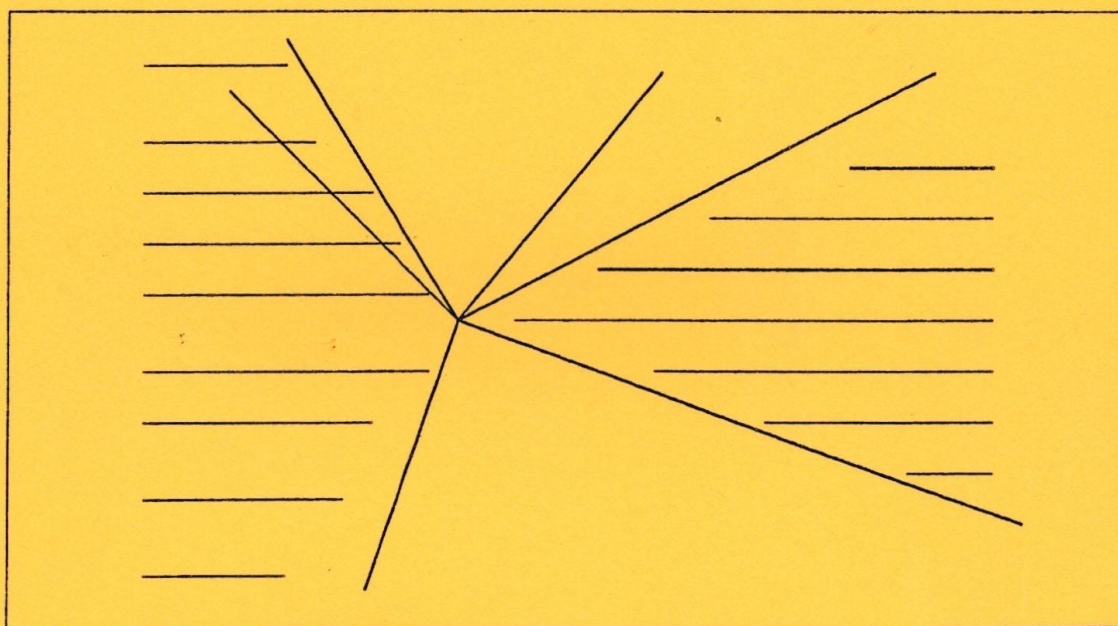


OPERÁCIÓKUTATÁS

No.2.

Komáromi Éva

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS



Budapest 2002

Komáromi Éva:

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

OPERÁCIÓKUTATÁS No.2

Megjelenik az FKFP 0231 Program támogatásával

a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem,
Operációkutatás Tanszék gondozásában

Budapest, 2002

Komáromi Éva:

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

Lektorálta: Puskás Csaba

Tartalomjegyzék

1. Előszó.	7
2. A lineáris programozási feladat.	9
2.1. A lineáris programozási feladat.	9
2.2. A duális feladat.	12
2.3. Konvex halmazok az euklideszi térben.	12
2.4. Az LP feladat megoldásairól.	18
3. Dualitás, optimalitás.	25
3.1. Dualitás, optimalitás.	25
4. A lineáris programozási feladat megoldása	31
4.1. A szimplex módszer.	31
4.2. A szimplex módszer megalapozása.	34
4.3. Kiinduló lehetséges bázis előállítása.	36
4.4. A duális megoldás a szimplex táblában.	38
4.5. Számpélda a szimplex módszer alkalmazására.	40
5. Lineáris programozáshoz vezető feladatok.	53
5.1. A döntési alapprobléma.	53
5.2. Hiperbolikus vagy törtprogramozás	54
5.3. Valószínűséggel korlátozott lineáris programozási modell	55
5.4. Többcélú programozás	57
5.5. Célprogramozás.	58

5.6. Kétlépcsős programozási modell.	59
6. Történet, ajánlott könyvek.	65

1. fejezet

Előszó.

E jegyzet célja az, hogy a lineáris programozás elméletét belehelyezze abba a gondolkörbe, amelyhez a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem hallgatói az első szemeszterekben hozzászoktak, és amelyre szükségük lesz különösen azoknak a hallgatóknak, akik a közgazdaságtant elméleti igényekkel készülnek művelni. A tárgyalásmód nem lesz éppen változatos, főként állítások és bizonyítások sorozatából áll, amelyeket példák és gyakorlatok ritkán illusztrálnak. Bár számítunk az olvasó lineáris algebrai tájékozottságára, összefoglaljuk mindazokat (de csak azokat) a fogalmakat és állításokat, többségükben bizonyításaikkal együtt, amelyeket a lineáris programozási feladat vizsgálatánál igénybe veszünk.

Először bemutatjuk az LP feladatot, majd származtatunk egy másik lineáris programozási feladatot, amelyet duális feladatnak nevezünk, a kiinduló feladatot pedig ebben az összefüggésben primál feladatnak. Célunk az, hogy bemutassuk a lineáris programozási feladat szerkezetét, tulajdonságait, a primál-duál feladatpár kapcsolatát, és a két feladat együttes megoldására szolgáló sok módszer közül a legismertebbet: a szimplex módszert.

A tárgyalás középpontjában a primál-duál feladatpár tanulmányozása és a dualitási tétel áll. A dualitási tétel kimondásához, bizonyításához szükségünk lesz a Farkas tételre, annak bizonyításához pedig a konvex halmazok elméletében központi jelentőséggel bíró szeparációs tételre, amelynek azonban csak azt a változatát mondjuk ki és bizonyítjuk itt, amelyet a Farkas tétel bizonyításához felhasználunk. En-

nek megfelelően a tárgyalás felépítése a következő. A duális feladat bevezetése után néhány halmazelméleti illetve konvexitással kapcsolatos fogalom, a szeparációs tétel és a Farkas tétel következik. Ezután az LP feladat megoldásainak elhelyezkedéséről lesz szó és bizonyítjuk a dualitási tételt. A dualitási tétel folyamánya a nagyjelentőségű komplementaritási tétel, amely rávilágít az LP feladat optimális megoldásainak jellegére is. Ezzel teljes egészében előkészítettük a szimplex módszert, amelynek ezután csak a leírása marad hátra. Végül sor kerül a szimplex tábla szerkezetének a tanulmányozására abból a célból, hogy lássuk, hogyan befolyásolják a feladat paraméterei az optimális megoldást és az optimális célfüggvényértéket. A szimplex módszer alkalmazását, a lehetséges kimeneteleket és a feladat paraméterei változásának a következményeit számpélda illusztrálja.

Az utolsó fejezetben lineáris programozási feladatra visszavezethető nemlineáris programozási feladatok közül bemutatunk néhányat, azzal a céllal is, hogy az olvasó érdeklődését felkeltsük a matematikai programozás néhány más ága, pl. a sztochasztikus programozás és a hiperbolikus programozás, és a döntéselméletben fontos szerepet játszó célprogramozás illetve többcélú programozás iránt.

Az ajánlott irodalommal zárul a jegyzet. Néhány mérföldkőnek tekinthető könyvet sorolunk itt fel és néhány jellemző adatot, magyar vonatkozást a lineáris programozást is magában foglaló operációkutatás történetéből.

2. fejezet

A lineáris programozási feladat.

2.1. A lineáris programozási feladat.

Legyen A $m \times n$ méretű mátrix, b m -komponensű vektor, c n -komponensű vektor, mindhárom adott. Keresünk olyan n -komponensű x vektort, amely maximalizálja a cx lineáris függvényt (skaláris szorzatot) az $Ax = b, x \geq 0$ lineáris feltételek mellett:

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \max \\ Ax &= b, x \geq 0. \end{aligned}$$

Ez a lineáris programozási feladat egységes, úgynevezett "**kanonikus**" alakban. Általános formájában egy LP feladat tartalmazhat egyenlőtlenségi feltételt, előjelkötetlen változókat, maximalizálás helyett lehet minimalizálás a cél. Az LP feladat különböző alakjai azonban ekvivalensek abban az értelemben, hogy bármely LP feladat kanonikus alakban felírható, és fordítva, egy kanonikus alakban felírt LP feladat átalakítható más, például csupa egyenlőtlenségi feltételt tartalmazó feladattá. A következő tételben összefoglaljuk az LP feladat feltételeit és célfüggvényét illető átalakítási lehetőségeket.

Megjegyezzük, hogy ebben a jegyzetben minden vektor-vektor szorzás skaláris, ezért sehol nem tüntetjük fel a transzponált jelölésével, hogy az első sorvektor, a második pedig oszlopvektor. A mátrix-vektor szorzásnál szintén a sorrend dönti el,

hogy a szóbanforgó vektor sorvektornak vagy oszlopvektornak tekintendő-e. Megjegyezzük továbbá, hogy A^j jelöli az A mátrix j -dik oszlopát, A_i pedig az i -dik sorát, azaz A^j m -komponensű, A_i n -komponensű vektorok ($j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m$).

1. Állítás (ekvivalens átalakítások):

(1) Az $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ feltétel egy nemnegatív u_i változó bevezetésével helyettesíthető a következő két feltétellel:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + u_i &= b_i, \\ u_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Az $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ feltétel egy nemnegatív u_i változó bevezetésével helyettesíthető a következő két feltétellel:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - u_i &= b_i, \\ u_i &\geq 0. \end{aligned}$$

(2) Az $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ feltétel ekvivalens a

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i$$

feltétellel, az $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ feltétel ekvivalens a

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

feltétellel.

(3) Az $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ feltétel helyettesíthető a következő két egyenlőtlenségi feltétellel:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\geq b_i. \end{aligned}$$

Az $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, \dots, k$) k számú feltételből álló feltételrendszer helyettesíthető a következő $k + 1$ számú egyenlőtlenségi feltétellel:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i \quad (i = 1, \dots, k), \\ \sum_{i=1}^k a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^k a_{i2}x_2 + \dots + \sum_{i=1}^k a_{in}x_n &\geq \sum_{i=1}^k b_i. \end{aligned}$$

(4) Előjelkötetlen x_j változó helyettesíthető két nemnegatív változó különbségével:

$$x_j = x'_j - x''_j, x'_j \geq 0, x''_j \geq 0.$$

Több előjelkötetlen változó esetén elegendő egyetlen új változót bevezetni ahhoz, hogy valamennyi szóbanforgó változó nemnegativitását előírhassuk: az

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, \dots, m$$

feltételrendszer ekvivalens az alábbi feltételrendszerrel:

$$\begin{aligned} a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \dots + a_{in}x'_n - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) x_o &= b_i, i = 1, \dots, m, \\ x_o &\geq 0, x'_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

ahol az $x_1 = x'_1 - x_o, \dots, x_n = x'_n - x_o$ helyettesítést alkalmaztuk.

(5) A célfüggvény maximalizálása ekvivalens a célfüggvény negatívjának minimalizálásával és fordítva.

Bizonyítás: A (4) állítást látjuk be, a többi bizonyítását az olvasóra bízuk.

Tegyük fel először, hogy $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ kielégíti a $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$ feltételeket. Mivel minden szám helyettesíthető két nemnegatív szám különbségével, találunk olyan x'_j, x''_j nemnegatív számokat, hogy $\hat{x}_j = x'_j - x''_j, \quad j = 1, \dots, n$. Legyen $x_o = \max_j(x''_j)$ és adjunk új értékeket az x'_j változóknak a következő módon: legyen $x'_j = \hat{x}_j + x_o$. Ekkor x_o, x'_j kielégítik az

$$\begin{aligned} a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \dots + a_{in}x'_n - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) x_o &= b_i, (i = 1, \dots, m) \\ x_o &\geq 0, x'_j \geq 0, (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszert.

Tegyük fel másodszor, hogy $x_o \geq 0, x'_j \geq 0, (j = 1, \dots, n)$ kielégítik a fenti egyenlőtlenségrendszert. Legyen $\hat{x} = (x'_1 - x_o, \dots, x'_n - x_o)$. Akkor $A\hat{x} = b$ teljesül. \square

2.2. A duális feladat.

Bevezetjük a

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \max \\ Ax &= b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

kanonikus alakú LP feladat duálisát a következő

$$\begin{aligned} yb &\rightarrow \min \\ yA &\geq c \end{aligned}$$

feladat formájában, ahol y m -komponensű döntési (változó) vektor. Az első feladatot primál feladatnak, a második feladatot duál vagy duális feladatnak nevezzük, y komponenseit duális változóknak. Noha a definíció a kanonikus feladathoz kapcsolódik, tetszőleges LP feladat duális feladatát definiáltuk ezáltal, mivel tetszőleges LP feladat átalakítható kanonikus alakúvá. Az olvasóra bízunk az alábbi két állítás igazolását.

2. Állítás A duális feladat duálisa a primál feladat;

3. Állítás A $cx \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0$ úgynevezett "**standard**" alakú feladat duálisa az $yb \rightarrow \min, yA \geq c, y \geq 0$ feladat.

2.3. Konvex halmazok az euklideszi térben.

A lineáris programozási feladat vizsgálatához szükség van néhány lineáris algebrai fogalomra és állításra. Ebben a szakaszban ezeket foglaljuk össze.

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n, H \neq \emptyset$.

Az a pont a H *torlódási pontja*, ha a bármely környezete tartalmaz a -tól különböző elemet a H -ból.

Az $a \in H$ pont H -nak *belső pontja*, ha a -nak létezik olyan r -sugarú környezete, amelynek minden pontja H -hoz tartozik.

A H halmaz *zárt*, ha minden torlódási pontját tartalmazza.

A H halmaz *nyílt*, ha minden pontja belső pont.

A H halmaz *korlátos*, ha van olyan k szám, hogy $\|a\| < k$ fennáll minden $a \in H$ esetén.

A $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *kompakt*, ha korlátos és zárt.

A $H \subset \mathbb{R}^n$ *lineáris tér*, ha a lineáris kombinációra nézve zárt: $a_1, a_2 \in H$ maga után vonja, hogy $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 \in C$ minden $\mu_1, \mu_2 \in R$ esetén.

