

Q A  
660  
K66  
1907  
MATH

UCB



A TÖBBMÉRETŰ TÉR  
FORGÁSAINAK ÉS VÉGES FORGÁSCSOPORTJAINAK  
ANALYTIKUS TÁRGYALÁSA

IRTA

KÖNIG DÉNES



BUDAPEST  
FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

1907



Nagyságos  
dr. Farkas Gyula  
egyetemi tanár úrnak  
Kiváló tisztelettel  
a szerző

# A TÖBBMÉRETŰ TÉR

FORGÁSAINAK ÉS VÉGES FORGÁSCSOPORTJAINAK

ANALYTIKUS TÁRGYALÁSA

Pami  
rep  
MATH

IRTA

KÖNIG, DÉNES



BUDAPEST

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

1907



5386-4220

Pam  
rep  
MATH



# Az I. fejezet III. tételének (7. 1.) bizonyítása következőképen helyesbítendő.

Legyen

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$$

( $i=1, 2, \dots, k$ )

a megadott  $k$  pont. Van egy az

$$M \equiv \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n & 1 \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(k)}_1 & x^{(k)}_2 & \dots & x^{(k)}_n & 1 \end{vmatrix}$$

QA660  
K66  
1907  
MATH/  
STAT

mátrixra jellemző oly  $p$  szám ( $p \leq k$ ), hogy e mátrix azon al-determinánsai között, melyek az utolsó oszlopból tartalmaznak elemet, van egy  $p$ -edfokú, mely nem tűnik el, míg minden magasabbfokú ily al-determináns (ha egyáltalán van ilyen) el-tűnik. Az el nem tűnő  $p$ -edfokú al-determináns az általánosság megszorítása nélkül így vehető fel:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_{p-1} & 1 \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_{p-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(p)}_1 & x^{(p)}_2 & \dots & x^{(p)}_{p-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (I)$$

Az  $n-p+1$  számú

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{p-1} & x_\alpha & 1 \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_{p-1} & x'_\alpha & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(p)}_1 & x^{(p)}_2 & \dots & x^{(p)}_{p-1} & x^{(p)}_\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

( $\alpha=p, p+1, \dots, n$ )

egyenletet most már minden  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  rendszer kielégíti. Ha t. i.  $i=1, 2, \dots, p$ , akkor e rendszer helyettesítése után a determináns két sora azonos lesz, ha pedig  $i=p+1, p+2, \dots, n$ , akkor (a sorok sorrendjétől eltekintve) az  $M$  mátrix oly  $p+1$ -edfokú al-determinánsát nyerjük, mely az utolsó oszlopból is tartalmaz elemet. Ez az  $n-p+1$  számú egyenlet végül független is egymástól, mert mindegyik tartalmaz egy oly  $x$ -et (t. i.  $x_\alpha$ -t), mely egy másikban sem szerepel;  $x_\alpha$  együtt-hatója t. i. (I) szerint nem tűnik el.

A  $k$  pont kielégít ily módon  $n-p+1$ , (azaz legalább  $n-k+1$ ) független lineáris egyenletet s így valóban egy  $R_{k-1}$ -ben fekszik.





## BEVEZETÉS.

### A dolgozat tárgya és ennek irodalma.

Dolgozatunk tárgya az  $n$ -méretű tér ( $R_n$ ) forgásainak (I—IV. fej.) és azon véges forgáscsoportjainak (V—VII. fej.) tárgyalása, melyek az  $n$ -méretű tér különböző szabályos testjeit önmagukba viszik át.

Az  $n$ -méretű geometria első rendszeres, és pedig analitikus tárgyalása JORDAN «Essai»-jében<sup>1</sup> található, melynek különösen a kinematikát tárgyaló VII. fejezete van dolgozatunkkal (a III. fejezettel) kapcsolatban. SCHOUTE kétkötetes munkájának<sup>2</sup> inkább csak eredményei és nem módszerei jönnek számunkra tekintetbe.

A háromméretű szabályos testeket, mint köztudomású, már PLATO ismerte. A hozzájuk tartozó forgáscsoportokat KLEIN<sup>3</sup> tárgyalta először. A négy- és többméretű szabályos testek felfedezésének az érdeme STRINGHAM-é,<sup>4</sup> kinek eredménye ez;  $n=4$  esetében hat,  $n>4$  esetében pedig mindenkor három szabályos test létezik. Ugyanezen eredményeket PUCHTA<sup>5</sup> a

<sup>1</sup> JORDAN: «Essai sur la géométrie à  $n$  dimensions». Bulletin de la Soc. Math. de France, III. (1875).

<sup>2</sup> SCHOUTE: «Mehrdimensionale Geometrie». I—II. Leipzig, Göschen (1902, 1905).

<sup>3</sup> KLEIN: «Vorlesungen über das Ikosaeder», Leipzig, Teubner (1884).

<sup>4</sup> STRINGHAM: «Regular figures in  $n$ -dimensional space». American Journal of Mathematics, III. (1880).

<sup>5</sup> PUCHTA: «Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raum von 4 Dimensionen». — Wiener Berichte, LXXXIX. (1884) és «Analytische Bestimmung der regelm. conv. Körper im Raume von beliebiger Dimension». — Wiener Berichte, XC. (1884).

mindenesetre tökéletesebb<sup>1</sup> analitikus módszerrel vezeti le, mely az absztrakt csoportelméletbe tartozó eredményekhez is vezet. A négy méretű tér szabályos testjeihez tartozó csoportokat VAN OSS tárgyalja *giesseni* dissertatiójában,<sup>2</sup> a mienktől lényegesen különböző szempontból: a forgástengelylyel nem törődve megelégszik az alcsoportok felsorolásával. Ugyanezzel foglalkozik GOURSAT nagyszabású munkája,<sup>3</sup> mely analitikus alapon tárgyalja a kérdést. Az  $n$ -méretű három szabályos test csoportja különösen geometriai szempontból nem igen volt eddig tárgyalva és úgyszólván csupán e csoportok rendszáma  $\left(\frac{n!}{2}, 2^{n-1}n!, \text{ illetve } 2^{n-1}n!\right)$  volt ismeretes.<sup>4</sup>

A legegyszerűbb  $n$ -méretű szabályos testhez, az ú. n. simplexhez tartozó «valódi» csoportoknak azonban alacsony  $n$ -ekre máris elég nagy irodalma van. Ámde mindenütt e geometriai interpretációtól függetlenül tárgyaltattak. Egyrészt mint absztrakt csoportokat vizsgálták ezeket, másrészt hozzájuk holodrikusan isomorph lineáris csoportokat kerestek, lehetőleg kis számú változóval:  $n=3$  esete a tetraéder,  $n=4$  pedig az ikozaéder csoportjához vezet,<sup>5</sup> t. i. mindkettő isomorph 5 elem alternáló csoportjával. A négy méretű simplex és az ikozaéder csoportjának isomorphismusát VAN OSS vette észre először említett munkájában, de ezt a továbbiakban nem használja fel. E két csoporthoz már kétváltozós lineáris csoport képezhető.<sup>6</sup> Ellenben az ötdimenziós valódi simplexcsoporthoz, mely a 360 operációból álló VALENTINER-féle csoporttal<sup>6</sup> isomorph (mindkettő 6 elem alternáló csoportjával isomorph), csak há-

<sup>1</sup> STRINGHAM maga sem tartotta módszerét tökéletesnek (l. említett munkája végét).

<sup>2</sup> VAN OSS: «Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von 4 Dimensionen», Utrecht, 1894.

<sup>3</sup> GOURSAT: «Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace». Ann. Éc. Norm., 3e. S., VI. (1889).

<sup>4</sup> L. SCHOUTE említett munkáját (II. kötet, p. 256).

<sup>5</sup> L. KLEIN: «Ikozaeder»-jét.

<sup>6</sup> VALENTINER: «De endelige Transformations Gruppers-Theorie», Kjøbenhavn'ske Skr. 6 (1889) (avec un résumé français).

romváltozós isomorph lineáris csoport képezhető. E csoport részletes tárgyalása WIMAN-tól származik.<sup>1</sup> Legegyszerűbben MASCHKE<sup>2</sup> származtatja le egymásból e lineáris csoportokat, megtoldva egy  $\frac{7!}{2}$  substituczióból álló négyváltozós lineáris csoporttal, mely a hatdimenziós simplexcsoporttal isomorph és bebizonyítja, hogy kevesebb változóval ilyen nem képezhető. MASCHKE symmetrikus permutációcsoporttal isomorph lineáris csoportokkal is foglalkozik, s így  $n=2, 3, 4, 5$  esetére a «teljes» simplexcsoporthoz is felállítja a holodrikusan isomorph minimális számú (3 vagy 4) változójú lineáris csoportokat.

A mi e dolgozat tárgyát részletesebben illeti, az első fejezetben az  $R_n$  bizonyos egyszerű «összekapcsolási» törvényeit bizonyítjuk be, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz és bevezetjük az  $R_n$  eltolásának, forgásának és általános mozgásának fogalmát. Majd kimutatjuk, hogy két tetszőleges  $R_k$  (II. fej.) és két congruens pontrendszer (IV. fej.) mindig átvihető egymásba. (Ezek a tételek alapszik a véges forgáscsoportok tárgyalására.) A III. fejezet pedig az általános  $R_n$ -forgás tengelyének méretére vonatkozó kérdést intézi el. Az V. fejezetben rekurzív eljárást adunk a simplex-csúspontok koordinátáinak meghatározására és kimutatjuk a csoport isomorphismusát az  $n+1$  elem symmetrikus illetve alternáló csoportjával. A VI. fej. a simplexcsoportnak a forgástengellyel kapcsolatos tulajdonságait tárgyalja. Egyik főeredmény itt az, hogy a simplex-forgás tengelyének mérete 1-gyel kisebb a létrehozott csúspont-permutáció ciklusainak számánál. Az utolsó fejezetben pedig az oktaedroid és hexaedroid csoportját tekintjük hasonló szempontból.

A specifikusan 2, 3 és 4-méretű szabályos testekkel nem foglalkozunk, minthogy végig egészen általános  $n$ -et veszünk

<sup>1</sup> WIMAN: «Eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen», Mathematische Annalen, 47 (1896).

<sup>2</sup> MASCHKE: «Symmetrische und alternirende Collineationsgruppen», Mathematische Annalen, 51 (1898).

fel. Ugyanezen okból nem foglalkozhatunk oly tulajdonságokkal, melyek az  $n$  «egyéni» tulajdonságaitól (a primszámosztótól, stb.) függenek. Különösen két problémára gondolunk itt. Az egyik a csoport minimális számú alkotójának meghatározását követeli. A másik oly minimális számú változót tartalmazó lineáris substituczió találására vonatkozik, mely csoportunkkal isomorph. Ez az eddig elintézetlen probléma általános megoldása mindenesetre egészen más módszereket igényel.

## I. Az $n$ -méretű tér lineáris részei és mozgásai.

Az  $n$ -méretű teret,  $R_n$ -et, mint az

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

számcomplexusok összességét definiáljuk, hol az  $x$  számok minden valós, véges értéket felvehetnek. E complexust az  $R_n$  egy pontjának is nevezzük, melynek  $x_1, x_2, \dots, x_n$  az  $n$  koordinátája. Az

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ és } (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

pontok *távolságának* az

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

számot fogjuk nevezni. A  $(0, 0, \dots, 0)$  pontot  $O$ -val jelöljük.

