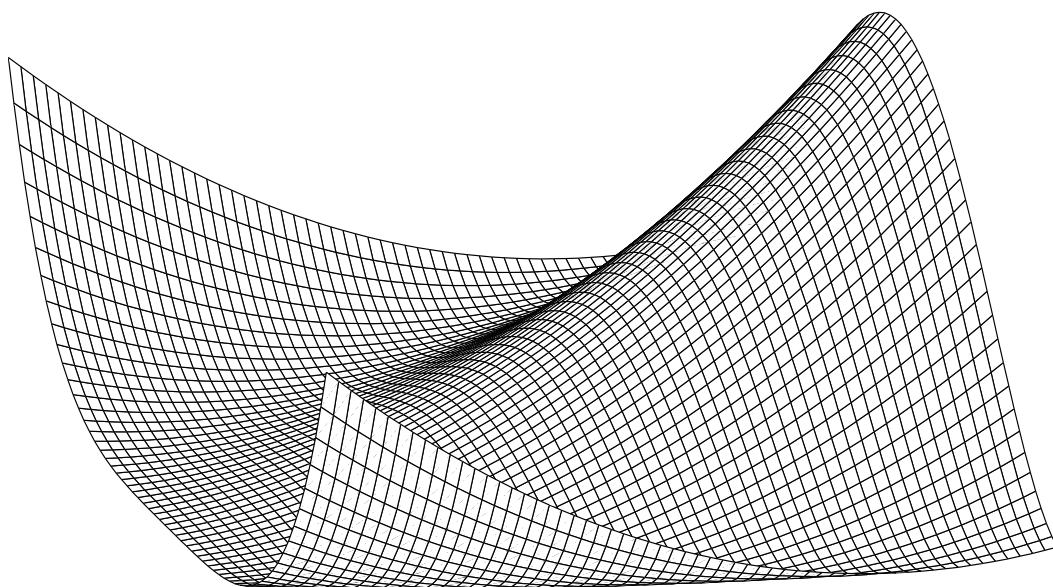


OPERÁCIÓKUTATÁS

No. 5.

Etienne de Klerk – Cornelis Roos – Terlaky Tamás

NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS



Budapest, 2004

Etienne de Klerk – Cornelis Roos – Terlaky Tamás:
NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

OPERÁCIÓKUTATÁS No. 5.
Szerkeszti: Komáromi Éva

Megjelenik az FKFP 0231 Program támogatásával
a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem,
Operációkutatás Tanszék gondozásában

Budapest, 2004

ISBN: 963 503 323 0

Etienne de Klerk – Cornelis Roos – Terlaky Tamás:
NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

Eredeti cím:

Etienne de Klerk – Cornelis Roos – Terlaky Tamás:
NONLINEAR OPTIMIZATION

Fordította: Bíró Anikó, Kovács Judit

A fordítást ellenőrizte: Pólik Imre, Terlaky Tamás

Nyelvi lektor: Pólik Andrea

Készült az Aula Kiadó digitális gyorsnyomdájában.

Nyomdavezető: Dobozi Erika

ISBN: 963 503 323 0

Tartalomjegyzék

Előszó	7
0. Bevezetés	9
0.1. Bevezetés a nemlineáris optimalizálásba	9
0.1.1. Az általános nemlineáris optimalizálási feladat	9
0.1.2. Nemlineáris optimalizálási feladatok osztályozása	11
0.1.3. Jelölések	12
1. A lineáris komplementaritási feladat (LCP)	13
1.1. Konvex kvadratikus optimalizálás (KKO)	13
1.1.1. Konvex kvadratikus függvények	13
1.1.2. A kvadratikus optimalizálás dualitáselmélete	14
1.1.3. A kvadratikus optimalizálási feladat átfogalmazása	16
1.2. Alkalmazások	18
1.2.1. A betonkeverési feladat (legkisebb négyzetek módszere)	18
1.2.2. Konvex regressziós feladat (legkisebb négyzetek módszere)	20
1.2.3. Portfólióanalízis (átlagos variancia modellek)	21
1.3. A legkisebb index criss-cross módszer	22
1.3.1. Pivotálás (báziscsere)	22
1.3.2. Pivotmódszer az LCP feladat megoldására	23
1.3.3. Véges criss-cross módszer kvadratikus optimalizálásra	24
1.4. *A criss-cross módszer konvergenciája	28
1.4.1. Ortogonalitás a táblázatokban	28
1.4.2. A criss-cross módszer végessége	31
1.5. *A Lemke-féle pivotalgorithmus	34
1.6. Az LCP általánosítása nagyobb mátrixosztályokra	35
1.6.1. A P-mátrixok osztálya	36
1.6.2. *Az elégséges mátrixok osztálya	36
2. A konvex optimalizálás alapjai	41
2.1. A konvex analízis alapjai	41
2.1.1. Konvex halmazok	42

2.1.2.	Konvex függvények	51
2.2.	Optimalitási feltételek	57
2.2.1.	Feltétel nélküli minimalizálás	57
2.2.2.	Feltételes minimalizálás	61
2.3.	A feltétel nélküli optimalizálás algoritmusai	64
2.3.1.	Az általános algoritmus	64
2.3.2.	Keresési irány	66
2.3.3.	Keresés egyenes mentén	70
2.3.4.	Megállási feltétel	72
2.4.	Feltételes konvex optimalizálási feladatok optimalitási feltételei	73
2.4.1.	Regularitási feltételek	74
2.4.2.	A konvex Farkas-tétel	77
2.4.3.	A Karush–Kuhn–Tucker-tétel	83
2.5.	A konvex optimalizálás dualitáselmélete	87
2.5.1.	A Lagrange-duál	87
2.5.2.	A Wolfe-duál	89
2.5.3.	Példák duál feladatokra	91
2.5.4.	Néhány példa pozitív dualitásrésre	95
2.5.5.	Szemidefinit optimalizálás	101
2.5.6.	Dualitás kúp-lineáris optimalizálás esetén	103
2.6.	Algoritmusok feltételes optimalizáláshoz	106
2.6.1.	Redukált gradiens-módszer	106
2.6.2.	Általánosított redukált gradiens-módszer (GRG)	112
2.6.3.	Barrier-függvények	122
3.	A nemlineáris optimalizálás belsőpontos módszerei	125
3.1.	Bevezetés	125
3.2.	Dualitás és a centrális út	126
3.2.1.	Logaritmikus barrier-függvények	128
3.2.2.	Monotonitás a centrális utak mentén	129
3.3.	Logbarrier módszer a (CPO) feladatra	131
3.3.1.	Bevezetés	131
3.3.2.	Newton-lépés ϕ_B -re	131
3.3.3.	Közelségi mérték	132
3.3.4.	Az önkorlátozási tulajdonság	134
3.3.5.	A Newton-módszer tulajdonságai	138
3.3.6.	Logaritmikus barrier algoritmus teljes Newton-lépésekkel	140
3.3.7.	Logaritmikus barrier algoritmus rövidített Newton-lépésekkel	146
3.4.	*Bővebben az önkorlátozó függvényekről	152
3.4.1.	Bevezetés	152

3.4.2.	Néhány alapvető egyenlőtlenség	154
3.4.3.	A rövidített lépéses Newton-módszer lineáris konvergenciája	157
3.4.4.	A Newton-módszer kvadratikusan konvergenciája	158
3.4.5.	Önkorlátozó függvény minimumhelyének létezése	161
3.4.6.	Egy hatékony algoritmus	165
3.5.	Speciális szerkezetű feladatok	169
3.5.1.	Bevezetés	169
3.5.2.	Az önkorlátozó függvények kompozíciós szabályai	169
3.5.3.	Entrópiainfimalizálás (EO)	172
3.5.4.	Geometriai infimalizálás (GO)	175
3.5.5.	l_p -norma infimalizálás (NO)	180
3.5.6.	Szemidefinit infimalizálás (SDO)	185
A.	Függelék	187
A.1.	Néhány technikai állítás	187
A.2.	A 3.3 tétel és a 3.4 lemma bizonyítása	189
A.3.	Az infimalizálási feladatok rövidítései	192
	Tárgymutató	195
	Irodalomjegyzék	199

Előszó

A nemlineáris optimalizálási feladatok gyakorlati alkalmazása, alkalmazhatósága szinte korlátlan, kiterjed a közgazdasági és a mérnöki tudományok minden területére. Fontosságának megfelelően a nemlineáris optimalizálás beépült az egyetemi tantervekbe, és egyre nagyobb az igény a nemlineáris optimalizálás módszertanát közérthetően összefoglaló, a legújabb belsőpontos módszerek alapjait is tartalmazó tankönyvekre.

Ez a könyv a szerzők által a Delfti Műszaki (Hollandia), a McMaster (Kanada) és a Waterloo-i (Kanada) egyetemeken oktatott bevezető nemlineáris optimalizálási kurzusok törzsanyagát tartalmazza. Az első fejezet a lineáris feltételes konvex kvadratikus optimalizálás és a lineáris komplementaritási feladatok alaptulajdonságait foglalja össze. Ezután a nemlineáris optimalizálás elméleti megalapozásaként a konvex analízis legfontosabb eredményeit tárgyaljuk. Az elméleti alapot követően a klasszikus nemlineáris optimalizálási algoritmusokra és a dualitáselméletre fordítjuk figyelmünket. A jegyzet utolsó része a belsőpontos algoritmusok és az önkorlátozó függvények alaptulajdonságait mutatja be.

A szerzők ezúton mondanak köszönetet a jegyzet fordítóinak. Komáromi Éva indította el és irányította a fordítási és kiadási folyamatot. Bíró Anikó és Kovács Judit készítette a nyers fordítást, Pólik Andrea nyelvi lektorként öntötte végső formába a szöveget, míg szakmailag Pólik Imre ellenőrizte, korrigálta a fordítást és készítette el a nyomdakész változatot.

A mű eredeti angol nyelvű változata delfti egyetemi jegyzetként jelent meg először, folyamatosan módosított, kiterjesztett változatai a szerzők honlapjairól letölthetők. A szerzők köszönettel fogadnak minden építő észrevételt, korrekciót és javaslatot a mű továbbfejlesztésére.

A szerzők (E. de Klerk,¹ C. Roos² és T. Terlaky³) nevében:

Terlaky Tamás

¹Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo (ON), Canada, edeklerk@math.uwaterloo.ca; <http://www.math.uwaterloo.ca/~edeklerk>

²Department of Information Systems and Algorithms, T.U. Delft, Delft, The Netherlands, C.Roos@ewi.tudelft.nl; <http://www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos>

³Department of Computing and Software, McMaster University, Hamilton (ON), Canada, terlaky@mcmaster.ca; <http://www.cas.mcmaster.ca/~terlaky>

0. fejezet

Bevezetés

0.1. Bevezetés a nemlineáris optimalizálásba

Kurzusunk célja, hogy bevezetést adjon a nemlineáris optimalizálásba. Ennek során tárgyalni fogjuk a nemlineáris optimalizálási feladatok különböző osztályait, az algoritmusok megértéséhez szükséges fogalmakat, a komplexitási kérdéseket, az optimalitási feltételeket, valamint a nemlineáris optimalizálás dualitáselméletét.

Az esetek többségében konvex differenciálható függvényekkel és konvex folytonos optimalizálási feladatokkal fogunk foglalkozni; a nem konvex vagy esetleg nem differenciálható függvények *lokális* minimumának megtalálása hasonló technikával történik. Az algoritmusokat elméleti szempontból vizsgáljuk, a számítógépes implementáció után érdeklődő olvasóknak a [2, 12, 13, 16, 30, 29] műveket ajánljuk.

Nemkonvex függvény *globális* minimumának megtalálása lényegesen nehezebb feladat, ez a *globális optimalizálás* tárgya, ami szintén kívül esik kurzusunk témakörén.

0.1.1. Az általános nemlineáris optimalizálási feladat

Az általános nemlineáris optimalizálási feladat (Nonlinear Optimization – NLO) a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ h_i(x) &= 0, \quad i \in I = \{1, \dots, p\} \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j \in J = \{1, \dots, m\} \\ x &\in \mathcal{C}, \end{aligned} \tag{NLO}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ adott halmaz és az $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p$ függvények értelmezési tartománya \mathcal{C} (vagy olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza \mathcal{C} -t). A feltételek kielégítő pontokat *megengedett megoldásoknak* nevezzük, halmazukat \mathcal{F} -fel jelöljük, vagyis

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{C} : h_i(x) = 0, g_j(x) \leq 0, \forall i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m\}.$$

A NLO feladatok osztályozásához szükségünk van néhány definícióra, amelyek segítségével világossá tehetjük kurzusunk tárgyát is.

0.1. Definíció. Egy $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex ha bármely $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén az

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \quad (1)$$

vektor is eleme \mathcal{C} -nek. A $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ vektor az x^1, x^2 pontok konvex kombinációja.

Másként fogalmazva: egy konvex halmaz tetszőleges két pontját összekötő szakasz is a konvex halmazban van.

0.1. Feladat. Tetszőleges k pont konvex kombinációját a következőképpen definiálhatjuk: Tekintsük az $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ pontokat és legyenek $0 \leq \lambda^1, \dots, \lambda^k$ olyan számok, hogy

$$\sum_{i=1}^k \lambda^i = 1$$

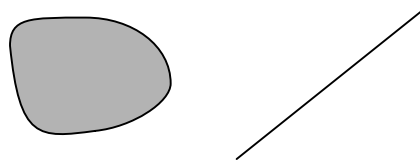
. Ekkor az

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda^i x^i$$

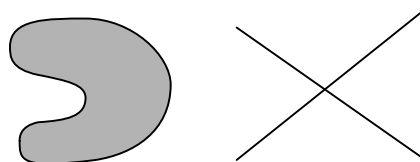
vektor az adott pontok konvex kombinációja.

Bizonyítsuk be, hogy egy \mathcal{C} halmaz akkor és csak akkor konvex, ha tetszőleges $k \geq 2$ -re bármely \mathcal{C} -beli k pont összes konvex kombinációja eleme \mathcal{C} -nek.

Az 1. ábra és a 2. ábra példákat mutat síkbeli konvex, illetve nemkonvex halmazokra.



1. ábra. Konvex halmazok



2. ábra. Nemkonvex halmazok

0.2. Definíció. Egy konvex $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex, ha minden $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

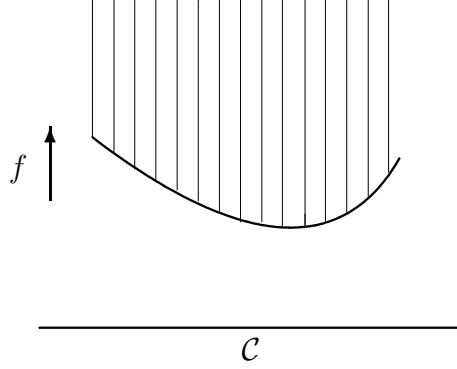
$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2).$$

0.2. Feladat. Tekintsük a norma-függvényt, vagyis legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ valamilyen normára. Igazoljuk, hogy f konvex függvény.

0.3. Definíció. Egy $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény epigráfja az

$$\{(x, \tau) : f(x) \leq \tau, x \in \mathcal{C}, \tau \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

halmaz. (l. a 3. ábrát)



3. ábra. Egy konvex f függvény epigráfja

0.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex \mathcal{C} halmazon értelmezett $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha f epigráfja konvex halmaz.

A fenti definíciókat használva megadhatjuk a NLO feladatok néhány osztályát. Ezeknek az osztályoknak a leírásakor felhasználjuk azt a triviális tényt, hogy az \mathbb{R}^n -beli nemnegatív vektorokból álló \mathbb{R}_+^n halmaz konvex. Emellett emlékezzünk rá, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *kvadratikusként* nevezünk, ha

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \gamma \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}^n\text{-re,}$$

ahol $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ és $\gamma \in \mathbb{R}$. Ha $Q = 0$, akkor f -et *affin* vagy *lineáris* függvénynek mondjuk.

0.1.2. Nemlineáris optimalizálási feladatok osztályozása

Általában a NLO feladatok következő osztályait különböztetjük meg:

Lineáris optimalizálás (LO): f, g_1, \dots, g_m és h_1, \dots, h_p affin (lineáris) függvények és a \mathcal{C} halmaz vagy \mathbb{R}^n -nel vagy \mathbb{R}^n nemnegatív ortánsával (\mathbb{R}_+^n) egyezik meg.

Feltétel nélküli optimalizálás: Az I és J indexhalmazok üresek, valamint $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.

Konvex optimalizálás (CO): f, g_1, \dots, g_m konvex függvények, h_1, \dots, h_p affin (lineáris) függvények és \mathcal{C} konvex halmaz.

Folytonos konvex optimalizálás: Konvex optimalizálási feladat az előbbi értelemben, de emellett az összes függvény kétszer folytonosan differenciálható (a későbbiekben további folytonossági követelményeket fogunk feltenni).

Kvadratikus optimalizálás (QO): Az f célfüggvény kvadratikus, a feltételben szereplő összes g_1, \dots, g_m és h_1, \dots, h_p függvény affin (lineáris) és a \mathcal{C} halmaz vagy \mathbb{R}^n -nel, vagy \mathbb{R}^n nemnegatív \mathbb{R}_+^n ortánsával egyenlő.

Kvadratikusan korlátozott kvadratikus optimalizálás: Ugyanaz, mint a QO, de a g_1, \dots, g_m függvények kvadratikusak.

Konvex kvadratikus optimalizálás (KKO): Ugyanaz, mint a QO, de az f célfüggvény konvex.

Konvex kvadratikusan korlátozott kvadratikus optimalizálás: Azonos a kvadratikusan korlátozott kvadratikus optimalizálási feladattal, viszont az f célfüggvény és a kvadratikus g_1, \dots, g_m függvények konvexek.

0.4. Feladat. Készítsünk diagramot, amely a fenti optimalizálási feladatosztályok közötti kapcsolatokat ábrázolja. Egy lehetséges megoldást mutat a

<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/OptWeb/index.html>

oldalon található optimalizálási fa.

0.1.3. Jelölések

A mátrixokat latin nagybetűk jelölik (A, B, P, \dots), a vektorokat kis latin betűk, a vektorok és mátrixok elemeit pedig indexszel ellátott betűk (pl. $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, $A = [a_{ij}]_{i=1\dots m, j=1\dots n}$). I, J és K indexhalmazokat jelölnek. Számadatoknál a $+$, $-$, \oplus , \ominus , 0 szimbólumok azt jelölik, hogy a megfelelő komponens illetve sor pozitív, negatív, nemnegatív, nempozitív vagy nulla. A $*$ jel azt jelöli az ábrákban, hogy az adott tag előjeléről nincs információnk.

Az optimalizálási feladatokat legtöbbször magyar elnevezésük szerint rövidítjük. Ettől a gyakorlattól csak akkor térünk el, ha az angol rövidítés széles körben használatos. A Függelékben megadjuk az optimalizálási feladatok rövidítéseit, valamint angol és magyar megnevezésüket.

A következő fejezetben mutatjuk be a KKO alaptulajdonságait, a dualitási eredményeket valamint a KKO feladatok megoldásához használt algoritmusokat.

1. fejezet

A lineáris komplementaritási feladat (LCP)

1.1. Konvex kvadratikus optimalizálás (KKO)

1.1.1. Konvex kvadratikus függvények

Elevenítsünk fel néhány lineáris algebrai definíciót és fogalmat [28, 13, 17].

1.1. Definíció. Egy $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix

szimmetrikus, ha $Q^T = Q$,

ferdén szimmetrikus, ha $Q^T = -Q$,

pozitív szemidefinit (PSD), ha $x^T Q x \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re,

pozitív definit (PD), ha $x^T Q x > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ -ra.

Lineáris algebrából és analízisből jól ismert, hogy egy szimmetrikus mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha sajátértékei nemnegatívak, illetve pontosan akkor pozitív definit, ha sajátértékei pozitívak. Ezenkívül egy szimmetrikus Q mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha felírható

$$Q = C^T C$$

alakban, ahol $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ilyen felbontás például a *Cholesky-faktorizáció*, amelyben C felső-háromszög mátrix.

1.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden pozitív szemidefinit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix felírható $Q = R + S$ alakban, ahol $R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, R ferdén szimmetrikus, S pedig szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix.

1.2. Feladat. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, $c \in \mathbb{R}^n$ és $\gamma \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + \gamma$$

kvadratikus függvény akkor és csak akkor konvex, ha a Q mátrix PSD.

1.3. Feladat. Legyen Q szimmetrikus PSD mátrix. Lássuk be, hogy

- (i) $q_{ii} \geq 0$ minden i -re és
- (ii) ha $q_{ii} = 0$ valamilyen i indexre, akkor $q_{ij} = q_{ji} = 0$ minden j -re.

Másként fogalmazva: egy pozitív szemidefinit mátrix főátlójának elemei nemnegatívak. Ha egy átlóbeli elem nulla, akkor annak sora és oszlopa csak nulla elemekből áll.

1.1.2. A kvadratikus optimalizálás dualitáselmélete

A következőkben a KKO feladatot úgynevezett szimmetrikus (kanonikus) formában tárgyaljuk. Könnyű ellenőrizni, hogy egyszerű átalakításokkal tetszőleges formában adott KKO feladat felírható ilyen alakban [43].

Legyenek $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ tetszőleges mátrixok, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b, y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^k$, $w \in \mathbb{R}^l$ vektorok. A konvex kvadratikus optimalizálás *primál* feladata a következő alakban adható meg:

$$\begin{aligned} \min f(x, z) &= c^T x + \frac{1}{2} x^T C^T C x + \frac{1}{2} z^T z \\ Ax + Bz &\geq b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Minden ilyen feladathoz tartozik egy úgynevezett *duál* feladat:

$$\begin{aligned} \max g(y, w) &= b^T y - \frac{1}{2} y^T B B^T y - \frac{1}{2} w^T w \\ A^T y - C^T w &\leq c \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

A primál és a duál feladat kapcsolata elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt alapvető jelentőségű.

1.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} \min c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

KKO feladat, ahol $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus PSD mátrix, felírható a fent megadott primál sztenderd alakban. Írjuk fel a megfelelő duál KKO feladatot is.

1.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2 + 2x_2^2 + \frac{1}{2} z_1^2 \\ x_1 + z_1 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

KKO feladat felírható a fenti sztenderd alakban. Adjuk meg a megfelelő b, c vektorokat, valamint az A, B és C mátrixokat. Írjuk fel a duál KKO feladatot is.

1.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} \min & -12x_1 - 10x_2 + 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

KKO feladat felírható a fenti sztenderd alakban. Adjuk meg a megfelelő b, c vektorokat, valamint az A, B és C mátrixokat. Írjuk fel a duál KKO feladatot is.

Egy (x, z) párt *primál megengedettnek* (primál megengedett megoldásnak) nevezzük, ha kielégíti az összes primál korlátozó feltételt, és *primál optimális megoldásnak*, ha primál megengedett és minden (x', z') primál megengedett megoldásra $f(x, z) \leq f(x', z')$.

Hasonlóan egy (y, w) párt *duál megengedettnek* (duál megengedett megoldásnak) nevezzük, ha kielégíti az összes duál korlátozó feltételt, és *duál optimális megoldásnak*, ha duál megengedett és minden (y', w') duál megengedett megoldásra $g(y, w) \geq g(y', w')$.

A primál (duál) KKO feladat *nem megengedett*, ha nem létezik primál (duál) megengedett megoldás.

A következő tétel egyszerű, de fontos eredmény.

1.2. Tétel (Gyenge dualitás). Minden primál megengedett (x, z) és duál megengedett (y, w) megoldáspárra

$$f(x, z) \geq g(y, w).$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

- i. $z = B^T y$,
- ii. $w = Cx$,
- iii. az $\bar{y} := Ax + Bz - b$ jelölést használva $\bar{y}^T y = 0$ és
- iv. az $\bar{x} := c + C^T w - A^T y$ jelölést használva $\bar{x}^T x = 0$.

Bizonyítás: A primál és duál feltételeket felhasználva:

$$\begin{aligned} f(x, z) - g(y, w) &= c^T x + \frac{1}{2} x^T C^T C x + \frac{1}{2} z^T z - b^T y + \frac{1}{2} y^T B B^T y + \frac{1}{2} w^T w \geq \\ &\geq (A^T y - C^T w)^T x + \frac{1}{2} x^T C^T C x + \frac{1}{2} z^T z - (Ax + Bz)^T y + \frac{1}{2} y^T B B^T y + \frac{1}{2} w^T w = \\ &= \frac{1}{2} (Cx - w)^T (Cx - w) + \frac{1}{2} (B^T y - z)^T (B^T y - z) \geq 0. \quad (1.1) \end{aligned}$$

Ezzel az állítás első felét beláttuk. Az egyenlőség feltételeihez azt kell megvizsgálnunk, hogy az előbbi becsléssorozatban mikor kapunk egyenlőségeket. Az első egyenlőtlenség pontosan akkor lesz egyenlőség, ha *iii.* és *iv.* teljesül, a második egyenlőtlenség pedig akkor, ha *i.* és *ii.* teljesül. \square

1.7. Feladat. Fogalmazzuk meg a gyenge dualitási tételben megadott feltételeket az 1.5 feladatban szereplő optimalizálási feladatra.

A primál és duál célfüggvényértékek közti $f(x, z) - g(y, w)$ különbséget *dualitásrésnek* nevezzük. A gyenge dualitási tétel teszi lehetővé, hogy algoritmusokat hozzunk létre a KKO feladatok megoldására. A primál és a duál célfüggvényértékek egyenlősége optimalitási tesztként fog szolgálni.

1.3. Következmény. *Legyenek (x, z) és (y, w) rendre primál és duál megengedett megoldások. Ekkor $f(x, z) = g(y, w)$ esetén (x, z) primál optimális megoldás, (y, w) pedig duál optimális megoldás.*

Az erős dualitási tétel az állítás fordítottját tartalmazza, vagyis ha mind a primál, mind a duál feladat megoldható, akkor létezik optimális megoldás és a célfüggvényértékek egyenlőek. Másként fogalmazva a dualitási rés az optimumban nulla. Ezt a fontos eredményt a későbbiekben algoritmikusan fogjuk bizonyítani.

1.4. Tétel (KKO erős dualitási tétele). *Bármely KKO feladatra teljesül a következő, egymást kizáró állítások egyike:*

- i. Vagy a primál, vagy a duál feladat nem megengedett, vagy egyik sem megengedett.*
- ii. Létezik (x, z) primál megengedett és (y, w) duál megengedett megoldás, amelyekre $f(x, z) = g(y, w)$, vagyis mindkét feladat megoldható és az optimumban a dualitásrés nulla.*

1.1.3. A kvadratikus optimalizálási feladat átfogalmazása

A gyenge dualitási tétel *i.* és *ii.* feltételét felhasználva és a $Q = C^T C$, $P = B B^T$ szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrixokat bevezetve a következőképpen fogalmazhatjuk át a primál feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} y^T P y \\ & Ax + Py \geq b \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

A duál feladat megfelelő alakja pedig

$$\begin{aligned} \min \quad & g(y, x) = b^T y - \frac{1}{2} y^T P y - \frac{1}{2} x^T Q x \\ & A^T y - Q x \leq c \\ & y \geq 0 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy itt a primál és duál feladatokban azonos változók szerepelnek. Ez lehetővé teszi, hogy átalakítsuk a primál-duál feladatot egy komplementaritási feladattá,

ahol nulla dualitásrés mellett keressük az optimális megoldást. Itt az 1.2 tételben szereplő *iii.* és *iv.* feltételeket is felhasználjuk.

$$-Py - Ax + \bar{y} = -b \quad (1.2)$$

$$A^T y - Qx + \bar{x} = c$$

$$y \geq 0 \quad (1.3)$$

$$x \geq 0$$

$$\bar{y} \geq 0$$

$$\bar{x} \geq 0$$

$$x^T \bar{x} = 0 \quad (1.4)$$

$$y^T \bar{y} = 0.$$

Az (1.2) egyenleteit *egyenlőségi feltételeknek*, (1.3) egyenlőtlenségeit *nemnegativitási feltételeknek*, (1.4) feltételeit pedig *komplementaritási feltételeknek* nevezzük. Adott i esetén x_i , \bar{x}_i -t, valamint hasonlóan y_i és \bar{y}_i -t *komplementáris változóknak* hívjuk. A változók nemnegativitása miatt minden egyes koordinátára a komplementaritási változók legalább egyikének nullának kell lennie.

Néhány alkalmas jelölés bevezetésével a feladatot tömörebb formában is megfogalmazhatjuk. Legyen

$$M = \begin{bmatrix} P & A \\ -A^T & Q \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad d = \begin{bmatrix} -b \\ c \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Az M mátrix speciális szerkezetére külön elnevezést vezetünk be:

1.5. Definíció. *Egy*

$$M = \begin{bmatrix} P & A \\ -A^T & Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)} \quad (1.6)$$

alakú mátrixot biszimmetrikusnak nevezünk, ha $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ és $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit mátrixok, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pedig tetszőleges mátrix.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a biszimmetrikus mátrixok pozitív szemidefinitek. Az $u = (y^T, x^T)^T$ és $v = (\bar{y}^T, \bar{x}^T)^T$ jelölések segítségével az (1.2-1.4) feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} -Mu + v &= d \\ u, v &\geq 0 \\ u^T v &= 0. \end{aligned} \quad (\text{LCP})$$

Ez az úgynevezett lineáris komplementaritási feladat (LCP), amely nem minden esetben oldható meg. A kvadratikus optimalizálási feladatból származó LCP-ben az M mátrix biszimmetrikus, erre az esetre mutatunk egy algoritmust a következő szakaszban. Később tárgyalni fogjuk a megoldási módszer általánosítását olyan LCP feladatokra, amelyekben M nem feltétlenül biszimmetrikus.

1.6. Példa. Tekintsük a következő kvadratikus optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ez egy sztenderd formájú feladat, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = 0, \quad A = (-1 \ -1), \quad b = (-1), \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Q sajátértékeinek meghatározása:

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0,$$

amiből

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2} > 0.$$

Ebből következik, hogy Q pozitív definit mátrix, tehát a feladat valóban konvex. A Cholesky-faktorizáció

$$Q = C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

is mutatja, hogy Q pozitív szemidefinit. A duál feladat esetünkben a következő alakú:

$$\begin{aligned} \max \quad & -y_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 \\ & -y_1 - x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -y_1 + x_1 - 4x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2, y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Az ennek megfelelő LCP feladatban

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}.$$

1.8. Feladat. Írjuk fel az 1.5 példában megadott KKO feladathoz tartozó LCP-t.

1.9. Feladat. Írjuk fel azt az LCP-t, amit egy kanonikus alakú lineáris optimalizálási feladatból kapunk.

1.2. Alkalmazások

1.2.1. A betonkeverési feladat (legkisebb négyzetek módszere)

Az építőmérnöki munkában a különböző célokra különböző betonfajták szükségesek. A beton egyik fontos jellemzője a sóder összetétele, vagyis hogy a sóderben lévő kavicsok

hány százaléka tartozik egy bizonyos kavicsméret-kategóriába. Az építőmérnökök a beton minden fajtájához meg tudják adni azt az ideális sóderösszetételt, amely minimális cementfelhasználás mellett biztosítja a kívánt erősséget. Sajnos a sóderbányákban ilyen ideális összetételt általában nem lehet találni. A gyakorlatban a különböző sóderfajták keverésével próbálják a lehető legjobban megközelíteni a kívánt minőséget.

Tegyük fel, hogy n különböző kavicsméret-kategóriánk van. Az aktuális célunkhoz tartozó ideális keveréket a $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ vektor adja meg, ahol $0 \leq c_i \leq 1$ minden $i = 1, \dots, n$ -re és $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. A c_i elem azt mutatja, hogy a sóder hány százaléka tartozik az i -edik kavicsméret-kategóriába. Tegyük fel továbbá, hogy a sódert m különböző bányából kaphatjuk, és mindegyik $j = 1, \dots, m$ bánya kavics-összetételét az $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$ vektor adja meg, amelyben $0 \leq a_{ij} \leq 1$ minden $i = 1, \dots, n$ -re és $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$. A cél az, hogy megtaláljuk az ideális keverék legjobb közelítését az m bánya által ajánlott alapanyag felhasználásával.

Jelölje x_j azt, hogy a keverék hány százaléka származik a j -edik bányából, ekkor az $x = (x_1, \dots, x_m)$ vektorra teljesülnie kell a

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1, \quad x_j \geq 0$$

összefüggésnek. Célunk, hogy az eredményül kapott keverék

$$z = \sum_{j=1}^m A_j x_j$$

a lehető legközelebb legyen az ideálishoz, vagyis minimalizálnunk kell az alábbi kifejezést:

$$\|z - c\|^2 = (z - c)^T(z - c) = \sum_{i=1}^n (z_i - c_i)^2.$$

Ez az optimalizálási feladat egy lineárisan korlátozott KKO feladat. Tovább egyszerűsíthetjük a feladatot a z változó kiküszöbölésével. Ekkor, bevezetve az $A = (A_1, \dots, A_m)$ mátrixot, amelynek oszlopai az A_j vektorok, a következő egyszerű KKO feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \min \quad & (Ax - c)^T(Ax - c) \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

1.10. Feladat. A fenti betonkeverési feladatban a keveréknek a megcélzott ideális összetételtől való eltérését a $z = Ax$ és c vektorok euklideszi távolsága adta meg. Két vektor távolságát mérheti még többek között az $\|\cdot\|_1$ vagy a $\|\cdot\|_\infty$ norma is. Írjuk át a keverési feladatot ezeknek a normáknak a felhasználásával és mutassuk meg, hogy ezáltal mindkét esetben tiszta lineáris programozási feladatot kaphatunk.

A korlátozott legkisebb négyzetek módszere a mérnöki munka, a közgazdaságtan és a statisztika számos területén megjelenik. A következő alfejezetben egy statisztikai alkalmazással foglalkozunk.

1.2.2. Konvex regressziós feladat (legkisebb négyzetek módszere)

A regresszió során egy ponthalmazra illesztünk egy függvényt. Tekintsük a következő regressziós modellt:

$$Y_i = y(x_i) + \sigma_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Az $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ pontok és a hozzájuk tartozó $Y_i \in \mathbb{R}$ megfigyelések ismeretében akarjuk becsülni az ismeretlen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyről feltesszük, hogy konvex. Legyenek $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ független, nulla várható értékű valószínűségi változók. Ekkor a legkisebb négyzetek módszerével keressük azt az $y(x)$ konvex függvényt, amely a legjobban közelíti a megfigyeléseket:

$$\min_{y(x) \text{ konvex}} \sum_{i=1}^n (Y_i - y(x_i))^2 \quad (1.8)$$

Vegyük észre, hogy az (1.8) feladatban csak a megfigyelési pontokhoz tartozó $y(x_i)$ értékeket használjuk, így az $y(x)$ függvényt kereshetjük szakaszonként lineáris alakban: az x_i megfigyelési pontoknál vannak törések, köztük lineáris a függvény. A konvexitás ebben az esetben azt jelenti, hogy a lineáris részek meredeksége növekszik. Az $y_i = y(x_i)$ jelölés bevezetésével az optimalizálási feladat a következő alakban írható fel:

$$\min \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 \quad (1.9)$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \leq \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (1.10)$$

Definiáljuk a tridiagonális $(n-1) \times (n+1)$ -es $A_n(a)$ mátrixot, ahol $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 - a_2 & a_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 - a_3 & a_3 & 0 & \dots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & a_3 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & a_{n-2} & -a_{n-2} - a_{n-1} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & -a_{n-1} - a_n & a_n \end{pmatrix}.$$

A konvex regressziós feladathoz legyen $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a_j = \frac{1}{x_{j+1} - x_j}$, $j = 1, \dots, n-1$. Ekkor az (1.9) konvex regressziós feladat így írható át:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T y + y^T I y + \gamma \\ & A_{n-1}(a) y \geq 0, \text{ ahol} \\ & c = (-2Y_1, \dots, -2Y_n)^T, \\ & \gamma = \sum_{i=1}^n Y_i^2, \end{aligned}$$

I pedig az n -ed rangú egységmátrix. Vegyük észre, hogy $A_{n-1}(a)$ egy $(n-2) \times n$ -es mátrix.

1.2.3. Portfólióanalízis (átlagos variancia modellek)

A kvadratikus optimalizálás egy fontos alkalmazása az átlagos variancia modellek efficiens határának¹ kiszámítása. Adott aktívák esetén r_i várható hozam és v_{ij} kovarianciák mellett a feladat az aktívák olyan portfóliójának megtalálása, amely adott összhozam mellett minimális szórást, illetve adott szórás mellett maximális hozamot biztosít. Matematikailag, ha x_i az i -edik eszköz aránya a portfólióban, akkor az átlagos variancia feladat:

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} x^T V x : e^T x = 1, r^T x = \lambda, D x = d, x \geq 0 \right\}, \quad (1.11)$$

ahol $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ összegzővektor, $D x = d$ pedig a kiválasztható portfóliókra vonatkozó kiegészítő feltételeket jelölhet. Ez a feladat egy jobboldali paraméteres KKO feladat, ahol λ a befektetés összhozamát jelöli. Ekkor az efficiens határ éppen az optimálisérték-függvény.

1.7. Példa. Tekintsük a következő átlagos variancia modellt:

$$\min_x \{ x^T V x : e^T x = 1, r^T x = \lambda, x \geq 0 \}$$

ahol

$$V = \begin{pmatrix} 0,820 & -0,230 & 0,155 & -0,013 & -0,314 \\ -0,230 & 0,484 & 0,346 & 0,197 & 0,592 \\ 0,155 & 0,346 & 0,298 & 0,143 & 0,419 \\ -0,013 & 0,197 & 0,143 & 0,172 & 0,362 \\ -0,314 & 0,592 & 0,419 & 0,362 & 0,916 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} 1,780 & 0,370 & 0,237 & 0,315 & 0,490 \end{pmatrix}^T.$$

Ellenőrizhető (pl. MATLAB felhasználásával), hogy $\lambda > 1,780$ vagy $\lambda < 0,237$ esetén a primál KKO feladat nem megengedett, mert a duál nem korlátos. A $\lambda \in [0,237, 1,780]$ értékekre mind a primál, mind a duál KKO feladatnak van optimális megoldása, és az optimális célfüggvényértékek egyenlők.

1.11. Feladat. A feladat részletes megoldása megtalálható a

<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/port/formulations.html>

oldalon. A

<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/CaseStudies/port/demo.html>

oldalon megadhatjuk a saját portfóliónkban szereplő részvényeket, majd a program kiszámítja az ideális felosztást. A kockázatvállalás szintjét szabadon megválaszthatjuk. Adjuk meg a megoldott feladat matematikai leírását és számoljunk be a kapott eredményekről.

¹Az efficiens határ fogalmát Markowitz vezette be, lásd [33].

1.3. A legkisebb index criss-cross módszer

Számos módszer ismert a fenti (LCP) feladat megoldására. Ebben a fejezetben néhány pivotmódszert mutatunk be. A későbbiekben az LCP feladatok megoldására használt belsőpontos módszerekkel is foglalkozni fogunk. Először a báziscseréről adunk egy rövid áttekintést, azonban feltételezzük, hogy az olvasó már ismeri ezeket a fogalmakat (lásd pl. [43, 5]).

1.3.1. Pivotálás (báziscsere)

Tekintsünk példaképpen egy *aluldeterminált* (több változó, mint egyenlet) lineáris rendszert:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 1x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 0x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Az x_1, x_2 változók az x_3, x_4, x_5 változók függvényeként vannak megadva: ha x_3, x_4, x_5 értékét nullának választjuk, rögtön adódik, hogy $x_1 = x_2 = 1$. Ebben a felírásban x_1, x_2 -t *bázisváltozóknak*, x_3, x_4, x_5 -öt *nem-bázisváltozóknak* nevezzük.

A bázis- és nem-bázisváltozókat másképp is választhattuk volna. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 7. \end{aligned}$$

Most x_4, x_5 van megadva x_1, x_2, x_3 függvényeként, azaz x_4 és x_5 a bázisváltozónk. Ha az x_1, x_2, x_3 nem-bázisváltozókat nullának választjuk, rögtön kapjuk, hogy $x_4 = 4$ és $x_5 = -3$.

A *bázis* (bázisváltozók) választásának ilyen megváltoztatását nevezzük *báziscserének*, vagy más néven *pivotálásnak*. Fontos megfigyelnünk, hogy a báziscsere nem változtatja meg a lineáris rendszerünk megoldáshalmazát.

Kényelmes bevezetni egy gyors jelölést a báziscsere végrehajtására. Példánkban az első lineáris rendszerhez ezt a táblát rendelhetjük:

1	0	2	-1	2	1
0	1	-3	3	-5	1

majd a báziscsere után a következő táblát kapjuk:

3	1	3	0	1	4
5	2	4	1	0	7

1.12. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi három mátrix báziscserével átalakítható egymásba:

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	1	0	2	-1	2	5	3	1	3	0	1	2	3	1	3	0	1
2	0	1	-3	3	-5	4	5	2	4	1	0	4	-1	0	-2	1	-2

1.3.2. Pivotmódszer az LCP feladat megoldására

Tekintsük az (LCP) lineáris rendszert, azaz $-Mu + v = d$. Ez a rendszer aluldeterminált, és az u -változókat, mint nem-bázisváltozókat megválaszthatjuk például úgy (mind nulla), hogy $v = d$ legyen. Az egyetlen probléma az, hogy ez a megoldás megsérti a v -re vonatkozó nemnegativitási követelményt, kivéve, ha d nemnegatív (ami általában nem teljesül). Azonban u és v ilyen választása kielégíti az (LCP)-beli komplementaritási követelményt: $u^T v = 0$.

Azt mondhatjuk, hogy az $u = 0$, $v = d$ választás egy *komplementáris bázisnak* felel meg. Csak olyan báziscseréket fogunk végezni, hogy a bázisok végig komplementárisak legyenek – ha az u_i változót kivesszük a bázisból, akkor a komplementáris² v_i változójának be kell kerülnie a bázisba. Ezt nevezzük *principális pivotnak*.

A $-Mu + v = d$ lineáris rendszer így jelölhető:

B	u^T	v^T	
v	$-M$	I	d

Az első oszlopban szereplő B azt jelzi, hogy a v változók alkotják az aktuális bázist. Vegyük észre, hogy a bázisváltozóknál az I egységmátrix szerepel. Most addig végzünk olyan báziscseréket, amelyek megőrzik a komplementaritást, amíg a jobboldali vektor a táblázatban nemnegatívává válik. Ekkor teljesülni fog (LCP) összes feltétele, és megállhatunk.

Megjegyezzük, hogy ezalatt mindig teljesül

$$-Mu + v = d, \quad (1.12)$$

mert a báziscserék nem változtatják meg egy lineáris rendszer megoldáshalmazát, illetve

$$u^T v = 0, \quad (1.13)$$

mert csak principális pivotot végzünk, amely megőrzi a komplementaritást.

Másként fogalmazva: akkor állhatunk meg, ha az (LCP)-beli u -ra és v -re vonatkozó nemnegativitási feltételek is teljesülnek.

Az egy változót tartalmazó principális báziscserét *diagonális pivotnak* nevezzük (egy bázisváltozót a komplementer változója vált fel, azaz u_i helyére a bázisban v_i kerül, vagy fordítva), a két változót tartalmazó principális báziscserét pedig *cserepivotnak* hívjuk (két bázisváltozó helyébe a komplementáris párjuk kerül).

²Az u_i és v_i változókat komplementárisnak nevezzük, mert ha $u^* \in \mathbb{R}^{n+m}$ és $v^* \in \mathbb{R}^{n+m}$ az (LCP) feladat megoldásai, akkor minden $i = 1, \dots, n+m$ -re vagy u_i^* vagy v_i^* vagy mindkettő nulla.

1.8. Példa. Tekintsük az 1.6 példa feladatát. Az ott megadott M , d , u és v szerint az első tábla:

$$\begin{array}{c|ccc} B & y & x_1 & x_2 & \bar{y} & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & d \\ \hline \bar{y} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{x}_1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \bar{x}_2 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|ccc} B & u^T & v^T & d \\ \hline B & u^T & v^T & d \\ v & -M & I & d \end{array}$$

Mivel $d > 0$, ez a tábla máris optimális. Az optimális megoldás $x_1 = x_2 = 0$, az optimális célfüggvényérték pedig 0. A táblából az optimális értékek kiolvashatók, ha visszaemlékezünk arra, hogy a tábla a lineáris egyenletrendszer rövidítése:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

ahol az y, x_1, x_2 nem-bázisváltozók definíció szerint nullák. (Emlékezzünk rá, hogy a bázisváltozókhoz az egységmátrix tartozik.)

1.3.3. Véges criss-cross módszer kvadratikus optimalizálásra

Először bemutatjuk a megállás feltételét.

1.9. Definíció. Egy komplementáris táblázatot az LCP esetén végsőnek mondunk, ha az alábbi három struktúra egyikével bír:

<table border="1"><tr><td></td><td></td><td>\oplus</td></tr><tr><td></td><td></td><td>\vdots</td></tr><tr><td></td><td></td><td>\oplus</td></tr><tr><td></td><td></td><td>\oplus</td></tr><tr><td></td><td></td><td>\vdots</td></tr><tr><td></td><td></td><td>\oplus</td></tr></table>			\oplus			\vdots			\oplus			\oplus			\vdots			\oplus	<table border="1"><tr><td>$0 \dots 0$</td><td>$\oplus \dots \oplus$</td><td>$-$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	$0 \dots 0$	$\oplus \dots \oplus$	$-$				<table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$\oplus \dots \oplus$</td><td>$0 \dots 0$</td><td>$-$</td></tr></table>				$\oplus \dots \oplus$	$0 \dots 0$	$-$
		\oplus																														
		\vdots																														
		\oplus																														
		\oplus																														
		\vdots																														
		\oplus																														
$0 \dots 0$	$\oplus \dots \oplus$	$-$																														
$\oplus \dots \oplus$	$0 \dots 0$	$-$																														
<i>optimális tábla;</i>	<i>primál nem megengedett;</i>	<i>duál nem megengedett.</i>																														

1.13. Feladat. Igazoljuk, hogy az első tábla a KKO optimális megoldásait adja, a második és harmadik tábla pedig rendre a primál és duál megoldhatatlanságát bizonyítja.

Tekintsünk egy KKO feladatot az (1.2), (1.3) és (1.4) szerinti LCP felírásban. Legyen $u = (y, x)$ és $v = (\bar{y}, \bar{x})$, mint az előbbieken is, $N = n + m$ és vegyük v -t kiinduló bázismegoldásnak. Jelölje t_{ij} az aktuális tábla i -edik sorának j -edik elemét. Az algoritmus a következő lépésekből áll:

A legkisebb index criss-cross módszer

Input: Egy komplementáris, de nem feltétlenül megengedett bázis.

(Az u_i, v_i komplementer változók közül pontosan az egyik van a bázisban.)

$k = 1$

Output: A fenti három végső tábla egyike.

k. lépés: Adott egy komplementáris, biszimmetrikus, negatív szemidefinit bázistábla.

- (a) Ha $u_i, v_i \geq 0$ minden i -re, akkor álljunk meg: az aktuális megoldás megoldja az *LCP*-t, ezáltal a *KKO* egy optimális megoldásában vagyunk. Egyébként legyen

$$r = \min\{i : u_i < 0 \text{ vagy } v_i < 0, i = 1, \dots, N\},$$

ahol feltehetjük, hogy $u_r < 0$.

- (b) Ha $t_{rr} < 0$ (a bázisban ábrázolva u_r együtthatója v_r -nél negatív), akkor végezzünk el egy **diagonális pivotot**: a bázisban u_r helyébe v_r kerül. $k \leftarrow k + 1$

- (c) Ha $t_{rr} = 0$ és

- (c1) $t_{rj} \geq 0$ minden $j = 1, \dots, N$ -re, akkor megállunk, mert vagy a primál vagy a duál feladat nem oldható meg.

- (c2) Egyébként legyen $s = \min\{j : t_{rj} < 0, j = 1, \dots, N\}$. Végezzünk el egy **cserepivotot**: az u_r és v_s bázisvektorok helyébe u_s és v_r nem-bázisvektorok kerülnek. $k \leftarrow k + 1$
-

Az algoritmus helyességének igazolásához vegyük észre, hogy a (c) eset, amelyben³ $t_{rr} = 0$, azt jelenti, hogy az érintett diagonális blokk u_r sora nulla, tehát s a bázistábla ferdén szimmetrikus részében van és így az u_s változó tartozik hozzá, nem pedig v_s .

A (c1) esetben az algoritmus $u_r < 0$ mellett megáll és a bázistáblában egy nemnegatív sorunk van. Ez egy végső tábla, azaz ebben az esetben az *LCP* nem megoldható: vagy a primál, vagy a duál *KKO* feladat nem megoldható.

Az (a) esetben a végső tábla az *LCP* egy megoldását adja, ezért mind a primál, mind a duál *KKO* feladat optimális megoldását megkapjuk.

Láttuk, hogy az algoritmus kétfajta báziscserét használ: diagonális pivotot (ha lehet), vagy cserepivotot (ha diagonális pivot nem lehetséges). Most egy-egy példát adunk a báziscsere két különböző típusára.

³ $t_{rr} > 0$ azért nem lehet, mert M végig negatív szemidefinit marad, lásd az 1.17 feladatot.

1.10. Példa. (Példa diagonális pivotra) Kissé módosítjuk az 1.8 példát, hogy a következő legyen a kiinduló tábla:

B	y	x_1	x_2	\bar{y}	\bar{x}_1	\bar{x}_2	d
\bar{y}	0	1	1	1	0	0	1
\bar{x}_1	-1	-1	1	0	1	0	2
\bar{x}_2	-1	1	-4	0	0	1	-1

A jobboldali d vektor harmadik komponense negatív, így ez a tábla nem optimális.

A legkisebb index criss-cross módszer algoritmusának (b) pontja szerint most egy **diagonális pivotot** kell elvégeznünk, ehhez a tábla megfelelő diagonális pozíciójának (3. sor) nem-bázis részében lévő elemét (**-4**) vesszük generálóelemnek. Megjegyezzük, hogy nem tudnánk elvégezni ezt a báziscserét, ha ez az elem nulla lenne: akkor egy **cserepivotot** kellene elvégeznünk, amit a következő példában fogunk bemutatni.

Ha elvégezzük a báziscserét **-4**-et használva generálóelemként, ezt az új táblát kapjuk:

B	y	x_1	x_2	\bar{y}	\bar{x}_1	\bar{x}_2	d
\bar{y}	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
\bar{x}_1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ezen báziscsere folyamán \bar{x}_2 kikerült a bázisból, míg komplementáris változója, x_2 került be a helyette. Ez a tábla optimális (a jobboldali vektor pozitív), és a változók optimális értékei $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{1}{4}$.

1.11. Példa. (Példa cserepivotra) Tekintsük a következő KKO feladatot:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
 & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 \leq -2 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Ekkor

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A Q mátrix nyilvánvalóan pozitív definit. Így

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}.$$

A kiinduló tábla

B	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	d
\bar{y}_1	0	0	1	2	-1	1	0	0	0	0	4
\bar{y}_2	0	0	1	-1	1	0	1	0	0	0	-2
\bar{x}_1	-1	-1	-2	0	0	0	0	1	0	0	0
\bar{x}_2	-2	1	0	-2	0	0	0	0	1	0	0
\bar{x}_3	1	-1	0	0	-2	0	0	0	0	1	0

A jobboldali vektor első negatív eleme a 2. sorban van. Ha megnézzük az ehhez tartozó diagonális pozíciót a tábla nem-bázis részében, akkor láthatjuk, hogy a diagonális elem nulla, vagyis nem tudunk diagonális pivotot végezni.

Ehelyett a legkisebb index criss-cross módszer (c) lépése szerint cserepivotot kell végeznünk. Az algoritmus (c) lépését követve megkeressük a tábla 2. sorának nem-bázis részében az első negatív elemet. Ez a táblánkban a -1 tag az (\bar{y}_2, x_2) helyen. Figyeljük meg, hogy ha ezt a generáloelemet használjuk, akkor x_2 lép be a bázisba és \bar{y}_2 hagyja el a bázist. Ez azért probléma, mert x_2 és \bar{y}_2 nem komplementer változók. Az x_2 komplementer változója \bar{x}_2 , és az már bent van a bázisban! Mivel a komplementaritást végig meg akarjuk őrizni, ezért rögtön elvégzünk egy második báziscserét az (\bar{x}_2, y_2) helyet használva generáloelemként, így \bar{x}_2 elhagyja a bázist (és y_2 belép), és visszanyertük a komplementaritást.

Összegezve, a legkisebb index criss-cross algoritmus (c2) lépésében dupla báziscserét kell elvégeznünk az (\bar{y}_2, x_2) és (\bar{x}_2, y_2) helyeken. Ezek a báziscserék a következő táblákat eredményezik:

B	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	d
\bar{y}_1	0	0	3	0	1	1	2	0	0	0	0
x_2	0	0	-1	1	-1	0	-1	0	0	0	2
\bar{x}_1	-1	-1	-2	0	0	0	0	1	0	0	0
\bar{x}_2	-2	1	-2	0	-2	0	-2	0	1	0	4
\bar{x}_3	1	-1	0	0	-2	0	0	0	0	1	0

B	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	d
\bar{y}_1	0	0	3	0	1	1	2	0	0	0	0
x_2	0	0	-1	1	-1	0	-1	0	0	0	2
\bar{x}_1	-3	0	-4	0	-2	0	-2	1	1	0	4
y_2	-2	1	-2	0	-2	0	-2	0	1	0	4
\bar{x}_3	-1	0	-2	0	-4	0	-2	0	1	1	4

Ez a tábla optimális, az optimális megoldás $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 2$ és az optimális érték 4. (Miért?)

1.14. Feladat. Írjuk fel az előző példa duál KKO feladatát és adjuk meg az optimális megoldást a fenti optimális tábla alapján. Ellenőrizzük, hogy az optimumban a dualitásrés nulla.

1.15. Feladat. Oldjuk meg az alábbi KKO feladatokat a legkisebb index criss-cross módszer segítségével:

$$\min (x-1)^2 + 4x$$

$$\min \left\{ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 - x_2 : x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0 \right\}.$$

1.16. Feladat. Oldjuk meg az 1.5 és az 1.6 feladatban szereplő KKO feladatokat a legkisebb index criss-cross módszer felhasználásával.

1.4. *A criss-cross módszer konvergenciája

Mivel csak diagonális és cserepivotot használunk, be lehet bizonyítani, hogy a bázistáblázat biszimmetrikus és negatív szemidefinit tulajdonsága az algoritmus során végig megmarad. A bizonyítást feladatként az olvasóra bízunk.

1.17. Feladat. Legyen $[-M, I]$ a rendszerünk együtthatómátrixa, M biszimmetrikus. Bizonyítsuk be, hogy a mátrix nem-bázis részének ellentettje bármilyen principális pivot esetén biszimmetrikus. (Vegyük észre, hogy a blokkok méretei változnak.)

Algoritmusunk az LCP komplementáris bázisain át halad, és vagy egy optimális, vagy egy nem megoldható táblánál ér véget, így – mivel csak véges sok különböző bázis létezik – a végesség belátásához csak azt kell bebizonyítani, hogy ciklikusság nem fordulhat elő.

Ennek belátásához közelebbről meg kell vizsgálnunk a táblák tulajdonságait.

1.4.1. Ortogonalitás a táblázatokban

1.12. Lemma. Ha az (u, v) és az (u', v') vektorok kielégítik a

$$-Mu + v = d \quad (1.15)$$

$$u, v \geq 0 \quad (1.16)$$

$$u^T v = 0 \quad (1.17)$$

feltételeket, és M pozitív szemidefinit, akkor

$$(u - u')^T (v - v') \geq 0.$$

Bizonyítás: A feltételeket felhasználva elemi számításokkal kapjuk, hogy

$$(u - u')^T (v - v') = (u - u')^T M(u - u') \geq 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy M pozitív szemidefinit. \square

Legyen most D egy tetszőleges $n \times (m - n)$ -es mátrix, ahol $m > n$. Jelölje továbbá E az $n \times n$ -es, valamint az $(m - n) \times (m - n)$ -es egységmátrixot is.

1.13. Lemma. Az $U = [E \ D]$ mátrix sorvektorai és a $V = \begin{bmatrix} D \\ -E \end{bmatrix}$ mátrix oszlopvektorai ortogonálisak, és \mathbb{R}^m egy bázisát alkotják.

Bizonyítás: Könnyen belátható a következő egyenlőség teljesülése:

$$UV = ED - DE = 0,$$

azaz U sorvektorai és V oszlopvektorai ortogonálisak. Továbbá U sorai és hasonlóan V oszlopai is lineárisan függetlenek, mert U és V is tartalmazza az E egységmátrixot. Így

U sorai az U mátrix sorvektorai által alkotott \mathcal{R} tér bázisát alkotják. Hasonlóan adják V oszlopai a V mátrix oszlopterének bázisát. Ebből pedig már következik az állítás, mert ez a két altér (\mathcal{R}^\perp és \mathcal{R}) komplementer és ortogonális alterek. \square

Most megnézzük, hogyan általánosítható az 1.13 lemma olyan esetre, amikor az E egységmátrix jelen van, de nem feltétlenül a mátrix elején. Egy ilyen mátrixot – legyen ez \bar{U} – például az 1.13 lemmában adott U mátrixon elvégzett báziscserével kaphatunk.

\mathcal{R} változatlanlansági tulajdonsága. Ha U mátrixban tetszőlegesen választunk egy generálóelemet és elvégezzük a báziscserét, akkor az így kapott \bar{U} mátrix \mathcal{R} sortere megegyezik az U mátrixéval.

\bar{V} mátrix általános megalkotása: Tegyük fel, hogy az U -n elvégzett báziscsere után az \bar{U} mátrixot kaptuk. \bar{U} sorai nyilvánvalóan \mathcal{R} bázisát adják. Alkothatunk továbbá egy olyan \bar{V} mátrixot, amelynek oszlopai \mathcal{R}^\perp bázisát adják, és így ortogonálisak \bar{U} soraira. Ennek megalkotása lényegében azonos az 1.13 lemmában bemutatottakkal, csak azért összetettebb, mert az \bar{U} -ban lévő egységmátrix oszlopai nem a mátrix elején vannak.

Legyenek u_1, \dots, u_{m+n} az U mátrix oszlopvektorai, $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ pedig az az indexhalmaz, amelyhez tartozó oszlopvektorok az oszloptér aktuális bázisát adják, azaz amelyhez tartozó oszlopok \bar{U} -ban az $n \times n$ -es egységmátrixot alkotják. Ha $B = [u_{j_1}, \dots, u_{j_n}]$ jelöli U megfelelő részmátrixát, akkor B nyilvánvalóan nem-szinguláris és

$$\bar{U} = B^{-1}U.$$

Ezenkívül minden u_k , ($k \notin J$) oszlopvektorra $\bar{u}_k = B^{-1}u_k$, azaz

$$B\bar{u}_k = u_k,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\sum_{j_i \in J} u_{j_i} \bar{u}_{ik} = u_k.$$

Az utolsó egyenlet azt mutatja, hogy ha az u_k vektort felírjuk a B bázisban, akkor az u_{j_i} bázisvektor együtthatója \bar{u}_{ik} . Így a

$$-u_k + \sum_{j_i \in J} u_{j_i} \bar{u}_{ik} = 0 \tag{1.18}$$

egyenlőségből definiáljuk a $\bar{v}_k = (\bar{v}_{1k}, \dots, \bar{v}_{mk})$ vektort, ahol

$$\bar{v}_{jk} = \begin{cases} \bar{u}_{ik} & \text{ha } j = j_i, \\ -1 & \text{ha } j = k, \\ 0 & \text{ha } j \notin J, \end{cases}$$

amely az U mátrix minden sorára ortogonális. Ezt a definíciót felhasználva az (1.18) egyenlőség mátrix formában így írható fel:

$$U\bar{v}_k = 0.$$

Az \bar{U} minden nem-bázis oszlopára készíthetünk egy ilyen vektort. Jelölje \bar{V} azt az $(m+n) \times m$ -es mátrixot, amelyet a \bar{v}_k oszlopvektorok alkotnak. Ez adja a következő tételt.

1.14. Tétel. *Az \bar{U} mátrix sorai ortogonálisak a \bar{V} mátrix oszlopaire, és ezek \mathbb{R}^{m+n} egy bázisát alkotják. Az \bar{U} mátrix sortere megegyezik U sortérével; a \bar{V} mátrix oszloptere azonos V oszlopterével.*

1.15. Példa. Könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi mátrixok báziscserékkel egymásba alakíthatók:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}} & 5 & \boxed{\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}} & 2 & \boxed{\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}} \\ 2 & \boxed{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -3 & 3 & -5 \end{array}} & 4 & \boxed{\begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}} & 4 & \boxed{\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}} \end{array}$$

Ha a fenti eljárást alkalmazzuk ezekre a mátrixokra, akkor a következő mátrixokat kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \end{array}} & 1 & \boxed{\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \end{array}} & 1 & \boxed{\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \end{array}} \\ 2 & \boxed{\begin{array}{ccc} -3 & 3 & -5 \end{array}} & 2 & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \end{array}} & 2 & \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \end{array}} \\ 3 & \boxed{\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \end{array}} & 3 & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \end{array}} & 3 & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \end{array}} \\ 4 & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \end{array}} & 4 & \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 4 \end{array}} & 4 & \boxed{\begin{array}{ccc} -1 & -2 & -2 \end{array}} \\ 5 & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \end{array}} & 5 & \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3 \end{array}} & 5 & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \end{array}} \end{array}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az U , \bar{U} és \bar{U}' mátrixok sorai ortogonálisak a V , \bar{V} és \bar{V}' oszlopaire.

Ezt az eredményt, az úgynevezett *ortogonalitási tulajdonságot* fogjuk alkalmazni a $\bar{T} = [d, -M, E]$ mátrixra. Először egy formális definíciót adunk a \bar{T} mátrix *bázistáblájára*. A \bar{T} oszlopvektorai közül választott bázis legyen B , amelyet a J_B indexhalmaz ad meg. Legyen továbbá $\bar{J}_B := J \setminus J_B$. Ekkor egy bázistáblázat (itt csak a nem-bázis részt tekintjük) egy $|J_B| \times |\bar{J}_B|$ -es mátrix, amely $t_{ik} : i \in J_B, k \in \bar{J}_B$ együtthatókat tartalmaz. t_{ik} a \bar{t}_i bázisvektor együtthatója, amikor a \bar{t}_k nem-bázisvektort állítjuk elő, azaz $\bar{t}_k = \sum_{i \in J_B} t_{ik} \bar{t}_i$ minden $k \notin J_B$ -re. Ezt a szerkezetet mutatja be az 1.1 ábra.

$$\begin{array}{c} k \in \bar{J}_B \\ \bar{t}_k \\ \vdots \\ i \in J_B \quad \bar{t}_i \quad \boxed{\begin{array}{ccc} \dots & t_{ik} & \dots \\ \vdots & & \end{array}} \end{array}$$

1.1. ábra. Bázistábla

Ahogy az 1.14 tételben láttuk, a \bar{T} mátrix sor- és oszlopterének bázisai bármilyen bázistáblából előállíthatók. Gyakorlásként most megismételjük \bar{T} bázistáblájának előállítását.

Legyen minden $i \in J_B$ esetén

$$t^{(i)} = \left(t_j^{(i)} \right)_{j=1}^n = \begin{cases} t_{ij} & \text{ha } j \in \bar{J}_B \\ 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és legyen minden $k \in \bar{J}_B$ esetén

$$t_{(k)} = \left(t_{(k)j} \right)_{j=1}^n = \begin{cases} t_{kj} & \text{ha } j \in J_B, \\ -1 & \text{ha } j = k, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $t^{(i)} \perp t_{(k)}$ minden $i \in J_B$ és $k \in \bar{J}_B$ esetén, akkor is, ha a B és B' bázisok különbözőek.

1.4.2. A criss-cross módszer végessége

Az előző szakasz ortogonalitási eredményeit használva kapjuk a következő tételt.

1.16. Tétel. *A legkisebb index criss-cross módszer véges.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy az algoritmus ciklizál. Legyen $J^* = \{i : u_i \text{ vagy } v_i \text{ belépett a bázisba a ciklus során}\}$. Nyilvánvaló, hogy ha egy változó eleme J^* -nak, akkor a komplementáris párja is, mert ha egy változó belép a bázisba, akkor a párja kerül ki onnan. Továbbá ha egy változó belép a bázisba a ciklus során, akkor bizonyos számú lépés után ki kell kerülnie a bázisból.