Az $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha lineáris kombinációjuként a 0 vektor csak azonosan 0 együtthatókkal áll elő: $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i$ esetén.

Az $a_1, a_2, \dots, a_k \in H \subset \mathbb{R}^n$ a H lineáris tér *bázisa*, ha a_1, a_2, \dots, a_k lineárisan függetlenek és H minden eleme előáll az a_1, a_2, \dots, a_k vektorok lineáris kombinációjaként: $a \in H$ maga után vonja, hogy $\exists \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, hogy $a = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k$.

Az $a_1, a_2 \in H$ pontokat összekötő *szakasz* a $\{a \mid a = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ halmaz.

A H halmaz *konvex*, ha bármely két elemével együtt az azokat összekötő szakaszt is tartalmazza.

Az a legszűkebb konvex halmaz, amely tartalmazza a H halmazt, H *konvex burka*.

Legyen $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0, \alpha \in R$. Az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \alpha\}$ halmaz *hipersík*.

Legyen $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0, \alpha \in R$. Az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \leq \alpha\}$ és $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \geq \alpha\}$ halmazok *zárt félterek*.

Legyen $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0, \alpha \in R$. Az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx < \alpha\}$ és $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx > \alpha\}$ halmazok *nyílt félterek*.

(1) A H halmaz konvex akkor és csak akkor, ha bárhogyan is választjuk ki az $a_1, a_2, \dots, a_k \in H$ pontokat, azok bármely konvex lineáris kombinációja is eleme a H halmaznak: $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in H$, ha $\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k)$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

(2) Konvex halmazok metszete konvex.

(3) A hipersík konvex halmaz.

(4) A félterek konvex halmaz.

Bizonyítás.

(1) A feltétel teljesülése esetén a H halmaz konvex, hiszen a feltétel teljesül $k = 2$ esetén is, ez pedig a konvex halmaz definíciója. Belátjuk most, hogy ha H konvex, akkor $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in H$, $(\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1)$, a H szóbanforgó elemeinek k számára vonatkozó teljes indukcióval. Az állítás igaz, a konvex halmaz definíciója szerint, $k = 2$ -re. Tegyük fel, hogy igaz $k - 1$ -re, belátjuk, hogy akkor igaz k -ra is. Ha $\lambda_k = 1$, az állítás igaz, mert $a_k \in H$. Tegyük fel, hogy $\lambda_k < 1$. Ekkor $1 - \lambda_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i > 0$. Az indukciós feltevés miatt

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} a_i \in H, \text{ mivel } \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} \geq 0, (i = 1, \dots, k - 1), \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} = 1.$$

Ekkor azonban az $a = \lambda_k a_k + (1 - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} a_i$ vektor szintén eleme a H halmaznak a H konvexitása miatt.

(2). Legyen $x_1, x_2 \in \bigcap H_\gamma$, H_γ ($\gamma \in \Gamma$) konvex halmazok. Legyen $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $1 \geq \lambda \geq 0$. Mivel x_1, x_2 minden H_γ halmaznak eleme és H_γ konvex, ezért x eleme e halmazok mindegyikének és ily módon metszetüknek is.

(3) Legyen $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \alpha\}$, legyen $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $1 \geq \lambda \geq 0$. Akkor $cx = \lambda cx_1 + (1 - \lambda)cx_2 = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$, azaz $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \alpha\}$.

(4) Legyen $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \geq \alpha\}$, legyen $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $1 \geq \lambda \geq 0$. Akkor $cx = \lambda cx_1 + (1 - \lambda)cx_2 \geq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$, azaz $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \geq \alpha\}$. \square

Egy $a \in H$ a H konvex zárt halmaz *csúcspontja* vagy *extrémális pontja*, ha a nem írható fel H a -tól különböző elemeinek konvex lineáris kombinációjaként.

Az \mathbb{R}^n véges számú elemének konvex burkát *poliédernek* nevezzük.

Véges számú zárt féltér metszetét *poliedrikus halmaznak* nevezzük.

Vegyük észre, hogy a poliéder a csúcspontjainak konvex burka.

A $H \subset \mathbb{R}^n$ konvex kúp, ha a nemnegatív kombinációra nézve zárt: $a_1, a_2 \in H$ maga után vonja, hogy $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 \in C$ minden $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ esetén.

Az alábbi állítást bizonyítás nélkül közöljük.

5. Állítás Az \mathbb{R}^n tér véges számú eleme által generált konvex kúp zárt halmaz.

6. Állítás Legyen $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$.

2.1. ábra.

(1) A $H = \{a \in \mathbb{R}^n \mid a = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k, \mu_j \geq 0 (j = 1, \dots, k)\}$ halmaz konvex kúp.

(2) A $G = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y a_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, k\}$ halmaz konvex kúp.

Bizonyítás. (1) Legyen $H \ni a' = \mu'_1 a_1 + \mu'_2 a_2 + \dots + \mu'_k a_k, \mu'_i \geq 0 (i = 1, \dots, k)$, $H \ni a'' = \mu''_1 a_1 + \mu''_2 a_2 + \dots + \mu''_k a_k, \mu''_i \geq 0 (i = 1, \dots, k)$. Akkor $a' + a'' = (\mu'_1 + \mu''_1) a_1 + \dots + (\mu'_k + \mu''_k) a_k \in H$ és $\mu \mu'_1 a_1 + \mu \mu'_2 a_2 + \dots + \mu \mu'_k a_k \in H$, ha $\mu \geq 0$, mert ekkor $\mu \mu'_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$.

(2) Legyenek $y_1, y_2 \in G$. Ekkor $(y_1 + y_2) a_j = y_1 a_j + y_2 a_j \leq 0$, vagyis $y_1 + y_2 \in G$. Továbbá, $\mu y_1 a_j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, k)$, azaz $\mu y_1 \in G$. \square

Az előző állításban szereplő G kúpot a H kúp *polárisának* nevezzük, jelölése: $G = H^-$. A két kúpnak szemléletes geometriai tartalom adható, amely implicálja azt az - alább a Farkas tételben bizonyított - megállapítást, hogy az \mathbb{R}^n egy a vektora vagy benne van a H kúpban, vagy a polárisának van olyan y eleme, amely a -val hegyesszöget zár be, amint ezt az alábbi ábra mutatja.

Vegyük észre, hogy G -vel együtt az αG halmaz is konvex kúp minden $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett.

Vegyük észre, hogy az, hogy a kanonikus alakú lineáris programozási feladat

2.2.~ábra.

feltételeit kielégítő megoldás létezik azt jelenti, hogy a jobboldalon lévő m -komponensű b vektor benne van az A mátrix A^1, \dots, A^n oszlopvektorai által generált konvex kúpban.

Legyen H és G két nemüres halmaz \mathbb{R}^n -ben. Az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \alpha\}$ hipersíkot H -t és G -t (szigorúan) elválasztó hipersíknak nevezzük, ha

$$x \in H \Rightarrow cx \leq \alpha \quad (cx < \alpha)$$

$$x \in G \Rightarrow cx \geq \alpha \quad (cx > \alpha)$$

A következő állítás azt mondja ki, hogy egy zárt konvex halmaz és egy, a halmazhoz nem tartozó pont szigorúan elválasztható.

7. Állítás (Szeparációs tétel): Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ zárt konvex nemüres halmaz és $\hat{x} \in \mathbb{R}^n \setminus H$. Akkor létezik olyan $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \alpha\}$ halmaz a H halmazt és az \hat{x} pontot szigorúan elválasztó hipersík.

Bizonyítás. Legyen $D_\rho(\hat{x}) = \{x \mid \|x - \hat{x}\| \leq \rho\}$ az \hat{x} ρ -sugarú zárt környezete.

Válasszuk ρ -t úgy, hogy $D_\rho(\hat{x}) \cap H \neq \emptyset$. Mivel $\|x - \hat{x}\|$ folytonos függvény, ezért felveszi a minimumát az \mathbb{R}^n korlátos és zárt, azaz kompakt $D_\rho(\hat{x}) \cap H$ részhalmazának egy pontjában, legyen ez a pont x° . A minimum értéke:

$$\|x^\circ - \hat{x}\| > 0, \text{ mert } \hat{x} \notin H.$$

A tételt azzal bizonyítjuk, hogy belátjuk, $c = x^\circ - \hat{x}$ és egy alkalmas α érték az állításban szereplő elválasztó hipersíkot határoz meg. Legyen $x \in H$ tetszőleges pont.

H konvex volta miatt $\lambda x + (1 - \lambda)x^\circ \in H$ ha $0 \leq \lambda \leq 1$, és a

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)x^\circ - \hat{x}\| \geq \|x^\circ - \hat{x}\|$$

egyenlőtlenség fennáll minden $0 \leq \lambda \leq 1$ értékre. Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda^2(x - x^\circ)^2 + 2\lambda(x - x^\circ)(x^\circ - \hat{x}) + (x^\circ - \hat{x})^2 &\geq (x^\circ - \hat{x})^2 \\ \lambda[2(x - x^\circ)(x^\circ - \hat{x}) + \lambda(x - x^\circ)^2] &\geq 0. \end{aligned}$$

Mivel ez utóbbi egyenlőtlenség baloldalán λ szorzója λ -nak lineáris függvénye, az egyenlőtlenség csak akkor állhat fenn minden $0 < \lambda < 1$ értékre is, ha a lineáris függvény konstans tagja nemnegatív:

$$(x - x^\circ)(x^\circ - \hat{x}) \geq 0, \text{ azaz } x(x^\circ - \hat{x}) \geq x^\circ(x^\circ - \hat{x}).$$

Mivel

$$(x^\circ - \hat{x})(x^\circ - \hat{x}) > 0, \text{ ezért } x^\circ(x^\circ - \hat{x}) > \hat{x}(x^\circ - \hat{x}).$$

Válasszuk c -t és α -t a következőképpen:

$$c = x^\circ - \hat{x} \neq 0, \alpha = \frac{x^\circ(x^\circ - \hat{x}) + \hat{x}(x^\circ - \hat{x})}{2}.$$

Azt kaptuk, hogy $cx > \alpha > c\hat{x}$ minden $x \in H$ esetén, azaz az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid cx = \alpha\}$ a H halmazt és az \hat{x} pontot szigorúan elválasztó hipersík. \square

8. Állítás (Farkas tétel): A következő két feladat közül az egyik és csak az egyik oldható meg.:

$$(a) \quad Ax = b, x \geq 0$$

$$(b) \quad yA \geq 0, \quad yb < 0$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a két feladat egyidejűleg nem oldható meg. Tegyük fel ugyanis az állítással ellentétben, hogy az \hat{x} és \hat{y} vektorokra fennáll, hogy $A\hat{x} = b, \hat{x} \geq 0$ és $\hat{y}A \geq 0, \hat{y}b < 0$. Akkor $\hat{y}A\hat{x} = \hat{y}b < 0$, miközben $\hat{y}A\hat{x} \geq 0$, ami ellentmondás.

Másodszor: tegyük fel, hogy nincs megoldása az $Ax = b, x \geq 0$ feladatnak, vagyis b nem állítható elő A oszlopvektorai nemnegatív kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy a b vektor nincs benne az A^1, \dots, A^n oszlopvektorok által generált konvex zárt kúpban. A szeparációs tétel szerint akkor létezik a b vektort és az A^1, \dots, A^n oszlopvektorok által generált kúpot szigorúan elválasztó hipersík:

$$\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0 \text{ és } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ hogy } yb < \alpha \text{ és } ya > \alpha \text{ minden } a \in \{a \mid a = Ax, x \geq 0\} \text{ esetén.}$$

Mivel az A oszlopvektorai által generált kúpnak az A^j oszlopvektorok is elemei és az $a = 0$ vektor is eleme, ezért $yA^j > \alpha, j = 1, \dots, n$ és $\alpha < y0 = 0$. Így $yb < 0$. Az α negatív volta önmagában még nem zárja ki, hogy valamely rögzített j indexre yA^j negatív legyen. De A^j -vel együtt annak minden nemnegatív δ -szorosa is eleme a kúpnak, ezért ha $yA^j < 0$, akkor δyA^j tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív szám lehet, vagyis α -nál kisebb lesz, ha δ elég nagy. Ez ellentmondásban van azzal, hogy $yAx > \alpha$ minden $x \geq 0$ mellett, beleértve azt az x vektort is, amelynek j -edik komponense 1, a többi 0.

Tehát az y vektorra fennáll, hogy $yA \geq 0$ és $yb < 0$, ami éppen a tétel állítása. \square

2.4. Az LP feladat megoldásairól.

Megállapítottuk, hogy minden lineáris programozási feladat ekvivalens átalakítás eredményeként kanonikus feladattá válhat és fordítva, minden kanonikus feladat

bármilyen más formában is megfogalmazható. Elegendő tehát a kanonikus feladatot vizsgálnunk ahhoz, hogy az LP feladatokra vonatkozó általános észrevételeket tehessünk, amint az itt következik. A

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \max \\ Ax &= b, x \geq 0 \end{aligned}$$

LP feladat *lehetséges* vagy *megengedett megoldásainak* nevezzük azokat az x vektorokat, amelyek a feltételeket kielégítik.

Az LP feladat *célfüggvénye* az optimalizálandó: maximalizálandó (más esetben minimalizálandó) cx lineáris függvény.

Az LP feladat *optimális megoldásainak* nevezzük azokat az x vektorokat, amelyek a lehetséges megoldások halmazán a célfüggvényt maximalizálják.

A feladat egy *lehetséges bázisa* az A mátrix oszlopvektorainak olyan összessége, amely egyrészt bázisa az A oszlopvektorai által generált lineáris térnek, másrészt azok az együtthatók, amelyekkel a b vektor egyértelműen felírható ezen oszlopvektorok lineáris kombinációjaként, nemnegatívak.

A feladat *bázismegoldásainak* nevezzük azokat az x vektorokat, amelyek pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorai az A mátrixnak lineárisan függetlenek. Egy *bázismegoldás degenerált*, ha a szóbanforgó oszlopvektorok az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített lineáris térnek egy valódi alterét generálják.