Az  $R_n$  azon pontjainak összességét, melyeknek koordinátái kielégítenek egy

$$a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + \dots + a_n^{(i)}x_n + a_{n+1}^{(i)} = 0$$

$(i=1, 2, \dots, m)$

lineáris egyenletrendszert, az  $R_n$  egy *lineáris részének* nevezzük. Ha e rendszer mátrixának rangszáma  $p$ , akkor  $n-p$ -t e lineáris rész *méretének* nevezzük, hiszen a lineáris egyenletrendszerek elmélete szerint két ily rendszer rangszáma megegyezik, ha tartalmuk (gyökrendszereik összessége) ugyanaz. Ismeretes továbbá, hogy e rendszerből kiválasztható  $p$ -számú egyenlet oly módon, hogy ezek oly rendszert alkossanak, mely-



nek tartalmia az eredetiével megegyezik és melynek mátrixa ugyancsak  $p$ -edrangú.

Így tehát minden  $k$ -méretű lineáris része az  $R_n$ -nek oly  $n-k$  egyenletből álló rendszerrel adható meg, melynek mátrixa  $n-k$ -adrangú, azaz mely «csupa egymástól független egyenletet tartalmaz».

Az  $R_n$ -nek  $k$ -méretű lineáris részeit  $R_k$ -val fogjuk jelölni. (Látni fogjuk t. i. a II. fejezetben, hogy ezek mily szoros vonatkozásban vannak az  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  komplexusok összességével.)

Az  $R_n$ -nek ezek szerint  $R_0, R_1, R_2, R_3$  jelekkel jelölendő lineáris részeit, mint  $n=3$  esetében, úgy általános  $n$ -nél is pontnak, egyenesnek, síknak, illetve (háromméretű) térnek is fogjuk nevezni.

Különbözőnek nevezünk két  $R_k$ -t, ha az egyik tartalmaz oly pontot, mely a másikban nincs bent. Ez esetben az egyik egyenletrendszer tartalmaz oly egyenletet, mely a másik rendszernek nem folyománya. Két különböző  $R_k$  közös pontjai tehát kielégítenek  $n-k+1$  független egyenletet és így

I. Ha az  $R_n$  egy lineáris része bentfoglaltatik az  $R_n$  két különböző  $R_k$ -jában, akkor mérete  $k$ -nál kisebb. Innen továbbá:

II. Az egyedüli  $k$ -méretű lineáris rész, mely  $R_k$ -t tartalmazza, maga  $R_k$ .

III.  $k$ -számú pont mindig egy  $R_{k-1}$ -ben fekszik ( $k \leq n+1$ ). Legyen t. i.

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ (i=1, 2, \dots, k)$$

ez a  $k$  pont. Ezek valóban kielégítenek egy ily rendszert:

$$a_1^{(r)} x_1^{(i)} + a_2^{(r)} x_2^{(i)} + \dots + a_n^{(r)} x_n^{(i)} + a_{n+1}^{(r)} = 0 \\ \left( \begin{matrix} r=1, 2, \dots, n-k+1 \\ i=1, 2, \dots, k \end{matrix} \right)$$

Ugyanis ily homogén egyenletrendszernek, melyben az ismeretlenek (az  $a$ -k) száma  $((n+1)(n-k+1))$  nagyobb mint az egyen-



letek száma  $(k(n-k+1))$ , mindig van oly megoldása, hogy semmiféle  $r$ -nél sem 0 valamennyi  $a^{(r)}$ .

Az I. és III. tételből még a következőhöz jutunk:

IV. Ha  $k$ -számú pont nem fekszik egy  $R_{k-2}$ -ben, akkor egy és csak egy oly  $R_{k-1}$  van, melyben mind a  $k$  pont bent fekszik.

A következőkben az  $R_n$ -nek önönmagán való bizonyos kölcsönösen egyértelmű ábrázolásai fognak fontos szerepet játszani. Különösen oly ábrázolások fognak tekintetbe jönni, a melyeknek megvan a következő két tulajdonságuk:

A) a távolságokat nem változtatja (congruens ábrázolás)

B)  $k$ -számú pont akkor és csak akkor fekszik egy  $R_{k-2}$ -ben, ha «kép»-eik egy  $R_{k-2}$ -ben fekszenek.

Mindkét tulajdonsága megvan először is az

$$x'_i = x_i + d_i \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletekkel definiált ábrázolásnak, az ú. n. *eltolásnak*. Hiszen

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ és } (y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \\ \text{lévén az} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ és } (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

pontok képe valóban fennáll a

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

egyenlőség. A mi pedig a B) tulajdonságot illeti: ha  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kielégít egy

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1} = 0$$

egyenletet, akkor  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  kielégíti a

$$\sum_{i=1}^n a_i (x'_i - d_i) + a_{n+1} = 0$$

egyenletet és viszont: minden  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ -re fennálló egyenlethez  $x'_i = x_i + d_i$  által egy oly egyenlet tartozik, melyet  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  elégít ki. Minthogy továbbá lineárisan füg-

getlen egyenleteknek ugyanily egyenletek felelnek meg, azért az eltolásoknak valóban megvan a  $B$ ) tulajdonságuk.

A második fontos ábrázolást az ú. n. orthogonális lineáris (homogén) substitucziók szolgáltatják.

Az

$$(S) \quad x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

lineáris homogén substitucziót tudvalevőleg akkor nevezik (CAYLEY-vel) *orthogonálisnak*, ha az  $a_{ik}$ -k úgy vannak választva, hogy identikusan fennáll a

$$(I) \quad \sum_{k=1}^n x_k'^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

összefüggés. Ezen substitucziók elméletét EULER, CAUCHY és JACOBI alapította meg.<sup>1</sup> Felsoroljuk röviden a későbbiekben felhasználandó és egyszersmind legfontosabb tulajdonságaikat.

(I)-be behelyettesítve az  $x'$ -k kifejezéseit és egyenlővé téve a két oldal megfelelő együtthatóit, az orthogonális substitucziókra jellemző következő «orthogonalitási feltételek»-hez jutunk:

$$(II) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1 & (i=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0 & (i, j=1, 2, \dots, n; i \neq j) \end{cases}$$

Kiadódik innen továbbá, hogy, ha  $A = |a_{ik}|$  a substituczió determinánsa, akkor  $A^2=1$  és így  $A=\pm 1$ . Végül  $S$ -sel együtt  $S^{-1}$  is mindig orthogonális substituczió és  $S^{-1}$  nem egyéb, mint

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

<sup>1</sup> A pontos irodalmi utalások pl. BALTZER «Determinanten»-jában találhatók, a 4. kiadás (Leipzig, 1875) 172. lapján.

úgy, hogy (II)-ből az  $a$ -k két indexének felcserélésével egy második identitásrendszerhez jutunk. Minthogy továbbá két orthogonális substituczió szorzata a definíció szerint szintén orthogonális, azért az orthogonális substitucziók csoportot alkotnak.

Vonással mindig az  $S$  substituczió véghezvitelét jelezve, a (II) képletekkel könnyen verifikáljuk a következő képletet is:

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

Az ( $S$ )-sel megadott ábrázolásnak, melyet — a szerint, hogy  $A=1$  vagy  $A=-1$  — az  $R_n$  *valódi* illetve *nem valódi* ( $O$  *körűli*) *forgásának* nevezzük, e szerint megvan az  $A$ ) tulajdonsága. Hogy a  $B$ ) tulajdonságuk is megvan, ép úgy mutatható ki, mint az eltolásokra.<sup>1</sup>

Eltolások és forgások összetevésével definiált minden ábrázolást az  $R_n$  *mozgásának* nevezzük, és így ezek csoportot alkotnak. A mozgásnak, mely tehát mindig, mint lineáris substituczió adható meg, megvan tehát mind az  $A$ ),<sup>2</sup> mind a  $B$ ) tulajdonsága. Ha van oly mozgás, mely egy pontrendszert egy másikba visz át, akkor röviden azt mondjuk, hogy az egyik pontrendszer a másikba *átvihető*. Ekkor természetesen a második is átvihető az elsőbe. Minden  $S$  mozgáshoz tartozik t. i. egy  $S^{-1}$  úgy, hogy  $SS^{-1}=1$ .

Az eddigiekhez hasonló megfontolásokkal belátható a következő tétel is:

V. Minden mozgás egy  $R_k$ -t ismét egy  $R_k$ -ba visz át.

Annak a bizonyítását, hogy két  $R_k$  egyszersmind mindig átvihető egymásba, a következő fejezet tartalmazza.

<sup>1</sup> A  $B$ ) tulajdonsága t. i. minden olyan lineáris substituczióval definiált ábrázolásnak megvan, melynek determinánsa nem zérus. Egyébként a  $B$ ) tulajdonság folyománya  $A$ )-nak.

<sup>2</sup> Különböző pontok tehát mozgással különböző pontokba mennek át.

## II. A lineáris részek forgása.

### I. Adva lévén a tetszőleges

$$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

pont, mindig van oly valódi forgás, mely ezt a  $(0, 0, \dots, 0, d)$  pontba viszi át, ha

$$d^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{0^2}.$$

A tétel  $n=2$  esetére igaz lévén, feltehetjük, hogy  $n>2$ , és hogy minden  $n$ -nél kisebb méretszámra is igaz úgy, hogy van oly valódi forgás  $S$ , mely az  $R_{n-1}$ -nek  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$  pontját  $(0, 0, \dots, 0, d')$ -be viszi, hol  $d'^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{0^2}$ . Ugyanez az orthogonális substituczió, mint az  $R_n$  forgását tekintve,  $P_0$ -t  $(0, 0, \dots, 0, d', x_n^0)$ -ba viszi, minthogy  $x_n$  nem is szerepel benne. Ha most még

$$T : \begin{cases} x'_{n-1} = b_{11} x_{n-1} + b_{21} x_n \\ x'_n = b_{12} x_{n-1} + b_{22} x_n \end{cases}$$

oly kétméretű, tehát létező valódi forgás, mely  $(d', x_n^0)$ -t  $(0, d)$ -be viszi át, hiszen

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{0^2} + x_n^{0^2} = d'^2 + x_n^{0^2};$$

akkor —  $T$ -t is most, mint az  $R_n$  forgását értelmezvén —  $ST$  a keresett forgást adja:  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ -t átviszi  $(0, 0, \dots, d)$ -be, miután az  $S$  először  $(0, 0, \dots, d', x_n^0)$ -ba vitte;  $T$  innen — nem változtatván az  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$  koordinátákat — valóban  $(0, 0, \dots, 0, d)$ -be viszi.

### II. Egy tetszőleges $O_n$ átmenő egyenes:

$$\sum_{k=1}^n a_k^{(i)} x_k = 0$$

( $i=1, 2, \dots, n-1$ )

átvihető valódi forgással az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott egyenesbe, az ú. n.  $x_n$ -koordináta tengelybe.

