

Q A
660
K66
1907
MATH

UCB

A TÖBBMÉRETŰ TÉR
FORGÁSAINAK ÉS VÉGES FORGÁSCSOPORTJAINAK
ANALYTIKUS TÁRGYALÁSA

IRTA

KÖNIG DÉNES



BUDAPEST
FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

1907

Nagyságos
dr. Farkas Gyula
egyetemi tanár úrnak
Kiváló lehellettel
a szerző

A TÖBBMÉRETŰ TÉR

FORGÁSAINAK ÉS VÉGES FORGÁSCSOPORTJAINAK

ANALYTIKUS TÁRGYALÁSA

Pami
sep

MATH

IRTA

KÖNIG, DÉNES



BUDAPEST

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

1907

5386-4220



Pam
rep
MATH

**Az I. fejezet III. tételének (7. 1.) bizonyítása
következőképen helyesbítendő.**

Legyen

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$$

(i=1, 2, ..., k)

QA660
K66
1907
MATH/
STAT

a megadott k pont. Van egy az

$$M \equiv \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n & 1 \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(k)}_1 & x^{(k)}_2 & \dots & x^{(k)}_n & 1 \end{vmatrix}$$

mátrixra jellemző oly p szám ($p \leq k$), hogy e mátrix azon al-determinánsai között, melyek az utolsó oszlopból tartalmaznak elemet, van egy p -edfokú, mely nem tűnik el, míg minden magasabbfokú ily al-determináns (ha egyáltalán van ilyen) el-tűnik. Az el nem tűnő p -edfokú al-determináns az általánosság megszorítása nélkül így vehető fel:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_{p-1} & 1 \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_{p-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(p)}_1 & x^{(p)}_2 & \dots & x^{(p)}_{p-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (I)$$

Az $n-p+1$ számú

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{p-1} & x_\alpha & 1 \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_{p-1} & x'_\alpha & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(p)}_1 & x^{(p)}_2 & \dots & x^{(p)}_{p-1} & x^{(p)}_\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(α=p, p+1, ..., n)

egyenletet most már minden $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ rendszer kielégíti. Ha t. i. $i = 1, 2, \dots, p$, akkor e rendszer helyettesítése után a determináns két sora azonos lesz, ha pedig $i = p+1, p+2, \dots, n$, akkor (a sorok sorrendjétől eltekintve) az M mátrix oly $p+1$ -edfokú al-determinánsát nyerjük, mely az utolsó oszlopból is tartalmaz elemet. Ez az $n-p+1$ számú egyenlet végül független is egymástól, mert mindegyik tartalmaz egy oly x -et (t. i. x_α -t), mely egy másikban sem szerepel; x_α együtt-hatója t. i. (I) szerint nem tűnik el.

A k pont kielégít ily módon $n-p+1$, (azaz legalább $n-k+1$) független lineáris egyenletet s így valóban egy R_{k-1} -ben fekszik.

BEVEZETÉS.

A dolgozat tárgya és ennek irodalma.

Dolgozatunk tárgya az n -méretű tér (R_n) forgásainak (I—IV. fej.) és azon véges forgáscsoportjainak (V—VII. fej.) tárgyalása, melyek az n -méretű tér különböző szabályos testjeit önmagukba viszik át.

Az n -méretű geometria első rendszeres, és pedig analitikus tárgyalása JORDAN «Essai»-jében¹ található, melynek különösen a kinematikát tárgyaló VII. fejezete van dolgozatunkkal (a III. fejezettel) kapcsolatban. SCHOUTE kétkötetes munkájának² inkább csak eredményei és nem módszerei jönnek számunkra tekintetbe.

A háromméretű szabályos testeket, mint köztudomású, már PLATO ismerte. A hozzájuk tartozó forgáscsoportokat KLEIN³ tárgyalta először. A négy- és többméretű szabályos testek felfedezésének az érdeme STRINGHAM-é,⁴ kinek eredménye ez; $n=4$ esetében hat, $n>4$ esetében pedig mindenkor három szabályos test létezik. Ugyanezen eredményeket PUCHTA⁵ a

¹ JORDAN: «Essai sur la géométrie à n dimensions». Bulletin de la Soc. Math. de France, III. (1875).

² SCHOUTE: «Mehrdimensionale Geometrie». I—II. Leipzig, Göschen (1902, 1905).

³ KLEIN: «Vorlesungen über das Ikosaeder», Leipzig, Teubner (1884).

⁴ STRINGHAM: «Regular figures in n -dimensional space». American Journal of Mathematics, III. (1880).

⁵ PUCHTA: «Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raum von 4 Dimensionen». — Wiener Berichte, LXXXIX. (1884) és «Analytische Bestimmung der regelm. conv. Körper im Raume von beliebiger Dimension». — Wiener Berichte, XC. (1884).

mindenesetre tökéletesebb¹ analitikus módszerrel vezeti le, mely az absztrakt csoportelméletbe tartozó eredményekhez is vezet. A négy méretű tér szabályos testjeihez tartozó csoportokat VAN OSS tárgyalja *giesseni* dissertatiójában,² a mienktől lényegesen különböző szempontból: a forgástengelylyel nem törődve megelégszik az alsó csoportok felsorolásával. Ugyanezzel foglalkozik GOURSAT nagyszabású munkája,³ mely analitikus alapon tárgyalja a kérdést. Az n -méretű három szabályos test csoportja különösen geometriai szempontból nem igen volt eddig tárgyalva és úgyszólván csupán e csoportok rendszáma $\left(\frac{n!}{2}, 2^{n-1}n!, \text{ illetve } 2^{n-1}n!\right)$ volt ismeretes.⁴

A legegyszerűbb n -méretű szabályos testhez, az ú. n. simplexhez tartozó «valódi» csoportoknak azonban alacsony n -ekre máris elég nagy irodalma van. Ámde mindenütt e geometriai interpretációtól függetlenül tárgyaltattak. Egyrészt mint absztrakt csoportokat vizsgálták ezeket, másrészt hozzájuk holoedrikusan isomorph lineáris csoportokat kerestek, lehetőleg kis számú változóval: $n=3$ esete a tetraéder, $n=4$ pedig az ikozaéder csoportjához vezet,⁵ t. i. mindkettő isomorph 5 elem alternáló csoportjával. A négy méretű simplex és az ikozaéder csoportjának isomorphismusát VAN OSS vette észre először említett munkájában, de ezt a továbbiakban nem használja fel. E két csoporthoz már kétváltozós lineáris csoport képezhető.⁵ Ellenben az ötdimenziós valódi simplexcsoporthoz, mely a 360 operációból álló VALENTINER-féle csoporttal⁶ isomorph (mindkettő 6 elem alternáló csoportjával isomorph), csak há-

¹ STRINGHAM maga sem tartotta módszerét tökéletesnek (l. említett munkája végét).

² VAN OSS: «Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von 4 Dimensionen», Utrecht, 1894.

³ GOURSAT: «Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace». Ann. Éc. Norm., 3e. S., VI. (1889).

⁴ L. SCHOUTE említett munkáját (II. kötet, p. 256).

⁵ L. KLEIN: «Ikozaéder»-jét.

⁶ VALENTINER: «De endelige Transformations Grupper-Theorie», Kjøbenhavnnske Skr. 6 (1889) (avec un resumé français).

romváltozós isomorph lineáris csoport képezhető. E csoport részletes tárgyalása WIMAN-tól származik.¹ Legegyszerűbben MASCHKE² származtatja le egymásból e lineáris csoportokat, megtoldva egy $\frac{7!}{2}$ substituczióból álló négyváltozós lineáris csoporttal, mely a hatdimenziós simplexcsoporttal isomorph és bebizonyítja, hogy kevesebb változóval ilyen nem képezhető. MASCHKE symmetrikus permutációcsoporttal isomorph lineáris csoportokkal is foglalkozik, s így $n=2, 3, 4, 5$ esetére a «teljes» simplexcsoporthoz is felállítja a holoedrikusan isomorph minimális számú (3 vagy 4) változójú lineáris csoportokat.

A mi e dolgozat tárgyát részletesebben illeti, az első fejezetben az R_n bizonyos egyszerű «összekapcsolási» törvényeit bizonyítjuk be, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz és bevezetjük az R_n eltolásának, forgásának és általános mozgásának fogalmát. Majd kimutatjuk, hogy két tetszőleges R_k (II. fej.) és két congruens pontrendszer (IV. fej.) mindig átvihető egymásba. (Ezek a tételek alapszik a véges forgáscsoportok tárgyalására.) A III. fejezet pedig az általános R_n -forgás tengelyének méretére vonatkozó kérdést intézi el. Az V. fejezetben rekurzív eljárást adunk a simplex-csúcpontok koordinátáinak meghatározására és kimutatjuk a csoport isomorphismusát az $n+1$ elem symmetrikus illetve alternáló csoportjával. A VI. fej. a simplexcsoportnak a forgástengelylyel kapcsolatos tulajdonságait tárgyalja. Egyik főeredmény itt az, hogy a simplex-forgás tengelyének mérete 1-gyel kisebb a létrehozott csúcpont-permutáció ciklusainak számánál. Az utolsó fejezetben pedig az oktaedroid és hexaedroid csoportját tekintjük hasonló szempontból.

A specifikusan 2, 3 és 4-méretű szabályos testekkel nem foglalkozunk, minthogy végig egészen általános n -et veszünk

¹ WIMAN: «Eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen», Mathematische Annalen, 47 (1896).

² MASCHKE: «Symmetrische und alternirende Collineationsgruppen», Mathematische Annalen, 51 (1898).

fel. Ugyanezen okból nem foglalkozhatunk oly tulajdonságokkal, melyek az n «egyéni» tulajdonságaitól (a primszámosztótól, stb.) függenek. Különösen két problémára gondolunk itt. Az egyik a csoport minimális számú alkotójának meghatározását követeli. A másik oly minimális számú változót tartalmazó lineáris substituczió találására vonatkozik, mely csoportunkkal isomorph. Ez az eddig elintézetlen probléma általános megoldása mindenesetre egészen más módszereket igényel.

I. Az n -mértű tér lineáris részei és mozgásai.

Az n -mértű teret, R_n -et, mint az

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

számcomplexusok összességét definiáljuk, hol az x számok minden valós, véges értéket felvehetnek. E complexust az R_n egy pontjának is nevezzük, melynek x_1, x_2, \dots, x_n az n koordinátája. Az

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ és } (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

pontok *távolságának* az

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

számot fogjuk nevezni. A $(0, 0, \dots, 0)$ pontot O -val jelöljük.