Legyen $q = \max\{i : i \in J^*\}$. A fenti megjegyzések alapján u_q és v_q belépett (kilépett) és kilépett (belépett) a bázisba a ciklus egy bizonyos iterációjakor. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amikor v_q belépett a bázisba, és amikor azt elhagyta. A következő eseteket kell végignéznünk (lásd az 1.2 ábrát):

1. v_q belép a bázisba	2. v_q elhagyja a bázist
(1a) egy diagonális pivot	(2a) egy diagonális pivot
(1b) egy cserepivot (elsőrendű választás)	(2b) egy cserepivot (elsőrendű választás)
(1c) egy cserepivot (másodrendű választás)	(2c) egy cserepivot (másodrendű választás)

Az „elsőrendű választás” azt jelenti, hogy a q indexet mint legkisebb negatív indexet választottuk ki az algoritmus (a) lépésénél, a „másodrendű választás” pedig azt jelenti, hogy a q indexet az algoritmus (c) lépésénél kaptuk. Azt gondolhatjuk, hogy 3×3 , vagyis kilenc esetet kell megvizsgálnunk, de meg fogjuk mutatni, hogy csak négy különböző eset van.

Figure 1 consists of four diagrams, labeled 1a, 1b, 2c, and 2b, each representing a 2d-dimensional representation of the Lie algebra $\mathfrak{so}(2d)$. Each diagram is a 2x2 grid of boxes with various symbols and labels.

- Diagram 1a:** The top row is labeled v_q and d . The bottom row is labeled u_q . The rightmost column is labeled d . The symbols in the boxes are \oplus , \vdots , \vdots , \vdots , \oplus in the top row and \oplus , \vdots , \vdots , \vdots , \oplus in the bottom row. There is a minus sign $-$ in the bottom right corner.
- Diagram 1b:** The top row is labeled u_r and v_q . The bottom row is labeled u_q . The rightmost column is labeled v_r . The symbols in the boxes are 0 , \vdots , 0 , \vdots , 0 in the top row and \ominus , \vdots , \ominus , \vdots , $+$ in the bottom row. There are \oplus symbols in the middle of the top and bottom rows.
- Diagram 2c:** The top row is labeled u_q and v_r . The bottom row is labeled u_r . The rightmost column is labeled v_q . The symbols in the boxes are \oplus , \vdots , \ominus , $+$ in the top row and \oplus , \vdots , \vdots , \vdots , 0 in the bottom row. There are \oplus symbols in the middle of the top and bottom rows.
- Diagram 2b:** The top row is labeled u_q and v_s . The bottom row is labeled u_s . The rightmost column is labeled d . The symbols in the boxes are 0 , \vdots , 0 , \vdots , 0 in the top row and \ominus , \vdots , \ominus , \vdots , $+$ in the bottom row. There are \oplus symbols in the middle of the top and bottom rows.

1.2. ábra. Az u_q (v_q) vektor be- illetve kilépésekor létrejövő bázistáblák.

A megfelelő bázistáblák szerkezetét az 1.2 ábra mutatja, a generálóelemek a táblák negatív illetve pozitív elemei. A bázistáblák q -nál nagyobb indexekhez tartozó részei nem szerepelnek az ábrán, mert ezek előjelszerkezetéről semmilyen információnk nincs, és q választása miatt nem is befolyásolják a generálóelem választását az algoritmus során.

Ahogy az 1.2 ábra mutatja, az (1a) és (1c), valamint a (2a) és (2b) eset ugyanazt a hasznos információt tartalmazza – megoldásoszlopaiknak azonos az előjelszerkezete, ezért csak a következő eseteket kell végiggondolnunk (lásd az 1.3 ábrát):

v_q belép a bázisba

- α . (1a) és (1c) esete: Van egy a vektorunk (a megoldás oszlopa), amely ortogonális a $\bar{T} = [d, -M, E]$ mátrix sortérére.
- β . (1b) esete: Van egy b_1 vektorunk (u_r oszlopa), amely ortogonális a \bar{T} mátrix sortérére, és van egy b_2 vektorunk (v_r sora), amely a \bar{T} mátrix sortérében van.

v_q elhagyja a bázist

- γ . (2a) és (2b) esete: Van egy c vektorunk (a megoldás oszlopa), amely ortogonális a \bar{T} mátrix sorterére.
- δ . (2c) esete: Van egy d_1 vektorunk (v_r oszlopa), amely ortogonális a \bar{T} mátrix sorterére, és van egy d_2 vektorunk (u_r sora), amely a \bar{T} mátrix sorterében van.

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & d & & i < q & & u_q & v_q & & i > q & & \\ \hline - & \oplus & , & , & , & , & \oplus & - & 0 & * & , & , & , & , & , & * \end{array} \\
 b_1 &= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & \ominus & , & , & , & , & \ominus & + & 0 & * & , & , & , & , & , & * \end{array} \\
 b_2 &= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} - & \oplus & , & , & , & , & \oplus & 0 & - & * & , & , & , & , & , & * \end{array} \\
 c &= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} - & \oplus & , & , & , & , & \oplus & 0 & - & * & , & , & , & , & , & * \end{array} \\
 d_1 &= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & \ominus & , & , & , & , & \ominus & 0 & + & * & , & , & , & , & , & * \end{array} \\
 d_2 &= \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} - & \oplus & , & , & , & , & \oplus & - & 0 & * & , & , & , & , & , & * \end{array}
 \end{aligned}$$

1.3. ábra. A kiválasztott vektorok előjeleszerkezete az α – δ . esetekben.

Így tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy az $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, illetve $\beta\delta$ esetek nem állhatnak fenn egyidejűleg. Mielőtt ezt megtennénk, megjegyezzük, hogy a fenti négy eset bármelyikében a q -nál nagyobb indexű elemek elhagyhatók, mert a megfelelő változók a ciklus során vagy végig bázis-, vagy végig nem-bázisváltozók voltak, így az algoritmusra nincs hatásuk.

$\alpha\gamma$ esete: Az a vektorból van egy (u, v) , a c vektorból pedig egy (u', v') vektorunk. Így az 1.12 lemma alapján $(u - u')(v - v') \geq 0$, de ebben az esetben $(u - u')(v - v') = uv + u'v' - uv' - u'v = -(uv' + u'v) < 0$, mert az utolsó kifejezésben minden koordináta nemnegatív, a q koordinátákra pedig az egyik szorzat nulla, a másik pedig pozitív. Ez viszont ellentmondás, tehát ez az eset nem lehetséges.

$\alpha\delta$ esete: Ebben az esetben $a \perp d_2$, viszont az előjelszerkezetüket felhasználva azt láthatjuk, hogy szorzatuk pozitív.

$\beta\gamma$ esete: Ebben az esetben $b_1 \perp d_2$, vagy ami ezzel ekvivalens, $b_2 \perp d_1$, viszont előjelstruktúrájukat felhasználva a szorzatuk negatív.

$\beta\delta$ esete: Ebben az esetben $b_2 \perp c$, viszont előjelszerkezetük alapján a szorzatuk pozitív.

Mivel minden lehetséges eset ellentmondáshoz vezetett, ezért az indirekt feltevés nem igaz, vagyis a legkisebb index criss-cross módszer véges. \square

Az algoritmus végességének egyszerű következményeként bebizonyíthatjuk a konvex kvadratikus optimalizálás alaptételét:

1.17. Tétel (KKO erős dualitási tétele). *A KKO esetében a következő két, egymást kizáró állítás egyike teljesül:*

- (i) *Vagy a primál, vagy a duál nem megoldható, vagy egyik sem megoldható.*
- (ii) *Létezik egy primál megengedett (x, z) és egy duál megengedett (y, w) , amelyekre*

$$f(x, z) = g(y, w).$$

Bizonyítás: Írjuk fel azt az LCP-t, amely a primál-duál KKO feladatpárhoz tartozik és oldjuk meg a legkisebb index criss-cross módszerrel. Az algoritmus véges sok lépés után vagy az (a) esetben ér véget, ahol megkapjuk mind a primál, mind a duál KKO feladat optimális megoldását, vagy pedig a (c1) esetnél ér véget, ami azt mutatja, hogy vagy a primál, vagy a duál feladat nem megoldható. \square

1.5. *A Lemke-féle pivotálgoritmus

Lemke algoritmus majdnem komplementáris bázisokat használ az LCP alakban felírt KKO feladatot megoldására.

Ebben a módszerben bevezetünk egy mesterséges változót (egy új oszlopot). Az első lépésben a kezdeti komplementáris bázishoz adjuk hozzá ezt az oszlopot úgy, hogy az így létrejövő bázis megengedett legyen. Ezenkívül pontosan egy komplementáris változópár van, amely nem-bázisváltozó. A módosított feladat ilyen bázisát nevezzük *majdnem komplementárisnak*. Ekkor a bázist éppen elhagyó változó komplementáris párja fog belépni a bázisba. A bázisból kilépő változót a szimplex-módszer generáloelem-választási szabálya szerint választjuk ki, vagyis hányadosesztet végzünk, hogy a bázis továbbra is megengedett maradjon. Amikor a mesterséges változó értéke nulla lesz (vagy úgy, hogy elhagyja a bázist, vagy pedig a bázisban maradva lesz nulla), akkor megkaptuk az LCP megoldását. Ha nem tudunk kilépő változót választani, akkor a KKO feladatnak nincs optimális megoldása. Formálisan a Lemke-algoritmus az alábbiak szerint írható fel:

Input: Adott egy komplementáris, de nem feltétlenül megengedett bázis. (Az u_i , v_i komplementer változók közül pontosan az egyik van a bázisban. Jó választás például az egységmátrix, a slack változók együtthatómátrixa.) Válasszunk egy $f \in \mathbb{R}^{n+m}$ negatív vektort és ehhez egy λ változót. Tipikusan a csupa -1 -ből álló vektort szokás választani.

Legyen $v_q = \min_i \{\min\{v_i, u_i\}\}$.

- (a) Ha $v_q \geq 0$, akkor álljunk meg, a komplementáris bázisunk megengedett.
- (b) Ha $v_q < 0$, akkor f lépjen be a bázisba, v_q pedig hagyja el azt. Ekkor a kapott bázis majdnem komplementáris és megengedett.

k. lépés: Adott egy majdnem komplementáris megengedett bázis.

- (a) Jelölje v_q azt a változót, ami éppen elhagyta a bázist, ekkor a párja, u_q fog a bázisba belépni.
- (b) A kilépő változót a szimplex-módszer szokásos hányadosesztjével választjuk ki, vagyis $\frac{t_{sq}}{t_{s0}} = \min_i \left\{ \frac{t_{iq}}{t_{i0}} \right\}$, ahol $t_{i,0}$ a bázistábla megoldásvektorának elemeit jelöli.
- (c1) Ha nincs ilyen s , akkor álljunk meg: az LCP nem konzisztens, vagy a primál, vagy a duál feladat nem megoldható.
- (c2) Ha van ilyen s indexünk, akkor végezzük el az adott báziscserét. Az új bázis megengedett és majdnem komplementáris.
- (d1) Ha λ értéke nulla, akkor álljunk meg. Ekkor az LCP komplementáris megengedett megoldását, ezáltal a KKO optimális megoldását értük el.
- (d2) Ha $\lambda > 0$, akkor legyen $k := k + 1$ és folytassuk a következő lépést.

Megjegyzések:

- Igazolható, hogy λ értéke monoton csökken.
- Ha minden bázis nem-degenerált (azaz minden bázisváltozó pozitív), akkor a Lemke-módszer véges számú lépés után megoldja a KKO feladatot.
- Ha a degenerált esetben lexikografikus választási kritériumot vagy a legkisebb indexszabályt alkalmazzuk, akkor a Lemke-módszer véges lesz.

1.6. Az LCP általánosítása nagyobb mátrixosztályokra

Tekintsük a következő LCP-t:

$$\begin{aligned} -Mu + v &= d \\ u, v &\geq 0 \\ u^T v &= 0. \end{aligned}$$

Láttuk, hogy az LCP megoldható, ha az M mátrixot egy primál-duál LO vagy KKO feladatpárból kaptuk: ekkor rendre ferdén szimmetrikus, illetve biszimmetrikus komplementaritási feladatot kaptunk. Azonban vannak nagyobb mátrixosztályok is, amelyek lehetővé teszik az LCP megoldását tetszőleges jobboldali d vektor esetén. A következőkben néhány további mátrixosztályt fogunk definiálni és tárgyalni.

1.6.1. A \mathbf{P} -mátrixok osztálya

1.18. Definíció. Egy M mátrixot \mathbf{P} -mátrixnak nevezünk, ha főminorjai pozitívak (pozitív a determinánsuk).

Nyilvánvaló, hogy ha M egy \mathbf{P} -mátrix, akkor minden főminorja is az. Világos az is, hogy egy szimmetrikus \mathbf{P} -mátrix pozitív definit (PD), de ennek fordítottja nem igaz.

1.19. Példa. A $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egy \mathbf{P} -mátrix, de nem pozitív definit, mivel $x = (1, 1)$ esetén $x^T M x = -1 < 0$.

1.18. Feladat. Specializáljuk a legkisebb index criss-cross módszert a \mathbf{P} -mátrixú LCP esetére.

1.6.2. *Az elégséges mátrixok osztálya

Mielőtt a definíciókra térnénk emlékeztetünk rá, hogy ha x és y azonos dimenziós vektorok, akkor $x \cdot y$ jelöli a két vektor koordinátánkénti szorzatát, azaz $(x \cdot y)_i = x_i y_i$. Továbbá ha x vektor, akkor X jelöli azt a diagonális mátrixot, amelynek főátlója az x vektor.

1.20. Definíció. Egy M mátrix

sor-elégséges, ha minden x vektorra $x \cdot M^T x \leq 0$ esetén $x \cdot M^T x = 0$ (vagyis ha minden i -re $x_i (M^T x)_i \leq 0$, akkor minden i -re $x_i (M^T x)_i = 0$),

oszlop-elégséges, ha minden x vektorra $x \cdot M x \leq 0$ esetén $x \cdot M x = 0$, és

elégséges, ha mind sor-, mind oszlop-elégséges.

Ezeket a fogalmakat Cottle és társai [8, 7] vezették be a mátrixok előjel-(nem)reverzibilitási tulajdonságát formalizálva. Figyeljük meg, hogy oszlop-elégséges mátrix esetén az x és Mx vektoroknak nem lehet minden egyes koordinátára ellenkező előjelük.

1.19. Feladat. Tekintsük a következő három mátrixot:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az M_1 mátrix oszlop-elégséges, de nem sor-elégséges, az M_2 mátrix sor-elégséges, de nem oszlop-elégséges, végül pedig, hogy az M_3 mátrix elégséges.

1.20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az M mátrix PSD, akkor elégséges.

A \mathbf{P} -mátrixok és a pozitív szemidefinit mátrixok elégségesek, de vannak olyan elégséges mátrixok, amelyek nem \mathbf{P} - és nem is pozitív szemidefinit mátrixok.

1.21. Feladat. Igazoljuk, hogy a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix elégséges, de nem \mathbf{P} - és nem is PSD mátrix.

A következő néhány tulajdonságra szükségünk lesz, amikor a legkisebb index criss-cross módszert elégséges mátrixú LCP-re akarjuk általánosítani.

1.21. Definíció. Legyen P egy $n \times n$ -es permutációmátrix. Az \bar{M} mátrix principális átrendezése az M mátrixnak, ha $\bar{M} = PMP$.

1.22. Állítás. Egy (oszlop-, sor-) elégséges mátrix minden principális átrendezése (oszlop-, sor-) elégséges.

***Bizonyítás:** Legyen P egy permutációmátrix. A $z = Px$ és $\bar{M} = PMP$ jelölést használva

$$z_i[\bar{M}z]_i = (Px)_i[PMPPx]_i = (Px)_i[P(Mx)]_i = [P(XMx)]_i \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

ami alapján $P(XMx)$ és $Z\bar{M}z$ előjelvektorai megegyeznek. Ebből következik, hogy M akkor és csak akkor oszlop-elégséges, ha \bar{M} oszlop-elégséges. A sor-elégségességre vonatkozó bizonyítás ezzel analóg. \square

1.23. Állítás. Legyen D egy nemszinguláris diagonális mátrix. Az M mátrix akkor és csak akkor (sor-, oszlop-) elégséges, ha a DMD mátrix (sor-, oszlop-) elégséges.

***Bizonyítás:** A $z = D^{-1}x$ és $\bar{M} = DMD$ jelölést használva

$$Z\bar{M}z = (D^{-1}X)DMDD^{-1}x = XMx,$$

ami alapján M akkor és csak akkor oszlop-elégséges, ha \bar{M} oszlop-elégséges. A sor-elégségességre vonatkozó bizonyítás ezzel analóg. \square

A fenti bizonyításokhoz hasonlóan a következő két állítás bizonyítása is elemi, így azokat feladatként hagyjuk meg.

1.24. Állítás. Egy (sor-, oszlop-) elégséges mátrix minden főminorja (sor-, oszlop-) elégséges.

1.25. Állítás. Mind az oszlop-, mind a sor-elégséges mátrixoknak vannak nemnegatív diagonális elemei.

1.26. Állítás. Nulla diagonális elem esetén a következőket mondhatjuk:

- Legyen M oszlop-elégséges mátrix és tegyük fel, hogy $m_{ii} = 0$ valamely i -re. Ha van olyan j , hogy $m_{ji} \neq 0$, akkor $m_{ij} \neq 0$, és $m_{ij}m_{ji} < 0$.
- Legyen M sor-elégséges mátrix és tegyük fel, hogy $m_{ii} = 0$ valamely i -re. Ha van olyan j , hogy $m_{ji} \neq 0$, akkor $m_{ij} \neq 0$, és ekkor $m_{ij}m_{ji} < 0$.
- Legyen M elégséges mátrix és tegyük fel, hogy $m_{ii} = 0$ valamely i -re. Akkor és csak akkor van olyan j , amelyre $m_{ij} \neq 0$, ha $m_{ji} \neq 0$, és ekkor $m_{ij}m_{ji} < 0$.

***Bizonyítás:** Csak az első állítást látjuk be, a másik két állítás bizonyítása hasonlóan történik. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és vegyük az $x = e_i + \alpha e_j$ vektort, ahol e_i, e_j az i -edik és j -edik egységvektort jelölik. Ekkor

$$[XMx]_k = [(E_i + \alpha E_j)M(e_i + \alpha e_j)]_k = [(E_i + \alpha E_j)(m_i + \alpha m_j)]_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq i, j, \\ \alpha m_{ij} & \text{ha } k = i, \\ \alpha m_{ji} + \alpha^2 m_{jj} & \text{ha } k = j, \end{cases}$$

ahol az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy $m_{ii} = 0$.

Ha $m_{jj} = 0$, akkor az $\alpha = -m_{ji}$ választással $m_{ij}m_{ji} \geq 0$ és $m_{ij} \neq 0$, amiből $XMx \leq 0$, $XMx \neq 0$, ez pedig ellentmond az M mátrix elégségeségének.

Ha $m_{jj} > 0$, akkor az $\alpha = -\text{sgn}(m_{ji}) \frac{|m_{ji}|}{m_{jj}}$ választással $m_{ij}m_{ji} \geq 0$ és $m_{ji} \neq 0$, amiből $XMx \leq 0$, $XMx \neq 0$, ami ismét ellentmond M mátrix elégségeségének. \square

Legyen egy m_{ii} diagonális elem valamely i -re nulla, ekkor az 1.26 állítás alapján a következőket mondhatjuk (sor-, oszlop-) elégséges mátrixokról:

- *Sor-elégséges mátrixokra:* Ha $m_{ji} \geq 0$ minden j -re, akkor $m_{ij} \leq 0$ minden j -re. Ha $m_{ji} \leq 0$ minden j -re, akkor $m_{ij} \geq 0$ minden j -re.
- *Oszlop-elégséges mátrixokra:* Ha $m_{ij} \geq 0$ minden j -re, akkor $m_{ji} \leq 0$ minden j -re. Ha $m_{ij} \leq 0$ minden j -re, akkor $m_{ji} \geq 0$ minden j -re.
- *Elégséges mátrixokra:* $m_{ij} \leq 0$ minden j -re akkor és csak akkor, ha $m_{ji} \geq 0$ minden j -re. Továbbá $m_{ij} \geq 0$ minden j -re akkor és csak akkor, ha $m_{ji} \leq 0$ minden j -re.

1.27. Állítás. Egy (sor-, oszlop-) elégséges mátrix bármelyik principális pivotja (sor-, oszlop-) elégséges.

***Bizonyítás:** Először belátjuk, hogy oszlop-elégséges mátrixokra fennáll az állítás. Legyen $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ és tegyük fel, hogy az M_{JJ} főminor nonszinguláris. Az M principális pivotjának oszlop-elégségeségét akarjuk belátni. Az 1.22 állítás alapján az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy M_{JJ} az M bal-felső blokkja, vagyis

$$M = \begin{pmatrix} M_{JJ} & M_{J\bar{J}} \\ M_{\bar{J}J} & M_{\bar{J}\bar{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix},$$

ahol az M_1, \dots, M_4 jelöléseket az egyszerűség kedvéért vezettük be. Ekkor M -nek az $M_1 = M_{JJ}$ -re vonatkozó principális pivotja:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}M_2 \\ -M_3M_1^{-1} & M_4 - M_3M_1^{-1}M_2 \end{pmatrix}.$$

Indirekt tegyük fel, hogy \hat{M} nem oszlop-elégséges, azaz van olyan $z \in \mathbb{R}^n$ egy vektor, amely mutatja \hat{M} nem-oszlop-elégségeségét. Particionáljuk z -t z^1 -re és z^2 -re \hat{M} blokkjainak megfelelően. Mindezek miatt a

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \hat{M}z = \begin{pmatrix} M_1^{-1}z^1 + M_1^{-1}M_2z^2 \\ -M_3M_1^{-1}z^1 + M_4z^2 - M_3M_1^{-1}M_2z^2 \end{pmatrix}$$

vektorra teljesülni fog a

$$0 \geq \begin{pmatrix} W^1 z^1 \\ W^2 z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-Z^1)(-w^1) \\ W^2 z^2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.19)$$

ahonnan az $x = \begin{pmatrix} -w^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ választással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Mx &= \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_1^{-1}M_2 \\ -M_3M_1^{-1} & M_4 - M_3M_1^{-1}M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_1^{-1}z^1 - M_1^{-1}M_2z^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -z^1 - M_2z^2 + M_2z^2 \\ -M_3M_1^{-1}z^1 - M_3M_1^{-1}M_2z^2 + M_4z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^1 \\ w^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ekkor (1.19) felhasználásával

$$XMx = \begin{pmatrix} (-W^1)(-z^1) \\ Z^2w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^1z^1 \\ W^2z^2 \end{pmatrix} \leq 0,$$

és nem nulla. Ez ellentmond az M mátrix oszlop-elégségességének, vagyis az első állítást beláttuk. A többi rész bizonyítása analóg módon történik. \square

Az 1.27 állítás egy fontos speciális esete a következő:

1.28. Következmény. *Ha egy nonszinguláris M mátrix (oszlop-, sor-) elégséges, akkor az inverze is (oszlop-, sor-) elégséges.*

***Bizonyítás:** Vegyük észre, hogy ha M nonszinguláris, akkor M^{-1} az M principális pivotja. \square

A fenti eredmények már lehetővé teszik, hogy karakterizáljuk a 2×2 -es elégséges mátrixokat:

1.29. Állítás. *Egy 2×2 -es M mátrix akkor és csak akkor elégséges, ha minden \hat{M} principális pivotra*

$$1. \hat{m}_{ii} \geq 0 \text{ és}$$

$$2. \text{ ha } \hat{m}_{ii} = 0, \text{ akkor vagy } \hat{m}_{ij} = \hat{m}_{ji} = 0 \text{ vagy } \hat{m}_{ij}\hat{m}_{ji} < 0, \text{ ahol } j \neq i.$$

***Bizonyítás:** Ha M elégséges, akkor az 1.27 állítás alapján minden principális pivotja is elégséges, így az 1.26 állításból következnek a fenti előjeltulajdonságok.

A másik irány belátásához több esetet kell elkülönítenünk. Az állítás nyilvánvaló, ha M a nullmátrix. Ha M rangja egy, akkor egyik principális pivotja tartalmaz nulla diagonális elemet. Az általánosság megsértése nélkül tegyük fel, hogy a pivot maga az M mátrix, és $m_{11} = 0$. Ekkor

$$XMx = \begin{pmatrix} x_1x_2m_{12} \\ x_1x_2m_{21} + x_2^2m_{22} \end{pmatrix}.$$

Ha $x_1x_2m_{12} \leq 0$, akkor az előjeltulajdonságok alapján $x_1x_2m_{21} \geq 0$, $x_2^2m_{22} \geq 0$ és $x_1x_2m_{21} + x_2^2m_{22} \geq 0$, azaz $XMx \leq 0$ -ból következik, hogy $XMx = 0$, vagyis M oszlop-elégséges.

Ha M nem-szinguláris, akkor a diagonális elemek pozitívak, és – bármelyik diagonális elemre vonatkozó báziscseréből következően – az M mátrix $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$ determinánsa pozitív. Mivel M minden főminorja pozitív, ezért az M mátrix pozitív definit. Ekkor az 1.20 feladat alapján M elégséges. \square

A fejezet lezárásaként az elégséges mátrixok következő jellemzését adjuk:

1.30. Állítás. *Az M mátrix akkor és csak akkor elégséges, ha minden principális pivotja másodfokon elégséges (azaz minden 2×2 -es főminorja elégséges).*

Az 1.30 állítás bizonyítását mellőzzük, mert meglehetősen hosszadalmas. Az érdeklődők Cottle és Guu [6] cikkében nézhetnek utána.

A fenti eredményeket használva a legkisebb index criss-cross módszer könnyen általánosítható az elégséges LCP megoldására [10].

1.22. Feladat. Általánosítsuk a legkisebb index criss-cross módszert az elégséges LCP megoldására, és bizonyítsuk be a végességét.

2. fejezet

A konvex optimalizálás alapjai

A könyv ezen részében először a 2.1 fejezetben áttekintjük a konvex analízis legfontosabb eredményeit, majd a 2.2 fejezetben tárgyaljuk a feltétel nélküli és az egyszerűbb feltételes optimalizálási feladatok optimalitási feltételeit. A 2.3 fejezetben a feltétel nélküli nemlineáris optimalizálás néhány alapvető algoritmusát vizsgáljuk meg. Részletesen tárgyalni fogunk egy algoritmust és annak főbb összetevőit is.

A 2.4 fejezetben az általános konvex optimalizálási feladatok optimalitási feltételeit tekintjük át. Bemutatjuk a Karush–Kuhn–Tucker feltételeket, és szó lesz a dualitáselméletről is. Végül a 2.6 fejezet tartalmaz néhány egyszerű algoritmust a feltételes nemlineáris optimalizálásra: röviden tárgyalunk néhány gradiens alapú módszert, valamint áttekintjük a belsőpontos módszerek fő vázát.

Elsősorban a konvex optimalizálás elméletével foglalkozunk. A számítógépes nemlineáris optimalizálás irodalmának áttekintése meghaladja e könyv kereteit, az érdeklődő olvasóknak a [2, 4, 12, 13, 16, 30, 29] munkákat ajánljuk. Nemkonvex függvény globális minimumának megtalálása (globális optimalizálás, [18, 39]) sokkal bonyolultabb feladat, mindazonáltal az itt bemutatott eljárások segítségével ezen feladatok lokális minimumát is meghatározhatjuk.

2.1. A konvex analízis alapjai

A konvex halmaz, a konvex függvény és az epigráf fogalmának definíciója a 0.1.1 fejezetben található. Szükségünk lesz még a szigorúan konvex függvény fogalmára.

2.1. Definíció. Egy \mathcal{C} konvex halmazon definiált $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ (konvex) függvényt szigorúan konvexnek nevezünk, ha minden $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ és $0 < \lambda < 1$ esetén igaz, hogy

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2).$$

Láttuk a 0.3 feladat során, hogy egy függvény akkor és csak akkor konvex, ha epigráfja konvex. Megmutattuk továbbá, hogy egy kvadratikus függvény akkor és csak akkor konvex, ha a benne szereplő Q mátrix pozitív szemidefinit.

Most áttekintjük a konvex halmazok és a konvex függvények alapvető tulajdonságait, amelyek szükségesek a konvex optimalizálási feladatok megértéséhez és vizsgálatához. Először a konvex halmazok alapvető tulajdonságait tekintjük át.

2.1.1. Konvex halmazok

Minden $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ halmazhoz definiálhatunk egy konvex halmazt, az \mathcal{S} konvex burkát a következő módon:

2.2. Definíció. Legyen $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. A

$$\text{conv}(\mathcal{S}) := \left\{ x : x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, x^i \in \mathcal{S}, i = 1, \dots, k; \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \geq 1 \right\}$$

halmazt az \mathcal{S} halmaz konvex burkának hívjuk.

Figyeljük meg, hogy $\text{conv}(\mathcal{S})$ az \mathcal{S} minden pontjából képzett összes lehetséges konvex kombinációt tartalmazza.

A konvex halmazok extrémális halmazainak szerkezete fontos szerepet játszik a konvex analízisben.

2.3. Definíció. Az $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ halmaz a \mathcal{C} konvex halmaz extrémális halmaza, ha minden $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ és $0 < \lambda < 1$ esetén az $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ vektor akkor és csak akkor van benne \mathcal{E} -ben, ha $x^1, x^2 \in \mathcal{E}$.

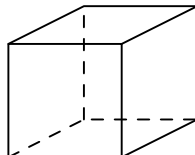
Az extrémális halmaz tehát olyan részhalmaz, amely pontosan akkor tartalmaz egy adott pontot, ha minden olyan szakaszt is tartalmaz, amelynek a pont belső pontja.

Az egy pontból álló extrémális halmazt *extrémális pontnak* hívjuk. Megfigyelhető, hogy az extrémális halmazok konvexek, és maga a konvex \mathcal{C} halmaz is mindig extrémális halmaza önmagának. A következő lemmákat egyszerű igazolni:

2.4. Lemma. Ha $\mathcal{E}^1 \subseteq \mathcal{C}$ a \mathcal{C} konvex halmaz extrémális halmaza és $\mathcal{E}^2 \subseteq \mathcal{E}^1$ a \mathcal{E}^1 halmaz extrémális halmaza, akkor \mathcal{E}^2 extrémális halmaza \mathcal{C} -nek.

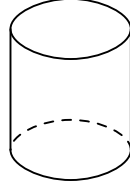
***Bizonyítás:** Legyen $x, y \in \mathcal{C}$, $0 < \lambda < 1$ és $z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{E}^2$. Mivel $\mathcal{E}^2 \subseteq \mathcal{E}^1$, ezért $z_\lambda \in \mathcal{E}^1$, sőt $x, y \in \mathcal{E}^1$, mivel \mathcal{E}^1 extrémális halmaza \mathcal{C} -nek. Végül, mivel \mathcal{E}^2 extrémális halmaza \mathcal{E}^1 -nek, $x, y \in \mathcal{E}^1$ és $z_\lambda \in \mathcal{E}^2$, így $x, y \in \mathcal{E}^2$ vagyis \mathcal{E}^2 extrémális halmaza \mathcal{C} -nek. \square

2.5. Példa. Legyen \mathcal{C} az $\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1\}$ kocka. Ekkor a csúcspontok extrémális pontok, az élek egydimenziós extrémális halmazok, a lapok 2-dimenziós extrémális halmazok, és a teljes kocka 3-dimenziós extrémális halmaza önmagának.

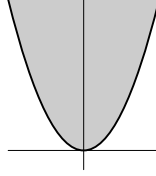


2.6. Példa. Legyen \mathcal{C} a $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$ henger. Ekkor

- a fedőlapokat határoló körvonalak pontjai: $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ és $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ extrémális pontok,
- az alkotók: az $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = a, x_2 = b, 0 \leq x_3 \leq 1\}$ egyenesek, amennyiben $a \in [-1, 1]$ és $b = \sqrt{1 - a^2}$ vagy $b = -\sqrt{1 - a^2}$, egydimenziós extrémális halmazok,
- a fedőlapok: $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 1\}$ és $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ 2-dimenziós extrémális halmazok, és
- a henger maga az egyetlen 3-dimenziós extrémális halmaz.



2.7. Példa. Legyen $f(x) = x^2$ és \mathcal{C} az f epigráfja. Ekkor minden (x_1, x_2) pont, amelyre $x_2 = x_1^2$, extrémális pont. Az epigráf maga az egyetlen 2-dimenziós extrémális halmaz.



Idézzük fel lineáris algebrából, hogy ha \mathcal{L} egy (lineáris) altere \mathbb{R}^n -nek és $a \in \mathbb{R}^n$, akkor $a + \mathcal{L}$ az \mathbb{R}^n affin altere. Definíció szerint, $a + \mathcal{L}$ dimenziója megegyezik \mathcal{L} dimenziójával.

2.8. Definíció. Azt a legszűkebb $a + \mathcal{L}$ affin teret, amely tartalmazza $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazt, \mathcal{C} affin burkának hívjuk és $\text{aff } \mathcal{C}$ -vel jelöljük. A \mathcal{C} halmaz dimenziója alatt $\text{aff } \mathcal{C}$ dimenzióját értjük.

2.9. Definíció. Legyen $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ adott. Ekkor az

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$$

pont az x^1, x^2 pontok affin kombinációja.

Mivel itt nem kötöttük ki, hogy $0 \leq \lambda \leq 1$, ezért az affin kombináció általánosabb fogalom, mint a konvex kombináció.

2.1. Feladat. Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ a következőképp definiálva:

$$\mathcal{C} = \left\{ x : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

A \mathcal{C} halmazt általában \mathbb{R}^n -beli sztetend szimplexnek hívjuk.

- i. Adjuk meg \mathcal{C} extrémális pontjait.
- ii. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C} = \text{conv} \{e_1, \dots, e_n\}$, ahol e_i az i -edik egységvektor.
- iii. Ebben az esetben mi az $\text{aff } \mathcal{C}$?

2.2. Feladat. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ egy adott konvex halmaz és $k \geq 2$ egy adott egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{aff } \mathcal{C} = \left\{ z : z = \sum_{i=1}^k \lambda^i x^i, \sum_{i=1}^k \lambda^i = 1, \lambda^i \in \mathbb{R}, x^i \in \mathcal{C}, \forall i \right\}.$$

2.3. Feladat. Legyen \mathcal{E} a \mathcal{C} konvex halmaz extrémális halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{E} = (\text{aff } \mathcal{E}) \cap \mathcal{C}$.

2.10. Lemma. Legyen $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^1 \subseteq \mathcal{C}$ a \mathcal{C} konvex halmaz két extrémális halmaza. Ekkor $\dim \mathcal{E}^2 < \dim \mathcal{E}^1$.

***Bizonyítás:** Mivel $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^1$, ezért $\text{aff } \mathcal{E}^2 \subseteq \text{aff } \mathcal{E}^1$. Továbbá a 2.2 feladat szerint

$$\mathcal{E}^2 = (\text{aff } \mathcal{E}^2) \cap \mathcal{E}^1.$$

Indirekt tegyük fel, hogy $\dim \mathcal{E}^2 = \dim \mathcal{E}^1$. Ekkor $\text{aff } \mathcal{E}^2 = \text{aff } \mathcal{E}^1$ és

$$\mathcal{E}^2 = (\text{aff } \mathcal{E}^2) \cap \mathcal{E}^1 = (\text{aff } \mathcal{E}^1) \cap \mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^1,$$

ami ellentmond az $\mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^1$ feltevésnek. □

2.11. Lemma. Legyen \mathcal{C} egy nemüres kompakt (zárt és korlátos) konvex halmaz. Ekkor \mathcal{C} -nek van legalább egy extrémális pontja.

***Bizonyítás:** Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ a \mathcal{C} azon pontjainak halmaza, amelyek legmesszebb vannak az origótól. Egy ilyen halmaz nemüres, hiszen \mathcal{C} korlátos és zárt, és a norma-függvény folytonos. Azt állítjuk, hogy bármely $z \in \mathcal{F}$ pont \mathcal{C} extrémális pontja.

Indirekt tegyük fel, hogy $z \in \mathcal{F}$ nem extrémális pont. Ekkor léteznek $x, y \in \mathcal{C}$ pontok, amelyek különböznek z -től és $\lambda \in (0, 1)$ amelyekre teljesül, hogy:

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

Továbbá, $\|x\| \leq \|z\|$ és $\|y\| \leq \|z\|$, mivel z maximalizálja a pontok normáját a \mathcal{C} halmaz felett. Így a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\|z\| \leq \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| \leq \|z\|,$$

amiből következik, hogy $\|z\| = \|x\| = \|y\|$, azaz x, y, z pontok mind egy origó középpontú $\|z\|$ sugarú n -dimenziós gömb felszínén vannak. Ez ellentmondás, mivel ez a három különböző pont egy egyenesen van. Ezzel a lemmát beláttuk. □

Figyeljük meg, hogy a fenti bizonyításban nem használtuk ki, hogy kiindulópontnak az origót választottuk. Belátható, hogy bármely $u \in \mathbb{R}^n$ pontot választjuk, az u -tól legtávolabbi $z \in \mathcal{C}$ pont \mathcal{C} -nek extrémális pontja.

A következő tétel nehéz, nem triviális eredmény.

2.12. Tétel (Krein–Milman-tétel). *Legyen \mathcal{C} egy kompakt konvex halmaz. Ekkor \mathcal{C} saját extrémális pontjainak konvex burka.*

***Bizonyítás:** Minden $p \in \mathcal{C}$ -hez legyen $\mathcal{U}(p)$ az olyan $v \in \mathbb{R}^n$ vektorok halmaza, amelyekre $p + v \in \mathcal{C}$ és $p - v \in \mathcal{C}$. Továbbá legyen $\mathcal{V}(p) = \text{cone}\mathcal{U}$, az $\mathcal{U}(p)$ által generált kúp¹. Könnyen belátható, hogy $\mathcal{V}(p)$ az \mathbb{R}^n lineáris altere (lásd a 2.5 feladatot). Jelölje $d(p)$ a $\mathcal{V}(p)$ altér dimenzióját. Ez a dimenzió akkor és csak akkor 0, ha p extrémális pontja \mathcal{C} -nek (lásd a 2.6 feladatot).

Tegyük fel, hogy p nem extrémális pontja \mathcal{C} -nek. Megmutatjuk, hogy ekkor p előáll \mathcal{C} néhány extrémális pontjának lineáris kombinációjaként. Mivel p nem extrémális pont, ezért $\mathcal{U}(p)$ tartalmaz 0-tól különböző vektort. Legyen $0 \neq v \in \mathcal{U}(p)$ és legyen $\ell(p, v)$ a p ponton v irányban keresztülmenő egyenes. A \mathcal{C} kompakt halmaz és az $\ell(p, v)$ egyenes metszete egy zárt $[a, b]$ szakasz, amelynek p belső pontja, vagyis létezik olyan $\alpha \in (0, 1)$, hogy $p = \alpha a + (1 - \alpha)b$.

Elég belátni, hogy $d(a) < d(p)$ és $d(b) < d(p)$. Ehhez azt látjuk be, hogy $\mathcal{V}(a) \subsetneq \mathcal{V}(p)$. Legyen tetszőleges $\vartheta u \in \mathcal{V}(a)$, ha $u \in \mathcal{U}(a)$. Ekkor $a \pm u \in \mathcal{C}$ és

$$\alpha(a \pm u) + (1 - \alpha)b = \alpha a + (1 - \alpha)b \pm \alpha u = p \pm \alpha u \in \mathcal{C},$$

azaz $u \in \mathcal{U}(p)$, amiből $\alpha u \in \mathcal{V}(p)$. Még be kell látni, hogy $\mathcal{V}(a) \neq \mathcal{V}(p)$, de az triviális, mivel $v \in \mathcal{V}(p)$, de v nem lehet $\mathcal{V}(a)$ -ban, mivel a határpontja \mathcal{C} -nek az $\ell(p, v)$ egyenesen. Tehát $d(a) < d(p)$. Felcserélve a és b szerepét ugyanezt az eredményt kapjuk $d(b)$ -re.

Ha ezt megismételjük minden előállított nem extrémális határpontra, akkor véges sok lépés múlva az extrémális pontok halmazát kapjuk, és a p pont ezen extrémális pontok konvex burkában lesz. \square

2.4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $p \in \mathcal{C}$ esetén $\mathcal{U}(p)$ konvex.

2.5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{V}(p)$ az \mathbb{R}^n lineáris altere.

2.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $d(p) = 0$ akkor és csak akkor, ha p extrémális pontja \mathcal{C} -nek.

A következőkben a konvex kúpok alapvető tulajdonságait tekintjük át.

2.13. Definíció. A $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex kúp, ha konvex halmaz és minden $x \in \mathcal{C}$ és $0 \leq \lambda$ esetén $\lambda x \in \mathcal{C}$. A $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz általános konvex kúp, ha létezik olyan $\bar{x} \in \mathcal{C}$ pont, hogy minden $x \in \mathcal{C}$ és $0 \leq \lambda$ esetén $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) \in \mathcal{C}$.

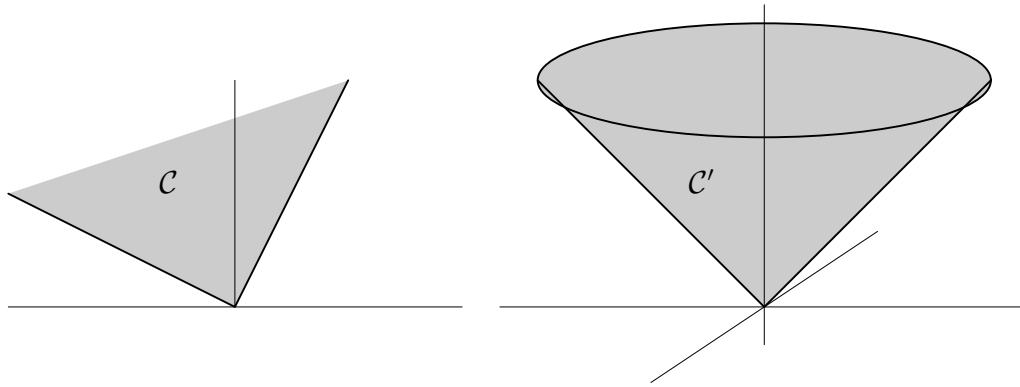
2.14. Példa. Példák konvex kúpokra (2.1 ábra):

- A $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 2x_1, x_2 \geq -\frac{1}{2}x_1\}$ halmaz \mathbb{R}^2 -beli konvex kúp.
- A $\mathcal{C}' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2\}$ halmaz \mathbb{R}^3 -beli konvex kúp.

2.15. Definíció. Egy konvex kúpot hegyes kúpnak hívunk, ha az origón kívül nem tartalmaz egyetlen alteret sem.

A hegyes zárt konvex kúp ekvivalens definíciója: konvex kúp, amely nem tartalmaz egyenest.

¹Az S halmaz által generált kúp a $\{\lambda x : x \in S, \lambda \geq 0\}$ halmaz. Más szavakkal, az S elemeinek minden nemnegatív skalárszorosa által meghatározott kúp.



2.1. ábra. Példák konvex kúpokra.

2.16. Lemma. *Egy \mathcal{C} konvex kúp akkor és csak akkor hegyes, ha az origó \mathcal{C} extrémális pontja.*

***Bizonyítás:** Ha a \mathcal{C} konvex kúp nem hegyes, akkor tartalmaz nemtriviális (egydimenziós) alteret, azaz egy origón átmenő \mathcal{L} egyenest. Legyen $0 \neq x \in \mathcal{L}$ és $-x \in \mathcal{L}$. Mivel $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in \mathcal{C}$, így 0 nem extrémális pont.

Ha a \mathcal{C} konvex kúp hegyes, akkor az origón kívül nem tartalmaz alteret. Ebben az esetben belátjuk, hogy 0 extrémális pontja \mathcal{C} -nek. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $0 \neq x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ és $\lambda \in (0, 1)$, amelyekre $0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, vagyis $x^1 = -\frac{1-\lambda}{\lambda}x^2$. Ebből következik, hogy az x^1 -en, az origón és az x^2 -n átmenő egyenes \mathcal{C} -ben van, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy \mathcal{C} hegyes. \square

2.7. Feladat. Általánosítsuk az iménti lemmát, vagyis lássuk be, hogy az általános konvex kúp akkor és csak akkor hegyes, ha van extrémális pontja.

2.17. Példa. Ha a $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$ konvex kúp nem hegyes, akkor az vagy egy origón átmenő egyenes, vagy egy féltér, vagy a teljes \mathbb{R}^2 .

2.18. Példa. Legyen V_1, V_2 két origón átmenő sík \mathbb{R}^3 -ban, amelyeket a következőképp definiálunk:

$$\begin{aligned} V_1 : &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = a_1x_1 + a_2x_2\}, \\ V_2 : &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = b_1x_1 + b_2x_2\}. \end{aligned}$$

Ekkor a

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq a_1x_1 + a_2x_2, x_3 \leq b_1x_1 + b_2x_2\}$$

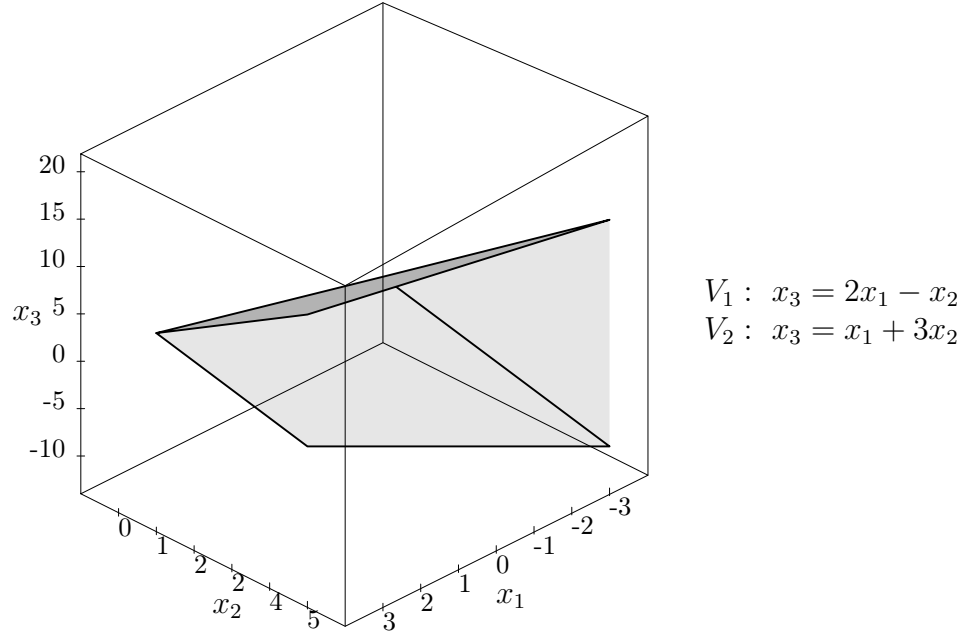
konvex halmaz nem hegyes kúp (lásd a 2.2 ábrát).

2.19. Lemma. *Tegyük fel, hogy a \mathcal{C} konvex halmaz zárt és nem korlátos. Ekkor*

i. minden $x \in \mathcal{C}$ esetén létezik olyan $z \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $x + \lambda z \in \mathcal{C}$ minden $\lambda \geq 0$ esetén, vagyis az $R(x) = \{z : x + \lambda z \in \mathcal{C}, \lambda \geq 0\}$ halmaz nemüres;

ii. az $R(x)$ halmaz zárt konvex kúp (az x -hez tartozó recessziós kúp ²);

²A recessziós kúp helyett használatos még a *karakterisztikus kúp* elnevezés is.



2.2. ábra. Példa konvex, nem hegyes kúpra.

iii. az $R(x) = \mathcal{R}$ kúp független x -től, tehát „a” konvex \mathcal{C} halmaz recessziós kúpja;

iv. az \mathcal{R} kúp akkor és csak akkor hegyes, ha \mathcal{C} -nek van legalább egy extrémális pontja.

***Bizonyítás:**

- i. Legyen $x \in \mathcal{C}$ adott. Mivel \mathcal{C} nem korlátos, ezért létezik egy olyan x^1, \dots, x^k, \dots pontsorozat, amelyre $\|x^k - x\| \rightarrow \infty$. Ekkor az

$$y^k = \frac{x^k - x}{\|x^k - x\|}$$

vektorok az egységgömb elemei. Az egységgömb zárt konvex, tehát kompakt halmaz, így az y^k sorozatnak létezik benne \bar{y} torlódási pontja. Azt állítjuk, hogy $\bar{y} \in R(x)$. Ennek belátásához vegyünk egy tetszőleges $\lambda > 0$ számot, és lássuk be, hogy $x + \lambda \bar{y} \in \mathcal{C}$. Ez a következő három megfigyelésből következik:

- (a) Mivel $\|x^k - x\| \rightarrow \infty$, így legfeljebb véges sok olyan y^k pont lehet, amelyre $\|x - x^k\| < \lambda$. Ezeket a pontokat elhagyva a sorozatból a kapott y^{k_i} sorozatnak \bar{y} még mindig torlódási pontja lesz.

- (b) \mathcal{C} konvexitása miatt az

$$x + \lambda y^{k_i} = x + \frac{\lambda}{\|x^{k_i} - x\|} (x^{k_i} - x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\|x^{k_i} - x\|}\right) x + \frac{\lambda}{\|x^{k_i} - x\|} x^{k_i}$$

pontok \mathcal{C} elemei.

- (c) Mivel \mathcal{C} zárt, a konvergens $x + \lambda y^{k_i} \in \mathcal{C}$ sorozat $x + \lambda \bar{y}$ torlódási pontja is \mathcal{C} -ben van.

Ezzel az első állítást beláttuk.

- ii. Az $R(x)$ halmaz kúp, mivel $z \in R(x)$ esetén $\mu z \in R(x)$. $R(x)$ konvexitása egyszerűen következik \mathcal{C} konvexitásából. Végül ha $z^i \in R(x)$ minden $i = 1, 2, \dots$ és $\bar{z} = \lim_{i \rightarrow \infty} z^i$ esetén, akkor minden $\lambda \geq 0$ -ra \mathcal{C} zártága és $x + \lambda z^i \in \mathcal{C}$ miatt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x + \lambda z^i) = x + \lambda \bar{z} \in \mathcal{C}.$$

Innen $\bar{z} \in R(x)$ miatt $R(x)$ zárt.

iii. Legyen $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$. Meg kell mutatnunk, hogy $z \in R(x^1)$ esetén $z \in R(x^2)$. Mivel $z \in R(x^1)$, ezért $x^1 + (\lambda + \alpha)z \in \mathcal{C}$ minden $\alpha, \lambda \geq 0$ esetén. \mathcal{C} konvexitását felhasználva az

$$x_\lambda^2 = x^2 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} (x^1 - x^2 + (\lambda + \alpha)z) = x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right) + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} (x^1 + (\lambda + \alpha)z)$$

pont \mathcal{C} -ben van. Továbbá a határérték

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_\lambda^2 = x^2 + \alpha z,$$

\mathcal{C} zártsága miatt szintén \mathcal{C} -ben van. Mivel ez minden $\alpha > 0$ -ra teljesül, így beláttuk, hogy $z \in \mathcal{R}(x^2)$.

iv. A bizonyítás ezen részét meghagyjuk feladatnak.

□

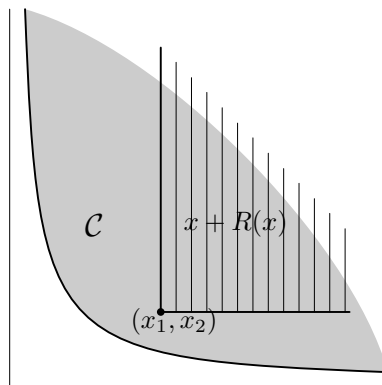
2.20. Következmény. *Egy nemüres, zárt, konvex halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha recessziós kúpja csak a nullvektorból áll.*

***Bizonyítás:** Ha \mathcal{C} korlátos, akkor nem tartalmaz félegyenest, így minden $x \in \mathcal{C}$ esetén $R(x) = \{0\}$, tehát $\mathcal{R} = \{0\}$. A bizonyítás második része a 2.19 lemma i. részéből következik. □

2.21. Példa. Legyen \mathcal{C} az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény epigráfja. Ekkor az $x_2 = \frac{1}{x_1}$ görbe minden pontja \mathcal{C} extrémális pontja. Tetszőleges $x = (x_1, x_2)$ pontra a recessziós kúp a következő (lásd a 2.3 ábrát):

$$R(x) = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1, z_2 \geq 0\}.$$

Így $\mathcal{R} = R(x)$ valóban független x megválasztásától.



2.3. ábra. Példa recessziós kúpra.

2.22. Lemma. *Ha a \mathcal{C} konvex halmaz zárt és van extrémális pontja, akkor \mathcal{C} minden extrémális halmazának van legalább egy extrémális pontja.*

***Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ olyan extrémális halmaza \mathcal{C} -nek, amelynek nincs extrémális pontja. Ekkor a 2.19 lemma iv. része szerint \mathcal{E} recessziós kúpja nem hegyes, tehát tartalmaz egyenest. Ugyanezen lemma iii. része szerint ezt az egyenest \mathcal{C} recessziós kúpja is tartalmazza. A lemma iv. része alapján tehát arra következtetünk, hogy \mathcal{C} -nek nem lehet extrémális pontja. Mivel ez ellentmondás, az állítást beláttuk. \square

2.23. Lemma. *Legyen \mathcal{C} konvex halmaz és \mathcal{R} a recessziós kúpja. Ha \mathcal{E} extrémális halmaza \mathcal{C} -nek, akkor az $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ recessziós kúp extrémális halmaza \mathcal{R} -nek.*

***Bizonyítás:** Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{R}$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ nem extrémális halmaza \mathcal{R} -nek, ekkor létezik olyan $z^1, z^2 \in \mathcal{R}$, $z^1 \notin \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ és $\lambda \in (0, 1)$, hogy $z = \lambda z^1 + (1 - \lambda)z^2 \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Végül, bizonyos $\alpha > 0$ és $x \in \mathcal{E}$ esetén

$$x^1 = x + \alpha z^1 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{E}, \quad x^2 = x + \alpha z^2 \in \mathcal{C}$$

és

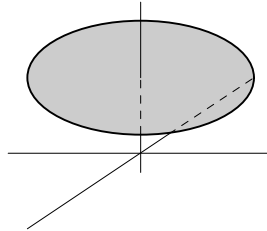
$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 = x + \alpha z \in \mathcal{E},$$

ami ellentmond annak, hogy \mathcal{E} extrémális halmaz. \square

2.24. Definíció. *Adott egy \mathcal{C} konvex halmaz. Az $x \in \mathcal{C}$ pont \mathcal{C} relatív belsejében van, ha minden $\bar{x} \in \mathcal{C}$ esetén létezik $\tilde{x} \in \mathcal{C}$ és $0 < \lambda < 1$, amelyre $x = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)\tilde{x}$. A \mathcal{C} halmaz relatív belsejének jelölése \mathcal{C}^0 vagy $\text{rint } \mathcal{C}$.*

A \mathcal{C} konvex halmaz relatív belseje, \mathcal{C}^0 , nyilván a konvex halmaz részhalmaza. Meg fogjuk mutatni, hogy \mathcal{C}^0 konvex, relatív nyílt halmaz (azaz megegyezik saját relatív belsejével).

2.25. Példa. Legyen $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 1\}$ és $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, akkor $\mathcal{C} \subset \text{aff}(\mathcal{C}) = (0, 0, 1) + \mathcal{L}$. Innen $\dim \mathcal{C} = 2$ és $\mathcal{C}^0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 1\}$.



2.26. Lemma. *Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. Ekkor minden $x \in \mathcal{C}^0$, $y \in \bar{\mathcal{C}}$ és $\lambda \in (0, 1]$ esetén*

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{C}^0 \subseteq \mathcal{C},$$

vagyis egy konvex halmaz relatív belső pontját és a halmaz lezárásának egy pontját összekötő szakasz – a határpont kivételével – része a halmaz relatív belsejének.

***Bizonyítás:** Használjuk a 2.4 ábra jelöléseit. Legyen $u \in \mathcal{C}$ tetszőleges pont. Meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan $\bar{u} \in \mathcal{C}$ és $0 < \rho < 1$, amelyekre $z = \rho \bar{u} + (1 - \rho)u$.

Mivel $x \in \mathcal{C}^0$, így a 2.24 definíció értelmében létezik olyan $0 < \alpha < 1$, amelyre teljesül, hogy a

$$v = \frac{1}{\alpha}x + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)u$$

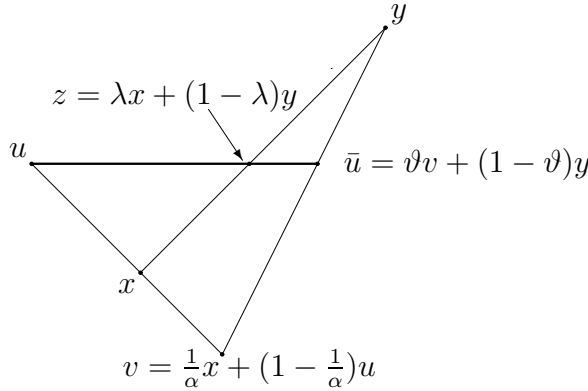
pont \mathcal{C} -ben van. Legyen

$$\bar{u} = \vartheta v + (1 - \vartheta)y, \quad \text{ahol} \quad \vartheta = \frac{\lambda\alpha}{\lambda\alpha + 1 - \lambda},$$

így \mathcal{C} konvexitása miatt $\bar{u} \in \mathcal{C}$. Végül definiáljuk a $\rho = \lambda\alpha + 1 - \lambda$ skalárt. Ekkor könnyen igazolható, hogy $0 < \rho < 1$ és

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y = \rho \bar{u} + (1 - \rho)u.$$

□



2.4. ábra. Ha $x \in \mathcal{C}^0$ és $y \in \overline{\mathcal{C}}$, akkor a z pont \mathcal{C}^0 eleme.

2.27. Következmény. *Konvex halmaz relatív belseje konvex.*

2.28. Lemma. *Legyen \mathcal{C} konvex halmaz. Ekkor $(\mathcal{C}^0)^0 = \mathcal{C}^0$. Sőt, ha \mathcal{C} nemüres, akkor a relatív belseje is nemüres, kivéve, ha \mathcal{C} csak egy pontból áll.*

***Bizonyítás:** Az állítás bizonyítása technikai jellegű. A bizonyítás megtalálható pl. Rockafellar [42] valamint Stoer és Witzgall [46] könyveiben. □

2.29. Lemma. *Legyen \mathcal{C} zárt konvex halmaz. Ekkor \mathcal{C} minden extrémális halmaza zárt.*

***Bizonyítás:** Legyen a \mathcal{C} halmaz egy nemüres extrémális halmaza \mathcal{E} , amely az extrémális halmazok definíciója szerint konvex. Legyen x határpontja \mathcal{E} -nek, ekkor azt akarjuk belátni, hogy $x \in \mathcal{E}$. A \mathcal{C} halmaz zártasága miatt $x \in \mathcal{C}$, továbbá, mivel \mathcal{E} nemüres, létezik egy $y \in \mathcal{E}^0$ pont. Legyen $0 < \lambda < 1$ és tekintsük a

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

pontot. Mivel \mathcal{C} konvex és $x, y \in \mathcal{C}$, ezért $z \in \mathcal{C}$. Mivel \mathcal{E} konvex és x határpontja \mathcal{E} -nek, ezért a 2.26 lemma miatt $z \in \mathcal{E}^0$. Így a 2.3 definíció alapján $x \in \mathcal{E}$. □

2.1.2. Konvex függvények

A konvex halmazok után most a konvex függvényekkel fogunk foglalkozni.

2.30. Lemma. *Legyen az f konvex függvény a \mathcal{C} konvex halmazon definiálva. Ekkor f folytonos \mathcal{C} relatív belseje, \mathcal{C}^0 felett.*

***Bizonyítás:** Legyen $p \in \mathcal{C}^0$ tetszőleges pont. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy \mathcal{C} teljes dimenziójú, p az origó és $f(p) = 0$. Először tekintsük az egydimenziós esetet. Mivel az origó benne van f értelmezési tartományának, \mathcal{C} -nek a relatív belsejében, ezért létezik olyan $v > 0$, amelyre $v \in \mathcal{C}$ és $-v \in \mathcal{C}$. Tekintsük a következő két lineáris függvényt:

$$\ell_1(x) := x \frac{f(v)}{v} \quad \text{és} \quad \ell_2(x) := x \frac{f(-v)}{-v}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy f konvexitása miatt igazak a következő relációk:

- $\ell_1(x) \geq f(x)$ ha $x \in [0, v]$;
- $\ell_1(x) \leq f(x)$ ha $x \in [-v, 0]$;
- $\ell_2(x) \geq f(x)$ ha $x \in [-v, 0]$;
- $\ell_2(x) \leq f(x)$ ha $x \in [0, v]$.

Definiáljuk a

$$g(x) := \min\{\ell_1(x), \ell_2(x)\} \quad \text{és} \quad h(x) := \max\{\ell_1(x), \ell_2(x)\}$$

függvényeket a $[-v, v]$ intervallumon. Ekkor

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

A fenti $\ell_1(x)$ és $\ell_2(x)$ lineáris függvények nyilván folytonosak, így $h(x)$ és $g(x)$ is folytonos. Az $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ relációból következik, hogy $f(x)$ folytonos a 0 pontban.

Az n -dimenziós esetet hasonlóan vezetjük le. Ismét tegyük fel, hogy az origó benne van \mathcal{C} belsejében és $f(0) = 0$. Legyenek v_1, \dots, v_n, v_{n+1} olyan vektorok, amelyekre a

$$\left\{ x : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

konvex halmaz megegyezik a teljes \mathbb{R}^n térrel. Minden $i = 1, \dots, n+1$ esetén legyen az $L_i(x)$ lineáris függvény (hipersík) a következőképp definiálva: $L_i(0) = 0$ és $L_i(v_j) = f(v_j)$ minden $j \neq i$ esetén. Legyen

$$g(x) := \min\{L_1(x), \dots, L_{n+1}(x)\} \quad \text{és} \quad h(x) := \max\{L_1(x), \dots, L_{n+1}(x)\}.$$

Könnyen belátható, hogy $g(x)$ és $h(x)$ folytonos, valamint $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ és

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Tehát $f(x)$ folytonos a 0 pontban. □

2.8. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a fent definiált $g(x)$ és $h(x)$ függvények folytonosak, $f(0) = h(0) = g(0) = 0$ és $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Megjegyzés: f lehet nem folytonos a $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^0$ relatív határon.



2.5. ábra. Az f függvény nem folytonos a teljes számegyenesen, de folytonos $(-1, 1)$ -en és konvex $[-1, 1]$ -en.

2.31. Példa. A 2.5 ábrán látható

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } -1 < x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nem folytonos \mathbb{R} felett és nem is konvex. Ha f -et csak $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ halmazon definiáljuk, akkor sem folytonos, de \mathcal{C}^0 felett már folytonos és \mathcal{C} felett konvex.

A következő eredmény alapvető fontosságú a konvex analízisben.

2.32. Lemma (Jensen-egyenlőtlenség). Legyen f konvex függvény a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon. Legyen $x^1, \dots, x^k \in \mathcal{C}$ és $\lambda^1, \dots, \lambda^k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda^i = 1$ adott. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda^i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda^i f(x^i).$$

***Bizonyítás:** A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük el. Ha $k = 2$, akkor 0.2 definíció értelmében igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k \geq 2$ esetén; belátjuk, hogy $k + 1$ mellett is igaz.

Legyen $x^1, \dots, x^k, x^{k+1} \in \mathcal{C}$ és $\lambda^1, \dots, \lambda^k, \lambda^{k+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i = 1$ adott. Ha legfeljebb k darab λ^i , $1 \leq i \leq k + 1$ együttható nem nulla, akkor elhagyva a nulla együtthatóval rendelkező x^i pontot, az egyenlőtlenség azonnal adódik az indukciós feltevésből. Most tegyük fel, hogy egyik λ^i együttható sem nulla. Ekkor \mathcal{C} konvexitása miatt

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^i}{\sum_{i=1}^k \lambda^i} x^i \in \mathcal{C},$$

továbbá

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i x^i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda^i \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^i}{\sum_{i=1}^k \lambda^i} x^i + \lambda^{k+1} x^{k+1}\right) = f\left(\left[\sum_{i=1}^k \lambda^i\right] \tilde{x} + \lambda^{k+1} x^{k+1}\right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k \lambda^i\right) f(\tilde{x}) + \lambda^{k+1} f(x^{k+1}) \leq \left(\sum_{i=1}^k \lambda^i\right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda^i}{\sum_{i=1}^k \lambda^i} f(x^i)\right) + \lambda^{k+1} f(x^{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i f(x^i), \end{aligned} \quad (2.1)$$

ahol az első egyenlőtlenség f konvexitásából (0.2 definíció), a második egyenlőtlenség az indukciós feltevésből adódott. \square

A következő két lemma a definíciók felhasználásával könnyen igazolható.