Legyen t. i.  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  az adott egyenes egy pontja, akkor ez az I. tétel szerint egy valódi forgással  $(0, 0, \dots, 0, d)$ -be vihető, hol

$$d^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{0^2}.$$

Ha ez a forgás az adott egyenest

$$\sum_{k=1}^n b_k^{(i)} x_k = 0$$

( $i=1, 2, \dots, n-1$ )

egyenesbe viszi, akkor, minthogy  $(0, 0, \dots, 0, d)$  rajta fekszik ezen egyenesen:

$$b_n' = 0, b_n'' = 0, \dots, b_n^{(n-1)} = 0,$$

úgy hogy

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$$

kielégíti az új egyenes egyenletrendszerét, azaz tartalmazza az  $x_n$ -tengelyt és így az I. fejezet II. tétele szerint — mint bizonyítandó volt — ezzel megegyezik.

A beh bizonyított tétel így általánosítható:

III. Egy tetszőleges  $O$ -n átmenő  $R_k$ :

$$\sum_{k=1}^n a_k^{(i)} x_k = 0$$

( $i=1, 2, \dots, n-k$ )

átvihető valódi forgással az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott  $R_k$ -ba.

Feltehetjük, hogy  $k > 1$ , mert  $k=1$  esetében az utolsó tétel a beh bizonyítandót adja;  $n=2$  esetében is igaz a tétel s így fel-



tehetjük, hogy  $n$ -nél kevesebb méretű terekre és  $k$ -nál kevesebb méretű lineáris részekre is igaz és teljes indukcióval bizonyíthatunk. Legyen  $R'_{k-1}$  az  $R'_k$  egy része. Feltetésünk szerint  $R'_{k-1}$  egy valódi  $S$  forgással átvihető az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k+1} = 0$$

sal megadott  $R_{k-1}$ -be. Ez az  $S$  az  $R'_k$ -t oly  $R''_k$ -be viszi át, mely ezen  $R_{k-1}$ -et tartalmazza. Az  $R''_k$  egyenletrendszerét tehát

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k+1} = 0$$

kiegészíti, úgy, hogy ez csak ily alakú lehet

$$b_1^{(i)} x_1 + b_2^{(i)} x_2 + \dots + b_{n-k+1}^{(i)} x_{n-k+1} = 0$$

( $i=1, 2, \dots, n-k$ )

Mínthogy  $k > 1$ , azért  $n-k+1 < n$  és feltetésünk szerint van oly  $T$   $+1$  determinánsú orthogonális substituciója  $x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}$ -nek, mely ezt

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

-ba, azaz az  $R_k$ -ba viszi át. Ez a  $T$  is, mint az  $R_n$  valódi forgása tekinthető és akkor  $ST$  a keresett valódi forgás.

[A geometriai elnevezésektől függetlenül, mint algebrai tétel eredményünk így mondható ki:

Mindig van oly  $+1$  determinánsú orthogonális substitució:

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x'_i,$$

( $k=1, 2, \dots, n$ )

mely az  $r$  számú ( $r \leq n$ ) független lineáris egyenletből álló

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(i)} x'_k = 0$$

( $i=1, 2, \dots, r$ )

rendszert az

$$x'_1 = 0, x'_2 = 0, \dots, x'_r = 0$$

rendszerbe viszi át.]

Ha  $R'_k$  is és  $R''_k$  is átmegy  $O$ -n, akkor a most bebizonyított tétel szerint van oly  $S'$  és  $S''$  valódi forgás, mely  $R'_k$ -t, illetve  $R''_k$ -t az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

egyenletrendszerrel megadott  $R_k$ -ba viszi át. Ekkor az  $S'S^{n-1}$  valódi forgás  $R'_k$ -t  $R''_k$ -be viszi át. Tehát:

IV. Ha  $R'_k$  és  $R''_k$  átmegy  $O$ -n, van oly valódi forgás, mely  $R'_k$ -t  $R''_k$ -be viszi át.

Hogy a bebizonyított tételt még valamivel általánosabban mondhatjuk ki, még a következő tételre van szükségünk:

V. Adva lévén egy tetszőleges  $R'_k$ , ez eltolással átvihető egy  $O$ -n átmenő  $R''_k$ -be úgy, hogy az  $R'_k$  tetszőleges  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  pontja  $O$ -ba jusson.

Ez egyszerűen az

$$x_i = x'_i + x_i^0 \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

eltolással érhető el. Ha t. i.  $R'_k$ -t

$$a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + \dots + a_n^{(i)}x_n + a_{n+1}^{(i)} = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n-k)$$

definiálja, akkor ez a fenti eltolással az

$$a_1^{(i)}(x'_1 + x_1^0) + a_2^{(i)}(x'_2 + x_2^0) + \dots + a_n^{(i)}(x'_n + x_n^0) + a_{n+1}^{(i)} = 0, \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

azaz

$$a_1^{(i)}x'_1 + a_2^{(i)}x'_2 + \dots + a_n^{(i)}x'_n + (a_1^{(i)}x_1^0 + a_2^{(i)}x_2^0 + \dots + a_n^{(i)}x_n^0 + a_{n+1}^{(i)}) = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszerrel megadott  $R''_k$ -be megy át. Minthogy feltevés szerint:

$$a_1^{(i)}x_1^0 + a_2^{(i)}x_2^0 + \dots + a_n^{(i)}x_n^0 + a_{n+1}^{(i)} = 0, \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

azért e rendszer homogén és  $R''_k$  valóban átmegy  $O$ -n.

Egybevetve az utolsó két tételt:

VI. Minden  $R'_k$  átvihető (egy eltolással és egy valódi forgással) az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0 \\ \text{vagy ép így a} \\ x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

egyenletrendszerrel megadott  $R_k$ -ba és pedig úgy, hogy az  $R_k$  tetszőleges pontja jusson  $O$ -ba. Az utóbbi  $R_k$  nem egyéb, mint az  $R_n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$$

pontjainak összessége, hol  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tetszőleges szám lehet s így módon azonosítható az  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  komplexusok összességével, az eredetileg definiált  $R_k$ -val. Tételünk szerint most már  $R_n$  minden  $k$  méretű lineáris része leképezhető oly módon erre az  $R_k$ -ra, hogy megfelelő távolságok egyenlők legyenek és egy  $R_i$ -ben fekvő pontoknak (és csakis ilyeneknek) ugyanily pontok feleljenek meg. Csak ez teszi jogosulttá azt, hogy  $n-k$  független lineáris egyenletet kielégítő pontok összességét  $R_k$ -val jelöljük, minthogy  $R_k$  eredetileg, mint az  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  komplexusok összessége definiáltatott.

Ha  $R'_k$ -t az  $S'$ ,  $R''_k$ -t pedig az  $S''$  mozgás viszi át az

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$$

-val megadott  $R_k$ -ba, akkor  $S'S''^{-1}$  az  $R'_k$ -t  $R''_k$ -be viszi és így:

VII. Az  $R_n$  bármely két lineáris része átvihető egymásba, ha méretük megegyezik és pedig úgy, hogy az első bármelyik pontja a második meghatározott pontjába menjen át. E mozgás legegyszerűbben<sup>1</sup> mint  $TST'$  adható meg, hol  $T$  és  $T'$  eltolás,  $S$  pedig forgás.

### III. A forgástengely mérete.

Az  $R_n$  legáltalánosabb forgása, mely az orthogonális

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \quad (S)$$

( $k=1, 2, \dots, n$ )

substituczióval van megadva, változatlanul hagyja az

$$O = (0, 0, \dots, 0)$$

<sup>1</sup> Az « $O$ -tól különböző pont körüli forgás»-okat t. i. nem vezettük be.

pontot. Felmerül most már az a kérdés, hogy micsoda más pontok maradnak szintén változatlanul. E pontokat *pólusok*-nak, összességüket *forgástengelynek* nevezzük. Az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pont természetesen akkor lesz pólus, ha

$$x_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i. \quad (\text{I})$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

A tengely pontjait tehát egy lineáris homogén egyenletrendszer szolgáltatja és így

I. A *forgástengely* mindenkor az  $R_n$ -nek  $O$ -n áthaladó lineáris része.

Az (I) rendszernek akkor és csak akkor van

$$x_k = 0$$

$(k=1, 2, \dots, n)$

tól különböző megoldása, ha determinánsa, a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-1 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

determináns eltűnik (és ekkor egy egész  $O$ -n áthaladó egyenes csupa pólusból áll.) Ha általában  $p$  a  $D$  determináns rangszáma, akkor a lineáris részek méretének definíciója szerint:

II. A *forgástengely dimenziója*:  $n-p$ .

III. Ha tehát  $D$  minden  $k$ -adfokú aldeterminánsa eltűnik, akkor a tengelyméret  $\geq n-k+1$  és így a tengely mindenesetre magában foglal egy  $R_{n-k+1}$ -et.

Az  $S$  substituczió  $\pm 1$  értékű determinánsát  $A$ -val jelölve, kimutatjuk, hogy  $D$  eltűnik, ha  $A = (-1)^{n+1}$ . Szorozzuk össze e célból az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

és  $D$  determináns<sup>1</sup> a rendes szorzási szabály szerint, sort sorral komponálva. Az így nyert determináns, tekintetbe véve az orthogonalitás feltételeit abban különbözik  $D$ -től, hogy minden elem a megfelelő  $D$ -elem negatív értéke. Az egész determináns tehát  $D$ -nek  $(-1)^n$ -szerese:

$$AD = (-1)^n D$$

és így  $A = (-1)^{n+1}$  esetében valóban  $D = 0$ .<sup>2</sup>

Megkülönböztetve páros és páratlan  $n$  esetét III. tekintetbe vételével (most  $k=n$ ), ezen eredményünk így mondható ki:

IV. *Páratlan méretű tér valódi forgása és páros méretű tér nem valódi forgása változatlanul hagyja egy  $O$ -n áthaladó egyenes minden pontját.*<sup>3</sup>

Legyen általában  $R_k$  az  $S$  forgás tengelye. A II. fejezet III. tétele szerint van oly  $T$  forgás, mely  $R_k$ -t az

$$x_1=0, x_2=0, \dots, x_{n-k}=0$$

egyenletekkel megadott  $R_k^0$ -ba viszi. Ez az  $R_k^0$  tehát tengelye a  $T^{-1}ST$  forgásnak, melynek determinánsa, mint ismeretes, egyenlő  $S$  determinánsával. Tekintetbe véve, hogy  $T^{-1}ST$  a

$$(0, 0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$

pontokat önmagukba viszi át, e forgás determinánsa ilyen alakú:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1, n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-k, 1} & \dots & r_{n-k, n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{n-k+1, 1} & \dots & r_{n-k+1, n-k} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1, 1} & \dots & r_{n-1, n-k} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ r_{n1} & \dots & r_{n, n-k} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv c_{rr},$$

<sup>1</sup>  $n=3$  esetében e módszert WEBER alkalmazta (Lehrbuch der Algebra, II. kötet, 246. l., 2. kiadás).

<sup>2</sup> Ez speciális esete az ú. n. SIACCI-féle determinánstételnek, lásd PASCAL: «Determinanten»-ját, a német fordítás (Teubner, 1900) 168. l.