Az R_n azon pontjainak összességét, melyeknek koordinátái kielégítenek egy

$$a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + \dots + a_n^{(i)}x_n + a_{n+1}^{(i)} = 0$$

$(i=1, 2, \dots, m)$

lineáris egyenletrendszert, az R_n egy *lineáris részének* nevezük. Ha e rendszer mátrixának rangszáma p , akkor $n-p$ -t e lineáris rész *méretének* nevezük, hiszen a lineáris egyenletrendszerek elmélete szerint két ily rendszer rangszáma megegyezik, ha tartalmuk (gyökrendszereik összessége) ugyanaz. Ismeretes továbbá, hogy e rendszerből kiválasztható p -számú egyenlet oly módon, hogy ezek oly rendszert alkossanak, mely-

nek tartalmaznia az eredetiével megegyezik és melynek mátrixa ugyancsak p -edrangú.

Így tehát minden k -mértű lineáris része az R_n -nek oly $n-k$ egyenletből álló rendszerrel adható meg, melynek mátrixa $n-k$ -adrangú, azaz mely «csupa egymástól független egyenletet tartalmaz».

Az R_n -nek k -mértű lineáris részeit R_k -val fogjuk jelölni. (Látni fogjuk t. i. a II. fejezetben, hogy ezek mily szoros vonatkozásban vannak az (x_1, x_2, \dots, x_k) komplexusok összességével.)

Az R_n -nek ezek szerint R_0, R_1, R_2, R_3 jelekkel jelölendő lineáris részeit, mint $n=3$ esetében, úgy általános n -nél is pontnak, egyenesnek, síknak, illetve (hárommértű) térnek is fogjuk nevezni.

Különbözőnek nevezünk két R_k -t, ha az egyik tartalmaz oly pontot, mely a másikban nincs bent. Ez esetben az egyik egyenletrendszer tartalmaz oly egyenletet, mely a másik rendszernek nem folyománya. Két különböző R_k közös pontjai tehát kielégítenek $n-k+1$ független egyenletet és így

I. Ha az R_n egy lineáris része befoglaltatik az R_n két különböző R_k -jában, akkor mérete k -nál kisebb. Innen továbbá:

II. Az egyedüli k -mértű lineáris rész, mely R_k -t tartalmazza, maga R_k .

III. k -számú pont mindig egy R_{k-1} -ben fekszik ($k \leq n+1$). Legyen t. i.

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ (i=1, 2, \dots, k)$$

ezt a k pont. Ezek valóban kielégítenek egy ily rendszert:

$$a_1^{(r)} x_1^{(i)} + a_2^{(r)} x_2^{(i)} + \dots + a_n^{(r)} x_n^{(i)} + a_{n+1}^{(r)} = 0 \\ (r=1, 2, \dots, n-k+1) \\ (i=1, 2, \dots, k)$$

Ugyanis ily homogén egyenletrendszernek, melyben az ismeretlenek (az a -k) száma $((n+1)(n-k+1))$ nagyobb mint az egyen-

letek száma $(k(n-k+1))$, mindig van oly megoldása, hogy semmiféle r -nél sem 0 valamennyi $a^{(r)}$.

Az I. és III. tételből még a következőhöz jutunk:

IV. *Ha k -számú pont nem fekszik egy R_{k-2} -ben, akkor egy és csak egy oly R_{k-1} van, melyben mind a k pont bent fekszik.*

A következőkben az R_n -nek önönmagán való bizonyos kölcsönösen egyértelmű ábrázolásai fognak fontos szerepet játszani. Különösen oly ábrázolások fognak tekintetbe jönni, a melyeknek megvan a következő két tulajdonságuk:

A) a távolságokat nem változtatja (congruens ábrázolás)

B) k -számú pont akkor és csak akkor fekszik egy R_{k-2} -ben, ha «kép»-eik egy R_{k-2} -ben fekszenek.

Mindkét tulajdonsága megvan először is az

$$x'_i = x_i + d_i \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletekkel definiált ábrázolásnak, az ú. n. *eltolásnak*. Hiszen

$$\begin{aligned} (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad \text{és} \quad (y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \\ \text{lévén az} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{és} \quad (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

pontok képe valóban fennáll a

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

egyenlőség. A mi pedig a B) tulajdonságot illeti: ha (x_1, x_2, \dots, x_n) kielégít egy

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1} = 0$$

egyenletet, akkor $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ kielégíti a

$$\sum_{i=1}^n a_i (x'_i - d_i) + a_{n+1} = 0$$

egyenletet és viszont: minden $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ -re fennálló egyenlethez $x'_i = x_i + d_i$ által egy oly egyenlet tartozik, melyet (x_1, x_2, \dots, x_n) elégít ki. Minthogy továbbá lineárisan füg-

getlen egyenleteknek ugyanily egyenletek felelnek meg, azért az eltolásoknak valóban megvan a B) tulajdonságuk.

A második fontos ábrázolást az ú. n. orthogonális lineáris (homogén) substitucziók szolgáltatják.

Az

$$(S) \quad x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

lineáris homogén substitucziót tudvalevőleg akkor nevezik (CAYLEY-vel) *orthogonálisnak*, ha az a_{ik} -k úgy vannak választva, hogy identikusan fennáll a

$$(I) \quad \sum_{k=1}^n x'_k{}^2 = \sum_{k=1}^n x_k{}^2$$

összefüggés. Ezen substitucziók elméletét EULER, CAUCHY és JACOBI alapította meg.¹ Felsoroljuk röviden a későbbiekben felhasználandó és egyszersmind legfontosabb tulajdonságaikat.

(I)-be behelyettesítve az x' -k kifejezéseit és egyenlővé téve a két oldal megfelelő együtthatóit, az orthogonális substitucziókra jellemző következő «orthogonalitási feltételek»-hez jutunk:

$$(II) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1 & (i=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0 & (i, j=1, 2, \dots, n; i \neq j) \end{cases}$$

Kiadódik innen továbbá, hogy, ha $A = \|a_{ik}\|$ a substituczió determinánsa, akkor $A^2=1$ és így $A=\pm 1$. Végül S -sel együtt S^{-1} is mindig orthogonális substituczió és S^{-1} nem egyéb, mint

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

¹ A pontos irodalmi utalások pl. BALTZER «Determinanten»-jában találhatók, a 4. kiadás (Leipzig, 1875) 172. lapján.

úgy, hogy (II)-ből az a -k két indexének felcserélésével egy második identitásrendszerhez jutunk. Minthogy továbbá két orthogonális substituczió szorzata a definíció szerint szintén orthogonális, azért az orthogonális substitucziók csoportot alkotnak.

Vonással mindig az S substituczió véghezvitelét jelezve, a (II) képletekkel könnyen verifikáljuk a következő képletet is:

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

Az (S)-sel megadott ábrázolásnak, melyet — a szerint, hogy $A=1$ vagy $A=-1$ — az R_n *valódi* illetve *nem valódi* (O *körülí*) *forgásának* nevezünk, e szerint megvan az A) tulajdonsága. Hogy a B) tulajdonságuk is megvan, ép úgy mutatható ki, mint az eltolásokra.¹

Eltolások és forgások összetevésével definiált minden ábrázolást az R_n *mozgásának* nevezzük, és így ezek csoportot alkotnak. A mozgásnak, mely tehát mindig, mint lineáris substituczió adható meg, megvan tehát mind az A),² mind a B) tulajdonsága. Ha van oly mozgás, mely egy pontrendszert egy másikba visz át, akkor röviden azt mondjuk, hogy az egyik pontrendszer a másikba «átvihető». Ekkor természetesen a második is átvihető az elsőbe. Minden S mozgáshoz tartozik t. i. egy S^{-1} úgy, hogy $SS^{-1}=1$.

Az eddigiekhez hasonló megfontolásokkal belátható a következő tétel is:

V. *Minden mozgás egy R_k -t ismét egy R_k -ba visz át.*

Annak a bizonyítását, hogy két R_k egyszersmind mindig átvihető egymásba, a következő fejezet tartalmazza.

¹ A B) tulajdonsága t. i. minden olyan lineáris substituczióval definiált ábrázolásnak megvan, melynek determinánsa nem zérus. Egyébként a B) tulajdonság folyománya A)-nak.

² Különböző pontok tehát mozgással különböző pontokba mennek át.

II. A lineáris részek forgása.

I. Adva lévén a tetszőleges

$$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

pont, mindig van oly valódi forgás, mely ezt a $(0, 0, \dots, 0, d)$ pontba viszi át, ha

$$d^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{0^2}.$$

A tétel $n=2$ esetére igaz lévén, feltehetjük, hogy $n > 2$, és hogy minden n -nél kisebb méretszámra is igaz úgy, hogy van oly valódi forgás S , mely az R_{n-1} -nek $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ pontját $(0, 0, \dots, 0, d')$ -be viszi, hol $d'^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{0^2}$. Ugyanez az orthogonális substituczió, mint az R_n forgását tekintve, P_0 -t $(0, 0, \dots, 0, d', x_n^0)$ -ba viszi, minthogy x_n nem is szerepel benne. Ha most még

$$T : \begin{cases} x'_{n-1} = b_{11} x_{n-1} + b_{21} x_n \\ x'_n = b_{12} x_{n-1} + b_{22} x_n \end{cases}$$

oly kétmértű, tehát létező valódi forgás, mely (d', x_n^0) -t $(0, d)$ -be viszi át, hiszen

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{0^2} + x_n^{0^2} = d'^2 + x_n^{0^2};$$

akkor — T -t is most, mint az R_n forgását értelmezvén — ST a keresett forgást adja: $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ -t átviszi $(0, 0, \dots, d)$ -be, miután az S először $(0, 0, \dots, d', x_n^0)$ -ba vitte; T innen — nem változtatván az x_1, x_2, \dots, x_{n-2} koordinátákat — valóban $(0, 0, \dots, 0, d)$ -be viszi.

II. Egy tetszőleges O -n átmenő egyenes:

$$\sum_{k=1}^n a_k^{(i)} x_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n-1)$

átvihető valódi forgással az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott egyenesbe, az $ú. n. x_n$ -koordináta tengelybe.