2.33. Lemma. Legyenek f^1, \dots, f^k konvex függvények a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon. Ekkor

i. az

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda^i f^i(x) \quad (2.2)$$

függvény minden $\lambda^1, \dots, \lambda^k \geq 0$ mellett konvex;

ii. az

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq k} f^i(x) \quad (2.3)$$

függvény konvex.

2.34. Definíció. A $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt

- monoton növekvőnek³ hívjuk, ha minden $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$ esetén $h(t_1) \leq h(t_2)$;
- szigorúan monoton növekvőnek hívjuk, ha minden $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$ esetén $h(t_1) < h(t_2)$.

2.35. Lemma. Legyen f konvex függvény a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon és legyen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, monoton növekvő függvény. Ekkor a $h(f(x)) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ összetett függvény konvex.

2.9. Feladat. Bizonyítsuk be a 2.33 és a 2.35 lemmákat.

2.10. Feladat. Tegyük fel, hogy a 2.35 lemmában a h függvény nem monoton növekvő. Mutassunk konkrét példát arra az esetre, amikor a lemma állítása nem igaz.

2.36. Definíció. Legyen $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény a \mathcal{C} konvex halmazon. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges szám. A $\mathcal{D}_\alpha = \{x \in \mathcal{C} : f(x) \leq \alpha\}$ halmazt az f függvény szinthalmazának⁴ nevezzük.

2.37. Lemma. Ha f konvex függvény \mathcal{C} felett, akkor a \mathcal{D}_α szinthalmaz minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén (esetleg üres) konvex halmaz.

***Bizonyítás:** Legyen $x, y \in \mathcal{D}_\alpha$ és $0 \leq \lambda \leq 1$. Ekkor $f(x) \leq \alpha$, $f(y) \leq \alpha$ és

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

Az első egyenlőtlenség f konvexitásából következett. Ezzel az állítást bizonyítottuk. \square

2.11. Feladat. Mutassunk példát olyan nemkonvex függvényre, amelynek minden szinthalmaza konvex.⁵

Tudjuk, hogy az f függvény gradiense, ∇f , definíció szerint az f függvény $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ parciális deriváltjaiból álló vektor. A továbbiakban az iránymenti derivált fogalmát definiáljuk.

³Elterjedt még a *monoton nemcsökkenő* elnevezés is.

⁴Szokásos még a *nívóhalmaz* elnevezés is.

⁵Azokat a függvényeket, amelyeknek minden szinthalmaza konvex, *kvázikonvex* függvényeknek nevezzük. Minden konvex függvény kvázikonvex, de nem minden kvázikonvex függvény konvex.

2.38. Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x \in \mathbb{R}^n$ pontbeli $s \in \mathbb{R}^n$ irányú iránymenti deriváltját a következőképp definiáljuk:

$$\delta f(x, s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda s) - f(x)}{\lambda},$$

ha a határérték létezik.

Ha az f függvény folytonosan differenciálható, akkor $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta f(x, e_i)$, ahol e_i az i -edik egységvektor. Ebből adódik a következő lemma.

2.39. Lemma. Ha az f függvény folytonosan differenciálható, akkor minden $s \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\delta f(x, s) = \nabla f(x)^T s.$$

2.40. Definíció. Az f függvény második parciális deriváltjaiból álló $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(\nabla^2 f(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

mátrixot a függvény Hesse-mátrixának nevezzük.

2.41. Lemma. Egy konvex $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett f függvény akkor és csak akkor konvex, ha minden $x \in \mathcal{C}$ és $x + s \in \mathcal{C}$ esetén a $\phi(\lambda) = f(x + \lambda s)$ függvény konvex a $[0, 1]$ intervallumon.

***Bizonyítás:** Először tegyük fel, hogy f konvex függvény. Belátjuk, hogy $\phi(\lambda)$ konvex a $[0, 1]$ intervallumon. Legyen $\lambda^1, \lambda^2 \in [0, 1]$ és $0 \leq \alpha \leq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \lambda^1 + (1 - \alpha) \lambda^2) &= f(x + (\alpha \lambda^1 + (1 - \alpha) \lambda^2) s) = f(\alpha(x + \lambda^1 s) + (1 - \alpha)(x + \lambda^2 s)) \leq \\ &\leq \alpha f(x + \lambda^1 s) + (1 - \alpha) f(x + \lambda^2 s) = \alpha \phi(\lambda^1) + (1 - \alpha) \phi(\lambda^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

ami igazolja az állítás első felét.

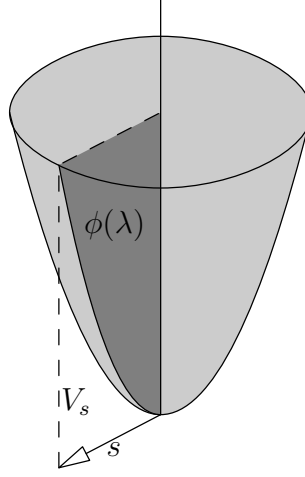
Másrészt, ha $\phi(\lambda)$ konvex a $[0, 1]$ intervallumon minden $x, x + s \in \mathcal{C}$ esetén, akkor legyen $x, y \in \mathcal{C}$ és $s := y - x$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(\alpha y + (1 - \alpha)x) &= f(x + \alpha(y - x)) = \phi(\alpha) = \phi(\alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 0) \leq \\ &\leq \alpha \phi(1) + (1 - \alpha) \phi(0) = \alpha f(y) + (1 - \alpha) f(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

2.42. Példa. Legyen $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ és legyen E_f az f függvény epigráfja (lásd a 2.6 ábrát). Minden $s \in \mathbb{R}^2$ vektorhoz definiálhatunk egy $V_s \subset \mathbb{R}^3$ félsíkot: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : x = \mu s, \mu > 0\}$. Ekkor $x = (0, 0)$ esetén a $\phi(\lambda) = f(x + \lambda s) = f(\lambda s)$ függvény epigráfja $V_s \cap E_f$, ami konvex halmaz. Ezért $\phi(\lambda)$ konvex függvény.

2.43. Lemma. Legyen f folytonosan differenciálható függvény a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, konvex halmazon. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

2.6. ábra. Az $f(s) = x_1^2 + x_2^2$ függvény epigráfja.

i. Az f függvény konvex a \mathcal{C} halmazon.

ii. Bármely $x, \bar{x} \in \mathcal{C}$ esetén (lásd a 2.7 ábrát)

$$\nabla f(x)^T(\bar{x} - x) \leq f(\bar{x}) - f(x) \leq \nabla f(\bar{x})^T(\bar{x} - x).$$

iii. Bármely $x, x + s \in \mathcal{C}$ esetén a $\phi(\lambda) = f(x + \lambda s)$ függvény folytonosan differenciálható a nyílt $(0, 1)$ intervallumon, a deriváltja $\phi'(\lambda) = s^T \nabla f(x + \lambda s)$, továbbá $\phi'(\lambda)$ monoton növekvő függvény.

***Bizonyítás:**

i. \rightarrow ii. Legyen $0 \leq \lambda \leq 1$ és $x, \bar{x} \in \mathcal{C}$. Ekkor f konvexitása miatt

$$f(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x),$$

ahonnan egyszerűen kapjuk, hogy

$$\frac{f(x + \lambda(\bar{x} - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(\bar{x}) - f(x).$$

Vegyük a baloldal határértékét $\lambda \rightarrow 0$ mellett, és használjuk a 2.39 lemmát, ezzel megkapjuk ii. első egyenlőtlenségét. Az x és \bar{x} szerepének felcserélésével egyszerűen adódik a másik egyenlőtlenség.

ii. \rightarrow iii. Legyen $x, x + s \in \mathcal{C}$ és $0 \leq \lambda^1, \lambda^2 \leq 1$. Ekkor ii. összefüggéseit az $x + \lambda^1 s$ és $x + \lambda^2 s$ pontokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\lambda^2 - \lambda^1) \nabla f(x + \lambda^1 s)^T s \leq f(x + \lambda^2 s) - f(x + \lambda^1 s) \leq (\lambda^2 - \lambda^1) \nabla f(x + \lambda^2 s)^T s.$$

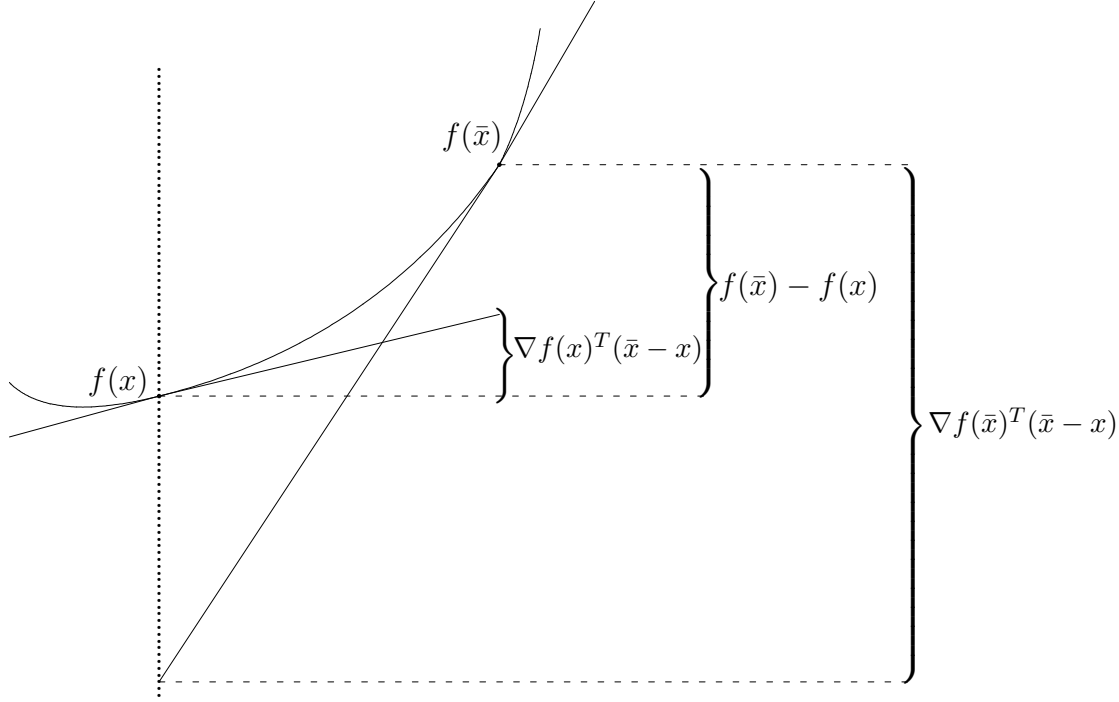
Innen

$$(\lambda^2 - \lambda^1) \phi'(\lambda^1) \leq \phi(\lambda^2) - \phi(\lambda^1) \leq (\lambda^2 - \lambda^1) \phi'(\lambda^2).$$

A $\lambda^1 < \lambda^2$ feltevést használva kapjuk, hogy

$$\phi'(\lambda^1) \leq \frac{\phi(\lambda^2) - \phi(\lambda^1)}{\lambda^2 - \lambda^1} \leq \phi'(\lambda^2),$$

ami bizonyítja, hogy a $\phi'(\lambda)$ függvény monoton növekvő. A ϕ deriváltjára vonatkozó kifejezés levezetését az olvasóra bízuk (2.12 feladat).



2.7. ábra. Az f konvex függvény gradienséhez kapcsolódó összefüggések.

iii. → i. Csak azt kell belátnunk, hogy ha $\phi'(\lambda)$ monoton növekvő, akkor $\phi(\lambda)$ konvex. Legyen $0 < \lambda^1 < \lambda^2 < 1$, ahol $\phi(\lambda^1) < \phi(\lambda^2)$. Ekkor minden $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)\phi(\lambda^1) + \alpha\phi(\lambda^2) - \phi((1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2) &= \\ &= \alpha(\phi(\lambda^2) - \phi(\lambda^1)) - (\phi((1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2) - \phi(\lambda^1)) = \\ &= \alpha(\lambda^2 - \lambda^1) \left(\int_0^1 \phi'(\lambda^1 + t(\lambda^2 - \lambda^1)) dt - \int_0^1 \phi'(\lambda^1 + t\alpha(\lambda^2 - \lambda^1)) dt \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ezzel a lemmát beláttuk. □

2.12. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, és legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és $s \in \mathbb{R}^n$ adott. Definiáljuk a $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a $\phi(\lambda) = f(x + \lambda s)$ formulával. Bizonyítsuk be, hogy

$$\phi'(\lambda) = s^T \nabla f(x + \lambda s)$$

és

$$\phi''(\lambda) = s^T \nabla^2 f(x + \lambda s) s.$$

2.44. Lemma. Legyen f kétszer folytonosan differenciálható függvény a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, konvex halmazon. Az f függvény akkor és csak akkor konvex, ha Hesse-mátrixa, $\nabla^2 f(x)$, minden $x \in \mathcal{C}$ esetén pozitív szemidefinit (PSD). Továbbá $\phi''(\lambda) = s^T \nabla^2 f(x + \lambda s) s$.

***Bizonyítás:** Legyen $x \in \mathcal{C}$ és $s \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, és $\phi(\lambda) = f(x + \lambda s)$. Ha f konvex, akkor $\phi'(\lambda)$ monoton növekvő, vagyis $\phi''(\lambda)$ nemnegatív minden $x \in \mathcal{C}$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén. Így

$$s^T \nabla^2 f(x) s = \phi''(0) \geq 0,$$

ami bizonyítja, hogy a $\nabla^2 f(x)$ pozitív szemidefinit.

Másrészt, ha $\nabla^2 f(x)$ pozitív szemidefinit minden $x \in \mathcal{C}$ mellett, akkor

$$s^T \nabla^2 f(x + \lambda s) s = \phi''(\lambda) \geq 0,$$

azaz $\phi'(\lambda)$ monoton növekvő, amiből a 2.43 lemma szerint következik f konvexitása. \square

A következő állítás a 2.44 lemmához hasonlóan bizonyítható.

2.45. Állítás. *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható függvény a \mathcal{C} nyílt, konvex halmazon. Ekkor f akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha $\nabla^2 f(x)$ minden $x \in \mathcal{C}$ esetén pozitív definit.*

2.2. Optimalitási feltételek

Először a feltétel nélküli optimalizálás optimalitási feltételeit tekintjük át, majd néhány speciális feltételes optimalizálási feladat optimalitási feltételeit vezetjük le.

2.2.1. Feltétel nélküli minimalizálás

Tekintsük a következő feladatot:

$$\min f(x), \tag{2.7}$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Először definiáljuk a fenti feladat lokális és globális minimumát.

2.46. Definíció. *Az $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pont az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény*

lokális minimuma, *ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre minden $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon$ esetén $f(\bar{x}) \leq f(x)$;*

szigorú lokális minimuma, *ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre minden $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon$ esetén $f(\bar{x}) < f(x)$;*

globális minimuma, *ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\bar{x}) \leq f(x)$;*

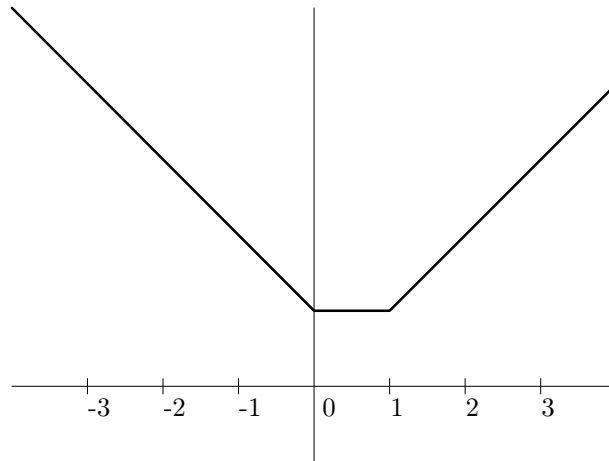
szigorú globális minimuma, *ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\bar{x}) < f(x)$.*

Hasonlóan definiálható a (szigorú) lokális/globális maximum fogalma is.

2.47. Példa. Tekintsük az $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvényt (2.8 ábra):

$$f_1(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{ha } x < 0, \\ 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Az $\bar{x} = 0$ pont az f_1 függvény globális minimuma, mert $f_1(\bar{x}) \leq f_1(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $\bar{x} = 0$ globális minimum, azonnal következik, hogy lokális minimum is. Az $\bar{x} = 0$ pont

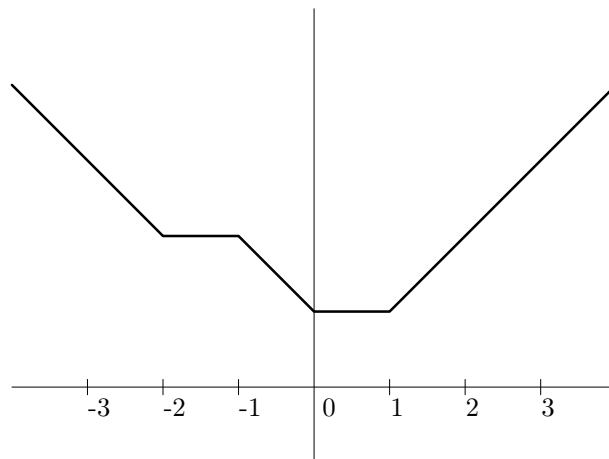


2.8. ábra. A 2.47 példában szereplő f_1 függvény.

se nem szigorú lokális, se nem szigorú globális minimuma f_1 -nek, mivel bármely $\varepsilon > 0$ esetén található olyan x , amelyre $\|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon$ és $f_1(\bar{x}) = f_1(x)$.

Most tekintsük az $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemkonvex függvényt (2.9 ábra):

$$f_2(x) = \begin{cases} -x & \text{ha } x < -2, \\ 2 & \text{ha } -2 \leq x \leq -1, \\ -x + 1 & \text{ha } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

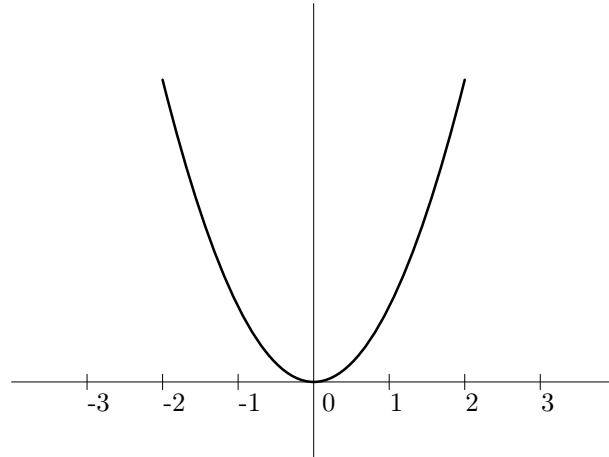


2.9. ábra. A 2.47 példában szereplő f_2 függvény.

Az $\bar{x} = 0$ pont az f_2 függvény globális minimuma, mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f_2(\bar{x}) \leq f_2(x)$. Mivel ez globális minimum, ezért ugyanakkor lokális minimum is. Az $\bar{x} = 0$ pont se nem szigorú lokális, se nem szigorú globális minimum, mert bármely $\varepsilon > 0$ esetén található olyan x , amelyre $\|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon$ és $f_2(\bar{x}) = f_2(x)$.

Az $x^* = -2$ pont is lokális minimuma az f_2 függvénynek, mert pl. minden $x \in \mathbb{R}$, $\|x^* - x\| \leq \frac{1}{2}$ esetén $f_2(x^*) \leq f_2(x)$. Ugyanakkor nem szigorú lokális minimum, mert nincs olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$, $\|x^* - x\| < \varepsilon$ esetén $f_2(x^*) < f_2(x)$. Az $x^* = -2$ pont nem is globális minimuma az f_2 függvénynek, mert $f_2(-2) > f_2(0)$.

2.48. Példa. Tekintsük az $f_1(x) = x^2$ konvex függvényt (2.10 ábra):

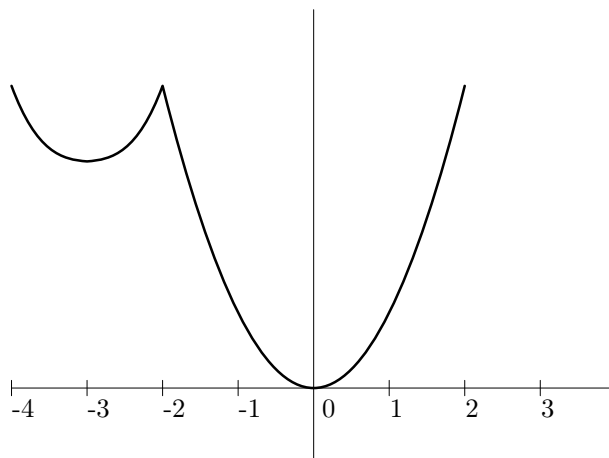


2.10. ábra. A 2.48 példában szereplő f_1 függvény.

Az $\bar{x} = 0$ pont az f_1 függvény szigorú lokális minimuma, mivel pl. minden $x \in \mathbb{R}$, $\|\bar{x} - x\| < 1$, $x \neq \bar{x}$ esetén $f_1(\bar{x}) < f_1(x)$. Az $\bar{x} = 0$ pont f_1 függvény szigorú globális minimuma is, mivel minden $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \bar{x}$ esetén $f_1(\bar{x}) < f_1(x)$.

Tekintsük az $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemkonvex függvényt (2.11 ábra):

$$f_2(x) = \begin{cases} (x+3)^2 + 3 & \text{ha } x < -2, \\ x^2 & \text{ha } x \geq -2. \end{cases}$$



2.11. ábra. A 2.48 példában szereplő f_2 függvény.

Az $\bar{x} = 0$ pont az f_2 függvény szigorú lokális és globális minimuma is egyben, mivel minden $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \bar{x}$ esetén $f_2(\bar{x}) < f_2(x)$. Az $x^* = -3$ pont szigorú lokális minimum, mivel pl. minden $x \in \mathbb{R}$, $\|x^* - x\| < \frac{1}{2}$, $x \neq \bar{x}$ esetén $f_2(x^*) < f_2(x)$. Az $x^* = -3$ pont nem globális minimum, mert $f_2(-3) > f_2(0)$.

A konvex függvények rendelkeznek egy hasznos tulajdonsággal, amely lehetővé teszi a globális minimum egyszerű megtalálását.

2.49. Lemma. *Egy konvex függvény bármely (szigorú) lokális minimuma egyben (szigorú) globális minimum is.*

2.50. Lemma. *Legyen f folytonosan differenciálható függvény. Ha az $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pont az f függvény lokális vagy globális minimuma, akkor $\nabla f(\bar{x}) = 0$.*

Bizonyítás: Mivel \bar{x} minimum, így $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + \lambda s)$ minden $s \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Innen egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy:

$$0 \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda s) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

feltéve, hogy $\lambda > 0$. A jobb oldal határértéke $\lambda \rightarrow 0$ mellett éppen az iránymenti derivált, vagyis

$$0 \leq \delta f(\bar{x}, s) = \nabla f(\bar{x})^T s \quad \text{minden } s \in \mathbb{R}^n \text{ esetén.}$$

Mivel ez tetszőleges $s \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül, ezért $\nabla f(\bar{x}) = 0$. □

Megjegyzés: A fenti lemmában elég feltenni, hogy f -nek léteznek parciális deriváltak. Ugyanez a bizonyítás működik, ha a tetszőleges s irány helyett az e_i egységvektorokat választjuk.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fenti lemma csak az egyik irányban érvényes. Nem mond semmit f minimumáról, ha $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Az ilyen pontok nem szükségszerűen minimumpontok. Ezeket a pontokat *stacionárius* pontoknak hívjuk. Gondoljunk egydimenzióban az $y = x^3$ függvény 0-ban lévő inflexiós pontjára.

2.51. Lemma. *Legyen f folytonosan differenciálható konvex függvény. Az $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pont akkor és csak akkor az f függvény minimuma, ha $\nabla f(\bar{x}) = 0$.*

Bizonyítás: Mivel \bar{x} az f függvény minimuma, így a 2.50 lemma alapján $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Másrészt, ha az f függvény konvex és $\nabla f(\bar{x}) = 0$, akkor a 2.43 lemma alapján

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = 0 \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}^n \text{ esetén,}$$

és ebből már következik az állítás. □

Ha f kétszer folytonosan differenciálható nem feltétlenül konvex függvény, akkor a lokális minimumára a következő másodrendű elégséges feltételt adhatjuk:

2.52. Lemma. *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ha az $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pontra $\nabla f(\bar{x}) = 0$, és $\nabla^2 f(\bar{x})$ pozitív szemidefinit \bar{x} egy ε sugarú ($\varepsilon > 0$) környezetében, akkor \bar{x} lokális minimuma az f függvénynek.*

Bizonyítás: Vegyük f másodrendű Taylor-közelítését az \bar{x} pont körül ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$f(x) = f(\bar{x}) + \underbrace{\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})) (x - \bar{x})}_{\geq 0} \geq f(\bar{x}), \quad (2.8)$$

mivel a Hesse-mátrix pozitív szemidefinit az \bar{x} pont elég kis környezetében. \square

2.53. Következmény. *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ha az $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pontban $\nabla f(\bar{x}) = 0$, és $\nabla^2 f(\bar{x})$ pozitív definit, akkor az \bar{x} pont az f függvény lokális minimuma.*

Bizonyítás: Mivel f kétszer folytonosan differenciálható, a Hesse-mátrix \bar{x} pontbeli pozitív definitéséből következik, hogy \bar{x} kis környezetében is pozitív definit, tehát alkalmazhatjuk az imént bizonyított állítást. \square

2.2.2. Feltételes minimalizálás

Először egy speciális esetben bizonyítjuk az optimalitási feltételt. Az f függvény minimumát a \mathcal{C} konvex halmazon magától értetődő módon definiáljuk.

2.54. Tétel. *Tekintsük a $\min\{f(x) : x \in \mathcal{C}\}$ optimalizálási feladatot, ahol \mathcal{C} relatív nyílt, konvex halmaz és $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, konvex függvény. A feladatnak \bar{x} akkor és csak akkor optimális megoldása, ha $\nabla f(\bar{x})^T s = 0$ minden $s \in \mathcal{L}$ esetén, ahol \mathcal{L} jelöli azt a lineáris alteret, amelyre $\text{aff } \mathcal{C} = \bar{x} + \mathcal{L}$ minden $x \in \mathcal{C}$ -re.*

Bizonyítás: Ha \bar{x} minimum, akkor $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + \lambda s)$ minden s -re, ahol $\bar{x} + \lambda s \in \mathcal{C}$. Itt $s \in \mathcal{L}$ és minden ilyen vektor definiálható hasonló módon, mivel \mathcal{C} -ről feltettük, hogy relatív nyílt halmaz. Egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy

$$0 \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda s) - f(\bar{x})}{\lambda},$$

feltéve, hogy $\lambda > 0$. A jobb oldal határértéke $\lambda \rightarrow 0$ mellett éppen az iránymenti derivált, vagyis:

$$0 \leq \delta f(\bar{x}, s) = \nabla f(\bar{x})^T s \quad \text{minden } s \in \mathcal{L} \text{ esetén.}$$

Mivel $s \in \mathcal{L}$ tetszőleges, ezért $\nabla f(\bar{x})^T s = 0$ minden $s \in \mathcal{L}$ -re.

Másrészt, ha f konvex függvény és $\nabla f(\bar{x})^T s = 0$ minden $s \in \mathcal{L}$ -re, akkor a 2.43 lemma alapján

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = 0,$$

hiszen $s = (x - \bar{x}) \in \mathcal{L}$. Ezzel a tételt beláttuk. \square

A fenti tétel döntő feltevése, hogy a \mathcal{C} halmaz relatív nyílt. Ez azonban általában nem teljesül, mivel a konvex optimalizálási feladatok szinthalmazai zártak, bár látni fogjuk, hogy a barrier-függvényes módszer (lásd 3. fejezet) éppen ilyen relatív nyílt megengedett megoldáshalmazt eredményez. Később (lásd a 2.58 tételt) megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha a megengedett megoldások halmaza nem relatív nyílt.

Tekintsünk egy általános konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x \in \mathcal{C}, \end{aligned} \tag{KO}$$

ahol $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, az $f, g_1, \dots, g_m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények pedig konvexek. Majdnem mindig fel fogjuk tenni, hogy a függvények differenciálhatóak. Az $\{1, \dots, m\}$ indexhalmazt jelöljük J -vel. A megengedett megoldások halmazát jelöli \mathcal{F} . Így

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{C} : g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

2.55. Definíció. Az $s \in \mathbb{R}^n$ vektort az $x \in \mathcal{F}$ ponthoz tartozó megengedett iránynak hívjuk, ha létezik olyan $\lambda_0 > 0$, amelyre minden $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ esetén $x + \lambda s \in \mathcal{F}$. Az $x \in \mathcal{F}$ megengedett pontban a megengedett irányok halmazát jelölje $\mathcal{FD}(x)$.

2.56. Példa. Tekintsük a következő konvex függvény epigráfját (2.12 ábra):

$$f_1(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

Legyen $\bar{x} = (1, 1)$, ekkor a megengedett irányok halmaza $\mathcal{FD}(\bar{x}) = \{s \in \mathbb{R}^2 : s_2 \geq s_1, s_2 \geq 0\}$. Ebben az esetben $\mathcal{FD}(\bar{x})$ zárt konvex halmaz.

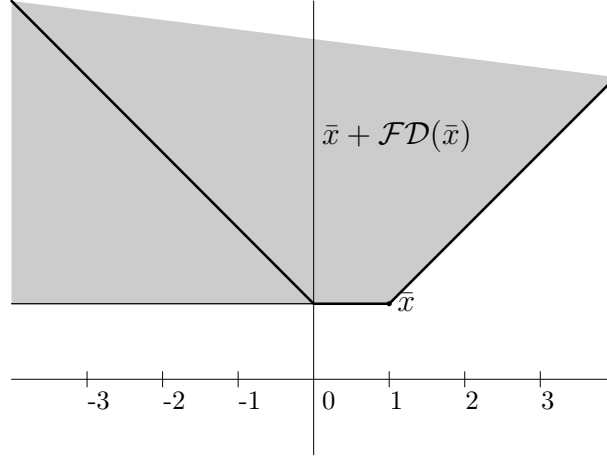
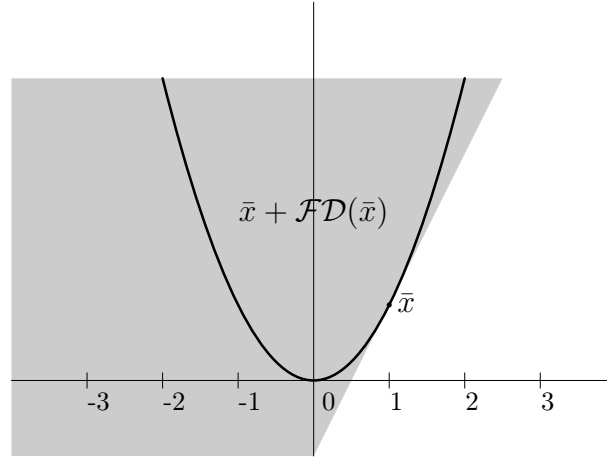
Tekintsük most az $f_2(x) = x^2$ függvény epigráfját (2.13 ábra). Legyen $\bar{x} = (1, 1)$, ekkor a megengedett irányok halmaza $\mathcal{FD}(\bar{x}) = \{s \in \mathbb{R}^2 : s_2 > 2s_1\}$. Figyeljük meg, hogy ekkor $\mathcal{FD}(\bar{x})$ nyílt halmaz.

Vegyük észre, hogy az $x^* = (1, 2)$ pontra mindkét esetben azt kapjuk, hogy a megengedett irányok halmaza \mathbb{R}^2 .

2.57. Lemma. Tetszőleges $x \in \mathcal{F}$ esetén a megengedett irányok halmaza, $\mathcal{FD}(x)$, konvex kúp.

Bizonyítás: Nyilván $s \in \mathcal{FD}(x)$ maga után vonja, hogy minden $\vartheta > 0$ -ra $(\vartheta s) \in \mathcal{FD}(x)$, mivel $x + \frac{\lambda}{\vartheta}(\vartheta s) = x + \lambda s \in \mathcal{F}$, így $\mathcal{FD}(x)$ kúp. A konvexitás belátásához legyen $s, \bar{s} \in \mathcal{FD}(x)$. Definíció szerint $x + \lambda s \in \mathcal{F}$ és $x + \lambda \bar{s} \in \mathcal{F}$ valamely $\lambda > 0$ esetén (vegyük észre, hogy ugyanazt a λ -t vettük), továbbá $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén

$$x + \lambda(\alpha s + (1 - \alpha)\bar{s}) = \alpha(x + \lambda s) + (1 - \alpha)(x + \lambda \bar{s}).$$

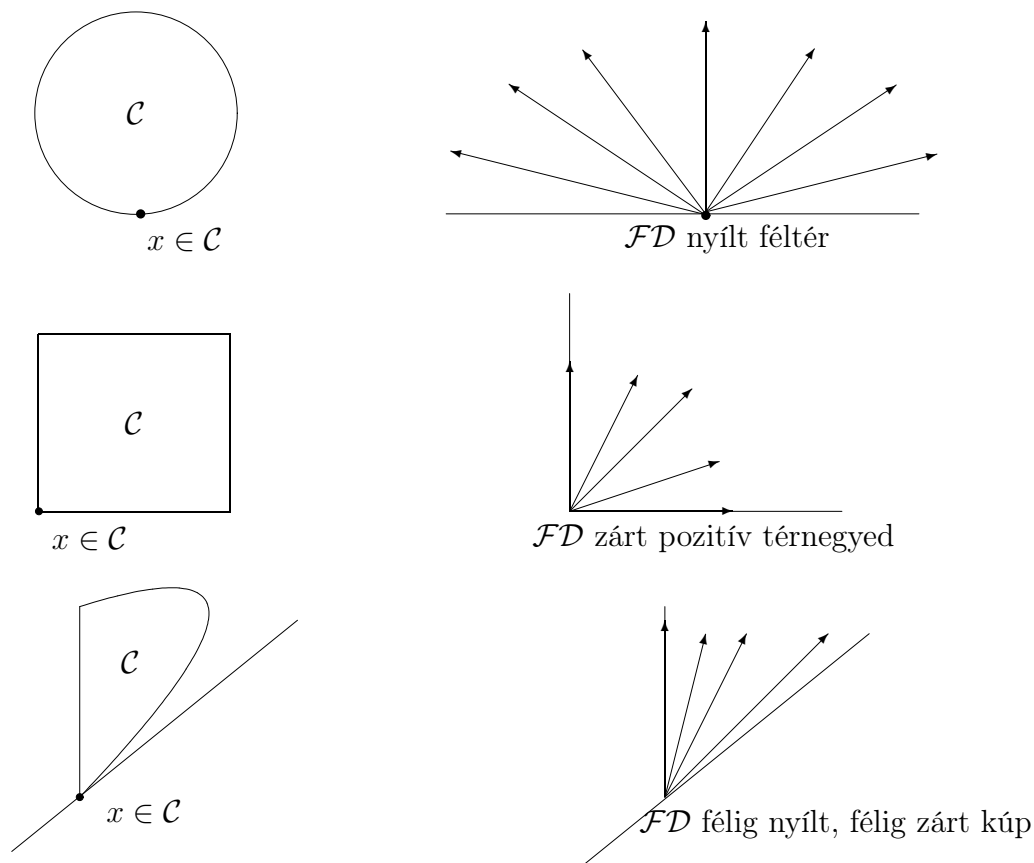
2.12. ábra. A 2.56 példában szereplő f_1 függvény.2.13. ábra. A 2.56 példában szereplő f_2 függvény.

Mivel \mathcal{F} konvexitása miatt a fenti egyenlőség jobb oldala \mathcal{F} -ben van, így $\mathcal{FD}(x)$ konvex halmaz.

A fenti lemma miatt bármely $x \in \mathcal{C}$ esetén beszélhetünk a megengedett irányok kúpjáról. Megjegyezzük, hogy a megengedett irányok kúpja nem szükségszerűen zárt, még akkor sem, ha a megengedett megoldások halmaza, \mathcal{F} zárt. Néhány példát mutat a 2.14 ábra.

Az itt tárgyalt utolsó optimalitási feltétel arról szól, hogy a megengedett megoldások halmaza akkor és csak akkor optimális, ha a célfüggvény gradiense hegyesszöget zár be a pontbeli összes megengedett iránnyal (a gradiens a lehetséges irányok kúpjának pozitív poláris kúpjában van). Más szavakkal: nem létezik megengedett csökkenési irány.

2.58. Tétel. *Az $\bar{x} \in \mathcal{F}$ megengedett megoldás akkor és csak akkor optimális megoldása a konvex optimalizálási feladatnak, ha minden $s \in \mathcal{FD}(\bar{x})$ esetén $\delta f(\bar{x}, s) \geq 0$.*



2.14. ábra. Konvex halmazok és a megengedett irányok kúpjai.

Bizonyítás: Mivel $s \in \mathcal{FD}(\bar{x})$ akkor és csak akkor, ha $s = \lambda(x - \bar{x})$ bizonyos $x \in \mathcal{F}$ és $\lambda > 0$ esetén, az eredmény a 2.54 tétel bizonyításával azonos módon következik. \square

Később látni fogjuk, a fenti optimalitási feltételeknek kettős szerepük lesz az optimalizálási algoritmusokban. Ezek az algoritmusok minden lépésben vagy egy megengedett csökkenési irányt generálnak (olyan irányt, amely mentén az iránymenti derivált negatív), vagy kimutatják, hogy ilyen irány nem létezik, vagyis (lokálisan) optimális megoldást találnak.

2.3. A feltétel nélküli optimalizálás algoritmusai

2.3.1. Az általános algoritmus

Mielőtt rátérnénk a konkrét algoritmusokra, először definiáljuk a konvergencia rendjének fogalmát.

2.59. Definíció. Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots \rightarrow \alpha$ konvergens sorozat. Azt mondjuk, hogy

a sorozat konvergenciarendje p^* (a sorozat p -edrendűen konvergál), ha

$$p^* = \sup \left\{ p : \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha|}{|a_k - \alpha|^p} < \infty \right\}.$$

Minél nagyobb p^* , annál gyorsabb a konvergencia. Legyen

$$\beta = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha|}{|a_k - \alpha|^{p^*}}.$$

Ha $p^* = 1$ és $0 < \beta < 1$, akkor *lineáris (vagy geometriai) konvergenciáról* beszélünk. Ha $p^* = 1$ és $\beta = 0$, akkor a konvergencia *szuperlineáris*, míg ha $\beta = 1$, a konvergencia *szublineáris*. Ha $p^* = 2$, akkor a konvergencia *kvadratikuss*.

2.60. Példa. Az $\alpha_k = a^k$ sorozat $0 < a < 1$ esetén lineárisan konvergál 0-hoz, hiszen $\beta = a$.

Az $\alpha_k = a^{(2^k)}$ sorozat, ahol $0 < a < 1$, kvadratikusan konvergál 0-hoz.

Az $\alpha_k = \frac{1}{k}$ sorozat szublineárisan konvergál 0-hoz.

Az $\alpha_k = \left(\frac{1}{k}\right)^k$ sorozat szuperlineárisan konvergál 0-hoz.

2.13. Feladat. Állítsunk elő olyan sorozatot, amely negyedrendűen tart 0-hoz.

A fenti definícióban feltettük, hogy a konvergens sorozat egydimenziós. Ugyanez a definíció átvihető konvergens vektorsorozatokra is. Többdimenziós esetben először keresnünk kell egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amellyel a vektorsorozatból számsorozatot készítünk. Például, ha adott az $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots \rightarrow \bar{x}$ n -dimenziós konvergens sorozat, akkor pl. definiálható $\alpha_k = \|x^k - \bar{x}\|$ és $\alpha = 0$. Ezek után az $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ sorozat konvergenciarendjét az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \rightarrow \alpha$ sorozat konvergenciarendjével definiálhatjuk. Természetesen a norma helyett más függvényt is választhattunk volna.

Tekintsük most megint a

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in \mathcal{C} = \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.9}$$

feladatot. Később látni fogjuk, hogy az eredmények könnyen átvihetők arra az esetre, amikor \mathcal{C} relatív nyílt konvex halmaz.

A következőkben az $f(x)$ függvény minimalizálására szolgáló algoritmusok általános szerkezetét mutatjuk be.

Feltétel nélküli optimalizálás keretalgoritmus

Input: $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter, x^0 szigorúan megengedett megoldás;

0. lépés: $x := x^0$, $k = 0$;

1. lépés: Találjunk egy (s^k) keresési irányt, amelyre $\delta f(x^k, s^k) < 0$;^a

1a. lépés: Ha nincs ilyen s^k , akkor megállunk: x^k optimális;

2. lépés: Egyenes menti keresés: $\lambda^k = \operatorname{argmin}_{\lambda} f(x^k + \lambda s^k)$;

3. lépés: $x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k$, $k \leftarrow k + 1$;

4. lépés: Ha x^k kielégíti a **megállási feltételt**, akkor álljunk meg, különben az 1. lépés következik.

^aA feltételes esetben ennek megengedett csökkenési iránynak kell lennie.

Az algoritmus alapelemei félkövér betűvel vannak szedve. Most röviden áttekintjük mindhárom alapelemet.

2.3.2. Keresési irány

Minden minimalizálási algoritmus döntő eleme a keresési irány megalkotása. Terjedelmi okok miatt most csak két alapvető módszert tekintünk át.

Gradiens-módszer

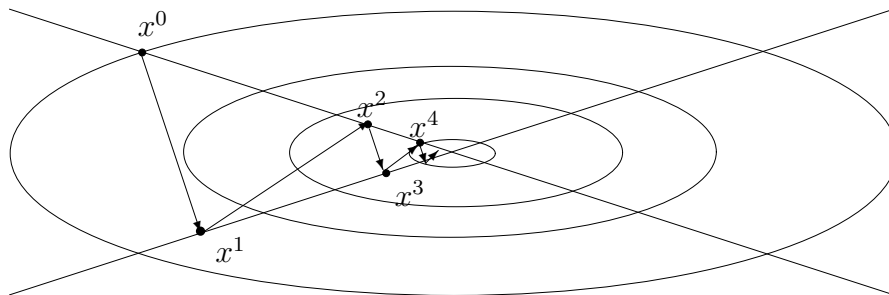
A gradiens-módszer az f függvény negatív gradiensét, $(-\nabla f(x^k))$ -t használja keresési irányként.⁶ Ezt az irányt gyakran *legmeredekebb csökkenési irány*nak hívják. Az elnevezés indokolt, ha megfigyeljük, hogy a normalizált iránymenti deriváltat a negatív gradiens minimalizálja:

$$\delta f(x, -\nabla f(x)) = -\nabla f(x)^T \nabla f(x) = \min_{\|s\|=\|\nabla f(x)\|} \{\nabla f(x)^T s\}.$$

Figyeljük meg, hogy a (negatív) gradiens ortogonális a függvény szintvonalaira. A gradiens kiszámolása viszonylag kevés számítást igényel, ami azt jelzi, hogy a gradiens-módszer elég hatékony. Bár sok esetben valóban jól működik, azért néhány elméleti és gyakorlati

⁶Most az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ a feltételes esetekben a negatív gradiens nem feltétlenül esik a \mathcal{C} halmazba. Ilyen esetekben a negatív gradienst pl. vetíthetjük a \mathcal{C} halmazra.

hátrányát megemlíthetjük. Először is, konvex kvadratikus függvény gradiens-módszerrel történő minimalizálása nem véges folyamat. „Cikk-cakkos” haladásának (lásd a 2.15 ábrát) köszönhetően a konvergencia igen lassú. Másrészt, a konvergencia sebessége csak lineáris.



2.15. ábra. A gradiens módszer cikk-cakkossága.

2.14. Feladat. Számítsuk ki a következő kvadratikus függvényhez tartozó legmeredekebb csökkenési irányt:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - \beta,$$

ahol a Q mátrix pozitív definit. Határozzuk meg az egyenes mentén történő keresés pontos lépéshosszát is.

2.15. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az egymást követő keresési irányok a fenti kvadratikus függvény esetében ortogonálisak (azaz $s^k \perp s^{k+1}$; $k = 0, 1, 2, \dots$).

A következő tétel a gradiens-módszer konvergenciáját vizsgálja.

2.61. Tétel. Legyen f folytonosan differenciálható függvény és indítsuk a gradiens módszert az x^0 kezdőpontból. Ha az egyenes mentén keresést pontosan hajtjuk végre, akkor a gradiens módszer olyan x^0, x^1, x^2, \dots sorozatot állít elő, amelyre $f(x^k) > f(x^{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén. Tegyük fel, hogy a $D = \{x : f(x) \leq f(x^0)\}$ szinthalma kompakt, ekkor a generált $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ sorozat bármely \bar{x} torlódási pontja az f függvény stationárius pontja (azaz $\nabla f(\bar{x}) = 0$). Továbbá, ha az f függvény konvex, akkor \bar{x} a függvény globális minimumhelye.

Bizonyítás: Mivel D kompakt és f folytonos, így f korlátos D felett, tovább létezik egy $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$ konvergens részsorozat, amelyre $f(x^{k_j}) \rightarrow f^*$, ha $k_j \rightarrow \infty$. Az f függvény folytonossága miatt $f(\bar{x}) = f^*$. Mivel a keresési irány az f függvény gradiense, és f folytonosan differenciálható, ezért

$$\bar{s} = \lim_{k_j \rightarrow \infty} s^{k_j} = - \lim_{k_j \rightarrow \infty} \nabla f(x^{k_j}) = -\nabla f(\bar{x}).$$

Mindkét oldalt $\nabla f(\bar{x})$ -szel szorozva

$$\bar{s}^T \nabla f(\bar{x}) = -\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) \leq 0. \quad (2.10)$$

Felhasználva az iterációs sorozat és a konvergens részsorozat felépítését:

$$f(x^{k_j+1}) \leq f(x^{k_j+1}) \leq f(x^{k_j} + \lambda s^{k_j}),$$

majd határértéket véve kapjuk, hogy

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + \lambda \bar{s}).$$

Ebből már következik, hogy $\delta f(\bar{x}, \bar{s}) = \bar{s}^T \nabla f(\bar{x}) \geq 0$. Ezt a (2.10) egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $\nabla f(\bar{x}) = 0$. \square

Newton-módszer

A Newton-módszer alkalmazásához fel kell tételeznünk, hogy f kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan konvex függvény. Newton keresési iránya az f függvény másodrendű közelítésén alapul. Tekintsük f Taylor-polinomjának első három tagját, és az eredeti függvény helyett ezt minimalizáljuk:

$$q(x) := f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k) (x - x^k).$$

A 2.44 lemma és a 2.45 állítás (1. 56. oldal) szerint $\nabla^2 f(x^k)$ pozitív definit, amiből következik a $q(x)$ függvény szigorú konvexitása. Így $q(x)$ minimumát akkor érjük el, ha gradiense

$$\nabla q(x) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) (x - x^k)$$

a nullvektorral lesz egyenlő, azaz ahol

$$x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k).$$

Ha a már elég közel vagyunk a minimumhoz, akkor a Newton-módszer kvadratikusan konvergál (egyenes mentén való keresés nélkül!), így a Newton-módszer hatékonyságának teljes kihasználásához szükségünk van egy jó kezdőpontra.⁷

A klasszikus Newton-módszer nem alkalmaz egyenes mentén való keresést. Ha egyenes mentén történő keresést alkalmazunk, akkor jellemzően messze vagyunk a megoldástól, a lépés hossza általában egynél kisebb. Ekkor beszélünk rövidített lépéses, vagy tompított Newton-módszerről.

Meg kell említenünk, hogy a Hesse-mátrix kiszámítása és invertálása sokkal több számítást igényel, mint a gradiens megtalálása. Számos módszert fejlesztettek ki a számításigény csökkentésére, amelyek a Newton-módszer előnyeit is megtartják. Ezek az ún.

⁷A belsőpontos módszerek (3. fejezet) meglepően jó eredményei nagyban annak köszönhetőek, hogy az iterációkat közel tartják a centrális úthoz, így az eljárás majdnem kvadratikusan konvergál.

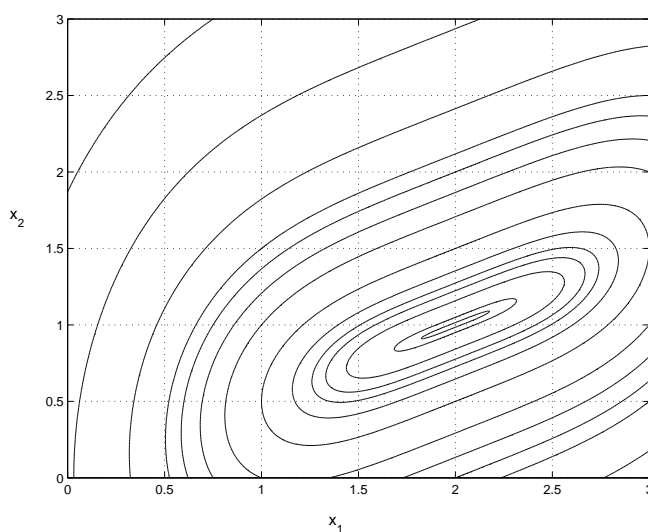
kvázi-Newton-módszerek, amelyek közül a legelterjedtebbek a *konjugált irányt* használó eljárások. Másrészt a Newton-módszer többletköltségét a jobb keresési irány kompenzálja. Példaként megjegyezzük, hogy konvex kvadratikusan minimalizálása egy lépésben történik. Emlékezzünk rá, hogy a gradiens-módszer nem is volt véges erre a feladatra.

Ha az $f(x)$ függvény nem szigorúan konvex, vagy a Hesse-mátrix nem jól-kondicionált (a legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa nagy), akkor a Hesse-mátrix nem (vagy csak nehezen) invertálható. Ezen nehézségek leküzdésére különféle technikákat dolgoztak ki. Példaként megemlítjük a *trust region*-módszert, ahol a keresési irány definíciójában $\nabla^2 f(x)$ helyett $(\nabla^2 f(x) + \alpha I)$ -t használjuk, ahol I az egységmátrix, és α változtatható annak érdekében, hogy elkerüljük az egyenes mentén való keresést. Figyeljük meg, hogy ha $\alpha = 0$, akkor a Hesse-mátrixot kapva a Newton-módszerhez térünk vissza, míg ha $\alpha \rightarrow \infty$, akkor ez a mátrix az egységmátrix számszorosához közelít és így a keresési irány aszimptotikusan párhuzamos lesz a negatív gradienssel. Ezen módszerek részletes vizsgálata meghaladja könyvünk kereteit, az érdeklődő olvasónak a [2, 4, 16, 12] könyveket ajánljuk.

2.16. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy az $s = -H\nabla f(x)$ irány bármely H pozitív definit mátrix esetén az f függvény egy x -hez tartozó csökkenési irányát adja meg. Milyen H esetén lesz s a legmeredekebb csökkenés iránya, illetve a Newton-irány (konvex f függvény esetén)?

2.17. Feladat. Tekintsük az alábbi, feltétel nélküli optimalizálási feladatot:

$$\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2.$$



2.16. ábra. A függvény szintvonalai. A minimum $(2, 1)$ -ben van.

1. Mutassuk be a gradiens-módszer két iterációját az $x^0 = [0, 3]^T$ kezdőpontból indulva.
2. Mutassuk be a Newton-módszer négy iterációját (egyenes mentén keresés nélkül) ugyanabból az x^0 kezdőpontból indulva.

Newton-módszer nemlineáris egyenletek megoldására

A Newton-módszer nemlineáris egyenletrendszerek megoldására is használható. Tegyük fel, hogy a nemlineáris egyenletrendszer

$$F(x) = 0$$

alakú, ahol $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $x^k \in \mathbb{R}^n$ pont az egyenlet egy közelítő megoldása. Először linearizáljuk x^k -ban a nemlineáris egyenletet úgy, hogy $F(x)$ -et az $F(x^k) + JF(x^k)(x - x^k)$ kifejezéssel közelítjük, ahol $JF(x)$ jelöli F -n Jacobi-mátrixát:

$$JF(x)_{ij} = \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Innen a következő linearizált egyenletet kapjuk:

$$JF(x^k)(x - x^k) = -F(x^k). \quad (2.11)$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldását (ha létezik) a sztenderd lineáris algebra eszközeivel kaphatjuk meg. Az innen kapott $x^{k+1} = x$ megoldás lesz az egyenletrendszer megoldásának új közelítése, és az eljárás kezdődik előlről.

Vegyük észre, hogy egy $f(x)$ szigorúan konvex függvény minimalizálása ekvivalens a $\nabla f(x) = 0$ egyenletrendszer megoldásával. A Newton-módszert használva (a (2.11) formula alapján) a következőt kapjuk:

$$\nabla^2 f(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -\nabla f(x^k).$$

A gradiens Jacobi-mátrixa éppen $f(x)$ Hesse-mátrixa, ami így pozitív definit, és

$$x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k),$$

ahogy ezt már korábban is láttuk.

2.3.3. Keresés egyenes mentén

Az egyenes mentén történő keresés valójában egydimenziós optimalizálás, mivel $f(x^k + \lambda s^k)$ a λ változó függvénye. Így az a feladatunk, hogy a $\phi(\lambda)$ egydimenziós függvény minimumát megtaláljuk, vagy ha a függvény differenciálható, akkor a $\phi'(\lambda)$ zérushelyeit keressük. Röviden bemutatjuk mindkét módszert.

Intervallumfelezés

Először keressük meg $\phi'(\lambda)$ zérushelyét. Az intervallumfelezés algoritmus a következő:

Egyváltozós minimalizálás intervallumfelezéssel

Input: $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter; λ^0, λ^1 , amelyekre $\phi'(\lambda^0) < 0$ és $\phi'(\lambda^1) > 0$;

1. lépés: Ha $|\lambda^1 - \lambda^2| < \varepsilon$ akkor megállunk, $\hat{\lambda} = \frac{1}{2}(\lambda^0 + \lambda^1)$.

2. lépés: Legyen $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda^0 + \lambda^1)$.

3. lépés: Ha $\phi'(\lambda) < 0$, akkor $\lambda^0 := \lambda$ és az 1. lépés következik.

4. lépés: Ha $\phi'(\lambda) > 0$, akkor $\lambda^1 := \lambda$ és az 1. lépés következik.

Output: Olyan $\hat{\lambda}$ pont, amely legfeljebb ε távolságra van a $\phi'(\lambda)$ függvény valamelyik zérushelyétől.

Megjegyezzük, hogy az algoritmus $\log_2 \frac{|\lambda^1 - \lambda^0|}{\varepsilon}$ lépést tesz. A $\phi'(\lambda)$ függvénynek nem kell differenciálhatónak lennie.

Newton-módszer

A Newton-módszer felfogható úgy, hogy ϕ' zérushelyét vagy ϕ minimumát keressük, de mindkét megközelítéshez szükséges, hogy ϕ kétszer folytonosan differenciálható legyen. Az első esetben ϕ' adott pontban történő linearizálása után megkeressük a lineáris közelítés zérushelyét és megismételjük a lépést. A második esetben vesszük az adott pontban ϕ kvadratikus közelítését a Taylor-polinom segítségével, majd megkeressük ennek a függvénynek a minimumát, s kezdjük a következő iterációt. Könnyen belátható, hogy a két megközelítés azonos.

A $\phi(\lambda)$ függvény másodrendű közelítése a λ^k pont körül:

$$q(\lambda) = \phi(\lambda^k) + \phi'(\lambda^k)(\lambda - \lambda^k) + \frac{1}{2}\phi''(\lambda^k)(\lambda - \lambda^k)^2.$$

A $q(\lambda)$ függvény minimuma a

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{\phi'(\lambda^k)}{\phi''(\lambda^k)}.$$

pontban van. Az algoritmus így összegezhető:

Egyváltozós minimalizálás Newton-módszerrel

Input: $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter; λ^0 adott kezdőpont; $k = 0$;

1. lépés: Legyen $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{\phi'(\lambda^k)}{\phi''(\lambda^k)}$;

2. lépés: Ha $|\lambda^{k+1} - \lambda^k| < \varepsilon$ akkor álljunk meg. Legyen $\hat{\lambda} = \lambda^{k+1}$.

3. lépés: $k \leftarrow k + 1$ és folytassuk az 1. lépéssel;

Output: Egy $\hat{\lambda}$ közelítő megoldás.

Megjegyezzük, hogy a Newton-módszer instabillá válhat. A kvadratikusan közelítés minimuma távolabb eshet a ϕ függvény minimumától, mint az előző pont, így különösen óvatosan kell a módszert alkalmazni. Másrészt viszont a Newton-módszer rendelkezik néhány figyelemre méltó tulajdonsággal. Ha az iteráció során elég közel kerülünk a minimumhoz, akkor akár egy teljes Newton-lépés is hatásos lehet. Sőt a Newton-módszer kvadratikusan konvergál.

2.3.4. Megállási feltétel

A megállási feltétel az algoritmus viszonylag egyszerű, de lényeges része. Feltétel nélküli optimalizálás során gyakori, hogy az algoritmus csak egy pontsorozatot generál, így nincs olyan abszolút mértéke annak, hogy milyen közel vannak az optimumhoz. Általában az algoritmus akkor fejeződik be, ha

1. nem lehet eléggé javítani a célfüggvény értékén, vagy
2. ha az iterációk túl közel esnek egymáshoz, vagy
3. ha a gradiens normája kicsi, vagy
4. ha a Newton-lépés hossza túl kicsi.

A gyakorlatban legtöbbször a fenti kritériumok valamilyen kombinációját használják. A 2. és a 3. pont magától értetődik. Az 1. pont a következőképpen fogalmazható meg:

$$\frac{|f(x^k) - f(x^{k+1})|}{1 + |f(x^k)|} \leq \varepsilon.$$

Végül a 4. pontnál akkor mondjuk, hogy a Newton-lépés túl kicsi, ha a teljes Newton-lépés Hesse-mátrixból származtatott normája kicsi, azaz

$$\begin{aligned} \left\| (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) \right\|_{\nabla^2 f(x^k)} &= \\ &= (\nabla f(x^k))^T (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla^2 f(x^k) (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) = \\ &= (\nabla f(x^k))^T (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vagyis a gradiensnek a Hesse-mátrix inverzéből származtatott normája kicsi. Ezt a kritériumot használják a belsőpontos módszerek a Newton-módszer hatékonyságának biztosítására.

Ha az algoritmus két pontsorozatot (primál és duál) generál és az optimum a kettő között van, akkor meg tudjuk mondani, hogy legfeljebb milyen messze vagyunk az optimumtól. Akkor állunk meg, ha a (relatív) dualitásrés kisebb az előre megadott $\varepsilon > 0$ értéknél. A dualitásrés:

$$|\text{primál célfv. érték} - \text{duál célfv. érték}|.$$

A relatív dualitásrés:

$$\frac{|\text{primál célfv. érték} - \text{duál célfv. érték}|}{1 + |\text{primál célfv. érték}|}.$$

A lineáris optimalizálás primál-duál algoritmusai mind ezt a megállási kritériumot használják, de ugyanezt az elvet alkalmaztuk az intervallumfelezésnél is.

2.4. Feltételes konvex optimalizálási feladatok optimalitási feltételei

Tekintsük ismét a következő sztenderd alakú konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x \in \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (\text{CO})$$

ahol $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz és f, g_1, \dots, g_m konvex függvények \mathcal{C} felett (vagy egy \mathcal{C} halmazt tartalmazó nyílt halmaz felett). Szinte mindig fel fogjuk tenni, hogy az f és g_j függvények differenciálhatóak. Az $\{1, \dots, m\}$ indexhalmazt jelölje J , a megengedett megoldások halmazát \mathcal{F} . Így

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{C} : g_j(x) \leq 0, \forall j \in J\}.$$

2.4.1. Regularitási feltételek

A regularitási feltételeket a nemlineáris optimalizálás erős dualitási eredményeinek bizonyításához használjuk. Később látni fogjuk, hogy ezek az eredmények számos speciális konvex feladat esetében fennállnak regularitási feltételek nélkül is. Mi csak az egyik leggyakrabban használt, legegyszerűbb feltétellel foglalkozunk, további feltételekkel és azok kapcsolatával részletesen foglalkozik pl. a [2] munka.

2.62. Definíció. Az $x^0 \in \mathcal{C}^0$ (pontot) a (CO) feladat Slater-pontjának hívjuk, ha

$$\begin{aligned} g_j(x^0) &< 0, & \text{minden } j\text{-re, ha } g_j & \text{ nemlineáris,} \\ g_j(x^0) &\leq 0, & \text{minden } j\text{-re, ha } g_j & \text{ lineáris.} \end{aligned}$$

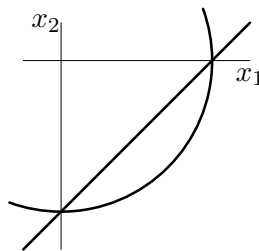
Ha létezik ilyen pont, akkor azt mondjuk, hogy (CO) Slater-reguláris vagy (CO) kielégíti a Slater-feltételt.

2.63. Példa. [Példák Slater-pontra]

1. Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_2 \geq 0 \\ & \mathcal{C} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

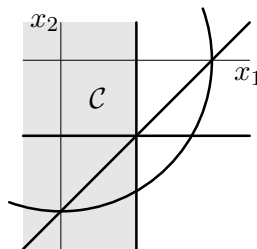
A megengedett megoldások halmaza csak egy olyan pontot tartalmaz, $(2, 0)$ -t, amelyre a nemlineáris feltétel teljesül. Mivel erre a pontra a feltétel egyenlőséggel teljesül, ezért ez a feladat nem Slater-reguláris.



2. Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_2 \geq -1 \\ & \mathcal{C} = \{x : x_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

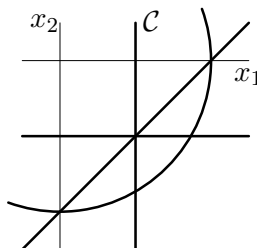
A megengedett megoldások halmaza ismét csak egy pontból áll: $(1, -1)$. Erre a pontra a nemlineáris feltétel szigorú egyenlőtlenséggel teljesül, de ez a pont nincsen \mathcal{C} relatív belsejében. Így ez a feladat sem Slater-reguláris.



3. Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_2 \geq -1 \\ & \mathcal{C} = \{x : x_1 = 1\}. \end{aligned}$$

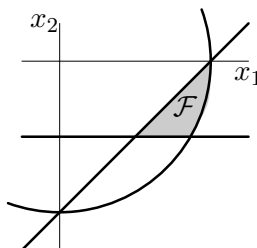
A megengedett megoldások halmaza egy pontot tartalmaz, $(1, -1)$ -t. Ez a pont a \mathcal{C} konvex halmaz relatív belsejében van. Így ez a pont ideális Slater-pont (a definíciót l. a 76. oldalon).



4. Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_2 \geq -1 \\ & \mathcal{C} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Az $(1, -1)$ pont ismét Slater-pont, de nem ideális Slater-pont. A $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$ ideális Slater-pont.



2.18. Feladat. A Slater-feltétel érvényessége az ún. elsőfázis-feladat megoldásával könnyen ellenőrizhető. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, és tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tau \\ g_j(x) - \tau & \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x & \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- (a) Mutassuk meg, hogy a fenti feladat Slater-reguláris.
- (b) Elemezzük, hogy a fenti feladat megoldása milyen információt nyújt a (CO) feladról.

Definíciónkat tovább finomíthatjuk. Azokat a feltételeket, amelyek minden megengedett megoldásra egyenlőséggel teljesülnek, *szingulárisnak*, a többi feltételt *regulárisnak* nevezzük. Így a szinguláris feltételek indexhalmaza:

$$J_s = \{j \in J : g_j(x) = 0 \text{ minden } x \in \mathcal{F} \text{ esetén}\},$$

míg a reguláris feltételek indexhalmaza a szinguláris indexhalmaz komplementere:

$$J_r = J - J_s = \{j \in J : g_j(x) < 0 \text{ valamely } x \in \mathcal{F} \text{ esetén}\}.$$

1. Megjegyzés: Ha (CO) Slater-reguláris, akkor minden szinguláris feltételnek lineárisnak kell lennie.

2. Megjegyzés: A Slater-regularitás definíciójában különbséget tettünk lineáris és nemlineáris feltételek között. A Slater-regularitás teljesüléséhez az irodalomban gyakran megkövetelik, hogy minden feltétel szigorú egyenlőtlenséggel teljesüljön, ebben az esetben szinguláris feltételek nem is lehetnek. Ez a tény számos bizonyítást leegyszerűsít (lásd pl. a 2.67 Konvex Farkas-tétel bizonyítását), de az eredmények gyengébbek. A lineáris optimalizálás erős dualitási tétele és a lineáris Farkas-tétel csak akkor érvényes, ha feltezzük, hogy létezik szigorúan megengedett megoldás. Az általunk használt definícióval ezek az eredmények a Konvex Farkas-tétel speciális esetei lesznek.