<sup>3</sup> Páratlan  $n$ -re e tételt SCHLÄFLI bizonyította be: «Über invariante Elemente einer orthogonalen Substitution...», Journal f. Math., 65. k.; l. továbbá JORDAN említett «Essai...»-jét. A tételt  $n=3$  esetére már EULER ismerte (1776). Végtelen kis mozgásra ( $n=3$ -nál): D'ALEMBERT (1749). Lásd SCHOENFLIES: Geometrie der Bewegungen (Teubner, 1886) 48. l. és 193. l. (14. j.)



hol még az utolsó  $k$  sor első  $n-k$  eleme is zérus, minthogy az orthogonálitási feltételek első sorozata szerint az egy sorban lévő együtthatók négyzetszöge 1. Minthogy a tengelyméret:  $k$ , azért a

$$|c_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}| \quad \left( \varepsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \neq \nu \\ 1, & \text{ha } \mu = \nu \end{cases} \right)$$

determináns rangja:  $n-k$  és így

$$|r_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k} \neq 0, \quad (\text{I})$$

minthogy  $|c_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}|$  többi  $n-k$ -adfokú aldeterminánsa identikusan 0. A  $|c_{\mu\nu}|$  determinánssal együtt a

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k}$$

determináns maga is kielégíti az orthogonálitási feltételeket és így (I) az utoljára bebizonyított tétel szerint csak

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k} = (-1)^{n-k}$$

esetben lehetséges ( $n$  helyére itt t. i.  $n-k$  lép). Ennélfogva, minthogy

$$|r_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n-k} = |c_{\mu\nu}|_{\mu, \nu=1, 2, \dots, n} = A,$$

azt nyerjük, hogy

$$A = (-1)^{n-k}.$$

Eredményünk tehát ez:

V. Valódi forgásnál a tengelyméret ( $k$ )  $n$ -nel együtt páros vagy páratlan, nem valódi forgásnál pedig a tengely mérete páros vagy páratlan, a szerint, a mint  $n$  páratlan vagy páros.<sup>1</sup>

Minthogy másrészt bármily  $n+1$ -nél kisebb szám is a  $k$ :

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i, \\ (i=1, 2, \dots, k) \\ x'_j &= -x_j \\ (j=k+1, k+2, \dots, n) \end{aligned}$$

oly forgás, melynél a tengely dimenziója:  $k$ ; és e forgás valódi vagy nem, a szerint, hogy  $n-k$  páros-e vagy páratlan (t. i.  $A = (-1)^{n-k}$ ) azért:

<sup>1</sup> E tételnek, mint determinánsételnek, bizonyos speciális eseteire vonatkozólag lásd STIELTJES és NETTO czikkeit az Acta Mathematica 6. és 9. kötetében, továbbá PASCAL «Determinanten»-jának 168—175. lapjait.

VI. Ha  $n$  páros (páratlan), akkor valódi forgásnál a tengely-méret minden páros (páratlan) szám, nem valódinál minden páratlan (páros) szám lehet, feltéve természetesen, hogy  $e$  szám  $\leq n$ .

Ezzel az  $n$ -méretű tér forgásának tengelyére vonatkozó kérdés teljesen el van intézve. Eredményünk ez:

VII. Az  $n$ -méretű tér valódi forgásának a tengelye vagy az  $R_n$  (az identikusnál) vagy egy  $R_{n-2}$ , vagy egy  $R_{n-4}$ , stb.; nem valódi forgás tengelye pedig csak egy  $R_{n-1}$ , vagy egy  $R_{n-3}$ , vagy egy  $R_{n-5}$ , stb. lehet.

Mindezen esetek be is következhetnek.<sup>1</sup>

#### IV. Pontrendszerek forgása.

1. Ha az  $R_n$ -nek  $n-1$  számú  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  pontja nem fekszik  $O$ -val együtt egy  $R_{n-2}$ -ben, akkor az identikus forgás az egyedüli valódi forgás, mely mindezeket a pontokat változtatlanul hagyja.

Tételünk igaz lévén  $n=2$  esetére, feltehetjük, hogy  $n-1$ -re igaz és teljes indukcióval bizonyíthatunk.

1. Legyen  $P_{n-1}$  először az  $x_n$ -tengelyen:

$$P_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, x_n^{(n-1)}).$$

Közvetetlenül belátható, hogy minden  $+1$  determinánsú orthogonális substitució, mely ezt nem változtatja, ily alakú:

$$(S) \begin{cases} x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_i & (k=1, 2, \dots, n-1) \\ x'_n = x_n, \end{cases}$$

hol

$$(S') \quad x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_i \\ (k=1, 2, \dots, n-1)$$

<sup>1</sup> Abból tehát, hogy sik valódi forgásának tengelye: pont, a háromdimenziós tér valódi forgásának tengelye: egyenes, egyáltalában nem szabad arra következtetni, hogy az  $R_n$  valódi forgásának csak egy  $R_{n-2}$  lehet a tengelye.

az  $R_{n-1}$  egy valódi forgását adja. Ha most már ( $S$ ) nem változtatja a

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ (i=1, 2, \dots, n-1)$$

pontokat, akkor  $S'$  nem változtatja a

$$Q_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}) \\ (i=1, 2, \dots, n-2)$$

pontokat. Ezen  $n-2$  pont nem fekszik  $O$ -val együtt egy  $R_{n-3}$ -ban. Ha t. i. koordinátáik  $(n-1)-(n-3)$ , azaz két független lineáris egyenletet kielégítenének, akkor ez egyszersmind azt jelentené, hogy  $O, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$  egy  $R_{n-2}$ -ben feküdnek. Minthogy ezen egyenletek  $x_n$ -et nem tartalmazzák, azért  $(0, 0, \dots, 0, 0)$ -val együtt  $P_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, x_n^{(n-1)})$  is kielégítené őket és így  $O, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  egy  $R_{n-2}$ -ben feküdnek, a mi feltételünkkel ellenkezik.

Minthogy  $n-1$ -re tételünket helyesnek teszszük fel, azaz tudjuk, hogy az  $O, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-2}$  pontokat a valódi forgások közül csak az identikus hagyja változatlanul, azért  $S'$  tehát  $S$  is valóban csak az identikus substituczió lehet.

2. Ha másodszor  $P_{n-1}$  nem fekszik az  $x_n$ -tengelyen, akkor az II. fejezet I. tétele szerint van oly valódi forgás  $T$ , mely  $P_{n-1}$ -et az  $x_n$ -tengely  $P'_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, d)$  pontjába viszi, hol

$$d = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i^{(n-1)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Tegyük fel, hogy a  $T$  a  $P_i$  pontokat  $P'_i$ -be viszi, akkor a forgások  $B$  tulajdonsága szerint (l. a 8. lapon) ezek sem fekszenek  $O$ -val egy  $R_{n-2}$ -ben. A bebizonyítottak szerint tehát az identikus forgás az egyedüli valódi forgás, mely a  $P'_i$ -ket egyidejűleg nem változtatja. Ha most már  $S$  tetszőleges oly valódi forgás, mely a  $P_i$ -ket nem változtatja, akkor  $T^{-1}ST$  nem változtatja a  $P'_i$  pontokat és így

$$T^{-1}ST = 1$$

az identikus forgás és innen valóban, mint bizonyítandó volt:

$$S = TT^{-1} = 1.$$

Ezzel a kimondott tétel általánosságban be van bizonyítva.

Általánosabban így mondható ki:

II. Ha  $n-1$  számú pont nem fekszik  $O$ -val egy  $R_{n-2}$ -ben, akkor legfeljebb egy olyan valódi forgás van, mely ezeket meghatározott  $n-1$  pontba viszi át.

Ha t. i.  $S$  is és  $S'$  is ilyen valódi forgás, akkor  $SS'^{-1}$  az eredeti pontrendszert nem változtatja meg s így utolsó tételünk szerint

$$SS'^{-1} = 1$$

az identikus forgás. Innen valóban:  $S=S'$ .

Meg akarjuk most vizsgálni, hogy valamely pontrendszer mikor vihető át valódi forgással egy másikba. Rövidség kedvéért *congruens*eknek fogjuk nevezni ( $k$  tetszőlegesen nagy lévén) a

$$(P_1, P_2, \dots, P_k) \text{ és } (P'_1, P'_2, \dots, P'_k)$$

pontrendszereket (a megadott sorrendben véve a pontjait), ha

$$\overline{P_i P_j} = \overline{P'_i P'_j},$$

( $i, j=1, 2, \dots, k$ )

$\overline{P_i P_j}$ -vel a  $P_i$  és  $P_j$  pontok távolságát jelölven.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

III. Ha  $(O, P_1, P_2, \dots, P_r)$  és  $(O, P'_1, P'_2, \dots, P'_r)$  *congruens*, akkor van oly forgás, mely  $P_i$ -t átviszi  $P'_i$ -be ( $i=1, 2, \dots, r$ ).

Tételünk igaz lévén  $n=1$ -re, teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \quad P'_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}).$$

( $i=1, 2, \dots, r$ )

Először felteszszük, hogy  $P_r$  az  $x_n$ -tengely pontja és  $P'_r = P_r$ , azaz

$$x_k^{(r)} = 0, \quad y_k^{(r)} = 0,$$

( $k=1, 2, \dots, n-1$ )

$$x_n^{(r)} = y_n^{(r)} = d.$$

Innen most már, ha

$$OP_i = OP'_i = r_i \text{ és } P_r P_i = P_r P'_i = s_i,$$

( $i=1, 2, \dots, r$ )

azaz

$$r_i^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^{(i)})^2 = \sum_{k=1}^n (y_k^{(i)})^2,$$

$$s_i^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)})^2 + (x_n^{(i)} - l)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (y_k^{(i)})^2 + (y_n^{(i)} - l)^2,$$

kivonással azt nyerjük, hogy

$$s_i^2 - r_i^2 = -2lx_n^{(i)} + l^2 = -2ly_n^{(i)} + l^2,$$

a honnan

$$x_n^{(i)} = y_n^{(i)}.$$

( $i=1, 2, \dots, r$ )

Tekintsük az  $R_{n-1}$  következő pontjait:

$$Q_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}), \quad Q'_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}),$$

( $i=1, 2, \dots, r-1$ )

melyekre vonatkozólag fennáll:

$$\overline{OQ_i^2} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)})^2 = \overline{OP_i^2} - x_n^{(i)2} = \overline{OP_i^2} - y_n^{(i)2} = \overline{OQ'_i^2}$$

és

$$\overline{Q_iQ_j^2} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^{(i)} - x_k^{(j)})^2 = \overline{P_iP_j^2} = \overline{P'_iP'_j^2} = \overline{Q'_iQ'_j^2}$$

úgy, hogy  $(O, Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-1})$  és  $(O, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{r-1})$  congruens. Minthogy pedig  $n-1$ -re tételünket helyesnek tesszük fel, van oly orthogonális substituczió

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x_i,$$

( $i=1, 2, \dots, n-1$ )

mely a  $Q_i$ -ket a  $Q'_i$ -kbe viszi át. Minthogy  $x_n^{(i)} = y_n^{(i)}$  csak az

$$x'_n = x_n$$

substitucziót kell ehhez hozzávennünk és az  $R_n$  oly forgásához jutunk, mely követelményünknek megfelel:  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ -t  $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$ -be viszi.

