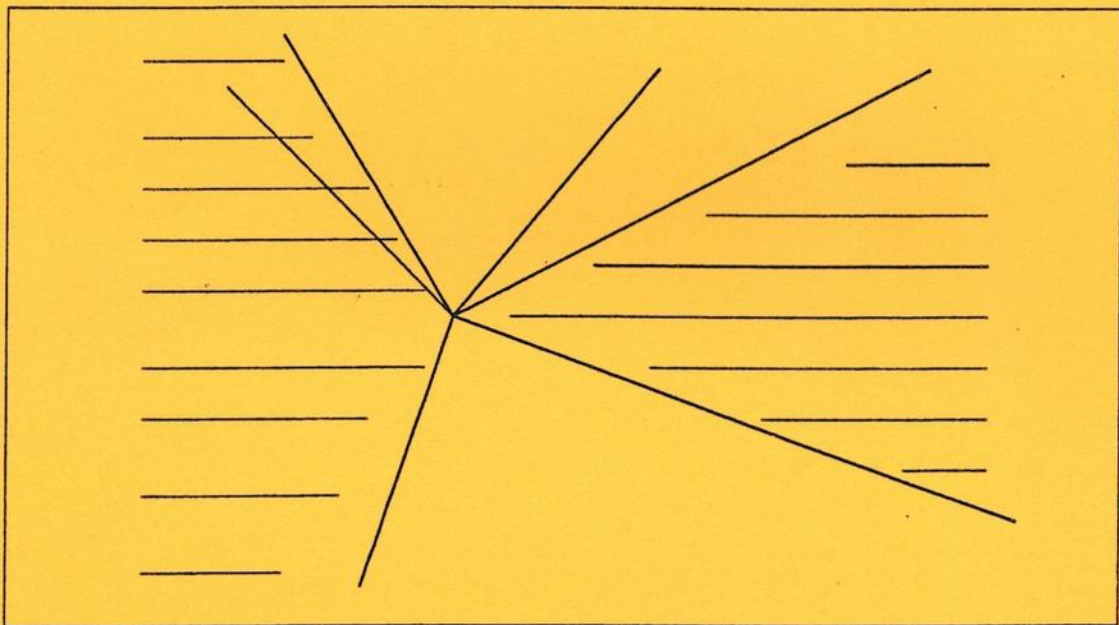


OPERÁCIÓKUTATÁS

No.4.

Hujter Mihály

PERFEKT GRÁFOK ÉS ALKALMAZÁSAIK



Budapest 2003

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Szomszédosság, elérhetőség, távolság	7
3. Stabilitás és klikkek	17
4. Perfekt gráfok	23
5. P4-szerkezet és perfektség	31
6. Perfekt magyar módszer	35
7. Merev körrel perfekt	49
8. Valószínűségi becslések	63
9. Perfekt gráfok alapvető algoritmusai	67
10. Irodalom és további kutatások	69

1. fejezet

Bevezetés

Ebben a jegyzetben úgynevezett egyszerű gráfokról lesz szó. Egyszerű gráfon egy olyan irányítatlan, hurok- és többszörös élek nélküli gráfot értünk, melynek legalább egy pontja (más néven csúcsa) van, de a pontok száma véges. Következésképpen az élek száma is véges, mert ha a csúcsok számát n jelöli, akkor az élek száma legalább 0 és legfeljebb $n(n-1)/2$.

Egy egyszerű gráf szokásos jelölése: $G = (V, E)$. Itt a G magát a gráfot jelöli (angolul: *graph*). Az elnevezés arra utal, hogy a gráfokat sokszor le is szokták rajzolni. Nem keverendő össze az általunk használt gráf fogalom a függvények ábrázolásánál használatossal (ahol — sajnálatos módon — szintén a *graph* angol szót használják).

