneses dipólmomentum	140
4.4.2.	Mágneses dipólus energiája mágneses erőtérben	141
4.5.	Elektromos áram mágneses erőtere	142
4.5.1.	A Biot-Savart-törvény	142
4.5.2.	A Biot-Savart-törvény alkalmazásai	143
4.6.	A sztatikus mágneses erőtér alaptörvényei	146
4.6.1.	A sztatikus mágneses erőtér II. alaptörvénye (a magnetosztatika Gauss-törvénye)	146

4.6.2.	A magnetosztatika I. alaptörvénye (gerjesztési törvény)	147
4.6.3.	Hosszú, vonalszerű egyenes vezető mágneses erőtere	150
4.6.4.	Egyenes tekercs mágneses erőtere	151
4.7.	Áramvezetők kölcsönhatása, az áramerősség SI-egysége	153
4.7.1.	Árammal átjárt, hosszú, egyenes vezetők kölcsönhatása	153
4.7.2.	Az áramerősség SI-egysége	154
5.	Az anyagok mágneses tulajdonságai	156
5.1.	Mágneses erőter anyagokban	158
5.1.1.	Az atomi mágneses dipólusok hatása a mágneses erőterre homogén, izotróp anyagokban	158
5.1.2.	A magnetosztatika Gauss-törvénye anyag jelenlétében	160
5.1.3.	Gerjesztési törvény anyag jelenlétében	161
5.1.4.	Mágneses erőter homogén, izotróp, lineáris anyagokban	164
5.1.5.	A mágneses indukció vektor és a térerősség mérési utasítása az SI-rendszerben	167
5.1.6.	Anizotróp anyagok	168
5.1.7.	Ferromágneses anyagok	169
5.2.	A mágnesség klasszikus atomi értelmezése	171
5.2.1.	Paramágnesség	172
5.2.2.	Diamágnesség	173
5.2.3.	Ferromágnesség	174
6.	Az elektromágneses indukció	177
6.1.	Indukált elektromotoros erő mágneses erőterben mozgó vezetőben	177
6.1.1.	Mozgó vezető mágneses erőterben	179
6.1.2.	Mozgási indukció zárt vezető hurokban	182
6.2.	Nyugalmi indukció, a Faraday-törvény	187
6.2.1.	A Faraday-féle indukciótörvény	188
6.2.2.	Örvényáramok	192
6.2.3.	Kölcsönös indukció és önindukció	194
6.2.4.	A transzformátor alapelve	196
6.3.	Tranziens jelenségek induktivitást tartalmazó áramkörben	198
6.3.1.	Az áram kikapcsolása	198
6.3.2.	Az áram bekapcsolása	201
6.4.	A mágneses erőter energiája	204
7.	Elektromágneses rezgések	207
7.1.	Harmonikus rezgés ideális elektromos rezgőkörben	207
7.2.	Energiaviszonyok elektromos rezgőkörben	211
7.2.1.	Csillapodó rezgés elektromos rezgőkörben	213

7.3.	Kényszerrezgés elektromos rezgőkörben	215
7.3.1.	Csatolt rezgések	219
8.	Maxwell-egyenletek vákuumban és anyagban	221
8.1.	Időben változó elektromos erőter, az eltolási áram	221
8.2.	Az elektrodinamika alapegyenletei integrális formában (Maxwell-egyenletek)	226
8.3.	A Maxwell-egyenletek differenciális alakja	231
9.	Elektromágneses hullámok	233
9.1.	Szabad elektromágneses hullámok	233
9.1.1.	A dipólsugárzás	233
9.2.	Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra	237
9.3.	Az elektromágneses hullám energiája és impulzusa	243
9.4.	Mozgó elektromos töltés elektromágneses tere	249
9.4.1.	Egyenletesen mozgó töltés erőtere	249
9.4.2.	Gyorsuló elektromos töltés erőtere, a fékezési sugárzás	250
9.5.	Dróthullámok és hullámvezetők	252
9.5.1.	Dróthullámok	252
9.5.2.	Hullámvezetők	253
9.6.	Elektromágneses hullámok Doppler-effektusa	258
9.7.	Az elektromágneses spektrum	261
10.A	hullámoptika alapjai	263
10.1.	Fény visszaverődése és törése két közeg határán	264
10.1.1.	Teljes visszaverődés	267
10.1.2.	Diszperzió hatása a fénytörésre, a prizmás spektrométer	268
10.1.3.	Fénypolarizáció visszaverődésnél és törésnél, a Brewster-törvény	270
10.2.	Interferencia	272
10.2.1.	A Young-kísérlet	272
10.2.2.	A Fresnel-féle kettős prizma és kettős tükör	275
10.2.3.	A Lloyd-féle egytükrös elrendezés	276
10.2.4.	Interferencia az amplitúdó kettéosztásával, a Michelson-interferométer	276
10.2.5.	Többsugaras interferencia egyenes mentén elhelyezett pontforrások esetén	278
10.3.	Fényelhajlás (diffrakció)	282
10.3.1.	Fraunhofer-diffrakció hosszú, keskeny résen	283
10.3.2.	Fraunhofer-diffrakció több résen, a diffrakciós rács	289
10.3.3.	Röntgensugarak elhajlása kristályrácsra	292

11.A speciális relativitáselmélet alapjai	296
11.1. A relativitás elve a klasszikus mechanikában	296
11.1.1. A Galilei-transzformáció	298
11.2. A fény terjedési sebessége és a relativitás elve az elektromágnességtanban	302
11.2.1. A fény terjedési sebessége egymáshoz képest mozgó rendszerekben	302
11.2.2. Az elektromágnességtan és a relativitás elve	303
11.3. A relativitáselmélet posztulátumai és a Lorentz-transzformáció	304
11.3.1. Az Einstein-féle posztulátumok és a relativitáselmélet	305
11.3.2. A Lorentz-transzformáció	305
11.4. A relativisztikus mechanika	309
11.4.1. A hely- és idő meghatározása	309
11.4.2. Időtartam és távolság a relativitáselméletben	311
11.4.3. A müonok élettartama	314
11.4.4. A sebességtranszformáció	316
11.5. A négydimenziós tér-idő	318
11.5.1. Invariáns intervallumnégyzet, négyesvektorok	318
11.5.2. Állapotváltozás a négyestérben, sajátidő	321
11.6. A relativisztikus dinamika alapjai	324
11.6.1. Az impulzus (lendület), a tömeg és a mozgásegyenlet	325
11.6.2. Az energia, a tömeg-energia összefüggés a relativitáselméletben	326
11.6.3. A nyugalmi energia és a tömeghiány	329
11.6.4. A négyesimpulzus, az energia és az impulzus összefüggései	330
11.6.5. A körfrekvencia-hullámszám négyesvektor	332
Irodalomjegyzék	333

Előszó

Ez a könyv a BME fizikus hallgatói számára készült, négy fejezetből álló Kísérleti Fizika sorozat második kötete, amely az elektromosság, mágnesség és a relativitáselmélet alapjaival ismerteti meg az Olvasót. A tankönyv a BME Fizikus alapképzésében elhangzó Kísérleti Fizika 2. előadás anyagát dolgozza fel egységes formában, az előadáson bemutatott legfontosabb kísérletek leírásával kiegészítve.

A tankönyv anyaga nem fed át teljes egészében a szóbeli előadás évről évre változó, fejlődő tartalmával, helyenként annál részletesebb magyarázatokat, kitekintéseket tartalmaz, míg máshol annál egyszerűbb számításokat, vagy attól eltérő gyakorlati példákat és alkalmazásokat ír le. A könyv olvasása értelemszerűen nem pótolja az előadás követését, amelyben a kísérletek és az elméleti jellegű számítások során a Hallgató szeme láttára tárulnak fel az elektromágnesség és a relativitáselmélet alaptörvényei. A Kísérleti Fizika 2. tárgy szerves részét képezi a számolási gyakorlat, amelynek elektronikus példatára a Fizipédia honlapján [1] található, csakúgy, mint az előadáshoz kapcsolódó kísérletek videofelvételei [2]. Érdeklődő hallgatók hasznos kiegészítéseket találhatnak az ajánlott irodalomban is [3, 4, 5, 6].

A Kísérleti Fizika 2. előadás tematikáját és a jelen tankönyv alapját képező jegyzetet a tárgy előző előadói, Tóth András és Kálmán Péter dolgozták ki. A tankönyv nagy részben az ő munkájukra támaszkodik, amiért Őket köszönet illeti.

A könyv a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0064 pályázat keretében készült.

1. fejezet

Elektrosztatika

A görögök már kb. 2500 évvel ezelőtt tapasztalták, hogy a megdörzsölt borostyánkő (megkövesedett fenyőgyanta) könnyű tárgyakat (tollpihe, szalmaszál) magához vonz. A borostyánkő görög neve „elektron”, innen ered az elektromosság elnevezés. Hasonlóképpen a megdörzsölt műanyagok (fésű), megdörzsölt üveg- vagy ebonitrúd papírdarabokat, apró porszemcséket, hajszálakat képes magához vonzani, de a tapasztalat szerint a megdörzsölt testek között taszítás is felléphet.

A dörzsöléssel ilyen különleges állapotba hozott testek által kifejtett erőket nem tudjuk megmagyarázni semmilyen mechanikai jellegű vagy gravitációs kölcsönhatással. A dörzsölés révén tehát az anyagnak egy új tulajdonsága válik érzékelhetővé, amely egy eddig ismeretlen kölcsönhatást okoz. Ezt a kölcsönhatást *elektromos- vagy elektrosztatikus kölcsönhatásnak*, az anyagnak az elektromos kölcsönhatást okozó sajátságát *elektromos töltésnek* nevezzük.

1.1. Elektromos erőhatások, az elektromos töltés

Az elektromos kölcsönhatás megismeréséhez először az elektromos állapotba hozott testek között fellépő erőhatásokat kell tanulmányozni, mert csak így ismerhetjük meg a kölcsönhatást okozó elektromos töltések sajátságait, és így juthatunk el az elektromos kölcsönhatás számszerű leírásához. A legegyszerűbb a nyugvó (sztatikus) elektromos töltések¹ között fellépő erőket vizsgálni. Értelemszerűen az elektromos jelenségek kutatásának ezt a területét *elektrosztatikának* nevezzük.

Az erőhatásokkal kapcsolatos alapkísérletek egyszerű eszközökkel végrehajthatók:

Kísérlet: Elektrosztatikus erők megfigyelése

Bőrrel megdörzsölt üvegrúd, szőrmével megdörzsölt ebonitrúd apró tárgyakat

¹ A továbbiakban az „elektromos töltés” kifejezés helyett gyakran a rövidebb „töltés” kifejezést használjuk.

magához vonz, majd eltaszítja azokat.

Az üvegrúd dörzsölésére használt bőr és az ebonitrúd dörzsölésére használt szőrme ugyanilyen erőhatásokat fejt ki. A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán http://fizipedia.bme.hu/index.php/D%C3%B6rzselektromoss%C3%A1g_I. ♦

Kísérlet: Taszító és vonzó erők

Üvegrudakat bőrrel, ebonitrudakat szőrmével dörzsölünk meg, és megfigyeljük a megdörzsölt rudak illetve a dörzsölő anyagok között fellépő kölcsönhatásokat. Ehhez a üvegrudat és ebonitrudat vízszintes helyzetben felfüggesztünk egy cérnaszálra, majd ezek egyik végéhez egy másik megdörzsölt testet közelítünk. Ekkor a kölcsönhatás miatt a felfüggesztett rúd elfordul. A kölcsönható párok között az alábbi erőhatásokat tapasztaljuk:

- üveg – üveg kölcsönhatás: taszítás
- üveg – üveget dörzsölő bőr kölcsönhatása: vonzás
- ebonit – ebonit kölcsönhatás: taszítás
- ebonit – ebonitot dörzsölő szőrme kölcsönhatása: vonzás
- üveg – ebonit kölcsönhatás: vonzás
- üveg – ebonitot dörzsölő szőrme kölcsönhatása: taszítás
- ebonit – üveget dörzsölő bőr kölcsönhatása: taszítás



A kísérletek alapján a jelenségeket megpróbáljuk értelmezni:

- A dörzsölés az összedörzsölt két testet olyan állapotba hozza, amely valami erő kifejtésre képes „anyagi dolog” megjelenésével jár együtt, ezt nevezzük elektromos töltésnek.
- A kísérletek csak úgy értelmezhetők, ha kétféle elektromos töltést tételezünk fel: az egyik fajta töltés az összedörzsölt testek egyikén-, a másik fajta töltés a másikon jelenik meg.
- Megállapodás szerint a bőrrel megdörzsölt üvegrúdon megjelenő töltést pozitívnak, a szőrmével megdörzsölt ebonit töltését negatívnak nevezzük².

²A pozitív illetve negatív töltés elnevezését Benjamin Franklin (1706 - 1790 amerikai természettudós) javasolta, aki a pozitív és negatív számokat tekintette mintának: az ellenkező előjelű töltések egymás hatását kioltják, ugyanúgy, ahogy a pozitív és negatív számok összeadva egymást „megsemmisítik”.

- Az azonos előjelű töltések *taszítják* egymást, az ellenkező előjelűek *vonzák* egymást, ennek alapján feltételezhető, hogy az üvegrudat dörzsölő bőrön negatív töltés van, az ebonitot dörzsölő szőrmén pedig pozitív.
- Mivel a magukra hagyott testek normális körülmények között (dörzsölés nélkül) általában elektromos erőhatásokat nem fejtenek ki egymásra, fel kell tételeznünk, hogy az anyagokban azonos mennyiségű pozitív és negatív töltés van, amelyek egymás hatását semlegesítik, ezért kifelé az anyagok elektromos töltései nem érzékelhetők. A dörzsölés hatására fellépő elektromos jelenségeket eszerint úgy értelmezhetjük, hogy a *dörzsölés szétválasztja* az anyagban azonos mennyiségben található pozitív és negatív töltéseket, így az összedörzsölt testek egyikén többlet pozitív, a másikon többlet negatív töltés jelenik meg. A szétválasztott töltések között erőhatás lép fel, amit a töltést hordozó testek kölcsönhatásaként érzékelünk.
- A kísérleteink tanulsága szerint egyszerű eszközeinkkel nem tudunk töltést „teremteni”, csak az anyagban egyébként jelen lévő pozitív és negatív töltést megosztani. Ez a tapasztalat azt sugallja, hogy a kísérlet közben a rendszer össztöltése megmarad. További (sokkal kifinomultabb) kísérletek alapján kimondhatjuk a töltésmegmaradás törvényét, amely a fizika egyik általános megmaradási törvénye (azzal részletesebben a 3. fejezetben foglalkozunk).
- Ma már azt is tudjuk, hogy az elektromos töltéseket a földi anyagot alkotó két elemi részecske, a proton és az elektron hordozza. Ezek közül a proton töltése pozitív (ez jelenik meg a megdörzsölt üvegrúdon), az elektroné pedig negatív (ez jelenik meg a megdörzsölt ebonitrúdon).

Ezen egyszerű kísérletek elvégzése közben felmerül a kérdés, hogy mi a dörzs elektromosság oka. Az elektromos töltések szétválásának alapvető oka a különböző anyagok különböző elektronvonzó képessége: két anyagot egymással érintkezésbe hozva a nagyobb elektronvonzó képességű anyag elektronokat vesz át a másik anyagtól, és így az negatív, a másik anyag pozitív töltésű lesz. A dörzsölés szerepe csupán annyi, hogy szigetelő anyagok esetén ezzel biztosíthatjuk, hogy a két anyag a lehető legnagyobb felületen érintkezzen, és így a megosztott töltés mennyiségét nagyságrendekkel megnövelhetjük. Hasonló töltésmegosztó hatás figyelhető meg (természetesen dörzsölés nélkül) fémes vezetők egymással és vezető folyadékokkal (ún. elektrolitokkal) való érintkezésénél. Ez az „érintkezési elektromosság” számtalan érdekes és hasznos effektus, többek között a galvánelemek működésének az alapja.

Az elektromos töltések további tulajdonságait szintén egyszerű kísérletekkel vizsgálhatjuk meg.

Kísérlet: A töltésmegosztás jelensége

Cérnaszálla felfüggesztett alumíniumfóliát a megdörzsölt üvegrúd vagy ebonitrúd magához vonzza, majd eltaszítja. A vonzás oka az, hogy a kezdetben

semleges alumíniumfóliában a közelében lévő töltött rúd hatására a szabadon mozgó töltéshordozók elmozdulnak. Pozitívan töltött rúd esetén (pl. üvegrúd) alumíniumfólia rúdhöz közelebbi része negatív, távolabbi része pozitív töltésű lesz (töltésmegosztás). Ekkor az alumíniumfólia negatív töltéseire nagyobb vonzóerő hat, mint a rúdtól távolabb lévő pozitív töltésekre, és így azt a rúd magához vonzza. A taszítás oka az, hogy az érintkezés pillanatában a fémlemez a megdörzsölt rúd töltését átveszi, tehát a rúddal azonos töltésű lesz, és így taszítják egymást.

Azt, hogy a dörzsölésnél töltésszétválasztás történik, az is mutatja, hogy az üvegrúddal pozitívrá feltöltött alumíniumfóliát a dörzsölő bőr vonzza (a bőrön tehát negatív töltés maradt), az ebonittal negatívrá feltöltött alumíniumfóliát a dörzsölő szőrme vonzza (a szőrmén pozitív töltés maradt). ♦

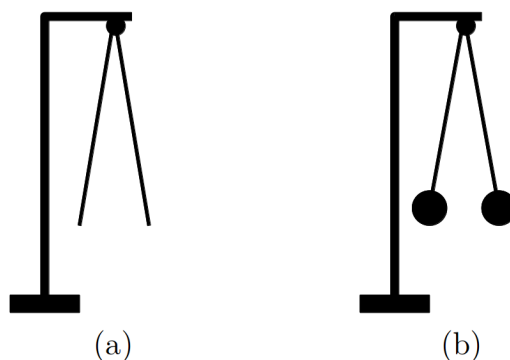
Kísérlet: Elektroszkópok és elektrométerek

A töltések jelenlétének kimutatására szolgáló egyszerű eszközök az 1.1. ábrán látható elektroszkópok. Ezek két vékony, hajlékony fémlemezből (pl. alumíniumfólia; (a) ábra) vagy cérnaszálakra felfüggesztett két bodzabél (hungarocell) golyóból (b) ábra) állnak, amelyeket egyik végükön egy fém tartón egymáshoz rögzítünk (a tartótól elszigetelve). Ha a közös végre töltést viszünk, a lemezek illetve a bodzabél golyók – a közöttük fellépő taszítás miatt – egymástól eltávolodnak, szétágaznak.

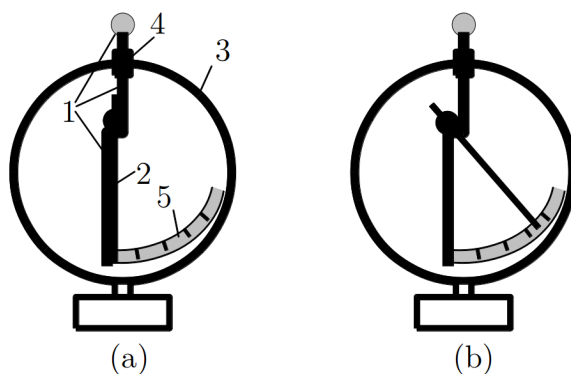
Ezeknek az eszközöknek komolyabb – mérésre is alkalmas – változatai az elektrométerek (1.2. ábra). Ezek lényegében egy fémvázból (1) és a hozzá vízszintes tengellyel csatlakozó, mutatóként működő, vékony fémrúdból (2) állnak. Az eszközt a zavaró külső hatások kiküszöbölése érdekében egy fém házban (3) helyezik el, amelyet a fémváztól elszigetelnek (4). Az elektroszkóp töltetlen állapotában a 2 mutató függőlegesen lóg (a) ábra). Ha a fémváz tetején lévő fémgömbre töltést viszünk fel, akkor az 1 fémváz és a 2 mutató ugyanolyan előjelű töltést kap, így köztük taszítás lép fel. Ennek következtében a mutató eltávolodik a fémváztól, elfordul a tengelye körül, és jelzi a töltés jelenlétét (b) ábra). A mutató kitérését egy mögötte elhelyezett skálán (5) leolvashatjuk, így az eszköz a felvitt a töltés nagyságát is jelzi. A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán <http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Eletroszkop.ogv> ♦

Kísérlet: Az elektromos vezetés jelensége

Két elektrométert egymás mellé helyezünk, és az alábbi kísérleteket végezzük el.



1.1. ábra. Egyszerű elektroszkópok



1.2. ábra. Egy egyszerű elektrométer felépítése: fémváz (1), mutató (2), fém ház (3), szigetelés (4), skála (5)

Az egyik elektrométert feltöltjük, majd a töltött és töltetlen elektrométer gömbjeit fémrúddal összekötjük. Ekkor az eredetileg töltetlen elektrométer is töltést mutat, vagyis a töltés bizonyos anyagokkal egyik helyről a másikra elvezethető. Azokat az anyagokat, amelyek a töltést képesek elvezetni, vezetőknek nevezzük (ilyenek pl. a fémek). Környezetüktől elszigetelt vezetők dörzsöléssel vagy a hozzájuk érintett, töltött állapotba hozott (megdörzsölt) anyagokkal feltölthetők (a környezettől való elszigetelés fontos, mert a felvitt többlet-töltések csak ekkor maradnak meg a vezetőn).

Ha a töltött- és töltetlen elektrométert farúddal kötjük össze, akkor a töltetlen elektrométer továbbra is töltetlen marad, nincs töltésvándorlás. Vannak tehát olyan anyagok, amelyek a töltést nem vezetik. Ezeket szigetelőknek nevezzük. Dörzsöléssel a szigetelőkön tudunk töltéseket könnyen felhalmozni, mert a

szigetelőkről a szétválasztott töltések nem vezetődnek el.

Ha a két elektrométerre ellenkező előjelű töltést viszünk, majd azokat vezetővel összekötjük, akkor mindkét elektrométer töltése csökken: a kétféle töltés csökkenti (kompenzálja) egymás hatását. ♦

Kísérlet: Elektromos megosztás

Két töltetlen elektrométert vezető rúddal kötünk össze, és az egyikhez feltöltött üvegrudat (pozitív töltés) közelítünk. Ekkor mindkét elektrométer töltést mutat. Ha az üvegrudat eltávolítjuk az elektrométer közeléből, akkor az elektrométerek töltése eltűnik. ♦

Ezt a jelenséget annak a megfigyelésnek a segítségével érthetjük meg, hogy vezetőkben a töltések könnyen elmozdulhatnak: a két elektrométerből és az összekötő rúdból álló összefüggő vezetőben a pozitív töltésű üvegrúd a negatív töltéseket a rúdhoz közeli elektrométerre vonzza, a távoli elektrométeren pedig pozitív töltés marad. Így mindkét elektrométer töltést jelez. A vezetőkben a közelükben elhelyezett töltések által okozott ilyen töltésszétválást *elektromos megosztásnak* nevezik. A megosztó hatás megszűnése után a töltések visszarendeződnek eredeti állapotukba.

Kísérlet: Megosztott töltések egyesítése

A megosztott töltések szétválaszthatók, és újra egyesíthetők: Az összekötő vezető rudat a megosztott rendszerről levéve, a szétválasztott töltés megmarad az elektrométereken. A két elektrométert újra vezetővel összekötve, a megosztott töltések semlegesítik egymást, a töltés mindkét elektrométerről eltűnik. ♦

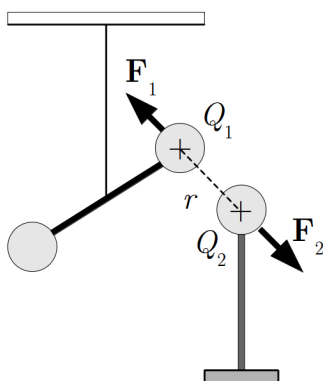
Kísérlet: Töltés előjelének meghatározása elektrométerrel a megosztás jelensége alapján

Elektrométert ismert töltéssel látunk el, majd ismeretlen előjelű töltést közelítünk hozzá. Ekkor a megosztás miatt a kitérés nő, ha az ismeretlen töltés előjele megegyezik ez elektrométerével, ellenkező előjelű töltésnél a kitérés csökken. ♦

1.2. Az elektrosztatikus kölcsönhatás számszerűsítése, a Coulomb-törvény

Az elektromos töltések kölcsönhatásának számszerű vizsgálatát először Coulomb ³ végezte el (1785). A mérés során töltött vezető gömbök kölcsönhatását mérte az igen kis erők mérésére alkalmas *torziós mérleggel*.

A torziós mérleg vékony, rugalmas szála súlyzószzerű elrendezésben, a „súlyzó” tömegközéppontjánál felfüggesztett két azonos méretű fémgömb (1.3. ábra). Ha a szál elég vékony, akkor a „súlyzó” egyik gömbjére ható igen kis erő esetén is mérhető módon elfordul. Az elfordulás során a rugalmas szálaban egy visszatérítő nyomaték lép fel, amely arányos a szögelfordulással. Emiatt a visszatérítő nyomaték egy meghatározott szögelfordulásnál kompenzálja a súlyzóra ható erő nyomatékát, és egyensúly alakul ki. A visszatérítő nyomaték a szögelfordulásból meghatározható, abból pedig a súlyzóra ható ismeretlen erő kiszámítható.



1.3. ábra. A Coulomb kísérlet vázlata

A Coulomb-féle mérésnél a fémgömbök egyikére vitték fel (pl. megdörzsölt üvegrudat érintve hozzá) a kölcsönható töltések egyikét (Q_1), és ennek közelében helyezték el a másik töltött testet (Q_2 töltésű fémgömb). A torziós mérleg a gömbök elektromos kölcsönhatása miatt elfordul. Megmérve az elfordulás szögét, és ismerve a felfüggesztő szál rugalmas tulajdonságait, a golyók között fellépő erő meghatározható. A Coulomb kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Coulomb_merleg.ogv

A *gömb* választása azért szerencsés, mert

³ Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806), a francia fizikus

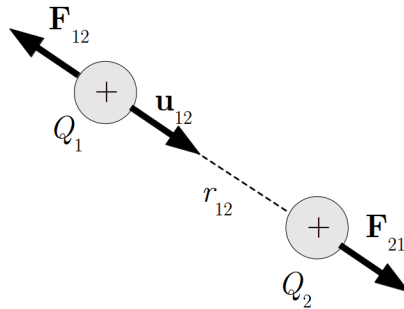
- gömbszimmetrikus a töltéeloszlás, ami várhatóan leegyszerűsíti a mérés kiértékelését
- egy töltött gömböt ugyanolyan üres gömbhöz érintve a *töltés felezhető*, vagyis mód van a töltés nagyságának mérésére.

A berendezésben változtatható a kölcsönható testek egymáshoz viszonyított helyzete, vagyis tanulmányozható a vonzóerő távolságfüggése, és mód van arra is, hogy a mérést különböző nagyságú töltésekkel végezzük el.

A mérések szerint a kölcsönhatásnál fellépő erők nagysága arányos a kölcsönható töltések nagyságával, és fordítva arányos a töltések távolságának négyzetével. Az 1.3. ábra jelöléseivel:

$$F_{12} = F_{21} \sim \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}. \quad (1.1)$$

Szigorúan véve a töltések r_{12} távolságának csak akkor van értelme, ha *pontszerű* töltésekről van szó, vagyis ha a töltések mérete sokkal kisebb, mint a köztük lévő távolság. Véges méretű gömbök esetén a töltésmegosztás miatt az erők nagysága kissé módosul.



1.4. ábra. Két töltés elektrosztatikus kölcsönhatása során fellépő erők

Az arányossági tényezőt K_e -vel jelölve, az egyes töltésekre ható erő vektori alakban (1.4. ábra):

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12} \quad (1.2)$$

Ez a Coulomb-törvény, ahol r_{12} a két test távolsága, \mathbf{u}_{12} az 1 testtől a 2 testhez mutató egységvektor, Q_1 és Q_2 a testek elektrosztatikus kölcsönhatásának erősségét jellemző elektromos töltések, K_e pedig egyelőre ismeretlen arányossági tényező.

A törvény kifejezi azt a tapasztalatot is, hogy azonos előjelű töltések ($Q_1 \cdot Q_2 > 0$) taszítják, ellenkező előjelűek ($Q_1 \cdot Q_2 < 0$) pedig vonzzák egymást. A tapasztalat szerint a két kölcsönható töltésre ható erő ellentétes irányú és azonos nagyságú (Newton III. törvénye teljesül): $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Ez a törvény akkor érvényes, ha a két kölcsönható test környezetében nincs más, a kölcsönhatást zavaró – pl. elektromosan töltött – test. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a két töltés kölcsönhatását üres térben – vákuumban – kellene vizsgálnunk, hiszen az anyagokat töltött részecskék építik fel, s ezek a töltések módosítják a kölcsönhatást. Kimutatható azonban, hogy a levegő módosító hatása igen kicsi, így a méréseket levegőben végezve, igen jó közelítéssel megkapjuk a vákuumban érvényes törvényt⁴.

A törvénnyel kapcsolatban két kérdés vetődik fel:

- mi a Q egysége?
- mennyi a K_e ?

Azt a problémát, hogy egyetlen összefüggésből két új mennyiséget, a töltést és az arányossági tényezőt kell meghatároznunk, kétféleképpen oldhatjuk meg (ugyanezzel a problémával találkoztunk már Newton II. törvényénél is, ahol a két mennyiség a tömeg és az erő volt):

- önkényesen rögzítjük a töltés egységét (pl. egységként egy reprodukálható módon feltöltött test töltését választjuk). Ekkor a K_e arányossági tényező mérés útján határozható meg: ha két, egymástól $r_{12} = d$ távolságban lévő, egységnyi töltésű (Q_{egys}) test által egymásra kifejtett $F_{12} = F$ erőt megmérjük, akkor az arányossági tényezőt a $K_e = Fd^2/Q_{egys}^2$ összefüggésből kapjuk meg. A töltés ma használt, törvényben rögzített egysége (az ún. SI-egység) 1 Coulomb = 1 C⁵. A töltés egységének ilyen választása esetén két 1 C nagyságú töltés között 1 m távolságban $F = 9 \cdot 10^9$ N erő lép fel, ezért a Coulomb-törvényben szereplő arányossági tényezőre az SI-rendszerben azt kapjuk, hogy $K_e = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}^2}{1 \text{ C}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.
- a másik lehetőség az, hogy önkényesen rögzítjük a K_e állandót, ekkor Q egysége a Coulomb-törvényből származtatható. Ezt az eljárást követik a fizika bizonyos területein még ma is használatos elektrosztatikus CGS-rendszerben. Itt önkényesen a $K_e = 1$ egység nélküli értéket választják, amiből következik, hogy az elektromos töltés egysége: $1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$.

⁴ A töltések kölcsönhatására vonatkozó Coulomb-törvényt eredetileg levegőben állapították meg. Csak később derült ki, hogy az anyag jelenléte módosítja a töltések kölcsönhatását. Az is kiderült azonban, hogy a levegőben kimért törvények a vákuumban érvényes törvényekkel gyakorlatilag azonosak.

⁵ Az 1 C egységet az SI-rendszerben az áramerősség egységéből (1 A) származtatjuk: $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$.

Lényegében formai okokból (bizonyos alaptörvények egyszerűbb alakban írhatók fel) az SI-rendszerben a K_e helyett egy új konstanst vezetnek be (ε_0):

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 = 8.855 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2. \quad (1.3)$$

Ezzel a Coulomb-törvény az

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12} \quad (1.4)$$

alakot ölti. A törvény *nyugvó, pontszerű töltések* (vagy gömbszimmetrikus töltéseloszlások) között *vákuumban* fellépő kölcsönhatást ír le.

1.3. Elektromos erőter és elektromos térerősség

Ha egy Q ponttöltés környezetében bárhol elhelyezünk egy másik (q) ponttöltést, akkor arra a Coulomb-törvénynek megfelelő erő hat, vagyis egy töltés maga körül a térben olyan fizikai állapotot hoz létre, amelynek eredményeképpen bármilyen másik, odahelyezett töltésre elektrosztatikus erő hat. Rövidebben ezt úgy szokás megfogalmazni, hogy a Q elektromos töltés maga körül ún. elektrosztatikus- vagy elektromos *erőteret* hoz létre. Azt, hogy valahol van-e elektromos erőter, eszerint úgy állapíthatjuk meg, hogy a kérdéses helyre egy mérőtöltést teszünk, és ha erre erő hat, akkor ott az erőter jelen van, ha nem hat erő, akkor nincs jelen. A fenti módszerrel tehát az erőter létezését akkor is meg tudjuk állapítani, ha az erőteret létrehozó töltést nem ismerjük. A kérdés az, hogy lehet-e ezt az erőteret számszerűen is jellemezni.

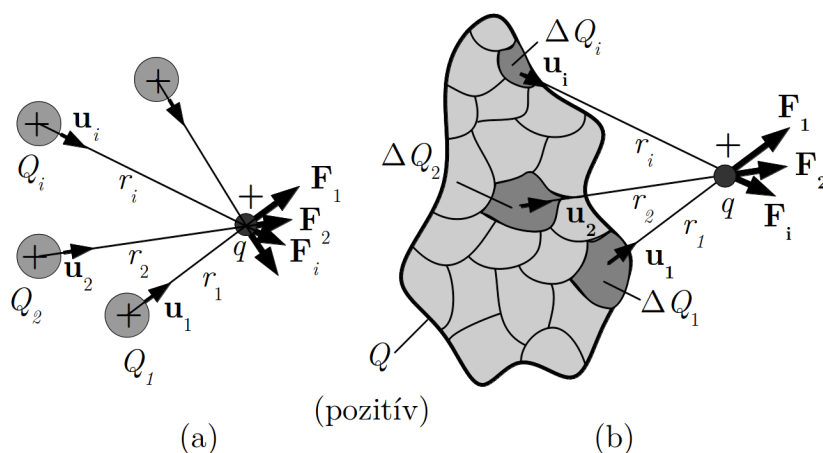
Azt, hogy egy pontszerű Q töltés környezetében milyen „erősségű” erőter jön létre, jellemezhetjük például úgy, hogy a tér különböző pontjaiban meghatározzuk egy önkényesen kiválasztott pontszerű q pozitív mérőtöltésre ható erőt (ennek a mérőtöltésnek olyannak kell lennie, hogy jelenléte ne befolyásolja az eredeti viszonyokat). Alkalmazva a Coulomb-törvényt erre az esetre, látható, hogy ez az erőhatás nemcsak a Q töltés által létrehozott erőterre jellemző, hanem a mérőtöltéstől is függ. Az is látható azonban, hogy az erőhatás arányos a mérőtöltés nagyságával, vagyis az erőt elosztva a mérőtöltéssel, a mérőtöltéstől független vektormennyiséget (\mathbf{E}) kapunk, amely már *csak az erőteret létrehozó töltés nagyságától és a vizsgált pont helyétől* függ:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u} \quad (1.5)$$

ahol \mathbf{u} az erőteret létrehozó töltéstől a mérőtöltés felé mutató egységvektor, r a kölcsönható töltések távolsága. Az így bevezetett \mathbf{E} vektor a Q ponttöltés által létrehozott elektromos erőteret jellemzi.

Előbbi gondolatmenetünk szépséghibája az, hogy csak egyetlen pontszerű töltés által létrehozott erőterre érvényes. Ha több ponttöltés által létrehozott erőteret is a fenti módon akarjuk jellemezni, akkor meg kell vizsgálnunk a mérőtöltésre az összes jelenlévő töltés által kifejtett erőt. Ezt az erőt megpróbálhatjuk elméleti úton, a *szuperpozíció elve* alapján kiszámítani. Eszerint az elv szerint a kiválasztott q mérőtöltésre az egyes töltések által kifejtett erőt nem befolyásolja a többi töltés jelenléte, vagyis minden egyes erő úgy számítható ki, mintha a többi töltés ott sem lenne. Ennek alapján a q töltésre ható eredő erőt úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes töltések által egyenként kifejtett erőket vektorilag összeadjuk (ez látható az 1.5. (a) ábrán), vagyis a $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ töltések által a mérőtöltésre kifejtett eredő erő (\mathbf{F}_e) az alábbi módon kapható meg:

$$\mathbf{F}_e = q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i. \quad (1.6)$$



1.5. ábra. Az elektrosztatikus erők szuperpozíciójának elve

Látható, hogy az erő most is arányos a mérőtöltéssel, ezért bevezethetjük az

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \quad (1.7)$$

vektort, ami csak az erőteret létrehozó töltésektől, továbbá a helytől függ. Ezzel a q töltésre ható erő az

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (1.8)$$

alakba írható.

Hasonlóan járhatunk el, ha egy kiterjedt testhez tartozó folytonos töltéeloszlás által létrehozott erőteret akarunk jellemezni, csak ekkor a kiterjedt testet fel kell osztani igen kicsi térfogatelemekre (1.5. (b) ábra), és az ezekben foglalt töltések által a kiszemelt pontszerű töltésre kifejtett erőket kell összegezni. Könnyen belátható, hogy az erő ekkor is arányos lesz a mérőtöltéssel.

Ez azt mutatja, hogy érdemes az erőteret a fenti módon bevezetett térjellemező vektorral jellemezni. Azt azonban, hogy ez a jellemző valóban mindig használható, kísérletileg kell megvizsgálni. A tapasztalat szerint az elektrosztatikus kölcsönhatásra a szuperpozíció elve érvényes, és az előbbi megfontolások általában is helyesek.

Mindezek alapján az elektromos erőter jellemzésére bevezethetünk egy vektormennyiséget, az alábbi definícióval: az elektromos töltések közelében létrejövő elektromos erőterbe elhelyezünk egy pontszerűnek tekinthető, az eredeti viszonyokat elhanyagolható mértékben zavaró q pozitív mérőtöltést, és meghatározzuk (megmérjük vagy kiszámítjuk) a rá ható \mathbf{F}_e elektromos erőt. Az elektromos erőter jellemzésére az adott pontban az

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q} \quad (1.9)$$

vektort használjuk, amelyet *elektromos térerősségnek* nevezünk, és ezt a definíciót *mindenféle eredetű elektromos erőter esetén érvényesnek tekintjük*.

A definíció alapján a térerősség mértékegységét is meghatározhatjuk, és arra azt kapjuk, hogy 1 N/C.

A fentiek alapján egy erőteret, amelyet valamilyen töltés maga körül létrehoz, úgy tudunk jellemezni, hogy az erőter minden pontjában megadjuk az elektromos térerősségvektort. Ha ezt megtettük, akkor ahhoz, hogy egy tetszőleges pontban elhelyezett töltésre ható erőt kiszámítsuk, nincs szükségünk az erőteret létrehozó töltött objektumok ismeretére, hiszen azoknak az „erőkifejtő hatását” a térerősségvektor egyértelműen jellemzi. (Például, egy \mathbf{E} térerősségű helyen elhelyezett q_1 töltésre ható erő $\mathbf{F}_e = q_1 \mathbf{E}$.) Ebben az értelemben tehát a térerősség-vektorokkal jellemzett erőter hordozza az erőteret létrehozó objektumok hatásait.

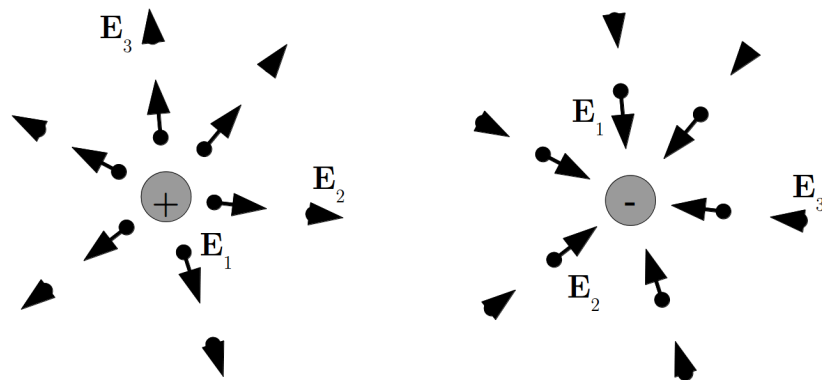
Ennek alapján két töltött test kölcsönhatását úgy is felfoghatjuk, hogy az egyik maga körül létrehoz egy elektromos erőteret, és ez az erőter hat a másikra: *az erőter közvetíti a kölcsönhatást*. Ez a felfogás szemben áll azzal a korábbi elképzeléssel, amely szerint az egymástól távol elhelyezkedő töltések közvetlenül és azonnal hatnak egymásra (ez volt az ún. *távolhatás* elképzelés). Ebben a kérdésben csak a tapasztalat dönthet, az pedig azt mutatja, hogy ha valahol töltés jelenik meg, akkor az erőter először a töltés közelében változik meg, és a változás véges sebességgel halad tovább, a hatásokat az erőter véges sebességgel közvetíti. A töltés tehát közvetlenül az erőterrel áll kapcsolatban, vagyis a korábbi távolhatás elképzeléssel szemben ez az ún. *közelhatás* működik.

A térerősséget a definíció alapján elvileg mérés segítségével határozhatjuk meg. Látni fogjuk azonban, hogy ismert töltéselrendeződések által létrehozott térerősség ki is számítható. Ha az erőteret pontszerű töltés hozza létre, akkor könnyű helyzetben vagyunk, hiszen ekkor a mérőtöltésre ható erőt a Coulomb-törvényből kiszámíthatjuk, és ebből – a korábban megismert módon – a térerősségvektor helytől való függését is megkapjuk. Bonyolultabb esetekben a számításhoz a térerősségvektor tulajdonságainak megismerése útján felállított általános törvényekre van szükség.

1.4. Az elektromos erőter szemléltetése, erővonalkép

Az elektromos erőterben a tér minden pontjához tartozik egy vektor, az \mathbf{E} elektromos térerősségvektor, amely az elektromos erőteret (az ott fellépő erőhatást) jellemzi. Sok esetben nagyon hasznos, ha az erőter jellegét szemléletessé tudjuk tenni, vagyis azt valamilyen módon ábrázoljuk.

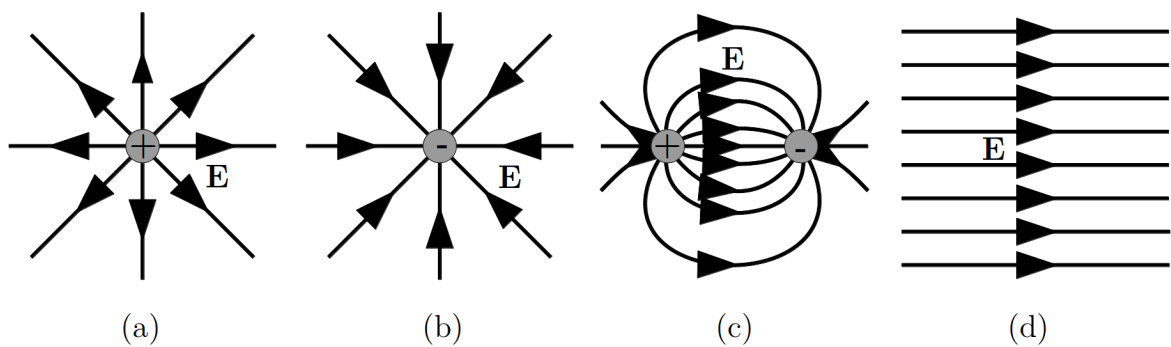
Az erőter szemléletes megjelenítésének egy lehetséges módja az, hogy különböző pontokhoz tartozó térerősségvektorokat lerajzoljuk, ahogy az pontszerű negatív- és pozitív elektromos töltés által létrehozott erőterben az 1.6. ábrán látható. Így egy térerősség-térképet kapunk, amely az egyes pontokban mutatja a térerősség nagyságát és irányát.



1.6. ábra. Az elektromos erőter szemléltetése térerősség vektorokkal

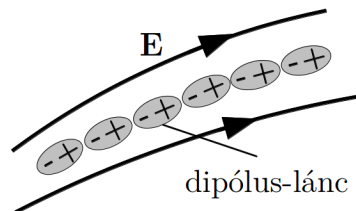
Ennél áttekinthetőbb és hasznosabb ábrázolást kapunk a *térerősségvonalak* (másik szokásos elnevezéssel *elektromos erővonalak*) bevezetésével. A térerősségvonalakat úgy kapjuk, hogy a berajzolt térerősségvektorokhoz olyan görbéket szerkesztünk, amelyekhez egy pontban húzott érintő az adott ponthoz tartozó térerősségvektor irányába mutat. A térerősségvonalnak irányt is adunk, ami megegyezik a hozzátartozó térerősségvektorok irányával. Más szóval, a térerősségvonal az elektromos erőter „irányváltzásait” követi és szemlélteti.

Az 1.7. ábrán vázlatosan bemutatjuk az előző ábrán is szereplő ponttöltések ((a) és (b) ábra) és egymáshoz közel elhelyezett pozitív és negatív elektromos töltés – egy ún. *dipólus* ((c) ábra) – által létrehozott erőter térerősségvonalait. A dipólus esetén a térerősségvektor egy adott pontban a két töltés által létrehozott térerősségek vektori összegeként kapható meg (alkalmazzuk a szuperpozíció elvét). Bemutatunk továbbá egy fontos szerepet játszó speciális esetet, amikor egy bizonyos térrészben a térerősségvektor nagysága és iránya minden pontban azonos ((d) ábra). Az ilyen erőteret, (vagy egy erőter ilyen tartományát) *homogén erőtérrnek* nevezik. Homogén erőtérben a térerősségvonalak párhuzamos egyenesek.



1.7. ábra. Az elektromos erőter szemléltetése erővonalakkal

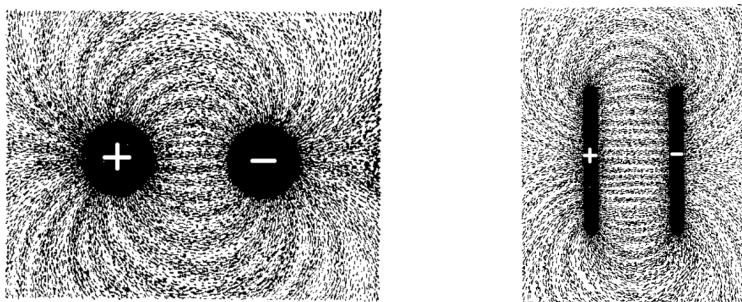
Ezeket az erővonalakat egyszerűbb esetekben (pl. ponttöltés vagy ponttöltésekből álló töltérendszerek) esetén meghatározhatjuk a térerősségvektorok kiszámításával, de az erővonalkép kísérletek segítségével is megvizsgálható. Erre az ad lehetőséget, hogy szigetelő anyagszemcsék elektromos erőtérben dipólusokká válnak. Ha ezeket a dipólusokat folyadékba betéve mozgásképesre tesszük, akkor kölcsönhatásuk miatt rendeződnek: a dipólusok beállnak a térerősség irányába, ugyanakkor ellentétes végükkel egymáshoz csatlakoznak, és láncokat képezve kirajzolják az elektromos erőter erővonalait (1.8. ábra).



1.8. ábra. A szigetelő anyag apró szemcséiből összeálló dipólus-lánc párhuzamos az erővonalakkal

Kísérlet: Az erővonalak kísérleti szemléltetése dipólus-lánc segítségével

Egy üvegedénybe daraszemcséket tartalmazó olajat teszünk, majd az edény aljára ponttöltést, dipólust, síklapot vagy kondenzátort modellező fém elektrodokat helyezünk el, és azokat feltöltjük (feszültséget kapcsolunk rájuk). Ekkor a daraszemcsék megmutatják a különböző töltések körül kialakuló elektromos erőter erővonalait. Az üvegedényt vetítógépre téve, a kapott térerősség-ábra jól láthatóvá tehető. Az 1.9. ábrákon a valóságos képhez hasonló grafika látható, amely egy dipólus és két ellentétes töltésű, párhuzamos síklap elektromos erőterét mutatja. ♦



1.9. ábra. Egyszerű töltéselrendezések tere dipólus-lánc segítségével szemléltetve

Az ábrákon bemutatott esetek azt sugallják, hogy a térerősségvonalak sűrűségével az elektromos térerősség nagysága is jellemezhető. Az erővonalábrákon ugyanis világosan látható, hogy a térerősségvektor nagyságának csökkenése irányában haladva (pl. a ponttöltéstől távolodva) a térerősségvonalak ritkulnak.

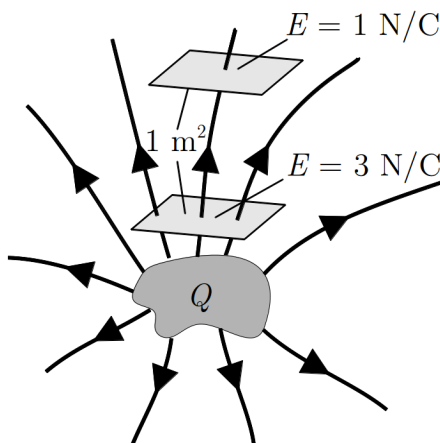
A térerősségvonal-képbe elvileg tetszőleges számú térerősségvonalat berajzolhatunk, de célszerűnek látszik, hogy a térerősség nagyságának egyértelmű jellemzése érdekében valamilyen megállapodást fogadjuk el a berajzolt erővonalak sűrűségére vonatkozóan. Az általánosan elfogadott megállapodás a következő: a térerősségvonal-képet mindig úgy szerkesztjük meg, hogy bármely pontban *a térerősségvonalakra merőleges egységnyi felületet annyi térerősségvonal metsze át, amennyi ott a térerősségvektor számértéke*. Ez más szóval azt jelenti, hogy a térerősség számértéke az egységnyi (térerősségre merőleges) felületen átmenő erővonalak számát adja meg. Eszerint a megállapodás szerint egy elektromos erőterben az \mathbf{E} térerősségű helyen a térerősségvonalakra merőleges ΔA_N nagyságú felületen át rajzolando erővonalak $N_{\Delta A}$ számát az

$$(E)_{\text{számért.}} = \frac{\Delta N_{\Delta A}}{(\Delta A_N)_{\text{számért.}}} \quad (1.10)$$

összefüggésből kaphatjuk meg:

$$\Delta N_{\Delta A} = (E)_{\text{számért.}} (\Delta A_N)_{\text{számért.}} \quad (1.11)$$

Az ilyen módon elkészített térerősségvonal-képről a térerősség nagysága az 1.10. ábrán látható módon olvasható le.



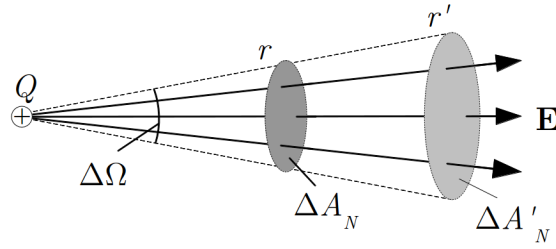
1.10. ábra. Az erővonalak sűrűsége arányos a térerősség nagyságával

Nyilvánvaló, hogy homogén erőterben egy adott helyen a fenti szabály szerint megrajzolt erővonalsűrűség a tér bármelyik pontjában ugyanaz lesz, és a térerősségre merőleges felületet átmetsző erővonalak száma a fenti módon tetszőleges méretű felület esetén kiszámítható.

Felmerül azonban a kérdés, hogy nem homogén erőterben (pl. egy ponttöltés erőterében) igaz-e az, hogy ha egy adott helyen a szabály szerint megrajzoljuk az erővonalakat, majd ezeket meghosszabbítjuk, akkor az erővonalkép másutt is meg fog felelni a szabálynak?

Próbáljuk megrajzolni a fenti definíció alapján egy pontszerű, pozitív Q ponttöltés körül kialakuló erőter erővonalképét. Ehhez meg kell határoznunk, hogy a töltés elektromos erőterét szemléltető sugárirányú erővonalakat milyen sűrűn kell berajzolnunk, hogy az erővonal-ábra a térerősség nagyságát is tükrözze. Ebben az erőterben a térerősség sugárirányú és gömbszimmetrikus, a töltéstől r távolságban a térerősség mindenütt azonos nagyságú. Emiatt, a térerősségre merőleges ΔA_N felületként felvehetjük a töltés körül elképzelt r sugarú gömbfelület egy elemi $\Delta\Omega$ térszög által kimetszett részét (1.11. ábra). A térerősség nagysága itt

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (1.12)$$



1.11. ábra. Az E erővonalsűrűsége és a térerősség összefüggése ponttöltés esetén

a felületelem nagysága pedig a

$$\frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \frac{\Delta A_N}{4r^2\pi} \quad (1.13)$$

összefüggésből kapható meg (4π a teljes térszög):

$$\Delta A_N = r^2 \Delta\Omega. \quad (1.14)$$

(ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a térszög $\Delta\Omega = \frac{\Delta A_N}{r^2}$ definícióját használjuk). Így az elfogadott megállapodás szerint a kiválasztott elemi felületen áthaladó erővonalak száma:

$$\begin{aligned} \Delta N_{\Delta A} &= (E \Delta A_N)_{\text{számért.}} = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} r^2 \Delta\Omega \right)_{\text{számért.}} = \\ &= \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega \right)_{\text{számért.}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Vegyük észre, hogy a szükséges erővonalak száma nem függ r -től, ezért, ha a számolást elvégezzük arra az elemi felületre, amelyet *ugyanaz* a $\Delta\Omega$ térszög metsz ki egy az előzőtől eltérő r' sugarú gömbfelületből (1.11. ábra), akkor a berajzolandó erővonalak $N'_{\Delta A}$ számára azt kapjuk, hogy

$$\Delta N'_{\Delta A} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega \right)_{\text{számért.}} = \Delta N_{\Delta A}. \quad (1.16)$$

Ez azt jelenti, hogy az erővonalak a kiválasztott térszögön belül megszakítás nélkül továbbrajzolhatók, nem kell új erővonalakat beiktatni vagy erővonalakat megszakítani.

Mivel a fenti meg gondolás tetszőleges térszögre igaz, a ponttöltés erőterére általában is érvényes, hogy az erőteret – a ponttöltés helyét kivéve – mindenütt megszakítatlan, folytonos erővonalakkal lehet ábrázolni. Érdemes megjegyezni, hogy ez az eredmény annak a speciális körülménynek a következménye, hogy pontszerű töltések elektrosztatikus kölcsönhatása – és ennek következtében egy ponttöltés térerőssége – $1/r^2$ -es távolságfüggést mutat. Ezért esik ki a számolásból az r^2 , vagyis az erővonalszámnak az r -től való függése.

További meg gondolásokból (és a tapasztalatból) az is kiderül, hogy a fenti meg állapítás nem csak ponttöltések, hanem tetszőleges (ponttöltések kombinációjaként kialakított) töltéseloszlások erőterére is igaz: *az elektrosztatikus erőter erővonalai megszakítás nélkül, folytonos vonalakként rajzolhatók fel.*

Számítsuk ki most, hogy egy pozitív Q ponttöltésből összesen mennyi erővonalnak kell kiindulni az erővonalak ábrázolására elfogadott szabály szerint. A ponttöltés, mint középpont körül egy r sugarú gömböt felvéve (a gömbfelület mindenütt merőleges a sugárirányú térerősségre), a korábban felírt összefüggés szerint a teljes gömbfelületen átmenő összes erővonalak N_e száma:

$$N_e = (E4r^2\pi)_{\text{számért.}} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4r^2\pi \right)_{\text{számért.}} = \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}}. \quad (1.17)$$

A gömbfelületet metsző erővonalak száma tehát arányos a Q töltés nagyságával. Mivel az erővonalak folytonosak, ez azt jelenti, hogy egy pozitív Q ponttöltésből kiinduló erővonalak száma is ugyanennyi. Ebből az a fontos következtetés adódik, hogy ha *a Q ponttöltést nem gömb alakú, zárt felülettel vesszük körül, a felületet metsző erővonalak száma akkor is ugyanannyi lesz, mégpedig*

$$N_e = \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}} \quad (1.18)$$

(A zárt felületre vonatkozóan itt annyi megszorítás van, hogy az állítás csak olyan felületre igaz, amelyet a töltésből kiinduló bármely erővonal csak egyszer metsz.)

Ha a töltés negatív, akkor az erővonalak száma ugyanennyi, csak most az erővonalak nem a töltésből indulnak ki, hanem abba érkeznek meg.

Ha ugyanabban a pontban $Q_1 > 0$ pozitív- és $Q_2 < 0$ negatív töltést helyezünk el, akkor az eredő térerősség nagyságát a töltésektől r távolságban az

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 - |Q_2|}{r^2} \quad (1.19)$$

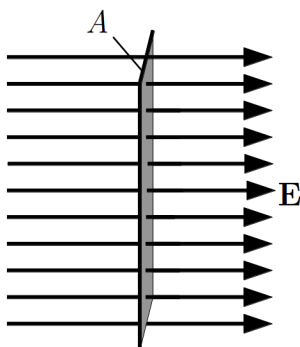
összefüggés adja meg. Ilyenkor a töltéselrendezésből kiinduló, és a töltéseket körülvevő zárt felületet metsző erővonalak száma

$$\begin{aligned}
N_e &= \left(\frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \right)_{\text{számért.}} = \left(\frac{Q_1}{\varepsilon_0} \right)_{\text{számért.}} + \left(\frac{Q_2}{\varepsilon_0} \right)_{\text{számért.}} = \\
&= \left(\frac{Q_1}{\varepsilon_0} \right)_{\text{számért.}} - \left(\frac{|Q_2|}{\varepsilon_0} \right)_{\text{számért.}}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Ez a szám úgy is felfogható, hogy a zárt felületből kifelé haladó erővonalak számát pozitívnak-, a zárt felületbe befelé haladó erővonalak számát negatívnak tekintjük, és kiszámítjuk az erővonalszámok algebrai összegét (a kifelé- és befelé haladó erővonalak számának különbségét). Ellenkező előjelű ponttöltések egyidejű jelenléte esetén tehát a töltéseket körülvevő felületet metsző *erővonalak előjeles összege* arányos a felületbe bezárt *eredő töltéssel*.

Ha a zárt felületet metsző erővonalak számát nem pontszerű töltések esetén megvizsgáljuk, akkor kiderül, hogy a fenti megállapítás tetszőleges töltéseloszlások erőterére is igaz. Ezt a tapasztalatot érdemes valamilyen praktikusán használható matematikai formában megfogalmazni. Ehhez azonban szükség van egy olyan mennyiségre, amelynek segítségével automatikusan megkapható egy felületet egyik- illetve másik oldalról átmetsző erővonalak számának különbsége. Ez a mennyiség a fluxus, amit a következő pontban tárgyalunk részletesen.

1.5. Az elektrosztatikus erőtér II. alaptörvénye



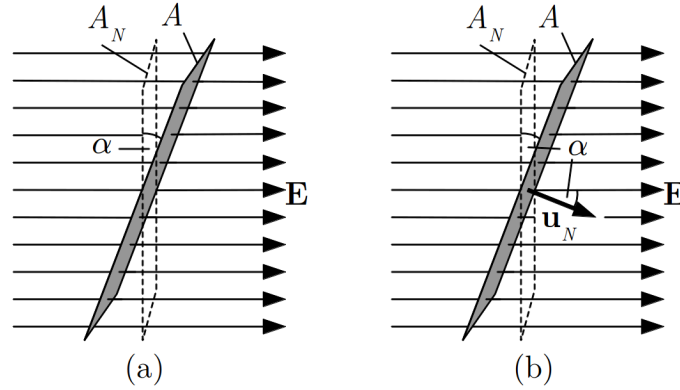
1.12. ábra. Az elektromos tér fluxusa az erővonalakra merőleges sík felületen

A felületet metsző erővonalakat előjelesen összeszámláló a mennyiséget az egyszerűség kedvéért először homogén elektromos erőtérben vezetjük be. Az E homogén erőtérben a térerősségre merőleges A felületet (1.12. ábra) átmetsző erővonalak számát megadó EA mennyiség az *elektromos erőtérnek az A felületre vonatkozó fluxusa*, és jelölésére rendszerint a Φ_E^A szimbólumot használják:

$$\Phi_E^A = EA \quad (1.21)$$

Az alsó index arra utal, hogy ez az elektromos térerősség fluxusa, a felső index pedig azt mutatja, hogy a fluxus az A felületre vonatkozik. Az így definiált fluxus – a szemléletes jelentését megadó erővonal számtól eltérően – nem dimenzió nélküli szám, hanem Nm^2/C egységben megadott *fizikai mennyiség*.

A vizsgált felület azonban nem mindig merőleges a térerősségre. Ilyenkor a fluxust úgy kapjuk meg, hogy a felületnek a térerősségre merőleges A_N vetületét szorozzuk meg a térerősséggel (1.13. (a) ábra)



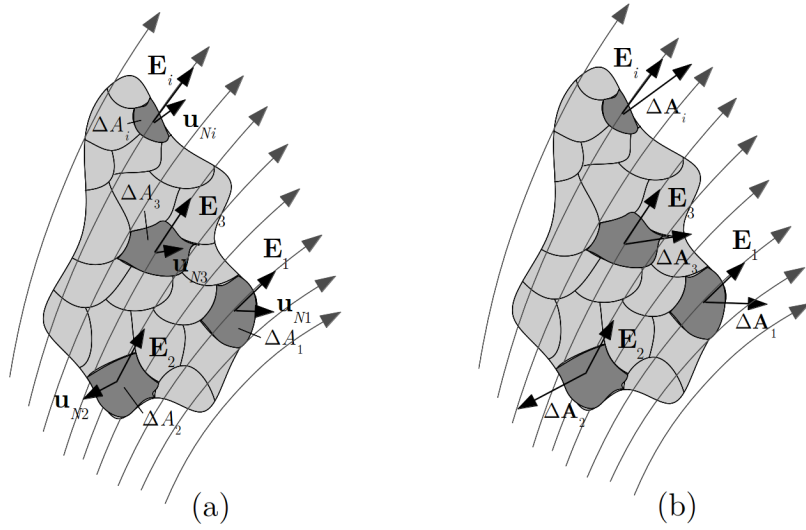
1.13. ábra. Az elektromos tér fluxusa az erővonalakkal tetszőleges szöget bezáró felületen

$$\Phi_E^A = EA_N = EA \cos \alpha. \quad (1.22)$$

Ebben az esetben a fluxus kiszámítása úgy is történhet, hogy a felület állását a felületre merőleges \mathbf{u}_N *egységvektorral* adjuk meg (1.13. (b) ábra). Ekkor a fenti kifejezés úgy is felfogható, mint az \mathbf{E} vektor és az $A\mathbf{u}_N$ vektor skaláris szorzata (ugyanis α éppen e két vektor által bezárt szög):

$$\Phi_E^A = E A \mathbf{u}_N = EA \cos \alpha. \quad (1.23)$$

A legáltalánosabb – és eléggé gyakori – eset az, hogy az erőtér nem homogén, tehát a térerősség helyről-helyre változik, és a felület sem sík. Ilyenkor a szokásos eljárást követjük: a felületet olyan kis elemi részekre (ΔA_i) osztjuk, amelyeken belül a térerősség (\mathbf{E}_i) már közelítőleg állandónak tekinthető, és amely közelítőleg sík, tehát az állása



1.14. ábra. A fluxus számítása elemi felületdarabokra való összegzéssel

megadható a rá merőleges \mathbf{u}_{N_i} egységvektorral (1.14. (a) ábra). Az egyes felületelemekre vonatkozó fluxust így a $\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \Delta A_i \mathbf{u}_{N_i}$ kifejezés adja meg.

Ez a kifejezés rövidebben is felírható, ha bevezetjük a *felületvektort*: ezt olyan vektor-ként definiáljuk, amely merőleges a felületre, és nagysága a felület nagyságával egyenlő. Eszerint a ΔA_i felületelem felületvektora $\Delta \mathbf{A}_i = \Delta A_i \mathbf{u}_{N_i}$. Ezzel a felületelemre vonatkozó fluxus (1.14. (b) ábra)

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \Delta \mathbf{A}_i. \quad (1.24)$$

A teljes felületre vonatkozó fluxus közelítőleg az elemi $\Delta\Phi_i$ fluxusok összege, vagyis:

$$\Phi_E^A \approx \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \mathbf{E}_i \Delta \mathbf{A}_i, \quad (1.25)$$

ahol i a felületelem sorszáma.

Az A felületre vonatkozó fluxus pontos értékét úgy kapjuk meg, hogy a felület felosztását egyre finomabbá tesszük (ekkor egyre inkább igaz lesz, hogy a felületelemen belül a térerősség már nem változik, és a felületelem síknak tekinthető), és megkeressük az így kiszámított összeg határértékét:

$$\Phi_E^A = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta\Phi_i = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{E}_i \Delta \mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}. \quad (1.26)$$

A matematikában az ilyen határérték neve: az \mathbf{E} vektornak A felületre vett *felületi integrálja*, amelynek jelölésére az egyenlet jobb oldalán álló integrál-szimbólumot használják. Kiszámításának módszereivel a matematika vektoranalízis nevű fejezete foglalkozik, az általunk vizsgálandó egyszerű esetekben azonban ezekre az ismeretekre nem lesz szükségünk: ezt az integrál-szimbólumot a továbbiakban egy igen finom felosztáson végrehajtott összegzésként kezelhetjük.

Ha a térerősségvonal-képet a tárgyalt megállapodás szerint rajzoljuk meg, akkor egyszerű esetekben az így definiált fluxus számértéke valóban megadja a ΔA felületelemet átmetsző térerősségvonalak számát. A fluxus azonban több, mint egyszerű térerősségvonal-szám:

- egyrészt azért, mert a fluxus láthatóan dimenzióval és egységgel rendelkező fizikai mennyiség, amely az elektromos erőteret jellemzi (tehát nem darabszám, mint a metsző erővonalak száma),
- másrészt azért, mert a fluxusnak előjele van, hiszen ha a térerősség és a felületvektor szöge α , akkor skaláris szorzat ismert tulajdonsága miatt a fluxus az $\alpha < 90^\circ$ esetben pozitív, az $\alpha > 90^\circ$ esetben pedig negatív (az 1.14. ábrán pl. az 1 felületelemre vonatkozó fluxus pozitív, a 2 felületelemre vonatkozó fluxus pedig negatív).

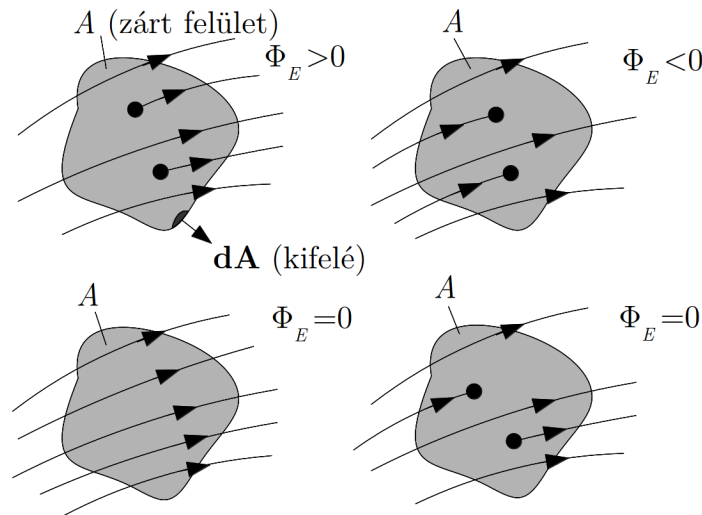
Eddig a fluxust hallgatólagosan mindig nyílt (tehát egy görbével határolt, pl. téglalap alakú) felületekre értelmeztük. Vizsgáljuk meg most, hogy egy *zárt felületre* (pl. egy krumpli héjára) hogyan lehet a fluxust kiszámítani. A definíció és az eljárás most is ugyanaz, mint egy nyílt felület esetén, csak el kell döntenünk, hogy az egyes felületelemek felületvektorait a zárt felületbe befelé (a krumpli belseje felé) vagy onnan kifelé irányítjuk. Ettől függni fog a kiszámított fluxus előjele, de a nagysága nem. A szokás az, hogy a felületvektort a zárt felületből kifelé mutató vektornak tekintik. Eszerint a definíció szerint a zárt felületbe befelé mutató elektromos térerősség esetén a fluxus negatív, a felületből kifelé mutató térerősség esetén pedig pozitív. A teljes zárt felületre vonatkozó fluxust ezek után a korábbiakhoz hasonlóan (elemi felületekre vonatkozó fluxusok összegeként) kaphatjuk meg. A *zárt felület* tényét a jelölésben is kiemelik, a fluxust jelölő felületi integrálban az integrál jelre egy *kört* rajzolnak:

$$\Phi_E^{\text{zárt}} = \oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A}. \quad (1.27)$$

A fluxus geometriai jelentésének megfelelően ennek a mennyiségnek a számértéke a zárt felületet átmetsző erővonalak összegét adja meg. Ez az összeg azonban előjeles összeg: a zárt felület által határolt térfogatból (a krumpliból) kifelé mutató erővonalakat a fluxusban pozitív előjellel, a térfogatba (a krumplibá) kívülről befelé mutató erővonalakat pedig negatív előjellel vesszük figyelembe. Ezért a zárt felületre vett fluxus számértéke a

felület belsejéből kilépő és a felület belsejébe belépő *erővonalak számának a különbségét* adja meg. Ez azt jelenti, hogy egy zárt felületre vett fluxus csak akkor különbözik nullától, ha a felületen belül erővonalak kezdődnek vagy végződnek, és a kezdődő és végződő erővonalak száma különböző.

Szemléltetésül az 1.15. szemléltetés ábrán bemutatjuk a zárt felületre vett fluxus néhány esetét.

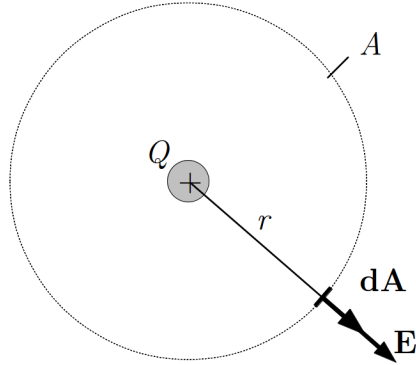


1.15. ábra. A fluxus értéke zárt felület esetén csak akkor különbözik nullától, ha a felületen belül erővonalak kezdődnek vagy végződnek

Érdekes ezt a szemléletes – de egyelőre csupán elméleti érdekességnek tűnő – eredményt összevetni az elektromos erővonalakra vonatkozó tapasztalatokkal.

Mind a térerősségre vonatkozó számítások (pl. ponttöltések esetén), mind pedig a kísérletek azt mutatják, hogy az elektrosztatikus erőterben az erővonalak töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek. Vagyis egy zárt felületre vonatkozó fluxus akkor lesz nullától különböző, ha a felület töltést zár körül. A kérdés az, hogy ez a fluxus hogyan függ a bezárt töltés nagyságától. Erre a kérdésre egy speciális esetben már tudjuk a választ: láttuk, hogy egy Q ponttöltésből a Q/ϵ_0 számértékével megegyező számú erővonal indul ki, tehát a töltést körülvevő felületet metsző erővonalak száma és a fluxus számértéke is ennyi. A fluxus kiszámításának gyakorlása kedvéért azonban most határozzuk meg, hogy egy pozitív Q ponttöltés által keltett elektromos erőterben mennyi a fluxus egy olyan r sugarú gömbfelületen, amelynek középpontja a töltéssel esik egybe (1.16. ábra).

Mivel a ponttöltés erőterében a térerősség sugárirányú, és a gömbfelület bármely elemi részének felületvektora is sugárirányú, a térerősség és a felületvektor a felület minden



1.16. ábra. A fluxus számítása egy ponszerű töltéssel koncentrikus gömbfelületre

helyén párhuzamos egymással. Ebből – a skaláris szorzatra vonatkozó szabály szerint – következik, hogy $\mathbf{E} d\mathbf{A} = E dA$. Másrészt a térerősség nagysága a gömbfelület minden pontján ugyanakkora, tehát E kiemelhető, így a gömbfelületre vett fluxus:

$$\Phi_E^{\text{zárt}} = \oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4r^2 \pi. \quad (1.28)$$

Az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy a gömbfelület felületelemeinek összege a gömb felületével egyenlő.

A fenti kifejezésbe a ponttöltés ismert térerősségét beírva a várakozásnak megfelelően a

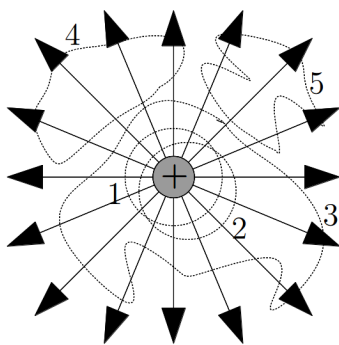
$$\Phi_E^{\text{zárt}} = \oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4r^2 \pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.29)$$

eredményt kapjuk. Vagyis ebben a speciális esetben a zárt felületre vett fluxus arányos a felület által bezárt ponttöltés nagyságával. (Itt látszik az ϵ_0 állandó bevezetésének egyik formai előnye: a törvényből kiesett a 4π szorzó.)

Korábban láttuk, hogy a szabályosan megrajzolt erővonalképen egy ponttöltésből kiinduló erővonalak száma csak a ponttöltés nagyságától függ. Ebből következik, hogy a zárt felületet metsző erővonalak száma – és így a fluxus – akkor sem változik meg, ha a töltést bezáró zárt felület alakját vagy elhelyezkedését megváltoztatjuk.

Ezt szemlélteti az 1.17. ábra, amelyen jól látható, hogy az eredeti, koncentrikus gömbfelületet (1), az eltolt gömbfelületet (2) és egy tetszőleges alakú, a töltést körülvevő zárt felületet (3) metsző erővonalak előjeles összege (az ábrán 16), és így a fluxus is ugyanaz.

Vagyis a fenti összefüggés *tetszőleges alakú, a ponttöltést körülvevő felület esetén érvényes*. Ha a zárt felületet úgy vesszük fel, hogy nem zárja körül a ponttöltést (4,5), akkor a térfogatba bemenő és az abból kimenő erővonalak száma megegyezik, és a fluxus nulla lesz.



1.17. ábra. A fluxus egy pontszerű töltést körbezáró tetszőleges zárt felületre megegyezik

Az is könnyen belátható, hogy több ponttöltés esetén az egyes töltések által keltett erőterekben a metsző erővonalak számai és így a fluxusok is összeadódnak, így a zárt felületre vett fluxus kifejezésében a zárt felület belsejében lévő töltések összege szerepel. Mivel pedig bármilyen töltésalakzat felosztható pontszerű töltésekre, az állítás tetszőleges töltéseloszlásra igaz.

Ha a felületen belül negatív töltések is vannak, akkor azok a térfogatba befelé mutató térerősséget keltenek, és ennek az erőtérfogat az erővonalai a térfogatba befelé mutatnak. A fluxus kiszámításánál ezek negatív járulékot adnak, így végül megállapíthatjuk, hogy a zárt felületre vett fluxusban a felületen *belül elhelyezkedő töltések előjeles összege* ($\sum Q$) szerepel, ezért érvényes az alábbi összefüggés:

$$\oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}. \quad (1.30)$$

Ez az összefüggés *tetszőleges zárt felületre, és tetszőleges töltéseloszlásra* igaz. Ha a zárt felület nem zár be töltést vagy a bezárt töltések előjeles összege nulla, akkor a jobb oldalon nulla áll: a zárt felületre vett fluxus nulla. Ezt a törvényt gyakran az *elektrosztatika Gauss-törvényének*, vagy az *elektrosztatikus erőter II. alaptörvényének* nevezik.

A törvény lényegében azt a tapasztalatot foglalja össze matematikai formában, hogy az elektrosztatikus erőterben az erővonalak töltéseken kezdődnek és végződnek, kezdő- és végpontjuk között pedig folytonos vonalak. Ez a megállapítás úgy is megfogalmazható, hogy az *elektrosztatikus erőter forrása a töltés*.

Az elektrosztatikus erőtérben egy zárt felületre vonatkozó $\Phi_E^{\text{zárt}}$ fluxust gyakran a zárt felület által határolt térrész *forráserősségének* nevezik. Az elnevezés a fluxus geometriai jelentésével hozható összefüggésbe. Ha a felület belsejében lévő eredő töltés pozitív, akkor a forráserősség számértéke a térrészből kilépő – ott „keletkező” – erővonalak számát adja meg, negatív eredő töltés esetén pedig a térrészbe bemenő – ott „eltűnő” – erővonalak számával egyenlő.

Ha a zárt felületen belül folytonos eloszlású töltés van (vagy makroszkópikus méretben folytonosnak tekintjük a nagyon sok ponttöltésből álló töltéselrendezést), akkor a teljes töltést a *térfogati töltéssűrűség* segítségével határozhatjuk meg. Ha egy elemi ΔV térfogatban ΔQ töltés van, akkor ott a térfogati töltéssűrűség közelítő értéke $\rho \approx \frac{\Delta Q}{\Delta V}$. A töltéssűrűség egy pontban érvényes értékét úgy kapjuk meg, hogy a pont körül felvett térfogatot egyre csökkentjük, és meghatározzuk a $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$ határértéket (megjegyezzük, hogy a határérték itt nem matematikai szigorral értendő, a térfogat ugyanis nyilvánvalóan nem csökkenhet le az anyag mikroszerkezetének szintjére). Ez az adott pontban a térfogati töltéssűrűség, amely előjeles mennyiség, előjele az adott helyen lévő töltés előjelével egyezik meg.

Ha a töltéssűrűséget a zárt felület által határolt térfogat minden pontjában ismerjük, akkor a zárt felület által körülzárt Q töltés meghatározására a szokásos eljárást alkalmazzuk: a teljes V térfogatot elemi ΔV_i térfogatokra osztjuk, a $\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i$ összefüggés segítségével kiszámítjuk a töltést az egyes térfogatelemekben, majd az így kapott töltéseket összeadjuk (előjelesen):

$$Q \approx \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i. \quad (1.31)$$

Ezzel megkaptuk a töltés közelítő értékét. A töltés pontos értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a V térfogat felosztását egyre finomítjuk (az elemi térfogatokot egyre kisebbre választjuk), és kiszámítjuk a fenti összeg határértékét, amelynek jelölésére az alábbi egyenlet jobb oldalán álló szimbólumot használják:

$$Q = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i = \int_V \rho \, dV. \quad (1.32)$$

Az itt használt integrált a benne szereplő, helytől függő $\rho(x, y, z)$ függvény V térfogatra vett térfogati integráljának nevezik. Egy ilyen integrál kiszámításának részletes szabályaival itt nem foglalkozunk, számunkra elegendő az integrál szemléletes, igen finom felosztáson elvégzett összegzésként történő értelmezése.

A folytonos töltéseloszlásból származó töltésnek térfogati integrállal történő kiszámításával az elektrosztatika Gauss-törvénye az általánosabb

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.33)$$

alakba írható.

A Gauss-törvény fenti integrális alakját matematikailag tovább egyszerűsíthetjük a Gauss-Osztrogradszkij integráltétel segítségével (ld. Matematikai összefoglaló, ?? fejezet), amely szerint egy vektortér zárt felületre vett felületi integrálja megegyezik a vektortér divergenciájának a felület által bezárt térfogatra vett integráljával:

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV \quad (1.34)$$

Így a Gauss-törvényt egyetlen térfogati integrállá alakíthatjuk,

$$\int_V \left[\operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right] dV = 0 \quad (1.35)$$

Ezen térfogati integrál értéke akkor és csak akkor lehet minden V térfogatra 0, ha maga az integrandus is nulla, azaz:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (1.36)$$

Ez a Gauss-törvény differenciális alakja, amely teljességgel ekvivalens az integrális alakkal. A differenciális törvény lokális (vagy mikroszkópikus) mennyiségekre mondja ki a tér forrására vonatkozó törvényt: az elektrosztatikus tér forrassűrűsége $\operatorname{div} \mathbf{E}$ a tér minden pontjában megegyezik az adott pont töltéssűrűségének és a vákuum permittivitásának hányadosával. (Megjegyzendő, hogy a töltéssűrűségnek - és így a forrassűrűségnek is - ponttöltés esetén a ponttöltés helyén szingularitása van, így matematikailag helyesen a differenciális alakot – és a fenti levezetést is – csak véges töltéssűrűségekre, azaz folytonos töltéseloszlásokra alkalmazhatjuk.)

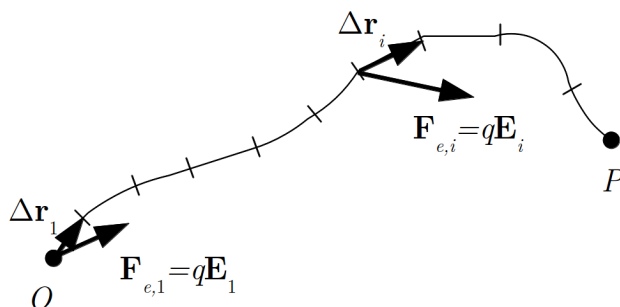
1.6. Elektromos töltés helyzeti energiája, elektromos potenciál

A mechanikában láttuk, hogy konzervatív erőterben helyzeti energia vezethető be. Azt a kérdést, hogy az elektrosztatikus erőter konzervatív vagy nem, csak a tapasztalat

segítségével lehet eldönteni. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az elektrosztatikus erőter konzervatív, tehát egy elektromos töltésnek az elektromos erőterben helyzeti energiája van.

A helyzeti energiát itt is a mechanikában definiált módon, az erőter által végzett munka segítségével adjuk meg, amely konzervatív erőterben nem függ az elmozduló töltés pályájától, csak az elmozdulás kezdő- és végpontjától.

Elektromos erőterben egy q töltésnek az O pontból a P pontba történő *tetszőleges* pályán történő elmozdulása során (1.18. ábra) az erőter által végzett munka:



1.18. ábra. Az erőter által végzett munka egy q töltés mozgása során

$$W_{\text{erőter}} = \lim_{\Delta \mathbf{r}_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{F}_{e,i} \Delta \mathbf{r}_i = \int_O^P \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = q \int_O^P \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.37)$$

A helyzeti energia definíciójának megfelelően az erőterben lévő q töltés helyzeti (potenciális) energiája a P pontban, az O pontra vonatkozóan:

$$E_h^O(P) = -W_{\text{erőter}} = -q \int_O^P \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.38)$$

Mint említettük, a két pont közötti elmozdulás pályáját nem kell megadni, hiszen ez a munka konzervatív erőterben nem függ a pályától. Mint minden helyzeti energia, egy töltés elektrosztatikus helyzeti energiája is függ a vonatkoztatási ponttól.

A q töltés helyzeti energiája nem csak a helytől és a jelenlévő erőterektől függ, hanem – érthető módon – magától a töltéstől is. A helyzeti energia azonban *arányos* a töltéssel, ezért, ha a helyzeti energiát elosztjuk a töltéssel, akkor a töltéstől független mennyiséget kapunk:

$$U^O(P) = U_{OP} = \frac{E_h^O(P)}{q} = - \int_O^P \mathbf{E} \, d\mathbf{r}. \quad (1.39)$$

Ez a mennyiség már csak az erőtértől és a P pontnak az O vonatkoztatási ponthoz viszonyított helyzetétől függ. Ezzel az eljárással tehát az erőtér bármely P pontjához hozzárendelhetünk egy skaláris mennyiséget (számszerűleg az egységnyi töltésen az OP elmozdulás során végzett munkát), amelyet az *elektrosztatikus erőtér P pontbeli potenciáljának* nevezünk. Ilyen módon a töltéssel való osztás révén a töltés egy jellemző adatából, a helyzeti energiából, a tér egy jellemző adatát, a potenciált kapjuk.

A potenciál egysége, definíciójának megfelelően: $1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$, amit *volt*-nak neveznek és jelölésére a V betűt használják. Ezzel az egység: $1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \text{ V}$.

A potenciál – hasonlóan a helyzeti energiához – mindig egy vonatkoztatási ponthoz (itt az O ponthoz) viszonyított mennyiség. Ez azonban rendszerint nem okoz nehézségeket, mert egy fizikai probléma megoldása során általában nem a helyzeti energia és a potenciál abszolút értékére van szükségünk, hanem azok megváltozására (két pontban felvett értékeik különbségére), ami viszont nem függ a vonatkoztatási ponttól, amint azt a helyzeti energiára vonatkozóan a mechanikában már kimutattuk. Bár ez az állítás nyilvánvalóan a potenciálra is igaz (a két mennyiség csupán egy állandó szorzóban különbözik egymástól), példaként itt most a potenciálra vonatkozó bizonyítást is megadjuk.

Két pont között a potenciálkülönbséget úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk az egyes pontokban a közös vonatkoztatási ponthoz viszonyított potenciált, majd kiszámítjuk ezek különbségét. Az 1.19. ábrán látható B pontnak az A ponthoz viszonyított U_{AB} potenciálkülönbségét az

$$U_{AB} = U_{OB(1)} - U_{OA} = U_{OB(2)} - U_{OA} \quad (1.40)$$

kifejezés, illetve a potenciál definíciójának felhasználásával kapott

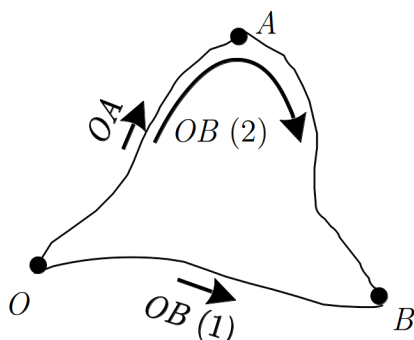
$$\begin{aligned} U_{AB} &= - \left(\int_O^A \mathbf{E} \, d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \right) - \left(- \int_A^O \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \right) = \\ &= - \int_O^A \mathbf{E} \, d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} + \int_O^A \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.41)$$

összefüggés adja meg.

Ennek megfelelően egy elemi $d\mathbf{r}$ elmozdulás kezdő- és végpontja közti potenciálkülönbséget a

$$dU = -\mathbf{E} \, d\mathbf{r} \quad (1.42)$$

skaláris szorzat adja meg.



1.19. ábra. Két pont potenciálkülönbségének meghatározása

1.7. Az elektrosztatika I. alaptörvénye

A mechanikában láttuk, hogy a konzervatív erőtérek az a sajátosága, hogy munkája független a pályától, úgy is megfogalmazható, hogy egy zárt L görbén körbejárva, a végzett összes munka nulla. Esetünkben ez azt jelenti, hogy elektrosztatikus erőterben egy q töltést egy zárt L görbén körbemozgatva, a tér által végzett összes munka nulla lesz:

$$q \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (1.43)$$

Ebből következik, hogy a zárt görbe mentén a potenciálkülönbségeket összegezzük, akkor szintén nullát kapunk:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (1.44)$$

Ezt az összefüggést gyakran az *elektrosztatika I. törvényének* nevezik, ami tehát azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér konzervatív.

Ebből a törvényből következik, hogy az elektrosztatikus tér erővonalai nem lehetnek akármilyenek. Például nem lehetségesek önmagukban záródó erővonalhurkok, mert ha zárt görbeként egy ilyen erővonalhurkot választunk, akkor erre kiszámítva a fenti körintegrált, biztosan nullától különböző eredményt kapunk. Ennek az az oka, hogy ilyenkor a térerősség és az elmozdulás a görbe minden pontján egyirányú vagy ellentétes irányú egymással, ezért az $\mathbf{E} \, d\mathbf{r}$ elemi skaláris szorzatok vagy mind negatívak vagy mind pozitívak, így összegük nem lehet nulla.

A törvény fenti integrális alakját matematikailag tovább egyszerűsíthetjük a Stokes-integráltétel segítségével (ld. Matematikai összefoglaló, ?? fejezet), amely szerint egy vektortér zárt görbére vett vonalmenti integrálja megegyezik a vektortér rotációjának a görbe által körbezárt felületre vett integráljával:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_A \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{A}. \quad (1.45)$$

Így az elektrosztatika első törvényét felületi integrállá alakíthatjuk, amelynek tetszőleges A felületre nulla értéket kell felvennie:

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = 0. \quad (1.46)$$

Ezen integrál értéke akkor és csak akkor lehet minden A felületre nulla, ha maga az integrandus is nulla, azaz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.47)$$

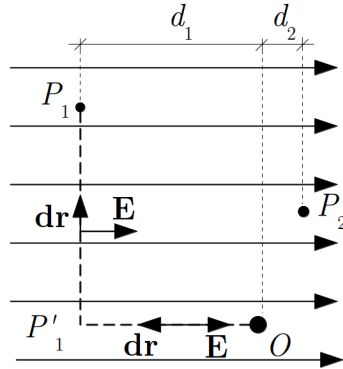
Ez az elektrosztatika első törvényének differenciális alakja, amely teljességgel ekvivalens az integrális alakkal. A differenciális törvény lokális (vagy mikroszkópikus) mennyiségekre mondja ki a tér örvénymentességére vonatkozó törvényt: az elektrosztatikus tér örvénysűrűsége $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ a tér minden pontjában nulla.

Most néhány egyszerű esetben bemutatjuk a potenciál kiszámításának módját.

1.7.1. Potenciál homogén erőterben

A legegyszerűbb, ezért bonyolultabb erőterek közelítéseként gyakran használt erőter a homogén erőter, amelyben a térerősség mindenütt ugyanolyan nagyságú és irányú. Az erőteret egyenletes sűrűségű párhuzamos erővonalakkal szemléltethetjük (1.20. ábra). Homogén erőterben a potenciális energia és a potenciál meghatározása viszonylag egyszerű. Így például az 1.20. ábrán látható homogén elektromos erőterben egy pozitív q elektromos töltés helyzeti energiája a P_1 pontban ($E_h^O(P_1)$), illetve az elektromos potenciál a tér ugyanezen pontjában az O ponthoz viszonyítva ($U_O(P_1)$) az alábbi módon kapható meg:

$$E_h^O(P_1) = -q \int_O^{P_1} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} - q \int_{P_1}^{P_1} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = qEd_1. \quad (1.48)$$



1.20. ábra. A potenciál számítása homogén erőterben

illetve

$$U^O(P_1) = \frac{E_h^O(P_1)}{q} = Ed_1. \quad (1.49)$$

(Az integrálásnál, felhasználtuk, hogy a tér munkavégzése nem függ a választott útvonaltól, ezért egy célszerű útvonalat választottunk, ahol a munka az OP'_1 szakaszon nulla, hiszen itt $\mathbf{E} \perp d\mathbf{r}$.)

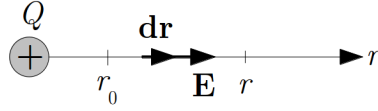
Mint látható, homogén térben a potenciál és a helyzeti energia is csak attól függ, hogy a vizsgált pont és a vonatkoztatási pont egymástól mért távolságának a térerősséggel párhuzamos vetülete (d_1) mekkora. Az ábrán bejelölt P_2 pontban természetesen mind a helyzeti energia, mind pedig a potenciál negatív: $E_h^O(P_2) = -qEd_2$, illetve $U^O(P_2) = -Ed_2$.

1.7.2. Ponttöltés potenciálja

A potenciál (illetve helyzeti energia) a térerősség integrálásával kapható meg. Következő példaként (1.21. ábra) számítsuk ki egy pozitív Q ponttöltés által létrehozott elektromos erőterben a potenciált a ponttöltéstől mért r távolság függvényében. Ha a potenciál vonatkoztatási pontját az $r = r_0$ pontban vesszük fel, akkor, felhasználva a ponttöltés erőterére vonatkozó ismereteinket, a potenciál definíciója alapján írhatjuk

$$U^{r_0}(r) = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (1.50)$$

Ha vonatkoztatási helyként a ponttöltéstől végtelen távoli pontot ($r_0 \rightarrow \infty$) választunk, akkor a leggyakrabban használt



1.21. ábra. A ponttöltés potenciáljának meghatározása

$$U^\infty(r) = U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.51)$$

alakot kapjuk (ennek jelölésére általában a külön index nélküli U használatos).

Két tetszőleges pont (r_1 és r_2) közötti potenciálkülönbség a fentiek alapján:

$$\Delta U_{12} = U(r_2) - U(r_1) = U_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (1.52)$$

ahol alkalmaztuk a szokásos $\Delta U_{12} = U_{12}$ jelölést. A potenciálkülönbség – a várakozásnak megfelelően – nem függ a vonatkoztatási pont választásától.

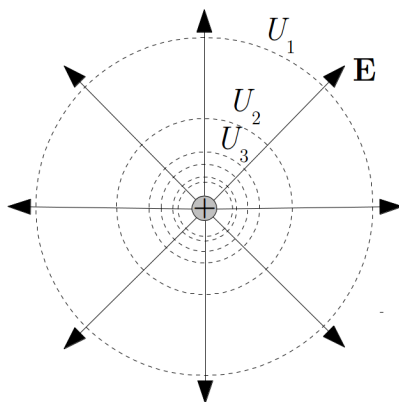
Gyakran fontos ismerni egy elektromos térben a potenciálviszonyokat, vagyis azt, hogy a potenciál milyen irányban változik, és milyen ütemben. Ezt szemléletes módon lehet bemutatni azoknak a felületeknek a berajzolásával, amelyek mentén mozogva a potenciál állandó. Ezek az *ekvipotenciális felületek*, amelyek – a potenciál definíciójából következően – a térerősségvonalakra mindenütt merőlegesek. Ha ezeket úgy rajzoljuk be, hogy a szomszédos felületek potenciálkülönbsége meghatározott érték, akkor az ábráról a potenciál nagyságának helyfüggését is leolvashatjuk (hasonlóan, ahogy a térkép szintvonalairól a magasság változásait).

Ponttöltés esetén a fenti egyenletből könnyen megkaphatjuk az ekvipotenciális felületek egyenletét:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = U_n, \quad (1.53)$$

ahol U_n különböző potenciálértékeket jelöl, amelyeket az n sorszámmal különböztethetünk meg. Az egyenletből következik, hogy az U_n potenciálértékekhez tartozó ekvipotenciális felületek gömbök (1.22. ábra), amelyeknek sugara

$$r_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 U_n}. \quad (1.54)$$



1.22. ábra. A ponttöltés potenciálja, ekvipotenciális felületek

Az 1.22. ábrán az egyes potenciálértékek között ugyanakkora a különbség (a potenciálok értéke rendre $1, 2, 3, \dots$ egység). A szintvonalak szemléletesen is mutatják, hogy a töltéshez közeledve a potenciál értéke egyre meredekebben emelkedik (az azonos potenciálkülönbségű görbék sűrűsödnek).

Több ponttöltés együttes erőterében a potenciál kiszámítása egyszerű, ha feltételezzük, hogy a szuperpozíció elve érvényes. Ekkor az egyes töltések által az adott helyen (pl. egy P pontban) létrehozott potenciálokat egyszerűen összeadjuk (a potenciál skaláris mennyiség):

$$U(P) = \sum_i U_i(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i}, \quad (1.55)$$

ahol Q_i az i -edik ponttöltés töltése (előjelesen), r_i a távolsága a P ponttól.

1.7.3. Folytonos töltéseloszlás potenciálja

Egy V térfogatban folytonosan eloszló töltés potenciálját a Gauss-törvény tárgyalásánál megismert módon, a töltésnek pontszerű részekre történő osztásával kaphatjuk meg. Ha a ρ térfogati töltéssűrűséget mindenütt ismerjük, akkor egy P pont körül felvett elemi dV térfogatban lévő töltést ki tudjuk számítani a $dQ = \rho dV$ összefüggéssel. A szuperpozíció elvének értelmében a pontszerűnek tekintett elemi résztöltések által létrehozott potenciál:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad (1.56)$$

ahol r a dV térfogatelem a távolsága a P ponttól.

Hasonló módon járunk el, ha a töltés egy A felületen oszlik el folytonosan, és a felület minden pontjában ismerjük a σ *felületi töltéssűrűséget*. Ennek definíciója a következő: ha egy elemi ΔA felületen ΔQ töltés van, akkor ott a felületi töltéssűrűség közelítő értéke $\sigma \approx \frac{\Delta Q}{\Delta A}$. A felületi töltéssűrűség egy pontban érvényes értékét úgy kapjuk meg, hogy a pont körül felvett felületet egyre csökkentjük, és meghatározzuk a $\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$ határértéket. Ez az adott pontban a felületi töltéssűrűség, amely előjeles mennyiség, előjele az adott helyen lévő töltés előjelével egyezik meg.

Ha az A felületet elemi dA részekre osztjuk, akkor az egyes felületelemeken lévő, pontszerűnek tekinthető töltés: $dQ = \sigma dA$, így a felületen elhelyezkedő töltés által okozott potenciál egy P pontban

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma dA}{r}, \quad (1.57)$$

ahol r a dA felületelem a távolsága a P ponttól.

1.7.4. Elektromos térerősség számítása a potenciál helyfüggésének ismeretében

A mechanikában láttuk, hogy egy konzervatív erőterben a helyzeti energia helyfüggésének ismeretében meghatározható egy tömegpontra ható erő. Ugyanez az elektromos kölcsönhatás esetén is megtehető. Ha az elektromos erőterben egy q töltés helyzeti energiája csak az x -koordináta függvénye, akkor a

$$dE_h(x) = -F_{ex} dx \quad (1.58)$$

összefüggésből a töltésre ható erő x -komponense

$$F_{ex} = -\frac{dE_h(x)}{dx}. \quad (1.59)$$

Mivel a töltésre ható erő x komponense elektromos erőterben $F_x = qE_x$, a fenti összefüggésből a térerősség is megkapható:

$$E_x = -\frac{1}{q} \frac{dE_h(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{E_h(x)}{q} \right) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (1.60)$$

Általános (háromdimenziós) esetben a potenciál mindhárom koordinátától függ, azaz $U = U(x, y, z)$. Ennek a függvénynek az elemi megváltozása egy $dr(dx, dy, dz)$ elemi

elmozdulásnál a három koordináta mentén történő elmozdulások közben bekövetkező változások összegeként írható fel:

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} dz. \quad (1.61)$$

Másrészt a potenciál megváltozása kifejezhető a térerősséggel is:

$$dU(x, y, z) = -\mathbf{E} d\mathbf{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (1.62)$$

A két kifejezés összehasonlításából kapjuk, hogy

$$E_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad (1.63)$$

$$E_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad (1.64)$$

$$E_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}, \quad (1.65)$$

azaz

$$\mathbf{E} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right], \quad (1.66)$$

vagyis matematikailag tömörebben kifejezve (ld. edit:link 1. függelék):

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U. \quad (1.67)$$

Azaz a térerősség a potenciál negatív gradiense.

1.8. Elektromos töltések kölcsönhatási energiája

Eddig egy töltés helyzeti energiáját egy ismeretlen forrásból származó elektromos erőterben vizsgáltuk, és feltételeztük, hogy a vizsgált töltés az erőteret nem változtatja meg. Az erőteret azonban sztatikus esetben mindig valamilyen töltés hozza létre, így a kiszámított energia a vizsgált töltés és a teret létrehozó ismeretlen töltés kölcsönhatásának a következménye. Azt is mondhatjuk, hogy ez a helyzeti energia a kölcsönható töltések közös energiája, amit *kölcsönhatási energiának* nevezünk. Az, hogy a kölcsönhatási energia valóban mindkét kölcsönható töltéshez tartozik, jól látszik két ponttöltés kölcsönhatása esetén.

Helyezzünk el két ponttöltést (Q_1 és Q_2) egymástól r távolságban, és számítsuk ki először, hogy mennyi a helyzeti energiája a Q_2 töltésnek egy Q_1 töltés által létrehozott elektromos erőterében.

A Q_1 töltéstől r távolságban a potenciál

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r}, \quad (1.68)$$

a Q_2 töltés helyzeti energiája itt

$$E_{h2} = U_1 Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (1.69)$$

Látszik, hogy ebben az energia-kifejezésben teljesen szimmetrikus módon szerepel a két töltés, és az összefüggésben szereplő r is az egymástól mért távolság: az energia nem rendelhető hozzá kizárólagosan egyik töltéshez sem.

Még nyilvánvalóbbá válik az energia közös jellege, ha kiszámítjuk, hogy mennyi a helyzeti energiája a Q_1 töltésnek a Q_2 töltés által létrehozott elektromos erőterében. A Q_2 töltéstől r távolságban a potenciál

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r}, \quad (1.70)$$

a Q_1 töltés helyzeti energiája itt

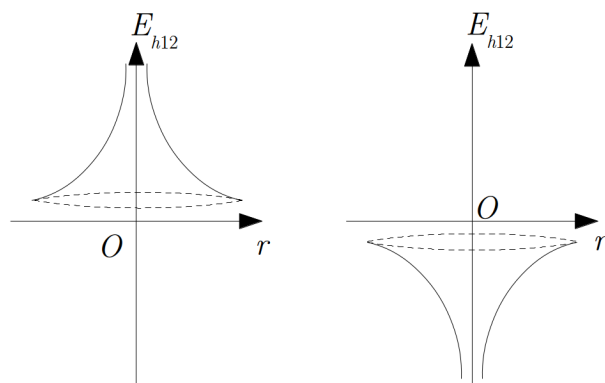
$$E_{h1} = U_2 Q_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{r}, \quad (1.71)$$

ami megegyezik az előző eredményünkkel.

Vagyis bármelyik töltés energiáját számoljuk ki a másik erőterében, ugyanazt az eredményt kapjuk. Ismét azt látjuk, hogy ez az energia nem rendelhető hozzá egyik töltéshez sem: ez a két ponttöltésből álló rendszer közös helyzeti energiája vagy más néven a két töltés kölcsönhatási energiája. Ezt a kölcsönhatási energiát az E_{h12} szimbólummal jelölve, egymástól r távolságban lévő ponttöltések esetén

$$E_{h12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (1.72)$$

Mivel két töltés kölcsönhatása számos esetben igen fontos szerepet játszik (ilyen kölcsönhatás tartja össze pl. az atomban a pozitív töltésű magot és a negatív töltésű elektronokat), ennek az energiának a távolságfüggését szemléletesen is bemutatjuk az [1.23. ábrán](#). Az ábra (a) része két azonos előjelű ponttöltés kölcsönhatási energiáját mutatja



1.23. ábra. Azonos (a) és ellentétes (b) töltések kölcsönhatási energiája

a két töltés egymástól mért r távolságának függvényében. A (b) ábra ugyanezt mutatja két ellentétes előjelű ponttöltés esetén.

Az ábrákon azt is érzékeltetjük, hogy az O pontbeli töltéshez bármely irányból közelítjük a másik töltést, mindig ugyanolyan jellegű a helyzeti energia változása. Azonos töltések esetén tehát a közelített töltésnek egy helyzeti energia-hegyet kell legyőznie, vagyis a rendszer energiája a közeledésnél nő, míg ellentétes töltések esetén a közelített töltés egy helyzeti energia-gödörbe esik be, és a rendszer energiája csökken a nulla helyzeti energiának megfelelő végtelen távoli helyzethez képest. A helyzeti energia nullpontjának ilyen megválasztása az oka annak, hogy vonzó kölcsönhatás esetén a rendszer helyzeti energiája negatív.

Ha több ponttöltésből $(Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots)$ álló töltésrendszer kölcsönhatási energiáját akarjuk kiszámítani, akkor kiválasztunk egy töltést, és meghatározzuk a kiválasztott – pl. az i -edik Q_i – töltés helyén a többi töltés által létrehozott U_i potenciált. Az i -edik töltés helyzeti energiáját ekkor az

$$E_{hi} = Q_i U_i \quad (1.73)$$

összefüggés adja meg. A töltések teljes helyzeti energiáját, vagyis a töltésrendszer kölcsönhatási energiáját, az egyes ponttöltések helyzeti energiáinak összegéből kaphatjuk meg:

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i. \quad (1.74)$$

Az $\frac{1}{2}$ szorzóra azért van szükség, mert az összegzés során minden töltéspár kölcsönhatási energiáját kétszer vesszük figyelembe.

Mivel ponttöltésekről van szó, a helyzeti energia könnyen kiszámítható. Ha az i -edik és j -edik töltés közötti távolságot r_{ij} -vel jelöljük, akkor az i -edik töltés helyén a többi töltés által létrehozott U_i potenciál

$$U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j,j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}}. \quad (1.75)$$

Az i -edik töltés helyzeti energiája tehát

$$E_{hi} = Q_i U_i = Q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j,j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}}. \quad (1.76)$$

Az összes töltés helyzeti energiája, vagyis a töltésrendszer kölcsönhatási energiája

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(Q_i \sum_{j,j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}. \quad (1.77)$$

Határozzuk meg a fentiek alapján egy *vezetőn elhelyezkedő* Q töltés helyzeti energiáját. Ehhez a vezetőn lévő töltést ponttöltéseknek tekinthető apró ΔQ_i részekre osztjuk, és az így kapott töltésrendszer helyzeti energiáját számítjuk ki. Tudjuk, hogy egy vezető minden pontján azonos a potenciál (ld. 1.10. fejezet). Jelöljük ezt U -val. Ekkor a potenciál a ΔQ_i résztöltés helyén is U , így ennek a töltésnek a helyzeti energiája

$$E_{hi} = \Delta Q_i U. \quad (1.78)$$

Az összes töltés helyzeti energiája pedig

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta Q_i U = \frac{1}{2} U \sum_i \Delta Q_i = \frac{1}{2} U Q. \quad (1.79)$$

Egy vezetőn elhelyezett töltés helyzeti energiája tehát arányos a vezetőn lévő töltéssel és a vezető potenciáljával.