9. Állítás A lehetséges megoldások $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ halmaza konvex.

Bizonyítás. Mivel az egyenletrendszer megoldáshalmaza: az $\{x \mid Ax = b\} = \bigcap_{i=1}^m \{x \mid A_i x = b_i\}$ halmaz hipersíkok metszete, ezért konvex. Konvex továbbá az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ halmaz is, mert metszete az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid e_i x \geq 0\}, i = 1, \dots, n$ féltereknek, ahol e_i az i -dik egységvektor. Így konvex az

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\} \cap \{x \mid Ax = b\}$$

halmaz is. \square

Vegyük észre, hogy az optimális megoldások halmaza, ha nemüres, szintén végeesszámú hipersík és a nemnegatív térnegyed közös része:

$$L_{opt} = \{x \mid Ax = b, cx = \gamma_0, x \geq 0\},$$

ahol γ_0 az optimális célfüggvényértéket jelöli. Ezt foglalja össze az alábbi

10. Állítás Az optimális megoldások halmaza konvex.

A következő állítást fontossága miatt kiemeljük, de tartalma nyilvánvaló, hiszen a Weierstrass tétel értelmében az \mathbb{R}^n korlátos zárt részhalmazán folytonos függvény felveszi a minimumát is és a maximumát is.

11. Állítás Ha a lehetséges megoldások halmaza korlátos, akkor az LP feladatnak van optimális megoldása.

A lehetséges és optimális megoldások elhelyezkedését illusztrálja az alábbi példa.

Példa Tekintsük a következő kétváltozós feladatokat és vizsgáljuk a lehetséges és optimális megoldások halmazát különböző esetekben.

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & \rightarrow & \max \\ (1) & -x_1 & +x_2 & \leq 1, \\ (2) & x_1 & +x_2 & \leq 4, \\ (3) & -x_1 & +2x_2 & \geq -2, \\ (4) & 3x_1 & +x_2 & \geq 3, \\ (5) & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Ábrázoljuk a lehetséges megoldások halmazát (3. ábra):

(a) A lehetséges megoldások L halmaza korlátos, nemüres, poliéder. Az optimális megoldások halmaza egyetlen csúcspont, az $x_1 + x_2 = 4$ és az $x_1 - 2x_2 = 2$ egyenesek metszéspontja: $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$.

(b) Változtassuk meg a célfüggvényt. Legyen a maximalizálandó célfüggvényünk: $x_1 + x_2$. Ekkor az optimális megoldások halmaza az L halmaz egy határoló szakasza: az $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$ pontot az $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}$ ponttal összekötő szakasz.

2.3. ~ábra.

(c) Az eredeti feladat (2) feltételét változtassuk meg, legyen az új (2) feltétel a következő: $x_1 + x_2 \leq 0,9$. Ekkor a lehetséges megoldások halmaza és így természetesen az optimális megoldások halmaza is üres.

(d) Hagyjuk el a (2) feltételt teljes egészében. Ekkor a lehetséges megoldások halmaza a 4. ábrán látható nem korlátos poliedrikus halmaz:

A célfüggvény tetszőlegesen nagy értéket felvehet, vagyis nem korlátos a lehetséges megoldások L halmazán, ezért az optimális megoldások halmaza üres.

(e) Hagyjuk el a (2) feltételt teljes egészében, és változtassuk meg a célfüggvényt. Legyen az új maximalizálandó célfüggvény $-x_1 + x_2$. Ekkor az optimális megoldások halmaza az L halmazt határoló azon félegyenes, amely az $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ csúcsból indul és iránytangense 1.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy kétváltozós esetben a lehetséges megoldások halmaza lehet üres, lehet nemüres korlátos poliéder, illetve nemüres nem korlátos: poliedrikus halmaz. Az optimális megoldások halmaza lehet üres, lehet egyetlen csúcs, lehet szakasz, vagy félegyenes, de az optimális megoldások között mindegyik esetben van csúcs.

A következőkben a kétváltozós esetben tett észrevételeinket általánosítjuk. Először

2.4.~ábra.

a feladat bázismegoldásaival azonosítjuk a lehetséges megoldások L halmazának csúcspontjait. Célunk az, hogy megmutassuk: ha a feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is - ez a következő fejezet utolsó állítása lesz és egyben a konklúzió. A következő állításban egy észrevételt fogalmazzunk meg.

12. Állítás Tekintsük az $Ax = b, x \geq 0$ feladat egy $x = (x_1, \dots, x_n)$ megoldását.

Ha x pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorok lineárisan összefüggnek, akkor meghatározható egy olyan másik \hat{x} megoldás, amelynek komponensei 0-k ott, ahol x komponensei 0-k és a pozitív komponenseinek száma legalább eggyel kevesebb.

Az egyszerűség kedvéért (de az általánosság megszorítása nélkül) feltesszük, hogy x minden komponense pozitív. Az állításban szereplő feltevés szerint az A mátrix oszlopvektorai lineárisan összefüggnek. Ekkor $\exists s = (s_1, \dots, s_n)$, nem mind 0 komponensekkel, hogy

$$\sum_{j=1}^n A^j s_j = 0.$$

Feltehetjük, hogy az s vektornak van pozitív eleme. (Ha nem lenne, az összeg minden

tagját megszorozzuk -1 -gyel.) Legyen

$$0 < \delta = \min_{s_j > 0} \frac{x_j}{s_j}$$

és tegyük fel (az általánosság megszorítása nélkül), hogy

$$\delta = \frac{x_n}{s_n}.$$

Ekkor

$$\hat{x} = x - \delta s = (x_1 - \delta s_1, \dots, x_n - \delta s_n) \geq 0, \sum_j A^j (x_j - \delta s_j) = b,$$

vagyis \hat{x} megoldás, de $\hat{x}_n = 0$. Így \hat{x} eggyel kevesebb pozitív komponenst tartalmaz.

□

13. Állítás Ha a $cx \rightarrow \max$, $Ax = b$, $x \geq 0$ kanonikus feladatnak van lehetséges megoldása, akkor van lehetséges bázismegoldása is.

Bizonyítás. Az állítást az A mátrix oszlopvektorai (a változók) n számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n = 1$ -re az állítás igaz. Tegyük fel, hogy tetszőleges $n > 1$ esetén igaz $k < n$ -re, belátjuk, hogy akkor igaz $k = n$ -re is. Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ lehetséges megoldás:

$$\sum_{j=1}^n A^j x_j = b, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0.$$

1. eset: x komponensei között van 0. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_n = 0$. Ekkor az $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ lehetséges megoldása az $n - 1$ oszlopvektort tartalmazó $\sum_{j=1}^{n-1} A^j x_j = b, x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \geq 0$ feladatnak, az állítás tehát igaz az indukciós feltevés miatt.

2. eset: $x_j > 0, j = 1, \dots, n$. Ha az oszlopvektorok lineárisan függetlenek, akkor x bázismegoldás, készen vagyunk. Ha az oszlopvektorok lineárisan összefüggnek, akkor az előző állítás értelmében redukálhatjuk a feladatot n -nél kevesebb oszlopvektort tartalmazó feladatra, amelyre pedig állításunk az indukciós feltevés miatt igaz. □

A lehetséges megoldások illetve optimális megoldások halmazának egy fontos tulajdonságát mutatja be a következő állítás.

14. Állítás Az x csúcspontja az $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ halmaznak akkor és csak akkor, ha x bázismegoldás.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy x csúcspont, ha x bázismegoldás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy x bázismegoldás, de nem csúcspont. Akkor léteznek olyan $\mathbb{R}^n \ni x^1, x^2, x^1 \neq x^2 \neq x$ lehetséges megoldások, hogy $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, $0 < \lambda < 1$. Ha $x_j = 0$, akkor $x_j^1 = 0$ és $x_j^2 = 0$ hiszen $x, x^1, x^2 \geq 0$. Ezért x^1 és x^2 pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorok szintén lineárisan függetlenek, tehát x^1 és x^2 bázismegoldások, ellentmondásban azzal, hogy minden vektor, így b is, csak egyféleképpen írható fel lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként.

Másodszor: belátjuk, hogy x bázismegoldás, ha x csúcspont. Ismét tegyük fel az állítással ellentétben, hogy x csúcspont, de nem bázismegoldás. Legyen az x első r komponense pozitív, $r \leq n$. Ekkor fennáll, hogy

$$A^1 x_1 + \dots + A^r x_r = b, x_j > 0, \text{ ha } j = 1, \dots, r$$

és létezik olyan $s = (s_1, \dots, s_r, s_{r+1}, \dots, s_n)$ vektor, amelyben $s_j = 0$, ha $j = r + 1, \dots, n$; s_1, \dots, s_r nem mind 0, közülük legalább egy komponens pozitív és

$$A^1 s_1 + A^2 s_2 + \dots + A^r s_r = 0.$$

Legyen $\delta_1 = \min_{s_j > 0} \frac{x_j}{s_j}$, $\delta_2 = \min_{s_j < 0} (\frac{-x_j}{s_j})$, ez utóbbi δ_1 , ha s -nek nincs negatív komponense. Legyen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ekkor

$$\begin{aligned} x^1 &= x - \delta s = (x_1 - \delta s_1, \dots, x_n - \delta s_n) \geq 0, x^2 = x + \delta s = (x_1 + \delta s_1, \dots, x_n + \delta s_n) \geq 0, \\ Ax^1 &= A(x - \delta s) = b - \delta 0 = b, Ax^2 = A(x + \delta s) = b + \delta 0 = b, \end{aligned}$$

vagyis $x - \delta s$ és $x + \delta s$ lehetséges megoldások és $x = \frac{x^1 + x^2}{2}$, ellentmondásban azzal a feltevessel, hogy x csúcspontja a lehetséges megoldások halmazának. \square

Mivel az A mátrix oszlopvektorai közül véges számú: legfeljebb $\binom{n}{m}$ számú lineárisan független rendszert alkotó halmaz választható ki, ezért a bázismegoldások száma, egyúttal a lehetséges megoldások L halmazának csúcspontjainak száma is szükségképpen véges. Ha tehát az LP feladat lehetséges megoldásainak halmaza korlátos, akkor e halmaz poliéder.

3. fejezet

Dualitás, optimalitás.

3.1. Dualitás, optimalitás.

A kanonikus alakú LP feladat és duálisa közötti kézenfekvő kapcsolatot írja le az alábbi

15. Állítás (Gyenge dualitási tétel): (1) Ha \hat{x} a primál és \hat{y} a duális feladat lehetséges megoldása, akkor fennáll a $c\hat{x} \leq \hat{y}b$ összefüggés. (2) Ha $c\hat{x} = \hat{y}b$, akkor \hat{x} a primál és \hat{y} a duális feladat optimális megoldása.

Bizonyítás. (1) Tegyük fel, hogy \hat{x} és \hat{y} kielégítik a primál illetve a duál feltételeket. Szorozzuk meg \hat{y} -nal a primál feladat egyenletrendszerét. Szorozzuk meg \hat{x} -val a duális feladat egyenlőtlenségrendszerét. Mivel \hat{x} komponensei nem-negatívok, ezért az egyenlőtlenség iránya a szorzással nem változik. Azt kapjuk, hogy

$$c\hat{x} \leq \hat{y}A\hat{x} = \hat{y}b.$$

(2) Minthogy a $c\hat{x} \leq \hat{y}b$ egyenlőtlenség fennáll tetszőleges \hat{x} primál és \hat{y} duális lehetséges megoldásra, ezért ha két lehetséges megoldásra a célfüggvényértékek egyenlők, ez csak úgy lehet, ha mindkettő optimális megoldás. \square

Egy másik fontos összefüggés a Farkas tételből azonnal következik, nevezetesen az, hogy ha a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor a duális feladatnak

nincs optimális megoldása. Tegyük fel ugyanis, hogy nincs megoldása az $Ax = b, x \geq 0$ feladatnak. Ha a duális feladatnak sincs lehetséges megoldása, akkor optimális sem lehet, tehát készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy a duális feladatnak van lehetséges \hat{y} megoldása. Mivel $\exists \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, a Farkas tétel szerint, amelyre $\tilde{y}A \geq 0, \tilde{y}b < 0$ fennáll, és mivel $\hat{y} + \lambda\tilde{y}$ is lehetséges megoldása a duális feladat minden pozitív λ -érték mellett, ezért a duális feladat célfüggvénye tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív szám lehet a λ értékétől függően - azaz a duális feladat célfüggvénye nem veszi fel a minimumát a lehetséges megoldások halmazán, mivel alulról nem korlátos.

Ezt az állítást is magában foglalja a következő tétel.

Dualitási tétel: (1) Ha mind a primál, mind a duális feladatnak van lehetséges megoldása, akkor mindkettőnek van optimális megoldása és az optimális célfüggvényértékek megegyeznek. (2) Ha az egyiknek nincs lehetséges megoldása, akkor a másiknak nincs optimális megoldása.

Bizonyítás. A (2) állítást beláttuk abban az esetben, amikor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása. Mivel azonban a primál feladat a duális feladat duálja, ezért a másik irányú állítás nem igényel bizonyítást.

Az (1) állítás igazolásához azt kell belátnunk, hogy amennyiben a primál-duál feladatpár mindegyikének létezik lehetséges megoldása, akkor létezik olyan lehetséges (\hat{x}, \hat{y}) megoldaspár, amelyre fennáll a $c\hat{x} - \hat{y}b \geq 0$ egyenlőtlenség, amely a gyenge dualitási tétel értelmében csak egyenlőséggel teljesülhet. Azt látjuk tehát be, hogy ha az

$$Ax = b, x \geq 0, yA \geq c$$

feladat megoldható, akkor megoldható az

$$Ax = b, x \geq 0, yA \geq c, cx - yb \geq 0$$

feladat is.