Áttérünk tehát az általános esetre. Ha

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(r)})^2 = \sum_{k=1}^n (y_k^{(r)})^2 = l^2,$$



akkor a II. fejezet I. tétele szerint van oly valódi forgás  $T$ , mely  $P_r$ -et  $\bar{P} = (0, 0, \dots, 0, d)$ -be viszi. Épigy van egy valódi forgás  $T'$ , mely  $P'_r$ -t viszi ugyancsak  $(0, 0, \dots, 0, d)$ -be.  $T$  általánosan a  $P_i$ -ket  $\bar{P}_i$ -ba,  $T'$  a  $P'_i$ -ket  $\bar{P}'_i$ -ba vigye át ( $\bar{P}_r = \bar{P}'_r = \bar{P}$ ). A  $(\bar{P}_i)$  és  $(\bar{P}'_i)$  congruens pontrendszerekre tételünk tehát a bebizonyítottak szerint alkalmazható: van oly valódi forgás  $S$ , mely a  $\bar{P}_i$ -ket a  $\bar{P}'_i$ -kbe viszi át. Most már tehát:

$$\begin{aligned} T & \text{ átviszi a } P_i\text{-ket } \bar{P}_i\text{-kba,} \\ S & \text{ „ „ } \bar{P}_i\text{-kat } \bar{P}'_i\text{-kba,} \\ T'^{-1} & \text{ „ „ } \bar{P}'_i\text{-kat } P'_i\text{-kbe,} \end{aligned}$$

és így tehát  $TST'^{-1}$  a  $P_i$ -ket a  $P'_i$ -kba viszi át, a mivel a keresett forgás létezése be van bizonyítva.

Egybevetve a II. és III. tételt, eredményünk ez:

IV. *Adva lévén két congruens pontrendszer  $(O, P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$  és  $(O, P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1})$ , egy és csak egy oly valódi forgás létezik, mely egyidejűleg minden  $P_i$ -t  $P'_i$ -be viszi át, feltéve, hogy  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  nem fekszik  $O$ -val egy  $R_{n-2}$ -ben.*

Az I. és II. tételnek nem valódi forgásra vonatkozólag a következő két tétel felel meg:

V. *Ha az  $n-1$  számú  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  nem fekszik  $O$ -val egy  $R_{n-2}$ -ben, akkor egy és csak egy nem valódi forgás hagyja ezeket változatlanul.*

Ha t. i. a  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  pontok az  $x_1=0$  egyenlettel megadott  $R_{n-1}$ -ben fekszenek, akkor a nem valódi

$$x'_1 = -x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n \quad (S)$$

forgás e pontokat nem változtatja. Az általános esetben pedig az  $O, P_1, \dots, P_{n-1}$  pontok által meghatározott  $R_{n-1}$  — a II. fejezet eredményei szerint — egy valódi  $T$  forgással az  $x_1=0$ -sal megadott  $R_{n-1}$ -be vihető át. Ha tehát  $T$  a  $P_i$ -ket  $P'_i$ -kbe viszi át, akkor a  $P'_i$ -kre nézve az elintézett speciális esettel van dolgunk: van oly nem valódi  $S$  forgás, mely a  $P'_i$ -ket nem változtatja. Ez esetben azonban  $TST'^{-1}$  oly nem valódi forgás, mely a  $P_i$ -ket viszi át önmagukba. Ha most már két ilyen

volna:  $U$  és  $U'$ , akkor  $UU$  is és  $UU'$  is oly valódi forgás volna, mely a  $P_i$ -ket nem változtatja. Az I. tétel szerint tehát

$$1 = UU = UU', \quad U = U' (= U^{-1}).$$

Ezzel a tétel mindkét része be van bizonyítva.

VI. Ha az  $n-1$  számú  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  pont nincs  $O$ -val egy  $R_{n-2}$ -ben, akkor egy és csak egy nem valódi forgás létezik, mely  $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ -et a congruens  $(P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1})$  rendszerbe viszi át.

Ha t. i.  $S$  az a nem valódi forgás, mely a  $P_i$ -ket nem változtatja és  $T$  a  $P_i$ -ket  $P'_i$ -kbe átvivő valódi forgás, akkor  $U=ST$  a keresett nem valódi forgás. Ha  $U'$  is ilyen volna, akkor  $UU'^{-1}=1$ -ből (I. tétel) ismét  $U=U'$  következnek.

Végül még a III. tétel általánosítására lesz szükségünk.

Legyen  $(P_1, P_2, \dots, P_r)$  és  $(P'_1, P'_2, \dots, P'_r)$  két congruens pontrendszer. Egy  $T$  eltolással a  $P_1$ , egy  $T'$  eltolással pedig a  $P'_1$  átvihető  $O$ -ba. Ha most már  $T$  a  $P_i$ -ket  $\bar{P}_i$ -ba,  $T'$  a  $P'_i$ -ket  $\bar{P}'_i$ -ba viszi, akkor a III. tétel szerint  $\bar{P}_1=\bar{P}'_1=O$  lévén, van oly  $S$  forgás, mely a  $\bar{P}_i$ -kat a  $\bar{P}'_i$ -kba viszi s így a  $TST'^{-1}$  mozgás a  $P_i$ -ket a  $P'_i$ -kbe viszi. Tehát:

VII. Bármely pontrendszer minden congruens pontrendszerbe átvihető.

## V. A simplex és csoportja.

A minden  $R_n$ -ben létező három szabályos test közül az ú. n.  $n$ -méretű (szabályos<sup>1</sup>) simplex,  $S_n$  némi tekintetben a legegyszerűbb. Ezt, mint oly  $n+1$  pontból álló pontrendszer definiáljuk, melyek közül bármely kettőnek távolsága ugyanaz.

A következőkben az

$$m_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}, \quad r_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}, \quad \rho_n = m_n - r_n$$

<sup>1</sup> E szót ezentúl elhagyjuk.

jelöléseket fogjuk használni, hol az  $m_n$ ,  $r_n$  és  $\rho_n$  számokat az «egységélű»  $S_n$  magasságának, köréje írt gömb sugarának, illetve beléje írt gömb sugarának nevezzük. Ezeket az elnevezéseket  $n=3$  esetéről vesszük át.

Kimutatjuk most már, hogy létezik oly  $S_n$ , melynek «éle» (két csúcs távolsága): 1, míg mind az  $n+1$  csúcs  $O$ -tól való távolsága:  $r_n$ , feltéve, hogy egy megfelelő  $S_{n-1}$  létezik. Mint-hogy  $n=2, 3$  esetében egy  $O$  körüli egységélű szabályos háromszög, illetve egy  $O$  körüli egységélű szabályos tetraéder követelményeinket kielégíti, azért ezzel az  $S_n$  existenciája minden  $n$ -re ki lesz mutatva.

A létezőnek feltételezett egységélű  $S_{n-1}$  csúcsai legyenek

$$Q_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)})$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

úgy, hogy

$$\overline{Q_i Q_k} = 1$$

$$(i, k=1, 2, \dots, n)$$

és

$$\overline{O Q_k}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 = r_{n-1}^2.$$

Az  $S_n$ -nek  $n+1$  csúcspontját most már így definiáljuk:

$$P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, -\rho_n),$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

$$P_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, r_n)$$

és kimutatjuk, hogy ez az  $n+1$  pont megfelel követelményeinknek. Két  $P_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) távolsága egyenlő a megfelelő két  $Q_k$  távolságával és így: 1; épígy:

$$\overline{P_k P_{n+1}}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 + (r_n + \rho_n)^2 = r_{n-1}^2 + m_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = 1.$$

A mi pedig az  $O$ -tól való távolságot illeti:

$$\overline{O P_k}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^{(k)})^2 + \rho_n^2 = r_{n-1}^2 + \rho_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} = r_n^2.$$

Végül nyilvánvalóan:

$$\overline{OP}_{n+1} = r_n.$$

Ezzel az  $S_n$  existenciája tetszőleges  $n$ -re be van bizonyítva.

Ha egyméretű egységélű simplexül az  $\frac{1}{2}$  és  $-\frac{1}{2}$  pontokat választjuk, akkor a részletezett eljárás egy teljesen meghatározott  $S_n$ -hez, mondjuk:  $S_n^0$ -hoz vezet. Ennek a speciális egységélű simplexnek, mint könnyen meggyőződhetünk, megvan ez a két tulajdonsága:

a) csúcspontjai nem fekszenek egy  $R_{n-1}$ -ben;

b)  $k$  számú csúcspontja sohasem fekszik  $O$ -val egy  $R_{k-1}$ -ben. E két tulajdonságot most már kimutathatjuk minden simplexre. Legyen t. i.  $S_n$  egy tetszőleges egységélű simplex; akkor congruens  $S_n^0$ -val és így a IV. fejezet VII. tétele szerint egy  $M$  mozgás  $S_n^0$ -t átviszi  $S_n$ -be. Ha e mozgás  $O$ -t  $O'$ -be viszi, akkor  $O'$  az  $S_n$  minden csúcából egyenlő távol van és így középpontja. Tehát:

I. Minden simplexnek<sup>1</sup> van középpontja

és az I. fejezet V. tétele szerint a tetszőleges  $S_n$ -nek is megvan az a) és b) tulajdonsága:

II. A simplex csúcspontjai sohasem fekszenek egy  $R_{n-1}$ -ben.

III. O középpontú simplex  $k$  csúcspontja soha sincs  $O$ -val egy  $R_{k-1}$ -ben.

A következőkben azokat a valódi és nem valódi forgásokat akarjuk megvizsgálni, melyek az  $O$  középpontú  $S_n$ -et, azaz  $n+1$  csúcspontját önmagukba viszik át. Ezeket *simplexforgásoknak* is nevezzük; együtt a teljes *simplexcsoportot* alkotják. A valódi simplexforgások összességét pedig, (melyek természetesen szintén csoportot alkotnak) *valódi simplexcsoportnak* fogjuk nevezni.

Bármily permutációja is  $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$  az  $(1, 2, \dots, n+1)$ -nek, az  $(O, P_1, P_2, \dots, P_{n+1})$  és  $(O, P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n+1}})$  pont-

<sup>1</sup> Itt, mint a következő két tételnél, az «egységélű» természetesen elhagyható.



rendszerek mindig congruensek,  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ -gyel jelölve az  $S_n$   $n+1$  csúspontját és így a IV. fejezet III. tétele szerint van oly forgás — és ez egy simplexforgás — mely a  $P_k$ -kat a  $P_{i_k}$ -kba viszi át. Ily módon a csúcsok minden  $(n+1)!$  permutációjához tartozik egy simplexforgás. Kimutatjuk még, hogy mindegyikhez csak egy tartozik. Ha a fenti  $(k, i_k)$  permutációhoz két simplexforgás is tartoznék, azaz két oly simplexforgás volna, mely minden  $P_k$ -t  $P_{i_k}$ -ba visz, akkor legalább három oly simplexforgás léteznék, mely  $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ -et  $(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n-1}})$ -be vinné, t. i. ez a két simplexforgás és az, mely az  $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_{n+1}, i_n)$  permutációhoz tartozik. Ez azonban lehetetlen: a II. fejezet IV. tétele szerint csak egy valódi és VI. tétele szerint csak egy nem valódi s így összesen csak két ily forgás létezik. Bebizonyítottuk tehát, hogy az  $n+1$  csúcs tetszőleges permutációját egy és csak egy simplexforgás szolgáltatja:

IV. Az  $S_n$  teljes csoportja holloedrikusan isomorph<sup>1</sup>  $n+1$  elem symmetrikus csoportjával és  $(n+1)!$  forgást tartalmaz.