1.9. Egyszerű töltéselrendezések elektromos erőtere

Az elektrosztatikus tér alaptörvényei segítségével egyszerűbb töltéseloszlások által keltett elektromos erőterben a térerősség illetve az elektromos potenciál kiszámítható. Az általunk használt integrál-törvények ilyen célra csak akkor használhatók, ha a töltéseloszlásnak valamilyen szimmetriája van (pl. gömbszimmetria).

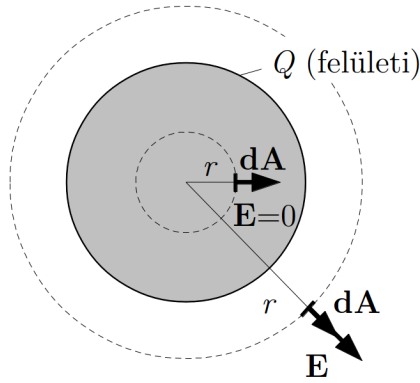
1.9.1. Gömbszimmetrikus töltéseloszlások tere

Ponttöltés

A legegyszerűbb ilyen „töltéseloszlás” a ponttöltés. Ha egy magában álló ponttöltés terére alkalmazzuk a II. alaptörvényt, akkor természetesen visszkapjuk a Coulomb törvényből kapott térerősség-kifejezést, hiszen abból „találtuk ki” a II. alaptörvényt.

Vezető gömb

Kevésbé nyilvánvaló egy R sugarú vezető gömb elektromos tere, amelyre Q pozitív töltést vittünk fel. A vezető gömbön a felvitt töltések a gömb felületén helyezkednek el (ld. 1.10. fejezet).



1.24. ábra. Feltöltött vezető gömb terének meghatározása

A számításhoz célszerűen felvett felület egy gömbfelület (a végeredmény a felület választásától nem függ), amelynek középpontja a töltött gömb középpontjával egybeesik (1.24. ábra). Mivel ez a töltéseloszlás gömbszimmetrikus, a tér is az lesz, tehát a térerősség nagysága (E) a felvett gömbfelület minden pontjában azonos, és sugárirányban kifelé mutat. Így a felületen mindenütt $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A}$, és $E =$ állandó, ezért az elektrosztatika II. alaptörvénye egyszerű alakban írható fel:

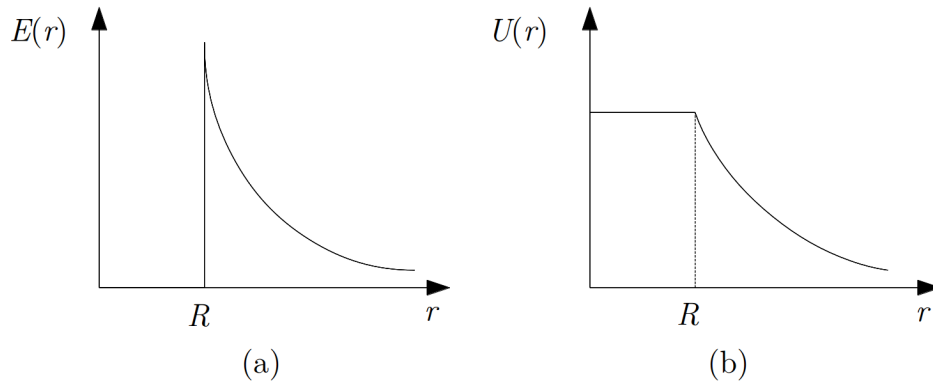
$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.80)$$

A töltött gömbön belül nincs töltés, így a gömb felületén belül felvett zárt felület által bezárt töltés $Q = 0$, a gömbön kívül felvett zárt felület által bezárt töltés Q . Így a

töltött gömb tere

$$E = \begin{cases} 0 & \text{ha } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{ha } r > R, \end{cases} \quad (1.81)$$

vagyis a töltött vezető gömb belsejében nincs elektromos tér, a gömbön kívül eső pontokban pedig a tér olyan, mintha a gömb töltése a centrumában koncentrált ponttöltés lenne. A térerősség távolságfüggését az 1.25. ábra (a) része mutatja. Megfigyelhető, hogy a térerősség a távolság függvényében $r = R$ értéknél (a gömb felületén) nem folytonos függvény.



1.25. ábra. Vezető gömb térerősségének (a) és potenciáljának (b) távolságfüggése

A potenciál most is a térerősség integrálásával kapható meg. A gömbön kívül a térerősség a ponttöltés térerősségével azonos, ezért ott a potenciál is megegyezik a ponttöltés potenciáljával:

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad r > R. \quad (1.82)$$

A gömb felületén $r = R$, a potenciál mindenütt ugyanakkora

$$U(R) = U_{\text{gömb}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \quad r = R. \quad (1.83)$$

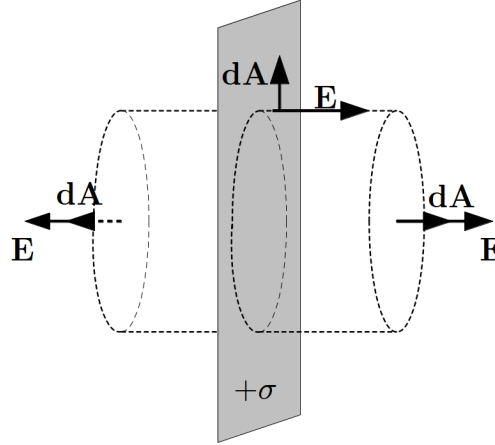
A gömbön belül nincs erőter, a potenciál ezért állandó, és azonos a gömb felületén lévő potenciállal:

$$U_{\text{belül}} = U(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \quad r \leq R. \quad (1.84)$$

A potenciál távolságfüggése a fenti ábra (b) részén látható.

1.9.2. Térerősség és potenciál töltött síkok környezetében, a sík-kondenzátor

A legegyszerűbbek, ezért a valóságos terek közelítéseként gyakran használt erőterek a homogén erőterek. Az alábbiakban ilyen erőterekkel kapcsolatos számításokat ismertetünk.



1.26. ábra. Feltöltött végtelen vezető sík terének meghatározása

Szimmetria-megfontolások alapján belátható, hogy homogén tér jön létre egy elektromosan töltött, „végtelen” kiterjedésű lemez két oldalán, amelyen a *felületi töltéssűrűség* (egy elemi felületen elhelyezkedő dQ töltés és a dA felület hányadosa: $\sigma = dQ/dA$) mindenütt azonos. Számítsuk ki a térerősséget (E_+), ha a lemez töltése pozitív. A térerősség az elektrosztatika II. alaptörvénye alapján egyszerűen megkapható, ha a fluxust olyan zárt felületre számítjuk ki, amelynek csak térerősséggel párhuzamos és térerősségre merőleges részei vannak (1.26. ábra). Erre a zárt felületre vett fluxus

$$\Phi_A^{\text{zárt}} = \oint E_+ dA = 2 \int_A E_+ dA = 2E_+ \int_A dA = 2E_+ A \quad (1.85)$$

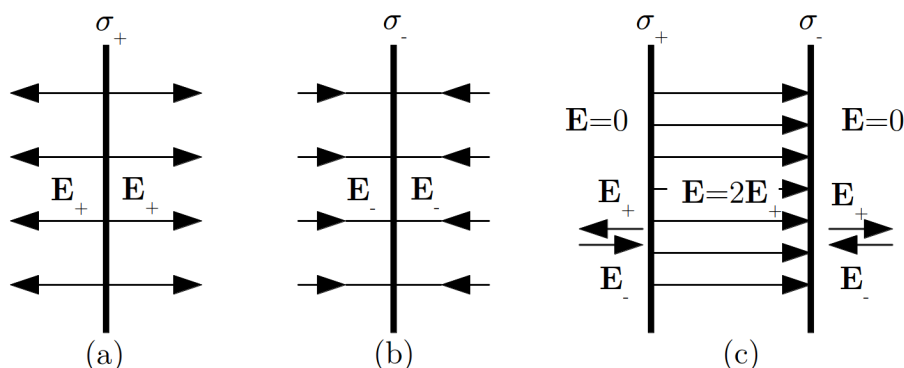
másrészt viszont a II. alaptörvény szerint

$$\Phi_A^{\text{zárt}} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}. \quad (1.86)$$

A két egyenletből (felhasználva, hogy $\sum Q = \sigma A$) a térerősség:

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.87)$$

Negatívan töltött lemezre ugyanilyen nagyságú, csak ellenkező irányú térerősséget kapunk (ábra). Az eredmények szigorúan véve végtelen kiterjedésű lemezre igazak, közelítőleg érvényesek azonban véges lemezeknél is, ha a lemeztől mért távolság sokkal kisebb, mint a lemez szélétől mért távolság.



1.27. ábra. Feltöltött végtelen vezető sík tere pozitív (a), negatív (b) töltés esetén, illetve ellentétes előjelű, azonos nagyságú töltéssel rendelkező párhuzamos síkpár tere (c)

Érdekes és fontos eset, ha két olyan lemezt helyezünk el egymással párhuzamosan és egymáshoz közel, amelyeken a töltéssűrűség azonos nagyságú, de ellentétes előjelű ($+\sigma$ és $-\sigma$). Ekkor – mint az ábra is mutatja – a két lemez között a terek egyirányúak, ezért ott a térerősség megduplázódik, a lemezeken kívül azonban a terek kioltják egymást. Így a két lemez között homogén tér jön létre, amelynek nagysága:

$$E = 2E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (1.88)$$

iránya pedig a pozitívan töltött lemeztől a negatív felé mutat.

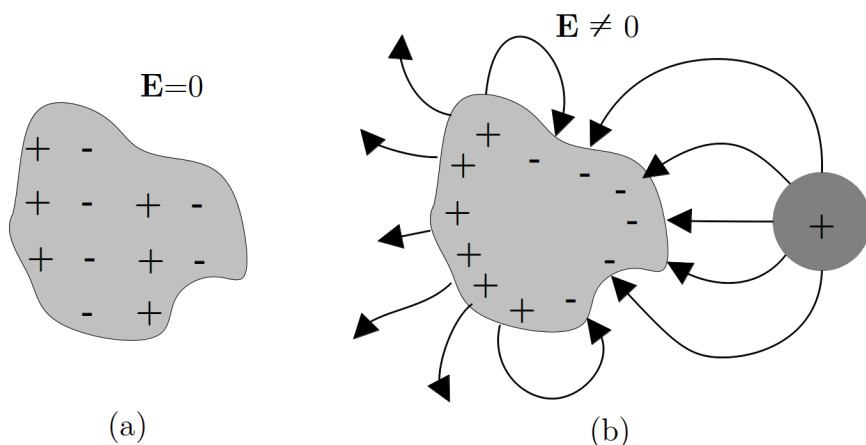
Mivel a kialakult erőter homogén, könnyen kiszámíthatjuk az ellentetten töltött párhuzamos vezető-lemezek közötti potenciálkülönbséget is. A pozitív (+) lemez U potenciálja a negatívhoz (–) képest:

$$U = - \int_{-}^{+} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{-}^{+} E dr = E \int_{-}^{+} dr = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \quad (1.89)$$

ahol d a lemezek közötti távolság. (Itt felhasználtuk, hogy \mathbf{E} és $d\mathbf{r}$ ellentétes irányú, vagyis $\mathbf{E} d\mathbf{r} < 0$.) Az összefüggés jó közelítéssel véges A felületek esetén is alkalmazható, ha d kicsi a lemezek lineáris méretéhez képest.

1.10. Töltés elhelyezkedése vezetőkön, töltött vezető potenciálja, a kapacitás

Az elektromos kölcsönhatás kísérleti vizsgálata során láttuk, hogy egy vezetőben hosszú távú mozgásra képes töltéshordozók vannak. Ezek a töltések a vezetőben külső hatás jelenléte nélkül az ellenkező előjelű töltésekkel „összekeveredve” helyezkednek el, a vezető kifelé elektromosan töltetlen (semleges) testként viselkedik (1.28. (a) ábra). A többlet-töltést nem tartalmazó, semleges vezetőben azonban külső elektromos erőterrel töltésátrendeződés hozható létre, és ilyenkor a vezetőben szétvált töltések miatt a vezető nem semleges testként viselkedik: körülötte elektromos erőter jön létre (1.28. (b) ábra). Ez a jelenség az elektromos megosztás, amit korábban kísérletileg is vizsgáltunk.



1.28. ábra. Az elektromos megosztás jelensége

Azt is láttuk, hogy egy vezetőre többlet elektromos töltést tudunk felvinni, és a vezetőben ez a töltés is mozogni tud. Mivel az azonos előjelű töltések egymást taszítják, a többlet-töltések a vezetőn várhatóan egymástól távol próbálnak elhelyezkedni. Ennek a feltevésnek a helyességét kísérletekkel is igazolni lehet: a vezetőn a töltések valóban egymástól a lehető legnagyobb távolságban, *a vezető külső felületén helyezkednek el.*

Kísérlet: Töltés elhelyezkedése vezetőkön

Töltés elhelyezkedését vizsgáljuk vezetőkön. Vezetőként nyílással ellátott, belül üres fémgömböt illetve fémhengert használunk, a töltés jelenlétének vizsgálatára szolgáló eszköz egy kisméretű, szigetelt nyélre szerelt fémgolyó és egy elektrométer.

A belül üres fémgömböt feltöltjük, majd a fémgolyóval kívülről megérintjük.

Ha fémgolyót az elektrométerhez érintjük, az töltést mutat, vagyis a fémgömb külső felületén van töltés.

A fémgolyót a nyíláson keresztül a feltöltött, üres fémgömb belső felületéhez, majd az elektrométerhez érintjük. Az elektrométer nem mutat töltést: a feltöltött fémgömb belső felületén nincs töltés.

A fémgömböt a nyíláson keresztül belülről töltjük fel. A fenti kísérletek eredménye most is ugyanaz: a töltés ekkor is a fémgömb külső felületére megy.

A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán

http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Vezeto_feluleten.ogv



Számos tapasztalat mutatja, hogy egy vezetőre felvitt töltések igen rövid idő alatt egyensúlyi állapotba kerülnek, és nem mozognak tovább. Ebből a tapasztalatból további megállapításokra juthatunk.

Egyensúlyi állapotban egy vezető belsejében nem lehet elektromos erőter. Ez azért van így, mert, ha lenne elektromos erőter, akkor annak hatására a töltések mozognának, így nem lehetne egyensúly. Ezért, ha egy vezetőben (pl. a feltöltése pillanatában) elektromos erőter alakul ki, akkor a töltések addig mozognak, amíg olyan töltéseloszlás jön létre, ami a vezetőben megszünteti az elektromos erőteret. Ez akkor is igaz, ha a vezetőt nem töltjük fel, hanem elektromos erőterbe helyezzük, ami a benne lévő töltéseket megosztja. Ilyenkor a megosztott töltések elhelyezkedése lesz olyan, hogy a vezető belsejében nem lesz elektromos erőter.

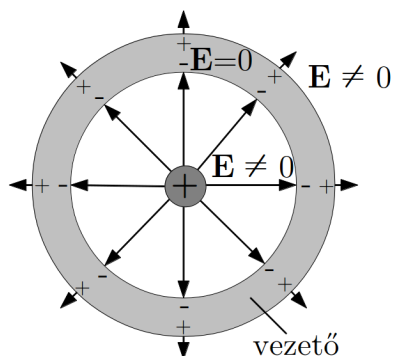
Hasonló a helyzet egy zárt, *üreges vezető* esetében is: egyensúlyi (sztatikus) állapotban *az üreg belsejében nincs elektromos erőter.* Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy egy tömör vezetőből úgy csinálhatunk üreget, hogy kivágjuk a belsejét. Ekkor olyan részt távolítunk el, amelyben nincs elektromos erőter, és amelynek jelenléte vagy hiánya az elektromos erőteret nem befolyásolja, így a kivágás után semmi sem változik meg.

Ez a tény gyakorlati szempontból igen fontos, hiszen ez azt jelenti, hogy ha egy fémdobozt időben állandó elektromos erőterbe teszünk, akkor a belsejében nem lesz elektromos erőter. A szokásos kifejezést használva: a fémdoboz *leárnyékolja* a külső elektromos erőteret.

Más a helyzet akkor, ha egy üreges vezetőben helyezünk el töltést. Ekkor a töltés maga körül elektromos erőteret hoz létre, így az üregben is lesz erőter. Ez az erőter megosztja a vezető üregfal töltéseit, és az erőter a vezetőn kívül is megjelenik (1.29. ábra).

Mivel két pont között elektromos potenciálkülönbség csak akkor lehet, ha elektromos erőter van jelen ($dU = -\mathbf{E} d\mathbf{r}$), *egyensúlyi állapotban egy vezető minden pontjában azonos a potenciál.*

Ha egy vezetőt feltöltünk, akkor a felületén lévő töltések a vezetőn kívül elektromos erőteret hoznak létre. A kialakult térerősség azonban a felületen csak olyan lehet, hogy



1.29. ábra. Üreges vezető belsejében elhelyezett töltés tere

a térerősségvonalak a vezető felületére merőlegesek (ha a térerősségnek lenne a felülettel párhuzamos komponense az elmozdítaná a töltéseket). Ez akkor is így van, ha a vezető nem töltött, de elektromos erőterben van, és a felületén a megosztás miatt van töltés.

Megjegyezzük, hogy az a tapasztalat, hogy a töltött vezetőben olyan egyensúlyi állapot jön létre, amelyben a többlettöltések a vezető felületén helyezkednek el, és a vezető belsejében nincs elektromos erőter, nem annyira magától értetődő, mint amilyennek az a fenti kvalitatív megfontolások alapján látszik. Az elméleti számítások ugyanis azt mutatják, hogy a töltések ilyen egyensúlyi állapota csak akkor jöhet létre, ha a két ponttöltés kölcsönhatását megadó Coulomb-törvényben az erő távolságfüggése pontosan $1/r^2$ -es. Ezért az a tény, hogy ilyen egyensúly létrejön, a Coulomb törvényben szereplő távolságfüggés kísérleti bizonyítékának tekinthető.

1.10.1. Kapacitás, kondenzátorok

A különböző töltéselrendezések elektromos erőterének vizsgálatánál azt az eredményt kaptuk, hogy a magában álló (azaz más töltésektől igen messze elhelyezett) vezető gömb potenciálja arányos a rajta lévő töltéssel, az arányossági tényező pedig csak geometriai adatokat tartalmaz:

$$U_{\text{vez}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q. \quad (1.90)$$

A speciális esetben kapott eredményről kimutatható, hogy általánosan is igaz: tetszőleges alakú, magában álló, elektromosan töltött vezető végtelen távoli pontra vonatkozó potenciálja arányos a rajta lévő töltéssel: $U_{\text{vez}} \sim Q$. Ezt az arányosságot az alábbi módon szokás felírni

$$U_{\text{vez}} = \frac{1}{C} Q, \quad (1.91)$$

ahol a C állandót a vezető *kapacitásának* nevezik (minél nagyobb a C érték, annál több töltést tud tárolni a vezető adott potenciálon).

Eszerint egy R sugarú vezető gömb kapacitása a fenti egyenletek alapján:

$$C_{\text{gömb}} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (1.92)$$

Hasonló eredményre jutottunk, amikor két párhuzamos síkon azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltést helyeztünk el. A két sík közötti potenciálkülönbségre azt kaptuk, hogy

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (1.93)$$

Ha a két töltött sík két vezető anyagból (pl. fémből) készült sík lemez, akkor az elrendezést *síkkondenzátornak* nevezzük, ami töltések tárolására alkalmas. Ha a σ töltéssűrűséget kifejezzük a lemezeken lévő összes Q töltéssel a $\sigma = Q/A$ összefüggés segítségével, akkor a potenciálra az

$$U = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q \quad (1.94)$$

kifejezést kapjuk. Ez az összefüggés hasonló a kapacitás definíciójára szolgáló egyenlethez (a potenciálkülönbség és a töltés arányos). Az analógia alapján bevezethetjük a síkkondenzátor kapacitását:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (1.95)$$

Ennek az összefüggésnek átrendezett, $Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} U$ alakjából látható, hogy adott potenciálkülönbség mellett annál több töltés tárolható a kondenzátoron, minél nagyobb a kapacitása, vagyis minél nagyobb a lemezek felülete és minél kisebb a köztük lévő távolság.

A potenciálkülönbségnek – és egyúttal a kapacitásnak – a lemezek távolságától való függését kvalitatív módon könnyen igazolhatjuk az alábbi egyszerű kísérlettel.

Kísérlet: Síkkondenzátor kapacitása a fegyverzetek távolságának függvényében

Mozgatható lemezből készült kondenzátort feltöltve és a lemezek távolságát változtatva, változik a potenciálkülönbség, amit a lemezekhez csatlakoztatott elektrométer kitérése mutat. A d növelésekor a potenciálkülönbség nő, csökkenésekor csökken, a kapott összefüggésnek megfelelően. Mivel a lemezek között a töltés nem változik, ez az eredmény egyben azt is mutatja, hogy a

d távolság növelésekor a kapacitás csökken, d csökkenésekor pedig nő, amint az a fenti összefüggésből következik. A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán

http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Sikkondenzator_I.ogv



1.10.2. A csúcshatás

A töltéseknek vezetőn történő elhelyezkedésével függ össze az a tapasztalat, hogy a töltött vezető kis görbületi sugarú – csúcsos – részeinél a térerősség sokkal nagyobb, mint a nagyobb görbületi sugarú – lapos – részeknél. Ezt a jelenséget egyszerű kísérletekkel bemutathatjuk.

Kísérlet: Csúcshatás

Függőleges tengely körül forgatható, „S” alakban meghajlított, végein kihegyezett drótot (1.30. ábra) feltöltünk (pl. Van de Graaf-generátorral). A drót gyors forgásba jön, mintha a drótvégekből valami kiáramlana, és a reakcióerő hajtáná az eszközt (hasonlóan, mint egyes locsolókészülékeknél a kiáramló víz).

A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán

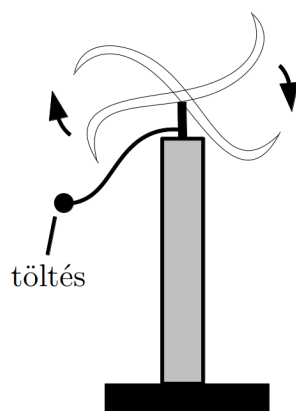
http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Elektromos_csucshatas_I.ogv

Nagy feszültségre feltöltött, kihegyezett fémtű olyan erős légáramlatot (ún. elektromos szelet) hoz létre, ami képes elfújni a csúcsa közelében elhelyezett gyertyát.

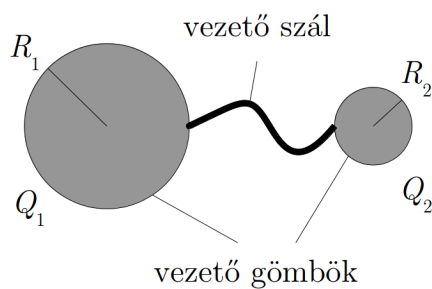
http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Elektromos_csucshatas_II.ogv ♦

A jelenség magyarázata az, hogy a csúcsnál kialakuló nagy elektromos térerősség miatt a csúcs polarizálja (dipólussá alakítja), és magához vonzza a levegő semleges molekuláit. A csúcsnál a molekulák a csúccsal azonos töltést vesznek fel, ezért a csúcs eltaszítja azokat, és így jön létre a tapasztalt légáram.

A nagy elektromos térerősség kialakulása azzal függ össze, hogy a mindenütt azonos potenciálú vezetőben a csúcsnál nagyobb a felületi töltéssűrűség, mint más helyeken. Ezt számítással is alátámaszthatjuk, ha a vezetőt vékony vezető szállal összekötött két gömbszellettel modellezzük, amelyek közül az egyik kis-, a másik pedig nagy sugarú (1.31. ábra).



1.30. ábra. A csúcs hatás miatt forgásba jön a Segner-kerék



1.31. ábra. Egyszerű modell a csúcs hatás számításához

Az egyes gömbök töltését Q_1 -gyel illetve Q_2 -vel jelölve, a két gömb felületén az azonos potenciál (a gömbök vezetővel össze vannak kötve):

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} = U_2. \quad (1.96)$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}. \quad (1.97)$$

A felületi töltéssűrűség az egyes gömbökön

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}, \quad \text{illetve} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}, \quad (1.98)$$

amiből azt kapjuk, hogy

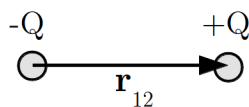
$$\sigma_1 R_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1} = \frac{Q_2}{4\pi R_2} = \sigma_2 R_2. \quad (1.99)$$

Mivel a felület közvetlen közelében a térerősség arányos a töltéssűrűséggel: $E \sim \sigma$, ezért

$$E_1 R_1 = E_2 R_2, \quad \text{illetve} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (1.100)$$

vagyis a kisebb sugarú (csúcsosabb) résznél nagyobb a térerősség.

1.11. Az elektromos dipólus

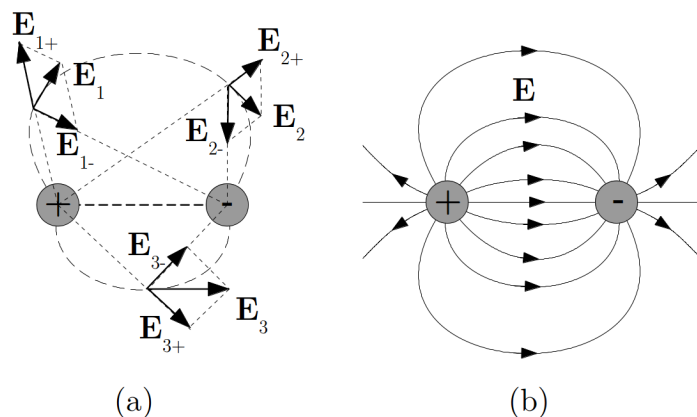


1.32. ábra. Az elektromos dipólus

Az elektromos erőter leírása szempontjából fontos szerepet játszik az a speciális töltésselrendezés, amely egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő, pontszerű, azonos nagyságú pozitív- és negatív töltésből áll (1.32. ábra). Ez az *elektromos dipólus*. Az elektromos dipólus leírására a dipólmomentum vektort használjuk, amely egyszerűen a negatív töltéstől a pozitív töltésig mutató helyvektor és a Q töltés szorzata:

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{r}_{12}Q \quad (1.101)$$

Említésre méltó még a „pontszerű elektromos dipólus” fogalma, amit úgy kaphatunk, hogy a dipólus méretével nullához, a töltés értékével végtelenhez tartunk, úgy, hogy a dipólmomentum vektor konstans marad. A pontszerű dipólussal makroszkópikus szempontból jól modellezhetők azok a semleges atomok vagy molekulák, amelyekben a pozitív és negatív töltések súlypontja valamilyen okból (pl. szerkezeti sajátosságok vagy külső hatás miatt) nem esik egybe. Ilyen esetekkel a későbbiekben elsősorban az anyag jelenlétében kialakuló elektromos erőter leírásánál találkozunk.



1.33. ábra. Az elektromos dipólus erőterének szerkesztése (a) és a kapott erővonalkép (b)

1.11.1. Az elektromos dipólus erőtere

A dipólus két különálló ponttöltésből áll, ezért körülötte elektromos erőter alakul ki. A térerősséget bármely pontban kiszámíthatjuk a szuperpozíció elve segítségével: az egyes töltések által létrehozott térerősségvektorokat összeadjuk. Ilyen szerkesztés vázlata látható az 1.33. (a) ábrán. A dipólus erőterét térerősségvonalakkal is szemléltettük ((b) ábra).

A térerősség helyfüggése pontszerű dipólus esetén matematikai formulával is egyszerűen megadható⁶:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{d}_e \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}_e}{r^3} \right], \quad (1.102)$$

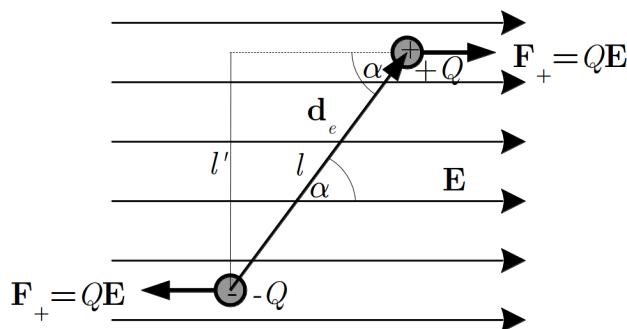
ahol \mathbf{r} helyvektort a pontszerű dipólus helyétől mérjük, és r jelöli a fenti helyvektor hosszát.

1.11.2. Elektromos dipólus viselkedése elektromos erőterben

Homogén erőter

Homogén elektromos erőterben a dipólus két töltésére ellenkező irányú, azonos nagyságú erő hat, ami – a dipólusnak a térerősség irányához viszonyított helyzetétől függően – egy forgatónyomatékot eredményez. A dipólus tehát – ha forgásképes – az erőter hatására elfordul. A dipólusra ható erőket az 1.34. ábra mutatja, aminek alapján kiszámíthatjuk a dipólusra ható forgatónyomatékot.

⁶ A levezetés megtalálható: Hevesi I.: Elektromosság tan c. tankönyvében (38-40. oldal)



1.34. ábra. Az elektromos dipólusra ható erők homogén térben

Látható, hogy a dipólusra ható erők eredője nulla, de fellep egy forgatónyomaték, amelynek nagysága

$$M = Fl' = Fl \sin \alpha = QEl \sin \alpha. \quad (1.103)$$

Ez a forgatónyomaték az óramutató járásával egyirányban forgat, tehát a forgatónyomaték vektor a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat.

A forgatónyomaték kifejezésében felismerhető a dipólmomentum nagysága, amit beírva, az alábbi alakot kapjuk:

$$M = d_e E \sin \alpha. \quad (1.104)$$

Ez a kifejezés két vektor nagyságának (d_e és E) és az általuk bezárt szög (α) szinuszának a szorzata, tehát egy vektorszorzat nagyságaként is felfogható. Ezzel a forgatónyomaték vektori alakját is megkaphatjuk:

$$\mathbf{M} = \mathbf{d}_e \times \mathbf{E}. \quad (1.105)$$

Ennek a nagysága megadja a forgatónyomaték nagyságát, és iránya is a valóságos forgatónyomaték irányával egyezik (a vektorszorzat eredménye a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat).

A dipólusra ható forgató nyomaték tehát az elektromos tér irányába forgatja a dipólust. A tér irányába beállt dipólusra már nem hat forgatónyomaték (a két erő egy egyenesben működik), vagyis ez a dipólus egyensúlyi helyzete.

Kísérlet: Elektromos dipólus viselkedése homogén elektromos erő-térben

Súlyzó alakú, fémréteggel bevont testet függőleges tengely körül forgathatóan két-két cérnaszálra felfüggesztünk, amelyek közül az egyik pár alulról,

a másik pár felülről rögzíti a súlyzót (a két szál biztosítja, hogy a testnek meghatározott egyensúlyi helyzete legyen, ahová külső hatás nélkül mindig visszatér). A súlyzót egy kondenzátor lemezei közé tesszük, és kezdetben úgy állítjuk be, hogy tengelye nagyjából a kondenzátor lemezeivel párhuzamosan álljon.

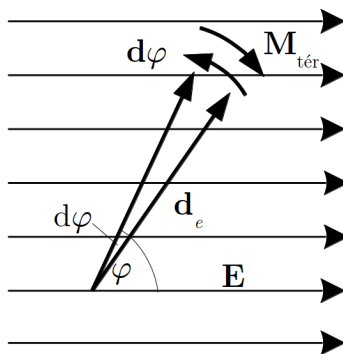
Ezután a kondenzátort nagy feszültségre feltöltjük. A lemezek között létrejött elektromos térben a súlyzó fémbevonatában megosztás révén az egyik gömb pozitív- a másik gömb negatív töltésű lesz, vagyis egy dipólus jön létre.

A dipólus modell az térben elfordul, és a kondenzátor lemezeire merőlegesen, vagyis az elektromos térerősséggel párhuzamosan áll be. Ha az erőteret megszüntetjük, akkor a dipólus visszatér az eredeti helyzetébe.

A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalon

http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Homogen_elektromos_ter.ogv ♦

A kísérlet tehát megerősíti azt az elméleti következtetésünket, hogy a dipólus valóban a térerősség irányába fordul be. Ha a dipólust ebből az egyensúlyi helyzetből ki akarjuk fordítani, akkor erőt kell kifejtenünk, és munkát kell végeznünk. Ez a munkavégzés azt eredményezi, hogy a dipólus helyzeti energiára tesz szert. Most kiszámítjuk, hogy homogén elektromos térben hogyan függ ez a helyzeti energia a dipólus elfordulásának nagyságától (a dipólmomentum- és a térerősségvektor közötti szögtől).



1.35. ábra. A dipólus helyzeti energiájának számítása

A dipólust kezdetben az egyensúlyi helyzethez (vagyis a térerősségvektorhoz) képest φ szöggel elfordítjuk, majd megnézzük, hogy egy további, igen kicsi $d\varphi$ szögelfordulásnál mekkora a helyzeti energia megváltozása (1.35. ábra). Ezután végighaladva az összes

lehetséges szögértéken, az elemi helyzeti energia-változásokat összegezzük (azért kell elemi lépésekben haladni, mert a különböző szögeknél más és más az erőter által kifejtett forgatónyomaték, és így a munka is).

Az erőter által végzett elemi munka

$$dW_{\text{tér}} = \mathbf{M}_{\text{tér}} d\boldsymbol{\varphi} = -M_{\text{tér}} d\varphi = -d_e E \sin(\varphi) d\varphi \quad (1.106)$$

(itt kihasználtuk, hogy a szögelfordulás és a forgatónyomaték vektora párhuzamos, de ellentétes irányú, továbbá alkalmaztuk a forgatónyomatékre korábban kapott kifejezést).

A helyzeti energia definíciójának megfelelően a dipólus helyzeti energiájának elemi megváltozása a φ szöggel jellemzett helyzetben

$$dE_h = -dW_{\text{tér}} = d_e E \sin(\varphi) d\varphi. \quad (1.107)$$

Tetszőleges φ helyzetig történő teljes elfordulásnál a helyzeti energia megváltozása

$$E_h = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d_e E \sin(\varphi) d\varphi = d_e E \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin(\varphi) d\varphi \quad (1.108)$$

(Itt kihasználtuk, hogy az erőter homogén, tehát E az integrálásból kiemelhető).

A helyzeti energia kiszámításához meg kell adni a vonatkoztatási helyzetet, vagyis a φ_0 szöget. Vonatkoztatási helyzetként a dipólusnak azt az állását szokás megadni, amikor a dipólus merőleges a térerősségre, vagyis $\varphi_0 = \pi/2$. Ezzel a helyzeti energia

$$E_h = d_e E \int_{\pi/2}^{\varphi} \sin(\varphi) d\varphi = -d_e E [\cos \varphi]_{\pi/2}^{\varphi} = -d_e E \cos(\varphi). \quad (1.109)$$

Mivel a választott vonatkoztatási szög egyben a helyzeti energia nullpontja is ($\cos(\pi/2) = 0$), az egyensúlyi állapotban a dipólus helyzeti energiája negatív.

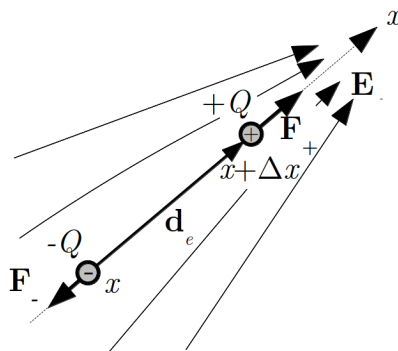
A helyzeti energia kifejezése tömörebb, vektori alakban is felírható, ha kihasználjuk azt a tényt, hogy φ a dipólmomentum-vektor és a térerősségvektor által bezárt szög, vagyis a fenti kifejezés a két vektor skaláris szorzatával egyenlő:

$$E_h = -\mathbf{d}_e \mathbf{E}. \quad (1.110)$$

Megjegyzendő, hogy ezen helyzeti energiára kapott összefüggés elemi úton is kiszámítható a dipólust alkotó két töltés helyzeti energiájából homogén tér esetén.

Inhomogén erőtér

Inhomogén erőtérben a dipólus befordul az adott helyen fennálló térerősség irányába, és ekkor megszűnik a dipólusra ható forgatónyomaték. Mivel azonban a térerősség változik a hellyel, a dipólus két töltésére ható erők nem lesznek azonosak, így a dipólusra egy eredő erő lép fel, aminek hatására a dipólus – ha mozgásképes – elmozdul. Az eredő erő számítását az 1.36. ábrán látható egyszerű inhomogén erőtérre végezzük el, ahol a lokális térerősség irányába már beállt dipólus látható. (A tetszőleges erőtérre és dipólus-irányra alkalmazható eredmény a fejezet végén található.) A térerősség irányában vettük fel a koordinátarendszerünk x -tengelyét. A dipólus két végpontja az x - illetve $x + \Delta x$ koordinátájú helyen van, így a dipólus hossza $l = \Delta x$.



1.36. ábra. Az elektromos dipólusra ható erők inhomogén elektromos térben

Az eredő erő, amelynek itt csak x -komponense van:

$$F_x = F_+ - F_- = QE(x + \Delta x) - QE(x). \quad (1.111)$$

Mivel feltételezzük, hogy a dipólus töltései nagyon közel vannak egymáshoz, az $E(x)$ függvény ismeretében az $E(x + \Delta x)$ értéket lineáris extrapolációval határozzuk meg:

$$E(x + \Delta x) \approx E(x) + \frac{dE(x)}{dx} \Delta x. \quad (1.112)$$

Ezt felhasználva, az eredő erőre azt kapjuk, hogy

$$F_x = QE(x) + Q \frac{dE(x)}{dx} \Delta x - QE(x) = Q \Delta x \frac{dE(x)}{dx}. \quad (1.113)$$

Figyelembe véve, hogy a dipólmomentum nagysága itt $d_e = Q \Delta x$, végül azt kapjuk, hogy

$$F_x = d_e \frac{dE(x)}{dx}. \quad (1.114)$$

Eszerint a dipólusra ható eredő erő a dipólmomentumon kívül a térerősség változásának erősségétől – szakkifejezéssel a térerősség gradiensétől – függ, annak növekedésével nő.

A dipólus – ha ezt a körülmények lehetővé teszik – a növekvő térerősség irányában mozdul el. Ez az oka pl. annak is, hogy az inhomogén erőteret létrehozó megdörzsölt üvegrúd magához vonzza a dipólussá tett szigetelődarabkákat, vagy a megosztás miatt ugyancsak dipólusként viselkedő könnyű fémfólia-darabokat.

Abban az esetben, ha a dipólus valamilyen okból nem tud elfordulni (pl. kristályrácsban van rögzítve), vagy a térerősség változási iránya nem egyezik meg a térerősség irányával a rá ható erőt a fenti meggondoláshoz hasonlóan kiszámítva a következőt kapjuk:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{d}_e \mathbf{E} \quad (1.115)$$

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény a dipólus helyzeti energiájára vonatkozó fenti összefüggésből is következik, mivel egy konzervatív erőterben az erő megkapható helyzeti energia negatív gradienseként.

2. fejezet

Az anyagok elektromos tulajdonságai

Az elektrosztatika alaptörvényeinek vizsgálata a kezdeti időkben levegőben történt, és a különféle töltéselrendezések elektromos erőterét azzal a feltételezéssel tárgyalták, hogy a levegő jelenléte arra semmilyen hatást nem gyakorol. Később kiderült, hogy ez a feltételezés közel jár az igazsághoz: a levegő módosító hatása valóban nagyon kicsi, ezért a megállapított törvények igen jó közelítéssel megegyeznek az üres térben (vákuumban) érvényes törvényekkel.

A valóságban azonban az elektromos töltések közötti teret különböző anyagok (gázok, folyadékok, szilárd anyagok) tölthetik ki, és nem zárható ki, hogy ezek jelenléte az elektromos erőhatásokat – és így az elektromos erőteret – módosítja. Ezt a feltételezést az a tény is megerősíti, hogy az anyagok töltött részecskékből épülnek fel, tehát várhatóan maguk is befolyásolhatják a bennük kialakuló elektromos erőteret.

Ebből a szempontból a vezetők (fémek) nem különösen érdekesek, hiszen azok belsőben sztatikus elektromos erőter nem lehet, ezért a továbbiakban csak szigetelőkkel foglalkozunk. A szigetelők jellegzetessége éppen az, hogy a töltések bennük kötöttek, hosszú távú mozgásuk erősen korlátozott, ezért bennük elektromos erőter jöhet létre.

Azt, hogy egy szigetelő valóban módosítja az elektromos erőteret, néhány egyszerű kísérlettel demonstrálhatjuk.

Kísérlet: Szigetelő anyagok viselkedése elektromos térben

Síkkondenzátort elektrométerrel kapcsolunk össze, és feltöltjük: az elektrométer kitér. A feltöltött kondenzátorba szigetelő lapot csúsztatunk: az elektrométer kitérése csökken. Ha a lapot kihúzzuk, az elektrométer az eredeti kitérést mutatja.

Célnára egymás közelében fémgömböt és paraffin gömböt függesztünk fel. A fémgömböt feltöltve, az vonzza a paraffin gömböt. Ha a kísérletet úgy

ismételjük meg, hogy a két gömböt ricinusolajba merítjük, akkor a gömbök taszítják egymást.

Vízcsapból kifolyó gyenge vízszugárhoz megdörzsölt üvegrudat közelítünk: a vízszugár az üvegrúd felé eltérül (vonzás).

Üvegpoharat egy nagyobb méretű fém pohárba tesszük, és belsejébe kisebb méretű fém poharat helyezünk el, tehát egy szigetelőt tartalmazó kondenzátort készítünk (Leydeni palack). A kondenzátort nagy feszültségre feltöltjük, majd szétszedjük, és a fém poharakat töltésmentesítjük. Ha a kondenzátort ismét összerakjuk, azon töltést találunk.

A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalon: http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Dielektrikum_mint_energiatarolo.ogv. ♦

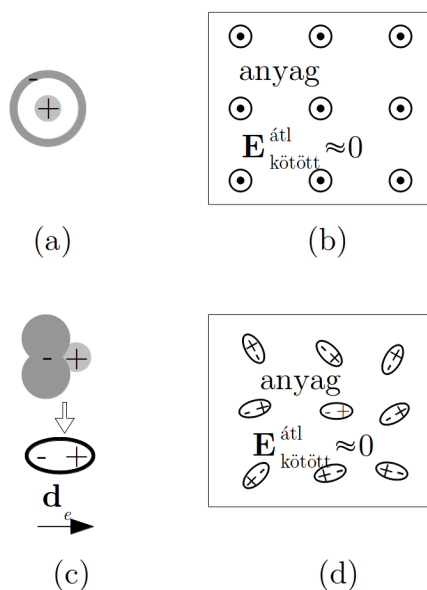
A jelenségekben egyértelmű a jelenlévő *szigetelő anyag*, más néven *dielektrikum* szerepe, ezért érdemes megvizsgálni, hogy mi történik egy szigetelőben ha elektromos erőterbe helyezzük.

A továbbiakban a különböző elektromos erők megkülönböztetése érdekében az erőteret létrehozó töltéseket két csoportba osztjuk. Tudjuk, hogy az anyagokban normális körülmények között azonos mennyiségű pozitív és negatív töltés van jelen. Azokat a töltéseket, amelyek az ellenkező előjelű párjaikkal együtt fordulnak elő (vagyis egy térfogatban a töltések algebrai összege nulla), *kötött töltéseknek* nevezzük. Vannak olyan módszerek (pl. dörzsölés), amelyekkel a kétféle töltést szét lehet választani, és így egy térrészben többségbe kerül az egyik előjelű töltés. Az ilyen, ellenkező előjelű töltéspárjaiktól elválasztott („megszabadított”) töltést – a kialakult szokásnak megfelelően – *szabad töltéseknek* nevezzük (az elnevezés nem túl szerencsés, mert ezek a töltések gyakran nem mozgásképesek, tehát a szó szokásos értelmében nem biztos, hogy szabadok).

A szigetelők belsejében kialakuló elektromos tér várhatóan különbözni fog attól a teremtől, amit szabad töltések (pl. egy feltöltött fémdarab) vákuumban hoztak volna létre, hiszen az anyagot alkotó kötött töltések tere módosítja azt. Ez annak ellenére így van, hogy az anyagok kifelé általában semlegesnek mutatkoznak, sőt rendszerint az anyagot alkotó kötött töltések elektromos terei is semlegesítik egymást. Az anyagokban jelenlévő kötött töltések ugyanis az alábbi két alapvető elrendezésben találhatók.

Az anyagot alkotó atomokban a kétféle töltés bizonyos esetekben gömbszimmetrikus képződményt hoz létre (2.1. (a) ábra), amely csak a töltések közötti térben – vagyis az atom belsejében – hoz létre elektromos teret. Ilyenkor – külső tér nélkül – az atomok közötti térben az átlagos elektromos tér gyakorlatilag nulla ((b) ábra).

Egy másik töltéselrendeződés az, amelyben az atom vagy molekula ellenkező előjelű töltéseinek súlypontjai nem esnek egybe, vagyis a töltéselrendeződés egy dipólushoz hasonlít ((c) ábra). A kötött töltések ilyen elrendezésének már „kifelé” is van elektromos



2.1. ábra. Gömbszimmetrikus töltéeloszlású (apoláros) (a.) és a pozitív és negatív töltés súlypontjában eltérő (poláros) molekula (c.) és a belőlük álló anyag (b. illetve d.) külső elektromos tér nélkül

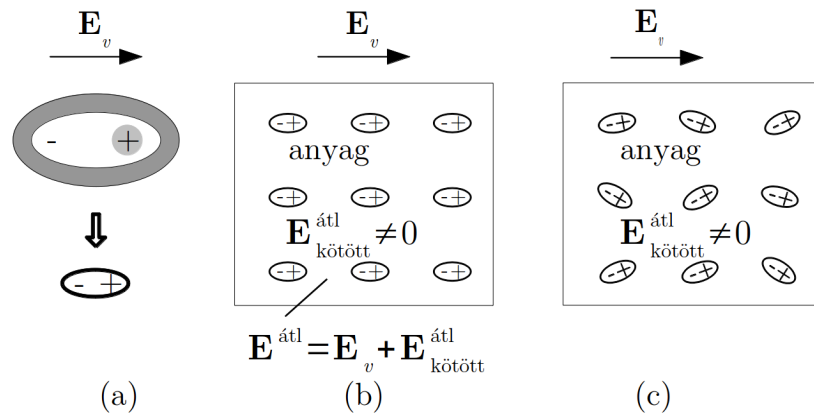
tere. Az esetek többségében azonban az atomok vagy molekulák közötti térben rendszerint mégsem alakul ki hosszú távú elektromos tér, mert a molekuláris dipólusok irányukat tekintve rendszertelenül helyezkednek el, így egymás elektromos terét kioltják ((d) ábra).

A helyzet azonban gyökeresen megváltozik, ha a szigetelőt elektromos erőterbe helyezzük. Az eredetileg gömbszimmetrikus atomokban az elektromos erőter hatására a töltések elmozdulnak, és a térerősség irányával párhuzamos dipólus jön létre (2.2. (a) ábra), aminek már az atomon kívül is van elektromos tere. Így az anyag a külső elektromos erőter hatására a térerősséggel párhuzamos dipólusokat tartalmazó állapotba ((b) ábra) megy át.

Külső erőter hatására ehhez hasonló végállapot jöhet létre az eredetileg rendezetlen dipólusokat tartalmazó anyagban is. Ha a dipólusok forgásképesek (és valamilyen mértékben mindig azok), akkor az erőter hatására rendeződnek, azaz kisebb-nagyobb mértékben a térerősség irányával párhuzamos helyzet felé elfordulnak ((c) ábra), aminek következtében egymás terét már nem oltják ki.

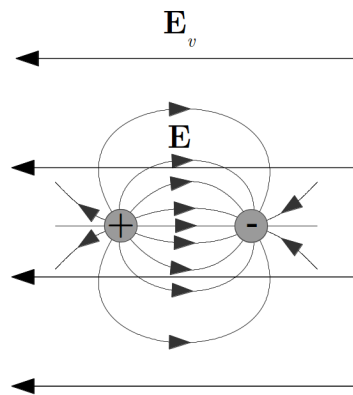
Ez a jelenség a szigetelő *polarizációja*.

A végeredmény mindkét esetben ugyanaz: a külső erőter hatására a kötött töltések a molekulák közötti térben egy hosszú távú elektromos erőteret hoznak létre, amely a külső erőterhez hozzáadódik. Mivel a térerősség irányába beállt dipólusok erőtere a két töltés közötti, legerősebb erőter tartományában a külső erőter irányával lényegében ellentétes



2.2. ábra. Apoláros molekula polarizációja külső tér hatására (a.). Apoláros (b.) illetve poláros (c.) molekulák alkotta anyag viselkedése külső elektromos térben.

(2.3. ábra), az anyagban létrejövő elektromos erőter várhatóan kisebb lesz, mint amilyen az anyag jelenléte nélkül lenne.



2.3. ábra. Az anyagban kialakuló tér a külső tér és a dipólusok terének szuperpozíciója

A polarizáció hatását tehát az alábbi módon foglalhatjuk össze:

- Ha az anyagban eredetileg gömbszimmetrikus, kifelé elektromos erőteret nem mutató atomok vannak, akkor az erőter hatására az ellenkező előjelű töltések szétválnak, így a külső erőter irányában rendezett dipólusok jönnek létre, amelyeknek eredő elektromos erőtere van.

- Ha vannak az anyagban dipólus-molekulák (pl. víz), akkor külső elektromos erőter nélkül azok átlagos erőtere a rendezetlen beállítás miatt nulla, a külső elektromos erőter azonban rendezi őket, és így lesz eredő elektromos erőterük.

2.1. Elektromos erőter szigetelőkben

A polarizált szigetelőben várhatóan más lesz az elektromos erőter, mint a külső erőter, hiszen a dipólusok erőtere módosítja azt.

Módosulnak-e az alaptörvények?

2.1.1. Az elektrosztatika I. alaptörvénye szigetelőkben

A szigetelőkben kötött töltésként megjelenő töltések ugyanazok, amelyek szabad töltésként megjelennek (elektronok vagy az atommagok kompenzálatlan protonjai). Az általuk kötött töltésként létrehozott elektromos erőter feltehetőleg ugyanolyan jellegű, mint az az erőter, amit szabad töltésként hoznak létre. Tehát ez is *konzervatív* erőter, és az I. törvény változatlan:

$$\oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (2.1)$$

A tapasztalat ezt a feltevést igazolja.

2.1.2. Az elektrosztatika II. alaptörvénye szigetelőkben

A kötött töltések erőterét és fluxus-járulékát a II. alaptörvényben figyelembe kell venni.

Ez formálisan a kötött- vagy más néven *polarizációs töltések* beírását jelenti:

$$\oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\varepsilon_0} + \frac{Q_p}{\varepsilon_0}, \quad (2.2)$$

ahol Q_{sz} a szabad töltéseket Q_p a polarizációs töltéseket jelöli.

De mennyi a kötött töltés egy zárt felületen belül?

Ha a zárt felület az egész szigetelőt tartalmazza, akkor $Q_p = 0$, hiszen az anyag semleges.

Ha azonban a zárt felület elmetszi a szigetelőt, akkor dipólusokat vághat el, azoknak egyik fele a zárt felületen belülré, másik fele kívülré kerül. Így lehet $Q_p \neq 0$ a zárt felületen belül.

Számoljuk ki a kötött töltéseket! Ehhez előbb érdemes a polarizációt makroszkopikusan jellemezni.

Atomi szinten az atomok és molekulák \mathbf{d}_e elektromos dipólmomentuma jellemzi a polarizációt. Az egész test polarizációját a dipólmomentumok összegével jellemezhetjük: $\mathbf{d}_e^{\text{teljes}} = \sum_i \mathbf{d}_{ei}$, ahol \mathbf{d}_{ei} az i -edik dipólus dipólmomentuma.

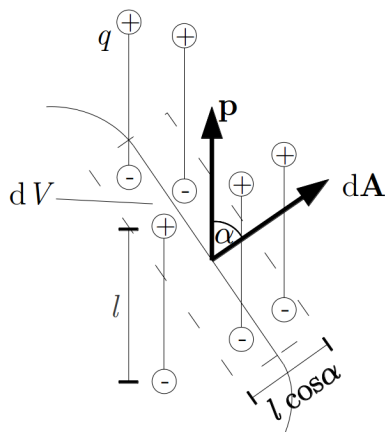
Az anyag egy kis térfogatának leírására bevezethető egy lokális jellemző, a dipólmomentum térfogati sűrűsége:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{d}_e^{\text{teljes}}}{\Delta V} = \frac{\Delta (\sum_i \mathbf{d}_{ei})}{\Delta V}. \quad (2.3)$$

Ezt a vektort *polarizáció vektornak* nevezzük.

Nézzük meg, hogy a fluxus számolásához felvett zárt felület egy kis része mentén mennyi lesz a felület belsejébe kerülő töltés. A dipólusokat azonosaknak tételezzük fel $d_{ei} = ql$ nagyságú dipólmomentummal.

A dA felület (2.4. ábra) azokat a dipólusokat vágja el (ezek negatív töltése a felületen belülre kerül), amelyek benne vannak az ábrán szaggatott vonallal jelzett dV térfogatban:



2.4. ábra. A Gauss törvény számításánál azokat a kötött töltéseket kell figyelembe vennünk, amelynek két pólusa között halad át az integrálás határa

Ha a dipólusok térfogati darabsűrűsége $n = \frac{dN}{dV}$ (darab/térfogat), akkor az elmetezett dipólusok száma

$$dN = n dV = nl dA |\cos(\alpha)|, \quad (2.4)$$

a felületen belül került polarizációs töltés pedig (ez esetben negatív):

$$dQ_p = -\frac{dN}{dV}ql \, dA \cos(\alpha), \quad (2.5)$$

ahol q egy dipólus töltése, dN az összes dipólusok száma a dV térfogatban. A kifejezés előjelhelyesen adja a töltést.

Mivel α a dipólmomentum vektor és a felületvektor közötti szög, a töltés vektorokkal is kifejezhető:

$$dQ_p = -\frac{dN}{dV}\mathbf{d}_e \, d\mathbf{A} = -\mathbf{P} \, d\mathbf{A}. \quad (2.6)$$

A zárt felületben lévő összes polarizációs töltés:

$$Q_p = -\oint_A \mathbf{P} \, d\mathbf{A}. \quad (2.7)$$

Jelentése: a polarizáció vektor forrásai a polarizációs töltések, a \mathbf{P} vektortér vonalai polarizációs töltéseken kezdődnek és végződnek.

A polarizációs töltéssel a Gauss-törvény:

$$\oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_A \mathbf{P} \, d\mathbf{A}. \quad (2.8)$$

Átrendezve a

$$\oint_A \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\varepsilon_0} \quad (2.9)$$

vagy a

$$\oint_A (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \, d\mathbf{A} = Q_{sz} \quad (2.10)$$

alakot kapjuk.

Utóbbi jelentése: az $\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ vektormennyiség forrásai a szabad töltések, ennek a vektortérnek a vonalai szabad töltéseken kezdődnek és végződnek. Ezért ezt a vektort külön térjellelmzőként vezették be:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.11)$$

Az új térjellemező neve: az *elektromos eltolás* (vagy *dielektromos eltolás*) *vektora*. Kiszámításához a térerősséget és a polarizációt kell ismerni.

Ezzel az elektrosztatika II. alaptörvényének (Gauss-törvény) általános alakja:

$$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q_{sz}, \quad (2.12)$$

vagy differenciális alakban:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{sz}. \quad (2.13)$$

Megjegyzendő, hogy a fenti gondolatmenet arra épül, hogy a teret leíró mennyiségek (\mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} vektorok) egy kis térfogatelemre átlagolhatók, és az anyag jelenlétében a mikroszkópikus térerősség vektorok helyett ezek átlagolt változatát használjuk az elektromos tér jellemzésére. Ezen átlagolás lényeges feltétele, hogy az ott használt térfogatelem az atomi méreteknél lényegesen nagyobb legyen (így a polarizációs töltések hatását mindenképpen kiátlagolva vesszük figyelembe), de elég kicsi legyen ahhoz, hogy a szabad töltések által létrehozott „külső” térerősség még ne változzon meg lényegesen az átlagolási tartományon belül (így az átlagolás a „külső” teret lényegében nem változtatja meg). Az így kapott makroszkópikus térerősségvektorok jól használhatók kiterjedt testek és az atomi méretekhez képest lassan változó terek leírására, de nem alkalmasak az atomi méretek skáláján is változó térerősségek, vagy atomi méretű testek hatásának leírására.

2.2. Elektromos erőter homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokban

Az általános összefüggés a dielektromos eltolás vektor definíciójára:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.14)$$

Különböző anyagok esetén a \mathbf{P} polarizáció vektor különböző módon függ a az anyagra ható térerősség vektor értékétől. Elektromos szempontból *homogénnek* tekintünk egy anyagot, annak polarizálhatósága a helytől független, azaz egy tetszőleges \mathbf{E} térerősség hatására a helytől függetlenül ugyanolyan \mathbf{P} polarizáció keletkezik. Egy homogén anyagban \mathbf{E} és \mathbf{P} iránya nem feltétlenül egyezik meg egymással. Vannak olyan mikroszkópikus rendezettséggel rendelkező (általában kristályos) anyagok, amelyekben különböző irányú de azonos nagyságú elektromos tér eltérő irányú és nagyságú polarizációt kelt. Ezen

anyagokat elektromos szempontból *anizotróp* anyagoknak hívjuk. Ezekkel ellentétben egy izotróp anyag polarizálhatósága minden irányban megegyezik.

Homogén, izotróp anyagokban kis térerősségeknél legtöbbször érvényes, hogy $P \sim E$, ezek az anyagok a *lineáris dielektrikumok*. Az arányosságot a $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ alakban szokás felírni, ahol χ a *dielektromos szuszceptibilitás*, amely az anyagi minőségtől függ. A tapasztalat szerint minden anyagra fennáll a $\chi > 0$ összefüggés, vákuumban $\chi = 0$ (nincs polarizáció). Levegőben és a legtöbb gázban χ alig különbözik nullától ($\chi^{\text{levegő}} = 0.00059$).

Ilyenkor

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (2.15)$$

Itt $\varepsilon_r = 1 + \chi$ az anyag *relatív permittivitása* vagy *relatív dielektromos állandója*, az $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ mennyiség az anyag *abszolút permittivitása*.

A $\chi > 0$ összefüggés miatt minden anyagban $\varepsilon_r > 1$, vákuumban $\varepsilon_r = 1$. Gázokban $\varepsilon_r \approx 1$ (levegőben $\varepsilon_r = 1.00059$). Ezért fogadhatjuk el jó közelítéssel a levegőben végzett kísérletek eredményeit vákuumbeli eredményeknek.

Homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokban az elektrosztatika II. alaptörvénye egyszerűbb alakba írható:

$$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \oint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = Q, \quad (2.16)$$

Itt és a továbbiakban a *szabad töltések* jelölésére az *index nélküli* Q -t használjuk. Ebből

$$\oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (2.17)$$

Emiatt *azonos szabad töltéeloszlás* esetén minden vákuumra kapott összefüggésben, ahol szerepel az ε_0 , az anyagban érvényes alakot az $\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r$ cserével kapjuk meg. Így írható át pl. a Coulomb-törvény is:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}, \quad (2.18)$$

vagyis az elektrosztatikus erők lecsökkennek, ha a teret anyag tölti ki.

A fenti összefüggésből következik az is, hogy *azonos szabad töltéeloszlás* esetén adott helyen vákuumban (E_v) és anyag jelenlétében (E) mért elektromos térerősségek között az

$$E = \frac{E_v}{\varepsilon_r} \quad (2.19)$$

összefüggés áll fenn (homogén, izotróp, lineáris dielektrikumban).

Ugyanez érvényes a potenciálokra is:

$$U = - \int_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = - \int_L \frac{\mathbf{E}_v}{\varepsilon_r} \, d\mathbf{r} = \frac{U_v}{\varepsilon_r}. \quad (2.20)$$

Ezzel értelmezhető az a *kísérleti eredményünk*, hogy a feltöltött üres kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség lecsökken, ha szigetelőt csúsztatunk a lemezek közé (közben a lemezekben lévő szabad töltések nem változtak!), hiszen levegőben $\varepsilon_r \approx 1$, a szigetelő lapban pedig $\varepsilon_r > 2$.

A jelenség úgy is felfogható, hogy a szigetelő megnöveli a kondenzátor kapacitását:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q\varepsilon_r}{U_v} = \varepsilon_r C_v. \quad (2.21)$$

A nagy permittivitású anyagok kapacitásnövelésre használhatók.

2.2.1. Az erőtér két dielektrikum határán

Két különböző dielektrikum határán az erőteret jellemző mennyiségek vektorai megváltoznak. A határfelületen bekövetkező térerősség-változás számítására alkalmazzuk az elektrosztatika első és második törvényét a felület egy kis környezetére! Ehhez írjuk fel elektrosztatika első törvényét a határfelületre simuló zárt görbe (téglalap) mentén, melynek hosszabb oldala (dl) párhuzamos a felülettel, rövidebb oldala (dx) merőleges a felületre (2.5. (a) ábra):

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0, \quad (2.22)$$

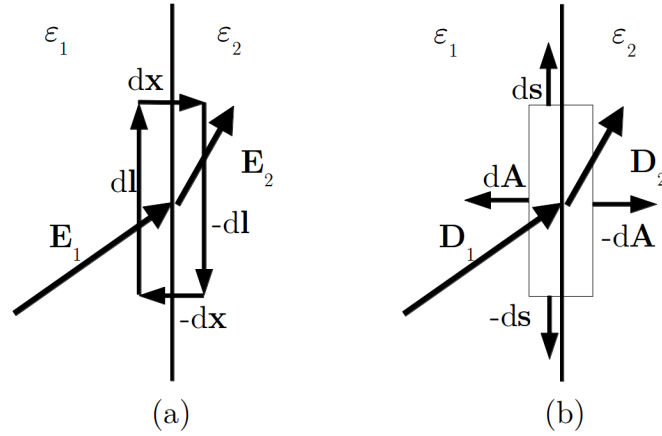
Legyen a téglalap mérete elég kicsi ahhoz, hogy a térerősséget a teljes dl oldal mentén állandónak tekinthessük, és vizsgáljuk a $dx \rightarrow 0$ határatmenetet! Ekkor a téglalap rövidebb oldalai mentén elvégzett integrálok értéke nullához tart, míg a hosszabb oldalakra egy-egy konstansot kapunk:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = E_{1T} \, dl - E_{2T} \, dl = 0, \quad (2.23)$$

azaz

$$E_{1T} = E_{2T}, \quad (2.24)$$

Ahol E_{1T} illetve E_{2T} a térerősség tangenciális (felülettel párhuzamos) komponensének értéke a határfelületen az ϵ_1 illetve az ϵ_2 permittivitású közegen. Elmondhatjuk tehát, hogy az elektromos térerősség transzverzális komponense a határfelületen folytonosan megy át.



2.5.  bra. Az elektromos térerősség (a.)  s a dielektromos eltolás (b.) változása k t homogén közeg határán

Az elektromos eltolás változásáról a Gauss-törvény ad felvilágosítást amennyiben azt felírjuk egy téglatestre, amelynek a határfelülettel párhuzamos oldal ei hosszabbak, és a határfelületre merőleges oldal ei rövidebbek (az oldalapok $d\mathbf{A}$ illetve $-d\mathbf{A}$ fel letvektorai a felületre merőlegesek, $d\mathbf{s}$ vektorok a felülettel párhuzamosak). A téglatest rövidebb éleivel nullához tartva annak fed lapjai k t oldalról a határfelületre simulnak, és az oldalapjaira számított fluxus nullához tart.  gy:

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = -D_{1N} dA + D_{2N} dA = Q. \quad (2.25)$$

Ha a határfelületen vannak szabad töltések, akkor az eltolási vektor normális komponensének változása azok felületi sűrűségével egyenlő:

$$D_{2N} - D_{1N} = \frac{Q}{dA} = \sigma \quad (2.26)$$

( j \mathbf{D} vonalak csak szabad töltésekből léphetnek ki, \mathbf{D} vonalak csak szabad töltéseken sz  nhetnek meg).

Ha nincsenek ott szabad töltések, akkor

$$D_{2N} = D_{1N}, \quad (2.27)$$

ilyenkor az eltolási vektor normális komponense változatlan az átmenetnél.

Hasonló módon kapjuk a polarizáció vektorra a

$$\oint_A \mathbf{P} d\mathbf{A} = -Q_p \quad (2.28)$$

egyenletből, hogy normális komponensének változása a polarizációs töltések felületi sűrűségének negatívjával egyenlő

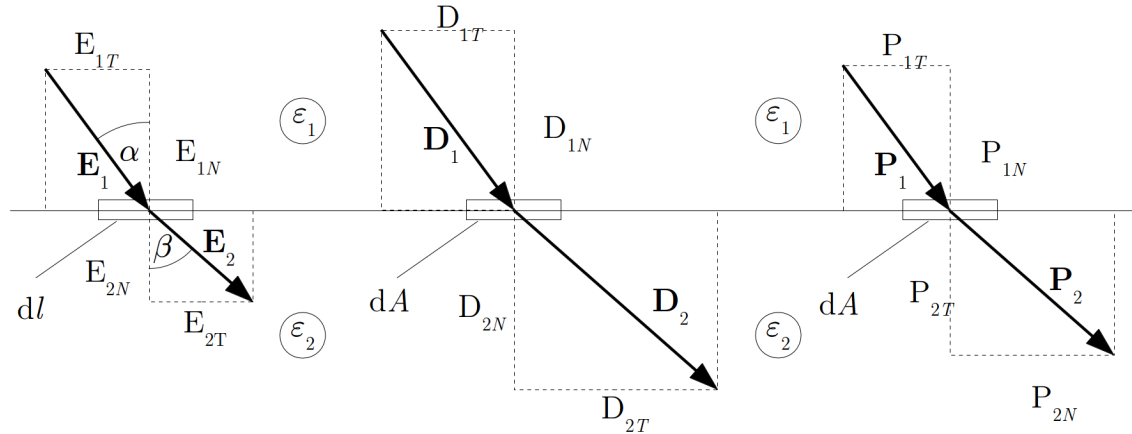
$$P_{2N} - P_{1N} = -\frac{Q_p}{dA} = -\sigma_p \quad (2.29)$$

(új \mathbf{P} vonalak polarizációs töltésekből lépnek ki, \mathbf{P} vonalak polarizációs töltéseken szűnnek meg).

Ha nincsenek a határfelületen polarizációs töltések, akkor

$$P_{2N} = P_{1N}, \quad (2.30)$$

a polarizáció normális komponense változatlan.



2.6. ábra. Az elektromos térerősség a dielektromos eltolás és a polarizáció változása két homogén izotróp és lineáris közeg határán

Ha a határfelületen nincsenek töltések, és az anyag elektromos szempontból lineáris, akkor \mathbf{E} , \mathbf{D} és \mathbf{P} egymással párhuzamosak maradnak (a 2.6. ábra ezt az esetet mutatja).

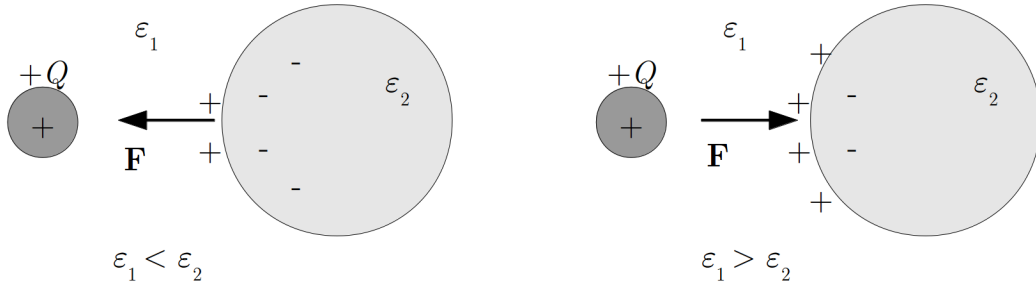
A télerősség-vektor törésének törvényét a fenti ábra és a fenti egyenletek alapján kaphatjuk meg.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{E_{1T}}{E_{1N}}, \quad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{E_{2T}}{E_{2N}} \quad (2.31)$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{E_{1T}E_{2N}}{E_{2T}E_{1N}} = \frac{E_{2N}}{E_{1N}} = \frac{D_{2N}\varepsilon_1}{\varepsilon_2 D_{1N}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.32)$$

A határfelületi viselkedés magyarázza azt a *kísérleti eredményünket*, hogy töltött fémgömb és (szigetelő) paraffin gömb közötti erőhatás levegőben és ricinusolajba éppen ellenkező irányú (2.7. ábra).

A kísérlet adatai: $\varepsilon_r^{\text{levegő}} \approx 1$, $\varepsilon_r^{\text{paraffin}} \approx 2$, $\varepsilon_r^{\text{r.olaj}} \approx 4.6$, vagyis $\varepsilon_r^{\text{levegő}} < \varepsilon_r^{\text{paraffin}} < \varepsilon_r^{\text{r.olaj}}$, és ugyanez igaz a szuszceptibilitásokra ($\chi = \varepsilon_r - 1 > 0$) is: $\chi^{\text{levegő}} < \chi^{\text{paraffin}} < \chi^{\text{r.olaj}}$.



2.7. ábra. Szigetelő tárgyra ható erő változása az őt körülvevő közeg permittivitása függvényében

Ha a fémgolyó töltése pozitív, akkor a levegő és a paraffin golyó határfelületén az eredő polarizációs töltés negatív ($P_N^{\text{paraffin}} - P_N^{\text{levegő}} = -\sigma_p > 0 \Rightarrow \sigma_p < 0$): a pozitív fémgömb és a paraffin golyó között vonzást észlelünk.

A ricinusolaj és a paraffin golyó határfelületén az eredő polarizációs töltés viszont pozitív ($P_N^{\text{paraffin}} - P_N^{\text{r.olaj}} = -\sigma_p < 0 \Rightarrow \sigma_p > 0$): a pozitív fémgömb és a paraffingolyó között taszítást észlelünk.

Ugyanilyen megfontolással magyarázható az a *kísérletünk* is, hogy a pozitív töltésű üvegrúd a vízszugárra vonzó erőt fejt ki ($\varepsilon_r^{\text{levegő}} < \varepsilon_r^{\text{víz}}$)

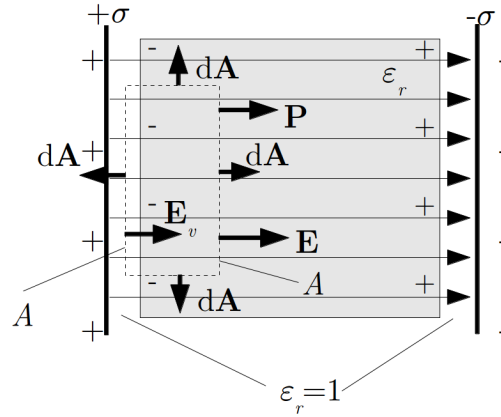
2.2.2. A polarizáció síkkondenzátor-modellje

Polarizáció egyszerű modellje: egy síkkondenzátorban a dielektrikum felületén polarizációs töltések jelennek meg, és az erőteret létrehozó effektív töltés a szabad- és polarizációs töltések különbsége.

Igazolható-e ez a modell az általános törvények segítségével?

A dielektrikummal kitöltött síkkondenzátorban (2.8. ábra) alkalmazzuk a II. alaptörvényt a szaggatott vonallal berajzolt zárt felületre:

$$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \oint_A (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \, d\mathbf{A} = -\varepsilon_0 E_v A + \varepsilon_0 E A + P A = Q_{sz} = 0 \quad (2.33)$$



2.8. ábra. Dielektrikummal kitöltött síkkondenzátor

(a felület nem zár körül szabad töltést!). Ebből

$$E = E_v - \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (2.34)$$

Mivel $E_v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ és $P = P_N = -\sigma_p$,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma_p}{\varepsilon_0}, \quad (2.35)$$

illetve

$$E = \frac{|\sigma| - |\sigma_p|}{\varepsilon_0}, \quad (2.36)$$

ami az említett modell helyességét igazolja.

Ugyanebben az elrendezésben mennyi a \mathbf{D} nagysága a vákuum-résben és az anyagban?
A két helyen érvényes:

$$\mathbf{D}_v = \varepsilon_0 \mathbf{E}_v \quad (2.37)$$

$$, \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.38)$$

A nagyságokra:

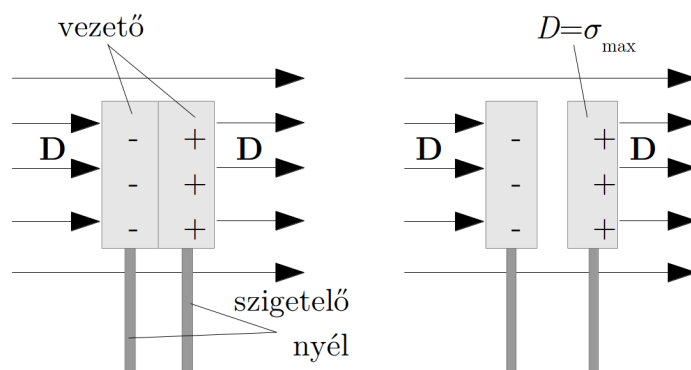
$$D_v = \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \sigma \quad (2.39)$$

$$, D = \varepsilon_0 \frac{\sigma + \sigma_p}{\varepsilon_0} - \sigma_p = \sigma, \quad (2.40)$$

vagyis $D_v = D$. Ez megfelel annak, hogy a \mathbf{D} -t a szabad töltések felületi sűrűsége határozza meg (ez mindkét esetben σ).

2.2.3. Az elektromos eltolás mérési utasítása

A \mathbf{D} mérésére azt használhatjuk ki, hogy két anyag határfelületén a szabad töltések felületi sűrűsége a D_N változásával egyenlő.



2.9. ábra. Az elektromos eltolás mérése

Két egymásra fektetett vezető lapot az erővonalakra merőlegesen elhelyezve (2.9. (a) ábra) a pozitív töltésű felületen kialakuló szabad töltés (megosztás!) éppen a \mathbf{D} nagyságát adja:

$$D_{2N} - D_{1N} = D - 0 = D = \sigma. \quad (2.41)$$

Mérés:

A fémlapokat úgy helyezzük el, hogy az adott helyen a legnagyobb töltés jöjjön létre (ekkor merőleges a lap az erőtérré).

A két lapot szétválasztva ((b) ábra) a lapokon megmarad a megosztott töltés és megmérhető, a \mathbf{D} nagysága: $D = \sigma_{\max}$.

A \mathbf{D} *iránya*: merőleges a fémlap felületére, és a negatív oldaltól a pozitív felé mutat.

Az elektromos eltolás elnevezés innen ered: a \mathbf{D} az erőter töltésszétválasztó, „töltés-eltoló” hatására jellemző.

Határfelületen a térerősségvektor tangenciális-, az eltolásvektor normális komponense megy át változatlanul, ezért egy dielektrikumban a térerősséget elvileg egy a térerősség irányában elnyújtott cső alakú kivágásban, az eltolást pedig a térerősségre merőleges lapos korong alakú kivágásban lehet megmérni.

2.3. Bonyolultabb dielektrikumok

A \mathbf{P} és \mathbf{E} közötti kapcsolat inhomogén, anizotróp dielektrikumban általában bonyolult: $\mathbf{P} = f(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_s$. A polarizáció általában nem párhuzamos a térerősséggel, és külső erőter nélkül is lehet polarizáció.

2.3.1. Anizotróp, lineáris anyagok

Kis térerősségek esetén az anyagok többségében az \mathbf{E} és \mathbf{P} között lineáris kapcsolat van, de nem egyszerű arányosság:

$$P_x = \varepsilon_0 \chi_{xx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{xy} E_y + \varepsilon_0 \chi_{zx} E_z \quad (2.42)$$

$$P_y = \varepsilon_0 \chi_{yx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{yy} E_y + \varepsilon_0 \chi_{yz} E_z \quad (2.43)$$

$$P_z = \varepsilon_0 \chi_{zx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{zy} E_y + \varepsilon_0 \chi_{zz} E_z. \quad (2.44)$$

A kapcsolat hasonló a merev test szögsebessége és perdülete közötti összefüggéshez (a két vektor általában ott sem párhuzamos).

A $\chi_{xx}, \chi_{xy} \dots \chi_{zy}, \chi_{zz}$ mennyiségek alkotják a *szuszeptibilitás-tenzort*.

2.3.2. Maradandó polarizáció

Vannak olyan anyagok, amelyekben a külső erőterrel létrehozott polarizáció hosszú ideig megmarad.

Ilyen polarizáció jöhet létre például akkor, ha nagy térerősség hatására, magasabb hőmérsékleten hosszútávú töltésmozgás eredményeként az anyagban ellenkező töltésű tartományok jönnek létre (a szigetelők is vezetnek csak sokkal kevésbé, mint a vezetők). Az

ilyen módon „polarizált” anyagban normális körülmények között a töltések nem tudnak visszatérni eredeti helyükre (kis vezetőképesség), a polarizáció hosszú ideig fennmarad. Példa: elektrétek, amelyek évtizedekig polarizáltak maradnak.

Ezt illusztrálja a *Leydeni palackkal folytatott kísérletünk* is: a nagy térerőséggel (kb. 10 000 V/cm) polarizált dielektrikumban a polarizáció az erőtér megszűnése után is megmarad (ettől lesz töltés az ismételten összerakott kondenzátorban).

Különleges anyagokban külső hatás nélkül is létrejön polarizáció, mert a dipólusok rendeződése energetikailag kedvezőbb állapotot jelent. A magától kialakult eredő polarizáció a *spontán polarizáció*, az ilyen anyagok a *piroelektromos* anyagok. Ezek egy részében a polarizáció iránya külső erőtérrel megváltoztatható, ezek a *ferroelektromos anyagok*.

2.3.3. Piroelektromos effektus

A spontán polarizáció (piroelektromos anyagok!) függ a hőmérséklettől: hőmérsékletváltozásra polarizáció változás, és felületi töltések megjelenése következik be. Az anyagból készült lapkára elektródokat szerelve, az ehhez kapcsolt áramkörben hőmérsékletváltozáskor áram jön létre. Ez a *piroelektromos effektus*. Sugárzásérzékelésre használható (piroelektromos detektor, mozgásérzékelő, betörésjelző).

2.3.4. Piezoelektromos effektus

Egyes anyagokban (pl. kvarc) mechanikai feszültség is okozhat polarizáció-változást, ez a *piezoelektromos effektus*. Az ilyen anyagok a *piezoelektromos anyagok*. A polarizáció-változást itt is elektromos jellé lehet alakítani, ilyen módon deformációt, erőt lehet mérni. A piezo-gyűjtőben a hirtelen összenyomásra keletkező feszültség elektromos szikrát hoz létre.

A jelenség megfordítható: elektromos erőtérbe helyezve, az ilyen anyag deformálódik, ez az *inverz piezoelektromos effektus*, vagy elektrostrikciónak is nevezik. Elektromos erőtérrel kis elmozdulások hozhatók létre, anyagok berezegtethetők (ezen alapul a kvarcórák szabályzását végző piezoelektromos lapka berezgetése).

2.4. Az elektromos erőtér energiája

Töltésfelhalmozáshoz munkát kell végezni (az anyagban azonos számban előforduló, egymás hatását többnyire kompenzáló ellenkező előjelű töltéseket szét kell választani, azonos töltések felhalmozásakor pedig taszító erő lép fel). Ez a munka elektrosztatikus helyzeti energiát eredményez.

Láttuk például, hogy töltésrendszer helyzeti energiája:

$$E_h = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i, \quad (2.45)$$

(U_i a potenciál az i -edik ponttöltés helyén).

Töltött vezető energiája (Q töltés, mindenütt azonos U potenciál):

$$E_h = \frac{1}{2} U Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (2.46)$$

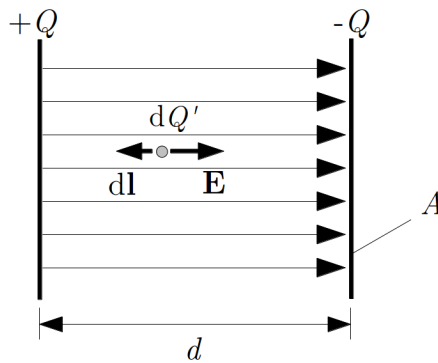
Az elektrosztatikus helyzeti energia kiszámítása általános formában nem könnyű, de az energia általános kifejezését egyszerű speciális esetre elvégzett számolás általánosításával is megkaphatjuk.

A speciális eset: a síkkondenzátorban felhalmozott energia.

Számítsuk ki egy Q töltést tartalmazó síkkondenzátor energiáját úgy, hogy meghatározzuk a feltöltés során végzett munkát! Válasszuk ki azt a pillanatot, amikor a C kapacitású kondenzátor lemezein van már $+Q'$, illetve $-Q'$ töltés, és a negatív lemeztől újabb $+dQ'$ töltésadagot viszünk át a pozitív lemezre (eközben a negatív lemez töltése is megnő az ottmaradt kompenzálatlan $-dQ'$ töltéssel).

A feltöltés egy lépésében, dQ' töltés átvitelénél (2.10. ábra) az energiaváltozás:

$$dE_h = - \int_1^2 dQ' \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = -dQ' (-E'd) = dQ' \frac{\sigma'}{\varepsilon} d = \frac{Q'}{\varepsilon A} dQ' d \quad (2.47)$$



2.10. ábra. A síkkondenzátorban felhalmozott energia számítása

A teljes Q töltés felvitelénél:

$$E_h = \frac{d}{\varepsilon A} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2} \frac{d}{\varepsilon} A Q^2 = \frac{1}{2C} Q^2. \quad (2.48)$$

Hozzuk vissza a kifejezésbe a térerősséget ($E = \frac{Q}{\varepsilon A}$):

$$E_h = \frac{1}{2} \varepsilon A d E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon V E^2, \quad (2.49)$$

ahol V az a térfogat, ahol elektromos erőtér van.

Az elektrosztatikus *energia térfogati sűrűsége*:

$$w_e = \frac{E_h}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2, \quad (2.50)$$

ami csak a térerősségtől és a közeg anyagi minőségétől függ. Mivel az elektrosztatikus energia a fegyverzetek közt vákuumban is jelen van, kijelenthetjük, hogy az *energia az erőtérhez rendelhető*.

Homogén, izotróp, lineáris dielektrikumban:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}. \quad (2.51)$$

Kimutatható, hogy ez az energia-kifejezés tetszőleges geometria és anyag esetén is érvényes: ahol elektromos erőtér van, ott a fenti energiasűrűség is megjelenik, függetlenül attól, hogy az erőtér hogyan keletkezett, ezért a

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} \quad (2.52)$$

kifejezést az *elektromos erőtér energiasűrűségének* nevezzük.

3. fejezet

Elektromos áram

Ha elektromos töltések rendezett mozgással egyik helyről a másikra átmennek, *elektromos áramról* beszélünk. Elektromos áram folyt pl. egy korábbi kísérletünkben, amikor a töltött elektrométerről a töltetlenre töltések mentek át a két elektrométert összekötő, nyugalomban lévő vezetőn keresztül, de elektromos áram jön létre akkor is, ha egy töltött testet a töltéseivel együtt elmozdítunk.

Ha elektromos töltések egy nyugalomban lévő vezető anyag belsejében az ott fennálló elektromos erőter hatására mozognak, akkor a létrejött áramot *vezetési* (vagy *konduktív áramnak* nevezik. Abban az esetben, ha a töltések mozgása azért következik be, mert a töltéseket hordozó test vagy közeg mozog, és vele együtt mozognak a töltések is, a létrejött elektromos áramot *konvektív áramnak* nevezik. A továbbiakban – nagyobb jelentősége és egyszerűbb leírása miatt – elsősorban a vezetési árammal foglalkozunk.

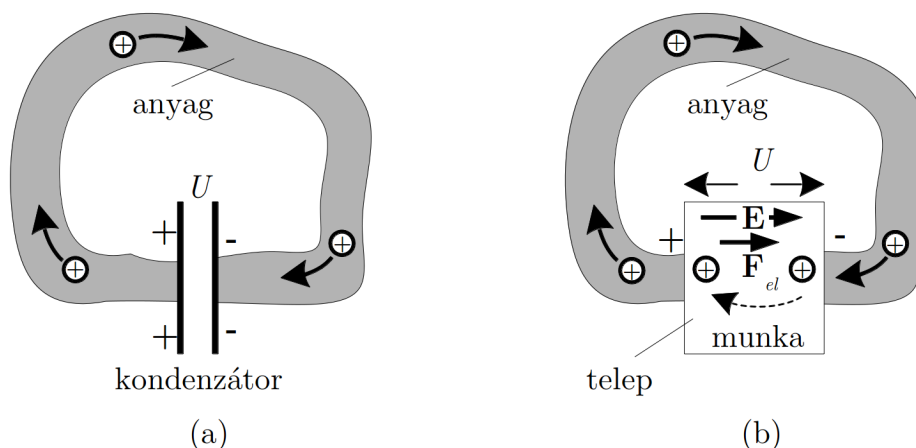
Egy anyagban vezetési áram létrejöttét az teszi lehetővé, hogy az elektromos töltések az anyagokban kisebb vagy nagyobb mértékben hosszú távú mozgásra képesek. A különböző anyagokban különböző *töltéshordozó* részecskék mozoghatnak (elektronok, ionok), és a töltésmozgás különböző *mechanizmusokkal* valósulhat meg.

Ahhoz, hogy egy anyagban töltésáramlás induljon el, az anyag belsejében elektromos erőteret – pontjai között elektromos potenciálkülönbséget – kell létrehozni. Azt a jelenséget, hogy az anyagban elektromos erőter hatására elektromos áram jön létre *elektromos vezetésnek* nevezik. Adott elektromos térerősség hatására a különböző anyagokban különböző erősségű töltésáramlás jön létre, vagyis az anyagok az elektromos vezetés szempontjából különböző *tulajdonságúak*.

Ahhoz, hogy a töltéshordozók állandóan egy irányban mozogjanak, vagyis az anyagban állandó elektromos áram jöjjön létre, benne állandó elektromos erőteret (potenciálkülönbséget) kell fenntartani, és biztosítani kell, hogy mindig legyenek mozgásképes töltéshordozók.

Elektromos erőteret (potenciálkülönbséget) egy anyagban létrehozhatunk pl. úgy, hogy két végét egy feltöltött kondenzátor két fegyverzetéhez kapcsoljuk (3.1. (a) ábra). Ekkor az anyagban az U potenciálkülönbség hatására létrejön egy elektromos áram,

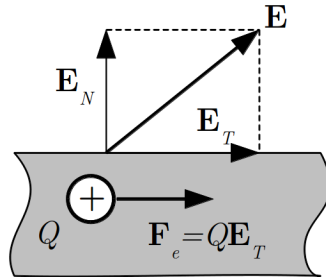
de ez az áram előbb-utóbb megszünteti a potenciálkülönbséget: ha pl. az anyagban a pozitív töltések tudnak mozogni, akkor a magasabb potenciálú (pozitív töltésű) oldalról a pozitív töltések átmennek az alacsonyabb potenciálú (negatív töltésű) oldalra, ahol semlegesítik a negatív töltéseket (a kondenzátor „kisül”), így az áram is megszűnik.



3.1. ábra. A feltöltött kondenzátor kisütése időben gyorsan lecsengő (tranziens) áramot ad (a), az állandó áram fenntartásához a töltések „utánpótlásához” külső erő szükséges (b)

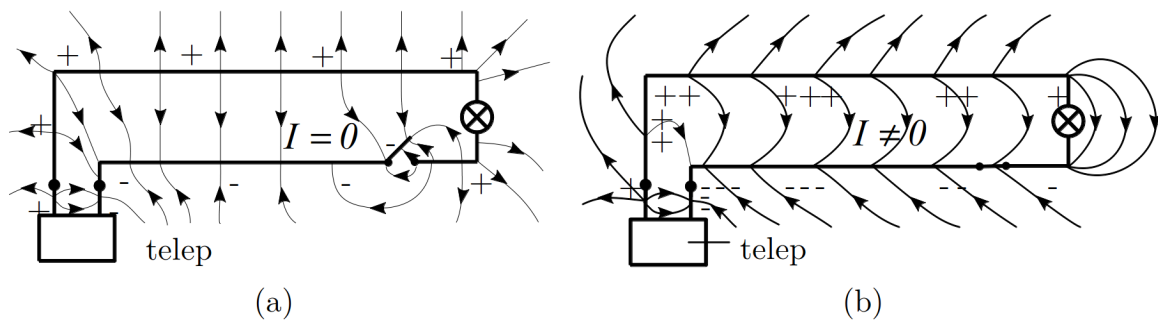
Az állandó áram fenntartásához a kondenzátor helyére tehát egy olyan eszközt kell elhelyezni, amely a negatív oldalra megérkező pozitív töltéseket visszaviszi a pozitív oldalra, ezzel fenntartja a potenciálkülönbséget, és egyúttal biztosítja, hogy a pozitív töltések újra körbemenjenek az anyagban. Ilyen eszközök léteznek, ezeket *áramforrásoknak*, *feszültségforrásoknak*, vagy *telepeknek* nevezik. Az áramforrás működésének alapelve a 3.1. (b) ábrán látható, ahol ismét pozitív töltéshordozókat tételeztünk fel. Az áramforrás a töltésmozgást akadályozó (az ábrán \mathbf{F}_{el} erőt kifejtő) elektromos erőtér (\mathbf{E}) ellenében *munkavégzés* útján a pozitív töltéseket az áramforrás belsejében visszaviszi a telep pozitív oldalára, és így az áram állandóan fennmarad. Az áramforrások működéséhez szükséges munka többféle folyamat segítségével biztosítható, leggyakrabban speciális kémiai reakcióból származik. Az áramforrások működésével később foglalkozunk.

3.1. Megjegyzés Az áramforrás jelenléte miatt a vezető környezetében elektromos erőtér jön létre. Ha nem folyik áram, akkor sztatikus elektromos erőtér alakul ki, ahol az erőtér erővonalai merőlegesek a vezető felületére, és a vezető belsejében nincs elektromos erőtér. Ha azonban a vezetőben a felületével párhuzamosan elektromos áram folyik, akkor a vezető belsejében kell lenni egy olyan elektromos térerősségnek, amelynek van a vezető felületével párhuzamos összetevője (3.2. ábra), hiszen a töltések éppen ennek hatására mozognak.



3.2. ábra. Elektromos térerősség egy árammal átjárt vezető belsejében és környezetében

Egy áramkörben kialakuló elektromos erővonalakat szemléltetik a 3.3. ábrák, amelyek közül az egyik az áramkör kikapcsolt ($I = 0$) állapotát ((a) ábra) mutatja, a másik ((b) ábra) pedig azt az esetet, amikor az áramkörben áram folyik ($I \neq 0$).



3.3. ábra. Elektromos térerősség egy kikapcsolt (a) és egy bekapcsolt (b) áramkör környezetében

3.1. Az elektromos áram leírása

Most – anélkül, hogy az egyes vezetési mechanizmusokat, az egyes anyagok vezetési tulajdonságait megvizsgálnánk – az elektromos áram általános leírására alkalmas mennyiségekkel, az elektromos áramra vonatkozó általános törvényekkel foglalkozunk.

Egyelőre azt tételezzük fel, hogy a töltéshordozó részecskék pozitív töltésűek, mert – történeti okok miatt – az áramra vonatkozó megállapodások is pozitív töltéshordozók esetére vonatkoznak.

Az áramirányra vonatkozó ilyen megállapodás látszólag problémát okozhat azokban az esetekben, amikor a töltéshordozó töltése negatív (ez a helyzet pl. a vezetőknél nevezett anyagokban, amelyekben az elektronok mozognak). A töltésmozgás hatása szempontjából azonban semmilyen probléma nem jelentkezik, mert elektromos erőterben a pozitív töltések a térerősséggel egy irányban, a negatív töltések pedig a térerősséggel szemben mozognak. Ha pl. az áram egy feltöltött kondenzátor két fegyverzetét összekötő vezetőben a „+” fegyverzetről a „–” felé folyik, akkor ez pozitív töltéshordozók esetén azt jelenti, hogy a kondenzátor kisül, hiszen a „+” fegyverzetről elmennek a pozitív töltések a „–” fegyverzetre, ahol semlegesítik a negatív töltéseket. Ha a töltéshordozók negatív töltésűek, akkor ugyanilyen áramirány esetén a negatív töltések a „–” fegyverzetről a „+” felé (tehát a „hivatalos” áramiránnyal szemben) mozognak, és ugyanezt eredményezik, vagyis a kondenzátor kisül.

Természetesen, ha kíváncsiak vagyunk az áramvezetés mechanizmusára és az anyag vezetési tulajdonságaira, akkor meg kell vizsgálni, hogy a valóságban milyen töltéshordozók, milyen módon mozognak.

3.1.1. Az áramerősség

Az áram közelítő jellemzésére használhatjuk a vezető keresztmetszetén egy irányban átfolyt töltés (ΔQ) és az átfolyási idő (Δt) hányadosát:

$$I \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Az így definiált I mennyiség a Δt időtartamra vonatkozó átlagos *elektromos áramerősség*.

Ha az áramerősséget egy adott időpillanatban akarjuk megadni, akkor az

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}, \quad (3.2)$$

mennyiséget használhatjuk, amit pillanatnyi elektromos áramerősségnek nevezünk. Ha az áramerősség időben nem változik, akkor az elektromos áramot *időben állandó*-, idegen szóval *stacionárius áramnak* nevezik. A definíció alapján az áramerősség SI-egysége: $1 \text{ C/s} = 1 \text{ amper} = 1 \text{ A}$ ¹.

Az áramerősség a keresztmetszetre vonatkozó átlagos mennyiség (a keresztmetszet különböző részein különböző lehet a töltésáramlás üteme). A keresztmetszeten belüli lokális töltésáramlás jellemzésére vezették be az áramsűrűséget, amelynek nagyságát közelítőleg egy az áramlás irányára merőleges ΔA_\perp nagyságú elemi felületelemen átfolyó ΔI áram és a felület hányadosa adja meg (3.4. (a) ábra):

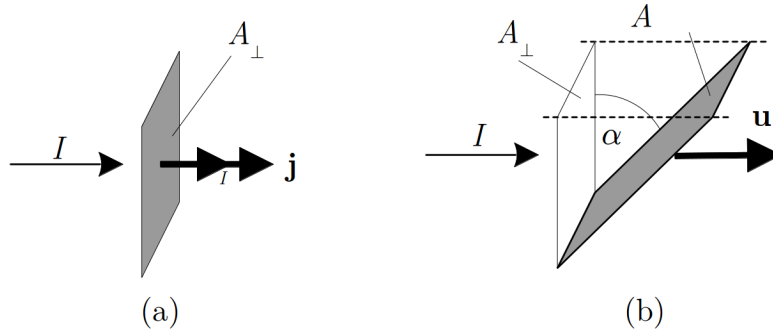
$$j \approx \frac{\Delta I}{\Delta A_\perp}. \quad (3.3)$$

¹André-Marie Ampère 1775–1836 francia fizikus tiszteletére

A felület egy pontjában az áramsűrűség pontos értékét a már ismert módon kapjuk:

$$j = \lim_{\Delta A_{\perp} \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A_{\perp}} = \frac{dI}{dA_{\perp}} \quad (3.4)$$

(az áramsűrűség számértéke: egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladt töltés). Az áramsűrűség SI-egysége: 1 A/m².



3.4. ábra. Az áramerősség és az áramsűrűség viszonya az utóbbira merőleges (a) illetve nem merőleges (b) felület esetén

Ha az áramsűrűséggel egyúttal az áram irányát is jellemezni akarjuk, akkor olyan vektorként definiálhatjuk, amelynek iránya az áramlás irányával egyezik meg (3.4. (a) ábra):

$$\mathbf{j} = j \mathbf{u}_I = \frac{dI}{dA_{\perp}} \mathbf{u}_I, \quad (3.5)$$

ahol \mathbf{u}_I az áram irányába – vagyis a pozitív töltések mozgásirányába – mutató egységvektor.

Az a tény, hogy annak idején az áram irányát a térerősséggel azonos irányban mozgó töltések – vagyis a pozitív töltések – mozgási irányaként definiálták, azzal a következménnyel jár, hogy ha a töltéshordozók negatív töltésűek (ez a helyzet pl. a fémekben), akkor az áram iránya ellentétes a töltéshordozók tényleges mozgási irányával.

Ha a felületelem nem merőleges az áramlás irányára (3.4. (b) ábra), akkor $\Delta A_{\perp} = \Delta A \cos \alpha$ miatt

$$j \approx \frac{\Delta I}{\Delta A \cos \alpha}, \text{ illetve } j = \frac{dI}{dA \cos \alpha}. \quad (3.6)$$

Ugyanez vektori alakban

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dA \cos \alpha} \mathbf{u}_I. \quad (3.7)$$

Ennek alapján egy ΔA felületelemen átfolyó ΔI áram kifejezhető az áramsűrűség nagyságával is:

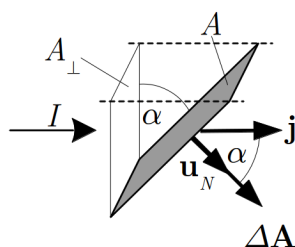
$$\Delta I = j \Delta A \cos \alpha. \quad (3.8)$$

Ezzel egy véges felületen átfolyó teljes áram is megadható, ha az egyes felületelemeken átfolyó ΔI áramokat összeadjuk:

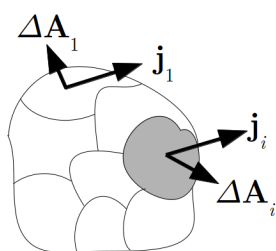
$$I \approx \sum_i j_i \Delta A_i \cos \alpha_i \quad (3.9)$$

Ha bevezetjük a felületelemre merőleges $\Delta \mathbf{A} = \Delta A \mathbf{u}_N$ felületvektort (3.5. ábra), akkor látható, hogy az α szög éppen a felületvektor és az áramsűrűség-vektor által bezárt szög. Ezért az elemi felületen átfolyó áram e két vektor skaláris szorzataként is felírható:

$$\Delta I = \mathbf{j} \Delta \mathbf{A}. \quad (3.10)$$



3.5. ábra. Az áramerősség számítása egy kis felületelem esetén



3.6. ábra. Az áramerősség számítása egy véges felület esetén

Véges A felületen átfolyó teljes áram ennek alapján (3.6. ábra):

$$I = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{j}_i \Delta \mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{j} d\mathbf{A}. \quad (3.11)$$

A fenti integrált egy zárt felületre kiszámolva megkapjuk a felület által körbezárt térfogatból egységnyi idő alatt kiáramló töltés mennyiségét. (Az 1. fejezetben a Gauss-törvény tárgyalásánál megismert konvenció szerint zárt felület esetén az elemi felületvektorok kifelé mutatnak, így a kifelé folyó áram pozitív, a befelé folyó pedig negatív előjellel szerepel az integrálban.) Ezzel felírhatjuk az adott felület által körbezárt töltés időbeli változását:

$$\frac{dQ_A}{dt} = - \oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A}. \quad (3.12)$$

A fenti egyenlet a töltésmegmaradás alapvető törvényét fejezi ki: elektromos töltést kelteni és eltüntetni a tapasztalat szerint nem lehet, egy adott térfogatban a töltés mennyisége csak az abba befolyó és kifolyó áramok következtében változhat. Megjegyzendő, hogy ez az egyenlet speciális esete egy általános törvénynek, amely valamilyen mennyiség (pl. tömeg, töltés, energia, stb.) egyik helyről a másikra áramlik. Az anyagmennyiség megmaradását kifejező egyenletet általános esetben kontinuitási egyenletnek nevezik. A kontinuitási egyenlet áramlástan alkalmazásával már a Kísérleti Fizika I. tárgyban találkoztunk.

Az adott térfogatban lévő töltés értékét helyettesíthetjük a töltéssűrűség térfogatra vett integráljával. Így a következőt kapjuk:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} = - \oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A}. \quad (3.13)$$

Az egyenlet jobb oldalát a Gauss–Osztrogradszkij integráltétel (ld. Matematikai összefoglaló, ?? fejezet) segítségével szintén térfogati integrállá alakíthatjuk:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = - \oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A} = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (3.14)$$

E két térfogati integrál értéke akkor és csak akkor lehet minden V térfogatra egyenlő, ha az integrandusok is megegyeznek, azaz:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (3.15)$$

Ez az egyenlet a töltésmegmaradás törvényét fejezi ki differenciális formában: az áramlási tér minden pontjában a töltéssűrűség időegység alatt bekövetkezett megváltozása megegyezik az elektromos áram forrássűrűségének mínusz egyszeresével.

3.1.2. Ohm törvény

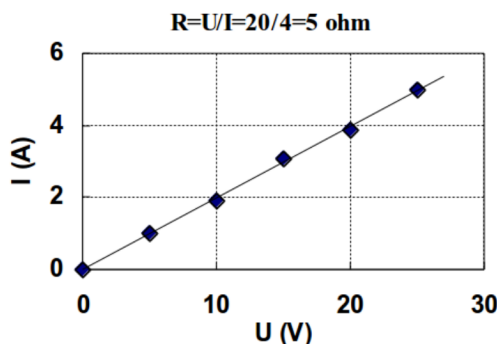
Az áramot okozó U potenciálkülönbség (feszültség) és az I áramerősség között a mérések szerint (3.7. ábra) lineáris összefüggés van:

$$I \sim U, \quad (3.16)$$

szokásos alakjában

$$I = \frac{1}{R}U, \text{ illetve } U = IR. \quad (3.17)$$

Itt R adott vezető és adott körülmények között állandó, értéke az $I - U$ grafikonból meghatározható. Az összefüggés Ohm-törvény néven ismert². Az R jellemző a vezető elektromos ellenállása, ami függ az anyagi minőségtől, a vezető geometriai adataitól és a körülményektől (pl. hőmérséklet). A definíció alapján az ellenállás egysége: $1 \text{ V/A} = 1 \text{ ohm} = 1 \Omega$.



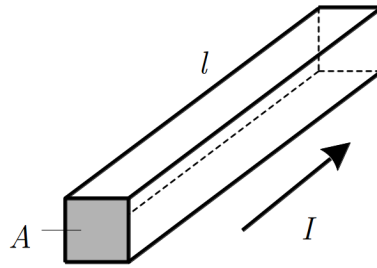
3.7. ábra. Lineáris összefüggés az áramot okozó potenciálkülönbség és az áramerősség között: Ohm törvény

Az ellenállás elnevezés onnan származik, hogy értékének növelésekor – egyébként azonos körülmények között – a vezetőn folyó áram csökken, vagyis a vezetőnek az árammal szemben tanúsított „ellenállása” nő.

Egyenletes keresztmetszetű vezető (3.8. ábra) ellenállása Ohm mérései szerint arányos a vezető hosszával (l) és fordítva arányos a vezető keresztmetszetével (A):

$$R \sim \frac{l}{A}. \quad (3.18)$$

²Georg Simon Ohm 1789-1854, német fizikus



3.8. ábra. Egyenletes keresztmetszetű vezető ellenállása Ohm mérései szerint arányos a vezető hosszával fordítva arányos a vezető keresztmetszetével

Az arányossági tényezőt ρ -val jelölve, az ellenállás

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (3.19)$$

(néha ezt a törvényt is Ohm-törvénynek nevezik).

A ρ arányossági tényező a vezető geometriai adataitól már nem függ, csak a vezető anyagától. Ezt az anyagjellemzőt a vezető *fajlagos ellenállásának* nevezik (SI-egysége: $1 \text{ ohm} \cdot \text{m}$).