A bizonyítás indirekt módon történik. Feltesszük, hogy az $Ax = b, x \geq 0, yA \geq c, cx - yb \geq 0$ feladat nem oldható meg, és a Farkas tétel felhasználásával ellentmondásra jutunk abban az esetben, amikor az $Ax = b, x \geq 0, yA \geq c$ feladat megoldható. Ez utóbbi feladatnak rögzítjük is egy megoldását, jelölje ezt (\hat{x}, \hat{y}) .

Az $Ax = b, x \geq 0, yA \geq c, cx - yb \geq 0$ feladatot írjuk fel olyan egységes formában, amelyre a Farkas tétel alkalmazható. Ehhez először írjuk fel olyan ekvivalens formában, amelyben a változók nemnegativitását előírjuk. Figyelembe véve, hogy minden vektor előáll két nemnegatív vektor különbségeként úgy, hogy a második azonos komponenseket tartalmaz, alkalmazzuk az $y = y' - y^\circ$ helyettesítést, ahol $y' = (y'_1, \dots, y'_m)$ és $y^\circ = (y_{\circ}, \dots, y_{\circ})$ m -komponensű vektorok, és a változók vektorával szorozzuk jobbról. Ekkor a feladat a következő lesz:

$$Ax = b, x \geq 0, A^T(y' - y^\circ) \geq c, cx - b(y' - y^\circ) \geq 0, y' \geq 0, y_{\circ} \geq 0.$$

Itt A^T az A mátrix transzponáltját jelöli. Bevezetünk egy n -komponensű u vektort és egy u_{\circ} változót abból a célból, hogy egyenletrendszert kapjunk. Azt a vektort, amelynek minden komponense 1, e -vel jelöljük és így y° felírható ey_{\circ} formában.

$$\begin{aligned} Ax &= b, x \geq 0, A^T y' - A^T e y_{\circ} - u = c, cx - b y' - b e y_{\circ} - u_{\circ} = 0, \\ y' &\geq 0, y_{\circ} \geq 0, u \geq 0, u_{\circ} \geq 0. \end{aligned}$$

Végül írjuk fel azt a mátrixot, amelyet jobbról a változók $(x, y', y_{\circ}, u, u_{\circ})$ nemnegatív vektorával szorzunk

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^T & -A^T e & -E & 0 \\ c & -b & b e & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E jelölésekkel a fenti egyenlőtlenségrendszer így írható fel:

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y' \\ y_{\circ} \\ u \\ u_{\circ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y' \\ y_{\circ} \\ u \\ u_{\circ} \end{pmatrix} \geq 0.$$

A Farkas tétel értelmében ennek a feladatnak akkor és csak akkor van megoldása, ha nincs olyan $z = (z^1, z^2, \tau) \in \mathbb{R}^m$ vektor, $z^1 \in \mathbb{R}^m, z^2 \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}$, amely megoldaná a

$$zA' \geq 0, z \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} < 0$$

egyenlőtlenség rendszert, amely részletesebben így írható fel:

$$\begin{aligned} z^1 A + \tau c &\geq 0 \\ Az^2 - \tau b &\geq 0 \\ -Az^2 e + \tau eb &\geq 0 \\ z^1 b + z^2 c &< 0 \\ -z^2 &\geq 0, -\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Kis átalakítással ebből az alábbi feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned} z^1 A &\geq -\tau c \\ Az^2 &= \tau b \\ z^1 b + z^2 c &< 0 \\ -z^2 &\geq 0, -\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Szorozzuk meg z^2 -vel az első feltételcsoportot alkotó egyenlőtlenségrendszer mindkét oldalát. Mivel $z^2 \leq 0$, ezért az egyenlőtlenség iránya megváltozik. Szorozzuk meg z^1 -gyel a második feltételcsoportot alkotó egyenletrendszer mindkét oldalát. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -z^1 Az^2 &\geq \tau cz^2 \\ z^1 Az^2 &= \tau bz^1. \end{aligned}$$

E két feltételből következik, hogy a (z^1, z^2, τ) megoldásra fennállna a $\tau(z^1 b + z^2 c) \leq 0$ egyenlőtlenség. Ez azonban lehetetlen. Ha ugyanis $\tau < 0$, akkor $\tau(z^1 b + z^2 c) > 0$ az

utolsó feltétel miatt. Ha $\tau = 0$, akkor a következőképpen járunk el. Szorozzuk meg az $A\hat{x} = b$ egyenletrendszert z^1 -gyel, illetve a $z^1 A \geq -\tau c$ egyenlőtlenségrendszert a nemnegatív \hat{x} vektorral. Ezután szorozzuk meg az $\hat{y}A \geq c$ egyenlőtlenségrendszert a nempozitív z^2 vektorral, illetve az $Az^2 = \tau b$ egyenletrendszert \hat{y} -vel. Mivel $\tau = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} z^1 A \hat{x} &= z^1 b \geq -\tau c \hat{x} = 0 \Rightarrow z^1 b \geq 0 \text{ és} \\ 0 &= \hat{y} \tau b = \hat{y} A z^2 \leq c z^2 \Rightarrow z^2 c \geq 0, \end{aligned}$$

azaz $z^1 b + z^2 c \geq 0$, ismét ellentmondásban az utolsó egyenlőtlenséggel. Ezzel belát-

tuk, hogy nem megoldható a $z A' \geq 0, z \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} < 0$ feladat, vagyis megoldható, a

Farkas tétel értelmében, az $Ax = b, x \geq 0, yA \geq c, cx - yb \geq 0$ feladat, ami éppen a tétel állítása. \square

A dualitási tétel következménye, de önmagában is gyakran hivatkozott fontos tétel az alábbi.

Egyensúlyi (komplementaritási) tétel: Egyensúlyi (komplementaritási) tétel: Legyen

\hat{x} lehetséges megoldása a primál feladatnak, \hat{y} a duális feladatnak. Az \hat{x} optimális megoldása a primál feladatnak és \hat{y} optimális megoldása a duális feladatnak akkor és csak akkor, ha $\hat{y}A^j > c_j$ maga után vonja, hogy $\hat{x}_j = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\hat{x}_j = 0$ teljesül minden olyan j indexre, amelyre $\hat{y}A^j > c_j$. Akkor $\hat{x}_j > 0$ maga után vonja, hogy $\hat{y}A^j = c_j$. Ezért

$$c\hat{x} = \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{j:\hat{x}_j>0} c_j \hat{x}_j = \sum_{j=1}^n \hat{y}A^j \hat{x}_j = \hat{y} \sum_{j=1}^n A^j \hat{x}_j = \hat{y}A\hat{x} = \hat{y}b,$$

azaz \hat{x} és \hat{y} optimális megoldások a dualitási tétel értelmében.

Tegyük fel másodszor, hogy \hat{x} és \hat{y} optimális megoldások, akkor

$$0 = c\hat{x} - \hat{y}b = \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j - \hat{y} \sum_{j=1}^n A^j \hat{x}_j = \sum_{j=1}^n (c_j - \hat{y}A^j) \hat{x}_j.$$

Mivel \hat{x} és \hat{y} lehetséges megoldások, ezért $c_j - \hat{y}A^j \leq 0$ és $\hat{x}_j \geq 0$, szorzatuk tehát nempozitív. $\sum_{j=1}^n (c_j - \hat{y}A^j)\hat{x}_j$ tehát nempozitív tagok összege, ez az összeg 0 csak akkor lehet, ha minden tagja 0. Így $\hat{x}_j = 0$ kell, hogy teljesüljön minden olyan j indexre, amelyre $\hat{y}A^j > c_j$.

Ezzel a tételt bizonyítottuk. \square

Végül, a következő állítás felhatalmazást ad arra, hogy a $cx \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0$ feladat optimális megoldását a bázismegoldások között keressük.

16. Állítás: Ha az LP feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is.

Bizonyítás. Legyen \hat{x} optimális és a pozitív komponensekhez tartozó oszlopvektorok legyenek az A^1, A^2, \dots, A^k . Ha \hat{y} a duális feladat optimális megoldása, akkor a komplementaritási tétel értelmében $\hat{y}A^j = c_j, j = 1, \dots, k$. Ha A^1, \dots, A^k lineárisan függetlenek, akkor \hat{x} optimális bázismegoldás. Ha A^1, \dots, A^k lineárisan összefüggnek, akkor létezik olyan x' lehetséges megoldás, amelynek pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorok A^1, \dots, A^k egy független részhalmazát alkotják. De x' is optimális, mert x' és \hat{y} együtt szintén teljesítik a komplementaritási tétel feltételeit. \square

4. fejezet

A lineáris programozási feladat megoldása

4.1. A szimplex módszer.

A dualitási tétel segítségével beláttuk, hogy ha az LP feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is. Ez a feladat numerikus megoldása, megoldhatósága szempontjából nagy jelentőséggel bír, mert lehetőséget nyújt arra, hogy csak bázismegoldásokat vizsgáljunk. Ez azt jelenti, hogy ha a megoldás menetében bázismegoldások sorozatát építjük fel és gondoskodunk arról, hogy egy már vizsgált bázismegoldás az eljárás során ne ismétlődhessen, akkor az eljárás véges számú lépésben befejeződik. Az alább leírt szimplex algoritmus azonban csak arról gondoskodik, hogy olyan bázismegoldások sorozatát hozza létre, amelyek elemeihez tartozó célfüggvényérték monoton növekvő, de nem szükségképpen szigorúan növekvő, így nem zárja ki a "végtelen ciklus" lehetőségét: azt, hogy egy degenerált bázismegoldás az eljárás során ismétlődjék. Megjegyezzük, hogy az eljárásba beépíthetők olyan óvintézkedések, amelyek kizárják ezt a lehetőséget, ilyen eljárás pl. a lexikografikus szimplex módszer. Két oka van annak, hogy ezt itt nem tárgyaljuk. Az egyik az, hogy ezek az aprólékos óvintézkedések talán elvonnák az olvasó érdeklődését és megnehezítenék, hogy a módszer gondolatmenetének, logikájának kellő figyelmet szenteljen. A másik az a szimplex módszerrel szerzett több évtizedes tapasztalat, hogy

az eljárás ezen okból nem kerül végtelen ciklusba. A szimplex módszer irodalmában ismeretesek olyan konstruált példák, amelyekben az eljárás végtelen ciklusba torkollik, de gyakorlati feladatok megoldása során erre nem került sor, legalábbis ezen okból nem.

A $cx \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0$ kanonikus alakú lineáris programozási feladat megoldására szolgál a szimplex módszer. Az LP feladat megoldására szolgáló módszerek közül e módszer és változatai a legnépszerűbbek, a matematikai programozási szoftvercsomagok is rendszerint a szimplex módszert foglalják magukban LP feladatok megoldására.

A feladatot a

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \max, \\ Ax &= b, \quad z - cx = 0, x \geq 0 \end{aligned}$$

formában írjuk fel. A $z - cx = 0$ feltételt célfüggvénysornak szokták nevezni, a z változó aktuális értéke láthatóan az aktuális $x = (x_1, \dots, x_n)$ megoldáshoz tartozó célfüggvényérték.

Feltesszük, az általánosság megszorítása nélkül, hogy a feladat lehetséges bázisa annyi oszlopvektorból áll, amennyi a sorok száma. A szimplex tábla az első és minden közbeeső iterációban ilyen szerkezetű:

	x_j	b
x_{k_1}	t_{11}	t_{1j}	t_{10}
...	
...	
x_{k_m}	t_{m1}	t_{mj}	t_{m0}
z	t_{01}	t_{0j}	t_{00}

Itt $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$ azokat a változókat jelölik, amelyekhez tartozó oszlopvektorok a z változóhoz tartozó $m + 1$. oszlopvektorral együtt alkotják az aktuális bázist.

A táblázat j . oszlopának elemei az $\begin{bmatrix} A^j \\ -c_j \end{bmatrix}$ vektor koordinátái ebben a bázisban ($j=1, \dots, n$), a 0. (azaz utolsó) oszlop elemei a $\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor koordinátái:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A^j \\ -c_j \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^m t_{ij} \begin{bmatrix} A^{k_i} \\ -c_{k_i} \end{bmatrix} + t_{0j} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha) \quad \sum_{i=1}^m t_{ij} A^{k_i} = A^j \\ &\Rightarrow (\beta) \quad \sum_{i=1}^m t_{ij} c_{k_i} - t_{0j} = c_j \\ \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^m t_{i0} \begin{bmatrix} A^{k_i} \\ -c_{k_i} \end{bmatrix} + t_{00} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\gamma) \quad \sum_{i=1}^m t_{i0} c_{k_i} = t_{00} \\ &\Rightarrow (\delta) \quad \sum_{i=1}^m t_{i0} A^{k_i} = b. \end{aligned}$$

A szimplex tábla *lehetséges*, ha b a bázisvektorok nemnegatív kombinációjaként áll elő, vagyis ha $t_{i0} \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). A módszer alkalmazása során gondoskodunk arról, hogy a tábla mindig lehetséges legyen. Ekkor a szimplex táblából kiolvashatjuk, a (δ) összefüggés szerint, a szóbanforgó LP feladatunk egy lehetséges bázismegoldását: $x_{k_i} = t_{i0}, i = 1, \dots, m; x_j = 0$ másként, a (γ) összefüggés szerint pedig t_{00} az ehhez a bázismegoldáshoz tartozó célfüggvényérték. Arra, hogyan lehet kiinduló lehetséges szimplex táblát előállítani, még visszatérünk. Lehetséges szimplex tábla birtokában az eljárás következő iterációja az alábbi lépésekből áll:

1. lépés: *Kiválasztjuk a bázisba bekerülő oszlopvektort.* Keresünk a t_{0k} ($k \neq 0$) elemek között negatív elemet. Ha nincs, megállapítjuk, hogy a tábla optimális, a táblából leolvasható az optimális megoldás, az eljárás végetér. Ha van, kiválasztjuk az egyiket: $t_{0j_b} < 0$, eldöntjük, hogy az A^{j_b} oszlopvektort vonjuk be a bázisba.