A megelőzők szerint, ha  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$   $n-1$  számú  $n+2$ -nél kisebb különböző szám, két simplexforgás létezik, mely  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ -et ily rendben  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n-1}}$ -be viszi: az egyik  $P_n$ -et  $P_k$ -ba,  $P_{n+1}$ -et  $P_l$ -be, a másik  $P_n$ -et  $P_l$  és  $P_{n+1}$ -et  $P_k$ -ba ( $k$  és  $l$  jelenti az  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$  közt nem szereplő két  $n+2$ -nél kisebb számot). Egyike e forgásoknak valódi, a másik nem. Az  $(1, 2, \dots, n)$  elemekből alkotott minden  $n-1$  elemből álló  $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$  ismétlés nélküli kombinációhoz tehát egy és csak egy valódi simplexforgás tartozik. Minthogy továbbá minden forgáshoz tartozik egy ily kombináció, azért a valódi simplexcsoport forgásainak a száma megegyezik e kombinációk számával, mely a kombináció elemeinek sorrendjét is tekintetbe véve

$$\binom{n+1}{n-1} (n-1)! = \frac{1}{2} (n+1)!$$

<sup>1</sup> Rövidség kedvéért a következőkben a «holloedrikus» szót elhagyjuk.



Ily módon a következő eredményhez jutottunk:

V. Az  $S_n$  valódi csoportja  $\frac{1}{2}(n+1)!$  forgást tartalmaz.

Kimutatjuk még, hogy a valódi forgásoknak a csúcsok páros permutációi felelnek meg és viszont.

Létezik t. i. oly forgás a valódi simplexcsoportban, mely a  $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}$  pontokat rendre a  $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_n$  pontokba viszi át. E forgás  $P_{n+1}$ -et  $P_{n-1}$ -be viszi át, ha t. i.  $P_{n+1}$ -be vinné, akkor  $n-1$  pont változatlan maradván, az identikus forgással volna dolgunk és  $P_{n-1}$  nem mehetne  $P_n$ -be át. Végül tehát  $P_n$  a még egyedül hátralévő  $P_{n+1}$ -be megy át s a forgás a csúcsok

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_{n-2} & P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_1 & P_2 & \dots & P_{n-2} & P_n & P_{n+1} & P_{n-1} \end{pmatrix} = (n-1, n, n+1)$$

permutációjához tartozik. Épigy belátható, hogy mind a többi hármass ciklikus permutáció is benn van a csoportban, tehát minden páros permutáció is, minthogy ezek<sup>1</sup> hármass ciklusokból mindig összehetők. Az utóbbiak száma is  $\frac{1}{2}(n+1)!$  lévén, ezekkel a csoport ki van merítve. Ezzel bebizonyítottuk a kimondott tételt, mely így is kimondható:

VI. Az  $S_n$  valódi csoportja isomorph  $n+1$  elem alternáló permutációs csoportjával.

Minthogy pedig  $n+1=4$  eset kivételével az alternáló csoport mindig egyszerű,<sup>2</sup> azért

VII. A tetraédercsoport kivételével minden valódi simplexcsoport egyszerű.\*

A tetraédercsoport azonban valóban tartalmaz egy invariáns alcsoportot; egy ú. n. «Viergruppe»-t.<sup>3</sup> Minthogy az alternáló

<sup>1</sup> L. pld. WEBER: Algebra, I, 497. l. (Első kiadás.)

<sup>2</sup> E tételt JORDAN bizonyította be először: Traité des Substitutions, (Paris, 1870), 66. l. Egyszerű, teljes indukcióval való bizonyítását adta BEKE (Math. és Phys. Lapok, VII. évf. 55. l. és Mathematische Annalen, 49. kötet, 581. l.);  $n=5$ -re, azaz az ikozaédercsoportra t. i. könnyen bebizonyítható, l. KLEIN «Ikosaeder»-jét, 18. l.

<sup>3</sup> KLEIN: «Ikosaeder», 14. l.

csoport mindig invariáns alcsoportja a szimmetrikus csoportnak, azért végül:

VIII. A teljes *simplex*csoport sohasem egyszerű.

## VI. A simplexforgások tengelye.

A simplexcsúcspontok koordinátáinak képzésére a megelőző fejezetben adott rekurzív eljárás módot nyújt e koordináták explicit alakban való kiírására is. Minthogy azonban  $n$ -ről  $n+1$ -re térve át, ezek kifejezésében mindig egy új négyzetgyökjel lép fel, azért ez a módszer a tárgyalást igen megnehezítené. Hiszen már a szabályos háromszög szögpontjainak a koordinátái sem adhatók meg *a síkban* négyzetgyökök nélkül,<sup>1</sup> míg *a térben* a

$$(g, 0, 0), (0, g, 0), (0, 0, g)$$

pontok igen egyszerűen adnak meg egy ily háromszöget. És ez így van általában is:

Az  $R_{n+1}$  következő  $n+1$  pontja:

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = (g, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n+1}) \\ Q_2 = (0, g, 0, \dots, 0) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, g) \end{array} \right\} S_n^0$$

egy  $n$ -méretű *simplexet* ( $S_n^0$ ) alkot.

<sup>1</sup> Abból a feltevésből, hogy egy szabályos háromszög három szögpontjának mindkét koordinátája racionális, bebizonyítható, hogy szögének tangense is racionális, már pedig  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ .

Kivételesnek kell mondanunk azt, hogy a (szabályos) tetraédernek  $R_3$ -ban van oly elhelyezése, melynél a négy csúcspontnak mind a három koordinátája racionális: az

$$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

pontok és épígy a

$$(-1, -1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$$

pontok is, (melyek együtt egy kockának csúcspontjai) egy-egy tetraéder négy-négy csúcspontját adják.

Először is t. i. ( $\xi$ -kkel jelölve az  $R_{n+1}$  koordinátáit) e pontok a

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} = g$$

egyenlettel megadott  $R_n$ -ben fekszenek és másodszor bármely kettőnek távolsága  $g\sqrt{2}$ . Ha tehát  $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , akkor az egységélű simplexszel van dolgunk. Világos továbbá, hogy az ezen  $R_n$ -en fekvő

$$K = \left( \frac{g}{n+1}, \frac{g}{n+1}, \dots, \frac{g}{n+1} \right)$$

pont a simplex középpontja, minthogy  $i$ -től függetlenül:

$$\overline{KQ_i^2} = \left( \frac{n}{n+1} g \right)^2 + n \left( \frac{g}{n+1} \right)^2 = g^2 \frac{n}{n+1}.$$

Egységélű simplex, azaz  $g = \frac{1}{\sqrt{2}}$  esetében ez valóban

$$n_n^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}$$

-be megy át. Továbbá

$$\overline{OK} = g \sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

és egységélű simplexnél:

$$\overline{OK} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

Legyen most már az  $R_n$ -ben egy  $O$  középpontú egységélű simplexnek, melyet röviden  $S_n$ -nel fogunk jelölni,  $n+1$  csúcsa:

$$P_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \\ (i=1, 2, \dots, n+1)$$

Ekkor  $R_{n+1}$ -nek  $\left( \xi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right)$  egyenlettel megadott  $R_n$ -jében fekvő  $n+1$  számú

$$Q_i = \left( x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right) \\ (i=1, 2, \dots, n+1)$$

pontja ugyancsak egy ily simplext  $S_n$ -t alkot, csakhogy középpontja

$$K' = \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right).$$

Rögtön belátható, hogy az  $R_{n+1}$  következő két pontrendszerre:

$$(O, K, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}) \quad \text{és} \quad (O, K', Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n)$$

congruens és így a IV. fejezet VII. tétele szerint van oly  $S$  forgás, mely az elsőt a másodikba viszi át.

Az  $S$  tehát  $S_n^0$ -t  $S_n'$ -be viszi át. Ha tehát  $T^0$  illetve  $T'$  oly forgása az  $R_{n+1}$ -nek, mely  $S_n^0$ -t illetve  $S_n'$ -t önmagába viszi át, akkor  $ST^0S^{-1}$  az  $S_n^0$ -nak,  $S^{-1}T^0S$  pedig  $S_n'$ -nek forgása. Tehát az egyik csoportból a másik  $S$ -sel illetve  $S^{-1}$ -nel való transformálás által adódik ki.

Az  $S_n^0$ -t illetve  $S_n'$ -t önmagába átvivő  $R_{n+1}$  forgások csoportja tehát *isomorph* és a  $T^0$  forgás tengelyének mérete megegyezik a megfelelő  $T'$  forgás tengelyének méretével, mint-hogy az  $S$  forgás az első tengelyt az utóbbiba viszi át.

Egyszerű vonatkozás hozható létre az  $S_n$ -et nem változtató  $R_n$ -forgások és az  $S_n'$ -t nem változtató  $R_{n+1}$ -forgások között is. Ha t. i.

$$x'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \quad (T') \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

egy  $S_n$  forgás, akkor

$$T' \begin{cases} \xi'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i & (k=1, 2, \dots, n) \\ \xi'_{n+1} = \xi_{n+1} \end{cases}$$

$S_n'$ -t hagyja változatlanul. Egyszersmind minden  $S_n'$ -forgás ily alakú, minthogy  $K'$ -t s így a  $\xi_{n+1}$ -tengely minden pontját változatlanul hagyja. Ily módon a  $T$ -k és  $T'$ -k csoportja között is isomorphismust állapítottunk meg. Ha most már  $d$  a  $T$  forgás tengelyének mérete, azaz az

$$x_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

egyenletek közt  $n-d$  számú független, akkor a  $T'$  tengelyét megadó

$$\begin{aligned}\xi_k &= \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i, \\ (k=1, 2, \dots, n) \\ \xi_{n+1} &= \xi_{n+1}\end{aligned}$$

egyenletek közt szintén  $n-d$  számú független van, minthogy az utolsó egyenlet, mint identitás nem jön tekintetbe. A  $T'$  forgás tengelyének tehát

$$(n+1) - (n-d) = d+1$$

a mérete. A  $T'$ -k és  $T^0$ -k csoportja közt egyrészt és a  $T$ -k és  $T'$ -k csoportja közt másrészt megállapított isomorphismus a  $(T)$  és  $(T^0)$  csoportok közt is isomorphismust állapít meg és pedig oly módon, hogy, ha  $T$  és  $T^0$  két egymásnak megfelelő forgás, akkor

1. a  $T$  forgás tengelyének mérete 1-gyel kisebb a  $T^0$  forgás tengelyének méreténél;

2. ha  $T$  a csúcspontok  $(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{n+1}})$  permutációját hozza létre, akkor  $T^0$ :  $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_{n+1}}$  pontokba viszi át rendre a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$  pontokat, azaz ugyanezt a permutációt eredményezi.

Ez esetben  $T$ -nek és  $T^0$ -nak t. i. valóban ugyanaz a  $T'$  felel meg: az, mely a  $(Q'_{i_1}, Q'_{i_2}, \dots, Q'_{i_{n+1}})$  permutációt hozza létre.

Oly  $R_{n+1}$ -forgás, mely a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$  pontokat a  $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_{n+1}}$  pontokban viszi át, rendkívül egyszerűen megadható. Mint rögtön meggyőződhetünk, ezt megteszi a következő orthogonális substituczió:

$$\begin{aligned}\xi'_k &= \xi_{i_k} \\ (k=1, 2, \dots, n+1)\end{aligned} \tag{T'}$$

Láttuk, hogy ezen forgás tengelyének mérete 1-gyel nagyobb azon simplexforgás tengelyének méreténél, mely a  $P_k$ -kat a  $P_{i_k}$ -kba viszi. A  $T$  forgás tengelyének egyenletrendszere:

$$\begin{aligned}\xi_k &= \xi_{i_k} \\ (k=1, 2, \dots, n+1)\end{aligned} \tag{I}$$



Ha ezen egyenletek között  $t$  számú független van, akkor a  $T$  forgás tengelyének mérete  $n+1-t$  és így

A  $(k, i_k)$ -val jellemzett *simplexforgás* tengelyének mérete  $n-t$ .