Hasáb alakú vezető méreteit és ellenállását megmérve, fajlagos ellenállása kiszámítható:

$$\rho = \frac{A}{l} R. \quad (3.20)$$

Az Ohm-törvénynek egy másik alakját kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy egyenletes A keresztmetszetű, l hosszúságú vezető esetén a vezető végei közti feszültség a térerősséggel, az áram pedig az áramsűrűséggel az alábbi módon fejezhető ki:

$$U = El \text{ és } I = jA. \quad (3.21)$$

Emiatt az $U = IR$ Ohm-törvény alapján

$$j = \frac{l}{RA} E = \frac{1}{\rho} E. \quad (3.22)$$

Bevezetve a $\gamma = \frac{1}{\rho}$ jelölést a

$$j = \gamma E \quad (3.23)$$

összefüggést kapjuk.

A fajlagos ellenállás reciprokaként definiált γ szintén csak a vezető anyagi minőségétől függ; ez a vezető *fajlagos vezetőképessége* (egysége $1/(\text{ohm} \cdot \text{m}) = \text{ohm}^{-1} \text{m}^{-1}$). Az elnevezés azzal kapcsolatos, hogy ha γ nagy, akkor az anyag jól vezet (ellenállása kicsi).

A fajlagos vezetőképességgel (rövidebben: a vezetőképességgel) az áramsűrűség és térerősség összefüggése vektori alakban

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (3.24)$$

amit *differentiális Ohm-törvénynek* neveznek. Az Ohm-törvénynek ez az alakja – amit hasáb alakú vezetónél vezettünk le – általánosabban is érvényes: egy vezető tetszőleges helyén megadja a térerősség és az áramsűrűség összefüggését (lokális törvény).

Az Ohm-törvény csak akkor teljesül, ha a vezetés során a fajlagos vezetőképesség nem változik. Ezt azért fontos megjegyezni, mert a vezetőképesség általában függ a körülményektől (pl. a hőmérséklettől). Így pl., ha egy vezetőben nagy áram folyik, akkor felmelegszik, és megváltozik a vezetőképessége, ezért az $I \Leftrightarrow U$ összefüggés nem lesz lineáris (a mérés során az összefüggés különböző szakaszai különböző hőmérsékletekhez tartoznak). A törvény vezetőkben állandó körülmények között általában jól teljesül, de vannak anyagok (pl. gázok), amelyekben már viszonylag kis térerősség esetén is eltéréseket tapasztaltak a törvénytől. Erről a vezetési mechanizmusok tárgyalásánál lesz szó.

Az Ohm-törvénnyel kapcsolatban még egy dolgot érdemes megjegyezni. A törvény a fenti alakjában szigorúan véve csak izotróp anyagokban érvényes, ahol a vezetési tulajdonságok az áram irányától nem függenek. Ilyenkor az áramsűrűség a térerősséggel egyirányú. Anizotróp anyagokban ez nem mindig teljesül, és így a $\mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{E}$ összefüggés nem adható meg egyszerű arányosság formájában. A legegyszerűbb esetben az összefüggés továbbra is lineáris, de csak a bonyolultabb

$$\begin{aligned} j_x &= \gamma_{xx} E_x + \gamma_{xy} E_y + \gamma_{xz} E_z \\ j_y &= \gamma_{yx} E_x + \gamma_{yy} E_y + \gamma_{yz} E_z \\ j_z &= \gamma_{zx} E_x + \gamma_{zy} E_y + \gamma_{zz} E_z \end{aligned} \quad (3.25)$$

alakban írható fel, ahol a $\gamma_{xx} \dots \gamma_{zz}$ mennyiségek az anyag vezetési tulajdonságait (többek között annak irányfüggését) jellemző anyagállandók. A 9 mennyiségből álló jellemzőt *vezetőképességi tenzornak* nevezik.

3.2. Az elektromos áram molekuláris modellje

Tapasztalati tény, hogy állandó feszültség (tehát állandó elektromos térerősség) állandó áramot hoz létre. Ez azt sugallja, hogy a töltéshordozók valamilyen okból állandó átlagos sebességgel mozognak³. Vizsgáljuk meg most, hogy az áramerősségre milyen

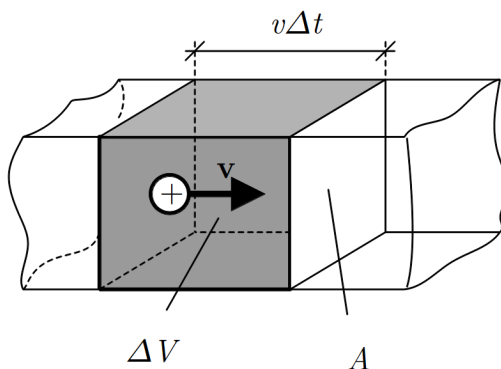
³ Ebben a modellben az önálló részecskéknak képzelt töltéshordozók – mint minden anyagi részecske – hőmozgást is végeznek, ez a mozgás azonban rendezetlen, a részecskék átlagos haladási sebessége nulla.

összefüggést kapunk, ha azt a töltéshordozók mozgásából kiindulva, molekuláris adatokkal próbáljuk kiszámítani.

A v sebességgel mozgó töltéshordozók közül egy A felületen Δt idő alatt azok haladnak át, amelyek benne vannak a

$$\Delta V = Av\Delta t \quad (3.26)$$

térfogatban (3.9. ábra).



3.9. ábra. A vezető keresztmetszetén Δt idő alatt áthaladó töltés arányos a sötétített térfogattal

Ha a töltéshordozók töltése q , térfogati darabsűrűsége $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ (n számértéke az egységnyi térfogatban lévő töltéshordozók számával egyenlő), akkor az áthaladt töltés

$$\Delta Q = q\Delta N = qn\Delta V = qnAv\Delta t. \quad (3.27)$$

Az áramerősség ennek alapján

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv. \quad (3.28)$$

Eszerint az áramerősség csak akkor lehet állandó, ha a töltéshordozók sebessége állandó.

Az áramsűrűség nagysága a molekuláris adatokkal kifejezve

$$j = \frac{I}{A} = qnv. \quad (3.29)$$

Az itt feltételezett \mathbf{v} sebesség az erőtér hatására létrejött rendezett mozgás sebessége, amit gyakran *driftsebességnek* neveznek. A driftsebesség szuperponálódik a rendszertelen hőmozgás sebességére, vagyis a részecskék továbbra is hőmozgást végeznek, de egyidejűleg mindannyian az erőtér által meghatározott irányban is mozognak.

Mivel pozitív töltéshordozók esetén az áram iránya a töltéshordozók sebességének irányával egyezik, az áramsűrűség-vektorra azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}. \quad (3.30)$$

(Itt az áramirány definíciója miatt a \mathbf{v} sebességvektor iránya akkor is a pozitív töltések mozgásirányával egyezik, ha a töltéshordozók negatív töltésűek, vagyis éppen az ellenkező irányban mozognak.)

Ha ezt az összefüggést összehasonlítjuk a korábban kapott

$$\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E} \quad (3.31)$$

differentiális Ohm-törvénnyel, akkor láthatjuk, hogy teljesülni kell a

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{E} \quad (3.32)$$

összefüggésnek, vagyis az Ohm-törvény csak akkor teljesülhet, ha a töltések átlagsebessége a térerősséggel arányos.

A fenti összefüggésekből ki lehet számítani a töltéshordozók átlagos sebességét, amire meglepően kis (nagyságrendben 0,1 mm/s) értéket kapunk.

A fenti tapasztalatok pontos magyarázata a klasszikus fizika törvényeivel nem adható meg, de a valóságot közelítő, szemléletes képet kaphatunk egy egyszerű *klasszikus modell* segítségével. A modell szerint a töltések mozgását valamilyen fékezőerő akadályozza, ami hasonló a „viszkózus közegben” mozgó testre ható közegellenálláshoz. Egy q töltésre az elektromos erőter által kifejtett $\mathbf{F}_{\text{el}} = q\mathbf{E}$ erő mellett eszerint egy olyan fékezőerő lép fel, amely a sebességével arányos, és azzal ellentétes irányú: $\mathbf{F}_{\text{fék}} = -k\mathbf{v}$. Ekkor a mozgásegyenlet

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{el}} + \mathbf{F}_{\text{fék}} = q\mathbf{E} - k\mathbf{v}. \quad (3.33)$$

A fékezőerő növekvő sebességgel nő, így előbb-utóbb eléri az elektromos erőter által kifejtett erő értékét. Ekkor az eredő erő – és így a gyorsulás is – nulla lesz, és a mozgásegyenletből a kialakult állandó végsebesség (v_∞) megkapható:

$$q\mathbf{E} - k\mathbf{v}_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_\infty = \frac{q}{k}\mathbf{E}. \quad (3.34)$$

Itt k a töltéshordozók mozgási mechanizmusától függő állandó, amely a fenti egyszerű modellből nem határozható meg.

A töltéshordozókra felírt mozgásegyenlet általában is megoldható, hiszen kicsit átrendezve a \mathbf{v} sebességre egy differenciálegyenletet kapunk

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{k}{m}\mathbf{v} = \frac{q}{m}\mathbf{E}, \quad (3.35)$$

amelynek megoldása $\mathbf{v}(0) = 0$ kezdeti feltétellel (a töltések nyugalomból indulnak)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{k} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{k}{m}t \right\} \right). \quad (3.36)$$

A töltéshordozók sebessége az elektromos erőter bekapcsolása után exponenciálisan nő. Az állandósult állapot beállításának sebességét az exponensben szereplő k/m hányados szabja meg. Jó vezetőkben a sebesség igen rövid idő (nagyságrendben 10^{-10} s) alatt – gyakorlatilag a feszültség bekapcsolása után azonnal – eléri az állandósult értékét. Az időfüggő megoldásból természetesen ugyanazt kapjuk, mint a korábbi megfontolásból: állandósult állapotban, vagyis a $t \rightarrow \infty$ esetben $\mathbf{v}_\infty = \frac{q}{k}\mathbf{E}$.

A „viszkózus” modell a valóságos viszonyokat nagyon leegyszerűsíti, de valóban azt a – tapasztalat által megerősített – eredményt adja, hogy a töltések végsebessége (ezt a továbbiakban \mathbf{v} -vel jelöljük) arányos a térerősséggel: $\mathbf{v} \sim \mathbf{E}$, és a mozgási sebesség állandó, ha a térerősség (és így a potenciálkülönbség is) állandó. Az arányossági tényező ebből a modellből nem kapható meg, azt mérésel határozhatjuk meg. Ha a szokásoknak megfelelően μ -vel jelöljük, akkor az összefüggést az általánosan használt

$$\mathbf{v} = \mu\mathbf{E} \quad (3.37)$$

alakba írhatjuk. A μ arányossági tényezőt a töltéshordozó *mozgékonyságának* nevezik (minél nagyobb a μ értéke, annál gyorsabban mozog a töltéshordozó adott térerősség hatására).

Az áramsűrűség ennek megfelelően a

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} = qn\mu\mathbf{E} \quad (3.38)$$

alakba írható. Ez az Ohm-törvény molekuláris adatokkal kifejezett alakja. Ezt összevetve a $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ összefüggéssel, azt kapjuk, hogy

$$\gamma = qn\mu, \quad (3.39)$$

vagyis az anyagok *vezetőképességét* a benne lévő töltéshordozók töltése, a töltéshordozók térfogati sűrűsége és a töltéshordozók mozgékonyága szabja meg.

3.3. Hőfejlődés árammal átjárt vezetőkben

A töltéshordozók az elektromos erőter által folyamatosan végzett munka ellenére állandó átlagsebességgel mozognak, vagyis az erőter által végzett munka a vezetőkben mechanikai értelemben eltűnik, a vezető belső energiáját növeli („hővé alakul”)⁴.

⁴ Ezt a munkát az elektromos térerősségnek a töltések mozgásirányával párhuzamos komponense végzi, ami hasáb alakú vezető esetén a térerősségnek a vezető felületével párhuzamos, tangenciális összetevője (a normális összetevő munkája nulla, mert a töltések elmozdulása merőleges erre a térerősség-komponensre).

Mivel egy ΔQ nagyságú töltésnek U potenciálkülönbségű helyek közötti átmeneténél az elektromos erőter munkája

$$\Delta W = \Delta Q U, \quad (3.40)$$

az átfolyt töltés pedig az áramerősséggel kifejezhető ($\Delta Q = I \Delta t$), a Δt idő alatt fejlődő hő

$$\Delta W = I U \Delta t. \quad (3.41)$$

Egy hosszabb t idő alatt fejlődő hőt a

$$W = I U t \quad (3.42)$$

összefüggés adja meg. Ez a *Joule-törvény*, a fejlődő hőt pedig *Joule-hőnek* nevezik.

A hővé alakult teljesítmény ennek megfelelően

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = I U. \quad (3.43)$$

A hővé alakult elektromos munka illetve teljesítmény a *molekuláris modell*ből is kiszámítható, ha figyelembe vesszük, hogy egy töltéshordozó mozgása során az elektromos erőter teljesítménye

$$P_1 = F v = q E v. \quad (3.44)$$

Egy V térfogatú vezetőben egyidejűleg nV számú töltéshordozó mozog (n a töltéshordozók térfogati darabsűrűsége), így az összes teljesítmény:

$$P = nV P_1 = n q v E A l = j E A l = I U. \quad (3.45)$$

Itt felhasználtuk, hogy az l hosszúságú, A keresztmetszetű vezető térfogata $V = A \cdot l$.

A teljes munka (illetve a belső energia növekménye, szokásos kifejezéssel a keletkezett hő) t idő alatt:

$$W = P t = I U t. \quad (3.46)$$

Ami megfelel a korábban más úton kapott *Joule-törvénynek*.

A teljesítmény kifejezhető lokális mennyiségekkel is:

$$P = nV P_1 = n q v E V = n q \mu E^2 V = \gamma E^2 V. \quad (3.47)$$

Az egységnyi térfogatban „elveszett” teljesítmény ennek alapján

$$p = \frac{P}{V} = \gamma E^2 = j E. \quad (3.48)$$

3.4. Áramvezetési mechanizmusok különböző anyagokban

A molekuláris modellből a vezetőképességre kapott összefüggés

$$\gamma = qn\mu. \quad (3.49)$$

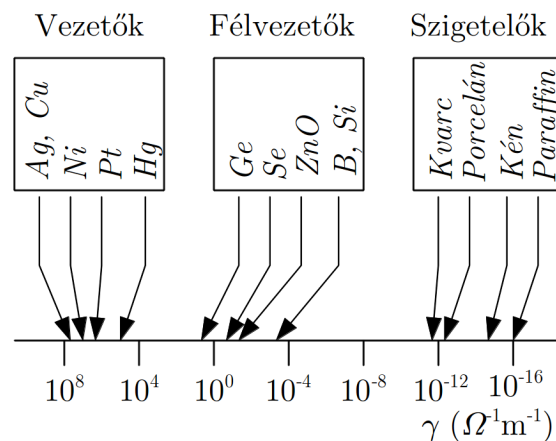
Eszerint egy anyagban a vezetőképességet a töltéshordozó részecskék töltése (q), térfogati darabsűrűsége (n) és mozgékonyasága (μ) szabja meg.

A különböző anyagokban különböző típusú töltéshordozók vannak, amelyek különböző mechanizmussal mozognak, és a töltéshordozók mennyisége is különböző, így a fenti töltéshordozó-jellemzők igen eltérőek lehetnek. Ez az oka annak, hogy az anyagok vezetőképességei egy kb. 25 nagyságrendet átfogó tartományba esnek (γ értéke nagyjából a $10^{-17} - 10^8 \text{ ohm}^{-1}\text{m}^{-1}$ értékek között van).

Mivel a vezetési tulajdonságok szoros kapcsolatban vannak az anyag halmazállapotával, a vezetőképesség vizsgálatánál célszerű a halmazállapot szerinti felosztást alkalmazni.

3.4.1. Elektromos vezetés szilárd anyagokban

A vezetési tulajdonságok a szilárd anyagok esetén is nagyon eltérőek lehetnek. Erről ad áttekintést a 3.10. ábra, amelyen az anyagokat a szokásos csoportosítás szerint (vezetők, félvezetők, szigetelők) tüntettük fel. A vezetőképességek szobahőmérsékletre vonatkoznak.



3.10. ábra. Különböző anyagok vezetőképessége és csoportosításuk

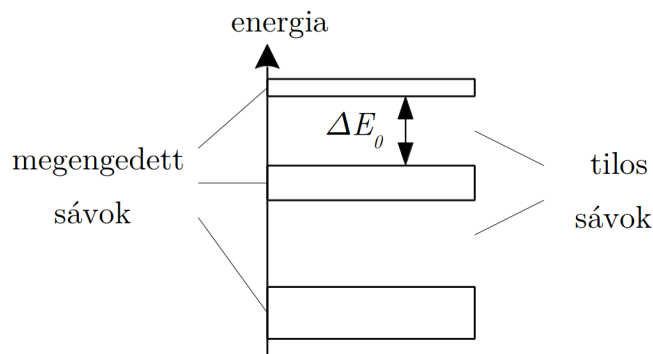
A szilárd anyagok vezetési mechanizmusát alapvetően befolyásolja az, hogy kristályos

szerkezetűek-e vagy nem. Először a kristályos anyagok esetét vizsgáljuk meg, amelyeknek vezetőképessége szintén igen különböző lehet (pl. *Ag* és *kvarc*).

A vezetőképességben fennálló ilyen eltéréseket a klasszikus fizika segítségével nem sikerült értelmezni, ehhez a mikrorészecskék (ebben az esetben az atomokban lévő elektronok) sajátos viselkedését leíró kvantumelméletet kell segítségül hívni.

A kvantumelméletnek azt a részterületét, amely az elektronoknak kristályos szilárd anyagokban való viselkedésével foglalkozik a szilárd anyagok *sávelméletének* nevezik. A sávelmélet elnevezés onnan származik, hogy az elmélet szerint az ilyen anyagokban az elektronok nem rendelkezhetnek akármilyen energiával, hanem energiájuk csak az anyagtól függő, megengedett energiatartományokba, más néven *energiasávokba* eshet. Ezeket a tartományokat *megengedett energiasávoknak* nevezik. Az elektronok a sávok közötti energiatartományba, az ún. *tilos energiasávba* eső energiát nem vehetnek fel (3.11. ábra). A *tilos sáv szélessége* a vezetés szempontjából fontos szerepet játszik, jelölésére a ΔE_0 szimbólumot szokták használni (egy tilos sáv szélességét az ábrán bejelöltük).

A sávelmélet szerint az egyes sávokban meghatározott számú energiahely van, vagyis egy energiasávba eső energiával csak meghatározott számú elektron rendelkezhet. Az elektronok először a legalacsonyabb energiájú sávban lévő energiahelyekre kerülnek. Ha ebben a sávban már minden hely foglalt (betöltött sáv), és az atomokban további elektronok is vannak, azok már csak a következő, magasabb energiájú megengedett sávban foglalhatnak helyet.



3.11. ábra. Szilárd testek sávszerkezete

A legmagasabb energiájú, betöltött energiahelyeket tartalmazó sáv lehet teljesen betöltött vagy részben betöltött. Az, hogy a megengedett sávok közül mennyi lesz betöltött, és a legmagasabb energiájú sáv is betöltött lesz vagy csak részben betöltött, attól függ, hogy az anyagot alkotó atomokban mennyi elektron van (azaz mennyi az alkotó atom rendszáma), vagyis a sávszerkezet a különböző anyagokban eltérő.

A fenti sztatikus képből még nem derül ki, hogy a sávok létezésének mi a szerepe a vezetésben, ezért most ezt vizsgáljuk meg.

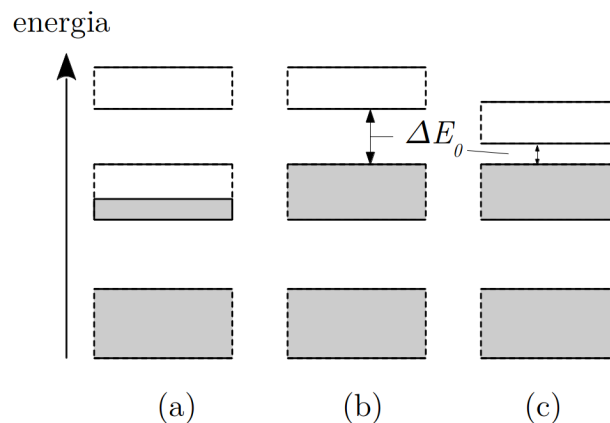
Ha az anyagot elektromos erőterbe tesszük, akkor az elektronokra a térerősséggel ellentétes irányú erő hat, amely igyekszik az elektronokat mozgásba hozni. Ez azzal jár, hogy az elektronok energiája megnő, hiszen mozgási energiára tesznek szert. Ha az anyagban van egy olyan megengedett energiasáv, ahol betöltetlen energiahelyek vannak, akkor az elektron energiája a sávon belül nőni tud, ezért az erőter hatására valóban mozgásba jön: az anyagban elektromos áram jön létre, amelyet az elektronok mozgása okoz.

Ha azonban a sáv szerkezet olyan, hogy csak betöltött energiasávok vannak, akkor az elektron a sávon belül nem képes az energiáját növelni (nincs magasabb betöltetlen energiahely), vagyis az elektromos erőter nem tudja mozgásba hozni. Ilyenkor az elektronok az anyagban nem tudnak elektromos áramot létrehozni. Ebben az esetben az elektronok gyorsítására csak az a lehetőség marad, hogy a tilos sáv szélességének megfelelő energiát kapnak az elektromos erőterből, amivel a következő (üres) megengedett sávba kerülve mozgásképpé válnak. Normális körülmények között azonban az elektromos erőter ilyen nagy energiát nem képes az elektronnak átadni.

Összefoglalva: *az elektronokkal történő vezetés szempontjából alapvető jelentőségű, hogy legyen egy olyan megengedett energiasáv, amelyik csak részben van betöltve.*

Ezek után nézzük meg, hogy a különböző anyagokban milyen energiasávok jöhetnek létre.

A 3.12. (a) ábra azt az esetet mutatja, amikor a legfelső, elektronokat tartalmazó sáv csak részben van betöltve. Ekkor – amint azt már megtárgyaltuk – elektromos erőterben az elektronok mozogni tudnak, elektromos vezetés jön létre. Az ilyen sáv szerkezettel rendelkező anyagok a *vezetők*. Ilyen sáv szerkezete van a legtöbb fémnek, ezért a fémek általában jó vezetők.

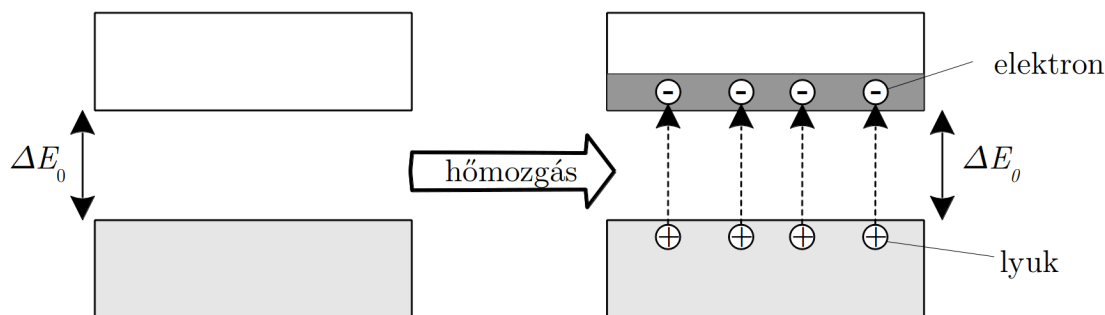


3.12. ábra. Vezetők (a), szigetelők (b) és félvezetők (c) sáv szerkezete, (a sávok betöltöttségét a sötétítés mutatja)

A 3.12. (b) ábrán azt az esetet látjuk, amikor a legfelső, elektronokat tartalmazó sáv

teljesen betöltött, a tilos sáv szélessége nagy, ezért az elektronok normális körülmények között nem tudnak áramot létrehozni. Az ilyen sávszerkezettel rendelkező anyagok a *szigetelők*. A kristályos szilárd anyagok közül ilyen pl. a gyémánt, a kvarc, a kősó ($NaCl$).

A 3.12. (c) ábrán is egy szigetelő sávszerkezete látható, de ebben az esetben a tilos sáv ΔE_0 szélessége jóval kisebb, mint a (b) ábrán. Ennek a ténynek nagy jelentősége lehet: ha a tilos sáv szélessége olyan kicsi, hogy a betöltött sávból az üres sávba az atomok termikus mozgása („hőmozgás”) jelentős számú elektront tud feljuttatni (vagyis a termikus mozgás átlagos energiája közel akkora, mint az elektronok átmenetéhez szükséges ΔE_0 energia), akkor az eredetileg üres energiasáv részben betöltötté válik (3.13. ábra), ezért az anyagban elektromos áram jöhet létre. Az ilyen, szigetelő sávszerkezetű, de a hőmozgás révén vezetésre képes anyagok a *félvezetők*. A legismertebb félvezető anyagok a szilícium (Si) és a germánium (Ge).



3.13. ábra. Félvezetők vezetési mechanizmusa

A félvezetőkben a töltéshordozók elektronok. A vezetésben azonban nem csak az eredetileg üres sávba jutott elektronok vesznek részt, hanem az eredetileg betöltött sávban lévők is. Ennek az az oka, hogy az innen eltávozó elektronok energiaállapotai felszabadulnak, így itt is lehetőség van az energia változására.

A megüresedett elektronállapotok segítségével mozgó elektronok árama úgy is felfogható, mint az elektronok hiánya által létrehozott pozitív töltések – az ún. *lyukak* – mozgása által létrehozott áram. A lyukak az elektronokkal ellentétes irányban mozognak, de töltésük is ellentétes az elektronokéval, így az áram iránya ugyanaz, mint az elektronok mozgása által okozott áramé. A töltésmozgás ilyen felfogása megkönnyíti a félvezetők vezetésének értelmezését. Eszerint a félvezetőkben az áramot elektronok és lyukak hozzák létre.

A szigetelőkben a tilos sáv szélessége olyan nagy, hogy – nagyon magas hőmérsékletektől eltekintve – a hőmozgás csak nagyon kevés elektront képes mozgásképes állapotba hozni. A nagyon kis vezetőképességű anyagokban – ezeket nevezzük szigetelőknek – a

vezetést ez a kis számú mozgásképes elektron (pl. gyémánt), és az anyagban esetleg jelen lévő ionok (pl. ionkristályok) mozgása hozza létre.

Ahhoz, hogy a vezetőképességnek a különböző körülményektől való függését megértjük, a vezetőképességet megadó

$$\gamma = qn\mu \quad (3.50)$$

összefüggésben szereplő mennyiségeket (a töltéshordozó töltését (q), térfogati darabsűrűségét (n) és mozgékonyágát (μ)), illetve ezeknek a körülményektől (pl. a hőmérséklettől) való függését kell megvizsgálnunk. Most ennek alapján röviden áttekintjük, hogy a különböző típusú kristályos szilárd anyagok vezetőképessége hogyan alakul különböző körülmények között.

A szilárd halmazállapotú vezetők gyakorlatilag a fémekkel azonosak. Ezekben az anyagokban az atomi elektronok egy – az atom elektronszerkezete által meghatározott – része az anyagban gyakorlatilag szabadon elmozdulhat. A vezetőkben a töltéshordozók negatív töltésű elektronok, töltésük nagysága a természeti állandónak számító elemi töltés (ez definíció szerint éppen az elektron töltése).

A vezetőképességet a $\gamma = qn\mu$ összefüggés adja meg. Mivel egy adott fémbe a töltéshordozók töltése (q) és a szabad elektronok darabsűrűsége (n) is adott, a vezetőképesség a körülményektől gyakorlatilag csak a mozgékonyágon (μ) keresztül függ.

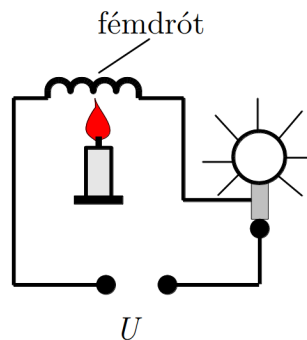
A mozgékonyág meghatározásához az elektronok mozgásának ismerete szükséges, ami kristályos szilárd anyagokban a klasszikus fizikai modellek alapján nem érthető meg, ehhez a kvantumelméletet kell segítségül hívni. Erről annyit kell tudnunk, hogy az elektronok egy tökéletes kristályrácsban (ahol minden atom a tökéletes kristályrácsnak megfelelő helyén van) ellenállás nélkül tudnának mozogni: egy tökéletesen rendezett – mozgásképes elektronokat is tartalmazó – kristály ellenállása nulla lenne. Ha azonban a kristályrácsban rendellenességek vannak (pl. valahol hiányzik egy atom vagy egy atomot idegen atom helyettesít), akkor az elektron mozgása nehezebbé válik, mozgékonyága lecsökken. Ugyanilyen hatást vált ki az is, hogy a mindig jelen lévő hőmozgás miatt az atomok rezegnek az egyensúlyi helyzetük körül, vagyis többnyire nincsenek a tökéletes rácsnak megfelelő helyükön. Röviden szólva: *a kristályrács minden rendezetlensége csökkenti az elektronok mozgékonyágát* és így növeli a vizsgált anyag elektromos ellenállását.

A mozgékonyásgról mondottak alapján érthető meg az a tapasztalat, hogy egy idegen anyaggal szennyezett fém vezetőképessége kisebb (ellenállása nagyobb), mint a tiszta fémé: szennyezés=rendezetlenség $\Rightarrow \mu$ csökken $\Rightarrow \gamma$ csökken \Rightarrow ellenállás nő.

Kísérlet: Vezető ellenállásának hőmérsékletfüggése

Egy feszültségforrással sorbakapcsolunk egy izzólámpát és egy vezetóból készült drótspirált (3.14. ábra). A feszültséget úgy állítjuk be, hogy az izzólámpa világít, vagyis a rajta átfolyó áram elég nagy a felizzításához. Ezután a drótspirált gázlánggal melegíteni kezdjük. Az izzólámpa fénye fokozatosan

csökken, majd teljesen kialszik. Ez azt mutatja, hogy az áramkörben az áram lecsökkent, ami csak úgy értelmezhető, hogy a hőmérséklet emelkedésekor a vezető ellenállása növekszik.



3.14. ábra. A vezetők ellenállása változik a hőmérséklet függvényében



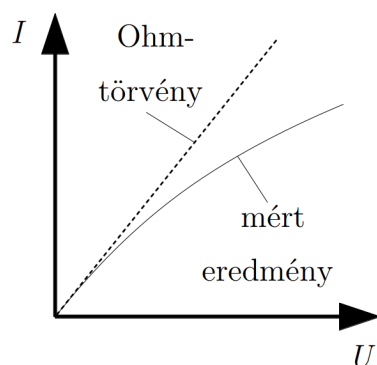
Kísérlet: Izzólámpa feszültség-áram karakterisztikájának mérése

Mérjük meg egy izzólámpa esetén az áramerősség (I) és a feszültség (U) összefüggését. Azt tapasztaljuk, hogy az Ohm-törvény nem teljesül, mert lineáris összefüggés helyett egy, a feszültség növekedésével csökkenő meredekségű görbét kapunk (a görbe jellegét a 3.15. ábra mutatja). Az ok az, hogy a feszültség növekedésekor az izzószálon melegszik, nő az ellenállása, ezért az áram kisebb, mint a kezdeti (hideg) ellenállás alapján várható érték (szaggatott vonal).



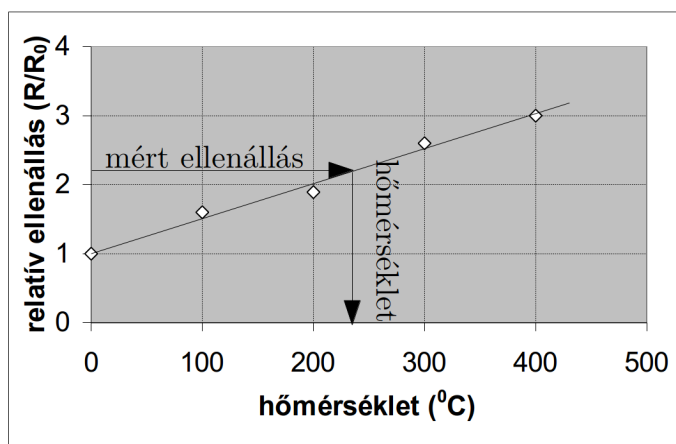
Egy másik kísérleti tapasztalat az, hogy a fémek vezetőképessége a hőmérséklet növekedésekor csökken (az ellenállás nő). Ennek értelmezése ugyancsak a fenti elmélet segítségével adható meg. A hőmérséklet emelkedésével ugyanis a hőmozgás egyre intenzívebbé válik, a kristályrácsban az egyes atomok pillanatnyi helyzete egyre távolabb van az ideális helyzettől, a rendezetlenség a rácsban nő: hőmérsékletemelkedés=növekvő rendezetlenség $\Rightarrow \mu$ csökken $\Rightarrow \gamma$ csökken \Rightarrow ellenállás nő.

A fémek ellenállásának hőmérséklettől való függése felhasználható hőmérséklet-mérésre. Az erre szolgáló speciális, kisméretű fém-ellenállást ellenálláshőmérőnek nevezik. Ha az ellenálláshőmérő fém-ellenállásának hőmérsékletfüggését ismert hőmérsékleteken végzett



3.15. ábra. Izzólámpa feszültség-áram karakterisztikája

ellenállásméréssel egyszer kimérjük (hitelesítés), akkor egy hely ismeretlen hőmérséklete az ellenálláshőmérő odahelyezése után az ellenállásának mérésével meghatározható. Az eljárást egyszerűsíti, hogy a fémek ellenállásának hőmérsékletfüggése elég széles hőmérséklet-tartományban jó közelítéssel lineáris. Ilyen hőmérsékletfüggést mutat a 3.16. ábra (R az aktuális hőmérsékleten R_0 a 0°C -on mért ellenállás).



3.16. ábra. Vezető ellenállásának hőmérsékletfüggése

A félvezetők esetén a helyzet kicsit bonyolultabb. Itt ugyanis a mozgékonyosság (γ) mellett a töltéshordozók koncentrációja (n) sem eleve meghatározott.

A tiszta félvezetőkben a mozgásképes töltéshordozók úgy jönnek létre, hogy a teljesen betöltött sávból a hőmozgás segítségével elektronok kerülnek a magasabb energiájú, eredetileg üres energiasávba. Ez a folyamat annál több mozgásképes töltéshordozót ered-

ményez, minél magasabb a hőmérséklet. Ez azt jelenti, hogy a mozgásképes töltéshordozók koncentrációja (n) a hőmérséklet emelkedésével nő. Ugyanakkor a töltéshordozók mozgékonyására ugyanaz érvényes, mint a vezetők esetén: a hőmérséklet emelkedésével a mozgékonyosság (μ) csökken. Itt tehát két ellentétes hatás alakítja ki a vezetőképességet:

- hőmérsékletemelkedés (növekvő rendezetlenség) $\Rightarrow \mu$ csökken $\Rightarrow \gamma = qn\mu$ csökken.
- hőmérsékletemelkedés (intenzívebb hőmozgás) $\Rightarrow n$ nő $\Rightarrow \gamma = qn\mu$ nő.

A végeredmény attól függ, hogy melyik hatás az erősebb.

A tapasztalatok (és az elméleti számítások is) azt mutatják, hogy a töltéshordozó-koncentráció sokkal gyorsabban nő a hőmérséklettel (n erősen nő), mint ahogy a mozgékonyosság csökken (μ gyengén csökken), vagyis tiszta félvezetőkben: hőmérsékletemelkedés = növekvő töltéshordozó-koncentráció + növekvő rendezetlenség $\Rightarrow \gamma$ nő \Rightarrow ellenállás csökken.

A félvezető szennyezése az alaprács atomjának vegyértékétől eltérő vegyértékű szennyezéssel a töltéshordozók koncentrációjának igen erős növekedését okozhatja, miközben a mozgékonyágban okozott csökkenés itt sem túl jelentős. Vagyis adott hőmérsékleten az eltérő vegyértékű szennyezés növeli a vezetőképességet.

A félvezetők ellenállása erősebben függ a hőmérséklettől, mint a fémeké, ezért félvezetőből sokkal érzékenyebb ellenálláshőmérő készíthető.

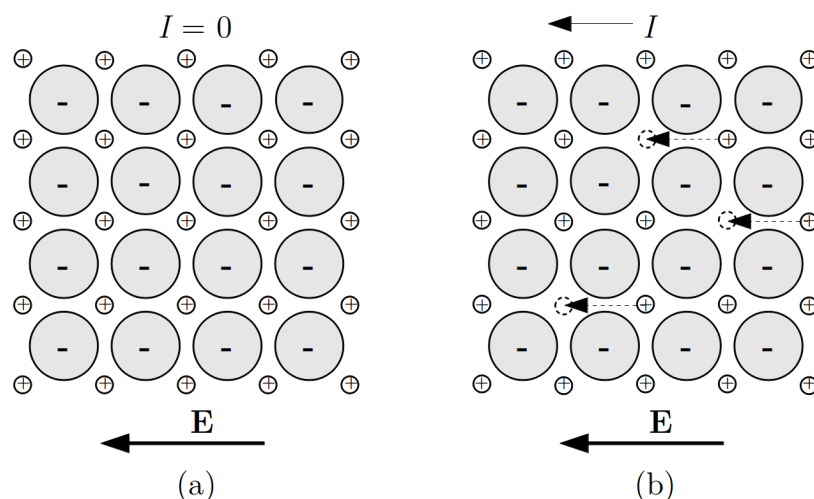
Az ellenállás hőmérsékletfüggését áramkörökben a hőmérsékletváltozás hatásának csökkentésére, vagy ennek a hatásnak a hasznosítására is felhasználják, hőmérsékletfüggő félvezető ellenállások – az ún. termisztorok – alkalmazásával.

A kristályos szerkezetű szigetelőkben a tilos sáv szélessége olyan nagy, hogy – nagyon magas hőmérsékletektől eltekintve – a hőmozgás csak nagyon kevés elektront képes mozgásképes állapotba hozni. Ennek ellenére ezeknek az anyagoknak egy részében – ahol más vezetési mechanizmus nincsen – a vezetést a kis számú mozgásképes elektron hozza létre (pl. gyémánt).

Az anyagok egy másik részében, amelyekben a kristályt ionok alkotják, egy másik vezetési mechanizmus is szerepet kaphat: a kristályrácsban ionok mozognak. Ha egy ionkristály rácsa tökéletes lenne, akkor az ionok nem tudnának benne mozogni (3.17. (a) ábra). Az ionmozgást az teszi lehetővé, hogy a kristályokban mindig vannak betöltetlen rácshelyek, és az ionok ezek között az üres helyek között ugrálva tudnak az elektromos erőter hatására mozogni (3.17. (b) ábra).

Minél több ilyen üres hely van, annál több ion mozgására nyílik lehetőség, vagyis annál nagyobb a mozgásképes töltéshordozók koncentrációja. Mivel tiszta anyagban az üres helyeket a hőmozgás hozza létre, a töltéshordozók koncentrációja a hőmérséklet emelkedésével nő. Az ionok azonban a rácshelyek között nem teljesen szabadon mozognak, mert az ionoknak az egyik rácshelyről a másikra való átmenetnél egy „energiahegyet” kell átugraniuk. Az ehhez szükséges energiát a hőmozgás biztosítja, így a hőmérséklet emelkedésével

az ugrások gyakorisága nő. Ez azt jelenti, hogy a hőmérséklet emelése növeli az ionok mozgékonyságát is. Az ionvezetés esetén tehát a töltéshordozók ionok, a vezetőképesség hőmérsékletfüggésére pedig érvényes, hogy: növekvő hőmérséklet=intenzívebb hőmozgás $\Rightarrow n$ nő, μ nő $\Rightarrow \gamma$ nő \Rightarrow ellenállás csökken.



3.17. ábra. Ionos kristályok ionvezetése

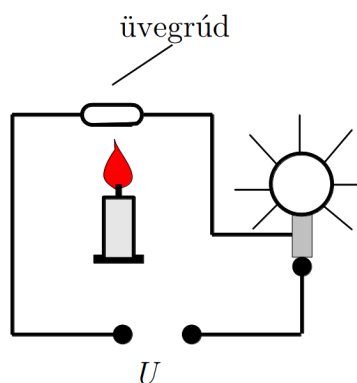
Kísérlet: Szigetelő ellenállásának hőmérsékletfüggése

Egy feszültségforrással sorba kapcsolunk egy izzólámpát és egy üvegrudat (3.18. ábra). A feszültséget úgy állítjuk be, hogy az izzólámpa nem világít, mert az üveg nagy ellenállása miatt nem folyik át rajta elég nagy áram. Ezután az üvegrudat gázlánggal melegíteni kezdjük. Az izzólámpa világítani kezd, és fénye fokozatosan erősödik, vagyis a körben folyó áram megnő. Ez csak úgy lehetséges, hogy a szigetelő üveg ellenállása a hőmérséklet emelkedésekor csökken.



Az alaprács ionjaitól eltérő vegyértékű szennyezés rendszerint ezekben az anyagokban is növeli a töltéshordozók koncentrációját, így a vezetőképesség növekedését eredményezi. Tipikus ionvezetők az ionkristályok (pl. NaCl).

A szigetelők közé számos olyan anyag is tartozik, amelyek nem kristályos szerkezetűek. Ezekben az anyagokban a kristályos anyagokéhoz hasonló sáv szerkezet nem jön létre, az elektronok itt a vezetésben többnyire nem játszanak jelentős szerepet. Az ilyen anyagokban létrehozható – rendszerint kis – elektromos áram a csekély elektronvezetés vagy



3.18. ábra. Szigetelő ellenállásának hőmérsékletfüggése

ionvezetés következménye. Ilyen anyagok pl. az üvegek, számos kerámia és a műanyagok többsége.

A szigetelők klasszikus alkalmazása az elektromos áram kiküszöbölése, az elektromos szigetelés. Egyes ionkristályokat újabban a folyékony elektrolitokhoz (ld. 3.4.2 fejezet) hasonló feladatok megoldására is felhasználnak, így pl. áramforrásokat készítenek belőlük (az ionkristályok tulajdonképpen szilárd elektrolitok, amelyekben a vezetést ionok mozgása teszi lehetővé).

3.4.2. Elektromos vezetés folyadékokban

Kísérlet: A víz vezetőképessége

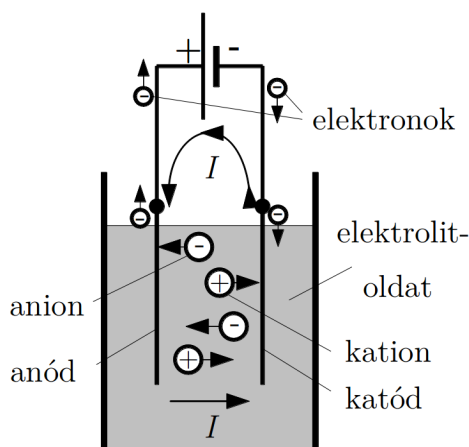
Tiszta (desztillált) vízbe két – nem érintkező – fémlemezt teszünk. Ha egy izzólámpán és a fémlemezekkel a vízen át egy teleppel áramot hozunk létre, akkor az izzó nem világít. A vízbe só szórva a lámpa kigyullad: a sós víz ellenállása sokkal kisebb, mint a tiszta vízé.

A kísérletben desztillált víz helyett csapvizet alkalmazva, az izzó akkor is kigyullad, ha a vízbe semmit nem teszünk. Ebből látható, hogy a csapvízben oldott ionos anyagok találhatók. A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalon http://fizipedia.bme.hu/index.php/F%C3%A1jl:Elektromos_%C3%A1ram_folyadekban_II.ogv ♦

Folyadékokban elektromos vezetés gyakorlatilag csak akkor jön létre, ha a folyadékban ionok vannak jelen (jól ismert kivétel a folyékony fémek esete, amelyekben elektronvezetés van). Az ilyen ionos folyadékok az *elektrolitok*. Ezeknek leggyakrabban előforduló változata az elektrolitoldat, amelyet úgy állíthatunk elő, hogy egy nem ionos folyadékban ionos anyagot oldunk fel. Az oldódás során az ionos anyag ionjaira esik szét (disszociál), és

az így létrejött ionok a mozgásképes töltéshordozók. Az oldott anyag töltéshordozó-keltő szerepét jól mutatja az alábbi kísérlet.

Az elektrolit oldatban az elektromos áram az elektrolitba merülő vezető rudak – az ún. *elektrodok* – között jön létre, amelyek közül az egyik – az ún. *anód* – egy telep pozitív sarkához, a másik – az ún. *katód* – pedig a telep negatív sarkához (3.19. ábra) csatlakozik. Az oldatban a negatív ionok az anódhoz, a pozitív ionok a katódhoz vándorolnak, emiatt a negatív ionokat gyakran *anionoknak*, a pozitív ionokat *kationoknak* nevezik.



3.19. ábra. Elektrolit vezetésének mechanizmusa

Az elektrolitoldatban tehát az elektromos áramot a pozitív és negatív ionok-, az áramkör vezető részeiben viszont elektronok mozgása okozza. A zárt áramkör úgy jön létre, hogy a negatív ionok az anódra érkeve elektronokat adnak le, amelyek a vezetõben a telep pozitív sarka felé mozognak. A telep által „átemelt” elektronok a telep negatív sarkától az oldat felé mozognak, a katódon a pozitív ionok felveszik ezeket az elektronokat, és ezzel az áramkör záródik.

A folyamat fontos mozzanata az, hogy az elektrodokhoz érkező ionok elektronleadással illetve elektronfelvétellel elvesztik a töltésüket, és semleges részecskeként *az oldatból kiválnak*. A kivált anyag további sorsa a konkrét elektrolit összetételétől függően kémiai reakciókban vehet részt, ami különböző végtermékeket eredményezhet. Ezekkel a folyamatokkal itt részletesebben nem foglalkozunk, csupán egy fontos folyamatot említünk meg. Az oldott ionos anyag kationjai rendszerint fémionok, amelyek semleges fématomok formájában válnak ki a katódon, és azon bevonatot képeznek. Ezen a jelenségen alapul a fémbevonatok készítésére használt egyik eljárás, az ún. *galvanizálás*.

Az elektrolitok vezetésével kapcsolatos folyamatokat (vezetés, anyagkiválás, a kivált anyag kémiai reakciói) összefoglaló néven *elektrolízisnek* nevezik.

Az oldott anyagot nem túl nagy koncentrációban tartalmazó elektrolitoldatokban (az

ún. gyenge elektrolitokban) a kellő gondossággal⁵ végrehajtott kísérletek szerint érvényes az Ohm-törvény, így egy adott ion által létrehozott vezetőképességet a $\gamma = qn\mu$ összefüggésből kaphatjuk meg, ha ismerjük az ionok töltését, térfogati darab-koncentrációját és mozgékonyágát. Az elektrolitoldatokban azonban legalább kétféle ion van jelen, de többféle oldott anyag esetén akár többféle pozitív- és negatív ion is létrejöhet, amelyeknek különböző lehet a töltése (q_i), koncentrációja (n_i) és mozgékonyága (μ_i). Ilyenkor egyszerű esetben a vezetőképességet az egyes ionok vezetőképességének ($\gamma_i = q_i n_i \mu_i$) összege adja meg:

$$\gamma = \sum_i \gamma_i = \sum_i q_i n_i \mu_i. \quad (3.51)$$

Egy elektrolitoldat *vezetőképessége* alapvetően függ az oldott ionos anyag koncentrációjától, ami meghatározza a mozgásképes ionok koncentrációját. Az oldott anyag koncentrációjának növelésekor a mozgásképes töltéshordozók koncentrációja (és így a vezetőképesség) kis koncentráció esetén általában növekszik, de az oldatban lévő ionoknak egymással és az oldószerrel való bonyolult kölcsönhatásai miatt, egy bizonyos koncentráció felett a vezetőképesség csökkenhet az oldott anyag mennyiségének növelésekor.

A töltéshordozók *mozgékonyága* több tényezőtől függ. Az egyik ilyen tényező a folyadék viszkozitása. Az elektrolitban az ionok – elektromos töltésük miatt – általában egy ionokból vagy dipólusokból álló burkot alakítanak ki maguk körül, és ezzel a burokkal együtt mozognak az elektromos erőter hatására. Ez – az ion méreténél rendszerint sokkal nagyobb – képződmény a folyadékban sűrűlve mozog, és ezt a sűrűlődni lényegesen befolyásolja a folyadék viszkozitása. Mivel a viszkozitás magasabb hőmérsékleten általában kisebb, a mozgékonyág a hőmérséklet emelkedésével nő. Ez az oka, annak, hogy az elektrolitok vezetőképessége a hőmérséklet emelkedésével általában nő.

3.4.3. Elektromos vezetés gázokban

A gázok normális körülmények között rossz vezetők. Vezetővé csak töltéshordozók keltésével tehetők. A töltéshordozó-keltésnek két alapesete van:

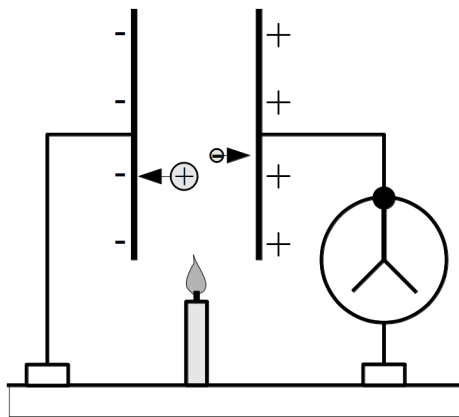
- A gáz maga nem tudja „megtermelni” a töltéshordozókat, azokat külső hatás hozza létre, ez a *nem önálló vezetés*.

⁵ Állandó feszültségű teleppel végrehajtott mérések során az U telepfeszültség és az I áramerősség között az $U \sim I$ összefüggés helyett $U - U_P \sim I$ alakú összefüggést kapunk, ahol U_P az elektródoktól és az elektrolittól függő állandó feszültség, az ún. *polarizációs feszültség*. Ez az ellenfeszültség az elektródokon végbemenő folyamatok következménye (erről a kontaktusjelenségek tárgyalásánál még szó lesz). Ez úgy küszöbölhető ki, hogy a mérést kis frekvenciájú váltakozó feszültséggel végezzük el. Ekkor az elektródokon nem tud létrejönni az állandó ellenfeszültséget okozó anyagkiválás.

- A gázban maga az elektromos áram hozza létre a szükséges töltéshordozókat, ez az *önálló vezetés*.

Kísérlet: Ionizált levegő vezetése

Elektrométerhez kapcsolt, feltöltött kondenzátor töltése eltűnik, ha a lemezei közé lángot (pl. égő gyertyát) tartunk, mert a láng által keltett elektromos töltések semlegesítik a lemezek töltését (3.20. ábra).



3.20. ábra. A levegő vezetőképessége



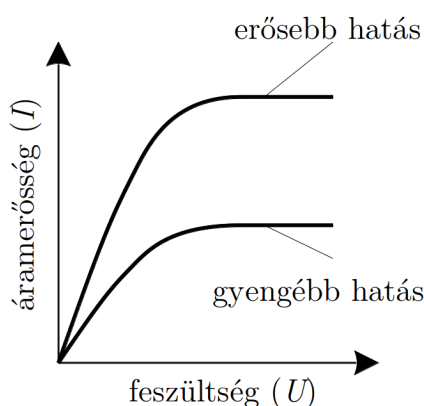
Nem önálló vezetés

Töltéshordozót létrehozhat hő, sugárzás vagy bármilyen külső energiaforrás, ami ionizálni képes a gázmolekulákat. Ekkor ugyanis pozitív töltésű ionok és negatív töltésű elektronok keletkeznek, amelyek külső erőter hatására mozognak: áram jön létre.

A töltéshordozó-keltéssel egyidőben a véletlenszerűen összetalálkozó ionok és elektronok újraegyesülése – az ún. *rekombináció* – is végbemegy. A töltéshordozók mindenkori koncentrációját a keltés és rekombináció intenzitása szabja meg, és kialakul egy egyensúlyi töltéshordozó-koncentráció (n).

Ha egy gázban elhelyezett két elektród közé feszültséget (U) kapcsolunk, akkor a létrehozott elektronok és ionok a gázban elektromos áramot (I) hoznak létre. Kis feszültségeknél kicsi az áram, ezért az elektródokon eltűnő töltéshordozók nem módosítják lényegesen a töltéshordozó-koncentrációt. Ilyenkor $n \approx$ állandó, és teljesül az Ohm-törvény (a 3.21.

ábrán a lineáris szakasz). A feszültség további növelésével egyre több töltéshordozó jut el rekombináció nélkül az elektródokra, és a töltéshordozók számát – és így az áramot is – a töltéshordozó-keltés sebessége szabja meg: állandó ionizáló hatás esetén az áram nem tud tovább nőni, hanem egy állandósult értéket vesz fel, ez a *telítési áram*. A telítési áram az ionizáló hatás (pl. radioaktív sugárzás) erősségétől függ, ezért az ionizáló hatás erősségének mérésére használható (ionizációs kamra).

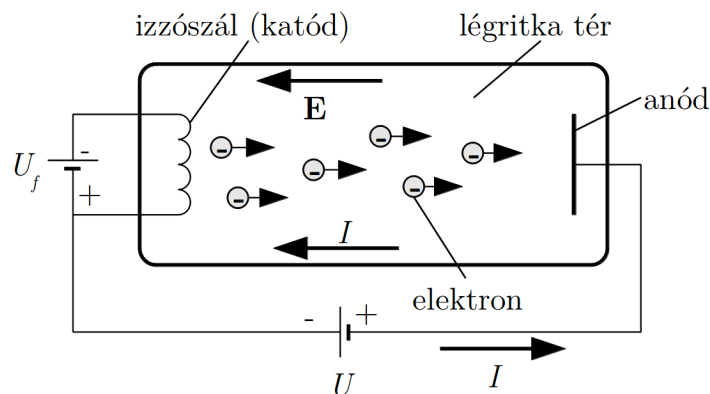


3.21. ábra. Gázok nem önálló vezetésének feszültség-áram karakterisztikája

A nem önálló vezetés speciális esete, amikor a töltéshordozókat egy fémszál izzításával állítják elő. Az izzó fémből ugyanis a hőmozgás hatására elektronok lépnek ki (*termikus elektronemisszió*). Ha az izzószálat légritka térbe tesszük, akkor az elektronok szabadon elmozdulhatnak (nagyobb nyomáson a gázmolekulákkal történő gyakori ütközések miatt a mozgás korlátozott), ezért ha az edényben (3.22. ábra) elektromos erőteret (\mathbf{E}) hozunk létre, akkor az elektronok a térerősséggel szemben mozogva elektromos áramot hoznak létre. (Figyeljük meg, hogy az elektronok – negatív töltésük miatt – a térerősséggel szemben mozognak, de az áram iránya – a korábban tárgyalt definíció miatt – a térerősség irányával egyezik meg.) Ezt a töltéshordozó-keltési mechanizmust használják ki a különféle elektroncsövekben, az oszcilloszkópok legfontosabb alkotórészét képező katódsugárcsőben és az elektronmikroszkópban is. A katódsugárcsővel kapcsolatos kísérletekről készült videók megtekinthetők a Fizipédia weboldalon: http://fizipedia.bme.hu/index.php/Kat%C3%B3dsugarak_I.

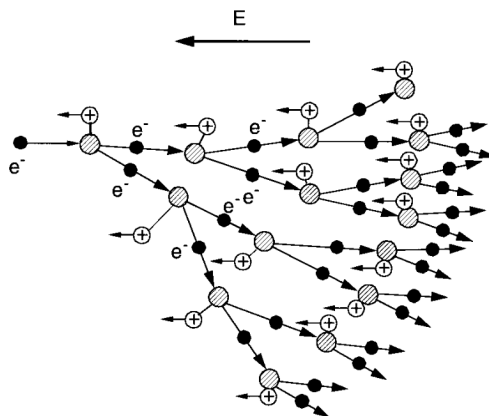
Önálló vezetés

Egy gázban különféle külső behatások (pl. a kozmikus sugárzás) miatt mindig keletkezik kis számú töltéshordozó (elektron-ion párok). Ezért, ha *ritkított gázban* elhelyezett elektródok között feszültséget hozunk létre, és a feszültséget növeljük, akkor az elektromos erőter hatására ezek a töltéshordozók annyira felgyorsulnak, hogy képesek a semleges



3.22. ábra. Katódsugárcső

gázmolekulákat a velük való ütközéskor ionizálni. Ez a folyamat az *ütközési ionizáció*. Az ütközési ionizációban elsősorban az elektronok vesznek részt, mert tömegük az ionizálásnál kiütendő elektronéval megegyezik, és ilyenkor a leghatékonyabb az energiaátadás.



3.23. ábra. Gázok önálló vezetésének mechanizmusa

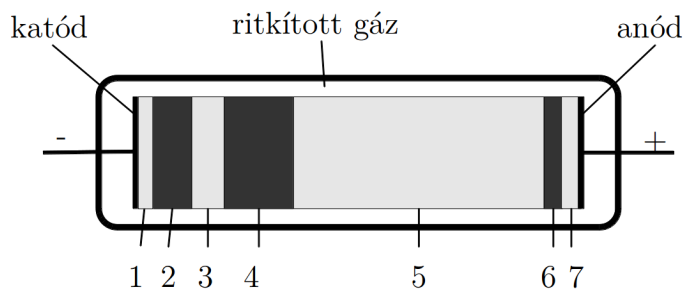
Az ütközési ionizáció során új töltéshordozók (elektron-ion párok) jönnek létre, a keletkezett elektronok felgyorsulnak, és tovább ionizálnak (3.23. ábra). Az áram nagyon gyorsan nőni kezd (minden elektron két másikat kelt, így a töltéshordozók száma 2 hatványai szerint, lavinaszerűen nő). Ilyenkor a gáz már maga termeli meg a vezetéshez szükséges töltéshordozókat, az ilyen vezetést nevezzük *önálló vezetésnek*.

Az ütközési ionizáció csak alacsony nyomáson hatékony, mert ekkor a töltött részecskék szabad úthossza nagyobb, és így nagyobb energiára gyorsíthatók, ami megnöveli a töltések ionizáló képességét. Az ütközések során nem csak ionizáció lehetséges, hanem az

elektronok gerjesztése is, ami – az elektronoknak az alapállapotba való visszatérésekor – *fényjelenségeket* is létrehozhat. A gázokban ilyen módon létrehozott elektromos áramot a *gázkisülésnek* nevezzük.

Kísérlet: Ködfénykisülés

Nem túl ritka (5 kPa és 0.001 kPa közötti nyomású) gázban jön létre a ködfénykisülés, amelyben a töltéshordozók ütközési ionizáció útján jönnek létre, és benne – eléggé bonyolult folyamatok következtében – sötét- és világító tartományok váltják egymást (a 3.24. ábrán 1 – katódfény, 2 – sötét katódtér, 3 – negatív ködfény, 4 – Faraday-féle sötét tér, 5 – plazma, 6 – sötét anódtér, 7 – anódfény). Az egyes tartományok hossza a nyomástól illetve a csőre kapcsolt feszültségtől függően változhat, egyesek el is tűnhetnek.



3.24. ábra. Ködfénykisülés



A ködfénykisülés egyes szakaszairól általánosságban azt lehet mondani, hogy a sötét tartományokban a töltéshordozók gyorsulnak, energiát gyűjtenek (az energiaelnyelő ütközések hiányát mutatja az, hogy nincs fénykibocsátás), a világító részekben pedig az ütközéseknél bekövetkező ionizáció és gerjesztés következtében energiát veszítenek (ezt mutatja a fénykibocsátás).

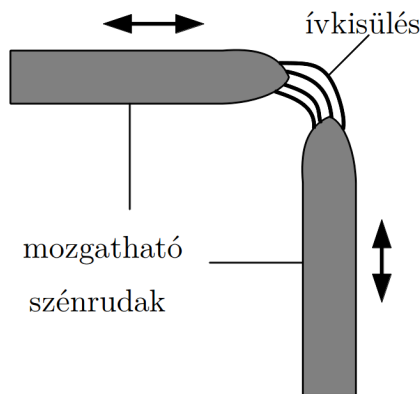
Gyakorlati fontossága miatt érdemes külön megemlíteni a negatív ködfényt (3), amelynek fényét a ködfénylámpákban (más néven glimmlámpa) láthatjuk. Ez a tartomány úgy jön létre, hogy a katódra ütköző ionok a katód anyagából elektronokat löknek ki, és ezek az elektronok, a sötét katódtérben az anód felé gyorsulva, itt érik el azt az energiát, amellyel a gázmolekulákat ionizálni illetve gerjeszteni képesek (a gerjesztés következménye a fénykibocsátás).

Fontos tartomány a plazma (5), ami a régebben készült reklámcsövek fényét adja, és amelynek színe függ az alkalmazott gáztól. A negatív ködfényben az elektronok energiát veszítenek, a plazma előtti sötét térben (4) pedig újra energiát gyűjtenek, és a plazma

tartományában ionizálnak és fénykibocsátást okoznak. A plazma sajátos képződmény: benne azonos mennyiségű pozitív- és negatív töltés van, elektronok és ionok semleges keveréke, vagyis ionizált, kifelé semleges gázhalmazállapotú anyag. Tulajdonságai az ionok jelenléte miatt lényegesen eltérnek a közönséges gázokétól, gyakran az anyagnak egy új (negyedik) halmazállapotaként emlegetik. A plazmaállapotú anyagok jelentős szerepet játszanak a csillagok működésében, a termionukleáris reakció létrehozásában és számos technológiai eljárásban.

Nagyobb (atmoszférikus) nyomáson az ütközési ionizáció csak nagyon nagy feszültség hatására jön létre, de megvalósítható. Ilyen nagyfeszültségű kisülés a szikrakisülés, amelynél a töltéshordozók sokszorozódása egy keskeny csatornában következik be, és a molekulák gerjesztése miatt a csatorna mentén fénykibocsátás is történik („szikra”). Ilyen szikra figyelhető meg pl. kapcsolók kikapcsolásánál, de ilyen jelenség a légkörben bekövetkező villámlás is. Hasonló lavinaszerű töltéshordozó-keltés előfordul szilárd halmazállapotú szigetelőkben is, ott ezt *átütésnek* nevezik. Az átütés során a szigetelő az átütés csatornája mentén tönkremegy, szigetelőképességét jórészt elveszíti, ezért a szigetelő anyagok fontos jellemzője, hogy milyen térerősséget bírnak ki átütés nélkül („átütési szilárdság”).

Speciális kisülés az ívkisülés, amely két összeérintett szén- vagy fémrúd között a rudak széthúzásakor jön létre (3.25. ábra).



3.25. ábra. Ívkisülés

Kísérlet: Ívkisülés

Két mozgatható szénrúd közé feszültséget kapcsolva ívkisülést hozunk létre, és fényét ernyőre kivetítjük. ♦

Az ívkisülésben a töltéshordozók keltésében jelentős szerepet kapnak az izzó katódból

kilépő elektronok (termikus elektronemisszió), amelyek ionizálják a rudak közötti gázt. A jelentős áram fenntartja az izzást (Joule-hő), és így a kisülést is.

Az ívkisülés az áramkörben sajátosan viselkedik: minél nagyobb az áram, annál kisebb az elrendezés ellenállása (megnö a töltéshordozók koncentrációja), vagyis annál kisebb a rajta eső feszültség is. Az Ohm-törvény itt tehát nem érvényes: növekvő árammal csökkenő feszültség jár együtt. Az ilyen áramköri elemet negatív ellenállású elemnek nevezik. Ahhoz, hogy a kisülést fenntartsuk, meg kell akadályozni a feszültség lecsökkenését (az áram növekedését), amit úgy érhetünk el, hogy a kisüléssel sorba kapcsolunk egy állandó ellenállást (ez az ún. előtétellenállás), ami korlátozza a kisülésen átfolyó áramot.

Az ívkisülésben jelentős hő és fény szabadul fel, amit régebben fényforrásként használtak, ma az ívkisülést különböző, nagy hőt igénylő technológiai folyamatokban (pl. fémek vágása, hegesztése) hasznosítják.

3.5. Elektromos áramkörök és hálózatok, Kirchhoff törvényei

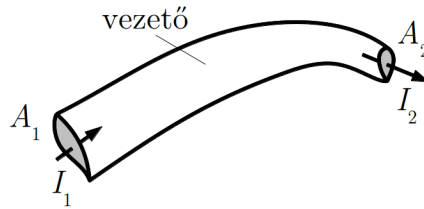
A gyakorlatban az elektromos áram különböző vezetőrendszerekben folyik. Igen fontos, hogy az áramot fenntartó telepek ismeretében a vezetőrendszerek részeiben folyó áramokat számítással is meg tudjuk határozni, hiszen ez teszi lehetővé az áramot felhasználó eszközök megtervezését. A legegyszerűbb eset az, ha az áramot egyetlen zárt hurokból álló *áramkörben* kell vizsgálnunk, az esetek többségében azonban az elektromos áram bonyolult vezetőrendszerekben ún. *hálózatokban* folyik. A hálózatokban rendszerint áramelágazások, más néven *csomópontok* is vannak, a csomópontok közötti vezetőszakaszok, az ún. *ágak* pedig különféle áramköri elemeket (ellenállások, telepek) tartalmaznak. Egy hálózat vizsgálatánál két alapvető kérdés merül fel:

- Milyen törvény szabja meg, hogy az elágazásoknál az áramerősség hogyan oszlik meg az egyes ágakban?
- Érvényes-e az elektrosztatika I. alaptörvénye az áramkörökben, és ha érvényes, akkor ennek milyen következményei vannak az áramokra vonatkozóan?

Itt csak olyan áramkörökkel foglalkozunk, amelyekben az áram az áramkör bármely helyén időben nem változik (különböző helyeken az áramerősségek lehetnek eltérőek, de értékük nem változhat meg). Az ilyen áramokat *időben állandó*-, vagy *stacionárius áramoknak* nevezzük.

3.5.1. A töltésmegmaradás törvénye időben állandó áramokra, Kirchhoff I. törvénye

A tapasztalatok azt mutatják, hogy egy vezetőben – különleges körülményektől eltekintve – elektromos töltés nem keletkezik, és nem tűnik el, vagyis a töltés mennyisége megmarad. Ebből következik, hogy ha egy vezetőben időben állandó áram folyik, akkor a vezető egy keresztmetszetén (3.26. ábra) Δt idő alatt átmegy $\Delta Q_1 = I_1 \Delta t$ töltéssel elvileg két dolog történhet:



3.26. ábra. A töltésmegmaradás egy vezető szakasz térfogatában

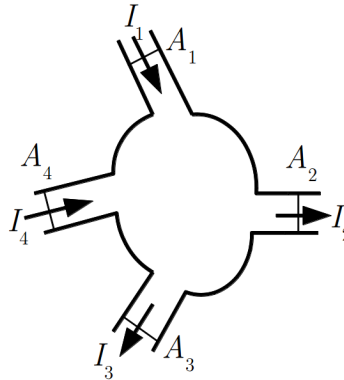
1. A töltés a többi keresztmetszeten (pl. a 2 keresztmetszeten) is ugyanennyi idő alatt megy át, tehát $\Delta Q_1 = I_1 \Delta t = \Delta Q_2 = I_2 \Delta t$. Ez azt jelenti, hogy $I_1 = I_2$, vagyis a vezető minden keresztmetszetén ugyanakkora az áramerősség.
2. A töltés egy része a vezetők az 1 és 2 felülete közti térfogatban marad, és a 2 felületen kisebb – de időben állandó – áram megy tovább. Ilyenkor az említett térfogatban a töltés mennyisége időben növekedne, a töltés ott felhalmozódna.

A második lehetőség azonban nem valósulhat meg. Ennek oka az, hogy időben állandó áram csak akkor jöhet létre, ha a vezetőben az elektromos térerősség időben állandó ($I \sim E$). A töltés fokozatos felhalmozódása azonban időben változó erőteret, és így időben változó áramot eredményezne. Ez azt jelenti, hogy marad az – a tapasztalat által is megerősített – lehetőség, hogy állandó áram esetén egy vezető bármely két keresztmetszetén ugyanakkora az áramerősség:

$$I_1 = I_2. \quad (3.52)$$

Hasonló megfontolásokat tehetünk egy csomópont esetében is (3.26. ábra), ahol vezetők csatlakoznak egymáshoz. Mivel töltésfelhalmozódás nem lehetséges, itt is érvényes, hogy Δt idő alatt a befolyó áramok (I_1, I_4) által a csomópontba bevitt töltésnek meg kell egyeznie a kifolyó (I_2, I_3) áramok által onnan kivitt töltéssel,

$$I_1 \Delta t + I_4 \Delta t = I_2 \Delta t + I_3 \Delta t, \quad (3.53)$$



3.27. ábra. A töltésmegmaradás vezetők csomópontjában: Kirchhoff I törvénye

vagyis

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3. \quad (3.54)$$

Eszerint állandó áramok esetén egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével.

Ha az áramoknak előjelet adunk, és a csomópontba befolyó áramokat pozitívnak-, az onnan kifolyó áramokat pedig negatívnak tekintjük ($I_1, I_4 > 0$ és $I_2, I_3 < 0$), akkor az egyenlet így alakul:

$$I_1 + I_4 + I_2 + I_3 = 0. \quad (3.55)$$

Ezek az összefüggések természetesen akárhány áram esetén érvényesek, vagyis általánosan a

$$\sum_n I_n = 0 \quad (3.56)$$

alakba írhatók. Ez *Kirchhoff I. törvénye*⁶, amely a töltésmegmaradás törvényét fejezi ki. A törvénynek ebbe az alakjába az áramokat – a fenti megállapodás szerint – előjeles mennyiségekként kell behelyettesíteni.

3.2. Megjegyzés *Kirchhoff I. törvénye speciális esete egy általános, mindenféle áramlás (transzportfolyamat) esetére érvényes törvénynek, amelyhez az alábbi módon juthatunk el.*

Tegyük fel, hogy egy térrészben valamilyen mennyiség (pl. tömeg, töltés, energia, stb.) egyik helyről a másikra áramlik. Az áramló mennyiséget jelöljük Ω -val, és az áramlás

⁶ Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) német fizikus

jellemzésére – az elektromos áramnál bevezetett jellemzők analógiájára – vezessük be az Ω mennyiség $I_\Omega = \frac{d\Omega}{dt}$ áramerősségét és $\mathbf{j}_\Omega = \frac{d\Omega}{dA_N} \mathbf{u}_T$ áramsűrűségét (itt \mathbf{u}_T az áramlás irányába mutató egységvektor, dA_N az áramlás irányára merőleges elemi felület).

Válasszunk ki az áramlásban egy tetszőleges V térfogatot, és írjuk fel a térfogatban felhalmozódó Ω_V mennyiség időbeli változásának $\frac{d\Omega_V}{dt}$ sebességét.

A változás két okból következhet be:

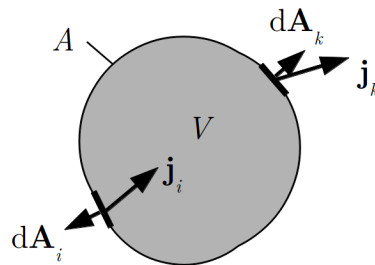
1. A V térfogatba befolyó vagy onnan kifolyó áramok miatt.
2. A V térfogatban esetleg jelenlévő források miatt, amelyek az Ω mennyiséget termelik, vagy eltüntetik (utóbbi esetben gyakran nyelőkről beszélünk).

Először az áramok hatását vizsgáljuk meg. Láttuk, hogy tetszőleges felületen átfolyó áramot az

$$I = \int_A \mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A} \quad (3.57)$$

összefüggés adja meg. Ez az összefüggés érvényes a V térfogatot határoló A zárt felületre is, csupán azt kell figyelembe venni, hogy a térfogatba beáramló töltés pozitív töltésváltozást okoz, a felületvektor kifelé irányítása miatt viszont a $\mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A}$ szorzat ilyenkor negatív (a 3.28. ábrán pl. az i -edik felületelemen). Hasonlóan: a kifolyó áram negatív töltésváltozást okoz, a $\mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A}$ szorzat viszont ilyenkor pozitív (a 3.28. ábrán pl. az k -adik felületelemen). Ennek megfelelően az A zárt felületen átfolyó áram az áramsűrűséggel kifejezve:

$$I = - \oint_A \mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A}. \quad (3.58)$$



3.28. ábra. A kontinuitási egyenlet grafikus illusztrációja

Ez a mennyiség a térfogatba befolyó- és onnan kifolyó áramok előjeles összegét, vagyis a térfogatban a töltésfelhalmozódás sebességének egyik összetevőjét adja meg:

$$\left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_1 = - \oint_A \mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A}. \quad (3.59)$$

Az Ω mennyiség keletkezésének vagy eltűnésének hatását akkor tudjuk figyelembe venni, ha ismerjük a V térfogaton belül a forráserősséget, vagyis az Ω mennyiség keletkezésének (eltűnésének) $F_\Omega = \frac{d\Omega_V^{\text{forrás}}}{dt} = \left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_2$ sebességét (az F_Ω forráserősség pozitív, ha az Ω mennyiség keletkezik, és negatív, ha eltűnik).

A két hatás eredményeként a V térfogatban bekövetkező változás sebességét a

$$\frac{d\Omega_V}{dt} = \left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_2, \quad (3.60)$$

vagyis a

$$\frac{d\Omega_V}{dt} = - \oint_A \mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A} + F_\Omega \quad (3.61)$$

egyenlet adja meg. Ezt az áramló mennyiségre vonatkozó általános összefüggést kontinuitási egyenletnek nevezik.

Előfordul, hogy a források a V térfogaton belül nem egyenletesen oszlanak el. Ilyenkor egy lokális jellemzőt vezethetünk be, amely megadja egy elemi térfogatban lévő forrás és az elemi térfogat

$$f_\Omega = \frac{dF_\Omega}{dV} \quad (3.62)$$

hányadosát, az ún. forrássűrűséget. A forrássűrűség helyfüggését ismerve egy V térfogatban a teljes forráserősség:

$$F_\Omega = \int_V f_\Omega dV. \quad (3.63)$$

Ezzel a kontinuitási egyenlet a

$$\frac{d\Omega_V}{dt} = - \oint_A \mathbf{j}_\Omega d\mathbf{A} + \int_V f_\Omega dV \quad (3.64)$$

alakot ölti.

Az általános kontinuitási egyenletből konkrét áramló mennyiség esetén az adott áramlásra vonatkozó összefüggések kaphatók (így lehet levezetni pl. a folyadékok áramlására

vonatkozó, ismert kontinuitási egyenletet is). Mi most az elektromos áramra alkalmazzuk az általános egyenletet, és levezetjük Kirchhoff I. törvényét, amit fizikai megfontolások alapján korábban már megkaptunk. Ekkor az általános egyenletben az áramló mennyiség az elektromos töltés, tehát $\Omega = Q$ és $\mathbf{j}_\Omega = \mathbf{j}$, így az egyenletnek erre az esetre érvényes alakja:

$$\frac{dQ_V}{dt} = - \oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A} + \int_V f_Q dV. \quad (3.65)$$

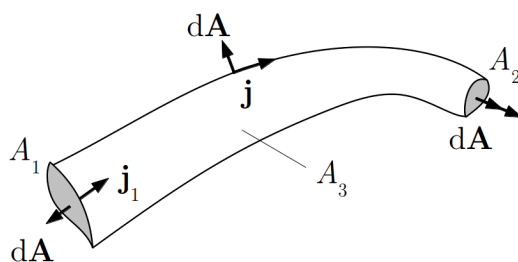
Mivel elektromos töltést kelteni és eltüntetni a tapasztalat szerint nem lehet, $f_Q = 0$, így az egyenletben nem szerepelhet forrás, tehát

$$\frac{dQ_V}{dt} = - \oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A}. \quad (3.66)$$

Egyelőre csak időben állandó (stacionárius) áramokkal foglalkozunk, ekkor pedig a korábbi megfontolásaink szerint egy térfogatban nem lehet töltésfelhalmozódás, ezért $\frac{dQ_V}{dt} = 0$. Ennek megfelelően az időben állandó (stacionárius) áramokra a kontinuitási egyenlet a

$$\oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A} = 0 \quad (3.67)$$

alakban érvényes. Ez azt jelenti, hogy az A zárt felület által határolt térfogatba be- és kifolyó áramok nagysága azonos.



3.29. ábra. A kontinuitási egyenlet alkalmazása egy vezető szakaszra

Ennek a következménye az, hogy egy vezető (pl. egy drót) különböző keresztmetszetein ugyanaz az áram folyik. A zárt felület most az A_1 , A_2 keresztmetszetekből és az A_3 palástfelületből áll (3.29. ábra). A kontinuitási egyenlet erre az esetre így alakul:

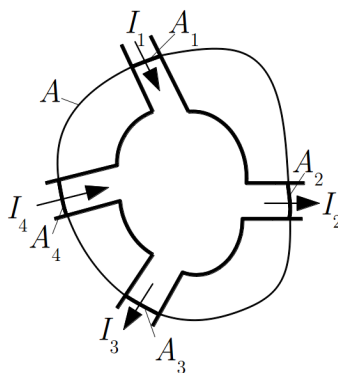
$$\oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \int_{A_3} \mathbf{j} d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{j} d\mathbf{A} = 0. \quad (3.68)$$

Itt felhasználtuk azt a tényt, hogy a vezető palástján az áramsűrűség-vektor merőleges a felületvektorra, így $\int_{A_3} \mathbf{j} d\mathbf{A} = 0$.

Felhasználva az áram és az áramsűrűség között fennálló összefüggést, a fenti egyenletből a korábban kapott összefüggéssel azonos eredményt kapunk:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 &= 0 \\ I_1 + I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Vagyis az áramok előjeles összege nulla, az egyik felületen befolyó áram a másikon kifolyik.



3.30. ábra. A kontinuitási egyenlet alkalmazása vezetők csomópontjára

Hasonlóan járhatunk el egy áramelágazásnál (3.30. ábra). Itt a zárt A felületnek csak azokon a részein van áram, ahol vezetőt metsz át, ezért a zárt felületre vett integrál így alakul:

$$\oint_A \mathbf{j} d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \int_{A_3} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \dots = 0, \quad (3.70)$$

amiből következik, hogy

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots = 0. \quad (3.71)$$

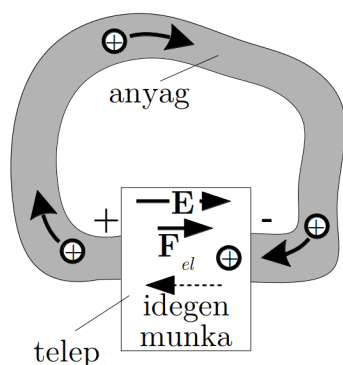
Általánosan

$$\sum_n I_n = 0, \quad (3.72)$$

vagyis megkaptuk a Kirchhoff I. törvénye néven korábban már megismert összefüggést.

3.5.2. Az elektrosztatika I. alaptörvénye állandó áramokra, Kirchhoff II. törvénye

Korábban megállapítottuk: ahhoz, hogy egy vezetőben állandó áramot tartsunk fenn, egy speciális eszközre (áramforrás, más néven telep) van szükség, ami biztosítja a töltések körforgását (3.31. ábra). Ebben az eszközben a töltéseket az ott kialakult \mathbf{E} elektromos erőterrel, és az általa kifejtett \mathbf{F}_{el} erővel szemben kell mozgatni, ami valamilyen külső hatás által végzett munka árán valósítható meg. Ez a külső hatás általában az elektromosságtól „idegen” (pl. kémiai) folyamatok felhasználásával működik, ami az elektromosságtanba nehezen építhető be. Ezért a telep működését egy fiktív elektromos modellel írjuk le.



3.31. ábra. Az állandó áramot külső erő tartja fenn

Egy q pozitív töltésnek a telep egyik oldaláról a másikra történő átviteléhez szükséges W^* idegen munkát egy idegen \mathbf{E}^* elektromos térerősség munkájaként fogjuk fel, amit a

$$W^* = \int q\mathbf{E}^* d\mathbf{r} = q \int \mathbf{E}^* d\mathbf{r} \quad (3.73)$$

kifejezéssel adunk meg. Látható, hogy ez a munka az átvitt töltés, és egy, a telepre jellemző mennyiség szorzataként írható fel. A telepre jellemző mennyiség ebből úgy kapható meg, hogy az „idegen” munkát elosztjuk az átvitt töltéssel:

$$\mathcal{E} = \frac{W^*}{q} = \int \mathbf{E}^* d\mathbf{r}. \quad (3.74)$$

Az így kapott \mathcal{E} jellemzőt a telep *elektromotoros erejének* nevezik. Az elnevezés nem szerencsés, hiszen \mathcal{E} nem erő-, hanem potenciálkülönbség- (feszültség-) jellegű mennyiség, egysége 1 V.

Az elektromotoros erő egy áramkörbe be nem kapcsolt telep esetén az idegen térerősségnek megfelelő feszültséget hoz létre a telep két pólusa között, amit az

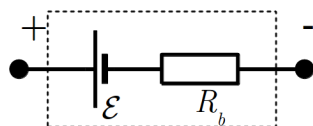
$$U^* = - \int \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r} = -\mathcal{E} \quad (3.75)$$

összefüggés ad meg. Ezt a feszültséget gyakran *generátorfeszültségnek* nevezik.

A fenti definíciókból kiderül, hogy a két mennyiség nagysága megegyezik, előjelük viszont ellentétes. Mivel \mathbf{E}^* a telep negatív pólusától a pozitív felé mutat, az elektromotoros erőt akkor tekintjük pozitívnak, ha a telepen az \mathbf{E}^* -gal egy irányban – vagyis a negatív pólustól a pozitív felé – haladunk át. A generátorfeszültség viszont akkor pozitív, ha a telepen a pozitív pólustól a negatív felé haladunk át.

Egy telepre kapcsolt áramkör rendszerint nagy ellenállású- és az ezeket összekötő, elhanyagolható ellenállású szakaszokból áll. Mivel egy vezető végei közti potenciálkülönbség arányos a vezető ellenállásával, az igen kis ellenállású szakaszok, az ún. *vezetékek* végei közti potenciálkülönbség elhanyagolható a nagy ellenállású szakaszok, az ún. *ellenállások* végei közti potenciálkülönbségek mellett.

Mivel a telep az áramkör része, a telep által létrehozott áram magán a telepen is átfolyik, és a telepnek saját ellenállása, ún. *belső ellenállása* is van, amit az áramkör vizsgálatánál figyelembe kell venni. A belső ellenállás egyik következménye az, hogy a telep két pólusa között mérhető feszültség nagysága eltér az elektromotoros erő nagyságától, ezért a telepet az áramkörökben úgy modellezzük, hogy az a töltésmozgást biztosító ideális elektromotoros erőből (\mathcal{E}) és a telep ellenállását képviselő belső ellenállásból (R_b) áll (3.32. ábra).



3.32. ábra. A telep modellje

Idegen térerősség jelenléte esetén az Ohm-törvényben is figyelembe kell venni ezt a hatást, tehát ilyen helyen az eredeti, $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ alak helyett a

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad (3.76)$$

kifejezés lép érvénybe (γ a vezetőképesség). Ebből a valódi térerősséget kifejezve az alábbi összefüggést kapjuk:

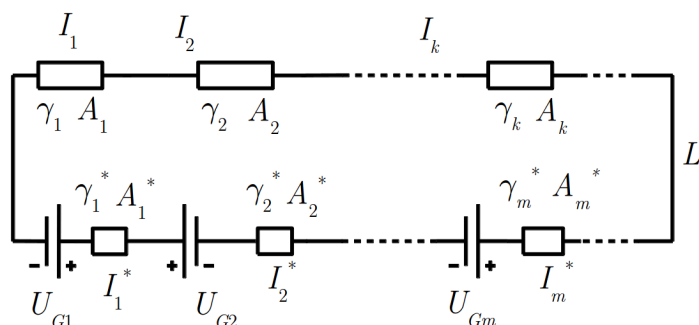
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\gamma} - \mathbf{E}^*. \quad (3.77)$$

Egy áramkörben folyó áram és az egyes áramköri elemeken kialakult feszültségek között az Ohm-törvény és az elektrosztatika I. alaptörvénye segítségével kaphatunk összefüggést. Azt, hogy az elektrosztatika I. alaptörvénye érvényes-e állandó áramok esetén, a tapasztalat alapján lehet eldönteni. A kísérletek azt mutatják, hogy *az I. alaptörvény teljesül* állandó áramú áramkörök esetén is, vagyis, ha egy áramkörben körbejárunk, és a mért feszültségeket összeadjuk, akkor a teljes körüljárás végén nullát kapunk eredményül.

Konkrét összefüggések megtalálása érdekében alkalmazzuk az elektrosztatika

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0 \quad (3.78)$$

I. alaptörvényét egy zárt L áramhurokra, amelyben ellenállások és telepek vannak (3.33. ábra). Az ellenállásokat és telepeket összekötő vezetékek ellenállását elhanyagolhatónak tételezzük fel, ezért az integrálban ezeknek a kis ellenállású szakaszoknak a járulékát elhanyagolhatjuk (itt ugyanaz az áram folyik, mint másutt, de az ellenállás, és így a potenciálkülönbség is kicsi). A nagy ellenállású részeket – az ellenállásokat – hasáboknak képzeljük, amelyeknek hossza l_1, l_2, \dots , keresztmetszete A_1, A_2, \dots , vezetőképessége $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, a rajtuk átfolyó áram erőssége I_1, I_2, \dots . A belső ellenállásokra vonatkozó, megfelelő adatokat csillaggal különböztetjük meg a többitől.



3.33. ábra. Telepekből és ellenállásokból felépülő áramkör

A zárt hurokban érvényes, hogy

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \oint_L \left(\frac{\mathbf{j}}{\gamma} - \mathbf{E}^* \right) \, d\mathbf{r} = 0. \quad (3.79)$$

Ebből következik, hogy

$$\oint_L \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \, d\mathbf{r} - \oint_L \mathbf{E}^* \, d\mathbf{r} = 0. \quad (3.80)$$

Ha az ellenállás-szakaszokat „ k ” indexszel, a telepeket „ m ” indexszel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_k \left(\int_k \frac{\mathbf{j}_k}{\gamma_k} d\mathbf{r} \right) + \sum_m \left(\int_m \frac{\mathbf{j}_m^*}{\gamma_m^*} d\mathbf{r} \right) - \sum_m \mathcal{E}_m = 0. \quad (3.81)$$

A második összeg azért jelent meg, mert a telepeknek is van vezetőképessége. Az integrálás az indexszel jelölt szakaszokon történik.

Ha az L zárt hurkot az áramiránnyal egyező irányban járjuk körbe, akkor vezetőkben $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{r}$, és az egyenlet így írható

$$\sum_k \left(\int_k \frac{j_k}{\gamma_k} dr \right) + \sum_m \left(\int_m \frac{j_m^*}{\gamma_m^*} dr \right) - \sum_m \mathcal{E}_m = 0. \quad (3.82)$$

Ha az árammal ellentétesen haladunk, akkor az összegzésben szereplő tagok negatívak lesznek, de ellenkezőre változik az elektromotoros erők előjele is, ezért az így kapott egyenlet egyenértékű a korábbival. Ez más szóval azt jelenti, hogy a *körüljárás iránya önkényesen megválasztható*, ettől a végeredmény nem függ.

Az egyenlet tovább alakítható, ha megvizsgáljuk az integrálban szereplő mennyiségeket. Ha az ellenállásokat egyenletes keresztmetszetű, hasáb alakú vezetőszakaszoknak tekintjük, akkor az egyenlet bal oldalán szereplő – egy-egy vezetőszakaszra vonatkozó – integrálok így alakíthatók át:

$$\begin{aligned} \int_k \frac{j_k}{\gamma_k} dr &= \frac{I_k}{\gamma_k A_k} \int_k dr = \frac{I_k l_k}{\gamma_k A_k} = I_k R_k, \\ \int_m \frac{j_m^*}{\gamma_m^*} dr &= \frac{I_m^*}{\gamma_m^* A_m^*} \int_m dr = \frac{I_m^* l_m^*}{\gamma_m^* A_m^*} = I_m R_{bm}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Itt felhasználtuk, hogy egy hasáb alakú, A keresztmetszetű, l hosszúságú vezetőszakasz ellenállása $R = \frac{l}{\gamma A}$, és hogy $j = \frac{I}{A}$. A telepeken átfolyó áramok jelölésénél elhagytuk a csillagot, mert az egyenletekben ezeket az m index különbözteti meg a többi áramtól.

Mindezt figyelembe véve, a fenti egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m R_{bm} - \sum_m \mathcal{E}_m = 0, \quad (3.84)$$

illetve

$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m R_{bm} = \sum_m \mathcal{E}_m. \quad (3.85)$$

Ez az összefüggés *Kirchhoff II. törvényének* egyik alakja. Itt R_k a vizsgált áramhurok k -adik ellenállása, I_k a k -adik ellenálláson folyó áram, \mathcal{E}_m a hurok m -edik telepének elektromotoros ereje, R_{bm} az m -edik telep belső ellenállása.

A törvény szerint, ha egy zárt áramhurokban körbejárunk, és megfelelő előjelekkel összeadjuk az ellenállásokra vonatkozó IR szorzatokat és a telepek elektromotoros erőit, akkor a két összeg egymással megegyezik.

Kirchhoff II. törvényét gyakran a generátorfeszültségekkel írják fel, és ekkor – figyelembe véve a $\mathcal{E}_m = -U_m^*$ összefüggést – az alábbi alakot kapjuk:

$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m R_{bm} + \sum_m U_m^* = 0. \quad (3.86)$$

A törvény alkalmazásánál fontos az alábbiak ismerete:

A levezetés során nem tételeztük fel, hogy minden áramköri elemen ugyanakkora áram folyik át, tehát a törvény bonyolult, elágazásokat is tartalmazó hálózatban, tetszőlegesen kiválasztott zárt hurokra fennáll.

Láttuk, hogy a törvény alkalmazása során a körüljárást önkényesen választhatjuk meg.

Az is könnyen belátható, hogy a számítás elején az áramirányok is tetszőlegesen megválaszthatók, mert a helytelen választás nem okoz nagy problémát: az egyenletből kiszámított áram(ok) nagyságára ilyenkor helyes értéket kapunk, csak a rosszul választott áramirány esetén az áramra negatív érték adódik. Így utólag a helyes áramirányokat is meg tudjuk állapítani.

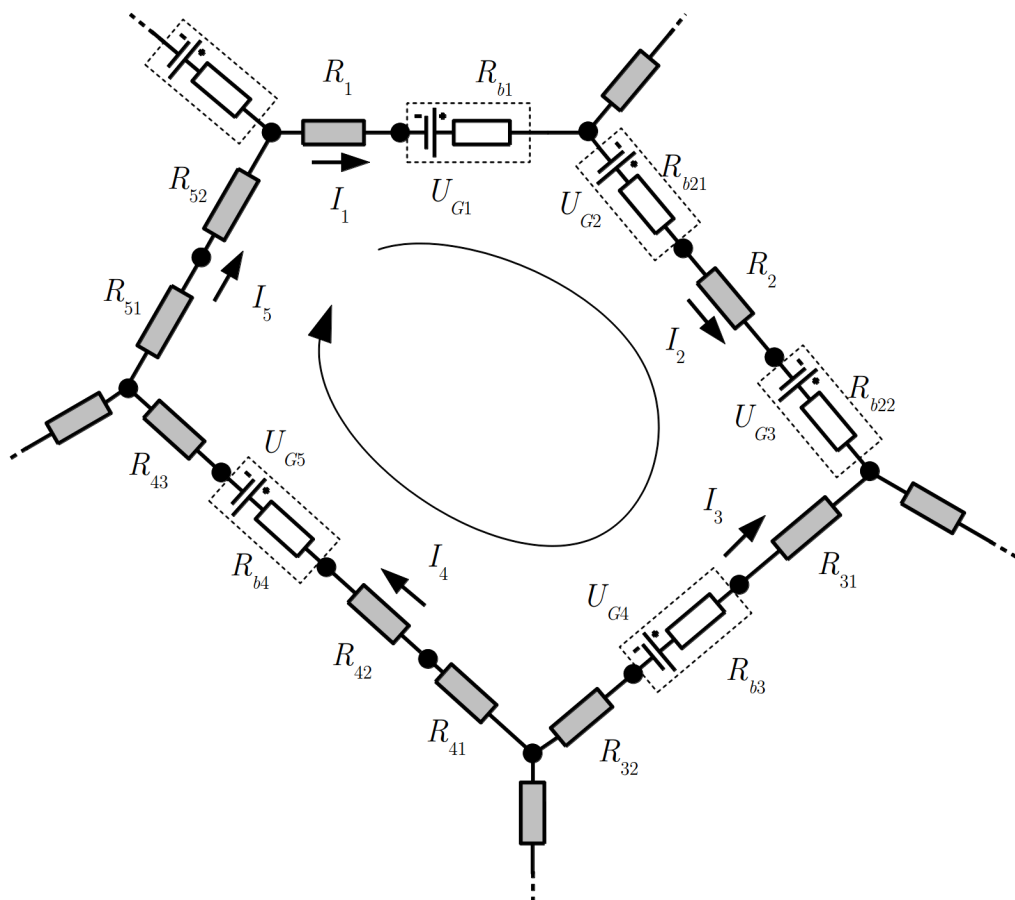
A körüljárás során azt az áramot tekintjük pozitívnak, amely a körüljárással azonos irányban folyik, az ellenkező irányú áram (és így az IR tag is) negatív.

A generátorfeszültség akkor pozitív, ha a körbejárás során a telepen a pozitív pólusból a negatív felé haladunk, fordított haladásnál a generátorfeszültség negatív. (Az elektromotoros erő előjele ennek ellenkezője).

Kimutatható, hogy tetszőleges hálózat esetén annyi független egyenlet írható fel, amennyi az ágak (vagyis az ismeretlen áramok) száma, így a telepek és az ellenállások ismeretében az áramok mindig kiszámíthatók.

A törvény alkalmazását olyan zárt hurok esetén mutatjuk be, amelyet egy bonyolult, elágazásokat is tartalmazó hálózatban választottunk ki (3.34. ábra). A hurkot a csomópontok *ágakra* bontják. Egy ágon belül az áram mindenütt azonos, de a hurok különböző ágaiban az áramok eltérőek lehetnek. Ezért egy hurokban elvileg annyiféle áram folyhat, amennyi a hurok körüljárásakor érintett ágak száma. Az ellenállásokat és a telepeket ismertnek tételezzük fel.

A számítás során az I_1, I_2, \dots illetve U_{G1}, U_{G2}, \dots szimbólumok az áramok- és a generátorfeszültségek nagyságát jelölik ($U_G = |U^*|$), az előjelekre elfogadott megállapodást az egyenletbe beírt előjelekkel vesszük figyelembe.



3.34. ábra. A Kirchhoff törvények összetett áramkörökre

Az ágakban felvett áramirányok- és a megadott körüljárás esetén az itt látható hurokra a következő egyenlet írható fel:

$$I_1 R_1 - U_{G1} + I_1 R_{b1} - U_{G2} + I_2 R_2 + I_2 (R_{b21} + R_{b22}) - U_{G3} - I_3 (R_{31} + R_{32}) - I_3 R_{b3} + U_{G4} + I_4 (R_{41} + R_{42} + R_{43}) + I_4 R_{b4} + U_{G5} + I_5 (R_{51} + R_{52}) = 0. \quad (3.87)$$

Ha az egyazon ágba lévő külső- és belső ellenállásokat az összegükkel helyettesítjük

$$R_{b21} + R_{b22} = R_{b2}, \quad R_{31} + R_{32} = R_3, \quad R_{41} + R_{42} + R_{43} = R_4, \quad R_{51} + R_{52} = R_5, \quad (3.88)$$

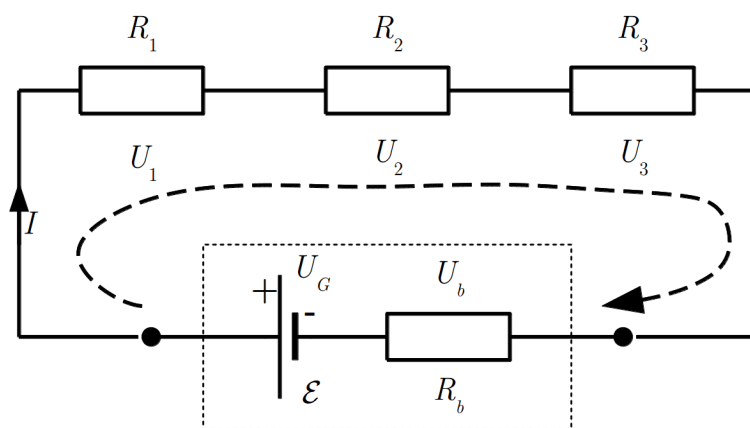
akkor az egyszerűbb

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 + I_1 R_{b1} + I_2 R_{b2} - I_3 R_{b3} + I_4 R_{b4} - U_{G1} - U_{G2} - U_{G3} + U_{G4} + U_{G5} = 0 \quad (3.89)$$

egyenletet kapjuk.

Vegyük észre, hogy az áram meghatározása szempontjából az egyes ágakban található ellenállásokat, amelyeken ugyanaz az áram folyik át (ezek ún. *sorbakapcsolt* ellenállások), helyettesíthetjük az ellenállások összegével, ami az ellenállások *eredőjeként* fogható fel.

3.5.3. A Kirchhoff-törvények alkalmazása



3.35. ábra. A Kirchhoff-törvények alkalmazása egy egyetlen hurokból álló áramkörre

Alkalmazzuk a törvényt először egy egyszerű, egyetlen áramhurokból álló áramkörre, amelyben egy telep, vezetékek és ellenállások vannak (3.35. ábra). Ha az áramkört az áram haladásának irányában járjuk körbe (az ábrán a szaggatott vonal jelzi a körüljárást), és I az áram nagyságát, U_G pedig a generátorfeszültség $U_G = |U^*|$ nagyságát jelenti ($I, U_G > 0$), akkor a fenti előjel-megállapodás szerint az IR szorzatok (ellenállásokon eső feszültségek) pozitívak, a telep generátorfeszültsége pedig negatív. Ennek megfelelően Kirchhoff II. törvénye az

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_b - U_G = 0 \quad (3.90)$$

illetve az

$$U_G = IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_b \quad (3.91)$$

alakot ölti.

Mivel az áramkörben nincs elágazás, az ellenállásokon ugyanaz az áram folyik át (Kirchhoff I. törvénye). Ha bevezetjük az

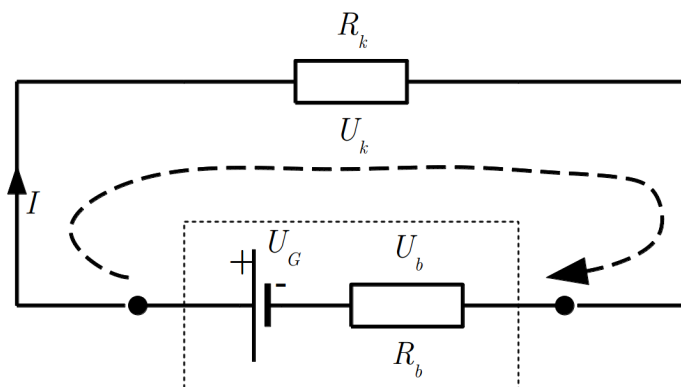
$$R_1 + R_2 + R_3 = R_k \quad (3.92)$$

eredő ellenállást, akkor az egyenlet egyszerűbb alakba írható:

$$U_G = IR_k + IR_b \quad (3.93)$$

Az itt bevezetett R_k ellenállás a telepen kívüli ellenállások összege az áramkörben, amit *külső ellenállásnak* is nevezhetünk.

Az eredő ellenállás bevezetésével a fenti áramkör egyszerűsíthető, amint az a 3.36. ábrán látható.



3.36. ábra. Az egy ágon elhelyezkedő ellenállások az eredő ellenállással helyettesíthetők

Az áramkörre felírt egyenletből kiszámíthatjuk az áramot:

$$I = \frac{U_G}{R_k + R_b}. \quad (3.94)$$

A telep sarkai (kapcsai) közti feszültséget *kapocsfeszültségnek* nevezik, és rendszerint U_K -val jelölik. Ez esetünkben megegyezik a külső ellenállás végei közötti feszültséggel, tehát

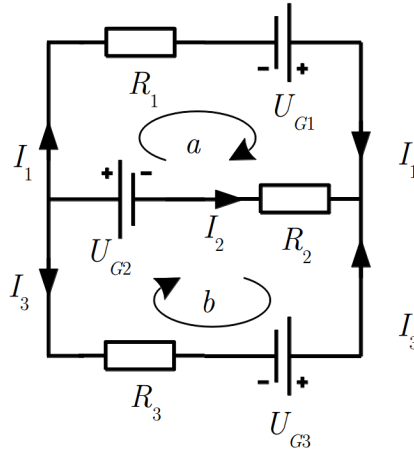
$$U_K = IR \quad (3.95)$$

illetve a huroktörvény alapján

$$U_K = U_G - IR_b. \quad (3.96)$$

Ebben az egyszerű esetben tehát $U_K < U_G$, vagyis a kapocsfeszültség kisebb, mint a generátorfeszültség (elektromotoros erő). A kettő csak akkor egyezik meg, ha a körben nem folyik áram ($I=0$), mert ekkor a fenti egyenletből azt kapjuk, hogy $U_K = U_G$.

Bonyolultabb áramkör esetén több egyenlet felírása szükséges. A 3.37. ábrán látható esetben pl. az áramkör 3 ágból áll. Mivel egy ág minden pontján azonos az áramerősség,



3.37. ábra. Két hurkot és három ágat tartalmazó áramkör

az ábrán látható esetben 3 különböző áramérték lehetséges. Ezek meghatározásához 3 független egyenletre van szükség.

A csomóponti törvényből a bal oldali csomópontra azt kapjuk, hogy

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (3.97)$$

A másik csomópontra ugyanez az egyenlet adódik, tehát a csomópontokra csak egy független egyenlet írható fel.

Az ábrán a -val jelölt hurokra az

$$I_1 R_1 - U_{G1} - I_2 R_2 - U_{G2} = 0 \quad (3.98)$$

egyenletet, a b -vel jelölt hurokra pedig az

$$U_{G2} + I_2 R_2 + U_{G3} - I_3 R_3 = 0 \quad (3.99)$$

egyenletet kapjuk.

A harmadik lehetséges hurok az áramkör külső kontúrja lenne, de könnyen belátható, hogy az erre felírt hurokegyenlet az a és b hurokra felírt egyenletek összege, vagyis nem független egyenlet.

A 3 ismeretlen áram meghatározásához tehát – a várakozásnak megfelelően – 3 független egyenletet tudtunk felírni, így az áramértékek egyértelműen meghatározhatók.

Példaként számítsuk ki a fenti hálózatban folyó áramokat, ha $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = 2$ ohm, $R_3 = 3$ ohm és $U_{G1} = 1$ V, $U_{G2} = 1$ V, $U_{G3} = 1$ V.

Behelyettesítés után az

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ , I_1 - 1 + 2I_2 - 1 &= 0 \\ , 1 - 2I_2 + 1 - 3I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

egyenletrendszer kapjuk, aminek megoldása: $I_1 = 6/11$ A, $I_2 = -8/11$ A, $I_3 = 2/11$ A. Mivel az I_2 áramra negatív értéket kaptunk, ennek irányát rosszul vettük fel: a középső ágban az áram a feltételezettel ellenkező irányú (nagysága a számított érték nagyságával azonos).

Bonyolultabb hálózatokban általában nem igaz, hogy a kapocsfeszültség mindig kisebb, mint a generátorfeszültség. Ennek az az oka, hogy ilyenkor egy telep belső ellenállásán más telepek által keltett áramok is átfolynak, és az így létrejött feszültség módosítja a kapocsfeszültséget. Ha pl. a telepen a saját áramával ellentétes irányú áram folyik át, akkor a kapocsfeszültség nagyobb lehet, mint az elektromotoros erő.

A Kirchhoff-törvények segítségével számos hasznos összefüggés vezethető le. Így például könnyen bebizonyítható, hogy egymással sorba- vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállások helyettesíthetők egy ellenállással, amelyen átfolyó áram és a végei közt mért feszültség azonos az eredeti ellenállásokon átfolyó árammal és az ellenállásor végei közötti feszültséggel. A megfelelő helyettesítő (eredő) ellenállások az alábbi összefüggésekből kaphatók:

$$R_e^{\text{soros}} = \sum_i R_i \quad \frac{1}{R_e^{\text{párh}}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (3.101)$$

(a soros eredményt korábban már beláttuk).