2. lépés: *Kiválasztjuk a bázisból kikerülő oszlopvektort.* Keresünk a t_{ij_b} ($i =$

$1, \dots, m$) elemek között pozitív elemet. Ha nincs, megállapítjuk, hogy a célfüggvény nemkorlátos, nincs optimális megoldás, az eljárás végetér. Ha van, kiválasztjuk az i_b sorindexet úgy, hogy

$$\frac{t_{i_b 0}}{t_{i_b j_b}} = \min_{i \neq 0, t_{ij_b} > 0} \frac{t_{i 0}}{t_{ij_b}}$$

egyenlőség teljesüljön, (ha több sorindexre teljesül, akkor közülük választunk egyet,) és eldöntjük, hogy az x_{j_b} változóhoz tartozó oszlopvektor az x_{i_b} változóhoz tartozó oszlopvektor helyére bekerül a bázisba.

3. lépés: *Végrehajtjuk a báziscserét.* A tábla új elemeit a megszokott módon kapjuk:

$$\begin{aligned} & x_{i_b} \text{ helyére beírjuk } x_{j_b} - t \text{ és } x_{j_b} \text{ helyére beírjuk } x_{i_b} - t; \\ t_{ij}^{új} &= t_{ij}^{régi} - \frac{t_{ibj}^{régi} t_{ijb}^{régi}}{t_{ibjb}^{régi}}, i = 0, 1, \dots, m, i \neq i_b; j = 0, 1, \dots, n - m, j \neq j_b; \\ t_{ibj}^{új} &= \frac{t_{ibj}^{régi}}{t_{ibjb}^{régi}}, j = 0, 1, \dots, n - m, j \neq j_b; \\ t_{ijb}^{új} &= -\frac{t_{ijb}^{régi}}{t_{ibjb}^{régi}}, i = 0, 1, \dots, m, i \neq i_b; \\ t_{ibjb}^{új} &= \frac{1}{t_{ibjb}^{régi}}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a báziscsere generálóelemének kiválasztási módja garantálja, hogy

(1) $t_{i0}^{új} \geq 0$, ha $t_{i0}^{régi} \geq 0$ volt, $i = 1, \dots, m$, azaz a báziscsere után újra lehetséges megoldást kapunk;

(2) $t_{00}^{új} \geq t_{00}^{régi}$, azaz a célfüggvényérték monoton nő.

4.2. A szimplex módszer megalapozása.

17. Állítás: Ha $t_{ij} \leq 0 (i = 1, \dots, m)$ valamely kiválasztott j indexre, akkor a lehetséges megoldások halmaza nem korlátos: az $x = \hat{x} + \lambda r$ lehetséges megoldás lesz minden nemnegatív λ értékre, ha \hat{x} lehetséges megoldás és az r vektort a következőképpen hozzuk létre:

$$r_j = 1, r_{k_i} = -t_{ij} (i = 1, \dots, m), r_k = 0 \text{ másként.}$$

Bizonyítás: Az (α) összefüggés szerint $0 = A^j - \sum_{i=1}^m t_{ij} A^{k_i}$, így az állításban szereplő r vektorra fennáll, hogy $Ar = 0$, és a j -oszlop választása miatt $r \geq 0$, amiből az állítás következik. \square

18. Állítás: Ha a j indexre fennáll, hogy $t_{0j} < 0$ és $t_{ij} \leq 0$ minden $i = 1, \dots, m$, akkor a feladatnak nincs optimális megoldása.

Bizonyítás: Az előző állítás szerinti r vektorra, a táblázatból kiolvasható \hat{x} bázismegoldásra és az $x = \hat{x} + \lambda r, \lambda \geq 0$ vektorra ekkor fennáll a (β) összefüggés szerint, hogy

$$cx = c\hat{x} + \lambda cr = \sum_{i=1}^m c_{k_i} t_{i0} + \lambda(c_j - \sum_{i=1}^m c_{k_i} t_{ij}) = t_{00} - \lambda t_{0j},$$

amely, mivel $t_{0j} < 0$, λ értékétől függően tetszőlegesen nagy szám lehet. \square

19. Állítás: A szimplex táblából kiolvasható bázismegoldás optimális, ha $t_{0j} \geq 0$ minden $j = 1, \dots, n - m$ indexre.

Bizonyítás: Minthogy A^{k_1}, \dots, A^{k_m} lineárisan független m -komponensű vektorok, ezért az $\begin{pmatrix} A^{k_1} & \dots & A^{k_m} \end{pmatrix}$ mátrix rangja m , sorai tehát az m -dimenziós tér bázisát alkotják, amelyek lineáris kombinációjaként minden m -komponensű vektor előállítható, a $(c_{k_1}, \dots, c_{k_m})$ vektor is. Léteznek tehát olyan y_1, \dots, y_m együtthatók, amelyekkel e mátrix sorait sorra megszorozva és a kapott vektorokat összeadva a $(c_{k_1}, \dots, c_{k_m})$ vektort kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az m -dimenziós $y = (y_1, \dots, y_m)$ vektorra fennáll, hogy $yA^{k_i} = c_{k_i}$ minden $i = 1, \dots, m$ indexre. Ezt felhasználva az (α) összefüggésből az alábbi kifejezéshez jutunk:

$$yA^j = y \sum_{i=1}^m t_{ij} A^{k_i} = \sum_{i=1}^m t_{ij} (yA^{k_i}) = \sum_{i=1}^m t_{ij} c_{k_i},$$

és a (β) összefüggés szerint $\sum_{i=1}^m t_{ij} c_{k_i} = c_j + t_{0j} \geq c_j$, mert $t_{0j} \geq 0$. Az y tehát olyan vektor, amelyre $yA \geq c$, vagyis y a duális feladat lehetséges megoldása és $yA^j = c_j$ ha $x_j > 0$, vagyis az egyensúlyi tétel értelmében az x a primál, y pedig a duális feladat optimális megoldása. \square

4.3. Kiinduló lehetséges bázis előállítása.

Ha a megoldandó feladatunk véletlenül standard alakú: $cx \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0$, és $b \geq 0$, akkor e feladat kanonikus alakja:

$$[A, E] \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geq 0, (c, 0) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \max,$$

automatikusan tartalmaz egy kiinduló lehetséges bázist, mégpedig az u_1, \dots, u_m változókhoz tartozó egységvektorokat. Lehetséges megoldás az $x_j = 0, j = 1, \dots, n; u_i = b_i, i = 1, \dots, m$; a feladat együtthatói pedig a mátrix oszlopvektorainak illetve a b vektornak a koordinátáit jelentik ebben a bázisban.

Ha a megoldandó feladat általános alakú, akkor a kiinduló lehetséges bázis előállítása külön megfontolást és eljárást igényel. Itt a kétfázisú szimplex módszert vizsgáljuk. Az első fázis célja kiinduló lehetséges megoldást létrehozni. Ezt mutatjuk be most. Tekintsük a $cx \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0, (b \geq 0)$ feladathoz kapcsolódó alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + w_i &= b_i, \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ z - \sum_{j=1}^n c_jx_j &= 0, \quad x \geq 0, \\ -\sum_{i=1}^m w_i &\rightarrow \max, \end{aligned}$$

Ez LP feladat, amelynek van lehetséges bázismegoldása: $w_i = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$, és van optimális megoldása is, mert a $-\sum_{i=1}^m w_i$ célfüggvény nempozitív, ezért a 0 felső korlátja. A feladat rövidebben, figyelembe véve, hogy az első fázis célfüggvénysora:

$$\begin{aligned} +w_o + \sum_{i=1}^m w_i &= w_o - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{i=1}^m b_i = 0 \\ \Leftrightarrow w_o - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= -\sum_{i=1}^m b_i \end{aligned}$$

így írható fel:

$$w_o \rightarrow \max, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & & A & & E \\ 0 & 1 & -c_1 & \dots & -c_n & 0 \\ 1 & 0 & -\sum_{i=1}^m a_{i1} & \dots & -\sum_{i=1}^m a_{in} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_o \\ z \\ x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^m b_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \geq 0.$$

A w vektor elemei *mesterséges változók*, amelyeknek az a szerepük, hogy oszlopvektoraik a z változóval együtt kiinduló bázist adjanak. A feladat kiinduló szimplex táblája a következő:

	x_1	x_j	x_n	b
w_1	a_{11}	a_{1j}	a_{1n}	b_1
...
...
w_m	a_{m1}	a_{mj}	a_{mn}	b_m
w_0	$-\sum_{i=1}^m a_{i1}$	$-\sum_{i=1}^m a_{ij}$	$-\sum_{i=1}^m a_{in}$	$-\sum_{i=1}^m b_i$
z	$-c_1$	$-c_j$	$-c_n$	0

Az első fázisban a w_0 sora a célfüggvénysor, a z változóhoz tartozó $z - cx = 0$ sor a többihez hasonló feltételnek minősül azzal az eltéréssel, hogy a z változó sosem kerül ki a bázisból. Az első fázisban a $-\sum_{i=1}^m w_i$ célfüggvény maximalizálása révén arra törekszünk, hogy sorozatos báziscserékkel kiiktassuk a mesterséges változókat a bázisból. Ha ez sikerül, akkor, értékük a bázison kívül 0 lévén, kiiktathatjuk őket a feladatból is és így módon olyan szimplex táblához jutunk, amely már csak az eredeti feladat vektorait tartalmazza bázisvektorok és bázison kívüli vektorokként egyaránt. Csak akkor nem sikerül kiiktatni őket a feladatból, ha a célfüggvény optimális értéke negatív - ez pedig azt jelenti, hogy eredeti feladatunknak egyáltalán nincs lehetséges

megoldása. Az első fázis befejezésekor tehát erre a két konklúzióra juthatunk. A második esetben az eljárás végetér, az első esetben folytatódik a második fázissal, a második fázisban egy olyan szimplex táblával, amelyben a mesterséges célfüggvény sora már nem jelenik meg és a feladat $m+1$. sora visszanyeri a célfüggvénysor rangját és szerepét.

4.4. A duális megoldás a szimplex táblában.

A kiinduló és egymást követő szimplex táblákban nem tüntettük fel a bázisvektorokhoz tartozó oszlopokat, mert tudjuk, hogy koordinátáik az aktuális bázisban szükségképpen egységvektorokat alkotnak. Ha azonban feltüntetjük, azaz a tábla a kiinduló bázist alkotó oszlopvektorok (együttesen egységmátrixot alkotó vektorok) koordinátáit is tartalmazza az aktuális bázisra nézve, akkor az eredeti kiinduló egységmátrix helyén az egymást követő iterációkban az aktuális

$$B = \begin{pmatrix} A^{k_1} & . & . & . & A^{k_m} \end{pmatrix}$$

bázis inverze jelenik meg. A tábla átalakulását és szerkezetét mutatja az alábbi ábra:

e_1	A	E	b
e_m			
z	$-c$	0	0

⇓

x_{k_1}	$T = B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
x_{k_m}			
z	$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

ahol $c_B = (c_{k_1}, \dots, c_{k_m})$.

$$\text{A jelölésből világos, hogy } B^{-1}A^j = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{bmatrix}, B^{-1}b = \begin{bmatrix} t_{10} \\ \vdots \\ t_{m0} \end{bmatrix}.$$

A tábla tartalma a fönti $(\alpha) - (\delta)$ összefüggésekből adódik. Az $y = c_B B^{-1}$ vektorra fennáll az $yb = c_B B^{-1}b = t_{00}$ mindig. Megmutatjuk, hogy az optimális szimplex táblában y a duális feladat lehetséges és egyben optimális megoldása.

Valóban,

$$y \begin{pmatrix} A^{k_1} & \dots & A^{k_m} \end{pmatrix} = c_B B^{-1} \begin{pmatrix} A^{k_1} & \dots & A^{k_m} \end{pmatrix} = c_B B^{-1}B = c_B,$$

$$yA^j = c_B B^{-1}B \begin{bmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{bmatrix} = c_j + t_{0j}, j = 1, \dots, n.$$

Ez utóbbi két egyenlet mutatja, hogy y a duális lehetséges megoldása, ha a tábla optimális, azaz, ha $t_{0j} \geq 0 (j = 1, \dots, n)$, és mivel a hozzátartozó célfüggvény-érték megegyezik a táblából kiolvasható primál megoldás célfüggvényértékével, ezért y optimális is.

A tábla tartalmának ismerete lehetővé teszi azt, hogy megvizsgáljuk, mennyire érzékeny az optimális megoldás a célfüggvényegyütthatók változására, meddig marad

még lehetséges (és ezért optimális) a tábla, ha a jobboldalon lévő értékeket változtatjuk, hogyan alakul az optimális megoldás, ha a feladat egyes paramétereit megváltoztatjuk. A szimplex módszer alkalmazására és ezt követő érzékenységi vizsgálatokra mutatunk be egy példát a következő fejezetben.

4.5. Számpélda a szimplex módszer alkalmazására.

Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{array}{rrrrcl}
 -2x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +14x_4 & \rightarrow \max \\
 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \geq 10 \\
 x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 8 \\
 x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 6 \\
 x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & \leq 8 \\
 x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
 \end{array}$$

- 1) Oldjuk meg a feladatot szimplex módszerrel.
- 2) Írjuk fel a feladat duálisát.
- 3) Az optimális szimplex táblából határozzuk meg a duális feladat optimális megoldását.
- 4) Határozzuk meg, hogy ε milyen értékei mellett marad az utolsó szimplex tábla optimális, ha a feladatunk célfüggvény együtthatóit így változtatjuk: $(-2 + \varepsilon, 8, 5, 14)$.
- 5) Számítsuk ki, az utolsó szimplex tábla felhasználásával, az optimális megoldását annak a feladatnak, amelynek a feltételei ugyanazok, mint a felírt feladatban, célfüggvény együtthatóit azonban így változtatjuk: $(4, 0, 2, 2)$.
- 6) Határozzuk meg, hogy β milyen értékei mellett marad az utolsó szimplex tábla lehetséges, ha a feladat jobb oldalát így változtatjuk: $b = (10, 8 + \beta, 6, 8)$.