Legyen t. i. $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ az adott egyenes egy pontja, akkor ez az I. tétel szerint egy valódi forgással $(0, 0, \dots, 0, d)$ -be vihető, hol

$$d^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{0^2}.$$

Ha ez a forgás az adott egyenest

$$\sum_{k=1}^n b_k^{(i)} x_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n-1)$

egyenesbe viszi, akkor, minthogy $(0, 0, \dots, 0, d)$ rajta fekszik ezen egyenesen:

$$b_n' = 0, b_n'' = 0, \dots, b_n^{(n-1)} = 0,$$

úgy hogy

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$$

kielégíti az új egyenes egyenletrendszerét, azaz tartalmazza az x_n -tengelyt és így az I. fejezet II. tétele szerint — mint bizonyítandó volt — ezzel megegyezik.

A bebizonyított tétel így általánosítható:

III. *Egy tetszőleges O -n átmenő R_k :*

$$\sum_{k=1}^n a_k^{(i)} x_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n-k)$

átvihető valódi forgással az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott R_k -ba.

Feltehetjük, hogy $k > 1$, mert $k=1$ esetében az utolsó tétel a bebizonyítandót adja; $n=2$ esetében is igaz a tétel s így fel-

tehetjük, hogy n -nél kevesebb méretű terekre és k -nál kevesebb méretű lineáris részekre is igaz és teljes indukcióval bizonyíthatunk. Legyen R'_{k-1} az R'_k egy része. Feltevésünk szerint R''_{k-1} egy valódi S forgással átvihető az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k+1} = 0$$

-sal megadott R_{k-1} -be. Ez az S az R'_k -t oly R''_k -be viszi át, mely ezen R_{k-1} -et tartalmazza. Az R''_k egyenletrendszerét tehát

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k+1} = 0$$

kielégíti, úgy, hogy ez csak ily alakú lehet

$$b_1^{(i)} x_1 + b_2^{(i)} x_2 + \dots + b_{n-k+1}^{(i)} x_{n-k+1} = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n-k)$

Mínt hogy $k > 1$, azért $n-k+1 < n$ és feltevésünk szerint van oly T $+1$ determinánsú orthogonális substituciója $x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}$ -nek, mely ezt

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

-ba, azaz az R_k -ba viszi át. Ez a T is, mint az R_n valódi forgása tekinthető és akkor ST a keresett valódi forgás.

[A geometriai elnevezésektől függetlenül, mint algebrai tétel eredményünk így mondható ki:

Mindig van oly $+1$ determinánsú orthogonális substitució:

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i,$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

mely az r számú ($r \leq n$) független lineáris egyenletből álló

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(i)} x_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, r)$

rendszer az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_r = 0$$

rendszerbe viszi át.]

Ha R'_k is és R''_k is átmegy O -n, akkor a most bebizonyított tétel szerint van oly S' és S'' valódi forgás, mely R'_k -t, illetve R''_k -t az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott R_k -ba viszi át. Ekkor az $S'S^{n-1}$ valódi forgás R'_k -t R''_k -be viszi át. Tehát:

IV. Ha R'_k és R''_k átmegy O -n, van oly valódi forgás, mely R'_k -t R''_k -be viszi át.

Hogy a bebizonyított tételt még valamivel általánosabban mondhassuk ki, még a következő tételre van szükségünk:

V. Adva lévén egy tetszőleges R'_k , ez eltolással átvihető egy O -n átmenő R''_k -be úgy, hogy az R'_k tetszőleges $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ pontja O -ba jusson.

Ez egyszerűen az

$$x_i = x'_i + x_i^0 \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

eltolással érhető el. Ha t. i. R'_k -t

$$a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + \dots + a_n^{(i)}x_n + a_{n+1}^{(i)} = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n-k)$$

definiálja, akkor ez a fenti eltolással az

$$a_1^{(i)}(x'_1 + x_1^0) + a_2^{(i)}(x'_2 + x_2^0) + \dots + a_n^{(i)}(x'_n + x_n^0) + a_{n+1}^{(i)} = 0, \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

azaz

$$a_1^{(i)}x'_1 + a_2^{(i)}x'_2 + \dots + a_n^{(i)}x'_n + (a_1^{(i)}x_1^0 + a_2^{(i)}x_2^0 + \dots + a_n^{(i)}x_n^0 + a_{n+1}^{(i)}) = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszerrel megadott R''_k -be megy át. Minthogy feltevés szerint:

$$a_1^{(i)}x_1^0 + a_2^{(i)}x_2^0 + \dots + a_n^{(i)}x_n^0 + a_{n+1}^{(i)} = 0, \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

azért e rendszer homogén és R''_k valóban átmegy O -n.

Egybevetve az utolsó két tételt:

VI. Minden R'_k átvihető (egy eltolással és egy valódi forgással) az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0 \\ \text{vagy ép így a} \\ x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

egyenletrendszerrel megadott R_k -ba és pedig úgy, hogy az R_k tetszőleges pontja jusson O -ba. Az utóbbi R_k nem egyéb, mint az R_n

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$$

pontjainak összessége, hol x_1, x_2, \dots, x_k tetszőleges szám lehet s ily módon azonosítható az (x_1, x_2, \dots, x_k) complexusok összességével, az eredetileg definiált R_k -val. Tételünk szerint most már R_n minden k méretű lineáris része leképezhető oly módon erre az R_k -ra, hogy megfelelő távolságok egyenlők legyenek és egy R_i -ben fekvő pontoknak (és csakis ilyeneknek) ugyanily pontok feleljenek meg. Csak ez teszi jogosulttá azt, hogy $n-k$ független lineáris egyenletet kielégítő pontok összességét R_k -val jelöljük, minthogy R_k eredetileg, mint az (x_1, x_2, \dots, x_k) complexusok összessége definiáltatott.

Ha R'_k -t az S' , R''_k -t pedig az S'' mozgás viszi át az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

-val megadott R_k -ba, akkor $S'S''^{-1}$ az R'_k -t R''_k -be viszi és így:

VII. Az R_n bármely két lineáris része átvihető egymásba, ha méretük megegyezik és pedig úgy, hogy az első bármelyik pontja a második meghatározott pontjába menjen át. E mozgás legegyszerűbben¹ mint TST' adható meg, hol T és T' eltolás, S pedig forgás.

III. A forgástengely mérete.

Az R_n legáltalánosabb forgása, mely az orthogonális

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \quad (S)$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

substituczióval van megadva, változatlanul hagyja az

$$O = (0, 0, \dots, 0)$$

¹ Az « O -tól különböző pont körüli forgás»-okat t. i. nem vezettük be.

pontot. Felmerül most már az a kérdés, hogy micsoda más pontok maradnak szintén változatlanul. E pontokat *pólusok*-nak, összességüket *forgástengelynek* nevezzük. Az (x_1, x_2, \dots, x_n) pont természetesen akkor lesz pólus, ha

$$x_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i. \quad (\text{I})$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

A tengely pontjait tehát egy lineáris homogén egyenletrendszer szolgáltatja és így

I. A *forgástengely* mindenkor az R_n -nek O -n áthaladó lineáris része.

Az (I) rendszernek akkor és csak akkor van

$$x_k = 0$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

tól különböző megoldása, ha determinánása, a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-1 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

determináns eltűnik (és ekkor egy egész O -n áthaladó egyenes csupa pólusból áll.) Ha általában p a D determináns r mérszáma, akkor a lineáris részek méretének definíciója szerint:

II. A *forgástengely* dimenziója: $n-p$.

III. Ha tehát D minden k -adfokú al-determinánása eltűnik, akkor a tengely méret $\geq n-k+1$ és így a tengely mindenesetre magában foglal egy R_{n-k+1} -et.

Az S substitúció ± 1 értékű determinánsát A -val jelölve, kimutatjuk, hogy D eltűnik, ha $A = (-1)^{n+1}$. Szorozzuk össze e célból az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

és D determináns¹ a rendes szorzási szabály szerint, sort sorral komponálva. Az így nyert determináns, tekintetbe véve az orthogonalitás feltételeit abban különbözik D -től, hogy minden elem a megfelelő D -elem negatív értéke. Az egész determináns tehát D -nek $(-1)^n$ -szerese:

$$AD = (-1)^n D$$

és így $A = (-1)^{n+1}$ esetében valóban $D = 0$.²

Megkülönböztetve páros és páratlan n esetét III. tekintetbe vételével (most $k = n$), ezen eredményünk így mondható ki:

IV. *Páratlan méretű tér valódi forgása és páros méretű tér nem valódi forgása változatlanul hagyja egy O - n áthaladó egyenes minden pontját.*³

Legyen általában R_k az S forgás tengelye. A II. fejezet III. tétele szerint van oly T forgás, mely R_k -t az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

egyenletekkel megadott R_k^0 -ba viszi. Ez az R_k^0 tehát tengelye a $T^{-1}ST$ forgásnak, melynek determinánsa, mint ismeretes, egyenlő S determinánsával. Tekintetbe véve, hogy $T^{-1}ST$ a

$$(0, 0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$

pontokat önmagukba viszi át, e forgás determinánsa ilyen alakú:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1, n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-k, 1} & \dots & r_{n-k, n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{n-k+1, 1} & \dots & r_{n-k+1, n-k} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1, 1} & \dots & r_{n-1, n-k} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ r_{n1} & \dots & r_{n, n-k} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv |c_{\mu\nu}|$$

¹ $n=3$ esetében e módszert WEBER alkalmazta (Lehrbuch der Algebra, II. kötet, 246. l., 2. kiadás).

² Ez speciális esete az ú. n. SIACCI-féle determinánsételnek, lásd PASCAL: «Determinanten»-ját, a német fordítás (Teubner, 1900) 168. l.