A V jelölés a *vertex* angol szóból ered. (Eredetileg persze ez a szó sem angol volt, mint ahogyan a *graph* szó sem.) A *vertex* szó valami olyasformát jelent, mint a magyar *csúcs*, *szögpont*, *sarokpont*, *elágazási pont* kifejezések. Például a kocka csúcsainak a neve angolul: *vertices*, mely szó a *vertex* szó többes száma. Magyarul a *vertex* szó helyett leginkább a *szögpont* vagy *csúcs* szavakat használjuk, vagy csak egyszerűen a *pont* szót. Meg kell azonban említenünk, hogy az angol nyelvű szakirodalomban is gyakran a *node* szót használják a *vertex* helyett. A *node* szó leghelyesebb magyar fordítása talán ez lenne: *gócpon*t vagy *csomópont*.

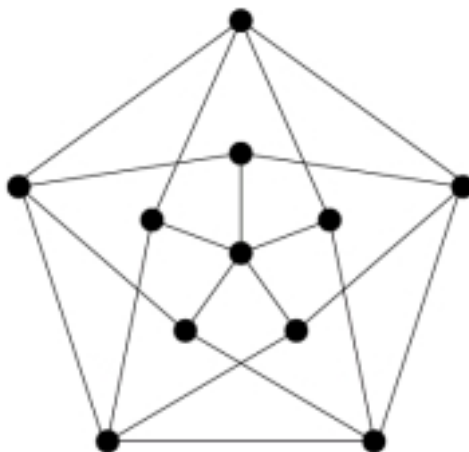
A V betű tehát a gráf csúcsai halmazát azonosítja. De egy véges halmaz önmagában meglehetősen unalmas valami. (A végtelen halmazok már sokkal érdekesebbek lennének, de most nem az a mi vizsgálataink tárgya.) Egy halmaz elemei

között alapjában semmi kapcsolat sincs. Az egyszerű gráfokban az E betűvel jelölt halmaznak az a szerepe, hogy egyfajta nagyon egyszerű kapcsolatot kijelöljön a csúcsok között. Az E betű az angol *edge* szóból származik, és az magyarul *vágóél* jelentésű. De egyszerűen mi csak az *él* vagy *gráfél* szavakat használjuk. Például egy kocka csúcsait — legalábbis bizonyos csúcspárokat — is élek kötik össze; ezek neve is angolul az, hogy *edge*. Az E betű tehát a szóban forgó gráf éleinek halmazát jelöli. Magyarul: *élhalmaz*.

De mi is az, hogy egy él? Nem más, mint az elképzelhető legegyszerűbb kapcsolat két pont között; egyszerűen csak annak a megjelölése, hogy a két pont között van kapcsolat. A számítógépes információs világunkban a legelemibb információ: egyetlen bit annak jelölésére, hogy két dolog össze van valahogyan kapcsolva.

A *modern ember* biológiai faja talán százezer éve lakja a Földet, de harmincezer éve még élt egy másik emberszabású faj is, a *neandervölgyi ember*. A két faj között olyan a távolság, mint mondjuk a szamár és a ló között. A régészeti leletekből úgy tűnik, hogy a neandervölgyiek is műveltek valamilyen egyszerű, kezdetleges matematikát. De ők kihaltak. A modern ember faja talán tízezer éve élesztette fel (vagy hozta létre újra) a matematikát. A matematika legfontosabb alapfogalmai: szám és számok összeadása, illetve pont és pontok egyenessel való összekötése. A modern ember matematikájának legutóbbi évtizedeiben a közízlés arra hajlik, hogy a legelemibb matematikai fogalmakat is a *halmaz* és a *halmaz eleme* fogalmakkal fejezzük ki. Ehhez a szokáshoz alkalmazkodva az mondjuk, hogy egy *gráfél* nem más, mint egy kételemű halmaz, melynek két eleme az a két csúcs, melyeket ez a szóban forgó gráfél összekapcsol. Tehát ha az egyik csúcsot u jelöli, a másikat meg v , akkor azt az élt, mely az u és v csúcsokat kapcsolja össze, így írhatjuk fel: $\{u, v\}$. De az egyszerűség kedvéért az $\{u, v\}$ jelölés helyett azt is szoktuk írni, hogy uv . Itt természetesen bízunk az olvasó józanságában, hogyha például u a 6-os, v a 9-es számmal azonosított, akkor nehogy azt gondolja, hogy az uv él száma a 69-es, de azt se gondolja, hogy az 54-es (merthogy 6-szor 9 az 54); ilyen esetben az uv élt helyesen így olvassuk ki: a hat-kilences él.