3.5.4. Energiaviszonyok elektromos áramkörben

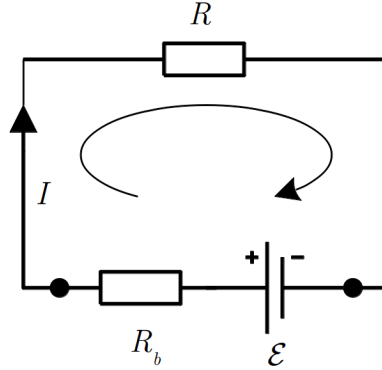
A vezetőben folyó állandó áramot a telepben zajló idegen folyamat által végzett munka tartja fenn. A töltések mozgatására fordított energia a töltések mozgása során hővé alakul. Ezt az energiamérleget a 3.38. ábrán látható, egyszerű áramkör vizsgálatával könnyen számszerűsíthetjük.

Az áramkörre felírva Kirchhoff II. törvényét, az

$$\mathcal{E} = IR + IR_b \quad (3.102)$$

összefüggést kapjuk. Ebből úgy kaphatunk Δt időtartamra vonatkozó energiamérleget, hogy megszorozzuk $I\Delta t$ -vel. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}I\Delta t & = & I^2R\Delta t & + & I^2R_b\Delta t \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{telep} & & \text{hasznos} & & \text{elveszett} \end{array} \quad (3.103)$$



3.38. ábra. Egy egyszerű áramkör az energiaviszonyok vizsgálatára

A bal oldalon a telepben működő *idegen hatás* (az \mathcal{E} elektromotoros erő) által Δt idő alatt végzett *munka* ($W_{\text{össz}}$) áll, ami a jobb oldalon álló munkákra fordítódik. A jobb oldal első tagja a külső ellenálláson (az ún. *fogyasztón*) ugyanennyi idő alatt hővé alakuló energia, amit *hasznos munkának* (W_h) neveznek (ezt lehet pl. világításra, fűtésre, motor hajtására használni). A jobb oldal második tagja a telepben ugyanezen idő alatt hővé alakult energia, ami nem hasznosítható, ez tehát *elvesztett energia* (W_{veszt}). Az energiamérleg ezekkel a jelölésekkel:

$$W_{\text{össz}} = W_h + W_{\text{veszt}} \quad (3.104)$$

Hasonló összefüggést kapunk a teljesítményekre is, ha a munkák összefüggését elosztjuk a Δt idővel:

$$\mathcal{E}I = I^2R + I^2R_b. \quad (3.105)$$

A fenti jelölésekkel a teljesítménymérleg:

$$P_{\text{össz}} = P_h + P_{\text{veszt}}. \quad (3.106)$$

Innen kiszámítható az energiahasznosítás hatásfoka:

$$\eta = \frac{P_h}{P_{\text{össz}}} = \frac{R}{R + R_b}. \quad (3.107)$$

Látható, hogy a hatásfok akkor lenne 1, ha a telepnek nem lenne belső ellenállása. Mivel ez a gyakorlatban nem valósítható meg, a hatásfok mindig kisebb 1-nél.

Egy telep működésének fontos jellemzője, hogy adott külső ellenállás esetén mennyi a belőle kivehető hasznos teljesítmény. Ezt a

$$P_h = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + R_b)^2}R \quad (3.108)$$

összefüggésből számíthatjuk ki. Látható, hogy a hasznos teljesítmény nem csak a telep adataitól (\mathcal{E} , R_b) függ, hanem az alkalmazott külső ellenállástól is: $P_h = P_h(R)$. Mivel ez a függvény nagy- és kis R értékeknél egyaránt nullához tart, várható, hogy valamilyen R értéknél maximuma van. A maximumhely feltétele a differenciálhányados eltűnése:

$$\frac{dP_h}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{R_b - R}{(R + R_b)^3} = 0. \quad (3.109)$$

Maximum tehát akkor van, ha $R = R_b$, vagyis a legnagyobb hasznos teljesítmény akkor vehető ki a telepből, ha a külső ellenállás egyenlő a telep belső ellenállásával. A hasznos teljesítmény növelése érdekében tehát a fogyasztót az ellenállás szempontjából *illeszteni* kell az áramforráshoz. Megjegyzendő, hogy a maximális kivehető teljesítmény ($R = R_b$) esetén az energiahasznosítás hatásfoka éppen $1/2$. A magasabb hatásfok eléréséhez a fogyasztó ellenállását növelni kell, ezzel azonban mind a hasznos teljesítményt mind a veszteséget csökkentjük.

3.3. Megjegyzés *Eddig mindig feltételeztük, hogy az áramköri elemeket összekötő vezetékek ellenállása nulla (pontosabban: elhanyagolható). Felmerül a kérdés, hogy valódi, ellenállással rendelkező vezetékek esetén hogyan jut el az energia a fogyasztóhoz, hiszen az elektromos erőter munkája ilyenkor a vezetőben termikus energiává (hővé) alakul. A választ a vezető körül kialakuló elektromos erőter vizsgálata adja meg. A véges (nem nulla) ellenállású vezetőben az elektromos térerősség nem merőleges a vezető felületére, hanem – ahogy korábban megállapítottuk – van egy áramirányú, tangenciális- és egy felületre merőleges normális komponense. A hővé alakuló energiarész a tangenciális komponens által végzett munkából származik, a normális komponens a töltéseken nem végez munkát, és – mint később látni fogjuk – az energiaszállítás éppen ezzel a normális irányú erőterrel hozható kapcsolatba.*

4. fejezet

A mágneses kölcsönhatás

Azt a kölcsönhatást, amelyet később mágnesesnek neveztek el, először bizonyos ásványok darabjai között fellépő – a gravitációs és az elektromos kölcsönhatáshoz hasonló, de attól függetlenül fellépő – erőként észlelték. Ezeket az anyagokat az ásvány lelőhelyéről (Magnézia, görög város Kisázsiában) *mágneses anyagoknak*, a kölcsönhatást *mágneses kölcsönhatásnak* nevezték el. A mágneses kölcsönhatást – az elektromos kölcsönhatás mintájára – kezdetben valamilyen speciális „mágneses töltés” jelenlétének tulajdonították. A mágneses anyagokból készült eszközök az ún. *mágnesek*, amelyeket a gyakorlatban is használnak.

A mágneses anyagból készült, tengelyre szerelt, elfordulásra képes lemez vagy tű a Föld adott helyén jól meghatározott irányba, a földrajzi észak-déli irányba áll be, vagyis a Föld is képes mágneses hatást kifejteni (mint kiderült a Föld egy óriási mágnesként viselkedik). A földrajzi irány meghatározására szolgáló mágneses eszközök az *iránytűk*, amelyeket tájékozódásra igen régóta (a kínaiak kb. 2000 éve) használnak.

Kísérlet: Állandó mágnesek kölcsönhatása

Először mágnesekkel és iránytűkkel kísérletezünk. Az általunk használt mágnesek és iránytűk két végét a megkülönböztethetőség céljából különböző színűre – kékre illetve pirosra – festettük.

Ha észak-déli irányba beállt iránytűhöz mágneset közelítünk, akkor az iránytű kitér eredeti irányából, és a mágnes által meghatározott új helyzetbe kerül. A mágnes piros vége maga felé vonzza az iránytű kék végét, a mágnes kék vége maga felé vonzza az iránytű piros végét, vagyis a különböző színű végek vonzzák egymást. Az is megállapítható, hogy azonos színű végek taszítják egymást.

Rúd mágneseket az asztalra téve ugyanezt állapíthatjuk meg. ♦

Ezek a kísérletek valóban azt sugallják, hogy kétféle mágneses töltés létezik, amelyek közül az egyik a mágnes piros-, a másik pedig a mágnes kék végén található.

Kísérlet: Mágneses dipólus nem osztható két monopólusra

Mágnesrudat, vagy mágneses tűt kettétörve a két darab továbbra is kétpólusú mágnesként viselkedik. ♦

Ha egy mágnes feldarabolását tovább folytatjuk, a keletkezett kis darabok mindvégig kétpólusú mágnesként, ún. *mágneses dipólusként* viselkednek, tehát a feltételezett kétféle mágneses töltést nem tudjuk szétválasztani. Ez a tapasztalat megkérdőjelezi a mágneses töltések létezését.

Kísérlet: Acél tárgyak mágneseződése

Eredetileg nem mágneses acél rudat vagy kötöttűt mágneshez érintve azok mágnesként viselkednek. A mágnest eltávolítva mágneses viselkedésük megszűnik. ♦

Ezt a tapasztalatot, hogy bizonyos anyagok mágnes hatására mágnessé válnak, a későbbiekben felhasználjuk a mágneses hatások vizsgálatánál.

Kísérlet: Elektromos áram mágneses tere

Áramkört állítunk össze, amelynek van egy kb. 1 m hosszú egyenes szakasza, ami két állványra szerelve a levegőben halad az asztal felett. Az egyenes szakasz alá elhelyezünk egy iránytűt, és a vezetőt az iránytűvel párhuzamosan állítjuk be. Ezután az egyenes vezetőben áramot hozunk létre. Az iránytű kimozdul eredeti irányából, és minél erősebb az áram, annál nagyobb szöggel tér ki (igen nagy áram esetén majdnem merőleges lesz a vezetőre).

Az áram irányát ellenkezőre változtatva az iránytű elfordulása ellenkező irányú lesz.

Adott áramirány esetén az iránytűt a vezető alatt- majd a vezető fölött elhelyezve az iránytű a két esetben ellenkező irányba áll be. ♦

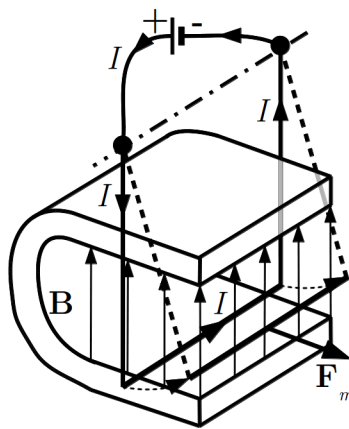
Ez a kísérlet (első megvalósítójáról ¹ *Oersted-kísérletnek* nevezik azt mutatja, hogy a mágneses kölcsönhatás nem csak mágnesek, hanem mágnes és elektromos árammal átjárt vezető között is fellép, vagyis az elektromos áram is képes mágneses hatást kifejteni.

A kísérlet alapján azt a fontos következtetést is levonhatjuk, hogy az iránytű az áram-vezető mellett meghatározott irányba áll be, és ez az irány függ a vezetőhöz viszonyított helyzettől, adott helyen pedig az áram irányától.

¹ Hans Christian Ørsted (1777-1851) dán fizikusról

Kísérlet: Mágneses tér hatása árammal átjárt vezetőre

Áramkört állítunk össze, amelynek van egy olyan U-alakú szakasza, ami szabadon lengeni tud (4.1. ábra), és az U-alakú vezető vízszintes részét egy patkó alakú mágnes két szára között helyezzük el. Ha a vezetőben áramot hozunk létre, akkor a vezető az egyensúlyi állapotából (az U két szára eredetileg függőleges helyzetű) kitér, és új egyensúlyi helyzetet foglal el, amelyben az U két szára a függőlegessel valamilyen szöget zár be (4.1. ábra). Az áram irányát megfordítva, a kitérés ellenkező irányú lesz. ♦



4.1. ábra. Mágneses tér hatása árammal átjárt vezetőre

Kísérlet: Árammal átjárt vezetők kölcsönhatása

Az előző kísérletben használt, lengeni képes U-alakú vezető mellé egy ugyanilyent helyezünk el úgy, hogy a vezetékek vízszintes részei egymással párhuzamosak legyenek. Ha a két vezetőben egyirányú áramot hozunk létre, akkor azok vonzzák egymást, és vízszintes részeik összetapadnak. Ellenkező irányú áramok esetén a vezető taszítják egymást, és vízszintes részeik eltávolodnak egymástól. ♦

Ez a kísérlet azt mutatja, hogy nem csak az áramvezető fejt ki mágneses erőhatást egy mágnesre, hanem egy mágnes is hat egy áramvezetőre, vagyis a mágnesek és áramvezetők között kölcsönhatás áll fenn. Ebből a kísérletből látható, hogy áramvezető és áramvezető között hasonló kölcsönhatás lép fel, mint mágnes és áramvezető között.

A katódsugarak vizsgálatánál láttuk, hogy mágnessel a mozgó elektronok eltéríthetők eredeti mozgásirányuktól, vagyis a mágnes a szabadon mozgó töltésekkel is kölcsönhatásba lép. Ennek alapján feltételezhetjük, hogy az áramvezetőre ható erő is a vezetőben mozgó töltésekre ható erő következménye (a töltésekre ható erő mozgatja a vezetőt).

A kísérletek alapján arra a következtetésre jutottak, hogy mágneses kölcsönhatás mágnes és mágnes között, áramvezető (illetve mozgó töltés) és mágnes között, továbbá áramvezető és áramvezető (illetve mozgó töltés és mozgó töltés) között egyaránt fellép.

Ma már tudjuk, hogy a mágneses kölcsönhatás alapvetően mozgó elektromos töltések speciális kölcsönhatása, még azokban az esetekben is, amikor ez egyáltalán nem nyilvánvaló (pl. mágneses anyagok esetén).

4.1. Mágneses erőter és mágneses indukcióvektor vákuumban

A mágneses kölcsönhatás számszerű jellemzésére – különböző megnyilvánulásainak vizsgálata alapján – többféle lehetőség is van. Mi ezek közül azt választottuk ki, amelyben a mágneses kölcsönhatásban résztvevő testek (mágneses anyagok, elektromos áramok) által létrehozott mágneses hatást azzal jellemezzük, hogy ezek a testek milyen erőt fejtenek ki a környezetükben mozgó pontszerű elektromos töltésre. Tehát tulajdonképpen – hasonlóan, mint az elektromos kölcsönhatás vizsgálatánál – itt is egy erőmérő-töltést használunk a mágneses hatások jellemzésére.

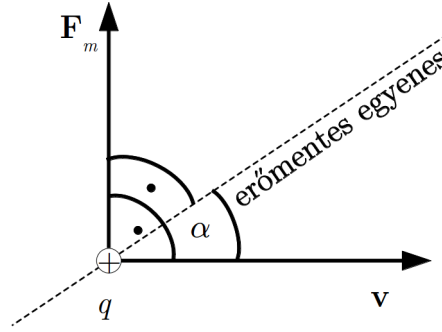
Az egyszerűség kedvéért most is azzal az esettel kezdjük a vizsgálatainkat, amikor a mágneses hatásokat kifejtő testek *vákuumban* vannak, vagyis körülöttük *semmilyen anyag nincs*. A valóságban ezeket a vizsgálatokat levegőben végezték el, és a törvényeket is ilyen körülmények között állapították meg. Kiderült azonban, hogy a levegő jelenléte – különleges pontosságot igénylő esetektől eltekintve – nem befolyásolja az eredményeket.

A vizsgálatokból kiderül, hogy a mágneses testek maguk körül erőteret hoznak létre, amelynek ismertető jele az, hogy itt a *mozgó töltésekre* erő hat. Ez a *mágneses erőter*, amely ebben a vonatkozásban hasonló az elektromos erőterhez, de – mint látni fogjuk – jellemzése jóval bonyolultabb.

A mágneses erőter számszerű jellemzése érdekében vizsgáljuk meg, hogy a \mathbf{v} sebességgel mozgó pozitív töltésű q mérőtöltésre ható erő mitől, és hogyan függ.

Ha az erőter egy adott helyén a mérőtöltés adatait (töltés, sebességvektor) változtatjuk, akkor az alábbi tapasztalatokat szerezhethetjük (4.2. ábra):

- A mozgó töltésre ható mágneses erő (\mathbf{F}_m) arányos a töltés nagyságával, a mozgás sebességének nagyságával, és mindig merőleges a sebességvektor irányára.
- A mozgó töltésre ható erő függ a mozgás (vagyis a sebességvektor) irányától, és mindig található egy olyan helyzetű egyenes, amelyen mozogva, a töltésre nem hat erő (az ábrán „erőmentes egyenes”).



4.2. ábra. Egy mozgó töltésre ható erő iránya

- Ennek az „erőmentes” egyenesnek az a különlegessége, hogy az ettől eltérő irányban mozgó töltésre ható erő mindig merőleges erre az egyenesre, az erő nagysága pedig arányos a sebességvektor és az „erőmentes” egyenes által bezárt szög (α) szinuszával.

A fenti tapasztalatok egy részét az ábra jelöléseivel az alábbi összefüggéssel fejezhetjük ki:

$$F_m \sim vq \sin(\alpha). \quad (4.1)$$

Ha az arányossági tényezőt B -vel jelöljük, akkor az összefüggés így alakul

$$F_m = Bvq \sin(\alpha). \quad (4.2)$$

A fenti arányosságból az következik, hogy a B tényező nem függ a mérőtöltés adataitól, hiszen bármelyik adatot megváltoztatva az erő arányosan nő, így a

$$B = \frac{F_m}{vq \sin(\alpha)} \quad (4.3)$$

hányados változatlan marad. A B arányossági tényezőt tehát a mágneses erőteret létrehozó tárgyak határozzák meg, így azt a mérés helyén létrejött mágneses erőter jellemzőjének tekinthetjük.

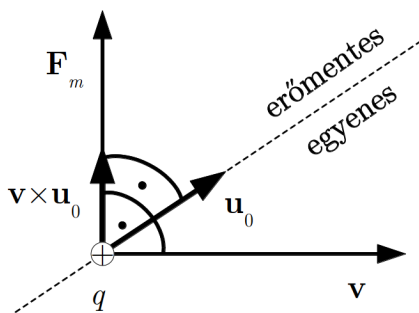
Az erőhatás teljes leírásához természetesen hozzátartozik az erővektor irányának megadása is. Ennek érdekében jellemezzük az „erőmentes” egyenes helyzetét egy egységvektorral (\mathbf{u}_0). Ennek meghatározásánál azonban el kell döntenünk, hogy az egyenesen a két lehetséges irány közül melyiket válasszuk az egységvektor irányaként. Defináljuk ezt az irányt a következőképpen. Tudjuk, hogy a mérőtöltésre ható \mathbf{F}_m erő merőleges mind a \mathbf{v} , mind pedig az \mathbf{u}_0 vektorra, ezért vektorszorzatuk egy, az erővel párhuzamos egyenesen van. Válasszuk az \mathbf{u}_0 vektor irányát úgy, hogy a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}_0$ vektorszorzat egyirányú

legyen a mérőtöltésre ható \mathbf{F}_m erővektorral (4.3. ábra). Mivel ennek a vektorszorzatnak a nagysága $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}_0| = v \sin(\alpha)$, ezért a mágneses erő nagysága az

$$F_m = Bqv \sin(\alpha) = |F_m| = Bq|\mathbf{v} \times \mathbf{u}_0| \quad (4.4)$$

alakba írható. A mérőtöltésre ható mágneses erő tehát vektori alakban is felírható az \mathbf{u}_0 egységvektor segítségével:

$$\mathbf{F}_m = Bq\mathbf{v} \times \mathbf{u}_0. \quad (4.5)$$



4.3. ábra. A Lorentz erő számítása

Mivel a tapasztalat szerint az „erőmentes” egyenes helyzete sem a mérőtöltés adataitól függ, hanem csak a mágneses erőteret létrehozó tárgytól, az erőter jellemzéséhez az erő nagyságát befolyásoló B skalár mellett, az erőmentes egyenes helyzetének ismerete is hozzátartozik. Ezért a mágneses erőter jellemzésére a $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_0$ vektort használjuk, amelyet *mágneses indukcióvektornak* nevezünk. Ezzel a mérőtöltésre ható erő az

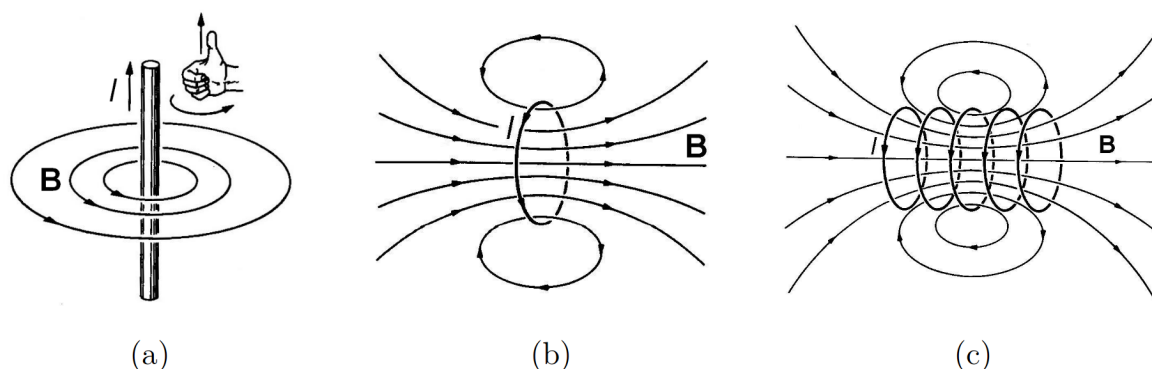
$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.6)$$

alakot ölti (Lorentz erő). Ez a vektoregyenlet az erő nagyságára ugyanazt a kifejezést adja, mint a tapasztalati úton megállapított összefüggés, ezen túlmenően pedig – ugyancsak a tapasztalattal egyezésben – az erő irányát is megadja.

A fenti definíció alapján a mágneses indukcióvektor SI-egysége: $1 \frac{\text{Ns}}{\text{mC}} = \frac{\text{N}}{\text{mA}} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2\text{A}} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ tesla} = 1 \text{ T}$ ². A \mathbf{B} vektorokat pontról-pontra meghatározva, a mágneses erőteret is szemléltethetjük vonalakkal, amelyeknek az érintője az adott pontban megadja az indukcióvektor irányát. A \mathbf{B} vektor vonalait *indukcióvonalaknak* nevezik.³

²az egység a nevét a kiváló szerb fizikusról, Nikola Tesláról (1856-1943) kapta

³ Az indukcióvonalakat gyakran „mágneses erővonalaknak” nevezik, annak ellenére, hogy ezek – szemben az elektromos erővonalakkal – nem adják meg a mozgó töltésre ható erő irányát.



4.4. ábra. Egyenes vezető (a), áramhurok (b) és egyenes tekercs (c) mágneses tere

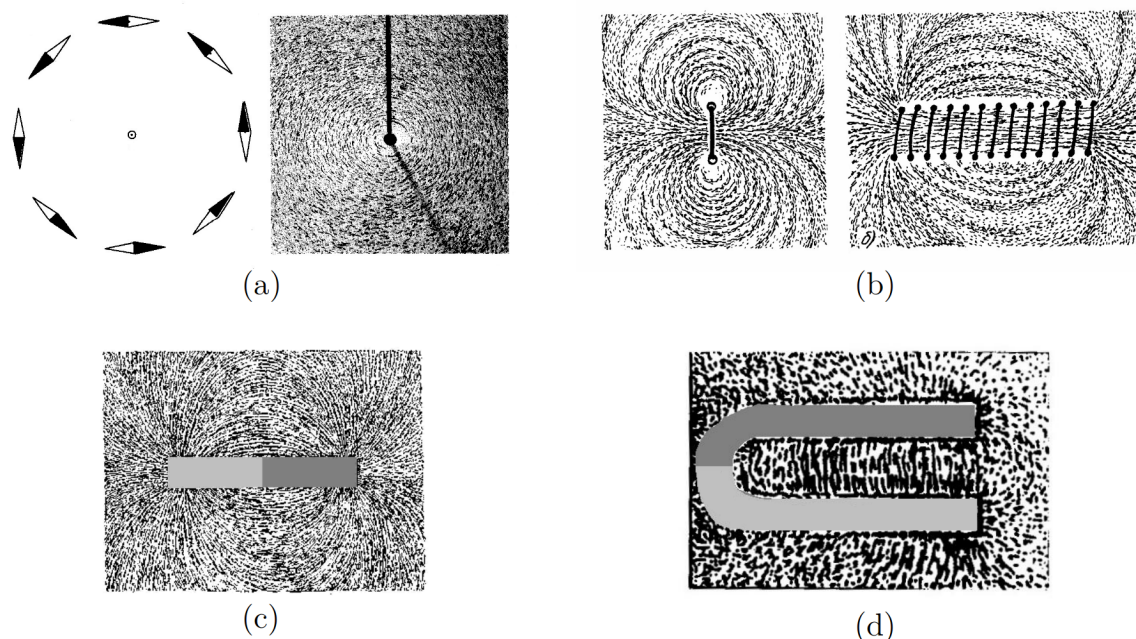
A 4.4. ábrákon egy egyenes vezetőkben, egy kör alakú áramhurokban, és egy egyenes tekercsben folyó áram által létrehozott mágneses erőter indukcióvonalait mutatjuk be. A vázlatos ábrákról látható, hogy – szemben az elektrosztatikus erőter erővonaljaival, amelyek a teret keltő töltésekben kezdődnek vagy végződnek – a mágneses erőteret jellemző \mathbf{B} vektor vonalai zárt hurkok, amelyek az erőteret létrehozó elektromos áramot veszik körül.

A bal oldali ábrán látható az az ún. *jobbkezsabály* is, amivel az áram körül létrejött indukcióvonalak irányát meghatározhatjuk. Látható, hogy az egyenes vezető átellenes oldalainál az indukcióvektor ellenkező irányú. Ezzel az eredménnyel érdemes összevetni azt a tapasztaltunkat (Oersted-kísérlet), hogy az egyenes vezető felett- és alatt elhelyezett iránytű ellenkező irányba áll be. Ez a kísérlet, és számos más tapasztalat is azt mutatja, hogy az iránytű az indukcióvektor irányával párhuzamosan áll be, vagyis az adott helyen megmutatja az indukcióvektor irányát. Ez teszi lehetővé az indukcióvonalak egy egyszerű szemléltetését.

Kísérlet: A mágneses indukcióvonalak szemléltetése vasreszelékkel

Egyenes áramvezető körül elhelyezkedő iránytűk a 4.5. ábra szerint helyezkednek el (az áram merőleges a rajz síkjára). Ha mágneses erőterbe helyezett vízszintes, sík lapra vasreszeléket szórunk, akkor a vasszemcsék apró mágnesekké, iránytűkké válnak, és a mágneses erőterben az indukcióvonalak mentén rendeződnek. Ezzel a módszerrel bemutatjuk a vasreszelék által kirajzolt ábrát az egyenes vezető, kör alakú áramhurok, egyenes tekercs, rúd-mágnes és patkómágnes körül. ♦

Látható, hogy a tekercs és a rúd-mágnes erőtere között hasonlóságok vannak. Az is megállapítható, hogy a tekercs belsejében és a patkómágnes szárai között közelítőleg homogén erőter alakul ki.



4.5. ábra. Egyenes vezető (a), köráram és egyenes tekercs (b), rúd-mágnes (c) és patkó-mágnes (d) mágneses tere

4.2. Áramvezetőre ható erő mágneses erőterben

A kísérletek azt mutatják, hogy mágneses erőterben nem csak szabadon mozgó töltésre hat erő, hanem árammal átjárt vezetőre is. A jelenség kézenfekvő magyarázata az lehet, hogy a vezetőben mozgó töltésekre fellépő erő közvetetten a vezetőn is megjelenik, vagyis az áramvezetőre ható mágneses erő a benne mozgó töltésekre ható erők eredőjével azonos. Ha ez így van, akkor a mozgó töltésre ható erőre kapott összefüggés segítségével kiszámíthatjuk az áramvezetőre ható erőt is. Ha ezt az erőt megmérjük, akkor a számítás eredményével összevetve, ellenőrizhetjük a kiinduló feltevésünket is.

Az erők számításánál feltételezzük, hogy a vizsgált vezető környezetében valamilyen mágneses anyag vagy áram létrehozott egy mágneses erőteret, amit ismerünk, vagyis az erőteret jellemző \mathbf{B} mágneses indukcióvektor mindenütt adott.

A fenti feltevés alapján a vezetőre ható erőt az egyes töltésekre fellépő erők összegzésével kaphatjuk meg.

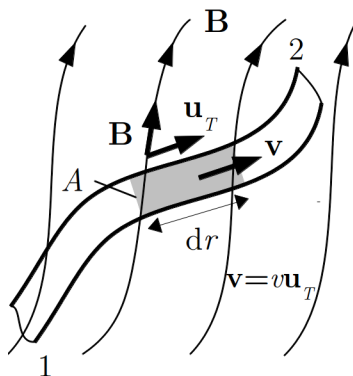
A vezetőben v sebességgel mozgó egyetlen q töltésre ható erő

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.7)$$

Ha a vezetőben a töltéshordozók térfogati sűrűsége $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ (töltéshordozó-szám/térfogat),

akkor a kiszemelt, dr hosszúságú (4.6. ábra) térfogatelemben mozgó töltéshordozók száma

$$\Delta N = n\Delta V = nA dr. \quad (4.8)$$



4.6. ábra. Árammal átjárt infinitezimális vezető szakaszra ható erő mágneses térben

Ha feltételezzük, hogy az összes töltés ugyanolyan átlagos sebességgel mozog, és a dr szakasz olyan rövid, hogy azon belül az indukcióvektor nem változik, akkor a töltésekre ható erők mind párhuzamosak (az ábra síkjára merőlegesen kifelé mutatnak), így a vezetőszakaszra ható eredő erő

$$d\mathbf{F} = \Delta N \mathbf{F}_1 = nA dr \mathbf{F}_1 = qnA \mathbf{v} \times \mathbf{B} dr. \quad (4.9)$$

Egy véges hosszúságú (az ábrán 1-2) vezetődarabra ható erőt az egyes elemi szakaszokra ható erők összegzésével (integrálásával) kapjuk:

$$\mathbf{F} = \int_1^2 qAn \mathbf{v} \times \mathbf{B} dr. \quad (4.10)$$

Vezessük be a $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T$ vektort, ahol \mathbf{u}_T a töltéshordozók sebességének – és egyben a vezető érintőjének – irányába mutató egységvektor, és vegyük figyelembe, hogy a vezetőben folyó áram erőssége $I = qnAv$. Ezzel a *vezetőre ható erő* kifejezése így alakul:

$$\mathbf{F} = \int_1^2 I \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dr = I \int_1^2 \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dr. \quad (4.11)$$

Az áramerősség azért emelhető ki, mert Kirchhoff I. törvénye szerint I a vezető minden helyén ugyanakkora. Ez az összefüggés tetszőleges alakú és hosszúságú vezetőre érvényes, de bonyolult alakú vezető esetén nehezen számítható ki.

Egyszerűen megkapható egy l hosszúságú, *egyenes vezetőszakaszra homogén mágneses erőterben* ható erő, hiszen ekkor az $\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}$ vektorszorzat a vezető mentén mindenütt ugyanaz lesz, így írhatjuk, hogy

$$\mathbf{F} = I \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} \int_1^2 dr. \quad (4.12)$$

Az itt szereplő integrál a vezető mentén történt elmozdulások összege, ami éppen a vezető l hosszával egyenlő, így végül az

$$\mathbf{F} = Il \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} \quad (4.13)$$

végeredményt kapjuk. A vezetőre ható erő – a töltésre ható erő irányával összhangban – merőleges a vezetőre és a mágneses indukcióvektorra is.

A vezetőszakaszra vonatkozó összefüggéssel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az áram mindig zárt hurokban folyik, ezért egy vezetőre mágneses erőterben ható erő mindig egy *áramhurokra* fellépő erőt jelent. A vezető egy szakaszára ható erő tehát csak akkor azonosítható a vezetőre ható erővel, ha a mágneses erőter valóban csak erre a szakaszra fejt ki erőt.

Az erő kifejezésének áramhurokra érvényes, általános alakja

$$\mathbf{F} = I \oint_L \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dr, \quad (4.14)$$

ahol az integrálás (összegzés) a teljes, zárt L vezetőhurok mentén történik.

Érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor egy vezetőhurok homogén mágneses erőterben van. Ekkor az integrálásnál (összegzésnél) a mindenütt azonos \mathbf{B} kiemelhető:

$$\mathbf{F}_{\text{hurok}}^{\text{homogén}} = I \oint_L \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dr = I \left(\oint_L \mathbf{u}_T dr \right) \times \mathbf{B}. \quad (4.15)$$

Ez az összefüggés tovább alakítható, ha észrevesszük, hogy a $\oint_L \mathbf{u}_T dr$ integrálban szereplő $\mathbf{u}_T dr = d\mathbf{r}$ mennyiség éppen az elemi elmozdulásvektor. Az integrál tehát nem más, mint az elmozdulásvektorok vektori összege az L zárt hurok körüljárása során. Mivel a körüljárás végén visszatérünk a kiindulópontba, az elmozdulásvektorok összege nulla, tehát $\oint_L \mathbf{u}_T dr = 0$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{F}_{\text{hurok}}^{\text{homogén}} = I \left(\oint_L \mathbf{u}_T dr \right) \times \mathbf{B} = 0, \quad (4.16)$$

vagyis homogén erőterben az áramhurokra fellépő erők *eredője* nulla. Ez az állítás nem zárja ki, hogy a vezetőhurokra fellépjen olyan forgatónyomaték, ahol az eredő erő nulla (pl. erőpár).

4.3. Áramhurokra ható forgatónyomaték

Egy áramhurokra az eredő erő mellett általában forgatónyomaték is fellép. Itt a leg-egyszerűbb esetet tárgyaljuk, amikor a mágneses erőter homogén. Ekkor az áramhurokra ható eredő erő nulla, de forgatónyomaték felléphet.

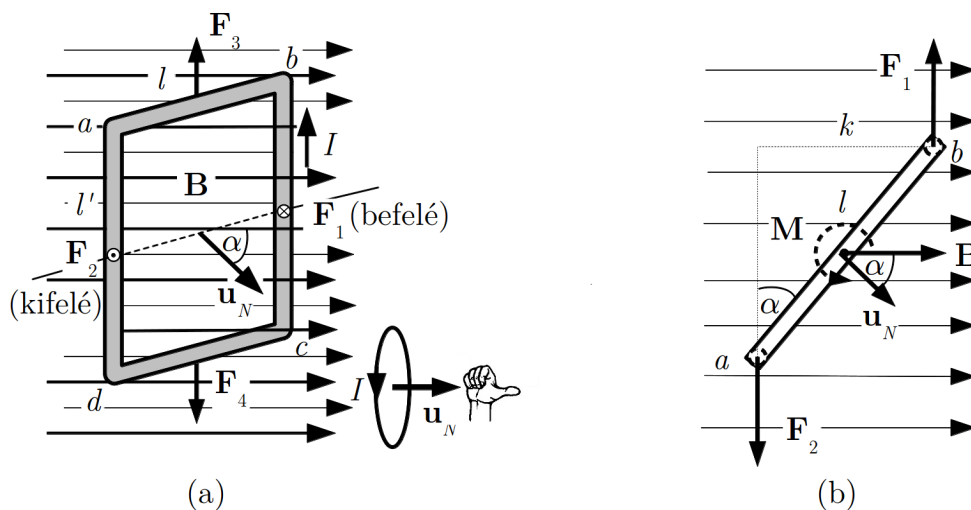
Számítsuk ki a forgatónyomatékot abban az egyszerű esetben, amikor a homogén mágneses erőterben elhelyezett áramhurok téglalap alakú, l és l' oldalhosszakkal, és az egyik szembelevő oldalpár (l') merőleges a mágneses indukcióvektorra (4.7. ábra). Az l hosszúságú oldalakra ható erők azonos nagyságúak és ellentétes irányúak ($\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_4$), ezért eredőjük nulla, mivel pedig egy egyenesen működnek, eredő nyomatékuk sincs (4.7. (a) ábra). Az l' hosszúságú oldalakra ható erőkre szintén érvényes, hogy $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, de ezeknek az erőknek a nyomatéka nem nulla. A két erő azonos nagysága

$$F_1 = F_2 = F = Il'B. \quad (4.17)$$

A 4.7. (b) ábrán a keret felülnézetben mutatjuk, ahol jól látható a keretre ható erőpár, amely a keretet a nyíl irányában forgatja. Az erőpár forgatónyomatékának nagysága

$$M = Fk = Fl \sin(\alpha), \quad (4.18)$$

ahol α a keret állását megadó szög.



4.7. ábra. Az áramhurokra ható forgatónyomaték számítása

Az erő kifejezését behelyettesítve, és felhasználva, hogy a zárt hurok felülete $A = ll'$, a forgatónyomaték nagyságára azt kapjuk, hogy

$$M = IAB \sin(\alpha). \quad (4.19)$$

A keret felületének állását megadhatjuk a felületre merőlegesen felvett \mathbf{u}_N egységvektorral is, amelynek irányát az áram irányához illesztjük az ábrán látható jobbkézszabálynak megfelelően. Mivel a forgatónyomaték kifejezésében szereplő α szög megegyezik az indukcióvektor és a felületre merőleges \mathbf{u}_N vektor által bezárt szöggel, ezért a forgatónyomaték az alábbi vektoregyenlet formájában is felírható:

$$\mathbf{M} = I A \mathbf{u}_N \times \mathbf{B}. \quad (4.20)$$

Ez az összefüggés közvetlenül megadja az áramhurokra, illetve a vezetőkeretre ható forgatónyomaték-vektort. A 4.7. (b) ábra alapján belátható, hogy az így kapott nyomatékvektor a rajz síkjából kifelé mutat, tehát valóban a berajzolt nyíl irányában forgat. Ez az eredmény – bár levezetésénél speciális alakú vezetőkeretet alkalmaztunk – bármilyen alakú síkbeli áramhurokra érvényes⁴.

A forgatónyomatékot eszerint az áram és a vezetőkeret által körülzárt felület nagysága mellett a keret síkjának (illetve felületvektorának) az indukcióvektorhoz viszonyított állása szabja meg. A keret akkor van egyensúlyban, amikor a rá ható forgatónyomaték nulla, vagyis amikor $\alpha = 0$. Ez azt jelenti, hogy a mágneses erőter az árammal átjárt vezetőkeretet addig forgatja, amíg a keret felületvektora (normálisa) párhuzamos nem lesz az indukcióvektorral.

Az árammal átjárt forgatható vezetőkeret ilyen viselkedését kísérletileg is igazolni lehet.

Kísérlet: Áramhurok beállása mágneses térben

Függőleges tengely körül forgatható, árammal átjárt vezető kerethez mágnesrudat közelítve, a keret a rúd irányára merőlegesen áll be, vagyis a keret felületére merőleges felületvektor a mágneses indukcióvektorral párhuzamos irányba fordul (a mágnesrúdban és a végéhez közeli helyeken a mágneses indukcióvektor párhuzamos a rúd tengelyével). ♦

A vezetőkeretre mágneses erőterben fellépő forgatónyomaték lehetőséget ad elektromos energiának mechanikai munkává való átalakítására, hiszen a keretben folyó áram hatására jön létre az elfordulás. Némi nehézséget okoz, hogy a fent tárgyalt esetben a keret maximum egy félfordulatot tesz csak meg, azután igyekszik a nyomatéokra vonatkozó egyenlet által meghatározott egyensúlyi helyzetbe beállni. Ha azonban az egyensúlyi helyzet elérése pillanatában mindig megfordítjuk a keretben folyó áram irányát, akkor a keret mindig továbbfordul, és így folyamatos forgómozgás hozható létre (az áram irányváltoztatásának hagyományos módszere az ún. kommutátor alkalmazása, amely ezt a

⁴ Szabálytalan alakú hurok helyettesíthető egymáshoz illeszkedő téglalap alakú hurkokkal. A felület belsejében egymással érintkező téglalap-oldalak hatása kiesik (ellenkező irányú áramok), csak az eredeti hurkot közelítő lépcsős hurok marad. Homogén erőterben az egyes téglalapokra ható nyomatékok összegzése végül a fenti eredményt adja, ahol A az eredeti hurok teljes felülete.

feladatot mechanikai úton oldja meg). Lényegében ezen alapul az *egyenáramú elektromos motor* működése.

A vezetőkeretre ható forgatónyomaték arányos a keretben folyó árammal, ezért ha ismert mágneses erőterben egy ismert keretre ható forgatónyomatékot megmérjük (pl. úgy, hogy egy torziós szállal vagy spirálrugóval kompenzáljuk), akkor a fenti összefüggés alapján a keretben folyó áram meghatározható. Ezen alapul az *árammérésre* használt mutatós műszerek működése.

4.4. Mágneses dipólus

Az áramhuroknak az a viselkedése, hogy a hozzá rendelt felületvektor beáll az indukcióvektor irányába, hasonlít a mágneses anyagból készült iránytű viselkedéséhez, ami szintén az indukcióvektorral párhuzamosan áll be. Ráadásul az áramhurok és a kétpólusú mágnes (mágneses dipólus) erőtere is hasonlít egymáshoz. Ez adja az alapját annak, hogy az áramhurokot *mágneses dipólusnak* nevezik.

4.4.1. A mágneses dipólus jellemzése, a mágneses dipólmomentum

A mágneses dipólus bevezetése mellett szól még egy analógia: elektromos erőterben az elektromos dipólus szintén beáll az elektromos erőteret jellemző vektor, az elektromos térerősség irányába. Ezt az analógiát felhasználva vezették be azt a vektormennyiséget, amellyel a mágneses dipólust jellemezni lehet, ami megadja a dipólus beállításának irányát és az áramhurokot jellemző adatokat (a hurokban folyó áramerősséget és a hurok nagyságát). Ezt a mennyiséget *mágneses dipólmomentumnak* nevezik, és definíciója az elektromos dipólus-analógián alapul.

Mint azt korábban láttuk, az elektromos dipólusra elektromos erőterben ható forgatónyomaték:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{d}_e \times \mathbf{E}. \quad (4.21)$$

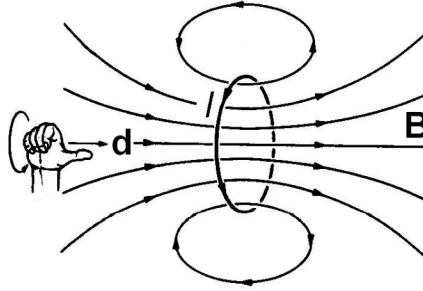
A mágneses dipólusra mágneses erőterben fellépő forgatónyomaték viszont

$$\mathbf{M}_m = I \mathbf{A} \mathbf{u}_N \times \mathbf{B}. \quad (4.22)$$

A két kifejezés összehasonlítása alapján a mágneses dipólmomentumot célszerű a

$$\mathbf{d}_m = I \mathbf{A} \mathbf{u}_N \quad (4.23)$$

összefüggéssel definiálni. Ez a mennyiség valóban csak a dipólus (az áramhurok) adataitól (áram, felület nagysága, felület állása) függ.



4.8. ábra. Az áramhurok mágneses terének és a dipólmomentum vektor irányának meghatározása

Áramhurok mágneses erőterét (\mathbf{B}) és a dipólmomentum-vektor (\mathbf{d}) irányának definícióját (az I áram irányával való összefüggését) mutatja a 4.8. ábra.

Az áramhurokra ható forgatónyomaték a mágneses dipólmomentummal kifejezve

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{d}_m \times \mathbf{B}. \quad (4.24)$$

4.4.2. Mágneses dipólus energiája mágneses erőterben

Egyensúlyi állapotban a mágneses dipólus (pontosabban a dipólmomentum vektor) befordul a mágneses indukcióvektor irányába. Ha ebből a helyzetből ki akarjuk fordítani, akkor erőt kell kifejtenünk, és munkát kell végeznünk. Ez a munkavégzés azt eredményezi, hogy a dipólus helyzeti energiára tesz szert.

Az erőter által a mágneses dipólus elfordulásakor végzett munka ugyanúgy számítható ki, mint az elektromos dipólus esetében:

$$dW_{\text{tér}} = \mathbf{M}_{\text{tér}} d\varphi = -M_{\text{tér}} d\varphi. \quad (4.25)$$

Mivel pedig a forgatónyomaték kifejezése is ugyanolyan a két esetben, a számolás itt is ugyanúgy végezhető el, mint az elektromos esetben, és a végeredmény is ugyanaz, csak elektromos dipólmomentum (\mathbf{p}_e) helyett mágneses dipólmomentumot (\mathbf{p}_m), elektromos térerősség (\mathbf{E}) helyett mágneses indukcióvektort (\mathbf{B}) kell írunk. Az elektromos dipólus helyzeti energiája elektromos erőterben $E_h^e = -\mathbf{d}_e \mathbf{E}$, ennek megfelelően a mágneses dipólus helyzeti energiája mágneses erőterben

$$E_h^m = -\mathbf{d}_m \mathbf{B}. \quad (4.26)$$

A helyzeti energiát most is a dipólusnak arra a helyzetére vonatkoztatjuk, amikor a dipólmomentum vektor merőleges az indukcióvektorra. Ebben a helyzetben a dipólus helyzeti energiája nulla, ennek következtében az egyensúlyi állapotban a helyzeti energia negatív.

4.5. Elektromos áram mágneses erőtere

A mágneses erőterben fellépő erőhatások számításánál mindig feltételeztük, hogy a tér minden pontjában ismerjük a \mathbf{B} mágneses indukcióvektort. Felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet *kiszámítani* egy mágneses erőteret létrehozó konkrét tárgy körül kialakult erőterben a mágneses indukcióvektort. A tárgy elvileg lehet egy áramvezető vagy egy mágnes, de az utóbbi esettel – bonyolultsága miatt – itt nem foglalkozunk. Így a feladat tulajdonképpen egy elektromos áram mágneses erőterének kiszámítása.

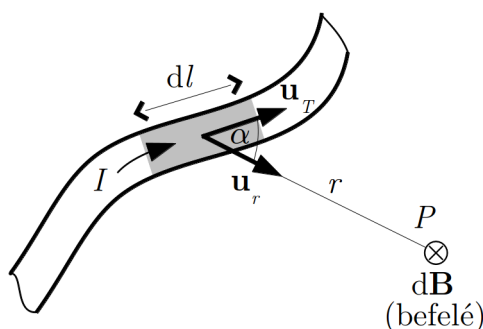
4.5.1. A Biot-Savart-törvény

A mágneses erőter számításának egy módszerét saját mérési eredményeikre támaszkodva J.B. Biot és F. Savart⁵ adták meg. A mérések alapján arra a következtetésre jutottak, hogy egy áram dl hosszúságú, elemi szakasza által egy P pontban létrehozott dB indukcióvektor-járulék nagysága az alábbi kifejezéssel adható meg (4.9. ábra):

$$dB \sim \frac{I dl}{r^2} \sin(\alpha). \quad (4.27)$$

Itt α az áram iránya és a dl áramelemtől a vizsgált ponthoz (P) húzott egyenes által bezárt szög. Ha az arányossági tényezőt K_m -mel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$dB = K_m \frac{I dl}{r^2} \sin(\alpha). \quad (4.28)$$



4.9. ábra. Árammal átjárt infinitezimális vezető szakasz által gerjesztett mágneses tér

Ha bevezetjük az áram irányába mutató \mathbf{u}_T , és az áramelemtől a P ponthoz mutató \mathbf{u}_r egységvektorokat (4.9. ábra), akkor a $d\mathbf{B}$ járulékot vektori alakban is felírhatjuk. Az indukcióvektorra vonatkozó mérésekből ugyanis kiderült, hogy a mágneses indukcióvektor-

⁵Jean-Baptiste Biot (1774 -1862), Félix Savart (1791-1841) francia fizikusok

járulék ($d\mathbf{B}$) mindkét egységvektorra merőleges, és az ábrán látható esetben a rajz síkjába befelé mutat. Ez azt jelenti, hogy $d\mathbf{B} \parallel \mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$, vagyis az áramelem járuléka vektori alakban így írható:

$$d\mathbf{B} = K_m I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (4.29)$$

(Itt felhasználtuk, hogy $|\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r| = \sin(\alpha)$.) Ez az áramelem mágneses erőterére vonatkozó *Biot-Savart-törvény* (egyes – főleg angol nyelvű – könyvekben *Ampère-Laplace-törvényként* szerepel).

Mivel a sztatikus mágneses erőteret egy adott helyen (P) mindig egy zárt áramhurok hozza létre, a mágneses indukcióvektor számításánál a teljes L áramhurok mentén körbejárva összegezni (integrálni) kell az egyes áramelemek járulékait:

$$\mathbf{B}(P) = K_m I \oint_L \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (4.30)$$

Ez a teljes áramkörre vonatkozó *Biot-Savart-törvény*. Kísérletileg ezt a törvényt lehet ellenőrizni, az áramelemre vonatkozó törvény csak közvetve igazolható (a belőle kapott teljes áramkörre vonatkozó fenti törvény helyessége igazolja).

Formai okokból a K_m arányossági tényezőt egy másik állandóval szokás helyettesíteni, amit μ_0 -al jelölnek, és amelynek definícióját a $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ összefüggés adja. Ezzel a Biot-Savart-törvény így alakul:

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (4.31)$$

Ha az áramerősség egységét ismerjük, akkor az egyenletben szereplő μ_0 állandó értékét a fenti összefüggés elvileg egyértelműen definiálja. Az SI-egységrendszerben azonban először μ_0 értékét definiálták, és csak ezután az áramerősségét (lásd 4.7.2 fejezet). A definiált érték: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$.

A Biot-Savart-törvény segítségével elvileg tetszőleges áram által létrehozott mágneses erőteret tetszőleges pontjában meghatározható a mágneses indukcióvektor, de szabálytalan alakú áramvezető esetén a számítás komoly nehézségeket okozhat, többnyire csak közelítő módszerekkel hajtható végre.

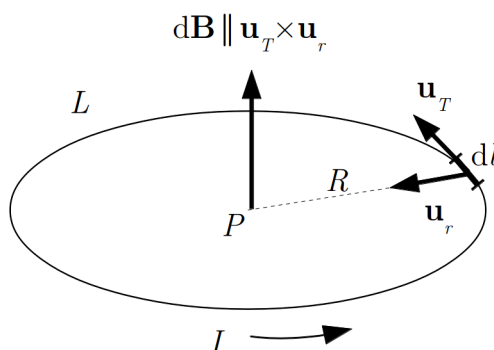
4.5.2. A Biot-Savart-törvény alkalmazásai

Itt példaként két egyszerű esetet tárgyalunk: először kiszámítjuk a mágneses indukcióvektort egy kör alakú vezető esetén a kör középpontjában, majd összefoglaljuk, hogy hogyan lehet meghatározni egy hosszú egyenes vezetőben folyó áram mágneses erőterét.

Mágneses indukcióvektor körvezető körének középpontjában

Itt a mágneses indukcióvektor nagyságát a Biot-Savart-törvény alkalmazásával, az L vezetőhurok (kör) mentén történő összegzéssel kapjuk meg (4.10. ábra). Felhasználva, hogy az \mathbf{u}_T és \mathbf{u}_r egységvektorok merőlegesek egymásra ($|\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r| = 1$), továbbá a vezető minden pontja ugyanolyan távolságra (R) van a P ponttól, azt kapjuk, hogy

$$B(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{|\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r|}{R^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{1}{R^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I \oint_L dl. \quad (4.32)$$



4.10. ábra. Mágneses indukcióvektor körvezető középpontjában

A dl szakaszok összege a kör mentén viszont éppen a kör kerületével egyenlő, ezért a keresett indukcióvektor nagysága

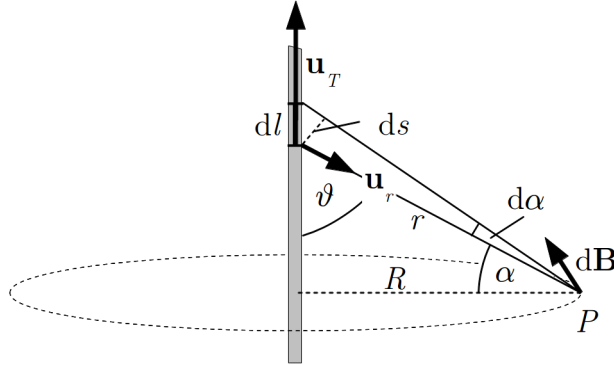
$$B(P) = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I 2R\pi = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (4.33)$$

Az indukcióvektor irányát a $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ vektorszorzat iránya adja meg, vagyis az ábra szerinti elrendezésben az indukcióvektor a kör síkjára merőlegesen felfelé mutat.

Vonalszerű, egyenes vezető mágneses erőtere

Kicsit hosszabb számolással, de különösebb bonyodalmak nélkül kiszámítható az indukcióvektor egy nagyon vékony, nagyon hosszú (elvileg végtelen) egyenes vezető körül kialakuló mágneses erőterben. Az indukcióvektor – a Biot-Savart-törvénnyel, és a tapasztalattal összhangban – merőleges az áram irányára, nagysága pedig a számolás szerint az áramvezetőtől mért R távolsággal csökken, a

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (4.34)$$



4.11. ábra. Végtelen egyenes vezető mágneses terének számítása a Biot-Savart-törvény segítségével

összefüggés szerint.

A számolást a 4.11. ábra segítségével végezhetjük el, amelyen látható az áram egy eleme dl szakasza, amelynek indukció-járulékát a Biot-Savart-törvény segítségével írhatjuk fel:

$$dB(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (4.35)$$

Ebből látszik, hogy az indukcióvektor merőleges az áram irányára és az R szakaszra, és az ábrán berajzolt kör érintője irányába mutat. Az indukcióvektor nagysága a P pontban

$$dB(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{|\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r|}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin(\pi - \vartheta)}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \vartheta}{r^2} dl. \quad (4.36)$$

Mivel

$$\frac{dl \sin \vartheta}{r} = \frac{dl \cos \alpha}{r} = \frac{ds}{r} = d\alpha, \quad (4.37)$$

továbbá

$$r = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad (4.38)$$

így

$$dB(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \vartheta}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos(\alpha) d\alpha. \quad (4.39)$$

Az egyenes vezető által okozott indukcióvektor teljes nagyságát a dl szakaszok járulékeinak összegzésével, azaz integrálással kapjuk meg (minden szakasz járuléka azonos

irányú):

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\alpha)]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (4.40)$$

4.6. A sztatikus mágneses erőter alaptörvényei

A sztatikus elektromos erőter esetén az erőteret jellemző \mathbf{E} térerősségvektorra két alapvető integrál-törvény, az elektrosztatika I. és II. alaptörvénye érvényes. Felmerül a kérdés, hogy a sztatikus mágneses erőter jellemzésénél felhasználhatjuk-e ezeket az eredményeket.

Nehézséget az okozhat, hogy a mágneses erőteret jellemző \mathbf{B} mágneses indukcióvektor a mágneses erőhatásokkal csak áttételes módon – egy vektorszorzat segítségével – hozható kapcsolatba. Ez lényeges eltérés az elektromos erőterétől, ahol a térerősség arányos a töltésre ható erővel, így az $\mathbf{E} d\mathbf{r}$ skalárszorzatnak közvetlen fizikai jelentése van (számértékét tekintve az erőter által egységnyi töltésen végzett munka). Ezzel szemben a $\mathbf{B} d\mathbf{r}$ mennyiség fizikai szempontból semmit nem jelent. Megtartható azonban a két alaptörvény matematikai-geometriai jelentése, ami az erőter erővonalainak szerkezetére vonatkozó információkat ad.

4.6.1. A sztatikus mágneses erőter II. alaptörvénye (a magnetosztatika Gauss-törvénye)

Az elektrosztatika II. alaptörvénye azt fogalmazza meg matematikai formában, hogy az elektrosztatikus erőter erővonalai töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek, vagyis ennek az erőternek forrásai vannak.

Ez a kérdés a mágneses indukcióvektorral kapcsolatban is felvethető, és a válasz matematikai megfogalmazása ugyanúgy adható meg, mint az elektrosztatikus erőternél.

Az indukcióvektor esetén – az elektrosztatikus tér fluxusának mintájára – bevezethető az A felületre vonatkozó

$$\Phi_B = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad (4.41)$$

indukciófluxus, aminek ugyanolyan jelentése van, mint az elektromos térerősség fluxusának (számértéke a felületet átmetsző indukcióvonalak számának előjeles összegével egyenlő).

Az hogy egy zárt felületre vonatkozó indukciófluxus milyen, információt ad az indukcióvonalak jellegére, az erőter forrásos vagy forrásmentes voltára (vagyis arra, hogy az indukcióvonalak kezdődnek és végződnek valahol, vagy nem).

Az áramok által létrehozott mágneses erőterrel kapcsolatos tapasztalataink azt mutatják, hogy az indukcióvonalak az áramot körülvevő zárt vonalak, amelyek nem kezdődnek és nem végződnek sehol. Ez viszont azt jelenti, hogy egy zárt felület által határolt térfogatba belépő indukcióvonalaknak záródniuk kell, vagyis ismét ki kell lépniük a térfogatból. Az indukcióvonalak tehát kétszer metszik a zárt felületet, és a két metszés ellenkező előjelű járulékot ad a fluxusban. Emiatt egy zárt felületre vett indukciófluxus csak nulla lehet:

$$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0. \quad (4.42)$$

Ezt a törvényt gyakran a *sztatikus mágneses erőtér II. alaptörvényének* vagy a *magnetosztatika Gauss-törvényének* nevezik. A törvény azt fejezi ki, hogy – szemben az elektromos erőterrel – mágneses erőterben nincsenek olyan helyek, amelyekben az indukcióvonalak kezdődnek vagy végződnek, más kifejezéssel a mágneses erőtér *forrásmentes*.

Ezt a tapasztalatot úgy is meg lehet fogalmazni, hogy *nincs „mágneses töltés”*, amelyen az indukcióvonalak kezdődnének és végződnének. Ezt erősíti meg az a kísérleti eredményünk is, hogy egy „kétpólusúnak” mutatkozó mágnesrúd kettévágásával a két darab továbbra is kétpólusú marad: a mágnes két pólusa nem választható szét.

A magnetosztatika Gauss-törvényét az elektrosztatika Gauss-törvényéhez hasonlóan kifejezhetjük differenciális alakban is:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4.43)$$

azaz a mágneses indukció vektor forrassűrűsége a tér minden pontjában nulla.

4.6.2. A magnetosztatika I. alaptörvénye (gerjesztési törvény)

Az elektrosztatika I. alaptörvényének mintájára formálisan megpróbálhatjuk kiszámítani egy L zárt görbe mentén a $\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r}$ mennyiséget, amit *örvényerősségnek* vagy *cirkulációnak* neveznek. Az örvényerősség az indukcióvonalak jellegére ad információt.

Láttuk, hogy egy áram által keltett mágneses erőterben az indukcióvonalak önmagukban záródó hurkok, amelyek az áramot veszik körül. Ebből először is következik, hogy ha zárt L görbének egy ilyen zárt indukcióvonalat választunk, és erre kiszámítjuk az örvényerősséget, akkor biztosan nullától különböző értéket kapunk. Ha ugyanis a görbét az indukcióvektor irányában járjuk körül, akkor az elmozdulásvektor és az indukcióvektor mindenütt párhuzamos lesz egymással (az indukcióvektor a vonal érintője), tehát minden elemi szakaszon $\mathbf{B} \, d\mathbf{r} > 0$, így a teljes integrál értéke is pozitív. Ha viszont a körüljárás iránya ellentétes, akkor minden szakaszon $\mathbf{B} \, d\mathbf{r} < 0$, tehát az integrál negatív. Bebizonyítható, hogy zárt indukcióvonalak esetén az örvényerősség akkor sem lehet nulla, ha a számítást nem indukcióvonal mentén végezzük el. A tapasztalatokra alapozva

– önmagukban záródó indukcióvonalakat feltételezve – annyit tehát megállapíthatunk, hogy

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} \neq 0. \quad (4.44)$$

A kérdés az, hogy az örvényerősség milyen más fizikai mennyiséggel hozható összefüggésben, és mire utalhat a számértékének nagysága.

Az erőter tanulmányozása során kiderült, hogy az örvényerősség csak akkor különbözik nullától, ha a zárt L görbe, amelyre az örvényerősséget kiszámítjuk, áramot fog körül (4.12. (a) ábra). A kísérletek azt is megmutatják⁶, hogy az örvényerősség a zárt L görbe által körbevett – vagyis a zárt görbe által határolt A felületet átmetsző – áram I erősségével arányos:

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} \sim I. \quad (4.45)$$

Ha a felületet több áram metszi át, akkor a jobboldalon az áramok előjeles összege áll, vagyis

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} \sim \sum_k I_k. \quad (4.46)$$

Az áram előjelét a görbén történő körüljárás iránya szabja meg a 4.12. (b) ábrán látható jobbkéz-szabálynak megfelelően. Eszerint a 4.12. (b) ábrán I_1 és $I_2 > 0$, $I_3 < 0$.

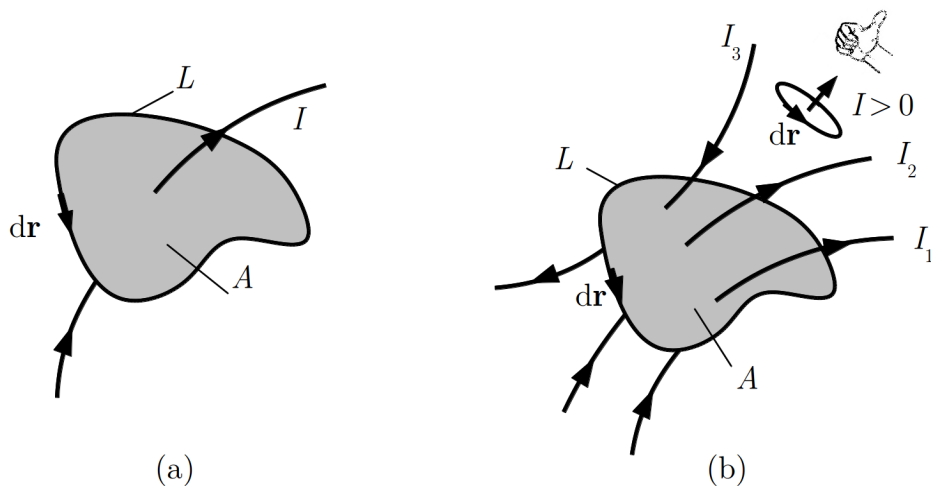
A törvény pontos alakjának felírásához ismerni kell az arányossági tényező értékét. Ezt mérés útján meghatározhatjuk, de megkaphatjuk úgy is, hogy a fenti törvényt alkalmazzuk egy ismert, speciális mágneses erőterre. Ilyen például az egyenes vezető erőtere.

Az egyenes vezetőben folyó I áram mágneses terének jellegét kísérletekből jól ismerjük, és az indukcióvektort a Biot-Savart-törvény segítségével ki is tudjuk számítani. Alkalmazzuk a fenti törvényt úgy, hogy az integrálás útvonalaként (L) az erőter erővonalait követő zárt görbét, azaz az áramra merőleges síkban, az áram köré rajzolt kört veszünk fel (4.13. ábra). Az elrendezés hengersizmetrikus, ezért a kör mentén a \mathbf{B} vektor nagysága mindenütt ugyanakkora, és mindenütt $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{r}$, így a zárt L görbére vett integrál:

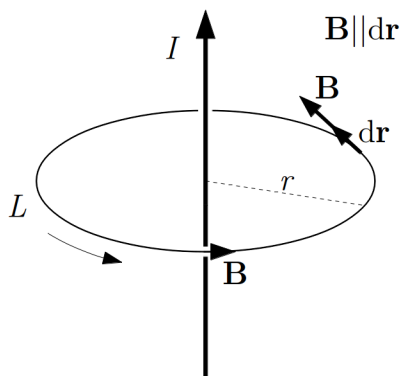
$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \oint_L B \, dr = B \oint_L dr = B 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2r\pi} 2\pi r = \mu_0 I. \quad (4.47)$$

Az arányossági tényező tehát a korábban bevezetett μ_0 állandó.

⁶ Az erre szolgáló kísérleti eszköz az ún. *Rogowski-tekercs*. A kísérlet részletes leírása megtalálható pl. a Budó Á.: *Kísérleti fizika II.* c. könyvben.



4.12. ábra. A mágneses tér örvényerőssége az L zárt görbe mentén (az áram előjelét a görbe körüljárási irányja szabja meg (b) ábra)



4.13. ábra. Végtelen egyenes vezető mágneses terének számítása

Az örvényerősségre vonatkozó törvény pontos alakja tehát a következő:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_k I_k. \quad (4.48)$$

Itt $\sum_k I_k$ az L zárt görbe által körülfogott áramok algebrai összege, amelyben az áramoknak a zárt görbe körüljárásával összefüggő, és a fenti ábrán látható előjelet tulajdonítunk.

Az összefüggést, amely bármilyen zárt görbére történő integrálásnál érvényes, *a statikus mágneses erőter I. alaptörvényének*, vagy *Ampère féle gerjesztési törvényének* nevezik.

Fontos hangsúlyozni, hogy a törvényben szereplő áramösszeg az áramok előjeles összege, így akkor is lehet nulla, ha a zárt görbe áramokat vesz körül, de azok ellenkező irányúak és azonos nagyságúak.

Ha a zárt görbe folytonosan eloszló áramokat vesz körül, akkor a gerjesztési törvényben az áramok összegét az áramsűrűséggel fejezhetjük ki:

$$\sum_k I_k = \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A}. \quad (4.49)$$

Itt az integrálás az L zárt görbe által határolt A felületre történik. Ezzel a gerjesztési törvény a

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} \quad (4.50)$$

alakot ölti.

A törvény fenti integrális alakját matematikailag tovább egyszerűsíthetjük a Stokes-féle integráltétel segítségével (ld. Matematikai összefoglaló, ?? fejezet), amely szerint egy vektortér zárt görbére vett vonalmenti integrálja megegyezik a vektortér rotációjának a görbe által körbezárt felületre vett integráljával:

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \int_A \text{rot } \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A}. \quad (4.51)$$

Ezen két felületi integrál értéke akkor és csak akkor lehet minden A felületre egyenlő, ha maguk az integrandusok is megegyeznek, azaz:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.52)$$

Ez a magnetosztatika első törvényének differenciális alakja, amely teljességgel ekvivalens az integrális alakkal. A differenciális törvény lokális mennyiségekre mondja ki a tér örvényességére vonatkozó törvényt: a magnetosztatikus tér örvénysűrűsége a tér minden pontjában megegyezik az adott ponton mérhető áramsűrűséggel.

A gerjesztési törvény segítségével bizonyos esetekben a mágneses indukcióvektor igen egyszerűen meghatározható. Ehhez azonban az szükséges, hogy az erőternek valamilyen szimmetriája legyen, ami lehetővé teszi, hogy az integrális törvényből a mágneses indukcióvektort kiemeljük.

Most néhány egyszerű geometriájú áram mágneses terét számítjuk ki a gerjesztési törvény segítségével.

4.6.3. Hosszú, vonalszerű egyenes vezető mágneses erőtere

A nagyon vékony, hosszú, egyenes vezető esetét – fordított sorrendben – tulajdonképpen egyszer már végigszámoltuk, amikor a gerjesztési törvényben szereplő arányossági tényezőt kerestük. Akkor ismertnek tételeztük fel az indukcióvektort, és a törvény pontosabb alakját kerestük. Most a törvényt ismerjük és a mágneses indukcióvektort akarjuk meghatározni. A végeredmény ugyan nyilvánvaló, de a törvény alkalmazásának menete jól bemutatható ennek az egyszerű feladatnak a megoldása kapcsán. A megoldásnál ugyanazt az ábrát használhatjuk, amit korábban, és a szimmetriára vonatkozó érvelés is ugyanaz.

Az egyenes vezetőben folyó I áram mágneses terének tárgyalásához az integrálás útvonalaként az erőter erővonalait követő zárt görbét, azaz az áramra merőleges síkban, az áram köré rajzolt kört célszerű felvenni (4.13. ábra). Az elrendezés hengerszimmetrikus, ezért a kör mentén a \mathbf{B} vektor nagysága mindenütt ugyanakkora, és a forrásmentesség miatt mindenütt $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{r}$, így a zárt görbére vett integrál:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = \oint_L B dr = B \oint_L dr = B2\pi r. \quad (4.53)$$

Másrészt viszont a gerjesztési törvény szerint

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 I, \quad (4.54)$$

ezért a mágneses indukcióvektor nagyságára azt kapjuk, hogy

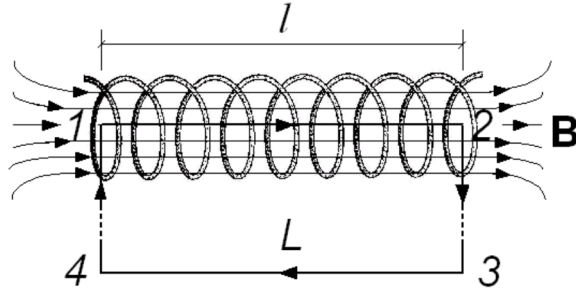
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.55)$$

vagyis az erőteret jellemző indukcióvektor nagysága a vezetőtől távolodva a távolsággal fordított arányban csökken. A térerősség irányát adott pontban a ponton át, az áram, mint középpont körül rajzolt kör érintője adja meg.

4.6.4. Egyenes tekercs mágneses erőtere

Tapasztalatból tudjuk, hogy egy tekercs belsejében jó közelítéssel homogén, a tekercs tengelyével párhuzamos mágneses erőter jön létre. Most példaként a gerjesztési törvény alkalmazásával kiszámítjuk mágneses indukcióvektor nagyságát egy N menetű, l hosszúságú egyenes tekercs belsejében.

A számításhoz a 4.14. ábrán látható, téglalap alakú L zárt görbét célszerű felvenni, amelynek 1-2 szakasza a tekercs belsejében, a tekercs tengelyével párhuzamosan halad. Ekkor az 1-2 szakaszon $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{r}$, másrészt a 2-3 és 4-1 szakaszokon közelítőleg igaz,



4.14. ábra. Hosszú egyenes tekercs mágneses tere

hogy $\mathbf{B} \perp d\mathbf{r}$, ezért ez utóbbi két szakasz elhanyagolható járulékot ad az integrálhoz. Végül a 3-4 szakaszt tetszőleges távolságra elvihetjük (ezt szimbolizálja az ábrán a zárt görbe szaggatott része), ahol a mágneses erőter már igen kicsi, így ennek a szakasznak a járulékát is elhanyagolhatjuk. Ezért a zárt görbére vett integrál így egyszerűsödik:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} \approx \int_1^2 B dr \approx Bl. \quad (4.56)$$

A gerjesztési törvény szerint viszont

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 NI, \quad (4.57)$$

így a mágneses indukcióvektor nagysága a tekercsben

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (4.58)$$

(Az N szorzó azért jelenik meg, mert az áram ugyanabban az irányban N -szer metszi át a zárt L görbe által határolt A felületet.)

A valóságban az erőter a tekercs végeinél biztosan nem homogén, ezért a fenti összefüggés csak körültekintően alkalmazható. Jó közelítéssel érvényes hosszú, vékony tekercsben, a tekercs végéhez nem túl közeli pontokban. A tekercs széleinek hatását elkerülhetjük, ha az indukcióvektort csak a tekercs belsejében számítjuk ki. Ha ott egy l' hosszúságú szakaszon a menetek száma N' , akkor bevezetve a $n = \frac{N'}{l'}$ menetsűrűséget, az indukcióvektor nagyságára a

$$B = \mu_0 n I \quad (4.59)$$

összefüggést kapjuk.

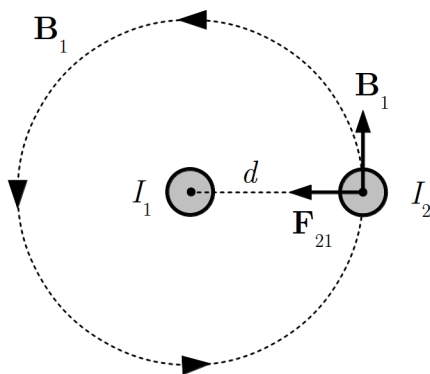
4.7. Áramvezetők kölcsönhatása, az áramerősség SI-egysége

Miután megismertünk néhány módszert arra, hogy hogyan lehet kiszámítani egy áram által létrehozott mágneses erőterben az indukcióvektort, és korábban tudjuk, hogy egy áramra milyen erő hat adott indukciójú mágneses erőterben, lehetőségünk van az áramok közötti kölcsönhatás számítására is. Az alapelv itt az, hogy kiszámítjuk az egyik áram által a másik helyén létrejött indukcióvektort, és meghatározzuk, hogy ebben az erőterben milyen erő lép fel a második áramvezetőre.

4.7.1. Árammal átjárt, hosszú, egyenes vezetők kölcsönhatása

Az áramvezetők között létrejövő kölcsönhatást korábban már kísérletileg is megvizsgáltuk, és azt tapasztaltuk, hogy két párhuzamos, árammal átjárt egyenes vezető egymást vonzza, ha a két áram egyirányú, és egymást taszítja, ha a két áram ellenkező irányú. Korábbi eredményeink segítségével ezt az erőt most már ki is tudjuk számítani.

Két egymástól d távolságra lévő, nagyon hosszú, párhuzamos vezetőben azonos irányban folyó áramok (I_1 és I_2) kölcsönhatását vizsgáljuk (4.15. ábra). Az áramok a rajz síkjára merőlegesen, abból kifelé folynak, és nagyon nagy l hosszúságú szakaszaik állnak egymással kölcsönhatásban.



4.15. ábra. Árammal átjárt, hosszú, egyenes vezetők kölcsönhatása

Az I_2 áramra ható erőt a korábban megismert

$$\mathbf{F}_{21} = I_2 l \mathbf{u}_{T2} \times \mathbf{B}_1 \quad (4.60)$$

összefüggés adja meg, ahol \mathbf{u}_{T2} az I_2 áram irányába – esetünkben az ábra síkjából kifelé – mutató egységvektor, \mathbf{B}_1 pedig az I_1 áram által az I_2 áram helyén létrehozott mágneses

indukcióvektor. A vektorszorzat eredménye egy olyan erő, amely az I_1 áram felé mutat, vagyis az I_1 áram vonzza az I_2 áramot. Mivel $\mathbf{u}_{T2} \perp \mathbf{B}_1$, a vonzóerő nagysága:

$$F_{21} = I_2 l B_1. \quad (4.61)$$

Tudjuk, hogy egy nagyon hosszú vezetőben folyó I_1 áram által a tőle d távolságban (vagyis az I_2 áram helyén) létrehozott mágneses indukcióvektor nagysága

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2d\pi}, \quad (4.62)$$

így a vonzóerő nagysága

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2d\pi}. \quad (4.63)$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is ha az I_2 áram által az I_1 áramra kifejtett erőt számítjuk ki.

A két nagyon hosszú vezető között fellépő kölcsönhatást legtöbbször a vezetők egységnyi hosszára ható

$$f_{kh} = \frac{F_{kh}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2d\pi} \quad (4.64)$$

erővel jellemzik.

4.7.2. Az áramerősség SI-egysége

Az áramvezetők kölcsönhatására kapott eredmény felhasználható arra, hogy az elektromos áram mérését erőmérésre vezessük vissza. Ha készítünk egy olyan erőmérő berendezést, amellyel két azonos I nagyságú, párhuzamos áram között fellépő f_{kh} erőt meg tudjuk mérni, akkor az

$$f_{kh} = \frac{\mu_0 I^2}{2d\pi} \quad (4.65)$$

összefüggésből az áram

$$I = \sqrt{\frac{2d\pi f_{kh}}{\mu_0}} \quad (4.66)$$

értéke meghatározható. Ehhez – az elrendezésben adott d mellett – ismerni kell a μ_0 állandót, amit a mágneses erőhatások mérése útján elvileg meg lehet határozni.

Az SI-mértérendszerben azonban nem ezt az eljárást követték, hanem először definiálták a μ_0 állandó értékét, amit természetesen a korábban bevezetett áram-egységhez (C/s) illesztettek. Így a μ_0 állandó definiált értéke: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$.

Ezzel az áramerősséget erőmérésre visszavezető definíciós egyenlet az

$$I = \sqrt{\frac{2d\pi f_{kh}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}} = \sqrt{\frac{f_{kh}}{2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}} d \quad (4.67)$$

alakot ölti. Ennek alapján egységnyi, azaz 1 A áram folyik a két kölcsönható vezetőben, ha $l = 1$ m hosszúságú szakaszaik között $d = 1$ m távolságban $F_{kh} = 2 \cdot 10^{-7}$ N erő lép fel (vagyis $f_{kh} = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m).

Az áram mérésére és az áramerősség egységének meghatározására a gyakorlatban használt eszközök általában a karos mérleg elvén alapulnak, ezért ezeket árammérlegeknek nevezik. Az árammérlegekben praktikus okokból nem egyenes vezetőkben, hanem tekercsekben folyó áramok kölcsönhatását mérik.

Az SI-rendszerben az áramerősség egységének fenti definíciójából származtatják a elektromos töltés egységét a $Q = It$ összefüggés segítségével. Az így definiált töltésegység az 1 As, amelyet *coulombnak* (C) neveznek: $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$.

5. fejezet

Az anyagok mágneses tulajdonságai

A mágneses jelenségeket eddig levegőben vizsgáltuk. Kimutatható, hogy vákuumban gyakorlatilag ugyanolyanok a törvények. Mi történik, ha a mágneses erőteret keltő áramokat más anyagok veszik körül (pl. folyadék, szilárd anyag)? Hogyan hat a mágneses erőter a különböző anyagokra?

Kísérlet: Szilárd anyagok viselkedése mágneses térben

Egy erős mágnes két pólusa közé egy szálla függesztett bizmut rudat helyezünk el, amely függőleges tengely körül könnyen elfordulhat. A rúd a mágnes pólusokat összekötő egyenesre merőlegesen igyekszik beállni. Ha a bizmut rudat alumíniumra cseréljük, az a pólusokat összekötő egyenessel párhuzamosan áll be. A kísérlet tanúsága szerint ezen anyagokra az erőhatás viszonylag gyenge.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Paramagnesseg_1.ogv ♦

Kísérlet: Ferromágneses anyag viselkedése mágneses térben

Az előző kísérletet egy vas rúddal megismételve az alumíniumhoz hasonló viselkedést, de sokkal erősebb kölcsönhatást tapasztalhatunk. Ugyanakkor azt is észrevehetjük, hogy a vas mágnessel való kölcsönhatásának erőssége igen erős hőmérsékletfüggést mutat.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Curie_pont_1.ogv ♦

Kísérlet: Folyadékok viselkedése mágneses térben

Megfigyelhetjük, hogy a folyékony nitrogén a mágnes pólusai közti erős mágneses térből kilökődik, a cseppfolyós oxigén pedig ezzel ellentétben a pólusok közti erős mágneses térben marad

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Paramagnesseg_2.ogv ♦

Ahhoz, hogy a fenti kérdésekre válaszolni tudjunk, ismernünk kell az atomok felépítését és viselkedését. Az anyagot felépítő atomok töltött részecskékből (atommag és elektronok) állnak, amelyek állandó mozgásban vannak. Az atommag töltéseinek mozgását első közelítésben elhanyagolhatjuk, az elektronok azonban atomi léptékkal mérve jelentős mozgásokat végeznek, ami azt jelenti, hogy az atomban elektromos áramok jönnek létre. Ezek az atomi áramok mágneses dipólmomentumokat és mágneses erőteret hoznak létre. Az így létrejött atomi mágneses erőterek képesek megváltoztatni az eredeti külső mágneses erőteret.

Az anyagok atomjaiban az elektronok kétféle mozgást végeznek, amelyek mindegyike elemi mágneses dipólus megjelenését eredményezi.

Az egyik mozgás az elektronnak az atommag körüli mozgása, amelyet a mágneses jelenségek egyszerű leírásánál azzal az igen egyszerű (de a valóságnak nem teljesen megfelelő) modellel közelíthetünk, hogy az elektronoknak az atommag körüli mozgását elemi köráramokként fogjuk fel, és ezek az elemi köráramok atomi mágneses dipólusoknak felelnek meg. Ezek adják az elektronok ún. *pályamozgásából* származó dipólmomentumot.

Az anyagok mágneses viselkedése bizonyos anyagok esetén nem értelmezhető egyedül az elektronok pályamozgásából származó mágneses dipólmomentumok segítségével. Ennek az az oka, hogy az elektronoknak van egy saját belső impulzusmomentuma és mágneses dipólmomentuma is. Ezt *spin* mágneses dipólmomentumnak nevezik.

- Az anyagok többségében az atomok mágneses dipólmomentumainak eredője nem nulla, tehát az atomoknak van egy eredő mágneses dipólmomentuma. Ezek a dipólmomentumok azonban külső mágneses tér nélkül rendezetlenül helyezkednek el, és átlagos eredő mágneses erőterük nulla. A külső mágneses erőter ezeket a dipólusokat rendezi, és ekkor nullától különböző eredő mágneses erőterük lesz, ami megváltoztatja az eredeti külső mágneses erőteret.
- Az anyagok egy részében külső mágneses erőter nélkül az atomokban az elektronok mágneses dipólmomentumai egymást kompenzálják, így az atomoknak nincs eredő mágneses dipólmomentuma. A külső mágneses erőter azonban az ilyen anyagok atomjaiban eredő mágneses dipólusokat (ún. indukált dipólmomentumot) hozhat létre, és ezeknek a rendezett mágneses dipólusoknak az átlagos tere már nem nulla, ami szintén befolyásolja a kialakuló mágneses erőteret.

Azt a folyamatot, amelynek során az anyagban az atomi mágneses dipólmomentumok rendeződnek, az anyag *mágnesesítésének*, az ilyen állapotba került anyagot pedig *mágnesezettnek* nevezik.

Az atomokban végbemenő töltésmozgásból származó áramokat – szemben a vezetékekben folyó ún. *makroszkopikus áramokkal* – gyakran *mikroszkopikus áramoknak* nevezik. Ezzel a terminológiával élve azt mondhatjuk, hogy a makroszkopikus áramok által létrehozott mágneses erőteret az anyag jelenléte az atomi szinten jelentkező, mikroszkopikus áramok révén módosítja.

5.1. Mágneses erőtér anyagokban

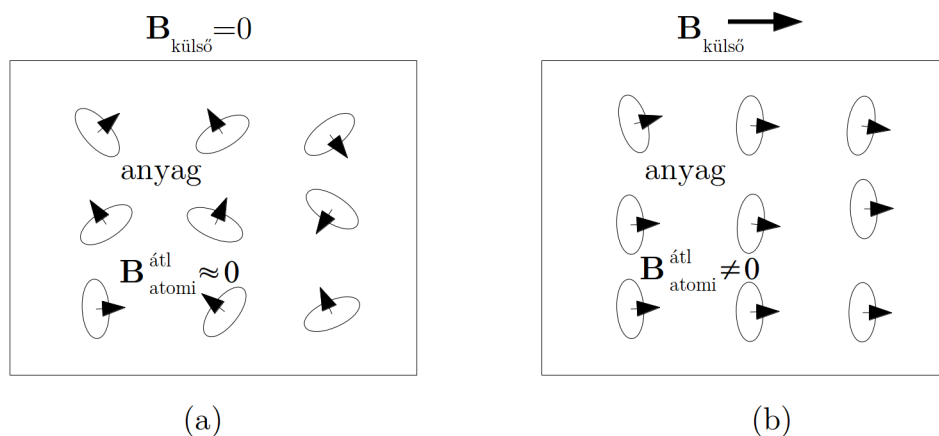
A mágnesezett anyagokban várhatóan más lesz a mágneses erőtér, mint a külső tér, hiszen a mágneses dipólusok tere módosítja azt. A különböző anyagok mágneses erőteret módosító hatása különböző, mert az anyagok mágneses erőterbe helyezve különböző módon viselkednek. Ebből a szempontból lényeges különbség van a homogén, izotróp anyagok és a bonyolultabb (inhomogén, anizotróp) anyagok között.

5.1.1. Az atomi mágneses dipólusok hatása a mágneses erőtérré homogén, izotróp anyagokban

A homogén, izotróp anyagok a mágneses térrel kapcsolatos viselkedésük alapján két nagy csoportba oszthatók:

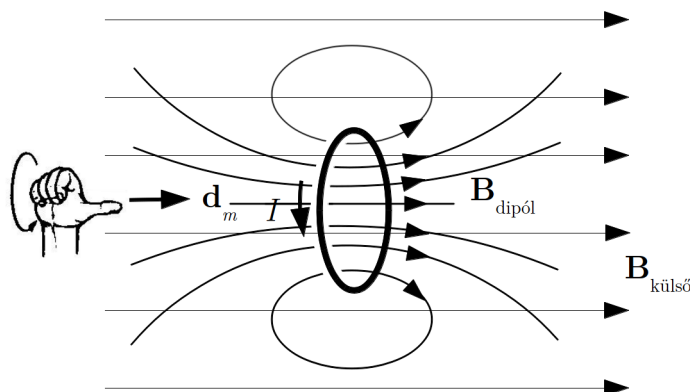
1. Paramágneses anyagok

Azokban az anyagokban, amelyekben az atomoknak nullától különböző mágneses dipólmomentuma van (ez az anyagok többsége) az atomi dipólusok külső mágneses tér nélkül rendezetlenül helyezkednek el, és mágneses erőterük átlagosan semlegesítik egymást. Ha azonban az anyagot mágneses erőterbe tesszük, akkor a dipólmomentumok igyekeznek beállni az erőter irányába. A tökéletes rendeződést a hőmozgás és a dipólusok kölcsönhatása megakadályozza, de a dipólusok többsége az erőtérről közel párhuzamosan áll be (5.1. ábra).



5.1. ábra. Paramágneses anyag külső tér nélkül (a) illetve külső mágneses tér jelenlétében (b)

A külső erőtér irányába befordult atomi dipólus dipólmomentum vektora (\mathbf{d}_m) párhuzamos a külső erőtér $\mathbf{B}_{\text{külső}}$ mágneses indukcióvektorával (5.2. ábra). Ilyenkor a dipólust alkotó áramhurok belsejében a dipólus által keltett $\mathbf{B}_{\text{dipól}}$ mágneses indukció egyirányú a dipólmomentum vektorral és így a külső erőtérrel is. Mivel pedig a dipólus erőtere éppen itt a legerősebb (itt a legsűrűbbek az indukcióvonalak), az erőtérrel egy irányban beálló dipólus jelenléte erősíti az átlagos mágneses erőteret. Ebben az esetben tehát a mikroszkopikus mágneses dipólusok eredője a mágneses erőtér irányába mutat, ezért a teljes mágneses indukció nagyobb lesz, mint vákuum esetében $B > B_v$.



5.2. ábra. A külső mágneses térre párhuzamosan beálló mágneses dipólus növeli a mágneses teret

Az ilyen anyagokat *paramágneses* anyagoknak nevezik. Nevüket onnan kapták, hogy a belőlük készült hosszú, vékony rúd a mágneses térrel párhuzamosan (*parallel*) igyekszik beállni. A homogén, izotróp anyagok döntő többsége paramágneses.

2. Diamágneses anyagok

Az anyagok egy másik csoportjánál az atomok eredő mágneses dipólmomentuma nulla. Ha azonban egy ilyen anyagot mágneses erőtérbe teszünk, akkor – itt nem részletezett okok miatt – az atomokban létrejön egy ún. *indukált* mágneses dipólmomentum. Az így keletkezett mágneses dipólusok a külső erőtérrel *ellenkező irányban* igyekeznek beállni (a hőmozgás hatása itt is jelentkezik).

Ez a fenti megfontolások alapján azt jelenti, hogy a rendeződött dipólusok mágneses erőtere ezekben az anyagokban a külső erőtérrel ellenkező irányú, így az anyagban az átlagos mágneses indukció kisebb, mint a vákuumbeli érték ($B < B_v$).

Az ilyen anyagokat *diamágneses* anyagoknak nevezik. Nevüket onnan kapták, hogy a belőlük készült hosszú, vékony rúd a mágneses erőtérre merőlegesen (*diametrálisan*)

igyekszik beállni. Diamágneses anyag pl. a bizmut, a higany, a réz, a víz, a gázok közül pedig a nitrogén és a hidrogén.

(Megjegyezzük, hogy az említett indukált dipólmomentum a paramágneses anyagokban is létrejön, de az atom eredeti (paramágneses) dipólmomentuma sokkal nagyobb, így a diamágneses hatás nem észlelhető.)

Később ezzel a kérdéssel részletesebben is foglalkozunk, de már itt megjegyezzük, hogy homogén, izotróp anyagokban – nem túl nagy mágneses erőterek esetén – az anyag jelenlétének a mágneses erőtérre gyakorolt hatása egyszerűen kiszámítható. Erre az a tapasztalat ad lehetőséget, hogy egy áram által egy meghatározott helyen okozott mágneses indukció vákuumbeli (B_v) és ilyen anyag jelenlétében mérhető értékei (B) között egyszerű arányosság áll fenn, így az anyag jelenléte által okozott változás egyetlen, anyagtól függő számmal vehető figyelembe:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{B}_v. \quad (5.1)$$

Itt μ_r az anyagi minőségtől függő szám, az illető anyag *relatív permeabilitása*. Azokat az anyagokat, amelyekre ez az összefüggés érvényes, mágneses szempontból *lineáris anyagoknak* is nevezik.

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a relatív permeabilitás paramágneses anyagokban 1-nél nagyobb pozitív szám: $\mu_r > 1$ (értéke a mérések szerint 1-től alig különbözik, nagysága $1 + 10^{-3}$ és $1 + 10^{-6}$ között van), diamágneses anyagokban viszont 1-nél kisebb pozitív szám: $\mu_r < 1$ (értéke a mérések szerint alig különbözik 1-től, nagysága körülbelül $1 - 10^{-6}$). Ezeknek az anyagoknak közös jellemzője tehát az, hogy relatív permeabilitásuk alig különbözik 1-től.

Vákuumban nincs mágnesezés, ezért $\mu_r = 1$. Mivel gázokban jó közelítéssel $\mu_r = 1$, a levegőben végzett kísérletek eredményeit jó közelítéssel vákuumbeli eredményeknek fogadhatjuk el.

Ha az anyag a fenti egyszerű anyagoknál bonyolultabb (inhomogén, anizotróp, nem lineáris), akkor viselkedését mágneses erőtérben jóval nehezebb leírni. Ezekben az esetekben nincs egyszerű összefüggés a vákuumbeli- és az anyag jelenlétében mért mágneses indukció között, sőt vannak olyan anyagok, amelyekben a mágneses dipólusok külső mágneses erőtér nélkül is rendeződnek, az anyagnak ún. spontán mágnesezettsége van. Emiatt ezekben az anyagokban külső erőtér nélkül is van mágneses erőtér.

A mágnesezett anyagokban várhatóan más lesz a mágneses erőtér, mint a külső tér, hiszen a mágneses dipólusok tere módosítja azt. Ha viszont az anyag jelenléte módosítja a mágneses erőteret, felmerül a kérdés: hogyan módosulnak a magnetosztatika alaptörvényei?

5.1.2. A magnetosztatika Gauss-törvénye anyag jelenlétében

Az anyagokban az atomi töltésmozgásból származó mágneses erőteret ugyanolyan töltéseknek (pl. elektronok) a mozgása okozza, mint amelyek a makroszkopikus áramokat

keltik.

Ezek a mikroszkopikus áramok feltehetőleg ugyanolyan természetű mágneses erőteret keltenek, mint a makroszkopikus áramok, ezért feltehetjük, hogy az így keletkezett mágneses indukcióvektor erővonalai is zárt hurkok. Ebből következik, hogy a Gauss-törvény változatlan formában érvényes anyag jelenlétében is:

$$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0. \quad (5.2)$$

A tapasztalat ezt a feltevést igazolja.

5.1.3. Gerjesztési törvény anyag jelenlétében

A gerjesztési törvény az áramok és a mágneses erőter kapcsolatát rögzíti, ezért ebben figyelembe kell venni a mikroszkopikus áramok erőterét is.

Ez formálisan a *mikroszkopikus áramoknak* a törvénybe történő beírását jelenti:

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 (I + I_{\text{mikro}}). \quad (5.3)$$

(Itt I illetve I_{mikro} a zárt hurok által körülvelt felületen átmenő valódi illetve mikroszkopikus áramok előjeles összegét jelenti.)

Kérdés: adott körülmények között mennyi a zárt hurokra illesztett felületet átmetsző mikroszkopikus áram?

A mikroszkopikus áramokat egy egyszerűsített modellel számítjuk ki. A modellben az elemi mágneses dipólusokat kis köráramoknak tekintjük, és minden dipólust azonosnak tételezünk fel.

Mivel a mikroszkopikus áramokat makroszkopikus mennyiségekkel akarjuk megadni, célszerű a mágnesezést makroszkopikusan jellemezni.

Az anyagban jelenlévő atomi áramokat elemi mágneses dipólmomentumokkal adjuk meg. Ha az egyes mágneses dipólmomentumokat \mathbf{d}_{mi} -vel jelöljük, akkor az egész test mágnesezettségét a dipólmomentumok összegével jellemezhetjük:

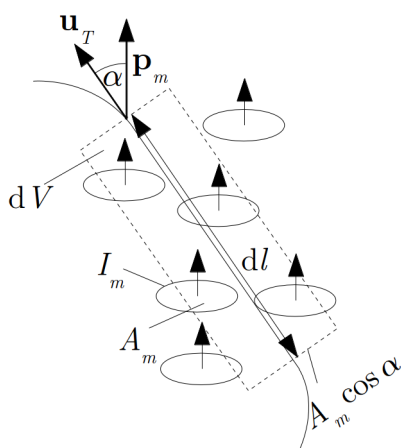
$$\mathbf{d}_m^{\text{teljes}} = \sum_i \mathbf{d}_{mi}. \quad (5.4)$$

Lokális jellemzőként itt is (ahogy az elektromos polarizációnál) bevezetjük a mágneses dipólmomentumok térfogati sűrűségét (számértékieg a térfogategység dipólmomentuma):

$$\mathbf{P}_m = \frac{\Delta \mathbf{d}_m^{\text{teljes}}}{\Delta V} = \frac{\Delta (\sum_i \mathbf{d}_{mi})}{\Delta V}. \quad (5.5)$$

Ez a *mágnesezettség vektora* (néha \mathbf{M} -mel jelölik).

Nézzük meg, hogy a gerjesztési törvényben az összegzéshez felvett zárt hurok egy kis szakasza mentén mennyi lesz a zárt hurok által körülzárt felületet *egyszer* átmetsző áramhurkok száma. A mágneses dipólusokat azonosaknak tételezzük fel $\mathbf{d}_{\text{mi}} = I_m A_m \mathbf{u}_N$ dipólusmomentummal. (Itt I_m az elemi modell-dipólust alkotó köráram erőssége, A_m a köráram felülete, \mathbf{u}_N a normális egységvektor, amelynek iránya az áramirányhoz a jobbkéz-szabály szerint illeszkedik.)



5.3. ábra. A mikroszkópikus áramok figyelembevétele a gerjesztési törvényben

A dl szakasz mentén azok a köráramok adnak egyetlen metszést a zárt hurok által határolt felületen (5.3. ábra), amelyeknek centruma benne van az ábrán szaggatott vonallal jelzett $dV = dl A_m |\cos(\alpha)|$ térfogatban. Ha a dipólusok térfogati darabsűrűsége $n = \frac{dN}{dV}$ (darab/térfogat), akkor az ilyen dipólusok száma

$$dN = n dV = n dl A_m |\cos(\alpha)|, \quad (5.6)$$

az ebből származó – a gerjesztési törvényben járulékot adó – áramok összege pedig (ez esetben pozitív):

$$dI_{\text{mikro}} = I_m \frac{dN}{dV} dl A_m \cos(\alpha), \quad (5.7)$$

A kifejezés előjelhelyesen adja az áramot.

Mivel α a dipólusmomentum-vektor és az elmozdulás irányába mutató \mathbf{u}_T egységvektor közötti szög, az áram vektorokkal is kifejezhető:

$$dI_{\text{mikro}} = \frac{dN}{dV} \mathbf{d}_m dl \mathbf{u}_T = \mathbf{P}_m d\mathbf{r}. \quad (5.8)$$

Itt bevezettük a $d\mathbf{r} = d\mathbf{u}_T$ elmozdulás-vektort.

A zárt hurokra történő összegzésből az

$$I_{\text{mikro}} = \oint_L \mathbf{P}_m d\mathbf{r} \quad (5.9)$$

eredményt kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a mágnesezettség vektora általában nem örvénymentes vektorteret alkot.

A mikroszkopikus áramok fenti kifejezésével a gerjesztési törvény:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \mathbf{P}_m d\mathbf{r}, \quad (5.10)$$

ahol az integrálás (összegzés) mindkét esetben ugyanazon L görbe mentén történik. Ezt felhasználva, az összefüggés átrendezhető a

$$\oint_L (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P}_m) d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad (5.11)$$

alakba. Ez azt jelenti, hogy anyag jelenlétében a $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P}_m$ vektormennyiség a makroszkopikus áramokkal ugyanolyan kapcsolatban van, mint vákuumban a \mathbf{B} . Az egyenlet további egyszerűsítése érdekében még egy átalakítást szokás végrehajtani:

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P}_m \right) d\mathbf{r} = I. \quad (5.12)$$

Az egyenlet bal oldalán a zárójelben szereplő mennyiséget új fizikai jellemzőként szokták bevezetni, és mágneses térerősségnek (\mathbf{H}) nevezik:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P}_m. \quad (5.13)$$

Használata nem nélkülözhetetlen, de a gyakorlatban megszokott, és néha hasznos is. Ezzel a gerjesztési-törvény így alakul:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{r} = I, \quad (5.14)$$

vagy differenciális alakban:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (5.15)$$

A gerjesztési törvénynek ez az alakja azt mutatja, hogy a \mathbf{H} örvényerősségét a valódi, makroszkopikus áramok határozzák meg.

A fenti összefüggés átrendezésével a térmennyiségek kapcsolata a

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{P}_m) \quad (5.16)$$

alakba is írható.

Vákuumban $\mathbf{P}_m = 0$, ezért $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, és a törvény a korábbi (vákuumban érvényes) alakba megy át:

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 I. \quad (5.17)$$

5.1.4. Mágneses erőter homogén, izotróp, lineáris anyagokban

Általános összefüggés:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{P}_m). \quad (5.18)$$

Különböző anyagok esetén különböző a \mathbf{P}_m és a mágneses erőter kapcsolata.

Homogén, izotróp anyagokban, kis tereknél legtöbbször érvényes, hogy $\mathbf{P}_m \sim \mathbf{H}$, ezek az anyagok a *lineáris mágneses anyagok*. Az arányosságot a $\mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H}$ alakban szokás felírni, ahol χ_m az *anyag mágneses szuszceptibilitása*, amely az anyagi minőségtől függ. Megjegyezzük, hogy az anyagok mágneses tulajdonságainak leírásánál történelmi okokból szokás a mágneses térerősségvektort független változóként tekinteni.

A tapasztalat szerint a homogén, izotróp, lineáris anyagok a mágneses térrel kapcsolatos viselkedésük alapján két nagy csoportba oszthatók:

- Az anyagok többségénél a szuszceptibilitás kis pozitív szám: $\chi_m > 0$, nagysága $10^{-3} - 10^{-6}$ közötti érték. Ezek a *paramágneses* anyagok, amelyekben tehát a mágneses dipólusok eredője (a mágnesezettség vektora) a tér irányába mutat. Nevüket onnan kapták, hogy a belőlük készült hosszú, vékony rúd a mágneses térrel párhuzamosan igyekszik beállni.
- Az anyagok egy másik csoportjánál a szuszceptibilitás kis negatív szám: $\chi_m < 0$, nagysága 10^{-6} körüli érték. Ezek a *diamágneses* anyagok, amelyekben a mágneses dipólusok eredője (a mágnesezettség vektora) a tér irányával ellentétes irányba mutat. Nevüket onnan kapták, hogy a belőlük készült hosszú, vékony rúd a mágneses térre merőlegesen (diametrálisan) igyekszik beállni.

A két csoport közös jellemzője, hogy mágneses szuszceptibilitásuk nagysága alig különbözik nullától.

A lineáris viselkedés miatt a térmennyiségek kapcsolata egyszerűsíthető:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{P}_m) = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}. \quad (5.19)$$

Itt $\mu_r = 1 + \chi_m$ az anyag *relatív permeabilitása*, a $\mu = \mu_0 \mu_r$ mennyiség az anyag *abszolút permeabilitása*. Paramágneses anyagoknál $\mu_r > 1$, diamágneses anyagoknál pedig $\mu_r < 1$, de mindkét esetben a relatív permeabilitás jó közelítéssel 1. Vákuumban nincs mágnesezés, ezért $\chi_m = 0$, és $\mu_r = 1$.

Homogén, izotróp, és mágneses szempontból lineáris anyagokban a gerjesztési törvény egyszerűbb alakba írható:

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} \, d\mathbf{r} = I. \quad (5.20)$$

Ebből

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_r \mu_0 I. \quad (5.21)$$

Emiatt *azonos makroszkopikus áramok* esetén minden vákuumban érvényes összefüggésben, ahol szerepel a μ_0 , az anyagban érvényes alakot a $\mu_0 \Rightarrow \mu_0 \mu_r$ cserével kapjuk meg.

Így írható át pl. az egyenes vezető vagy a tekercs mágneses tere

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r} = \mu_r B_v, \quad (5.22)$$

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 I N}{l} = \mu_r B_v. \quad (5.23)$$

Ugyanezeknél az áramoknál a mágneses térerősség

$$H = \frac{B}{\mu_r \mu_0} = \frac{I}{2\pi r} = H_v, \quad (5.24)$$

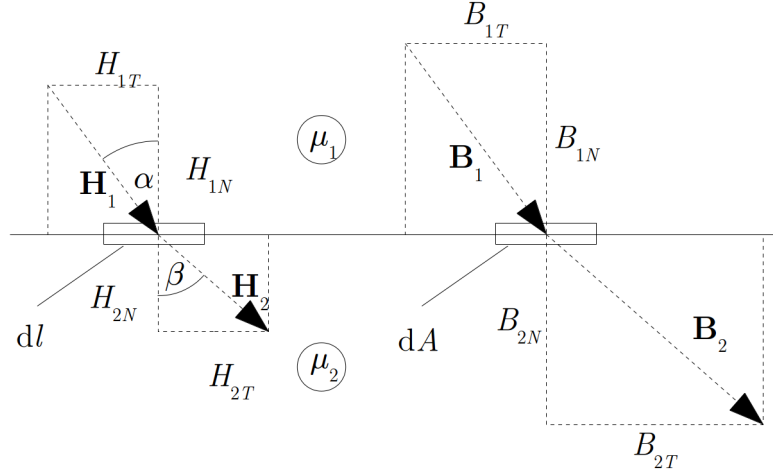
$$H = \frac{IN}{l} = H_v. \quad (5.25)$$

Látható, hogy a H – azonos áramok esetén – valóban nem függ a közegtől. Ebből a szempontból a \mathbf{H} az elektromos tér jellemzésére bevezetett \mathbf{D} -vel analóg (az csak a valódi töltésektől függ).

Két homogén izotróp, lineáris anyag határán a térmennyiségek vektorai általában törést szenvednek (5.4. ábra).

A térerősség-viszonyok számítása az elektromos térhez hasonló módon történik: a felületre simuló zárt görbe (téglalap) mentén

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = -H_{2T} \, dl + H_{1T} \, dl = I. \quad (5.26)$$



5.4. ábra. A mágneses térerősség és az indukció törése két homogén, izotróp, lineáris anyag határán

Ha a felületnél nincsenek makroszkopikus áramok, akkor $H_{1T} = H_{2T}$, és ilyenkor a mágneses térerősség érintőleges komponense nem változik az átmenetnél (a felületre merőleges vonaldarabok hosszával nullához tartunk, ezért nem szerepelnek a vonalintegrálban).

A mágneses indukció vektor változásáról a határfelületre simuló zárt felületre számított fluxus ad felvilágosítást:

$$\oint_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = -B_{1N} dA + B_{2N} dA = 0, \quad (5.27)$$

vagyis $B_{2N} = B_{1N}$, tehát az indukció vektor normális komponense változatlan az átmenetnél.

Ha a határfelületen nincsenek makroszkopikus áramok, akkor \mathbf{B} , \mathbf{H} és \mathbf{P}_m egymással párhuzamosak maradnak (a fenti ábra ezt az esetet mutatja).