³ Páratlan n -re e tételt SCHLÄFLI bizonyította be: «Über invariante Elemente einer orthogonalen Substitution...», Journal f. Math., 65. k.; l. továbbá JORDAN említett «Essai...»-jét. A tételt $n=3$ esetre már EULER ismerte (1776). Végtelen kis mozgásra ($n=3$ -nál): D'ALEMBERT (1749). Lásd SCHOENFLIES: Geometrie der Bewegungen (Teubner, 1886) 48. l. és 193. l. (14. j.)

hol még az utolsó k sor első $n-k$ eleme is zérus, minthogy az orthogonalitási feltételek első sorozata szerint az egy sorban lévő együtthatók négyzetszöge 1. Minthogy a tengelyméret: k , azért a

$$|c_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}| \quad \left(\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \neq \nu \\ 1, & \text{ha } \mu = \nu \end{cases} \right)$$

determináns rangja: $n-k$ és így

$$|r_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k} \neq 0, \quad (\text{I})$$

minthogy $|c_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}|$ többi $n-k$ -adfokú aldeterminánsa identikusan 0. A $|c_{\mu\nu}|$ determinánssal együtt a

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k}$$

determináns maga is kielégíti az orthogonalitási feltételeket és így (I) az utoljára bebizonyított tétel szerint csak

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k} = (-1)^{n-k}$$

esetben lehetséges (n helyére itt t. i. $n-k$ lép). Ennélfogva, minthogy

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k} = |c_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n} = A,$$

azt nyerjük, hogy

$$A = (-1)^{n-k}.$$

Eredményünk tehát ez:

V. Valódi forgásnál a tengelyméret (k) n -nel együtt páros vagy páratlan, nem valódi forgásnál pedig a tengely mérete páros vagy páratlan, a szerint, a mint n páratlan vagy páros.¹

Minthogy másrészt bármily $n+1$ -nél kisebb szám is a k :

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i, \\ (i=1, 2, \dots, k) \\ x'_j &= -x_j \\ (j=k+1, k+2, \dots, n) \end{aligned}$$

oly forgás, melynél a tengely dimenziója: k ; és e forgás valódi vagy nem, a szerint, hogy $n-k$ páros-e vagy páratlan (t. i. $A = (-1)^{n-k}$) azért:

¹ E tételnek, mint determinánstételnek, bizonyos speciális eseteire vonatkozólag lásd STIELTJES és NETTO cikkeit az Acta Mathematica 6. és 9. kötetében, továbbá PASCAL «Determinanten»-jának 168—175. lapjait.

VI. Ha n páros (páratlan), akkor valódi forgásnál a tengely-méret minden páros (páratlan) szám, nem valódinál minden páratlan (páros) szám lehet, feltéve természetesen, hogy e szám $\leq n$.

Ezzel az n -méretű tér forgásának tengelyére vonatkozó kérdés teljesen el van intézve. Eredményünk ez:

VII. Az n -méretű tér valódi forgásának a tengelye vagy az R_n (az identikusnál) vagy egy R_{n-2} , vagy egy R_{n-4} , stb.; nem valódi forgás tengelye pedig csak egy R_{n-1} , vagy egy R_{n-3} , vagy egy R_{n-5} , stb. lehet.

Mindezen esetek be is következhetnek.¹

IV. Pontrendszerek forgása.

I. Ha az R_n -nek $n-1$ számú P_1, P_2, \dots, P_{n-1} pontja nem fekszik O -val együtt egy R_{n-2} -ben, akkor az identikus forgás az egyedüli valódi forgás, mely mindezeket a pontokat változtatlanul hagyja.

Tételünk igaz lévén $n=2$ esetére, feltehetjük, hogy $n-1$ -re igaz és teljes indukcióval bizonyíthatunk.

1. Legyen P_{n-1} először az x_n -tengelyen:

$$P_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, x_n^{(n-1)}).$$

Közvetlenül belátható, hogy minden $+1$ determinánsú orthogonális substitúció, mely ezt nem változtatja, ily alakú:

$$(S) \begin{cases} x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_k & (k=1, 2, \dots, n-1) \\ x'_n = x_n, \end{cases}$$

hol

$$(S') \quad x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_k \\ (k=1, 2, \dots, n-1)$$

¹ Abból tehát, hogy sík valódi forgásának tengelye: pont, a háromdimenziós tér valódi forgásának tengelye: egyenes, egyáltalában nem szabad arra következtetni, hogy az R_n valódi forgásának csak egy R_{n-2} lehet a tengelye.

az R_{n-1} egy valódi forgását adja. Ha most már (S) nem változtatja a

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ (i=1, 2, \dots, n-1)$$

pontokat, akkor S' nem változtatja a

$$Q_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}) \\ (i=1, 2, \dots, n-2)$$

pontokat. Ezen $n-2$ pont nem fekszik O -val együtt egy R_{n-3} -ban. Ha t. i. koordinátáik $(n-1)-(n-3)$, azaz két független lineáris egyenletet kielégítenének, akkor ez egyszerűen azt jelentené, hogy $O, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$ egy R_{n-2} -ben feküdnének. Minthogy ezen egyenletek x_n -et nem tartalmazzák, azért $(0, 0, \dots, 0, 0)$ -val együtt $P_{n-1}=(0, 0, \dots, 0, x_n^{(n-1)})$ is kielégítené őket és így $O, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ egy R_{n-2} -ben feküdnének, a mi feltételünkkel ellentétes.

Minthogy $n-1$ -re tételünket helyesnek teszszük fel, azaz tudjuk, hogy az $O, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-2}$ pontokat a valódi forgások közül csak az identikus hagyja változatlanul, azért S' tehát S is valóban csak az identikus substitúció lehet.

2. Ha másodszor P_{n-1} nem fekszik az x_n -tengelyen, akkor az II. fejezet I. tétele szerint van oly valódi forgás T , mely P_{n-1} -et az x_n -tengely $P'_{n-1}=(0, 0, \dots, 0, d)$ pontjába viszi, hol

$$d = \left[\sum_{i=1}^n (x_i^{(n-1)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Tegyük fel, hogy a T a P_i pontokat P'_i -be viszi, akkor a forgások B tulajdonsága szerint (l. a 8. lapon) ezek sem fekszenek O -val egy R_{n-2} -ben. A bebizonyítottak szerint tehát az identikus forgás az egyedüli valódi forgás, mely a P'_i -ket egyidejűleg nem változtatja. Ha most már S tetszőleges oly valódi forgás, mely a P_i -ket nem változtatja, akkor $T^{-1}ST$ nem változtatja a P'_i pontokat és így

$$T^{-1}ST = 1$$

az identikus forgás és innen valóban, mint bizonyítandó volt:

$$S = TT^{-1} = 1.$$

Ezzel a kimondott tétel általánosságban be van bizonyítva.

Általánosabban így mondható ki:

II. Ha $n-1$ számú pont nem fekszik O -val egy R_{n-2} -ben, akkor legfeljebb egy olyan valódi forgás van, mely ezeket meghatározott $n-1$ pontba viszi át.

Ha t. i. S is és S' is ilyen valódi forgás, akkor SS'^{-1} az eredeti pontrendszert nem változtatja meg s így utolsó tételünk szerint

$$SS'^{-1} = 1$$

az identikus forgás. Innen valóban $S=S'$.

Meg akarjuk most vizsgálni, hogy valamely pontrendszer mikor vihető át valódi forgással egy másikba. Rövidség kedvéért *congruens*eknek fogjuk nevezni (k tetszőlegesen nagy lévén) a

$$(P_1, P_2, \dots, P_k) \text{ és } (P'_1, P'_2, \dots, P'_k)$$

pontrendszereket (a megadott sorrendben véve a pontjait), ha

$$\overline{P_i P_j} = \overline{P'_i P'_j},$$

($i, j=1, 2, \dots, k$)

$\overline{P_i P_j}$ -vel a P_i és P_j pontok távolságát jelölven.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

III. Ha $(O, P_1, P_2, \dots, P_r)$ és $(O, P'_1, P'_2, \dots, P'_r)$ *congruens*, akkor van oly forgás, mely P_i -t átviszi P'_i -be ($i=1, 2, \dots, r$).

Tételünk igaz lévén $n=1$ -re, teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \quad P'_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}).$$

($i=1, 2, \dots, r$)

Először felteszszük, hogy P_r az x_n -tengely pontja és $P'_r = P_r$, azaz

$$x_k^{(r)} = 0, \quad y_k^{(r)} = 0,$$

($k=1, 2, \dots, n-1$)

$$x_n^{(r)} = y_n^{(r)} = d.$$

Innen most már, ha

$$OP_i = OP'_i = r_i \text{ és } P_r P_i = P_r P'_i = s_i,$$

($i=1, 2, \dots, r$)

azaz

$$r_i^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^{(i)})^2 = \sum_{k=1}^n (y_k^{(i)})^2,$$

$$s_i^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)})^2 + (x_n^{(i)} - d)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (y_k^{(i)})^2 + (y_n^{(i)} - d)^2,$$

kivonással azt nyerjük, hogy

$$s_i^2 - r_i^2 = -2dx_n^{(i)} + d^2 = -2dy_n^{(i)} + d^2,$$

a honnan

$$x_n^{(i)} = y_n^{(i)}.$$

(i=1, 2, \dots, r)

Tekintsük az R_{n-1} következő pontjait:

$$Q_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}), \quad Q'_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}),$$

(i=1, 2, \dots, r-1)

melyekre vonatkozólag fennáll:

$$\overline{OQ_i^2} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)})^2 = \overline{OP_i^2} - x_n^{(i)2} = \overline{OP_i^2} - y_n^{(i)2} = \overline{OQ'_i^2}$$

és

$$\overline{Q_i Q'_j^2} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)} - x_k^{(j)})^2 = \overline{P_i P_j^2} = \overline{P'_i P'_j^2} = \overline{Q'_i Q'_j^2}$$

úgy, hogy $(O, Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-1})$ és $(O, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{r-1})$ congruens. Minthogy pedig $n-1$ -re tételünket helyesnek teszszük fel, van oly orthogonális substituczió

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_i,$$

(i=1, 2, \dots, n-1)

mely a Q_i -ket a Q'_i -kbe viszi át. Minthogy $x_n^{(i)} = y_n^{(i)}$ csak az

$$x'_n = x_n$$

substitucziót kell ehhez hozzávennünk és az R_n oly forgásához jutunk, mely követelményünknek megfelel: $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ -t $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$ -be viszi.