- 7) Számítsuk ki az eredeti feladatból kiindulva és az utolsó szimplex tábla felhasználásával az optimális megoldását annak a feladatnak, amelyben x_4 együtthatói az egyes feltételekben sorra: $(-1, 1, 2, 3)$ és célfüggvény együtthatója 10.

Megoldás. A feladat vizsgálatát azzal kezdjük, hogy minden olyan feltételt, amelynek jobboldalán negatív érték szerepel, megszorozunk -1 -gyel - itt ilyen feltétel nem szerepel. Ezután a feladatot felírjuk kanonikus alakban. Az első feltétel baloldalából kivonunk egy nemnegatív kiegészítő változót, a negyedik feltétel baloldalához pedig hozzáadunk egy másik nemnegatív változót, hogy egyenlőségeket kapjunk. A továbbiakban ezzel a feladattal foglalkozunk:

$$\begin{array}{rcllcl}
 & -2x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +14x_4 & \rightarrow & \max \\
 & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -u_1 & = 10 \\
 (P) & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 8 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & & = 6 \\
 & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & +u_4 & = 8 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & u_1, & u_4 & \geq 0
 \end{array}$$

1) Alakítsuk át úgy a feladatot, hogy szimplex módszerrel történő megoldásra alkalmas legyen. Bevezetjük a célfüggvényértéket képviselő maximalizálandó z változót. Így a következő feladathoz jutunk:

$$\begin{array}{ccccccccc}
z & \rightarrow & \max & & & & & & \\
+2x_1 & -8x_2 & -5x_3 & -14x_4 & +z & & & & = 0 \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & -u_1 & & & = 10 \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & & = 8 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & & & & & = 6 \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & & & +u_4 & = 8 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & u_1, & u_4 & & \geq 0
\end{array}$$

A feladat oszlopvektorai között csak egy egységvektor van, a z oszlopához tartozó egységvektortól eltekintve, így a feladat nem tartalmaz kiinduló bázist, ezért két fázisban oldjuk meg.

Az első fázisban lehetséges bázismegoldást keresünk. Három mesterséges változót kell bevezetnünk, a célfüggvénysort követő három feltételben: w_1, w_2, w_3 , amelyek oszlopvektorai u_4 oszlopával együtt bázist alkotnak. Az első fázis maximalizálandó célfüggvénye: $w_0 = -(w_1 + w_2 + w_3)$. Az első fázis célfüggvénysorában, mint az előző fejezetben ezt megmutattuk, az x_j együtthatójának negatívját úgy kapjuk, hogy összeadjuk x_j együtthatóit a mesterséges változókat tartalmazó sorokban és a jobb oldal szintén a negatívja a megfelelő jobboldalon szereplő értékek összegének. Az első fázisban megoldandó feladat tehát a következő alakú:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
w_0 & \rightarrow & \max & & & & & & & & & & & & \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -u_1 & +w_1 & & & & & & & & = 10 \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +w_2 & & & & & & & = 8 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & & & & w_3 & & & & & & = 6 \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & & & & & +u_4 & & & & & = 8 \\
2x_1 & -8x_2 & -5x_3 & -14x_4 & & & & & & +z & & & & = 0 \\
-4x_1 & -4x_2 & -3x_3 & -4x_4 & & & & & & & +w_0 & & & = -24 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & u_1, & u_4, & w_1, & w_2, & w_3 & & & & & \geq 0
\end{array}$$

A kiinduló szimplex tábla az első fázisban:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	b
w_1	2	1	1	1	-1	10
w_2	1	2	1	1	0	8
w_3	1	1	1	2	0	6
u_4	1	-1	1	3	0	8
z	2	-8	-5	-14	0	0
w_0	-4	-4	-3	-4	1	-24

Nem tüntetjük fel a bázist alkotó oszlopokat azért, mert tudjuk, hogy egység-mátrixot alkotó oszlopok. Az egyes iterációk, amelyekben a szimplex módszerrel leírt szabályok szerint járunk el, három lépésből állnak. Az elsőben kiválasztjuk a bázisba bekerülő, a másodikban a bázisból kikerülő oszlopvektort. A harmadikban végrehajtjuk a báziscserét.

1. Iteráció:

1. lépés: A w_0 sorában keresünk negatív elemet. Kiválasztjuk az x_3 -hoz tartozó oszlopot, ezt szeretnénk bevonni a bázisba.

2. lépés: Az oszlopban az eredeti első négy sorban lévő elem pozitív, ezért mindegyikükre képezzük a jobboldal és az oszlopban lévő elem hányadosát, majd kiválasztjuk közülük a legkisebbet: $\frac{6}{1} = \min(\frac{10}{1}, \frac{8}{1}, \frac{6}{1}, \frac{8}{1})$. Kiválasztjuk a w_3 -hoz tartozó sort. A bázisban w_3 helyére x_3 kerül.

3. lépés: Végrehajtjuk a báziscserét. Az új szimplex tábla:

	x_1	x_2	w_3	x_4	u_1	b
w_1	1	0	-1	-1	-1	4
w_2	0	1	-1	-1	0	2
x_3	1	1	1	2	0	6
u_4	0	-2	-1	1	0	2
z	7	-3	5	-4	0	30
w_0	-1	-1	3	2	1	-6

Megjegyezzük, hogy w_3 oszlopát nem kellene feltüntetnünk, ha csak a feladat optimális megoldását kellene kiszámítanunk. Szükségünk lesz azonban a duális feladat optimális megoldására és egyéb vizsgálatokra is, amelyeket csak a kiinduló bázishoz tartozó oszlopvektorok, amelyben ez esetben a mesterséges változókhoz tartozó oszlopvektorok is benne foglaltatnak, helyén megjelenő együtthatók segítségével tudjuk meghatározni majd az optimális szimplex táblából. Ezért a mesterséges változók oszlopainak elemeit is számoljuk minden báziscsere transzformáció során, de a bázisba akkor se vonjuk be, ha a hozzá tartozó célfüggvénysorbeli elem negatív.

2. Iteráció.

1. lépés: A w_0 sorában keresünk negatív elemet. Kiválasztjuk az x_1 -hez tartozó oszlopot.

2. lépés: Az oszlopban az eredeti első négy sor közül az első és harmadik sorban lévő elem pozitív, ezekre képezzük a jobb oldal és az oszlopban lévő elem hányadosát, majd kiválasztjuk közülük a legkisebbet: $\frac{4}{1} = \min(\frac{4}{1}, \frac{6}{1})$. Kiválasztjuk a w_1 -hez tartozó sort. A bázisban w_1 helyére x_1 kerül.

3. lépés: Végrehajtjuk a báziscserét. Az új szimplex tábla:

	w_1	x_2	w_3	x_4	u_1	b
x_1	1	0	-1	-1	-1	4
w_2	0	1	-1	-1	0	2
x_3	-1	1	2	3	1	2
u_4	0	-2	-1	1	0	2
z	-7	-3	12	3	7	2
w_0	1	-1	2	1	0	-2

3. Iteráció.

1. lépés: A w_0 sorában keresünk negatív elemet. Kiválasztjuk az x_2 -hoz tartozó oszlopot.

2. lépés: Az oszlopban két pozitív elem van, a hányados teszt alapján kiválasztjuk a w_2 -hoz tartozó sort. A bázisban w_2 helyére x_2 kerül.

3. lépés: Végrehajtjuk a báziscserét. Az új szimplex tábla:

	w_1	w_2	w_3	x_4	u_1	b
x_1	1	0	-1	-1	-1	4
x_2	0	1	-1	-1	0	2
x_3	-1	-1	3	4	1	0
u_4	0	2	-3	-1	0	6
z	-7	3	9	0	7	8
w_0	1	1	1	0	0	0

Valamennyi mesterséges változó kikerült a bázisból. Ezért az 1. fázisnak vége, töröljük az utolsó, a w_0 változónak megfelelő sort. Kezdődik a 2. fázis.

4. Iteráció.

1. lépés: A z sorában keresünk negatív elemet. Természetes változóhoz tartozó negatív elem nincs, ezért megállapítjuk, hogy a tábla optimális, az eljárás véget ért. Az optimális bázist az x_1, x_2, x_3, u_4 változókhoz tartozó oszlopvektorok alkotják, az optimális bázismegoldás:

$$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, u_1 = 0, u_4 = 6.$$

Az optimális célfüggvényérték: $z = 8$.

Vegyük észre, hogy az optimális bázismegoldás degenerált, hiszen a bázishoz tartozó változók közül x_3 értéke 0. Vegyük észre, hogy a célfüggvény sorában lévő 0 érték arra utal, hogy van alternatív bázismegoldás. Valóban, x_4 -t bevonhatjuk a bázisba, mégpedig x_3 helyére, hiszen az oszlopban egyedül itt van pozitív elem. Ekkor a célfüggvény értéke nem változik, ez következik abból, ahogy a báziscsere transzformációt végrehajtjuk. Példánkban azonban csak alternatív optimális bázis van, ezt az x_1, x_2, x_4, u_4 változókhoz tartozó oszlopvektorok alkotják, de az ehhez tartozó megoldás változatlan marad a bázismegoldás degenerált volta miatt.

2) Írjuk fel a (P) feladat és egyben a kiinduló feladat duálisát:

$$\begin{array}{ccccccc} 10y_1 & +8y_2 & +6y_3 & +8y_4 & \rightarrow \min \\ 2y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & \geq -2 \\ y_1 & +2y_2 & +y_3 & -y_4 & \geq 8 \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & y_4 & \geq 5 \\ y_1 & +y_2 & +2y_3 & +3y_5 & \geq 14 \\ -y_1 & \geq 0, & & y_4 & \geq 0. \end{array}$$

3) A duális feladat optimális megoldását az optimális szimplex táblában találjuk a kiinduló bázist alkotó változók alatt a célfüggvényt sorban, mégpedig a kiinduló bázis változóinak sorrendjében. A w_1, w_2, w_3, u_4 változók alatti értékek az optimális tábla célfüggvényt sorában: $-7, 3, 9, 0$. Itt az u_4 változó benne maradt a bázisban az eljárás végéig. Oszlopa a 4. egységvektor, amelyet azonban éppen nyilvánvalósága miatt nem tüntetünk fel, de tudjuk, hogy a célfüggvényt sor hozzá tartozó eleme 0.

A duális feladat optimális megoldása tehát: $y_1 = -7, y_2 = 3, y_3 = 9, y_4 = 0$.

4) Az utolsó szimplex tábla akkor marad optimális, ha a célfüggvénysorban a természetes változókhoz tartozó elemek nemnegatívak maradnak, ha újraszámoljuk értékeiket a megadott célfüggvény együtthatók ismeretében. A célfüggvénysornak az x_j változóhoz tartozó elemének a jelentése: $c_B B^{-1} A^j - c_j$. Határozzuk meg ezeket az értékeket abban az esetben, ha a célfüggvény együtthatói: $c_1 = \varepsilon - 2, c_2 = 8, c_3 = 5, c_4 = 14, c_5 = 0, c_6 = 0$. Az utolsó két együttható az u_1 illetve az u_4 változókhoz tartozik.

Írjuk fel a kifejezésben szereplő vektorokat, mátrixokat.

$$c_B = (\varepsilon - 2, 8, 5, 0), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az x_4 és u_1 változókhoz tartozó új célfüggvénysorbeli együtthatókat kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} t_{0,x_4}^{új} &= (\varepsilon - 2, 8, 5, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 14 \\ &= (\varepsilon - 2 - 5, 3, 2 - \varepsilon - 8 + 15, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 14 \\ &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{0,u_1}^{új} &= (\varepsilon - 2, 8, 5, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\
&= -\varepsilon + 7.
\end{aligned}$$

A tábla tehát optimális marad, ha $-\varepsilon \geq 0$ és $-\varepsilon + 7 \geq 0$, azaz ha $\varepsilon \leq 0$.

5) Ismét az x_4 és az u_1 változókhoz tartozó új célfüggvény-sorbeli együtthatókat kell kiszámítanunk, de most $c_B = (4, 0, 2, 0)$.

$$\begin{aligned}
t_{0,x_4}^{új} &= (4, 0, 2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 14 \\
&= (2, -2, 2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 14 \\
&= -10 \\
t_{0,u_1}^{új} &= (4, 0, 2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

$t_{0,x_4}^{új}$ negatív, ezért a tábla nem optimális. Az új célfüggvényegyütthatók melletti optimális megoldás kiszámításához kiindulunk a meglévő szimplex táblából. A továbbiakban a mesterséges változók oszlopait nem tüntetjük fel. A szimplex tábla tehát, amelyből kiindulunk, a következő:

	x_4	u_1	b
x_1	-1	-1	4
x_2	-1	0	2
x_3	4	1	0
u_4	-1	0	6
z	-10	2	8

1. lépés: A célfüggvénysorban keresünk negatív elemet. Kiválasztjuk az x_4 -hez tartozó oszlopot.
2. lépés: Az oszlopban egy pozitív elem van, kiválasztjuk az x_3 -hoz tartozó sort. A bázisban x_3 helyére x_4 kerül.
3. lépés: Végrehajtjuk a báziscserét. Az új szimplex tábla:

	x_3	u_1	b
x_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	4
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2
x_4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	6
z	$\frac{10}{4}$	$\frac{18}{4}$	8

optimális, az optimális megoldás az adott célfüggvényegyütthatók mellett a következő:
 $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = x_4 = 0, u_1 = 0, u_4 = 6$.

6) A szimplex tábla addig marad lehetséges, ameddig a jobboldal koordinátái az aktuális bázisban - másként: a bázisváltozók értékei - nemnegatívak.

A b koordinátái az aktuális bázisban $B^{-1}b$. Feladatunkban tehát β értékének eleget kell tennie a következő feltételnek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 + \beta \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 + \beta \\ -\beta \\ 6 + 2\beta \end{pmatrix} \geq 0,$$

amiből $-2 \leq \beta \leq 0$ következik.