2.64. Definíció. Az $x^* \in \mathcal{C}^0$ pontot a (CO) feladat ideális Slater-pontjának mondjuk, ha

$$\begin{aligned} g_j(x^*) &< 0 \quad \text{minden } j \in J_r \text{ esetén,} \\ g_j(x^*) &= 0 \quad \text{minden } j \in J_s \text{ esetén.} \end{aligned}$$

Először egy egyszerű lemmát mondunk ki.

2.65. Lemma. Ha a (CO) konvex optimalizálási feladat Slater-reguláris, akkor létezik $x^* \in \mathcal{F}$ ideális Slater-pontja is.

Bizonyítás: A feltevésünk szerint létezik egy $x^0 \in \mathcal{C}^0$ Slater-pont, valamint léteznek olyan $x^k \in \mathcal{F}$ pontok minden $k \in J_r$ esetén, amelyekre $g_k(x^k) < 0$. Legyen $\lambda_0 > 0$, $\lambda_k > 0$ minden $k \in J_r$ -re olyan, hogy $\lambda_0 + \sum_{k \in J_r} \lambda_k = 1$. Ekkor $x^* = \lambda_0 x^0 + \sum_{j \in J_r} \lambda_j x^j$ ideális Slater-pont, mivel a g_j függvények konvexek. \square

2.4.2. A konvex Farkas-tétel

Mielőtt kimondanánk a konvex Farkas-tételt, egy egyszerű szeparációs tételt mutatunk be, amelynek bizonyítása a legtöbb szakirodalomban (pl. [2]) megtalálható.

2.66. Tétel. *Legyen $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz és $w \in \mathbb{R}^n$ egy adott pont, amelyre $w \notin \mathcal{U}$. Ekkor létezik egy $\{x : a^T x = \alpha\}$ elválasztó hipersík, amelyre: $a^T w \leq \alpha$, valamint $a^T u \geq \alpha$ minden $u \in \mathcal{U}$ -ra, de \mathcal{U} nem részhalmaza a hipersíknak, vagyis létezik olyan $\bar{u} \in \mathcal{U}$, amelyre $a^T \bar{u} > \alpha$.*

Most már készen állunk a konvex Farkas-tétel bizonyítására. Az itt bemutatott bizonyítás a [42, 46] könyvekben található bizonyítások egyszerűsített változata.

2.67. Tétel (Farkas). *Tekintsük a (CO) konvex optimalizálási feladatot, és tegyük fel, hogy a Slater-regularitási feltétel teljesül. A következő*

$$\begin{aligned} f(x) &< 0 \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x &\in \mathcal{C} \end{aligned} \tag{2.13}$$

rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha létezik olyan $y = (y_1, \dots, y_m) \geq 0$ vektor, amelyre

$$f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \geq 0 \quad \text{minden } x \in \mathcal{C} \text{ esetén.} \tag{2.14}$$

Mielőtt bizonyítanánk ezt a fontos tételt, teszünk egy megjegyzést. A (2.13) és (2.14) rendszereket *alternatív rendszereknek* hívjuk, azaz közülük pontosan az egyiknek van megoldása.

Bizonyítás: Ha a (2.13) rendszernek van megoldása, akkor (2.14) nem teljesülhet erre a megoldásra. Ez a tétel triviálisan következő iránya, amely mindenféle regularitási feltétel nélkül is fennáll.

Az ellenkező irány bizonyításához tegyük fel, hogy (2.13)-nek nincsen megoldása. Defináljuk az $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{m+1}$ halmazt a következőképpen ($u = (u_0, \dots, u_m)$):

$$\mathcal{U} = \{u : \exists x \in \mathcal{C}, \text{ amelyre } f(x) < u_0, \quad g_j(x) \leq u_j \text{ ha } j \in J_r, \quad g_j(x) = u_j \text{ ha } j \in J_s\}.$$

Az \mathcal{U} halmaz tehát azokat a jobboldali vektorokat tartalmazza, amelyekre a 2.14 rendszer megoldható. Vegyük észre, hogy a szinguláris feltételeket – mivel úgyis mindig egyenlőséggel teljesülnek – eleve egyenlőséggel követeltük meg.

A Slater-feltételeknek köszönhetően a szinguláris függvények lineárisak, így az \mathcal{U} halmaz nyilván konvex és a (2.13) rendszer megoldhatatlansága miatt nem tartalmazza az origót. Innen a 2.66 tétel alapján létezik szeparáló hipersík, amelyet egy megfelelő (y_0, y_1, \dots, y_m) vektor és $\alpha = 0$ ily módon definiál:

$$\sum_{j=0}^m y_j u_j \geq 0 \quad \text{minden } u \in \mathcal{U} \text{ esetén} \tag{2.15}$$

és valamely $\bar{u} \in \mathcal{U}$ esetén

$$\sum_{j=0}^m y_j \bar{u}_j > 0. \quad (2.16)$$

A tétel bizonyítását az alábbi pontok igazolásával fejezzük be:

- I. Először bebizonyítjuk, hogy $y_0 \geq 0$ és $y_j \geq 0$ minden $j \in J_r$ esetén.
 - II. Belátjuk, hogy (2.15) fennáll $u = (f(x), g_1(x), \dots, g_m(x))$ esetén, ha $x \in \mathcal{C}$.
 - III. Megmutatjuk, hogy y_0 -nak pozitívnak kell lennie.
 - IV. Teljes indukció segítségével belátjuk, hogy $y_j > 0$ fennállhat minden $j \in J_s$ esetén.
- I. Először megmutatjuk, hogy $y_0 \geq 0$ és $y_j \geq 0$ minden $j \in J_r$ esetén. Indirekt tegyük fel, hogy $y_0 < 0$. Legyen $(u_0, u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$ tetszőleges. A definíció miatt $(u_0 + \lambda, u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$ minden $\lambda \geq 0$ mellett. Innen (2.15) alapján

$$\lambda y_0 + \sum_{j=0}^m y_j u_j \geq 0 \text{ minden } \lambda \geq 0 \text{ mellett.}$$

Elég nagy λ esetén a bal oldal negatív lesz, ami ellentmondás, tehát y_0 -nak nemnegatívnak kell lennie. A többi y_j , $j \in J_r$ nemnegativitása hasonló módon látható be.

II. Belátjuk, hogy

$$y_0 f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ mellett.} \quad (2.17)$$

Ez abból következik, hogy minden $x \in \mathcal{C}$ és minden $\lambda > 0$ esetén

$$u = (f(x) + \lambda, g_1(x), \dots, g_m(x)) \in \mathcal{U},$$

így

$$y_0(f(x) + \lambda) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ mellett.}$$

Innen $\lambda \rightarrow 0$ esetén éppen az állítást kapjuk.

- III. Megmutatjuk, hogy $y_0 > 0$. Már tudjuk, hogy $y_0 \geq 0$. Indirekt tegyük fel, hogy $y_0 = 0$. Innen (2.17) alapján

$$\sum_{j \in J_r} y_j g_j(x) + \sum_{j \in J_s} y_j g_j(x) = \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ esetén.}$$

A feladat Slater-reguláris, így létezik egy $x^* \in \mathcal{C}^0$ ideális Slater-pont is, amelyre

$$g_j(x^*) = 0 \text{ ha } j \in J_s,$$

ahonnan azonnal kapjuk, hogy

$$\sum_{j \in J_r} y_j g_j(x^*) \geq 0.$$

Mivel $y_j \geq 0$ és $g_j(x^*) < 0$ minden $j \in J_r$ mellett, ezért $y_j = 0$ minden $j \in J_r$ -re. Ebből adódik, hogy

$$\sum_{j \in J_s} y_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ esetén.} \quad (2.18)$$

A szeparációs tétel (2.16) pontja alapján van olyan $\bar{x} \in \mathcal{C}$, $\bar{u}_j = g_j(\bar{x})$, $j \in J_s$, amelyre fennáll, hogy

$$\sum_{j \in J_s} y_j g_j(\bar{x}) > 0. \quad (2.19)$$

Mivel az x^* ideális Slater-pont \mathcal{C} relatív belsejében van, ezért létezik olyan $\tilde{x} \in \mathcal{C}$ vektor és $0 < \lambda < 1$, amelyekre $x^* = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)\tilde{x}$. Felhasználva, hogy $g_j(x^*) = 0$ minden $j \in J_s$ esetén, és hogy a szinguláris feltételek lineárisak, ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in J_s} y_j g_j(x^*) = \sum_{j \in J_s} y_j g_j(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)\tilde{x}) = \\ &= \lambda \sum_{j \in J_s} y_j g_j(\bar{x}) + (1 - \lambda) \sum_{j \in J_s} y_j g_j(\tilde{x}) > (1 - \lambda) \sum_{j \in J_s} y_j g_j(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Az utolsó egyenlőtlenség (2.19)-ből következett. A kapott egyenlőtlenség,

$$(1 - \lambda) \sum_{j \in J_s} y_j g_j(\tilde{x}) < 0,$$

ellentmond (2.18)-nek, tehát bebizonyítottuk, hogy $y_0 > 0$.

A (2.17) egyenlőtlenséget $y_0 > 0$ -val osztva és új $y_j := \frac{y_j}{y_0}$, $j \in J$ változókat bevezetve kapjuk, hogy

$$f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ mellett.} \quad (2.21)$$

Végül megmutatjuk, hogy minden $j \in J_s$ esetén y_j pozitívvá tehető.

IV. A J_s halmaz elemszámára vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy y_j lehet pozitív minden $j \in J_s$ esetén. Ha $J_s = \emptyset$, akkor készen vagyunk. Ha $|J_s| = 1$, akkor az eddig bizonyított összefüggések alapján a

$$\begin{aligned} g_s(x) &< 0 \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j \in J_r \\ x &\in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (2.22)$$

rendszernek nincs megoldása, kielégíti a Slater-feltételt, és így létezik olyan $\hat{y} \in \mathbb{R}^{m-1}$ vektor, amelyre teljesül, hogy

$$g_s(x) + \sum_{j \in J_r} \hat{y}_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ esetén,} \quad (2.23)$$

ahol $\hat{y}_j \geq 0$ minden $j \in J_r$ -re. A (2.23) egyenlőtlenség elég nagy pozitív többszörösét a (2.21) egyenlőtlenséghez adva $g_s(x)$ együtthatóját pozitívvá tehetjük.

Az általános indukciós lépés hasonlóképpen alakul. Feltesszük, hogy $|J_s| = k$ esetén érvényes az állítás, s ebből kiindulva bebizonyítjuk, hogy $|J_s| = k + 1$ esetén is fennáll. Legyen $s \in J_s$, $|J_s \setminus \{s\}| = k$. Az előbbiekhöz hasonlóan kapjuk, hogy a

$$\begin{aligned} g_s(x) &< 0 \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j \in J_s \setminus \{s\} \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j \in J_r \\ x &\in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (2.24)$$

rendszernek nincs megoldása, kielégíti a Slater-feltételt, és az indukciós feltevés szerint létezik olyan $\hat{y} \in \mathbb{R}^{m-1}$, amelyre

$$g_s(x) + \sum_{j \in J_r \cup J_s \setminus \{s\}} \hat{y}_j g_j(x) \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ esetén,} \quad (2.25)$$

ahol $\hat{y}_j > 0$ minden $j \in J_s$ -re, és $\hat{y}_j \geq 0$ minden $j \in J_r$ -re. A (2.25) egyenlőtlenség elég nagy pozitív többszörösét a (2.21) egyenlőtlenséghez adva megkapjuk a kívánt nemnegatív együtthatót. \square

Végül kicsit többet is bizonyítottunk, mint maga az állítás volt. Beláttuk, hogy minden szinguláris feltétel szorzója szigorúan pozitívvá tehető.

2.68. Példa. [Farkas-tétel]

1. Tekintsük a következő konvex optimalizálási feladatot:

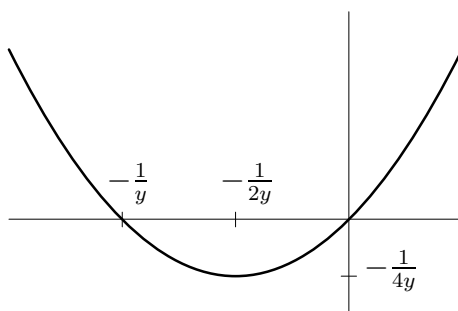
$$\begin{aligned} \min \quad & x \\ & x^2 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ez a feladat *nem Slater-reguláris*.

A következő

$$\begin{aligned} x &< 0 \\ x^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

rendszernek nincs megoldása, de minden $y > 0$ esetén az $f(x) = x + yx^2$ kvadratikus függvénynek két zérushelye van (l. a 2.17 ábrát). Így nincs olyan $y \geq 0$, amelyre $x + yx^2 \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát ebben az esetben a *Farkas-tétel nem érvényes*.



2.17. ábra. A 2.68 példában szereplő első függvény.

2. Tekintsük a következő konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1 + x \\ \text{subject to} \quad & x^2 - 1 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

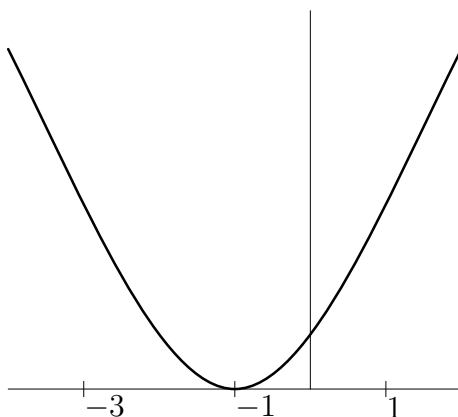
Ez a feladat Slater-reguláris (a 0 ideális Slater-pont). Az alábbi

$$\begin{aligned} 1 + x &< 0 \\ x^2 - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

rendszernek nincs megoldása. Ha $y = \frac{1}{2}$, akkor a

$$g(x) = x + 1 + y(x^2 - 1) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

kvadratikus függvénynek (l. 2.18 ábra) csak egy zérushelye van, így



2.18. ábra. A 2.68 példában szereplő második függvény.

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ minden } x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

2.19. Feladat. Legyen A egy $m \times n$ -es mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$ adott vektor. A 2.67 konvex Farkas-tétel felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a következő alternatív rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg:

$$(I) \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

vagy

$$(II) \quad A^T y \geq 0, \quad y \geq 0, \quad b^T y < 0.$$

2.20. Feladat. Tekintsük az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixokat és az $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^k$ vektorokat. Megfelelő átalakítások után a 2.67 konvex Farkas-tétel felhasználásával határozzuk meg az

$$Ax \leq a, \quad Bx < b, \quad x \geq 0$$

egyenlőtlenségrendszer alternatív rendszerét.

2.21. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ és $b \in \mathbb{R}^m$. A 2.67 konvex Farkas-tételt felhasználva bizonyítsuk be a lineáris optimalizálásra vonatkozó Goldman–Tucker-tételt:

Ha a

$$\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

primál és a

$$\max \{b^T y : A^T y + s = c, s \geq 0\}$$

duál feladatnak létezik optimális megoldása, akkor létezik olyan megoldás is, amelyre x^* optimális megoldása a primál feladatnak, (y^*, s^*) optimális megoldása a duál feladatnak, és

$$x^* + s^* > 0.$$

Az ilyen megoldásokat *szigorúan komplementárisnak* nevezzük.

2.22. Feladat. Keressük meg azt a h magasságú és r sugarú hengert, amelynek térfogata legalább V és felszíne minimális.

A feladat alapján a következő optimalizálási feladatot írhatjuk fel:

$$p^* := \min 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

a következő feltétel mellett:

$$\pi r^2 h \geq V, \quad r > 0, \quad h > 0.$$

1. Mutassuk meg, hogy a fenti feladatot átírhatjuk a következő formába:

$$p^* = \min 2\pi (e^{2x_1} + e^{x_1+x_2}),$$

az alábbi feltétel mellett:

$$\ln \left(\frac{V}{\pi} \right) - 2x_1 - x_2 \leq 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ez az új feladat olyan konvex optimalizálási feladat, amely kielégíti a Slater-feltételt.

3. A Farkas-tétel segítségével mutassuk meg, hogy az optimalitás feltétele: $r = \frac{1}{2}h = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Segítség: A feladat ekvivalens a következő rendszer megoldhatatlanságának igazolásával:

$$\begin{aligned} 2\pi (e^{2x_1} + e^{x_1+x_2}) &< 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \ln\left(\frac{V}{\pi}\right) - 2x_1 - x_2 &\leq 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.4.3. A Karush–Kuhn–Tucker-tétel

Definiáljunk a (CO) konvex optimalizálási feladathoz egy Lagrange-függvényt:

$$L(x, y) := f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x), \quad (2.26)$$

ahol $x \in \mathcal{C}$ és $y \geq 0$. Megjegyezzük, hogy rögzített y mellett a Lagrange-függvény konvex x -ben.

2.69. Definíció. Egy $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_{\oplus}^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ vektorpárt az L Lagrange-függvény nyeregpontjának hívunk, ha

$$L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y}) \quad (2.27)$$

minden $x \in \mathcal{C}$ és $y \geq 0$ esetén.

Könnyen belátható, hogy (2.27) ekvivalens a következővel:

$$L(\bar{x}, y) \leq L(x, \bar{y}) \quad \text{minden } x \in \mathcal{C}, \quad y \geq 0 \text{ esetén.}$$

2.70. Példa. [Nyeregpont] Tekintsük a következő konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \text{(CO)} \quad \min \quad & -x + 2 \\ & e^x - 4 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A feladat Lagrange-függvénye

$$L(x, y) = -x + 2 + y(e^x - 4),$$

ahol az y Lagrange-szorzó⁸ nemnegatív. Rögzített $y > 0$ mellett

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x, y) = -1 + ye^x = 0,$$

amiből következik, hogy $x = -\log y$. Így $L(-\log y, y) = \log y - 4y + 3$ a minimum.

Másrészt, egy megengedett x -re, azaz ha $x \leq \log 4$:

$$\sup_{y \geq 0} y(e^x - 4) = 0.$$

⁸Elterjedt még a *Lagrange-multiplikátor* elnevezés is.

Innen

$$\begin{aligned}\psi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} L(x, y) &= \begin{cases} \log y - 4y + 3 & \text{ha } y > 0, \\ -\infty & \text{ha } y = 0; \end{cases} \\ \phi(x) = \sup_{y \geq 0} L(x, y) &= \begin{cases} -x + 2 & \text{ha } x \leq \log 4, \\ \infty & \text{ha } x > \log 4. \end{cases}\end{aligned}$$

A

$$\frac{d}{dy}\psi(y) = \frac{1}{y} - 4 = 0$$

összefüggés $y = \frac{1}{4}$ esetén áll fenn, azaz ez az érték maximalizálja $\psi(y)$ -t. Innen $\sup_{y \geq 0} \psi(y) = -\log 4 + 2$. A $\phi(x)$ függvény minimuma $x = \log 4$ -nál van, így $\inf_{x \in \mathbb{R}} \phi(x) = -\log 4 + 2$. Azt kaptuk tehát, hogy $(\log 4, \frac{1}{4})$ az $L(x, y)$ Lagrange-függvény nyeregpontja.

2.71. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, y)$ véges. Ekkor az $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_{\oplus}^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ vektor akkor és csak akkor nyeregpontja az $L(x, y)$ függvénynek, ha*

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} \sup_{y \geq 0} L(x, y) = L(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{y \geq 0} \inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, y). \quad (2.28)$$

Bizonyítás: A (2.27) nyeregponthoz egyenlőtlenség egyszerűen következik a (2.28) egyenlőségből. Ehhez fel kell használnunk az infimumra tett végtességi feltételt.

Másrészt bármely (\hat{x}, \hat{y}) esetén

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, \hat{y}) \leq L(\hat{x}, \hat{y}) \leq \sup_{y \geq 0} L(\hat{x}, y).$$

A bal oldal szuprémumát és a jobb oldal infimumát véve:

$$\sup_{y \geq 0} \inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, y) \leq \inf_{x \in \mathcal{C}} \sup_{y \geq 0} L(x, y). \quad (2.29)$$

Ismét a (2.27) nyeregponthoz egyenlőtlenséget használva adódik, hogy

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} \sup_{y \geq 0} L(x, y) \leq \sup_{y \geq 0} L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, \bar{y}) \leq \sup_{y \geq 0} \inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, y), \quad (2.30)$$

ahonnan (2.30) és (2.29) összevetéséből kapjuk a (2.28) egyenlőséget. Vegyük észre, hogy a második részben nem használtuk ki, hogy $\inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, y)$ véges. \square

Még mindig nem tudjuk, hogy a nyeregponthoz létezik-e vagy sem. A Slater-regularitás feltevése mellett a következő tétel azt mondja ki, hogy $L(x, y)$ -nak akkor és csak akkor van nyeregpontja, ha (CO)-nak van optimális megoldása.

2.72. Tétel (Karush–Kuhn–Tucker). *Tekintsük a (CO) konvex optimalizálási feladatot és tegyük fel, hogy a Slater-regularitási feltétel teljesül. Az \bar{x} vektor akkor és csak akkor (CO) optimális megoldása, ha létezik olyan \bar{y} vektor, amelyre (\bar{x}, \bar{y}) az L Lagrange-függvény nyeregpontja.*

Bizonyítás: A tétel könnyebben bizonyítható része, hogy ha (\bar{x}, \bar{y}) az $L(x, y)$ függvény nyeregpontja, akkor \bar{x} optimális megoldása (CO)-nak. Ennek az iránynak a belátásához nem kell semmilyen regularitási feltétel. A (2.27) nyeregponthoz tartozó egyenlőtlenségből:

$$f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x)$$

minden $y \geq 0$ és $x \in \mathcal{C}$ esetén. Az első egyenlőtlenségből adódik, hogy $g_j(\bar{x}) \leq 0$ minden $j = 1, \dots, m$ -re. Így $\bar{x} \in \mathcal{F}$ (CO) megengedett megoldása. A fenti egyenlőtlenség jobb és bal oldalát véve, $y = 0$ esetén kapjuk, hogy

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \leq f(x)$$

minden $x \in \mathcal{C}$ -re, azaz \bar{x} optimális.

Az ellenkező irány bizonyításához szükség van a Slater-regularitásra és a 2.67 konvex Farkas-tételre. Vegyük a (CO) konvex optimalizálási feladat egy \bar{x} optimális megoldását. Ekkor az

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &< 0 \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ x &\in \mathcal{C} \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszer nem megoldható. A 2.67 konvex Farkas-tételt felhasználva létezik olyan $\bar{y} \geq 0$, amelyre

$$f(x) - f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \geq 0$$

minden $x \in \mathcal{C}$ mellett. Felhasználva, hogy \bar{x} megengedett megoldás, azonnal adódik a nyeregponthoz tartozó egyenlőtlenség:

$$f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x)$$

minden $y \geq 0$ és $x \in \mathcal{C}$ esetén. □

Az alábbiakban kifejtett következmények elvezetnek minket a Karush–Kuhn–Tucker optimalitási feltételekhez és a (CO) feladat Lagrange-duáljához. A Lagrange-dualitás speciális eseteként bemutatjuk a Wolfe-dualitás fogalmát, ha $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.

2.73. Következmény. A 2.72 tétel feltevései mellett az $\bar{x} \in \mathcal{C}$ vektor akkor és csak akkor optimális megoldása a (CO) feladatnak, ha létezik olyan $\bar{y} \geq 0$, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} (i) \quad f(\bar{x}) &= \min_{x \in \mathcal{C}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right\} \text{ és} \\ (ii) \quad \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) &= \max_{y \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^m y_j g_j(\bar{x}) \right\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Könnyen adódik a tételből. □

2.74. Következmény. A 2.72 tétel feltevései mellett az $\bar{x} \in \mathcal{F}$ vektor akkor és csak akkor optimális megoldása a (CO) feladatnak, ha létezik olyan $\bar{y} \geq 0$ vektor, amelyre

$$(i) \quad f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathcal{C}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right\} \text{ és}$$

$$(ii) \quad \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) = 0.$$

Bizonyítás: Egyszerűen levezethető a 2.73 következményből. □

2.75. Következmény. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ és az f, g_1, \dots, g_m függvények folytonosan differenciálhatóak. A 2.72 tétel feltevései mellett az $\bar{x} \in \mathcal{F}$ vektor akkor és csak akkor optimális megoldása a (CO) feladatnak, ha létezik olyan $\bar{y} \geq 0$, amelyre

$$(i) \quad 0 = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j \nabla g_j(\bar{x}) \quad \text{és}$$

$$(ii) \quad \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) = 0.$$

Bizonyítás: Azonnal adódik a 2.74 Következményből és az $f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x)$, $x \in \mathcal{C}$ függvény konvexitásából. □

2.23. Feladat. Bizonyítsuk be a fenti három következményt.

Megjegyezzük, hogy az utolsó következmény érvényes marad, ha a \mathcal{C} halmaz \mathbb{R}^n teljes dimenziójú nyílt részhalmaza. Ha \mathcal{C} halmaz nem teljes dimenziójú, akkor a jobboldali vektornak, a Lagrange-függvény x -gradiensének, ortogonálisnak kell lennie a \mathcal{C} halmaz affin burkában lévő bármely irányra. Ezeknek az állításoknak igazolását az olvasóra bizzuk.

Most definiáljuk a Karush–Kuhn–Tucker (KKT)-pont fogalmát.

2.76. Definíció (KKT-pont). Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ és az f, g_1, \dots, g_m függvények folytonosan differenciálhatóak. Az $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ vektort a (CO) feladat Karush–Kuhn–Tucker (KKT)-pontjának hívjuk, ha

$$(i) \quad g_j(\bar{x}) \leq 0, \text{ minden } j \in J - re,$$

$$(ii) \quad 0 = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j \nabla g_j(\bar{x})$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) = 0,$$

$$(iv) \quad \bar{y} \geq 0.$$

Fontos megérteni, hogy – a 2.75 következmény feltételei mellett – (\bar{x}, \bar{y}) akkor és csak akkor nyeregpontja (CO) Lagrange-függvényének, ha egyben KKT-pontja is (CO)-nak. Ennek bizonyítását az olvasóra bizzuk.

Az ún. Karush–Kuhn–Tucker elégséges optimalitási feltétel a 2.75 következményből következik.

2.77. Következmény (KKT elégséges feltétel). *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2.72 tétel feltételei, $C = \mathbb{R}^n$ és f, g_1, \dots, g_m folytonosan differenciálható, konvex függvények. Ha (\bar{x}, \bar{y}) KKT-pont, akkor \bar{x} a (CO) feladat optimális megoldása.*

Megadtuk tehát a (CO) konvex optimalizálási feladat szükséges és elégséges optimalitási feltételeit a Slater-regularitás feltevése mellett. Megjegyezzük, hogy ha az optimalizálási feladat nem konvex, vagy nem elégíti ki a regularitási feltételt, akkor csak gyengébb eredményekhez juthatunk.

2.24. Feladat. Bizonyítsuk be a 2.22 feladat 3. részét a Karush–Kuhn–Tucker optimalitási feltételek felhasználásával.

2.5. A konvex optimalizálás dualitáselmélete

A konvex optimalizálás elméletében és algoritmusában a dualitás ugyanolyan központi szerepet játszik, mint a lineáris optimalizálásban. A duál feladatot és a dualitási tételt egyszerűen származtathatjuk a KKT-elméletből vagy a konvex Farkas-tételből. Először definiáljuk a Lagrange-duált, majd speciális eseteként bemutatjuk a Wolfe-duált.

2.5.1. A Lagrange-duál

2.78. Definíció. Legyen $\psi(y) = \inf_{x \in C} \{f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x)\}$. A

$$\begin{aligned} \sup_{y \geq 0} \psi(y) \end{aligned} \tag{LD}$$

feladatot a (CO) konvex optimalizálási feladat Lagrange-duáljának hívjuk.

2.79. Lemma. A (CO) feladat (LD) Lagrange-duálja konvex optimalizálási feladat, még akkor is, ha az f, g_1, \dots, g_m függvények nem konvexek.

Bizonyítás: Mivel $\psi(y)$ maximalizálása ekvivalens $-\psi(y)$ minimalizálásával, csak azt kell belátnunk, hogy $-\psi(y)$ konvex, azaz $\psi(y)$ konkáv. Legyen $\bar{y}, \hat{y} \geq 0$ és $0 \leq \lambda \leq 1$. Felhasználva, hogy a két függvény összegének infimuma nagyobb, mint a két függvény

infimumának összege, ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \psi(\lambda\bar{y} + (1-\lambda)\hat{y}) &= \inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m (\lambda\bar{y}_j + (1-\lambda)\hat{y}_j)g_j(x) \right\} = \\
 &= \inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ \lambda \left[f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right] + (1-\lambda) \left[f(x) + \sum_{j=1}^m \hat{y}_j g_j(x) \right] \right\} \geq \\
 &\geq \inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ \lambda \left[f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right] \right\} + \inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ (1-\lambda) \left[f(x) + \sum_{j=1}^m \hat{y}_j g_j(x) \right] \right\} = \\
 &= \lambda\psi(\bar{y}) + (1-\lambda)\psi(\hat{y}). \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Ezzel a lemmát beláttuk. \square

2.80. Tétel (Gyenge dualitás). *Ha \bar{x} a (CO) feladat megengedett megoldása és $\bar{y} \geq 0$, akkor*

$$\psi(\bar{y}) \leq f(\bar{x}),$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet, ha $\inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right\} = f(\bar{x})$.

Bizonyítás: Egyszerű összefüggések alapján:

$$\psi(\bar{y}) = \inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right\} \leq f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) \leq f(\bar{x}).$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \right\} = f(\bar{x})$$

és így $\bar{y}_j g_j(\bar{x}) = 0$ minden $j \in J$ esetén. \square

2.81. Definíció. *Az $f(\bar{x}) - \psi(\bar{y}) \geq 0$ különbséget dualitásrésnek nevezzük.*

Mindezekből adódik az alábbi következmény:

2.82. Következmény. *Ha \bar{x} a (CO) feladat megengedett megoldása, $\bar{y} \geq 0$ és $\psi(\bar{y}) = f(\bar{x})$, akkor \bar{x} optimális megoldása (CO)-nak és \bar{y} optimális megoldása (LD)-nek. Továbbá, ha az f, g_1, \dots, g_m függvények folytonosan differenciálhatóak, akkor (\bar{x}, \bar{y}) KKT-pont.*

Az erős dualitási tétel bizonyításához regularitási feltételek is szükségesek.

2.83. Tétel (Erős dualitás). *Tegyük fel, hogy (CO) teljesíti a Slater-regularitási feltételt. Legyen \bar{x} (CO) megengedett megoldása. Az \bar{x} akkor és csak akkor (CO) optimális megoldása, ha létezik olyan $\bar{y} \geq 0$, amelyre \bar{y} optimális megoldása (LD)-nek és*

$$\psi(\bar{y}) = f(\bar{x}).$$

Bizonyítás: Közvetlenül adódik a 2.73 következményből. \square

2.25. Feladat. Bizonyítsuk be a 2.83 tételt.

Megjegyzés: Ha a konvex optimalizálási feladat nem elégíti ki a regularitási feltételt, akkor általánosságban nem igaz, hogy a dualitásrés 0. Úgyisint nem mindig igaz (még a regularitási feltételek mellett sem), hogy a konvex optimalizálási feladatnak létezik optimális megoldása. Gyakori, hogy a célfüggvénynek csak szupréma vagy infimuma létezik.

2.84. Példa. [Lagrange-duál] Tekintsük ismét a következő feladatot (l. a 2.68 példát)

$$\begin{aligned} \text{(CO)} \quad \min \quad & x \\ & x^2 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ahogy láttuk, ez a (CO) feladat *nem Slater-reguláris* és a 2.67 konvex Farkas-tétel nem érvényes az alábbi rendszerre:

$$\begin{aligned} x &< 0 \\ x^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Másrészt,

$$\psi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (x + yx^2) = \begin{cases} -\frac{1}{4y} & y > 0 \text{ esetén} \\ -\infty & y = 0 \text{ esetén.} \end{cases}$$

A Lagrange-duál:

$$\sup_{y \geq 0} \psi(y).$$

A Lagrange-duál optimális célfüggvényértéke 0, tehát annak ellenére, hogy a Slater-regularitás nem teljesül, a *dualitásrés 0*.

2.5.2. A Wolfe-duál

A Lagrange-duál (LD) felépítésének és a 2.72 tétel következményeinél tett feltevések hasonlóságából vezethető le a Wolfe-duál.

2.85. Definíció. Tegyük fel, hogy $C = \mathbb{R}^n$ és az f, g_1, \dots, g_m függvények folytonosan differenciálhatóak és konvexek. A következő feladatot

$$\begin{aligned} \sup \quad & \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \right\} \\ \nabla f(x) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) &= 0 \\ y &\geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{WD}$$

a (CO) feladat Wolfe-duáljának hívjuk.

A (WD) feladatban $y \geq 0$ és $x \in \mathbb{R}^n$, valamint (WD) célfüggvénye az $L(x, y)$ Lagrange-függvény, így a Wolfe-duál célfüggvénye konkáv. Ha a Lagrange-függvénynek van nyereg-pontja, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ és f, g_1, \dots, g_m folytonosan differenciálható konvex függvények, akkor a két duál feladat megegyezik.

Az előző fejezet állításait felhasználva egyszerűen bizonyítható az erős és a gyenge dualitási tétel. A dualitáselmélet részletesebb kifejtése a [2, 31] könyvekben található.

2.86. Tétel (Gyenge dualitás Wolfe-duál esetén). *Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ és f, g_1, \dots, g_m folytonosan differenciálható, konvex függvények. Ha \hat{x} a (CO) feladat megengedett megoldása, és (\bar{x}, \bar{y}) (WD) megengedett megoldása, akkor*

$$L(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\hat{x}).$$

Más szavakkal, a gyenge dualitás fennáll a (CO) és a (WD) feladatok esetében.

Bizonyítás: Legyen (\bar{x}, \bar{y}) a (WD) feladat megengedett megoldása. Mivel az f és a g_1, \dots, g_m függvények folytonosan differenciálhatóak és konvexek, és $\bar{y} \geq 0$, ezért a

$$h(x) := f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x)$$

függvénynek is konvexnek és folytonosan differenciálhatónak kell lennie (l. a 2.33 lemmát az 53. oldalon). Mivel (\bar{x}, \bar{y}) a Wolfe-duál megengedett megoldása, így

$$\nabla h(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j'(\bar{x}) = 0.$$

Ez a 2.51 lemma szerint azt jelenti, hogy \bar{x} minimalizálja a h függvényt, tehát

$$f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.32)$$

Legyen \hat{x} a (CO) feladat tetszőleges megengedett megoldása. Ha $x = \hat{x}$ a (2.32) egyenlőtlenségben, akkor

$$f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\bar{x}) \leq f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{y}_j g_j(\hat{x}) \leq f(\hat{x}),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert $\bar{y} \geq 0$ és $g_j(\hat{x}) \leq 0$ ($j = 1, \dots, m$). Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

2.87. Tétel (Erős dualitás Wolfe-duál esetén). *Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ és f, g_1, \dots, g_m folytonosan differenciálható konvex függvények. Tegyük még fel, hogy (CO) kielégíti a Slater-regularitási feltételt. Legyen \bar{x} megengedett megoldása a (CO) feladatnak. Ekkor \bar{x} akkor és csak akkor optimális megoldás, ha létezik olyan $\bar{y} \geq 0$, amelyre (\bar{x}, \bar{y}) optimális megoldása a Wolfe-duálnak.*

Bizonyítás: Azonnal következik a 2.75 Következményből. \square

Figyelmeztetés! A nemlineáris optimalizálási feladat Wolfe-duálját csak akkor írhatjuk fel, ha az eredeti feladat *konvex* volt. A $\psi(y)$ függvény definíciójában szereplő infimum helyett csak akkor írhatjuk a szélsőérték elsőrendű feltételét (az x -gradiens 0), ha az f és a g_j , $j \in J$ függvények konvexek. Egyébként a

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) = 0$$

feltétel nem garantálja a minimumot, hanem kaphatunk maximumokat, nyeregponthoz, inflexiós pontokat. Nemkonvex feladatokhoz csak a Lagrange-duált használhatjuk.

2.26. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy – a 2.87 tétel feltevései mellett – a (CO) feladat Lagrange- és a Wolfe-duálja megegyezik.

2.27. Feladat. Olyan téglalap alapú hasábot szeretnénk készíteni, amelynek hossza l , szélessége b , magassága h , térfogata legalább V , és felszíne minimális. Ezt a feladatot a következő (nemkonvex) formában írhatjuk fel:

$$\min_{l,b,h} 2(lb + bh + lh), \quad lbh \geq V, \quad l, b, h > 0. \quad (2.33)$$

i. Új változók bevezetésével alakítsuk át (2.33) feladatot az alábbi alakra:

$$\min_{x_1, x_2, x_3} 2(e^{x_1+x_2} + e^{x_2+x_3} + e^{x_1+x_3}), \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq \ln(V), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \quad (2.34)$$

ii. Mutassuk meg, hogy az átalakított feladat konvex és kielégíti a Slater-feltételt.

iii. Mutassuk meg, hogy a (2.34) feladat Lagrange-duálja:

$$\max_{\lambda \geq 0} \left(\frac{3}{2} + \ln(V) \right) \lambda - \frac{3}{2} \lambda \ln \left(\frac{\lambda}{4} \right). \quad (2.35)$$

iv. Mutassuk meg, hogy a (2.34) feladat Lagrange- és Wolfe-duálja megegyezik.

v. A (2.34) feladat KKT feltételeit felhasználva mutassuk meg, hogy az $l = b = h = V^{1/3}$ kocka a (2.33) feladat optimális megoldása.

vi. Vezessük le a fenti eredményeket a (2.35) feladat duáljának felhasználásával is.

2.5.3. Példák duál feladatokra

Ebben a fejezetben néhány speciális konvex optimalizálási feladat Lagrange- és Wolfe-duálját vezetjük le.

Lineáris optimalizálás

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c, x \in \mathbb{R}^n$. A primál lineáris optimalizálási feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{LO}$$

Ekkor $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, és nyilvánvaló, hogy a feltételek folytonosan differenciálhatóak. Jelölje a^j az A mátrix j -edik sorát. A feltételeket felírhatjuk így is:

$$\mathbb{R}^{2m+n} \ni 0 \geq g(x) = \begin{cases} (a^j)^T x - b_j, & \text{ha } j = 1, \dots, m; \\ (-a^{j-m})^T x + b_{j-m}, & \text{ha } j = m+1, \dots, 2m; \\ -x_{j-2m}, & \text{ha } j = 2m+1, \dots, 2m+n. \end{cases} \tag{2.36}$$

A Lagrange-szorzókat jelölje y^-, y^+ és s . Az (LO) feladat Wolfe-duálja (WD):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x + (y^-)^T (Ax - b) + (y^+)^T (-Ax + b) + s^T (-x) \\ & c + A^T y^- - A^T y^+ - s = 0, \\ & y^- \geq 0, \quad y^+ \geq 0, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Az első feltételből kapjuk, hogy $c = -A^T y^- + A^T y^+ + s$, ezt a célfüggvénybe behelyettesítve és az $y = y^+ - y^-$ új változót bevezetve megkapjuk a lineáris optimalizálási feladat sztenderd duálját:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{aligned} \tag{LD}$$

Megjegyezzük, hogy a KKT optimalitási feltételek a jól ismert komplementaritási⁹ feltételt adják: $x^T s = 0$.

Kvadratikus optimalizálás

A kvadratikus optimalizálási feladatot is hasonlóan vizsgáljuk meg. Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c, x \in \mathbb{R}^n$. A primál kvadratikus optimalizálási feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{QO}$$

⁹complementary slackness

Ekkor ismét $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, a feltételek pedig folytonosan differenciálhatóak. Ha a^j jelöli az A mátrix j -edik sorát, akkor a feltételeket az alábbi alakban is felírhatjuk:

$$\mathbb{R}^{m+n} \ni 0 \geq g(x) = \begin{cases} (-a^j)^T x + b_j, & \text{ha } j = 1, \dots, m; \\ -x_{j-m}, & \text{ha } j = m+1, \dots, m+n. \end{cases} \quad (2.37)$$

A Lagrange-szorzókat jelölje y és s . A (QO) feladat Wolfe-duálja (WD):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x + y^T (-Ax + b) + s^T (-x) \\ & c + Qx - A^T y - s = 0, \\ & y \geq 0, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Az egyenlőségből kapott $c = -Qx + A^T y + s$ feltételt a célfüggvénybe behelyettesítve megkapjuk a kvadratikus optimalizálási feladat duálját:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y - \frac{1}{2} x^T Q x \\ & -Qx + A^T y + s = c, \\ & y \geq 0, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a duál feladatban szereplő x vektor nem szükségszerűen megengedett megoldása (QO)-nak! Az x változó eliminálásával a duál feladat más formában is megadható.

Mivel Q pozitív szemidefinit, szimmetrikus mátrix, ezért (pl. a Cholesky-faktorizáció segítségével) felírható $Q = D^T D$ alakban. Vezessük be a $z = Dx$ új változót, így megkapjuk a duál feladat sztenderd alakját:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y - \frac{1}{2} z^T z \\ & -D^T z + A^T y + s = c \\ & y \geq 0 \\ & s \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{QD})$$

Megjegyezzük, hogy az optimalitási feltételek a következők: $x^T s = 0$, $y^T (Ax - b) = 0$ és $z = Dx$.

Feltételes maximum likelihood becslés

A maximum likelihood becslést gyakran használják a statisztikában, de jól szemléltethető rajta a konvex optimalizálás dualitása is.

Tekintsük az x_i , $i = 1, \dots, n$ mintapontokat. Néhány lineáris feltétel (pl. konvexitás) mellett adunk becslést a mintabeli pontok bekövetkezésének valószínűségére. Formalizálva, a feladat során a $\prod_{i=1}^n x_i$ likelihood-függvény maximumát kell meghatározni a következő feltételek mellett:

$$Ax \geq 0, \quad d^T x = 1, \quad x \geq 0.$$

Az $Ax \geq 0$ egyenlőtlenség adja a lineáris feltételeket, az $x \geq 0$ feltétel garantálja a sűrűségfüggvény nemnegativitását, végül a $d^T x = 1$ feltétel biztosítja, hogy a (becsült) sűrűségfüggvény integrálja 1 legyen. A logaritmus függvény monotonitása miatt a célfüggvény helyett ezt írhatjuk:

$$\min \quad -\sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

ezzel a feladatot konvex optimalizálási feladattá alakítottuk. Ekkor ismét $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ és minden feltétel lineáris, így folytonosan differenciálható. A Lagrange-szorzókat jelölje $y \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$ és $s \in \mathbb{R}^n$. A feladat Wolfe-duálja:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{i=1}^n \ln x_i + y^T(-Ax) + t(d^T x - 1) + s^T(-x) \\ & -X^{-1}e - A^T y + td - s = 0, \\ & y \geq 0, \quad s \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ és $X = \text{diag}(x)$. A $d^T x = 1$ feltételt az egyszerűség kedvéért nem helyettesítettük két egyenlőtlenséggel, hanem úgy vettük, hogy a feltétel Lagrange-szorzója szabad változó. Az első feltételt x^T -vel szorozva:

$$-x^T X^{-1}e - x^T A^T y + tx^T d - x^T s = 0.$$

Mivel $d^T x = 1$, $x^T X^{-1}e = n$, az optimalitási feltétel pedig $y^T Ax = 0$, $x^T s = 0$, ezért

$$t = n.$$

A primál célfüggvényben szereplő logaritmusnak köszönhetően a primál optimális megoldás szükségszerűen szigorúan pozitív, így az s duálváltozónak az optimumban nullának kell lennie. Mindezek alapján a duál feladat:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{i=1}^n \ln x_i \\ & X^{-1}e + A^T y = nd, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Az $x_i > 0$ változókat eliminálva ($x_i = \frac{1}{nd_i - a_i^T y}$ és $-\ln x_i = \ln(nd_i - a_i^T y)$ minden $i = 1, \dots, n$ -re) kapjuk a duál feladat végső alakját:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n \ln (nd_i - a_i^T y) \\ & A^T y \leq nd, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

2.5.4. Néhány példa pozitív dualitásrésre

2.88. Példa. [Duffin] Megmutatjuk, hogy néhány konvex feladatnál pozitív dualitásrést kaphatunk, ha a feladat nem teljesíti a Slater-regularitási feltételt. Sőt, látni fogjuk, hogy a Wolfe-duál lényegesen gyengébb eredményekre vezethet, mint a Lagrange-duál.

Vegyük a következő konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & e^{-x_2} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 & \leq 0 \\ x & \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{CO}$$

A megengedett megoldások halmaza $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$. Az egyetlen feltétel nemlineáris és szinguláris, így a feladat nem Slater-reguláris. A célfüggvény optimális értéke 1. A Lagrange-függvény:

$$L(x, y) = e^{-x_2} + y \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \right).$$

A Wolfe-duál:

$$\begin{aligned} \min \quad & e^{-x_2} + y \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \right) \\ -y + y \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} &= 0 \\ -e^{-x_2} + y \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} &= 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned} \tag{WD}$$

Az első feltételből $x_2 = 0$ és $x_1 \geq 0$, de ezek az értékek nem elégítik ki a második feltételt, így a Wolfe-duál nem megoldható, a dualitásrés végtelen.

Nézzük meg, hogy mi történik a Lagrange-duál esetében. Legyen $\varepsilon = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1$, ekkor

$$x_2^2 - 2\varepsilon x_1 - \varepsilon^2 = 0.$$

Így minden $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $x_1 > 0$, amelyre teljesül, hogy $\varepsilon = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1$, még akkor is, ha x_2 végtelenhez tart. Amikor x_2 végtelenbe tart, e^{-x_2} 0-hoz tart. Így,

$$\psi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} e^{-x_2} + y \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \right) = 0,$$

a Lagrange-duál pedig:

$$\begin{aligned} \max \quad & \psi(y) \\ y & \geq 0. \end{aligned} \tag{LD}$$

Az optimális célfüggvényérték 0. Ekkor a dualitásrés 1.

Vegyük észre, hogy a Wolfe-duál azért nem oldható meg, mert a $\psi(y)$ függvény definíciójában szereplő infimum létezik, de nem érhető el.

2.89. Példa. [Alapmodell 0 dualitásréssel] Tekintsük először a következő egyszerű konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min x_1 \\ x_1^2 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -1 - x_1 &\leq 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Nyilván $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$. A megengedett megoldások halmaza:

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \geq 0\},$$

így minden megengedett $(x_1, x_2) \in \mathcal{F}$ vektor optimális, és az optimális célfüggvényérték 0. Mivel $x_1 = 0$ minden megengedett megoldás esetén, ezért a (2.38) feladat nem Slater-reguláris.

Írjuk fel a feladat Lagrange-duálját. Az (y_1, y_2, y_3) Lagrange-szorzók nemnegatívak és

$$L(x, y) = x_1 + y_1 x_1^2 - y_2 x_2 - y_3(1 + x_1),$$

ahol $x \in \mathbb{R}^2$ és $y \in \mathbb{R}^3$, $y \geq 0$.

A Lagrange-duál:

$$\begin{aligned} \max \psi(y) \\ y &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.39}$$

ahol

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{x_1 + y_1 x_1^2 - y_2 x_2 - y_3(1 + x_1)\} = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{x_1(1 - y_3) + y_1 x_1^2 - y_2 x_2 - y_3\} = \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{ha } y_2 \neq 0 \text{ vagy } y_1 = 0 \text{ de } y_3 \neq 1; \\ 0 & \text{ha } y_2 = 0, y_1 = 0 \text{ és } y_3 = 1; \\ -y_3 - \frac{(1-y_3)^2}{4y_1} & \text{ha } y_2 = 0 \text{ és } y_1 \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.40}$$

A legutolsó kifejezés a fenti formulában úgy kapható meg, hogy rögzített y_1 és y_3 mellett az $x_1(1 - y_3) + y_1 x_1^2 - y_3$ konvex kvadratikus függvényt minimalizáljuk. Mivel ez utóbbi kifejezés nem pozitív, ezért $\psi(y)$ maximuma 0. Ebben az esetben tehát mind a primál, mind a duál feladatnak van optimális megoldása, a célfüggvényértékek pedig egyenlőek.

2.90. Példa. [Változat pozitív dualitásrésre] Tekintsük ismét a (2.38) feladatot, de változtassuk meg a megengedett megoldások halmazát. Látni fogjuk, hogy más duál feladatot fogunk kapni. Az új duál feladatnak is lesz optimális megoldása, de a dualitásrés pozitív lesz.

$$\begin{aligned} \min x_1 \\ x_0 - s_0 &= 0 \\ x_1 - s_1 &= 0 \\ x_2 - s_2 &= 0 \\ 1 + x_1 - s_3 &= 0 \\ x_0 &= 0 \\ x &\in \mathbb{R}^3, s \in \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Látjuk, hogy (2.41) megfelelő formájú: a feltételek lineárisak, így konvexek, valamint az (x, s) vektor az $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{C}$ konvex halmazból való. A \mathcal{C} konvex halmazt a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{C} = \{s = (s_0, s_1, s_2, s_3) : s_0 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_0 s_2 \geq s_1^2\}.$$

A megengedett megoldások halmaza:

$$\mathcal{F} = \{(x, s) : x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 \geq 0, s_0 = 0, s_1 = 0, s_2 \geq 0, s_3 = 1\},$$

így minden $(x, s) \in \mathcal{F}$ megengedett megoldás optimális, és a feladat célfüggvényének optimális értéke 0.

Az egyenlőséggel teljesülő feltételek miatt az $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ Lagrange-szorzók szabad változók, és a Lagrange-függvény:

$$L(x, s, y) = x_1 + y_0(x_0 - s_0) + y_1(x_1 - s_1) + y_2(x_2 - s_2) + y_3(1 + x_1 - s_3) + y_4 x_0,$$

ahol $x \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathcal{C}$ és $y \in \mathbb{R}^5$. A Lagrange-duál:

$$\begin{aligned} \max \quad & \psi(y) \\ & y \in \mathbb{R}^5, \end{aligned} \tag{2.42}$$

ahol

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^3, s \in \mathcal{C}} L(x, s, y) = \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^3, s \in \mathcal{C}} \{x_1(1 + y_1 + y_3) + x_0(y_4 + y_0) + x_2 y_2 - s_0 y_0 - s_1 y_1 - s_2 y_2 - s_3 y_3 + y_3\} = \\ &= \begin{cases} y_3 & \text{ha } 1 + y_1 + y_3 = 0, y_4 + y_0 = 0, y_2 = 0, y_3 \leq 0, y_0 \leq 0, y_1 = 0; \\ -\infty & \text{különben.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.43}$$

Az utolsó egyenlőség némi magyarázatot igényel.

- Ha $1 + y_1 + y_3 \neq 0$ és $x_0 = x_2 = 0$, $s = 0$, akkor $L(x, s, y) = x_1(1 + y_1 + y_3) + y_3$, így $\inf L(x, s, y) = -\infty$.
- Ha $y_4 + y_0 \neq 0$ és $x_1 = x_2 = 0$, $s = 0$, akkor $L(x, s, y) = x_0(y_4 + y_0) + y_3$, így $\inf L(x, s, y) = -\infty$.
- Ha $y_2 \neq 0$, $x_0 = x_1 = 0$, $s = 0$, akkor $L(x, s, y) = x_2 y_2 + y_3$, így $\inf L(x, s, y) = -\infty$.
- Ha $y_0 > 0$, $x = 0$, $s_0 \geq 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, akkor $L(x, s, y) = -s_0 y_0 + y_3$, így $\inf L(x, s, y) = -\infty$.
- Ha $y_3 > 0$, $x = 0$, $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 \geq 0$, akkor $L(x, s, y) = -s_3 y_3 + y_3$, így $\inf L(x, s, y) = -\infty$.
- Ha $y_2 = 0$ de $y_1 \neq 0$, és $x = 0$, $s_3 = 0$, $(s_0, s_1, s_2, s_3) = \left(\frac{1}{\tau}, \frac{y_1}{|y_1|} \tau, \tau^2, 0\right) \in \mathcal{C}$, akkor $L(x, s, y) = -\frac{1}{\tau} y_0 - \frac{y_1}{|y_1|} \tau y_1 + y_3$, így $\inf L(x, s, y) = -\infty$ (ha $\tau \rightarrow \infty$).

A fenti eredményeket összegezve a Lagrange-duál:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_3 \\ & y_0 \leq 0 \\ & y_1 = 0 \\ & y_2 = 0 \\ & y_3 = -1 \\ & y_4 = -y_0. \end{aligned}$$

Ekkor minden megengedett megoldásra $y_3 = -1$, így a Lagrange-duál optimális célfüggvényértéke -1 , azaz mind a primál (2.41), mind a duál (2.42) feladatnak van optimális megoldása, de célfüggvényértékeik nem egyenlőek.

2.28. Feladat.

1. Bizonyítsuk be, hogy az $s_1^2 - s_0 s_2$ függvény nem konvex.
2. Bizonyítsuk be, hogy a \mathcal{C} halmaz konvex.
3. Bizonyítsuk be, hogy a (2.41) feladat nem teljesíti a Slater-feltételt.

2.29. Feladat. Módosítsuk a fenti optimalizálási feladatot úgy, hogy adott $\gamma > 0$ esetén a nem nulla dualitásrés az optimumban γ legyen.

2.91. Példa. [Dualitás nemkonvex feladatok esetén 1] Tekintsük a következő nemkonvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - 2x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Az optimális célfüggvényérték -4 , az optimális megoldás $x = (0, 2)$. A Lagrange-függvény:

$$L(x, y) = x_1^2 - 2x_2 + y(x_1^2 + x_2^2 - 4), \quad \text{ahol } y \in \mathbb{R},$$

és ekkor

$$\psi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, y) = \inf_{x_1} \{(1+y)x_1^2\} + \inf_{x_2} \{yx_2^2 - 2x_2\} - 4y.$$

Láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \inf_{x_1} \{(1+y)x_1^2\} &= \begin{cases} 0 & y \geq -1 \text{ esetén} \\ -\infty & y < -1 \text{ esetén} \end{cases} \\ \inf_{x_2} \{yx_2^2 - 2x_2\} &= \begin{cases} -\frac{1}{y} & y > 0 \text{ esetén} \\ -\infty & y \leq 0 \text{ esetén.} \end{cases} \end{aligned}$$

Így a Lagrange-duál:

$$\sup_{y>0} \left\{ -\frac{1}{y} - 4y \right\},$$

ami egy konvex optimalizálási feladat, az optimális célfüggvényérték -4 , az optimális megoldás $y = \frac{1}{2}$. Vegyük észre, hogy bár a feladat nem konvex, valamint nem teljesül a Slater-regularitási feltétel, a dualitásrés mégis 0 .

2.92. Példa. [Dualitás nemkonvex feladatok esetén 2] Tekintsük a következő nemkonvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x \in \mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x_1, x_2 \leq 4\}. \end{aligned}$$

Az optimális célfüggvényérték -12 , és az optimumban $x = (-2, 4)$. A feladat Lagrange-függvénye:

$$L(x, y) = x_1^2 - x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2), \quad \text{ahol } y \geq 0$$

így $y \geq 0$ esetén

$$\psi(y) = \inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, y) = \inf_{-2 \leq x_1 \leq 4} \{x_1^2 + yx_1\} + \inf_{-2 \leq x_2 \leq 4} \{-x_2^2 + yx_2\} - 2y.$$

Itt $x_1^2 + yx_1$ egy parabola, amelynek $x_1 = -\frac{y}{2}$ -ben minimuma van. Ez a minimumhely \mathcal{C} -ben van, ha $y \leq 4$. Az $y \geq 4$ esetben a függvény minimuma a \mathcal{C} halmaz határán van.

A $-x_2^2 + yx_2$ parabola mindig \mathcal{C} határán veszi fel a minimumát: $x_2 = -2$, ha $y \geq 2$, és $x_2 = 4$, ha $y \leq 2$. Így

$$\psi(y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{4} + 2y - 16 & \text{ha } y \leq 2, \\ -\frac{y^2}{4} - 4y - 4 & \text{ha } 2 \leq y \leq 4, \\ -6y & \text{ha } y \geq 4. \end{cases}$$

A különböző intervallumokon a maximumok:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq y \leq 2} \psi(y) &= -13, \\ \sup_{2 \leq y \leq 4} \psi(y) &= -13, \\ \sup_{y \geq 4} \psi(y) &= -24, \end{aligned}$$

így a Lagrange-duál optimális célfüggvényértéke -13 , a dualitásrés pedig 1 .

2.93. Példa. [Wolfe-duál] Tekintsük a következő konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + e^{x_2} \\ & 3x_1 - 2e^{x_2} \geq 10 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Az optimális célfüggvényérték 5, az optimális megoldás $x = (4, 0)$. A feladat Wolfe-duálja:

$$\begin{aligned} \sup x_1 + e^{x_2} + y_1 (10 - 3x_1 + 2e^{x_2}) - y_2 x_2 \\ 1 - 3y_1 &= 0 \\ e^{x_2} + 2e^{x_2}y_1 - y_2 &= 0 \\ x \in \mathbb{R}^2, y &\geq 0, \end{aligned}$$

ami egy nemkonvex optimalizálási feladat. Az első feltételből következik, hogy $y_1 = \frac{1}{3}$, a második feltétel így:

$$\frac{5}{3}e^{x_2} - y_2 = 0.$$

Ha elimináljuk y_1 -et és y_2 -t a célfüggvényből, az alábbi függvényt kapjuk:

$$f(x_2) = \frac{5}{3}e^{x_2} - \frac{5}{3}x_2e^{x_2} + \frac{10}{3}.$$

Ennek a függvénynek akkor van maximuma, ha

$$f'(x_2) = -\frac{5}{3}x_2e^{x_2} = 0,$$

ami csak $x_2 = 0$ és $f(0) = 5$ mellett teljesül. Így a Wolfe-duál optimális célfüggvényértéke 5, és az optimális megoldás $(x, y) = (4, 0, \frac{1}{3}, 5)$.

Ellenőrizzük a fenti eredményt a Lagrange-duál segítségével. Legyen

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{x_1 + e^{x_2} + y_1 (10 - 3x_1 + 2e^{x_2}) - y_2 x_2\} = \\ &= \inf_{x_1 \in \mathbb{R}} \{x_1 - 3y_1 x_1\} + \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} \{(1 + 2y_1)e^{x_2} - y_2 x_2\} + 10y_1. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Az első infimum:

$$\inf_{x_1 \in \mathbb{R}} \{x_1 - 3y_1 x_1\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y_1 = \frac{1}{3} \\ -\infty & \text{különben.} \end{cases}$$

A második infimumhoz legyen y_1, y_2 rögzített, $y_2 > 0$. A

$$g(x_2) = (1 + 2y_1)e^{x_2} - y_2 x_2$$

függvény akkor minimális, ha

$$g'(x_2) = (1 + 2y_1)e^{x_2} - y_2 = 0,$$

azaz amikor $x_2 = \log\left(\frac{y_2}{1+2y_1}\right)$. Ekkor

$$g\left(\log\left(\frac{y_2}{1+2y_1}\right)\right) = y_2 - y_2 \log\left(\frac{y_2}{1+2y_1}\right),$$

így

$$\inf_{x_2 \in \mathbb{R}} \{(1 + 2y_1)e^{x_2} - y_2 x_2\} = \begin{cases} y_2 - y_2 \log\left(\frac{y_2}{1+2y_1}\right) & \text{ha } y_2 > 0 \\ 0 & \text{ha } y_2 = 0. \end{cases}$$

Most már felírhatjuk a Lagrange-duált:

$$\begin{aligned} \sup \psi(y) &= 10y_1 + y_2 - y_2 \log \left(\frac{y_2}{1 + 2y_1} \right) \\ y_1 &= \frac{1}{3} \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

A szélsőérték feltétele, hogy

$$\frac{d}{dy_2} \psi \left(\frac{1}{3}, y_2 \right) = \log \left(\frac{3y_2}{5} \right) = 0,$$

ami $y_2 = \frac{5}{3}$ esetén teljesül. A duál célfüggvényérték $-\psi \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right) = 5$ – megegyezik a primál célfüggvényértékkel, vagyis a dualitásrés 0.

2.5.5. Szemidefinit optimalizálás

A primál és a duál feladat

Legyenek $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ szimmetrikus mátrixok. Továbbá legyen $c, x \in \mathbb{R}^n$. A *szemidefinit optimalizálási feladat* primál alakja:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & -A_0 + \sum_{k=1}^n A_k x_k \succeq 0, \end{aligned} \tag{PSO}$$

ahol $\succeq 0$ azt jelzi, hogy a bal oldali mátrixnak pozitív szemidefinitnek kell lennie. Egyértelmű, hogy (PSO) konvex optimalizálási feladat, mivel pozitív szemidefinit mátrixok konvex kombinációja is pozitív szemidefinit. A kényelmes jelölés érdekében legyen

$$F(x) = -A_0 + \sum_{k=1}^n A_k x_k.$$

A *szemidefinit optimalizálási feladat* duál alakja (l. pl. [49]):

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Tr}(A_0 Z) \\ & \text{Tr}(A_k Z) = c_k, \quad \text{minden } k = 1, \dots, n, \quad \text{esetén} \\ & Z \succeq 0, \end{aligned} \tag{DSO}$$

ahol $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a változó mátrixa. A szemidefinit optimalizálási feladat duálja is konvex. A mátrix nyoma a mátrix lineáris függvénye. A pozitív szemidefinit mátrixok konvex kombinációja is pozitív szemidefinit.

2.94. Tétel (Gyenge dualitás). *Ha $x \in \mathbb{R}^n$ primál megengedett megoldás és $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ duál megengedett megoldás, akkor*

$$c^T x \geq \text{Tr}(A_0 Z)$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$F(x)Z = 0.$$

Bizonyítás: A duál feladat feltételei és a mátrix nyomának alapvető tulajdonságai alapján:

$$\begin{aligned} c^T x - \text{Tr}(A_0 Z) &= \sum_{k=1}^n \text{Tr}(A_k Z) x_k - \text{Tr}(A_0 Z) = \\ &= \text{Tr} \left(\left(\sum_{k=1}^n A_k x_k - A_0 \right) Z \right) = \text{Tr}(F(x)Z) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert mind $F(x)$, mind a Z mátrix pozitív szemi-definit. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $F(x)Z = 0$. \square

A duál mint Lagrange–Wolfe-duál

Először átalakítjuk a (PSO) feladatot, hogy a duál feladatot egyszerűbben származtathassuk. A (PSO) feladat ekvivalens az alábbival:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & -F(x) + S = 0 \\ & S \succeq 0, \end{aligned} \quad (\text{PSO}')$$

ahol az $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ szimmetrikus mátrix a szokásos „slack változók” szerepét tölti be. A (PSO') feladat $L(x, S, Z)$ Lagrange-függvényét az

$$\{ (x, S, Z) : x \in \mathbb{R}^n, S \in \mathbb{R}^{m \times m}, S \succeq 0, Z \in \mathbb{R}^{m \times m} \}$$

halmazon így definiáljuk:

$$L(x, S, Z) = c^T x - e^T (F(x) \cdot Z) e + e^T (S \cdot Z) e,$$

ahol $e^T = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ és $X \cdot Z$ a mátrixok koordinátánkénti (Minkowski-) szorzatát jelöli. Mielőtt továbblépnénk, vegyük észre, hogy $e^T (S \cdot Z) e = \text{Tr}(SZ)$, így a Lagrange-függvény a következőképpen módosul:

$$L(x, S, Z) = c^T x - \sum_{k=1}^n x_k \text{Tr}(A_k Z) + \text{Tr}(A_0 Z) + \text{Tr}(SZ). \quad (2.46)$$

Mielőtt a (PSO') feladat Lagrange-duálját felírnánk, vegyük észre, hogy $F(x)$ szimmetrikussága miatt feltehetjük, hogy a Z mátrix is szimmetrikus. A (PSO') feladat Lagrange-duálja:

$$\max \{ \psi(Z) : Z \in \mathbb{R}^{m \times m} \}, \quad (\text{DSDL})$$

ahol

$$\psi(Z) = \min \{ L(x, S, Z) : x \in \mathbb{R}^n, S \in \mathbb{R}^{m \times m}, S \succeq 0 \}. \quad (2.47)$$

Ahogy a Wolfe-duálnál is tettük, $\psi(Z)$ -t könnyen kiszámíthatjuk az optimalitási feltételek segítségével. Mivel $\psi(Z)$ -ben a minimalizálás az x szabad változó és az S pozitív szemidefinit mátrix szerint történik, továbbá az $L(x, S, Z)$ függvény szeparábilis az x és S változókra, így a minimumokat külön-külön kezelhetjük.