Áttérünk tehát az általános esetre. Ha

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(r)})^2 = \sum_{k=1}^n (y_k^{(r)})^2 = d^2,$$

akkor a II. fejezet I. tétele szerint van oly valódi forgás T , mely P_r -et $\bar{P} = (0, 0, \dots, 0, d)$ -be viszi. Éppígy van egy valódi forgás T' , mely P'_r -t viszi ugyancsak $(0, 0, \dots, 0, d)$ -be. T általánosan a P_i -ket \bar{P}_i -ba, T' a P'_i -ket \bar{P}'_i -ba vigye át ($\bar{P}_r = \bar{P}'_r = \bar{P}$). A (\bar{P}_i) és (\bar{P}'_i) congruens pontrendszerekre tételünk tehát a bebizonyítottak szerint alkalmazható: van oly valódi forgás S , mely a \bar{P}_i -ket a \bar{P}'_i -kbe viszi át. Most már tehát:

$$\begin{aligned} T & \text{ átviszi a } P_i\text{-ket } \bar{P}_i\text{-kba,} \\ S & \text{ " " } \bar{P}_i\text{-kat } \bar{P}'_i\text{-kba,} \\ T'^{-1} & \text{ " " } \bar{P}'_i\text{-kat } P'_i\text{-kbe,} \end{aligned}$$

és így tehát TST'^{-1} a P_i -ket a P'_i -kba viszi át, a mivel a keresett forgás létezése be van bizonyítva.

Egybevetve a II. és III. tételt, eredményünk ez:

IV. *Adva lévén két congruens pontrendszer $(O, P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ és $(O, P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1})$, egy és csak egy oly valódi forgás létezik, mely egyidejűleg minden P_i -t P'_i -be viszi át, feltéve, hogy P_1, P_2, \dots, P_{n-1} nem fekszik O -val egy R_{n-2} -ben.*

Az I. és II. tételnek nem valódi forgásra vonatkozólag a következő két tétel felel meg:

V. *Ha az $n-1$ számú P_1, P_2, \dots, P_{n-1} nem fekszik O -val egy R_{n-2} -ben, akkor egy és csak egy nem valódi forgás hagyja ezeket változatlanul.*

Ha t. i. a P_1, P_2, \dots, P_{n-1} pontok az $x_1=0$ egyenlettel megadott R_{n-1} -ben fekszenek, akkor a nem valódi

$$x'_1 = -x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n \quad (S)$$

forgás e pontokat nem változtatja. Az általános esetben pedig az O, P_1, \dots, P_{n-1} pontok által meghatározott R_{n-1} — a II. fejezet eredményei szerint — egy valódi T forgással az $x_1=0$ -sal megadott R_{n-1} -be vihető át. Ha tehát T a P_i -ket P'_i -kbe viszi át, akkor a P'_i -kre nézve az elintézett speciális esettel van dolgunk: van oly nem valódi S forgás, mely a P'_i -ket nem változtatja. Ez esetben azonban TST'^{-1} oly nem valódi forgás, mely a P_i -ket viszi át önmagukba. Ha most már két ilyen

volna: U és U' , akkor UU is és UU' is oly valódi forgás volna, mely a P_i -ket nem változtatja. Az I. tétel szerint tehát

$$1 = UU = UU', \quad U = U' (= U^{-1}).$$

Ezzel a tétel mindkét része be van bizonyítva.

VI. Ha az $n-1$ számú P_1, P_2, \dots, P_{n-1} pont nincs O -val egy R_{n-2} -ben, akkor egy és csak egy nem valódi forgás létezik, mely $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ -et a congruens $(P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1})$ rendszerbe viszi át.

Ha t. i. S az a nem valódi forgás, mely a P_i -ket nem változtatja és T a P_i -ket P'_i -kbe átvivő valódi forgás, akkor $U=ST$ a keresett nem valódi forgás. Ha U' is ilyen volna, akkor $UU'^{-1}=1$ -ből (I. tétel) ismét $U=U'$ következne.

Végül még a III. tétel általánosítására lesz szükségünk.

Legyen (P_1, P_2, \dots, P_r) és $(P'_1, P'_2, \dots, P'_r)$ két congruens pontrendszer. Egy T eltolással a P_1 , egy T' eltolással pedig a P'_1 átvihető O -ba. Ha most már T a P_i -ket \bar{P}_i -ba, T' a P'_i -ket \bar{P}'_i -ba viszi, akkor a III. tétel szerint $\bar{P}_1 = \bar{P}'_1 = O$ lévén, van oly S forgás, mely a \bar{P}_i -kat a \bar{P}'_i -kba viszi s így a TST'^{-1} mozgás a P_i -ket a P'_i -kbe viszi. Tehát:

VII. Bármely pontrendszer minden congruens pontrendszerbe átvihető.

V. A simplex és csoportja.

A minden R_n -ben létező három szabályos test közül az n . n. n -méretű (szabályos¹) simplex, S_n némi tekintetben a legegyszerűbb. Ezt, mint oly $n+1$ pontból álló pontrendszer definiáljuk, melyek közül bármely kettőnek távolsága ugyanaz.

A következőkben az

$$m_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}, \quad r_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}, \quad \rho_n = m_n - r_n$$

¹ E szót ezentúl elhagyjuk.

jelöléseket fogjuk használni, hol az m_n , r_n és ρ_n számokat az «egységélű» S_n magasságának, köréje irt gömb sugarának, illetve beléje irt gömb sugarának nevezzük. Ezeket az elnevezéseket $n=3$ esetéről vesszük át.

Kimutatjuk most már, hogy létezik oly S_n , melynek «éle» (két csúcs távolsága): 1, míg mind az $n+1$ csúcs O -tól való távolsága: r_n , feltéve, hogy egy megfelelő S_{n-1} létezik. Mint-hogy $n=2, 3$ esetében egy O körüli egységélű szabályos háromszög, illetve egy O körüli egységélű szabályos tetraéder követelményeinket kielégíti, azért ezzel az S_n existenciája minden n -re ki lesz mutatva.

A létezőnek feltételezett egységélű S_{n-1} csúcsai legyenek

$$Q_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}) \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

úgy, hogy

$$\overline{Q_i Q_k} = 1 \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

és

$$\overline{OQ_k}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 = r_{n-1}^2.$$

Az S_n -nek $n+1$ csúcspontját most már így definiáljuk:

$$P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, -\rho_n), \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

$$P_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, r_n)$$

és kimutatjuk, hogy ez az $n+1$ pont megfelel követelményeinknek. Két P_k ($k=1, 2, \dots, n$) távolsága egyenlő a megfelelő két Q_k távolságával és így: 1; éppígy:

$$\overline{P_k P_{n+1}}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 + (r_n + \rho_n)^2 = r_{n-1}^2 + m_n^2 = \\ = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = 1.$$

A mi pedig az O -tól való távolságot illeti:

$$\overline{OP_k}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 + \rho_n^2 = r_{n-1}^2 + \rho_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} = r_n^2.$$

Végül nyilvánvalóan:

$$\overline{OP}_{n+1} = r_n.$$

Ezzel az S_n existenciája tetszőleges n -re be van bizonyítva.

Ha egyméretű egységélű simplexül az $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$ pontokat választjuk, akkor a részletezett eljárás egy teljesen meghatározott S_n -hez, mondjuk: S_n^0 -hoz vezet. Ennek a speciális egységélű simplexnek, mint könnyen meggyőződhetünk, megvan ez a két tulajdonsága:

a) csúcspontjai nem fekszenek egy R_{n-1} -ben;

b) k számú csúcspontja sohasem fekszik O -val egy R_{k-1} -ben.

E két tulajdonságot most már kimutathatjuk minden simplexre. Legyen t. i. S_n egy tetszőleges egységélű simplex; akkor congruens S_n^0 -val és így a IV. fejezet VII. tétele szerint egy M mozgás S_n^0 -t átviszi S_n -be. Ha e mozgás O -t O' -be viszi, akkor O' az S_n minden csúcából egyenlő távol van és így középpontja. Tehát:

I. Minden simplexnek¹ van középpontja

és az I. fejezet V. tétele szerint a tetszőleges S_n -nek is megvan az a) és b) tulajdonsága:

II. A simplex csúcspontjai sohasem fekszenek egy R_{n-1} -ben.

III. O középpontú simplex k csúcspontja soha sincs O -val egy R_{k-1} -ben.

A következőkben azokat a valódi és nem valódi forgásokat akarjuk megvizsgálni, melyek az O középpontú S_n -et, azaz $n+1$ csúcspontját önmagukba viszik át. Ezeket *simplexforgásoknak* is nevezzük; együtt a teljes *simplexcsoportot* alkotják. A valódi simplexforgások összességét pedig, (melyek természetesen szintén csoportot alkotnak) *valódi simplexcsoportnak* fogjuk nevezni.

Bármily permutációja is $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ az $(1, 2, \dots, n+1)$ -nek, az $(O, P_1, P_2, \dots, P_{n+1})$ és $(O, P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n+1}})$ pont-

¹ Itt, mint a következő két tételnél, az «egységélű» természetesen elhagyható.

rendszerek mindig congruensek, P_1, P_2, \dots, P_{n+1} -gyel jelölve az S_n $n+1$ csúcspontját és így a IV. fejezet III. tétele szerint van oly forgás — és ez egy simplexforgás — mely a P_k -kat a P_{i_k} -kba viszi át. Ily módon a csúcsok minden $(n+1)!$ permutációjához tartozik egy simplexforgás. Kimutatjuk még, hogy mindegyikhez csak egy tartozik. Ha a fenti (k, i_k) permutációhoz két simplexforgás is tartoznék, azaz két oly simplexforgás volna, mely minden P_k -t P_{i_k} -ba visz, akkor legalább három oly simplexforgás léteznék, mely $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ -et $(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n-1}})$ -be vinné, t. i. ez a két simplexforgás és az, mely az $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_{n+1}, i_n)$ permutációhoz tartozik. Ez azonban lehetetlen: a II. fejezet IV. tétele szerint csak egy valódi és VI. tétele szerint csak egy nem valódi s így összesen csak két ily forgás létezik. Bebizonyítottuk tehát, hogy az $n+1$ csúcs tetszőleges permutációját egy és csak egy simplexforgás szolgáltatja:

IV. Az S_n teljes csoportja holoedrikusan isomorph¹ $n+1$ elem szimmetrikus csoportjával és $(n+1)!$ forgást tartalmaz.

A megelőzők szerint, ha i_1, i_2, \dots, i_{n-1} $n-1$ számú $n+2$ -nél kisebb különböző szám, két simplexforgás létezik, mely P_1, P_2, \dots, P_{n-1} -et ily rendben $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n-1}}$ -be viszi: az egyik P_n -et P_k -ba, P_{n+1} -et P_l -be, a másik P_n -et P_l és P_{n+1} -et P_k -ba (k és l jelenti az i_1, i_2, \dots, i_{n-1} közt nem szereplő két $n+2$ -nél kisebb számot). Egyike e forgásoknak valódi, a másik nem. Az $(1, 2, \dots, n)$ elemekből alkotott minden $n-1$ elemből álló $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ ismétlés nélküli kombinációhoz tehát egy és csak egy valódi simplexforgás tartozik. Minthogy továbbá minden forgáshoz tartozik egy ily kombináció, azért a valódi simplexcsoport forgásainak a száma megegyezik e kombinációk számával, mely a kombináció elemeinek sorrendjét is tekintetbe véve

$$\binom{n+1}{n-1} (n-1)! = \frac{1}{2} (n+1)!$$

¹ Rövidség kedvéért a következőkben a «holoedrikus» szót elhagyjuk.