7) Az x_4 együtthatói az egyes feltételekben sorra: $(-1, 1, 2, 3)$ és célfüggvénye-gyütthatója 10. Újra kell számolnunk az x_4 -hez tartozó oszlopot a szimplex táblában.

$$\begin{pmatrix} t_{1,x_4} \\ t_{2,x_4} \\ t_{3,x_4} \\ t_{4,x_4} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

A célfüggvénysorban lévő elem pedig:

$$t_{0,x_4} = c_B B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 10 = (-2, 8, 5, 0) \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} - 10 = 18.$$

A szimplex tábla tehát a következő lesz:

	x_4	u_1	b
x_1	-3	-1	4
x_2	-1	0	2
x_3	6	1	0
u_4	-1	0	6
z	18	2	8

Minthogy a célfüggvénysorbeli együtthatója x_4 -nek nemnegatív maradt, megállapíthatjuk, hogy az utolsó szimplex táblában kapott megoldás optimális arra a feladatra is, amelyben x_4 együtthatói ily módon megváltoznak.

5. fejezet

Lineáris programozáshoz vezető feladatok.

A matematikai programozás más ágaiban: a hiperbolikus vagy törtprogramozás, a sztochasztikus programozás és a többcélú programozásban felmerülő olyan problémákat fogunk itt bemutatni, amelyek lineáris programozási feladattá átalakíthatók és így módon megoldhatók pl. a szimplex módszerrel. A jegyzetben eddig nem szenteltünk figyelmet az LP gazdasági alkalmazásainak, ezt a hiányt itt részben pótoljuk azzal, hogy a matematikai modelleket döntési problémaként vezetjük be, egy döntési alapszituációra építve. Ez pedig a következő:

5.1. A döntési alaprobléma.

Egy termelési folyamatban n —féle terméket állítanak elő m -féle erőforrás felhasználásával. A j . termék egységének előállításához az i . erőforrásból felhasználnak a_{ij} mennyiséget (valamilyen egységben természetesen). Ismeretes, hogy az egyes erőforrásokból mennyi áll rendelkezésre, jelölje az i . erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget b_i . Jelölje x_1, \dots, x_n az egyes termékekből gyártandó mennyiségeket: ezek a döntési változóink, a számítandó értékek.

Foglaljuk össze az a_{ij} értékeket az A mátrixban, a b_i értékeket a b vektorban, az x_1, \dots, x_n változókat az x vektorban. Feltesszük, (a) hogy x_j mennyiség gyártásához

az i . forrásból $a_{ij}x_j$ mennyiséget fogunk felhasználni; (b) hogy az egyes forrásokból a felhasználások összeadódnak: az i . forrásból az összes felhasználás így $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$; (c) az egyes termékekből gyártandó mennyiségek nem kell, hogy egészértékűek legyenek.

Ezek a feltevések konkrét feladat esetében nem biztos, hogy megállják a helyüket. Ha például az egyik erőforrás a munkaóra, akkor természetes lehet, hogy tört (esetleg irracionális) számú munkaóra nem alkalmazhatunk embereket vagy hogy másik termék gyártására nem csoportosítható át a munkaerő gond nélkül, azaz az egyes termékek gyártásához szükséges munkaórák nem adódnak össze. Az egyes termékekből rendszerint egész mennyiségeket gyártanak, tört vagy irracionális mennyiségeknek nincs kereskedelmi értéke. Ez gyakran mégsem okoz problémát, ha elég kicsi az egység, amiben mérjük a szóbanforgó terméket. Néha azonban nincs mód elhanyagolásra, pl. ha hajót gyártunk vagy vonatot, akkor elő kell írunk a gyártandó mennyiség egészértékű voltát. Itt azonban csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor az ilyen vagy más aggályok nem bírnak nagy jelentőséggel.

Ekkor azt a feltételt, hogy az egyes erőforrásokból nem használhatunk többet, mint amennyi van, és hogy nem gyárthatunk negatív mennyiségeket, lineáris feltételek formájában, vagyis így írhatjuk fel:

$$Ax \leq b, x \geq 0$$

5.2. Hiperbolikus vagy törtprogramozás

Az első modellben a cél a termelés hatékonysága lesz. A hatékonyság mérésére szokásos az egységnyi költségre eső árbevételt alkalmazni. Jelölje c_1, \dots, c_n az egyes termékek egy egységének előállításának költségét, p_1, \dots, p_n az eladásukból származó árbevételt. Az összes költség és az összes árbevétel kiszámításánál ismét élünk a linearitási feltétellel. Foglaljuk össze az adott c_j értékeket a c vektorban és a p_j értékeket a p vektorban. Ekkor a termelés hatékonyságát - amelyet maximalizálni szeretnénk - a $\frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j}{\sum_{j=1}^n c_j x_j}$ hányados fejezi ki.

Első modellünk tehát a következő:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j}{\sum_{j=1}^n c_j x_j} &\rightarrow \max \\ A_i x &\leq b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

E modell a hiperbolikus vagy törtprogramozás körébe tartozik.

E feladatot a következőképpen alakítjuk át lineáris programozási feladattá. Vezessük be a t változót a $t = \frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j x_j}$ jelentéssel. t -nek csak akkor van értelme, ha $\sum_{j=1}^n c_j x_j \neq 0$, feltesszük, hogy ez fennáll minden $x \in \{x \geq 0 : Ax \leq b\}$ esetén. Ez a feltétel teljesül, ha $c_j \geq 0$ és $x > 0$ minden elemére az $\{x \geq 0 : Ax \leq b\}$ halmaznak. Legyen $y_j = tx_j, j = 1, \dots, n$. Szorozzuk be az $A_i x \leq b_i$ feltételeket t -vel. A következő lineáris programozási feladathoz jutunk:

$$(2) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j y_j &\rightarrow \max \\ A_i y - b_i t &\leq 0, i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n c_j y_j &= 1 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

A két feladat ekvivalens a következő értelemben. Ha x megoldja az (1) feladatot, akkor $t = \frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j x_j} > 0$ és $y = xt$ megoldja a (2) feladatot. Fordítva, ha $y = (y_1, \dots, y_n)$ és t együttesen megoldják a (2) feladatot, és $t > 0$, akkor $x = \frac{y}{t}$ megoldja az (1) feladatot. Ha az (1) feladatnak van megoldása, akkor a (2) feladatnak van olyan (y, t) megoldása, amelyre $t > 0$.

5.3. Valószínűséggel korlátozott lineáris programozási modell

A második modellben visszatérünk az alapproblémára és egy lineáris célfüggvényt, mondjuk a $\sum_{j=1}^n p_j x_j$ árbevételt maximalizáljuk. Az egyes erőforrásokból rendelkezésre

álló b_i mennyiségeket azonban valószínűségi változóknak tekintjük, amelyeknek tehát pontos értékét nem ismerjük, de ismerjük az eloszlásukat. Azt a feltételt, hogy a termelés az egyes erőforrásokból nem használhat fel többet, mint amennyi van, enyhítenünk kell, azt követeljük meg ehelyett, hogy ezt a feltételt előírt α_i valószínűséggel teljesítse.

Második modellünk a következő:

$$\begin{aligned} (3) \quad & cx \rightarrow \max \\ & P(A_i x \leq b_i) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ahol P valószínűséget jelöl, $0 < \alpha_i < 1$, b_i valószínűségi változó, ismert $F_{b_i}(z)$ eloszlásfüggvénnyel, $i = 1, \dots, m$.

Ez a modell a valószínűséggel korlátozott lineáris programozási modell, amely a sztochasztikus programozás körébe tartozik.

E feladatot a következőképpen alakítjuk át lineáris programozási feladattá. Vegyük észre, hogy $P(A_i x \leq b_i) = 1 - P(A_i x > b_i)$. Az i -edik feltétel tehát így írható fel: $P(A_i x > b_i) \leq 1 - \alpha_i$. Figyelembe véve, hogy $P(A_i x > b_i) = F_{b_i}(A_i x)$ az eloszlásfüggvény definíciója szerint, az i . feltételt így fogalmazhatjuk meg: $F_{b_i}(A_i x) \leq 1 - \alpha_i$. Mivel az eloszlásfüggvény monoton növekvő, megadható az argumentumának az a legnagyobb r_i értéke, amelynél ha $A_i x$ nem nagyobb, akkor az eloszlásfüggvény értéke nem nagyobb $1 - \alpha_i$ -nál. A következő lineáris programozási feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned} (4) \quad & cx \rightarrow \max \\ & A_i x \leq r_i, i = 1, \dots, m \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

ahol $r_i = \text{Arg max}_z \{F_{b_i}(z) \leq 1 - \alpha_i\}$, $i = 1, \dots, m$. Az így meghatározott r_i értékek az LP feladat paraméterei. Ha b_i folytonos és eloszlásfüggvénye invertálható - gondoljunk pl. a normális eloszlásra -, akkor $r_i = F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$.

A (3) és (4) feladatok ekvivalensek. Ha x megoldja a (3) feladatot, akkor $F_{b_i}(A_i x) \leq 1 - \alpha_i$ és ezért $A_i x \leq r_i$, vagyis x megoldja a (4) feladatot. Ha fordítva,

$A_i x \leq r_i$, akkor F_{b_i} monotonitása miatt $F_{b_i}(A_i x) \leq F_{b_i}(r_i) \leq 1 - \alpha_i$, vagyis x megoldja a (3) feladatot.

5.4. Többcélú programozás

A harmadik modellben ismét visszatérünk az alapproblémára. A döntéshozó számára azonban most több cél is fontos, minimalizálni szeretné például a cx költséget és maximalizni a px árbevételt. Értelmeznünk kell ebben az esetben, mit értünk optimális megoldáson. Azt mondjuk, egy \hat{x} megoldás optimális, ha lehetséges: $\hat{x} \in \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ és nincs nála jobb lehetséges megoldás: nincs olyan $\tilde{x} \in \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, amelyre $c\tilde{x} \leq c\hat{x}$, $p\tilde{x} \geq p\hat{x}$ és legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú lenne -vagyis ha \hat{x} Paréto optimum vagy más néven efficiens pont.

Harmadik modellünk lineáris feltételeket és több lineáris célfüggvényt foglal magában:

$$\begin{aligned} c_1 x &\rightarrow \max \\ c_2 x &\rightarrow \max \\ &\dots \\ c_r x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Ez a modell a többcélú programozás körébe tartozik.

Kérdés, hogyan oldhatjuk meg a feladatot.

Vegyük észre, hogy ha valamelyik célfüggvény szerinti optimalizálás egyetlen optimális megoldáshoz vezet, akkor ez a megoldás egyben efficiens pont is. Járjunk el a következőképpen. Optimalizáljunk az első - a legfontosabb - célfüggvény szerint. Ha egyetlen optimális megoldásunk van, akkor ezt az efficiens pontot elfogadjuk, mint a feladatunk megoldását. Ha az optimális megoldások halmaza nem egyetlen pontból áll, akkor a második szakaszban az

$$\{x : Ax \leq b, c_1 x = z_1, x \geq 0\}$$

halmazon optimalizáljuk a következő - a második legfontosabb - célfüggvényt, ahol z_1 jelöli az első célfüggvény szerinti optimális célfüggvényértéket. Ha egy optimális megoldást kapunk, akkor ez egyúttal efficiens pont is, az eljárás véget ér. Ha nem, akkor folytatjuk az eljárást a harmadik célfüggvénnyel, stb. Az utolsó célfüggvény optimalizálása eredményeként kapott halmaz minden pontja efficiens lesz. Ebben az eljárásban LP feladatokat oldunk meg, az eljárást hierarchikus eljárásnak szokás nevezni azért, mert a célfüggvények fontossági sorrendje szabja meg az eljárás menetét.

Egy másik megközelítés csak egyetlen lineáris programozási feladat megoldását igényli. Ha a célfüggvényeket a prioritásuknak megfelelő súlyokkal megszorozzuk, majd összeadjuk őket, akkor ha a kapott lineáris függvényt maximalizáljuk (minimalizáljuk) a szóbanforgó lineáris feltételek mellett, akkor az így kapott optimális megoldás szintén efficiens pont lesz.

5.5. Célprogramozás.

A negyedik modell szorosan kapcsolódik a harmadikhoz. Itt az $A_i x \leq b_i$ egyenlőtlenségek némelyikét (vagy mindegyikét) nem előírásnak, hanem csak kívánságnak tekintjük. Például a termelési feladatunkban b_1 a rendelkezésre álló munkaórát jelentse. E feltétellel kapcsolatban két cél is felmerülhet. Egyfelől szeretnénk a meglévő munkaerőt kihasználni, mert ha kevesebbe lenne szükség, akkor ez elbocsátásokkal járna. Másfelől nem szeretnénk több munkaórát felhasználni, mint az adott b_i mennyiség, bár szükség esetén pl. túlórával több munkaórát is tudunk biztosítani, de ez drágább. Írjuk fel az első feltételt így:

$$A_1 x + y_1^+ - y_1^- = b_1.$$

Itt y_1^+ jelöli az x termelés során feleslegesen meglévőnek bizonyuló munkaórák számát, y_1^- pedig azt, amelyet túlórával kell biztosítani.

Vonatkozzék a második feltétel energiafelhasználásra és tekintsük ezt is kívá-

nalomnak. A második feltételt ekkor is így írhatjuk fel:

$$A_2x + y_2^+ - y_2^- = b_2.$$

Ekkor azonban csak ahhoz fűződhet érdekünk, hogy ne használjunk többet fel, mint amennyi van, ezért azt szeretnénk, hogy a többletfelhasználást képviselő y_2^- változó értéke legyen minél kisebb.