Ha S szerint minimalizálunk, akkor az $L(x, S, Z)$ Lagrange-függvényben $\text{Tr}(SZ)$ kivételével csak konstans szerepel. Az S mátrix pozitív szemidefinit, így

$$\min_S \text{Tr}(SZ) = \begin{cases} 0 & \text{ha } Z \succeq 0, \\ -\infty & \text{különben.} \end{cases} \quad (2.48)$$

Ha x szerint minimalizálunk, akkor a $\frac{d}{dx}L(x, S, Z) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Ebből következően

$$c_k - \text{Tr}(A_k Z) = 0 \quad \text{minden } k = 1, \dots, n \text{ esetén.} \quad (2.49)$$

A (2.49) egyenletet x_k -val szorozva és összegezve k szerint:

$$c^T x - \sum_{k=1}^n x_k \text{Tr}(A_k Z) = 0.$$

Ez utóbbi kifejezést és (2.48), (2.49) eredményeit felhasználva kapjuk a (DSDL) Lagrange-duál egyszerűsített alakját, a Lagrange–Wolfe-duált:

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Tr}(A_0 Z) \\ \text{Tr}(A_k Z) = c_k, \quad & \text{minden } k = 1, \dots, n \text{ mellett} \\ Z \succeq 0, \end{aligned} \quad (\text{DSO})$$

2.30. Feladat. Tekintsük a 2.89 példa feladatát.

1. Bizonyítsuk be, hogy a (2.41) feladat szemidefinit optimalizálási feladat.
2. Adjuk meg a szemidefinit feladat duálját.
3. Bizonyítsuk be, hogy erre a szemidefinit primál-duál feladatpárra pozitív dualitásrést kapunk.

2.5.6. Dualitás kúp-lineáris optimalizálás esetén

Ebben a fejezetben *kúp-lineáris* optimalizálási feladatokkal fogunk foglalkozni. A kúp-lineáris optimalizálási feladat a jól ismert sztenderd lineáris optimalizálási feladat természetes általánosítása:

$$\min \{ c^T x : Ax \geq b, x \geq 0 \},$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$. A feltételeket átalakíthatjuk, hiszen azt jelentik, hogy az $Ax - b$ és az x vektoroknak a pozitív ortánsba kell esniük. A pozitív ortáns így írható fel:

$$\mathbb{R}_+^m := \{ x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0 \}$$

illetve \mathbb{R}_+^n hasonlóképpen adható meg. Láthatjuk, hogy \mathbb{R}_+^m és \mathbb{R}_+^n pozitív ortánsok konvex halmazok, tehát a lineáris optimalizálási feladatot a következő kúp-lineáris feladattá alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax - b \in \mathbb{R}_+^m \\ & x \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

A duál feladatot,

$$\max \{ b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0 \},$$

hasonlóan felírhatjuk kúp-formában:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & c - A^T y \in \mathbb{R}_+^m \\ & y \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Felmerül a kérdés, hogy miképpen írhatjuk fel az általános kúp-lineáris optimalizálási feladat duálját, ha az \mathbb{R}_+^m és \mathbb{R}_+^n egyszerű konvex kúpok helyett tetszőleges $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kúpok szerepelnek. Így kapjuk az *általános kúp-lineáris* optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax - b \in \mathcal{C}_1 \\ & x \in \mathcal{C}_2. \end{aligned} \tag{ConeL}$$

Mielőtt felírnánk a duál feladatot, definiálnunk kell egy új fogalmat.

2.95. Definíció. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kúp. A

$$\mathcal{C}^* := \{ z \in \mathbb{R}^n : x^T z \geq 0 \text{ minden } x \in \mathcal{C} \text{ esetén} \}.$$

halmazt a \mathcal{C} kúp duális kúpjának nevezzük.

Az irodalomban a \mathcal{C}^* duális kúpot gyakran a \mathcal{C} kúp *poláris* vagy *pozitív poláris* kúpjaként említik.

2.31. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n$, azaz a pozitív ortáns önduális.

2.32. Feladat. Legyen \mathcal{S}_n az $n \times n$ -es szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok halmaza.

(i) Bizonyítsuk be, hogy \mathcal{S}_n konvex kúp.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy $(\mathcal{S}_n)^* = \mathcal{S}_n$, azaz \mathcal{S}_n is önduális.

2.33. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a \mathcal{C}^* duális kúp zárt, konvex kúp.

A következő tétel megtalálható pl. a [42, 46] könyvekben.

2.96. Tétel. A duális kúp duálja, $(\mathcal{C}^*)^*$, a \mathcal{C} kúp $\bar{\mathcal{C}}$ lezárása.

A kúp-lineáris feladat duálja

Először az s „slack”-változó bevezetésével átírjuk a kúp-lineáris feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s - Ax + b &= 0 \\ s &\in \mathcal{C}_1 \\ x &\in \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Ebben a feladatban szerepel egy egyenlőséggel teljesülő lineáris feltétel ($s - Ax + b = 0$), emellett az (s, x) vektornak a

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \{(s, x) : s \in \mathcal{C}_1, x \in \mathcal{C}_2\}$$

kúpban kell lennie. A fenti feladat $L(s, x, y)$ Lagrange-függvényét a következő halmazon értelmezzük:

$$\{(s, x, y) : s \in \mathcal{C}_1, x \in \mathcal{C}_2, y \in \mathbb{R}^m\}.$$

A Lagrange-függvény:

$$L(s, x, y) = c^T x + y^T (s - Ax + b) = b^T y + s^T y + x^T (c - A^T y). \quad (2.50)$$

Így a kúp-lineáris feladat Lagrange-duálja:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \psi(y),$$

ahol

$$\psi(y) = \min \{L(s, x, y) : s \in \mathcal{C}_1, x \in \mathcal{C}_2\}. \quad (2.51)$$

Mivel a Lagrange-függvényt $s \in \mathcal{C}_1$ és $x \in \mathcal{C}_2$ szerint minimalizáljuk, és az $L(s, x, y)$ függvény szeparábilis ezekre a változókra, így a minimumokat külön-külön kezelhetjük.

Ha s szerint minimalizálunk, akkor az $L(s, x, y)$ függvényben $s^T y$ kivételével csak konstans tagok szerepelnek. Az s vektor a \mathcal{C}_1 kúpban van, így

$$\min_{s \in \mathcal{C}_1} s^T y = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \in \mathcal{C}_1^*, \\ -\infty & \text{különben.} \end{cases} \quad (2.52)$$

Ha x szerint minimalizálunk, akkor a (2.50) alatti Lagrange-függvényben $x^T (c - A^T y)$ kivételével csak konstans szerepel. Az x vektor a \mathcal{C}_2 kúpban van, így

$$\min_{x \in \mathcal{C}_2} x^T (c - A^T y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } c - A^T y \in \mathcal{C}_2^*, \\ -\infty & \text{különben.} \end{cases} \quad (2.53)$$

Mindezek alapján:

$$\psi(y) = \begin{cases} b^T y & \text{ha } y \in \mathcal{C}_1^* \text{ és } c - A^T y \in \mathcal{C}_2^*, \\ -\infty & \text{különben,} \end{cases} \quad (2.54)$$

így a kúp-lineáris optimalizálási feladat *duálja* a következő kúp-lineáris feladat:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ c - A^T y \in \mathcal{C}_2^* \\ y \in \mathcal{C}_1^*. \end{aligned} \tag{DconeL}$$

2.34. Feladat. Vezessük le a szemidefinit optimalizálási feladat (DSO) duálját az általános kúp-lineáris feladat (DconeL) duáljának felhasználásával.

Ebben az elméletben is központi jelentőségű a gyenge dualitási tétel.

2.97. Tétel (Gyenge dualitás). *Ha $x \in \mathbb{R}^n$ a (ConeL) primál feladat megengedett megoldása és $y \in \mathbb{R}^m$ a (DconeL) duál feladat megengedett megoldása, akkor*

$$c^T x \geq b^T y,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x^T(c - A^T y) = 0 \quad \text{és} \quad y^T(Ax - b) = 0.$$

Bizonyítás: A duális kúp definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$c^T x - b^T y = x^T(c - A^T y) + y^T(Ax - b) \geq 0.$$

Az x , $c - A^T y$, y és $Ax - b$ vektorok nemnegativitásának köszönhetően az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x^T(c - A^T y) = 0$ és $y^T(Ax - b) = 0$. \square

2.6. Algoritmusok feltételes optimalizáláshoz

Ebben a fejezetben a feltételes optimalizálási feladatok algoritmusait két csoportra osztjuk. Az első csoportba tartozók közvetlenül próbálják megoldani a feladatot úgy, hogy minden feltételt figyelembe vesznek. A másik csoportba tartozók barrier-függvények segítségével átalakítják a feladatot feltétel nélküli optimalizálási feladattá. Egyéb módszerekkel itt nem foglalkozunk, és a fentiek közül is csak néhány tipikus esetre korlátozódik figyelmünk. További eljárások találhatók a [2] könyvben.

2.6.1. Redukált gradiens-módszer

A redukált gradiens-módszer és általánosításai megpróbálják a lineáris optimalizálás módszereit nemlineáris esetre kiterjeszteni. Ezek a módszerek közel állnak a projektált gradiens-módszerekhez, csak a módszer megjelenése más. Összefoglalóan *simplex módszernek* nevezzük a lineáris feltételekkel rendelkező nemlineáris feladatok módszerének számos változatát.

Lineáris feltételek

Tekintsük a következő lineáris feltételekkel adott konvex feladatot:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{LC}$$

ahol f folytonosan differenciálható függvény, A pedig egy $m \times n$ -es teljes sorrangú mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$.

A redukált gradiens-módszer egy B bázissal és egy olyan $x^k = (x_B^k, x_N^k)$ megengedett megoldással kezdődik, amelyre $x_B^k > 0$. A lineáris optimalizálástól eltérően itt x nem feltétlenül bázismegoldás, azaz x_N -nek nem kell nulla vektornak lennie. Ilyen kezdő megoldást pl. a lineáris optimalizálásnál használt elsőfázis-feladat megoldásával kapunk. A B bázist használva a

$$Bx_B + Nx_N = b$$

kifejezésből

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

adódik. Így az x_B bázisváltozókat kiiktathatjuk a (LC) feladatból:

$$\begin{aligned} \min f_N(x_N) \\ B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0, \\ x_N \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $f_N(x_N) = f(x) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N)$. A következő jelölést használjuk:

$$\nabla f(x)^T = ((\nabla_B f(x))^T, (\nabla_N f(x))^T).$$

Ekkor f_N gradiense, amit *redukált gradiensnek* hívunk, így fejezhető ki:

$$\nabla f_N(x_N)^T = -(\nabla_B f(x))^T B^{-1}N + (\nabla_N f(x))^T.$$

Tegyük fel, hogy az algoritmus az $x^k \in \mathbb{R}^n$ pontban van és hogy a bázis nem degenerált, tehát az aktuális x^k iterációban csak az $x_N \geq 0$ nemnegativitási feltételek aktívak. Defináljuk az $s^T = (s_B^T, s_N^T)$ keresési irányt az $s_B = -B^{-1}Ns_N$ és $s_N \geq 0$ képletekkel; ekkor az s^T vektor az A mátrix nullterében van. Az $x^{k+1} = x^k + \lambda s$ pont akkor lesz megengedett, ha $x_B^k + \lambda s_B \geq 0$, azaz ha

$$\lambda \leq \bar{\lambda} = \min_{i \in B, s_i < 0} \left\{ \frac{x_i^k}{-s_i} \right\}.$$

Definiálnunk kell még az $s_N \geq 0$ -t úgy, hogy az az f függvény csökkenési iránya legyen. Ezt megtehetjük, ha az f_N függvény legmeredekebb csökkenési irányát rávetítjük az aktuális x_N^k pontban aktív koordináta-hipersíkra. Formálisan $j \in N$ esetén legyen

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{ha } x_j^k = 0 \text{ és } \frac{\partial f_N(x_N^k)}{\partial x_j} \geq 0, \\ -\frac{\partial f_N(x_N^k)}{\partial x_j} & \text{különben.} \end{cases}$$

Az iteráció következő pontját egy egyenes mentén kereséssel kaphatjuk meg:

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}} f(x^k + \lambda s).$$

Ha x_B^{k+1} minden koordinátája szigorúan pozitív marad, akkor megtartjuk ezt a bázist, különben a nulla-változó helyett egy pozitív, de nem bázisváltozót veszünk be a bázisba.

Megjegyzések

- Az algoritmus során x^k nem feltétlenül bázismegoldás, így x_N^k -ban vannak pozitív komponensek. Ezekre a változókra a *super-bázisváltozók* fogalmat használjuk.
- Vegyük észre, hogy a módszer leírásánál feltettük, hogy a lineáris feltételek nem degeneráltak. Ellenkező esetben ciklikusság léphet fel, amit a lineáris optimalizálásban használt módszerekhez hasonlóan kerülhetünk el.
- A konvex szimplex módszer a redukált gradiens-módszer speciális változata, amelyben az s_N keresési irányt másképp definiáljuk. Csak s_N egy koordinátáját engedjük nemnullává válni az $s_j = -\frac{\partial f_N(x_N^k)}{\partial x_j} > 0$ definíció alapján, a többi koordinátát nullának definiáljuk, valamint $s_B = -B^{-1}N s_N = -B^{-1}a_j s_j$, ahol a_j az A mátrix j -edik oszlopa.
- A lineáris optimalizálás szimplex módszere a konvex szimplex módszer speciális változata, amelyben feltesszük, hogy a célfüggvény lineáris és a kezdő megoldás bázismegoldás. A keresési irány ekkor úgy is megadható, hogy $s_j = 1$ legyen.

2.98. Példa. [Redukált gradiens-módszer 1] Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 2x_2^2 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A redukált gradiens-módszerrel oldjuk meg a feladatot az $x^0 = (1, 2)^T$ pontból indulva. A célfüggvény értéke ekkor 9. Az x^0 pontban tekintsük x_1 -et bázisváltozónak, emiatt $B = 1$ és $N = 1$. Elimináljuk a bázisváltozót:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}N x_N, x_N) = f(1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot x_2, x_2) = f(3 - x_2, x_2).$$

Így a feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min \quad & (3 - x_2)^2 + 2x_2^2 \\ & 3 - x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. iteráció: A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^0 = s_2^0 &= -\frac{\partial f_N(x_2^0)}{\partial x_2} = -(-2(3 - x_2^0) + 4x_2^0) = -6, \\ s_B^0 = s_1^0 &= -B^{-1}Ns_N^0 = -1 \cdot 1 \cdot -6 = 6. \end{aligned}$$

Egyenes mentén történő keresést kell végrehajtanunk, hogy a változók új értékét megkapjuk. A lépéshossztól, λ -tól függően x koordinátái:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \lambda s_1^0 = 1 + 6\lambda, \\ x_2^1 &= x_2^0 + \lambda s_2^0 = 2 - 6\lambda. \end{aligned}$$

Az új változók nemnegatívak, ha $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{2}{6}$. Az alábbi egydimenziós feladatot kell megoldanunk :

$$\min_{0 \leq \lambda \leq \frac{2}{6}} (1 + 6\lambda)^2 + 2(2 - 6\lambda)^2,$$

A minimumra teljesül, hogy:

$$12(1 + 6\lambda) - 24(2 - 6\lambda) = 0,$$

tehát $\lambda = \frac{1}{6}$. Így $x_1^1 = 2$ és $x_2^1 = 1$, a célfüggvényérték 6.

2. iteráció: Mivel x_1 pozitív maradt, így ismét használható bázisváltozóként. A keresési irány most:

$$\begin{aligned} s_N^1 = s_2^1 &= -\frac{\partial f_N(x_2^1)}{\partial x_2} = -(-2(3 - x_2^1) + 4x_2^1) = 0, \\ s_B^1 = s_1^1 &= -B^{-1}Ns_N^1 = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy optimális megoldásban vagyunk, tehát $x^{\text{opt}} = (x_1^2, x_2^2) = (2, 1)$, az optimális célfüggvényérték 6.

2.99. Példa. [Redukált gradiens-módszer 2] Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 \\ & x \geq 2 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Oldjuk meg a feladatot a redukált gradiens-módszerrel az $x^0 = 5$ pontból indulva. A kezdeti célfüggvényérték 25. Először átalakítjuk a feltételt egyenlőséggé:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 \\ & x - y = 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Az y^0 változó kezdőértéke 3. Válasszuk x -et bázisváltozónak, így $B = 1$ és $N = -1$. Elimináljuk a bázisváltozót:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f(2 + y, y).$$

A feladat így alakul:

$$\begin{aligned} \min \quad & (2 + y)^2 \\ & 2 + y \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

1. iteráció: A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^0 = s_y^0 &= -\frac{\partial f_N(y^0)}{\partial y} = -(2(2 + y^0)) = -10, \\ s_B^0 = s_x^0 &= -B^{-1}N s_N^0 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-10) = -10. \end{aligned}$$

A változók új értékei λ -tól függően:

$$\begin{aligned} x^1 = x^0 + \lambda s_x^0 &= 5 - 10\lambda, \\ y^1 = y^0 + \lambda s_y^0 &= 3 - 10\lambda. \end{aligned}$$

Az értékek nemnegatívak, ha $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{3}{10}$. A következő egydimenziós feladatot kell megoldanunk:

$$\min (5 - 10\lambda)^2,$$

amelynek a minimuma $\lambda = \frac{1}{2} > \bar{\lambda} = \frac{3}{10}$, ezért $\lambda = \frac{3}{10}$ -et kell használnunk, ahonnan $x^1 = 2$ és $y^1 = 0$, a célfüggvényérték 4.

2. iteráció: Mivel x nemnegatív, ezért bázisváltozó marad. Először számítsuk ki y keresési irányát. Mivel $y^0 = 0$, a keresési iránynak nemnegatívnak kell lennie, különben 0 lesz:

$$s_N^3 = s_y^3 = -2(2 + y^3) = -4.$$

Ezek szerint:

$$\begin{aligned} s_N^3 &= s_y^3 = 0, \\ s_B^3 &= s_x^3 = 0. \end{aligned}$$

Így az optimális megoldás $x^{opt} = 2$.

2.100. Példa. [Redukált gradiens-módszer 3] Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1 - 3x_4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Közelítsük a feladat minimumhelyét a redukált gradiens-módszer két iterációjával. A kezdőpont legyen $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)^T = (2, 2, 1, 0)^T$, a célfüggvényérték ekkor 5. Az x^0 pontban tekintsük x_1 -et és x_2 -t bázisváltozónak. Így

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A bázisváltozók eliminálásával:

$$\begin{aligned} f_N(x_N) &= f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_3, x_4\right) = \\ &= f(1 + x_3 - 3x_4, 5 - 3x_3 + 2x_4, x_3, x_4). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Az új célfüggvény:

$$\min (1 + x_3 - 3x_4)^2 + (5 - 3x_3 + 2x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(1 + x_3 - 3x_4) - 3x_4$$

A feltételek:

$$\begin{aligned} 1 + x_3 - 3x_4 &\geq 0 \\ 5 - 3x_3 + 2x_4 &\geq 0 \\ x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. iteráció: A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^0 &= \begin{pmatrix} s_3^0 \\ s_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_N(x_3^0)}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial f_N(x_4^0)}{\partial x_4} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -(2(1 + x_3^0 - 3x_4^0) - 6(5 - 3x_3^0 + 2x_4^0) + 2x_3^0 - 2) \\ -(-6(1 + x_3^0 - 3x_4^0) + 4(5 - 3x_3^0 + 2x_4^0) + 2x_4^0 + 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Mivel $x_4^0 = 0$, az s_4^0 keresési iránynak nemnegatívnak kell lennie, és ez teljesül is.

$$s_B^0 = \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = -B^{-1}Ns_N^0 = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -22 \end{pmatrix}.$$

Az új változókhoz fel kell írunk az egyenes mentén történő keresés algoritmusát. Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \lambda s_1^0 = 2 + 5\lambda \\ x_2^1 &= x_2^0 + \lambda s_2^0 = 2 - 22\lambda \\ x_3^1 &= x_3^0 + \lambda s_3^0 = 1 + 8\lambda \\ x_4^1 &= x_4^0 + \lambda s_4^0 = \lambda \end{aligned}$$

A változók mind nemnegatívak, ha $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{2}{22} \approx 0,09$. Az alábbi feladatot kell megoldanunk:

$$\min (2 + 5\lambda)^2 + (2 - 22\lambda)^2 + (1 + 8\lambda)^2 + \lambda^2 - 2(2 + 5\lambda) - 3\lambda.$$

A szélsőérték feltétele, hogy:

$$\begin{aligned} 10(2 + 5\lambda) - 44(2 - 22\lambda) + 16(1 + 8\lambda) + 2\lambda - 13 &= 0 \\ \lambda &= \frac{65}{1148} \approx 0,06 \quad \left(\lambda < \bar{\lambda} = \frac{2}{22}\right). \end{aligned}$$

A minimumhely $\lambda = \frac{65}{1148}$ kisebb, mint $\bar{\lambda} = \frac{2}{22}$, ezért a változók nemnegativitása garantált. Így $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)^T = (2,28, 0,75, 1,45, 0,06)^T$, a célfüggvényérték 3,13.

2. iteráció: Mivel az x_1^1 és x_2^1 bázisváltozók pozitívak maradtak, ezért maradhatnak bázisváltozók. A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^1 &= \begin{pmatrix} s_3^1 \\ s_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_N(x_3^1)}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial f_N(x_4^1)}{\partial x_4} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -(2(1 + x_3^1 - 3x_4^1) - 6(5 - 3x_3^1 + 2x_4^1) + 2x_3^1 - 2) \\ -(-6(1 + x_3^1 - 3x_4^1) + 4(5 - 3x_3^1 + 2x_4^1) + 2x_4^1 + 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,88 \\ 7,60 \end{pmatrix}, \quad (2.57) \end{aligned}$$

illetve

$$s_B^0 = \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = -B^{-1}Ns_N^0 = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,88 \\ 7,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21,92 \\ 17,84 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_1^1 + \lambda s_1^1 = 2,28 - 21,92\lambda \\ x_2^2 &= x_2^1 + \lambda s_2^1 = 0,75 + 17,84\lambda \\ x_3^2 &= x_3^1 + \lambda s_3^1 = 1,45 - 0,88\lambda \\ x_4^2 &= x_4^1 + \lambda s_4^1 = 0,06 + 7,6\lambda. \end{aligned}$$

A változók $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{2,28}{21,92} \approx 0,1$ esetén maradnak nemnegatívak. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & (2,28 - 21,92\lambda)^2 + (0,75 + 17,84\lambda)^2 + (1,45 - 0,88\lambda)^2 \\ & + (0,06 + 7,6\lambda)^2 - 2(2,28 - 21,92\lambda) - 3(0,06 + 7,6\lambda). \end{aligned}$$

Ebből következően

$$\begin{aligned} & -43,84(2,28 - 21,92\lambda) + 35,68(0,75 + 17,84\lambda) \\ & -1,76(1,45 - 0,88\lambda) + 15,2(0,06 + 7,6\lambda) + 21,04 = 0 \\ & \lambda \approx 0,03 \quad (\lambda < \bar{\lambda} \approx 0,1). \end{aligned}$$

Az eredmény: $x^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)^T \approx (1,62, 1,28, 1,42, 0,29)^T$, a célfüggvényérték 2,25.

2.6.2. Általánosított redukált gradiens-módszer (GRG)

A redukált gradiens-módszert általánosíthatjuk a nemlineáris feltételekkel rendelkező feladatokra. Hasonlóan a lineáris feltételekkel rendelkező esethez, vegyük a következő, nemnegatív változójú, egyenlőséggel korlátozott feladatot:

$$\begin{aligned} (NC) \quad & \min f(x) \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

ahol az f, h_1, \dots, h_m függvények folytonosan differenciálhatóak. Slack-változók segítségével elérhető, hogy a rendszerben csak egyenlőségek és nemnegatív változók szerepeljenek.¹⁰

¹⁰Az (NC) feladat általános nemkonvex feladat, és akkor és csak akkor lesz konvex feladat, ha minden h_j affin.

Az egyszerűség kedvéért felteszünk néhány nem-degeneráltsággal összefüggő feltevést: feltesszük, hogy a h_j függvények gradiensei minden $x \geq 0$ pontban lineárisan függetlenek. Ez a feltevés biztosítja, hogy a bázis választása után a bázisváltozók kifejezhetők a nembázisváltozók lineáris kombinációjaként – ezáltal a feladat redukálható. A lineáris esetben ennek az A mátrix teljesrangúsága felelt meg.

Innentől használjuk az általánosított redukált gradiens-módszert. A pótlólagos nehézség abban rejlik, hogy lineáris átalakításokkal a nemlineáris egyenlőtlenségek nem tarthatók fenn, így több erőfeszítés szükséges a megengedettség fenntartásához.

Legyen $x^k \geq 0$ adott megengedett megoldás, ahol $h_j(x^k) = 0$ minden j esetén. Feltévünk szerint a $H(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T$ függvények Jacobi-mátrixa minden $x \geq 0$ -ra teljes rangú. Az x^k pontban a Jacobi-mátrix legyen:

$$A = JH(x^k).$$

Tegyük fel, hogy adott egy B bázis, amelyre $x_B^k > 0$. A lineáris esethez hasonlóan járunk el. A keresési irányt úgy definiáljuk, hogy a lineáris feltételek érvényben maradjanak. Ez az irány az A mátrix nullterében van. A linearizált feltételekre teljesül, hogy

$$H(x^k) + JH(x^k)(x - x^k) = 0 + A(x - x^k) = 0.$$

Ebből

$$Bx_B + Nx_N = Ax^k.$$

Vezessük be a következő jelölést: $b = Ax^k$. Ekkor

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Ebből következően a (2.59) linearizált feladatából az x_B bázisváltozót eliminálva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_N(x_N) \\ & B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0, \\ & x_N \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $f_N(x_N) = f(x) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N)$. Használjuk a következő jelölést:

$$\nabla f(x)^T = ((\nabla_B f(x))^T, (\nabla_N f(x))^T).$$

Ekkor f_N gradiense, az ún. *redukált gradiens* így fejezhető ki:

$$\nabla_N f(x)^T = -(\nabla_B f(x))^T B^{-1}N + (\nabla_N f(x))^T.$$

Innentől az s keresési irányt a lineáris esettel megegyezően kapjuk. A

$$H(x^{k+1}) = H(x^k + \lambda s) = 0$$

feltétel nem fog teljesülni a nemlineáris feltételek miatt, tehát a megengedettség megőrzése érdekében több lépésre van szükség.

Nagyon fontos a helyes lépéshossz megválasztása. Nagyobb lépéssel jobban javíthatunk a célfüggvényen, de nagyobb esély van arra is, hogy nem fognak teljesülni a feltételek.

A GRG-módszer régi változataiban a $H(x) = 0$ nemlineáris egyenletrendszer megoldására a Newton-módszert használták. Mostanában a redukált gradiens-módszerből származó irányt az ortogonális altérből (A^T vektorteréből) származó iránnyal szokták kombinálni. Az így kapott irányban történik a módosított (nemlineáris, diszkrét) egyenes mentén való keresés. Ezek a módszerek azonban igen bonyolultak, ezért itt nem foglalkozunk velük részletesen.

2.101. Példa. [Általánosított redukált gradiens-módszer 1] Vegyük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & 2x_1 + x_2^2 = 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A feladatot az általánosított redukált gradiens-módszerrel oldjuk meg. A kezdőpont $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (5, 1)^T$, a célfüggvényérték 26. Ebben az x^0 pontban tekintsük x_1 -et bázisváltozónak. Először linearizáljuk a nemlineáris feltételt:

$$A = (B, N) = JH(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & 2x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = Ax^0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 12.$$

Ezután elimináljuk a bázisváltozókat:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 2x_2, x_2\right) = f(6 - x_2, x_2). \quad (2.60)$$

A feladat ekkor:

$$\begin{aligned} \min \quad & (6 - x_2)^2 + x_2^2 \\ & 6 - x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. iteráció: A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^0 = s_2^0 &= -\frac{\partial f_N(x_2^0)}{\partial x_2} = -(-2(6 - x_2^0) + 2x_2^0) = 8 \\ s_B^0 = s_1^0 &= -B^{-1}Ns_N^0 = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = -8. \end{aligned}$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \lambda s_1^0 = 5 - 8\lambda \\ x_2^1 &= x_2^0 + \lambda s_2^0 = 1 + 8\lambda. \end{aligned}$$

A változók $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{5}{8}$ esetén maradnak nemnegatívak. A

$$\min (5 - 8\lambda)^2 + (1 + 8\lambda)^2$$

feladat minimuma:

$$\begin{aligned} -16(5 - 8\lambda) + 16(1 + 8\lambda) &= 0 \\ \lambda &= \frac{1}{4} \quad \left(\lambda < \bar{\lambda} = \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

A kapott új pont: $x^1 = (x_1^1, x_2^1)^T = (3, 3)^T$, a célfüggvényérték 10.

Vegyük észre, hogy

$$2x_1^1 + (x_2^1)^2 = 15,$$

vagyis a kapott pont nem elégíti ki a nemlineáris feltételt. A feltételnek eleget tevő megoldás megtalálásához tekintsük x_N -t rögzítettnek, és nézzük meg, milyen x_B mellett teljesül a feltétel. Így x_2^1 marad 3, de x_1^1 1-re változik.

2. iteráció: Az 1. iteráció értékei mellett linearizáljuk a nemlineáris feltételt:

$$A = JH(x^1) = \begin{pmatrix} 2 & 2x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = Ax^1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 20.$$

Ismét elimináljuk a bázisváltozókat:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 6x_2, x_2\right) = f(10 - 3x_2, x_2).$$

A feladat a következőképp alakul:

$$\min \quad (10 - 3x_2)^2 + x_2^2$$

$$\begin{aligned} 10 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

A keresési irány:

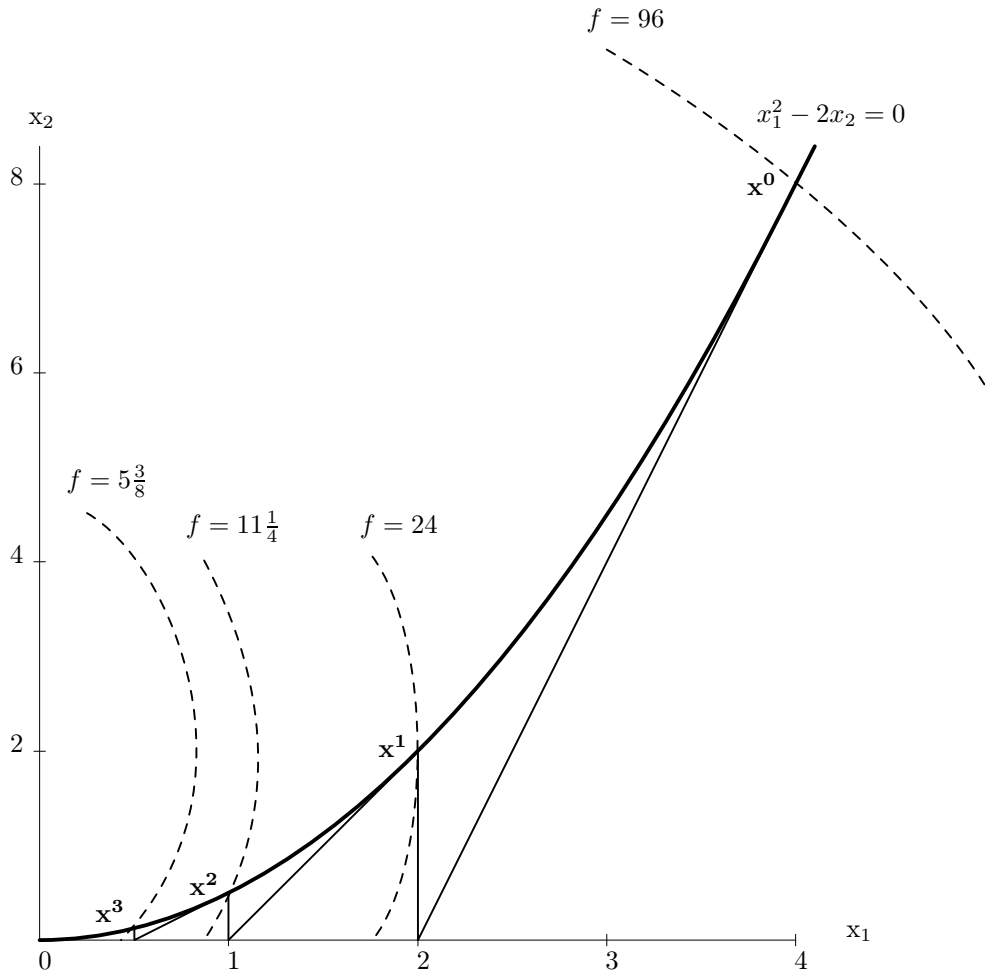
$$\begin{aligned} s_N^0 = s_2^1 &= -\frac{\partial f_N(x_2^1)}{\partial x_2} = -(-6(10 - 3x_2^1) + 2x_2^1) = 0 \\ s_B^0 = s_1^1 &= -B^{-1}Ns_N^1 = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy elértük az optimumot: $x^{\text{opt}} = (1, 3)^T$, a célfüggvényérték 10.

2.102. Példa. [Általánosított redukált gradiens-módszer 2] Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 \\ & x_1^2 - 2x_2 = 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A feladatot az általánosított redukált gradiens-módszerrel próbáljuk megoldani. Az algoritmus lépéseit a 2.19 ábrán is követhetjük.



2.19. ábra. Az általánosított redukált gradiens módszer alkalmazása a 2.102 példában szereplő feladatra.

A kezdőpont $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (4, 8)^T$, a célfüggvényérték 96. Az x^0 pontban legyen x_2 bázisváltozó. Először linearizáljuk a nemlineáris feltételt:

$$A = (N, B) = JH(x^0) = (2x_1^0 \quad -2) = (-8 \quad -2), \quad b = Ax^0 = (-8 \quad -2) \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 16,$$

majd a szokásos módon elimináljuk a bázisváltozót:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f\left(x_1, -\frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{2}x_1\right).$$

A feladat így alakul:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (4x_1 - 8)^2 + 12x_1 - 4(4x_1 - 8) \\ & 4x_1 - 8 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

1. iteráció: A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^0 = s_1^0 &= -\frac{\partial f_N(x_1^0)}{\partial x_1} = -(2x_1^0 + 8(4x_1 - 8) + 12 - 16) = -68 \\ s_B^0 = s_2^0 &= -B^{-1}Ns_N^0 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot -68 = -272. \end{aligned}$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= x_1^0 + \lambda s_1^0 = 4 - 68\lambda \\x_2^1 &= x_2^0 + \lambda s_2^0 = 8 - 272\lambda,\end{aligned}$$

amelyek $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{1}{34}$ esetén maradnak nemnegatívak.

Az egyenes mentén kereséshez a következő feladatot kell megoldanunk:

$$\min (4 - 68\lambda)^2 + (8 - 272\lambda)^2 + 12(4 - 68\lambda) - 4(8 - 272\lambda)$$

Ezek alapján:

$$\begin{aligned}-136(4 - 68\lambda) - 544(8 - 272\lambda) - 816 + 1088 &= 0 \\ \lambda &= \frac{1}{34} \quad (\lambda = \bar{\lambda}).\end{aligned}$$

Az eredmény: $x^1 = (x_1^1, x_2^1)^T = (2, 0)^T$, ami ismét nem elégíti ki a nemlineáris feltételt.

Legyen tehát x_N rögzített, ekkor a feltétel teljesül, ha $x_B = 2$. Az új célfüggvényérték 24.

2. iteráció: Mivel x_2^1 pozitív maradt, legyen ismét x_2^1 a bázisváltozó. Először linearizáljuk a nemlineáris feltételt az 1. iterációban kapott pontban:

$$A = JH(x^1) = (2x_1^1 \quad -2) = (4 \quad -2), \quad b = Ax^1 = (4 \quad -2) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4.$$

A bázisváltozókat kiiktatva:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f\left(x_1, -\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x_1\right) = f(x_1, 2x_1 - 2).$$

A feladat az alábbi lesz:

$$\begin{aligned}\min x_1^2 + (2x_1 - 2)^2 + 12x_1 - 4(2x_1 - 2) \\ 2x_1 - 2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

A keresési irány:

$$\begin{aligned}s_N^1 = s_1^1 &= -\frac{\partial f_N(x_1^1)}{\partial x_1} = -(2x_1^1 + 4(2x_1^1 - 2) + 12 - 8) = -16 \\ s_B^1 = s_2^1 &= -B^{-1}Ns_N^1 = -32.\end{aligned}$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned}x_1^2 &= x_1^1 + \lambda s_1^1 = 2 - 16\lambda \\ x_2^2 &= x_2^1 + \lambda s_2^1 = 2 - 32\lambda,\end{aligned}$$

amelyek $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{1}{16}$ esetén lesznek nemnegatívak.

Az egyenes mentén keresés:

$$\min 2(2 - 16\lambda)^2 + (2 - 32\lambda)^2 + 12(2 - 16\lambda) - 4(2 - 32\lambda).$$

Ebből adódóan:

$$\begin{aligned} -32(2 - 16\lambda) - 64(2 - 32\lambda) - 192 + 128 &= 0 \\ \lambda &= \frac{1}{10} \quad \left(\lambda > \bar{\lambda} = \frac{1}{16} \right). \end{aligned}$$

Mivel $\lambda = \frac{1}{10}$ nagyobb $\bar{\lambda} = \frac{1}{16}$ -nál, a változók nemnegativitásának megőrzése érdekében a $\lambda = \frac{1}{16}$ értéket használjuk, így $x^2 = (x_1^2, x_2^2)^T = (1, 0)^T$. Annak érdekében, hogy a feltételt teljesítő változókat kapjunk, legyen x_N rögzített. Így $x^2 = (1, \frac{1}{2})^T$, a célfüggvényérték $11\frac{1}{4}$.

3. iteráció: Itt is használjuk x_2^2 -t bázisváltozónak, mivel x_2^2 pozitív maradt. A feltétel lineáriszálásával:

$$A = JH(x^2) = (2x_1^2 \quad -2) = (2 \quad -2), \quad b = Ax^2 = (2 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1.$$

A bázisváltozókat eliminálva:

$$f_N(x_N) = f \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2} \right).$$

A feladat a következőképp alakul:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + 12x_1 - 4 \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \\ & x_1 - \frac{1}{2} \geq 0 \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^2 = s_1^2 &= -\frac{\partial f_N(x_1^2)}{\partial x_1} = -9\frac{1}{2} \\ s_B^2 = s_2^2 &= -B^{-1}Ns_N^2 = -9\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned} x_1^3 = x_1^2 + \lambda s_1^2 &= 1 - 9\frac{1}{2}\lambda \\ x_2^3 = x_2^2 + \lambda s_2^2 &= \frac{1}{2} - 9\frac{1}{2}\lambda, \end{aligned}$$

amelyek $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{1}{9}$ esetén maradnak nemnegatívak.

Oldjuk meg az alábbi feladatot:

$$\min \quad \left(1 - 9\frac{1}{2}\lambda \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 9\frac{1}{2}\lambda \right)^2 + 12 \left(1 - 9\frac{1}{2}\lambda \right) - 4 \left(\frac{1}{2} - 9\frac{1}{2}\lambda \right).$$

Ezek alapján:

$$\begin{aligned} -19 \left(1 - 9\frac{1}{2}\lambda \right) - 19 \left(\frac{1}{2} - 9\frac{1}{2}\lambda \right) - 114 + 38 &= 0 \\ \lambda &\approx 0,289 \quad \left(\lambda > \bar{\lambda} = \frac{1}{19} \right). \end{aligned}$$

Mivel a $\lambda \approx 0,289$ választás negatív értéket adna a változókra, így a $\bar{\lambda} = \frac{1}{19}$ értéket használjuk λ helyett. Ebből $x_1^3 = \frac{1}{2}$ és $x_2^3 = 0$ adódik. Az x_B változó korrigálása után: $x^3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$, a célfüggvényérték $5\frac{3}{8}$.

A kívánt pontosság eléréséhez még további lépésekre lehet szükség.

2.103. Példa. [Általánosított redukált gradiens-módszer 3] Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^2 + 3x_2^2 \\ & 3x_1^2 + 2x_2^2 = 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ismét az általánosított redukált gradiens-módszert használjuk. A kezdőpont $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (2, 2)^T$, a célfüggvényérték 20. Az x^0 pontban legyen x_1 bázisváltozó. Először linearizáljuk a nemlineáris feltételt:

$$A = (B, N) = JH(x^0) = (6x_1^0 \ 4x_2^0) = (12 \ 8), \quad b = Ax^0 = (12 \ 8) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Elimináljuk a bázisváltozót:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f\left(\frac{40}{12} - \frac{8}{12}x_2, x_2\right).$$

A feladat így alakul:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2\left(\frac{40}{12} - \frac{8}{12}x_2\right)^2 + 3x_2^2 \\ & \frac{40}{12} - \frac{8}{12}x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. iteráció: A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^0 = s_2^0 &= -\frac{\partial f_N(x_2^0)}{\partial x_2} = -\left(-\frac{32}{12}\left(\frac{40}{12} - \frac{8}{12}x_2^0\right) + 6x_2^0\right) = -\frac{20}{3} \\ s_B^0 = s_1^0 &= -B^{-1}Ns_N^0 = -\frac{1}{12} \cdot 8 \cdot -\frac{20}{3} = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \lambda s_1^0 = 2 + \frac{40}{9}\lambda \\ x_2^1 &= x_2^0 + \lambda s_2^0 = 2 - \frac{20}{3}\lambda. \end{aligned}$$

A változók $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{3}{10}$ mellett maradnak nemnegatívak.

Minimalizálunk a keresési irány mentén:

$$\min \quad 2\left(2 + \frac{40}{9}\lambda\right)^2 + 3\left(2 - \frac{20}{3}\lambda\right)^2.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{160}{9} \left(2 + \frac{40}{9} \lambda \right) - \frac{120}{3} \left(2 - \frac{20}{3} \lambda \right) &= 0 \\ \lambda &= \frac{9}{70} \quad \left(\lambda < \bar{\lambda} = \frac{3}{10} \right). \end{aligned}$$

Az eredmény: $x^1 = (x_1^1, x_2^1)^T = \left(\frac{18}{7}, \frac{8}{7} \right)^T$. Erre a pontra nem teljesül a nemlineáris feltétel, így legyen x_N rögzített, és keressük meg a feltételt kielégítő x_B értéket. Ezek alapján $x_B = 2,41$, a célfüggvényérték 15,52.

2. iteráció: Mivel x_1^1 pozitív maradt, ismét legyen x_1 a bázisváltozó. Először linearizáljuk a nemlineáris feltételt az 1. iteráció után kapott pontban:

$$A = JH(x^1) = (6x_1^1 \ 4x_2^1) = (14,45 \ 4,57), \quad b = Ax^1 = (14,45 \ 4,57) \begin{pmatrix} 2,41 \\ 1,14 \end{pmatrix} = 40.$$

A bázisváltozók kiiktatásával:

$$f_N(x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) = f(2,77 - 0,32x_2, x_2).$$

A feladat így alakul:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2(2,77 - 0,32x_2)^2 + 3x_2^2 \\ & 2,77 - 0,32x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^1 = s_2^1 &= -\frac{\partial f_N(x_2^1)}{\partial x_2} = -(-4 \cdot 0,32(2,77 - 0,32x_2^1) + 6x_2^1) = -3,78 \\ s_B^1 = s_1^1 &= -B^{-1}Ns_N^1 = 1,2. \end{aligned}$$

Az új változók λ függvényében:

$$\begin{aligned} x_1^2 = x_1^1 + \lambda s_1^1 &= 2,41 + 1,20\lambda \\ x_2^2 = x_2^1 + \lambda s_2^1 &= 1,14 - 3,78\lambda, \end{aligned}$$

amelyek $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{1,14}{3,78} \approx 0,30$ esetén maradnak nemnegatívak.

Az egyenes mentén keresés

$$\min \quad 2(2,41 + 1,20\lambda)^2 + 3(1,14 - 3,78\lambda)^2$$

feladatát megoldva:

$$\begin{aligned} 4,80(2,41 + 1,20\lambda) - 22,68(1,14 - 3,78\lambda) &= 0 \\ \lambda &= 0,156 \quad (\lambda < \bar{\lambda} \approx 0,3). \end{aligned}$$

Így $x^2 = (x_1^2, x_2^2)^T = (2,6, 0,55)^T$. A bázisváltozó korrigálása után $x^2 = (2,52, 0,55)^T$, a célfüggvényérték 13,81.

3. iteráció: Ismét x_1 a bázisváltozó. A feltétel linearizálása:

$$A = JH(x^2) = (6x_1^2 \ 4x_2^2) = (15,24 \ 2,2), \quad b = Ax^2 = (15,24 \ 2,2) \begin{pmatrix} 2,54 \\ 0,55 \end{pmatrix} = 39,9.$$

A bázisváltozók eliminálása:

$$f_N(x_N) = f(2,62 - 0,14x_2, x_2).$$

A linearizált feladat:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2(2,62 - 0,14x_2)^2 + 3x_2^2 \\ & 2,62 - 0,14x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A keresési irány:

$$\begin{aligned} s_N^2 = s_2^2 &= -\frac{\partial f_N(x_2^2)}{\partial x_2} = -(-0,56(2,62 - 0,14x_2^2) + 6x_2^2) = -1,88 \\ s_B^2 = s_1^2 &= -B^{-1}Ns_N^2 = 0,27. \end{aligned}$$

Az új változók λ -tól függően:

$$\begin{aligned} x_1^3 &= x_1^2 + \lambda s_1^2 = 2,52 + 0,27\lambda \\ x_2^3 &= x_2^2 + \lambda s_2^2 = 0,55 - 1,88\lambda, \end{aligned}$$

amelyek $\lambda \leq \bar{\lambda} = \frac{0,55}{1,88} \approx 0,293$ esetén maradnak nemnegatívak.

Az egyenes mentén kereséshez oldjuk meg a

$$\min \quad 2(2,54 + 0,27\lambda)^2 + 3(0,55 - 1,88\lambda)^2$$

feladatot, ahonnan kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 1,08(2,52 + 0,27\lambda) - 5,64(0,55 - 1,88\lambda) &= 0 \\ \lambda &= 0,161. \end{aligned}$$

Mindezek alapján $x_1^3 = 2,58$ és $x_2^3 = 0,25$. Az x_B változó korrigálásával $x^3 = (2,57, 0,25)^T$, a célfüggvényérték 13,39.

A következő két feladat megoldásához szükség lehet valamilyen matematikai programcsomag (MAPLE vagy MATLAB) használatára.

2.35. Feladat. Hajtsuk végre a redukált gradiens módszer első két lépését az alábbi feladatra:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^4 + (x_3 - x_4)^2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

A kezdőpont legyen $x^0 = (1, 1, 1, 1)$, a kezdő bázisváltozó x_1 .

2.36. Feladat. Számoljuk ki az általánosított redukált gradiens-módszer első lépését a következő feladatra:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^4 + (x_3 - x_4)^2 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 4 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

A kezdőpont legyen $x^0 = (1, 1, 1, 1)$.

2.6.3. Barrier-függvények

Vegyük észre, hogy egy konvex optimalizálási feladatban nem lehetnek nemlineáris egyenlőségek, a lineáris egyenlőségek pedig a redukált gradiens módszerhez hasonlóan mindig kiküszöbölhetők, vagyis feltehetjük, hogy minden feltétel egyenlőtlenség. Ha a feltétel nélküli optimalizálás viszonylag egyszerű módszereit szeretnénk használni, akkor az egyenlőtlenséggel bíró feltételeket valami olyannal kell helyettesítenünk, ami automatikusan biztosítja, hogy az átalakított célfüggvény minimumhelye az eredeti feladat megengedett megoldása maradjon. A különféle barrier-függvényeket éppen erre a célra használjuk.

Először vizsgáljuk meg, hogyan lehet egy egyszerű $t \geq 0$ feltételt egy jó barrier függvénnyel helyettesíteni. A $B(t)$ barrier-függvénytől a következő tulajdonságokat várjuk el:

1. A $B(t)$ barrier-függvény sima, (akárhányszor) differenciálható, szigorúan konvex függvény.
2. A $B(t)$ függvényt az $f(t)$ konvex függvénnyel kombinálva az $f(t) + B(t)$ függvény minimuma nem a $t = 0$ pontban van. Ezt úgy is formalizálhatnánk, hogy $B(t)$ deriváltja a végtelenbe tart, ha $t \rightarrow 0$.
3. A $B(t)$ függvény a végtelenbe tart, ha $t \rightarrow 0$.

A fenti tulajdonságokat kielégítő függvényeket hívjuk *barrier-függvényeknek*, míg azokat, amelyek csak az első két tulajdonságot elégítik ki, *kvázibarrier-függvényeknek* nevezzük. Az alábbiakban példákat adunk mindkét típusra:

2.104. Példa. [Kvázibarrier-függvények]

- A

$$B(t) = t \ln t$$

függvény, az ún. *entrópiafüggvény* eleget tesz az első két követelménynek, de a harmadiknak nem, mivel $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$.

- Legyen $0 < r < 1$. A

$$B(t) = -t^r$$

függvényre gyakran csak kvázibarrier-függvényként hivatkoznak. Ez a függvény is csak az első két követelménynek tesz eleget, mivel $\lim_{t \rightarrow 0} -t^r = 0$.

2.105. Példa. [Barrier-függvények]

- A

$$B(t) = -\ln t$$

függvény mindhárom követelménynek megfelel, így igazi barrier-függvény. Ezt a függvényt *logaritmikus barrier-függvénynek* nevezik.

- Legyen $r > 1$. A

$$B(t) = t^{-r}$$

függvény is barrier-függvény. Elnevezése: *inverz barrier-függvény*.

Most definiáljuk a

$$\min f(x) \tag{2.61}$$

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \tag{2.62}$$

feladat barrier-feladatát. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Ekkor a feladathoz rendelt barrier-függvény:

$$f_\mu(x) = \frac{f(x)}{\mu} + \sum_{j=1}^m B(-g_j(x)), \tag{2.63}$$

ahol $\mu > 0$. Az eredeti feladat megoldása az $f_\mu(x)$ függvények egymást követő minimalizálásával történik, miközben $\mu \rightarrow 0$. A következő eredmények könnyen igazolhatók:

- Ha feltesszük, hogy a megengedett megoldások halmaza korlátos, akkor a szigorú konvexitás tulajdonságából könnyen adódik, hogy a barrier feladatnak minden pozitív μ esetén egyértelmű megoldása van. Jelölje ezt az egyértelmű megoldást $x(\mu)$. Sőt valójában elég feltenni, hogy a célfüggvény szinthalmazai korlátosak.
- A minimalizáló megoldások halmazát $\mu > 0$ esetén az optimalizálási feladat *centrális útjának* hívjuk. A centrális út a megengedett megoldások halmazának belsejében halad és egy „centrális optimális megoldásban” végződik.
- A belsőpontos módszerek a feladat centrális útját követik.

Az alábbiakban egy általános belsőpontos módszer működését adjuk meg:

Általános belsőpontos módszer

Input: $\mu = \mu_0$ a barrier paraméter értéke, $0 < \theta < 1$ redukáló paraméter, $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter, x^0 adott szigorúan megengedett megoldás (belsőpont)

0. lépés: $x := x^0$, $\mu := \mu_0$

1. lépés: Ha $\mu < \varepsilon$ akkor álljunk meg, $x(\mu)$ egy közelítő megoldás.

2. lépés: $x(\mu)$ (közelítő) kiszámítása;

3. lépés: $\mu := (1 - \theta)\mu$ és ismét az 1. lépés következik;

A következőkben néhány, konvex feladatok esetében lényeges szempontot emelünk ki. A következő fejezetben fogjuk ezeket részletezni.

- Az új $x(\mu)$ közelítő megtalálásához tipikusan a Newton-módszert használják.
- A Newton-módszer hatékony működéséhez egy simasági feltétel, az ún. *önkorlátozási* feltétel szükséges.
- Az aktuális iteráció centrális úttól való távolságának mérésére egy ún. közelségi mérték használatos. A gyakorlatban ez a Newton-lépésnek a barrier-függvény Hesse-mátrixából származtatott normája.
- Ha a távolság „nagy”, akkor a barrier-függvény a két iteráció között egy adott értékkel csökken. Ha „kicsi”, akkor a Newton-módszer kvadratikusan konvergál.
- A θ paraméter értékétől függően beszélünk kis és nagy lépéses módszerről. Kis lépésnél a μ paraméter minden iterációban csak kicsit csökken (pl. $\left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)$ -nel szorzódik), míg nagy lépésnél jelentősen csökken (pl. $\frac{1}{10}$ -del szorzódik).

3. fejezet

A nemlineáris optimalizálás belsőpontos módszerei

3.1. Bevezetés

Optimalizálási kurzusunk utolsó fejezetében a *logaritmikus barrier*¹ módszert alkalmazzuk konvex optimalizálási feladatok megoldására. Ahogy korábban is, tekintsük a következő (CO) feladatot:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{CO}$$

ahol \mathcal{F} a megengedett tartományt jelöli:

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, \ 1 \leq j \leq m\}.$$

Tegyük fel, hogy a feltételeket megadó $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq m$) függvények és az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény konvexek, valamint hogy \mathcal{F} belsejében háromszor folytonosan differenciálhatók.² Az általánosság megsértése nélkül feltesszük továbbá, hogy $f(x)$ lineáris, azaz $f(x) = -c^T x$ valamely $c \in \mathbb{R}^n$ *célvektorral*. Ellenkező esetben bevezetünk egy új x_{n+1} változót, kibővítjük a rendszert az $f(x) - x_{n+1} \leq 0$ feltétellel, és x_{n+1} -et minimalizáljuk, így a célfüggvény lineáris lesz. Feltehetjük tehát, hogy a feladat az alábbi formájú:

$$\begin{aligned} \min -c^T x \\ g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{CPO}$$

¹Elterjedt még a rövidített *logbarrier* alak is.

²Később fel kell majd tennünk, hogy az f és a g_j ($1 \leq j \leq m$) függvények *simák*, vagyis akárhányszor differenciálhatók.

Megadjuk a (CPO) feladat Lagrange-Wolfe duálját:

$$\begin{aligned} \max \quad & -c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) \\ \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) &= c \\ y_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{CDO}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\nabla(-c^T x) = -c$.

A primál megengedett tartomány (\mathcal{F}) belseje a

$$\mathcal{F}^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) < 0, \quad j = 1, \dots, m\}$$

halmaz. Azt mondjuk, hogy a (CPO) feladat kielégíti a *belsőpont-feltételt*³ (IPC), ha \mathcal{F}^0 nemüres. Más szóval (CPO) akkor és csak akkor elégíti ki IPC-t, ha létezik szigorúan primál megengedett megoldás, azaz van olyan x , amelyre $g_j(x) < 0$, $\forall j = 1, \dots, m$. Hasonlóan azt mondjuk, hogy a (CDO) feladat kielégíti IPC-t, ha létezik egy szigorúan duál megengedett megoldás, azaz egy duál megengedett (x, y) pár, ahol $y > 0$. Meg fogjuk mutatni, hogy ha mindkét feladat kielégíti a belsőpont-feltételt, akkor ezek a feladatok polinomiális időben megoldhatók, feltéve, hogy a fent említett simasági feltétel teljesül. Később konkrét példákat fogunk mutatni ilyen feladatosztályokra.

Hangsúlyozzuk azt a triviális tényt, hogy ha a (CPO) feladat kielégíti IPC-t, akkor a feladat Slater-reguláris. A továbbiakban feltesszük, hogy mind a primál, mind a duál feladat kielégíti a belsőpont-feltételt.

3.2. Dualitás és a centrális út

A (CPO) feladat megoldására a 2.4.3 fejezetben tárgyalt Karush–Kuhn–Tucker-elméletet fogjuk használni (lásd a 84. oldalon a 2.72 tételt és annak 2.73–2.77 következményeit, valamint a 2.76 definíciót). Az elméletet a (CPO) feladatra alkalmazva a következő *KKT-tételt* kapjuk:

3.1. Tétel. *Az x vektor akkor és csak akkor optimális megoldása a (CPO) feladatnak, ha létezik egy $y \in \mathbb{R}_+^m$ vektor, amelyre (x, y) nyeregpontja az alábbi Lagrange-függvénynek:*

$$L(x, y) := -c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x).$$

Ebben az esetben (x, y) a (CPO) feladat Karush–Kuhn–Tucker-pontja, vagyis:

$$\begin{aligned} (i) \quad & g_j(x) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ (ii) \quad & \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) = c, \quad y \geq 0, \\ (iii) \quad & y_j g_j(x) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

³Interior Point Condition

Megjegyezzük, hogy (i) a primál, (ii) pedig a duál megengedettséget biztosítja. A KKT-rendszer harmadik feltételét *komplementaritási feltételnek* nevezzük. Ez a feltétel biztosítja, hogy a dualitásrés az optimumban nulla legyen. Emlékeztetünk rá, hogy a dualitásrés a primál és a duál célfüggvények különbsége. Esetünkben a dualitásrés:

$$-\sum_{j=1}^m y_j g_j(x).$$

A KKT-rendszer helyett a következő, enyhébb rendszert oldjuk meg:

$$\begin{aligned} (i) \quad & g_j(x) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ (ii) \quad & \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) = c, \quad y \geq 0, \\ (iii) \quad & -y_j g_j(x) = \mu, \quad \forall j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ahol $\mu > 0$. Világos, hogy ha ennek a relaxált KKT-rendszernek van megoldása (valamely $\mu > 0$ -ra), akkor x szigorúan primál megengedett, az (x, y) pár szigorúan duál megengedett, a dualitásrés pedig $m\mu$ -vel egyenlő. Más szóval ha az enyhített KKT-rendszernek van megoldása, akkor a (CPO) és a (CDO) feladatok kielégítik a belsőpont-feltételt. További feltételek mellett a fordított irány is teljesül: ha IPC fennáll, akkor az enyhített KKT-rendszernek minden $\mu > 0$ -ra van megoldása. Ezt fogjuk bemutatni a következő tételben, de először be kell vezetnünk néhány definíciót.

3.2. Definíció. Legyen $\bar{x}, s \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathcal{R} := \{x : x = \bar{x} + \lambda s, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ egyenest rossznak hívjuk, ha minden g_j , $j = 1, \dots, m$ barrier-függvény konstans az \mathcal{R} egyenes mentén. Legyen $\bar{x}, s \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Az $\{x : x = \bar{x} + \lambda s, \lambda \in [\alpha^1, \alpha^2]\} \subset \mathbb{R}^n$ szakaszt rossznak hívjuk, ha minden g_j , $j = 1, \dots, m$ barrier-függvény konstans a szakaszon.

3.3. Tétel. Tegyük fel, hogy a (CPO) feladatra nem létezik rossz egyenes. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:

- (i) (CPO) és (CDO) kielégíti a belsőpont-feltételt;
- (ii) A (3.2) relaxált KKT-rendszer minden $\mu > 0$ esetén megoldható;
- (iii) Minden $w > 0$ ($w \in \mathbb{R}^m$) esetén létezik olyan x és y , amelyekre a

$$\begin{aligned} (i) \quad & g_j(x) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ (ii) \quad & \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) = c, \quad y \geq 0, \\ (iii) \quad & -y_j g_j(x) = w_j, \quad \forall j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ennek a fontos és alapvető tételnek a bizonyítása az A.2 függelékben található meg. A továbbiakban feltesszük, hogy a belsőpont-feltétel teljesül.

A relaxált rendszerek megoldásának egyértelműségéről szól a következő tétel:

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (CPO) feladatra nem létezik rossz szakasz. Ekkor a (3.2) és a (3.3) rendszerek megoldása – ha létezik – egyértelmű.*

Bizonyítás: Lásd az A.2 függelékét. □

A (3.2) rendszer megoldását jelölje $x(\mu)$ és $y(\mu)$. Az

$$\{x(\mu) : \mu > 0\}$$

halmazt a (CPO) feladat *centrális útjának*, a

$$\{(x(\mu), y(\mu)) : \mu > 0\}$$

halmazt a (CDO) feladat *centrális útjának* nevezzük.

3.2.1. Logaritmikus barrier-függvények

Ebben a szakaszban a (CPO) és (CDO) feladatok centrális útjának egy eltérő jellemzését adjuk meg primál $(\phi_B(x, \mu))$ és duál $(\phi_B^d(x, y, \mu))$ logaritmikus barrier-függvények felhasználásával. Ezeket a függvényeket sorra a primál és duál megengedett tartományokon definiáljuk az alábbiak szerint:

$$\phi_B(x, \mu) := \frac{-c^T x}{\mu} - \sum_{j=1}^m \log(-g_j(x)),$$

és

$$\phi_B^d(x, y, \mu) := \frac{-c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x)}{\mu} + n(1 - \log \mu) + \sum_{j=1}^m \log y_j.$$

3.5. Lemma. *Minden primál megengedett \bar{x} -re és duál megengedett (x, y) -ra*

$$\phi_B(\bar{x}, \mu) \geq \phi_B^d(x, y, \mu).$$

Továbbá

$$\phi_B(x(\mu), \mu) = \phi_B^d(x(\mu), y(\mu), \mu),$$

valamint $x(\mu)$ minimalizálja $\phi_B(x, \mu)$ -t, valamint $(x(\mu), y(\mu))$ maximalizálja $\phi_B^d(x, y, \mu)$ -t.

Bizonyítás: Emlékezzünk rá (lásd a 2.1.2 fejezet 2.43 lemmáját az 54. oldalon), hogy ha $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, differenciálható függvény, akkor

$$h(\bar{x}) - h(x) \geq \nabla h(x)^T (\bar{x} - x), \quad \forall x, \bar{x} \in \mathcal{D}.$$

Mivel $-c^T x$ és $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ konvexek \mathcal{F} -en, ezért tetszőleges adott $y \geq 0$ -ra a Lagrange-függvény

$$L(x, y) = -c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x)$$

x konvex függvénye. Ezért ha \bar{x} primál megengedett és (x, y) duál megengedett megoldás, akkor

$$-c^T \bar{x} + c^T x + \sum_{j=1}^m y_j (g_j(\bar{x}) - g_j(x)) \geq \left(-c + \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) \right)^T (\bar{x} - x) = 0.$$

Az utolsó egyenlőség abból következik, hogy (x, y) duál megengedett. Így felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \phi_B(\bar{x}, \mu) - \phi_B^d(x, y, \mu) &= \\ &= \frac{1}{\mu} (-c^T \bar{x} + c^T x) - \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) - \sum_{j=1}^m \log(-y_j g_j(\bar{x})) - n(1 - \log \mu) \geq \\ &\geq \frac{-1}{\mu} \sum_{j=1}^m y_j g_j(\bar{x}) - \sum_{j=1}^m \log(-y_j g_j(\bar{x})) - n(1 - \log \mu) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{-y_j g_j(\bar{x})}{\mu} - 1 - \log \frac{-y_j g_j(\bar{x})}{\mu} \right) = \sum_{j=1}^m \psi \left(\frac{-y_j g_j(\bar{x})}{\mu} - 1 \right), \end{aligned}$$

ahol a $\psi : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\psi(t) = t - \log(1 + t). \quad (3.4)$$

A ψ függvény szigorúan konvex, nemnegatív és $\psi(0) = 0$. Ebből következik a lemmában szereplő egyenlőtlenség, az egyenlőség pedig csak akkor áll fenn, ha

$$-c^T \bar{x} + \sum_{j=1}^m y_j g_j(\bar{x}) = -c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x)$$

és

$$-y_j g_j(\bar{x}) = \mu, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Ez pedig már azt is jelenti, hogy az egyenlőség fennáll, ha $\bar{x} = x = x(\mu)$ és $y = y(\mu)$. \square

Vagyis a primál centrális út a primál logaritmikus barrier-függvény minimumhelyeiből, a duál centrális út pedig a duál logaritmikus barrier-függvény maximumhelyeiből áll.