Ily módon a következő eredményhez jutottunk:

V. Az S_n valódi csoportja $\frac{1}{2}(n+1)!$ forgást tartalmaz.

Kimutatjuk még, hogy a valódi forgásoknak a csúcsok páros permutációi felelnek meg és viszont.

Létezik t. i. oly forgás a valódi simplexcsoportban, mely a $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}$ pontokat rendre a $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n$ pontokba viszi át. E forgás P_{n+1} -et P_{n-1} -be viszi át, ha t. i. P_{n+1} -be vinné, akkor $n-1$ pont változatlan maradván, az identikus forgással volna dolgunk és P_{n-1} nem mehetne P_n -be át. Végül tehát P_n a még egyedül hátralévő P_{n+1} -be megy át s a forgás a csúcsok

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_{n-2} & P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_1 & P_2 & \dots & P_{n-2} & P_n & P_{n+1} & P_{n-1} \end{pmatrix} = (n-1, n, n+1)$$

permutációjához tartozik. Épigy belátható, hogy mind a többi hármás ciklikus permutáció is benn van a csoportban, tehát minden páros permutáció is, minthogy ezek¹ hármás ciklusokból mindig összehetők. Az utóbbiak száma is $\frac{1}{2}(n+1)!$ lévén, ezekkel a csoport ki van merítve. Ezzel bebizonyítottuk a kimondott tételt, mely így is kimondható:

VI. Az S_n valódi csoportja isomorph $n+1$ elem alternáló permutációs csoportjával.

Minthogy pedig $n+1=4$ eset kivételével az alternáló csoport mindig egyszerű,² azért

VII. A tetraédercsoport kivételével minden valódi simplexcsoport egyszerű.³

A tetraédercsoport azonban valóban tartalmaz egy invariáns alcsoportot; egy ú. n. «Vierergruppe»-t.³ Minthogy az alternáló

¹ L. pld. WEBER: Algebra, I, 497. l. (Első kiadás.)

² E tételt JORDAN bizonyította be először: Traité des Substitutions, (Paris, 1870), 66. l. Egyszerű, teljes indukcióval való bizonyítását adta BEKE (Math. és Phys. Lapok, VII. évf. 55. l. és Mathematische Annalen, 49. kötet, 581. l.); $n=5$ -re, azaz az ikozaédercsoportra t. i. könnyen bebizonyítható, l. KLEIN «Ikosaeder»-jét, 18. l.

³ KLEIN: «Ikosaeder», 14. l.

csoporthoz mindig invariáns alcsoportja a szimmetrikus csoportnak, azért végül:

VIII. A teljes simplexcsoport sohasem egyszerű.

VI. A simplexforgások tengelye.

A simplexcúspontok koordinátáinak képzésére a megelőző fejezetben adott rekurzív eljárás módját nyújt e koordináták explicit alakban való kiírására is. Minthogy azonban n -ről $n+1$ -re térve át, ezek kifejezésében mindig egy új négyzetgyökjel lép fel, azért ez a módszer a tárgyalást igen megnehezítené. Hiszen már a szabályos háromszög szögpontjainak a koordinátái sem adhatók meg a síkban négyzetgyökök nélkül,¹ míg a térben a

$$(g, 0, 0), (0, g, 0), (0, 0, g)$$

pontok igen egyszerűen adnak meg egy ily háromszöget. És ez így van általában is:

Az R_{n+1} következő $n+1$ pontja:

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = (g, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n+1}) \\ Q_2 = (0, g, 0, \dots, 0) \\ \dots \\ Q_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, g) \end{array} \right\} S_n^0$$

egy n -méretű simplexelet (S_n^0) alkot.

¹ Abból a feltevésből, hogy egy szabályos háromszög három szögpontjának mindkét koordinátája racionális, bebizonyítható, hogy szögének tangense is racionális, már pedig $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Kivételesnek kell mondanunk azt, hogy a (szabályos) tetraédernek R_3 -ban van oly elhelyezése, melynél a négy csúspontnak mind a három koordinátája racionális: az

$$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

pontok és épígy a

$$(-1, -1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$$

pontok is, (melyek együtt egy kockának csúspontjai) egy-egy tetraéder négy-négy csúspontját adják.

Először is t. i. (ξ -kkel jelölve az R_{n+1} koordinátáit) e pontok a

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} = g$$

egyenlettel megadott R_n -ben fekszenek és másodsor bármely kettőnek távolsága $g\sqrt{2}$. Ha tehát $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor az egységélű simplexszel van dolgunk. Világos továbbá, hogy az ezen R_n -en fekvő

$$K = \left(\frac{g}{n+1}, \frac{g}{n+1}, \dots, \frac{g}{n+1} \right)$$

pont a simplex középpontja, minthogy i -lől függetlenül:

$$\overline{KQ}_i^2 = \left(\frac{n}{n+1} g \right)^2 + n \left(\frac{g}{n+1} \right)^2 = g^2 \frac{n}{n+1}.$$

Egységélű simplex, azaz $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetében ez valóban

$$n_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}$$

-be megy át. Továbbá

$$\overline{OK} = g \sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

és egységélű simplexnél:

$$\overline{OK} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

Legyen most már az R_n -ben egy O középpontú egységélű simplexnek, melyet röviden S_n -nel fogunk jelölni, $n+1$ csúcsa:

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}),$$

($i=1, 2, \dots, n+1$)

Ekkor R_{n+1} -nek $\left(\xi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right)$ egyenlettel megadott R_n -jében fekvő) $n+1$ számú

$$Q_i = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right)$$

($i=1, 2, \dots, n+1$)

pontja ugyancsak egy ily simplexet S_n -t alkot, csakhogy középpontja

$$K' = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right).$$

Rögtön belátható, hogy az R_{n+1} következő két pontrendszere:

$$(O, K, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}) \text{ és } (O, K', Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n)$$

congruens és így a IV. fejezet VII. tétele szerint van oly S forgás, mely az elsőt a másodikba viszi át.

Az S tehát S_n^0 -t S'_n -be viszi át. Ha tehát T^0 illetve T' oly forgása az R_{n+1} -nek, mely S_n^0 -t illetve S'_n -t önmagába viszi át, akkor ST^0S^{-1} az S_n^0 -nak, $S^{-1}T^0S$ pedig S'_n -nek forgása. Tehát az egyik csoportból a másik S -sel illetve S^{-1} -nel való transformálás által adódik ki.

Az S_n^0 -t illetve S'_n -t önmagába átvivő R_{n+1} forgások csoportja tehát *isomorph* és a T^0 forgás tengelyének mérete megegyezik a megfelelő T' forgás tengelyének méretével, mint-hogy az S forgás az első tengelyt az utóbbiba viszi át.

Egyszerű vonatkozás hozható létre az S_n -et nem változtató R_n -forgások és az S'_n -t nem változtató R_{n+1} -forgások között is. Ha t. i.

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \quad (T') \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

egy S_n forgás, akkor

$$T' \begin{cases} \xi'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i & (k=1, 2, \dots, n) \\ \xi'_{n+1} = \xi_{n+1} \end{cases}$$

S'_n -t hagyja változatlanul. Egyszersmind minden S'_n -forgás ily alakú, minthogy K' -t s így a ξ_{n+1} -tengely minden pontját változatlanul hagyja. Ily módon a T -k és T' -k csoportja között is isomorphismust állapítottunk meg. Ha most már d a T forgás tengelyének mérete, azaz az

$$x_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

egyenletek közt $n-d$ számú független, akkor a T' tengelyét megadó

$$\hat{\xi}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \hat{\xi}_i,$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

$$\hat{\xi}_{n+1} = \hat{\xi}_{n+1}$$

egyenletek közt szintén $n-d$ számú független van, minthogy az utolsó egyenlet, mint identitás nem jön tekintetbe. A T' forgás tengelyének tehát

$$(n+1) - (n-d) = d + 1$$

a mérete. A T' -k és T^0 -k csoportja közt egyrészt és a T -k és T' -k csoportja közt másrészt megállapított isomorphismus a (T) és (T^0) csoportok közt is isomorphismust állapít meg és pedig oly módon, hogy, ha T és T^0 két egymásnak megfelelő forgás, akkor

1. a T forgás tengelyének mérete 1-gyel kisebb a T^0 forgás tengelyének méreténél;

2. ha T a csúcspontok $(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n+1}})$ permutációját hozza létre, akkor T^0 : $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_{n+1}}$ pontokba viszi át rendre a Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} pontokat, azaz ugyanezt a permutációt eredményezi.

Ez esetben T -nek és T^0 -nak t. i. valóban ugyanaz a T' felel meg: az, mely a $(Q'_{i_1}, Q'_{i_2}, \dots, Q'_{i_{n+1}})$ permutációt hozza létre.

Oly R_{n+1} -forgás, mely a Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} pontokat a $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_{n+1}}$ pontokban viszi át, rendkívül egyszerűen megadható. Mint rögtön meggyőződhetünk, ezt megteszi a következő orthogonális substitució:

$$\xi'_k = \hat{\xi}_{i_k} \quad (T')$$

$$(k=1, 2, \dots, n+1)$$

Láttuk, hogy ezen forgás tengelyének mérete 1-gyel nagyobb azon simplexforgás tengelyének méreténél, mely a P_k -kat a P_{i_k} -kba viszi. A T forgás tengelyének egyenletrendszere:

$$\hat{\xi}_k = \hat{\xi}_{i_k} \quad (I)$$

$$(k=1, 2, \dots, n+1)$$

Ha ezen egyenletek között t számú független van, akkor a T forgás tengelyének mérete $n+1-t$ és így

A (k, i_k) -val jellemzett simplexforgás tengelyének mérete $n-t$.