A térerősség-vektor törésének törvényét a fenti ábra és a fenti egyenletek alapján kaphatjuk meg.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{B_{1T}}{B_{1N}}, \quad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{B_{2T}}{B_{2N}} \quad (5.28)$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{B_{1T}B_{2N}}{B_{2T}B_{1N}} = \frac{B_{1T}}{B_{2T}} = \frac{\mu_1 H_{1T}}{\mu_2 H_{2T}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (5.29)$$

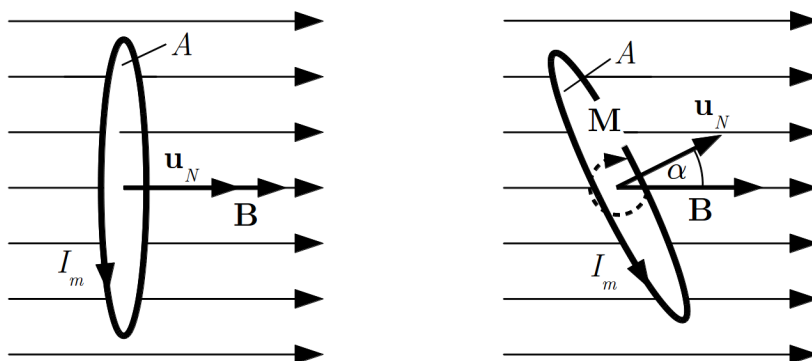
5.1.5. A mágneses indukció vektor és a térerősség mérési utasítása az SI-rendszerben

Határfelületen a térerősségvektor tangenciális-, az indukcióvektor normális komponense megy át változatlanul, ezért egy anyagban a térerősséget elvileg egy a térerősség irányában elnyújtott cső alakú kivágásban, az indukcióvektort pedig a térerősségre merőleges lapos korong alakú kivágásban lehet megmérni.

Az SI-rendszerben a *mágneses indukcióvektor* elvi mérési utasítása egy kisméretű, A felületű, I_m árammal átjárt dróthurokra, vagyis egy mágneses dipólusra ható forgatónyomaték mérésén alapul.

A dróthurkot a kérdéses helyen úgy függesztünk fel, hogy egy pont körül foroghat. Az áramhurok a mágneses erőtér hatására beáll egy meghatározott helyzetbe: a hurok síkja ekkor merőleges a \mathbf{B} mágneses indukcióvektorra (5.5. ábra), vagyis a hurok síkjára merőleges \mathbf{u}_N egységvektor (és a mágneses dipólmomentum) párhuzamos az indukcióvektorral.

Az indukcióvektor nagyságát úgy határozzuk meg, hogy a hurkot, illetve az \mathbf{u}_N vektorral párhuzamos dipólmomentum vektort α szöggel kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, és megmérjük az ehhez szükséges $\mathbf{M} = \mathbf{d}_m \times \mathbf{B} = AI\mathbf{u}_N \times \mathbf{B}$ forgatónyomatékot. Ebből az indukcióvektor nagyságát a $B = \frac{M}{AI_m \sin(\alpha)}$ összefüggéssel számítjuk ki.

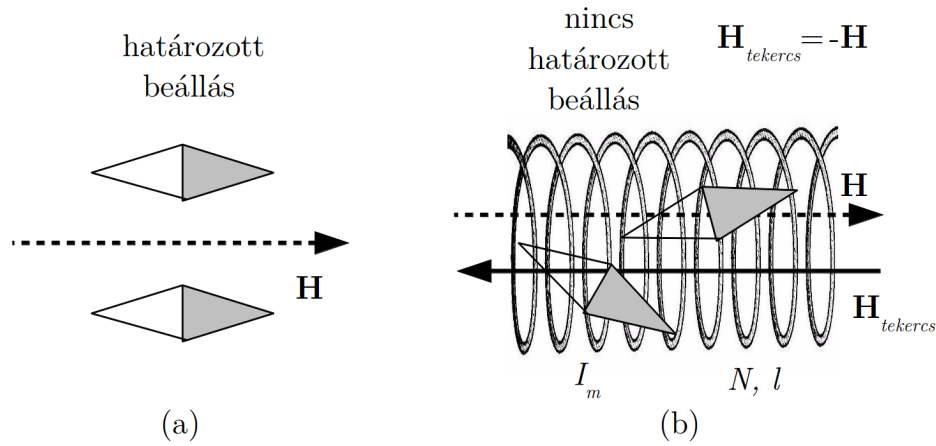


5.5. ábra. A mágneses indukcióvektor elvi mérési utasítása

A *mágneses térerősség* elvi mérési utasítása kompenzációs módszer alkalmazásán alapul.

A kérdéses helyre elhelyezünk egy pont körül forgatható iránytűt. Ha ott mágneses erőtér van, akkor az iránytű beáll egy meghatározott irányba (ld. 5.6. (a) ábra).

Az iránytűt körül vesszük egy N menetű, l hosszúságú tekercsel, amelyben áram folyik. Ekkor az iránytű új egyensúlyi helyzetet vesz fel. Ezután a tekercs I_m áramát változtatjuk, és a tekercset forgatjuk, egészen addig, amíg az iránytű bármilyen helyzetben



5.6. ábra. A mágneses térerősség vektor elvi mérési utasítása

megmarad (5.6. (b) ábra). Ez azt jelenti, hogy nincs mágneses erőter, vagyis az eredeti erőteret a tekercs mágneses erőtere kompenzálta.

Ekkor az eredeti mágneses térerősség (\mathbf{H}) iránya a tekercs térerősségével ($\mathbf{H}_{\text{tekercs}}$) ellentétes irányú, nagysága pedig a tekercs mágneses térerősségével azonos: $H = H_{\text{tekercs}} = \frac{I_m N}{l}$.

5.1.6. Anizotróp anyagok

A \mathbf{P}_m és \mathbf{H} közötti kapcsolat anyagban általában bonyolult: $\mathbf{P}_m = f(\mathbf{H}) + \mathbf{P}_m^S$. A mágnesezettség általában nem párhuzamos a térerősséggel, sőt – amint már említettük – a mágneses dipólusok külső erőter nélkül is rendeződhetnek, az anyagnak spontán mágnesezettsége van.

Kis terek esetén az anyagok többségében a \mathbf{H} és \mathbf{P}_m között lineáris kapcsolat van, de ez anizotróp anyagok esetén nem egyszerű arányosság:

$$\begin{aligned} P_{mx} &= \chi_{mxx}H_x + \chi_{mxy}H_y + \chi_{mxz}H_z \\ , P_{my} &= \chi_{myx}H_x + \chi_{myy}H_y + \chi_{myz}H_z \\ , P_{mz} &= \chi_{mzx}H_x + \chi_{mzy}H_y + \chi_{mzz}H_z. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A kapcsolat hasonló az elektromos térben a polarizáció vektor és az elektromos térerősség vektor közötti összefüggéshez.

A $\chi_{mxx}, \chi_{mxy} \dots \chi_{mzy}, \chi_{mzz}$ mennyiségek alkotják a *szuszeptibilitás-tenzort*.

5.1.7. Ferromágneses anyagok

Említettük már, hogy vannak olyan anyagok, amelyekben a mágneses dipólusok maguktól (spontán) rendeződhetnek, és így külső mágneses erőter nélkül is mágnesezetté válhatnak. Ezek az anyagok a *ferromágneses anyagok*, amelyek a gyakorlatban is jelentős szerepet játszanak.

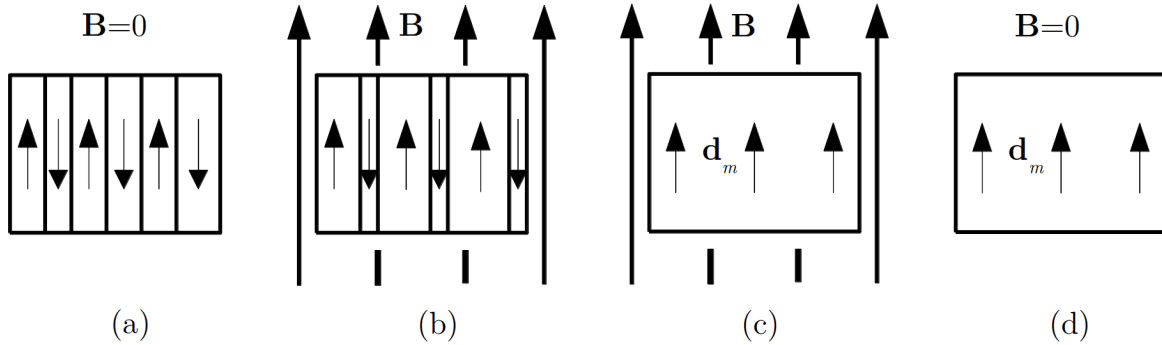
A spontán mágnesezettség olyan kristályos anyagokban alakul ki, amelyeknek atomjaiban a spin mágneses dipólmomentumok eredője nem nulla. Az ilyen anyagok egy részében (ez a kristályszerkezettel is összefügg) az atomok spin mágneses dipólmomentumai között olyan kölcsönhatás jön létre, amely a dipólusok egy irányba történő rendeződését eredményezi: az anyag ferromágneses állapotba megy át. A jelenség leírása elég bonyolult, alapvető oka az, hogy a spin dipólmomentumok párhuzamos beállása a rendszer stabilitását növeli. A ferromágneses anyagokban tehát a mágneses dipólusok spontán rendeződése miatt külső erőter nélkül is van mágneses erőter.

A ferromágneses állapot csak egy bizonyos – anyagtól függő – hőmérséklet, az ún. *Curie-pont* alatt alakul ki (magasabb hőmérsékleten a hőmozgás megszünteti a rendezettséget). A Curie-pont felett ezek az anyagok paramágnesesek.

Mivel az egy irányú mágneses dipólusok mágneses tere a rendszer energiáját jelentősen megnövelné, az energia csökkentése érdekében egy makroszkopikus mintában a mágnesezettség nem azonos irányú a teljes anyagban, hanem ellenkező mágnesezettségű tartományok (ún. *domének*) jönnek létre (5.7. (a) ábra). Az ilyen anyag kifelé nem mutat mágneses tulajdonságokat. Ha azonban az anyagot erős mágneses térbe tesszük, akkor az erőterrel ellentétes irányú domének fokozatosan elfogynak, az erőterrel egy irányú domének pedig megnőnek, és az anyag mágnesezettsége egy irányúvá tehető ((b) és (c) ábra). Az így kialakult állapot nem egyensúlyi állapot, de nem túl magas hőmérsékleten a tér megszűnte után is fennmarad, mert a visszarendeződés csak a hőmozgás (magasabb hőmérséklet) segítségével mehet végbe ((d) ábra). Az ilyen anyagban és a környezetében a rendeződött mágneses dipólusok mágneses erőteret hoznak létre: az anyag mágnesként viselkedik.

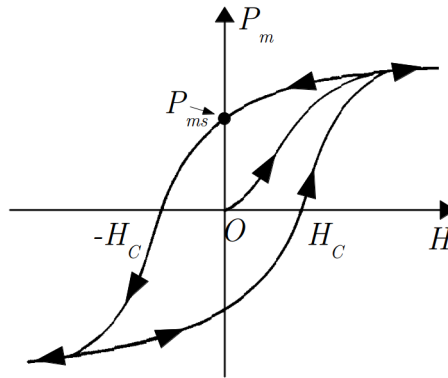
Ferromágneses anyag pl. a vas, a nikkel továbbá számos ötvözetük és vegyületük.

A domének átrendeződésével magyarázható az a jelenség, hogy ezekben az anyagokban a mágnesezettség (\mathbf{P}_m) a mágneses térerősség (\mathbf{H}) változtatásakor bonyolult módon – ún. *hiszterézis-görbe* mentén – változik (5.8. ábra). Az O -val jelölt kezdeti állapot az anyag egyensúlyi állapota, amikor az anyag ellenkező irányítású doménekből áll, és nem mágnesként viselkedik, eredő mágnesezettsége nincs. A mágneses térerősség növelésekor a mágnesezettség először nő, majd változása egyre lassúbbá válik („telítésbe” megy), mert már minden domén befordult a térerősség irányába. Ha a mágneses térerősséget csökkentjük, akkor – ha a hőmérséklet nem túl magas – az anyag $H = 0$ esetén is mágnesezett marad. Az ekkor mérhető mágnesezettség az ún. *remanens* (maradó) *mágnesezettség* (P_{ms}). Az anyag ebben az állapotában mágnesként viselkedik. Ha a térerősséget ellenkező irányúra változtatjuk, akkor egy bizonyos térerősségnél a mágnesezettség eltűnik, ezt



5.7. ábra. Ferromágneses anyag viselkedése külső mágneses térben

a térerősséget (H_C) *koercitiv térerősségnek* nevezik. Az eredetivel ellenkező térerősséget tovább növelve a mágnesezettség ellenkező irányú lesz és most is telítésbe megy. Ezután a térerősséget csökkentve a $H = 0$ értéknél elérjük az ellenkező irányú remanens mágnesezettséget. A térerősséget ismét az eredeti irányban növelve a koercitiv térerősségnél a mágnesezettség ismét nulla lesz, majd az eredeti irányban telítésbe megy, és innen kezdve a görbe ismétli önmagát (5.8. ábra).



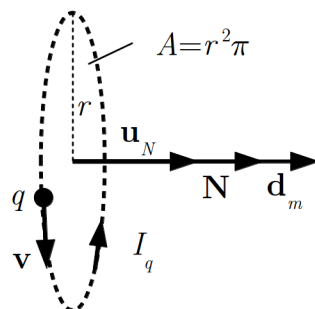
5.8. ábra. Ferromágneses anyag mágnesezettsége a külső mágneses tér függvényében

A bonyolult $P_m = P_m(H)$ összefüggés miatt a ferromágneses anyagok esetén az egyszerű $P_m = \chi_m H$ összefüggéssel definiált mágneses szuszceptibilitás (és így a $\mu_r = 1 + \chi_m$ mágneses permeabilitás) nem értelmezhető, hiszen a $\chi_m = P_m/H$ mennyiség a görbe különböző pontjaiban (vagyis az anyag különböző állapotaiban) különböző értékeket vesz fel. Jellemző értéként az anyag egyensúlyi állapotában (O pont) mérhető $\chi_{mO} = (dP_m/dH)_{H=0}$, ún. kezdeti relatív szuszceptibilitást (permeabilitást) szokás megadni.

A ferromágneses anyagok gyakorlati szempontból igen fontos tulajdonsága, hogy kezdeti relatív permeabilitásuk igen nagy lehet, elérheti a $10^4 - 10^5$ értéket is. Ez azt jelenti, hogy ha a mágneses erőteret létrehozó áramok közötti térrészt ilyen anyaggal töltjük ki, akkor ott a mágneses indukcióvektor nagysága a vákuumbeli értéknél nagyságrendekkel nagyobb lehet. Ezért tesznek a tekercsekbe vasmagot, ha a mágneses indukció megnövelése a cél (pl. elektromágnesek, önindukciós tekercsek).

5.2. A mágnesség klasszikus atomi értelmezése

A mágnesség klasszikus értelmezése az atomról alkotott egyszerű modellen alapul. Az atomban található töltött részecskék mozgását ez a modell körmozgásnak tekinti, és az atomi mágnességet lényegében az ebből származó köráramok mágneses hatásának tekinti.



5.9. ábra. Az atomi köráram perdületének és mágneses dipólmomentumának klasszikus modellje

Egy ilyen atomi köráram fontosabb jellemzői láthatók a mellékelt 5.9. ábrán. Egy körpályán mozgó töltött részecskének perdülete (\mathbf{N}) és mágneses dipólmomentuma (\mathbf{d}_m) van, amelyek az ábrán látható, r sugarú pályán v sebességgel mozgó, m tömegű, q pozitív töltésű részecske esetén

$$\mathbf{N} = rmv\mathbf{u}_N, \quad (5.31)$$

illetve

$$\mathbf{d}_m = I_q A \mathbf{u}_N. \quad (5.32)$$

Ha a keringési idő T , a körmozgás frekvenciája $f = 1/T$, akkor a töltés által képviselt I_q áram

$$I_q = \frac{q}{T} = qf = q \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q}{2\pi} \frac{v}{r}, \quad (5.33)$$

az áramhurok (a dipólus) felülete pedig

$$A = r^2\pi. \quad (5.34)$$

Ezekkel az összefüggésekkel a mágneses dipólmomentum

$$\mathbf{d}_m = I_q A \mathbf{u}_N = \frac{qv}{2\pi r} r^2 \pi \mathbf{u}_N = \frac{q}{2m} r m v \mathbf{u}_N = \frac{q}{2m} \mathbf{N}. \quad (5.35)$$

Ez azt jelenti, hogy a körpályán mozgó töltés mágneses dipólmomentuma és perdülete egymással arányos. A

$$g = \frac{q}{2m} \quad (5.36)$$

arányossági tényezőt *giromágneses együtthatónak* nevezik.

5.2.1. Paramágnesség

A paramágnesség az atomi elektronoknak az atommag körüli mozgásából származó mágneses hatásokkal magyarázható. A körpályán mozgó elektron mágneses dipólusként viselkedik, és a mágneses erőterben fellépő forgatónyomaték igyekszik beállítani azt a \mathbf{B} vektor irányába. Az így többé-kevésbé rendeződött dipólmomentumok mágneses erőtere hozzáadódik az eredeti erőterhez, és ez okozza a paramágneses viselkedést. Itt tehát $\chi_m > 0$, és $\mu_r > 1$. Mivel egy paramágneses rúdban az elemi elektron-köráramok az erőter irányába fordulnak, és mivel ez a helyzet energetikailag kedvező, a rúd maga is az erőterrel párhuzamos (paralell) helyzete foglal el. Innen származik a paramágnesség elnevezés is.

A dipólusok rendezett beállítását a hőmozgás akadályozza, ezért a paramágneses szuszceptibilitás a hőmérséklet emelkedésekor csökken.

A körpálya-modell alapján az elektron viselkedését mágneses erőterben az alábbi módon írhatjuk le.

A fenti formula az atommag körül körpályán mozgnak képzelt, pontszerű elektron esetén is érvényes, azzal az eltéréssel, hogy az elektron töltése negatív ($q = -e$), ezért a körpályán a dipólmomentum-vektor és a perdületvektor ellentétes irányú:

$$\mathbf{d}_m = -\frac{e}{2m} \mathbf{N}. \quad (5.37)$$

Eszerint a giromágneses együttható az atomi elektron pályamenti mozgására vonatkozóan

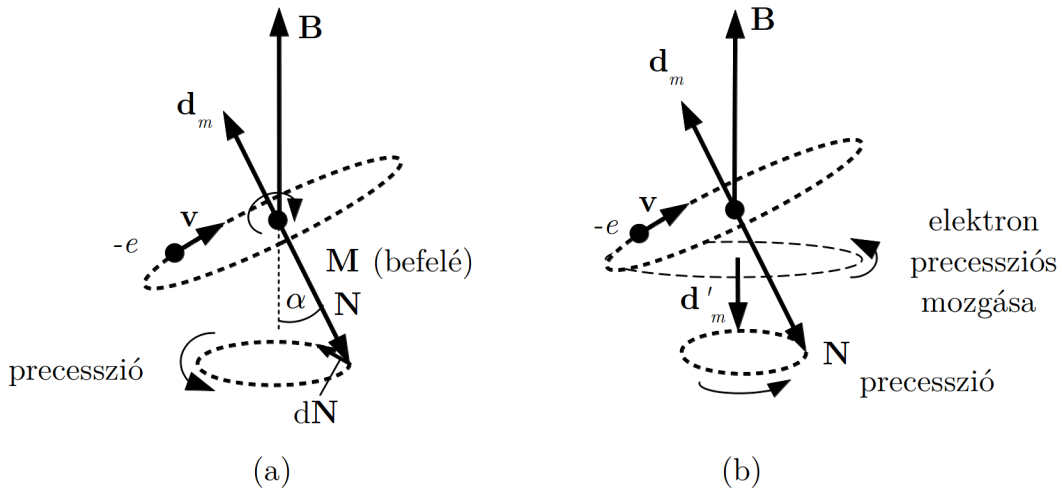
$$g_{el} = -\frac{e}{2m}, \quad (5.38)$$

ahol e az elektron töltésének nagysága, m az elektron tömege.

Ha az atom mágneses erőterben van, akkor a dipólmomentum vektorra $\mathbf{M} = \mathbf{d}_m \times \mathbf{B}$ forgatónyomaték hat. Mivel pedig a keringő elektronnak perdülete is van, a forgatónyomaték miatt lényegében súlyos pörgettyűként viselkedik, és precessziós mozgást végez (5.10. (a) ábra). A perdület változása a precesszió során a forgatónyomaték-vektorral párhuzamos:

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M} dt. \quad (5.39)$$

Ezt a jelenséget *Larmor-precesszió*nak nevezik.



5.10. ábra. Larmor-precesszió (a) és a Larmor-precesszió következtében kialakuló mágneses dipólmomentum (b)

A merev test mozgásának tárgyalásakor kiszámítottuk egy pörgettyű precessziójának körfrekvenciáját is:

$$\omega_{pr} = \frac{M}{N \sin(\alpha)}. \quad (5.40)$$

Az elektron Larmor-precessziójának ω_L szögsebessége, az ún. *Larmor-frekvencia* a forgatónyomaték ismeretében az ábra alapján

$$\omega_L = \frac{d_m B \sin(\alpha)}{N \sin(\alpha)} = \frac{e}{2m} N \frac{B}{N} = \frac{eB}{2m}. \quad (5.41)$$

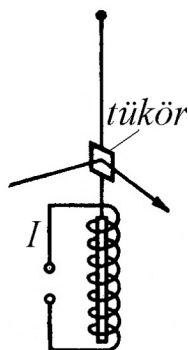
5.2.2. Diamágnesség

Miközben az elektron-pörgettyű a mágneses erőterben precesszál, a körpálya is körbefordul. Az elektron precessziós mozgásához is tartozik mágneses dipólmomentum, amely a mágneses indukcióvektorral *ellentétes* irányú (5.10. (b) ábra).

A klasszikus modell szerint ez a dipólmomentum az oka a diamágnességnek: az erőter által rendezett, ellenkező irányú dipólmomentumuk erőtere csökkenti az eredeti erőteret, ezért itt $\chi_m < 0$, és $\mu_r < 1$. Ez a jelenség minden elektron mozgásánál fellép, ezért a diamágnesség mindig jelen van, de a legtöbb esetben a paramágnesség mellett elhanyagolható. Mivel egy diamágneses rúdban az elemi precessziós elektron-köráramoknak megfelelő dipólmomentumok az erőter irányával szemben állnak be, ez a helyzet energetikailag nem kedvező. Ez az oka annak, hogy a rúd igyekszik *diagonális* helyzetbe kifordulni az erőter irányából, és ezzel csökkenteni a helyzeti energiáját. Innen származik a diamágnesség elnevezés is.

5.2.3. Ferromágnesség

A maradandó mágnességgel rendelkező ún. *ferromágneses anyagok* (pl. vas, nikkel, kobalt) mágnességének vizsgálata során kiderült, hogy azt nem az elektron pályamenti mozgásából származó dipólmomentum okozza.



5.11. ábra. Az Einstein-de Haas-kísérlet vázlata

Az erre vonatkozó első mérés az Einstein-de Haas-kísérlet volt. A mérésnél egy ferromágneses (vas) rudat torziós szálon egy tekercs belsejében függesztettek fel (5.11. ábra), majd a tekercs áramával a vasrudat mágnesezték. Ezután a tekercsben az áram irányát megfordították, és a szálon elhelyezett tükör elfordulását mérték. Az elgondolás az volt, hogy a vasrúd mágnesezettségének átfordításakor a mágneses dipólusok perdülete is átfordul, ezért a perdület megmaradása miatt a vasrúdnak el kell fordulnia, hogy kompenzálja a dipólusok perdületváltozását. Az elfordulásból meg lehet határozni az elektron-dipólusok giromágneses együtthatóját.

A kísérlet valóban működik, és végeredménye az¹, hogy a ferromágnességért felelős mágneses dipólus giromágneses együtthatója $g_{\text{mért}} = -\frac{e}{m}$.

¹ Einstein és de Haas a kísérletben a giromágneses együttható nagyságára $\frac{e}{2m}$ értéket kapott, amiből azt a következtetést vonták le, hogy a ferromágnességért az elektron pályamágneses momentuma felelős.

A kapott giromágneses együtttható azt mutatja, hogy a ferromágnesség nem az elektron pályamenti mozgásával van kapcsolatban. Az eredmény értelmezésére fel kellett tételni, hogy az elektronnak van egy más fajta mozgása is, amelyet a klasszikus modellben az elektronnak saját tengelye körüli forgásával próbáltak értelmezni. Az elektron forgása perdülettel jár, amit *spinnek* neveznek (a pályamenti mozgásból származó perdület neve pályamenti impulzusmomentum). A töltött részecske (a modellben gömb) forgása ugyanakkor töltésmozgással is jár, vagyis a spinhez itt is társul egy mágneses dipólmomentum. Mint később kiderült, a spinnek ilyen egyszerű értelmezése nem lehetséges, ez az elektronnak (és a többi ún. elemi részecskének) mechanikai modellel nem értelmezhető sajátossága.

A ferromágneses anyagokban az anyagtól függő hőmérséklet, az ún. Curie-hőmérséklet alatt az elektronspinek *maguktól rendeződnek*, és így jelentős belső mágneses erőteret hoznak létre (a paramágnességhez viszonyítva igen nagy belső erőter okai az, hogy a spin dipólmomentumok valóban párhuzamosan állnak, szemben a paramágnességnél szerepet játszó pályadipólmomentumokkal, amelyek a hőmozgás miatt jóval kevésbé rendezettek). Az anyag egy makroszkopikus méretű darabjában azonban nem az összes spin áll be ugyanabba az irányba, mert ez a mágneses energia jelentős növekedését eredményezné. Az anyag ezért tartományokra, ún. *doménekre* bomlik, amelyeken belül azonos a spinbeállítás, a szomszédos tartományokban viszont a spinek ellenkező irányúak, ezért egy ilyen ferromágneses anyag kifelé nem mutat mágneses hatásokat.

Erős mágneses erőter hatására azonban a domének többségében a spinbeállítás az erőter irányába fordítható, és ekkor a spinekhez kapcsolódó mágneses dipólusok erőtere már kifelé is érzékelhető lesz: az anyag mágnessé válik. A mágnesezés fenti folyamatával magyarázható a $P_m(H)$ függvény sajátos hiszterézise.

A ferromágneses anyag mágnes-állapota nem egyensúlyi állapot, ezért hosszabb rövidebb idő alatt a mágnes elromlik (a hőmozgás megszünteti az azonos irányú dipólbeállításokat, és újra kialakulnak az ellenkezőleg mágnesezett domének). A mágnesség elvesztésének ideje függ az anyagtól és a hőmérséklettől, jó mágnesek szobahőmérsékleten igen hosszú ideig (évtizedekig) megtartják a mágnesezettségüket.

Kísérlet: Mágneses domének megfigyelése

Átlátszó ferromágneses anyagból (gránátkristály) készült mintát mikroszkóp alá teszünk úgy, hogy a domének mágnesezettsége a fénnel párhuzamos legyen. A mikroszkópban az ellenkező irányban mágnesezett domének más árnyalatúnak látszanak, ezért a doménszerkezet metszete a mikroszkópban láthatóvá válik. A mintában egy tekercsben folyó árammal a fénnel párhuzamos mágneses erőteret hozunk létre. Ha a mágneses erőter nagyságát- illetve

Kiderült azonban, hogy a jó mérési alapelv ellenére mérési eredményük hibás volt. Később a kísérletet E. Back ismételte meg, és az ő eredménye ($\frac{e}{m}$) bizonyult helyesnek, a mérést ennek ellenére Einstein-de Haas-kísérletként tartják számon.

irányát változtatjuk, akkor nyomon követhetjük a doménszerkezet változásait: az erőter irányában mágnesezett domének területe megnő, az ellenkező irányúaké lecsökken. A folyamat végén csak a tér irányába mutató mágnesezettség marad, az ellenkező irányú domének elfogynak, az anyagból mágnes lett. ♦

Kísérlet: Barkhausen effektus

Vaspálcára sokmenetű tekercset teszünk, aminek kivezetéseit egy erősítőn keresztül hangszóróhoz kapcsoljuk. Ezután egy mágnest a vaspálca mellett mozgatva, a vaspálcát mágnesezzük. Eközben a hangszóróból sercegő hangot hallunk. ♦

Az utolsó kísérletben hallható hang magyarázata az, hogy a doméneknek külső erőter hatására bekövetkező átfordulása ugrásszerű folyamat, ami a helyi mágneses erőter irányának ugrásszerű átfordulásával jár. Az átforduló dipólmomentumok a vaspálcára tett tekercsben mágneses indukció-változásokat, és így indukált feszültséglökéseket hoznak létre. Az ugrásszerű doménátfordulások által okozott elektromos jeleket alakítja hanggá a berendezésünk, és ezt a hangot halljuk a hangszóróban. Azt a jelenséget, hogy a domének átfordulása ugrásszerűen következik be, *Barkhausen-effektusnak*² nevezik. A Barkhausen-effektus által okozott elektromos jelek tanulmányozásával az anyag szerkezetére vonatkozó információkat kaphatunk.

² Heinrich Georg Barkhausen (1881 - 1956) német fizikus

6. fejezet

Az elektromágneses indukció

Elektromágneses indukció néven azokat a jelenségeket szokás összefoglalni, amelyekben egy zárt hurokban mágneses erőter jelenlétében – a szokásos telepek nélkül – elektromotoros erő (vezető kör esetén elektromos áram) jön létre. A létrejött elektromotoros erőt *indukált elektromotoros erőnek* (gyakran *indukált feszültségnek*), a kialakult elektromos erőteret *indukált elektromos erőternek*, a vezetőkben ilyenkor megjelenő elektromos áramot pedig *indukált áramnak* nevezik.

A jelenségeket, létrejöttük körülményeinek megfelelően, két csoportra szokták osztani: ha az elektromotoros erő nyugvó vezetőben, változó mágneses erőter hatására jön létre, akkor *nyugalmi indukcióról*, ha pedig állandó mágneses erőterben mozgó vezetőben keletkezik, akkor *mozgási indukcióról* beszélünk.

6.1. Indukált elektromotoros erő mágneses erőterben mozgó vezetőben

Ha egy vezető hurok vagy annak egyes szakaszai mágneses erőterben mozognak, akkor a körben általában áram jön létre. Ez a jelenség a *mozgási indukció*, amelynek közvetlen oka az, hogy a vezetőben elektromotoros erő keletkezik. A mozgási indukció egyszerű kísérletekkel bemutatható.

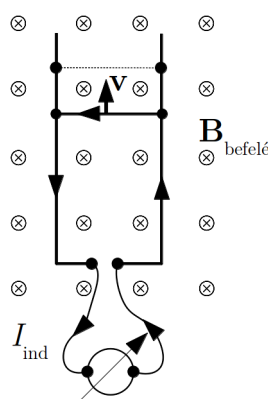
Kísérlet: Indukált áram egyenletesen mozgó vezető szakaszt tartalmazó áramkörben

Téglalap alakú áramkört állítunk össze, amelyben nincs telep csak egy érzékeny árammérő (galvanométer). Az áramkör-téglalap egyik oldala csúsztható a két merőleges oldal által képezett sínen (6.1. ábra). A vezető hurkot a síkjára merőleges mágneses erőterbe (pl. egy patkómágnes rúdjai közé) helyezzük, majd a mozgatható oldalt gyorsan elmozdítjuk. Ekkor az áramkörben

indukált áram (I_{ind}) jön létre: az árammérő a vezető mozgásának ideje alatt áramot mutat.

Ha a mozgás irányát megfordítjuk, akkor az indukált áram ellenkező irányú lesz (a galvanométer ellenkező irányban tér ki). Az indukált áram nagysága függ a vezető elmozdításának sebességétől: a sebesség növelésekor I_{ind} növekszik.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magnezes_indukcio_I.ogv ♦



6.1. ábra. Indukció egyenletesen mozgó vezető szakaszt tartalmazó áramkörben

Kísérlet: Indukció gyorsan változó felületű hurokban

Hajlékony vezetőből készült hurokba bekötünk egy érzékeny árammérőt, és az áramhurokot a síkjára merőleges mágneses erőterbe helyezzük. Ezután a hurok két átellenes pontját gyors mozdulattal széthúзва, a hurok által körülzárt felületet közel nullára csökkentjük. Ekkor az áramkörben indukált áram jön létre: az árammérő a vezető mozgásának ideje alatt áramot mutat. ♦

Kísérlet: Indukció mágneses térben forgó tekercsben

Sok menetet tartalmazó tekercshez érzékeny árammérőt kapcsolunk, majd a tekercset egy patkómágnes pólusai között forgatni kezdjük. Ekkor az árammérő a forgással azonos periódusú váltakozó irányú áramot jelez. Ez tulajdonképpen a váltóáramú generátor egyszerű modellje.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magnezes_indukcio_II.ogv ♦

Ezek a kísérletek a mozgási indukció jelenségét mutatják be: mágneses erőterben mozgó vezetőben elektromotoros erő ébred, amely egy hozzá kapcsolódó áramkörben indukált áramot hoz létre.

Az indukált áram létrejötte ebben az esetben egyszerűen értelmezhető, de mielőtt egy vezető hurokban keletkező indukált árammal foglalkoznánk, vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy vezető darab mágneses erőterben mozog.

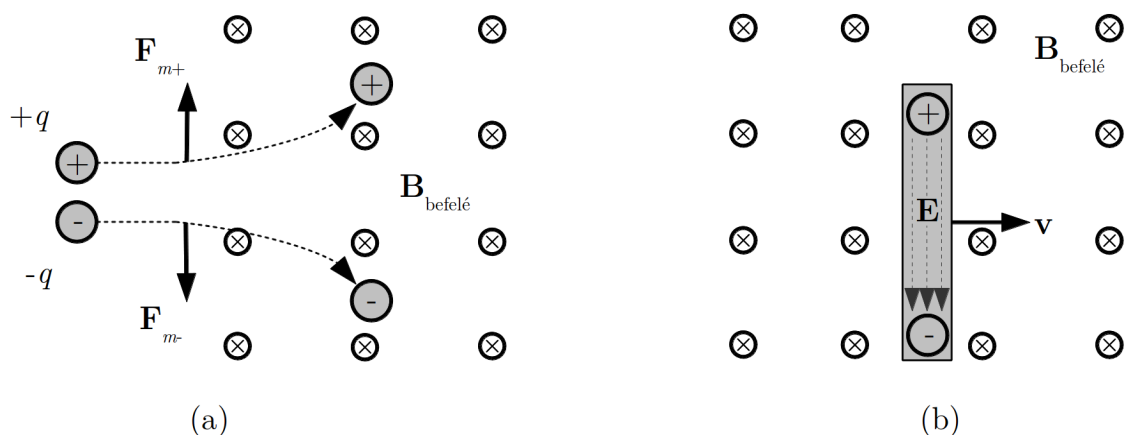
6.1.1. Mozgó vezető mágneses erőterben

Ha elektromos töltés (q) mágneses erőterben mozog, akkor arra erő hat, amely merőleges a mozgás sebességére (\mathbf{v}) és a mágneses indukció-vektorra (\mathbf{B}). Korábban megállapítottuk, hogy ezt az \mathbf{F}_m erőt – amelyet *Lorentz-erőnek*¹ neveznek – az

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

összefüggés adja meg. Ennek az erőnek a hatására a mozgó töltés eltérül eredeti mozgásirányától.

Mivel az erő iránya pozitív- és negatív töltésekre ellentétes, a mágneses erőter a kétféle töltést egymással ellentétes irányban téríti el (6.2. ábra).



6.2. ábra. A Lorentz-erő hatása egy mágneses térben mozgó vezető töltéseire (a.) és a kialakuló töltésmegosztás (b.)

Ha egy vezetőt mágneses erőterben mozgatunk, akkor a benne lévő mozgásképes töltésekre is hat ez az erő, és az ellentétes előjelű töltéseket szétválasztja. A jobb oldali ábrán ezt egy vezető rúd esetében mutatjuk be. A mágneses erőhatás következtében a

¹Hendrik Antoon Lorentz (1853 –1928) holland fizikus

vezető rúd átellenes oldalain ellentétes töltések halmozódnak fel. A töltések megosztása miatt a vezetőben elektrosztatikus erőter keletkezik, és a rúd két vége között potenciálkülönbség jön létre. Az ábrán – pusztán a szemléltetés céljából – berajzoltunk néhány szaggatott elektromos térerősségvonalat.

A töltések felhalmozódása egészen addig folytatódik, amíg a létrejött elektromos erőter visszatérítő ereje (más szóval: a már felhalmozott töltések taszító hatása) egyenlő nem lesz a mágneses erőter által kifejtett erővel. Ekkor beáll az egyensúly, és kialakul a felhalmozódott egyensúlyi töltésmennyiségnek megfelelő egyensúlyi elektromos térerősség. Ennek az a feltétele, hogy a vezető adott pontjában lévő q töltésre ható $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ elektromos erő és az $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ mágneses erő eredője nulla legyen:

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (6.2)$$

Így a vezető adott helyén létrejött elektromos térerősség

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.3)$$

Az ábrán látható egyszerű esetben a sebesség, a mágneses erőter és a mozgatott vezető rúd egymásra páronként merőlegesek, ezért az elektromos erőter párhuzamos a rúddal. Ekkor a vezető adott helyén létrejött elektromos térerősség nagysága:

$$E = vB, \quad (6.4)$$

irányát a mágneses erőre vagy a térerősségre vonatkozó vektori összefüggésből állapíthatjuk meg.

Ha még azt is feltételezzük, hogy a vezetőben a rúddal párhuzamos, homogén elektromos térerősség jön létre, akkor könnyen kiszámíthatjuk a vezető végei között létrejött elektrosztatikus potenciálkülönbség (feszültség) nagyságát is:

$$U = El = vBl, \quad (6.5)$$

ahol l a vezető rúd hossza.

A rúdban kialakult elektrosztatikus feszültséget a mágneses erőter által kifejtett, nem elektrosztatikus jellegű „idegen erő” tartja fenn. Ez a töltésszétválasztó idegen hatás elektromotoros erőt hoz létre, amelyet az elektromos áramkörök tárgyalásánál egy fiktív elektromos térerősséggel jellemeztünk. Ezt a fiktív elektromos térerősséget „idegen térerősségnek” neveztük, és \mathbf{E}^* -gal jelöltük. Esetünkben ehelyett az \mathbf{E}_{ind} jelölést használjuk, mert az idegen térerősség oka a mozgási indukció. Mivel az egyensúly a két „térerősség” együttes fellépésének következménye, az *indukált térerősség*:

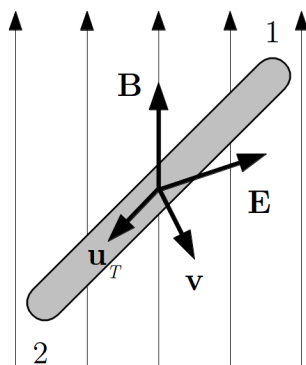
$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.6)$$

A fenti ábra alapján könnyen kiszámíthatjuk az indukált térerősség által létrehozott \mathcal{E}_{ind} indukált elektromotoros erőt. Ha a vezető negatív végétől a pozitívig haladunk, akkor

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_{\text{ind}} d\mathbf{r} = - \int_{-}^{+} \mathbf{E} d\mathbf{r} = U_{+} - U_{-}. \quad (6.7)$$

Ez azt jelenti, hogy *egyensúlyi helyzetben* az idegen hatás által keltett elektromotoros erő megegyezik a létrejött elektrosztatikus feszültséggel.

Ha nem tételezzük fel, hogy a vezető sebessége, a mágneses erőter és a vezető rúd speciális helyzetű, akkor a tárgyalásnál a sebességvektor és a mágneses indukcióvektor mellett a vezető rúd helyzetét is meg kell adnunk. Ennek érdekében vezettük be a 6.3. ábrán látható \mathbf{u}_T egységvektort, amely a vezetővel párhuzamos.



6.3. ábra. A mozgási indukció számítása tetszőleges irányú mágneses tér, sebesség és vezetőszakasz esetén

Az egyensúly feltételét most is az

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.8)$$

összefüggés adja meg, de – amint az az ábrán is látható – az elektrosztatikus térerősség általában nem párhuzamos a vezető rúddal.

A töltésszétválasztó idegen térerősség ebben az esetben is $\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\mathbf{E}$, vagyis

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (6.9)$$

így az indukált elektromotoros erőt az

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ind}} d\mathbf{r} = \int_1^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{u}_T dr \quad (6.10)$$

kifejezés adja meg. Itt felhasználtuk, hogy $\mathbf{u}_T \parallel d\mathbf{r}$, ezért $d\mathbf{r} = dr\mathbf{u}_T$.

Ha a mágneses erőter homogén, a rúd- és a rúd sebességének iránya is állandó, akkor

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \int_1^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_T dr = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_T \int_1^2 dr = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_T l, \quad (6.11)$$

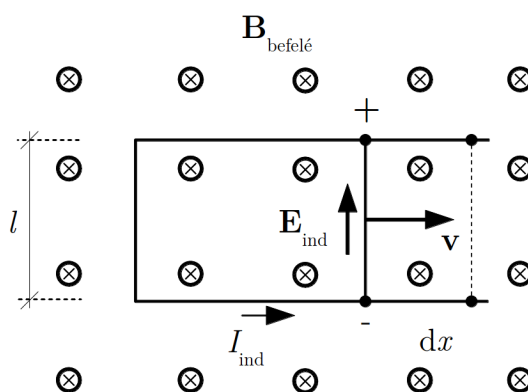
ahol l a vezető rúd hossza.

Ha a három irány (vezető, sebesség és mágneses erőter) egymásra merőleges, akkor $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_T = vB$, és az általános tárgyalás speciális eseteként megkapjuk korábbi eredményünket:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = vBl. \quad (6.12)$$

6.1.2. Mozgási indukció zárt vezető hurokban

A fentiek alapján kézenfekvőnek látszik, hogy ha egy mágneses erőterben elhelyezett zárt vezető hurok egyes szakaszai mozognak, akkor a körben elektromos áram jöhet létre. Ezt a várakozást az elvégzett kísérletek igazolják.



6.4. ábra. Az indukált áram meghatározása zárt áramkör esetén

Az indukált áram egyszerűen meghatározható a 6.4. ábrán látható modell-elrendezés segítségével. Párhuzamos vezető sín pár egyik végét vezetővel összekötjük, és a sín páron egy mozgatható vezető szakaszt fektetünk keresztbe. A sín párt a síkjára merőleges mágneses erőterbe tesszük (az erőteret jellemző \mathbf{B} mágneses indukcióvektor az ábrán a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat), és a keresztbefektetett vezetődarabot mozgásba hozzuk. Ekkor a mozgó rúdban a töltésekre fellép a korábban már tárgyalt mágneses erő (Lorentz-erő) és az ellenkező előjelű töltések szétválnak, vagyis egy „telep” keletkezik.

Ebben a „telepben” az elektromotoros erőt létrehozó „idegen” hatás a mágneses erőhatás, amely a fiktív, indukált

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.13)$$

elektromos térerősséggel jellemezhető. Ez a térerősség a vizsgált esetben az óramutató járásával ellentétes irányú áramot hoz létre.

Az áram irányában körbejárva, és Kirchhoff II. törvényét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{ind}} \, d\mathbf{r} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_{\text{ind}} \, d\mathbf{r} = Blv = I_{\text{ind}} R, \quad (6.14)$$

így a körben folyó *indukált áram* $I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = \frac{Blv}{R}$, ahol R a kör elektromos ellenállása.

Az indukált elektromotoros erő kifejezése egy kis átalakítással más alakba is átírható, ami a jelenség általánosabb leírására is lehetőséget ad. Az átalakításhoz használjuk fel, hogy $v = \frac{dx}{dt}$, ahol dx a rúd elemi elmozdulása dt idő alatt. Ezt beírva az indukált feszültség kifejezésébe, és egyelőre az előjelet nem vizsgálva, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = Blv = Bl \frac{dx}{dt} = B \frac{dA}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (6.15)$$

Itt felhasználtuk, hogy $dA = l \, dx$ az áramhurok területének elemi megváltozása (a fenti ábrán a besatírozott rész), és állandó B mellett $B \, dA$ az áramhurok területére vett indukciófluxus megváltozása.

Most megvizsgáljuk az előjeleket. Mivel az indukált áram irányával azonos irányú körüljárást választottunk, az indukált elektromotoros erő pozitív lesz ($\mathbf{E}_{\text{ind}} \parallel d\mathbf{r}$). Ha a felület normális vektorát – a szokásoknak megfelelően – a körüljárás irányához a jobbkézszabállyal rögzítjük (az ábra síkjából kifelé), akkor a fluxusváltozás negatív lesz, hiszen a felületváltozás pozitív, a felületvektor pedig az indukcióvektorral ellentétes irányú. Ezért a fenti összefüggés előjelhelyesen:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (6.16)$$

Az indukált elektromotoros erő tehát az indukciófluxus változásával hozható kapcsolatba.

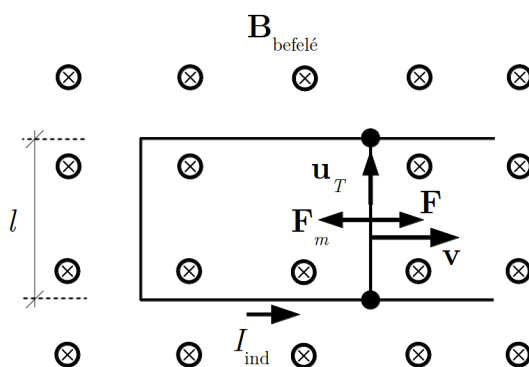
A keletkezett indukált áram mágneses erőtere az áramhurok belsejében az eredeti erőterrel ellentétes irányú, vagyis az indukált áram a hurokban a mágneses indukciót, és ezzel a fluxust is csökkenti. Más szóval az indukált feszültség itt is olyan, hogy az őt létrehozó hatást csökkenti: ez Lenz² törvénye.

²Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804–1865) balti-német fizikus

Végül vizsgáljuk meg, hogy minek az árán jön létre az indukált áram. Ahhoz ugyanis, hogy a körben áramot hozzunk létre, munkát kell végezni. A munkavégzés közvetlen oka az, hogy a rúdban folyó indukált áramra a mágneses erőhatás

$$\mathbf{F}_m = I_{\text{ind}} l \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} \quad (6.17)$$

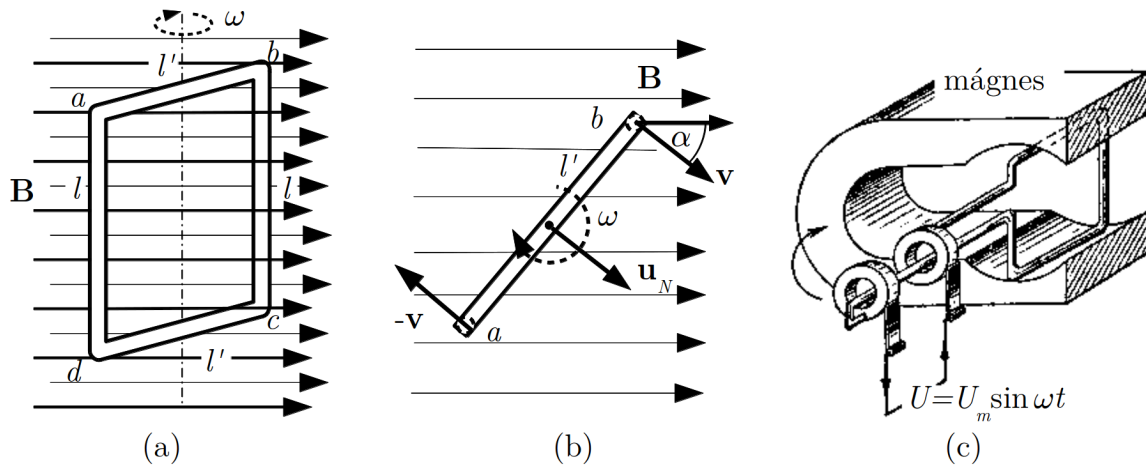
erőt fejt ki (6.5. ábra), ahol \mathbf{u}_T az áram irányába mutató egységvektor. Ez az erő a rúd mozgásirányával ellentétes, ezért ahhoz, hogy a rudat egyenletes mozgásban tartsuk $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m$ erőt kell kifejtenünk, vagyis munkát kell végeznünk. Ez a jelenség szintén a Lenz-törvény megnyilvánulása: az indukált feszültség oka az, hogy a vezetőt mozgatjuk, ezért az indukált feszültség olyan áramot kelt, amire ható mágneses erőhatás fékezi a mozgást.



6.5. ábra. A mozgó vezetőre ható erők

Láttuk, hogy a mozgási indukció segítségével a fenti módszerrel elektromos feszültséget lehet létrehozni, vagyis elvileg ezt a jelenséget feszültségforrásként lehet használni. Ez a módszer azonban praktikusán nem nagyon használható, hiszen a feszültség fenntartásához igen hosszú sínre lenne szükség. Ezt a nehézséget úgy lehet kiküszöbölni, hogy egy vezető keretet forgatunk mágneses erőterben. Ekkor a keretben váltakozó irányú feszültség keletkezik, amely – megfelelő technikai megoldással – váltóáramú generátorként használható. A váltakozó feszültség létrejöttét, más szóval egy *generátor* működési elvét, két módon is értelmezhetjük.

Az egyik értelmezés közvetlenül a Lorentz-erő töltésszétválasztó hatásán alapul, amellyel eddig is magyaráztuk a mozgási indukció jelenségét. A 6.6. (a) ábrán a generátor egyszerű modellje látható: egy vezető keret (az egyszerűség kedvéért függőleges és vízszintes oldalakból álló téglalap) függőleges tengely körül ω szögsebességgel forog a vízszintes irányú, \mathbf{B} mágneses indukciójú, homogén mágneses erőterben. A keletkező indukált elektromotoros erő kiszámításához ugyanezt a keretet a 6.6. (b) ábrán felülnézetben ábrázoltuk (felülről az l' hosszúságú, vízszintes, ab oldalt látjuk).



6.6. ábra. Forgó vezető keret mágneses térben és annak kísérleti megvalósítása

A vezető keret egyes oldalaiban létrejött indukált elektromos térerősséget az

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.18)$$

összefüggésből számíthatjuk ki.

Az l' hosszúságú, vízszintes szakaszokon (ab és cd) ez az indukált térerősség merőleges a vezetőre, ezért az a és b pontok között, illetve a c és d pontok között nem keletkezik elektromotoros erő. A mágneses indukcióra merőleges l hosszúságú szakaszokon (ad és bc) az indukált elektromos térerősség párhuzamos lesz a vezető szakaszokkal, ezért az a és d illetve a b és c pontok között lesz elektromotoros erő. A fenti képletből kiderül, hogy az ad szakaszon az indukált térerősség lefelé mutat, a bc szakaszon pedig felfelé. Emiatt a vezetőt körbejárva a két szakaszon fellépő elektromotoros erő összeadódik. Ha a körbejárásnál az indukált árammal (és az indukált térerősséggel) egy irányban ($L \Rightarrow adcba$) haladunk, akkor az egyes szakaszokon az indukált elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_{ad} = \mathcal{E}_{bc} = v_{\perp} Bl = (v \sin \alpha) Bl = vBl \sin \alpha. \quad (6.19)$$

A teljes indukált elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \mathcal{E}_{ad} + \mathcal{E}_{bc} = 2vBl \sin \alpha, \quad (6.20)$$

ahol α a sebességvektor és az indukcióvektor közötti szög.

A gyakorlatban a szögelfordulást legtöbbször a keret síkjához az ábra szerint hozzárendelt \mathbf{u}_N merőleges egységvektor (normálvektor) és az indukcióvektor közötti szöggel adják meg (a normálvektor irányát a körüljáráshoz igazítják a jobbkéz-szabály segítségével), ami az esetünkben szintén α , tehát ezzel a szöggel kifejezve is ugyanazt az összefüggést kapjuk.

Mivel a függőleges vezeték-szakaszok ω szögsebességű körmozgást végeznek, a kerületi sebesség és a szögsebesség továbbá a szögelfordulás és szögsebesség

$$v = r\omega = \frac{l'}{2}\omega, \quad \alpha = \omega t \quad (6.21)$$

összefüggését felhasználva, az indukált elektromotoros erőre azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = Bll'\omega \sin \omega t = BA\omega \sin \omega t, \quad (6.22)$$

ahol $A = ll'$ a keret felülete.

Ha a keretet megszakítjuk, és két kivezetését a keret tengelyére szerelt csúszó érintkezőkre visszük (6.6. (c) ábra), akkor ott időben szinuszosan változó

$$U = U_m \sin \omega t \quad (6.23)$$

feszültséget mérünk. Itt a feszültség maximális értékére az $U_m = BA\omega$ jelölést vezettük be.

Látható, hogy a mágneses erőterben forgatott keret változó feszültséget állít elő, ami egy külső áramkörben szinuszosan változó áramot hoz létre, vagyis ez az elrendezés a váltóáramú generátor modellje.

Az indukált elektromotoros erő számításának másik módja az, hogy felhasználjuk az indukált elektromotoros erő és a fluxusváltozás között fennálló

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.24)$$

összefüggést.

A 6.7. ábrán látható helyzetben a keret felületére vonatkozó fluxus

$$\Phi_B = \int_A \mathbf{B} \mathbf{u}_N dA_N = B \cos \alpha \int_A dA, \quad (6.25)$$

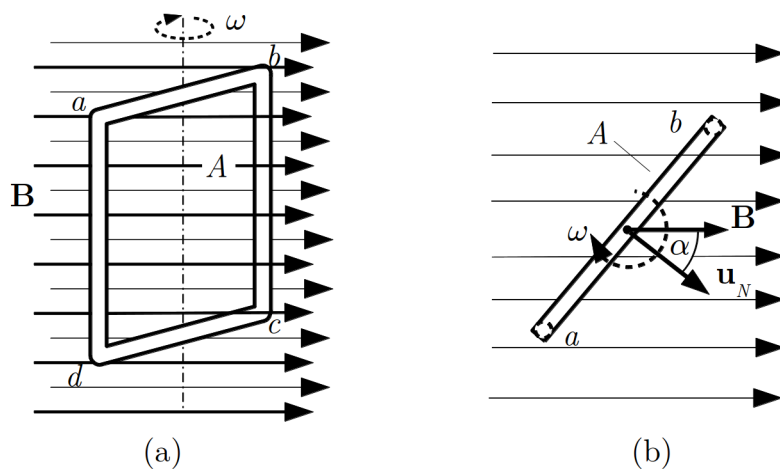
vagyis

$$\Phi_B = BA \cos \alpha. \quad (6.26)$$

A változó α szög időfüggését az $\alpha = \omega t$ összefüggés adja meg, így a fluxus időbeli változása $\Phi_B(t) = BA \cos \omega t$. Ezzel az indukált elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\omega \sin \omega t, \quad (6.27)$$

ami megegyezik a Lorentz-erő felhasználásával kapott eredménnyel. Ez megerősíti azt a korábbi következtetésünket, hogy a mozgási indukciónál az indukált elektromotoros erő kapcsolatba hozható az indukciófluxus változásával.



6.7. ábra. Forgó vezető keret indukált elektromotoros erejének számítása az indukciófluxus alapján

6.2. Nyugalmi indukció, a Faraday-törvény

Számos tapasztalat mutatja, hogy egy rögzített vezető hurokban vagy tekercsben áram jön létre, ha a vezető hurok környezetében változik a mágneses erőter. Ez egyszerű kísérletekkel demonstrálható.

Kísérlet: Nyugalmi indukció tekercsbe helyezett elektromágnes bekapcsolásával

Sok menetet tartalmazó tekercshez érzékeny árammérőt kapcsolunk, majd a tekercs közepén lévő hengeres üregbe egy másik tekercset tolunk be, amelyet egy kapcsolón keresztül áramforráshoz kapcsolunk. Ezzel a tekercsrel mágneses erőteret tudunk létrehozni a külső tekercs belsejében. Ha a belső tekercsben bekapcsoljuk az áramot, akkor a külső tekercshez kapcsolt árammérő rövid ideig áramot mutat, vagyis a mágneses erőter bekapcsolásával a külső tekercsben indukált áramot hoztunk létre.

Ha a belső tekercsben az áram állandósul, akkor az indukált áram megszűnik. Ha most a belső tekercsben az áramot kikapcsoljuk, akkor a külső tekercsben ismét indukált áramlökés jön létre, amely ellentétes irányú, mint a bekapcsoláskor észlelt indukált áram.

Megfigyelhetjük, hogy az indukált áram annál nagyobb, minél nagyobb a kapcsoláskor létrejött áramváltozás (és a mágneses erőter vele együtt járó változása).

Ha a belső tekercs áramát folyamatosan változtatjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az indukált áram annál nagyobb, minél gyorsabb az áram (illetve a mágneses erőter) változása. ♦

Kísérlet: Nyugalmi indukció tekercsbe helyezett mágnes mozgásával

Sok menetet tartalmazó tekercshez érzékeny árammérőt kapcsolunk, majd a tekercs közepén lévő hengeres üregbe betöljük egy erős mágnes egyik pólusát. Az árammérő a mozgás ideje alatt áramot mutat, vagyis a mágnes mozgásával indukált áramot hoztunk létre.

Ha a mágnesnek ugyanezt a pólusát kihúzzuk a tekercsből, akkor ellenkező irányú áram indukálódik. Megfigyelhető, hogy az indukált áram nagysága a mágnes mozgásának sebességével nő.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_VI.ogv ♦

Ezek a kísérletek azt mutatják, hogy ha egy vezető hurokban megváltozik a mágneses erőter, akkor abban indukált áram jön létre függetlenül attól, hogy a mágneses tér változását állandó mágnes mozgásával vagy egy elektromágnes áramának változtatásával értük el.

A kísérletekből az is látszik, hogy indukált áramot csak a mágneses erőter változása idején tapasztalunk, és az indukált áram annál nagyobb, minél gyorsabban változik a mágneses erőter.

Az elvégzett kísérletek alapján sejthető, hogy egy nyugvó vezető hurokban létrejött indukált áram a mágneses indukcióvektor nagyságának változásával és a változás sebességével van összefüggésben. Ezt további nagyszámú tapasztalat is megerősíti, és pontosítja: az indukált áram (I_{ind}) nagysága arányos az indukcióvektor változási sebességével, azaz

$$|I_{\text{ind}}| \sim \left| \frac{dB}{dt} \right|. \quad (6.28)$$

6.2.1. A Faraday-féle indukciótörvény

Ahhoz, hogy egy áramkörben tartósan áram folyjon, ott elektromotoros erőnek kell jelen lenni. Ebből az következik, hogy az áramkörben elsődlegesen egy indukált elektromotoros erő jön létre, és ez hozza létre az indukált áramot, ami függ a vezető hurok ellenállásától is. Emiatt célszerűbb az indukált elektromotoros erőre vonatkozó összefüggést keresni. Mivel az áram és a feszültség adott áramkörben egymással arányos, a tapasztalatok alapján írhatjuk, hogy

$$|\mathcal{E}_{\text{ind}}| \sim \left| \frac{dB}{dt} \right|. \quad (6.29)$$

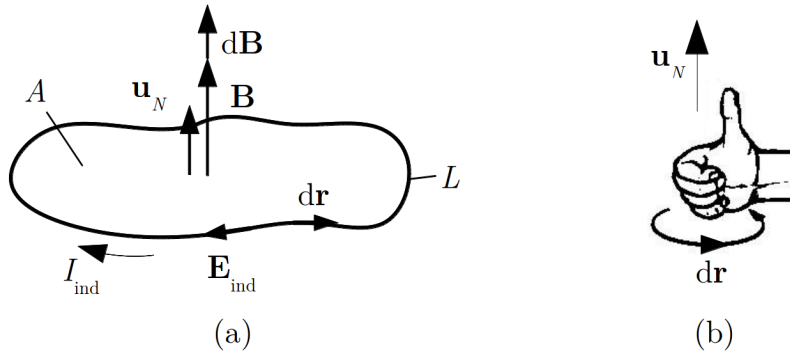
A tapasztalat szerint az indukált elektromotoros erő arányos a rögzített vezető hurok A felületének nagyságával is

$$|\mathcal{E}_{\text{ind}}| \sim A \left| \frac{dB}{dt} \right| = \left| \frac{A dB}{dt} \right| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|, \quad (6.30)$$

vagyis arányos a hurok felületére vonatkozó Φ_B indukciófluxus változási sebességével. Részletesebb kísérleti vizsgálatokból az is kiderült, hogy az SI rendszerben a fenti összefüggésben az arányossági tényező éppen 1, tehát azt írhatjuk, hogy

$$|\mathcal{E}_{\text{ind}}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|. \quad (6.31)$$

Ahhoz, hogy az abszolútérték-jeleket elhagyhassuk, meg kell vizsgálnunk a bal- és jobb oldalon álló mennyiségek előjeleit. Az egyszerűség kedvéért itt feltételezzük, hogy a vezető hurok síkbeli görbe, és az indukcióvektor változása ($d\mathbf{B}$) a hurok egész felületén ugyanolyan.



6.8. ábra. Az indukált áram irányának meghatározása nyugalmi indukció esetén

A kísérletek tanúsága szerint a 6.8. (a) ábrán látható áramhurokban az indukcióvektor berajzolt $d\mathbf{B}$ változása esetén az óramutató járásával egyirányú indukált áram (I_{ind}) jön létre. Ez azt jelenti, hogy a hurokban ugyanilyen irányú indukált elektromos erőternek (\mathbf{E}_{ind}) kell kialakulni, hiszen a tapasztalt irányban ez mozgatja a pozitív töltéseket.

Az elektromotoros erő előjelének meghatározásához be kell vezetni egy körüljárási irányt (a 6.8. (a) ábrán az áramiránnyal ellenkező irányt választottunk), majd az L vezetőhurok mentén ki kell számítani az $\mathbf{E}_{\text{ind}} d\mathbf{r}$ mennyiségek összegét. A jobb oldalon álló fluxusváltozás kiszámításhoz rögzíteni kell az \mathbf{u}_N felület-egységvektor irányát (az (a) ábrán felfelé mutat), és ki kell számítani a $d\mathbf{B} \mathbf{u}_N$ mennyiséget.

Ha a körüljárást és a felület-egységvektort az (a) ábrán látható módon választjuk, akkor $\mathbf{E}_{\text{ind}} d\mathbf{r} < 0$, és $d\mathbf{B} \mathbf{u}_N > 0$, ezért az indukált elektromotoros erőt megadó összefüggés bal oldalán negatív-, a jobb oldalán pedig pozitív szám áll. Ezért az egyenlet

akkor helyes, ha az $\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ alakban írjuk fel. Ha a körüljárási irány és a felületvektor közül az egyiket ellenkező irányban vesszük fel, akkor a helyes összefüggés $\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_B}{dt}$ lesz. Ez azt jelenti, hogy az összefüggés csak akkor lesz egyértelmű, ha az egyébként tetszőlegesen választható körüljárás- és felület-normálvektor irányát meghatározott módon rendeljük egymáshoz. Az elfogadott eljárás az, hogy a két irányt a 6.8. (b) ábrán látható *jobbkez-szabály* szerint választjuk meg.

Az (a) ábrán a két irányt éppen így jelöltük ki, vagyis a megállapodást követve az *indukált elektromotoros erőt* megadó összefüggés előjelhelyesen az alábbi módon írható fel:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right). \quad (6.32)$$

Ha az elektromotoros erőt is részletesen felírjuk, akkor az összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right) \quad (6.33)$$

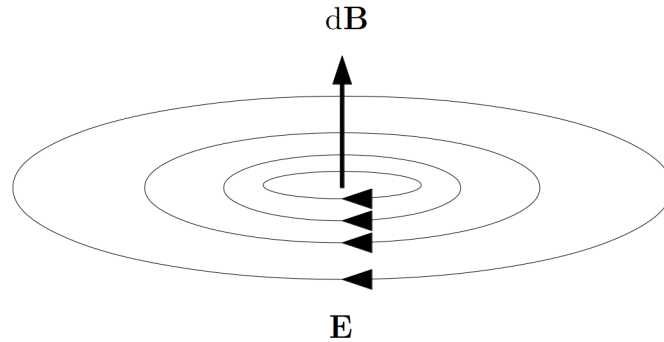
Ez a *Faraday-féle indukciótörvény*³.

A indukciótörvényből megállapítható, hogy a vezető hurokban létrejött elektromos erőter nem konzervatív, erővonalai önmagukban záródnak. Ez az elektromos erőter mozgatja körbe a töltéseket a vezető hurokban.

Felmerül a kérdés, hogy mi történik, ha a változó mágneses erőterben nincs vezető hurok, amelyben az indukált áram létrejönne. A tapasztalat azt mutatja, hogy *elektromos erőter ekkor is létrejön*, és ez a mágneses tér változása által létrehozott indukált elektromos tér a sztatikus tértől eltérő tulajdonságokkal rendelkezik. Erővonalai zárt hurkokat alkotnak, amelyek a mágneses indukcióvektor *megváltozását*, a $d\mathbf{B}$ vektort veszik körül. A keletkező tér irányát a 6.9. ábra mutatja (balkéz-szabály).

Az indukált elektromos erőter jellegéből következik, hogy nem lehet konzervatív, tehát az elektrosztatikában felírt $\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0$ törvény változó erőterek esetén nem érvényes, helyette a Faraday-törvényt kell használni. Ez a törvény azonban határesetként tartalmazza az elektrosztatika I. alaptörvényét is, hiszen állandó terek esetén a fluxusváltozás – és ezzel az egyenlet jobb oldala – nulla. Ebből következik, hogy a mindig érvényes

³A törvényt *Michael Faraday* (1791 – 1867) angol fizikus ismerte fel és publikálta először. Vele egy időben és tőle függetlenül tanulmányozta az indukció jelenségét *Joseph Henry* (1797 – 1878) amerikai és *Heinrich Lenz* német származású észak-nyugat-germán fizikus is. Ezért az indukciótörvényre szokás Faraday-Henry ill. Faraday-Lenz törvényként is hivatkozni.



6.9. ábra. Az indukált térerősség vezető anyag jelenléte nélkül is megjelenik, iránya a „balkéz-szabály” segítségével határozható meg

alaptörvény a

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right) \quad (6.34)$$

Faraday-törvény, amely az elektrosztatika I. alaptörvényének változó terek esetén is érvényes általánosítása.

A Faraday törvény fenti integrális alakját matematikailag tovább egyszerűsíthetjük a Stokes integráltétel segítségével (ld. Matematikai összefoglaló, ?? fejezet), amely szerint egy vektortér zárt görbére vett vonalmenti integrálja megegyezik a vektortér rotációjának a görbe által körbezárt felületre vett integráljával:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_A \text{rot } \mathbf{E} \, d\mathbf{A}. \quad (6.35)$$

Így a Faraday törvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\int_A \text{rot } \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right). \quad (6.36)$$

Ahhoz, hogy az egyenlet mindkét oldalát egy közös felületi integrál alá vonhassuk, az egyenlet jobb oldalán a felületi integrált fel kell cserélnünk az időbeli differenciálással. A felcserélhetőség feltétele, hogy az integrálási tartomány (az A felület) időben ne változzon. Mivel a mozgási indukciónak éppen az a lényege, hogy az indukciófluxus változása állandó mágneses indukció vektor mellett a felület változásából adódik, ez a feltétel mozgási indukcióra nem teljesül. Ebben az esetben az egyenlet jobb oldalának átalakítása

matematikailag kissé bonyolultabb, mivel ott a felület változását is figyelembe kell venni⁴

$$\int_A \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) d\mathbf{A} = 0. \quad (6.37)$$

Ezen integrál értéke akkor és csak akkor lehet minden A felületre nulla, ha maga az integrandus is nulla, azaz:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (6.38)$$

Ez a Faraday törvény differenciális alakja, amely lokális mennyiségekre mondja ki az indukált elektromos tér örvényességére vonatkozó törvényt: a tér örvénysűrűsége $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ a tér minden pontjában megegyezik a mágneses indukció idő szerinti differenciálhányadosának mínusz ejtszeresével.

6.2.2. Örvényáramok

A 6.8. (a) ábra alapján könnyen megállapítható, hogy az indukált áram a vezetőhurok belsejében olyan mágneses teret hoz létre, amely ellentétes a $d\mathbf{B}$ változással, vagyis az indukált áramot okozó változást csökkenteni igyekszik. Ezt a szabályt először *Lenz* ismerte fel, ezért *Lenz-törvénynek* nevezik. A Lenz-törvényt számos tapasztalat igazolja. Ezzel a törvénnyel magyarázható pl. változó mágneses erőterbe helyezett, kiterjedt vezetőkben az ún. *örvényáramok* kialakulása miatt fellépő számos jelenség.

Kísérlet: Örvényáramok

- Lengethetően felfüggesztett alumínium karikához, a felületére merőlegesen erős mágneset közelítve, a karika a mágnes mozgásirányában kilendül (csökkenti a mágnes hozzá viszonyított sebességét), és a mágnes ide-oda mozgatásával jelentős amplitúdójú lengésbe hozható. Ha ugyanezt a kísérletet olyan alumínium karikával végezzük el, amely nem folytonos, hanem egy helyen meg van szakítva, a jelenség nem lép fel.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_VIII.ogv

- Alumíniumlemezről készült ingát erős mágneses térben kilendítve, a lengés igen gyorsan lecsillapodik. Ha a kísérletet olyan lemez-ingával végezzük el, amelyet fésűszerűen bevagdostunk, akkor a csillapodás látványosan csökken.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_X.ogv

⁴ld. Gnädig Péter: A Maxwell-egyenletek integrális alakja időben változó felületek esetén, Fizikai Szemle 2013

- Függőleges rézcsőben könnyen mozgó, nem mágneses fémhengert ejtünk le, és megfigyeljük az esési időt. Ha ugyanebben a csőben egy henger alakú mágnezt ejtünk le, akkor az esési idő látványosan megnő.



Kísérlet: Thomson-ágyú

Egy tekercs meghosszabbított, függőleges helyzetű vasmagjára a vasmagon csúszni képes alumínium karikát teszünk, és a tekercset egy kapcsolón keresztül váltakozó feszültségű áramforráshoz kapcsoljuk. Ha az áramot bekapcsoljuk, akkor a karika lerepül a vasmagról. Ha ugyanezt a kísérletet megszakított alumínium karikával végezzük el, a jelenség nem lép fel. A tekercs áramerősségének szabályozásával elérhető, hogy a folytonos karika egy bizonyos magasságban lebegjen. Egy idő múlva a karika felmelegszik.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Indukcios_agyu.ogv ◆

Ezek a jelenségek az örvényáramok kialakulásával magyarázhatók. Az örvényáramok a vezetőben zárt hurkok mentén kialakuló áramok, amelyek azért lépnek fel, mert az indukált elektromos erőter erővonalai zárt hurkok, és a vezetőben lévő mozgásképes töltések ezek mentén mozognak. A lengő alumínium karika azért mozdul el a közeledő mágnes irányában, mert a közeledő mágnes inhomogén erőtere miatt változik a karikára vonatkozó indukciófluxus. A létrejött indukált feszültség a karikában örvényáramot hoz létre, amely annál nagyobb, minél gyorsabban közeledik a mágnes a karikához. A Lenz-törvény értelmében az indukált áram olyan hatást kelt, ami csökkenteni igyekszik az indukált áramot. Ez úgy következik be, hogy a karika elmozdul a mozgó mágnes elől, így csökkentve a karika és a mágnes relatív sebességét. A megszakított karikában nem tud kialakulni örvényáram, ezért a jelenség nem jön létre.

Az alumíniumlemezről készült ingában a lemez mozgása miatt jön létre indukált feszültség, ami a lemezben örvényáramokat okoz. Az örvényáramok olyanok, hogy az őket létrehozó hatást, vagyis a lemez mozgását akadályozzák, ezért csillapodik az inga lengése. A bevagdosott ingában az örvényáramok nem tudnak kialakulni, ezért ekkor gyakorlatilag nincs csillapodás.

A Thomson-ágyú működésének magyarázata szintén az, hogy a váltakozó áram által létrehozott váltakozó mágneses erőterben az alumíniumgyűrűben örvényáram lép fel, és a Lenz-törvénynek megfelelően a gyűrű le akar menni az indukált áramot okozó vasmagról.

A mágnesnek rézcsőben történő ejtésénél a mágnes mozgása miatt a csőben örvényáramok jönnek létre, amelyek akadályozzák az őket létrehozó hatást, vagyis a mágnes mozgását. A nem mágneses anyag ejtésekor nincs indukált örvényáram, így fékezés sem lép fel.

Az örvényáramok által okozott veszteségek kiküszöbölése érdekében készítik a transzformátorok vasmagját egymástól elszigetelt, összeragasztott lemezekből és nem tömör anyagból.

6.2.3. Kölcsönös indukció és önindukció

Ha egy árammal átjárt vezető hurok (1) mellett egy másik vezető hurkot (2) helyezzük el, akkor az 1 hurok I_1 árama által keltett mágneses erőter a 2 hurok helyén is megjelenik. Ezért, ha az 1 hurokban változik az áram, akkor a 2 hurok környezetében is változik a mágneses erőter, és a 2 hurokban elektromotoros erő (és áram) indukálódik. A gondolatmenet fordítva is érvényes: a 2 hurokban folyó I_2 áram változása az 1 hurokban hoz létre indukált elektromotoros erőt (és áramot). Ezt a jelenséget *kölcsönös indukciónak* nevezik, és ez teszi lehetővé, hogy időben változó elektromos jeleket egyik áramkörből a másikba úgy vigyünk át, hogy a két áramkör között nincs vezetővel létrehozott kapcsolat. Az ilyen áramköröket *csatolt áramköröknek* is nevezik.

A 2 hurokban létrejött indukált elektromotoros erőt az

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \quad (6.39)$$

összefüggés adja meg, ahol Φ_{B2} a 2 hurokra vonatkozó indukciófluxus. Ha ezt az 1 hurokban folyó áram hozza létre, akkor

$$\Phi_{B2} = M_{21}I_1, \quad (6.40)$$

hiszen az I_1 áram által keltett mágneses indukció és így a létrehozott indukciófluxus is arányos az árammal. Az M_{21} arányossági tényező az áramhurkok geometriai jellemzőitől (pl. alak, egymástól mért távolság) függ. Ennek alapján a 2 hurokban létrejött indukált elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (6.41)$$

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk az I_2 áram változása miatt az 1 hurokban létrejött indukált elektromotoros erőt:

$$\Phi_{B1} = M_{12}I_2, \quad (6.42)$$

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (6.43)$$

Kimutatható, hogy a két együttható egyenlő egymással, ezért, ha bevezetjük az $M_{21} = M_{12} = M$ jelölést, akkor a kölcsönös indukció miatt a két hurokban fellépő indukált elektromotoros erők az

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (6.44)$$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (6.45)$$

alakba írhatók. Az M állandót a rendszer *kölcsönös indukciós együtthatójának* nevezik.

Számítsuk ki a kölcsönös indukciós együtthatót abban az egyszerű esetben, amikor a két áramkör két egymásba tekercselt, azonos l hosszúságú és azonos A keresztmetszetű, N_1 és N_2 menetszámú tekercs.

A 2. tekercsben az 1. tekercs I_1 árama által keltett $B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$ mágneses indukció fluxusa

$$\Phi_{B2} = N_2 A B_1 = N_2 A \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} I_1. \quad (6.46)$$

Ebből következik, hogy a kölcsönös indukciós együttható:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}. \quad (6.47)$$

Indukált feszültség nem csak két kölcsönható áramhurokban lép fel, hanem egyetlen hurokban is, ha benne változik az áramerősség. Itt arról van szó, hogy a hurok benne van a saját mágneses erőterében, ezért, ha az változik, akkor benne elektromotoros erő indukálódik. A jelenséget, amely igen fontos szerepet játszik a váltóáramú áramkörökben, *önindukciónak* nevezik.

Mivel az áramhurokban a mágneses indukciót itt a hurok saját I árama hozza létre, a fluxust a

$$\Phi_B = LI \quad (6.48)$$

összefüggés adja meg, ahol L a geometriai viszonyoktól függő állandó, amit *önindukciós együtthatónak* (néha egyszerűen „önindukciónak”) neveznek.

Az áramkörben indukált elektromotoros erő eszerint

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6.49)$$

Mivel a tekercs a váltakozó áramú áramkörökben igen fontos áramköri elem, számítsuk ki egy N menetű, l hosszúságú, A keresztmetszetű tekercs önindukciós együtthatóját.

A tekercs saját árama által létrehozott mágneses indukció nagysága:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}. \quad (6.50)$$

Az egy menetre vonatkozó fluxus

$$\Phi_{B1} = BA = \frac{\mu_0 N A}{l} I, \quad (6.51)$$

a teljes fluxus pedig

$$\Phi_B = N\Phi_{B1} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I. \quad (6.52)$$

Ebből következik, hogy az önindukciós együttható

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}. \quad (6.53)$$

Az önindukciós együttható legegyszerűbben és leghatékonyabban a menetszám növelésével – és mint később látni fogjuk – a tekercsben elhelyezett vasmaggal (a μ értékének növelésével) növelhető.

6.2.4. A transzformátor alapelve

A csatolt áramkörök alkalmazásának egyik közismert példája a transzformátor, amelyben két tekercs kölcsönös indukciója segítségével – a tekercsek mentszámának megfelelő megválasztásával adott amplitúdójú váltakozó feszültségből kisebb vagy nagyobb amplitúdójú feszültséget kaphatunk.

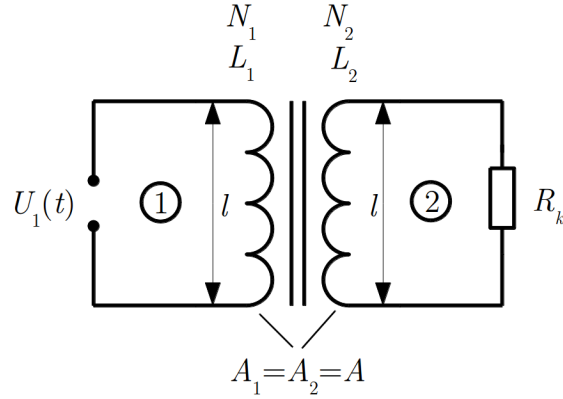
Egyszerűsített transzformátor-modellként használjuk azt az elrendezést, amelyben a kölcsönös indukciós együtthatót kiszámítottuk: a vizsgált két áramkörben (az ábrán 1 és 2) két egymásba tekercselt, azonos l hosszúságú és azonos A keresztmetszetű, N_1 és N_2 menetszámú (és ennek megfelelően különböző L_1 és L_2 önindukciójú) tekercs van. A 6.10. ábrán látható szimbólumon a két hullámos vonal jelképezi a tekercseket, a két párhuzamos vonal pedig azt jelzi, hogy a két tekercs vasmagra van tekercselve.

Tegyük fel, hogy az 1 áramkörben egy változó $U_1(t)$ feszültségű áramforrás, a 2 áramkörben egy R_k ellenállású fogyasztó van. A vezetékek és a tekercsek (ohmikus) ellenállása elhanyagolható, ugyancsak elhanyagolható az áramkörökben fellépő kapacitások és a tekercseken kívüli induktivitások is.

A fenti egyszerűsített transzformátor-modell esetén viszonylag egyszerűen kiszámítható a két kölcsönható tekercsben létrejött feszültségek hányadosa.

Mivel a két tekercs egymásra van tekercselve, az indukcióvektor, és így az egy menetre vonatkozó Φ_B indukciófluxus mindkét tekercsben azonos: $\Phi_{B1} = \Phi_{B2} = \Phi_B$. Ezzel a jelöléssel az egyes tekercsekben az indukciófluxus

$$\Phi_{B1} = N_1 \Phi_B \quad \text{és} \quad \Phi_{B2} = N_2 \Phi_B. \quad (6.54)$$



6.10. ábra. Veszteségmentes „ideális” transzformátor vázlata

A két áramkörre felírva Kirchhoff II. törvényét, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$U_1 - \frac{d\Phi_{B1}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 - N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \quad (6.55)$$

$$, R_k I_2 - \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_k I_2 - N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} = 0. \quad (6.56)$$

A fluxust a tekercsekben folyó áramok hozzák létre, vagyis

$$\Phi_B = \frac{\mu N_1 I_1}{l} A + \frac{\mu N_2 I_2}{l} A. \quad (6.57)$$

Ezzel az egyenleteink az alábbi alakot öltik:

$$U_1 - N_1 \frac{\mu N_1 A}{l} \frac{dI_1}{dt} - N_1 \frac{\mu N_2 A}{l} \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad (6.58)$$

$$R_k I_2 - N_2 \frac{\mu N_1 A}{l} \frac{dI_1}{dt} - N_2 \frac{\mu N_2 A}{l} \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_k I_2 - M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0. \quad (6.59)$$

A 2 áramkörben a kölcsönös indukcióból és az önindukcióból származó feszültség nagysága:

$$U_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{N_1 M}{N_2} \frac{dI_1}{dt} - \frac{N_2}{N_1} \frac{N_1}{N_2} L_2 \frac{dI_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{dI_1}{dt} - \frac{N_2}{N_1} M \frac{dI_2}{dt}. \quad (6.60)$$

Figyelembe véve az 1 áramkörre felírt egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} \left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \right) = -\frac{N_2}{N_1} U_1. \quad (6.61)$$

A „-” jel azt mutatja, hogy a két feszültség ellenkező fázisban van.

Azaz egy veszteségmentes, ideális transzformátor esetén az 1 áramkörbe betáplált U_1 - és a 2 áramkörben létrejött U_2 feszültség-amplitúdók hányadosára fennáll, hogy

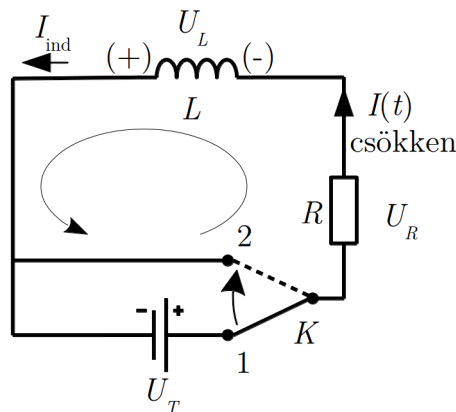
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (6.62)$$

6.3. Tranziens jelenségek induktivitást tartalmazó áramkörben

Ha egy induktivitást tartalmazó áramkörben az áram valamilyen okból megváltozik, akkor az induktivitás ezt a változást akadályozni igyekszik (Lenz-törvény). Ennek a következménye az, hogy egy ilyen áramkörben az áram bekapcsolása vagy kikapcsolása után az egyensúlyi áram nem azonnal áll be, hanem csak egy hosszabb-rövidebb átmeneti időszak után. Most ilyen átmeneti – idegen szóval *tranziens* – jelenségeket vizsgálunk meg.

6.3.1. Az áram kikapcsolása

Első példánkban egy induktivitást tartalmazó áramkörben a telep lekapcsolásának hatását vizsgáljuk. A 6.11. ábrán látható áramkörben eredetileg (kapcsoló 1 állása) a telep által létrehozott $I_0 = \frac{U_T}{R}$ áram folyt (az induktivitás ellenállása elhanyagolható). Ezután a telepet a kapcsoló segítségével leválasztjuk az áramkörtől, és egyidejűleg zárjuk is a telep nélküli áramkört (kapcsoló 2 állása). Az időt az átkapcsolás pillanatától ($t = 0$) mérjük.



6.11. ábra. Induktivitást tartalmazó áramkör kikapcsolása

Az áramkör vizsgálatának kezdetén még az eredeti áram folyik, tehát $I(0) = I_0$, viszont feszültségforrás már nincs az áramkörben, tehát $U_T = 0$ (ezek a probléma megoldásához szükséges ún. *kezdeti feltételek*).

Azt várjuk, hogy az áram megszűnik, hiszen az áramkörben nincs már telep, de az induktivitás jelenléte miatt az áram csak fokozatosan csökken nullára. Mivel a tapasztalat szerint a Kirchhoff-törvények nem túl gyorsan változó áramok esetén, bármely időpillanatban, változatlan formában érvényesek, az áram időbeli változását ezek segítségével fogjuk meghatározni.

Az I. Kirchhoff (csomóponti) törvény szerint egy t időpillanatban az áramkör minden pontján ugyanakkora és ugyanolyan irányú $I(t)$ áram folyik. A II. Kirchhoff (hurok-) törvény felírásához választani kell az áramhurokban egy körüljárási irányt (az ábrán az óramutató járásával ellentétes), fel kell tételezni egy pillanatnyi áramirányt, és azt, hogy az adott t időpillanatban az áram nő vagy csökken (mindezek tetszőlegesen választhatók, a választás a végeredményt nem befolyásolja). Az általunk választott körüljárás és pillanatnyi áramirány az ábrán látható, az áram változásáról azt tételizzük fel, hogy ebben a pillanatban éppen csökken.

A II. törvény szerint a hurokban körbejárva a feszültségek előjeles összegére fennáll, hogy

$$U_R + U_L = 0. \quad (6.63)$$

Az ellenálláson eső feszültséget az $U = IR$ Ohm-törvényből, az induktivitáson eső feszültséget az $U_L = L \frac{dI}{dt}$ önindukciós törvényből kaphatjuk meg, de meg kell vizsgálni a feszültségek előjelét. Az ellenálláson az áram irányában haladunk át, vagyis az áthaladásnál a potenciál csökken, $U_R < 0$, ezért

$$U_R = -IR \quad (6.64)$$

(itt I az áram nagysága, tehát pozitív szám).

Az önindukciós feszültség az áram csökkenése ellen hat, vagyis a csökkenő árammal azonos irányú áramot indít (az ábrán I_{ind}). Az induktivitás tehát olyan „telepként” működik, amelynek polaritását az ábrán zárójelben feltüntettük. Ha ezen a „telepen” a körüljárás irányában áthaladunk, akkor potenciálnövekedést tapasztalunk, vagyis $U_L > 0$. Mivel feltételezésünk szerint az áram csökken, $dI < 0$, ezért U_L csak akkor lesz pozitív, ha az

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (6.65)$$

alakban írjuk be.

A fenti kifejezéseket a huroktörvénybe beírva, a

$$U_R + U_L = -IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (6.66)$$

összefüggést kapjuk. Az egyenletet egyszerűsítve, és figyelembe véve, hogy az áramerősség időben változik, tehát $I = I(t)$, a probléma megoldásához felhasználható egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = 0. \quad (6.67)$$

Ebből az egyenletből kell „kitalálnunk” az $I(t)$ függvény konkrét alakját.

A probléma az, hogy az egyenletben a meghatározandó $I(t)$ függvény mellett annak differenciálhányadosa is szerepel (ez egy ún. *differenciálegyenlet*). A differenciálegyenletek megoldásának módszereit a matematika tárgyban részletesen tárgyalják, ennek az egyenletnek a megoldása azonban nem igényel speciális ismereteket. Első lépésként rendezzük át az egyenletet az alábbi módon:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt. \quad (6.68)$$

Ezzel elértük, hogy a két változó mennyiség (I és t) közül az egyenlet egyik oldalán csak az I , a másik oldalán pedig csak a t szerepel. (Ezt úgy szokták megfogalmazni, hogy sikerült a változókat szétválasztani, ezért az ilyen típusú differenciálegyenleteket *szétválasztható* differenciálegyenleteknek nevezik.) Ezek után a két oldalt a megfelelő változó szerint integráljuk az adott mennyiség határai között (az idő szerint 0 és t , az áramerősség szerint az ennek megfelelő $I(0) = I_0$ és $I(t) = I$ között):

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt. \quad (6.69)$$

Az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t. \quad (6.70)$$

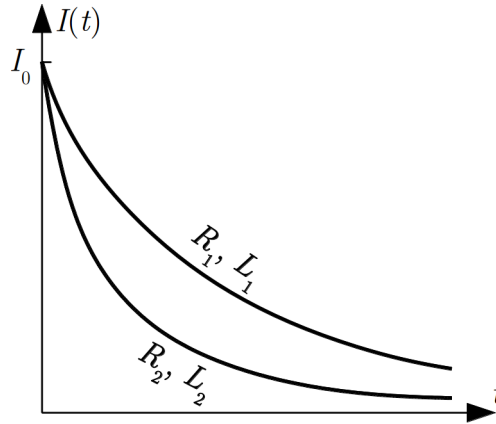
Az $I(t)$ függvényt innen a logaritmus eliminálása és rendezés után kapjuk:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (6.71)$$

Eszerint az áram valóban nem azonnal tűnik el a telep lekapcsolása után, hanem exponenciálisan csökken a nulla érték felé (6.12. ábra).

Az áram csökkenésének kezdeti meredekségét a

$$\left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{R}{L} I_0 \quad (6.72)$$



6.12. ábra. Az áramkörben folyó áram időfüggése a telep lekapcsolása után különböző R/L értékek esetén ($R_2/L_2 > R_1/L_1$)

kifejezés adja meg. Látható, hogy az áram csökkenése annál meredekebb, minél kisebb az L induktivitás, ami érthető, hiszen az áram megszűnésének lelassulását éppen az induktivitás okozza.

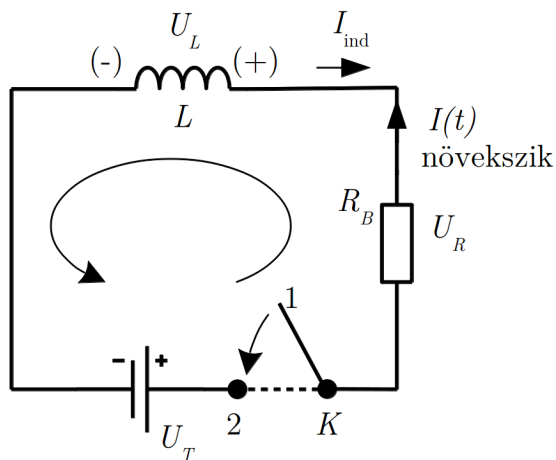
Kevésbé nyilvánvaló, hogy adott induktivitás esetén az áram csökkenése annál gyorsabb, minél nagyobb a körben az R ellenállás. Ezért, ha az áramkört a telep lekapcsolása után nem zárjuk, hanem megszakítjuk, akkor a körben igen nagy ellenállás jelenik meg, és az áram csökkenésének meredeksége nagyon nagy lesz. Tudjuk, hogy az önindukció jelensége miatt megjelenő indukált elektromotoros erő nagysága éppen az áramváltozás sebességével arányos: $|\mathcal{E}_{\text{ind}}| \sim |\frac{dI}{dt}|$. Ez az oka annak, hogy egy áramkör megszakításakor igen nagy – gyakran az áramkörben jelenlévő eredeti feszültségnél sokkal nagyobb – indukált feszültség keletkezik, ami a kapcsoló egymástól eltávolodó fém részei között szikrát hozhat létre (száraz levegőben 1 mm-es szikra létrehozásához durván 1000 V feszültség szükséges).

6.3.2. Az áram bekapcsolása

Második példaként az áram bekapcsolását vizsgáljuk, ugyancsak egy induktivitást tartalmazó áramkörben. A 6.13. ábrán a megszakított áramkörbe (kapcsoló 1 állása) bekapcsoljuk a telepet (kapcsoló 2 állása). Az időt a bekapcsolás pillanatától mérjük, ekkor a körben áram még nem folyik, tehát $I(0) = 0$, a telep viszont már az áramkörben van.

Most Kirchhoff II. törvénye az

$$U_R + U_L + U_T = 0 \quad (6.73)$$



6.13. ábra. Induktivitást tartalmazó áramkör bekapcsolása

alakban írható fel. A kikapcsolásnál követett gondolatmenetet megismételve, a megoldandó egyenlet

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + U_T = 0. \quad (6.74)$$

Az egyenletet L -lel elosztjuk, majd átrendezzük annak érdekében, hogy a változókat szétválaszthassuk:

$$\frac{dI}{U_T - RI} = \frac{1}{L} dt. \quad (6.75)$$

Ezután az egyenlet két oldalát integráljuk:

$$\int_0^I \frac{dI}{U_T - RI} = \int_0^t \frac{1}{L} dt. \quad (6.76)$$

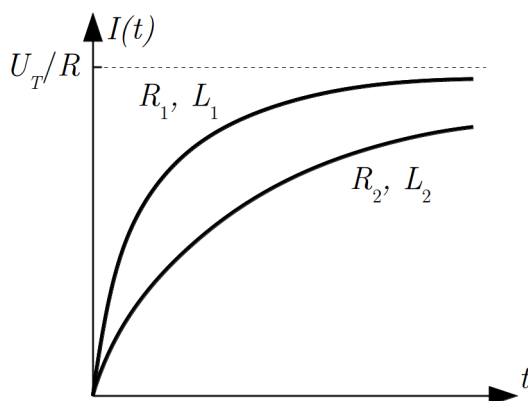
Az integrálás után azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{R} \ln \frac{U_T - RI}{U_T} = \frac{1}{L} t. \quad (6.77)$$

A logaritmust eliminálva, majd az egyenletet rendezve, megkapjuk az áramerősség időfüggését:

$$I(t) = \frac{U_T}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right). \quad (6.78)$$

A bekapcsolásnál tehát az induktivitás akadályozza az áram növekedését, ami miatt az áram nem tudja azonnal felvenni az ellenállásnak és a telepnek megfelelő $\frac{U_T}{R}$ értéket (ábra), azt csak fokozatosan éri el. Az emelkedés annál lassúbb, minél kisebb az $\frac{R}{L}$ hányados, vagyis adott ellenállás mellett minél nagyobb az induktivitás. Ez érthető, hiszen a lassú emelkedés oka éppen az induktivitás jelenléte.



6.14. ábra. Az áramkörben folyó áram időfüggése a telep bekapcsolása után különböző R/L értékek esetén ($R_2/L_2 > R_1/L_1$)

Az induktivitás hatása néhány egyszerű kísérlettel is szemléltethető.

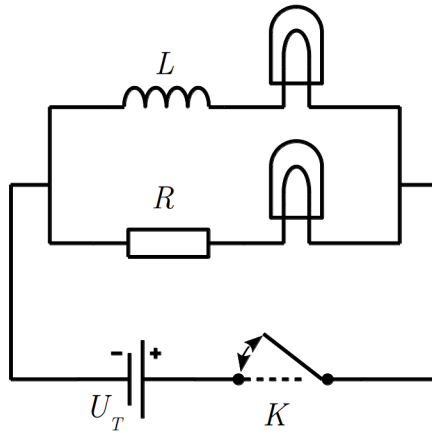
Kísérlet: Párhuzamosan kapcsolt tekercs és ellenállás kapcsolása

Két párhuzamosan kapcsolt, azonos izzólámpát egy telepre kapcsolunk, majd az egyik izzóval egy nagy induktivitású (L) tekercset-, a másikkal egy kis induktivitású ellenállást (R) kapcsolunk sorba (6.15. ábra). A feszültséget és az ellenállást úgy állítjuk be, hogy mindkét izzó világítson. Ezután a telephez vezető vezetéket megszakítjuk, ekkor az izzók kialszanak. Ha most a telepet ismét bekapcsoljuk, akkor azt észleljük, hogy a tekercset tartalmazó ágba az izzó jól megfigyelhetően később gyullad fel, mint a másik ágba.

http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fajl:Onindukcio_I.ogv



Kísérlet: Párhuzamosan kapcsolt tekercs és ellenállás váltóárammal táplálva



6.15. ábra. Párhuzamosan kapcsolt tekercs és ellenállás kapcsolása

Ha az előző kísérletnél használt áramkörbe a telep helyett egy váltakozó feszültségű generátort kapcsolunk, akkor az izzók periodikusan felgyulladnak és kialszanak. Jól megfigyelhető azonban, hogy a két ágban a periodikus változás nem ugyanabban az ütemben történik: a két periodikus változás között fáziseltolódás van. ♦

Ez a kísérlet is az induktivitásnak a változást késleltető hatását mutatja: az induktivitást tartalmazó ágban az áram változása késik a másik ág áramának változásához képest, ezért a különböző induktivitású ágakban a változások időben eltolva, fáziskülönbséggel zajlanak. Ennek a ténynek nagy jelentősége van a váltóáramú áramkörökben.

6.4. A mágneses erőter energiája

Az elektromos erőter tárgyalásánál láttuk, hogy a létrehozásakor végzett munka árán az erőterhez rendelhető energia jelenik meg. Tudjuk, hogy a mágneses erőter létrehozásához is munkavégzés (pl. elektromos áram keltése) szükséges. Kérdés, hogy ez a munka is megjelenik-e valamilyen mágneses energia formájában. Az induktivitást tartalmazó áramkörökre vonatkozó tapasztalatok azt sugallják, hogy ilyen energia létrejön, hiszen pl. a feszültségforrás kikapcsolásakor a tekercs mágneses erőtere fokozatosan szűnik meg, és az áramkörben a kikapcsolás után is fenntartja az áramot.

A tekercsben felhalmozott energia meghatározásához használjuk fel a bekapcsolási jelenségnél tárgyalt áramkört (6.13. ábra), amelyre Kirchhoff II. törvénye szerint fennáll az

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + U_0 = 0 \quad (6.79)$$

összefüggés. Ebből a dt idő alatt végzett munkát $I dt$ -vel való szorzással kaphatjuk meg:

$$-I^2 R dt - LI \frac{dI}{dt} dt + U_0 I dt = 0, \quad (6.80)$$

amiből átrendezéssel akövetkező egyenletet kapjuk.

$$\begin{array}{ccccc} U_0 I dt & = & I^2 R dt & + & LI \frac{dI}{dt} dt \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{áramforrás} & & \text{Joule-hő} & & ??? \\ \text{munkája} & & & & \end{array} \quad (6.81)$$

Ebben az egyenletben az egyes tagokat megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy a bal oldalon az áramforrás által dt idő alatt végzett munka áll, a jobb oldal első tagja pedig az ellenálláson hővé alakuló munkát (Joule-hő) adja meg. Látható, hogy a telep munkájának csak egy része alakul át termikus energiává, a maradékot a jobb oldal második tagja képviseli. Kézenfekvőnek látszik, hogy ez a tag adja meg a tekercsben a mágneses erőternek a dt idő alatt bekövetkező változásával összefüggő $dE_{\text{mágn}}$ energiaváltozást, amit a *mágneses erőter energiájának* tulajdonítunk:

$$dE_{\text{mágn}} = LI \frac{dI}{dt} dt = LI dI. \quad (6.82)$$

A dt idő alatt bekövetkező energiaváltozásból kiszámíthatjuk, hogy mekkora az $E_{\text{mágn}}$ mágneses energia akkor, ha a tekercsben I áram folyik. Ehhez az áramerősség változását 0-tól I -ig elemi lépésekben kell végrehajtani, és összegezni (integrálni) kell az eközben bekövetkező elemi energiaváltozásokat:

$$E_{\text{mágn}} = \int_0^I LI' dI' = \frac{1}{2} LI^2. \quad (6.83)$$

Ekkora energia van jelen az I árammal átjárt, L önindukciójú tekercsben.

Ahhoz, hogy az energia kifejezésére általánosabb alakot kapjunk, próbáljuk meg kiküszöbölni az összefüggésből konkrétan a tekercsre vonatkozó adatokat (L , I), és helyettesítsük azokat a tekercsben kialakult mágneses erőter jellemzőivel.

Használjuk fel az önindukcióra kapott

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad (6.84)$$

kifejezést (N a tekercs menetszáma, A a keresztmetszete, l a hossza) és a tekercs mágneses erőterére vonatkozó

$$B = \frac{\mu NI}{l} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Bl}{\mu N} \quad (6.85)$$

összefüggést. Ezeket a mágneses energia kifejezésébe behelyettesítve, egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$E_{\text{mágn}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} Al = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V, \quad (6.86)$$

ahol $V = Al$ a tekercs térfogata.

Ebből a kifejezésből látszik, hogy a tekercsben tárolt energia arányos azzal a térfogattal, ahol mágneses erőter van jelen (az itt feltételezett ideális esetben csak a tekercs belsejében van mágneses erőter), egyébként pedig – a tekercset kitöltő adott anyag esetén – csak az erőteret jellemző mágneses indukcióvektor nagyságától függ. Már ebből a megfontolásból is sejthető, hogy ez az energia a tekercsben létrejött mágneses erőterrel hozható kapcsolatba, de ez még világosabbá válik, ha kiszámítjuk az energia térfogati sűrűségét:

$$w_{\text{mágn}} = \frac{E_{\text{mágn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}. \quad (6.87)$$

Ez azt jelenti, hogy a tekercs belsejében jelenlévő energiasűrűség *csak az erőteret jellemző mágneses indukcióvektortól és a tekercset kitöltő anyag mágneses permeabilitásától függ.*

Egyelőre a tapasztalatokra hivatkozva csak feltételezzük (később az elektrodinamikában ezt be is bizonyítják), hogy ez az összefüggés mindenféle mágneses erőter esetén igaz: ahol mágneses erőter van, ott ilyen energiasűrűség van jelen függetlenül attól, hogy az erőteret mi (mágnes, elektromos áram) hozta létre.

A fenti összefüggés homogén, izotróp, lineáris anyag esetén – a $B = \mu H$ összefüggés segítségével átírható a

$$w_{\text{mágn}} = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (6.88)$$

alakba is. A vektori írásmód itt azért lehetséges, mert ilyen anyagokban $\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{H} \mathbf{B} = H B$.

Kimutatható hogy ez a vektori formában felírt összefüggés az anyagok többségére érvényes, vagyis a mágneses erőter energiasűrűsége általában a

$$w_{\text{mágn}} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (6.89)$$

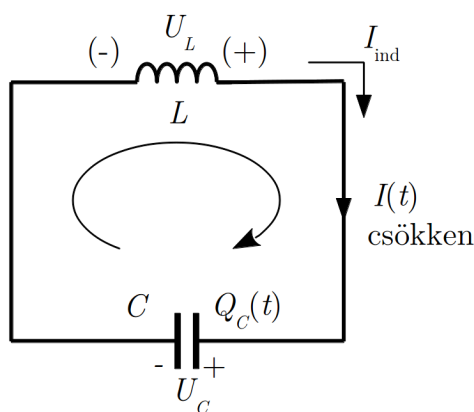
összefüggéssel adható meg.

7. fejezet

Elektromágneses rezgések

7.1. Harmonikus rezgés ideális elektromos rezgőkörben

Ha egy C kapacitású, feltöltött kondenzátorra rákapcsolunk egy L önindukciójú tekercset (7.1. ábra), akkor a körben áram indul meg. A változó áram feszültséget indukál a tekercsben, ami fékezi az áram változását. Ahogy a kondenzátor töltése csökken, az áramerősség is csökkenne, de a tekercs önindukciója ezt a csökkenést lassítja, és akkor is tovább folyik az áram, amikor a kondenzátoron már nincs töltés. Mire az áram megszűnik, a kondenzátor már ellenkező előjelű töltésre tett szert, ami ellenkező irányú áramot indít, stb. Úgy látszik tehát, hogy itt rezgés jön létre, amelynek során az áramerősség a körben periodikusan változik, ezért ezt az áramkört *rezgőkörnek* nevezik.



7.1. ábra. Ideális rezgőkör

Ennek a rezgőkörnek van egy különlegessége, hiszen – amint az ábrán is látható –

feltételeztük, hogy az áramkörben nincs ellenállás. Ez a valóságban biztosan nincs így (legfeljebb annyit állíthatunk, hogy az ellenállás elhanyagolható), ezért az ilyen rezgőkört *ideális rezgőkörnek* nevezik.

A rezgőkörben folyó áram kísérleti vizsgálata azt mutatja, hogy az áram változása jó közelítéssel harmonikus rezgés. Most megpróbáljuk az áramerősség időfüggését fizikai megfontolások segítségével számítás útján meghatározni. Ehhez az áramkörökre vonatkozó törvényeket használhatjuk fel. A tapasztalat szerint ugyanis nem túl gyorsan változó (ún. kvázistacionárius) áramoknál az áramok és feszültségek pillanatnyi értékeire érvényesek a Kirchhoff-törvények. Ez azt jelenti, hogy egy *adott időpillanatban* a rezgőkör minden pontján ugyanaz az áram folyik (I. törvény), és *adott időpillanatban* a hurokban a feszültségek összege nulla (II. törvény). Írjuk fel Kirchhoff II. törvényét a rezgőkörre a t időpillanatban:

$$U_L(t) + U_C(t) = 0. \quad (7.1)$$

Tudjuk, hogy az induktivitáson fellépő indukált feszültség és a kapacitáson fellépő feszültség abszolút értékét az $|U_L(t)| = L \left| \frac{dI(t)}{dt} \right|$ illetve az $|U_C(t)| = \left| \frac{Q_C(t)}{C} \right|$ összefüggés adja meg. A Kirchhoff-törvény alkalmazásánál ezeket a feszültségeket előjelhelyesen és lehetőleg abszolútérték-jel nélkül kell beírunk, ami nem túl bonyolult elemzéssel megvalósítható.

A Kirchhoff-törvénynek a konkrét áramkör adatait tartalmazó alakját akkor tudjuk felírni, ha sikerül meghatároznunk a feszültségek előjelét. Ehhez egy konkrét helyzetet kell megvizsgálunk, amit pl. a fenti ábrán láthatunk.