A  $t$  meghatározása céljából képzeljük a  $(k, i_k)$  permutációt ciklikus permutációkra felbontva:<sup>1</sup>

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \dots C_p.$$

Legyen  $c_1, c_2, \dots, c_p$  a  $C_1, C_2, \dots, C_p$  ciklusokban foglalt elemek száma úgy, hogy  $c_1 + \dots + c_p = n+1$ . Az (I) rendszer most már az ugyanazon ciklusban lévő  $\xi$ -k egyenlőségét fejezi ki. Különböző ciklusokra vonatkozó egyenletei (I)-nek — nem tartalmazván közös változót — természetesen függetlenek egymástól. Minthogy továbbá  $c$  számú  $\xi$  egyenlőségét  $c-1$  egymástól független egyenlet fejezi ki, azért (I) egymástól független egyenleteinek a száma

$$t = (c_1 - 1) + (c_2 - 1) + \dots + (c_p - 1) = \Sigma c - p = n + 1 - p.$$

I. A tengely mérete tehát:

$$d = n - t = n - (n + 1 - p) = p - 1$$

egygyel kisebb a csúcspontpermutáció ciklusainak számánál.<sup>2</sup>

Továbbá innen:

II. Két *simplexforgás* tengelyének mérete akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő két csúcspontpermutáció ugyanannyi ciklusból van összetéve.

Az előbbi megfontolásokból még közvetlenül kitűnik, hogy két  $S_n$ -forgás tengelye akkor és csak akkor egyezik meg, illetve akkor és csak akkor része az egyik a másiknak, ha a megfelelő két  $S_n^0$ -forgás tengelyei ily vonatkozásban vannak egymással.

<sup>1</sup> Az egy elemből álló ciklusok is kiirandók.

<sup>2</sup> Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezen eredményünk összhangzatban van a III. fejezet eredményével:  $n+1$  elem páros permutációjánál:  $n-2m+1$ -, páratlanál:  $n-2m$ -alakú a ciklusok száma.

Ennek tekintetbe vételével még a következő eredményekhez juthatunk.

III. *Két simplexforgás tengelye akkor és csak akkor ugyanaz, ha a megfelelő két permutációban ugyanazon elemek szerepelnek ugyanabban a ciklusban.*

A tengely tehát nem változik, ha az egyes ciklusokban lévő elemeket  $c_i$ -félekép permutáljuk. Minthogy azonban a  $c$  számú

$$(a_1, a_2, \dots, a_c), (a_2, \dots, a_c, a_1), \dots, (a_c, a_1, \dots, a_{c-1})$$

ciklikus permutáció egymással megegyezik, azért csak

$$\frac{c_i!}{c_i} = (c_i - 1)!$$

permutáció jön tekintetbe:

IV.  $\prod_{i=1}^p (c_i - 1)!$  számú oly simplexforgás van, melynek tengelye megegyezik a  $P = C_1 C_2 \dots C_p$  permutációhoz tartozó forgás tengelyével.

Megjegyzendő, hogy ugyanazon tengelylyel bíró forgások nem alkotnak csoportot, kivéve ha az egész  $R_n$  a tengely; hiszen az identikus forgás csakis ez esetben van forgásaink közt. Ha két forgásnak tengelye ugyanaz, akkor összeállításukkal keletkező forgás változatlanul hagyja ugyan e tengely minden pontját, de hagyhat más pontokat is változatlanul, úgy, hogy tengelye többméretű lehet, mint az említett közös tengely. Már  $n=3$  esetében adhatunk erre nem triviális példát. A ciklikus  $(1, 2, 3, 4)$  permutációt önmagával téve össze, a két ciklusból álló  $(1, 3)(2, 4)$  permutációhoz jutunk. Míg tehát az előbbihez tartozó (nem valódi) forgásnak: pont, az utóbbihoz tartozónak: egyenes a tengelye.

A simplexcsoporthal csoportjaihoz jutunk azonban, ha azon simplexforgásokat foglaljuk össze, melyek valamely simplexforgás tengelyének pontjait nem változtatják. Válaszszuk ez utóbbinak az általános,

$$(k, i_k) = c_1 c_2 \dots c_p$$

permutációhoz tartozó forgás tengelyét. Minhogy a megfelelő  $S_n^0$  forgás tengelyét az

$$\xi_{i1} = \xi_{i2} = \dots = \xi_{ic_i} \\ (i=1, 2, \dots, p)$$

egyenletek adják meg,<sup>1</sup> hol

$$C_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ic_i}), \\ (i=1, 2, \dots, p)$$

azért világos most már, hogy

V. Egy simplexforgás akkor és csak akkor hagyja változatlanul e tengely pontjait, ha a megfelelő permutációban csak oly elemek ( $\xi$ -k) szerepelnek együtt egy ciklusban, melyek ( $k, i_k$ ) valamely ciklusában is együtt fordulnak elő.

E forgások számának meghatározása céljából el kell dönteni, hogy  $c$  számú elem hányféleképp osztható ciklusokba, ismét nem tekintve különbözőnek két ciklust, ha ciklikus permutáció által az egyik átmegy a másikba és így ugyanazt a permutációt jelentik. A  $c$  számú elem minden permutációjához egy ily ciklusokra bontás tartozván és viszont, világos, hogy e szám:  $c!$ <sup>2</sup>

VI. A  $(P)$ -hez tartozó tengelypontjait tehát  $\prod_{i=1}^p c_i!$  számú simplexforgás hagyja változatlanul, a melyek, mint már említettük, természetesen csoportot alkotnak.<sup>3</sup>

Általában azonban e csoport nem lesz, mint  $n=2, 3$  esetében ciklikus csoport, hanem több alkotóból keletkeztethető csupán. Ismervén e csoporthoz isomorph permutációcsoportot, ezen alkotók felkeresése, stb. a permutációcsoportok elméletére van visszavezetve. Ugyancsak ide van vissza-

<sup>1</sup> Az  $\xi$ -ket a jelölés egyszerűsítése végett látjuk el két indexszel; minden két indexű  $\xi$  azonos egy  $\xi_i$ -vel ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ) és csak akkor lesz  $\xi_{ik} = \xi_{i'k'}$ , ha  $i=i', k=k'$ . A második index az első index indexeként tekinthető.

<sup>2</sup>  $c=3$  esetében pld. e felbontások: (1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (321).

vezetve az a kérdés, hogy két forgás összetevésével keletkező forgás tengelye hogyan függ össze az összetett két forgás tengelyével. Egész általánosságban igen nehéz e kérdésre megfelelni, minthogy két ciklusokra bontott permutáció szorzatának ciklusokra bontása (ezzel a dolog el volna intézve) általánosságban nem igen adható meg. Az egyes forgások periodusa is egyszerűen nyerhető úgy, hogy a megfelelő permutáció periodusát keressük meg.

[A nélkül, hogy erre bővebben kiterjeszkednénk, megemlítjük, hogy e fejezet eredményeihez *homogén* ( $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ ) *koordináták* bevezetésével<sup>1</sup> magában az  $R_n$ -ben maradva, eljuthatunk. Ezek t. i. úgy állapíthatók meg, hogy

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

legyen az  $S_n$   $n+1$  számú csúcsa. A simplexforgásokat ekkor

$$\xi'_k = \xi_{i_k} \\ (k=1, 2, \dots, n+1)$$

adja, a mely substitúcióról kimutatható, hogy neki rendes koordinátákban orthogonális substitúció felel meg. A tengely egyenletrendszere<sup>2</sup>:

$$\xi_k = \hat{\xi}_{i_k} \\ (k=1, 2, \dots, n+1)^2$$

lesz, stb. Látnivaló most már, hogy ez a módszer is eredményeinkhez vezet.]

<sup>1</sup> L. SCHOUTE II. köt. 142—153. l.

<sup>2</sup> Ez tulajdonképen  $\xi_k = q\xi_{i_k}$  alakban adódik ki, de bebizonyítható, hogy  $q^{n+1}=1$  és hogy, ha  $q=-1$  is lehetséges,  $\xi_k = -\xi_{i_k}$ -t csakis «végtelenben fekvő pontok» elégítik ki, melyek homogén koordináták bevezetésével maguktól fellépnek. Ezeket is megengedve a tengely (páratlan  $n$ -nél) nem is lineáris része mindig az  $R_n$ -nek, hanem esetleg két lineáris részből áll, melyek közül az egyik teljesen «a végtelenben van».

## VII. Az oktaedroid és hexaedroid csoportja.

Házzávéve az  $R_n$  következő  $n$  pontjához:

$$P'_1 = (g, 0, 0, \dots, 0),$$

$$P'_2 = (0, g, 0, \dots, 0),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P'_n = (0, 0, 0, \dots, g),$$

melyekről tudjuk, hogy egy  $S_{n-1}$ -et (mondjuk:  $S'_{n-1}$ -t) alkotnak az  $S'_{n-1}$ -t alkotó ugyancsak  $n$  számú

$$P''_1 = (-g, 0, 0, \dots, 0)$$

$$P''_2 = (0, -g, 0, \dots, 0)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P''_n = (0, 0, 0, \dots, -g)$$

pontot, a második szabályos test  $2n$  csúcspontját nyerjük. E szabályos testet «*oktaedroid*»-nak fogjuk nevezni, minthogy  $n=3$  esetére ez a szabályos oktaéderbe megy át.