A t meghatározása céljából képzeljük a (k, i_k) permutációt ciklikus permutációkra felbontva:¹

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \dots C_p.$$

Legyen c_1, c_2, \dots, c_p a C_1, C_2, \dots, C_p ciklusokban foglalt elemek száma úgy, hogy $c_1 + \dots + c_p = n+1$. Az (I) rendszer most már az ugyanazon ciklusban lévő ξ -k egyenlőségét fejezi ki. Különböző ciklusokra vonatkozó egyenletei (I)-nek — nem tartalmazván közös változót — természetesen függetlenek egymástól. Minthogy továbbá c számú ξ egyenlőségét $c-1$ egymástól független egyenlet fejezi ki, azért (I) egymástól független egyenleteinek a száma

$$t = (c_1 - 1) + (c_2 - 1) + \dots + (c_p - 1) = \Sigma c - p = n + 1 - p.$$

I. A tengely mérete tehát:

$$d = n - t = n - (n + 1 - p) = p - 1$$

egygyel kisebb a csúcspontpermutáció ciklusainak számánál.²

Továbbá innen:

II. Két simplexforgás tengelyének mérete akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő két csúcspontpermutáció ugyanannyi ciklusból van összetéve.

Az előbbi megfontolásokból még közvetlenül kitűnik, hogy két S_n -forgás tengelye akkor és csak akkor egyezik meg, illetve akkor és csak akkor része az egyik a másiknak, ha a megfelelő két S_n^0 -forgás tengelyei ily vonatkozásban vannak egymással.

¹ Az egy elemből álló ciklusok is kiirandók.

² Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezen eredményünk összhangzatban van a III. fejezet eredményével: $n+1$ elem páros permutációjánál: $n-2m+1$, páratlanál: $n-2m$ -alakú a ciklusok száma.

Ennek tekintetbe vételével még a következő eredményekhez juthatunk.

III. *Két simplexforgás tengelye akkor és csak akkor ugyanaz, ha a megfelelő két permutációban ugyanazon elemek szerepelnek ugyanabban a ciklusban.*

A tengely tehát nem változik, ha az egyes ciklusokban lévő elemeket c_i -félekép permutáljuk. Minthogy azonban a c számú

$$(a_1, a_2, \dots, a_c), (a_2, \dots, a_c, a_1), \dots, (a_c, a_1, \dots, a_{c-1})$$

ciklikus permutáció egymással megegyezik, azért csak

$$\frac{c_i!}{c_i} = (c_i - 1)!$$

permutáció jön tekintetbe:

IV. $\prod_{i=1}^p (c_i - 1)!$ számú oly simplexforgás van, melynek tengelye megegyezik a $P = C_1 C_2 \dots C_p$ permutációhoz tartozó forgás tengelyével.

Megjegyzendő, hogy ugyanazon tengelyvel bíró forgások nem alkotnak csoportot, kivéve ha az egész R_n a tengely; hiszen az identikus forgás csakis ez esetben van forgásaink közt. Ha két forgásnak tengelye ugyanaz, akkor összeállításukkal keletkező forgás változatlanul hagyja ugyan e tengely minden pontját, de hagyhat más pontokat is változatlanul, úgy, hogy tengelye többméretű lehet, mint az említett közös tengely. Már $n=3$ esetében adhatunk erre nem triviális példát. A ciklikus $(1, 2, 3, 4)$ permutációt önmagával téve össze, a két ciklusból álló $(1, 3)(2, 4)$ permutációhoz jutunk. Míg tehát az előbbihez tartozó (nem valódi) forgásnak: pont, az utóbbihoz tartozónak: egyenes a tengelye.

A simplexcsoport alsoportjaihoz jutunk azonban, ha azon simplexforgásokat foglaljuk össze, melyek valamely simplexforgás tengelyének pontjait nem változtatják. Válaszszuk ez utóbbinak az általános,

$$(k, i_k) = c_1 c_2 \dots c_p$$

permutációhoz tartozó forgás tengelyét. Minhogy a megfelelő S_n^0 forgás tengelyét az

$$\xi_{i1} = \xi_{i2} = \dots = \xi_{ic_i} \\ (i=1, 2, \dots, p)$$

egyenletek adják meg,¹ hol

$$C_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ic_i}), \\ (i=1, 2, \dots, p)$$

azért világos most már, hogy

V. *Egy simplexforgás akkor és csak akkor hagyja változatlanul e tengely pontjait, ha a megfelelő permutációban csak oly elemek (ξ -k) szerepelnek együtt egy ciklusban, melyek (k, i_k) valamely ciklusában is együtt fordulnak elő.*

E forgások számának meghatározása céljából el kell dönteni, hogy c számú elem hányféleképp osztható ciklusokba, ismét nem tekintve különbözőnek két ciklust, ha ciklikus permutáció által az egyik átmegy a másikba és így ugyanazt a permutációt jelentik. A c számú elem minden permutációjához egy ily ciklusokra bontás tartozván és viszont, világos, hogy e szám: $c!$ ²

VI. *A (P)-hez tartozó tengelypontjait tehát $\prod_{i=1}^p c_i!$ számú simplexforgás hagyja változatlanul, a melyek, mint már említettük, természetesen csoportot alkotnak.³*

Általában azonban e csoport nem lesz, mint $n=2, 3$ esetében ciklikus csoport, hanem több alkotóból keletkeztethető csupán. Ismervén e csoporthoz isomorph permutációcsoportot, ezen alkotók felkeresése, stb. a permutációcsoportok elméletére van visszavezetve. Ugyancsak ide van vissza-

¹ Az ξ -ket a jelölés egyszerűsítése végett látjuk el két indexszel; minden két indexű ξ azonos egy ξ_i -vel ($i=1, 2, \dots, n+1$) és csak akkor lesz $\xi_{ik} = \xi_{i'k'}$, ha $i=i', k=k'$. A második index az első index indexeként tekinthető.

² $c=3$ esetében pld. e felbontások: (1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (321).

vezetve az a kérdés, hogy két forgás összetevésével keletkező forgás tengelye hogyan függ össze az összetett két forgás tengelyével. Egész általánosságban igen nehéz e kérdésre megfelelni, minthogy két ciklusokra bontott permutáció szorzatának ciklusokra bontása (ezzel a dolog el volna intézve) általánosságban nem igen adható meg. Az egyes forgások periodusa is egyszerűen nyerhető úgy, hogy a megfelelő permutáció periodusát keressük meg.

[A nélkül, hogy erre bővebben kiterjeszkednénk, megemlítjük, hogy e fejezet eredményeihez *homogén* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})$ koordináták bevezetésével¹ magában az R_n -ben maradva, eljuthatunk. Ezek t. i. úgy állapíthatók meg, hogy

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

legyen az S_n $n+1$ számú csúcsa. A simplexforgásokat ekkor

$$\xi'_k = \xi_{i_k} \\ (k=1, 2, \dots, n+1)$$

adja, a mely substitúcióról kimutatható, hogy neki rendes koordinátákban orthogonális substitúció felel meg. A tengely egyenletrendszere²:

$$\xi_k = \xi_{i_k} \\ (k=1, 2, \dots, n+1)^2$$

lesz, stb. Látnivaló most már, hogy ez a módszer is eredményeinkhez vezet.]

¹ L. SCHOUTE II. köt. 142—153. l.

² Ez tulajdonképen $\xi_k = \varrho \xi_{i_k}$ alakban adódik ki, de bebizonyítható, hogy $\varrho^{n+1} = 1$ és hogy, ha $\varrho = -1$ is lehetséges, $\xi_k = -\xi_{i_k}$ -t csakis «végtelenben fekvő pontok» elégítik ki, melyek homogén koordináták bevezetésével maguktól fellépnek. Ezeket is megengedve a tengely (páratlan n -nél) nem is lineáris része mindig az R_n -nek, hanem esetleg két lineáris részből áll, melyek közül az egyik teljesen «a végtelenben van».

VII. Az oktaedroid és hexaedroid csoportja.

Házzávéve az R_n következő n pontjához:

$$P'_1 = (g, 0, 0, \dots, 0),$$

$$P'_2 = (0, g, 0, \dots, 0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P'_n = (0, 0, 0, \dots, g),$$

melyekről tudjuk, hogy egy S_{n-1} -et (mondjuk: S'_{n-1} -t) alkotnak az S'_{n-1} -t alkotó ugyanecek n számú

$$P''_1 = (-g, 0, 0, \dots, 0)$$

$$P''_2 = (0, -g, 0, \dots, 0)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P''_n = (0, 0, 0, \dots, -g)$$

pontot, a második szabályos test $2n$ csúcspontját nyerjük. E szabályos testet «*oktaedroid*»-nak fogjuk nevezni, minthogy $n=3$ esetére ez a szabályos oktaéderbe megy át.

Az oktaedroid csoportját most már azon forgások alkotják, melyek ezt a $2n$ pontot önmagukba viszik át. A fenti jelölésnél P'_i , O és P''_i egy egyenesen fekszik és $OP'_i = OP''_i = g$. E tulajdonság természetesen érvényes marad a pontoknak a forgás utáni új helyzetére vonatkozólag is, úgy, hogy ha P'_i átmegy P'_j -ba, akkor P''_i a P''_j -ba megy át, ha pedig egy P''_j -ba megy át P''_i , akkor P'_i átmegy P'_j -ba. A P'_1, P'_2, \dots, P'_n pontok új helyzete tehát a $P''_1, P''_2, \dots, P''_n$ pontok új helyzetét is megadja. Elég tehát azt vizsgálni, hogy a P'_i -k hogyan változtathatják helyüket, hiszen ennek az n pontnak új helyzete egyértelműen meghatározza a forgást (IV. fej. IV. tétele). Világos, hogy mind az n P'_i más koordinátatengelyre jut, minthogy eredetileg más-más tengelyen feküdtek. Az n tengelyen most már, mindegyiken két P lévén, 2^n félekép választható ki egy-egy pont s így a sorrendet is tekintve $2^n n!$ féleképen. Legfeljebb annyi helyzetet foglalhat el P'_1, \dots, P'_n és így az egész oktaedroid ön-

magában. Könnyen látható, hogy ez a $2^n n!$ pontosan a csoport forgásainak számát adja, t. i.