Az E halmaz elemei tehát élek. De — természetesen — csak olyan élek lehetnek



1.1. ábra.

az E halmazban, melyek — mint kételemű halmazok — részhalmazai V -nek. A V halmaz összes kételemű részhalmazainak halmazát így is szokták jelölni: $\binom{V}{2}$. Ebben nyilván $n(n-1)/2$ elem van, ha n jelöli a V halmaz elemeinek számát, azaz ha $|V| = n$. Képlettel írva: $|\binom{V}{2}| = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

Legyen adva egy nem üres véges halmaz V és legyen adva egy (esetleg üres) $E \subseteq \binom{V}{2}$. Ha most a V és E halmazokat együtt akarjuk tekinteni, akkor jelölésben egy zárójellel kapcsoljuk össze a két halmazt: (V, E) . És azt mondjuk, hogy ez a kettő együtt egy *gráf*.

Másféle munkákban másféle gráfokról is szó lehet. Ha azoktól akarjuk megkülönböztetni a mi gráfjainkat, azt mondjuk, hogy a mi gráfjaink többszörös, hurok- és irányított élek nélküli úgynevezett egyszerű véges gráfok.

A gráfokat néha le is szokták rajzolni. A papíron egy-egy pötty jelöli a csúcsokat, és folyamatos vonallal való összeköttetés az éleket. Egy gyönyörű gráf rajzát itt most megadjuk:

Ha képlettel akarnánk megadni a rajzon látható gráfot, akkor ezt például így tehetnénk meg: A gráf (V, E) , ahol

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e\}$$

és

$$E = \{01, 02, 03, 04, 05, 1b, 2a, 2c, 3b, 3d, 4c, 4e, 5d, 5a, ab, bc, cd, de, ea\}$$

2. fejezet

Szomszédosság, elérhetőség, távolság

Ha adott egy (V, E) gráf, akkor két különböző pontról azt mondjuk, hogy a két pont *szomszédos*, ha az általuk alkotott kételemű halmaz él (azaz eleme az E élhalmaznak). Ha adott két nem feltétlenül különböző pont, u és v , akkor azt mondjuk, hogy u és v *egymásból elérhető*, ha vagy $u = v$, vagy u és v szomszédosak, vagy pedig egy harmadik eset áll fenn, amelyről mindjárt részletesebben szólunk. Ha $u = v$, akkor azt mondjuk, hogy u és v távolsága 0. Ha u és v szomszédosak, akkor azt mondjuk, hogy u és v távolsága 1. Ha pedig u és v távolsága sem nem 0, sem nem 1, akkor a $k = 2, 3, \dots$ számokra értelmezzük azt, hogy az u és v távolsága k : a legkisebb olyan számot k tekintjük — ha egyáltalán van ilyen szám —, melyre u valamely szomszédjának és v valamely szomszédjának a távolsága $k - 2$.

Szavakkal: Ha két pont távolsága nem 0 és nem 1, de van közös szomszédjuk, akkor a távolságuk 2. Ha a távolságuk nem 0, nem 1, és nem is 2, de vannak 1 távolságú szomszédjaik (mindegyiknek egy-egy), akkor az eredeti két pont távolsága 3. Ha a két eredeti pont távolsága nem 0, nem 1, nem 2, és nem is 3, de vannak 2 távolságú szomszédjaik (mindegyiknek egy-egy), akkor az eredeti két pont távolsága 4. És így tovább. És akkor lesz a két pont egymásból elérhető, ha a fenti módon értelmezhető a távolságuk (ami tehát mindenképpen valamely nemnegatív szám lesz.)

A 20. század elején fogalmazta meg *König Dénes* a *páros körüljárású gráf* fogalmát. Az eredeti definíciót kissé átfogalmazzuk:

Definíció. Egy gráf *páros körüljárású* vagy röviden csak *páros*, ha tetszőleges két, egymástól páros szám távolságra lévő pontnak egy-egy tetszőleges szomszédját tekintjük, akkor a azok szomszédok is páros távolságra vannak egymástól.