Feltételezzük, hogy a vizsgált pillanatban a kondenzátor az ábrának megfelelő Q_C töltéssel rendelkezik, az I áram az ábrán bejelölt irányban folyik (a kondenzátort tölti), és éppen *csökken*. Emiatt az induktivitáson – a Lenz-törvénynek megfelelően – olyan feszültségnek kell keletkeznie, amely az áram csökkenését akadályozza, vagyis az eredeti árammal egyirányú I_{ind} áramot kelt. Ha az induktivitást feszültségforrásként képzeljük el, akkor az említett feltételnek az a polaritás felel meg, amit az ábrán zárójelben megadtunk (baloldalt a negatív-, jobboldalt a pozitív sarok). Ezután az áramhurkot az áram irányában körbejárva, megállapíthatjuk a feszültségek előjelét. Az induktivitáson áthaladva a potenciál nő, tehát a feszültség (potenciálkülönbség) pozitív, a kapacitáson áthaladva a potenciál csökken, vagyis a feszültség (potenciálkülönbség) negatív. Az induktivitáson eső feszültségre akkor kapunk pozitív értéket, ha az $U_L(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}$ összefüggést használjuk (a mínusz jel azért kell, mert az áram csökken, tehát $dI < 0$). Ha Q_C a kapacitáson lévő töltés nagyságát jelöli, akkor a rajta eső negatív feszültséget előjelhelyesen az $U_C(t) = -\frac{Q_C(t)}{C}$ összefüggés adja meg.

Így a rezgőkörben végbemenő folyamatok leírására a

$$-L \frac{dI(t)}{dt} - \frac{Q_C(t)}{C} = 0 \quad (7.2)$$

egyenletet kapjuk.

Az egyenletben két ismeretlen függvény, az áramerősség és a kondenzátor töltése szerepel, ezért valamelyiket az egyenletből eliminálni kell. Erre az ad lehetőséget, hogy a vezetékben folyó áram a kondenzátor töltésének változásával egyértelmű kapcsolatban van, hiszen a vezető egy keresztmetszetén adott idő alatt az a töltés folyik át, ami a kondenzátor lemezére érkezik. Ezért érvényes az $I(t) = \frac{dQ_C(t)}{dt}$ összefüggés.

Az egyenletből legegyszerűbben az áram küszöbölhető ki, ha kifejezzük a töltésváltozás sebességével: $I(t) = \frac{dQ_C(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d^2Q_C(t)}{dt^2}$. Ezt behelyettesítve, a töltésre az

$$L \frac{d^2Q_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} Q_C(t) = 0, \quad (7.3)$$

illetve a

$$\frac{d^2Q_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q_C(t) = 0 \quad (7.4)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ez láthatólag harmonikus rezgés differenciálegyenlete, vagyis a kondenzátor töltése időben szinusz vagy koszinusz függvény szerint változik. A megoldást felírhatjuk például a

$$Q_C(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (7.5)$$

alakban, ahol Q_m a töltés maximális értéke (ez esetünkben attól függ, hogy a kondenzátort mennyire töltöttük fel). A rezgés körfrekvenciája (a $Q_C(t)$ függvény szorzójának négyzetgyöke): $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, amit az ideális *rezgőkör saját-körfrekvenciájának* neveznek.

Az ennek megfelelő $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$ mennyiség a *rezgőkör sajátfrekvenciája*.

Egy áramkör esetében általában nem a kondenzátor töltése, hanem a körben folyó áram érdekel bennünket. Az áram időbeli változását legegyszerűbben az áramerősség és a töltésváltozás közötti összefüggés segítségével kaphatjuk meg:

$$I(t) = \frac{dQ_C(t)}{dt} = Q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}} \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.6)$$

Ha az áram maximális értékére bevezetjük az

$$I_m = Q_m \omega_0 = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}} \quad (7.7)$$

jelölést, akkor az áramerősség változása az egyszerűbb

$$I(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (7.8)$$

alakba írható.

Az áram időbeli változása úgy is megkapható, hogy az eredeti egyenletből a töltést küszöböljük ki. Ehhez differenciáljuk az egyenletet idő szerint, és használjuk ki, hogy $\frac{dQ_C}{dt} = I$. Ekkor – rendezés után – az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} I(t) = 0. \quad (7.9)$$

Ebből az egyenletből is azt kapjuk, hogy az áram $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgésnek megfelelően változik, és időfüggése az

$$I(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (7.10)$$

függvénnyel írható le.

A számításunk tehát igazolja azt a várakozást, hogy a kondenzátor feltöltése után magára hagyott ideális rezgőkörben az áramerősség harmonikus függvény szerint változik, az ideális rezgőkörben *harmonikus rezgés jön létre*. Ez azt jelenti, hogy az egyszerű elindított rezgés állandó amplitúdóval elméletileg örökké fennmarad.

A tapasztalat ezzel a következtetéssel nem egyezik, hiszen kísérletileg csak az valósítható meg, hogy egy elhanyagolható ellenállást tartalmazó rezgőkörben a közel harmonikus rezgés hosszú ideig fennmarad, de csillapodik, és előbb-utóbb megszűnik. Ez az ellentmondás azzal az egyszerűsítéssel függ össze, hogy számításainknál használt ideális rezgőkörben elhanyagoltuk az energiát fogyasztó ohmikus ellenállást.

Érdemes a töltés, az áramerősség és a kondenzátoron illetve az induktivitáson kialakuló feszültség időbeli változását összehasonlítani.

A kondenzátoron illetve az induktivitáson eső feszültség változása szintén harmonikus rezgés. A feszültségeket leíró függvények:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} Q_C(t) = \frac{Q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (7.11)$$

$$, U_L(t) = -U_C(t) = -\frac{Q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.12)$$

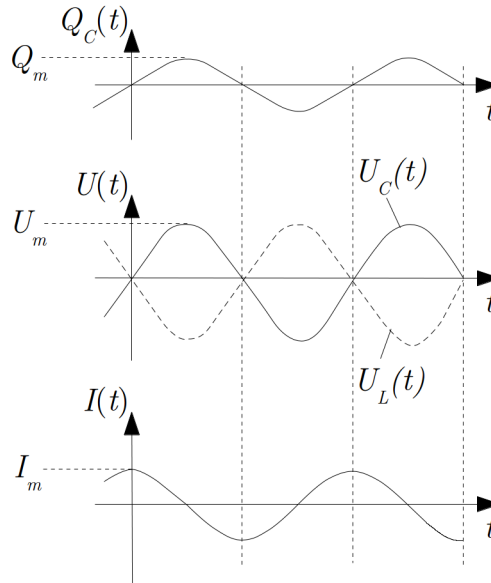
A kondenzátoron eső feszültség tehát a töltéssel azonos fázisban, az induktivitáson eső feszültség azzal ellentétes fázisban változik.

Az áram változását – a fent alkalmazott koszinusz függvény helyett – leírhatjuk szinuszos függvénnyel is:

$$I(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (7.13)$$

Az áramerősség változása tehát $\frac{\pi}{2}$ -vel „siet” a kondenzátoron eső feszültség (és a töltés) változásához képest.

A töltés-, a kondenzátoron és induktivitáson eső feszültség- és az áramerősség változását leíró függvényeket a 7.2. ábra mutatja (a $\varphi = 0$ feltételezéssel).



7.2. ábra. A töltés, a feszültség és az áramerősség változása ideális rezgőkörben

7.2. Energiaviszonyok elektromos rezgőkörben

Az elektromos rezgőkörben energiaátalakulások mennek végbe, hiszen a kondenzátor periodikusan elveszti, majd visszakapja az elektromos töltését, és ezzel az elektrosztatikus energiáját is. Kérdés, hogy hol van az energia akkor, amikor a kondenzátorban éppen nincs töltés (és így energia sincs). Az egyetlen lehetőségnek az látszik, hogy ilyenkor az energia a tekercsben felépülő mágneses erőterben van (az áram akkor maximális, amikor a kondenzátor töltése nulla).

A mágneses erőter energiájának pontos kifejezését a rezgőkör energiamérlegének vizsgálata alapján kaphatjuk meg. Az energia-mérlegegyenletet formálisan úgy kaphatjuk meg, hogy a rezgőkörre felírt Kirchoff-törvényt beszorozzuk $I dt$ -vel:

$$U_L I dt + U_C I dt = 0. \quad (7.14)$$

A baloldal második tagja a kondenzátor elektrosztatikus energiájának változását adja meg dt idő alatt ($U_C I dt = U_C dQ$), az első tagot pedig a tekercsben kialakult mágneses erőter energiájának (E_{magn}) megváltozásaként foghatjuk fel.

A tekercsben kialakult mágneses erőter energiájának dt idő alatt bekövetkező változása eszerint:

$$dE_{\text{magn}} = U_L I dt = L \frac{dI}{dt} I dt = LI dI. \quad (7.15)$$

Ha a tekercsben az áramot 0-ról I -re növeljük, akkor a teljes energiaváltozás, vagyis az I árammal átjárt tekercs mágneses erőterének energiája

$$E_{\text{magn}} = L \int_0^I I' dI' = \frac{1}{2} LI^2. \quad (7.16)$$

Figyelembe véve a tekercs mágneses erőterére és önindukciós tényezőjére korábban kapott kifejezéseket, a mágneses erőter energiája az erőter jellemzőivel is kifejezhető. Az l hosszúságú, N menetszámú, A keresztmetszetű, μ abszolút permeabilitású anyaggal kitöltött, hosszú, egyenes tekercsben a mágneses indukció $B = \frac{\mu NI}{l}$, egy ilyen tekercs önindukciós együtthatója pedig $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$. Ezekkel I -t és L -et kiküszöbölve, azt kapjuk, hogy

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2\mu} B^2 V = \frac{1}{2} H B V, \quad (7.17)$$

ahol $V = Al$ a tekercs térfogata. Ebből az energia térfogati sűrűsége mágneses erőterben

$$w_{\text{magn}} = \frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} H B. \quad (7.18)$$

Ezek a kifejezések nem csak a levezetés alapjául szolgáló speciális esetben, hanem homogén, izotróp, lineárisan mágnesezhető anyagban bármilyen mágneses erőterre érvényesek. Vagyis ahol B indukcióvektorral jellemzett mágneses erőter van jelen, ott $w_{\text{magn}} = \frac{1}{2\mu} B^2$ energiasűrűség is van.

A rezgőkör energiája minden pillanatban a tekercs mágneses- és a kondenzátor elektrosztatikus energiájának összege:

$$E(t) = E_{\text{magn}}(t) + E_{\text{el}}(t) = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} LI_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2C} Q_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.19)$$

Felhasználva a töltés- és az áramerősség maximális értéke között fennálló $I_m^2 = Q_m^2 \omega_0^2 = \frac{Q_m^2}{LC}$ összefüggést, az összenergiára azt kapjuk, hogy

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} LI_m^2 = \text{állandó}. \quad (7.20)$$

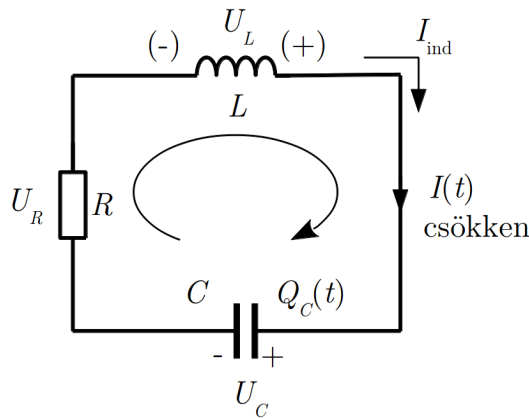
Itt tehát az energiának a mágneses- és az elektromos energiaformák közötti átalakulása megy végbe, miközben az összenergia állandó marad.

Itt is érvényes az a megállapítás, hogy a rezgés energiája arányos az áram illetve a töltés amplitúdójának négyzetével.

7.2.1. Csillapodó rezgés elektromos rezgőkörben

A valóságos elektromos rezgőkör mindig tartalmaz elektromos ellenállást (7.3. ábra), amelyben az elektromos erőter energiája hővé alakul. Az ellenállás tehát a rezgést csillapítja.

Ennek a csillapításnak nyilvánvaló jele az, hogy egy magára hagyott rezgőkörben a rezgés megszűnik. A jelenség azonban megfelelő kísérletekkel pontosabban is megvizsgálható.



7.3. ábra. Veszteséges rezgőkör, vagy RLC kör

Kísérlet: Csillapodó rezgőkör tulajdonságainak vizsgálata

Ha egy ellenállást is tartalmazó rezgőkör ellenállásán eső U_R feszültséget (ami a körben folyó áramerősséggel arányos) katódsugár oszcilloszkópra visszük, akkor az áram amplitúdójának csökkenése pontosan felrajzolható, és a csillapodás az ellenállás nagyságának függvényében is vizsgálható. Azt találjuk, hogy az ellenállás növelésével a csillapodás is nő. ♦

A rezgőkör viselkedésének leírásához most is Kirchhoff II. törvénye segítségével juthatunk el, ami ellenállást is tartalmazó rezgőkörre így írható fel:

$$U_L + U_C + U_R = 0. \quad (7.21)$$

Az ideális rezgőkörnél követett gondolatmenetet megismételve, ebből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-L \frac{dI(t)}{dt} - \frac{Q_C(t)}{C} - IR = 0 \quad (7.22)$$

(itt egyetlen új tag jelenik meg, az ellenálláson eső feszültség, ami az adott esetben negatív). Az egyenletet $(-L)$ -lel végigosztva, az alábbi alakot kapjuk:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q_C(t)}{LC} + \frac{R}{L}I = 0. \quad (7.23)$$

Itt ismét felhasználhatjuk a $\frac{dQ_C}{dt} = I$ összefüggést, hogy a töltést vagy az áramerősséget elimináljuk az egyenletből. Mivel általában fontosabb az áramerősség változásának ismerete, most a töltést küszöböljük ki. Ehhez az egyenletet differenciáljuk t szerint, és használjuk fel az említett összefüggést. Ekkor az áramerősségre az alábbi differenciál-egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0. \quad (7.24)$$

Felhasználva az $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ összefüggést, majd bevezetve a $2\beta = \frac{R}{L}$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0. \quad (7.25)$$

Ez pontosan ugyanolyan alakú egyenlet, mint amit a csillapodó mechanikai rezgés kitérésére kaptunk, tehát a megoldása is ugyanolyan

$$I(t) = I_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (7.26)$$

vagy

$$I(t) = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi'). \quad (7.27)$$

A csillapodásért felelős tag β együtthatója most az ellenállással arányos, hiszen ez okozza az energiaveszteséget. A csillapodó rezgés körfrekvenciáját ugyanaz az $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ összefüggés adja meg, mint a mechanikai rezgések esetén, csak most az összefüggésben szereplő mennyiségek jelentése más: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $\beta = \frac{R}{2L}$.

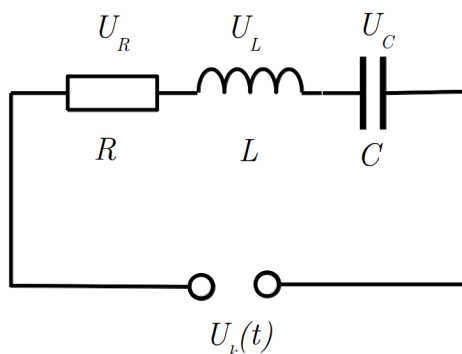
A rezgőkör jóságát a mechanikai rezgéseknél bevezetett jósági tényezővel jellemezhetjük:

$$\tilde{Q} = \frac{E}{|\Delta E_{\text{1rad}}|} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\Lambda}. \quad (7.28)$$

Ha a β csillapítást a rezgőkör adataival fejezzük ki, akkor a

$$\tilde{Q} \approx \frac{L\omega_0}{R} \quad (7.29)$$

összefüggést kapjuk.



7.4. ábra. Soros rezgőkör harmonikus gerjesztéssel

7.3. Kényszerrezgés elektromos rezgőkörben

Egy rezgőkörben úgy lehet kényszerrezgést létrehozni, hogy a körbe beiktatunk egy $U_k(t)$ váltakozó feszültséget adó *generátort* (7.4. ábra). Gyakorlati szempontból a legfontosabb az az eset, amikor a kényszeret jelentő generátorfeszültség harmonikus rezgés, ezért itt is ezzel az esettel foglalkozunk. Ennek megfelelően a kényszeret az

$$U_k = U_0 \sin \omega_k t \quad (7.30)$$

függvénnyel adjuk meg.

A rendszert leíró egyenlet abban különbözik a csillapodó rezgést leíró egyenlettől, hogy megjelenik benne az $U_k(t)$ generátorfeszültség, amivel a kondenzátor töltésének változására felírt egyenlet így alakul

$$\frac{d^2 Q_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q_C(t) = \frac{U_0}{L} \sin \omega_k t. \quad (7.31)$$

Bevezetve a $2\beta = \frac{R}{L}$ és az $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ jelöléseket, a mechanikai esethez teljesen hasonló egyenletet kapunk:

$$\frac{d^2 Q_C(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ_C(t)}{dt} + \omega_0^2 Q_C(t) = \frac{U_0}{L} \sin \omega_k t. \quad (7.32)$$

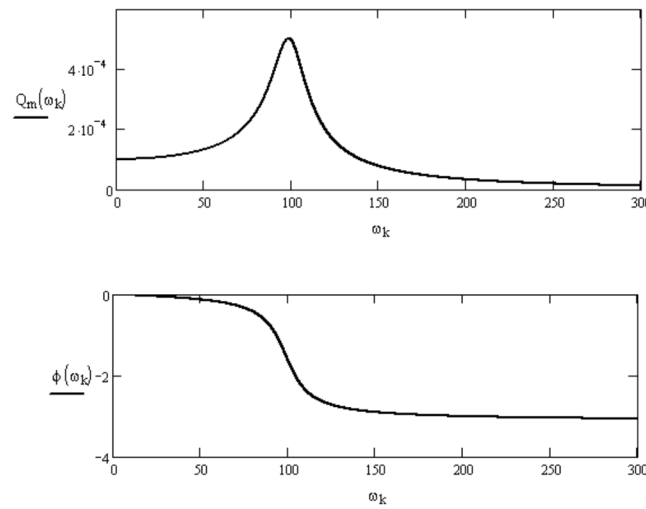
Természetesen a megoldás is ugyanolyan, mint a mechanikai esetben: a töltés változása a gerjesztő feszültség frekvenciájával egyező frekvenciájú

$$Q_C(t) = Q_m \sin(\omega_k t - \varphi) \quad (7.33)$$

harmonikus rezgésnek felel meg. A mechanikai esettel azonos alakú függvények adják meg a töltésváltozás Q_m amplitúdójára és a töltésváltozásnak a kényszerítő generátor feszültségétől való elmaradását jellemző φ fázisszöget is

$$Q_m(\omega_k) = \frac{U_0}{L\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2}}, \quad (7.34)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega_k}{\omega_0^2 - \omega_k^2}. \quad (7.35)$$



7.5. ábra. A kondenzátor töltésének amplitúdója és fázisa a gerjesztő frekvencia függvényében soros rezgőkör esetén

A kondenzátor töltésének amplitúdóját és fázisát a 7.5. ábra szemlélteti. A rezgés amplitúdójának maximuma az $\omega_{\text{Res}}^Q = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ rezonanciafrekvenciánál van, amely erős csillapítás esetén lényegesen különbözhet a csillapítatlan rezgés sajátfrekvenciájától. A rezgés fázisa alacsony frekvencián megegyezik a gerjesztés fázisával, a rezonanciafrekvencián attól 90° -kal elmarad, magas frekvenciákon pedig ellenfázisú a gerjesztéssel. Ezt a jelenséget töltés-rezonanciának vagy feszültség-rezonanciának nevezzük, és analóg a mechanikai rezgéseknél megfigyelt amplitúdó-rezonanciával.

Gyakorlati szempontból nem csak a töltés, hanem az áramerősség időbeli változása is fontos, ezért most az áramerősségre vonatkozó összefüggéseket is megvizsgáljuk.

A töltésváltozás és az áramerősség közötti $\frac{dQ_C}{dt} = I$ kapcsolatot felhasználva, az áramerősségre az

$$I(t) = Q_m\omega_k \cos(\omega_k t - \varphi) = I_m \cos(\omega_k t - \varphi) \quad (7.36)$$

összefüggést kapjuk, ahol $I_m = Q_m \omega_k$ az áramerősség-amplitúdó. Ennek frekvenciafüggését az

$$I_m(\omega_k) = Q_m(\omega_k)\omega_k = \frac{U_0 \omega_k}{L \sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_k^2}} \quad (7.37)$$

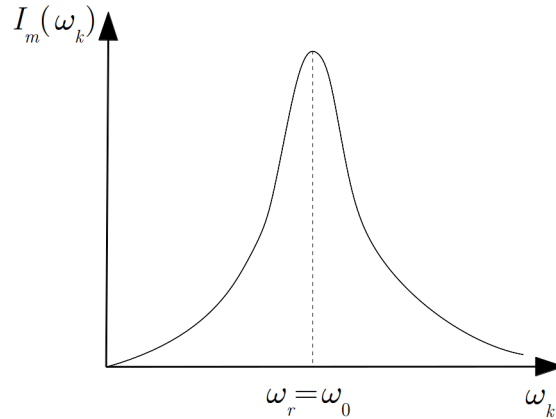
összefüggés adja meg.

Ha ω_0 -t és β -t az áramkör adataival fejezzük ki, akkor rövid számolás után az áramerősség-amplitúdó frekvenciafüggésére az

$$I_m(\omega_k) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}} \quad (7.38)$$

kifejezést kapjuk.

Az amplitúdófüggvény formailag a mechanikai kényszerrezgés sebességamplitúdójának frekvenciafüggésével azonos, a függvényt sematikusán a 7.6. ábra mutatja. Látható, hogy itt is van rezonancia, ami – a mechanikai sebességrezonanciához hasonlóan – az $\omega_k = \omega_0$ frekvencián következik be.



7.6. ábra. Az áramerősség amplitúdója a gerjesztő frekvencia függvényében soros rezgőkör esetén

Fontos adat még az áramerősség és a kényszer szerepét játszó $U_k(t) = \frac{U_0}{L} \sin(\omega_k t)$ generátorfeszültség közötti fáziskülönbség. Meghatározásához az áramerősség időfüggését megadó koszinusz függvényt is alakítsuk át szinusz függvénné:

$$I(t) = I_m \cos(\omega_k t - \varphi) = I_m \sin(\omega_k t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega_k t - \varphi'). \quad (7.39)$$

Így rögtön megállapítható, hogy, az áram fáziskésése a generátor váltakozó feszültségéhez képest $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$ (φ a töltés és a generátorfeszültség közötti fáziskülönbség, amire korábban a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega_k}{\omega_0^2 - \omega_k^2}$ összefüggést kaptuk).

A φ' fáziskésést megadó összefüggés nem túl bonyolult számítással megkapható, a végeredmény a rezgőkör adataival kifejezve a következő:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{L\omega_k - \frac{1}{C\omega_k}}{R}. \quad (7.40)$$

A mechanikai rezonanciához hasonlóan itt is bevezethetjük a *félértékszélességet*, ami a rezonancia élességét jellemzi. Mivel a rezgési energia az áramerősség-amplitúdó négyzetével arányos, a félértékszélességet meghatározó két körfrekvenciát itt az $I_m^2(\omega_k) = \frac{1}{2}I_m^2(\omega_0)$ egyenletből kaphatjuk meg. Ez ugyanaz az egyenlet, mint amit a mechanikai rezgésnél már felírtunk, vagyis kis csillapításnál a félértékszélesség is ugyanaz:

$$\Delta\omega_f = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\beta. \quad (7.41)$$

Ha β -t kifejezzük a rezgőkör adataival, akkor azt kapjuk, hogy

$$\Delta\omega_f \approx \frac{R}{L}. \quad (7.42)$$

A rezonanciának az elektromágneses rezgéseknél is komoly gyakorlati jelentősége van. Alkalmazásának egyik legismertebb példája a rádió vevőkészülék működése: ahhoz, hogy egy rádióadást fogni tudjunk, a készülékünket „rá kell hangolnunk” az adó frekvenciájára, vagyis (pl. a kapacitás változtatásával) a rezgőkör sajátfrekvenciáját úgy kell beállítanunk, hogy azonos legyen az adó frekvenciájával.

Anélkül, hogy részletekbe mennénk, megemlíthetjük, hogy az itt tárgyalt áramkör tulajdonképpen a váltakozó áramú áramkörök egyik alaptípusa. Láttuk, hogy az áram és a feszültség maximális értékei között az

$$I_m = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}} \quad (7.43)$$

összefüggés érvényes.

A szinuszosan váltakozó áram (vagy röviden váltóáram) tárgyalásánál ezt az összefüggést $I_m = \frac{U_0}{Z}$ alakban írják fel, ahol $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}$. Ezt a frekvenciafüggő Z mennyiséget az itt tárgyalt áramkör impedanciájának nevezik.

Váltóáramú áramkörökben praktikus a komplex jelölésmód használata, ahol a rezgés amplitúdója és fázisa egy komplex mennyiségben, az ún. komplex amplitúdóban jelenik meg:

$$\hat{U} = U_0 \cdot e^{i\varphi} \quad (7.44)$$

$$\hat{I} = I_0 \cdot e^{i\varphi'} \quad (7.45)$$

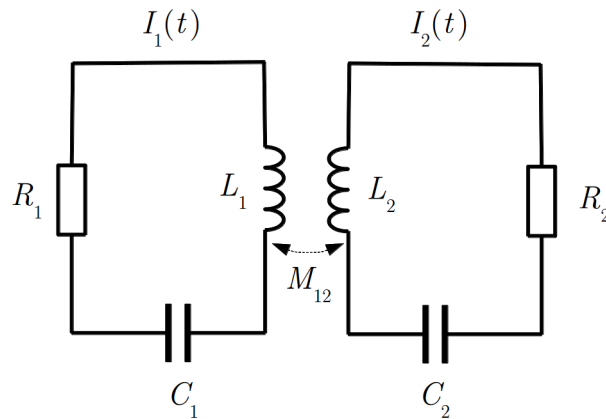
Ezekkel kifejezve az Ohm törvény felírható a következőképpen:

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \hat{Z} = \hat{I} \left[R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \right], \quad (7.46)$$

ahol a szögletes zárójelben szereplő kifejezés az ún. komplex impedancia, melynek tagjai rendre az ellenállás, a tekercs impedanciája és a kondenzátor impedanciája. A komplex impedancia értékei soros és párhuzamos kapcsolás esetén az ellenállásnál megismert módon kombinálhatók, és így a váltóáramú áramkörök egyszerűen leírhatók.

7.3.1. Csatolt rezgések

Csatolt rezgés elektromágneses rezgések esetén is létrejöhet, ha két rezgőkör olyan kapcsolatba kerül egymással, hogy energiaátadással egymás rezgését befolyásolják.

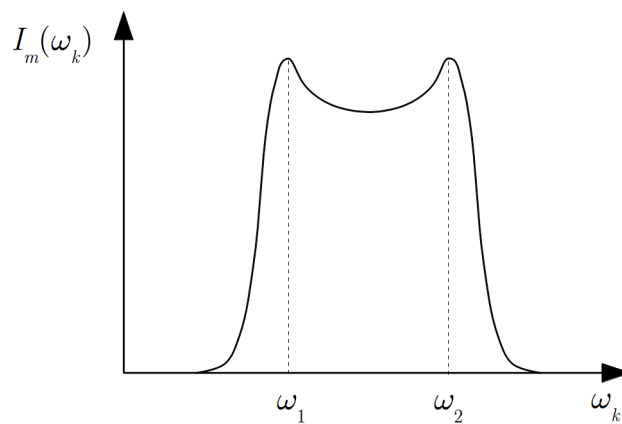


7.7. ábra. Két rezgőkör induktív csatolása

Ilyen rezgőköröket mutat a 7.7. ábra, ahol a csatolást az induktivitások kölcsönös indukciója biztosítja. Az ilyen csatolást *induktív csatolásnak* nevezik. A csatolás erőssége az M_{12} kölcsönös indukciós tényezőtől és a két rezgőkör L_1 és L_2 induktivitásától függ.

Ha az 1 rezgőkörben harmonikus rezgést keltünk, akkor az áramerősség amplitúdója itt csökken, miközben a 2 rezgőkörben növekedni kezd, majd az amplitúdó a 2 rezgőkörben csökken és az 1-ben nő. Az áram időbeli változása a két rezgőkörben teljesen hasonló, mint a mechanikában tárgyalt csatolt ingák kitéréseinek időfüggése. A csatolt ingához hasonlóan, itt is lebegésről van szó. A lebegést előidéző két rezgés frekvenciái a rendszer adataitól (L_1 , L_2 , M_{12}) függő ún. *csatolási frekvenciák*.

Gyakorlatilag nagyon fontos az az eset, amikor az egyik rezgőkörben egy harmonikus rezgést keltő feszültségforrás van. Ilyenkor kényszerrezgés jön létre, de a csatolás miatt ebben a másik rezgőkör is részt vesz. Ezért ezt a rezgést *kényszerített csatolt rezgésnek* nevezik. Kimutatható, hogy ilyenkor – ha a csillapítás nem túl kicsi – a csatolt



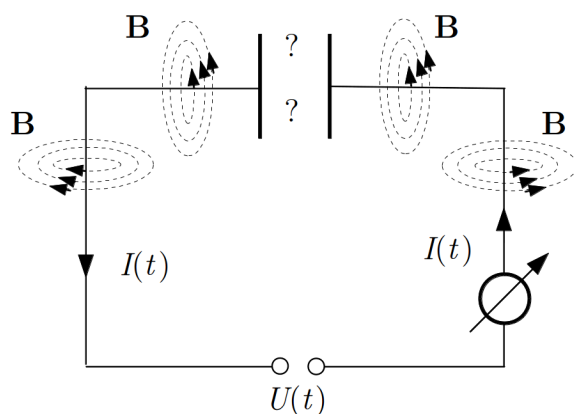
7.8. ábra. Csatolt rezgés áramerősségének amplitúdója a gerjesztő frekvencia függvényében

rendszernek két rezonanciafrekvenciája van, amelyek megegyeznek az említett csatolási frekvenciákkal. Ilyenkor mindkét rezgőkör áramerősség-amplitúdója a 7.8. ábrán látható módon függ az ω_k gerjesztő frekvenciától.

8. fejezet

Maxwell-egyenletek vákuumban és anyagban

8.1. Időben változó elektromos erőter, az eltolási áram



8.1. ábra. Maxwell problémája: van-e mágneses tér a töltődő kondenzátor fegyverzetei közt?

Ha a 8.1. ábrán látható, kondenzátort tartalmazó áramkörbe időben változó feszültségű áramforrást kapcsolunk, akkor az árammérő áramot mutat, annak ellenére, hogy az áramkör nem zárt (a kondenzátor lemezei között nincs vezető). Ennek az az oka, hogy a kondenzátorra kapcsolt feszültség változása a rajta lévő töltés megváltozásával jár, vagyis a kondenzátorba befolyó illetve onnan kifolyó töltések áramlását észleljük. Mivel a vezető szakaszokon áram folyik, természetesnek tűnik, hogy a vezető körül mindenütt kialakul egy mágneses erőter, amely időben változik, de az indukcióvonalak a szoká-

szos képet mutatják (8.1. ábra). Felmerül a kérdés, hogy van-e ilyen mágneses erőter a kondenzátor lemezei között.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a lemezek közötti térrészben ugyanolyan jellegű mágneses erőter jön létre, mint a vezető körül, annak ellenére, hogy itt nyilvánvalóan nem folyhat szokásos értelemben vett elektromos áram (nincsenek töltéshordozók). Ha viszont nincs elektromos áram, akkor vajon mi kelti a mágneses erőteret?

Ha a létrejött mágneses erőteret vizsgáljuk, akkor úgy látszik, mintha az áramkör mégis zárt lenne, hiszen a mágneses erőter mindenütt megjelenik. A lemezek közötti térrészben tehát kell lenni valamilyen mechanizmusnak, amely ugyanolyan hatást kelt, mint a valódi áram. Ezzel kapcsolatban két fontos megállapítást tehetünk:

- Az egyetlen dolog, ami a lemezek között történik, az az elektromos erőter változása, vagyis a jelenségnek ezzel kell kapcsolatban állnia.
- Az elektromos erőter változásának oka az, hogy a kondenzátor lemezein változik az elektromos töltés. Mivel a lemezekon lévő töltés változása szoros kapcsolatban áll a vezetőben létrejött árammal, lehetőség nyílik arra, hogy „kitaláljuk” a lemezek közötti térben létrejött „áramot” formálisan megadó összefüggést.

Számítsuk ki az elektromos erőter változása és a vezetőben folyó áram közötti összefüggést egy egyszerű modell-áramkör segítségével, amelybe egy síkkondenzátort kapcsolunk be.

A vezetőben folyó áram és a kondenzátor töltésének változása között fennáll az

$$I_{\text{vez}} = \frac{dQ_{\text{vez}}}{dt} = \frac{dQ_C}{dt} \quad (8.1)$$

összefüggés, hiszen a vezető egy keresztmetszetén dt idő alatt az a $dQ_{\text{vez}} = dQ_C$ töltés folyik át, ami a kondenzátor lemezére áramlott (vagy onnan eltávozott).

A vezetőben folyó áram a fenti összefüggés segítségével kifejezhető a kondenzátor lemezein lévő $\sigma = \frac{Q_C}{A}$ töltéssűrűséggel (A a lemezek felülete):

$$I_{\text{vez}} = \frac{dQ_C}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} A \quad (8.2)$$

Másrészt tudjuk, hogy homogén, izotróp, lineáris dielektrikummal kitöltött síkkondenzátorban az elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (8.3)$$

Ezzel a vezetőben folyó áram az

$$I_{\text{vez}} = \frac{d\sigma}{dt} A = \varepsilon \frac{dE}{dt} A \quad (8.4)$$

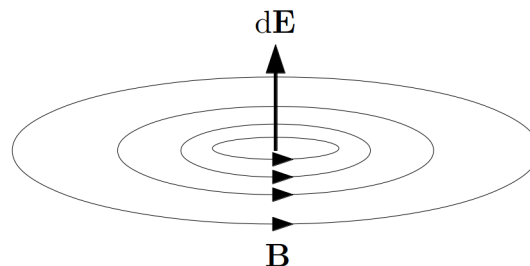
alakba írható.

Ha a kondenzátor mágneses erőterére vonatkozó tapasztalatunk alapján feltételezzük, hogy a kondenzátort tartalmazó áramkör is zárt, akkor a lemezek közötti térrészben ugyanekkora „áramot” kell feltételeznünk. A fenti kifejezés ennek az „áramnak” a megadására alkalmasnak látszik, mert – azon kívül, hogy a kívánt nagyságú áramot adja – a lemezek közötti térrészben bekövetkező térerősség-változással van kapcsolatban. Az így bevezetett – nem töltésmozgással kapcsolatos – áramot történeti okok miatt *eltolási áramnak* nevezik, amit az

$$I_{\text{elt}} = I_{\text{vez}} = \varepsilon \frac{dE}{dt} A \quad (8.5)$$

összefüggéssel adhatunk meg.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az itt tárgyalt jelenség és a kapott összefüggés nem csak síkkondenzátort tartalmazó áramkörben igaz, hanem általánosabban is: a változó elektromos erőter olyan hatást fejt ki, mint az elektromos áram, vagyis *ha valahol változik az elektromos térerősség, akkor ott mágneses erőter jön létre*, amelynek indukcióvonalai a térerősség változását megadó vektort úgy veszik körül, mint a valódi elektromos áramot az általa keltett indukcióvonalak. Az elektromos térerősség változása és az indukcióvonalak iránya közötti összefüggés sematikusán a 8.2. ábrán látható.



8.2. ábra. Változó elektromos tér által keltett mágneses tér sematikusán

Az eltolási áram létezése azt jelenti, hogy az elektromos- és mágneses erőter egyfajta szimmetriát mutat: a *mágneses erőter változása elektromos erőteret, az elektromos erőter változása mágneses erőteret kelt*. Ez a szimmetria teszi lehetővé, hogy egy elektromos vagy mágneses zavar (erőter-változás) a térben tovaterjedjen, és *elektromágneses hullám* jöjjön létre.

Az eltolási áramra kapott kifejezés általánosabb alakba is írható, ha figyelembe vesszük, hogy abban az elektromos térerősség fluxusának $d\Phi_E = A dE$ megváltozása szerepel:

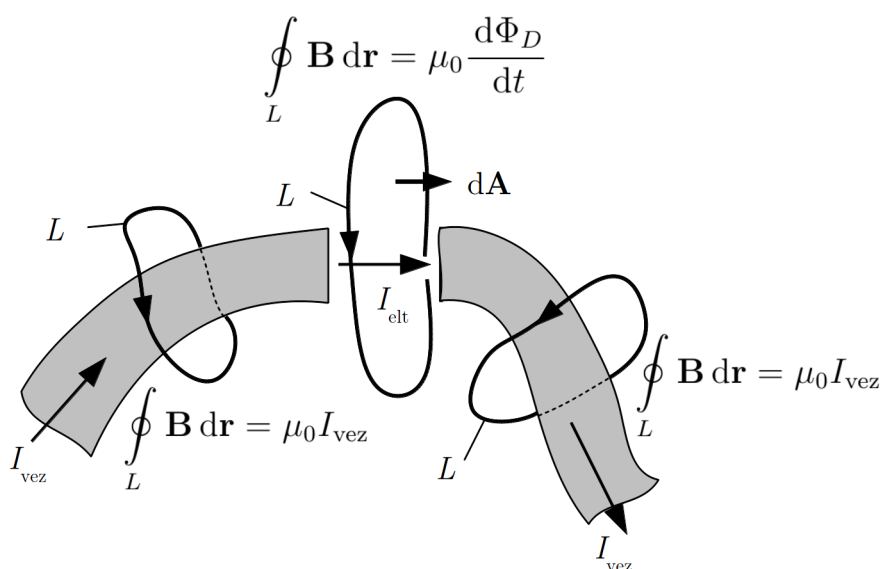
A kifejezés tovább egyszerűsíthető, ha bevezetjük az elektromos eltolás vektorát a homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokra érvényes $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ összefüggéssel. Ekkor az

eltolási áramra azt kapjuk, hogy

$$I_{\text{elt}} = \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} d\mathbf{A} \right) = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (8.6)$$

Vagyis az eltolási áram az eltolási vektor fluxusának változási sebességével adható meg. (Az eltolási áram elnevezés egyébként éppen innen származik.) A tapasztalat szerint ez az összefüggés nem csak az itt feltételezett egyszerűsítő feltevések esetén használható, hanem általában is érvényes.

Az eltolási áram bevezetésével a hagyományos értelmezés szerint megszakítottnak számító áramkörök is zártaknak tekinthetők, és a gerjesztési törvény egy áramkör tetszőleges helyén (a megszakításnál is) eredeti alakjában érvényes, ha ott a törvényben áramként az eltolási áramot írjuk be (8.3. ábra).



8.3. ábra. Mágneses tér számítása megszakított áramkör esetén

A fenti kifejezés egyébként irány szerint is helyesen adja meg az áramot. Ha a gerjesztési törvényben a zárt görbék körüljárását az ábrán látható módon választjuk meg, akkor az I_{vez} áramok pozitívnak számítanak. Ha az eltolási vektor fluxusának számítása-kor a felületvektort most is a Faraday–Lenz-törvénynél alkalmazott megállapodás szerint irányítjuk, akkor az elemi $d\mathbf{A}$ felületvektorok az A felületen jobbra mutatnak. Mivel a kondenzátor bal oldali lemezére pozitív töltések érkeznek, az eltolási vektor $d\mathbf{D}$ megváltozása is jobbra mutat, vagyis $d\mathbf{A} d\mathbf{D} > 0$. Ebből következik, hogy az eltolási vektor fluxusának változása: $d\Phi_D > 0$, ezért az I_{elt} eltolási áram is pozitív.

Mivel a kétféle áram együtt is felléphet, a gerjesztési törvény általános alakja

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 (I_{\text{vez}} + I_{\text{elt}} + I_{\text{mágn}}) = \mu_0 I_{\text{vez}} + \mu_0 \frac{d\Phi_D}{dt} + \mu_0 \oint_L \mathbf{P}_m \, d\mathbf{r}. \quad (8.7)$$

Itt I_{vez} az L zárt hurok által körülölelt makroszkópikus áramok előjeles összege, I_{elt} az elektromos erőter változása miatt fellépő eltolási áramot, $I_{\text{mágn}}$ pedig az anyag mágnesesítéséből eredő mikroszkópikus áramot jelenti.

Ha bevezetjük a \mathbf{H} mágneses térerősséget, akkor a törvény a

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = I_{\text{vez}} + \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (8.8)$$

alakot ölti. A gerjesztési törvénynek ez az alakja nem csak az itt feltételezett egyszerűsítések esetén, hanem általában is érvényes. A törvényt annak kidolgozóiról *Ampère–Maxwell-törvénynek* nevezzük.

Ha az áramerősséget az áramsűrűséggel fejezzük ki, akkor a gerjesztési törvény újabb alakját kapjuk:

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \int_A \mathbf{j}_{\text{vez}} \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \right). \quad (8.9)$$

Ha az L hurok időben állandó alakú, akkor az integrálás és a differenciálás sorrendje felcserélhető, és az integrálok összevonhatók. Ekkor a törvényt a

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \int_A \left(\mathbf{j}_{\text{vez}} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) d\mathbf{A} \quad (8.10)$$

alakba írhatjuk.

Látható, hogy az eltolási áram sűrűsége a

$$\mathbf{j}_{\text{elt}} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (8.11)$$

összefüggéssel adható meg, amivel a gerjesztési törvény a

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \int_A (\mathbf{j}_{\text{vez}} + \mathbf{j}_{\text{elt}}) \, d\mathbf{A} \quad (8.12)$$

alakba is írható.

Az Ampère–Maxwell-törvény fenti integrális alakját matematikailag tovább egyszerűsíthetjük a Stokes-integráltétel segítségével (ld. Matematikai összefoglaló, ?? fejezet),

amely szerint egy vektortér zárt görbére vett vonalmenti integrálja megegyezik a vektortér rotációjának a görbe által körbezárt felületre vett integráljával:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_A \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{A}. \quad (8.13)$$

Így az Ampère–Maxwell-törvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\int_A \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{j}_{\text{vez}} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} d\mathbf{A} \right) \quad (8.14)$$

Ahhoz, hogy az egyenlet mindkét oldalát egy közös felületi integrál alá vonhassuk, az egyenlet jobb oldalán eltolási áramot leíró tagban a felületi integrált fel kell cserélnünk az időbeli differenciálással. A felcserélhetőség feltétele, hogy az integrálási tartomány (az A felület) időben ne változzon.

$$\int_A \left(\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_{\text{vez}} - \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) d\mathbf{A} = 0 \quad (8.15)$$

Ezen integrál értéke akkor és csak akkor lehet minden A felületre nulla, ha maga az integrandus is nulla, azaz:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{vez}} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (8.16)$$

Ha figyelembe vesszük az elektromos eltolás definícióját:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e, \quad (8.17)$$

akkor az eltolási áramsűrűség a

$$\mathbf{j}_{\text{elt}} = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_e}{dt} \quad (8.18)$$

alakba írható. Az összeg első tagja jelzi, hogy vákuumban is van eltolási áram, a második tag pedig azt jelenti, hogy az eltolási áram létrejöttében szerepet játszik a jelenlévő anyag is, hiszen a polarizáció változása is eltolási áramot okoz és mágneses erőteret kelt. Ezt az áramot *polarizációs áramnak* nevezik.

8.2. Az elektrodinamika alapegyenletei integrális formában (Maxwell-egyenletek)

Az elektromos és mágneses erőter vizsgálata során kiderült, hogy a két erőter egymással igen szoros kapcsolatban áll (mindkettőt elektromos töltések hozzák létre, egyik

erőtér változása létrehozza a másikat), ezért a két erőteret *elektromágneses erőtérek*, a velük kapcsolatos jelenségeket *elektromágneses jelenségeknek*-, az ezeket vizsgáló tudományterületet pedig *elektromágnességtannak* vagy *elektrodinamikának* nevezik.

Az elektromágneses erőter jellemzésére különböző térmennyiségeket (\mathbf{E} , \mathbf{P}_e , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{P}_m , \mathbf{H}) vezettünk be, és az elektromágneses erőter különböző megnyilvánulásait általános törvények alakjában foglaltuk össze. Ezek az általános törvények, amelyek egységes megfogalmazója és részben kidolgozója, J. C. Maxwell¹ tiszteletére *Maxwell-egyenleteknek* neveznek, az összes elektromágneses jelenséget leírják, az elektromágneses térre vonatkozó összes speciális törvény (pl. Coulomb-törvény, Biot–Savart-törvény) ezekből levezethető. Megjegyzendő, hogy a Maxwell-egyenleteket különböző irodalmi források más-más sorrendben írják fel, ezért a rájuk való hivatkozáskor a sorszám helyett előnyösebb az adott törvényt felismerő fizikus neve vagy a törvény tartalma alapján említeni.

Most – egyelőre integrális alakjukban – összefoglaljuk a Maxwell-egyenleteket és a hozzájuk csatlakozó kiegészítő összefüggéseket.

Az egyenletek felírásánál először csak az \mathbf{E} , \mathbf{B} , és a \mathbf{P}_e , \mathbf{P}_m mennyiségeket alkalmazzuk, és nem vezetjük be a elektromos eltolást és a mágneses térerősséget.

I. Faraday-féle indukciótörvény

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (8.19)$$

vagy részletezve

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right). \quad (8.20)$$

Itt A az L zárt hurok által bezárt felületet jelenti.

Ez az egyenlet egyrészt azt fejezi ki, hogy a mágneses indukcióvektor fluxusának időbeli változása – az elektromágneses indukció – olyan indukált elektromos erőteret hoz létre, amely nem konzervatív.

A $\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r}$ mennyiséget az \mathbf{E} erőter örvényerősségének nevezik². Ha ez nulla, akkor az erőteret örvénymentesnek-, ha nem nulla, akkor örvényesnek nevezik. Az elnevezés azzal függ össze, hogy örvényes erőterben az erővonalak lehetnek zárt hurkok, az örvénymentes erőterben viszont ez nem lehetséges.

¹James Clerk Maxwell (1831–1879, skót fizikus-

²Ahogy az elnevezés mutatja, az örvényerősség kifejezés a folyadékok áramlásának tanulmányozására született.

Másrészt abban a speciális esetben, amikor a térmennyiségek időben állandóak, az egyenlet jobb oldalán nulla áll: $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$, vagyis visszkapjuk az elektrosztatika I. alaptörvényét. Ilyenkor az erőteret elektromos töltések hozzák létre, és ez a sztatikus elektromos erőter konzervatív és örvénymentes, vagyis erővonalai – a tapasztalattal összhangban – nem lehetnek önmagukba záródó vonalak. A *Faraday* törvény akkor is igaz, ha egyidejűleg mindkét fajta elektromos erőter jelen van.

II. Gauss-törvény, az elektromos tér forrásáról

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_A \mathbf{P}_e d\mathbf{A}, \quad (8.21)$$

vagy részletezve

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_A \mathbf{P}_e d\mathbf{A} \quad (8.22)$$

Itt V az A zárt felület által bezárt térfogatot jelenti.

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a töltések által keltett elektromos erőter térerősségvonalai töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek. Ezek a töltések lehetnek szabad töltések (Q), vagy polarizációs töltések, amelyeknek járulékát az egyenlet jobb oldalán álló – a \mathbf{P}_e elektromos polarizáció vektor által meghatározott – második tag adja meg.

A $\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A}$ mennyiséget az elektromos erőter forráserősségének nevezik. Ha ez nulla, akkor az erőteret forrásmentesnek-, ha nem nulla, akkor forrásosnak nevezik. Kimutatható, hogy forrásos erőterben az erőter vonalai valahol kezdődnek vagy végződnek, forrásmentes erőterben viszont nincs kezdő- és végpontjuk, lehetnek pl. önmagukba záródóak. Megjegyzendő, hogy térben elosztott folytonos töltéseloszlás esetén (pl. homogénen töltött gömb) a töltést tartalmazó térrészen belül nem lehet a teret erővonalakkal szemléltetni, hiszen ott minden pontból kellene induljon erővonal. Természetesen a Gauss-törvény fenti alakja ebben az esetben is érvényes, csak az erővonalak megrajzolása nem egyértelmű.

A forráserősség fogalmát használva a töltések által keltett elektromos erőter forrásos.

Ebben az egyenletben nem jelenik meg az elektromágneses indukció által keltett, indukált elektromos erőter, hiszen töltések hiányában $\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = 0$. Ez azt jelenti, hogy az indukált erőter erővonalai nem kezdődnek és nem végződnek sehol. A Faraday-törvényt is figyelembe véve, levonható az a következtetés, hogy az indukált elektromos erőter erővonalai önmagukba záródnak.

A szokásos elnevezést használva, az elektromágneses indukció által keltett, indukált elektromos erőter örvényes és forrásmentes.

III. Ampère–Maxwell-törvény, a mágneses mező örvényességéről

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \mathbf{P}_m \, d\mathbf{r} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e) \, d\mathbf{A}, \quad (8.23)$$

vagy részletezve

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} + \mu_0 \oint_L \mathbf{P}_m \, d\mathbf{r} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e) \, d\mathbf{A} \quad (8.24)$$

Itt A az L zárt görbe által határolt felületet jelenti.

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a mágneses indukcióvektor a valódi áramokkal, a mágneses dipólusokkal, az elektromos térerősség- és az elektromos polarizáció fluxusának változásával hozható összefüggésbe, az indukcióvonalak lehetnek zárt hurkok (tapasztalatból tudjuk, hogy tényleg azok). Fontos része a törvénynek, hogy tükrözi azt a tapasztalatot is, hogy az elektromos erőter változása mágneses erőteret hoz létre. Az örvényerősség fogalmát használva azt mondhatjuk, hogy a mágneses mező örvényes.

IV. Gauss-törvény, a mágneses tér forrásáról

$$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0. \quad (8.25)$$

Ez a törvény azt mutatja, hogy az indukcióvonalak sehol nem kezdődhetnek vagy végződhetnek. A III. törvénnyel együtt ez azt jelenti, hogy csak önmagukba záródhatnak, ami egybevág a tapasztalatokkal. Az örvényerősség és forráserősség fogalmát használva azt mondhatjuk, hogy a mágneses erőter örvényes és forrásmentes.

Ha bevezetünk két újabb térmennyiséget, akkor a Maxwell-egyenletek egyszerűbb – és sok esetben praktikusabb – formába írhatók át. Fontos azonban tudnunk, hogy az egyenletek enélkül is teljes értékűek, az új mennyiségek bevezetése nem kötelező, csak sokszor előnyös.

A két új térmennyiség az elektromos eltolás- (\mathbf{D}) és a mágneses térerősség (\mathbf{H}) vektora, amelyeknek definíciós egyenletei az alábbiak:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e, \quad (8.26)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{P}_m). \quad (8.27)$$

Ezekkel a Maxwell-egyenletek a következő alakot öltik:

$$\text{I.} \quad \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right), \quad (8.28)$$

$$\text{II.} \quad \oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q, \quad (8.29)$$

$$\text{III.} \quad \oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = I + \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \right), \quad (8.30)$$

$$\text{IV.} \quad \oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0. \quad (8.31)$$

Ezekből az egyenletekből kiderülnek a két új térmennyiség sajátosságai:

- Az eltolási vektor forrásai a Q valódi töltések, az anyag jelenlétében megjelenő elektromos dipólusok viszont nem hoznak létre elektromos eltolást.
- A mágneses térerősség az I valódi áramoktól vagy az elektromos eltolás fluxusának változásából származhat, de az anyag jelenlétében megjelenő mágneses dipólusok nem hoznak létre mágneses térerősséget.

A \mathbf{D} és \mathbf{H} bevezetésének éppen az az előnye, hogy *közvetlenül* egyiket sem befolyásolja az anyag jelenléte³.

Homogén, izotróp, lineáris anyag esetén az anyagi egyenletek egyszerűsödnek:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (8.32)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}. \quad (8.33)$$

Ezzel a Maxwell-egyenletek is egyszerűbbé válnak, mert az anyag jelenlétének hatását a \mathbf{P}_e és \mathbf{P}_m vektorok helyett az ε_r és μ_r anyagállandókkal vesszük figyelembe. Ha az egyenleteknek csak az \mathbf{E} és \mathbf{B} vektorokat tartalmazó alakját használjuk, akkor ebben az

³A vizsgált térrésznek anyaggal való kitöltése *közvetlenül* valóban nem változtatja meg a \mathbf{D} és \mathbf{H} vektorokat, de azok mégis megváltozhatnak, ha az elrendezés olyan, hogy az anyag megjelenése a valódi töltéseket illetve a valódi áramokat megváltoztatja. A \mathbf{D} illetve \mathbf{H} vektorok csak bizonyos, speciális elrendezésekben maradnak változatlanok az anyaggal való kitöltés során. Ez a helyzet pl. akkor, ha egy ideális síkkondenzátort illetve ideális tekercset homogén, izotróp anyaggal töltünk ki (mint tudjuk, \mathbf{E} és \mathbf{B} ezekben az esetekben is függ a teret kitöltő anyagtól).

esetben azt kapjuk, hogy

$$\text{I.} \quad \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right), \quad (8.34)$$

$$\text{II.} \quad \oint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho \, dV, \quad (8.35)$$

$$\text{III.} \quad \oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A}, \quad (8.36)$$

$$\text{IV.} \quad \oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0 \quad . \quad (8.37)$$

Az egyenletek tovább egyszerűsíthetők, ha csak vezetési áramok vannak. Ilyenkor az áramsűrűség is kifejezhető az elektromos térerősséggel, ha felhasználjuk a

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (8.38)$$

anyagi egyenletet.

8.3. A Maxwell-egyenletek differenciális alakja

A Maxwell egyenletek differenciális alakja az integrális egyenletekből legegyszerűbben a vektoranalízis összefüggéseinek segítségével kapható meg, mint azt az egyes törvények részletes vizsgálatánál bemutattuk. Itt táblázatos formában a végeredményt írjuk fel:

Megnevezés	Integrális alak	Differenciális alak
Gauss-törvény	$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho \, dV$	$\text{div } \mathbf{D} = \rho$
Mágneses Gauss-törvény	$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
Ampère–Maxwell-törvény	$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \right)$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Faraday-törvény	$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right)$	$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

A differenciális írásmód nem nyújt olyan szemléletes képet az elektromágneses tér tulajdonságairól mint az integrális alak, ugyanakkor matematikailag sokkal tömörebb és

hatékonyabb leírást tesz lehetővé, ami elsősorban az elektromágneses hullámok leírásánál igen hasznos lesz számunkra is.

9. fejezet

Elektromágneses hullámok

Az elektromágneses jelenségek tárgyalásánál láttuk, hogy változó mágneses erőter elektromos erőteret (elektromágneses indukció), változó elektromos erőter pedig mágneses erőteret (eltolási áram) hoz létre. Ebből sejthető, hogy egy elektromos vagy mágneses zavar hullám alakjában tovaterjedhet: *elektromágneses hullámok* keletkezhetnek, vagy a hullámok energiaszállítására utaló névvel *elektromágneses sugárzás* jöhet létre. Látni fogjuk, hogy az elektromágneses hullámok számos kísérletben megfigyelhetők, másrészt létezésük az elektromágnességtan alaptörvényeiből, a Maxwell-egyenletekből elméletileg következik. Az elektromágneses hullámok létezését Maxwell megjósolta, és az elektromágneses hullám terjedési sebességének a fénysebességgel való hasonlóságára is felhívta a figyelmet.

Mi a történeti úttól eltérően először néhány kísérleti tapasztalatot tárgyalunk, az elektromágneses hullámok elméleti leírásának alapjaival csak később foglalkozunk.

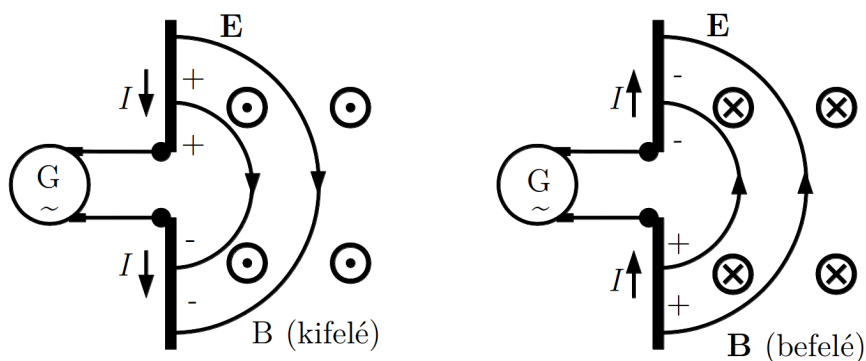
9.1. Szabad elektromágneses hullámok

Ha valahol változik a mágneses erőter, akkor ott (általában változó) elektromos erőter keletkezik, a változó elektromos erőter pedig (általában változó) mágneses erőteret hoz létre. Bizonyos feltételek között ezek az egymást kölcsönösen keltő elektromágneses zavarok a térben szabadon terjedhetnek, és a zavar forrásától távol is megjelennek. Ilyen, szabadon terjedő elektromágneses hullámokat többféleképpen előállíthatunk.

9.1.1. A dipólsugárzás

A szabad elektromágneses hullám előállítására az egyik legegyszerűbb módszer egy egyenes vezető rúd hossz tengelye mentén oszcilláló áram létrehozása. Ez a lineáris rezgés tulajdonképpen egy *rezgő elektromos dipólus*, amit szokás *Hertz-dipólusnak* is nevezni. (Magát az eszközt az elektrotechnikában *lineáris oszcillátornak*, *lineáris antennának*

vagy *dipólantennának* hívják.) A fémrúdban úgy lehet rezgéseket létrehozni, hogy középen megszakítjuk (9.1. ábra), és az így keletkezett két egyenes vezetőhöz egy nagyfrekvenciás generátort (G) kapcsolunk. A generátor váltakozó feszültségének hatására a töltések a rúd mentén ide-oda mozognak. Az ábrán a rezgő dipól rezgésének két ellentétes fázisa látható. A rezgő dipól elnevezés egyébként éppen onnan ered, hogy a rezgések során a rúd végei váltakozva ellentétes töltésűek, vagyis a sugárzást egy *változó elektromos dipólmomentum* hozza létre.



9.1. ábra. Rezgő elektromos dipólus elektromágneses tere az antenna közelében. (Az egyszerűség kedvéért a teret csak az antenna jobb oldalán ábrázoljuk, valójában azonban az hengerszimmetrikusan körbeveszi az antennát.)

A szabadon terjedő elektromágneses hullámok a dipólantenna segítségével érzékelhetők is. Ha a dipólus két kivezetéséhez generátor helyett megfelelő érzékelőt csatlakoztatunk (ez egyszerű esetben lehet egy izzólámpa), akkor egy vevőkészüléket kapunk, amely a rá eső elektromágneses sugárzást érzékeli. Egy ilyen detektor működése azon alapul, hogy az antennára eső elektromágneses hullám változó elektromos erőtere rezgésbe hozza az antenna elektronjait, így a hozzá csatlakozó áramkörben váltakozó áram jön létre, amit detektálni lehet.

Kísérlet: Dipólantenna sugárzása

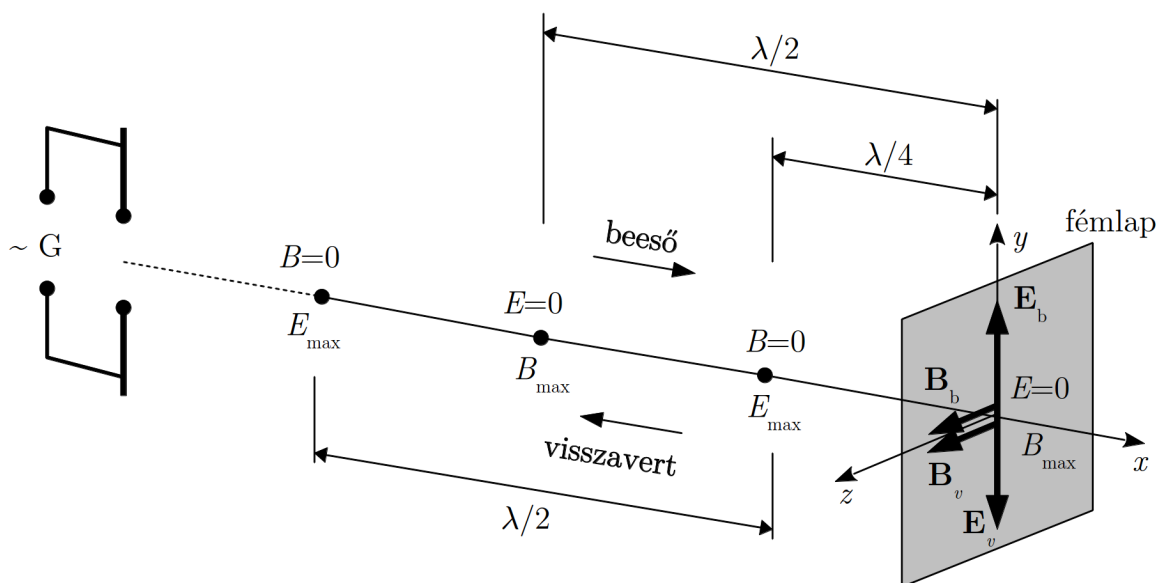
Egy generátorhoz kapcsolt dipólantennával elektromágneses hullámokat kel-tünk, és a hullámot egy másik dipólantennához csatlakoztatott izzólámpával detektáljuk.

Megfigyelhetjük, hogy az izzólámpa akkor világít legerősebben, ha az adó és a vevő antennája egymással párhuzamos. Egymásra merőleges antennák esetén az izzólámpa nem világít. Ha az egymással párhuzamos adó és vevő távolságát növeljük, akkor az izzólámpa egyre kisebb fényerővel világít. ♦

A kísérlet azt mutatja, hogy az elektromágneses zavar valóban megfigyelhető a forrástól távoli pontokban is, és a forrástól mért távolsággal erőssége csökken.

Az a megfigyelés, hogy az antennák párhuzamos állásánál maximális-, egymásra merőleges állásnál pedig minimális jelet észlelünk, arra utal, hogy a dipól sugárzása poláros, vagyis transzverzális hullámokról van szó. Mivel a vevőantennában rezgéseket csak olyan elektromos erőter tud létrehozni, amelyben az elektromos térerősségvektornak van az antennával párhuzamos összetevője, a kísérlet alapján azt várjuk, hogy a dipól sugárzásban az elektromos térerősségvektorok mindenütt a sugárzó dipólt tartalmazó síkokban helyezkednek el.

A fenti kísérletben használt eszközökhöz hasonló elrendezést használt Hertz¹ is (innen a *Hertz-dipólus elnevezés*), aki először vizsgálta az elektromágneses hullámok sajátságait. Hertz annak idején számos kísérletet végzett el, amelyek azt igazolták, hogy a dipólantenna sugárzására ugyanazok a törési és visszaverődési törvények érvényesek, mint a fényre. Kiderült, hogy a sugárzás egy jó elektromos vezető felületről visszaverődik, és állóhullámok is létrehozhatók. A 9.2. ábrán az állóhullám jellegzetességei láthatók.



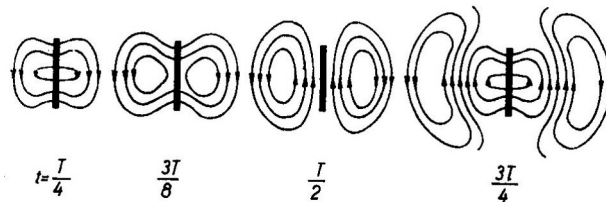
9.2. ábra. Elektromágneses állóhullám kialakulása egy sík vezetőn való visszaverődés során

A fémlapon az elektromos térerősség ellenkező fázisban, a mágneses indukció fázis-

¹Heinrich Rudolf HERTZ (1857-1894) német fizikus.

eltolódás nélkül verődik vissza. A detektor az $E = 0$ helyeken nem ad jelet, a $B = 0$ helyeken viszont maximális jelet ad, vagyis ott az elektromos térerősség maximális. A \mathbf{B} és \mathbf{E} állóhullámok tehát egymáshoz képest $\lambda/4$ -gyel eltolt helyzetben vannak. Hertz az állóhullámok hullámhosszából a frekvencia ismeretében meghatározta a sugárzás terjedési sebességét, amit azonosnak talált a fény terjedési sebességével. Ezekkel a kísérletekkel nem csak az elektromágneses hullámok létét igazolta, hanem azt is valószínűsítette, hogy a fény is elektromágneses hullám.

Hertz mérései és számításai alapján a sugárzó dipól közelében kialakuló térerősségviszonyokat a 9.3. ábrán látható módon képzelhetjük el. Az ábra az elektromos térerősségvonalak változásának egy síkmetszetét mutatja a dipól rezgési periódusának (T) néhány időpontjában (a mágneses indukcióvektor vonalai az ábra síkjára merőleges hurkok formájában körülölelik az elektromos térerősségvonalakat). Az ábrán jól követhető, hogyan válik függetlenné az elektromos erőter a dipól töltéseitől.

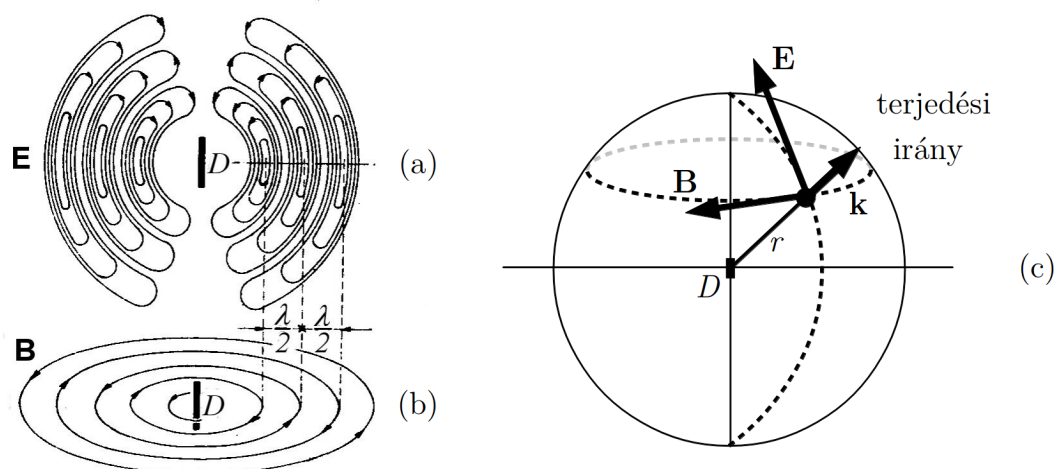


9.3. ábra. Az elektromágneses tér „leszakadása” a rezgő dipólusról

Ha a dipól sugárzását a forrástól távol vizsgáljuk meg, akkor adott időpillanatban a 9.4. ábrán látható erővonalképet kapjuk. A 9.4. (a) ábrán az elektromos térerősségvonalaknak egy síkbeli „pillanatfelvételt” látjuk, a térbeli viszonyokat az ábrának a dipól tengelye körüli körbeforgatásával kapjuk meg. Az indukcióvonalak a dipólra merőleges síkokban a 9.4. (b) ábrán mutatott mintához hasonló módon helyezkednek el. A két vonalrendszer a valóságban egymásba ágyazódik: az \mathbf{E} és \mathbf{B} vonalak egymást kölcsönösen áthurkolják.

A számítások és a kapott erővonalképek azt mutatják, hogy az elektromágneses hullámban az \mathbf{E} és \mathbf{B} vektorok egymásra és a hullám terjedési irányára merőlegesek. A három irányt – pontszerűnek tekinthető D dipól sugárzása esetén – a 9.4. (c) ábra mutatja. Eszerint az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vektor egyirányú a terjedés irányát megadó \mathbf{k} hullámszám-vektorral.

Végül megjegyezzük, hogy nem csak változó elektromos dipólmomentum, hanem *változó mágneses dipólmomentum* is létrehoz elektromágneses sugárzást. Ilyen változó mágneses dipólmomentum jön létre például akkor, ha egy áramhurokban változtatjuk az áramerősséget.



9.4. ábra. Az elektromos (a) és a mágneses tér (b) a rezgő dipólustól távol, valamint a térerősségvektorok és a hullámszámvektor megfigyelt iránya (c)

9.2. Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra

A rugalmas hullámok esetében egy elemi térfogatra felírt mozgásegyenletből sikerült a rugalmas hullámokra érvényes hullámegyenletet levezetni, amelyből a hullámfüggvény meghatározható. Az elektromágneses hullámokra vonatkozó, hasonló egyenletet a Maxwell-egyenletek segítségével kaphatunk. Mivel azonban a hullámegyenlet differenciálegyenlet, ehhez a Maxwell-egyenletek differenciális alakját kell használnunk, amelyeket a korábbi tanulmányaink és a 8. fejezet alapján mellékelt táblázatban láthatunk.

Megnevezés	Integrális alak	Differenciális alak
Gauss-törvény	$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho \, dV$	$\text{div } \mathbf{D} = \rho$
Mágneses Gauss-törvény	$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
Ampère–Maxwell-törvény	$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{r} = \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \right)$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Faraday-törvény	$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \right)$	$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

A vektoranalízis összefüggéseinek ismeretében az elektromágneses hullámokra vonatkozó általános hullámegyenlet egyszerűen megkapható. Itt azonban az egyenletet egy speciális eset vizsgálata kapcsán vezetjük le, anélkül, hogy a vektoranalízis ismeretét feltételeznénk.

Vizsgáljunk egy hullámot egy pontszerű rezgő dipólustól olyan nagy távolságban, ahol a hullám már síkhullámnak tekinthető. Az x -tengelyt vegyük fel a hullám terjedésének irányában, az y -tengelyt pedig a dipólussal és a vele párhuzamos elektromos térerősséggel párhuzamos irányban.

Feltételezzük, hogy a hullám homogén, izotróp, lineáris szigetelő közegben terjed, és nincsenek valódi töltések, tehát $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = 0$ és $\rho = 0$. Mivel x -irányban terjedő *síkhullámról* van szó, a hullámterjedésben szerepet játszó térmennyiségek az y - és z -koordinátáktól nem függnék. Emiatt a táblázat első és második sorában szereplő differenciálegyenletek így egyszerűsödnek:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0. \quad (9.1)$$

A táblázat harmadik és negyedik sorában szereplő egyenletcsoportok első egyenleteiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad (9.2)$$

vagyis E_x és B_x sem a helytől, sem az időtől nem függ.

Ezek után a táblázat harmadik és negyedik sorában szereplő további egyenletek így alakulnak:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial B_y}{\partial x} &= \mu \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Kiinduló feltevésünk szerint az elektromos térerősségnek nincs z -komponense, ezért az egyenletek alapján $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$ és $\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$, vagyis a mágneses indukcióvektor y -komponense állandó (ha nulla volt, akkor az is marad). Ez azt jelenti, hogy ez a komponens a hullám terjedésében nem játszik szerepet.

A fentiek figyelembevételével a térmennyiségek kapcsolatát megadó összefüggések így alakulnak:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (9.4)$$

Az egyenletekből látható, hogy az elektromos térerősség y -komponensének időbeli változása csak a mágneses indukció z -komponensét, a mágneses indukció z -komponensének időbeli változása pedig csak az elektromos térerősség y -komponensét változtatja meg.

A fentiekből az következik, hogy ha a hullámban az elektromos térerősségnek csak y -komponense van, akkor a mágneses indukcióvektornak csak z -komponense van: az elektromágneses síkhullámban \mathbf{E} és \mathbf{B} egymásra merőleges, az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vektor pedig a hullám terjedési irányába mutat.

Hullámegyenletet úgy kaphatunk, hogy az utolsó két egyenletből kiküszöböljük a mágneses térerősséget. Ehhez az első egyenletet differenciáljuk t szerint

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (9.5)$$

majd a második egyenletet differenciáljuk x szerint:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}. \quad (9.6)$$

A két egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (9.7)$$

Ha osztunk $\varepsilon\mu$ -vel, akkor a rugalmas hullámoknál megismert hullámegyenlettel azonos alakú

$$\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (9.8)$$

egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet az elektromos térerősség változását leíró hullámegyenlet, amelyben a hullám terjedési sebességének a

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (9.9)$$

mennyiség felel meg. Ez az elektromágneses hullám terjedési sebessége homogén, izotróp szigetelőben.

Vákuumban $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, ekkor az elektromágneses hullám terjedési sebessége, amit rendszerint c -vel jelölnek:

$$v_{\text{vákuum}} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (9.10)$$

Ez megegyezik a fény terjedési sebességével vákuumban.

Ha a fenti egyenletekből – hasonló módszert követve – nem a mágneses indukcióvektort, hanem az elektromos térerősséget küszöböljük ki, akkor a mágneses erőterre vonatkozó hullámegyenletet kapunk:

$$\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \quad (9.11)$$

A terjedési sebesség most is ugyanaz a $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$.

Ez akár azt is jelenthetné, hogy az elektromágneses hullám két hullámból tevődik össze, egy elektromos- és egy mágneses hullámból, amelyek együtt terjednek. Valójában az elektromos és a mágneses tér a hullám terjedésekor nem szétválasztható, azok szoros kapcsolatát a Maxwell-egyenletek írják le. Nézzük meg példaképpen, hogy milyen összefüggés van az elektromos és mágneses tér között, ha a feltételezett síkhullám harmonikus. Ekkor az

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad (9.12)$$

és a

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (9.13)$$

egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} = kE_0 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (9.14)$$

Integrálás után megkapjuk a mágneses indukcióvektor hullámfüggvényét:

$$B_z(x, t) = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + f(x) = \frac{1}{v} E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + f(x). \quad (9.15)$$

Itt $f(x)$ tetszőleges, csak x -től függő függvény lehet.

Bevezetve a $B_0 = \frac{E_0}{v}$ jelölést, a mágneses indukcióra végül a

$$B_z(x, t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + f(x) \quad (9.16)$$

hullámfüggvényt kapjuk.

Másrészt a

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (9.17)$$

egyenletből a

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (9.18)$$

illetve a

$$\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{\omega}{v^2} E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\frac{k}{v} E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -kB_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (9.19)$$

összefüggést kapjuk.

Ebből integrálással azt kapjuk, hogy

$$B_z(x, t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + g(t). \quad (9.20)$$

Itt $g(t)$ tetszőleges, csak t -től függő függvény lehet.

A B_z -re kapott két kifejezésből látszik, hogy csak

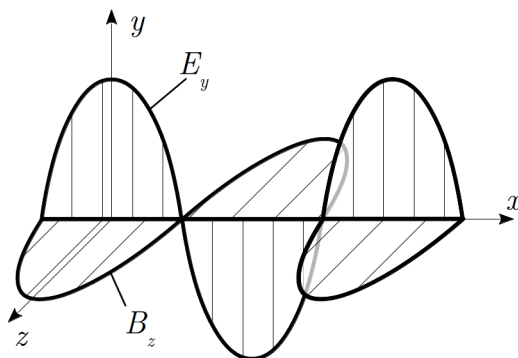
$$B_z(x, t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) \quad (9.21)$$

alakú megoldás lehetséges.

Ez azt jelenti, hogy az elektromos térerősség és a mágneses indukcióvektor azonos fázisban változnak:

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) \\ , B_z(x, t) &= B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Ha tehát az x -irányban haladó harmonikus síkhullámról „pillanatfelvételt” készítünk, akkor a térerősségek $\alpha = 0$ esetén a 9.5. ábrán látható helyfüggést mutatják (ez a „felvétel” a $t = T/4$ időpillanatban készült).



9.5. ábra. Az elektromos térerősség és a mágneses indukcióvektor az EM síkhullám terjedése során azonos fázisban változnak

A fentiekből következik, hogy nem csak az elektromos térerősség és a mágneses indukcióvektor amplitúdóira érvényes, hogy $B_0 = \frac{E_0}{v}$, hanem magukra a hullámfüggvényekre is fennáll, hogy

$$B_z(x, t) = \frac{1}{v} E_y(x, t) = \sqrt{\varepsilon \mu} E_y(x, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} E_y(x, t), \quad (9.23)$$

vagyis a két hullámfüggvény arányos egymással.

A hullámeqyenlet, a hullámfüggvények és a síkhullámra vonatkozó eredmények formálisan sokkal egyszerűbben megkaphatók a Maxwell-egyenletek vektoranalízis szimbólumaival megadott alakjával.

Az egyenletek a $j = 0$, $\rho = 0$ feltételek felhasználásával:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (9.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.25)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.26)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.27)$$

Az utolsó két egyenletre alkalmazva a $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} - \Delta(\mathbf{V})$ összefüggést, és felhasználva, hogy $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta(\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (9.28)$$

Vagyis homogén, izotróp szabad áramoktól és töltésektől mentes lineáris anyagban (és vákuumban):

$$\Delta(\mathbf{E}) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (9.29)$$

ami nem más, mint az elektromos térerősségre vonatkozó hullámeqyenlet, ahol a terjedési sebesség

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}. \quad (9.30)$$

Hasonló módon kapjuk a mágneses indukcióvektorra vonatkozó egyenletet:

$$\frac{1}{\varepsilon\mu} \Delta(\mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (9.31)$$

ugyanazzal a terjedési sebességgel.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az elektromos térerősségre vonatkozó egyenletnek megoldása az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$ síkhullám, a mágneses indukcióra vonatkozó egyenletnek pedig a $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$ síkhullám. A behelyettesítést itt nem végezzük el, de a továbbiakban ezeket a megoldásokat használjuk.

A két térmennyiség közötti összefüggést úgy kaphatjuk meg, hogy a fenti síkhullám-megoldásokat behelyettesítjük a $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ egyenletbe. Ekkor az alábbi összefüggést

kapjuk:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) \right] \mathbf{B}_0. \quad (9.32)$$

A műveletek elvégzése során a koordináták szerinti differenciálás rendre $-k_x, -k_y, -k_z$ szorzókat eredményez a bal oldalon, az idő szerinti differenciálás ω szorzót a jobb oldalon, továbbá mindkét oldalon a \sin helyett \cos jelenik meg. Így végül a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (9.33)$$

összefüggést kapjuk. Ebből látszik, hogy \mathbf{k} , \mathbf{E}_0 és \mathbf{B}_0 jobbsodrású rendszert alkot, és $\omega = ck$ miatt $|\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0|$.

Az $\mathbf{E}(0, E_y, 0)$ választással a mágneses indukciót a $\mathbf{B}(0, 0, B_z)$ vektor adja meg, vagyis a harmonikus elektromágneses síkhullám hullámfüggvényei az

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad (9.34)$$

$$B_z(x, t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) \quad (9.35)$$

alakba írhatók.

9.3. Az elektromágneses hullám energiája és impulzusa

Az elektromágneses hullám révén a forrástól távoli helyen elektromos- és mágneses erőter jelenik meg, ami csak úgy lehetséges, hogy a hullám energiát szállít. Emellett elméleti megfontolások és tapasztalatok mutatják, hogy egy felületre érkező elektromágneses hullám erőt fejt ki, vagyis impulzust is szállít.

A rugalmas hullámok tárgyalásánál láttuk, hogy a hullám által szállított energiát jellemző intenzitás úgy kapható meg, hogy az energia w térfogati sűrűségét megszorozzuk a hullám terjedési sebességével:

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v} = wv\mathbf{u}_t, \quad (9.36)$$

ahol \mathbf{u}_t a terjedés irányába mutató egységvektor.

Tudjuk, hogy az elektromágneses erőter energiasűrűsége homogén, izotróp szigetelőben

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (9.37)$$

Mivel az elektromágneses hullámban $E = vB$, és $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, az elektromos- és mágneses energiasűrűségek között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon v^2 B^2 = \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (9.38)$$

Emiatt az energiasűrűség a

$$w = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 = \varepsilon E v B \quad (9.39)$$

alakba írható.

Mivel a terjedési irány párhuzamos az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vektorral, a terjedés irányába mutató egységvektor az $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{EB}$ alakba írható. Ezzel a hullám energiaáram-sűrűségére (az egységnyi idő alatt egységnyi felületen átáramló energiára) azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{j} = w v \mathbf{u}_t = \varepsilon E B v^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{EB} = \varepsilon v^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (9.40)$$

Felhasználva a $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$ összefüggést, végül a

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (9.41)$$

kifejezést kapjuk. Ezt a mennyiséget *Poynting-vektornak nevezik*², és jelölésére az \mathbf{S} szimbólumot használják:

$$\mathbf{j} = \mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (9.42)$$

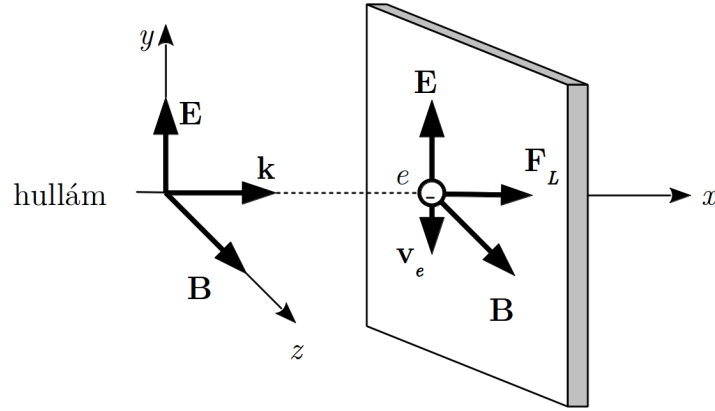
Ha egy véges A felületen áthaladó $\frac{dE}{dt}$ teljesítmény érdekel bennünket, akkor azt az \mathbf{S} áramsűrűségből a felületre történő összegzéssel kaphatjuk meg:

$$\frac{dE}{dt} = \int_A \mathbf{S} d\mathbf{A} = \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}. \quad (9.43)$$

Az elektromágnességtan törvényeiből következik, és kísérletekkel is igazolható, hogy egy felületre érkező elektromágneses hullám a felületre erőt fejt ki, vagyis a hullámnak impulzusa is van. Ez könnyen érzékeltethető az alábbi egyszerű megfontolással.

Vizsgáljunk egy vezető anyag felületére merőlegesen érkező elektromágneses síkhullámot. Egy ilyen hullámban az elektromos térerősség és a mágneses indukció vektora a felülettel párhuzamos (9.6. ábra). A hullám elektromos erőtere az anyag elektronjaira (e)

² John Henry Poynting (1852–1914), brit fizikus



9.6. ábra. Az elektromágneses hullám impulzusa: a vezető síkra beeső hullám erőt fejt ki a töltéshordozókra

erőt fejt ki, és azokat mozgásba hozza (\mathbf{v}_e). A mozgó töltésekre – és egyúttal a töltéseket tartalmazó anyagra – a mágneses erőter a hullám haladási irányába mutató

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \quad (9.44)$$

erőt fejt ki. A hullámban az elektromos és mágneses erőter változik, ezért az erő nagysága időben változik, iránya azonban mindig ugyanolyan marad, hiszen az elektromos térerősség és a mágneses indukció a síkhullámban egyszerre vált irányt. Ez azt jelenti, hogy a beérkező hullám a terjedési irányába mutató impulzust ad át az anyagnak.

A hullám által szállított impulzust ki lehet számítani a következőképpen. Tételezzük fel, hogy a vezető anyag szabad elektronjai az elektromos tér hatását késlekedés nélkül követik (ez az ultraibolya sugárzásnál kisebb frekvenciákra általában igaz), azaz minden pillanatban felírható az Ohm törvény:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (9.45)$$

Az áram molekuláris modellje alapján a 3. fejezetben kifejeztük az áramsűrűség és a vezetőképesség értékét a töltéshordozók mikroszkópikus tulajdonságai alapján:

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} \quad \text{és} \quad \gamma = qn\mu \quad (9.46)$$

Ezeket az Ohm-törvénybe behelyettesítve kifejezhetjük a szabad elektronok pillanatnyi sebességét

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E} = \mu \mathbf{E}_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (9.47)$$

Ezzel az elektronra ható Lorentz-erő:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mu \mathbf{E}_0 \cdot \sin(\omega t)) \times \mathbf{B}_0 \cdot \sin(\omega t) = q\mu \cdot \sin^2(\omega t) \cdot \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (9.48)$$

Ismerve az elektromos tér és a mágneses indukcióvektor közti kapcsolatot egy elektromágneses síkhullámra, kifejezhetjük a Lorentz-erő nagyságát az elektromos tér illetve az elektron sebessége segítségével:

$$|\mathbf{B}_0| = \left| \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} \right| = \frac{|\mathbf{E}_0|}{c} \quad (9.49)$$

$$|\mathbf{F}_L| = q\mu \cdot \sin^2(\omega t) \cdot \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{c} = \frac{\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{v}}{c}, \quad (9.50)$$

ahol a számláló nem más, mint az elektromos erőter által egységnyi idő alatt végzett munka (avagy leadott teljesítmény) a szabad elektron mozgása során. Ez a teljesítmény éppen egyenlő lesz az elektromágneses hullám által egységnyi idő alatt elvesztett energiával. Ha azt feltételezzük, hogy az elektromágneses hullám teljes energiája disszipálódik a megvilágított testen (ez az ún. fekete test definíciója), akkor az egységnyi felületet érő erő (a fénynyomás) éppen a következő lesz:

$$p_f = \frac{|\sum_i \mathbf{F}_L^i|}{A} = \frac{|\mathbf{S}|}{c} \quad (9.51)$$

ahol \mathbf{S} az energiaáramsűrűség vektor és az összegzés az adott pedig az anyag A keresztmetszetében található szabad elektronokra vonatkozik. (Megjegyzendő, hogy ezen modell alapján mind a fénynyomás mind a Poynting-vektor 2ω körfrekvenciával oszcillál. Fizikailag mérhető mennyiséget a fenti egyenlet időbeli átlagolásával kaphatunk.) Másrésről Newton II. törvénye alapján kifejezhetjük a \mathbf{p} impulzus idő szerinti differenciálhányadosát:

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \left| \sum_i \mathbf{F}_L^i \right| = p_f \cdot A = \frac{|\mathbf{S}|}{c} \cdot A = \left| \frac{dE_{\text{EM}}}{dt} \right| \cdot \frac{1}{c}, \quad (9.52)$$

ahol E_{EM} az elektromágneses tér energiája. A fenti kifejezést integrálva és az integrálási konstanst 0-nak véve az elektromágneses tér impulzusára a következőt kapjuk:

$$|\mathbf{p}| = E_{\text{EM}} \cdot \frac{1}{c}. \quad (9.53)$$

A fenti számolásnál egyszerűbben jutunk célhoz, ha felhasználjuk a relativitáselméletnek az E energia és a \mathbf{p} impulzus kapcsolatára vonatkozó

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (9.54)$$

összefüggését (itt $p = |\mathbf{p}|$, m_0 a nyugalmi tömeg, c a elektromágneses hullám terjedési sebessége. Ld. 11.6 fejezet). Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a sugárzás vákuumban terjed.

A fenti összefüggésekből a nulla nyugalmi tömegű elektromágneses sugárzásra azt kapjuk, hogy

$$p = \frac{E}{c}, \quad (9.55)$$

és ugyanilyen kapcsolat áll fenn az impulzus térfogati sűrűsége (P) az energiasűrűség (w) között:

$$P = \frac{w}{c} = \frac{\varepsilon c E B}{c} = \varepsilon E B = \frac{\varepsilon}{c} E^2. \quad (9.56)$$

Mivel az impulzusvektor a hullám haladási irányába mutat, az impulzussűrűség-vektorra azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (9.57)$$

Mint a fenti gondolatment is mutatja, az impulzusátadás következménye, hogy egy felületre eső elektromágneses hullám a felületre nyomást gyakorol, amit *sugárzási nyomásnak* vagy *hullámnyomásnak*, fény esetén pedig *fénynyomásnak* neveznek.

Egy A nagyságú felületre merőlegesen beeső hullám Δt idő alatt annyi impulzust szállít a felületre, amennyi a $\Delta V = Ac\Delta t$ térfogatban van, vagyis a felületet merőlegesen érő impulzus

$$\Delta p = P\Delta V\Delta t = PAc\Delta t. \quad (9.58)$$

Ha a felület a hullámot teljesen elnyeli, akkor a felületre ható erő

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = PAc, \quad (9.59)$$

amiből a nyomás:

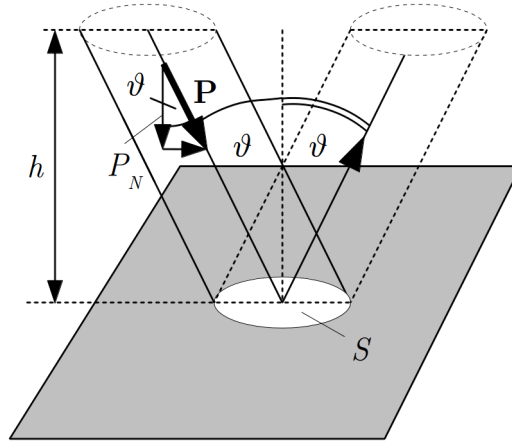
$$p_{\text{sug}} = \frac{F}{A} = Pc = \frac{\varepsilon}{c} E^2 c = \varepsilon E^2 = w. \quad (9.60)$$

A sugárzási nyomás tehát a sugárzást teljesen elnyelő felület esetén az energia térfogati sűrűségével egyenlő.

Ha a sugárzás a felületről teljesen visszaverődik, akkor az átadott impulzus $\Delta p = 2PAc\Delta t$, így a sugárzási nyomás

$$p_{\text{sug}} = 2Pc = 2\varepsilon E^2 = 2w. \quad (9.61)$$

Ha a sugárzás a felületre nem merőlegesen esik be (9.7. ábra), akkor két dolgot kell figyelembe venni:



9.7. ábra. Az impulzus átadása nem merőleges beesés esetén

- a hullám impulzusának csak a felületre merőleges komponense fejt ki nyomóerőt a felületre, és
- Δt idő alatt a 9.7. ábrán látható hasámban lévő impulzus érkezik a felületre.

Ennek megfelelően a felületre merőlegesen érkező impulzus nagysága

$$\Delta p_N = P_N A h \Delta t. \quad (9.62)$$

Mivel

$$P_N = P \cos \vartheta \quad \text{és} \quad h = c \Delta t \cos \vartheta, \quad (9.63)$$

a merőleges impulzusra azt kapjuk, hogy

$$\Delta p_N = P A c \Delta t \cos^2 \vartheta. \quad (9.64)$$

Ha a sugárzás elnyelődik (abszorbeálódik) a felületen, akkor a felületre ható nyomóerő

$$F^{\text{abs}} = \frac{\Delta p_N}{\Delta t} = P A c \cos^2 \vartheta, \quad (9.65)$$

a nyomás pedig

$$p_{\text{sug}}^{\text{abs}} = \frac{F}{A} = P c \cos^2 \vartheta = w \cos^2 \vartheta. \quad (9.66)$$

Ha pedig a sugárzás a felületről teljesen visszaverődik (reflektálódik), akkor az erő

$$F^{\text{refl}} = \frac{2\Delta p_N}{\Delta t} = 2P A c \cos^2 \vartheta, \quad (9.67)$$

a nyomás pedig

$$p_{\text{sug}}^{\text{refl}} = \frac{F}{A} = 2Pc \cos^2 \vartheta = 2w \cos^2 \vartheta. \quad (9.68)$$

Fényhullámnak tükörről történő visszaverődésénél a fényhullám által a tükörrre kifejtett *fénynyomást* kísérletileg elsőként Lebegyev³ mutatta ki. A kísérletben torziós mérlegre szerelt tükröt használt, amelyre a torziós mérleg sajátfrekvenciájával megegyező frekvenciával fényimpulzusokat bocsátott. Az így létrehozott rezonancia segítségével tudta az igen kis nyomást kimutatni.

A nagyságrendek jól érzékelhetők, ha a Napból a Földre érkező sugárzás $p_{\text{sug}} \approx 10^{-6}$ Pa nyomását összehasonlítjuk a légnyomás $p \approx 10^5$ Pa értékével.

9.4. Mozgó elektromos töltés elektromágneses tere

Az elektromágneses sugárzás kibocsátásánál a mozgó töltések alapvető szerepet játszanak, ezért most – az energia- és impulzussűrűségekre kapott összefüggések alkalmazásaként is – megvizsgáljuk, hogy milyen elektromágneses erőter alakul ki egy mozgó töltés körül.

Ehhez szükségünk lesz az elektron (általánosabban egy töltött részecske) klasszikus modelljére, ezért először ezzel foglalkozunk, majd az egyenletesen mozgó töltés erőterét határozzuk meg, végül röviden kitérünk a sugárzás szempontjából meghatározó gyorsuló töltésekre is. Az erőteret vákuumban vizsgáljuk.

9.4.1. Egyenletesen mozgó töltés erőtere

Egyenletes v sebességgel mozgó, q töltés körül elektromos és mágneses erőter alakul ki. Pozitív töltés elektromos erőterét a $v \ll c$ esetben a töltéstől r távolságban (az $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ helyvektorú pontban) a Coulomb-törvény adja meg:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (9.69)$$

ahol \mathbf{u}_r a töltéstől a vizsgált ponthoz mutató egységvektor.

A mágneses erőteret a Biot–Savart-törvényből kaphatjuk meg. Eszerint egy I áram dl hosszúságú szakasza által az $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ helyvektorú pontban létrehozott mágneses indukciót a

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl \quad (9.70)$$

összefüggés adja meg, ahol \mathbf{u}_T az áram irányába mutató egységvektor.

³ Pjotr Nyikolajevics LEBEGYEV (1866-1912) orosz fizikus.

Tudjuk, hogy $I dl = jS dl = nqvS dl = nqv dV = dNqv$, ahol dN az S keresztmetszetű vezető dl hosszúságú szakaszán elhelyezkedő töltések száma. Ezzel a mágneses indukció kifejezése a

$$d\mathbf{B} = dN \frac{\mu}{4\pi} \frac{qv \mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (9.71)$$

alakot ölti. Ez a dN számú töltés erőtere, így az egyetlen $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T$ sebességű q töltés által létrehozott mágneses indukció:

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}. \quad (9.72)$$

Felhasználva a $\mu\epsilon = \frac{1}{c^2}$ és az $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (9.73)$$

Az összefüggésekből látható, hogy $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{u}_r$, ezért, ha a töltést körül vesszük egy koncentrikus gömbfelülettel, akkor az azon át egységnyi idő alatt kijutó energia

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon c^2 \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \mathbf{u}_r d\mathbf{A} = 0. \quad (9.74)$$

Ez azt jelenti, hogy az egyenletesen mozgó töltés nem sugároz.

9.4.2. Gyorsuló elektromos töltés erőtere, a fékezési sugárzás

A rezgő dipól működése tulajdonképpen visszavezethető arra a tapasztalatból ismert tényre, hogy egy *gyorsuló elektromos töltés* elektromágneses sugárzást bocsát ki.

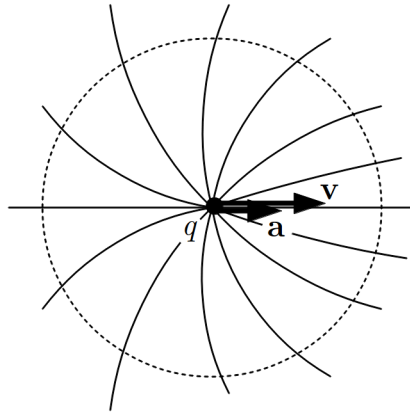
A töltés által kibocsátott energiaáram számításánál az egyenletesen mozgó töltéshez képest itt az a különbség, hogy a gyorsuló töltés elektromos erőtere nem sugárirányú, és nem gömbszimmetrikus, hanem — mint kimutatható — az erővonalak a 9.8. ábrán látható módon alakulnak. Ennek az a következménye, hogy

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon c^2 \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \mathbf{u}_r d\mathbf{A} \neq 0, \quad (9.75)$$

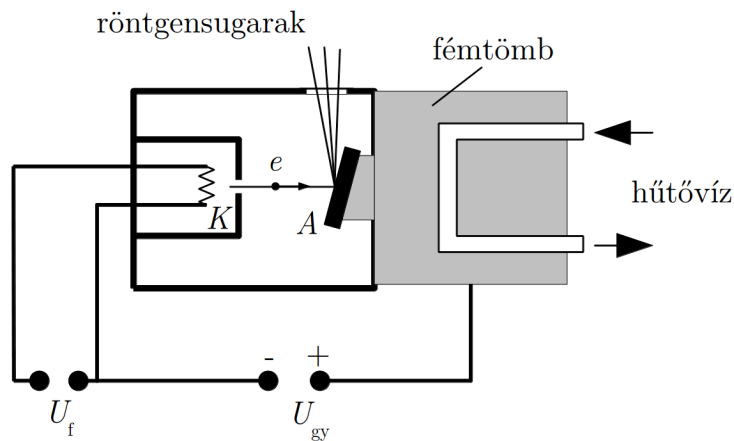
tehát a töltés energiát sugároz ki.

A sugárzás intenzitása az elektromágnességtan törvényei segítségével kiszámítható, de ezzel itt nem foglalkozunk. A számításból az derül ki, hogy az intenzitás arányos a töltés a gyorsulásának négyzetével, és a sugárzás döntően a gyorsulás irányához képest „oldalra” lép ki. A kilépés szögét ϑ -val jelölve az intenzitásra fennáll, hogy

$$I \sim a^2 \sin^2 \vartheta. \quad (9.76)$$



9.8. ábra. Gyorsuló töltés elektromos erőtere



9.9. ábra. Röntgenső vázlata

A gyorsuló töltés sugárzására vonatkozó közvetlen tapasztalat a *röntgenkészülék* működése, amelyben nagy sebességű elektronok egy fémlapnak ütközve lelassulnak, és közben elektromágneses hullámokat (röntgensugárzást) bocsátanak ki.

A 9.9. ábrán egy röntgensugárzás keltésére használt röntgenső vázlata látható. A légritkított csőben az U_f fűtőfeszültséggel egy fémszálat (K) izzítanak, amelyből elektronok lépnek ki. Az elektronokat ezután az U_{gy} gyorsítófeszültséggel felgyorsítják. A felgyorsított elektronok egy fémlapba (A) ütköznek, lefékeződnek, és közben jön létre a *fékezési röntgensugárzás*, amely egy vékony anyagból készült ablakon át jut ki a csőből.

A gyorsuló töltés sugárzása okozza a részecskegyorsítók működése közben tapasztalt elektromágneses sugárzást is. Így például az elektronok gyorsítására használt berendezé-

sekben, a szinkrotronokban, az elektronok fénysebességhez közeli sebességgel körpályán mozognak, ami azt jelenti, hogy a körmozgásból származó centripetális gyorsulásuk nagy értékeket vesz fel. Ebből a gyorsulásból származik az az elektromágneses sugárzás, amelyet az elektronok a pályájuk érintője irányában bocsátanak ki, és amelyet *szinkrotron-sugárzásnak* neveznek.

A gyorsuló töltés sugárzásának részletes tárgyalására az elektrodinamikában kerül sor.

9.5. Dróthullámok és hullámvezetők

A szabad elektromágneses hullámokon kívül olyan elektromágneses hullámok is előállíthatók, amelyek valamilyen vezető rendszer mentén terjednek. Ezek közül most a dróthullámokat és egy egyszerű hullámvezetőt vizsgálunk meg.

9.5.1. Dróthullámok

A lassan változó, kvázistacionárius áramok (rezgőkörök) tárgyalásánál feltételeztük, hogy a Kirchhoff-törvények az áram és feszültség pillanatnyi értékeire érvényesek. Így kaptuk meg egy rezgőkörben létrejött áramot, amely időben változik, de adott időpillanatban az áramkör minden egyes pontján ugyanakkora nagyságú és ugyanolyan irányú. Ha azonban a rezgés frekvenciáját és az áramkör méreteit növeljük, akkor ettől eltérő jelenségeket észlelünk.

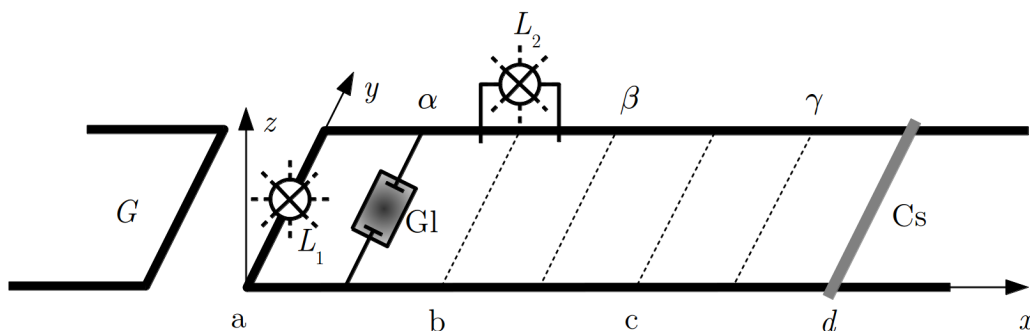
Kísérlet: Lecher-féle drótpár

Egy nagy frekvenciájú ($f \approx 10^8$ Hz) rezgést előállító generátorral (a 9.10. ábrán G) induktív csatolás segítségével váltakozó áramot hozunk létre a 9.10. ábrán látható áramkörben, amely egy hosszú párhuzamos drótpárból (Lecher-féle-drótpár), benne egy izzólámpából (L_1) és a rajta csúsztatható összekötő vezetőlől áll (Cs).

Ha a csúszkát mozgatjuk, akkor az izzólámpa különböző erősséggel világít. Állítsuk be a csúszkát úgy, hogy az izzólámpa maximális fényt adjon.

Ezután egy csúszkára szerelt – a dróthoz párhuzamosan kapcsolt – másik izzólámpával (L_2) nézzük meg, hogy a drót különböző helyein ugyanaz az áram folyik-e. Azt tapasztaljuk, hogy az izzó egymástól azonos távolságban lévő helyeken (a, b, c, d) maximális fényerővel izzik, a közbülső helyeken pedig nem világít. Ha a drótpáron a drótpárt áthidaló csúszkába beépített gázki-sülési csövet (más szóval glimlám-pát) mozgatunk végig, akkor azt találjuk, hogy a cső éppen a közbülső helyeken (α, β, γ) ad maximális fényerőt. Ez azt mutatja, hogy ezeken a helyeken a legnagyobb a feszültség a két drót között.





9.10. ábra. Lecher-féle drótpár

A kísérletből világosan látszik, hogy az áramkör különböző helyein más és más az áramerősség amplitúdója, de ennél is érdekesebb, hogy a drótpár mentén haladva az áram és a feszültség amplitúdója periodikusan változik. Ez tipikusan állóhullám jellegű viselkedés: az a, b, c, d helyeken áram-maximum (duzzadóhely) és feszültség-minimum (csomópont); az α, β, γ helyeken feszültség-maximum és áram-minimum alakul ki.

Érdekes megvizsgálni a kialakult elektromos és mágneses erőteret is. A drótpár síkjában az elektromos térerősség a drótokra merőleges (az y tengellyel párhuzamos), és ott változik a legnagyobb amplitúdóval, ahol legnagyobb a feszültség (az ábrán az α, β, γ helyek). A mágneses indukcióvektor merőleges a drótok síkjára (a z tengellyel párhuzamos), és ott változik a legnagyobb amplitúdóval, ahol a legnagyobb áramot mérjük (a, b, c, d helyek). Az elektromos térerősség és a mágneses indukció amplitúdójának helyfüggését mutatja a 9.11. ábra.

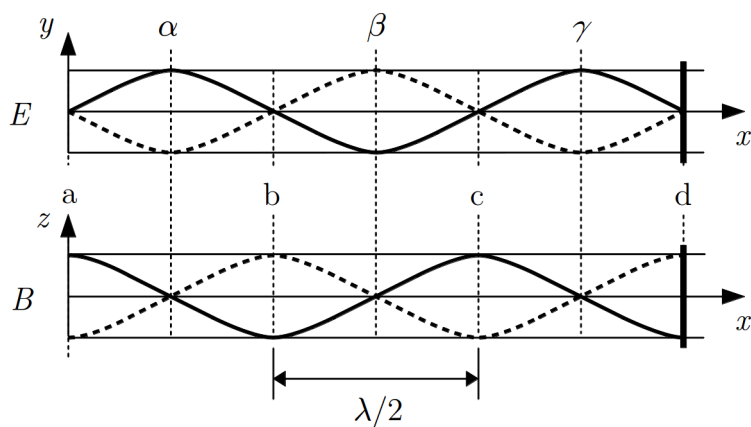
Úgy látszik tehát, hogy ha egy ilyen drótpárban nagyfrekvenciás elektromágneses rezgést hozunk létre, akkor ez a zavar a drótpár mentén elektromágneses hullámként terjed, és – hasonlóan a fémlapról visszaverődő szabad hullámok esetéhez – elektromágneses állóhullám jön létre.