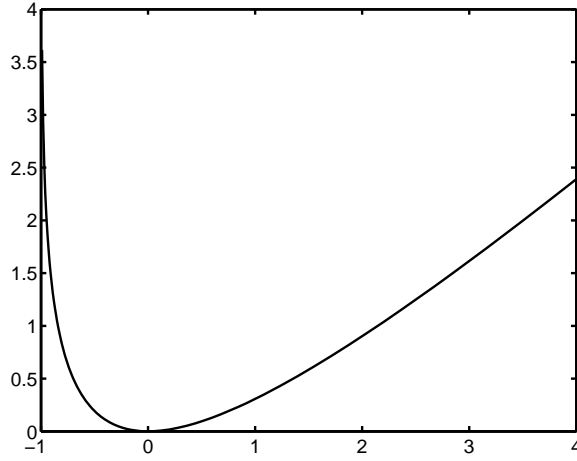
3.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 3.4 pontban definiált függvény szigorúan konvex, nemnegatív és $\psi(0) = 0$. A függvény grafikonja a 3.1 ábrán látható.

3.2.2. Monotonitás a centrális utak mentén

3.6. Tétel. Ha μ csökken, akkor a $-c^T x(\mu)$ primál célfüggvény monoton csökken, a $-c^T x(\mu) + \sum_{j=1}^m y_j(\mu) g_j(x(\mu))$ duál célfüggvény pedig monoton nő.

***Bizonyítás:** Legyen $0 < \bar{\mu} < \mu$. Ekkor $x(\mu)$ minimalizálja $\phi_B(x, \mu)$ -t és $x(\bar{\mu})$ minimalizálja $\phi_B(x, \bar{\mu})$ -t. Ezért

$$\phi_B(x(\mu), \mu) \leq \phi_B(x(\bar{\mu}), \mu)$$



3.1. ábra. A 3.4 pontban definiált $\psi(t) = t - \log(1+t)$ függvény grafikonja.

$$\phi_B(x(\bar{\mu}), \bar{\mu}) \leq \phi_B(x(\mu), \bar{\mu}).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket a következőképpen írhatjuk át:

$$\begin{aligned} -\frac{c^T x(\mu)}{\mu} - \sum_{j=1}^m \log(-g_j(x(\mu))) &\leq -\frac{c^T x(\bar{\mu})}{\mu} - \sum_{j=1}^m \log(-g_j(x(\bar{\mu}))), \\ -\frac{c^T x(\bar{\mu})}{\bar{\mu}} - \sum_{j=1}^m \log(-g_j(x(\bar{\mu}))) &\leq -\frac{c^T x(\mu)}{\bar{\mu}} - \sum_{j=1}^m \log(-g_j(x(\mu))). \end{aligned}$$

Összeadva, majd átrendezve a két egyenlőtlenséget az

$$\left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{1}{\mu}\right) (c^T x(\mu) - c^T x(\bar{\mu})) \leq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel $0 < \bar{\mu} < \mu$, ezért $c^T x(\mu) \leq c^T x(\bar{\mu})$. Ezáltal $-c^T x(\bar{\mu}) \leq -c^T x(\mu)$, amivel beláttuk a tétel első állítását.

A második rész hasonlóan következik abból, hogy $(x(\mu), y(\mu))$ maximalizálja $\phi_B^d(x, y, \mu)$ -t. Figyeljük meg, hogy a duál célfüggvény $-c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x)$ pontosan a (CPO) feladat $L(x, y)$ Lagrange-függvénye. Mint az előbb is, legyen $0 < \bar{\mu} < \mu$. Most $(x(\mu), y(\mu))$ maximalizálja $\phi_B^d(x, y, \mu)$ -t és $(x(\bar{\mu}), y(\bar{\mu}))$ maximalizálja $\phi_B^d(x, y, \bar{\mu})$ -t, ezért

$$\begin{aligned} \phi_B^d(x(\mu), y(\mu), \mu) &\geq \phi_B^d(x(\bar{\mu}), y(\bar{\mu}), \mu) \\ \phi_B^d(x(\bar{\mu}), y(\bar{\mu}), \bar{\mu}) &\geq \phi_B^d(x(\mu), y(\mu), \bar{\mu}). \end{aligned}$$

Ezekkel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \frac{L(x(\mu), y(\mu))}{\mu} + \sum_{j=1}^m \log y_j(\mu) &\geq \frac{L(y(\bar{\mu}), x(\bar{\mu}))}{\mu} + \sum_{j=1}^m \log y_j(\bar{\mu}), \\ \frac{L(y(\bar{\mu}), x(\bar{\mu}))}{\bar{\mu}} + \sum_{j=1}^m \log y_j(\bar{\mu}) &\geq \frac{L(y(\mu), x(\mu))}{\bar{\mu}} + \sum_{j=1}^m \log y_j(\mu). \end{aligned}$$

Itt elhagytuk az $n(1 - \log \mu)$ kifejezést az első egyenlőtlenség mindkét oldaláról és az $n(1 - \log \bar{\mu})$ kifejezést a második egyenlőtlenség mindkét oldaláról. Összeadva a két egyenlőtlenséget az

$$\left(\frac{1}{\bar{\mu}} - \frac{1}{\mu}\right) (L(y(\bar{\mu}), x(\bar{\mu})) - L(y(\mu), x(\mu))) \geq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, vagyis $L(y(\bar{\mu}), x(\bar{\mu})) \geq L(y(\mu), x(\mu))$. Ezzel készen vagyunk a bizonyítással. \square

3.3. Logbarrier módszer a (CPO) feladatra

3.3.1. Bevezetés

Legyen x a (CPO) feladat egy szigorúan megengedett primál megoldása. Be fogjuk látni, hogy adott $\mu > 0$ -ra tetszőleges pontossággal ki tudjuk számítani a centrális út μ -höz tartozó $x(\mu)$ pontját.

Emlékezzünk rá, hogy $x(\mu)$ a $\phi_B(x, \mu)$ primál barrier-függvény (egyértelmű) minimumhelye. A $\phi_B(x, \mu)$ függvényről be fogjuk látni, hogy szigorúan konvex. Megjegyezzük, hogy $\phi_B(x, \mu)$ -t az \mathcal{F}^0 nyílt halmazon definiáljuk és ennek a függvénynek a minimalizálása lényegében egy feltétel nélküli optimalizálási feladat: az $x(\mu)$ minimumhelyen a $\nabla \phi_B(x, \mu)$ gradiens nulla (lásd 2.51 lemma). A $\phi_B(x, \mu)$ függvényt a 2.3 fejezetben ismertett Newton-módszerrel fogjuk minimalizálni: adott x pontból kiindulva a centrális úton lévő $x(\mu)$ pont felé lépünk. Az ebből származó Newton-lépést a következő fejezetben fogjuk kiszámítani.

A módszer elemzéséhez meg kell határoznunk x és $x(\mu)$ távolságát. Ennek egy természetes módját maga a módszer szolgáltatja: a Newton-lépés csak akkor lesz nulla, ha $x = x(\mu)$. Ebből következik, hogy a Newton-lépés „hosszát” használhatjuk x és $x(\mu)$ távolságának mértékeként. Döntő fontosságú a Newton-módszer elemzéséhez, hogy megfelelően definiáljuk ezt a „hosszúságot”. Látni fogjuk, hogy erre a Newton-lépés euklideszi normája – bár kézenfekvő lenne – nem megfelelő. Be fogjuk mutatni, hogy a Newton-lépés „hosszát” sokkal helyesebb a barrier-függvény Hesse-mátrixából származtatott normával mérni. Ezt a normát használva belátjuk, hogy a Newton-folyamat kvadratikus konvergencia, ha x „közel van” $x(\mu)$ -höz. Ha x „messze van” $x(\mu)$ -tól, akkor rövidített⁴ Newton-lépések segítségével érhetjük el azt a tartományt, ahol a Newton-folyamat kvadratikus konvergencia.

Végeredményben hatékony módszert kapunk $x(\mu)$ kiszámítására, amelynek birtokában már meg tudjuk oldani a (CPO) feladatot is.

3.3.2. Newton-lépés ϕ_B -re

Emlékezzünk rá, hogy célunk egy szigorúan primál megengedett x pontból kiindulva a ϕ_B primál barrier-függvény $x(\mu)$ minimumhelyének megtalálása. Idézzük fel (lásd a 2.3.2 fejezetet), hogy a Newton-módszerben a minimalizálandó ϕ_B függvényt az x körüli másodfokú Taylor-polinomjával becsüljük, majd e Taylor-polinom minimumhelyét – ami könnyen kiszámítható – használjuk $x(\mu)$ új becsléseként.

Az x körüli másodrendű Taylor-polinom felírásához szükségünk van ϕ_B x pontbeli

⁴Szokásos még a *tompított* Newton-lépés elnevezés is.

értékére, gradiensére és Hesse-mátrixára. Ezek az alábbiak:

$$\begin{aligned}\phi_B(x, \mu) &= -\frac{c^T x}{\mu} - \sum_{j=1}^m \log(-g_j(x)) \\ \nabla \phi_B(x, \mu) &= -\frac{c}{\mu} + \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} \\ \nabla^2 \phi_B(x, \mu) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\nabla^2 g_j(x)}{-g_j(x)} + \frac{\nabla g_j(x) \nabla g_j(x)^T}{g_j(x)^2} \right).\end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésből látjuk, hogy $\nabla^2 \phi_B(x, \mu)$ pozitív szemidefinit, mert a $\nabla^2 g_j(x)$ és $\nabla g_j(x) \nabla g_j(x)^T$ pozitív szemidefinitek valamint $g_j(x) < 0$. Sőt, a

$$H(x, \mu) := \nabla^2 \phi_B(x, \mu) \tag{3.5}$$

$$g(x, \mu) := \nabla \phi_B(x, \mu), \tag{3.6}$$

jelöléssel azt is beláthatjuk, hogy $H(x, \mu)$ pozitív definit, feltéve, hogy a logaritmikus barrier-függvényre fennáll egy bizonyos simasági feltétel, amelyet majd a 3.3.4 fejezetben fogunk tárgyalni. Addig is a következő feltevést tesszük:

3.7. Feltevés. *A $H(x, \mu)$ mátrix minden $x \in \mathcal{F}^0$ esetén pozitív definit.*

Eszerint $\phi_B(x, \mu)$ szigorúan konvex (l. a 2.44 lemmát), ezért $x(\mu)$ minimumhelye valóban egyértelmű. Most már felírhatjuk $\phi_B(x, \mu)$ x körüli másodfokú Taylor-polinomját:

$$t_2(\Delta x) = \phi_B(x, \mu) + \Delta x^T g(x, \mu) + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x, \mu) \Delta x.$$

Mivel $H(x, \mu)$ pozitív definit, ezért $t_2(\Delta x)$ szigorúan konvex és minimumhelye egyértelmű. A minimumhelyet a következő egyenletből kapjuk:

$$g(x, \mu) + H(x, \mu) \Delta x = 0.$$

Ebből adódik a Newton-lépés x pontban (lásd a 2.3.2 fejezetet)

$$\Delta x = -H(x, \mu)^{-1} g(x, \mu),$$

és az új iteráció

$$x := x + \alpha \Delta x,$$

ahol α a lépéshossz. Ha $\alpha = 1$, akkor *teljes*, ha $\alpha < 1$, akkor *rövidített* vagy *tompított* Newton-lépésről beszélünk.

3.3.3. Közelségi mérték

Szükségünk van egy eszközre, amely megmutatja mennyire sikeres egy Newton-lépés. Ideális esetben egy teljes Newton-lépés $x(\mu)$ -be visz minket, de ez csak akkor lehet, ha $\phi_B(x, \mu)$

kvadratikus, ez azonban $\phi_B(x, \mu)$ definíciójából következően nem áll fenn. Ezért kell egy „közelségi” mérték, amely segítségével mérni tudjuk az $x(\mu)$ minimumhelytől való távolságot. Egy kézenfekvő mérték az euklideszi norma

$$\|x - x(\mu)\|,$$

ennek azonban az a nyilvánvaló hátránya, hogy nem tudjuk kiszámítani, mert $x(\mu)$ nem ismert. Jó alternatíva lehetne magának a Newton-lépésnek az euklideszi normája:

$$\|\Delta x\|.$$

Az utóbbi normát tekinthetjük $\|x - x(\mu)\|$ becslésének, mert – remélhetőleg – Δx jó közelítése $x - x(\mu)$ -nek.

Az euklideszi norma helyett az úgynevezett *Hesse-normát* használjuk, és az x és $x(\mu)$ közötti „távolságot” így adjuk meg:

$$\delta(x, \mu) := \|\Delta x\|_H := \sqrt{\Delta x^T H(x, \mu) \Delta x}.$$

3.2. Feladat. Lássuk be a következőt:

$$\delta(x, \mu) = \sqrt{g(x, \mu)^T H(x, \mu)^{-1} g(x, \mu)} = \|g(x, \mu)\|_{H^{-1}}.$$

A $\delta(x, \mu)$ közelségi mérték választását később tárgyalt eredmények fogják igazolni. Ezen a ponton azonban érdemes megemlíteni egy további érvet a használatára. Tekintsük a következő Φ függvényt:

$$\Phi(z) := \phi(Az + a),$$

ahol $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges kétszer differenciálható függvény, A egy $m \times m$ -es nem-szinguláris mátrix, a egy \mathbb{R}^m -beli vektor és z végigfutja az összes olyan vektort, amelyre $Az + a$ szigorúan primál megengedett. A $\phi(x)$ -re vonatkozó Newton-lépés az x pontban:

$$\Delta x = -\nabla^2 \phi(x)^{-1} \nabla \phi(x).$$

Hasonlóan a $\Phi(z)$ -re vonatkozó Newton-lépés a z pontban:

$$\Delta z = -\nabla^2 \Phi(z)^{-1} \nabla \Phi(z).$$

A $z = A^{-1}(x - a)$ választással $\Delta z = A^{-1} \Delta x$, amit egyszerű számításokkal igazolhatunk. Ezt a tulajdonságot úgy nevezzük, hogy a Newton-lépés *affin invariáns*. Nyilvánvaló, hogy Δx normája nem affin invariáns, mert $\|A^{-1} \Delta x\|$ általában nem lesz egyenlő $\|\Delta x\|$ -val, de $\delta(x, \mu)$ affin invariáns!

3.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Newton-lépés és $\delta(x, \mu)$ affin invariánsak.

3.3.4. Az önkorlátozási tulajdonság

Bevezetés

Tekintsünk először egy egyszerű példát a Newton-módszerre.

3.8. Példa. Legyen $k \geq 2$ és vegyük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^k$$

függvényt. Világos, hogy f minimumhelye egyértelmű, nevezetesen $x = 0$. Tegyük fel, hogy a Newton-módszert egy nemnulla $x \in \mathbb{R}$ pontban kezdjük el. Az f függvény deriváltjai:

$$\begin{aligned} f'(x) &= kx^{k-1} \\ f''(x) &= k(k-1)x^{k-2}. \end{aligned}$$

Így a Newton-lépés:

$$\Delta x = - (f''(x))^{-1} f'(x) = \frac{-1}{k-1} x.$$

Ebből következően egy teljes Newton-lépést használva így kapjuk az új iterációt:

$$x + \Delta x = x + \frac{-1}{k-1} x = \frac{k-2}{k-1} x.$$

Tehát ebben az egyszerű esetben azt kaptuk, hogy a Newton-módszer pontos, ha f kvadratikus ($k = 2$); $k > 2$ esetén a Newton-folyamat lineárisan tart 0-hoz: minden lépés egy konstans $(k-2)/(k-1)$ tényezővel csökkenti az optimális megoldástól való távolságot.

A fenti példa arra utal, hogy nem várhatunk kvadratikus konvergenciát a Newton-módszertől azt az esetet kivéve, amikor egy „majdnem” kvadratikus függvényre alkalmazzuk. Ez motiválja a következő szakaszban bemutatott simasági feltételt: a feltétel lényegében azt mondja ki, hogy a függvény „majdnem” kvadratikus.

A önkorlátozási tulajdonság definiálása

A simasági feltétel definiálása előtt be kell vezetnünk néhány jelölést. Legyen $x \in \mathcal{F}^0$ és $h \in \mathbb{R}^n$ rögzített. Adott μ -re tekintsük a

$$\varphi(\alpha) := \phi_B(x + \alpha h, \mu)$$

függvényt, ahol α végigfut az összes olyan valós értéken, amelyre $x + \alpha h \in \mathcal{F}^0$. Megjegyezzük, hogy φ szigorúan konvex, mert $\phi_B(x, \mu)$ szigorúan konvex. A $\phi(x) = \phi_B(x, \mu)$ -t jelölést használva

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \\ \varphi''(0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\ \varphi'''(0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_i h_j h_k \frac{\partial^3 \phi(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}. \end{aligned}$$

A fenti kifejezések jobb oldalai h -ban rendre első-, másod- és harmadfokon homogének. Ezekre a kifejezésekre használjuk sorra a $\nabla\phi(x)[h]$, $\nabla^2\phi(x)[h, h]$ és $\nabla^3\phi(x)[h, h, h]$ jelöléseket. Ekkor felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \nabla\phi(x)[h] = h^T \nabla\phi(x) \\ \varphi''(0) &= \nabla^2\phi(x)[h, h] = h^T \nabla^2\phi(x)h = \|h\|_H^2 \\ \varphi'''(0) &= \nabla^3\phi(x)[h, h, h] = h^T \nabla^3\phi(x)[h]h.\end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés felhasználja, hogy $\nabla^3\phi(x)[h]$ egy $n \times n$ -es négyzetes mátrix. Továbbá, ahogy korábban, $H = \nabla^2\phi(x)$.

Emlékezzünk rá, hogy a φ függvény 0 körüli harmadfokú Taylor-polinomja így adható meg:

$$\varphi(0) + \varphi'(0)\alpha + \frac{1}{2}\varphi''(0)\alpha^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(0)\alpha^3.$$

Eképpen világos lesz, hogy a következő definíció, amely ϕ ún. *önkorlátozási tulajdonságát* adja meg, a φ Taylor-polinomjának harmadfokú tagját korlátozza a másodfokú taggal. Habár a fő célunk ennek a definíciónak alkalmazása a ϕ_B fenti logaritmikus barrier-függvényére, a definíció ennél általánosabb: bármilyen nyílt halmazon értelmezett, háromszor differenciálható, konvex függvényre alkalmazható. A definíció után be is fogjuk ezt mutatni több egyszerű példán.

3.9. Definíció (Önkorlátozási tulajdonság). *Legyen ϕ egy tetszőleges \mathcal{H} nyílt halmazon definiált, háromszor differenciálható, konvex függvény. Ekkor ϕ -t κ -önkorlátozónak mondjuk ($\kappa \geq 0$), ha*

$$|\nabla^3\phi(x)[h, h, h]| \leq 2\kappa \left(\nabla^2\phi(x)[h, h]\right)^{\frac{3}{2}}$$

tetszőleges $h \in \mathbb{R}^n$ és $x \in \mathcal{H}$ esetén. Azt mondjuk, hogy ϕ önkorlátozó, (κ megadása nélkül), ha ϕ κ -önkorlátozó valamely $\kappa \geq 0$ -ra.

Nyilvánvalóan ez akkor és csak akkor áll fenn, ha a

$$\frac{(\nabla^3\phi(x)[h, h, h])^2}{(\nabla^2\phi(x)[h, h])^3} \leq 4\kappa^2 \quad (3.7)$$

minden $x \in \mathcal{H}$ és $h \in LR^n$ esetén. Megjegyezzük, hogy ez a feltétel h -ban homogén: ha h -ra teljesül, akkor teljesül λh -ra is, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.4. Feladat. Lássuk be, hogy az $n = 1$ speciális esetben a κ -önkorlátozás a következő feltételre egyszerűsödik:

$$|\phi'''(x)| \leq 2\kappa \left(\phi''(x)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3.5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a κ -önkorlátozási tulajdonság affin invariáns.

A κ -önkorlátozási feltétel a Taylor-polinom harmadfokú tagját a másodfokú taggal korlátozza. Ha a feltétel teljesül, akkor a másodfokú Taylor-polinom lokálisan jó kvadrátikus közelítése $\phi(x)$ -nek, emiatt a Newton-módszer jól működik az önkorlátozó függvényekre. Ezt később be is fogjuk bizonyítani.

Most lássunk néhány egyszerű példát önkorlátozó függvényekre.

3.10. Példa. [Lineáris függvény] Legyen $\phi(x) = \gamma + a^T x$, ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^m$. Ekkor

$$\nabla \phi(x) = a, \quad \nabla^2 \phi(x) = 0, \quad \nabla^3 \phi(x) = 0,$$

amiből következik, hogy ϕ 0-önkorlátozó.

3.11. Példa. [Konvex kvadrátikus függvény] Legyen

$$\phi(x) = \gamma + a^T x + \frac{1}{2} x^T A x,$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$ és $A = A^T$ pozitív szemidefinit. Ekkor

$$\nabla \phi(x) = a + A x, \quad \nabla^2 \phi(x) = A, \quad \nabla^3 \phi(x) = 0,$$

amiből következik, hogy ϕ 0-önkorlátozó.

3.12. Példa. Tekintsük a $\phi(x) = x^4$ konvex függvényt, ahol $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\phi'(x) = 4x^3, \quad \phi''(x) = 12x^2, \quad \phi'''(x) = 24x.$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$\frac{(\phi'''(x))^2}{(\phi''(x))^3} = \frac{(24x)^2}{(12x^2)^3} = \frac{1}{3x^4}.$$

Ha $x \rightarrow 0$, akkor a jobboldali kifejezés nyilvánvalóan nem korlátos, vagyis $\phi(x)$ nem önkorlátozó.

3.6. Feladat. Legyen $k > 1$ egész szám. Igazoljuk, hogy $\phi(x) = x^k$, ahol $x \in \mathbb{R}$, csak akkor önkorlátozó, ha $k \leq 2$.

3.13. Példa. Tekintsük most a következő függvényt:

$$\phi(x) = x^4 - \log x, \quad x > 0.$$

Ekkor

$$\phi'(x) = 4x^3 - \frac{1}{x}, \quad \phi''(x) = 12x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \phi'''(x) = 24x - \frac{2}{x^3}.$$

Ebből

$$\frac{(\phi'''(x))^2}{(\phi''(x))^3} = \frac{(24x - \frac{2}{x^3})^2}{(12x^2 + \frac{1}{x^2})^3} = \frac{(24x^4 - 2)^2}{(12x^4 + 1)^3} \leq \frac{(24x^4 + 2)^2}{(12x^4 + 1)^3} = \frac{4}{12x^4 + 1} \leq 4.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\phi(x)$ függvény 1-önkorlátozó.

3.14. Példa. [A $-\log x$ függvény] Legyen

$$\phi(x) = -\log x,$$

ahol $0 < x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\phi'(x) = \frac{-1}{x}, \quad \phi''(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \phi'''(x) = \frac{-2}{x^3},$$

és

$$\frac{(\phi'''(x))^2}{(\phi''(x))^3} = \frac{\left(\frac{-2}{x^3}\right)^2}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^3} = 4.$$

Azaz ϕ 1-önkorlátozó.

3.15. Példa. [A $-\sum_{i=1}^n \log x_i$ függvény] Most tekintsük ezt a függvényt:

$$\phi(x) := -\sum_{i=1}^n \log x_i,$$

ahol $0 < x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $e = (1, \dots, 1)$ jelöléssel:

$$\nabla \phi(x) = \frac{-e}{x}, \quad \nabla^2 \phi(x) = \text{diag}\left(\frac{e}{x^2}\right), \quad \nabla^3 \phi(x)[h] = \text{diag}\left(\frac{-2h}{x^3}\right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Ebből minden $h \in \mathbb{R}^n$ -re

$$|\nabla^3 \phi(x)[h, h, h]| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{-2h_i^3}{x_i^3} \right|$$

és

$$\nabla^2 \phi(x)[h, h] = h^T \text{diag}\left(\frac{e}{x^2}\right) h = \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2}.$$

Minden $\xi \in \mathbb{R}^n$ -re

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i^3 \right| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i|^3 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i^2| \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.8)$$

Azaz a $\xi_i := \frac{h_i}{x_i}$ választással

$$|\nabla^3 \phi(x)[h, h, h]| \leq 2 \left(\nabla^2 \phi(x)[h, h] \right)^{\frac{3}{2}},$$

amivel beláttuk, hogy a ϕ függvény 1-önkorlátozó.

3.16. Példa. [A ψ függvény] Legyen

$$\psi(x) = x - \log(1+x),$$

ahol $-1 < x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\psi'(x) = \frac{x}{1+x}, \quad \psi''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad \psi'''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3},$$

és egyszerűen következik, hogy ψ 1-önkorlátozó.

3.17. Példa. [A Ψ függvény] ψ előző példában adott definícióját használva tekintsük most a

$$\Psi(x) := \sum_{i=1}^n \psi(x_i)$$

függvényt, ahol $-e < x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\nabla \phi(x) = \frac{x}{e+x}, \quad \nabla^2 \phi(x) = \text{diag} \left(\frac{e}{(e+x)^2} \right),$$

$$\nabla^3 \phi(x)[h] = \text{diag} \left(\frac{-2h}{(e+x)^3} \right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Ebből minden $h \in \mathbb{R}^n$ -re

$$|\nabla^3 \phi(x)[h, h, h]| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{-2h_i^3}{(1+x_i)^3} \right|$$

és

$$\nabla^2 \phi(x)[h, h] = h^T \text{diag} \left(\frac{e}{(e+x)^2} \right) h = \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{(1+x_i)^2}.$$

Felhasználva a (3.8) becslést a $\xi_i := h_i/(1+x_i)$ választással kapjuk, hogy

$$|\nabla^3 \phi(x)[h, h, h]| \leq 2 (\nabla^2 \phi(x)[h, h])^{\frac{3}{2}},$$

amivel beláttuk, hogy Ψ 1-önkorlátozó.

3.18. Példa. [Az $x \log x$ entrópia-függvény] Tekintsük a

$$\phi(x) := x \log x - \log x = (x-1) \log x,$$

függvényt, ahol $0 < x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\phi'(x) = \frac{x-1}{x} + \log x, \quad \phi''(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \phi'''(x) = -\frac{x+2}{x^3}.$$

Ebből $x > 0$ felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\frac{(\phi'''(x))^2}{(\phi''(x))^3} = \frac{\left(-\frac{x+2}{x^3}\right)^2}{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^3} = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3} \leq \frac{(2x+2)^2}{(x+1)^3} = \frac{4}{x+1} \leq 4.$$

Ezzel beláttuk, hogy ϕ 1-önkorlátozó.

3.7. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a ϕ függvény κ -önkorlátozó, akkor átskálázható egy pozitív skalárral úgy, hogy 1-önkorlátozóvá válik. Konkrétan: ha λ pozitív konstans, akkor a $\lambda\phi$ függvény $\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}}\right)$ -önkorlátozó.

3.3.5. A Newton-módszer tulajdonságai

Mostantól feltesszük, hogy $\phi(x) := \phi_B(x, \mu)$ bizonyos $\mu > 0$ -ra, és hogy ϕ κ -önkorlátozó az \mathcal{F}^0 halmazon. A következő lemma tartalmazza azt az intuitívan nyilvánvaló tényt, hogy ha $\delta(x, \mu)$ kellően kicsi, akkor a Newton-folyamat kvadratikusan konvergens.

3.19. Lemma. *Ha x szigorúan primál megengedett, $\mu > 0$ és $\delta := \delta(x, \mu) < \frac{1}{\kappa}$, akkor $x + \Delta x$ (ahol Δx az x -beli Newton-lépést jelöli) szigorúan megengedett és*

$$\delta(x + \Delta x, \mu) \leq \frac{\kappa \delta^2}{(1 - \kappa \delta)^2}.$$

Bizonyítás: A bizonyítást elhagyjuk. □

3.20. Következmény. *Ha $\delta := \delta(x, \mu) \leq \frac{1}{3\kappa}$, akkor $\delta(x + \Delta x, \mu) \leq \frac{9}{4}\kappa\delta^2$.*

A következő lemma becslést ad közelségi mértékre, miközben a μ paramétert $(1 - \theta)\mu$ -re változtatjuk. Érdekes megfigyelni, hogy a becslés nem függ κ -tól.

3.21. Lemma. *Legyen x szigorúan primál megengedett és $\delta := \delta(x, \mu)$ bizonyos $\mu > 0$ -ra. Ha $\mu^+ = (1 - \theta)\mu$, akkor*

$$\delta(x, \mu^+) \leq \frac{\delta + \theta\sqrt{m}}{1 - \theta}.$$

***Bizonyítás:** ⁵ Definíció szerint

$$\delta(x, \mu) = \|\Delta x\|_H = \sqrt{\Delta x^T H(x, \mu) \Delta x}.$$

A

$$\Delta x = -H(x, \mu)^{-1} g(x, \mu)$$

Newton-lépést használva (lásd 3.2 feladat) kapjuk, hogy

$$\delta(x, \mu) = \sqrt{g(x, \mu)^T H(x, \mu)^{-1} g(x, \mu)} = \|g(x, \mu)\|_{H^{-1}},$$

ahol (lásd (3.6) és (3.5))

$$\begin{aligned} g(x, \mu) = \nabla \phi_B(x, \mu) &= -\frac{c}{\mu} + \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} \\ H := H(x, \mu) = \nabla^2 \phi_B(x, \mu) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\nabla^2 g_j(x)}{-g_j(x)} + \frac{\nabla g_j(x) \nabla g_j(x)^T}{g_j(x)^2} \right). \end{aligned}$$

A $H(x, \mu)$ mátrix nem függ μ -től, ezért

$$H(x, \mu^+) = H(x, \mu).$$

Ebből következően $\delta(x, \mu^+)$ így adható meg:

$$\delta(x, \mu^+) = \sqrt{g(x, \mu^+)^T H(x, \mu)^{-1} g(x, \mu^+)} = \|g(x, \mu^+)\|_{H^{-1}}. \quad (3.9)$$

Most kiszámítjuk $g(x, \mu^+)$ -t:

$$\begin{aligned} g(x, \mu^+) &= -\frac{c}{\mu^+} + \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} = -\frac{c}{(1 - \theta)\mu} + \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} = \\ &= \frac{1}{1 - \theta} \left(-\frac{c}{\mu} + \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} - \theta \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} \right) = \frac{1}{1 - \theta} \left(g(x, \mu) - \theta \sum_{j=1}^m \frac{\nabla g_j(x)}{-g_j(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \theta} (g(x, \mu) - \theta J e), \end{aligned}$$

⁵Lásd Den Hertog [9], 2.25 lemma (64. oldal)

ahol

$$J = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) & \cdots & \nabla g_m(x) \\ -g_1(x) & \cdots & -g_m(x) \end{pmatrix},$$

$e = (1, \dots, 1)$ pedig az összegzővektor. A (3.9) egyenletbe behelyettesítve:

$$\delta(x, \mu^+) = \|g(x, \mu^+)\|_{H^{-1}} = \frac{1}{1-\theta} \|g(x, \mu) - \theta J e\|_{H^{-1}}.$$

A háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\delta(x, \mu^+) \leq \frac{1}{1-\theta} (\|g(x, \mu)\|_{H^{-1}} + \theta \|J e\|_{H^{-1}}) = \frac{\delta + \theta \|J e\|_{H^{-1}}}{1-\theta}.$$

Ebből már következik az állítás, ha $\|J e\|_{H^{-1}} \leq \sqrt{m}$.

Tudjuk, hogy

$$\|J e\|_{H^{-1}}^2 = e^T J^T H(x, \mu)^{-1} J e.$$

Figyeljük meg, hogy

$$H(x, \mu) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\nabla^2 g_j(x)}{-g_j(x)} + \frac{\nabla g_j(x) \nabla g_j(x)^T}{g_j(x)^2} \right) \succeq \frac{\nabla g_j(x) \nabla g_j(x)^T}{g_j(x)^2} = J J^T,$$

amiből $H(x, \mu) \succeq J J^T$ azt jelenti, hogy a $H(x, \mu) - J J^T$ mátrix pozitív szemidefinit. Ebből

$$H(x, \mu)^{-1} \preceq (J J^T)^+,$$

ahol $(J J^T)^+$ a $J J^T$ általánosított inverzét jelöli. Ennek felhasználásával:

$$\|J e\|_{H^{-1}}^2 \leq e^T J^T (J J^T)^+ J e.$$

Mivel $J^T (J J^T)^+ J$ egy projekciómátrix, ezért

$$\|J e\|_{H^{-1}}^2 \leq e^T J^T (J J^T)^+ J e \leq e^T e = m,$$

vagyis készen vagyunk a bizonyítással. □

3.22. Tétel. Legyen $x^+ := x + \Delta x$ és $\mu^+ = (1 - \theta)\mu$, ahol $\theta = \frac{1}{30\kappa\sqrt{m}}$. Ha $\delta(x, \mu) \leq \frac{1}{3\kappa}$, akkor $\delta(x^+, \mu^+) \leq \frac{1}{3\kappa}$.

Bizonyítás: A 3.19 és a 3.21 lemmák felhasználásával írhatjuk, hogy:

$$\delta(x^+, \mu^+) \leq \frac{9}{4} \kappa \delta(x, \mu^+)^2 \leq \frac{9}{4} \kappa \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{30\kappa\sqrt{m}}} \left(\frac{1}{3\kappa} + \frac{1}{30\kappa} \right) \right)^2 \leq \frac{1}{3\kappa}.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

3.3.6. Logaritmikusan barrier algoritmus teljes Newton-lépésekkel

Most már minden együtt van az első algoritmusunkhoz.

Logaritmikus barrier algoritmus teljes Newton-lépésekkel

Input: $0 \leq \tau < 1$ közelségi paraméter; $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter; $x^0 \in \mathcal{F}^0$ szigorúan megengedett megoldás (belsőpont); $\mu^0 > 0$, amelyre $\delta(x^0, \mu^0) \leq \tau$; $0 < \theta < 1$ paraméter μ csökkentéséhez.**begin** $x := x^0; \mu := \mu^0;$ **while** $m\mu \geq \varepsilon$ **do****begin** $\mu := (1 - \theta)\mu;$ $x := x + \Delta x$ (Δx a Newton-lépés x -ben)**end****end**

Az algoritmus lépésszámát a következő tétel adja meg:

3.23. Tétel. *Ha $\tau = \frac{1}{3\kappa}$ és $\theta = \frac{1}{30\kappa\sqrt{m}}$, akkor a teljes Newton-lépéses logaritmikus barrier algoritmus legfeljebb*

$$\left\lceil 30\kappa\sqrt{m} \log \frac{m\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil$$

iterációt igényel. Az eredményként kapott x szigorúan primál megengedett és ε -optimális.

Bizonyítás: A 3.22 tétel alapján a $\delta(x, \mu) \leq \frac{1}{3\kappa}$ tulajdonság az algoritmus folyamán végig teljesül, ezért a 3.19 lemma miatt minden teljes Newton-lépés egy szigorúan megengedett pontot eredményez. A barrier-paraméter minden iterációban $1 - \theta$ -szeresére csökken, így k iteráció után

$$m\mu = (1 - \theta)^k m\mu^0.$$

Ennek felhasználásával könnyen levezethető, hogy az algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{m\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil \quad (3.10)$$

iteráció után véget ér. A θ értékét behelyettesítve éppen a tétel állítását kapjuk. \square

3.24. Példa. [Logaritmikus barrier módszer teljes Newton-lépésekkel 1]

Tekintsük ezt az egyszerű minimalizálási feladatot:

$$\min \{x : x \geq 0\}.$$

A feladatot a teljes Newton-lépéses logaritmikus barrier algoritmussal oldjuk meg. Először átírjuk a függvényt sztenderd alakra:

$$\min \{x : -x \leq 0\}.$$

A feladat logaritmikus barrier-függvénye:

$$\phi_B(x, \mu) = \frac{x}{\mu} - \log x.$$

A $\phi_B(x, \mu)$ függvény 1-önkorlátozó, ezért legyen

$$\tau = \frac{1}{3\kappa} = \frac{1}{3}, \quad \theta = \frac{1}{30\kappa\sqrt{m}} = \frac{1}{30},$$

továbbá $\varepsilon = 0,5$, $\mu^0 = 0,8$ és $x^0 = 1$. Ekkor a teljes Newton-lépéses logaritmikus barrier algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil 30 \log \frac{\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil = 15$$

iterációt igényel egy ε -optimális x megoldás eléréséhez. Ellenőrizzük, hogy a kezdőpont elég közel van-e a centrális úthoz, vagyis teljesül-e a

$$\delta(x^0, \mu^0) = \sqrt{\Delta x^T H(x^0, \mu^0) \Delta x} \leq \tau$$

egyenlőtlenség. Ehhez a következő számításokat végezzük:

$$\begin{aligned} g(x, \mu) &= \nabla \phi_B(x, \mu) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{x} \\ H(x, \mu) &= \nabla^2 \phi_B(x, \mu) = \frac{1}{x^2} \\ H(x, \mu)^{-1} &= x^2. \end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\Delta x = -H(x^0, \mu^0)^{-1} g(x^0, \mu^0) = -1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

és

$$\delta(x^0, \mu^0) = |\Delta x| = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy elkezdhetjük az iterációkat.

1. iteráció: Mivel

$$m\mu^0 = 0,8 \geq \varepsilon,$$

ezért az új μ és az új x kiszámításával kezdjük:

$$\begin{aligned} \mu^1 &= (1 - \theta)\mu^0 = 0,773333 \\ g(x^0, \mu^1) &= 0,293103 \\ H(x^0, \mu^1) &= 1 \\ H(x^0, \mu^1)^{-1} &= 1 \\ x^1 &= x^0 + \Delta x = 1 - 1 \cdot 0,293103 = 0,706896. \end{aligned}$$

2. iteráció Mivel

$$m\mu^1 = 0,773333 \geq \varepsilon.$$

alapján a megállási feltétel még mindig nem teljesül, ezért folytatjuk az iterációt:

$$\begin{aligned}\mu^2 &= (1 - \theta)\mu^1 = 0,747556 \\ g(x^1, \mu^2) &= 0,07694 \\ H(x^1, \mu^2) &= 2,00119 \\ H(x^1, \mu^2)^{-1} &= 0,499703 \\ x^2 &= x^1 + \Delta x = 0,706896 + 0,038448 = 0,745344.\end{aligned}$$

A további iterációkat az alábbi táblázatban mutatjuk:

Iteráció:	3	4	5	6
μ	0,722637	0,698549	0,675264	0,652755
$g(x, \mu)$	0,042158	0,046350	0,047759	0,049419
$H(x, \mu)$	1,800057	1,918747	2,053899	2,197950
$H(x, \mu)^{-1}$	0,555538	0,521174	0,486879	0,454969
Δx	-0,023420	-0,024160	-0,023250	-0,022480
x	0,721924	0,697767	0,674514	0,652030

Iteráció:	7	8	9	10
μ	0,630997	0,609964	0,589631	0,569977
$g(x, \mu)$	0,051122	0,052885	0,054709	0,056595
$H(x, \mu)$	2,352149	2,517163	2,693750	2,882732
$H(x, \mu)^{-1}$	0,425143	0,397273	0,371229	0,346893
Δx	-0,021730	-0,021010	-0,020310	-0,019630
x	0,630296	0,609286	0,588976	0,569344

Iteráció:	11	12	13	14
μ	0,550978	0,532612	0,514858	0,497696
$g(x, \mu)$	0,058547	0,060566	0,062654	0,064815
$H(x, \mu)$	3,084969	3,301394	3,533002	3,780858
$H(x, \mu)^{-1}$	0,324152	0,302902	0,283045	0,264490
Δx	-0,018989	0,018350	-0,017730	-0,017140
x	0,550366	0,532020	0,514286	0,497143

Láthatjuk, hogy a 14. iteráció után $m\mu$ kisebb lesz, mint ε , ezért $x^{14} = 0,497143$ ε -optimális.

3.25. Példa. [Logaritmikusan barrier módszer teljes Newton-lépéssel 2]

A teljes Newton-lépéses logaritmikusan barrier algoritmust használjuk az alábbi feladat megoldására:

$$\min \{x^4 : x \geq 0\}.$$

A feladat sztenderd alakja:

$$\min \{x^4 : -x \leq 0\}.$$

A feladat logaritmikus barrier-függvénye:

$$\phi_B(x, \mu) = \frac{x^4}{\mu} - \log x.$$

Ez a függvény 1-önkorlátozó (lásd 3.13 példa). Ezért ismét

$$\tau = \frac{1}{3\kappa} = \frac{1}{3}, \quad \theta = \frac{1}{30\kappa\sqrt{m}} = \frac{1}{30}.$$

Legyen továbbá $\varepsilon = 1$, $\mu^0 = 3$ és $x^0 = 1$. Ekkor az algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil 30 \log \frac{\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil = 33$$

iterációt igényel egy ε -optimális x megoldás eléréséhez. Ellenőriznünk kell, hogy:

$$\delta(x^0, \mu^0) = \sqrt{\Delta x^T H(x^0, \mu^0) \Delta x} \leq \tau.$$

Ehhez a következő számítások szükségesek:

$$\begin{aligned} g(x, \mu) &= \nabla \phi_B(x, \mu) = \frac{4x^3}{\mu} - \frac{1}{x} \\ H(x, \mu) &= \nabla^2 \phi_B(x, \mu) = \frac{12x^2}{\mu} + \frac{1}{x^2} \\ H(x, \mu)^{-1} &= \frac{x^2 + \mu}{12x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Mindezek alapján

$$\Delta x = -H(x^0, \mu^0)^{-1} g(x^0, \mu^0) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{15},$$

amiből következik, hogy

$$\delta(x^0, \mu^0) = \sqrt{\frac{1}{45}} \approx 0,15 \leq \frac{1}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy elkezdhetjük az iterációkat.

1. iteráció: Mivel

$$m\mu^0 = 3 \geq \varepsilon$$

ezért az új μ és az új x kiszámításával kezdjük:

$$\begin{aligned} \mu^1 &= (1 - \theta)\mu^0 = 2,9 \\ g(x^0, \mu^1) &= 0,37931 \\ H(x^0, \mu^1) &= 5,137931 \\ H(x^0, \mu^1)^{-1} &= 0,194631 \\ x^1 &= x^0 + \Delta x = 1 - 0,07383 = 0,926174 \\ f(x^1) &= 0,735819. \end{aligned}$$

2. iteráció Először ellenőrizzük, hogy

$$m\mu^1 = 2,9 \geq \varepsilon.$$

Az iterációt folytatnunk kell, így

$$\begin{aligned}\mu^2 &= (1 - \theta)\mu^1 = 2,803333 \\ g(x^1, \mu^2) &= 0,0539 \\ H(x^1, \mu^2) &= 4,837685 \\ H(x^1, \mu^2)^{-1} &= 0,20671 \\ x^2 &= x^1 + \Delta x = 0,926174 - 0,01114 \\ f(x^2) &= 0,701046.\end{aligned}$$

Megadjuk az utolsó két iterációt is.

32. iteráció: Mivel

$$m\mu^{31} = 1,048818 \geq \varepsilon,$$

ezért

$$\begin{aligned}\mu^{32} &= (1 - \theta)\mu^{31} = 1,013858 \\ g(x^{31}, \mu^{32}) &= 0,0484 \\ H(x^{31}, \mu^{32}) &= 8,013924 \\ H(x^{31}, \mu^{32})^{-1} &= 0,124783 \\ x^{32} &= x^{31} + \Delta x = 0,715609 - 0,00604 = 0,70957 \\ f(x^{32}) &= 0,253502.\end{aligned}$$

33. iteráció: Még mindig fennáll, hogy

$$m\mu^{32} = 1,013858 \geq \varepsilon,$$

tehát még egy iteráció szükséges:

$$\begin{aligned}\mu^{33} &= (1 - \theta)\mu^{32} = 0,980063 \\ g(x^{32}, \mu^{33}) &= 0,048812 \\ H(x^{32}, \mu^{33}) &= 8,150924 \\ H(x^{32}, \mu^{33})^{-1} &= 0,122685 \\ x^{33} &= x^{32} + \Delta x = 0,0957 - 0,00599 = 0,703582 \\ f(x^{33}) &= 0,245052.\end{aligned}$$

Végül

$$m\mu^{33} = 0,980063 < \varepsilon,$$

tehát x^{33} ε -optimális.

3.3.7. Logaritmikus barrier algoritmus rövidített Newton-lépésekkel

Világos, hogy a τ közelségi paraméter értéke a teljes Newton-lépéses logaritmikus barrier módszerben (lásd 141. oldal) nagyon kicsi is lehet. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus az iterációkat nagyon közel tartja a centrális úthoz, emiatt a barrier-t csökkentő paraméter is nagyon kicsi, és a gyakorlatban az algoritmus nagyon lassan fog haladni.

Az algoritmus nyilvánvalóan gyorsítható, ha a θ paraméterhez nagyobb értékeket rendelünk, ekkor azonban egy lépés után a $\delta(x, \mu^+)$ közelségi mérték túl nagy lesz, és így semmi nem garantálja a teljes Newton-lépés megengedettségét (lásd a 3.19 lemmát). Tehát ha a μ barrier-paraméter értékét gyorsabban akarjuk csökkenteni, akkor a Newton-lépést egy $0 \leq \alpha < 1$ faktorral kell *tompítanunk*: ezzel biztosítjuk $x + \alpha\Delta x$ megengedettségét. Addig folytatjuk ilyen rövidített lépésekkel, amíg az iteráció el nem éri $x(\mu^+)$ megfelelően kis környezetét: ekkor újból csökkentjük a barrier-paramétert. Mindezt addig folytatjuk, amíg a barrier-paraméter el nem éri az ε/m küszöbértéket.

Az algoritmus elemzéséhez felhasználjuk, hogy a $\phi_B(x, \mu)$ primál barrier-függvény szigorúan konvex, és az $x(\mu)$ pont a függvény minimuma. Megmutatható, hogy ha az α *tompító tényezőt* (vagy *lépéshosszt*) megfelelően választjuk, akkor a Newton-lépés legalább egy fix értékkel csökkenti a barrier-függvényt, ezért véges sok rövidített Newton-lépés után el fogjuk érni $x(\mu)$ környezetét. Formálisan a következőt kapjuk:

3.26. Lemma. *Legyen x szigorúan megengedett, $\mu > 0$ és $\delta := \delta(x, \mu)$. Ha $\alpha = \frac{1}{1+\kappa\delta}$, akkor*

$$\phi_B(x, \mu) - \phi_B(x + \alpha\Delta x, \mu) \geq \frac{1}{\kappa^2} \psi(\kappa\delta).$$

***Bizonyítás:** A bizonyítást elhagyjuk. □

Megjegyezzük, hogy amíg $\delta(x, \mu) \geq \frac{1}{3\kappa}$, és x kívül van azon $x(\mu)$ körüli tartományon, ahol a Newton-folyamat kvadratikusán konvergens (lásd a 3.20 következményt), akkor

$$\frac{1}{\kappa^2} \psi(\kappa\delta) \geq \frac{1}{\kappa^2} \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{0,0457}{\kappa^2} > \frac{1}{22\kappa^2}.$$

Ez azt mutatja, hogy a barrier-függvény legalább egy fix értékkel csökken. A csökkenés mértéke κ -tól függ, de a jelenlegi iterációtól nem.

Mindebből a következő algoritmust kapjuk:

**Logaritmikusan barrier algoritmus rövidített
Newton-lépésekkel**

Input:

$0 \leq \tau < 1$ közelségi paraméter;
 $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter;
 $x^0 \in \mathcal{F}^0$ és $\mu^0 > 0$, amelyekre $\delta(x^0, \mu^0) \leq \tau$;
 $0 \leq \alpha < 1$ tompítótényező (lépéshossz);
 $0 < \theta < 1$ paraméter μ csökkentéséhez.

begin

$x := x^0$; $\mu := \mu^0$;

while $m\mu \geq \varepsilon$ **do**

begin

$\mu := (1 - \theta)\mu$;

while $\delta(x, \mu) \geq \tau$ **do**

begin

$x := x + \alpha \Delta x$;

(Az α tompító tényezőnek olyannak kell lennie, hogy $\phi_B(x, \mu)$ kellően csökkenjen. Ez úgy érhető el, ha a hibaértéket $\frac{1}{1+\kappa\delta(x, \mu)}$ -nek választjuk. Nagyobb csökkenés iránymenti kereséssel érhető el.)

end

end

end

Az algoritmusban az első **while**-hurokra mint *külső hurokra*, a másodikra mint *belső hurokra* hivatkozunk. A külső hurok minden egyes végrehajtását *külső iterációnak*, a belső hurok minden egyes végrehajtását *belső iterációnak* nevezzük. A szükséges külső iterációk száma csak a feladat m dimenziójától, μ^0 -tól, ε -tól és a θ paramétértől függ. A (3.10) egyenlethez hasonlóan a külső iterációk számának felső korlátja az

$$\left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{m\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil$$

érték. Az algoritmus elemzésének fő feladata tehát a belső iterációk számának becslése.

3.27. Lemma. *Minden belső hurok legfeljebb*

$$\left\lceil \frac{22\theta}{(1-\theta)^2} \left(\theta\kappa^2 m + \frac{5}{2}\kappa\sqrt{m} \right) + \frac{22}{3} \right\rceil$$

belső iterációt igényel.

***Bizonyítás:** A lemma a 139. oldalon található 3.21 tételhez hasonlóan bizonyítható. Hasonló eredményt találunk bizonyítással együtt a 3.4.6 fejezetben. \square

A 3.27 lemmát és a (3.10) becslést összekapcsolva kapjuk fő eredményünket.

3.28. Tétel. *Legfeljebb*

$$\left\lceil \left(\frac{22}{(1-\theta)^2} \left(\theta \kappa^2 m + \frac{5}{2} \kappa \sqrt{m} \right) + \frac{22}{3\theta} \right) \log \frac{m\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil$$

rövidített Newton-lépés után a rövidített Newton-lépéses logaritmikus barrier módszer egy szigorúan primál megengedett, ε -optimális x megoldást eredményez.

Ha $\theta = \frac{\nu}{\sqrt{m}}$ valamilyen rögzített ν konstanssal, akkor a 3.28 tétel korlátja ilyen alakú lesz:

$$\mathcal{O} \left(\kappa^2 \sqrt{m} \log \frac{m\mu^0}{\varepsilon} \right).$$

Ha θ független n -től, pl. $\theta = \frac{1}{2}$, akkor a korlát

$$\mathcal{O} \left(\kappa^2 m \log \frac{m\mu^0}{\varepsilon} \right).$$

3.29. Példa. [Rövidített Newton-lépések 1]

Tekintsük a 3.24 példában szereplő feladatot:

$$\min \{x : -x \leq 0\}.$$

Ekkor a logaritmikus barrier-függvény így írható fel:

$$\phi_B(x, \mu) = \frac{x}{\mu} - \log x.$$

Ugyanazt a $\tau = \frac{1}{3}$ -ot vesszük, de a θ paraméternek nagyobb értéket adunk. Ebben a példában a $\theta = 0,25$ értéket használjuk. Most is az $x^0 = 1$ pontból indulunk és $\mu^0 = 0,8$. Az ε paramétert 0,5-nek választjuk. Ekkor a rövidített Newton-lépéses logaritmikus barrier algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil = 2$$

külső iterációt igényel egy ε -optimális x eléréséhez. Minden belső hurok legfeljebb

$$\left\lceil \frac{22\theta}{(1-\theta)^2} \left(\theta + \frac{5}{2} \right) + \frac{22}{3} \right\rceil = 14$$

iterációt igényel.

A 3.24 példából tudjuk, hogy

$$\delta(x^0, \mu^0) \leq \tau,$$

tehát elkezdhetjük az első iterációt.

1. iteráció: Mivel

$$m\mu^0 \geq \varepsilon,$$

ezért kiszámítjuk az új μ -t:

$$\mu^1 = (1 - \theta)\mu^0 = 0,6.$$

Először tudnunk kell, hogy fennáll-e $\delta(x^0, \mu^1) \geq \tau$. Ez fennáll, mert

$$\delta(x^0, \mu^1) = \sqrt{\Delta x H(x^0, \mu^1) \Delta x} = 0,666667.$$

Most kiszámíthatjuk az új x -et:

$$\begin{aligned} g(x^0, \mu^1) &= 0,666667 \\ H(x^0, \mu^1) &= 1 \\ H(x^0, \mu^1)^{-1} &= 1 \\ \Delta x &= -0,666667 \\ \alpha &= \frac{1}{1 + \delta(x^0, \mu^1)} = 0,6 \\ x^1 &= x^0 + \alpha \Delta x = 0,6. \end{aligned}$$

Meg kell néznünk, hogy vajon $\delta(x^1, \mu^1) \geq \tau$:

$$\delta(x^1, \mu^1) = \sqrt{\Delta x H(x^1, \mu^1) \Delta x} \approx 0.$$

Mivel $\delta(x^1, \mu^1) \leq \tau$, ezért a 2. iteráció előtt csökkentjük μ -t.

2. iteráció: Láthatjuk, hogy $m\mu^1 \geq \varepsilon$, tehát elkezdhetjük az iterációt. Először kiszámítjuk az új μ -t:

$$\mu^2 = (1 - \theta)\mu^1 = 0,45.$$

Ellenőrizzük, hogy $\delta(x^1, \mu^2) \geq \tau$:

$$\delta(x^1, \mu^2) = \sqrt{\Delta x H(x^1, \mu^2) \Delta x} = 0,3333.$$

Ez azt jelenti, hogy kiszámíthatjuk az új x -et:

$$\begin{aligned} g(x^1, \mu^2) &= 0,555556 \\ H(x^1, \mu^2) &= 2,777778 \\ H(x^1, \mu^2)^{-1} &= 0,36 \\ \Delta x &= -0,2 \\ \alpha &= 0,75 \\ x^2 &= 0,45. \end{aligned}$$

Elértünk egy ε -optimális x pontot. Mindehhez 2 (külső) iterációt használtunk, és ez pontosan annyi, amennyire számíhattunk. Megjegyezzük azonban, hogy a belső iterációk száma csupán kettő, ami jóval kevesebb, mint amennyit elméletileg várhattunk.

3.30. Példa. [Rövidített Newton-lépések 2] Tekintsük ismét a 3.25 példa feladatát:

$$\min \{x^4 : -x \leq 0\}.$$

Ekkor a logaritmikus barrier-függvény így írható fel:

$$\phi_B(x, \mu) = \frac{x^4}{\mu} - \log x.$$

Akárcsak az előbbi példában, legyen $\tau = \frac{1}{3}$ és $\theta = 0,25$. Most is az $x^0 = 1$ pontból indulunk, és $\mu^0 = 3$. Az ε értékét 1-nek választjuk. Ekkor az algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{\theta} \log \frac{\mu^0}{\varepsilon} \right\rceil = 5$$

iterációt igényel a külső hurokban egy ε -optimális x eléréséhez. Minden egyes belső hurok legfeljebb

$$\left\lceil \frac{22\theta}{(1-\theta)^2} \left(\theta + \frac{5}{2} \right) + \frac{22}{3} \right\rceil = 14$$

iterációt igényel.

A 3.25 példából tudjuk, hogy

$$\delta(x^0, \mu^0) \leq \tau,$$

tehát elkezdhetjük az első iterációt.

1. iteráció: Mivel

$$m\mu^0 \geq \varepsilon,$$

ezért kiszámítjuk az új μ -t:

$$\mu^1 = (1 - \theta)\mu^0 = 2,25.$$

Először ki kell számolnunk $\delta(x^0, \mu^1)$ értékét:

$$\delta(x^0, \mu^1) = \sqrt{\Delta x H(x^0, \mu^1) \Delta x} = 0,309058 < \tau,$$

tehát ismét csökkentjük μ értékét:

$$\mu^2 = (1 - \theta)\mu^1 = 1,6875.$$

Ekkor

$$\delta(x^0, \mu^2) = \sqrt{\Delta x H(x^0, \mu^2) \Delta x} = 0,481169 \geq \tau.$$

Most már kiszámolhatjuk x új értékét:

$$\begin{aligned} g(x^0, \mu^2) &= 1,37037 \\ H(x^0, \mu^2) &= 8,11111 \\ H(x^0, \mu^2)^{-1} &= 0,123288 \\ \Delta x &= -0,16895 \\ \alpha &= \frac{1}{1 + \delta(x^0, \mu^2)} = 0,675142 \\ x^1 &= x^0 + \alpha \Delta x = 0,885935 \\ f(x^1) &= 0,616038. \end{aligned}$$

Ellenőriznünk kell, hogy $\delta(x^1, \mu^2) \geq \tau$ teljesül-e:

$$\delta(x^1, \mu^2) = \sqrt{\Delta x H(x^1, \mu^2) \Delta x} = 0,198409.$$

Mivel $\delta(x^1, \mu^2) \leq \tau$, ezért csökkentjük μ -t és elvégezzük a 2. iterációt.

2. iteráció: Láthatjuk, hogy $m\mu^2 \geq \varepsilon$, tehát elkezdhetjük ezt az iterációt. Először az új μ -t számítjuk ki:

$$\mu^3 = (1 - \theta)\mu^2 = 1,265625.$$

Mivel

$$\delta(x^1, \mu^3) = \sqrt{\Delta x H(x^1, \mu^3) \Delta x} = 0,362063 \geq \tau,$$

ezért kiszámíthatjuk az új x -et.

$$\begin{aligned} g(x^1, \mu^3) &= 1,068908 \\ H(x^1, \mu^3) &= 8,71591 \\ H(x^1, \mu^3)^{-1} &= 0,114733 \\ \Delta x &= -0,12264 \\ \alpha &= 0,734181 \\ x^2 &= 0,795896 \\ f(x^2) &= 0,401259. \end{aligned}$$

Mivel

$$\delta(x^2, \mu^3) = \sqrt{\Delta x H(x^2, \mu^3) \Delta x} = 0,122348 < \tau,$$

ezért elkezdjük a harmadik külső iterációt.

3. iteráció: Mivel $m\mu^3 \geq \varepsilon$, ezért kiszámítjuk az új μ -t:

$$\mu^4 = (1 - \theta)\mu^3 = 0,949219.$$

A távolság

$$\delta(x^2, \mu^4) = \sqrt{\Delta x H(x^2, \mu^4) \Delta x} = 0,280366.$$

Ez kisebb mint τ , tehát ismét csökkenthetjük μ értékét:

$$\mu^5 = (1 - \theta)\mu^4 = 0,949219.$$

Ez valójában már a negyedik külső iteráció. Most azt látjuk, hogy

$$\delta(x^2, \mu^5) = \sqrt{\Delta x H(x^2, \mu^5) \Delta x} = 0,450248 \geq \tau,$$

Vagyis kiszámíthatjuk az új x -et.

$$\begin{aligned} g(x^2, \mu^5) &= 1,576259 \\ H(x^2, \mu^5) &= 12,25607 \\ H(x^2, \mu^5)^{-1} &= 0,081592 \\ \Delta x &= -0,12861 \\ \alpha &= 0,689537 \\ x^3 &= 0,707214 \\ f(x^3) &= 0,250152. \end{aligned}$$

Mivel

$$\delta(x^3, \mu^5) = \sqrt{\Delta x H(x^3, \mu^5) \Delta x} = 0,177549 < \tau,$$

ezért befejezhetjük ezt a külső iterációt. Végeredményben négy külső és mindössze három belső iteráció felhasználásával találtunk egy ε -optimális megoldást.

3.4. *Bővebben az önkorlátozó függvényekről

3.4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben az önkorlátozó függvények néhány további tulajdonságát ismertetjük. Célunk a korábban bizonyítás nélkül közölt eredményeknél (pl. a 3.19 és 3.26 lemmák) általánosabb tételek bizonyítása. Emellett bemutatunk egy hatékony algoritmust is κ -önkorlátozó függvények minimumhelyének megtalálására.

Tekintsük az alábbi definíciót:

3.31. Definíció. Egy $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt zártnak nevezünk, ha epigráfja zárt. Ha ϕ konvex is, akkor ϕ -t konvex zárt függvénynek nevezzük.

Legyen $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, zárt, κ -önkorlátozó függvény, ahol $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt halmaz.

3.32. Lemma. Legyen \bar{x} a ϕ függvény \mathcal{D} értelmezési tartományának tetszőleges határpontja, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ pedig egy tetszőleges sorozat, amelyre $\lim x_k = \bar{x}$. Ekkor $\phi(x_k) \rightarrow \infty$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $\{\phi(x_k)\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat felülről korlátos, ekkor van egy $\bar{\phi}$ határpontja, amelyről természetesen feltehetjük, hogy ez a sorozat egyetlen határpontja. Emiatt

$$z_k := (x_k, \phi(x_k)) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\phi}).$$

Vegyük észre, hogy z_k a ϕ epigráfjához tartozik. Mivel ϕ egy zárt függvény, ezért $(\bar{x}, \bar{\phi})$ is az epigráfhoz tartozik. Ez viszont ellentmondás, mert \bar{x} nem tartozik ϕ értelmezési tartományához. \square

A továbbiakban feltesszük, hogy ϕ egy \mathcal{D} nyílt halmazon értelmezett konvex zárt függvény, tehát $\phi(x)$ a végtelenhez tart, ha x eléri a \mathcal{D} tartomány határát. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy ϕ barrier-függvény a \mathcal{D} tartományon. Valóban, ahogy az a következő feladatból is kiderül, a barrier tulajdonság ekvivalens a zártsági tulajdonsággal.

3.8. Feladat. Legyen a $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy végtelenbe $(+\infty)$ tart, ha eléri a \mathcal{D} nyílt értelmezési tartománynak a határát. Ekkor ϕ zárt.

Tegyük még fel, hogy ϕ κ -önkorlátozó, tehát ϕ háromszor folytonosan differenciálható és fennáll a

$$|\nabla^3 \phi(x)[h, h, h]| \leq 2\kappa (\nabla^2 \phi(x)[h, h])^{\frac{3}{2}} \quad (3.11)$$

egyenlőtlenség minden $x \in \mathcal{D}$ és minden $h \in \mathbb{R}^n$ -re, ahol $\kappa \geq 0$ rögzített.

Legyen

$$g(x) := \nabla \phi(x),$$

és

$$H(x) := \nabla^2 \phi(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

A $v \in \mathbb{R}^n$ vektor x -beli *lokális Hesse-normáját*-ben ebben a fejezetben jelölje $\|v\|_x$, azaz

$$\|v\|_x := \sqrt{v^T H(x) v}.$$

Ezt a jelölést használva a (3.11) egyenlőtlenség így írható át:

$$|\nabla^3 \phi(x)[h, h, h]| \leq 2\kappa \|h\|_x^3.$$

Először is megadjuk az önkorlátozási tulajdonság egy ekvivalens megfogalmazást:

3.33. Lemma. *Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig háromszor differenciálható konvex zárt függvény. A ϕ függvény pontosan akkor κ -önkorlátozó, ha minden $x \in \mathcal{D}$ és $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy*

$$|\nabla^3 \phi(x)[h_1, h_2, h_3]| \leq 2\kappa \|h_1\|_x \|h_2\|_x \|h_3\|_x.$$

Bizonyítás: A lemma a trilineáris függvények egy általános tulajdonsága. A bizonyítás a Függelék A.2 állítása alapján történik (lásd a 188. oldalt). \square

A 3.32 lemma egy érdekes és fontos következményével folytatjuk:

3.34. Tétel. *Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig konvex, zárt, κ -önkorlátozó függvény. Ha \mathcal{D} nem tartalmaz egyenest, akkor a $\nabla^2 \phi(x)$ Hesse-mátrix minden $x \in \mathcal{D}$ esetén pozitív definit.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $H(x)$ nem pozitív definit valamilyen $x \in \mathcal{D}$ esetén, ekkor létezik egy nem nulla $h \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre $h^T H(x) h = 0$, vagy ami ezzel ekvivalens, $\|h\|_x = 0$. Legyen α olyan, hogy $x + \alpha h \in \mathcal{D}$, és tekintsük az alábbi függvényt:

$$k(\alpha) := h^T H(x + \alpha h) h = \nabla^2 \phi(x + \alpha h)[h, h] = \|h\|_{x+\alpha h}^2.$$

Ekkor $k(0) = 0$ és $k(\alpha)$ folytonosan differenciálható. Azt állítjuk, hogy $k(\alpha) = 0$ minden olyan α -ra amelyre a függvény egyáltalán értelmezve van. Nyilván $k(\alpha) \geq 0$ minden α -ra.