Tán említést sem érdemel, de azért mégis megemlíjtük, hogy itt a fenti definícióban a szereplő egy-egy szomszéd természetesen elérhető egymásból.

A definíció nem érinti azokat a pontpárokat, melyek távolsága esetleg nem is értelmezett. Az ilyen pontpárokról néha — megítélésünk szerint helytelenül — azt mondják, hogy a pontok végtelen távolságra vannak egymástól. (Az elnevezés azért helytelen, mert a *végtelen* szó leginkább a *tetszőlegesen nagy* kifejezés helyett — vagy legalábbis hasonló értelemben — használatos, de ha egy gráfon két pont egymásból nem elérhető, akkor ez egészen mást jelent, mint hogy tetszőlegesen sok lépéssel lehetne az egyik pontból a másikba eljutni.)

Lássunk példákat! Minden olyan gráf páros körüljárású, melyben legfeljebb 2 él van. Erről a definíció alapján könnyen meggyőződhetünk. További példákat nyerünk az alábbiak szerint. Előbb azonban egy újabb definíció következik:

Definíció. Egy (V, E) gráf *két részes*, ha V felbontható két diszjunkt — azaz közös pontok nélküli — részhalmazának, U -nak és W -nek az úniójára úgy, hogy $(\binom{U}{2}) \cap E = \emptyset = (\binom{W}{2}) \cap E$.

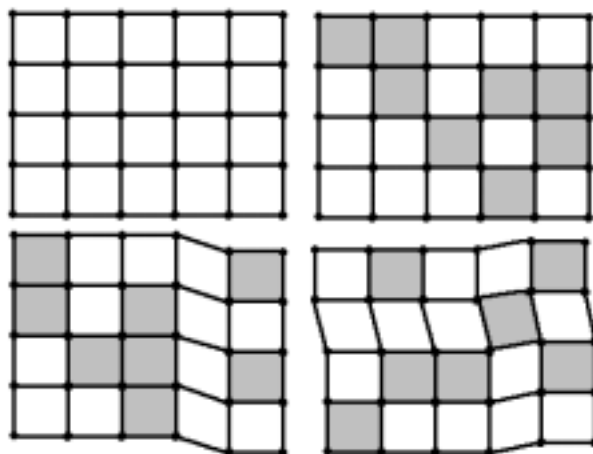
Egy példa két részes gráfra: Álljon V néhány egész számból, és álljon egy véges halmaz H néhány páratlan egész számból, továbbá tegyük fel, hogy $u, v \in V$, $u \neq v$ esetén $uv \in E$ akkor és csak akkor teljesül, ha $u + v \in H$.

Egy példa nem két részes gráfra: a fenti ábrán megadott gráf.

A definíciók alapján könnyen látható, hogy minden kétrészes gráf páros körüljárású. De ennek a megfordítása is igaz:

Tétel. (König Dénes, 1931) Minden páros körüljárású gráf kétrészes.

Bizonyítás. Tekintsünk egy (V, E) páros körüljárású gráfot és egy olyan U részhalmazát V -nek, mely részhalmaznak a lehető legtöbb eleme van, de $(\binom{U}{2}) \cap E = \emptyset$.



2.1. ábra.

Álljon W a $V \setminus U$ halmaz mindazon elemeiből, melyek szomszédosak legalább egy-egy U -beli ponttal. A páros körüljárású tulajdonságból következik, hogy $\binom{V}{2} \cap E = \emptyset$. Az U halmaz elemei számának lehető legnagyobb voltából következik, hogy $V \setminus (U \cup W) = \emptyset$. Ezzel a bizonyítás teljessé vált. \square

A tétel következtében a *páros* szót a *két részes* kifejezés szinonímájaként — azaz vele teljesen azonos értelemben — használhatjuk a továbbiakban, mint gráfok jellemzőjét.