A mérésekből megállapítható a λ hullámhossz (két azonos jellegű pont távolsága a félhullámhosszal egyenlő), így a forrás f frekvenciájának ismeretében kiszámítható a hullám $c = \lambda f$ fázissebessége, amire a jól ismert *fénysebességet* kapjuk.

9.5.2. Hullámvezetők

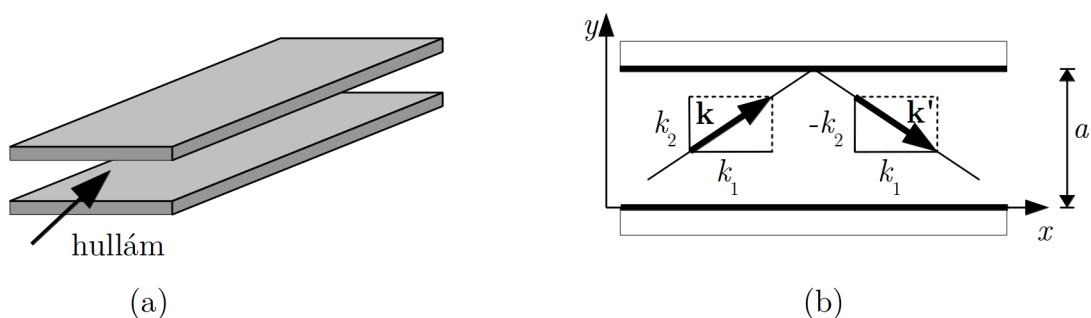
A hullámok kiterjedt közegben minden irányban terjednek, de megfelelő elrendezéssel olyan eszköz is készíthető, amely a hullámot koncentráltan, az általunk kívánt irányban vezeti. Az ilyen eszközöket *hullámvezetőknek* nevezik.

A hullámvezetők legegyszerűbb típusa két párhuzamos, egymáshoz közel elhelyezett, a hullámot visszaverő sík lemezből áll (9.12. (a) ábra). A hullámot bevezetik a lemezek



9.11. ábra. Az elektromos és mágneses tér változása a Lecher-féle-drótpáron

közé, és a hullám a lemezek között ide-oda verődve, a lemezekkel párhuzamosan halad.



9.12. ábra. Síkhullámvezető vázlata (a) és a benne terjedő síkhullámok szemléltetése (b)

Vizsgáljuk azt az elrendezést, amikor a hullámvezetőt két párhuzamos sík alkotja, amelyek között egy síkhullám terjed. Egy ilyen lemezpár metszetét mutatja az ábra, amelyen a fal felé haladó és onnan visszaverődő hullám hullámszám-vektorait is feltüntettük.

A síkhullám leírására általános esetben a

$$\psi(r, t) = A_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \quad (9.77)$$

hullámfüggvényt használhatjuk.

Esetünkben a hullámvezető síkok között a $\mathbf{k}(k_1, k_2)$ hullámszám-vektorú beeső hullám és a $\mathbf{k}'(k_1, -k_2)$ hullámszám-vektorú visszavert hullám terjed (mindkét hullámszám-vektor az xy -síkban van). Mivel $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y$ és $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = k_1 x - k_2 y$, az $\alpha = 0$ feltételezéssel

a két hullám hullámfüggvényére azt kapjuk, hogy

$$\psi_b(x, y, t) = A_0 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] \quad (9.78)$$

$$\psi_v(x, y, t) = A'_0 \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)]. \quad (9.79)$$

A hullámvezetőben haladó hullám ennek a két hullámnak az eredője:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \psi_b(x, y, t) + \psi_v(x, y, t) = \\ &= A_0 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + A'_0 \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)]. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Feltételezzük, hogy a visszaverő felületeknél csomópont van, vagyis a határfeltételek a következők:

$$\psi(x, 0, t) = 0 \quad (9.81)$$

$$\psi(x, a, t) = 0 \quad (9.82)$$

Az első határfeltételből az következik, hogy

$$\psi(x, 0, t) = (A_0 + A'_0) \sin(\omega t - k_1 x) = 0, \quad (9.83)$$

vagyis $A_0 = -A'_0$. Ezzel a hullámfüggvény a

$$\psi(x, y, t) = A_0 \{ \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \} \quad (9.84)$$

alakba írható.

Felhasználva a $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ trigonometriai összefüggést, a hullámfüggvényre azt kapjuk, hogy

$$\psi(x, y, t) = 2A_0 \sin(-k_2 y) \cos(\omega t - k_1 x). \quad (9.85)$$

Mivel a $\psi(x, a, t) = 0$ határfeltételnek minden időpillanatban teljesülnie kell, csak azok a megoldások jöhetnek szóba, amelyeknél $k_2 a = n\pi$, ahol n pozitív egész szám (k_2 és a pozitív számok, így a matematikailag lehetséges negatív n értékek fizikailag nem értelmesek). A határfeltétel tehát megadja az y -irányú hullámszám-komponens lehetséges értékeit

$$k_{2n} = \frac{n\pi}{a}. \quad (9.86)$$

Ezzel a lehetséges hullámfüggvényekre a

$$\psi_n(x, y, t) = 2A_0 \sin\left(-\frac{n\pi}{a}y\right) \cos(\omega t - k_1 x) \quad (9.87)$$

kifejezést kapjuk.

A kapott hullámfüggvény formailag egy y irányú állóhullám és egy x irányú haladó hullám „keveréke”. Mivel különböző állóhullámok alakulhatnak ki, a hullámvezetőben terjedő hullámnak a különböző n értékeknek megfelelő *módusai* lehetségesek.

Vizsgáljuk meg most a hullámterjedés sajátosságait. Az x irányú terjedés fázissebessége

$$v_f = \frac{\omega}{k_1} = \frac{k}{k_1}c, \quad (9.88)$$

ahol c a szabad hullámok fázissebessége, amelyre érvényes, hogy $\omega = kc$.

A $k^2 = k_1^2 + k_2^2 = k_1^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ összefüggésből következik, hogy $k > k_1$, ezért a hullámvezetőben a *fázissebesség nagyobb*, mint a szabad hullámok fázissebessége: $v_f > c$.

Számítsuk ki a hullám $v_{cs} = \frac{d\omega}{dk_1}$ csoportsebességét is, amihez az $\omega(k_1)$ függvényre van szükségünk. Egyszerűbben megkaphatjuk a $k_1(\omega)$ függvényt, amiből a csoportsebesség a $v_{cs} = \frac{d\omega}{dk_1} = \left(\frac{dk_1}{d\omega}\right)^{-1}$ összefüggés segítségével számítható ki.

A keresett függvény:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad (9.89)$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dk_1}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \frac{2\omega}{c^2} = \frac{\omega}{k_1} \frac{1}{c^2}. \quad (9.90)$$

Így a csoportsebesség

$$v_{cs} = \frac{k_1 \omega^2}{\omega} = \frac{k_1}{k} \omega = \frac{k_1}{k} v_f. \quad (9.91)$$

Ebből látszik, hogy a csoportsebesség kisebb, mint a szabad hullám fázissebessége: $v_{cs} < c$.

A fenti összefüggésekből az is látható, hogy a csoport- és fázissebességre fennáll a $v_{cs}v_f = c^2$ összefüggés.

A hullámvezetőben a határfeltételek a lehetséges hullámszámokat korlátozzák, emiatt a hullámvezetőnek van még egy fontos sajátossága.

Mivel a k_1 hullámszám-komponens csak valós szám lehet, a

$$k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (9.92)$$

összefüggés miatt teljesülni kell az

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (9.93)$$

feltételnek, amiből az következik, hogy a körfrekvenciára illetve a frekvenciára fennáll az $\omega \geq \frac{n\pi}{a}c$ illetve az $f \geq \frac{n}{2a}c$ korlátozás. Egy adott frekvenciára és hullámvezetőre meghatározható azon n természetes számok halmaza, amelyekre a fenti feltételek kielégíthetők. Ezen n számokhoz tartozó hullámfüggvények a hullámvezető ún. módusai. Abban az esetben, ha a fenti egyenlőtlenség csak $n = 1$ esetén elégíthető ki, egymódusú hullámvezetőről beszélünk.

Ez azt jelenti, hogy a hullámvezetőben csak az

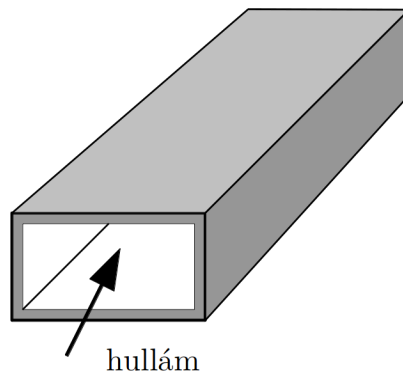
$$f_{\min} = \frac{1}{2a}c \quad (9.94)$$

levágási frekvenciánál nagyobb frekvenciájú hullámok terjedhetnek. A hullámvezetőbe érkező hullámból a hullámvezető kiszűri (levágja) az ennél kisebb frekvenciájú összetevőket, vagyis „felül-áteresztő” frekvenciaszűrőként működik. A levágási frekvencia a hullámvezető geometriájának változtatásával változtatható (az itt tárgyalt elrendezésben az a lemeztávolság a meghatározó paraméter).

A hullámvezetés pontosabb leírásához figyelembe kell venni az elektromágneses hullámok visszaverődésére vonatkozó speciális törvényeket is (pl. az elektromos- és mágneses erőterre vonatkozó határfeltételeket vagy a hullám transzverzális voltából adódó sajátosságokat). Ezekkel a kérdésekkel itt nem foglalkozunk.

A hullámok még jobb hatásfokkal vezethetők, ha két síklap helyett oldalról is zárt csövet alkalmazunk (9.13. ábra). Téglalap keresztmetszetű csőben a téglalap mindkét oldala mentén állóhullámok jönnek létre, ami újabb megszorítást jelent a frekvenciára.

Ha egy cső alakú hullámvezető egyik végét a hullámot visszaverő lappal lezárjuk, akkor a visszaverődő hullámok miatt az x irányban is állóhullámok alakulnak ki⁴.



9.13. ábra. Téglalap keresztmetszetű csatorna hullámvezető vázlata

⁴ Véges hosszúságú hullámvezetőben egyébként akkor is keletkeznek állóhullámok, ha nincs lezárva, mert ilyenkor is van visszaverődő hullám.

Ha a hullámvezető mindkét végét lezárjuk, vagyis egy zárt dobozt hozunk létre, akkor a dobozban mindhárom irányban állóhullámok jönnek létre, és csak a határfeltételeknek megfelelő hullámhosszak (frekvenciák) alakulnak ki. Az ilyen zárt dobozt *rezonátornak* nevezik, mert csak meghatározott frekvenciákon alakul ki benne nagyobb intenzitású hullám (ezekre a frekvenciákra rezonál). A rezonátorok fontos szerepet játszanak a lézerekben valamint a mikrohullámok keltésében és detektálásában.

A gyakorlatban gyakran használnak hullámvezetőket nagyfrekvenciás elektromágneses hullámok (pl. mikrohullámok) vezetésére energiaátvitel vagy adatátvitel céljára (ld. 9.14. ábra). Ez esetben a hullámvezető anyaga általában egy jó vezető anyag (fém). Fény vezetésére a fémes visszaverő felületeknél alacsonyabb veszteségű hullámvezetők készíthetők dielektrikum anyagokból a teljes visszaverődés (ld. 10. fejezet) használatával (pl. üvegszálak).



(a)

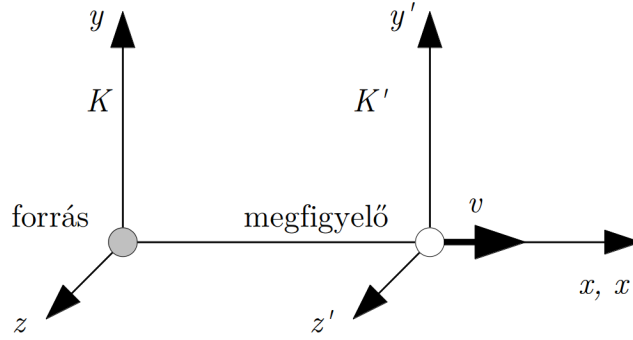


(b)

9.14. ábra. Csatorna hullámvezető mikrohullámú tartományra (a), illetve üvegszál (b) látható vagy infravörös fényre

9.6. Elektromágneses hullámok Doppler-effektusa

Korábban láttuk, hogy rugalmas hullámoknál a Doppler-effektust a hullámforrásnak és a megfigyelőnek a hullámot hordozó közeghez viszonyított sebessége határozza meg. Elektromágneses hullámok esetén szintén megfigyelhető a Doppler-effektus, de az elektromágneses hullám terjedéséhez nincs szükség közegre, ezért ebben az esetben az effektusban csak a forrás és megfigyelő *relatív sebessége* játszik szerepet. A jelenség további sajátossága, hogy – a relativitáselmélettel összhangban – a hullám fázissebessége mindkét rendszerben ugyanaz.



9.15. ábra. Egymáshoz képest mozgó forrás és megfigyelő koordináta rendszerei a Doppler-effektus leírásához

Vizsgáljuk meg azt az egyszerű esetet (9.15. ábra), amikor a forráshoz rögzített K - és a megfigyelőhöz rögzített K' koordináta-rendszer x tengelyei egy egyenesen vannak, y és z tengelyeik párhuzamosak, és a megfigyelő (K') az x tengely mentén v sebességgel távolodik a forrástól (K).

Vizsgáljunk egy x, x' tengely mentén vákuumban terjedő síkhullámot, amit a K rendszerben a

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - k_x x) \quad (9.95)$$

hullámfüggvény ír le.

A relativitáselméletből tanulni fogjuk (ld. 11. fejezet), hogy a (t, \mathbf{r}) mennyiségpár mellett az (ω, \mathbf{k}) mennyiségpár is négyesvektor, továbbá, hogy a négyesvektorok skalárszorzata invariáns a koordináta-transzformációval szemben. Ebből következik, hogy az $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ mennyiség invariáns, tehát a K és K' rendszerbeli értékük azonos:

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'. \quad (9.96)$$

Mivel az általunk vizsgált speciális esetben $y = z = y' = z' = 0$, $k_y = k_z = k'_y = k'_z = 0$, ez az összefüggés azt jelenti, hogy

$$\omega t - k_x x = \omega' t' - k'_x x', \quad (9.97)$$

Fejezzük ki az x, t mennyiségeket x', t' -vel a Lorentz-transzformáció segítségével:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (9.98)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.99)$$

Ezt helyettesítsük be a fenti egyenletbe:

$$\omega \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - k \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega' t' - k'_x x'. \quad (9.100)$$

A bal oldal rendezése után ez az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' - \frac{k - \omega \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' = \omega' t' - k'_x x'. \quad (9.101)$$

Az egyenlet két oldalának összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{illetve} \quad k'_x = \frac{k_x - \omega \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.102)$$

Ha felhasználjuk, hogy a forráshoz rögzített rendszerben $\omega = ck_x$, akkor az

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{illetve} \quad k'_x = k_x \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.103)$$

összefüggéseket kapjuk. Ezekből mellékesen az is kijön, hogy a K' rendszerben is fennáll, hogy

$$\frac{\omega'}{k'_x} = \frac{\omega}{k_x} = c. \quad (9.104)$$

A körfrekvenciához hasonló összefüggés érvényes a megfigyelő által észlelt f' frekvenciára is:

$$f' = f \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.105)$$

Ha $v \ll c$, akkor az összefüggés egyszerűbb alakba írható:

$$f' = f \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (9.106)$$

Látható, hogy a forrástól távolodó megfigyelő ($v > 0$) kisebb frekvenciát és nagyobb hullámhosszt, a közeledő ($v < 0$) nagyobb frekvenciát és kisebb hullámhosszt észlel, mint a forrással együtt mozgó. A frekvencia-eltolódásra vonatkozó összefüggés jelentős szerepet kapott a modern kozmológiában. Az általunk megfigyelhető galaxisok fényét vizsgálva kiderült, hogy a galaxisban és a Földön is létező elemek színeképei szisztematikusan eltérnek egymástól: a galaxisról jövő fény színeképvonalai a hosszabb hullámhosszak (tehát

a vörös) felé eltolódnak a földi színek vonalaihoz képest. A jelenséget *vöröseltolódásnak* nevezik. Ennek egyik magyarázata az lehet, hogy a galaxisok távolodnak tőlünk, és a vöröseltolódás a Doppler-effektus következménye.

A Doppler-effektus másik fontos megnyilvánulása az, hogy gyorsan, és rendezetlenül mozgó atomokat vagy molekulákat tartalmazó gázkisülés (pl. plazma) fényében a spektrumvonalak kiszélesednek. A rendszertelen mozgás miatt a sugárzó atomok a megfigyelőhöz képest minden irányban mozognak, így az atomok által kibocsátott f frekvencia helyett a megfigyelő az $f' = f \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ és $f'' = f \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ értékek közé eső frekvenciákat észlel (itt v a molekulasebesség legvalószínűbb értéke). Ezért a spektrumvonal helyett egy frekvenciatartományt átfogó, kiszélesedett vonalat észlelünk. A frekvenciatartomány szélessége $\Delta f = f'' - f' = 2f \frac{v}{c}$. A jelenséget *Doppler-kiszélesedésnek* nevezik, és mérésével meghatározható a molekulák átlagos sebessége, abból pedig a gáz hőmérséklete.

A Doppler-effektust eddig abban az esetben vizsgáltuk, amikor a relatív sebesség vektora a forrást és a megfigyelőt összekötő egyenessel párhuzamos volt. Ezt az esetet gyakran *longitudinális Doppler-effektusnak* hívják. A megkülönböztető elnevezés oka az, hogy – a rugalmas hullámoktól eltérően – az elektromágneses hullámoknál a forrást és megfigyelőt összekötő egyenesre *merőleges relatív sebesség* is okoz frekvenciaeltolódást. Ezt a jelenséget *transzverzális Doppler-effektusnak* nevezik. Ezzel itt részletesebben nem foglalkozunk, csak megjegyezzük, hogy a transzverzális effektus lényegesen kisebb, mint a longitudinális.

9.7. Az elektromágneses spektrum

Az elektromágneses hullámoknak a közismert rádióhullámok és a fény mellett még számos egyéb fajtája ismeretes. A különböző névvel jelölt elektromágneses hullámok mindegyikében az elektromágneses erőtér zavarai terjednek, de keletkezési mechanizmusuk és frekvenciájuk illetve hullámhosszuk más és más. Az eltérő frekvencia miatt eltérő módon lépnek kölcsönhatásba az anyaggal, vagyis viselkedésük is eltérő lehet.

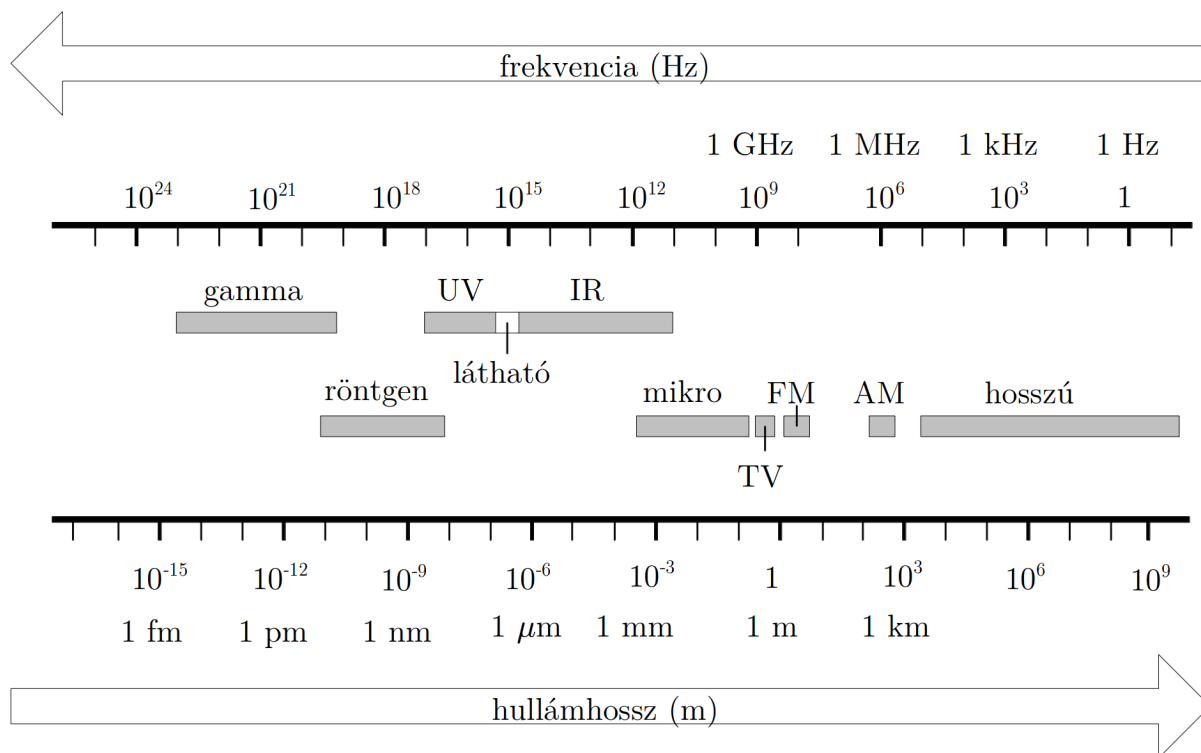
A 9.16. ábrán bemutatjuk a különböző frekvenciájú (hullámhosszú) elektromágneses hullámok ismert tartományait, vagyis az *elektromágneses spektrumot*. A frekvencia mellett megadjuk a vákuumbeli terjedésre érvényes $\lambda = \frac{c}{f}$ hullámhosszt és a hullámhossztartományok elnevezését.

A legnagyobb hullámhosszú hullámok közé tartoznak a rádiózásban használt hosszú hullámok, közép-, rövid és ultrarövid-hullámok. Ezeket az elektronikus információátvitel klasszikus eszközeiben (rádió, televízió) használják. Előállításuk elektronikus áramkörökkel történik. A háztartásban illetve a mobil kommunikációban is használt mikro-hullámokat speciális rezonátorokkal, illetve antennákkal keltik.

Az infravörös (*IR*) sugárzás molekulákban vagy sok atomból álló anyagokban végbemenő változások (pl. hőmérsékleti sugárzás) következménye. A látható- és ultraibolya (*UV*) fény az atomhéjban lejátszódó folyamatok eredménye.

Az orvosi röntgenkészülékekben, a kristályszerkezeti vizsgálatoknál használt röntgen-sugárzás az atomhéjban vagy az atommagban végbemenő átalakulások során jön létre, emiatt az ultraibolya és a gammasugárzással kissé átfedésben van.

A gammasugárzás atommag-átalakulások kísérő sugárzása.



9.16. ábra. Az elektromágneses spektrum

10. fejezet

A hullámoptika alapjai

A fény hullámszerű viselkedésének számos kísérleti bizonyítéka van. Ezek közül a legfontosabbak a fény interferenciájával és elhajlási jelenségeivel kapcsolatos megfigyelések, amelyeket a jelen fejezet második felében tárgyalunk részletesen. Azt, hogy *a fény elektromágneses hullám*, megbízhatóan Hertznek az elektromágneses hullámokkal végzett kísérletei óta tudjuk. Most néhány, a fény hullámtermészetével kapcsolatos jelenséggel foglalkozunk.

Mivel a fény hullám, mindazok a törvények, amelyek a hullámokra általánosan érvényesek, a fény esetén is alkalmazhatók. Mivel pedig a fény speciálisan elektromágneses hullám, az elektromágneses hullámokra vonatkozó speciális törvények a fényre is érvényesek.

Ezek szerint a fényterjedés az elektromágneses hullámokra vonatkozó hullámegyenlettel írható le, és a hullámban az elektromos térerősség és a mágneses indukcióvektor változása terjed. Ez azt jelenti, hogy – harmonikus síkhullámot feltételezve – a hullámfüggvények az

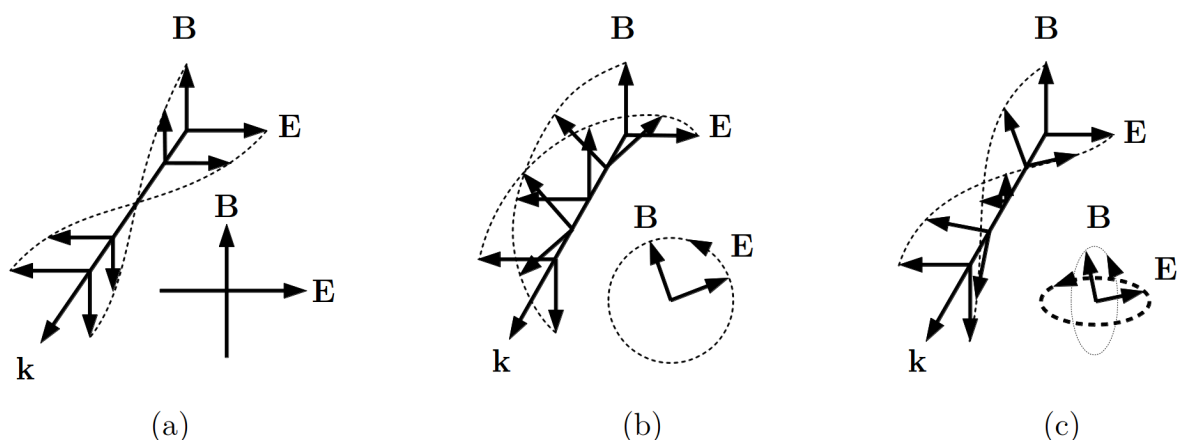
$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r} + \alpha) \quad (10.1)$$

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r} + \alpha) \quad (10.2)$$

alakba írhatók. Tudjuk, hogy vákuumban és homogén izotróp közegben a két térmennyiség vektora egymásra és a terjedési irányt megadó \mathbf{k} hullámszám-vektorra merőlegesek, és \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{k} jobbrendszer alkotnak.

A fény transzverzális hullám, tehát polarizálható. *Lineárisan poláros* a fény, ha az \mathbf{E}_0 és \mathbf{B}_0 amplitúdó-vektorok időben állandóak, és így a rezgési sík terjedés közben nem változik. Ilyen hullám időben változó elektromos és mágneses terének pillanatfelvételét (a térerősségek helyfüggését) mutatja a 10.1. (a) ábra.

A hagyományos fényforrások által kibocsátott fény általában nem poláros, benne különböző rezgési irányú (polarizációs síkú) hullámok keveréke terjed. Lineárisan poláros fény előállítható polarizációs szűrőkkel, de – legalább részlegesen – polárossá válik a fény határfelületekről történő visszaverődésnél, fénytörésnél és szóródásnál is.



10.1. ábra. Lineáris (a) cirkuláris (b) és elliptikus (c) polarizációjú elektromágneses hullám elektromos és mágneses terének pillanatfelvétele

Cirkulárisan poláros a fény akkor, ha az \mathbf{E}_0 és \mathbf{B}_0 amplitúdó-vektorok E_0 és B_0 nagysága időben állandó, de a vektorok – mindig egymásra merőleges helyzetben – állandó szögsebességgel körbeforognak, így (a hullám terjedése miatt) végpontjaik egy-egy csavarvonal (helix) mentén mozognak (10.1. (b) ábra). A kisebb ábrán külön bemutatjuk, hogy egy adott helyen hogyan változik az időben a két térjellemező vektor iránya.

Ha a teret jellemző vektorok végpontjai adott helyen egy-egy ellipszis mentén mozognak (10.1. (c) ábra) akkor *elliptikusan poláros* fényről beszélünk.

Esetünkben a hullám haladási irányába (tehát \mathbf{k} irányába) nézve a vektorok az óramutató járásával megegyező irányban forognak. Az ilyen fényt *jobb irányú*-, ellenkező irányú forgás esetén pedig *bal irányú* cirkulárisan- vagy elliptikusan poláros fénynek nevezzük.

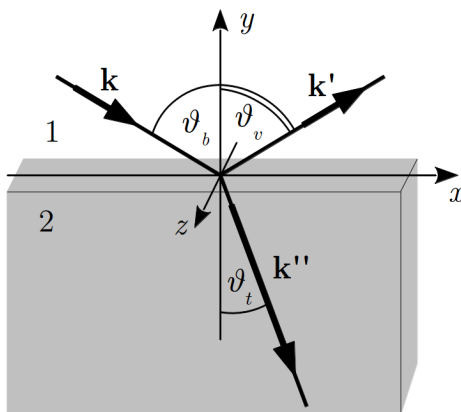
Mint korábban már megtárgyaltuk, az elliptikusan és cirkulárisan poláros hullám két, egymásra merőleges, lineárisan poláros hullám szuperpozíciójaként előállítható. A cirkulárisan poláros fényhullám az elliptikusan poláros fényhullám speciális eseteként fogható fel. (Ha az összetevők amplitúdója különböző, akkor elliptikusan poláros-, azonos amplitúdók esetén pedig cirkulárisan poláros fényt kapunk.)

10.1. Fény visszaverődése és törése két közeg határán

Ha a fény két közeg határához érkezik, akkor a határfelületről részben visszaverődik, részben pedig átmegy a szomszédos közegbe. Eközben számos változás következhet be: irányváltozás, a hullám fázisának és polarizációs állapotának megváltozása. Ezek közül a leglátványosabb, és legegyszerűbben tárgyalható az irányváltozás, ezért itt elsősorban

ezzel foglalkozunk.

A visszaverődés és törés törvényét egyszer már levezettük a Huygens-elv segítségével. Ez a törvény a fény esetén is érvényes, de a fényhullám vektori leírásának bemutatása céljából most egy másik levezetési módot is megmutatunk.



10.2. ábra. Fény visszaverődése és törése két közeg határán

Ha egy harmonikus síkhullám megérkezik a két közeg elválasztó sík határfelületre, akkor a beeső hullám mellett keletkezik egy visszavert- és egy áteresztett hullám is. Ha ezeknek a hullámszám-vektorát rendre \mathbf{k} , \mathbf{k}' és \mathbf{k}'' -vel jelöljük (10.2. ábra), akkor a hullámokat leíró hullámfüggvények idő- és helyfüggését a

$$\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \text{beeső hullám} \quad (10.3)$$

$$\mathbf{E}'_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r}), \quad \text{visszavert hullám} \quad (10.4)$$

$$\mathbf{E}''_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}''\mathbf{r}) \quad \text{áteresztett hullám} \quad (10.5)$$

kifejezésekkel adhatjuk meg. Ezen síkhullámok a hullámegyenlet megoldásai a félig végtelen közegekben, a közegeket elválasztó sík határfelületen a teljes térre teljesülnie kell a Maxwell egyenletekből levezetett peremfeltételeknek, nevezetesen a különböző térkomponensek (E_{\parallel} , D_{\perp} , H_{\parallel} , B_{\perp}) folytonosságának (ld. 2.2.1 és 5.1.2 fejezetek). E peremfeltételek minden időpillanatban csak akkor teljesíthetők, ha mindhárom hullám frekvenciája megegyezik. Egy adott időpillanatban a határfelület minden pontjában peremfeltételek csak akkor teljesíthetők, ha a három hullám fázisa a határfelületen megegyezik, azaz:

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}''\mathbf{r}, \quad (10.6)$$

vagyis:

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = \mathbf{k}'\mathbf{r} = \mathbf{k}''\mathbf{r} \quad (10.7)$$

A határfelület pontjaiban ez csak akkor állhat fenn, ha a három hullámszám-vektor ugyanabban a síkban van. Vegyük fel a koordinátarendszerünket úgy, hogy a beeső hullám hullámszám-vektora az xy -síkba-, a határfelület pedig az xz -síkba essen (10.2. ábra). Az xy -síkot *beesési síknak* nevezik. A fenti fázisillesztés miatt a visszavert és áteresztett hullám hullámvektora is a beesési síkban van.

Mivel az \mathbf{r} vektor a határfelület pontjaiban párhuzamos a felülettel, a fenti feltétel azt jelenti, hogy a három hullámszám-vektor vetülete a felületen ugyanakkora. Az ábra jelöléseivel:

$$k \sin \vartheta_b = k' \sin \vartheta_v = k'' \sin \vartheta_t, \quad (10.8)$$

ahol $k = |\mathbf{k}|$, $k' = |\mathbf{k}'|$ és $k'' = |\mathbf{k}''|$. A beeső és a visszavert hullám ugyanabban a közegben terjed, tehát hullámszám-vektoraik nagysága azonos: $k = k'$, amiből következik a visszaverődés ismert törvénye:

$$\vartheta_b = \vartheta_v. \quad (10.9)$$

A törésre a fenti összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin \vartheta_b}{\sin \vartheta_t} = \frac{k''}{k} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (10.10)$$

Itt v_1 és v_2 a hullám terjedési sebessége az 1 és 2 közegben (közben felhasználtuk a $k = \omega/v$ összefüggést és azt, hogy a hullám körfrekvenciája törés- és visszaverődés után is ugyanaz marad). Bevezetve a 2 közegnek az 1 közegre vonatkozó $n_{21} = v_1/v_2$ *relatív törésmutatóját*, a törési törvény a szokásos

$$\frac{\sin \vartheta_b}{\sin \vartheta_t} = n_{21}, \quad (10.11)$$

alakba írható.

Ha az 1 közeg vákuum, akkor a fenti összefüggés a 2 közegnek a vákuumra vonatkozó törésmutatóját adja meg, amit az 2 közeg *abszolút törésmutatójának* vagy egyszerűen *törésmutatójának* neveznek, és rendszerint n_2 -vel jelölnék. Ezt a fentiek szerint az

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \quad (10.12)$$

összefüggés adja meg, ahol c a fény terjedési sebessége vákuumban.

Hasonlóan az 1 közeg abszolút törésmutatója:

$$n_1 = \frac{c}{v_1}. \quad (10.13)$$

Ha felírjuk a két utolsó egyenlet hányadosát, akkor látható, hogy a két közeg relatív törésmutatója az abszolút törésmutatókkal az alábbi összefüggésben van:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} \quad (10.14)$$

illetve

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} = n_{12} = \frac{1}{n_{21}}. \quad (10.15)$$

Egy közegethatárra érkező fény általában csak részben lépi át a közegethatárt, és csak részben verődik vissza. Itt nem foglalkoztunk azzal a fontos kérdéssel, hogy a beeső *fény milyen hányada* verődik vissza, és milyen hányada halad át a határon. Ezt az adott határfelületen az elektromos- és mágneses erőterre érvényes határfeltételek, továbbá a beérkezés körülményei (pl. az **E** illetve **B** vektornak a felülethez viszonyított helyzete) szabják meg. Ezzel a kérdéssel az optikában foglalkoznak.

A visszaverődés és törés törvényein alapszik a *geometriai optika*, ezek teszik lehetővé számos optikai eszközök (pl. lencsék-, tükrök képalkotása, összetett optikai rendszerek) működésének megértését, illetve tervezését.

10.1.1. Teljes visszaverődés

A fény esetén fontos szerepet játszik az az eset, amikor a 2 közegben a fény terjedési sebessége nagyobb, mint az 1 közegben (10.3. (a) ábra). Ilyenkor $n_{21} = v_1/v_2 < 1$ (az abszolút törésmutatókkal megfogalmazva: $n_2 < n_1$), tehát $\vartheta_t > \vartheta_b$ (a - a' sugarak). Ha egy ilyen határfelületnél a beesési szöget növeljük, akkor egy bizonyos, ϑ_{krit} kritikus értéknél elérhető a $\vartheta_{t,\text{krit}} = 90^\circ$ helyzet (b - b' sugarak). A tapasztalat szerint a beesési szög további növelésekor gyakorlatilag nincs áteresztett fény, a beeső fény a visszaverődés törvénye szerint *teljesen visszaverődik* a felületről (ld 10.3. (a) ábra). Ezért a ϑ_{krit} kritikus szöget a *teljes visszaverődés határszögének* nevezik.

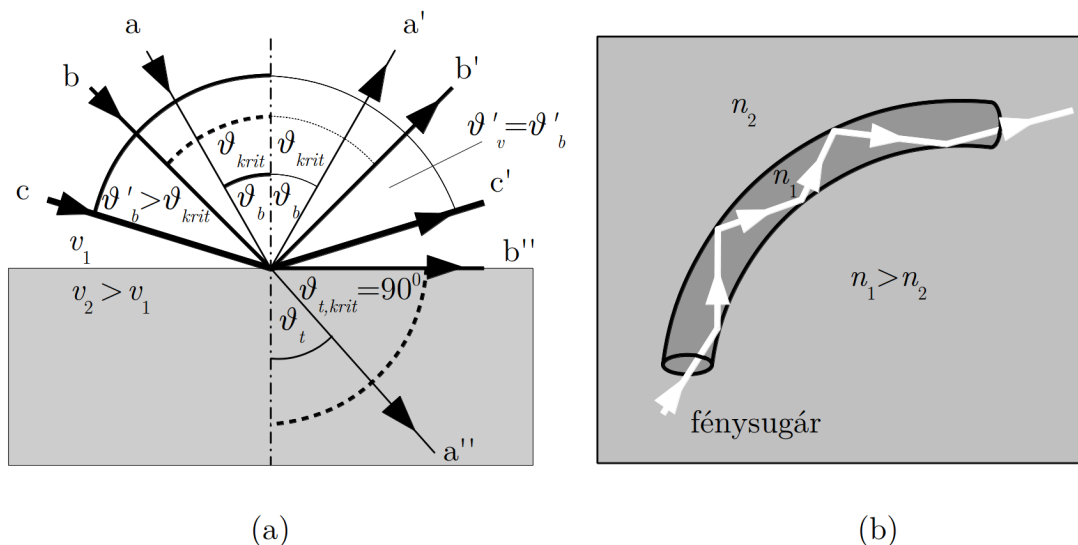
Mivel a határszöggel beeső fény esetén a törési szög 90° , ilyenkor a törési törvény a

$$\frac{\sin \vartheta_{\text{krit}}}{\sin 90^\circ} = n_{21} \quad (10.16)$$

alakot ölti. Ha megmérjük a határszöget, akkor kiszámíthatjuk a relatív törésmutatót:

$$n_{21} = \sin \vartheta_{\text{krit}}. \quad (10.17)$$

A teljes visszaverődésen alapul a napjainkban nagyon fontos szerepet játszó, speciális hálámvezetők, az *optikai szálak* működése. Ha egy fényáteresztő vékony szál (rendszerint üveg) abszolút törésmutatója nagyobb, mint a környező anyag törésmutatója, és a szál elég vékony, akkor a bevezetett fény a szál falain mindenütt teljes visszaverődést szenved,



10.3. ábra. A teljes visszaverődés jelensége (a) és alkalmazása hullámvezetésre (b)

és nagyon kevés veszteséggel halad végig a szálon (10.3. (b) ábra). A kis veszteség mellett az optikai szál további előnye, hogy a fény haladási iránya viszonylag szabadon változtatható (túl nagy görbület esetén előfordulhat, hogy a teljes visszaverődés feltétele nem teljesül). Szálak segítségével optikai kép is továbbítható. Ezen alapulnak pl. az orvosi gyakorlatban használt száloptikai vizsgáló eszközök.

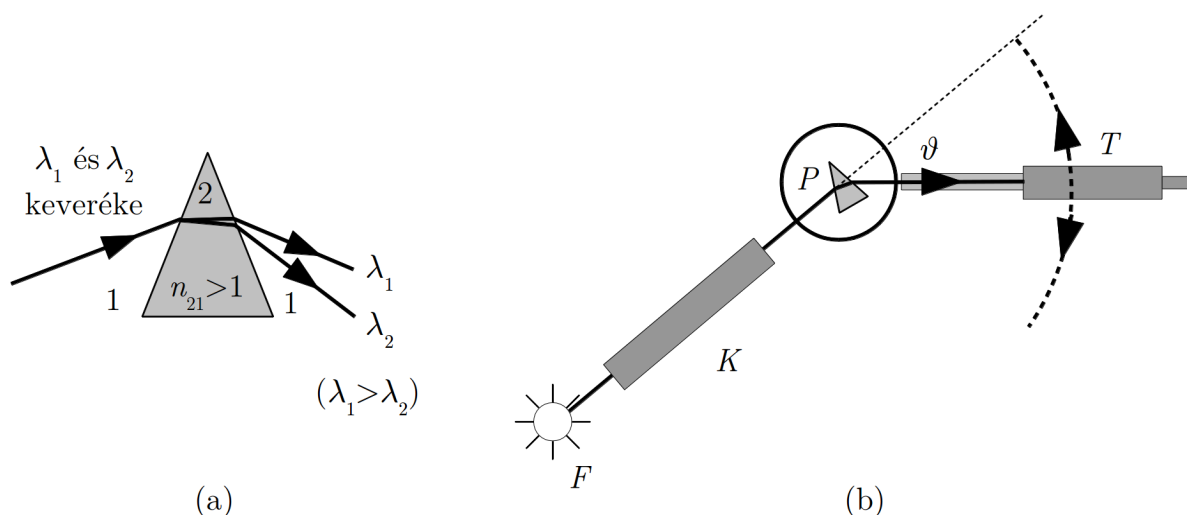
10.1.2. Diszperzió hatása a fénytörésre, a prizmas spektrométer

Anyagban való terjedés közben a fény fázissebessége függ a frekvenciától, vagyis diszperzió lép fel. Ez egyben azt is jelenti, hogy a törésmutató is frekvenciafüggő, tehát egy határfelületre ugyanolyan beesési szöggel érkező különböző frekvenciájú (hullámhosszú) fényhullámok más és más törési szöggel haladnak tovább. Ha tehát a felületre többféle hullámhosszt tartalmazó fény esik, akkor törés után a fény összetevőire bomlik. A hatást növelni lehet, ha kétszeres törést hozunk létre, ami egy prizma alkalmazásával érhető el (10.4. (a) ábra). Ha a prizma (2 közeg) a környező közegre (1) vonatkozó törésmutatója nagyobb mint 1, akkor az ábrán látható törés következik be. A törésmutató a legtöbb üveg esetén tapasztalat szerint a frekvenciával nő, tehát a hullámhosszal csökken, így a nagyobb hullámhosszú fény eltérítése kisebb.

Ha a prizma látható, fehér fényt¹ bocsátunk, akkor az áthaladt fényt egy ernyőn felfogva, abban megfigyelhetjük a fehér fényt alkotó színeket. Legkevésbé a vörös, legna-

¹ A fehér fény különböző hullámhosszú (különböző színű) fényhullámok keveréke.

gyobb mértékben az ibolya színű fény térül el.



10.4. ábra. A prizma diszperziójának hatása a fénytörésre (a) és alkalmazása spektrométerben (b)

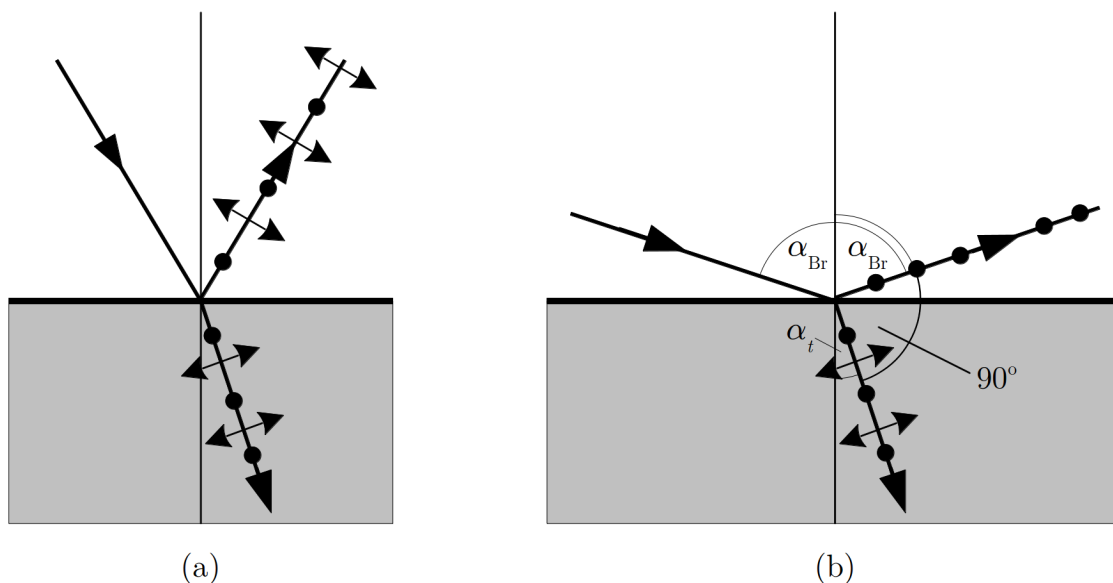
Ennek a jelenségnek a felhasználásával olyan eszköz készíthető, amely alkalmas ismeretlen fény hullámhosszának vagy összetett fény spektrális összetételének meghatározására. Egy ilyen eszköz vázlata látható a 10.4. (b) ábrán. A vizsgálandó fény az F fényforrásból egy kollimátorba jut, amely párhuzamos sugárnyalábot állít elő. Ez a fény esik a P prizmára, ami a hullámhossztól függően eltéríti azt. Az eltérített fényt egy körbeforgatható T távcsőben figyelik meg. Az eltérítés mértékét például az ábrán látható ϑ szöggel lehet megadni. Ahhoz, hogy az eszköz hullámhosszmérésre legyen alkalmas, először hitelesíteni kell, vagyis ismert hullámhosszú fény alkalmazásával meg kell határozni, hogy adott hullámhosszhoz milyen eltérítés tartozik. Ezután az ismeretlen fény eltérítéséből hullámhossza meghatározható.

Összetett fényt alkotó hullámok hullámhosszainak (frekvenciáinak) összességét (illetve az annak megfelelő, pl. ernyőn megfigyelhető képet) az összetett fény *spektrumának* nevezik, a spektrum meghatározására szolgáló fenti eszköz pedig a *prizmás² spektrométer*.

² Később látni fogjuk, hogy spektrum felvétele más eszközzel (pl. optikai rács) is lehetséges.

10.1.3. Fénypolarizáció visszaverődésnél és törésnél, a Brewster-törvény

A tapasztalat azt mutatja, hogy egy szigetelő határfelületre (pl. levegőből üvegbe) érkező nem poláros fényhullám a visszaverődés és törés után részben polárossá válik. A visszavert hullámban nagyobb intenzitású a beesési síkra merőleges (vagyis a határfelülettel párhuzamos) rezgési síkú összetevő, az áteresztett, megtört hullámban pedig nagyobb intenzitású a beesési síkba eső rezgési síkú összetevő. A 10.5. (a) ábra a polarizáció tényét szemlélteti (az egyes összetevők intenzitásai itt nem láthatók), a nyilak a beesési síkkal párhuzamos térerősségvektort (rezgési síkot) jelzik, a pontok az erre merőleges térerősségvektorokat szemléltetnek. A tapasztalat szerint a polarizáció foka függ a beesési szögtől.

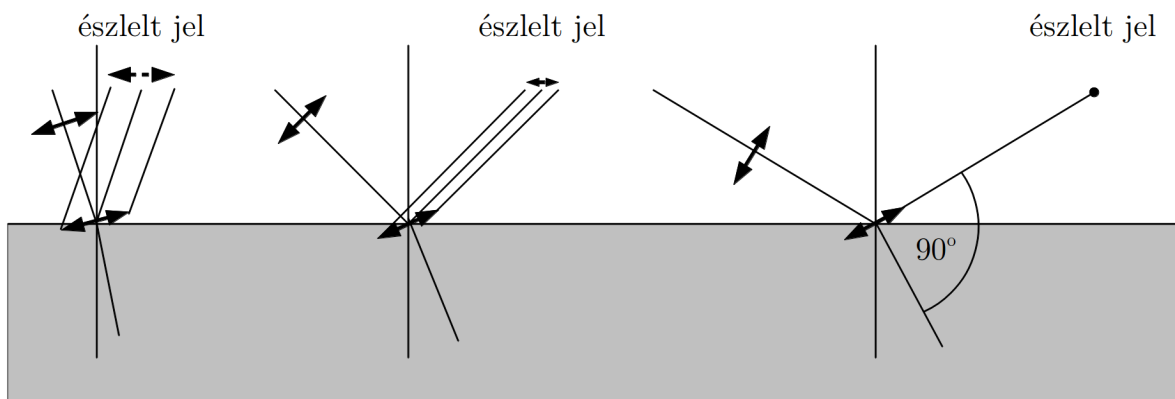


10.5. ábra. A visszavert és áteresztett fény polarizációja (a) és a Brewster-effektus (b)

Brewster³ megállapítása szerint a beesési szög változtatásával mindig lehet találni egy olyan speciális beesési szöget (α_{Br}), amelynél a visszavert fényben csak a határfelülettel párhuzamos térerősségkomponens marad meg. Ez az a beesési szög, amelynél a visszavert és megtört sugár egymásra merőleges (10.5. (b) ábra), vagyis a törési törvény szerint

$$\frac{\sin \alpha_{Br}}{\sin \alpha_t} = \frac{\sin \alpha_{Br}}{\sin(180^\circ - \alpha_{Br} - 90^\circ)} = \frac{\sin \alpha_{Br}}{\sin(90^\circ - \alpha_{Br})} = \frac{\sin \alpha_{Br}}{\cos \alpha_{Br}} = n_{21}, \quad (10.18)$$

³ Sir David BREWSTER (1781-1868) skót fizikus.



10.6. ábra. A Brewster effektus kvalitatív magyarázata

vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Br}} = n_{21}. \quad (10.19)$$

Ez a *Brewster-törvény*, amely a Maxwell-egyenletek segítségével elméletileg is értelmezhető, és az egyes összetevők intenzitása is meghatározható. Ez a törvény lehetőséget ad lineárisan poláros fény előállítására, bár a poláros, visszavert sugárzás intenzitása nem túl nagy (levegő-üveg határfelületnél mintegy 15%).

A megtört sugárban túlsúlyban van a beesési síkba eső rezgési irány, de a merőleges rezgésirány is jelen van. A beesési síkba eső rezgési irány hányada több rétegen való töréssel jelentősen megnövelhető.

A jelenségre durva, kvalitatív magyarázatot adhatunk a fény és anyag kölcsönhatásának klasszikus atomi felfogása segítségével. Eszerint a határfelületre érkező fény úgy halad tovább, hogy a fényhullám elektromos erőtere megrezgeti a határfelület atomjainak elektronjait, vagyis rezgő dipólokat hoz létre. A visszavert fényt elképzelhetjük, mint ezen rezgő dipólusok által kisugárzott fényt. A dipól sugárzásának zömét a tengelyére merőleges irányban sugározza ki, és gyakorlatilag nem sugároz a tengelye irányában.

Ha az elektromos térerősség merőleges a beesési síkra, akkor a felületi atomok elektronjai is ilyen irányban rezegnek, így a megtört és a visszavert sugárban ugyanilyen elektromos erőteret sugároznak tovább. A visszavert sugár irányában elhelyezkedő megfigyelő tehát a megfigyelés irányára merőlegesen álló (tehát maximálisan sugárzó) dipólokat észlel, amelyek a beesési síkra merőleges elektromos erőteret hoznak létre.

Ha a beeső sugárzásban a térerősség párhuzamos a beesési síkkal, akkor a felületi atomok elektronjai is ebben a síkban rezegnek, de a létrejött dipólok a továbbhaladó, megtört hullám haladási irányára merőlegesek (10.6. ábra). Ahogy a törési szög nő, a

dipólok a visszavert sugár irányából egyre kisebb szög alatt látszanak, és az észlelt jel egyre kisebb. Amikor a megtört és visszavert sugár egymásra merőleges, akkor a dipólok tengelye éppen a visszavert sugárral párhuzamos, tehát a visszavert sugár irányából gyakorlatilag nem érkezik jel. Ekkor a visszavert sugárban – a Brewster-törvénynek megfelelően – csak a beesési síkra merőleges rezgés jelenik meg (10.6. ábra).

10.2. Interferencia

A hullám egyik legjellegzetesebb tulajdonsága az interferencia. Az interferencia azonban csak akkor figyelhető meg, ha az interferáló hullámok koherensek.

Ez a feltétel a fény esetében nem könnyen teljesíthető, mert – mint azzal később részletesebben is foglalkozunk – a fénykibocsátás olyan atomi folyamat, amelynek során az egyes atomok véletlenszerűen bocsátanak ki véges hullámvonulatokat⁴. Két hagyományos fényforrás által kibocsátott fényhullámok fázisa emiatt véletlenszerűen változik, vagyis nem koherensek. Ennek a következménye pl. az, hogy két hagyományos pontszerű fényforrás (pl. izzólámpa) együttes fényét a falon megfigyelve, egyenletes megvilágítást észlelünk, és nem tapasztaljuk a fényintenzitásnak az interferenciára jellemző térbeli változását.

Fényinterferenciát hagyományos fényforrások esetén lényegében csak úgy lehet megfigyelni, ha egy fényforrás által kibocsátott fényt valamilyen módon kettéválasztunk, majd újra egyesítünk, vagyis ha a fényhullám önmagával interferál. A fényhullám kettéválasztására alapvetően két módszert használnak:

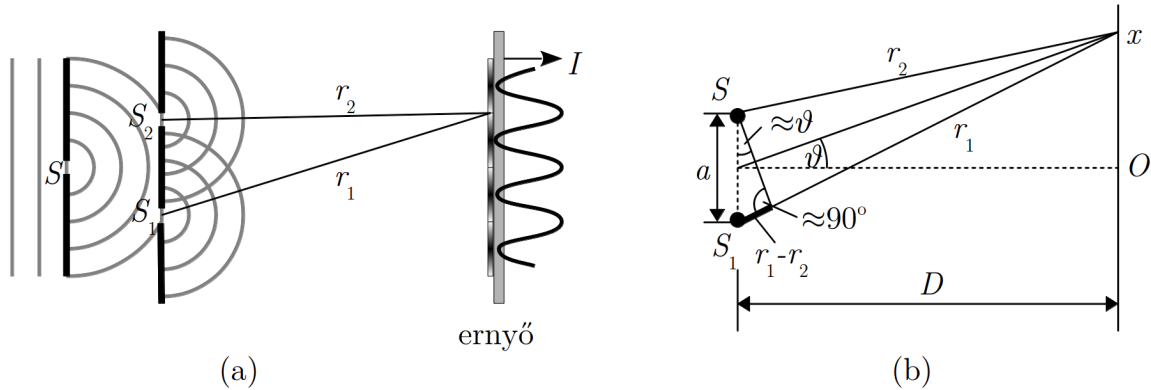
- a terjedő hullám *hullámfrontját osztják* ketté megfelelő akadályok illetve rések alkalmazásával, vagy
- a fénynyaláb intenzitását, vagyis a *hullám amplitúdóját* osztják ketté, rendszerint féligáteresztő tükrök alkalmazásával.

10.2.1. A Young-kísérlet

A fényinterferencia bemutatására szolgáló klasszikus kísérletében Young⁵ a hullámfront kettéválasztásának módszerét alkalmazta. Egy résen (az 10.7. (a) ábrán S) áthaladó fényhullámot két nagyon kis méretű résre (S_1 és S_2) ejtett. Így a két kis résre ugyanazon hullámfront két koherens része esett, és ezekből a vonalszerűnek tekinthető hullámfrontokból koherens fényhullámok jöttek létre. Ezeknek a hullámoknak az interferenciáját egy ernyőn figyelte meg, és valóban az interferenciára jellemző, periodikus intenzitáseloszlást (világos és sötét csíkokat) észlelt (10.7. (a) ábra).

⁴ Ez a megállapítás nem érvényes a lézerekre.

⁵ Thomas YOUNG (1733-1829) angol fizikus.



10.7. ábra. A Young féle kétréses interferencia kísérlet (a) és értelmezése (b)

Az interferenciának ezt az esetét a rugalmas hullámoknál (vízhullámok) már megvizsgáltuk, és azt találtuk, hogy harmonikus hullámok esetén az eredő hullám is harmonikus, amelynek amplitúdója függ a helytől, és a helyfüggést az

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} \quad (10.20)$$

függvény adja meg. Itt A_1 és A_2 az összetevő hullámok-, A az eredő hullám amplitúdója, k a két hullám közös hullámszáma, φ pedig a két hullám fáziskülönbsége.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a hullámok amplitúdója megegyezik, $A_1 = A_2 = A_0$, és a hullámok fáziskülönbsége $\varphi = 0$. Ekkor az

$$A = A_0 \sqrt{2(1 + \cos(kr_1 - kr_2))} \quad (10.21)$$

összefüggést kapjuk. Ebből az eredő intenzitást az $I \sim A^2$ kapcsolat alapján írhatjuk fel:

$$I = 2I_0(1 + \cos(kr_1 - kr_2)) = 2I_0 + 2I_0 \cos k(r_1 - r_2). \quad (10.22)$$

Ebből az összefüggésből látható, hogy a maximális és minimális amplitúdójú helyeket a két hullám $\Delta s = r_1 - r_2$ útkülönbsége szabja meg. Maximális intenzitás azokon a helyeken jön létre, amelyekre teljesül a $k(r_1 - r_2) = \pm n2\pi$ feltétel, vagyis ahol az útkülönbség

$$\Delta s_{\max} = r_1 - r_2 = \pm n\lambda. \quad (10.23)$$

Hasonló módon kapjuk, hogy a minimális intenzitás a

$$\Delta s_{\min} = r_1 - r_2 = \pm(2n + 1)\frac{\lambda}{2}. \quad (10.24)$$

feltételnek megfelelő helyeken jelenik meg.

A maximumok és minimumok helye egy sík ernyőn egyszerűen meghatározható, ha az ernyőt a résektől nagy távolságban helyezzük el, és az interferenciát csak kis x -tartományban vizsgáljuk (a ϑ szög kicsi). Ekkor a 10.7 (b) sematikus ábra jelöléseivel azt kapjuk, hogy

$$\sin \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{D}, \quad (10.25)$$

illetve

$$\sin \vartheta \approx \frac{r_1 - r_2}{a}. \quad (10.26)$$

Ebből az

$$x \approx \frac{r_1 - r_2}{a} D \quad (10.27)$$

közelítő összefüggést kapjuk.

A maximumhelyek x koordinátái eszerint

$$x_n^{\max} \approx \pm n \frac{\lambda}{a} D, \quad (10.28)$$

a minimumhelyeké pedig

$$x_n^{\min} \approx \pm (2n + 1) \frac{\lambda}{2a} D. \quad (10.29)$$

Ezek az összefüggések akkor használhatók, ha x és a sokkal kisebb, mint D , vagyis a források egymástól mért távolsága kicsi, az ernyő a forrásoktól távol van, és az interferenciát csak az O centrum közelében vizsgáljuk.

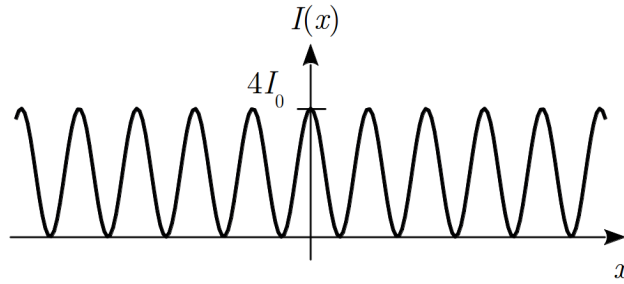
Az $r_1 - r_2 \approx a \sin \vartheta$ összefüggést felhasználva az intenzitás szögfüggése az

$$I = 2I_0 (1 + \cos(kr_1 - kr_2)) = 2I_0 (1 + \cos(ka \sin \vartheta)) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a \sin \vartheta}{\lambda} \right) \right) \quad (10.30)$$

alakba írható.

Ez tovább egyszerűsíthető, ha felhasználjuk az $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ trigonometriai összefüggést:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda} \right). \quad (10.31)$$



10.8. ábra. Az interferenciakép intenzitása a hely függvényében

Az $x \approx \frac{r_1 - r_2}{a} D \approx D \sin \vartheta$ összefüggés segítségével az intenzitás helyfüggésére is kaphatunk egy egyszerűbb kifejezést:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a}{D\lambda} x \right). \quad (10.32)$$

Az intenzitás tehát az ernyőn periodikusan változik, maximális értéke az összetevő hullámok intenzitásának 4-szerese (10.8. ábra).

Ha egyszínű fényt alkalmazunk, akkor az interferenciaképen látható világos csíkok Δx távolságát megmérve, meghatározható a fény hullámhossza. Erre a

$$\Delta x = x_{n+1}^{\max} - x_n^{\max} = \frac{\lambda D}{a} \quad (10.33)$$

összefüggés ad lehetőséget, amiből a hullámhosszra azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{a \Delta x}{D}. \quad (10.34)$$

Ismerve a források egymástól mért a távolságát és az ernyőnek a forrásoktól mért D távolságát, a Δx csíktávolság mérésével a hullámhossz meghatározható.

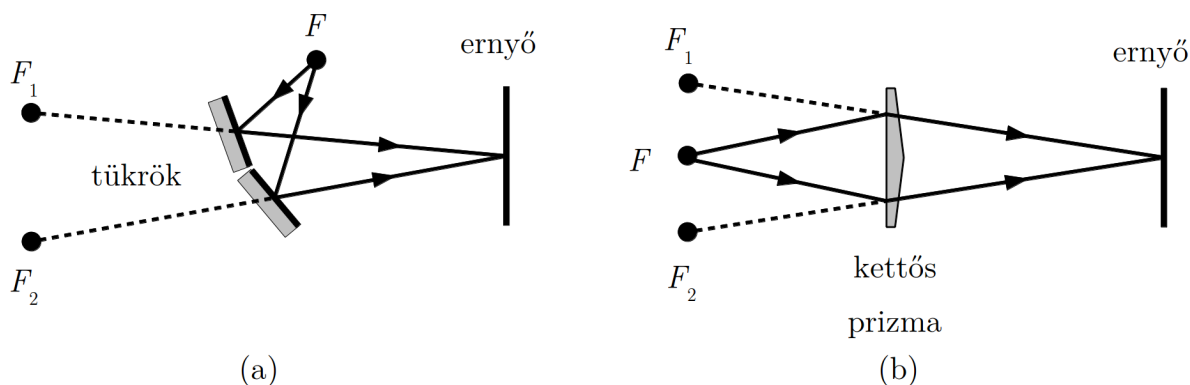
10.2.2. A Fresnel-féle kettős prizma és kettős tükör

A hullámfront kettéosztása a Young-féle kísérlettel eltérő módszerekkel is megvalósítható. Erre a célra Fresnel⁶ kettős tükröt illetve kettős prizmat alkalmazott.

A 10.9. (a) ábrán az F forrásból jövő fény hullámfronjának két része kissé eltérő helyzetű tükrökről (*Fresnel-féle kettős tükör*) visszaverődve jut az ernyőre, és ott olyan interferenciát hoz létre, mint az F_1 és F_2 virtuális fényforrásokból kiinduló koherens hullámok.

⁶Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) francia fizikus

Ugyanezt a hatást lehet elérni a *Fresnel-féle kettős prizma*val (10.9. (b) ábra), ahol a hullámfront két része két ellenkező irányú törést okozó prizmán halad át. Az interferencia itt is az F_1 és F_2 virtuális fényforrásokból kiinduló koherens hullámok interferenciájaként fogható fel.



10.9. ábra. A Fresnel féle kettős tükör (a) és kettős prizma (b)

10.2.3. A Lloyd⁷-féle egytükörös elrendezés

A hullámfront kettéosztása egyetlen tükörrel is megvalósítható. Ilyen egytükörös interferenciakísérlet vázlatát mutatja a 10.10. ábra, ahol az F_1 fényforrásból jövő fény hullámfrontjának egyik része közvetlenül az ernyőre jut, a másik része viszont egy tükörrel visszaverődve éri el az ernyőt. A létrejött interferencia a valódi F_1 - és az ábrán F_2 -vel jelölt virtuális fényforrásból jövő koherens fényhullámok interferenciájaként fogható fel.

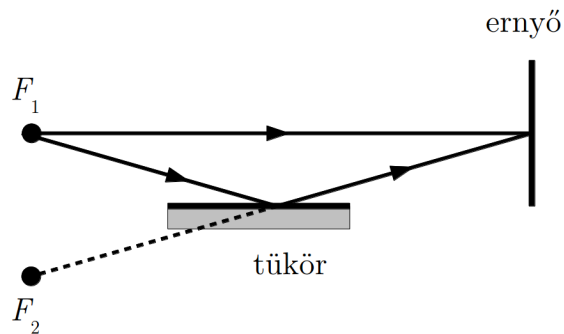
10.2.4. Interferencia az amplitúdó kettéosztásával, a Michelson-interferométer

A fényhullám amplitúdójának (intenzitásának) kettéosztását felhasználó interferenciaberendezések közül talán a leggyakrabban használt – és a relativitáselmélet kapcsán legnagyobb ismertségre szert tett – eszköz a Michelson⁸-féle interferométer, amelynek vázlatos elrendezése a 10.11. ábrán látható.

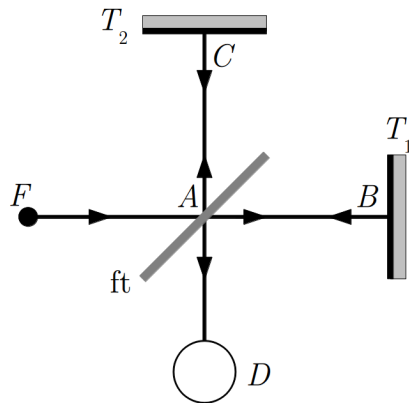
Az F fényforrásból kiinduló fény az A pontban eléri a fénysugár irányával 45° szöget bezáró ft féligáteresztő tükört.

⁷Humphrey Lloyd (1800–1881) ír fizikus

⁸Albert Abraham MICHELSON (1852–1931) Nobel-díjas (1907) amerikai fizikus.



10.10. ábra. A Lloyd féle egytükörös elrendezés



10.11. ábra. A Michelson interferométer

A tükör a fényintenzitás egy részét átengedi, és ez a rész a T_1 tükörről visszaverődve visszaér az A pontba, majd egy része az ft tükörön visszaverődve a detektáló eszközbe (D) jut.

A fényintenzitás másik részét az ft tükör az eredeti fénysugárra merőleges irányban visszaveri, így az a T_2 tükörre kerül. Onnan visszaverődik, és egy része az ft tükörön áthaladva a detektáló eszközbe jut.

Vagyis az A pontig közös fényintenzitás egy része az $ABAD$ utat befutva-, a másik része az $ACAD$ utat befutva jut a detektorba, ahol interferencia jön létre. A találkozó hullámok koherensek, hiszen ugyanannak a hullámnak két részéről van szó.

Az interferencia eredménye – a korábban megállapított szabálynak megfelelően – az $ABAD$ és $ACAD$ utak különbségétől függ. A detektálásra valamilyen optikai leképező eszközt (pl. távcsövet) használnak, amelynek látóterében az interferencia következtében

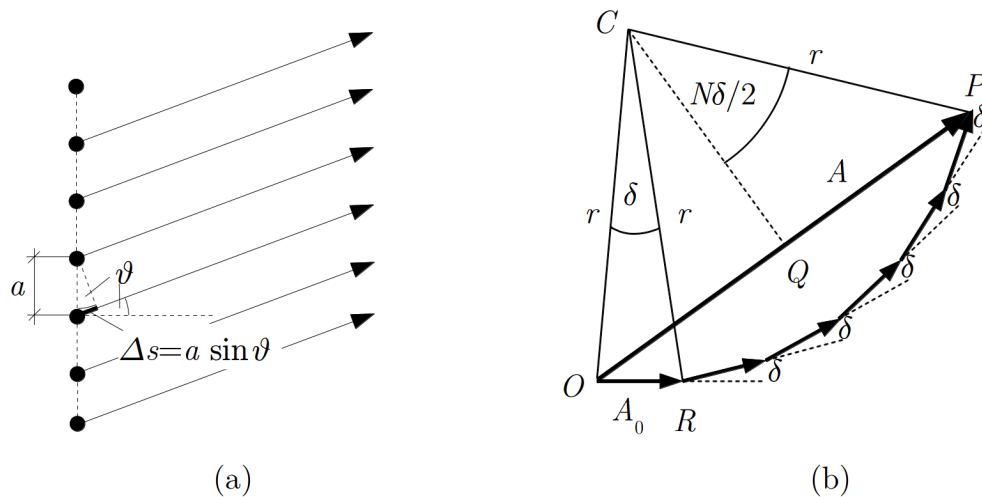
sötét és világos csíkok jelennek meg⁹. Ha az egyik tükört önmagával párhuzamosan elmozdítjuk, akkor a csíkrendszer eltolódik: a tükörnek minden $\lambda/4$ -nyi eltolódásakor a hullámok útkülönbsége $\lambda/2$ -vel változik meg, tehát a világos és sötét csíkok helyet cserélnék. Ez úgy is megfogalmazható, hogy a csíkrendszer $\lambda/2$ -vel eltolódik.

A Michelson-interferométer gyakran alkalmazott mérőeszköz: az egyik tükör ismert elmozdításával az alkalmazott fény hullámhossza, ismert hullámhossz esetén pedig a csíkrendszer változásából a tükör (illetve a tükört tartó test felületének) elmozdulása határozható meg, igen nagy pontossággal.

10.2.5. Többsugaras interferencia egyenes mentén elhelyezett pontforrások esetén

Ha pontszerű hullámforrások interferenciájának eredményét keressük, akkor az egyes forrásokból érkező hullámok hullámfüggvényeit kell összegeznünk. Láttuk, hogy az összegzés viszonylag könnyen végrehajtható a forgóvektoros módszerrel, ahol a hullámfüggvény időfüggését az egyenletesen körbeforgatott amplitúdó-vektornak egy koordinátatengelyre vett vetülete adja meg.

Több pontforrás esetén az egyes amplitúdóvektorokat a fáziseltolódásuk figyelembe vételével kell összeadni.



10.12. ábra. A sokréses interferencia vázlata (a) és az elemi amplitúdóvektorok fázishelyes összeadása (b)

⁹ Annak oka, hogy az ernyőn nem homogén megvilágítást látunk az, hogy a fény-nyalábok véges átmérőjűek, és a T_1 , T_2 tükrök a rajz síkjára nem pontosan merőlegesek.

Vizsgáljuk meg részletesebben azt az esetet, amikor sok pontforrás egy egyenesen helyezkedik el, egymástól azonos a távolságra (10.12. (a) ábra), és az interferenciát a pontsorral párhuzamos, attól nagyon távol elhelyezett ernyőn észleljük. Emiatt az ernyő egy adott helye felé haladó hullámok terjedési irányát megadó sugarak gyakorlatilag párhuzamosak.

A ϑ szöggel meghatározott irányban az egyes hullámok között azonos $\Delta s = a \sin \vartheta$ útkülönbség van, amiből $\delta = k\Delta s = ka \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \vartheta$ fáziskülönbség adódik.

Az azonos fáziskülönbség figyelembe vételével rajzoltuk fel az eredő hullám A amplitúdóját a 10.12 (b) ábrán. Mivel azonos forrásokról van szó, az egyes hullámok A_0 amplitúdója azonos, tehát az ábrán azonos hosszúságú vektorok δ szögeltéréssel következnek egymás után.

Ha az összes források száma N , akkor az ábra jelöléseivel

$$A = OP = 2QP = 2r \sin \left(N \frac{\delta}{2} \right). \quad (10.35)$$

Másrészt a COR egyenlőszárú háromszögből azt kapjuk, hogy

$$\frac{A_0}{2} = r \sin \left(\frac{\delta}{2} \right). \quad (10.36)$$

Ha a két egyenletből kiküszöböljük r -t, akkor azt kapjuk, hogy

$$A = A_0 \frac{\sin \left(N \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \frac{\delta}{2}} = A_0 \frac{\sin \left(N \frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)}. \quad (10.37)$$

Az intenzitás pedig

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \left(N \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\delta}{2} \right)} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \left(N \frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)} \right)^2. \quad (10.38)$$

Itt I_0 az egyes források intenzitása.

Az intenzitás irányfüggését a fenti kifejezés elemzésével lehet megkapni.

A pontsorra merőleges irányban, ahol $\vartheta = 0$, az amplitúdóvektorokat egy egyenes mentén kell felmérnünk, így $A = NA_0$. Ez azt jelenti, hogy ebben az irányban az amplitúdók összeadódnak, vagyis maximális intenzitás jön létre, amelynek értéke $I = N^2 I_0$.

Más irányokban kialakuló maximumok és minimumok első közelítésben a $\frac{\sin Nx}{\sin x}$ függvény vizsgálatával határozhatók meg. Ennek során (deriválás, L'Hospital-szabály) kiderül, hogy a függvénynek maximuma van az $x = n\pi$ értékeknél (n egész szám), és a maximum értéke N . Ez az intenzitás kifejezésére nézve azt jelenti, hogy a maximumhelyeket az

$$n\pi = \frac{\delta_n}{2} = \frac{\pi a \sin \vartheta_n}{\lambda} \quad (10.39)$$

összefüggés határozza meg. Ebből rendezéssel az

$$a \sin \vartheta_n = n\lambda \quad (10.40)$$

feltételt kapjuk.

A maximális intenzitásértékekre ebből ugyanazt kapjuk, mint a $\vartheta = 0$ esetben:

$$I = N^2 I_0. \quad (10.41)$$

Az intenzitás tehát minden ilyen maximumhelyen a lehetséges legnagyobb értéket vesz fel. Ezeket a maximumokat *főmaximumoknak* nevezik, mert kiderült (ld. alább), hogy az intenzitáseloszlásnak további, kisebb maximumai is vannak.

A főmaximumokat megadó eredmény könnyen megérthető, ha meggondoljuk, hogy a $\delta_n = n2\pi$ esetben az összetevő hullámok amplitúdóvektorai párhuzamosak egymással, tehát $A = NA_0$ és $I = N^2 I_0$.

Az intenzitásfüggvényt tovább vizsgálva, kiderül, hogy a fent megállapított főmaximum-helyeken kívül továbbiak is vannak. Biztosan lehet tudni, hogy az intenzitás nulla, ha $\frac{N\delta}{2} = n'\pi$ (n' egész szám, kivéve a 0, N , $2N \dots$ értékeket, amelyek főmaximumoknak felelnek meg). Ebből következik, hogy kioltás van minden olyan ϑ'_n irányban, amelyre fennáll, hogy

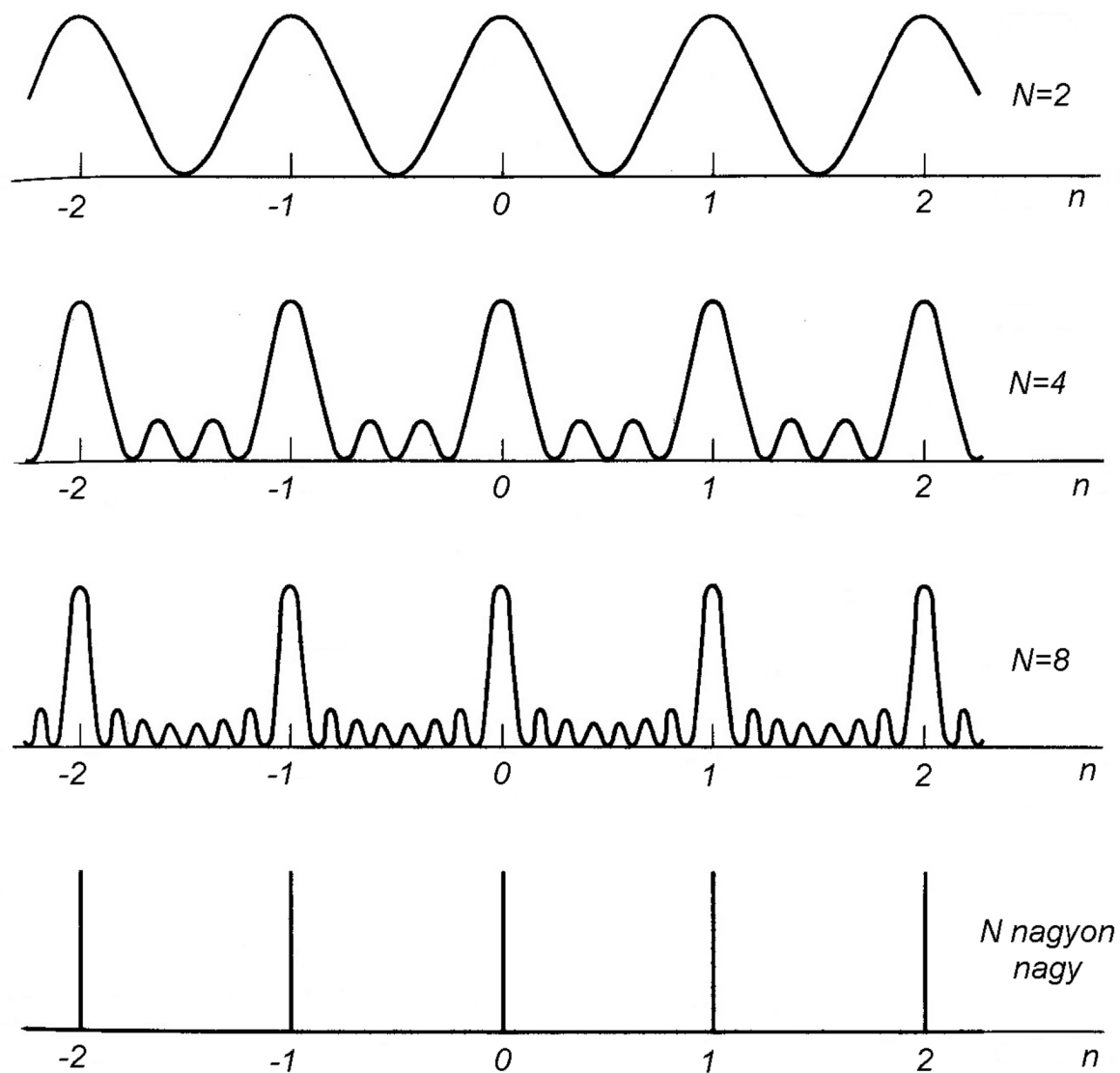
$$a \sin \vartheta'_n = \frac{n'}{N} \lambda. \quad (10.42)$$

Ezek között a minimumhelyek között maximumoknak kell lenni. Könnyen belátható, hogy adott N forrásszám esetén két főmaximum között $N - 1$ számú minimum, és $N - 2$ számú mellékmaximum található. (Pl. $N = 4$ esetén az $n = 0$ és $n = 1$ főmaximumok között a lehetséges minimumhelyek az $n' = 1, 2$ és 3 értékeknél vannak, a három minimum között $N - 2 = 2$ mellékmaximum található. Az $n' = 4$ eset már az $n = \frac{n'}{N} = \frac{4}{4} = 1$ főmaximummal azonos.)

Kimutatható, hogy a mellékmaximumok lényegesen kisebbek, mint a főmaximumok, és nagyságuk a források N számának növekedésével csökken. igen nagy N esetén a mellékmaximumok gyakorlatilag eltűnnek, a főmaximumok pedig nagyon keskeny (vonal-szerűvé) válnak. Az intenzitást az irányt jellemző $n = \frac{a \sin \vartheta_n}{\lambda}$ mennyiség függvényében a **10.13** ábra mutatja, különböző N forrásszámok esetén.

Az intenzításra kapott általános összefüggésből megkapható a korábban tárgyalt speciális eset is, ahol két forrást vizsgáltunk. Ha az általános tárgyalás $N = 2$ esetét vizsgáljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = I_0 \left(\frac{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (10.43)$$



10.13. ábra. A sokrésees interferencia intenzitáseloszlása távoli ernyőn (N = rések száma)

Behelyettesítve az ott használt közelítő $\delta = k\Delta s = \frac{kax}{D}$ értéket, végül a korábbi eredményt kapjuk:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a}{D\lambda} x \right). \quad (10.44)$$

10.3. Fényelhajlás (diffrakció)

Mint minden hullámnál, a fény esetében is megfigyelhető az a jelenség, hogy a hullámhosszal összemérhető akadályok és rések vagy élek mentén haladva a hullámterjedés nem egyenes vonalú, a hullám behatol az egyenes vonalú terjedésnek megfelelő árnyéktérbe. A fény esetén az elhajlás nagyon fontos szerepet játszik, meghatározza vagy alapvetően befolyásolja számos optikai eszköz működését, és emellett látványos optikai jelenségeket produkál. Itt csupán néhány alapvető jelenséggel foglalkozunk, és megismerkedünk néhány módszerrel, amely alkalmas a fényelhajlás tárgyalására.

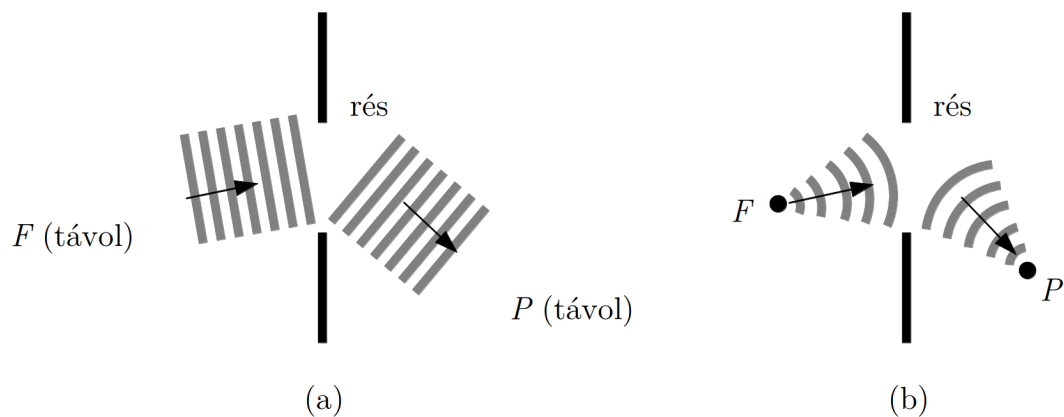
A kurzus keretein belül a fényelhajlás legegyszerűbben tárgyalható esetét, a Fraunhofer diffrakciót vizsgáljuk meg részletesebben, de megjegyzendő hogy az elhajlás pontos számítása a geometriától és a hullámhossztól függően ennél sokkal bonyolultabb is lehet:

- A legegyszerűbb esetben az akadályhoz vagy réshez érkező- és az onnan távozó, elhajlást szenvedett hullám gyakorlatilag síkhullám (10.14. (a) ábra). A fényelhajlásnak ezt az esetét *Fraunhofer-elhajlásnak*¹⁰ vagy *Fraunhofer-diffrakciónak* nevezik. Közelítőleg ilyennek tekinthető a fényelhajlás, ha a hullám nagyon távoli forrásból (F) érkezik a réshez vagy akadályhoz, és a megfigyelési pont (P) is nagyon távol van tőle.
- Ha fényforrás (F) vagy a megfigyelési hely (P) olyan közel van a réshez vagy akadályhoz, hogy a beérkező- vagy a megfigyelő irányába távozó fényhullám nem tekinthető síkhullámnak (10.14. (b) ábra), de a rés a forrásokból és a megfigyelési pontokból szemlélve kis szög alatt látszik ($< 30^\circ$) használhatjuk a *skalár-diffrakció* elméleteket. Ekkor a hullámfrontot lényegében a Huygens¹¹-Fresnel elv alapján elemi gömbhullámok térerősségének fázis- és amplitúdó-helyes összegzésével (interferenciájával) állíthatjuk elő. A skalár-diffrakció számításánál az elemi gömbhullámok hullámfrontját másodrendig sorbafejtve (parabolikus közelítéssel) kapjuk a Fresnel-féle leírást. Az ilyen fényelhajlást *Fresnel-elhajlásnak* vagy *Fresnel-diffrakciónak* nevezik.
- Nagy látószögekre ($> 30^\circ$), illetve rés közvetlen közelében a diffrakció csak a Maxwell egyenletek és az apertúrán érvényes peremfeltételek részletes vizsgálatával tárgyalható, ahol az EM hullám transzverzális tulajdonságait is figyelembe vehetjük. Ez az ún. *vektor-diffrakció* elmélet, amelynek egzakt számítása bonyolultabb geometriákra ma is komoly kutatások tárgya.

A valóságban az elhajlásjelenségek nem mindig sorolhatók egyszerűen valamelyik csoportba, és a pontossági igények döntenek el, hogy használhatók-e az egyszerűbb Fraunhofer-diffrakcióra vonatkozó összefüggések, vagy a jelenséget Fresnel-diffrakciónak kell tárgyalni.

¹⁰ Joseph FRAUNHOFER (1787-1826) német fizikus

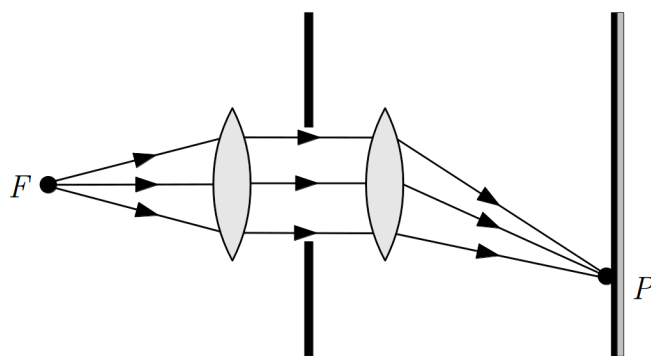
¹¹ Christiaan Huygens (1629 – 1695) holland fizikus



10.14. ábra. A Fraunhofer- (a) illetve Fresnel-diffrakció (b)

Itt részletesebben csak a Fraunhofer-diffrakció néhány fontosabb esetét tárgyaljuk.

A gyakorlatban az elhajlásnak ez az esete úgy valósítható meg, hogy egy pontszerű fényforrásból (F) érkező fényt gyűjtőlencsével párhuzamos nyalábbá (síkhullámmá) alakítunk, majd az elhajlás után a párhuzamos nyalábokat egy másik lencsével összegyűjtjük (10.15. ábra). Így biztosítható, hogy az elhajlásban síkhullámok vegyenek részt.



10.15. ábra. Fraunhofer-diffrakció tipikus kísérleti elrendezése

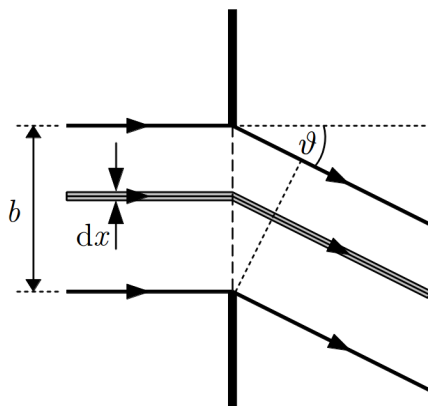
10.3.1. Fraunhofer-diffrakció hosszú, keskeny résen

Első példaként egy keskeny résen áthaladó hullám elhajlását vizsgáljuk meg a Huygens–Fresnel-elv alkalmazásával. A réshez érkező hullámfront minden pontját elemi gömbhullámok

forrásaként fogjuk fel, és az elhajlási képet ezeknek a hullámoknak az interferenciájából számítjuk ki. Feltételezzük, hogy a résre síkhullám esik, és az interferencia eredményét a réstől nagyon távoli pontokban szemléljük (vagy a diffraktált sugarakat lencsével összegyűjtjük). Mivel a rés hosszú, a résre merőlegesen minden síkban ugyanaz történik, tehát elég a hullámfrontnak egy, a résre merőleges metszetét (ami egy egyenes) vizsgálni.

A számítást az nehezíti, hogy a réshez érkező hullámfront minden pontja hullámforrás, így az elhajlás számításához végtelen sok koherens pontforrás interferenciáját kell figyelembe venni. Ezt a problémát úgy oldhatjuk meg, hogy a résen áthaladó fénynyalábot nagyon keskeny sávokra osztjuk, az egyes sávokat tekintjük pontforrásnak, és ezek hatását összegezzük. Így a problémát visszavezethetjük a pontforrás-sorból jövő hullámok interferenciájára.

A 10.16. ábrán a résre merőleges síkmetszetet látunk, ahol feltüntetettünk egy ilyen elemi, dx szélességű sávot is.



10.16. ábra. Fraunhofer-diffrakció hosszú keskeny résen

Egymástól a távolságra lévő pontforrások esetén az eredő amplitúdóra azt kaptuk, hogy

$$A = A_0 \frac{\sin \left(N \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad (10.45)$$

ahol $\delta = ((2\pi a)/(\lambda)) \sin \vartheta$.

Ha csak kis szögeltérítéseket vizsgálunk, akkor használhatjuk a $\sin(\delta/2) \approx \delta/2$ közelítést, amivel az amplitúdó így alakul

$$A = 2A_0 \frac{\sin \left(N \frac{\delta}{2} \right)}{\delta} = 2A_0 \frac{\sin \left(N \frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta}. \quad (10.46)$$

A kis szögeltérítés gyakorlatilag teljesül, mert a megfigyelési pont távol van, és közönséges fényforrásoknál a diffrakciós kép egyébként is csak keskeny szögtartományban figyelhető meg.

A résre alkalmazott modellben a pontforrásokat helyettesítő elemi sávok középpontjai egymástól dx távolságra vannak, vagyis az $a \Rightarrow dx$ helyettesítéssel élhetünk. Az elemi források számát a b/dx hányados adja meg tehát N helyettesítésére írhatjuk, hogy $N \Rightarrow b/dx$. Az elemi források amplitúdóját arányosnak tekinthetjük a szélességükkel, tehát a b szélességű résnél létrejött teljes A_t amplitúdóból a források amplitúdóját az $(A_t/b) dx$ összefüggéssel számíthatjuk ki. Így alkalmazhatjuk az $A_0 \Rightarrow (A_t/b) dx$ helyettesítést.

A fenti helyettesítésekkel az amplitúdóra azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{A_t}{b} dx \frac{\sin\left(\frac{b}{dx} \frac{\pi dx}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\frac{\pi dx}{\lambda} \sin \vartheta} = A_t \frac{\sin\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta}. \quad (10.47)$$

Az intenzitás ebből négyzetre emeléssel kapható:

$$I = A_t^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta\right)} \right]^2 = A_t^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad (10.48)$$

ahol $u = (b\pi/\lambda) \sin \vartheta$.

Tudjuk, hogy a $\vartheta = 0$ szögnél a hullámok erősítik egymást (nincs útkülönbség), ezért ott maximális intenzitás (I_{\max}) jön létre. Mivel a $\vartheta \rightarrow 0$ esetben $u \rightarrow 0$, az intenzitás kifejezéséből látszik, hogy

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} I(\vartheta) = \lim_{u \rightarrow 0} A_t^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = A_t^2 = I_{\max}. \quad (10.49)$$

Ezzel a jelöléssel az intenzitás:

$$I = I_{\max} \frac{\sin^2\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta\right)^2}. \quad (10.50)$$

Az elhajlási kép jellegzetességeit az

$$I = I_{\max} \frac{\sin^2 u}{u^2} = I_{\max} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad (10.51)$$

függvény vizsgálatából kaphatjuk meg (itt $u = \frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta$).

Eszerint az intenzitás nulla az $u = n'\pi$ helyeken (n' egész szám), kivéve az $n' = 0$ esetet, hiszen ekkor $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ miatt maximális az intenzitás. Ez azt jelenti, hogy az intenzitás azokban az irányokban nulla, amelyekre fennáll, hogy

$$u = \frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta_{n'} = n'\pi, \quad (10.52)$$

azaz

$$b \sin \vartheta_{n'} = n' \lambda \quad (n' = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.53)$$

A maximumhelyek a minimumok között helyezkednek el, pontos helyüket a

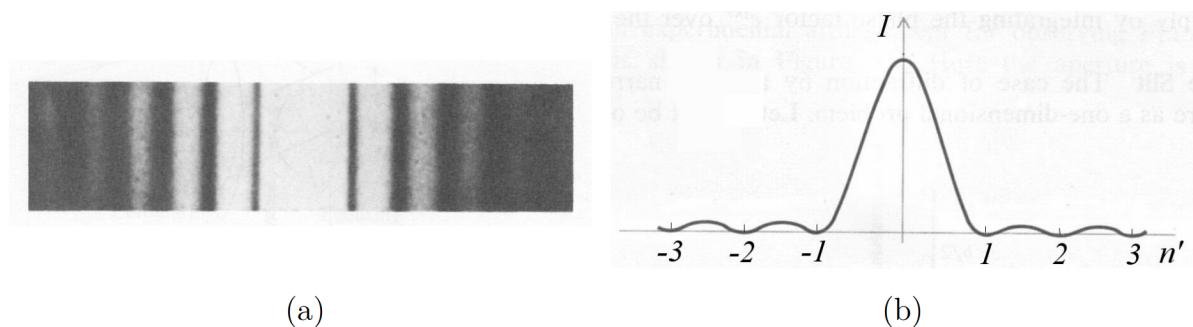
$$\frac{dI(u)}{du} = 0 \quad (10.54)$$

egyenletből határozhatjuk meg, ami a

$$\operatorname{tg} u = u \quad (10.55)$$

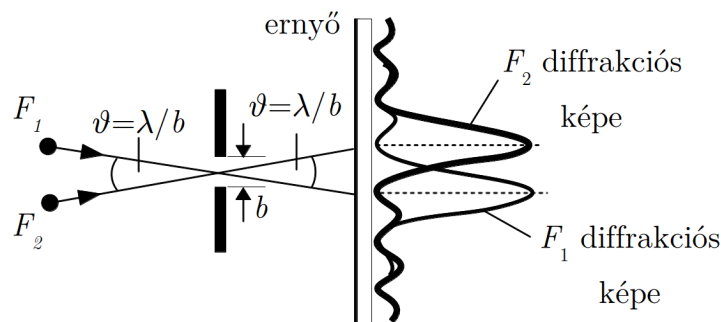
transzcendens egyenlethez vezet. Ennek megoldásával nem foglalkozunk, annyi azonban így is látszik, hogy a növekvő u (növekvő ϑ) értékekhez tartozó maximumok magassága egyre kisebb és kisebb, mert az intenzitásra fennáll, hogy $I \sim 1/u$. Ezeket a csökkenő magasságú maximumokat szemlélteti a 10.17. (b) ábra az $n' = b \sin \vartheta_{n'}/\lambda$ függvényében. A tapasztalat igazolja ezt az eredményt: ha egy keskeny, hosszú résen áthaladt fény diffrakciós képét ernyőre kivetítjük, akkor középen erős világos csíkot, ennek két oldalán pedig egymástól sötét csíkkal elválasztott, egyre halványabb világos csíkokat látunk (10.17. (a) ábra).

Érdekes megvizsgálni azt az esetet, amikor $\lambda \ll b$. Ekkor a főmaximum két oldalán látható első minimumok irányára jó közelítéssel érvényes, hogy $\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1 = \pm \lambda/b$. Ennek felhasználásával a résnek egy fontos optikai jellemzőjét lehet meghatározni.



10.17. ábra. Hosszú keskeny rés elhajlási képe (a) és az elhajlási kép intenzitása a hely függvényében (b)

Ha egy résen két távoli F_1 és F_2 forrásból (pl. egy távoli tárgy két pontjából) érkező fény halad át, akkor mindkettő elhajlási képet hoz létre (10.18. ábra). A két elhajlási kép általában egymásra rakódik, és a kérdés az, hogy milyen feltételek mellett tudjuk megkülönböztetni egymástól a két képet. A megkülönböztetés annál könnyebb, minél távolabb vannak egymástól az elhajlási képek maximumai.



10.18. ábra. Két közeli fényforrás elhajlási képe, Rayleigh-kritérium

A megfigyelhetőséghez szükséges minimális távolságot adja meg a *Rayleigh-kritérium*¹²: a két kép akkor különböztethető meg egymástól, ha a két maximum távolsága legalább annyi, hogy az egyik elhajlási kép maximuma a másiknak az első minimumával esik egybe (10.18. ábra). Mivel egy b szélességű résnél az első minimum iránya a fentiek szerint $\vartheta_1 \approx \lambda/b$, két távoli pont képe akkor különböztethető meg egymástól, ha a résre érkező sugarak szöge nagyobb, mint

$$\vartheta \approx \frac{\lambda}{b}. \quad (10.56)$$

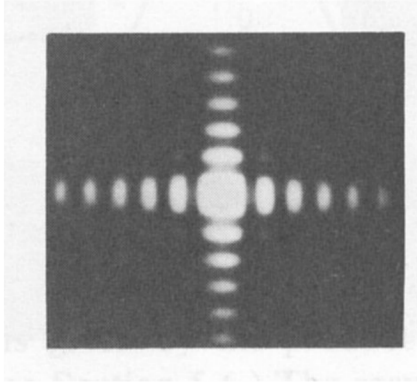
Ezt a mennyiséget a *rés felbontóképességének* nevezik.

A felbontóképességnek komoly szerepe van az – általában nyílásokat tartalmazó – optikai eszközöknél. Így pl. egy mikroszkópban a vizsgált tárgynak csak olyan pontjai különböztethetők meg, amelyekre teljesül a Rayleigh-kritérium. Vagyis az lencserendszer geometriai nagyítását egy bizonyos határon túl hiába növeljük, az eszköz legkisebb nyílásán (vagy apertúráján) történő diffrakció határt szab felbontóképességnek, azaz annak, hogy milyen részleteket tudunk megfigyelni (a nagyítás ezen a határon túl "üres nagyítás" lesz).

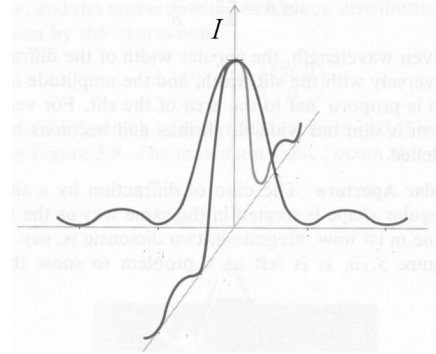
Ha hosszú, keskeny rés helyett egymással összemérhető a és b oldalhosszúságú, téglalap alakú nyílás elhajlási képét vizsgáljuk, akkor a számítások és a tapasztalat is azt mutatja, hogy két egymásra merőleges elhajlási kép keletkezik, amelyek mindegyike hasonlít a rés elhajlási képéhez. A 10.19. ábrán egy ernyőre vetített elhajlási kép és az intenzitáseloszlás jellege látható.

A legtöbb klasszikus optikai műszer (pl. távcső, mikroszkóp, stb.) kör alakú nyílást tartalmaz. A kör apertúra elhajlási képe megtartja a körszimmetriát, egy központi csúcsból (Airy korong) és kifelé gyengülő koncentrikus gyűrűkből áll (10.20. ábra). Az intenzitáseloszlást a sugár függvényében az elsőfajú elsőrendű Bessel-függvény írja le,

¹² Lord John William Strutt RAYLEIGH (1842-1919) Nobel-díjas (1904) angol fizikus.

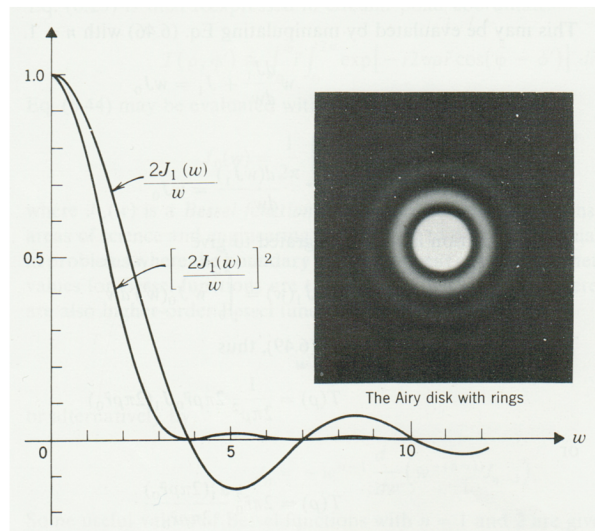


(a)



(b)

10.19. ábra. Téglalap alakú rés elhajlási képe (a) és a kép intenzitása a hely függvényében (b)



10.20. ábra. Kör alakú nyílás elhajlási képe (Airy ábra) és a kép intenzitása a sugár függvényében

melynek első nullhelyére (azaz az első fekete gyűrű sugarára) a következő összefüggés áll fenn:

$$\vartheta_0 \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (10.57)$$

ahol D a körapertúra átmérője. Kör alakú nyílást tartalmazó optikai eszközök esetén a Rayleigh-féle felbontási kritérium ennek megfelelően módosul.

10.3.2. Fraunhofer-diffrakció több résen, a diffrakciós rács

Elvi és gyakorlati szempontból is érdekes, hogy mi történik, ha a hullám egy síkba eső, egymástól azonos távolságban lévő, párhuzamos rések sorozatán halad át. Az ilyen rés-sorozatot általában *rácsnak* nevezik, fénycsugarak esetén *optikai rács* elnevezés használatos.

Ha a rések hosszúak, akkor a résekkel párhuzamosan haladva mindenütt ugyanazt az intenzitást találjuk, ezért elég az elrendezésnek a résekre merőleges síkmetszetét vizsgálni. A rések szélessége b , a rések azonos helyzetű pontjainak egymástól mért távolsága a , amit *rácsállandónak* neveznek.

Ha a rések vonalszerűek lennének, akkor ez a síkmetszet pontforrásoknak felelne meg, így a 10.2.5 fejezetben tárgyalt interferenciakép jönne létre. Mivel azonban a valódi rések mindig véges szélességűek, síkmetszetük nem tekinthető egyetlen pontforrásnak, hiszen a véges méretű rések minden pontja elemi hullámok forrásaként működik. Az eredő intenzitáseloszlást a résekből kiinduló elemi hullámok interferenciája adja meg.

Szerencsére az eddig tárgyalt esetek segítségével az intenzitáseloszlás egyszerűen meghatározható. Kimutatható ugyanis (a bizonyítással itt nem foglalkozunk), hogy több résen bekövetkező fényelhajlás a résekkel azonos számú (a 10.12 ábrán N) *pontszerű* forrásból jövő fény interferenciájából származó intenzitásnak (I_{Npont}) és *egyetlen résen* keletkező elhajlási kép intenzitásának ($I_{\text{rés}}$) ismeretében egyszerűen megkapható. A részletes számítások szerint a két résen áthaladt fény I intenzitására a fenti két intenzitásból egy

$$I \sim I_{\text{Npont}} \cdot I_{\text{rés}} \quad (10.58)$$

alakú kifejezést kapunk.

N darab egymástól a távolságban lévő pontforrásból jövő fény interferenciáját már vizsgáltuk, és megállapítottuk, hogy az intenzitáseloszlást az

$$I_{\text{Npont}} = I_{0p} \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)} \quad (10.59)$$

összefüggés adja meg.

Az egyetlen rés diffrakciós képének intenzitáseloszlására azt kaptuk, hogy

$$I_{\text{rés}} = I_{\text{max}} \frac{\sin^2 \left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta \right)^2}. \quad (10.60)$$

Ennek megfelelően a rács mögött kialakuló intenzitáseloszlást az

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \vartheta \right)^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta \right)} \quad (10.61)$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Ez az összefüggés úgy fogható fel, hogy az N pontforrás interferenciájából adódó azonos magasságú maximumok sorozatát (a kifejezés második tényezője) *modulálja* a rés diffrakciójából származó – a szélek felé csökkenő magasságú maximumokat tartalmazó – eloszlás (az első tényező).

A főmaximumok irányát most is az N pontforrásra érvényes

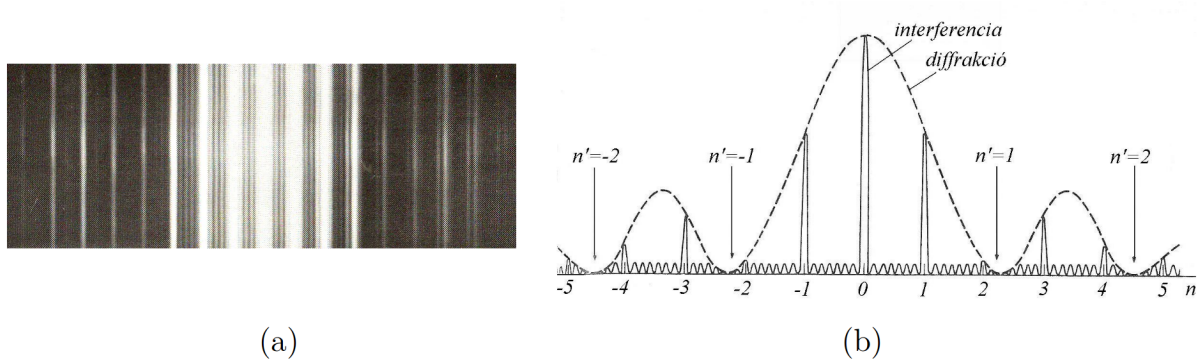
$$a \sin \vartheta_n = n\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (10.62)$$

egyenletből kaphatjuk meg, a moduláló rés-intenzitáseloszlásának nullhelyei pedig a

$$b \sin \vartheta_{n'} = n'\lambda \quad (n' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (10.63)$$

összefüggésnek megfelelő irányokban helyezkednek el.