Ha $k(\alpha)$ nem azonosan nulla, akkor feltehetjük, hogy $k(\alpha) > 0$ egy nyílt $(0, \bar{\alpha})$ intervallumon, továbbá mivel k' folytonos, ezért még azt is feltehetjük, hogy $k(\alpha)$ nem csökkenő ezen az intervallumon. A $k'(\alpha)$ deriváltat kiszámítva:

$$k'(\alpha) = \nabla^3 \phi(x + \alpha h)[h, h, h] \leq 2\kappa \|h\|_{x+\alpha h}^3 = 2\kappa k(\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Ebből következően $k'(0) = 0$, valamint ha $\kappa = 0$, akkor $k'(\alpha) = 0$, hiszen $k(\alpha) = 0$ minden α -ra k értelmezési tartományában. Ezért feltehetjük, hogy $\kappa > 0$. Ha $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$, akkor

felhasználva, hogy $k(0) = 0$ és hogy k nem csökkenő a $(0, \bar{\alpha})$ intervallumon, ezt írhatjuk fel:

$$k(\alpha) = \int_0^\alpha k'(\beta) d\beta \leq 2\kappa \int_0^\alpha k(\beta)^{\frac{3}{2}} d\beta \leq 2\kappa \int_0^\alpha k(\alpha)^{\frac{3}{2}} d\beta = 2\alpha\kappa k(\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Mindkét oldalt osztva $k(\alpha)$ -val kapjuk, hogy:

$$1 \leq 2\alpha\kappa k(\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

amiből következik, hogy

$$k(\alpha) \geq \frac{1}{4\alpha^2}, \quad \forall \alpha \in (0, \bar{\alpha}).$$

Ez nyilvánvalóan ellentmond annak a ténynek, hogy k folytonos 0-ban.

Ezzel beláttuk, hogy $k(\alpha) = 0$ minden olyan α -ra, amelyre $x + \alpha h \in \mathcal{D}$. Írjuk fel a $\phi(x + \alpha h)$ függvény x körüli elsőfokú Taylor-polinomját a megfelelő hibataggal. Mivel ϕ folytonosan differenciálható, így létezik olyan $0 \leq \beta \leq \alpha$, hogy

$$\phi(x + \alpha h) = \phi(x) + \alpha h^T g(x) + k(\beta) = \phi(x) + \alpha h^T g(x),$$

vagyis $\phi(x + \alpha h)$ lineáris α -ban.

Mivel \mathcal{D} nem tartalmaz egyenest, így létezik egy $\bar{\alpha}$, amelyre $x + \bar{\alpha}h$ a \mathcal{D} határához tartozik. Az általánosság megsértése nélkül feltesszük, hogy $\bar{\alpha} > 0$ (különben h helyébe $-h$ -t írunk). Ebből következik, hogy

$$\lim_{\alpha \rightarrow \bar{\alpha}} \phi(x + \alpha h) = \phi(x) + \bar{\alpha} h^T g(x),$$

ez azonban ellentmond a 3.32 lemmának, amely szerint $\phi(x + \alpha h)$ végtelenbe tart, ha α tart $\bar{\alpha}$ -hoz. \square

3.35. Következmény. *Ha \mathcal{D} nem tartalmaz egyenest, akkor $\phi(x)$ szigorúan konvex. Ebből következően ha $\phi(x)$ -nek létezik minimumhelye, akkor az egyértelmű.*

Mostantól feltesszük, hogy teljesülnek a 3.34 tétel feltételei, vagyis a \mathcal{D} értelmezési tartományban nincs egyenes vonal. Így minden $x \in \mathcal{D}$ és $h \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|h\|_x = 0 \Leftrightarrow h = 0.$$

3.4.2. Néhány alapvető egyenlőtlenség

3.36. Lemma. *Legyen $x \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $x + \alpha d \in \mathcal{D}$. Ekkor*

$$\frac{\|d\|_x}{1 + \alpha\kappa \|d\|_x} \leq \|d\|_{x+\alpha d} \leq \frac{\|d\|_x}{1 - \alpha\kappa \|d\|_x},$$

ahol az első egyenlőtlenség minden olyan α -ra fennáll, amelyre $1 + \alpha\kappa \|d\|_x > 0$, a második pedig minden α -ra, amelyre $1 - \alpha\kappa \|d\|_x > 0$.

Bizonyítás: Rögzített x és d mellett legyen α olyan, hogy $x + \alpha d \in \mathcal{D}$. Definíáljuk a következő függvényt:

$$q(\alpha) := \|d\|_{x+\alpha d}^2 = d^T H(x + \alpha d) d.$$

Vegyük az α szerinti deriváltat:

$$q'(\alpha) = d^T (\nabla^3 \phi(x + \alpha d)[d]) d = \nabla^3 \phi(x + \alpha d)[d, d, d].$$

Ezért a ϕ függvény κ -önkorlátozási tulajdonsága alapján

$$|q'(\alpha)| = |\nabla^3 \phi(x + \alpha d)[d, d, d]| \leq 2\kappa \|d\|_{x+\alpha d}^3 = 2\kappa q(\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Ebből következik, hogy

$$\left| \frac{dq(\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{d\alpha} \right| = \left| \frac{q'(\alpha)}{2q(\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \kappa.$$

Ebből $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén:

$$q(0)^{-\frac{1}{2}} - \alpha\kappa \leq q(\alpha)^{-\frac{1}{2}} \leq q(0)^{-\frac{1}{2}} + \alpha\kappa.$$

Felhasználva, hogy $q(0)^{\frac{1}{2}} = \|d\|_x$ és $q(\alpha)^{\frac{1}{2}} = \|d\|_{x+\alpha d}$ kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\|d\|_x} - \alpha\kappa \leq \frac{1}{\|d\|_{x+\alpha d}} \leq \frac{1}{\|d\|_x} + \alpha\kappa,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\frac{1 - \alpha\kappa \|d\|_x}{\|d\|_x} \leq \frac{1}{\|d\|_{x+\alpha d}} \leq \frac{1 + \alpha\kappa \|d\|_x}{\|d\|_x}.$$

Ezért ha $1 + \alpha\kappa \|d\|_x > 0$, akkor

$$\frac{\|d\|_x}{1 + \alpha\kappa \|d\|_x} \leq \|d\|_{x+\alpha d},$$

és ha $1 - \alpha\kappa \|d\|_x > 0$, akkor

$$\|d\|_{x+\alpha d} \leq \frac{\|d\|_x}{1 - \alpha\kappa \|d\|_x},$$

amivel beláttuk az állítást. □

3.9. Feladat. Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ rögzített és legyen

$$\beta(\alpha) := \frac{1}{\|h\|_{x+\alpha h}}.$$

Ekkor

$$\beta'(\alpha) := -\frac{\nabla^3 \phi(x + \alpha h)[h, h, h]}{2\nabla^2 \phi(x + \alpha h)[h, h]^{\frac{3}{2}}},$$

valamint ebből következően $|\beta'(\alpha)| \leq \kappa$. Vezessük le ebből a 3.36 lemmát.

3.37. Lemma. Legyen $x \in \mathcal{D}$, $x + d \in \mathcal{D}$, valamint $\kappa \|d\|_x < 1$. Ekkor minden nem nulla $v \in \mathbb{R}^n$ -re

$$(1 - \kappa \|d\|_x) \|v\|_x \leq \|v\|_{x+d} \leq \frac{\|v\|_x}{1 - \kappa \|d\|_x}. \quad (3.12)$$

Bizonyítás: Rögzített v mellett legyen minden $0 \leq \alpha \leq 1$ -re

$$k(\alpha) := v^T H(x + \alpha d) v = \|v\|_{x+\alpha d}^2.$$

Deriváljuk $k(\alpha)$ -t α szerint:

$$k'(\alpha) = v^T (\nabla^3 \phi(x + \alpha d)[d]) v = \nabla^3 \phi(x + \alpha d)[d, v, v].$$

A 3.33 lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$|k'(\alpha)| = |\nabla^3 \phi(x + \alpha d)[d, v, v]| \leq 2\kappa \|d\|_{x+\alpha d} \|v\|_{x+\alpha d}^2 = 2\kappa \|d\|_{x+\alpha d} k(\alpha),$$

és a 3.36 lemma alapján, hogy

$$\left| \frac{k'(\alpha)}{k(\alpha)} \right| \leq 2\kappa \|d\|_{x+\alpha d} \leq \frac{2\kappa \|d\|_x}{1 - \alpha\kappa \|d\|_x}.$$

Vegyük észre, hogy $k(\alpha) > 0$. Mivel $k'(\alpha)/k(\alpha)$ a $\log k(\alpha)$ függvény α szerinti deriváltja, ezért

$$\left| \frac{d \log k(\alpha)}{d\alpha} \right| \leq \frac{2\kappa \|d\|_x}{1 - \alpha\kappa \|d\|_x}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log \frac{\|v\|_{x+d}}{\|v\|_x} &= \frac{1}{2} \log \frac{k(1)}{k(0)} = \frac{1}{2} (\log k(1) - \log k(0)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{d \log k(\alpha)}{d\alpha} \right) d\alpha \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{\kappa \|d\|_x}{1 - \alpha\kappa \|d\|_x} d\alpha = -\log(1 - \alpha\kappa \|d\|_x) \Big|_{\alpha=0}^1 = \log \left(\frac{1}{1 - \kappa \|d\|_x} \right), \end{aligned}$$

illetve ehhez hasonlóan, hogy

$$\log \frac{\|v\|_{x+d}}{\|v\|_x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{d \log k(\alpha)}{d\alpha} \right) d\alpha \geq - \int_0^1 \frac{\kappa \|d\|_x}{1 - \alpha\kappa \|d\|_x} d\alpha = \log(1 - \kappa \|d\|_x).$$

Közvetlen következményként adódik, hogy

$$1 - \kappa \|d\|_x \leq \frac{\|v\|_{x+d}}{\|v\|_x} \leq \frac{1}{1 - \kappa \|d\|_x},$$

ami éppen a bizonyítandó (3.12) formula. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. \square

3.10. Feladat. Bizonyítsuk be az alábbi állítást a 3.37 lemma felhasználásával. Ha $x \in \mathcal{D}$ és $x + d \in \mathcal{D}$, akkor

$$(1 - \kappa \|d\|_x)^2 H(x) \preceq H(x + d) \preceq \frac{H(x)}{(1 - \kappa \|d\|_x)^2}.$$

3.38. Lemma. Legyen $x \in \mathcal{D}$ és $d \in \mathbb{R}^m$. Ha $\|d\|_x < \frac{1}{\kappa}$, akkor $x + d \in \mathcal{D}$.

Bizonyítás: Mivel $\|d\|_x < \frac{1}{\kappa}$, ezért a 3.37 lemma alapján $H(x + \alpha d)$ minden $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén korlátos, és ezért $\phi(x + \alpha d)$ is korlátos. Másrészt viszont ϕ végtelen értékeket vesz fel a megengedett halmaz határán a 3.32 lemma alapján, így $x + d \in \mathcal{D}$. \square

3.4.3. A rövidített lépéses Newton-módszer lineáris konvergenciája

Ebben a részben azt az esetet vizsgáljuk, amikor $x \in \mathcal{D}$ kívül esik azon a tartományon, ahol a Newton-folyamat kvadratikusan konvergens. Az α lépéshosszú *rövidített Newton-lépést* elvégezve:

$$x^+ = x + \alpha \Delta x.$$

A következő lemma azt mutatja, hogy α megfelelő választásával a rövidített lépés után egy fix csökkenést érhetünk el ϕ -ben.

3.39. Lemma. Legyen $x \in \mathcal{D}$ és $\delta := \delta(x)$. Ha $\alpha := \frac{1}{1+\kappa\delta}$, akkor

$$\phi(x) - \phi(x + \alpha \Delta x) \geq \frac{\psi(\kappa\delta)}{\kappa^2},$$

ahol $\psi(x) = x - \log(1 + x)$.

Bizonyítás: Legyen

$$\Delta(\alpha) := \phi(x) - \phi(x + \alpha \Delta x),$$

ekkor

$$\begin{aligned} \Delta'(\alpha) &= -g(x + \alpha \Delta x)^T \Delta x \\ \Delta''(\alpha) &= -\Delta x^T H(x + \alpha \Delta x) \Delta x = -\nabla^2 \phi(x + \alpha \Delta x)[\Delta x, \Delta x] \\ \Delta'''(\alpha) &= -\nabla^3 \phi(x + \alpha \Delta x)[\Delta x, \Delta x, \Delta x]. \end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy ϕ κ -önkorlátozó, így az utolsó kifejezésből kapjuk, hogy

$$\Delta'''(\alpha) \geq -2\kappa \|\Delta x\|_{x+\alpha\Delta x}^3.$$

A 3.36 lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta'''(\alpha) \geq -2\kappa \frac{\|\Delta x\|_x^3}{(1 - \alpha\kappa \|\Delta x\|_x)^3} = \frac{-2\kappa\delta^3}{(1 - \alpha\kappa\delta)^3},$$

emiatt

$$\Delta''(\alpha) - \Delta''(0) \geq \int_0^\alpha \frac{-2\kappa\delta^3}{(1 - \beta\kappa\delta)^3} d\beta = \frac{-\delta^2}{(1 - \beta\kappa\delta)^2} \Big|_{\beta=0}^\alpha = \frac{-\delta^2}{(1 - \alpha\kappa\delta)^2} + \delta^2.$$

Mivel $\Delta''(0) = -\nabla^2\phi(x)[\Delta x, \Delta x] = -\delta^2$, ezért

$$\Delta''(\alpha) \geq \frac{-\delta^2}{(1 - \alpha\kappa\delta)^2}.$$

Hasonló módon kaphatunk becslést $\Delta'(\alpha)$ -ra:

$$\Delta'(\alpha) - \Delta'(0) \geq \int_0^\alpha \frac{-\delta^2}{(1 - \beta\kappa\delta)^2} d\beta = \frac{-\delta}{\kappa(1 - \beta\kappa\delta)} \Big|_{\beta=0}^\alpha = \frac{-\delta}{\kappa(1 - \alpha\kappa\delta)} + \frac{\delta}{\kappa}.$$

Használjuk fel, hogy $\Delta'(0) = -g(x)^T \Delta x = \Delta x H(x) \Delta x = \delta^2$, így kapjuk, hogy

$$\Delta'(\alpha) \geq \frac{-\delta}{\kappa(1 - \alpha\kappa\delta)} + \frac{\delta}{\kappa} + \delta^2.$$

Végül, ugyanilyen módon kapunk becslést $\Delta(\alpha)$ -ra. Felhasználva, hogy $\Delta(0) = 0$ adódik a

$$\Delta(\alpha) \geq \int_0^\alpha \left(\frac{-\delta}{\kappa(1 - \beta\kappa\delta)} + \frac{\delta}{\kappa} + \delta^2 \right) d\beta = \frac{1}{\kappa^2} (\log(1 - \alpha\kappa\delta) + \alpha\kappa\delta + \alpha\kappa^2\delta^2)$$

becslés. Az utolsó kifejezés akkor maximális, ha $\bar{\alpha} = \frac{1}{1+\kappa\delta}$. Ezt az értéket behelyettesítve:

$$\Delta(\bar{\alpha}) \geq \frac{1}{\kappa^2} \left(\log \left(1 - \frac{\kappa\delta}{1 + \alpha\delta} \right) + \kappa\delta \right) = \frac{1}{\kappa^2} (\kappa\delta - \log(1 + \alpha\delta)) = \frac{1}{\kappa^2} \psi(\kappa\delta),$$

ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség. \square

3.4.4. A Newton-módszer kvadratikus konvergenciája

Tekintsük a Newton-lépés után kapott $x^+ := x + \Delta x$ pontot. A Newton-lépést a

$$\Delta x = -H(x)^{-1}g(x)$$

formula adja meg, ahol $H(x) = \nabla^2\phi(x)$ és $g(x) = \nabla\phi(x)$. A Newton-lépés „hosszának” mérésére a

$$\delta(x) := \|\Delta x\|_x = \sqrt{g(x)^T H(x)^{-1} g(x)}$$

értéket használjuk (lásd a 3.2 feladatot). Jegyezzük meg, hogy ha x a $\phi(x)$ függvény minimumhelye, akkor $g(x) = 0$ és ezért $\delta(x) = 0$; minden más esetben viszont $\delta(x)$ pozitív. A Newton-lépés után

$$\delta(x^+) = \sqrt{g(x^+)^T H(x^+)^{-1} g(x^+)} = \|H(x^+)^{-1}g(x^+)\|_{x^+}. \quad (3.13)$$

3.40. Lemma. *Ha $\delta(x) \leq \frac{1}{3\kappa}$, akkor x^+ megengedett és*

$$\delta(x^+) \leq \kappa \left(\frac{\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)} \right)^2 \leq \frac{9\kappa}{4} \delta(x)^2.$$

Bizonyítás: Az x^+ pont megengedettsége a 3.38 lemmából következik. A középérték-tételt felhasználva kapjuk, hogy valamilyen $0 \leq \beta \leq 1$ -re:

$$g(x^+) = g(x) + H(x)\Delta x + \frac{1}{2}\nabla^3(x + \beta\Delta x)[\Delta x, \Delta x].$$

Mivel Δx definíciója szerint $g(x) + H(x)\Delta x = 0$, így

$$g(x^+) = \frac{1}{2}\nabla^3\phi(x + \beta\Delta x)[\Delta x, \Delta x],$$

ezért minden $p \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$p^T g(x^+) = \frac{1}{2}\nabla^3\phi(x + \beta\Delta x)[\Delta x, \Delta x, p].$$

A 3.33 lemma felhasználásával:

$$|p^T g(x^+)| \leq \kappa \|\Delta x\|_{x+\beta\Delta x}^2 \|p\|_{x+\beta\Delta x}, \quad (3.14)$$

továbbá a 3.36 lemma alapján, felhasználva, hogy $\delta(x) = \|x\|_x$:

$$\|\Delta x\|_{x+\beta\Delta x} \leq \frac{\|\Delta x\|_x}{1 - \beta\kappa\|\Delta x\|_x} = \frac{\delta(x)}{1 - \beta\kappa\delta(x)}$$

és

$$\|p\|_{x+\beta\Delta x} \leq \frac{\|p\|_{x+\Delta x}}{1 - (1 - \beta)\kappa\|\Delta x\|_{x+\Delta x}} \leq \frac{\|p\|_{x+\Delta x}}{1 - \frac{(1-\beta)\kappa\|\Delta x\|_x}{1 - \kappa\|\Delta x\|_x}} = \frac{\|p\|_{x+\Delta x}}{1 - \frac{(1-\beta)\kappa\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)}}.$$

Az utolsó két egyenlőtlenséget behelyettesítve (3.14)-be, p -t az x^+ -beli $H(x^+)^{-1}g(x^+)$ Newton-lépéssel helyettesítve, és felhasználva, hogy $\|p\|_{x+\Delta x} = \delta(x^+)$, a (3.13)-ból kapjuk a következőt:

$$\delta(x^+)^2 = |g(x^+)^T H(x^+)^{-1}g(x^+)| \leq \kappa \left(\frac{\delta(x)}{1 - \beta\kappa\delta(x)} \right)^2 \frac{\delta(x^+)}{1 - \frac{(1-\beta)\kappa\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)}}.$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$\delta(x^+) \leq \frac{\kappa\delta(x)^2}{h(\beta)} \quad (3.15)$$

valamilyen $0 \leq \beta \leq 1$ -re, ahol

$$h(\beta) = (1 - \beta\kappa\delta(x))^2 \left(1 - \frac{(1 - \beta)\kappa\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)} \right).$$

Elemi eszközökkel ellenőrizhető, hogy

$$h''(\beta) = \frac{2\kappa^2\delta(x)^2 (3\beta\kappa\delta(x) - 2\kappa\delta(x) - 1)}{1 - \kappa\delta(x)} \leq \frac{2\kappa^2\delta(x)^2 (\kappa\delta(x) - 1)}{1 - \kappa\delta(x)} = -2\kappa^2\delta(x)^2 < 0,$$

ezért $h(\beta)$ konkáv. Emiatt

$$h(\beta) \geq \min \{h(0), h(1)\} = \min \left\{ \frac{1 - 2\kappa\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)}, (1 - \kappa\delta(x))^2 \right\} = (1 - \kappa\delta(x))^2, \quad (3.16)$$

minden $0 \leq \beta \leq 1$ -re, ahol felhasználtuk, hogy

$$\kappa\delta(x) \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,381966$$

esetén

$$(1 - \kappa\delta(x))^2 \leq \frac{1 - 2\kappa\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)}.$$

A lemma feltétele alapján $\kappa\delta(x) \leq \frac{1}{3}$, és ezért (3.15) és (3.16) felhasználásával arra következtetünk, hogy

$$\delta(x^+) \leq \frac{\kappa\delta(x)^2}{(1 - \kappa\delta(x))^2},$$

ami bizonyítja az állítást. □

Megjegyzés: A 3.40 lemma akkor is érvényes, ha $\delta(x) < \frac{1}{\kappa}$. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$ és $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén

$$k(\alpha) := v^T g(x + \alpha\Delta x) - (1 - \alpha)v^T g(x).$$

Amennyiben $v = H(x^+)^{-1}g(x^+)$, akkor

$$k(1) = g(x^+)^T H(x^+)^{-1}g(x^+) = \delta(x^+)^2.$$

Ezért az a célunk, hogy találjunk egy jó becslést $k(1)$ -re. Deriváljuk k -t α szerint, és használjuk fel, hogy $H(x)\Delta x = -g(x)$:

$$\begin{aligned} k'(\alpha) &= v^T H(x + \alpha\Delta x)\Delta x + v^T g(x) = v^T H(x + \alpha\Delta x)\Delta x - v^T H(x)\Delta x = \\ &= v^T (H(x + \alpha\Delta x) - H(x)) \Delta x. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A 3.10 feladat alapján

$$H(x + \alpha\Delta x) - H(x) \preceq \left(\frac{1}{(1 - \alpha\kappa \|\Delta x\|_x)^2} - 1 \right) H(x).$$

A Függelék A.1 lemmájának általánosított Cauchy-egyenlőtlenségét felhasználva kapjuk, hogy

$$v^T (H(x + \alpha\Delta x) - H(x)) \Delta x \leq \left(\frac{1}{(1 - \alpha\kappa \|\Delta x\|_x)^2} - 1 \right) \|v\|_x \|\Delta x\|_x.$$

Ebből következően, mivel $\|\Delta x\|_x = \delta(x)$, ezért

$$k'(\alpha) \leq \left(\frac{1}{(1 - \alpha\kappa\delta(x))^2} - 1 \right) \|v\|_x \delta(x).$$

Innen $k(0) = 0$ felhasználásával:

$$k(1) \leq \delta(x) \|v\|_x \int_0^1 \left(\frac{1}{(1 - \alpha\kappa\delta(x))^2} - 1 \right) d\alpha.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{(1 - \alpha\kappa\delta(x))^2} - 1 \right) d\alpha &= \left(\frac{1}{\kappa\delta(x)(1 - \alpha\kappa\delta(x))} - \alpha \right) \Big|_{\alpha=0}^1 = \\ &= \frac{1}{\kappa\delta(x)(1 - \kappa\delta(x))} - 1 - \frac{1}{\kappa\delta(x)} = \frac{\kappa\delta(x)}{1 - \kappa\delta(x)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ezt behelyettesítve:

$$k(1) \leq \|v\|_x \frac{\kappa \delta(x)^2}{1 - \kappa \delta(x)}.$$

Esetünkben $v = H(x^+)^{-1}g(x^+)$, így a 3.37 lemma alapján

$$\|v\|_x \leq \frac{\|v\|_{x^+}}{1 - \alpha \kappa \|\Delta x\|_x} = \frac{\delta(x^+)}{1 - \alpha \kappa \delta(x)}.$$

Mivel $k(1) = \delta(x^+)^2$, ezért behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\delta(x^+)^2 = k(1) \leq \frac{\delta(x^+)}{1 - \alpha \kappa \delta(x)} \frac{\kappa \delta(x)^2}{1 - \kappa \delta(x)}.$$

Mindkét oldalt a $\delta(x^+)$ értékkel osztva kapjuk az állítást.

3.4.5. Önkorlátozó függvény minimumhelyének létezése

Ebben a részben megadjuk a ϕ minimumhelyére vonatkozó szükséges és elégséges feltételeket. Megmutatjuk, hogy ha a minimumhely létezik, akkor egyértelmű is. Ezt az egyértelmű minimumot – feltéve, hogy létezik – jelölje x^* . A fejezet végén levezetünk még néhány becslést a $\phi(x) - \phi(x^*)$ és $\|x - x^*\|_x$ értékekre. Kezdjük két egyszerű lemmával:

3.41. Lemma. *Legyen $x \in \mathcal{D}$ és $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $x + h \in \mathcal{D}$. Ekkor*

$$h^T (g(x + h) - g(x)) \geq \frac{\|h\|_x^2}{1 + \kappa \|h\|_x} \quad (3.19)$$

$$\phi(x + h) - \phi(x) \geq h^T g(x) + \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2}. \quad (3.20)$$

Bizonyítás: A 3.36 lemma alapján

$$\begin{aligned} h^T (g(x + h) - g(x)) &= \int_0^1 h^T H(x + \alpha h) h \, d\alpha = \int_0^1 \|h\|_{x+\alpha h}^2 \, d\alpha \geq \\ &\geq \int_0^1 \frac{\|h\|_x^2}{(1 + \alpha \kappa \|h\|_x)^2} d\alpha = \frac{\|h\|_x^2}{1 + \kappa \|h\|_x}, \end{aligned}$$

ami igazolja az első egyenlőtlenséget. Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \phi(x + h) - \phi(x) - h^T g(x) &= \int_0^1 h^T (g(x + \alpha h) - g(x)) \, d\alpha \geq \\ &\geq \int_0^1 \frac{\alpha \|h\|_x^2}{1 + \alpha \kappa \|h\|_x} \, d\alpha = \frac{\kappa \|h\|_x - \log(1 + \kappa \|h\|_x)}{\kappa^2} = \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2}. \quad \square \end{aligned}$$

3.42. Lemma. *Legyen $x \in \mathcal{D}$ és $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $x + h \in \mathcal{D}$, és legyen $\|h\|_x < 1$. Ekkor*

$$\begin{aligned} h^T (g(x + h) - g(x)) &\leq \frac{\|h\|_x^2}{1 - \kappa \|h\|_x} \\ \phi(x + h) - \phi(x) &\leq h^T g(x) + \frac{\psi(-\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Az előző bizonyításhoz hasonlóan most is a 3.36 lemmát használjuk:

$$\begin{aligned} h^T (g(x+h) - g(x)) &= \int_0^1 h^T H(x + \alpha h) h \, d\alpha = \int_0^1 \|h\|_{x+\alpha h}^2 \, d\alpha \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{\|h\|_x^2}{(1 - \alpha \kappa \|h\|_x)^2} d\alpha = \frac{\|h\|_x^2}{1 - \kappa \|h\|_x}, \end{aligned}$$

ami az első egyenlőtlenség. Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} \phi(x+h) - \phi(x) - h^T g(x) &= \int_0^1 h^T (g(x + \alpha h) - g(x)) \, d\alpha \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{\alpha \|h\|_x^2}{1 - \alpha \kappa \|h\|_x} \, d\alpha = \frac{-\kappa \|h\|_x - \log(1 - \kappa \|h\|_x)}{\kappa^2} = \frac{\psi(-\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2}, \end{aligned}$$

amivel beláttuk az állítást. \square

A szokásos módon, minden $x \in \mathcal{D}$ -re legyen $\delta(x) = \|\Delta x\|_x$, ahol Δx az x -hez tartozó Newton-lépést jelöli. Most belátjuk, hogy ha $\delta(x) < \frac{1}{\kappa}$ valamilyen $x \in \mathcal{D}$ -re, akkor ϕ -nek van minimumhelye. Megjegyezzük, hogy ez a meglepő eredmény azt mutatja, hogy ϕ valamilyen lokális jellemzője egy globális tulajdonságot, nevezetesen a minimumhely létezését biztosítja.

3.43. Tétel. *Legyen $\delta(x) < \frac{1}{\kappa}$ valamilyen $x \in \mathcal{D}$ -re. Ekkor ϕ -nek létezik egyértelmű x^* minimumhelye \mathcal{D} -ben.*

Bizonyítás: A bizonyítás azon a megfigyelésen alapul, hogy a

$$\{y \in \mathcal{D} : \phi(y) \leq \phi(x)\} \quad (3.21)$$

szinthalma kompakt, ahol x -re teljesülnek a tétel feltételei. Ez a következőképpen igazolható:

Legyen $y \in \mathcal{D}$. Az $y = x + h$ jelölést használva a 3.41 lemmából következik, hogy

$$\phi(y) - \phi(x) \geq h^T g(x) + \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2} = -h^T H(x) \Delta x + \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2}, \quad (3.22)$$

ahol kihasználtuk, hogy definíció szerint az x -beli Δx Newton-lépésre $H(x) \Delta x = -g(x)$. Mivel

$$h^T H(x) \Delta x \leq \|h\|_x \|\Delta x\|_x = \|h\|_x \delta(x),$$

ezért

$$\phi(y) - \phi(x) \geq -\|h\|_x \delta(x) + \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2}.$$

Tehát ha $\phi(y) \leq \phi(x)$, akkor

$$\frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2} \leq \kappa \delta(x) < 1, \quad (3.23)$$

A $\xi := \kappa \|h\|_x$ jelölést használva könnyen belátható, hogy $\psi(\xi)/\xi$ monoton nő $\xi > 0$ esetén, és 1-hez tart, ha $\xi \rightarrow \infty$. Ezért $\delta(x) < \frac{1}{\kappa}$ alapján a (3.23) egyenlőtlenségből arra következtetünk, hogy $\kappa \|h\|_x$ felülről korlátos. Ez egyben azt is jelenti, hogy a (3.21) szinthalmaz korlátos, így ϕ -nek létezik egy x^* minimumhelye. Végül a 3.35 következmény alapján ez a minimumhely egyértelmű. \square

A következő példa azt mutatja, hogy a fenti eredmény éles.

3.44. Példa. Legyen $\varepsilon \geq 0$ rögzített, és tekintsük az alábbi $f_\varepsilon : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon x - \log x, \quad x > 0.$$

Ez a függvény 1-önkorlátozó. A deriváltak:

$$f'_\varepsilon(x) = \varepsilon - \frac{1}{x}, \quad f''_\varepsilon(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Ezért

$$\delta(x) = \sqrt{x^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{x} \right)^2} = |1 - \varepsilon x|.$$

Tehát $\varepsilon = 0$ esetén $\delta(x) = 1$ minden $x > 0$ -ra. Mivel $f_0(x) = -\log x$, ezért $f_0(x)$ -nek nincs minimumhelye. Másrészt viszont ha $\varepsilon > 0$, akkor $\delta(\frac{1}{\varepsilon}) = 0 < 1$, és $x = \frac{1}{\varepsilon}$ egy minimumhely.

3.11. Feladat. Legyen $\delta(x) \geq \frac{1}{\kappa}$ minden $x \in \mathcal{D}$ -re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ϕ nem korlátos, és ezért nincs minimumhelye \mathcal{D} -ben. (Útmutatás: használjuk a 3.39 lemmát.)

3.12. Feladat. Legyen $\delta(x) \geq \frac{1}{\kappa}$ minden $x \in \mathcal{D}$ -re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a \mathcal{D} halmaz nem korlátos.

A következő tétel bizonyításához szükséges az alábbi feladat eredménye.

3.13. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $s < 1$ esetén⁶

$$\psi(-s) = \sup_{t > -1} \{st - \psi(t)\}.$$

Ebből következik, hogy

$$\psi(-s) + \psi(t) \geq st, \quad s < 1, \quad t > -1. \quad (3.24)$$

3.45. Tétel. Legyen $x \in \mathcal{D}$ olyan, hogy $\delta(x) < \frac{1}{\kappa}$, és jelölje x^* a ϕ függvény egyértelmű minimumhelyét. Ekkor a $\delta := \delta(x)$ jelölést használva:

$$\frac{\psi(\kappa\delta)}{\kappa^2} \leq \phi(x) - \phi(x^*) \leq \frac{\psi(-\kappa\delta)}{\kappa^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{\psi'(\kappa\delta)}{\kappa} = \frac{\delta}{1 + \kappa\delta} \leq \|x - x^*\|_x \leq \frac{\delta}{1 - \kappa\delta} = -\frac{\psi'(-\kappa\delta)}{\kappa}, \quad (3.26)$$

⁶A ψ fenti tulajdonsága azt jelenti, hogy $\psi(-t)$ konjugáltja $\psi(t)$ -nek.

Bizonyítás: A (3.25) első egyenlőtlensége a 3.39 lemmából következik, hiszen ϕ minimumhelye x^* -ban van. Továbbá a (3.20) egyenlőtlenségből és a 3.41 lemmából $h = x^* - x$ esetén megkapjuk (3.25) második egyenlőtlenségét:

$$\begin{aligned}\phi(x^*) - \phi(x) &\geq (h)^T g(x) + \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2} \geq -\|h\|_x \delta(x) + \frac{\psi(\kappa \|h\|_x)}{\kappa^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{\kappa^2} (-\kappa \|h\|_x \kappa \delta + \psi(\kappa \|h\|_x)) \geq -\frac{\psi'(-\kappa \delta)}{\kappa^2},\end{aligned}$$

ahol a második egyenlőtlenség azért áll fenn, mert

$$(h)^T g(x) = -(h)^T H(x) \Delta x \leq \|h\|_x \|\Delta x\|_x = \|h\|_x \delta(x) = \|h\|_x \delta, \quad (3.27)$$

a negyedik egyenlőtlenség pedig a (3.24) becslésből következik.

A (3.26) egyenlőtlenség bizonyításához először a (3.27) sor és a 3.41 lemma (3.19) pontja alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{\|h\|_x^2}{1 + \kappa \|h\|_x} \leq (h)^T g(x) \leq \|h\|_x \delta.$$

A $\|h\|_x$ kifejezéssel osztva kapjuk, hogy

$$\frac{\|h\|_x}{1 + \kappa \|h\|_x} \leq \delta,$$

ahonnan átrendezés után:

$$\|h\|_x \leq \frac{\delta}{1 - \kappa \delta} = -\frac{\psi'(-\kappa \delta)}{\kappa},$$

ami igazolja (3.26) második egyenlőtlenségét.

Vegyük észre, hogy 3.26 első egyenlőtlensége triviális, ha $\kappa \|h\|_x > 1$, mert $\frac{\delta}{1 + \kappa \delta} < \frac{1}{\delta}$, ezért feltehetjük, hogy $1 - \kappa \|h\|_x > 0$. Legyen $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén

$$k(\alpha) := g(x^* - \alpha h)^T H(x)^{-1} g(x).$$

Ebből $k(0) = 0$ és $k(1) = \delta(x)^2 =: \delta^2$. A 3.10 feladat eredményét és a Függelékben szereplő A.1 általánosított Cauchy-egyenlőtlenséget felhasználva írhatjuk, hogy:

$$k'(\alpha) = -h^T H(x^* - \alpha h) H(x)^{-1} g(x) \leq \frac{\|h\|_x \delta(x)}{(1 - \kappa \|h\|_x)^2}.$$

Ebből

$$\delta^2 = k(1) \leq \int_0^1 \frac{\|h\|_x \delta}{(1 - \kappa \|h\|_x)^2} d\alpha = \frac{\|h\|_x \delta}{1 - \kappa \|h\|_x}.$$

Mindkét oldalt δ -val osztva kapjuk, hogy

$$\delta \leq \frac{\|h\|_x}{1 - \kappa \|h\|_x},$$

ami ekvivalens ezzel:

$$\|h\|_x \geq \frac{\delta}{1 + \kappa \delta}.$$

Tehát készen vagyunk a bizonyítással. □

3.4.6. Egy hatékony algoritmus

Most már minden eszközünk megvan ahhoz, hogy hatékony módszert tervezzünk a

$$\min \{ \phi(x) : x \in \mathcal{D} \}$$

feladat megoldására. Tegyük fel, hogy adott egy $x^0 \in \mathcal{D}$ pont. Számítsuk ki a $\delta^0 := \delta(x^0)$ értéket. Két esetet különböztetünk meg.

$\delta^0 \leq \frac{1}{3\kappa}$: Ha $\delta^0 \leq \frac{1}{3\kappa}$, akkor x^0 -ból kiindulva teljes Newton-lépéseket használunk addig, amíg az x^k pont ki nem elégíti a $\delta(x^k) \leq \varepsilon$ feltételt, ahol $\varepsilon > 0$ egy előre adott pontosság paraméter. A 3.40 lemma alapján meg tudjuk becsülni a szükséges Newton-lépések számát: $k \geq 1$ esetén a lemma szerint

$$\delta(x^k) \leq \frac{9\kappa}{4} \delta(x^{k-1})^2 \leq \dots \leq \frac{4}{9\kappa} \left(\frac{9\kappa\delta^0}{4} \right)^{2^k},$$

ezért $\delta(x^k) \leq \varepsilon$, ha

$$\frac{4}{9\kappa} \left(\frac{9\kappa\delta^0}{4} \right)^{2^k} \leq \varepsilon.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$2^k \log \frac{9\kappa\delta^0}{4} \leq \log \frac{9\kappa\varepsilon}{4}.$$

Megjegyezzük, hogy $\frac{9\kappa\delta^0}{4} \leq \frac{3}{4} < 1$. Osztva a $-\log \frac{9\kappa\delta^0}{4}$ értékkel adódik, hogy

$$2^k \geq \frac{\log \frac{9\kappa\varepsilon}{4}}{\log \frac{9\kappa\delta^0}{4}},$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$k \geq \log_2 \frac{\log \frac{9\kappa\varepsilon}{4}}{\log \frac{9\kappa\delta^0}{4}}.$$

Mivel $-\log \frac{9\kappa\delta^0}{4} \geq -\log \frac{3}{4}$, ezért a folyamat legfeljebb

$$\log_2 \left(\frac{\log \frac{9\kappa\varepsilon}{4}}{\log \frac{3}{4}} \right) = \log_2 \left(\frac{\log \frac{9}{4} + \log \kappa\varepsilon}{\log \frac{3}{4}} \right) = \log_2 (-2,8188 - 3,4761 \log \kappa\varepsilon)$$

lépés után véget ér, és az eredmény egy olyan $x \in \mathcal{D}$ lesz, amelyre teljesül, hogy $\|x - x^*\|_x \leq \varepsilon$.

$\delta^0 > \frac{1}{3\kappa}$: Ebben az esetben rövidített Newton-lépéseket használunk. A 3.39 lemma alapján egy rövidített Newton-lépés ϕ -t legalább a

$$\frac{\psi(\kappa\delta)}{\kappa^2} \geq \frac{\psi(\frac{1}{3})}{\kappa^2} = \frac{0,0457}{\kappa^2} > \frac{1}{22\kappa^2}$$

értékkel csökkenti. Ez alapján legfeljebb

$$22\kappa^2 (\phi(x^0) - \phi(x^*))$$

lépés után elérjük azt a tartományt, ahol $\delta(x) < \frac{1}{3\kappa}$. Ekkor teljes Newton-lépésekkel mehetünk tovább, és összesen

$$\lceil 22\kappa^2 (\phi(x^0) - \phi(x^*)) + \log_2 (-2,8188 - 3,4761 \log \kappa \varepsilon) \rceil$$

lépés után olyan $x \in \mathcal{D}$ -t kapunk, amelyre $\|x - x^*\|_x \leq \varepsilon$. Könnyen ellenőrizhető (Maple vagy Mathematica felhasználásával), hogy $\kappa \varepsilon < 10^{-6}$ esetén ez a korlát kisebb, mint

$$\lceil 22\kappa^2 (\phi(x^0) - \phi(x^*)) + 6(1 - \kappa \varepsilon) \rceil.$$

Vegyük azonban észre a fenti korlát hiányosságát is: a $\phi(x^*)$ értéket általában nem ismerjük előre, ezért a korlátot nem tudjuk kiszámolni az algoritmus kezdetén. Sok esetben viszont jó becslést vezethetünk le a $\phi(x^0) - \phi(x^*)$ értékre és ebből egy felső korlátot kaphatunk az iterációk számára.

3.46. Példa. Tekintsük a következőképpen definiált $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = x - \log(1 + x), \quad x > 0.$$

A 3.16 példában megmutattuk, hogy f 1-önkorlátozó, emellett pedig

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

ezért

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{f'(x)^2}{f''(x)}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Vegyük észre, hogy $x = 0$ az egyetlen minimumhely. Az x -beli Newton-lépés

$$\Delta x = -\frac{f'(x)}{f''(x)} = -x(1+x),$$

amely után

$$x^+ = x - x(1+x) = -x^2.$$

A Newton-lépés csak akkor megengedett, ha $-x^2 > -1$, vagyis ha $\delta(x) < 1$. Ebben az esetben az elmélet biztosítja a megengedettséget. Sőt, ha a Newton-lépés megengedett, akkor $\delta(x^+) = \delta(x)^2$, ami jobb a 3.19 lemma eredményénél. Ha egy rövidített Newton-lépést végzünk, ahol a lépéshossz $\alpha = \frac{1}{1+\delta(x)}$, akkor a következő pontot így kapjuk:

$$x^+ = x - \frac{x(1+x)}{1+|x|} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{-2x^2}{1-x} & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Vagyis azt kapjuk ebben a példában, hogy a rövidített Newton-lépés pontos, ha $x > 0$. Amennyiben $-1 < x < 0$, akkor

$$\frac{-2x^2}{1-x} < -x^2,$$

és ezért a teljes Newton-lépés jobb eredményt ad, mint a rövidített Newton-lépés. Végül figyeljük meg, hogy ha addig végezzük a Newton-módszert, amíg $\delta(x) \leq \varepsilon$, akkor az x output olyan, hogy $|x| \leq \varepsilon$.

3.47. Példa. Legyen

$$\phi(x) := - \sum_{i=1}^n \log x_i,$$

ahol $0 < x \in \mathbb{R}^n$. A 3.15 példában megmutattuk, hogy ϕ 1-önkorlátozó, és az első- és másodrendű deriváltja így írható fel:

$$g(x) = \nabla \phi(x) = \frac{-e}{x}, \quad H(x) = \nabla^2 \phi(x) = \text{diag} \left(\frac{e}{x^2} \right).$$

Ez alapján

$$\delta(x) = \sqrt{g(x)^T H(x)^{-1} g(x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \|e\| = \sqrt{n}.$$

Ebből arra következtetünk, hogy ϕ -nek nincs minimumhelye (lásd 3.11 feladat).

3.48. Példa. Tekintsük most a 3.17 példában bevezetett Ψ függvényt:

$$\Psi(x) := \sum_{i=1}^n \psi(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i - \log(1 + x_i),$$

ahol $-e < x \in \mathbb{R}^n$. A Ψ függvény gradiense és Hesse-mátrixa:

$$g(x) = \nabla \phi(x) = \frac{x}{e+x}, \quad H(x) = \nabla^2 \phi(x) = \text{diag} \left(\frac{e}{(e+x)^2} \right).$$

Megállapítottuk, hogy a Ψ függvény 1-önkorlátozó. Mindebből következik, hogy

$$\delta(x) = \sqrt{g(x)^T H(x)^{-1} g(x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|.$$

Ennek alapján $x = 0$ az egyetlen minimumhely. Az x -beli Newton-lépés az alábbi:

$$\Delta x = -H(x)^{-1} g(x) = -x(e+x),$$

amely után

$$x^+ = x - x(e+x) = -x^2.$$

A Newton-lépés csak akkor megengedett, ha $-x^2 > -e$, vagyis ha $x^2 < e$; ez biztosan fennáll, ha $\delta(x) < 1$. Megjegyezzük, hogy az elmélet csak ebben az esetben biztosítja a megengedettséget. Továbbá ha a Newton-lépés megengedett, akkor

$$\delta(x^+) = \|x^2\| \leq \|x\|_\infty \|x\| \leq \delta(x)^2,$$

és ez jobb, mint a 3.19 lemma eredménye.

Egy $\alpha = \frac{1}{1+\delta(x)}$ lépéshosszú rövidített Newton-lépés után:

$$x^+ = x - \frac{x(e+x)}{1 + \|x\|}.$$

Ha addig folytatjuk a Newton-módszert, amíg $\delta(x) \leq \varepsilon$ nem teljesül, akkor a kapott x -re fennáll az $\|x\| \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség.

3.49. Példa. Tekintsük az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x \log x - \log x, \quad x > 0$$

függvényt. Ez a 3.18 példában vizsgált entrópia-függvény barrier-függvénye. Ugyanott láttuk, hogy f 1-önkorlátozó. Ekkor

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} + \log x, \quad f''(x) = \frac{x+1}{x^2}.$$

Ebből

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{f'(x)^2}{f''(x)}} = \sqrt{\frac{(x-1+x \log x)^2}{1+x}} = \frac{|x-1+x \log x|}{\sqrt{1+x}}.$$

Ebben az esetben $x = e$ az egyetlen minimumhely. Az x -beli Newton-lépés az alábbi:

$$\Delta x = -\frac{f'(x)}{f''(x)} = -\frac{x(x-1+x \log x)}{1+x},$$

és egy teljes Newton-lépés után a

$$x^+ = x - \frac{x(x-1+x \log x)}{1+x} = \frac{x(2-x \log x)}{1+x}$$

pontba jutunk.

Ha egy $\alpha = \frac{1}{1+\delta(x)}$ lépéshosszú rövidített Newton-lépést végzünk, akkor a

$$x^+ = x - \frac{x(x-1+x \log x)}{(1+x)(1+\delta x)}$$

pontba jutunk.

Ezt a példát egy numerikus kísérlettel fejezzük be. Ha a kezdőpont $x = 10$, akkor az alábbi táblázat szerinti értékeket kapjuk eredményül. Ebben a táblázatban k az iteráció számát, x^k a k -adik iterandust jelöli, $\delta(x^k)$ a közelségi mérték x^k -ban, α_k pedig a lépés mérete a $k+1$ -edik iterációban.

k	x^k	$f(x^k)$	$\delta(x^k)$	α_k
0	10,000000000000000	20,72326583694642	9,65615737513337	0,09384245791391
1	7,26783221086343	12,43198234403589	7,19322142387618	0,12205211457924
2	5,04872746432087	6,55544129967853	4,97000287092924	0,16750410705319
3	3,33976698811526	2,82152744553701	3,05643368252612	0,24652196443090
4	2,13180419256384	0,85674030296950	1,55140872104182	0,39194033937129
5	1,39932346194914	0,13416824208214	0,56132642454284	0,64048105782415
6	1,07453881397326	0,00535871156275	0,10538523300312	1,00000000000000
7	0,99591735745291	0,00001670208774	0,00577372342963	1,00000000000000
8	0,99998748482804	0,00000000015663	0,00001769912592	1,00000000000000
9	0,9999999998253	0,00000000000000	0,00000000016613	1,00000000000000

Ha $x = 0,1$ -ből indulunk, akkor a következő táblázatot kapjuk:

k	x^k	$f(x^k)$	$\delta(x^k)$	α_k
0	0,100000000000000	2,07232658369464	1,07765920479347	0,48131088953032
1	0,14945506622819	1,61668135596306	1,05829223631865	0,48583965986703
2	0,22112932596124	1,17532173793649	1,00679545093710	0,49830688998873
3	0,32152237588997	0,76986051286674	0,90755746327638	0,52423060340338
4	0,45458940014373	0,42998027395695	0,74937259761986	0,57163351098592
5	0,61604926491198	0,18599661844608	0,53678522950535	0,65070901307522
6	0,78531752299982	0,05188170346324	0,30270971353625	1,00000000000000
7	0,96323307457328	0,00137728412903	0,05199249905660	1,00000000000000
8	0,99897567517041	0,00000104977911	0,00144861398705	1,00000000000000
9	0,99999921284500	0,00000000000062	0,00000111320527	1,00000000000000
10	0,99999999999954	0,00000000000000	0,00000000000066	1,00000000000000

3.5. Speciális szerkezetű feladatok

3.5.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a logaritmikus barrier-függvény néhány fontos optimalizálási feladattípus esetében önkorlátozó. Néha a feladat logaritmikus barrier-függvénye nem önkorlátozó, ilyenkor újrafoglalmazzuk a feladatot. A szemidefinit optimalizálással foglalkozó utolsó alfejezet kivételével den Hertog és Jarre munkáit követjük (l. [9, 15, 21]). A szemidefinit optimalizálás alkalmazása iránt érdeklődő olvasóknak Vandenberghé és Boyd munkáit ajánljuk (l. pl. [49]).

Mielőtt a feladatokkal foglalkoznánk, először néhány olyan állítást mondunk ki, amelyek sokat segítenek az önkorlátozó függvények felismerésében.

3.5.2. Az önkorlátozó függvények kompozíciós szabályai

Az alábbi lemmák az önkorlátozó függvények kompozíciós szabályait adják meg.

3.50. Lemma (Nesterov és Nemirovski, [34, 35]). *Legyen φ_i κ_i -önkorlátozó az \mathcal{F}_i^0 halmazon, $i = 1, 2$, és $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a $\rho_1\varphi_1 + \rho_2\varphi_2$ függvény κ -önkorlátozó a $\mathcal{F}_1^0 \cap \mathcal{F}_2^0$ halmazon, ahol $\kappa = \max \left\{ \frac{\kappa_1}{\sqrt{\rho_1}}, \frac{\kappa_2}{\sqrt{\rho_2}} \right\}$.*

Legyen φ κ -önkorlátozó a \mathcal{F}^0 halmazon és legyen $\mathcal{B}(y) = By + b : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ olyan affin leképezés, amelyre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \cap \mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor $\varphi(\mathcal{B}(\cdot))$ κ -önkorlátozó az $\{y : \mathcal{B}(y) \in \mathcal{F}^0\}$ halmazon.

3.14. Feladat. Az önkorlátozás definícióját használva bizonyítsuk be a 3.50 lemmát.

A következő lemma szerint ha $f(x)$ harmad- és másodrendű deriváltjának hányadosa felülről becsülhető $-\sum_{i=1}^n \log x_i$ segítségével, akkor a megfelelő logaritmikus barrier-függvény önkorlátozó. Ez az állítás a következőkben nagyban leegyszerűsíti a bizonyításokat.

3.51. Lemma. *Legyen $f(x)$ háromszor folytonosan differenciálható, konvex függvény az \mathcal{F}^0 halmazon. Ha létezik olyan β , amelyre minden $x \in \mathcal{F}^0$ és $h \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy*

$$|\nabla^3 f(x)[h, h, h]| \leq \beta h^T \nabla^2 f(x) h \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2}}, \quad (3.28)$$

akkor a

$$\varphi(x) := \frac{f(x)}{\mu} - \sum_{i=1}^n \log x_i$$

függvény minden $\mu > 0$ esetén $(1 + \frac{1}{3}\beta)$ -önkorlátozó az \mathcal{F}^0 halmazon, valamint a

$$\psi(t, x) := -q \log(t - f(x)) - \sum_{i=1}^n \log x_i$$

függvény minden $q \geq 1$ esetén $(1 + \frac{1}{3}\beta)$ -önkorlátozó az $\mathbb{R} \times \mathcal{F}^0$ halmazon.

***Bizonyítás:** A lemma első részének bizonyításával kezdjük. Mivel a (3.28) egyenlőtlenség skálázás-független, ezért feltehetjük, hogy $\mu = 1$. Egyenesen következnek az alábbiak:

$$\nabla \varphi(x)^T h = \nabla f(x)^T h - \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{x_i} \quad (3.29)$$

$$h^T \nabla^2 \varphi(x) h = h^T \nabla^2 f(x) h + \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2} \quad (3.30)$$

$$\nabla^3 \varphi(x)[h, h, h] = \nabla^3 f(x)[h, h, h] - 2 \sum_{i=1}^n \frac{h_i^3}{x_i^3}, \quad (3.31)$$

Megmutatjuk, hogy

$$(\nabla^3 \varphi(x)[h, h, h])^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{3}\beta\right)^2 (h^T \nabla^2 \varphi(x) h)^3, \quad (3.32)$$

amiből a lemma első része következik. Mivel f konvex, ezért a (3.30) egyenlet jobboldalán lévő két kifejezés nemnegatív, tehát a jobboldal felírható

$$h^T \nabla^2 \varphi(x) h = a^2 + b^2 \quad (3.33)$$

alakban, ahol $a, b \geq 0$. A lemma (3.28) feltétele alapján

$$|\nabla^3 f(x)[h, h, h]| \leq \beta a^2 b.$$

A (3.8) becslés felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{h_i^3}{x_i^3} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2} \right)^{\frac{3}{2}} = b^3,$$

így (3.31) jobboldala felülről becsülhető az alábbiak szerint:

$$|\nabla^3 \varphi(x)[h, h, h]| \leq \beta a^2 b + 2b^3. \quad (3.34)$$

Könnyen belátható, hogy

$$(\beta a^2 b + 2b^3)^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{3}\beta\right)^2 (a^2 + b^2)^3.$$

A (3.33) és a (3.34) egyenlőtlenségből egyszerűen következik a (3.32) becslés, ezzel a lemma első részét beláttuk.

Most belátjuk a lemma második felét. Legyen

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad g(\tilde{x}) = t - f(x),$$

ekkor

$$\psi(\tilde{x}) = -q \log g(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^n \log x_i \quad (3.35)$$

$$\nabla \psi(\tilde{x})^T h = -q \frac{\nabla g(\tilde{x})^T h}{g(\tilde{x})} - \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{x_i} \quad (3.36)$$

$$h^T \nabla^2 \psi(\tilde{x}) h = -q \frac{h^T \nabla^2 g(\tilde{x}) h}{g(\tilde{x})} + q \frac{(\nabla g(\tilde{x})^T h)^2}{g(\tilde{x})^2} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \nabla^3 \psi(\tilde{x})[h, h, h] &= -q \frac{\nabla^3 g(\tilde{x})[h, h, h]}{g(\tilde{x})} + 3q \frac{(h^T \nabla^2 g(\tilde{x}) h) \nabla g(\tilde{x})^T h}{g(\tilde{x})^2} - \\ &\quad - 2q \frac{(\nabla g(\tilde{x})^T h)^3}{g(\tilde{x})^3} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{h_i^3}{x_i^3}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

Megmutatjuk, hogy

$$(\nabla^3 \psi(\tilde{x})[h, h, h])^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{3}\beta\right)^2 (h^T \nabla^2 \psi(\tilde{x}) h)^3, \quad (3.39)$$

amiből következik az állítás. Mivel g konkáv, így a (3.37) egyenlet jobboldalán lévő mindhárom kifejezés nemnegatív, tehát a jobboldal felírható

$$h^T \nabla^2 \psi(\tilde{x}) h = a^2 + b^2 + c^2 \quad (3.40)$$

alakban, ahol $a, b, c \geq 0$. A (3.28) feltétel alapján

$$\left| \frac{\nabla^3 g(\tilde{x})[h, h, h]}{g(\tilde{x})} \right| \leq \beta a^2 c,$$

így (3.38) jobboldala az alábbiak szerint becsülhető:

$$|\nabla^3 \psi(\tilde{x})[h, h, h]| \leq \beta a^2 c + 3a^2 b + 2b^3 + 2c^3. \quad (3.41)$$

A számtani és mértani közép közötti összefüggést a páratlan kitevőjű tagokra alkalmazva könnyen belátható, hogy

$$(\beta a^2 c + 3a^2 b + 2b^3 + 2c^3)^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{3}\beta\right)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

A (3.40) és a (3.41) összefüggésekből azonnal következik (3.39). Ezzel a lemmát teljesen beláttuk. \square

A következő részben a (3.28) feltétel ellenőrzésével néhány nemlineáris optimalizálási feladat esetében megmutatjuk, hogy a logaritmikus barrier-függvény önkorlátozó. Gyakran felhasználjuk, hogy a $-\log(-g_j(x))$ függvény 1-önkorlátozó az értelmezési tartományán, ha $g_j(x)$ lineáris vagy konvex kvadratikusan függvény. Ha $g_j(x)$ lineáris, akkor ez a 3.14 példa és a 3.50 lemma felhasználásával azonnal következik.

3.15. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $g_j(x)$ konvex kvadratikus függvény, akkor $-\log(-g_j(x))$ 1-önkorlátozó az értelmezési tartományán.

A következő fejezetekben a belsőpont-feltételt csak akkor tesszük fel, amikor a logaritmikus barrier feladatokat vizsgáljuk.

3.5.3. Entrópioptimalizálás (EO)

Az entrópioptimalizálási feladat primál alakját a következőképp definiáljuk:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \text{Az EO} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$. A 3.18 példa és a 3.50 lemma első kompozíciós szabálya alapján a logaritmikus barrier-függvény 1-önkorlátozó.

Most levezetjük a feladat duálját. Ha az $x \geq 0$ nemnegativitási feltételt

$$x \in \mathcal{C} := \{x : x \geq 0\},$$

alakban írjuk, akkor az (EO) feladat Lagrange-duálja

$$\sup \{\psi(y)\}$$

ahol

$$\psi(y) = \inf_{x \in \mathcal{C}} (L(x, y)),$$

és $L(x, y)$ jelöli (EO) Lagrange-függvényét:

$$L(x, y) = c^T x + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i - y^T (Ax - b).$$

Rögzített y mellett $L(x, y)$ konvex x -ben. Sőt, $L(x, y)$ végtelenhez tart, ha x valamely x_i koordinátája a végtelenhez tart, és az x_i szerinti parciális derivált is a végtelenhez tart, ha x_i 0-hoz közelít. Ebből arra következtetünk, hogy $L(x, y)$ alulról korlátos. A függvény akkor veszi fel a minimumát, amikor a gradiens 0-vá válik. $L(x, y)$ gradiense

$$c + e + \log x - A^T y,$$

így $L(x, y)$ minimális, ha

$$\log x_i = a_i^T y - c_i - 1, \quad 1 \leq i \leq n,$$

ahol a_i jelöli A i -edik oszlopát. Innen x meghatározható:

$$x_i = e^{a_i^T y - c_i - 1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

A behelyettesítéseket elvégezve:

$$\begin{aligned}
 \psi(y) &= c^T x + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i - y^T (Ax - b) = \\
 &= c^T x + \sum_{i=1}^n x_i (a_i^T y - c_i - 1) - y^T (Ax - b) = \\
 &= c^T x + y^T Ax - c^T x - \sum_{i=1}^n x_i - y^T (Ax - b) = b^T y - \sum_{i=1}^n x_i = b^T y - \sum_{i=1}^n e^{a_i^T y - c_i - 1},
 \end{aligned}$$

így megmutattuk, hogy (EOP) Lagrange-duálja

$$\max b^T y - \sum_{i=1}^n e^{a_i^T y - c_i - 1}. \quad (\text{EOD})$$

Meglepő módon egy feltétel nélküli konvex optimalizálási feladatot kaptunk.

Dualitási eredmények

Bizonyítások nélkül összefoglaljuk az entrópiaoptimalizálási feladatok alapvető dualitási tulajdonságait. A részletek megtalálhatók Kas és Klafszy [23] munkájában.

3.52. Lemma (Gyenge dualitás). *Ha x az (EOP) feladat megengedett megoldása és y az (EOD) feladat megengedett megoldása, akkor*

$$c^T x + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \geq b^T y - \sum_{i=1}^n e^{a_i^T y - c_i - 1},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha minden $i = 1, \dots, n$ -re teljesül, hogy

$$x_i = e^{a_i^T y - c_i - 1}. \quad (3.42)$$

A továbbiakban az (EOP) feladat megengedett megoldásainak halmazát jelölje \mathcal{P} .

3.53. Következmény. *Ha (3.42) fennáll egy adott $x \in \mathcal{P}$ és $y \in \mathbb{R}^m$ esetén, akkor mindkettő optimális megoldás és a dualitásrés 0.*

Amint láttuk, mind az (EOP), mind az (EOD) konvex optimalizálási feladat.

3.54. Tétel. *Ha (EOP) kielégíti a Slater-regularitási feltételt és*

$$\nu = \inf \left\{ \nu = c^T x^* + \sum_{i=1}^n x_i^* \log x_i^* : x \in \mathcal{P} \right\} > -\infty$$

akkor létezik olyan $y^ \in \mathbb{R}^m$ optimális megoldás, hogy*

$$\nu = b^T y^* - \sum_{i=1}^n e^{a_i^T y^* - c_i - 1}.$$

Ha

$$\nu = \sup \left\{ b^T y - \sum_{i=1}^n e^{a_i^T y - c_i - 1} \right\} < \infty$$

akkor létezik olyan $x^ \in \mathcal{P}$ optimális megoldás, hogy*

$$\nu = c^T x^* + \sum_{i=1}^n x_i^* \log x_i^*.$$

Figyeljük meg, hogy bár az EO feladatok nemlineárisak, semmilyen regularitási feltétel nem szükséges a nulla dualitásrés biztosításához. Az (EOP) primál feladatnak mindig van optimális megoldása, ha van megengedett megoldása, vagy, ami ezzel ekvivalens, ha a duál-célfüggvény korlátos.

Általánosított EO (GEO)

Az általánosított entrópiaoptimalizálási feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{GEO}$$

ahol minden i indexre létezik olyan κ_i pozitív szám, amelyre az $f_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az alábbi feltételt:

$$|f_i'''(x_i)| \leq \kappa_i \frac{f_i''(x_i)}{x_i}.$$

Az $x_i \log x_i$ entrópiafüggvény logaritmikus barrierje, $x_i \log x_i - \log x_i$, nyilvánvalóan kielégíti ezt a feltételt (3.18 példa). A GEO feladatokat Ye és Potra [40] valamint Han és társai ⁷ [14] tanulmányozták.

3.55. Lemma. *A (GEO) általánosított entrópiaoptimalizálási feladat logaritmikus barrier-függvénye $(1 + \frac{1}{3} \max_i \kappa_i)$ -önkorlátozó.*

Bizonyítás: A 3.50 lemmát felhasználva elég belátni, hogy

$$f_i(x_i) - \log x_i$$

$(1 + \frac{1}{3} \kappa_i)$ -önkorlátozó. Mivel

$$|f_i'''(x_i)| \leq \kappa_i f_i''(x_i) \frac{1}{x_i},$$

így 3.51 lemmát felhasználva készen vagyunk. □

⁷Ebben a cikkben azt találjuk, hogy ezek a feladatok nem teljesítik az önkorlátozási feltételt. A következő lemma ennek ellenkezőjét bizonyítja.

Láttuk, hogy az entrópiaoptimalizálási feladat duálja

$$\max b^T y - \sum_{i=1}^n e^{a_i^T y - c_i - 1}, \quad (\text{EOD})$$

ami egy feltétel nélküli feladat, így nincs természetes logaritmikus barrier-függvénye. A következő helyettesítést alkalmazva átírhatjuk a feladatot:

$$z_i = e^{a_i^T y - c_i - 1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ekkor $z_i > 0$, és az alábbi ekvivalens feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y - \sum_{i=1}^n z_i \\ & a_i^T y - c_i - 1 - \log z_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n \\ & z_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (\text{EOD}')$$

Figyeljük meg, hogy az első feltétel:

$$a_i^T y - c_i - 1 - \log z_i \leq 0$$

ekvivalens a következővel

$$e^{a_i^T y - c_i - 1} \leq z_i,$$

valamint, mivel maximalizálunk, ezért ez az optimumban minden i -re egyenlőséggel fog teljesülni. Így (EOD') logaritmikus barrier-függvénye:

$$\frac{-b^T y + \sum_{i=1}^n z_i}{\mu} - \sum_{j=1}^n \log(\log z_j - a_j^T y + c_j + 1) - \sum_{j=1}^n \log z_j.$$

Megmutatható, hogy ez a barrier-függvény 2-önkorlátozó. Az első tag lineáris, így 0-önkorlátozó. A következő feladatból és a 3.50 lemmából következik, hogy a második tag 2-önkorlátozó. További részletek találhatók Jarre [21] munkájában.

3.16. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\phi(t, x) := -\log(\log t - x) - \log t, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \log t - x > 0$$

függvény 2-önkorlátozó az értelmezési tartományán.

3.5.4. Geometriai optimalizálás (GO)

A geometriai optimalizálás primál feladatát a következőképp definiáljuk:

Legyen $\{I_k\}_{k=1}^r$ az $I = \{1, \dots, n\}$ indexhalmaz egy partíciója, tehát

$$\bigcup_{k=1}^r I_k = \{1, \dots, n\} \text{ és } I_k \cap I_\ell = \emptyset \text{ ha } k \neq \ell.$$

Legyen $b \in \mathbb{R}^m$, valamint minden $i \in I$ esetén $a_i \in \mathbb{R}^m$, $c_i \in \mathbb{R}$ adott. A primál GO feladat az alábbi:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ G_k(y) = \sum_{i \in I_k} e^{a_i^T y - c_i} & \leq 1, \quad k = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (\text{PGO})$$

Megjegyzés: Itt és a fejezet további részében e a természetes alapú logaritmus alapját jelöli, és nem az egyesekből álló összegzővektort!