Az oktaedroid csoportját most már azon forgások alkotják, melyek ezt a  $2n$  pontot önmagukba viszik át. A fenti jelölésnél  $P'_i$ ,  $O$  és  $P''_i$  egy egyenesen fekszik és  $OP'_i = OP''_i = g$ . E tulajdonság természetesen érvényes marad a pontoknak a forgás utáni új helyzetére vonatkozólag is, úgy, hogy ha  $P'_i$  átmegy  $P'_j$ -ba, akkor  $P''_i$  a  $P''_j$ -ba megy át, ha pedig egy  $P''_j$ -ba megy át  $P''_i$ , akkor  $P'_i$  átmegy  $P'_j$ -ba. A  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$  pontok új helyzete tehát a  $P''_1, P''_2, \dots, P''_n$  pontok új helyzetét is megadja. Elég tehát azt vizsgálni, hogy a  $P'_i$ -k hogyan változtathatják helyüket, hiszen ennek az  $n$  pontnak új helyzete egyértelműen meghatározza a forgást (IV. fej. IV. tétele). Világos, hogy mind az  $n$   $P'_i$  más koordinátatengelyre jut, minthogy eredetileg más-más tengelyen feküdtek. Az  $n$  tengelyen most már, mindegyiken két  $P$  lévén,  $2^n$  félekép választható ki egy-egy pont s így a sorrendet is tekintve  $2^n n!$  féleképen. Legfeljebb annyi helyzetet foglalhat el  $P'_1, \dots, P'_n$  és így az egész oktaedroid ön-



magában. Könnyen látható, hogy ez a  $2^n n!$  pontosan a csoport forgásainak számát adja, t. i.

$$x'_1 = \varepsilon_1 x_{i_1}, x'_2 = \varepsilon_2 x_{i_2}, \dots, x'_n = \varepsilon_n x_{i_n} \quad (\text{I})$$

( $\varepsilon = \pm 1$ )

oktaedroidforgást ad, bármicsoda permutációja is ( $i_1, i_2, \dots, i_n$ ) az  $(1, 2, \dots, n)$ -nek és bármikép veszik is fel az  $\varepsilon$ -k a  $+1$  vagy  $-1$  értéket. Ez az éppen  $2^n n!$  számú forgás önmagukba viszi át a  $P$ -ket:  $P'_k$ -t ( $P''_k$ -t)  $P'_{i_k}$ -be ( $P''_{i_k}$ -be) vagy  $P_{i_k}$ -be ( $P'_{i_k}$ -be) viszi, a szerint, a mint  $\varepsilon_k = 1$  vagy  $\varepsilon_k = -1$ . Tehát

I. A teljes oktaedroidcsoport  $2^n n!$  forgást tartalmaz.

Az (I) orthogonális substituczió determinánsának,  $|a_{\rho\sigma}|$ -nak elemei így adhatók meg:

$$a_{\rho\sigma} = \varepsilon_k, \quad \text{ha } \sigma = k \text{ és } \rho = i_k$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ )

egyébként pedig

$$a_{\rho\sigma} = 0.$$

Ha  $g=0$  vagy  $1$ , a szerint, a mint a  $(k, i_k)$  permutáció páros vagy páratlan; és  $m=0$  vagy  $1$  a szerint, a mint az  $n$  számú  $\varepsilon$  közt a  $-1$  értékűek száma páros vagy páratlan, akkor e determináns értéke:

$$|a_{\rho\sigma}| = (-1)^g \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = (-1)^{g+m}.$$

Az (I) forgás tehát valódi vagy nem valódi a szerint, a mint  $g+m$  páros vagy páratlan. A  $2^n n!$  számú eshetőségnél  $g+m$  ugyanannyiszor páros, mint páratlan és így:

II. Az oktaedroidcsoport  $2^{n-1} n!$  valódi és ugyanennyi nem valódi forgást foglal magában.

Ha  $S$  valódi,  $T$  pedig tetszőleges oktaedroidforgás, akkor  $TST^{-1}$  szintén valódi oktaedroidforgás s így a valódi oktaedroidforgások a teljes oktaedroidcsoportban invariáns alcsoportot alkotnak:

III. A teljes oktaedroidcsoport sohasem egyszerű.

Tekintsük most azon valódi oktaedroidforgások összességét,

$Q$ -t, melyekre  $g$  is,  $m$  is zérus. Ha  $S$  és  $T$  a  $Q$ -hoz tartozik; akkor  $ST$  is ilyen. Ha t. i.  $S$  a  $(k, i_k)$  permutációval és  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  sorozattal,  $T$  pedig a  $(k, j_k)$  permutációval és  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  sorozattal van megadva, akkor  $ST$  a  $(k, i_k)$  és  $(k, j_k)$  permutációk szorzatával és az  $(\varepsilon_1 \gamma_1, \varepsilon_2 \gamma_2, \dots, \varepsilon_n \gamma_n)$  sorozattal jellemezhető. Két páros permutáció szorzata páros lévén,  $ST$ -re is:  $g=0$  és egyszersmind  $m=0$ , mert  $\prod_{i=1}^n \varepsilon_i = 1$ -ből és  $\prod_{i=1}^n \gamma_i = 1$ -ből  $\prod_{i=1}^n \varepsilon_i \gamma_i = 1$  következik. A  $Q$  tehát csoport, mely — mint könnyen belátható —  $2^{n-2} n!$  substitucziót tartalmaz. Kimutatjuk most, hogy  $Q$  invariáns alcsoportja a valódi oktaedroidcsoportnak.<sup>1</sup> Az előbbi módon belátható, hogy oktaedroidforgások összetevésénél «az  $m$ -ek is és a  $g$ -k is összeadódnak». Ha tehát  $S$  a  $Q$ -hoz tartozik és  $T$  tetszőleges oktaedroidforgás, akkor  $TST^{-1}$  is  $Q$ -hoz tartozik, minthogy  $T$ -hez és  $T^{-1}$ -hez ugyanazon  $m$  és  $g$  szám tartozik. A kimondott tétel ezzel be van bizonyítva:

#### IV. A valódi oktaedroidcsoport sohasem egyszerű.<sup>2</sup>

Az (I) alatt megadott általános oktaedroidforgás tengelyét az

$$\alpha_k = \varepsilon_k \alpha_{i_k} \quad (II)$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszer adja. A tengelyméret meghatározása céljából meg kell vizsgálnunk, hogy e között az  $n$  egyenlet között hány az egymástól független. A  $(k, i_k)$  permutációt ismét ciklusokra bontva, legyen:

$$(k, i_k) = C_1 C_2 \dots C_p$$

<sup>1</sup> E tételt — beh bizonyítás nélkül — PUCHTA mondta ki, elsőnek említett cikkében (835. l.). Ugyanitt — szintén minden bizonyítás nélkül — azt állítja PUCHTA, hogy a  $2n$  számú oktaedroidesücszpont ama permutációi, melyek valódi oktaedroidforgásokkal létrehozhatók, az összes permutációknak invariáns alcsoportját alkotják. Ez azonban nem helyes: a szimmetrikus csoportnak  $n > 4$  esetében az alternáló az egyedüli invariáns alcsoportja, a mint ez az utóbbinak egyszerűségéből elég egyszerűen kimutatható.

<sup>2</sup>  $n=3$  esetében az invariáns  $Q$  alcsoport egy (valódi) tetraédercsoport; l. KLEIN: «Ikosaeder», 16. l.

és a  $C_q$  elemeinek a száma  $c_q$ :<sup>1</sup>

$$C_q = (x_{q1}, x_{q2}, \dots, x_{qc_q})$$

úgy, hogy

$$c_1 + c_2 + \dots + c_p = n.$$

A (II) egyenletek mindegyike valamely ciklushoz tartozik:  $c_q$ -hoz ezek tartoznak:

$$x_{q1} = \varepsilon_{q1} x_{q2}, x_{q2} = \varepsilon_{q2} x_{q3}, \dots, x_{qc_q} = \varepsilon_{qc_q} x_{q1}. \quad (\text{III})$$

Különböző ciklusokhoz tartozó egyenletei a (II)-nek egymástól okvetetlenül függetlenek, minthogy ilyenekben csupa más  $x$  szerepel.

A (III) első  $c_q - 1$  egyenlete is okvetetlenül független egymástól, mert itt mindegyik egyenletben egy-egy új  $x$  lép fel. Tehát vagy mind a  $c_q$  egyenlet független egymástól, ha t. i. a (III) rendszer determinánsa,  $\Delta$  nem tűnik el, vagy csak  $c_q - 1$  egyenlet független egymástól, a mikor t. i.  $\Delta = 0$ . E determináns:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon_{q1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon_{q2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\varepsilon_{qc_q} \\ -\varepsilon_{qc_q} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Az első sor (vagy oszlop) szerint kifejtve, közvetetlenül nyerjük, hogy

$$\Delta = 1 - \varepsilon_{q1} \varepsilon_{q2} \dots \varepsilon_{qc_q} = 1 - H^{(q)} \varepsilon$$

s így  $\Delta = 0$  vagy  $\neq 0$  a szerint, a mint  $H^{(q)} \varepsilon = +1$  vagy  $-1$ . Első esetben  $c_q - 1$ , a másodikban  $c_q$  a (III) egymástól független egyenleteinek a száma.

Ha tehát most már  $m_q = 0$  vagy 1, a szerint, a mint  $H^{(q)} \varepsilon = -1$  vagy  $+1$  (azaz  $m_q + 1$  congruens mod. 2 az  $\varepsilon_{q1}, \varepsilon_{q2}, \dots, \varepsilon_{qc_q}$  közötti  $-1$  értékű számok számával), akkor a  $C_q$ -hoz tartozó egyenletek közt  $c_q - m_q$  az egymástól független.

<sup>1</sup> A két index használatára vonatkozólag lásd az <sup>1</sup> jegyzet a 35. lapon.

Mind az  $n$  számú (II) egyenlet közt tehát az egymástól függetlenek száma:

$$\sum_{q=1}^p (c_q - m_q) = \sum_{q=1}^p c_q - \sum_{q=1}^p m_q = n - d,$$

hol  $d$  ama ciklusok száma, melyekre  $II^{(q)}\varepsilon=1$ , azaz a melyekhez tartozó  $\varepsilon$ -ok közt páros számú  $-1$  értékű van. Tehát:

V. Az általános oktaedroidforgás tengelyének mérete:  $d$ .

Innen most már levezethetők a megelőző fejezet II—VI. tételeinek megfelelő eredmények, melyek azonban nem fejezhetők ki oly rendkívül egyszerű alakban, mint a simplexekre vonatkozólag.

Végül áttérünk a harmadik és utolsó szabályos testre, mely azonban, mint látni fogjuk, nem vezet az orthogonális substitucziók új véges csoportjához. E testet, mely  $n=3$  esetében a hexaéderhez vezet, *hexaedroid*nak nevezzük.

A *hexaedroid* legegyszerűbben, mint a  $2^n$  számú

$$(\varepsilon_1 h, \varepsilon_2 h, \dots, \varepsilon_n h)$$

pont összessége adható meg, hol az  $\varepsilon$ -ok minden lehető ( $2^n$ -féle) módon felveszik a  $+1$  és  $-1$  értékeket.

Az (I) alatt megadott  $2^n n!$  számú forgás, az oktaedroid-forgások e pontokat önmagukba viszik át és belátható, hogy ezek az egyedüliek.<sup>1</sup> E forgáscsoporttal nem kell tehát tovább foglalkoznunk:

VI. A teljes és valódi hexaedroidcsoport megegyezik a teljes, illetve valódi oktaedroidcsoporttal.

<sup>1</sup> Ismeretes t. i. (l. SCHOUTE munkájának II. kötetét, 256. l.), hogy a valódi hexaedroidcsoport, ép úgy, mint a valódi oktaedroidcsoport  $2^{n-1}n!$  forgást tartalmaz.

## TARTALOM.

	<i>Lap</i>
Bevezetés. (A dolgozat tárgya és ennek irodalma) .....	3
I. Az $R_n$ lineáris részei és mozgásai .....	6
II. A lineáris részek forgása .....	11
III. A forgástengely dimenziója .....	15
IV. Pontrendszerek forgása .....	19
V. A simplex és csoportja .....	24
VI. A simplexforgások tengelye .....	29
VII. Az oktaedroid és hexaedroid csoportja .....	37

---









**RETURN** Astronomy/Mathematics/Statistics/Computer Science Library **1602**  
**TO** → 100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1	2	3
<del>2 MONTH</del>	<b>1 MONTH</b>	
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

**DUE AS STAMPED BELOW**

<b>LIBRARY USE UNTIL</b>		
NOV 2 1987		
<b>AMS LIBRARY</b>		

U.C. BERKELEY LIBRARIES



C003073153

QA660  
K66  
1907  
MATH

-220