A 10.21. ábra a rács diffrakciós képét és az annak megfelelő intenzitáseloszlást mutatja.



10.21. ábra. Diffrakciós rács elhajlási képe (a) és a kép intenzitása a hely függvényében (b)

A pontforrások interferenciájának megfelelő maximumok a vízszintes tengelyen feltüntetett $n = a \sin \vartheta_n / \lambda$ számoknál láthatók, a rés diffrakciójából származó nulla intenzitású

helyeket pedig az $n' = b \sin \vartheta_n / \lambda$ számok jelölik. Látható, hogy a pontforrásoknál kapott azonos magasságú, egyenletesen elhelyezkedő főmaximumok helyett – a rés-diffrakció moduláló hatása miatt – csökkenő magasságú főmaximumok jelennek meg. A kísérletről készült video megtekinthető a Fizipédia weboldalán:

(http://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:11_optika.ogv).

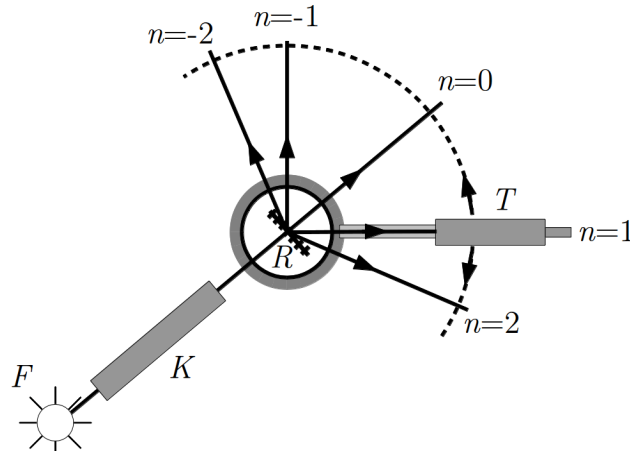
Eddig olyan rácsról beszéltünk, amelynek résein a fényhullám áthalad. Az ilyen rácsot *transzmissziós (áteresztő) rácsnak* nevezik. Lehet azonban olyan rácsot is készíteni, amely keskeny, párhuzamos tükröző sávokból és a közöttük elhelyezkedő nem tükröző részekből áll. Ilyenkor *reflexiós (tükröző) rácsot* kapunk, amelynél a tükröző sávokról visszaverődő hullámok hozzájárulnak a diffrakciós képhez (a diffrakciós kép ilyenkor nem a rács mögött, hanem előtte keletkezik).

Az $a \sin \vartheta_n = n\lambda$ összefüggésből látható, hogy egy rács diffrakciós maximumainak iránya függ a hullámhossztól, vagyis ismert a rácsállandójú rács diffrakciós képéből meghatározva valamelyik főmaximum irányát ϑ_n -t, a hullámhossz meghatározható. Ha a rácsra különböző hullámhosszakat (különböző színeket) tartalmazó fényt bocsátunk, akkor a különböző hullámhosszakhoz tartozó főmaximumok különböző irányokban – vagyis az ernyőn különböző helyeken – jelennek meg, így meghatározhatók az összetevő hullámok frekvenciái, vagyis az adott fény *spektruma*. A rácsnak ezen a tulajdonságán alapul az optikában fontos szerepet játszó *rács-spektrométerek* működése. Egy transzmissziós rács-spektrométer elrendezésének vázlatát mutatja a 10.22 ábra. A vizsgálandó fény az F fényforrásból egy kollimátorba jut, amely párhuzamos sugárnyalábot állít elő. Ez a fény esik az R rácsra, ahol létrejön a diffrakció. A rendszerre bocsátott fény rendszerint az ábra síkjára merőleges résen megy át, ezért a maximumok az ábra síkjára merőleges vonalak, amelyeket egy körbeforgatható T távcsőben figyelnek meg. Az egyes n értékekhez tartozó maximumokat a diffrakció n -edik rendjének nevezik, a teljes hullámhossztartományban megfigyelhető vonalak összessége a *spektrum*.

A spektrométerekben használt optikai rácsok rácsállandójának nagyon kicsinek kell lennie, mert értékelhető diffrakciós képet csak akkor kapunk, ha a rácsállandó a hullámhosszal összemérhető. Látható fény esetén ez μm nagyságrendű rácsállandót jelent. Transzmissziós rács egy üveglemezen párhuzamos karcolásokkal hozható létre, ebben az esetben a karcolások között éppen maradt, áteresztő sávok a rések. Reflexiós rács hasonló módon készíthető tükröző fémfelület karcolásával, a diffrakciót adó részek itt is a karcolások közötti tükröző sávok.

A maximumhelyek irányát megadó $\sin \vartheta_n = n\lambda/a$ összefüggésből látszik, hogy rács esetén az eltérítés szöge annál nagyobb, minél nagyobb a hullámhossz. A rács tehát a látható fény vörös összetevőjét téríti el legjobban. A prizmas spektrométereknél, amelyek a törésmutató frekvenciafüggésén alapulnak, az eltérítés fordított, itt a vörös fény eltérítése a legkisebb.

Az optikai rács fontos jellemzője, hogy mennyire képes szétválasztani a különböző hullámhosszú hullámok diffrakciós képének főmaximumait. Ezt a $D = d\vartheta/d\lambda$ mennyiséggel jellemzik, amit a rács *diszperziójának* neveznek. Ezt a $\sin \vartheta = n\lambda/a$ összefüggés



10.22. ábra. Rácsos spektrométer vázlata

differenciálásával kaphatjuk meg:

$$\frac{d(\sin \vartheta)}{d\vartheta} = \cos \vartheta = \frac{n}{a} \frac{d\lambda}{d\vartheta}. \quad (10.64)$$

Eszerint a rács hullámhossz szétválasztó képességét jellemző diszperzió

$$D = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{n}{a \cos \vartheta}, \quad (10.65)$$

ami a diffrakció n rendjével növekszik.

10.3.3. Röntgensugarak elhajlása kristályrácsra

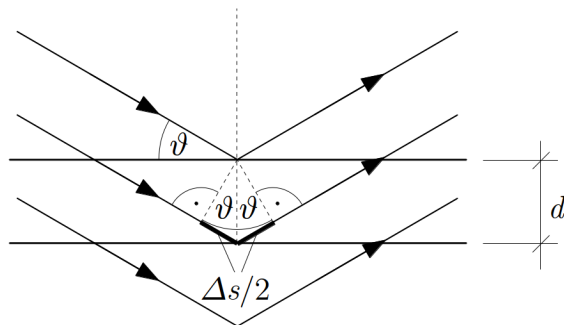
A rácsra bekövetkező hullámelhajlás speciális, az anyagok szerkezetének vizsgálatában alapvető szerepet játszó esete a röntgensugarak elhajlása kristályrácsra.

A kristályos anyagokban az atomok szabályos rendben helyezkednek el, kristályrácsot alkotnak. Ha egy kristályra elektromágneses hullámot bocsátunk, akkor a hullám számára ez a struktúra térbeli rácsot jelent, amelyen diffrakció következik be. Ahhoz, hogy a diffrakciós kép értékelhető legyen, az szükséges, hogy a hullámhossz összemérhető legyen a rácsot alkotó atomok távolságával. Mivel a kristályokban az atomtávolságok jellemzően 0,1 nanométer nagyságrendűek, ez a feltétel a röntgensugárzás tartományába eső elektromágneses hullámok esetén teljesül.

Tudjuk, hogy egy vonalszerű rács esetén a diffrakciós kép jellege (maximumok helyzete és intenzitása) függ a rácsállandótól, ezért várható, hogy a térbeli rácsra bekövetkező elhajlási kép függ a kristálybeli atomok elhelyezkedésétől. Ennek alapján a kristályon

áthaladó röntgensugárzás diffrakciós képének elemzésével lehetőség nyílik az atomok elhelyezkedésének, a kristály szerkezetének meghatározására.

A röntgensugarak elhajlása eléggé bonyolult folyamat, amely részleteiben a röntgensugarak és az atomok kölcsönhatásának vizsgálata alapján érthető meg. Az elhajlás azonban értelmezhető egy egyszerű modell segítségével is.



10.23. ábra. Röntgensugárzás elhajlása kristályrácsra: egy egyszerű modell

A modell szerint, ha egy kristályra röntgensugárzást bocsátunk, akkor az a visszaverődés szabályai szerint visszaverődik az atomok által alkotott rácssíkokról. A szomszédos, párhuzamos rácssíkokról visszavert hullámok között útkülönbség jön létre (10.23. ábra), ezért az interferencia következtében bizonyos irányokban intenzitásmaximumokat észlelünk. A hullámok akkor erősítik egymást, ha Δs útkülönbségükre fennáll, hogy $\Delta s = n\lambda$ (n egész szám). Ha a hullámterjedés iránya és a rácssík közötti szöget ϑ -val jelöljük, akkor az ábra alapján az útkülönbség

$$\frac{\Delta s}{2} = d \sin \vartheta. \quad (10.66)$$

Erősítés tehát olyan irányokban jön létre, amelyekre

$$2d \sin \vartheta_n = n\lambda, \quad (10.67)$$

ahol d a párhuzamos rácssíkok távolsága, n egész szám. Ez a röntgendiffrakciós vizsgálatok egyik alapegyenlete, amit *Bragg-egyenletnek*¹³ neveznek.

Ha a kristályra ismert λ hullámhosszú monokromatikus röntgensugárzást bocsátunk, és a maximális intenzitás ϑ irányait meghatározzuk, akkor a Bragg-egyenletből a rácssíkok d távolsága kiszámítható.

A szerkezetvizsgálat gyakorlati megvalósítására többféle eljárást dolgoztak ki.

¹³ William Henry BRAGG (1862-1942) és fia William Lawrence BRAGG (1890-1971) angol fizikusok, mindketten Nobel-díjasok (1915).

Az első ilyen vizsgálatokat *Laue*¹⁴ megfontolásait követve végezték el. A Laue-módszernél egykristályos mintára széles spektrumú röntgensugárzást bocsátottak, és a kristályon áthaladt sugárzás intenzitáseloszlását vizsgálták. A Bragg-féle feltétel így a különböző hullámhosszak és rácssík-távolságok bizonyos kombinációi esetén biztosan teljesül, és az áteresztett sugárzásban lesznek maximális intenzitású irányok. A fényképezőlemezen a maximális intenzitású irányokat szabályosan elhelyezkedő pöttyök jelzik. A kapott kép elemzéséből a kristály szerkezetére lehet következtetni. Az eljárás vázlata a 10.24. (a) ábrán látható.

A Bragg-módszernél egykristályos mintára monokromatikus röntgensugárzást bocsátanak, és a visszaverődött sugárzást vizsgálják (10.24. (b) ábra). A maximális intenzitásnak megfelelő szög megméréseével a Bragg-egyenletből a megfelelő rácssík-távolság meghatározható. Mivel a kristályban az atomokra sokféle sík fektethető, a kristály forgatásával különböző rácssík-seregek diffrakciós képeit és síktávolságait kaphatjuk meg. Különböző rácssík távolságok ismeretében a kristály szerkezete meghatározható.

Kidolgoztak olyan eljárást is, amelynél mintaként polikristályos anyag is használható. Ez a Debye¹⁵–Scherrer¹⁶-módszer. Ennél az eljárásnál a polikristályos mintán áthaladt monokromatikus röntgensugárzás intenzitáseloszlását vizsgálják. Mivel a mintában mindenféle orientációjú krisztallitok megtalálhatók, adott síksereghez tartozó Bragg-feltételt különböző helyzetű krisztallitok teljesítik (pl. 10.25. (a) ábrán látható kettő).

Emiatt ugyanazon síksereghez tartozó maximális intenzitású sugarak egy kúpfelületen helyezkednek el, és egy nagyobb méretű fotólemezen köröket alkotnak. Az egyszerűség kedvéért a nagyobb méretű fotólemez helyett gyakran csak egy köralakban meghajlított filmszalagot használnak (10.25. (b) ábra), amelyen a köröknek csak egy darabja látszik, vagyis körök helyett csíkokat látunk.

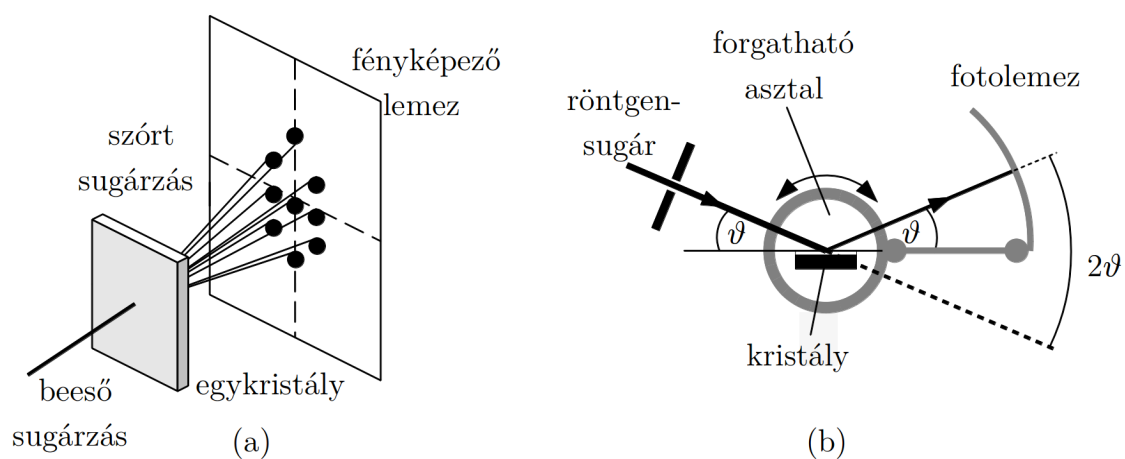
A Bragg- és a Debye–Scherrer-módszerhez elvileg monokromatikus (gyakorlatilag egy szűk hullámhossz-tartományba eső) röntgensugárzásra van szükség. Ennek előállítása szintén kristályon bekövetkező diffrakció segítségével történhet. Ha ismert ráczállandójú kristályra sokféle hullámhosszt tartalmazó röntgensugárzást bocsátunk, akkor a diffrakció következtében az egyes hullámhosszakhoz tartozó maximális intenzitások különböző irányban jelennek meg. Így az irány megválasztásával a számunkra szükséges hullámhossz kiválasztható. Az ilyen, közel monokromatikus sugárzás előállítására szolgáló eszközöket *monokromátoroknak* nevezik.

Ugyanezzel az eljárással oldható meg az a feladat is, amikor ismeretlen röntgensugárzás hullámhosszát kell meghatározni. Ilyenkor a sugárzást ismert rácssík-távolságú kristályra kell bocsátani, és meghatározni az intenzitásmaximumok irányát. Ismerve a síktávolságot és lemérve a maximális intenzitásokhoz tartozó szögeket, a sugárzás hullámhossza meghatározható. Így módunk van ismeretlen, nem monokromatikus röntgen-

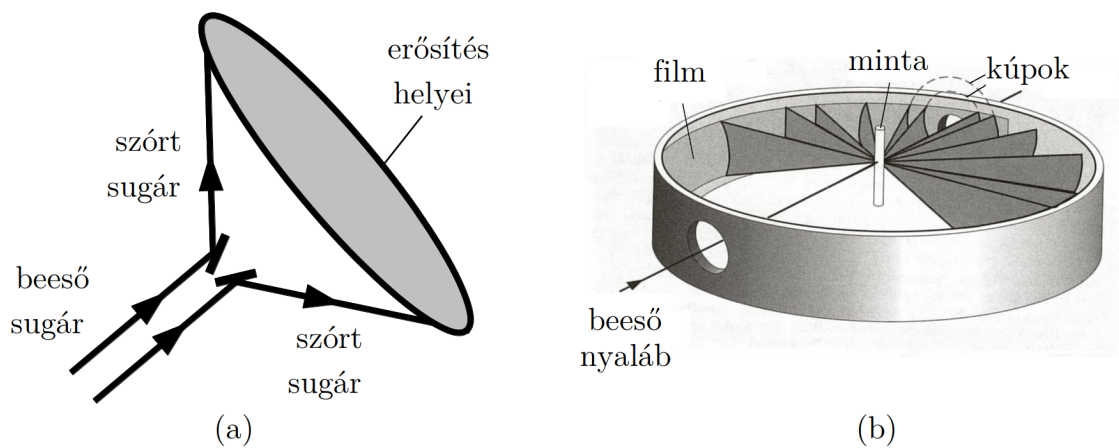
¹⁴ Max von LAUE (1879-1960) Nobel-díjas (1914) német fizikus.

¹⁵ Peter Joseph Willem DEBYE (1884-1966) Nobel-díjas (1936), holland származású, amerikai fizikokémikus.

¹⁶ Paul SCHERRER (1890-1979) svájci fizikus.



10.24. ábra. Kristályok szerkezetvizsgálatának Laue-féle (a) és Bragg-féle megvalósítása (b)



10.25. ábra. Polikristályos anyagok diffrakciója (a) és szerkezetvizsgálatának Debye-Scherrer-féle megoldása (b)

sugárzás spektrumának felvételére is. Ez a *röntgenspektrométerek* működésének alapelve.

11. fejezet

A speciális relativitáselmélet alapjai

A századforduló táján, amikor a mechanika és az elektromágnességtan alapvető törvényeit már ismerték, és a fizikát sokan „lényegében befejezett” tudománynak gondolták, olyan új tapasztalatok halmozódtak fel, amelyek fokozatosan megingatták ezt a képet. Ezek a tények a fizika több területén alapvető változásokhoz vezettek. Az egyik ilyen gyökeres, a fizika alapjait érintő szemléleti változás volt a *relativitáselmélet* megszületése.

A relativitáselmélet lényegében abból a problémából nőtt ki, hogy milyen összefüggés van a fizikai jelenségek leírására használt törvények között egymáshoz képest mozgó rendszerekben. Attól függően, hogy a tárgyalás csak inerciarendszerekre korlátozódik vagy egymáshoz képest gyorsuló rendszerekre is kiterjed, *speciális relativitáselméletről* vagy *általános relativitáselméletről* beszélünk. Most csak az inerciarendszerekre vonatkozó speciális elmélettel foglalkozunk.

11.1. A relativitás elve a klasszikus mechanikában

Egy test mozgásának leírása úgy történik, hogy annak mindenkori helyzetét egy többé-kevésbé önkényesen választott testhez, egy *vonatkoztatási rendszerhez* viszonyítva adjuk meg. A helyzet meghatározásához általában a vonatkoztatási rendszer egy pontjához rögzített *koordináta-rendszert* veszünk fel, és a test mozgását jellemző adatokat megadjuk ebben a koordináta-rendszerben.

Könnyen belátható, hogy ha ugyanazt a testet két különböző, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg, akkor a mozgását jellemző *adatok* egy részét (pl. helyvektor, sebesség, impulzus, energia) eltérőnek találjuk. Felmerül a kérdés, hogy az adatok közötti összefüggéseket megadó *fizikai törvények* is különbözőek-e a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Leegyszerűsítve: a kérdés az, hogy használhatja-e a robogó vonaton utazó megfigyelő ugyanazokat a fizikai törvényeket, amelyeket a Földhöz képest nyugvó laboratóriumban érvényesnek talált.

Foglalkozzunk egyelőre a vonatkoztatási rendszerek egy *speciális* fajtájával, amelyekben érvényes a „tehetetlenség törvénye” (Newton I. axiómája), vagyis teljesül az az állítás, hogy a magukra hagyott, más testekkel kölcsönhatásban nem álló testek mozgásállapota nem változik meg. Az ilyen rendszereket *inerciarendszereknek* nevezzük. A tapasztalat szerint egy inerciarendszerhez képest állandó sebességgel mozgó bármely másik rendszer is inerciarendszer, vagyis az inerciarendszerek egymáshoz képest állandó sebességgel mozoghatnak.

Számos tapasztalat sugallja azt, hogy a különböző inerciarendszerekből nézve a mechanikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le, és a különböző rendszerekben a mechanika törvényei azonos matematikai alakban érvényesek (természetesen csak akkor, ha adott rendszerben alkalmazva a törvényeket a bennük szereplő összes fizikai mennyiség helyébe ugyanabban a rendszerben mért adatokat helyettesítünk be). Ez a tapasztalatok alapján elfogadott alaptétel a *klasszikus mechanika relativitási elve* vagy Galilei¹–féle relativitási elv. A relativitás elvének fontos következménye, hogy az inerciarendszerek a mechanikai folyamatok leírása szempontjából egyenértékűek, vagyis mechanikai kísérletek segítségével nem lehet köztük különbséget tenni, így valamiféle „abszolút”, kitüntetett inerciarendszert sem lehet találni.

Ha egy test mozgását két egymáshoz képest mozgó K_1 és K_2 inerciarendszerből vizsgáljuk, akkor a test mozgását jellemző adatokra általában eltérő értékeket kapunk, de a két rendszerben mért adatok között összefüggések állnak fenn. Ezek az összefüggések a rendszerek egymáshoz viszonyított mozgása által meghatározott *koordináta-transzformációk*, amelyeknek ismeretében egy fizikai törvényt áttranszformálhatunk egyik rendszerből a másikba. Ez úgy történik, hogy pl. a K_1 rendszerben felírt fizikai törvényben szereplő fizikai mennyiségeket a transzformációs összefüggések segítségével kifejezzük a K_2 rendszer megfelelő mennyiségeivel, és így megkapjuk a kérdéses fizikai mennyiségek közötti összefüggést (a fizikai törvényt) a K_2 rendszerben. Ha ez az összefüggés matematikai alakját tekintve azonos a K_1 rendszerben felírt összefüggéssel, akkor azt mondjuk, hogy *a törvény invariáns az adott transzformációval szemben*. Ha a transzformációval szemben az összes fizikai törvény invariáns, akkor *a transzformáció összhangban van a relativitás elvével*.

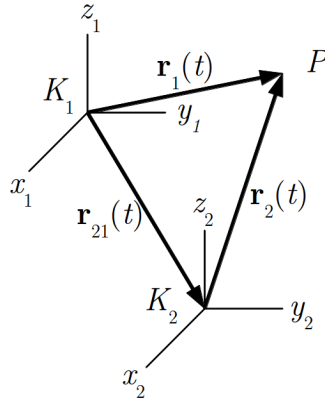
Ha a relativitás elvét, mint tapasztalati tényt elfogadjuk, akkor csak vele összhangban álló transzformációt használhatunk. Elvileg elképzelhető, hogy olyan – fizikailag indokolható – transzformációt fogadunk el, amely nincs összhangban a relativitás elvével (a törvények alakja a transzformációnál megváltozik), ekkor azonban nem tarthatjuk fenn a relativitás elvét.

A relativitáselmélet egyik központi kérdése a relativitás elve és a koordináta-transzformáció közötti összefüggés.

¹ Galileo Galilei (1564–1642.) olasz természettudós

11.1.1. A Galilei-transzformáció

A relativitás elve először a mechanikában vetődött fel, ahol a hétköznapi szemléleten alapuló *Galilei-transzformációt* használták. A transzformáció összefüggéseit a mechanikában már tárgyaltuk, itt emlékeztetőül a 11.1. ábra alapján ismét bemutatjuk azokat.



11.1. ábra. Egyazon P pont helyvektora két különböző koordináta-rendszerben

Az ábrán látható P tömegpont mindenkori helyzetét a K_1 koordináta-rendszerből a mindenkori $\mathbf{r}_1(t)$ -, a K_2 rendszerből pedig a mindenkori $\mathbf{r}_2(t)$ helyvektorral adhatjuk meg (t az idő). Ha a két rendszer relatív helyzetét megadó vektor $\mathbf{r}_{21}(t)$, akkor a két rendszerben érvényes helyvektorok kapcsolata

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{21}, \quad (11.1)$$

illetve

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{21}. \quad (11.2)$$

A továbbiakban általában ezt a második alakot használjuk.

Ha a K_2 rendszer a K_1 -hez képest állandó \mathbf{v} sebességgel mozog (inerciarendszerekről van szó), akkor

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0, \quad (11.3)$$

ahol \mathbf{r}_0 a két rendszer origójának relatív helyzetét megadó vektor a $t = 0$ időpillanatban. Ezzel a helyzetvektorok kapcsolatát megadó összefüggés így alakul

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0, \quad (11.4)$$

ami a koordinátákkal kifejezve

$$x_2 = x_1 - v_x t - x_0, \quad (11.5)$$

$$y_2 = y_1 - v_y t - y_0, \quad (11.6)$$

$$z_2 = z_1 - v_z t - z_0, \quad (11.7)$$

$$t_2 = t_1. \quad (11.8)$$

Ez a klasszikus mechanika Galilei-féle transzformációja.

A fenti gondolatmenet fontos mozzanata, hogy az időt nem transzformáltuk, azaz természetesnek vettük, hogy *a két rendszerben az idő azonos*:

$$t_2 = t_1. \quad (11.9)$$

A sebességek közötti összefüggés a helyvektorok kapcsolatát megadó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapható

$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}, \quad (11.10)$$

ahol \mathbf{v}_1 a vizsgált tömegpont K_1 rendszerbeli sebessége, \mathbf{v}_2 annak K_2 rendszerbeli sebessége. Vagyis a hétköznapi tapasztalattal egyezésben azt kapjuk, hogy ugyanazon test sebességét egymáshoz képest mozgó megfigyelők különbözőnek találják.

A gyorsulások összefüggését a sebességre vonatkozó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapjuk:

$$\mathbf{a}_2(t) = \mathbf{a}_1(t). \quad (11.11)$$

A különböző inerciarendszerekből mért gyorsulások tehát azonosnak adódnak. Ez azt jelenti, hogy – a tapasztalattal összhangban – egy inerciarendszerhez képest egyenletesen mozgó rendszer szintén inerciarendszer.

Bebizonyítható, hogy a klasszikus mechanikában ez a transzformáció összhangban van a relativitás elvével, vagyis egy mechanikai törvényt áttanszformálva egyik rendszerből a másikba, az új rendszer adataival ugyanolyan alakú törvényt kapunk. A klasszikus mechanika törvényei tehát *invariánsak* a Galilei-transzformációval szemben.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az egymáshoz képest mozgó inerciarendszereknek egy speciális esetét vizsgáljuk (11.2. ábra). Feltételezzük, hogy a két rendszerhez rögzített koordináta-rendszerek x_1 és x_2 tengelye közös, a K_2 rendszer a K_1 -hez képest v sebességgel mozog a közös x tengely mentén annak pozitív irányában, és az időt mindkét rendszerben attól a pillanattól mérjük, amikor a két origó (O_1 és O_2) azonos helyen volt (ekkor $t = t' = 0$).

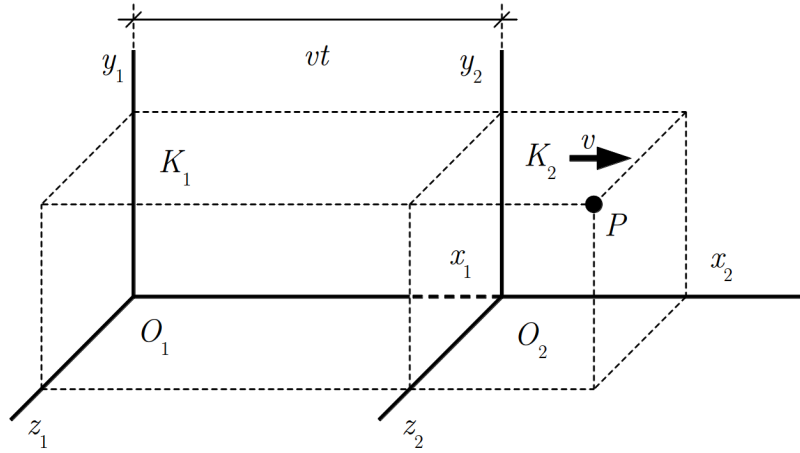
Ennél a speciális koordináta-rendszer-választásnál a Galilei-transzformáció az

$$x_2 = x_1 - vt, \quad (11.12)$$

$$y_2 = y_1, \quad (11.13)$$

$$z_2 = z_1, \quad (11.14)$$

$$t_2 = t_1 \quad (11.15)$$



11.2. ábra. A két koordináta-rendszer egy speciális esete

alakot ölti. A sebességtranszformáció összefüggései ekkor:

$$v_{2x} = v_{1x} - v, \quad (11.16)$$

$$v_{2y} = v_{1y}, \quad (11.17)$$

$$v_{2z} = v_{1z}. \quad (11.18)$$

Végül a gyorsulásokra azt kapjuk, hogy

$$a_{2x} = a_{1x}, \quad (11.19)$$

$$a_{2y} = a_{1y}, \quad (11.20)$$

$$a_{2z} = a_{1z}. \quad (11.21)$$

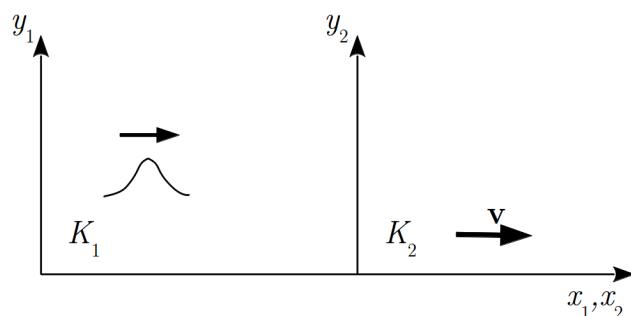
A Galilei-transzformáció egyszerű alkalmazásaként nézzük meg, hogy hogyan változik meg a hang terjedési sebessége, ha azt a közeghez képest állandó sebességgel mozgó koordináta-rendszerben mérjük. Ismét a speciális koordináta-rendszer-választást használjuk (11.3. ábra), feltételezzük, hogy a K_1 rendszer a közeghez képest nyugalomban van, és a hangforrás is nyugszik a közeghez képest, így K_1 -hez képest is. A K_2 rendszer a benne ülő megfigyelővel együtt v sebességgel mozog a K_1 -hez képest a pozitív x tengelyek irányában.

A forrásból egy hangimpulzus indul el, amelynek terjedési sebessége a K_1 rendszerben v_1 . Jelöljük a hang terjedési sebességét a K_2 rendszerben v_2 -vel, akkor a

$$v_{2x} = v_{1x} - v \quad (11.22)$$

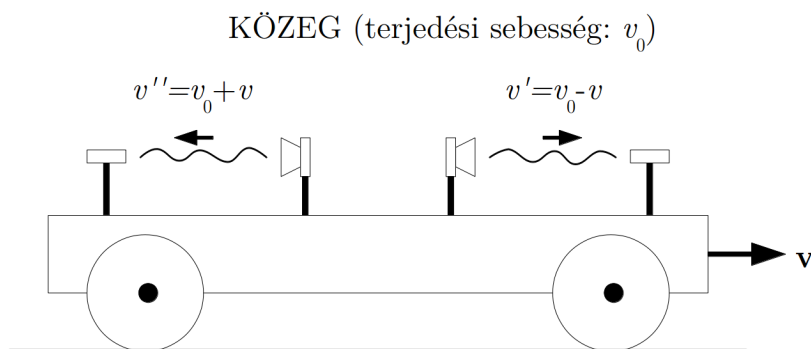
Galilei-transzformáció szerint a K_2 rendszerben a hang sebessége:

$$v_2 = v_1 - v. \quad (11.23)$$



11.3. ábra. A hang terjedési sebessége a közeghez képest állandó sebességgel mozgó koordináta-rendszerben

Vagyis – a tapasztalattal egyezően – a forrástól távolodó megfigyelő ($v > 0$) kisebb, a forrás felé közeledő megfigyelő ($v < 0$) nagyobb hangsebességet észlel, mint a forráshoz (és a közeghez) képest nyugvó megfigyelő.



11.4. ábra. A hang terjedési sebességének mérésével a jármű közeghez viszonyított sebessége meghatározható

Mivel a hang terjedési sebessége függ a megfigyelő mozgásállapotától, a megfigyelőnek a hangot hordozó közeghez viszonyított sebessége hangsebesség-mérésekkel meghatározható (11.4. ábra). Ha egy mozgó járművön megmérjük a hang terjedési sebességét a közeghez (pl. levegő) képest, a jármű haladásának irányában (v') és vele ellentétes irányban (v''), akkor a járműnek a közeghez viszonyított sebességét (v) a

$$v'' - v' = 2v \quad (11.24)$$

összefüggésből kapjuk:

$$v = \frac{v'' - v'}{2}. \quad (11.25)$$

11.2. A fény terjedési sebessége és a relativitás elve az elektromágnességtanban

Az elektromágnességtan alapegyenletei, a Maxwell-egyenletek, a klasszikus fizikának ugyanolyan alapvető törvényei, mint a Newton-törvények. E törvények kidolgozása idején a fizikában a mechanikai szemlélet uralkodott, így az elektromos és mágneses jelenségeket is a mechanikai törvények mintájára próbálták értelmezni. Úgy gondolták, hogy létezik egy sajátos közeg, az *éter*, amely mindent kitölt, és az elektromágneses jelenségek ennek a közegnek a mechanikai jellegű állapotváltozásaival függnek össze.

Természetesnek tűnt, hogy a Maxwell-egyenletek az éterhez rögzített koordináta-rendszerben érvényesek, és hogy a fény, mint elektromágneses hullám nem más, mint egy olyan zavar, amely ebben a közegben a rugalmas hullámokhoz hasonlóan terjed. Ennek megfelelően a vákuumban terjedő fény ismert $c = 299792 \text{ km/s}$ terjedési sebességét is az éterhez viszonyított sebességnek tekintették (az éter az akkori felfogás szerint a vákuumban is jelen van).

Ezzel a felfogással kapcsolatban két, egymással összefüggő probléma merült fel: az egyik a fény terjedési sebességével, a másik az elektromágnességtan egyenleteinek mozgó rendszerben érvényes alakjával függ össze.

11.2.1. A fény terjedési sebessége egymáshoz képest mozgó rendszerekben

A rugalmas hullámok terjedési mechanizmusa viszonylag könnyen értelmezhető: a zavar ebben az esetben a közeg részei közötti rugalmas kapcsolatok miatt terjed. Más a helyzet az elektromágneses hullámok, és így a fény terjedésével kapcsolatban. Mint már említettük, kezdetben a fény terjedését ugyanúgy értelmezték, mint a mechanikai hullámokét. Feltételezték, hogy a fény az éterben a rugalmas hullámokhoz hasonlóan terjed, és a fény sebessége a nyugvó éterhez viszonyított sebességet jelent. A probléma az volt, hogy az éter jelenlétét nem sikerült kimutatni.

Maxwelltől származik az ötlet, hogy az éter létezését úgy lehetne kimutatni, hogy az éterhez képest mozgó Földön különböző irányban megmérjük a fény terjedési sebességét. A Galilei-transzformáció szerint ugyanis az éterben mozgó Földön különböző irányban terjedő fény sebességét megmérve, az iránytól függően $c - v$ és $c + v$ közötti értékeket kapunk, ahol c a fénysebesség az éterben nyugvó rendszerben, v a Föld mozgási sebessége az éterhez képest. Ilyen mérésekkel – a hangterjedésre vonatkozó fenti mérés analógiájára – meg lehetne határozni a Föld mozgási sebességét az éterhez képest.

A mérést – amelyet a tudománytörténetben *Michelson–Morley-kísérlet* néven tartanak számon – először *Michelson* majd később Michelson és *Morley*² végezték el. A mérés úgy történt, hogy egy kettéválasztott fénynyaláb két részét különböző utakon, különböző irányban vezették, majd interferenciát hoztak létre velük. Ezt az optikában azóta is használt Michelson-féle interferométerrel valósították meg. A mérés azon alapul, hogy a létrejött interferenciakép függ a két interferáló fénynyaláb terjedési sebességétől. A nyalábok sebességkülönbségét az eszköz egyetlen helyzetében nem lehet észlelni, ha azonban az eszközt elfordítják, akkor megváltoznak a terjedési sebességek, és az eredeti helyzetben létrejött interferenciakép megváltozik. Az akkori felfogás szerint ezt a változást megfigyelve, a Föld mozgási sebessége az éterben meghatározható.

A mérést több alkalommal, különböző körülmények között és különböző évszakokban (a Föld különböző haladási irányainál) elvégezték, az eszköz elfordításakor azonban *az interferenciaképben semmilyen változást nem észleltek*, annak ellenére, hogy a módszer elég pontos volt a várható csíkeltolódás észleléséhez.

A kísérlet értelmezése körül hosszú ideig viták voltak. Mai felfogásunk szerint a kísérlet eredménye azt jelenti, hogy a fény terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, *a fény terjedési sebessége különböző inerciarendszerekben ugyanaz az érték*, nem függ a rendszer mozgásállapotától.

11.2.2. Az elektromágnességtan és a relativitás elve

A fényterjedésre vonatkozó Michelson-féle eredmény felveti a következő problémát. Ha a fényre – ami elektromágneses jelenség – nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, akkor feltehetőleg az elektromágnességtan alaptörvényei, a Maxwell-egyenletek egymáshoz képest mozgó rendszerek közötti transzformációnál nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. A helyzet valóban ez, így felmerült az a kérdés, hogy mi az a transzformáció, amellyel szemben a Maxwell-egyenletek invariánsak.

A problémát először *Lorentz*³ oldotta meg, aki megkereste ezt az – azóta róla elnevezett – transzformációt. A *Lorentz-transzformáció* összefüggései a korábban alkalmazott speciális koordináta-rendszer-választás esetén (közös x tengelyek, párhuzamos y - és z tengelyek, a K_2 rendszer x -irányú, állandó v sebességgel mozog a K_1 -hez képest) az

² Edward Williams MORLEY (1838-1923) amerikai kémikus, fizikus.

³ Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928) Nobel-díjas (1902) holland fizikus.

alábbiak:

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.26)$$

$$y_2 = y_1, \quad (11.27)$$

$$z_2 = z_1, \quad (11.28)$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11.29)$$

(c a vákuumbeli fénysebesség). Ezzel a transzformációval később részletesen foglalkozunk, itt csak két dolgot érdemes megjegyezni. Az egyik az, hogy a Lorentz-transzformáció lényegesen különbözik a Galilei-transzformációtól, és könnyen belátható, hogy a Lorentz-transzformációval szemben a mechanika törvényei nem invariánsak. A transzformáció másik, talán legmeglepőbb sajátja az, hogy *az idő sem azonos* a két rendszerben, azt is transzformálni kell.

A Lorentz-transzformáció felismerésével a fizikában keletkezett egy komoly elvi probléma. A fizika két nagy területén, a mechanikában és az elektromágnességtanban a relativitás elvével nem ugyanaz a transzformáció van összhangban, hanem a mechanika törvényei a Galilei-transzformációval az elektromágnességtan törvényei pedig a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak.

11.3. A relativitáselmélet posztulátumai és a Lorentz-transzformáció

A XX. század első éveire a következő helyzet alakult ki:

- Kísérletek erősítették meg azt a feltételezést, hogy a relativitás elve nem csak a mechanikában, hanem az elektromágnességtanban is érvényes, vagyis elektromos és mágneses kísérletekkel sem lehet két inerciarendszert egymástól megkülönböztetni.
- Szükségessé vált egy a fizika említett két területén egyaránt érvényes transzformáció, amely összhangban van a relativitás elvével, ehelyett a két területre két különböző transzformáció volt, amelyekkel szemben a maguk területén a fizikai törvények invariánsak.

Ha egységes transzformációt akarunk, akkor gyakorlatilag két lehetőségünk van:

- Elfogadjuk a „józan észnek” megfelelő Galilei-transzformációt, de ekkor hibásnak kell minősítenünk a Maxwell-egyenleteket. Az elektromágnességtan törvényeit tehát úgy kell átalakítanunk, hogy azok a Galilei-transzformációval szemben invariánsak legyenek.

- Elfogadjuk a Lorentz-transzformációt, de ekkor a mechanika törvényeit kell elvetnünk, és úgy átalakítanunk, hogy azok a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak legyenek.

Mivel direkt tapasztalat mutatja, hogy a fényterjedésre nem érvényes a Galilei-transzformáció, célszerűnek látszott a második megoldást választani.

11.3.1. Az Einstein-féle posztulátumok és a relativitáselmélet

A XX. század első éveiben többen (Lorentz, Poincaré⁴, Einstein) is eljutottak ahhoz a következtetéshez, hogy a Lorentz-transzformációt kell általános, a mechanikában is érvényes transzformációként elfogadni, és a mechanika törvényeit átdolgozni, de Einstein volt az, aki ezt a megoldást általános fizikai elmélet formájába öntötte. Ő vette észre, hogy a tapasztalati tényekkel egyező elmélet két alapvető fizikai elvből (posztulátumból) levezethető:

- I. A fizikai folyamatokat leíró törvények minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek. Más szóval: minden fizikai folyamatra érvényes a *relativitás elve*.
- II. A vákuumban terjedő *fény sebessége* minden inerciarendszerben azonos, *univerzális fizikai állandó*.

Ebből a két alapelvből levezethető a Lorentz-transzformáció, és segítségükkel elvégezhető a mechanika törvényeinek szükséges átalakítása. Az így létrejött, a fenti két elvvel összhangban álló fizikai elmélet a *speciális relativitáselmélet*. Nevében a „speciális” jelző arra utal, hogy csak speciálisan választott koordináta-rendszerekben, nevezetesen inerciarendszerekben érvényes.

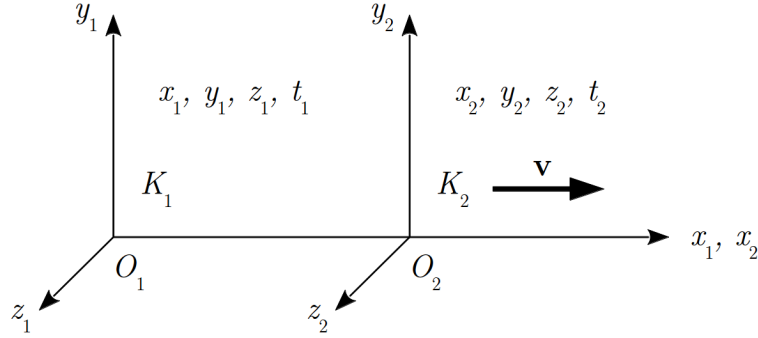
A fenti két alapelv elfogadása egyben azt is jelenti, hogy az „éter” nem tekinthetjük fényhordozó közegnek, hiszen a fénysebesség a mozgásállapottól független, és nem tekinthetjük valamiféle kitüntetett vonatkoztatási rendszernek sem, mivel a relativitás elve érvényes. Ezzel viszont elveszítette értelmét az éter létének feltételezése is.

11.3.2. A Lorentz-transzformáció

A Lorentz-transzformáció az Einstein-féle két alapelvből minden további feltevés nélkül levezethető. Itt a levezetést a korábban használt speciális, „egydimenziós” esetre végezzük el.

Vizsgáljuk a 11.5. ábrán látható két rendszert, amelyeknek x tengelyei közösek, y és z - tengelyeik párhuzamosak egymással, és a K_2 rendszer $v_x = v$ sebességgel mozog a K_1 rendszerhez képest.

⁴ Jules Henri POINCARÉ (1854-1912) francia matematikus, elméleti fizikus.



11.5. ábra. A két vizsgált koordináta-rendszer

Egy esemény koordinátái (hely- és időadatai) a két rendszerben x_1, y_1, z_1, t_1 és x_2, y_2, z_2, t_2 , a feladat a két koordináta-négyes közötti transzformációs összefüggés megkeresése. Az összefüggést lineárisnak tételezzük fel

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta t_1 \quad (11.30)$$

$$t_2 = \gamma x_1 + \delta t_1, \quad (11.31)$$

amit elsősorban a transzformáció egyértelműségének követelménye indokol, és az általánosság kedvéért transzformáljuk az időt is. Ezekben az összefüggésekben α, β, γ és δ meghatározandó konstansok, amelyek függhetnek a két rendszer v relatív sebességétől. Az általunk vizsgált speciális esetben a másik két koordinátára az

$$y_2 = y_1 \quad (11.32)$$

$$z_2 = z_1 \quad (11.33)$$

összefüggések érvényesek, ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk.

Egy tömegpont sebessége a K_2 rendszerben

$$\frac{dx_2}{dt_2} = \frac{\alpha dx_1 + \beta dt_1}{\gamma dx_1 + \delta dt_1} = \frac{\alpha \frac{dx_1}{dt_1} + \beta}{\gamma \frac{dx_1}{dt_1} + \delta}. \quad (11.34)$$

1. Alkalmazzuk a (11.34) összefüggést a K_1 rendszer origójának mozgására. A K_1 rendszer origója K_1 -hez képest áll, tehát $dx_1/dt_1 = 0$, a K_2 rendszerhez képest pedig $-v$ sebességgel mozog, tehát $dx_2/dt_2 = -v$. Ezzel a $-v = \beta/\delta$, azaz a $\beta = -\delta v$ összefüggést kapjuk.
2. Most vizsgáljuk K_2 origójának mozgását, ami K_1 -hez képest v sebességgel mozog, tehát $dx_1/dt_1 = v$, a K_2 -höz képest pedig áll, azaz $dx_2/dt_2 = 0$. Ebből a (11.34)

egyenletbe való behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy $0 = (\alpha v + \beta) / (\gamma v + \delta)$, vagyis $\alpha v + \beta = 0$. Az 1. pontban kapott $\beta = -\delta v$ összefüggést felhasználva az $\alpha = \delta$ eredményt kapjuk.

3. Használjuk ki a II. posztulátumot, vagyis azt, hogy a fény sebessége a két inerciarendszerben azonos. Az x tengely mentén terjedő fényre ez azt jelenti, hogy $dx_1/dt_1 = dx_2/dt_2 = c$, amiből a (11.34) összefüggés alapján $c = (\alpha c + \beta) / (\gamma c + \delta)$. Ebből a $\beta = -\delta v$ és az $\alpha = \delta$ összefüggések felhasználása és rendezés után a $\gamma = -\alpha v/c^2$ összefüggést kapjuk.
4. Ezek után az eredetileg bevezetett 4 konstans helyett már csak az egyetlen α maradt. Írjuk fel ezzel a transzformációs egyenleteket:

$$x_1 = \alpha x_2 + \alpha v t_2 \quad (11.35)$$

$$t_1 = \alpha \frac{v}{c^2} x_2 + \alpha t_2. \quad (11.36)$$

Ezek az összefüggések a mennyiségeket a K_1 rendszerből a K_2 -be transzformálják.

Az I. posztulátum, a relativitás elve miatt a fordított transzformáció esetén ugyanilyen alakú transzformációs összefüggéseknek kell fennállni, azzal az eltéréssel, hogy a relatív sebesség ellenkező irányú. A fordított transzformációs összefüggéseket tehát egyszerűen úgy kaphatjuk meg, hogy felcseréljük az 1 és 2 indexeket, és v helyébe $-v$ -t írunk:

$$x_1 = \alpha x_2 + \alpha v t_2 \quad (11.37)$$

$$t_1 = \alpha \frac{v}{c^2} x_2 + \alpha t_2. \quad (11.38)$$

Ha most ezekben az összefüggésekben a K_2 -beli mennyiségeket visszatranszformáljuk a K_1 rendszerbe, akkor nem változik meg semmi, tehát vissza kell kapnunk x_1 -et és t_1 -et. A behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \alpha (\alpha x_1 - \alpha v t_1) + \alpha v \left(-\alpha \frac{v}{c^2} x_1 + \alpha t_1 \right), \quad (11.39)$$

$$x_1 = \alpha^2 x_1 - \alpha^2 v t_1 - \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} x_1 + \alpha^2 v t_1 = \alpha^2 x_1 - \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} x_1 = \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x_1. \quad (11.40)$$

Ebből következik, hogy

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1. \quad (11.41)$$

Hasonlóan kapjuk az időre, hogy

$$t_1 = \alpha \frac{v}{c^2} (\alpha x_1 - \alpha v t_1) + \alpha \left(-\alpha \frac{v}{c^2} x_1 + \alpha t_1 \right), \quad (11.42)$$

azaz

$$t_1 = \alpha^2 \frac{v}{c^2} x_1 - \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} t_1 - \alpha^2 \frac{v}{c^2} x_1 + \alpha^2 t_1 = -\alpha^2 \frac{v^2}{c^2} t_1 + \alpha^2 t_1 = \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t_1. \quad (11.43)$$

Ebból szintén az következik, hogy

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1, \quad (11.44)$$

így

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11.45)$$

Ezzel a transzformációs képletek az

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.46)$$

$$y_2 = y_1 \quad (11.47)$$

$$z_2 = z_1 \quad (11.48)$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.49)$$

alakot öltik.

Mint látható, az Einstein-féle fizikai alapelvek megkövetelésével kapott fenti egyenletek azonosak az elektromágnességtan egyenleteit változatlanul hagyó eredeti Lorentz-féle transzformáció egyenleteivel.

A Lorentz-transzformáció nagyon fontos tulajdonsága, hogy nincs ellentmondásban a hosszú időn át használt és helyesnek talált Galilei-transzformációval. Az összefüggésekből látható ugyanis, hogy „hétköznapi” sebességeknél ($v \ll c$) *visszkapjuk a Galilei-transzformációt*. Másként fogalmazva, a Galilei-transzformáció a Lorentz-transzformáció kis sebességekre érvényes közelítése. A mechanika klasszikus törvényeitől tehát csak akkor várható eltérés, ha a két vonatkoztatási rendszer (pl. a megfigyelő és a megfigyelt objektum) *relatív sebessége összemérhető a fénysebességgel*.

Ugyancsak fontos tény, hogy a Lorentz-transzformáció fizikailag értelmetlenné válik a $v \geq c$ esetben, vagyis a vákuumbeli c fénysebesség *határsebesség* szerepét játssza. Kimutatható, hogy ennél nagyobb sebességgel semmilyen anyagi rendszer és semmilyen információhordozó jel nem mozoghat.

11.4. A relativisztikus mechanika

Az Einstein által elfogadott két alapelv – ami egyenértékű a Lorentz-transzformáció elfogadásával és a Galilei-transzformáció elvetésével – maga után vonja, hogy a klasszikus mechanika alapfogalmait és törvényeit felül kell vizsgálni.

A klasszikus mechanika hétköznapi szemléleten alapuló olyan fogalmai, mint az idő, időtartam, távolság a relativitáselméletben bizonyosan koncepcionális változáson mennek keresztül, amit egyértelműen sejtet az a tény, hogy az időadatokat transzformálni kell.

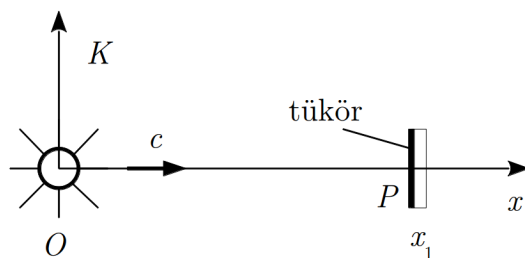
Ami a felülvizsgálat másik részét illeti: a mechanika törvényeit úgy kell átalakítani, hogy azokat egyik inerciarendszerből a másikba történő átmenet során a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja, vagyis invariánsak legyenek a Lorentz-transzformációval szemben.

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk ennek a felülvizsgálatnak az alapelveit és fő eredményeit.

11.4.1. A hely- és idő meghatározása

A fizikában a jelenségek leírásához szükség van a jelenség helyének és időpontjának megadására. Ehhez minden vonatkoztatási rendszerben ki kell alakítani egy *sűrű koordináta- és időhálózatot*. A koordináta-hálózat azt jelenti, hogy meg kell határozni a rendszer nagyon sok pontjának helyzetét, az időhálózat pedig azt, hogy a rendszerben sűrűn el kell helyezni azonosan működő, egymáshoz igazított, szinkronizált órákat.

Ha nagyon precízen akarunk eljárni, akkor nem alkalmazhatunk olyan módszert, amely azzal járna, hogy méterrudakat és órákat szállítunk a rendszer különböző pontjai között, mert a szállítás közben ezek az eszközök megváltozhatnak. A koordináta- és időhálózat kialakításának legcélszerűbb módja az, ha a feladatot fényjelek segítségével oldjuk meg. Ez azért is célszerű, mert a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz, így az eljárás különböző rendszerekben is használható.

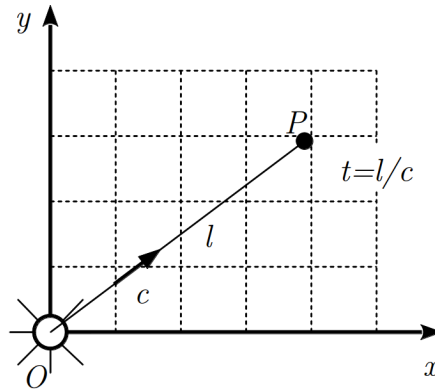


11.6. ábra. Távolság mérése fényjelekkel

Ahhoz, hogy egy rendszer pontjainak helyzetét megadjuk, távolságokat (koordinátákat) kell meghatározni. Fényjellel ez úgy valósítható meg, hogy az origóból elindítunk egy

fényjelet, a vizsgált pontban (a 11.6. ábrán P) pedig elhelyezünk egy tükröt, amelyről a fényjel visszaverődik az origóba. Ha a fényjel az origóba a kibocsátástól számított t idő múlva érkezik vissza, akkor a vizsgált hely távolsága az origótól (az ábrán a P pont x_1 koordinátája) $x_1 = \frac{1}{2}ct$.

Az órák szinkronizálása szintén elvégezhető fényjelekkel. Ez úgy történhet, hogy a $t = 0$ időpillanatban az origóban egy fényfelvillanást hozunk létre, és ezt a fényfelvillanást megfigyeljük a rendszer egy adott pontjában, amelynek az origótól mért l távolságát ismerjük (11.7. ábra). Mivel a fényjel c sebességgel terjed, a jel megérkezésének időpontjáig $t = l/c$ idő telt el, vagyis az adott helyen (P) lévő órát erre az időpontra kell beállítani. Ilyen módon a rendszer különböző helyein elhelyezett órákat szinkronizálni tudjuk.



11.7. ábra. Órák szinkronizálása fényjelekkel

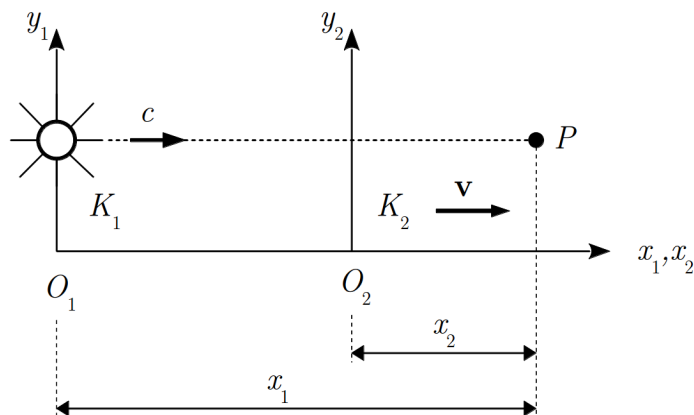
Mivel egymáshoz lépest mozgó inerciarendszerekben a fény terjedési sebessége azonos, egy adott esemény helyének koordinátái viszont lehetnek különbözőek, a fenti szinkronizálási módszer segítségével rögtön látható, hogy a két rendszerben az órák nem ugyanazt az időt mutatják.

Ennek belátásához vizsgáljunk ismét két speciális elhelyezkedésű, egymáshoz képest v sebességgel mozgó koordináta-rendszert (11.8. ábra), amelyeknek origói a $t = 0$ időpillanatban azonos helyen voltak, és ekkor a közös origóból elindítottak egy fényfelvillanást. Ha a P pontban lévő órát mindkét rendszerben ugyanezzel a jellel állítjuk be, akkor a jel megérkezésekor a K_1 rendszerbeli órát $t_1 = x_1/c$ -re, a K_2 -beli órát pedig az ettől eltérő $t_2 = x_2/c$ értékre állítják be.

Az tehát, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben azonos értékű, azzal a következménnyel jár, hogy az időadatok az egyes rendszerekben eltérőek lesznek.

A koordináta- és időhálózat segítségével egy rendszerben tudunk helyet- és időpontot, továbbá távolságot- és időtartamot meghatározni.

Az események leírása szempontjából van még egy fontos kérdés: hogyan lehet meghatározni egy rendszerhez képest mozgó tárgynak a mozgásirányba eső méretét? Erre az



11.8. ábra. A két rendszerben az órák nem ugyanazt az időt mutatják

a megoldás kínálkozik, hogy a mozgásirányban sűrűn felsorakozó órák megfigyelők feljegyzik a tárgy egyik- és másik végének elhaladási időpontját. Ezek közül kiválasztjuk azt a kettőt, akiknek egyike a tárgy egyik végének elhaladását ugyanabban a pillanatban észlelte, mint a másikuk a tárgy másik végének elhaladását. A mozgó tárgynak a mozgásirányba eső hossza a két megfigyelő közti távolsággal egyenlő.

Ezekkel a mérési módszerekkel egy esemény egy inerciarendszerben az x, y, z, t számnégyessel jellemezhető, amely megadja az esemény helyét és időpontját. Ezt a számnégyest gyakran az esemény koordinátáinak nevezik.

11.4.2. Időtartam és távolság a relativitáselméletben

Bár a Lorentz-transzformáció csak a hétköznapi sebességekhez képest nagy sebességeknél különbözik lényegesen a Galilei-transzformációtól, a kettő között mégis elvi különbség van, ami szükségessé teszi az idő és távolságméréssel kapcsolatos foglmaink felülvizsgálatát.

Először vizsgáljuk meg, hogy milyen eredményre jutunk, ha két esemény között eltelt időt különböző inerciarendszerekből vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy a K_2 rendszer a K_1 rendszerhez képest a korábbi speciális elrendezésben v sebességgel mozog, és a K_2 rendszerben azonos helyen, a rendszerhez képest nyugalomban lévő pontban lejátszódik két esemény (pl. egy lámpa kigyullad és kialszik). Az első eseményt jellemző adatok ebben a rendszerben t_2^I, x_2 , a másodikat jellemzők pedig t_2^{II}, x_2 (mivel a két esemény azonos helyen játszódik le, alkalmaztuk az $x_2^I = x_2^{II} = x_2$ jelölést). A két esemény között eltelt idő a K_2 rendszerben

$$\Delta t_2 = t_2^{II} - t_2^I. \quad (11.50)$$

A K_1 rendszerben az események között

$$\Delta t_1 = t_1^{\text{II}} - t_1^{\text{I}} \quad (11.51)$$

idő telik el.

Mivel a Lorentz-transzformáció szerint

$$t_1^{\text{I}} = \frac{t_2^{\text{I}} + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.52)$$

$$t_1^{\text{II}} = \frac{t_2^{\text{II}} + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.53)$$

azt kapjuk, hogy

$$\Delta t_1 = \frac{t_2^{\text{II}} - t_2^{\text{I}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11.54)$$

Ez azt jelenti, hogy a két rendszerben nem csak az időpontok különböznek, hanem a két rendszerben ülő megfigyelők az események között eltelt időtartamot is különböznek találják. Mivel $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, $\Delta t_1 > \Delta t_2$, tehát az események helyéhez képest mozgó (K_1 -beli) megfigyelő az események között eltelt időt hosszabbnak találja, mint az eseményekhez képest nyugvó (K_2 -beli) megfigyelő. Megkülönböztetésül a Δt_2 időtartamot nyugalmi mérőszámnak vagy *nyugalmi időtartamnak*-, a Δt_1 időtartamot mozgási mérőszámnak vagy *mozgási időtartamnak* nevezik.

Természetesen, ha az események közös helye a K_1 rendszerben nyugszik, akkor az időtartamok közötti összefüggés megfordul:

$$\Delta t_2 > \Delta t_1, \quad (11.55)$$

vagyis mindig az eseményekhez képest mozgó rendszerben kapott időtartam, a mozgási időtartam a hosszabb.

Ezt a tapasztalatunkat megfogalmazhatjuk a koordináta-rendszerek jelölésétől független formában is. Ha az eseményekhez képest nyugvó megfigyelő által mért időtartamot T_0 -al, a mozgó megfigyelő által mért időtartamot pedig T -vel jelöljük, akkor a fenti összefüggések a

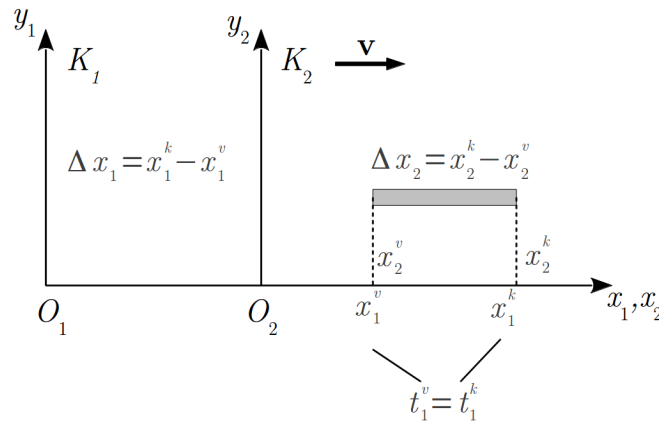
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.56)$$

alakba írhatók.

A mozgó megfigyelő által mért *mozgási időtartam* a megfigyelő és az események helye közti relatív sebességtől függ. Ezt a jelenséget gyakran *idődilatációnak* nevezik. Az idődilatáció gyakorlatilag jelentőssé akkor válik, ha a mozgási sebesség a fénysebességgel összemérhető, a $v \ll c$ esetben ugyanis $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$, azaz $T \approx T_0$.

A fentiekhez hasonlóan egyszerű megfontolásokkal kimutatható, hogy ha két különböző helyen végbemenő esemény az egyik rendszerből egyidejűnek látszik, akkor egy hozzá képest mozgó rendszerből nézve különböző időpontban zajlanak le, vagyis az *egyidejűség sem abszolút*, hanem a koordináta-rendszertől függ.

Számítsuk ki most, hogy milyen eredményre vezet egy rúd hosszának mérése, egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekben. Ismét a szokásos speciális elrendezést használjuk (11.9. ábra), a mérendő rúd a K_2 rendszerben nyugszik, és az x tengelyekkel párhuzamos.



11.9. ábra. Egy rúd hosszának meghatározása egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekben

A rúd hosszának meghatározása a K_2 rendszerben egyszerű, hiszen ha meghatározzuk a kezdőpont (k) és a végpont (v) x_2^k és x_2^v koordinátáit, akkor a hosszt a

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v \quad (11.57)$$

összefüggés adja meg.

A K_1 rendszerben a hosszt a korábban említett módon, az egyidejű kezdő- és végpont-koordináták (x_1^k és x_1^v) leolvasásával kapjuk:

$$\Delta x_1 = x_1^k - x_1^v \quad (t_1^k = t_1^v). \quad (11.58)$$

A Lorentz-transzformáció szerint

$$x_2^k = \frac{x_1^k - vt_1^k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.59)$$

$$x_2^v = \frac{x_1^v - vt_1^v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.60)$$

ezért a $t_1^k = t_1^v$ feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v = \frac{x_1^k - x_1^v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.61)$$

Ez azt jelenti, hogy a hosszúság is koordináta-rendszer-től függő mennyiség.

Természetesen, ha a rúd a K_1 rendszerben nyugszik és a K_2 -höz képest mozog, akkor a Lorentz-transzformáció inverzét használva a

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.62)$$

összefüggésre jutunk, vagyis a mozgásirányba eső hosszt mindig a rúdhoz képest mozgó megfigyelő méri rövidebbnek.

A fenti tapasztalatot a koordináta-rendszerek jelölésétől független formában is felírhatjuk. Ha a tárgyhoz képest nyugvó megfigyelő által mért hosszt L_0 -al, a mozgó megfigyelő által mért hosszt pedig L -el jelöljük, akkor a fenti összefüggések az

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.63)$$

alakba írhatók. Eszerint a tárgynak a hozzá képest mozgó rendszerből mért L *mozgási hossza* mindig kisebbnek adódik, mint a hozzá képest nyugvó rendszerben mért L_0 *nyugalmi hossz*: a mozgó megfigyelő által mért hossz a megfigyelő és a tárgy v relatív sebességétől függ. Ehhez az eredményhez először Lorentz jutott el, ezért azt a tényt, hogy a mozgó megfigyelő kisebb hosszt mér, *Lorentz-kontrakciónak* nevezik. A Lorentz-kontrakció – az idődilatációhoz hasonlóan – csak akkor jelentős, ha a mozgási sebesség a fénysebességhez képest nem elhanyagolható.

11.4.3. A müonok élettartama

A távolságokra és az időtartamokra vonatkozó fenti összefüggések egyik kísérleti bizonyítékát szolgáltatják a világűr-ből a Föld felszínére érkező részecskék, a μ -*mezonok* vagy rövidebb néven *müonok*.

Ezek a részecskék az atmoszféra felső rétegeiben, kb. 4-5 km magasságban keletkeznek atomi ütközések során, és a fénysebességhez közeli $v \approx c$ sebességgel haladnak. A müonok nem stabilis részecskék: laboratóriumban végzett mérések szerint a – gyakorlatilag nyugvó – müonok átlagosan $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s idő eltelte után elbomlanak. Számítsuk ki, hogy ezalatt mekkora utat futnak be.

A klasszikus elgondolás szerint a müonok keletkezésük után átlagosan $s_{KL} = v\tau_0 \approx c\tau_0 = 660$ m utat futnak be, majd elbomlanak, tehát a Földfelszín eléréséhez szükséges távolságnak (4-5 km) alig több, mint 10-ed részét teszik meg. A tapasztalat ezzel szemben az, hogy a müonok leérnek a Föld felszínére.

Az ellentmondás magyarázata az, hogy a fenti számításnál használt τ_0 időtartam a müonhoz képest nyugvó rendszerben mért nyugalmi élettartam, a számítást pedig a müonhoz képest nagy sebességgel mozgó rendszerben, a Földön végeztük. A Földhöz képest mozgó müont vizsgálva, a számításnál természetesen a $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ mozgási élettartamot kell használnunk.

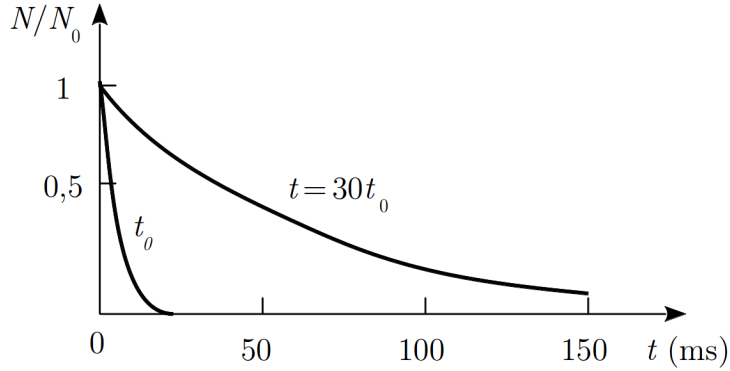
Ha a müon sebessége $v = 0,99 \cdot c$, akkor $\tau = \tau_0 / 0,141 = 15,6 \cdot 10^{-6}$ s, és így a befutott út $s_F = v\tau \approx 4,68$ km, a tapasztalattal egyezésben.

Természetesen, ha a problémát a müonnal együttmozgó rendszerből vizsgáljuk, akkor is arra a végeredményre kell jutnunk, hogy a müon elérheti a Föld felszínét. Ekkor az élettartam a τ_0 nyugalmi érték, az ebből kiszámítható befutott út pedig a klasszikusan is kapott 660 m lesz. Ellentmondás azonban nincs, mert most a befutandó út nem az $s_0 = v\tau \approx 4,68$ km nyugalmi hossz, hanem annak mozgási értéke, azaz $s_\mu = s_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 660$ m, hiszen a müonhoz képest mozgó távolságról van szó. Vagyis a müon a hozzá rögzített rendszerben végzett számolás szerint is leérhet a Föld felszínére: a fizikai folyamat leírása szempontjából a két inerciarendszer a várakozásnak megfelelően egyenértékű.

Annak, hogy a müonok megérkeznek a Föld felszínére, csak akkor van bizonyító ereje, ha a Föld felszínén a magasban keletkezett müonok többsége leérkezik, hiszen az átlagos élettartam csak bomlási felezési időt jelent. A megfigyelések igazolják ezt a várakozást.

A jelenség pontosabb elemzését teszik lehetővé azok a mérések, amelyeket a genfi CERN laboratórium gyorsítójában végeztek el, ahol közvetlenül megmérték a müonok bomlási sebességét (11.10. ábra).

A müonok elektronra és neutrínóra bomlanak, ezért a bomlásban keletkezett elektronok detektálásával mérni tudták a bomlás gyakoriságát. Kiderült, hogy a $v \approx 0,9994 \cdot c$ sebességgel mozgó müonok bomlásának felezési ideje (τ) – a relativitáselmélet idődilatació-összefüggésének megfelelően – kb. 30-szor akkora, mint a nyugvó müonoké (τ_0). Az ábra a még nem elbomlott müonok számának (N) és a kezdetben jelen lévő müonok számának (N_0) hányadosát mutatja az idő függvényében a két esetben.



11.10. ábra. A müonok száma az idő függvényében nyugvó és a müonokkal együtt mozgó koordináta-rendszerben

11.4.4. A sebességtranszformáció

Ha a fénysebesség minden inerciarendszerben azonosnak adódik, akkor a Lorentz-féle sebességtranszformációnak alapvetően különbözni kell a Galilei-féle transzformáció megfelelő összefüggésétől.

Írjuk fel egy pont v_{2x} sebességét a K_2 rendszerben, amely v sebességgel mozog a K_1 rendszerhez képest. és használjuk a korábban is használt speciális koordináta-rendszer-elrendezést.

A sebesség x -komponense

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt_2}. \quad (11.64)$$

Felhasználva a Lorentz-transzformáció egyenleteit

$$v_{2x} = \frac{\kappa (dx_1 - v dt_1)}{\kappa (dt_1 - \frac{v}{c^2} dx_1)}, \quad (11.65)$$

ahol bevezettük a $\kappa = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ jelölést. Ebből a számláló és nevező dt_1 -gyel való osztása után kapjuk, hogy

$$v_{2x} = \frac{\frac{dx_1}{dt_1} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx_1}{dt_1}}. \quad (11.66)$$

Mivel a K_1 rendszerbeli x -irányú sebesség $v_{1x} = dx_1/dt_1$, a sebességtranszformáció összefüggése az x -komponensre

$$v_{2x} = \frac{v_{1x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_{1x}}. \quad (11.67)$$

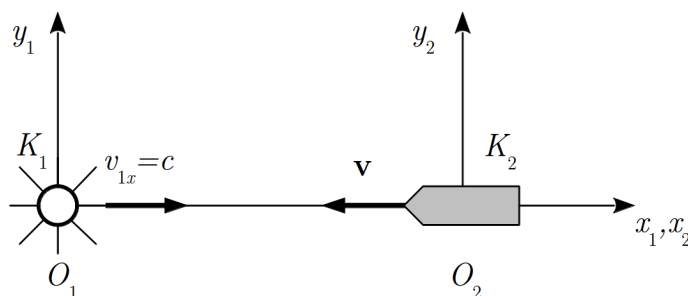
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$v_{2y} = \frac{v_{1y}}{\kappa \left(1 - \frac{v}{c^2} v_{1x}\right)}, \quad (11.68)$$

$$v_{2z} = \frac{v_{1z}}{\kappa \left(1 - \frac{v}{c^2} v_{1x}\right)}. \quad (11.69)$$

A fenti kifejezések különböznek a Galilei-transzformáció megfelelő összefüggéseitől, és itt már nem csak az x -komponensekben, hanem (az idő transzformációja miatt) a többiben is van eltérés. Az is szembeűnő azonban, hogy a $v \ll c$ esetben ezek az összefüggések visszaadják a Galilei-féle sebességtranszformáció egyenleteit: az eltérés ismét csak a fénysebességgel összemérhető relatív sebességek esetén számottevő.

Mivel a Lorentz-transzformáció megfelel annak a követelménynek, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz, ezt a tényt a fenti képleteknek is tükrözniük kell. Nézzük meg egy egyszerű példán, hogyan is működik ez a sebességtranszformáció. Tegyük fel, hogy valahol (K_1 rendszer) kibocsátanak egy fényjelet, amely ebben a rendszerben $v_{1x} = c$ sebességgel halad az x tengely mentén a pozitív irányban (11.11. ábra). Milyen fénysebességet észlel a fenti rendszerhez képest az x tengely negatív irányában v nagyságú sebességgel haladó megfigyelő (K_2 rendszer)?



11.11. ábra. A fénysebesség transzformációja

A sebességtranszformáció megfelelő összefüggésébe behelyettesítve az aktuális adatokat, azt kapjuk, hogy

$$v_{2x} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c, \quad (11.70)$$

vagyis a K_2 rendszerben mért fénysebesség is c lesz, szemben a Galilei-transzformáció alapján várható $c + v$ értékkel. A vákuumbeli fénysebesség tehát sebességösszetevéssel nem növelhető.

Kimutatható azonban, hogy a fenti eredmény csak a vákuumbeli c fénysebességre érvényes. A különböző átlátszó közegekben a fény ennél kisebb $c_K = c/n$ (n a törésmutató) sebességgel terjed, és ilyenkor a fényvel szemben haladó megfigyelő a c_K -nál nagyobb c_K sebességet mér, de mindig érvényes a $c_K < c'_K < c$ egyenlőtlenség. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az a megállapítás, hogy a fénysebesség határsebesség, szintén a fény vákuumbeli terjedési sebességére igaz: egy közegbeli $c_K < c$ fénysebesség túlléphető.

11.5. A négydimenziós téridő

A Galilei transzformáció az időt nem transzformálja, az időadatokat a térkoordinátáktól függetlenek. Ezzel szemben a Lorentz-transzformáció az időt is transzformálja, az idő- és térkoordináták egymással igen szoros, kölcsönös kapcsolatban vannak. Ez az oka annak, hogy a relativitáselméletben egy adott pontban, adott időben lezajló esemény jellemzésére a három térkoordinátahoz negyedikként az időt is hozzávették, és a jellemzésre az (x, y, z, t) mennyiségeket használják.

Ennek alapján formálisan bevezethető egy *négydimenziós téridő*, aminek – mint később látni fogjuk – a jelenségek tárgyalásánál számos előnye van. Az (x, y, z, t) adatokat tekinthetjük egy *esemény koordinátáinak* a téridőben, vagyis egy esemény a négydimenziós téridőben egy pontnak felel meg. Ha az időadatot megfelelően választjuk meg, akkor az így kapott négy komponensű mennyiség egy négydimenziós vektor lesz, amit *négyesvektornak* neveznek.

11.5.1. Invariáns intervallumnégyzet, négyesvektorok

A fizikában a 3 dimenziós térben a vektor mintájául a helyvektor szolgált, és vektornak neveztünk minden olyan három komponenssel megadott mennyiséget, amelynek komponensei a koordináta-rendszer elforgatásakor úgy transzformálódnak, mint a helyvektor koordinátái. A skaláris mennyiségek értéke nem függ a koordináta-rendszer választásától. Ennek a következménye az, hogy két vektor skaláris szorzata és két pont Δs távolságának négyzete invariáns a koordináta-transzformációval szemben:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta s'^2. \quad (11.71)$$

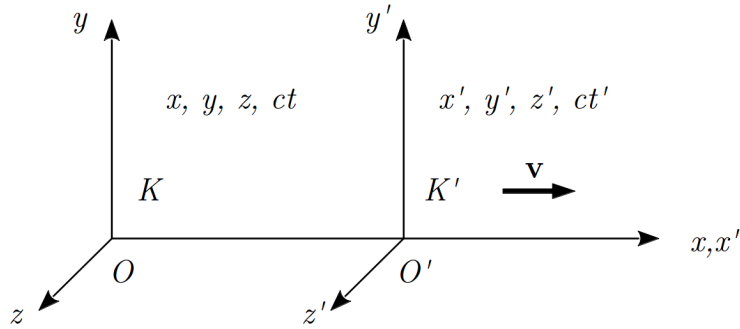
Ennek mintájára a négyes „állapotvektort” úgy definiálhatjuk, hogy a vektor komponensei a Lorentz-transzformációval transzformálódjanak, és két esemény közötti „négydimenziós távolság” (intervallum) négyzete invariáns legyen a Lorentz-transzformációval szemben.

Alább bizonyítjuk, hogy az (x_1, y_1, z_1, t_1) és (x_2, y_2, z_2, t_2) négydimenziós eseményekre felírt

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \end{aligned} \quad (11.72)$$

ún. *intervallumnégyszet* vagy *négyes távolságnégyszet* invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. Ennek alapján negyedik koordinátának az időt tartalmazó, de távolság jellegű ct mennyiséget választhatjuk.

Vizsgáljuk meg az intervallumnégyszet invarianciáját a speciálisan választott K és K' koordináta-rendszerekben, amelyeknek közös az x tengelye, párhuzamos az y - és z tengelye, és a K' rendszer v sebességgel mozog a K -hoz képest a pozitív x tengelyek irányában (11.12. ábra).



11.12. ábra. A vizsgált koordináta-rendszerek

Tegyük fel, hogy a K -ban rögzített helyen bekövetkezik két esemény, amelyeknek négyes-koordinátái x_1, y_1, z_1, ct_1 és x_2, y_2, z_2, ct_2 . Ugyanezen két eseményt a K' rendszerben az x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1 és x'_2, y'_2, z'_2, ct'_2 adatok jellemzik. A megváltozások a két rendszerben:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad (11.73)$$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad (11.74)$$

$$\Delta z = z_2 - z_1, \quad (11.75)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad (11.76)$$

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1, \quad (11.77)$$

$$\Delta y' = y'_2 - y'_1, \quad (11.78)$$

$$\Delta z' = z'_2 - z'_1, \quad (11.79)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1. \quad (11.80)$$

A koordináta-rendszerek speciális választása miatt

$$\Delta y = \Delta y', \quad (11.81)$$

$$\Delta z = \Delta z'. \quad (11.82)$$

Írjuk fel az intervallumnégyzet fenti kifejezését a K' rendszerben és transzformáljuk át a K -ba a

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x - \frac{v}{c}(c\Delta t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.83)$$

$$c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.84)$$

Lorentz-transzformációval. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (c\Delta t')^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 &= \\ &= \frac{(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(\Delta x - \frac{v}{c}(c\Delta t))^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= \frac{(c\Delta t)^2 - 2\Delta t v \Delta x + \frac{v^2}{c^2}\Delta x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\Delta x^2 - 2\Delta x v \Delta t + \frac{v^2}{c^2}(c\Delta t)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= \frac{(c\Delta t)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \Delta x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \end{aligned} \quad (11.85)$$

Ez azt jelenti, hogy valóban igaz, hogy a Δs^2 intervallumnégyzetre (vagy távolságnégyzetre) fennáll, hogy

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{invariáns}. \quad (11.86)$$

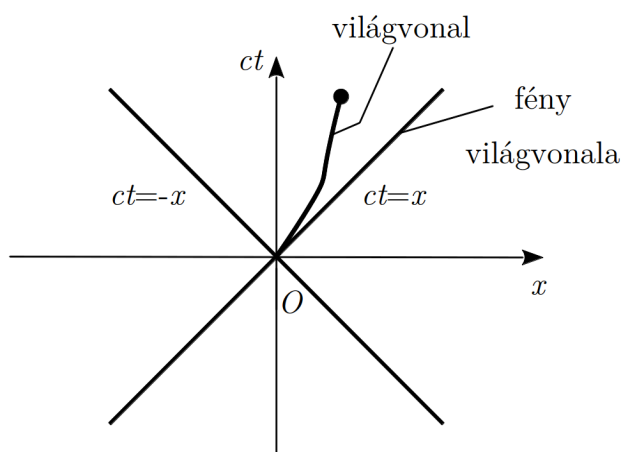
Azt, hogy a négydimenziós tér vagy gyakori elnevezéssel *négydimenziós világ* nem egészen olyan, mint a közönséges három dimenziós tér, többek között az mutatja, hogy az *intervallumnégyzet lehet negatív* is.

A K rendszerben érvényes x, y, z, ct számnégyes négyesvektort alkot, és az ennek megfelelő K' rendszerbeli négyesvektort a Lorentz-transzformációval kapjuk meg. Ennek mintájára *négyesvektor* minden olyan mennyiség, ami a koordináta-rendszer megváltoztatásakor a *Lorentz-transzformációval transzformálódik*. Ebből a meghatározásból következik, hogy két négyesvektor skalárszorzata is invariáns. (A skalárszorzat definíciója a fentiek értelmében úgy módosul, hogy a négyesvektor valós 3D vektorokhoz tartozó x, y és z komponense a skalárszorzatban negatív előjellel szerepel:

$$(x_1, y_1, z_1, ct_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, ct_2) = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2. \quad (11.87)$$

11.5.2. Állapotváltozás a négyestérben, sajátidő

Ha az eseményeket az eddig használt speciális koordináta-rendszerekben vizsgáljuk, akkor lényegében a négyestérnek – vagy ahogy gyakran nevezik, a *négyes világnak* – egy síkjában vagyunk. Ezen a síkon egy esemény egy pontnak felel meg, az események egymásutánja egy vonalat rajzol ki, amit az adott változás (mozgás) *világvonalának* neveznek. A világvonalat ábrázolhatjuk a (x, ct) koordináta-rendszerben. A mellékelt 11.13. ábrán egy ilyen koordináta-rendszer látható, amelyben feltüntettük egy önkényesen választott változás világvonalát, és a *fény világvonalát*, amely az $x = \pm ct$ összefüggésnek megfelelően egyenes (három illetve négy dimenzióban ez egy kúpfelület, amit *fénykúp*nak neveznek). A fény világvonala a különböző inerciarendszerekben ülő megfigyelők számára ugyanaz.



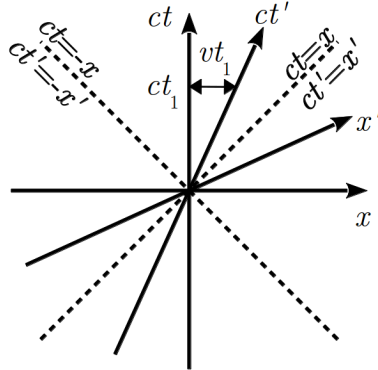
11.13. ábra. Eseménysorozatok világvonalai a négyestérben

Ehhez hasonlóan, egy állandó sebességgel mozgó tömegpont világvonala egyenes.

Azok az események, amelyeknek világvonala párhuzamos a ct -tengellyel, azonos helyen (de különböző időpontokban) játszódnak le, azok pedig, amelyeknek világvonala párhuzamos az x -tengellyel, azonos időben (de különböző helyeken) zajlanak.

Ebben az ábrázolási módban a fenti K rendszerhez képest a szokásos speciális, v sebességgel mozgó K' rendszer a 11.14. ábrán látható módon helyezkedik el. A t' tengely helyzetét az ábrán feltüntetett eljárással kapjuk, az x' tengely helyzetét pedig úgy kell megválasztani, hogy a fény világvonala ugyanaz maradjon, és érvényes legyen rá az $x' = ct'$ összefüggés.

A négyes világnak különböző jellegű tartományai vannak. Ezeket úgy lehet osztályozni, hogy meghatározzuk, hogy milyen az előjele egy vonatkoztatási eseményt (a 11.15.



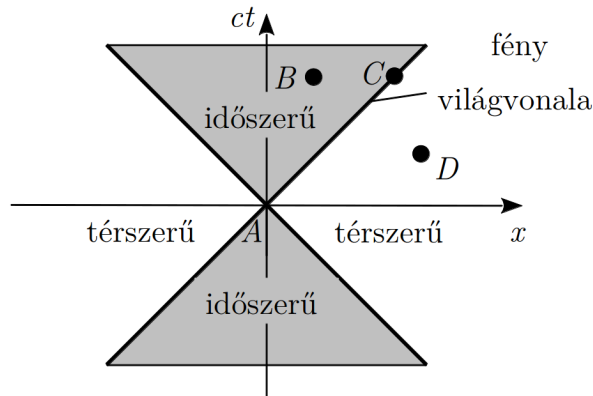
11.14. ábra. Egy v sebességgel mozgó K' koordináta-rendszer tengelyei a K rendszerben

ábrán A) és a vizsgált tartományba eső eseményt összekötő

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (11.88)$$

intervallumnégyszetnek.

A 11.15. ábrán feltüntetett B , C és D események az A eseményhez és a fény világvonalaához képest különböző helyzetben vannak, és az említett intervallumnégyszetek eltérő jellegűek.



11.15. ábra. Események osztályozása a négyestérben

A B eseményre, és minden olyan eseményre, amely a szürke fénykúp-tartományokban van, fennáll, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 > 0. \quad (11.89)$$

Ezekhez az eseményekhez lehet találni olyan – az eredetihez képest állandó sebességgel mozgó – koordináta-rendszert, amelyben az A és a kérdéses (pl. B) esemény azonos helyen van, csak az időpontjuk más. (Ez azt jelenti, hogy a ct' tengely átmegy az A és B ponton). Ekkor az eseményeket az időpontjuk szerint lehet szétválasztani, ezért ezt a tartományt *időszerűnek* nevezik.

A C eseményre, és minden olyan eseményre, amely a fény világvonalán (a fénykúpon) van, érvényes, hogy

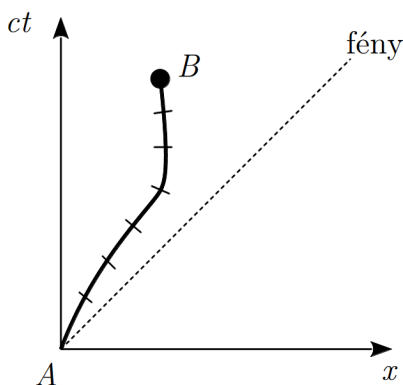
$$\Delta s_{AB}^2 = 0. \quad (11.90)$$

Az ilyen eseményeket, amelyek a fény (elektromágneses hullám) terjedésével kapcsolatosak, *fényszerűnek* nevezik.

Végül a D eseményre, és minden olyan eseményre, amely a szürke fénykúp-tartományokon kívül van, fennáll, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 < 0. \quad (11.91)$$

Ezekhez az eseményekhez lehet találni olyan – az eredetihez képest állandó sebességgel mozgó – koordináta-rendszert, amelyben az A és a kérdéses (pl. D) esemény azonos időben zajlik, csak a helyük más. (Ez azt jelenti, hogy az x' tengely átmegy az A és D ponton). Ekkor az eseményeket a helyük szerint lehet szétválasztani, ezért ezt a tartományt *térszerűnek* nevezik.



11.16. ábra. Egy tömegpont mozgásának világvonala a négyestérben

Ha az események sorozata egy tömegpont mozgása, akkor a négyestérben ábrázolva a mozgás olyan pontok összessége, amelyek mindegyike azt adja meg, hogy adott időben a pont hol van. Ezek a pontok kirajzolják a tömegpont világvonalát (a 11.16. ábrán AB).

Mivel a tömegpont sebessége változhat, a tömegponthoz nem rendelhető hozzá egyetlen inerciarendszer, hanem a pillanatnyi sebességének megfelelően mindig más és más

inerciarendszerben van nyugalomban. Ilyenkor a tömegponthoz rendelhető sajátidő a mozgás során állandóan változik, ezért a világvonalat elemi szakaszokra kell bontani (a 11.8), és a sajátidőt ezekre kiszámítani. Ezt az *elemi sajátidőt* a ds^2 invariáns intervallumnégyzet segítségével a

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} \quad (11.92)$$

összefüggéssel kapjuk meg. A kifejezésből látható, hogy az *elemi sajátidő is invariáns*, hiszen az invariáns intervallumnégyzet gyökéből egy invariáns skalárral (c) való osztással kaptuk.

A kifejezést átrendezve azt kapjuk, hogy

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} = dt \sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2}{c^2}}. \quad (11.93)$$

Ebből a teljes AB változásra vonatkozó *invariáns makroszkopikus sajátidőt* az elemi sajátidők összegzésével kapjuk:

$$\tau = \int_A^B dt \sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2(t)}{c^2}}. \quad (11.94)$$

11.6. A relativisztikus dinamika alapjai

A klasszikus fizikában van néhány alapvető fontosságú mennyiség, amelyre megmaradási tétel érvényes. Ilyen például az energia és az impulzus (lendület). Felmerül a kérdés, hogy a relativisztikus mechanikában vannak-e ezeknek a mennyiségeknek megfelelő megmaradó mennyiségek, és ezek hogyan definiálhatók.

Az energia és impulzus relativisztikus alakját a korábban bevezetett négyesvektorok segítségével formálisan nagyon egyszerűen megkaphatjuk.

Vizsgáljunk egy mozgó tömegpontot, amelynek a tömegponthoz rögzített rendszerben mért ún. *nyugalmi tömege* m_0 . A tömegpont mozgásának jellemzésére vezessünk be egy új négyesvektort úgy, hogy a $c dt$, dx , dy , dz mennyiségeket a $m_0/d\tau$ invariáns skalárral megszorozzuk (itt c a vákuumbeli fénysebesség, $d\tau$ az elemi sajátidő). Ekkor az

$$\frac{m_0 c dt}{d\tau}, \quad \frac{m_0 dx}{d\tau}, \quad \frac{m_0 dy}{d\tau}, \quad \frac{m_0 dz}{d\tau} \quad (11.95)$$

mennyiségeket kapjuk. Felhasználva a $d\tau = dt \sqrt{1 - v_{\text{pill}}^2/c^2}$ összefüggést, és azt, hogy $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$ és $dz/dt = v_z$ végül az

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2}{c^2}}}, \quad \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2}{c^2}}}, \quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2}{c^2}}}, \quad \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2}{c^2}}} \quad (11.96)$$

négyesvektort kapjuk.

11.6.1. Az impulzus (lendület), a tömeg és a mozgásegyenlet

Ha megvizsgáljuk a fent bevezetett új négyesvektornak az utolsó három komponensét, akkor azonnal látszik, hogy ezek a $v_{\text{pill}} \ll c$ nemrelativisztikus esetre való áttérésnél a közönséges impulzusvektor

$$p_x = m_0 v_x^2, \quad p_y = m_0 v_y^2, \quad p_z = m_0 v_z^2 \quad (11.97)$$

három komponensét adják. Ennek alapján a relativitáselméletben az impulzust (lendületet) a

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.98)$$

összefüggéssel definiálhatjuk. Eszerint a tömegnek az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.99)$$

kifejezés felel meg.

Ez azt jelenti, hogy a tömeg függ attól, hogy a tömegpont milyen sebességgel mozog a megfigyelőhöz képest: a tömegpont tömegét mindig nagyobbnak találjuk, ha hozzánk képest mozog, mint ha hozzánk képest nyugalomban van. Erre a *relativisztikus tömegnövekedésre* is érvényes azonban, hogy csak a fénysebességet megközelítő sebességeknél számottevő, a $v \ll c$ esetben visszkapjuk a klasszikus mechanika $m = m_0$ összefüggését. A tömegnövekedést több direkt kísérlet igazolja, de közvetve az a tény is, hogy a nagy sebességű részecskéket előállító gyorsítók csak akkor működnek, ha tervezésüknél figyelembe vették ezt az összefüggést.

A tömeg sebességfüggése alapján várható, hogy a dinamika alapegyenlete sem alkalmazható a szokásos $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ alakban. Valóban kimutatható, hogy a *mozgásegyenlet* a Lorentz-transzformációval szemben akkor invariáns, ha az

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (11.100)$$

formában használjuk. A $v \ll c$ esetben ebből az alakból visszkapjuk a mozgásegyenlet szokásos alakját, hiszen ekkor a tömeg gyakorlatilag állandó: $m \approx m_0$, és így érvényes az $\mathbf{F} \approx m_0 \mathbf{a}$ egyenlet.

A relativisztikus mozgásegyenlet következményeit jól illusztrálja az állandó F erő hatására bekövetkező mozgás esete. Ha a kezdősebesség nulla, akkor a klasszikus mechanika szerint

$$v(t) = \frac{F}{m_0}t, \quad (11.101)$$

tehát a sebesség az idővel arányosan növekedve tetszőlegesen nagy értéket vehet fel.

Az

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (11.102)$$

relativisztikus mozgásegyenlet idő szerinti integrálásából viszont az

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.103)$$

összefüggést kapjuk, amiből

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{(m_0 c)^2}{(Ft)^2}}} \quad (11.104)$$

adódik. A sebesség az idő előrehaladtával egyre lassúbb ütemben növekszik, és a $t \rightarrow \infty$ esetben a c határértékhez tart (nem pedig határtalanul nő).

Természetesen ha $v \ll c$, akkor

$$Ft = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 v, \quad (11.105)$$

tehát visszkapjuk a klasszikus összefüggést.

A relativisztikus mozgásegyenlet fenti alakjának helyességét ugyancsak a nagysebességű részecskék előállítására szolgáló részecskegyorsítók működése igazolja, amelyeknek tervezésénél ezt a törvényt használják.

11.6.2. Az energia, a tömeg-energia összefüggés a relativitáselméletben

Annak érdekében, hogy a fent bevezetett négyesvektor első,

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{pill}}^2}{c^2}}} \quad (11.106)$$

komponensének fizikai értelmét kiderítsük, írjuk fel a klasszikus mechanika *munkatétel* néven ismert összefüggését, amely szerint egy tömegpontra ható erők eredőjének munkája a tömegpont mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_e \, d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{m2} - E_{m1} = \Delta E_m. \quad (11.107)$$

Ha a tömegpontnak *nincs helyzeti energiája*, akkor ez a

$$W_{12} = E_2 - E_1 = \Delta E \quad (11.108)$$

alakba írható, ahol E a teljes energia.

Számítsuk ki most ezt a munkavégzést a relativisztikus mechanikában, abban az egyszerűsített esetben, amikor a tömegpontra egyetlen \mathbf{F} erő hat és ez párhuzamos a \mathbf{v} sebességgel (egyenes vonalú mozgás). A tömegpontra ható \mathbf{F} erő az 1 pontból a 2 pontba való átmenet során

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{d\mathbf{p}}{dt} \, d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{v} \, d\mathbf{p} = \int_1^2 v(p) \, dp \quad (11.109)$$

munkát végez.

A számítás elvégzéséhez meg kell határoznunk a $v(p)$ függvényt. Ezt a

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.110)$$

összefüggés segítségével tehetjük meg:

$$p^2 - p^2 \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 v^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2} \right) v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{c^2 p^2}{m_0^2 c^2 + p^2}, \quad (11.111)$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$v(p) = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}. \quad (11.112)$$

Behelyettesítve ezt a munka kifejezésébe, az integrálás könnyen elvégezhető, és az alábbi eredményt kapjuk

$$W_{12} = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_2^2} - c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2}. \quad (11.113)$$

Ez azt jelenti, hogy, ha nincs helyzeti energia, akkor a munkatétel alapján az energiának az

$$E(v) = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} \quad (11.114)$$

kifejezés felel meg.

Alkalmazva az impulzus relativisztikus kifejezését, ebből azt kapjuk, hogy

$$E(v) = c\sqrt{m_0^2c^2 + \frac{m_0^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{\frac{m_0^2c^2 - m_0^2v^2 + m_0^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.115)$$

amiből következik, hogy

$$E(v) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11.116)$$

Nézzük meg most, hogy mit kapunk ebből a $v \ll c$ esetben. Vezessük be az $a = v^2/c^2$ változót, amelyre teljesül az $a \ll 1$ feltétel, így ha az $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - a}$ kifejezést az a változó szerint sorbafejtjük, akkor megállhatunk a második tagnál, tehát azt kapjuk, hogy $1/\sqrt{1 - a} \approx 1 + 1/2 \cdot a$. Ennek megfelelően $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + 1/2 \cdot v^2/c^2$. Ezzel az energiára a $v \ll c$ közelítésben az

$$E(v) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (11.117)$$

összefüggést kapjuk, aminek megváltozása valóban a klasszikus mozgási energia megváltozásával egyenlő:

$$E(v_2) - E(v_1) = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_1^2. \quad (11.118)$$

Eszerint az

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11.119)$$

illetve a tömegre vonatkozó $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ összefüggés felhasználásával kapható

$$E = mc^2 \quad (11.120)$$

menyiséget tekinthetjük a *tömegpont energiájának*. Ezzel a tömegponton végzett munka a

$$W_{12} = m_2c^2 - m_1c^2 = \Delta(mc^2) = c^2\Delta m \quad (11.121)$$

alakban írható fel.

Figyelemre méltó, hogy az energia megváltozása a tömeg megváltozásából adódik, hiszen az $E = mc^2$ összefüggés szerint az energia a test tömegével van egyértelmű kapcsolatban. Ebből következik, hogy m tömeg egyben mc^2 energiatartalmat jelent, és fordítva, minden E energiatartalom E/c^2 tömeggel (tehetetlenséggel) jár együtt.

Az összefüggésből az is következik, hogy egy rendszerben az energia és a tömeg változása mindig együtt, egymással arányosan történik a $\Delta E = c^2 \Delta m$ összefüggésnek megfelelően.

11.6.3. A nyugalmi energia és a tömeghiány

A klasszikus közelítésben kapott

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (11.122)$$

összefüggésből látszik, hogy a relativitáselméletben a klasszikus mozgási energiának megfelelő kifejezés:

$$E_m = mc^2 - m_0 c^2. \quad (11.123)$$

Ez az energia a $v = 0$ esetben – a klasszikus mozgási energiához hasonlóan – nulla lesz.

Ezt a kifejezést és az energiára bevezetett $E = mc^2$ összefüggést felhasználva az energia az

$$E = E_m + m_0 c^2 \quad (11.124)$$

alakba írható. Ebből látható, hogy a relativitáselméletben egy nyugalomban lévő test ($E_m = 0$) is rendelkezik

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (11.125)$$

energiával, amit a test *nyugalmi energiájának* neveznek.

A tapasztalat azt mutatja, hogy ez a nyugalmi tömeghez rendelt sajátenergia nem pusztán matematikai konstans, hanem valóban fizikai realitással bír: a nyugalmi energia részben vagy egészben át tud alakulni másfajta energiává (pl. elektromágneses sugárzássá), s ilyenkor a nyugalmi tömeg is a $\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$ összefüggésnek megfelelő módon változik meg. Ennek kísérletileg is ellenőrizhető esete az atommagok *tömeghiányával* kapcsolatos.

Az atommagok tömegének méréséből az derül ki, hogy egy atommag tömege kisebb, mint a magot alkotó szabad nukleonok (protonok és neutronok) tömegének összege. Ezt a tömegkülönbséget *tömeghiánynak* vagy idegen szóval *tömegdefektusnak* nevezik. Ha

az atommag nyugalmi tömegét M_0 -al, a proton nyugalmi tömegét m_{p0} -al, a neutronét m_{n0} -al jelöljük, akkor az atommag tömeghiánya

$$\Delta m_0 = Nm_{n0} + Zm_{p0} - M_0 \quad (11.126)$$

(Z a protonok, N a neutronok száma a magban).

A jelenséget a relativisztikus tömegformula segítségével lehet megmagyarázni, az atommag energiája ugyanis más kötött nukleonok esetén, mint nukleonokra szétszedett állapotában. Ennek oka a következő. Az atommagot alkotó nukleonok azért maradnak az atommagban, mert vonzzák egymást. Ez azt jelenti, hogy a magnak különálló nukleonokra való szétszedéséhez munkát kell végezni, tehát a nukleonokra szétszedett rendszer energiája nagyobb, mint az atommagé (a többlet a befektetett munkából származik). A kötött állapotban lévő rendszer (az atommagban kötött nukleonok) E_{mag} energiája, és a szétszedett rendszer (szabad nukleonok) E_{nukl} energiája közti

$$\Delta E_k = E_{\text{nukl}} - E_{\text{mag}} \quad (11.127)$$

különbséget az illető atommag *kötési energiájának* nevezik.

Ennek alapján a nukleonok szabad és kötött állapota közti Δm_0 tömegkülönbség – a tömeghiány – a két állapot közti ΔE_k energiakülönbségnek felel meg, amit a

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 \quad (11.128)$$

összefüggéssel tudunk számszerűen is értelmezni.

Mivel az atommag és a nukleonok tömege is mérhető, ez az összefüggés módot ad az atommagok kötési energiájának egyszerű meghatározására:

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 = (Nm_{n0} + Zm_{p0} - M_0)c^2. \quad (11.129)$$

11.6.4. A négyesimpulzus, az energia és az impulzus összefüggései

A fenti megfontolások szerint az energia és az impulzus három komponense, vagyis az

$$E = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.130)$$

mennyiségek négyesvektort alkotnak, amelyet gyakran *négyesimpulzusnak* neveznek. Ebből következik, hogy az

$$E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \quad (11.131)$$

menyiség invariáns a Lorentz-transzformációval szemben.

Kimutatható, hogy egy *kölcsönhatások nélkül* mozgó tömegpontra a négyesimpulzus állandó, ami az jelenti, hogy

$$E = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \mathbf{p} = \text{állandó}, \quad (11.132)$$

vagyis az energia- és impulzusmegmaradás törvénye egyetlen megmaradási törvénnyé olvad össze.

Az energia bevezetésénél az energia és az impulzus nagyságának összefüggésére az

$$E = mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (11.133)$$

kifejezést kaptuk. Vizsgáljuk meg ezt az összefüggést abban a speciális esetben, ha a vizsgált objektumnak *nincs nyugalmi tömege* (pl. elektromágneses sugárzás). Ekkor az energia és az impulzus között az

$$E = pc \quad (11.134)$$

összefüggés érvényes. Ezt az összefüggést az elektromágnességtan törvényeiből is le lehet vezetni, ami nem meglepő, hiszen a relativitáselmélet az elektromágnességtan törvényeit nem módosítja.

Az $E = mc^2$ és az $E = pc$ összefüggésekből következik, hogy egy nyugalmi tömeg nélküli objektum impulzusa csak

$$p = mc \quad (11.135)$$

lehet, vagyis csak fénysebességgel mozoghat.

A fordított állítás is igaz: egy fénysebességgel mozgó objektumnak nem lehet nyugalmi tömege. Ezt az $mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$ és a $p = mc$ összefüggések felhasználásával láthatjuk be. A két összefüggésből kapott

$$mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + m^2 c^2} \quad (11.136)$$

egyenlet négyzetre emelése után azt kapjuk, hogy

$$m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + m^2 c^4, \quad (11.137)$$

vagyis

$$m_0 = 0. \quad (11.138)$$

11.6.5. A körfrekvencia-hullámszám négyesvektor

A négyesimpulzusból elemi kvantumelméleti összefüggések felhasználásával könnyen kaphatunk egy új négyesvektort, amit a hullámtanban használhatunk fel.

A kvantumelmélet szerint az elektromágneses hullámban terjedő fotonok energiájára és impulzusára az

$$E = h\omega, \quad \mathbf{p} = h\mathbf{k} \quad (11.139)$$

összefüggések érvényesek, ahol ω a hullám körfrekvenciája, \mathbf{k} pedig a hullámszámvektor. Így az

$$(E, \mathbf{p}) \quad (11.140)$$

négyesvektorból az invariáns skalár h -val való osztással kapjuk az

$$(\omega, \mathbf{k}) \quad (11.141)$$

négyesvektort.

Mivel a négyesvektorok skalárszorzata invariáns, az (ω, \mathbf{k}) és a (t, \mathbf{r}) négyesvektorok skaláris szorzatára fennáll, hogy

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \text{invariáns}. \quad (11.142)$$

Az így kapott mennyiség nem más, mint a hullámfüggvény argumentuma, ami ezek szerint különböző inerciarendszerekben azonos.

Irodalomjegyzék

- [1] http://fizipedia.bme.hu/index.php/Kísérleti_fizika_gyakorlat_2.
- [2] http://fizipedia.bme.hu/index.php/Elektromosságtan_kísérletek
- [3] Budó Á.–Mátrai T.: Kísérleti fizika II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999
- [4] R. Feynman et al.: Mai fizika 5-6 Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986
- [5] Hevesi I.: Elektromosságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998
- [6] Bronstejn, I. N. – Szemengyajev, K. A.: MATEMATIKAI ZSEBKÖNYV, Műszaki Könyvkiadó, később Typotex, 2000