Pozinom optimalizálás

A GO feladatok gyakran más ekvivalens formában jelennek meg, ez az úgynevezett *pozinomiális* alak.

$$G_k(y) = \sum_{i \in I_k} e^{\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j - c_i} = \sum_{i \in I_k} e^{-c_i} \prod_{j=1}^m e^{a_{ij} y_j} = \sum_{i \in I_k} \alpha_i \prod_{j=1}^m (e^{y_j})^{a_{ij}} = \sum_{i \in I_k} \alpha_i \prod_{j=1}^m \tau_j^{a_{ij}},$$

ahol $\alpha_i = e^{-c_i} > 0$ és $\tau_j = e^{y_j} > 0$. A fenti polinomiális kifejezést *pozinomiálisnak* hívjuk, mivel minden α_i együttható és minden τ_j változó pozitív. Figyeljük meg, hogy a $\tau_j = e^{y_j}$ helyettesítés konvexsége teszi a pozinomot.

A tranzisztorméretezési feladatot, amelynek során áramkörkésleltetési feltételek mellett az áramkör aktív területét minimalizálják, pozinom feladat segítségével modellezték és oldották meg [45].

GO duál feladat

A (PGO) feladat Lagrange-duálját átalakítva

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \phi(x) \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \quad (\text{DGO})$$

ahol

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i \in I_k} x_i \log x_i - \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right) \log \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right) \right).$$

Ha $r = 1$ és $\sum_{i \in I} x_i = 1$, akkor (DGO) primál entrópiaoptimalizálási feladattá (EOP) válik. Ezzel az esettel találkozhatunk a statisztikai információelmélet alkalmazásakor.

A fenti duál feladat levezetése meghaladja e jegyzet kereteit. A bizonyítást Duffin, Peterson és Zener [11] valamint Klafszy [24] könyvében találhatjuk meg. Csupán megemlíthetjük, hogy a duál levezetéséhez fel kell használni, hogy $\phi(x)$ felírható a következő

alakban:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^r \log \frac{\prod_{i \in I_k} x_i^{x_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)^{\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)}},$$

valamint hogy ezt a kifejezést az általánosított számtani–mértani közepek közötti egyenlőtlenség felhasználásával becsülhetjük.⁸

3.17. Feladat. Lagrange-dualitást használva vezessük le a geometriai optimalizálási feladat (DGO) duálját a primál (PGO) feladatból.

Dualitási eredmények

Itt csupán összefoglaljuk a (GO) feladatok alapvető dualitási tulajdonságait.

3.56. Lemma (Gyenge dualitás). *Ha y a (PGO) feladat megengedett megoldása és x a (DGO) feladat megengedett megoldása, akkor*

$$b^T y \leq c^T x + \phi(x).$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden $k = 1, \dots, r$ és $j \in I_k$ esetén

$$x_j = e^{a_j^T y - c_j} \sum_{i \in I_k} x_i. \quad (3.43)$$

A (DGO) és a (PGO) feladatok megengedett megoldásainak halmazát jelölje rendre \mathcal{D} és \mathcal{P} .

3.57. Következmény. *Ha (3.43) teljesül valamely $x \in \mathcal{D}$ és $y \in \mathcal{P}$ esetén, akkor mindkettő optimális megoldás és a dualitásrés 0.*

Az alábbi észrevételek legtöbbje triviális, néhány viszont nemtriviális bizonyítást igényel.

⁸Az általánosított számtani–mértani egyenlőtlenség szerint

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i} \right)^{\sum_{i=1}^n \beta_i} \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right)^{\beta_i},$$

ahol $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 0$ és $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) > 0$. Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\alpha = \lambda \beta$ valamely nemnegatív λ esetén. Általánosabb értelemben az egyenlőtlenség fennáll $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \geq 0$ -ra is, ha élünk az

$$\left(\frac{x_i}{0} \right)^0 = 1$$

feltevéssel.

- (PGO) konvex optimalizálási feladat.
- (DGO) konvex optimalizálási feladat.

Bizonyítás: $\phi(x) = \sum_{k=1}^r \phi_k(x)$ ahol a

$$\phi_k(x) = \log \frac{\prod_{i \in I_k} x_i^{x_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} x_i\right)^{\left(\sum_{i \in I_k} x_i\right)}}$$

függvény első-fokon pozitív homogén (vagyis $\phi_k(\lambda x) = \lambda \phi_k(x)$ minden $\lambda > 0$ -ra) és szubadditív (ami azt jelenti, hogy $\phi_k(x^1 + x^2) \leq \phi_k(x^1) + \phi_k(x^2)$).

- Ha $|I_k| = 1 \quad \forall k$, akkor a (PGO) feladat lineáris optimalizálási feladattá válik.
- Ha x a (DGO) feladat optimális megoldása és $x_i = 0$ valamely $i \in I_k$ esetén, akkor $x_i = 0, \forall i \in I_k$.
- $G_k(y)$ logaritmikusan konvex (azaz $\log G_k(y)$ konvex). Ez könnyen adódik a Hölder-egyenlőtlenségből.⁹

- 3.58. Tétel.** 1. Ha (PGO) kielégíti a Slater-regularitási feltételt és $\nu = \sup\{b^T y : y \in \mathcal{P}\} < \infty$, akkor létezik olyan $x^* \in \mathcal{D}$ optimális megoldás, amelyre $\nu = c^T x^* + \phi(x^*)$.
2. Ha (DGO) kielégíti a Slater-regularitási feltételt és $\nu = \inf\{c^T x + \phi(x) : x \in \mathcal{D}\} > -\infty$, akkor létezik olyan $y^* \in \mathcal{P}$ optimális megoldás, amelyre $\nu = b^T y^*$.
3. Ha mind a (PGO), mind a (DGO) feladatnak van megengedett megoldása, de semelyik sem teljesíti a Slater-regularitást, akkor

$$\sup\{b^T y : y \in \mathcal{P}\} = \inf\{c^T x + \phi(x) : x \in \mathcal{D}\}.$$

***Bizonyítás:** (Vázlat) A tétel első két állítása következik a konvex Farkas-tételből vagy a Karush–Kuhn–Tucker-tételből. A harmadik pont bizonyítása az alábbi néhány lépésből áll.

- A duál feladatból elhagyjuk azokat az x_i változókat, amelyek minden duál-megengedett megoldásban 0-val egyenlőek. Az így kapott feladatot jelölje (DGO_r).
- Bizonyítjuk, hogy (DGO) és (DGO_r) ekvivalens.
- Bizonyítjuk, hogy (DGO_r) Slater-reguláris.
- Meghatározzuk a (DGO_r) feladathoz tartozó (PGO_r) primál feladatot.
- A tétel második állítása alapján a (PGO_r) feladatnak létezik optimális megoldása, és az optimális célfüggvény-érték megegyezik (DGO_r) optimális célfüggvény-értékével.
- Végül belátjuk, hogy (PGO) és (PGO_r) optimális célfüggvény-értékei megegyeznek. □

⁹A Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^\lambda \beta_i^{1-\lambda} \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^\lambda \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^{1-\lambda},$$

ahol $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \geq 0$ és $0 \leq \lambda \leq 1$.

A GO feladat barrier-függvényei

3.59. Lemma. *Mind a (PGO), mind a (DGO) feladat logaritmikus barrier-függvénye 2-önkorlátozó.*¹⁰

***Bizonyítás:** A bizonyítást a duál GO feladatra adjuk meg. A 3.50 lemma miatt elég belátni, hogy adott k esetén az alábbi logaritmikus barrier-függvény 2-önkorlátozó:

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I_k} x_i \log x_i - \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right) \log \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right) - \sum_{i \in I_k} \log x_i. \quad (3.44)$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban elhagyjuk a szummák alatti $i \in I_k$ kifejezéseket. Felhasználhatjuk a 3.51 lemmát, így elég azt belátnunk, hogy $\beta = 3$ esetén a (3.28) egyenlőtlenség teljesül az

$$f(x) := \sum x_i \log x_i - \left(\sum x_i \right) \log \left(\sum x_i \right)$$

függvényre, vagyis a következő egyenlőtlenséget fogjuk bizonyítani:

$$\left| \sum \frac{h_i^3}{x_i^2} - \frac{(\sum h_i)^3}{(\sum x_i)^2} \right| \leq 3 \left(\sum \frac{h_i^2}{x_i} - \frac{(\sum h_i)^2}{\sum x_i} \right) \sqrt{\sum \frac{h_i^2}{x_i^2}}, \quad (3.45)$$

ahol $x_i > 0$ és h_i tetszőleges. Az egyenlőtlenség belátásához legyen

$$\xi_i = x_i^{-\frac{1}{2}} \left(h_i - \frac{\sum h_j}{\sum x_j} x_i \right).$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum x_i^{\frac{1}{2}} \xi_i = 0.$$

Ezt a helyettesítést használva a (3.45) egyenlőtlenség baloldalát átírhatjuk így:

$$\begin{aligned} \left| \sum \frac{h_i^3}{x_i^2} - \frac{(\sum h_i)^3}{(\sum x_i)^2} \right| &= \left| \sum \left(x_i^{-\frac{1}{2}} \xi_i^3 + 3 \xi_i^2 \frac{\sum h_j}{\sum x_j} \right) \right| = \left| \sum \xi_i^2 \left(x_i^{-\frac{1}{2}} \xi_i + 3 \frac{\sum h_j}{\sum x_j} \right) \right| = \\ &= \left| \sum \xi_i^2 \left(\frac{h_i}{x_i} - \frac{\sum h_j}{\sum x_j} + 3 \frac{\sum h_j}{\sum x_j} \right) \right| = \left| \sum \xi_i^2 \left(\frac{h_i}{x_i} + 2 \frac{\sum h_j}{\sum x_j} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum \xi_i^2 \frac{|h_i|}{x_i} + 2 \sum \xi_i^2 \frac{|\sum h_j|}{\sum x_j} \leq 3 \sum \xi_i^2 \sqrt{\sum \frac{h_j^2}{x_j^2}}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

ahol a legutóbbi egyenlőtlenség azért teljesül, mert

$$\frac{|h_i|}{x_i} \leq \sqrt{\sum \frac{h_j^2}{x_j^2}}$$

és

$$\sum \frac{h_i^2}{x_i^2} \left(\sum x_i \right)^2 \geq \sum \frac{h_i^2}{x_i^2} \sum x_i^2 \geq \left(\sum |h_i| \right)^2. \quad (3.47)$$

Itt az utolsó egyenlőtlenséghez felhasználtuk a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenséget is. Mivel a bizonyítandó (3.45) egyenlőtlenség jobb oldala felírható

$$3 \sum \xi_i^2 \sqrt{\sum \frac{h_i^2}{x_i^2}}$$

alakban, így a (3.46) felhasználásával beláttuk az állítást. \square

¹⁰Ez látszólag ellentmond a [26]-ben található állításnak, amely szerint az önkorlátozási tulajdonság nem teljesül a duál feladatra. Azonban észre kell vennünk, hogy a logaritmikus barrier-függvény önkorlátozási tulajdonsága függ a duál feladat konkrét alakjától. Mi lényegében azt mutatjuk meg, hogy a duál feladat átírható olyan alakra, amelyben a barrier-függvénye önkorlátozóvá válik.

3.5.5. l_p -norma optimalizálás (NO)

A primál l_p -norma optimalizálási feladat

Az előző alfejezethez hasonlóan legyen $\{I_k\}_{k=1}^r$ az $I = \{1, \dots, n\}$ indexhalmaz egy partíciója:

$$\bigcup_{k=1}^r I_k = \{1, \dots, n\} \text{ és } I_k \cap I_\ell = \emptyset \text{ ha } k \neq \ell,$$

és legyen $p_i > 1$, $i = 1, \dots, n$. Továbbá legyen minden $i \in I$ esetén $a_i \in \mathbb{R}^m$, $b_i \in \mathbb{R}^m$, $c_i \in \mathbb{R}$. Ekkor a primál l_p -norma optimalizálási feladat az alábbi módon írható fel (lásd [37, 36, 38, 47]):

$$\begin{aligned} & \max \eta^T y \\ & G_k(y) := \sum_{i \in I_k} \frac{1}{p_i} |a_i^T y - c_i|^{p_i} + b_k^T y - d_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (\text{Pl}_p)$$

Könnyen belátható, hogy (Pl_p) konvex optimalizálási feladat. A fenti kifejezésben található abszolút-érték ellenére a $G_k(y)$ függvény akárhányszor differenciálható.

Az l_p -norma optimalizálás elég általános ahhoz, hogy több korábban tárgyalt problémát egyszerre általánosítson:

- ha minden k esetén $I_k = \emptyset$, akkor a (Pl_p) feladat LO feladattá válik;
- ha egy kivételével minden $I_k = \emptyset$, továbbá a nemüres I_k esetén $p_i = 2$ minden $i \in I_k$ -ra, akkor a (Pl_p) feladat lineárisan korlátozott konvex kvadratikusan feladat;
- ha minden i esetén $p_i = 2$, akkor (Pl_p) kvadratikusan korlátozott konvex optimalizálási feladat;
- ha minden k -ra $b_k = 0$, akkor az ún. l_p -norma közelítési feladatot kapjuk.

A duál l_p -norma optimalizálási feladat

Legyen q_i olyan, amelyre teljesül, hogy $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$. Továbbá legyen A az a_i , $i = 1, \dots, n$ oszlopvektorokból, és B a b_k , $k = 1, \dots, r$ oszlopvektorokból álló mátrix. Ekkor az l_p -norma optimalizálási feladat (Dl_p) duálja (l. [37, 36, 38, 47]):

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi(x, z) := c^T x + d^T z + \sum_{k=1}^r z_k \sum_{i \in I_k} \frac{1}{q_i} \left| \frac{x_i}{z_k} \right|^{q_i} \\ & Ax + Bz = \eta \\ & z \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{Dl}_p)$$

Ha $x_i \neq 0$ és $z_k = 0$, akkor $z_k \left| \frac{x_i}{z_k} \right|^{q_i} \propto \infty$ -nek van definiálva. Ha $x_i = 0$ minden $i \in I_k$ -re és $z_k = 0$, akkor a

$$z_k \left| \frac{x_i}{z_k} \right|^{q_i}$$

kifejezést 0-nak definiáljuk.

A (Dl_p) feladat is konvex optimalizálási feladat. Ez abból következik, hogy

$$\sum_{i \in I_k} \frac{1}{q_i} z_k^{q_i-1} |x_i|^{q_i}$$

pozitív homogén és szubadditív, tehát konvex. Továbbá a duál megengedett megoldások halmaza – nem szükségképpen zárt – poliéder.

Mint ahogyan a geometriai optimalizálásnál is, a fenti formula levezetése meghaladja e jegyzet kereteit. A bizonyítás megtalálható Peterson és Ecker [37, 36, 38], valamint Terlaky [47] munkáiban.¹¹

3.18. Feladat. A Lagrange-duál segítségével vezessük le az l_p -norma optimalizálási feladat (Dl_p) duálját a primál feladatból.

Dualitási eredmények

3.60. Állítás (Gyenge dualitás). Ha y a (Pl_p) feladat megengedett megoldása és (x, z) a (Dl_p) megengedett megoldása, akkor

$$\eta^T y \leq \psi(x, z).$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden $k = 1, \dots, r$ és $i \in I_k$ esetén $z_k G_k(y) = 0$, valamint vagy $z_k = 0$ vagy

$$\frac{x_i}{z_k} = \operatorname{sgn}(a_i^T y - c_i) |a_i^T y - c_i|^{p_i-1}.$$

Ez utóbbival ekvivalens:

$$a_i^T y - c_i = \operatorname{sgn}(x_i) \left| \frac{x_i}{z_k} \right|^{q_i-1}.$$

Valójában (Dl_p) a (Pl_p) feladat kicsit átalakított Lagrange-(Wolfe)-duálja.

3.61. Tétel. Az l_p -norma optimalizálási feladatra teljesülnek a következő állítások:

¹¹A duál levezetéséhez a következő egyenlőtlenségre van szükség:

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ és

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p} |\alpha|^p + \frac{1}{q} |\beta|^q.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\alpha = \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{q-1} \text{ vagy } \beta = \operatorname{sgn}(\alpha) |\alpha|^{p-1}.$$

1. Ha (Pl_p) kielégíti a Slater-regularitási feltételt és

$$\nu = \sup \{ \eta^T y : y \in (Pl_p) \} < \infty,$$

akkor a duál feladatnak létezik olyan (x^*, z^*) optimális megoldása, amelyre $\psi(x^*, z^*) = \nu$.

2. Ha (Dl_p) kielégíti a Slater-regularitási feltételt és

$$\nu = \inf \{ \psi(x, z) : (x, z) \in (Dl_p) \} > -\infty,$$

akkor a primál feladatnak létezik olyan y^* optimális megoldása, amelyre $\nu = \eta^T y^*$.

3. Ha mind a (Pl_p) , mind a (Dl_p) feladatnak van megengedett megoldása, de egyik sem Slater-regularis, akkor

$$\max \{ \eta^T y : y \in (Pl_p) \} = \inf \{ \psi(x, z) : (x, z) \in (Dl_p) \}.$$

***Bizonyítás:** (Vázlat) A tétel első két állítása következik a konvex Farkas-tételből vagy a Karush–Kuhn–Tucker-tételből. A harmadik pont bizonyítása az alábbi néhány lépésből áll.

- A duál feladatból elhagyjuk azokat az $x_i \in I_k$ és z_k változókat, amelyek minden duál-megengedett megoldásban 0-val egyenlőek. Az így kapott feladatot jelölje $(Dl_p)_r$.
- Bizonyítjuk, hogy (Dl_p) és $(Dl_p)_r$ ekvivalens.
- Bizonyítjuk, hogy $(Dl_p)_r$ Slater-regularis.
- Meghatározzuk a $(Dl_p)_r$ feladathoz tartozó $(Pl_p)_r$ primál feladatot.
- A tétel második állítása alapján a $(Pl_p)_r$ feladatnak létezik optimális megoldása, és az optimális célfüggvény-érték megegyezik $(Dl_p)_r$ optimális célfüggvény-értékével.
- Végül belátjuk, hogy (Pl_p) és $(Pl_p)_r$ optimális célfüggvény-értékei megegyeznek, továbbá hogy (Pl_p) -nek van optimális megoldása. □

A primál feladat önkorlátozó barrier-függvénye

A primál l_p -norma optimalizálási feladat önkorlátozó barrier-függvényének meghatározásához a következő alakba kell átírnunk a feladatot:

$$\begin{aligned} & \max \eta^T y \\ & \sum_{i \in I_k} \frac{1}{p_i} t_i + b_k^T y - d_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, r \\ & s_i^{p_i} \leq t_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & a_i^T y - c_i \leq s_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & -a_i^T y + c_i \leq s_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & s \geq 0. \end{aligned} \tag{Pl'_p}$$

Belátható, hogy a fenti feladat logaritmikus barrier-függvénye önkorlátozó. Figyeljük meg, hogy az átalakított feladatban $4n + r$ feltételünk van, míg az eredeti (Pl_p) feladatban csak r volt.

3.62. Lemma. *A (Pl'_p) átalakított l_p -norma optimalizálási feladat logaritmikus barrier-függvénye $(1 + \frac{1}{3} \max_i |p_i - 2|)$ -önkorlátozó.*

***Bizonyítás:** Mivel $f(s_i) := s_i^{p_i}$, $p_i \geq 1$ és $\beta = |p_i - 2|$ esetén teljesül a (3.28) egyenlőtlenség, így a 3.51 lemmából következik, hogy

$$-\log(t_i - s_i^{p_i}) - \log s_i$$

$(1 + \frac{1}{3} |p_i - 2|)$ -önkorlátozó. A 3.50 lemmából következik, hogy az átalakított primál l_p -norma optimalizálási feladat logaritmikus barrier-függvénye $(1 + \frac{1}{3} \max_i |p_i - 2|)$ -önkorlátozó. \square

Ebben a felírásban a konkordancia-paraméter függ p_i -től. Ennek kiküszöbölésére helyettesítsük az $s_i^{p_i} \leq t_i$ feltételeket a velük ekvivalens $s_i \leq t_i^{\pi_i}$ feltételekkel, ahol $\pi_i = \frac{1}{p_i}$, az $s \geq 0$ feltétel helyett pedig vegyük a $t \geq 0$ feltételt. Így a következő l_p -norma optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} & \max \eta^T y \\ & \sum_{i \in I_k} \frac{1}{p_i} t_i + b_k^T y - d_k \leq 0, \quad k = 1, \dots, r \\ & s_i \leq t_i^{\pi_i}, \quad i = 1, \dots, n \\ & a_i^T y - c_i \leq s_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & -a_i^T y + c_i \leq s_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & t \geq 0. \end{aligned} \tag{Pl''_p}$$

A következő lemma a 3.62 lemma megfelelője.

3.63. Lemma. *A (Pl''_p) transzformált l_p -norma optimalizálási feladat logaritmikus barrier-függvénye $\frac{5}{3}$ -önkorlátozó.*

***Bizonyítás:** Mivel $f(t_i) := -t_i^{\pi_i}$, $\pi_i \leq 1$ és $\beta = |\pi_i - 2|$ mellett teljesül a (3.28) egyenlőtlenség, így a 3.51 lemmából következik, hogy a

$$-\log(t_i^{\pi_i} - s_i) - \log t_i$$

függvény $(1 + \frac{1}{3} |\pi_i - 2|)$ -önkorlátozó, ahol $\pi_i \leq 1$. Hasonlóan, a logaritmikus barrier-függvény $\frac{5}{3}$ -önkorlátozó. \square

A duál feladat önkorlátozó barrier-függvénye

A duál feladat ekvivalens a következő feladattal:

$$\begin{aligned} & \min c^T x + d^T z + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} t_i \\ & s_i^{q_i} z_k^{-q_i+1} \leq t_i, \quad i \in I_k, \quad k = 1, \dots, r \\ & x \leq s \\ & -x \leq s \\ & Ax + Bz = \eta \\ & z \geq 0 \\ & s \geq 0, \end{aligned} \tag{Dl'_p}$$

Vegyük észre, hogy az eredeti (Dl_p) feladatban r egyenlőtlenség szerepel, míg a transzformált (Dl'_p) feladatban $4n + r$.

3.64. Lemma. A (Dl'_p) átalakított duál l_p -norma optimalizálási feladat logaritmikus barrier-függvénye $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \max_i (q_i + 1)\right)$ -önkorlátozó.

***Bizonyítás:** Elég megmutatnunk, hogy

$$-\log(t_i - s_i^{q_i} z_k^{-q_i+1}) - \log z_k - \log s_i$$

$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} (q_i + 1)\right)$ -önkorlátozó, vagy, ami ezzel a 3.51 lemma szerint ekvivalens, hogy (az indexeket elhagyva) $f(s, z) := s^q z^{-q+1}$ és $\beta = \sqrt{2}(q + 1)$ esetén teljesül a (3.28) egyenlőtlenség. Tehát elég belátni, hogy

$$|\nabla^3 f(s, z)[h, h, h]| \leq \sqrt{2}(q + 1) h^T \nabla^2 f(s, z) h \sqrt{\frac{|h_1|^2}{s^2} + \frac{|h_2|^2}{z^2}}, \quad (3.48)$$

ahol $h^T = (h_1, h_2)$. Némi átalakítás után a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} h^T \nabla^2 f(s, z) h &= q(q - 1) s^{q-3} z^{-q-2} (s z^3 h_1^2 + s^3 z h_2^2 - 2 s^2 z^2 h_1 h_2) \\ &= q(q - 1) s^{q-3} z^{-q-2} (z h_1 - s h_2)^2 s z, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} |\nabla^3 f(s, z)[h, h, h]| &= q(q - 1) s^{q-3} z^{-q-2} |(q - 2) z^3 h_1^3 - (q + 1) s^3 h_2^3 - 3(q - 1) s z^2 h_1^2 h_2 + 3 q s^2 z h_1 h_2^2| = \\ &= q(q - 1) s^{q-3} z^{-q-2} (z h_1 - s h_2)^2 |(q - 2) z h_1 - (q + 1) s h_2| \leq \\ &\leq q(q - 1)(q + 1) s^{q-3} z^{-q-2} (z h_1 - s h_2)^2 (z |h_1| + s |h_2|). \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{|\nabla^3 f(s, z)[h, h, h]|}{h^T \nabla^2 f(s, z) h} \leq (q + 1) \left(\frac{|h_1|}{s} + \frac{|h_2|}{z} \right) \leq \sqrt{2}(q + 1) \sqrt{\frac{|h_1|^2}{s^2} + \frac{|h_2|^2}{z^2}}.$$

ezzel beláttuk a (3.48) egyenlőtlenséget és vele együtt a lemmát is. \square

Ezen az eredményen a következő módon javíthatunk:

Helyettesítsük az $s_i^{q_i} z_k^{-q_i+1} \leq t_i$ feltételeket a velük ekvivalens $t_i^{\rho_i} z_k^{-\rho_i+1} \geq s_i$ feltételekkel, ahol $\rho_i = \frac{1}{q_i}$, az $s \geq 0$ feltétel helyett pedig vegyük a $t \geq 0$ feltételt. Az l_p -norma optimalizálási feladat újabb transzformált duálja ez lesz:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T z + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} t_i \\ & s_i \leq t_i^{\rho_i} z_k^{-\rho_i+1}, \quad i \in I_k, \quad k = 1, \dots, r \\ & x \leq s \\ & -x \leq s \\ & Ax + Bz = \eta \\ & z \geq 0 \\ & t \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{Dl}''_p)$$

3.65. Lemma. *A (Dl_p'') átalakított duál l_p -norma optimalizálási feladat 2-önkorlátozó.*

***Bizonyítás:** A 3.64 lemma bizonyításához hasonlóan belátható, hogy $\rho_i \leq 1$ esetén a

$$-\log(t_i^{\rho_i} z_k^{-\rho_i+1} - s_i) - \log t_i,$$

függvény $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}(\rho_i + 1)\right)$ -önkorlátozó. A bizonyításhoz szükség van még a 3.50 lemmára is. \square

3.5.6. Szemidefinit optimalizálás (SDO)

A szemidefinit optimalizálási feladatot a 2.5.5 fejezetben vezettük be. Ott a Lagrange-duálon alapuló sztenderd dualizációs módszer segítségével levezettük a feladat duálját. A könnyebb áttekinthetőség érdekében felidézzük a primál és a duál SDO feladat definícióját.

Legyenek $A_0, A_1, \dots, A_n \in R^{m \times m}$ szimmetrikus mátrixok. Továbbá legyen a $c \in R^n$ vektor adott és az $x \in R^n$ vektor ismeretlen. A *primál szemidefinit optimalizálási feladat* a következő alakban adható meg:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ -A_0 + \sum_{k=1}^n A_k x_k & \succeq 0, \end{aligned} \tag{PSO}$$

ahol $\succeq 0$ azt jelenti, hogy a bal oldali mátrixnak pozitív szemidefinitnek kell lennie. Nyilvánvalóan a (PSO) primál feladat konvex optimalizálási feladat, mivel pozitív szemidefinit mátrixok bármely konvex kombinációja is pozitív szemidefinit. Az egyszerűség kedvéért használjuk az alábbi jelölést:

$$F(x) = -A_0 + \sum_{k=1}^n A_k x_k.$$

A *szemidefinit optimalizálás duál feladata* az alábbi:

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Tr}(A_0 Z) \\ \text{Tr}(A_k Z) &= c_k, \quad \text{minden } k = 1, \dots, n, \quad \text{esetén} \\ Z &\succeq 0, \end{aligned} \tag{DSO}$$

ahol $Z \in R^{m \times m}$ a változók mátrixa. A (DSO) feladat szintén konvex optimalizálási feladat, mivel a mátrix nyoma a mátrix lineáris függvénye, valamint pozitív szemidefinit mátrixok konvex kombinációja is pozitív szemidefinit.

Amint láttuk, a gyenge dualitás fennáll (PSO) és (DSO) esetében is (lásd a 101. oldalt).

3.66. Tétel (Gyenge dualitás). *Ha $x \in R^n$ primál megengedett megoldás, $Z \in R^{m \times m}$ duál megengedett megoldás, akkor*

$$c^T x \geq \text{Tr}(A_0 Z),$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$F(x)Z = 0.$$

Mivel a szemidefinit optimalizálási feladat nemlineáris, az erős dualitás csak akkor érvényes, ha bizonyos regularitási feltétel, pl. a Slater-regularitási feltétel teljesül.

3.19. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy (PSO) akkor és csak akkor Slater-reguláris, ha létezik olyan $x \in \mathbb{R}^n$, amelyre $F(x)$ pozitív definit.

3.20. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy (PSO) és (DSO) akkor és csak akkor Slater-reguláris, ha létezik olyan Z $m \times m$ -es szimmetrikus pozitív definit mátrix, amelyre $\text{Tr}(A_k Z) = c_k$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén.

A fenti feladat azt mutatja, hogy szemidefinit optimalizálás esetén a Slater-regularitási feltétel megegyezik a belsőpont-feltétellel.

A szemidefinit optimalizálási feladatok alkalmazásait és a különböző megoldási módszereket részletesen tárgyalja a [49] könyv.

Végül megjegyezzük, hogy a belsőpont-feltétel mellett a

$$c^T x - \mu \log(\det(F(x)))$$

függvény a (PSO) feladat önkorlátozó barrierje, a

$$\text{Tr}(A_0 Z) + \mu \log(\det(Z))$$

függvény pedig a (DSO) feladat önkorlátozó barrierje. Ezek alapján látható, hogy a szemidefinit optimalizálási feladatok hatékonyan oldhatók meg belsőpontos módszerekkel [35].

A. Függelék

Függelék

A.1. Néhány technikai állítás

Elsőként a jól ismert Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség egy általánosított változatát látjuk be. A klasszikus Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget megkapjuk, ha a következő lemmában az $A = M$ mátrixot használjuk.

A.1. Lemma (Általánosított Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség). *Ha A és M szimmetrikus mátrixok, amelyekre $|x^T M x| \leq x^T A x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, akkor*

$$(a^T M b)^2 \leq (a^T A a) (b^T A b), \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Bizonyítás: Mivel $x^T A x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ezért A pozitív szemidefinit. Az általánosság megsértése nélkül feltesszük, hogy A pozitív definit. Ha nem így lenne, akkor tekintsük az $A + \varepsilon I$ pozitív definit mátrixot minden $\varepsilon > 0$ -ra, majd végül vegyünk az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet rögzített a és b mellett. A lemma triviális, ha $a = 0$ vagy $b = 0$, ezért feltehetjük, hogy a és b nem nulla. Legyen

$$\mu := \sqrt[4]{\frac{a^T A a}{b^T A b}},$$

akkor az

$$a^T M b = \frac{1}{4} ((a+b)^T M (a+b) - (a-b)^T M (a-b))$$

egyenlőségből következően

$$\begin{aligned} (a^T M b)^2 &= \frac{1}{16} ((a+b)^T M (a+b) - (a-b)^T M (a-b))^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{16} ((a+b)^T A (a+b) + (a-b)^T A (a-b))^2 = \\ &= \frac{1}{16} (2a^T A a + 2b^T A b)^2 = \frac{1}{4} (a^T A a + b^T A b)^2. \end{aligned}$$

Mivel A pozitív definit és $a, b \neq 0$ ezért μ jóldefiniált és $\mu \neq 0$, így a helyébe a/μ -t és b helyébe μb -t helyettesítve következik, hogy

$$(a^T M b)^2 = \left(\left(\frac{a}{\mu} \right)^T M (\mu b) \right)^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu^2} a^T A a + \mu^2 b^T A b \right)^2 = (a^T A a) (b^T A b),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

Kérdés: Mit mondhatunk, ha M nem szimmetrikus?

A következő lemma becslést ad egy szimmetrikus, homogén trilineáris kifejezés spektrálsugarára. A bizonyítás Jarre-tól [20] származik.

A.2. Lemma (Szimmetrikus trilineáris kifejezések spektrálsugara). *Tekintsük az $M \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$ mátrix által meghatározott $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus trilineáris kifejezést. Legyen továbbá $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy szimmetrikus bilineáris kifejezés, amelyre az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix és a $\mu > 0$ skalár olyan, hogy*

$$M[x, x, x]^2 \leq \mu A[x, x]^3 = \mu \|x\|_A^6, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor

$$|M[x, y, z]| \leq \mu \|x\|_A \|y\|_A \|z\|_A, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Bizonyítás: Az általánosság megsértése nélkül feltesszük, hogy $\mu = 1$, ellenkező esetben A helyébe $\sqrt[3]{\mu}A$ -t írhatunk. Az A.1 lemma bizonyításában leírtakhoz hasonlóan feltesszük, hogy A pozitív definit. Az

$$M[x, y, z] := M[A^{-\frac{1}{2}}x, A^{-\frac{1}{2}}y, A^{-\frac{1}{2}}z]$$

helyettesítéssel élve még azt is feltehetjük, hogy $A = I$ az egységmátrix. Azt kell belátunk, hogy

$$|M[x, y, z]| \leq \mu \|x\|_2 \|y\|_2 \|z\|_2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,$$

feltéve, hogy

$$|M[x, x, x]| \leq \mu \|x\|_2^3, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Adott $x \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen M_x az a (szimmetrikus) mátrix, amelyre teljesül, hogy

$$y^T M_x z := M_x[y, z] := M[x, y, z], \forall y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Elég megmutatni, hogy

$$|M[x, y, y]| \leq \mu \|x\|_2 \|y\|_2^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

mert a fennmaradó rész az A.1 lemmából következik $M = M_x$ esetén. Legyen

$$\sigma := \max \{M[x, y, y] : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$$

és jelölje \bar{x} és \bar{y} ennek a maximalizálási feladatnak egy megoldását. Az \bar{x} és \bar{y} -ra vonatkozó szükséges optimalitási feltételből következik, hogy

$$\begin{pmatrix} M_{\bar{y}\bar{y}} \\ 2M_{\bar{y}\bar{x}} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2\bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2\bar{y} \end{pmatrix},$$

ahol α és β a Lagrange-multiplikátorok. Az $(\bar{x}^T, 0)$ és $(0, \bar{y}^T)$ kifejezésekkel balról szorozva kapjuk, hogy $\alpha = \sigma/2$ és $\beta = \sigma$. Ebből adódóan

$$M_{\bar{y}}\bar{y} = \sigma\bar{x}, \quad 2M_{\bar{y}}\bar{x} = \sigma\bar{y},$$

amiből következik, hogy $M_{\bar{y}}^2\bar{y} = \sigma^2\bar{y}$. Mivel $M_{\bar{y}}$ szimmetrikus, ezért \bar{y} az $M_{\bar{y}}$ egy sajátvektora a $\pm\sigma$ sajátértékkel, amiből kapjuk, hogy

$$\sigma = |\bar{y}^T M_{\bar{y}} \bar{y}| = M[\bar{y}, \bar{y}, \bar{y}].$$

Készen vagyunk a bizonyítással. \square

A.2. A 3.3 tétel és a 3.4 lemma bizonyítása

A.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (CPO) feladatra nem létezik rossz egyenes (lásd a 3.2 definíciót a 127. oldalon). Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

- (i) A (CPO) és a (CDO) feladat kielégíti a belsőpont-feltételt.
- (ii) A (3.2) relaxált KKT-rendszernek minden $\mu > 0$ -ra van megoldása.
- (iii) Minden $w > 0$ ($w \in \mathbb{R}^m$)-ra létezik olyan y és x , hogy

$$\begin{aligned} (a) \quad & g_j(x) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ (b) \quad & \sum_{j=1}^m y_j \nabla g_j(x) = c, \quad y \geq 0, \\ (c) \quad & -y_j g_j(x) = w_j, \quad \forall j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Bizonyítás: A (iii) \rightarrow (ii) és a (ii) \rightarrow (i) összefüggések nyilvánvalóak. Csak azt kell belátnunk, hogy (i)-ből következik (iii).

Tegyük fel, hogy teljesül a belsőpont-feltétel. Legyen

$$\mathcal{P}^0 := \{x : g_j(x) < 0, \quad \forall j\} \quad \text{és} \quad \mathcal{Y} := \mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m : y > 0\}.$$

Figyeljük meg, hogy IPC miatt a \mathcal{P}^0 halmaz nem üres és, mivel az $F(x, y)$ függvény x -ben konvex és y -ban konkáv, ezért (A.1) megoldásai pontosan az

$$F(x, y) := -c^T x + \sum_{j=1}^m y_j g_j(x) + \sum_{j=1}^m w_j \log y_j$$

függvény nyeregpontjai a $\mathcal{P}^0 \times \mathcal{Y}$ halmazon. Ezért csak azt kell belátnunk, hogy F -nek van nyeregpontja $\mathcal{P}^0 \times \mathcal{Y}$ -on.

Vegyük észre, hogy tetszőleges rögzített x esetén az $F(x, y)$ függvény \mathcal{Y} -on a maximumát az

$$y_j = \frac{w_j}{-g_j(x)},$$

pontban éri el, és a maximum értéke

$$\bar{F}(x) := -c^T x - \sum_{j=1}^m w_j \log(-g_j(x)) + \sum_{j=1}^m w_j (\log w_j - 1).$$

Tehát annak bizonyítása, hogy $F(x, y)$ -nek van nyeregpontja a $\mathcal{P}^0 \times \mathcal{Y}$ halmaz felett, arra redukálódik, hogy belássuk, $\bar{F}(x)$ felveszi maximumát \mathcal{P}^0 felett.

Most igazoljuk, hogy ha egy $x^i \in \mathcal{P}^0$, $i = 1, 2, \dots$ sorozat minimalizálja $\bar{F}(x)$ -et, azaz

$$\bar{F}(x^i) \longrightarrow \inf_{x \in \mathcal{P}^0} \bar{F}(x),$$

akkor az $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ sorozat korlátos.¹

Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy $\{x^i \in \mathcal{P}^0\}_{i=1}^\infty$ minimumhelyekből álló sorozat, amelyre $\|x^i\| \rightarrow \infty$. Ekkor az $\tilde{x}^i := \frac{x^i}{\|x^i\|}$ sorozat korlátos, amelynek így kiválaszthatjuk egy olyan konvergens részsorozatát (az egyszerűség kedvéért jelöljük ezt is ugyanúgy), amelynek határértéke

$$s := \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}^i.$$

Mivel \mathcal{P}^0 konvex és $x^i \in \mathcal{P}^0$ minden i -re, ezért s a \mathcal{P}^0 -nak egy recessziós iránya, azaz minden $x \in \mathcal{P}^0$ és $\lambda \geq 0$ esetén $x + \lambda s \in \mathcal{P}^0$.

Azt állítjuk, hogy

$$c^T s \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

Ez valóban igaz, mert különben $c^T x^i \leq -\alpha \|x^i\|$ lenne bizonyos $\alpha > 0$ és kellően nagy i -re, és ezért $\bar{F}(x^i)$ a végtelenbe tartana.

A g_j függvények konvexitása miatt létezik $0 < \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, amelyekre minden x -re $g_j(x) \geq -\beta - \gamma \|x\|$ (lásd az A.1 feladatot). Ebből következik, hogy minden kellően nagy i -re

$$\bar{F}(x^i) = \bar{F}(x) := -c^T x^i - \sum_{j=1}^m w_j \log(-g_j(x^i)) \geq -\alpha \|x^i\| - \sum_{j=1}^m w_j \log(-\beta - \gamma \|x\|) \rightarrow \infty$$

ha $i \rightarrow \infty$. Ez viszont ellentmondás, mert x^i egy minimumhelyekből álló sorozata \bar{F} -nek.

Legyen most (\bar{x}, \bar{y}) a (CDO) feladat egy belső megoldása. Ekkor minden j -re

$$0 \geq g_j(x^i) \geq g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})^T (x^i - \bar{x}).$$

Az $\|x^i\|$ értékkel osztva és az $i \rightarrow \infty$ határértéket véve kapjuk, hogy

$$\nabla g_j(\bar{x})^T s \leq 0, \quad (\text{A.3})$$

mivel $\|x^i\|$ a végtelenhez tart.

¹Figyeljük meg, hogy a (ii) állítás direkt következménye ennek a kijelentésnek. Ha az $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ sorozat korlátos, akkor kiválaszthatunk egy konvergens részsorozatot, amelynek \bar{x} a határértéke. Ez a határérték \mathcal{P}^0 -hoz tartozik, mert bármilyen sorozatra, amely \mathcal{P}^0 határához konvergál, az $\bar{F}(x)$ függvény a végtelenbe tart. Mivel $\bar{F}(x)$ folytonos, ezért \bar{x} a keresett minimumhely, amely kielégíti (ii)-t.

Másrészt viszont az (A.2) egyenlőtlenséget és a (CDO) feladat egyenlőségi feltételét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$0 \leq c^T s = \left(\sum_{j=1}^m \bar{y}_j \nabla g_j(\bar{x}) \right)^T s = \sum_{j=1}^m \bar{y}_j (\nabla g_j(\bar{x})^T s) \leq 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség (A.3)-ból következik. Most tehát $c^T s = 0$, és $\bar{y} > 0$, valamint (A.3) miatt minden j -re teljesülnie kell a

$$\nabla g_j(\bar{x})^T s = 0 \quad (\text{A.4})$$

egyenlőségnek is.

Végül megmutatjuk, hogy $\mathcal{R} = \{x : x = \bar{x} + \lambda s, \lambda \geq 0\}$ egy rossz egyenes. Ehhez be kell látnunk, hogy g_j konstans \mathcal{R} mentén. Már megmutattuk, hogy s recessziós iránya \mathcal{P}^0 -nak, ezért s szintén recessziós iránya az alábbi nagyobb halmaznak:

$$\mathcal{P}_+ := \{x : \forall j \ g_j(x) \leq \max\{0, g_j(\bar{x})\}\} \supseteq \mathcal{P}^0,$$

tehát minden j -re a g_j függvények felülről korlátosak az \mathcal{R} egyenesen, ami (A.4)-gyel együtt igazolja, hogy g_j konstans \mathcal{R} mentén. Ellentmondásra jutottunk, ezzel készen vagyunk a bizonyítással. \square

A.1. Feladat. Legyen $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény. Lássuk be, hogy létezik olyan $0 < \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, amelyekre

$$g_j(x) \geq -\beta - \gamma \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

A következő példa azt mutatja, hogy a $(iii) \rightarrow (i)$ implikáció nem mindig teljesül, ha létezik rossz egyenes.

A.4. Példa. Legyen adott a $\mathcal{Q} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2^2\}$ konvex halmaz és legyen $\pi(x)$ a \mathcal{Q} halmaz *Minkowski-függvénye* az $\bar{x} = (1, 0)$ pólussal, azaz

$$\pi(x) := \min \left\{ t : \bar{x} + \frac{1}{t}(x - \bar{x}) \in \mathcal{Q} \right\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\pi(x)$ nemnegatív, konvex függvény, $\pi(x) = 1$ ha x a \mathcal{Q} halmaz határpontja, és $\pi(x) = 0$ az $\mathcal{R} := \{x : x = \bar{x} + \lambda(1, 0), \lambda \geq 0\}$ egyenesen.

Legyen $m = 1$, $c^T x = x_2$ és $g_1(x) = \pi^2(x) + x_2$, ekkor egy olyan (CPO) feladatot kapunk, amely kielégíti a belsőpont-feltételt: az $x = (1, -0.5)$ pont szigorúan primál megengedett, az $\tilde{x} = (1, 0)$ és $\tilde{y} = 1$ pont pedig szigorúan duál megengedett.

Az (A.1) rendszer azonban *soha* nem oldható meg. Valóban, ha az (A.1) rendszernek volna megoldása, akkor az

$$\bar{F}(x) = -c^T x - \mu \log(-g_1(x)) \equiv -x_2 - \mu \log(-\pi^2(x) - x_2)$$

függvény felvenné a minimumát a $\mathcal{P}^0 = \{x : g_1(x) < 0\}$ halmazon. Ez utóbbi nyilvánvalóan nem igaz, mivel bármilyen adott \tilde{x} esetén (pl. $\tilde{x} = (1, -0.5)$), amelyre $g_1(\tilde{x}) < 0$, mindig találhatunk egy jobb értéket \bar{F} -re. A pontokat vehetjük az $\mathcal{R}' := \{x : x = \tilde{x} + \lambda(1, 0)\}$ egyenesről, mivel $\pi(\tilde{x} + \lambda(1, 0)) \rightarrow 0$, ha $\lambda \rightarrow \infty$.

A.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy a (CPO) feladatra teljesül a belsőpont-feltétel, és nem létezik rossz szakasz. Ekkor a (3.2) és a (3.3) rendszerek megoldásai, ha léteznek, akkor egyértelműek.*

Bizonyítás: Az A.3 tétel bizonyításában láttuk, hogy (x, s) pontosan akkor megoldása az A.1 rendszernek, ha nyeregpontja $F(x, y)$ -nek a $\mathcal{P}^0 \times \mathcal{Y}$ halmazon. Világos, hogy rögzített x esetén az F függvény szigorúan konkáv függvénye y -nak, ezért annak igazolásához, hogy a nyeregpont egyértelmű, csak azt kell belátnunk, hogy az

$$\bar{F}(x) := -c^T x - \sum_{j=1}^m w_j \log(-g_j(x)) = \max_{y \in \mathcal{Y}} F(x, y) + \text{konstans}$$

függvény nem veheti fel a minimumát két különböző pontban. Indirekt tegyük fel, hogy létezik két különböző $x', x'' \in \mathcal{P}^0$ minimumhely. Az \bar{F} függvény konvexitása miatt $\bar{F}(x)$ konstans az $[x', x'']$ szakaszon. Ebből következik, hogy $\bar{F}(x)$ első- és másodrendű iránymenti deriváltja is nulla a szakaszon. Ez csak akkor állhat fenn, ha mindez igaz az összes $g_j(x)$ függvényre külön-külön, vagyis az összes $g_j(x)$ függvény konstans az $[x', x'']$ szakaszon, azaz a szakasz rossz. Ellentmondásra jutottunk, tehát beláttuk az állítást. \square

A.3. Az optimalizálási feladatok rövidítései

Itt foglaljuk össze a jegyzetben található optimalizálási feladatok többé-kevésbé egyezményes rövidítéseit. Ahol szükséges volt, ott megadtuk az eredeti angol elnevezést is.

CDO: (126. oldal), a primál (CPO) feladat Lagrange-Wolfe duálja.

CO: (12. oldal, 73. oldal), konvex optimalizálási feladat (Convex Optimization)

ConeL: (104. oldal), kúplineáris optimalizálási Feladat (Cone-Linear Optimization)

CPO: (125. oldal), a (CO) feladat primál alakja (Primal Convex Optimization)

DConeL: (106. oldal), duál kúplineáris optimalizálási feladat (Dual Cone-Linear Optimization)

DGO: (176. oldal), duál geometriai optimalizálási feladat (Dual Geometric Optimization)

Dl_p: (180. oldal), duál l_p -norma optimalizálási feladat (Dual l_p -norm Optimization)

Dl'_p: (183. oldal), (Dl_p) ekvivalens felírása

Dl''_p: (184. oldal), (Dl_p) ekvivalens felírása

DSDL: (102. oldal), a (PSO') feladat Lagrange duálja

DSO: (101. oldal), a (PSO') feladat Lagrange-Wolfe duálja

DSP: (101. oldal, 185. oldal), duál szemidefinit optimalizálási feladat (Dual Semidefinite Optimization)

- EOD:** (173. oldal), duál entrópiaoptimalizálási feladat (Dual Entropy Optimization)
- EOD':** (175. oldal), EOD ekvivalens felírása
- EOP:** (172. oldal), primál entrópiaoptimalizálási feladat (Primal Entropy Optimization)
- GEO:** (174. oldal), általánosított entrópiaoptimalizálási feladat (Generalized Entropy Optimization)
- KKO:** (126. oldal), konvex kvadratikus optimalizálási feladat (Convex Quadratic Optimization)
- LC:** (107. oldal), lineárisan korlátozott konvex feladat (Linearly Constrained Convex Optimization)
- LCP:** (17. oldal), lineáris komplementaritási feladat (Linear Complementarity Problem)
- LD:** (87. oldal), Lagrange-duál
- LO:** (11. oldal), lineáris optimalizálási feladat (Linear Optimization)
- NC:** (112. oldal), nemlineáris feltételekkel rendelkező feladat (Nonlinearly Constrained Optimization)
- NCO:** (98. oldal), nemkonvex optimalizálási feladat (Nonconvex Optimization)
- NLO:** (9. oldal), nemlineáris optimalizálási feladat (Nonlinear Optimization)
- PGO:** (176. oldal), primál geometriai optimalizálási feladat (Primal Geometric Optimization)
- Pl_p:** (180. oldal), primál l_p -norma optimalizálási feladat (Primal l_p -norm Optimization)
- Pl'_p:** (182. oldal), (Pl_p) ekvivalens felírása
- Pl''_p:** (183. oldal), (Pl_p) ekvivalens felírása
- PSO:** (101. oldal), primál szemidefinit optimalizálási feladat (Primal Semidefinite Optimization)
- PSO':** (102. oldal), primál szemidefinit optimalizálási feladat
- QO:** (12. és 92. oldal), primál kvadratikus optimalizálási feladat (Primal Quadratic Optimization)
- QD:** (93. oldal), duál kvadratikus optimalizálási feladat (Dual Quadratic Optimization)
- WD:** (89. oldal), Wolfe-duál

Tárgymutató

- affin burok, 43
- affin kombináció, 43
- általános redukált gradiens-módszer, 112
- általánosított
 - Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, 187
 - számítási-mértani egyenlőtlenség, 177
- alternatív rendszerek, 77
- alternatívátétel, 77
- átlagos variancia modellek, 21
- barrier-függvény, 122, 152
 - inverz barrier-függvény, 123
 - logaritmikus barrier-függvény, 123
- báziscsere, 22
- báziscsere-módszer, 25
- bázistábla, 22
 - végző, 24
- bázisváltó, 22
- belső pont, 126
 - kapcsolata a Slater-feltétellel, 126
 - relatív, 49
- belsőpont-feltétel, 126
- belső hurok, 147
- betonkeverési feladat, 18
- biszimmetrikus mátrix, 17
- centrális út, 128
 - egyértelműsége, 128
 - létezése, 127
 - logbarrier felírásban, 123
- Cholesky-faktorizáció, 13
- criss-cross módszer, 22
- cserepivot, 23
- diagonális pivot, 23
- duál feladat
 - entrópiaoptimalizálásra, 173
 - geometriai optimalizálásra, 177
 - kvadrátikus optimalizálásra, 14, 92
 - Lagrange, 87
 - Lagrange-Wolfe, 102
 - lineáris optimalizálásra, 92
 - l_p -norma optimalizálásra, 181
 - szemidefinit optimalizálásra, 102
 - Wolfe, 89
- duális kúp, 104
- dualitásrés, 16, 73
 - konvex optimalizálásnál, 88
 - relatív, 73
- egyenes menti minimalizálás, 70
 - intervallumfelezéssel, 71
 - Newton-módszerrel, 71
- elégőséges mátrix, 36
- elsőfázis-feladat, 76
- entrópiaoptimalizálás, 172
 - általános feladata, 174
 - dualitása, 173
- epigráf, 11
- erős dualitás
 - konvex optimalizálásra, 88
 - kvadrátikus optimalizálásra, 16, 34
 - Wolfe-duálra, 90
- extremális
 - halmaz, 42
 - pont, 42
 - pontok
 - konvex burka, 45
 - létezése, 44

- Farkas-tétel, 77
- feltétel nélküli optimalizálás
 - keretalgoritmus, 66
- feltételes optimalizálás
 - algoritmusai, 106, 112
 - optimalitási feltétele, 61, 84
- ferdén szimmetrikus mátrix, 13
- generált kúp, 45
- geometriai optimalizálás, 175
 - barrier-függvénye, 179
 - dualitása, 177
- globális minimum, 57
- gradiens, 53
- gradiens-módszer, 66
- gyenge dualitás
 - konvex optimalizálásra, 88
 - kúp-lineáris optimalizálásra, 106
 - kvadratikusan optimalizálás, 15
 - szemidefinit optimalizálásra, 101
 - Wolfe-duálra, 90
- hegyes kúp, 45
- Hesse-mátrix, 54
- Hölder-egyenlőtlenség, 178
- ideális Slater-pont, 76
- intervallumfelezés, 71
- inverz barrier-függvény, 123
- iránymenti derivált, 54
- Jensen-egyenlőtlenség, 52
- kúp-lineáris optimalizálás, 103
 - gyenge dualitása, 106
- karakterisztikus kúp, 46
- Karush–Kuhn–Tucker-tétel, 83, 84
- keresési irány, 66
- KKT elégséges feltétel, 87
- KKT-pont, 86, 126
- KKT-tétel, 83, 84, 126
- komplementáris bázis, 23
- komplementáris változók, 17
- komplementaritási feltétel, 17
 - konvex optimalizálásra, 127
- konjugáltirány-módszerek, 69
- konvergencia rendje, 64
- konvex
 - burok, 42
 - extremális pontoké, 45
 - függvény, 10
 - folytatossága, 51
 - minimuma, 60
 - függvények
 - maximuma, 53
 - pozitív lineáris kombinációja, 53
 - halmaz, 10
 - dimenziója, 43
 - relatív belseje, 49
 - kombináció, 10, 42
 - kúp, 45
 - poláris kúpja, 104
- konvex Farkas-tétel, 77
- konvex optimalizálás
 - erős dualitása, 88
 - gyenge dualitása, 88
- konvex regressziós feladat, 20
- közelségi mérték, 124, 132
 - csökkenése rövidített Newton-lépésnél, 146, 157
 - csökkenése teljes Newton-lépésnél, 139
- Krein–Milman-tétel, 45
- külső hurok, 147
- kúp
 - generált, 45
 - hegyes, 45
 - karakterisztikus, 46
 - konvex, 45
 - recessziós, 46
- kvázi-Newton módszerek, 69
- kvázibarrier-függvény, 122

-
- kvadratikus konvergencia, 65
 - kvadratikus optimalizálás
 - duál feladata, 14
 - dualitása mint Wolfe-duál, 92
 - erős dualitása, 16, 34
 - gyenge dualitása, 15
 - primál feladata, 14
 - Lagrange-duál, 87
 - Lagrange-függvény, 83
 - Lagrange–Wolfe-duál
 - szemidefinit optimalizálásra, 102
 - legkisebb index criss-cross módszer, 22
 - konvergenciája, 28
 - működése, 25
 - végessége, 31
 - legkisebb négyzetek módszere, 18, 20
 - legmeredekebb csökkenési irány, 66
 - Lemke-algoritmus, 34
 - lineáris komplementaritási feladat, 17
 - lineáris konvergencia, 65
 - lineáris optimalizálás, 11, 18, 19, 92
 - dualitása mint Wolfe-duál, 92
 - logaritmikus barrier-függvény, 123, 128
 - logbarrier algoritmus
 - rövidített Newton-lépésekkel, 146
 - teljes Newton-lépésekkel, 140
 - logbarrier-függvény, 123
 - lokális minimum, 57
 - l_p -norma optimalizálás (NO), 180
 - barrier-függvénye, 182
 - dualitása, 181
 - maximum likelihood becslés, 93
 - megállási feltétel, 72
 - megengedett irány, 62
 - megengedett megoldás, 9, 15
 - Minkowski-szorzat, 102
 - monoton növekvő függvény, 53
 - nemlineáris optimalizálás, 9
 - Newton-lépés, 132
 - megállási feltétel, 72
 - rövidített, 157
 - teljes, 134
 - Newton-módszer
 - barrier-függvényekre, 131
 - egyenes menti keresésre, 72
 - kvadratikus konvergenciája, 138, 158
 - lineáris konvergenciája, 157
 - nemlineáris egyenletek megoldására, 70
 - nemlineáris optimalizálásra, 68
 - nívóhalmaz, 53
 - nyeregpont, 83
 - önkorlátozási tulajdonság, 124, 135
 - ekvivalens megfogalmazása, 153
 - elégletes feltétele, 170
 - önkorlátozó függvény, 135
 - Hesse-mátrixa, 153
 - kompozíciója, 169
 - minimumhelye, 161
 - optimalitási feltétel
 - elégletes, 87
 - feltétel nélküli optimalizálásra, 57, 60
 - feltételes optimalizálásra, 61
 - Karush–Kuhn–Tucker, 84
 - ortogonalitási tulajdonság, 30
 - oszlopelégletes mátrix, 36
 - P**-mátrix, 36
 - pivot
 - cserepivot, 23
 - diagonális pivot, 23
 - principális pivot, 23
 - pivotálás, 22
 - pivotmódszer, 25
 - poláris kúp, 104
 - portfólióanalízis, 21
 - portfóliófeladatok, 21
 - pozinom optimalizálás, 176
 - pozinomiális kifejezés, 176
-

- pozitív definit mátrix, 13
- pozitív szemidefinit mátrix, 13
- principális átrendezés, 37
- principális pivot, 23
- recessziós kúp, 46
- redukált gradiens módszer, 106
- reguláris feltétel, 76
- regularitási feltétel, 74
 - Slater-feltétel, 74
- relatív belső pont, 49
- rövidített Newton-lépés, 131
- rövidített Newton-lépéses logbarrier mód-
szer, 146
- Slater-feltétel, 74
 - ellenőrzése, 76
- Slater-pont, 74
 - ideális, 76
- Slater-regularitás, 74
- sorelégséges mátrix, 36
- stacionárius pont, 60
- szemidefinit optimalizálás, 185
 - barrier-függvénye, 186
 - duálja mint Lagrange–Wolfe-duál, 102
 - dualitása, 185
 - gyenge dualitása, 101
 - primál feladata, 101
- szeparációs tétel, 77
- szigorú globális minimum, 57
- szigorú lokális minimum, 57
- szigorúan konvex függvény, 41
- szimmetrikus mátrix, 13
- szimmetrikus trilineáris kifejezések spekt-
rálisugara, 188
- szimplex, 43
- szinguláris feltétel, 76
- szinthalmaz, 53
- sztenderd szimplex, 43
- szublineáris konvergencia, 65
- szuperlineáris konvergencia, 65
- teljes Newton-lépéses logbarrier algoritmus,
141
- trust region-módszer, 69
- Wolfe-duál, 89
 - erős dualitása, 90
 - gyenge dualitása, 90
 - kvadratikus optimalizálásra, 92
 - lineáris optimalizálásra, 92
 - szemidefinit optimalizálásra, 102
- zárt függvény, 152

Irodalomjegyzék

- [1] K. M. Anstreicher. A standard form variant, and safeguarded linesearch, for the modified Karmarkar algorithm. *Mathematical Programming*, 47:337–351, 1990.
- [2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [3] A. Ben-Tal and A. S. Nemirovski. *Lectures on Modern Convex Optimization*. MPS/SIAM Series on Optimization. MPS and SIAM, 2001.
- [4] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA 02178-9998, 1995.
- [5] V. Chvátal. *Linear Programming*. W.H. Freeman and Company, 1983.
- [6] R. W. Cottle and S-M. Guu. Two characterizations of sufficient matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 170:65–74, 1992.
- [7] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic, Boston, MA, 1992.
- [8] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and V. Venkateswaran. Sufficient matrices and the linear complementarity problem. *Linear Algebra and Its Applications*, 114/115:231–249, 1989.
- [9] D. den Hertog. *Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming: Algorithms and Complexity*. Kluwer A.P.C., Dordrecht, 1994.
- [10] D. den Hertog, C. Roos, and T. Terlaky. The linear complementarity problem, sufficient matrices and the criss-cross method. *Linear Algebra and Its Applications*, 187:1–14, 1993.
- [11] R. J. Duffin, E. L. Peterson, and C. Zener. *Geometric Programming*. John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [12] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.

- [13] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Numerical Linear Algebra and Optimization*, volume 1. Addison Wiley P.C., New York, 1991.
- [14] C.-G. Han, P. M. Pardalos, and Y. Ye. On interior-point algorithms for some entropy optimization problems. Working paper, The Pennsylvania State University, Computer Science Department, University Park, Pennsylvania, 1991.
- [15] D. den Hertog, F. Jarre, C. Roos, and T. Terlaky. A sufficient condition for self-concordance with application to some classes of structured convex programming problems. *Mathematical Programming*, 69:75–88, 1995.
- [16] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, volume I and II. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [17] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [18] R. Horst, P. M. Pardalos, and N. V. Thoai. *Introduction to Global Optimization*. Kluwer A.P.C., Dordrecht, 1995.
- [19] F. Jarre. Interior-point methods for classes of convex programs. Technical Report SOL 90–16, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, 1990.
- [20] F. Jarre. Interior-point methods via self-concordance or relative Lipschitz condition. Habilitationsschrift, 1994.
- [21] F. Jarre. Interior-point methods for convex programming. In T. Terlaky, editor, *Interior-point Methods for Mathematical Programming*, pages 255–296. Kluwer A.P.C., Dordrecht, 1996.
- [22] N. K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.
- [23] P. Kas and E. Klafszky. On the duality of the mixed entropy programming. *Optimization*, 27:253–258, 1993.
- [24] E. Klafszky. Geometric programming. Seminar Notes 11.1976, Hungarian Committee for Systems Analysis, Budapest, 1976.
- [25] E. Klafszky and T. Terlaky. Some generalizations of the criss-cross method for quadratic programming. *Mathematische Operationsforschung und Statistics ser. Optimization*, 24:127–139, 1992.
- [26] K. O. Kortanek and H. No. A second order affine scaling algorithm for the geometric programming dual with logarithmic barrier. *Optimization*, 23:501–507, 1992.

- [27] M. Kovács. *A nemlineáris programozás elmélete*. Typotex, Budapest, 1997.
- [28] D. C. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. Addison Wiley, 1994.
- [29] F. Lootsma. Algorithms for constrained optimization. Dictaat Nr. a85B, Fac. TWI, TU Delft.
- [30] F. Lootsma. Algorithms for unconstrained optimization. Dictaat Nr. a85A, en WI-385, Fac. TWI, TU Delft.
- [31] F. Lootsma. Duality in non-linear programming. Dictaat Nr. a85D, Fac. TWI, TU Delft.
- [32] H. M. Markowitz. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3:111–133, 1956.
- [33] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 16. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [34] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovski. Self-concordant functions and polynomial time methods in convex programming. Report, Central Economical and Mathematical Institute, USSR Academy of Science, Moscow, USSR, 1989.
- [35] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovski. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [36] E. L. Peterson and J. G. Ecker. Geometric programming: Duality in quadratic programming and l_p approximation II. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 13:317–340, 1967.
- [37] E. L. Peterson and J. G. Ecker. Geometric programming: Duality in quadratic programming and l_p approximation I. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Proceedings of the International Symposium of Mathematical Programming*, New Jersey, 1970. Princeton University Press.
- [38] E. L. Peterson and J. G. Ecker. Geometric programming: Duality in quadratic programming and l_p approximation III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 29:365–383, 1970.
- [39] J. D. Pintér. *Global Optimization in Action*, volume 6 of *Nonconvex Optimization and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [40] F. Potra and Y. Ye. A quadratically convergent polynomial interior-point algorithm for solving entropy optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 3:843–860, 1993.

- [41] T. Rapcsák. *Smooth nonlinear optimization in \mathbb{R}^n* . Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [42] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [43] C. Roos and T. Terlaky. Introduction to linear optimization. Dictaat WI187, Fac. ITS/TWI, TU Delft, 1997.
- [44] C. Roos, T. Terlaky, and J.-Ph. Vial. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach*. John Wiley & Sons, 1997.
- [45] S. S. Sapatnekar. *A convex programming approach to problems in VLSI designs*. PhD thesis, University of Illinois, Urbana Campaign, 1992.
- [46] J. Stoer and C. Witzgall. *Convexity and Optimization in Finite Dimensions*, volume I. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1970.
- [47] T. Terlaky. On l_p programming. *European Journal of Operational Research*, 22:70–100, 1985.
- [48] M. Ujvári. Konvex analízis. Egyetemi jegyzet (kézirat), ELTE TTK, Budapest, 2003.
- [49] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38:49–95, 1996.

Az „OPERÁCIÓKUTATÁS” sorozatban eddig megjelentek:

Nagy Tamás² – Klafszky Emil³:
SZTOCHASZTIKUS JELENSÉGEK

Komáromi Éva⁴:
LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

Deák István⁵:
BEVEZETÉS A SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSBA

Hujter Mihály⁶:
PERFEKT GRÁFOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

A kötetek megrendelhetők az AULA könyvesboltjában:
1093 Budapest, Fővám tér 13-15. Telefon: (36) 1-455-0579

²Miskolci Egyetem Matematikai Intézete, Alkalmazott Matematika Tanszék, e-mail: matente@gold.uni-miskolc.hu

³Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építéskivitelezés Tanszéke, e-mail: klafszky@ekt.bme.hu

⁴Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem Operációkutatás Tanszéke, e-mail: komaromi@bkae.hu

⁵Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, Operációkutatási Csoport, e-mail: deak@math.bme.hu

⁶Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, Operációkutatási Csoport, e-mail: hujter@math.bme.hu