Feladatunk tehát olyan termelési tervet meghatározni, amely kielégíti a felhasznált munkaórák és energia tekintetében a felírt egyenlőségeket, kielégíti az alapprobléma többi feltételét, minimalizálja y_1^+ -t, y_1^- és y_2^- -t is:

$$\begin{aligned} y_1^+ &\rightarrow \min \\ y_1^- &\rightarrow \min \\ y_2^- &\rightarrow \min \\ A_1x + y_1^+ - y_1^- &= b_1 \\ A_2x + y_2^+ - y_2^- &= b_2 \\ A_ix &\leq b_i, \quad i = 3, \dots, m \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Ez a modell a célprogramozás körébe tartozik. A megoldást a többcélú programozási feladatok körében értelmezzük és megoldása lineáris programozási feladatok megoldása formájában történik.

5.6. Kétlépcsős programozási modell.

Az ötödik modellben a termelési folyamat eredményeként közbeeső termékeket állítunk elő, amelyekből egy következő szakaszban végtermékek készülnek. Az x_1, \dots, x_n termelési szintek meghatározásában az első szakaszban nemcsak az erőforrások rendelkezésre álló mennyiségét kell figyelembe vennünk, hanem azt is, hogy a végtermékekre - ezek mennyiségét a Bx szorzat képviseli - mekkora megrendelés érkezik, jelölje ezeket D_1, \dots, D_r , r a végtermékek száma. Tegyük most fel, hogy a $D = (D_1, \dots, D_r)$ megrendelést nem ismerjük előre, amikor a közbeeső termékek termelési

szintjéről kell dönteni, a megrendelések vektora azonban valószínűségi változó, amely nem függ attól, hogy milyen x termelési szintekről döntöttünk az első szakaszban. A D eloszlását ismerjük. Diszkrét értékeket vehet föl, ismerjük e lehetséges értékeket és azt is, hogy D a lehetséges értékeit milyen valószínűséggel veszi fel. A második szakaszban a végtermékek Bx mennyisége és a D megrendelés ismeretében korrekciót hajtunk végre, amely költséggel jár. Minthogy a korrekciós költség nemcsak x -től, hanem D -től is függ, maga is valószínűségi változó. Az összes költség két tagból áll. Az egyik a közbeeső termékek termeléséhez kapcsolódó (determinisztikus) lineáris költség: cx , a másik pedig a korrekció költségének várható értéke. A feladat az, hogy minimalizáljuk az összes költségünk várható értékét.

Szeretnénk annyit termelni a közbeeső termékekből, hogy a belőlük előállítható végtermékek mennyisége pontosan annyi legyen, amennyi a megrendelés. Ha azonban a megrendelés csak a termelés második szakaszában lesz ismeretes, akkor korrekcióra van szükség. A felesleget értékesíteni kell, ezt csak alacsonyabb áron lehet, illetve ha kevesebbet állítunk elő, mint amire megrendelésünk van, akkor ki kell pótolnunk vásárlással, amelyre pedig csak magasabb áron nyílik mód. Jelölje a k . végtermék esetében ezt az alacsonyabb egységárat q_k^- , a magasabbat q_k^+ , $k = 1, \dots, r$. A termelés második szakaszában a korrekció költségét akarjuk minimalizálni, vagyis a modellt így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r (y_k^+ q_k^+ + y_k^- q_k^-) &\rightarrow \min \\ B_k x + y_k^+ - y_k^- &= D_k, \quad k = 1, \dots, r \\ y_k^+, y_k^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

ahol y_k^+ jelöli a hiányzó mennyiséget a k -dik végtermékből, y_k^- pedig a felesleget.

Így a második szakaszban elvégzendő korrekció minimális költsége is valószínűségi változó, amely adott x esetén szintén diszkrét értékeket vehet fel, nevezetesen a fenti célprogramozási feladat minimális értékeit abban az esetben, amikor a jobboldalon a D lehetséges értékeit helyettesítjük be. Ha D s számú lehetséges értékkel bír, akkor tehát s számú lineáris programozási feladatot kell megoldanunk, az l -dik feladat a

következő:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r (y_{lk}^+ q_k^+ + y_{lk}^- q_k^-) &\rightarrow \min \\ B_k x + y_{lk}^+ - y_{lk}^- &= D_k^{(l)}, \quad k = 1, \dots, r \\ y_{lk}^+, y_{lk}^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, r \end{aligned}$$

ahol $D^{(l)}$ a D lehetséges értéke, y_{lk}^+, y_{lk}^- ($k = 1, \dots, r$) az l -dik feladat változóit jelöli. Az optimális célfüggvényérték, amely valószínűségi változó, várható értékét is meg tudjuk határozni ezen optimális célfüggvényértékek birtokában, természetesen az $x = (x_1, \dots, x_n)$ termelési szintek birtokában:

$$E(x) = \sum_{l=1}^s p_l \min_{B_k x + y_{lk}^+ - y_{lk}^- = D_k^{(l)}, y_{lk}^+, y_{lk}^- \geq 0, k=1, \dots, r} \sum_{k=1}^r (y_{lk}^+ q_k^+ + y_{lk}^- q_k^-),$$

itt p_l annak valószínűsége, hogy D a $D^{(l)}$ értéket veszi fel.

Ne felejtsük el, hogy e második szakaszban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektort, amely a közbeeső termékek termelési szintjét jelenti, adottnak tekintjük. Az x döntési vektor egyben az előállítható végtermékek mennyiségét is képviseli, ezért a modellező érdeklődése erre kell, hogy irányuljon.

A feladat olyan x termelési szint vektort meghatározni, amely mellett az összes költség várható értéke minimális.

Megfontolásaink a következő nagyméretű lineáris programozási modellhez vezettek:

$$\begin{aligned}
cx + \sum_{l=1}^s p_l \sum_{k=1}^r (y_{lk}^+ q_k^+ + y_{lk}^- q_k^-) &\rightarrow \min \\
Ax &\leq b \\
x &\geq 0 \\
B_k x + y_{1k}^+ - y_{1k}^- &= D_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, r \\
y_{1k}^+, y_{1k}^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, r \\
B_k x + y_{2k}^+ - y_{2k}^- &= D_k^{(2)}, \quad k = 1, \dots, r \\
y_{2k}^+, y_{2k}^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, r \\
&\dots \\
B_k x + y_{sk}^+ - y_{sk}^- &= D_k^{(s)}, \quad k = 1, \dots, r \\
y_{sk}^+, y_{sk}^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, r
\end{aligned}$$

A leírt modell a kétlépcsős programozási modell, szintén a sztochasztikus programozás körébe tartozik.

Legyen egyszerű példánk egy faipari üzem, ahol az első szakaszban a fa kitermelése történik, a második szakaszban a feldolgozása. A következő termelési periódusban (hónapban, évben, stb.) a legfeljebb T tonna kitermelhető fa egy részéből fűrészárú készül, más részéből rétegelt lemez, stb. Az első szakaszban a vállalatnak azt kell meghatároznia, hány tonna szálfát termeljen ki fűrészárú céljára, rétegelt lemez céljára, stb. A kivágott szálfá egy tonnájából b_1 köbméter fűrészárú készül, b_2 tábla rétegelt lemez, stb. Ha x_1, \dots, x_n a kivágott szálfá tonnája az első, második, n -edik célra, akkor a végtermékek mennyiségét (a fűrészárú, rétegelt lemez, stb.

termékekből) a $\begin{pmatrix} b_1 x_1 \\ b_2 x_2 \\ \dots \\ b_n x_n \end{pmatrix}$ vektor képviseli, vagyis $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$.

Két lehetséges megrendelés képzelhető el: $D^{(1)} = \begin{pmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ \dots \\ D_n^{(1)} \end{pmatrix}$ és $D^{(2)} = \begin{pmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \\ \dots \\ D_n^{(2)} \end{pmatrix}$,

az első $\frac{1}{3}$, a második $\frac{2}{3}$ valószínűséggel. Egy tonna szálfa feldolgozási költsége c_1 , ha fűrészárú készül belőle, c_2 , ha rétegelt lemez, stb. Az összes feldolgozási költség, és egyben ennek várható értéke: $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. Az összes költség a feldolgozás költségének és a korrekciós költségnek az összege, amelynek várható értékét minimalizáljuk. Megoldandó lineáris programozási feladatunk így $n + 2n + 2n = 5n$ változót, $1 + n + n + 2n + n + 2n = 7n + 1$ feltételt tartalmaz és a következő lesz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (q_k^+ y_{1k}^+ + q_k^- y_{1k}^-) + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n (q_k^+ y_{2k}^+ + q_k^- y_{2k}^-) &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &\leq T \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \\ b_1 x_1 + y_{11}^+ - y_{11}^- &= D_1^{(1)} \\ &\dots \\ b_n x_n + y_{1n}^+ - y_{1n}^- &= D_n^{(1)} \\ y_{1k}^+, y_{1k}^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, n; \\ b_1 x_1 + y_{21}^+ - y_{21}^- &= D_1^{(2)} \\ &\dots \\ b_n x_n + y_{2n}^+ - y_{2n}^- &= D_n^{(2)} \\ y_{2k}^+, y_{2k}^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

6. fejezet

Történet, ajánlott könyvek.

A lineáris programozás az operációkutatás központi területe.

Az "operációkutatás" elnevezés a II. világháború alatt keletkezett, a tudományos eredményeknek a hadműveleti tervekben való alkalmazására utal. Először a brit, majd az amerikai hadvezetés nagyszámú tudóst hívott, közöttük nagyszámú matematikust segítségül, hogy közreműködjenek stratégiai és taktikai katonai problémák kezelésében, az erőforrásoknak az egyes katonai tevékenységek közötti elosztásában, bonyolult szállítási és utánpótlási feladatok megtervezésében. Ezek a tudóscsoportok alkották az első operációkutatókat.

A terület tudományos eredete és gyökere azonban sokkal korábbi. Egyszerű matematikai programozási modelleket közölt már a közgazdász Quesnay 1759-ben és Walras 1874-ben; Neumann János 1937-ben és Kantorovich 1939-ben hasonló műfajú de sokkal erőteljesebb és bonyolultabb gazdasági modelleket fejlesztettek ki. A lineáris modellek matematikai megalapozása a 19. század fordulójára esik. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságáról szóló, jelentős fejlődést elindító eredményét Farkas Gyula 1901-ban publikálta. König Dénes és Egerváry Jenő kutatásai az 1910-es, 20-as években a hozzárendelési feladat megoldására szolgáló u.n. "magyar módszerhez" vezettek. Nagyhatású korai kutatásokra szolgálnak például Markov dinamikus modellekre vonatkozó munkái és Erlang úttörő tanulmányai a sorbanállási modellek területén - Markov 1856 és 1922 között élt, Erlang pedig 1878 és 1929 között.

Bár e korai eredmények a tudományos közéletben elismerést váltottak ki, a matematikai modellek alkalmazása az üzleti életben és gazdasági döntésekben csak az utóbbi bő fél évszázad fejleménye. A II. világháborút követően világossá vált, hogy a gazdasági és üzleti életben felmerülő problémák alapvetően ugyanolyanok, mint amilyenekkel a háború idején a kutatók szembesültek. E felismeréshez az összegyűlt elméleti és módszertani ismeretek mellett a rendelkezésre álló technikák, mindenekelőtt a számítógép gyors fejlődése is hozzájárult, hiszen komplikált feladatok megoldása a megoldási módszer birtokában sem képzelhető el papíron, ceruzával. Az "operációkutatás" mint tudományterület hamarosan meggyökeresedett, egyetemi tanszékek alakultak, tudományos társaságok, folyóiratok jöttek létre, konferenciák szerveződtek ilyen néven.

A lineáris programozásnak óriási irodalma van. Itt néhány olyan könyvet-tankönyvet sorolok fel, amelyek áttanulmányozásával az olvasó megismerkedhet a terület különböző vonásaival. Céлом az is, hogy a szerzőkre mint az "operációkutatás" kiemelkedő művelőire is felhívjam a figyelmet. A felsorolt könyvek többsége 30-40 évvel ezelőtt jelent meg, a lineáris programozás hőskorában. Azóta ugyan sok-sok új eredmény született, amelyek gazdagították a tudományterületet, a nagy felismerések azonban a hőskorban születtek. E könyvek nemcsak korszerűek ma is, hanem a szerzők nagy magyarázó lendülete és erőfeszítése eredményeként főként az ismereteiket megalapozni kívánók számára talán könnyebben megérthetők. Sajnos csak angol nyelven olvashatók, néhány egyetemi könyvtárban illetve akadémiai intézeti könyvtárban megtalálhatók.

G.B. Dantzig a lineáris programozás alapító atyái közül a legismertebb, a simplex módszer az ő nevéhez fűződik. Könyve (Dantzig, G.B.: "Linear programming and extensions", Princeton University Press, 1963) az első nagy elméleti és módszertani összefoglaló mű.

D. Gale úttörő munkájában (Gale, D.: "The theory of linear economic models", McGraw-Hill, 1960) a lineáris gazdasági modelleket egységes szerkezetbe foglalta és egyúttal a lineáris programozás gondolkörébe helyezte.

H.M. Wagner nagyszabású és egyben szórakoztató stílusú könyvét (Wagner,

H.M.: "Principles of operations research with applications to managerial decisions", Prentice-Hall Inc., 1969) azoknak ajánlom, akik lineáris programozáshoz vezető széleskörű alkalmazási lehetőségek iránt érdeklődnek.

O.L. Mangasarian munkája (Mangasarian, O.L.: "Nonlinear programming", McGraw-Hill, 1969) a matematikai programozás klasszikus kézikönyve, első része lineáris programozással foglalkozik.

A Hillier-Liebermann szerzőpáros tankönyve (Hillier, F.S., Lieberman, G.J.: "Introduction to operations research", Holden Day Inc., 1986) több angol nyelvű kiadást ért meg, magyar fordításban 1994-ben jelent meg, megkapható vagy megrendelhető egyebek között a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem könyvesboltjaiban.

Vektorterekről való ismereteiket az itt tárgyaltaknál részletesebben felidézni szándékozók-
nak ajánlom Dancs István és Puskás Csaba "Vektorterek" című könyvét, megjelent az AULA kiadó gondozásában 2001-ben.