A két részes gráfok számtalan alkalmazási területen hasznosak. Itt most egyet emelünk ki:

Képzeld el, hogy egyenlő hosszúságú acélrudakból egy négyzetrácsos szerkezetet hegesztünk össze az itt közölt ábra bal felső sarkában látható mintára. A keletkezett ablakok közül néhányat vaslemezzel lezárunk, de nem az összes ablakot. Sajnos a rudak találkozásánál a hegesztések műszaki okokból megbízhatatlanok. De ha egy ablakot vaslemezzel borítunk, akkor az ablak körüli négy rúd már erősen egymáshoz lesz rögzítve, mert a vaslemez szélét teljes hosszúságban a rudakhoz hegeszthetjük. Előfordulhat azonban, hogy valamely helyen a szerkezetünk még mindig „nyeklik”. Két ilyen esetet mutat be az ábra alsó része. (A szürke ablakok a vaslemezeket jelzik.)

Matematikailag az a kérdés, hogy a vaslemezek mely elhelyezkedése vonja maga

után azt, hogy az egész szerkezet már merev lesz. Ha az összes ablakot vaslemezzel borítanánk, akkor már nyilván merev lenne a szerkezetünk. De az ábra jobb felső sarka mutatja, hogy a merevséghez nem szükséges minden ablakot belemezelní.

Legyen adva egy lemezelési terv, és most készítünk egy páros gráfot. Legyen U az ablakok (vízszintes) sorainak halmaza, és legyen W a (függőleges) oszlopok halmaza. Legyen továbbá $V = U \cup W$. Most $u \in U$ és $w \in W$ esetén legyen uw egy él a gráfban, ha az u sor és a w oszlop kereszteződése történetesen egy belemezelt ablak. Nyilvánvaló, hogy így egy két részes gráfot nyerünk.

A fentiekben ismertetett műszaki feltételek alapján nyilvánvaló, hogy ha valamely k nemnegatív egész számra és $v, u \in V$ gráfcúcsokra v és u távolsága k , akkor v és u már biztosan nem tud elmozdulni egymáshoz képest. Máskülönb pedig ha valamely $v, u \in V$ gráfcúcsokra nem definiált v és u távolsága, akkor — némi mérnöki meggondolás után — láthatjuk, hogy a szerkezetünk nem merev, mert legalább egy helyen a v és u között még meg tud mozdulni a szerkezet.

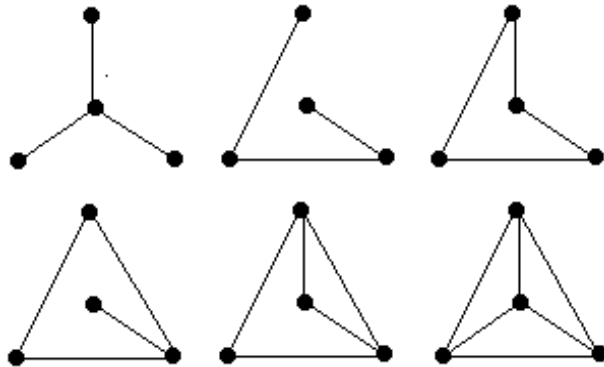
A merevség megállapítása tehát arra a gráfelméleti kérdésre vezet, hogy egy gráfban — mely történetesen most egy páros gráf — bármely két csúcs egymásból elérhető-e.

Egy gráfra — függetlenül attól, hogy páros-e, vagy sem — definiáljuk a következőt:

Definíció. Egy gráf *összefüggő*, ha bármely két csúcsa elérhető egymásból.

Az első ábránkon látható gráf összefüggő. (Az előforduló legnagyobb távolság: 2.) A következő ábrán megmutatjuk az összes olyan összefüggő gráfot, melyeknek négy pontja van.

Egy gráfban egy v pont szomszédjainak számát $d(v)$ -vel jelöljük. Szokás a $d(v)$ számot a v csúcs *fokszámának* is nevezni. De ez az utóbbi elnevezés egyáltalán nem szerencsés, mivel a $d(v)$ számnak semmi köze sincs a geometriai szögekhez, de még a magyar *fok* szó eredeti jelentéséhez sem. A magyar fok szó ugyanis eredetileg kerek lyukat jelentett. Így van a tűnek vagy a fejszének is foka. A *fokos* is, mint régi magyar fegyver, egy olyan fém súlyos szűrő- és vágóeszköz, mely elrejtethető a szegénylegények inge alatt, és melyben van egy lyuk, azaz egy fok, hogy abba a



2.2. ábra.

legénynek csak a vándorbotját kelljen dugni, hogy félelmetes fegyverre tegyen szert. A fok alakja adta az okot, hogy a geometriai szög egységének — annak nemzetközi jelölése miatt — is fok legyen a neve.