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_{i_1}, x'_2 = \varepsilon_2 x_{i_2}, \dots, x'_n = \varepsilon_n x_{i_n} \quad (I)$$

$(\varepsilon = \pm 1)$

oktaedroidforgást ad, bármicsoda permutációja is (i_1, i_2, \dots, i_n) az $(1, 2, \dots, n)$ -nek és bármikép veszik is fel az ε -k a $+1$ vagy -1 értéket. Ez az éppen $2^n n!$ számú forgás önmagukba viszi át a P -ket: P'_k -t $(P'_k$ -t) P'_{i_k} -be $(P'_{i_k}$ -be) vagy P''_{i_k} -be $(P'_{i_k}$ -be)viszi, a szerint, a mint $\varepsilon_k = 1$ vagy $\varepsilon_k = -1$. Tehát

I. *A teljes oktaedroidcsoport $2^n n!$ forgást tartalmaz.*

Az (I) orthogonális substituczió determinánsának, $|a_{\rho\sigma}|$ -nak elemei így adhatók meg:

$$a_{\rho\sigma} = \varepsilon_k, \quad \text{ha } \sigma = k \text{ és } \rho = i_k$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

egyébként pedig

$$a_{\rho\sigma} = 0.$$

Ha $g=0$ vagy 1 , a szerint, a mint a (k, i_k) permutáció páros vagy páratlan; és $m=0$ vagy 1 a szerint, a mint az n számú ε közt a -1 értékűek száma páros vagy páratlan, akkor e determináns értéke:

$$|a_{\rho\sigma}| = (-1)^g \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = (-1)^{g+m}.$$

Az (I) forgás tehát valódi vagy nem valódi a szerint, a mint $g+m$ páros vagy páratlan. A $2^n n!$ számú eshetőségnél $g+m$ ugyanannyiszor páros, mint páratlan és így:

II. *Az oktaedroidcsoport $2^{n-1} n!$ valódi és ugyanennyi nem valódi forgást foglal magában.*

Ha S valódi, T pedig tetszőleges oktaedroidforgás, akkor TST^{-1} szintén valódi oktaedroidforgás s így a valódi oktaedroidforgások a teljes oktaedroidcsoportban invariáns alcsoportot alkotnak:

III. *A teljes oktaedroidcsoport sohasem egyszerű.*

Tekintsük most azon valódi oktaedroidforgások összességét,

Q -t, melyekre g is, m is zérus. Ha S és T a Q -hoz tartozik; akkor ST is ilyen. Ha t. i. S a (k, i_k) permutációval és $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ sorozattal, T pedig a (k, j_k) permutációval és $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ sorozattal van megadva, akkor ST a (k, i_k) és (k, j_k) permutációk szorzatával és az $(\varepsilon_1 \gamma_1, \varepsilon_2 \gamma_2, \dots, \varepsilon_n \gamma_n)$ sorozattal jellemezhető. Két páros permutáció szorzata páros lévén, ST -re is: $g=0$ és egyszersmind $m=0$, mert $\prod_{i=1}^n \varepsilon_i = 1$ -ből és $\prod_{i=1}^n \gamma_i = 1$ -ből $\prod_{i=1}^n \varepsilon_i \gamma_i = 1$ következik. A Q tehát csoport, mely — mint könnyen belátható — $2^{n-2} n!$ substitucziót tartalmaz. Kimutatjuk most, hogy Q invariáns alcsoportja a valódi oktaedroidcsoportnak.¹ Az előbbi módon belátható, hogy oktaedroidforgások összetevésénél «az m -ek is és a g -k is összeadódnak». Ha tehát S a Q -hoz tartozik és T tetszőleges oktaedroidforgás, akkor TST^{-1} is Q -hoz tartozik, minthogy T -hez és T^{-1} -hez ugyanazon m és g szám tartozik. A kimondott tétel ezzel be van bizonyítva:

IV. A valódi oktaedroidcsoport sohasem egyszerű.²

Az (I) alatt megadott általános oktaedroidforgás tengelyét az

$$\alpha_k = \varepsilon_k \alpha_{i_k} \quad (II)$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszer adja. A tengelyméret meghatározása céljából meg kell vizsgálnunk, hogy e között az n egyenlet között hány az egymástól független. A (k, i_k) permutációt ismét ciklusokra bontva, legyen:

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \dots C_p$$

¹ E tételt — beh bizonyítás nélkül — PUCHTA mondta ki, elsőnek említett cikkében (835. l.). Ugyanitt — szintén minden bizonyítás nélkül — azt állítja PUCHTA, hogy a $2n$ számú oktaedroidesücsopont ama permutációi, melyek valódi oktaedroidforgásokkal létrehozhatók, az összes permutációknak invariáns alcsoportját alkotják. Ez azonban nem helyes: a szimmetrikus csoportnak $n > 4$ esetében az alternáló az egyedüli invariáns alcsoportja, a mint ez az utóbbinak egyszerűségéből elég egyszerűen kimutatható.

² $n=3$ esetében az invariáns Q alcsoport egy (valódi) tetraédercsoport; I. KLEIN: «Ikosaeder», 16. l.

és a C_ϱ elemeinek a száma c_ϱ :¹

$$C_\varrho = (x_{\varrho 1}, x_{\varrho 2}, \dots, x_{\varrho c_\varrho})$$

így, hogy

$$c_1 + c_2 + \dots + c_p = n.$$

A (II) egyenletek mindegyike valamely ciklushoz tartozik: c_ϱ -hoz ezek tartoznak:

$$x_{\varrho 1} = \varepsilon_{\varrho 1} x_{\varrho 2}, x_{\varrho 2} = \varepsilon_{\varrho 2} x_{\varrho 3}, \dots, x_{\varrho c_\varrho} = \varepsilon_{\varrho c_\varrho} x_{\varrho 1}. \quad (\text{III})$$

Különböző ciklusokhoz tartozó egyenletei a (II)-nek egymástól okvetetlenül függetlenek, minthogy ilyenekben csupa más x szerepel.

A (III) első $c_\varrho - 1$ egyenlete is okvetetlenül független egymástól, mert itt mindegyik egyenletben egy-egy új x lép fel. Tehát vagy mind a c_ϱ egyenlet független egymástól, ha t. i. a (III) rendszer determinánsa, Δ nem tűnik el, vagy csak $c_\varrho - 1$ egyenlet független egymástól, a mikor t. i. $\Delta = 0$. E determináns:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon_{\varrho 1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon_{\varrho 2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\varepsilon_{\varrho, c_\varrho - 1} \\ -\varepsilon_{\varrho c_\varrho} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Az első sor (vagy oszlop) szerint kifejtve, közvetlenül nyerjük, hogy

$$\Delta = 1 - \varepsilon_{\varrho 1} \varepsilon_{\varrho 2} \dots \varepsilon_{\varrho c_\varrho} = 1 - II^{(\varrho)} \varepsilon$$

s így $\Delta = 0$ vagy $\neq 0$ a szerint, a mint $II^{(\varrho)} \varepsilon = +1$ vagy -1 . Első esetben $c_\varrho - 1$, a másodikban c_ϱ a (III) egymástól független egyenleteinek a száma.

Ha tehát most már $m_\varrho = 0$ vagy 1, a szerint, a mint $II^{(\varrho)} \varepsilon = -1$ vagy $+1$ (azaz $m_\varrho + 1$ congruens mod. 2 az $\varepsilon_{\varrho 1}, \varepsilon_{\varrho 2}, \dots, \varepsilon_{\varrho c_\varrho}$ közötti -1 értékű számok számával), akkor a C_ϱ -hoz tartozó egyenletek közt $c_\varrho - m_\varrho$ az egymástól független.

¹ A két index használatára vonatkozólag lásd az 1 jegyzet a 35. lapon.

Mind az n számú (II) egyenlet közt tehát az egymástól függetlenek száma:

$$\sum_{\rho=1}^p (c_{\rho} - m_{\rho}) = \sum_{\rho=1}^p c_{\rho} - \sum_{\rho=1}^p m_{\rho} = n - d,$$

hol d ama ciklusok száma, melyekre $II^{(q)}\varepsilon=1$, azaz a melyekhez tartozó ε -ok közt páros számú -1 értékű van. Tehát:

V. Az általános oktaedroidforgás tengelyének mérete: d .

Innen most már levezethetők a megelőző fejezet II—VI. tétéleinek megfelelő eredmények, melyek azonban nem fejezhetők ki oly rendkívül egyszerű alakban, mint a simplexekre vonatkozólag.

Végül áttérünk a harmadik és utolsó szabályos testre, mely azonban, mint látni fogjuk, nem vezet az orthogonális substitúciók új véges csoportjához. E testet, mely $n=3$ esetében a hexaéderhez vezet, *hexaedroid*nak nevezzük.

A *hexaedroid* legegyszerűbben, mint a 2^n számú

$$(\varepsilon_1 h, \varepsilon_2 h, \dots, \varepsilon_n h)$$

pont összessége adható meg, hol az ε -ok minden lehető (2^n -féle) módon felveszik a $+1$ és -1 értékeket.

Az (I) alatt megadott $2^n n!$ számú forgás, az oktaedroidforgások e pontokat önmagukba viszik át és belátható, hogy ezek az egyedüliek.¹ E forgáscsoporttal nem kell tehát tovább foglalkoznunk:

VI. A teljes és valódi hexaedroidcsoport megegyezik a teljes, illetve valódi oktaedroidcsoporttal.

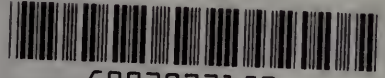
¹ Ismeretes t. i. (l. SCHOUTE munkájának II. kötetét, 256. l.), hogy a valódi hexaedroidcsoport, ép úgy, mint a valódi oktaedroidcsoport $2^{n-1} n!$ forgást tartalmaz.

TARTALOM.

	<i>Lap</i>
Bevezetés. (A dolgozat tárgya és ennek irodalma)	3
I. Az R_n lineáris részei és mozgásai	6
II. A lineáris részek forgása	11
III. A forgástengely dimenziója	15
IV. Pontrendszerek forgása	19
V. A simplex és csoportja	24
VI. A simplexforgások tengelye	29
VII. Az oktaedroid és hexaedroid csoportja	37



U.C. BERKELEY LIBRARIES



C003073153

QA660
K66
1907
MATH

-220