Angolul a $\pi/180$ nagyságú szöget is és a $d(v)$ számot is úgy hívják, hogy *degree*. Talán ezért terjedt el a $d(v)$ szám elnevezésére is magyarul a *fokszám* kifejezés. Mi inkább a $d(v)$ számot úgy olvassuk ki, mint a v szomszédjai száma. Jelölje D_E a $d(v)$ számok összegét, ahol az összegzést az összes pontra végezzük. (Az alábbiakból kifog derülni, hogy D_E értéke nem függ V -től, hanem csak E -től; ez indokolja a jelölést.)

Definíció. Azt a (pontosabban egy olyan) gráfot, melyben $E = \emptyset$, *éltelen* gráfnak hívjuk.

Éltelen gráfban nincs két különböző egymásból elérhető pont.

Definíció. Azt a (pontosabban egy olyan) gráfot, melyben $E = \binom{V}{2}$, *teljes* gráfnak nevezzük.

Teljes gráfban bármely két különböző pont egymásból elérhető, sőt a távolság pontosan 1.

Lássunk példákat: A fent ismertetett 4 pontú összefüggő gráfok közül a jobb alsó sarokban lévő gráf teljes gráf. Itt minden pont szomszédjainak száma: 3.

Definíció. Azon, hogy egy gráfból elhagyunk egy élt, azt értjük, hogy a pontok halmazát változatlanul hagyjuk, de az élek halmazát az elhagyandó éllel, mint

elemmel csökkentjük. Azon viszont, hogy egy gráfból egy pontot hagyunk el, azt értjük, hogy előbb elhagyjuk az összes élt, melyek az elhagyandó pont eleme, majd elhagyjuk a szögpontok halmazából a szóban forgó pontot is.

Természetesen él vagy pont elhagyásáról csak akkor van értelme beszélni, ha az eredeti gráfnak legalább két pontja volt.

Definíció Egy (V, E) gráfot *síkba rajzolható* gráfnak nevezünk, ha a szögpontjai felvehetők úgy, mint az euklideszi sík különböző pontjai, melyekre bármely a, b, c, d négy különböző szögpont esetében, amikor $ab \in E$ és $cd \in E$, akkor a síkon az ab szakasznak és a cd szakasznak nincs közös pontja.

A fenti ábra mutatja, hogy a 4 pontú összefüggő gráfok mind síkba rajzolhatók. Nem nehéz belátni, hogy ha egy gráfnak legfeljebb 5 pontja van, akkor majdnem mindig síkba rajzolható; csak egyetlen kivétel van, az 5 pontú teljes gráf.

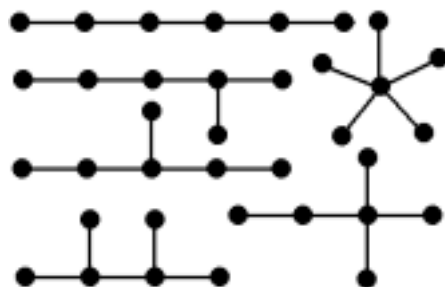
Tétel. Egy n pontú (V, E) gráfban $n(n-1) \geq 2|E| = D_E$. Ha a gráf összefüggő, akkor $|E| \geq n-1$. Ha a gráf összefüggő, de bármely él elhagyásával már nem marad összefüggő, akkor $|E| = n-1$ és ilyenkor a gráf még páros is és még síkba rajzolható is.

Bizonyítás. A bizonyítást n szerinti indukcióval végezzük. Az $n = 1$ eset triviális. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és hogy bármely $n-1$ pontú gráfra már bizonyított a tétel. Mivel minden élnek két szögpontja van, ezért $2|E| = D_E$. Mivel $E \subseteq \binom{V}{2}$ és $|\binom{V}{2}| = \binom{n}{2}$, ezért $n(n-1) \geq 2|E|$. Mostantól tegyük fel, hogy az n pontú (V, E) gráf összefüggő. Tekintsünk egy olyan v csúcsot, melyre $d(v)$ minimális. Az összefüggőség miatt $d(v) \geq 1$. Vegyük észre, ha $d(v) = 1$, akkor a v csúcs elhagyása révén az indukciós bizonyítás könnyen befejezhető. A többi esetnél pedig feltehetjük, hogy $d(v) \geq 2$. Ekkor viszont — szintén indukcióval — hamar ellentmondásra jutunk, hiszen $d(v)$ minimális volt. \square

Definíció Egy n pontú, $n-1$ élű összefüggő gráfot *fa* gráfnak nevezünk.

A fentiek szerint tehát a fa gráfok mind síkba rajzolhatók.

Az itt következő ábrán felsoroljuk az összes olyan fa gráfot, melyek 6 szögpontja van. Ugye nem kell indokolnunk, miért így nevezték el ezeket a gráfokat? A fa



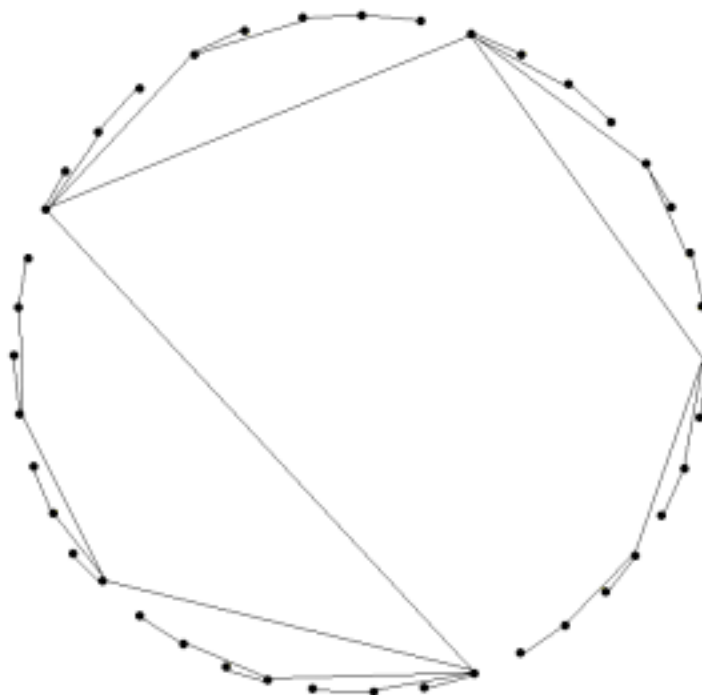
2.3. ábra.

gráfokat — többek között — a kémiában, a molekulák szerkezetének vizsgálatakor alkalmazzák. Például a C_6H_{14} összegképletű szénhidrogéneknek a molekuláit a fa gráfjuk alapján lehet megkülönböztetni: *hexán*, *2-metil-pentán*, *3-metil-pentán*, *2,2-dimetil bután* és *2,3-dimetil bután*. (Házi feladat: Egy szerves kémiai könyvben utána kellene nézni ezen anyagok szerkezeti képletének!)

A vegyészek már a 18. században is rajzoltak fa gráf jellegű ábrákat a molekulák ábrázolására. Az ismert angol matematikus *Cayley* 1857-től alkalmazott matematikai módszereket ezekre a fa gráfokra. Olyan tételeket bizonyított, melyeknek kémiai következményei is fontosak. Nevezetesen a szénhidrogén gáz vagy gőz tömegsűrűségéből megállapítható a szerkezeti képlet, abból pedig megkapható az *izomerek* száma.

De ugorjunk vissza még régebbre az időben! Krisztus után 66-ban a zsidók szabadságharcot indítottak a rómaiak ellen. A galileaiak vezére az akkor körülbelül 30 éves *Jószéf ben Mattatiás* volt, aki később *Josephus Flavius* néven vált híres történetíróvá. Akkor a szabadságharcban árulás következtében Jószéfnak csak 40 embere maradt, akikkel egy barlangban talált menedéket. Nem akartak a rómaiak kezére esni, ezért úgy döntöttek, inkább megölik egymást. Egyedül Jószéf élte túl a tragédiát.

A 41 harcos egy gráf szögpontjai. Két szögpontot élt alkot, ha az egyik harcos ledöfi a másikat. Mivel 40 haláleset történt, 40 az élek száma. Egy halott már nem tud senkit sem megölni, ezért a gráf nem lehet más, mint egy fa. A mellékelt ábra mutatja ezt a fa gráfot.



2.4. ábra.

Arról már nem írt Josephus Flavius, pontosan hogyan történtek a halálesetek. *Hercule Poirot* belga detektív a következőképpen rekonstruálta az eseményeket: Jószerf sorbaállítja az embereit, hogy egy kört alkossanak, mindegyikük a kör belseje felé fordulva, és maga Jószerf is beáll közéjük. Mindegyik harcos bal kezét a tőle balra álló fejére teszi, jobbájában pedig a fegyverét tartja. Jószerf kiadta a parancsot, hogy ki kezdje. A megszólított harcos balra fordul, és ledöfi azt, akinek a fején van a bal keze. Ezután bal kézzel hátratulja a halottat, kissé balra lép, és rövidebbre zárja a kört. Mihelyt a most ledöfött harcostól balra álló harcos észreveszi, hogy kicserélődik a fején a kéz, tudja, hogy ő kerül sorra a döfésben. Ugyanúgy jár el, mint az előbb az, akinek a bal keze éppen most a fején van. És így tovább jár a gyilkolás körbe-körbe, miközben a kör egyre csak szűkül.

Az elemzéshez *Hercule Poirot* hozzátette, hogy ben Mattatiás ravaszságára vall, hogy előre tudta, melyik harcosnak kellett kiadnia a kezdésre a parancsot, ha ő maga akart az egyetlen túlélő maradni. (Az ábrán a legfelső szögpont jelzi azt a harcost, aki elkezdi az öldöklést. Lent kissé jobbra állt a vezér; ahhoz, hogy túlélhesse a

eseményeket, neki magának 5 társát kellett hősi halottá tennie.)

3. fejezet

Stabilitás és klikkek

Fél évszázada *Neumann János* bizonyos játékok matematikai hátterét vizsgálva bevezette egy gráfban a szögpontok halmaza egy *stabil* részhalmazának fogalmát.

Definíció. Valamely (V, E) gráfban egy nem üres $U \subseteq V$ halmaz *stabil*, ha U -nak semelyik két eleme sem szomszédos.

Vegyük észre, hogy maga V akkor és csak akkor stabil, ha a gráf éltelen. Az is nyilvánvaló, hogy egy (V, E) gráfban $u, v \in V$, $u \neq v$, $uv \notin E$ esetén $\{u, v\}$ stabil.

A stabil pontthalmazokat egy ismert — és megítélésünk szerint nagyon érdekes — játék, a *nim* játék példájával szemléltetjük. A régi angolszász szó magyarra talán úgy fordítható, hogy *vedd el*. Adva van három kupac gyufaszál, egyikben 3, másikban 5, harmadikban 7 gyufával. Két játékos felváltva lép, és egy lépés abból áll, hogy a soron következő játékos bármelyik kupacot kiválaszthatja, és abból bármennyi gyufát elvehet. Szabad a teljes kupacot elvenni, de egyszerre csak egy kupacból lehet elvenni, és legalább egy gyufát el is kell venni. Az a játékos nyer, amelyik a legeslegutolsó gyufaszálat el tudja venni (azaz amelyiknek már csak egyetlen kupac marad).

A mindenkori állást 3 nemnegatív egész szám jelezheti: a, b, c , mégpedig úgy, hogy $7 \geq a \geq b \geq c \geq 0$; $5 \geq b$; $3 \geq c$. Az ilyen (a, b, c) számhármások alkossák egy gráf szögpontjainak halmazát. Két szögpont-számhármás akkor alkosson élt, ha az egyik állásból át lehet lépni a másik állásba. Például a $(6, 5, 1)$ és a $(5, 4, 1)$

szögpontok élt alkotnak, mert a 6 szál gyufából szabad elvenni 2 darabot.

Ha én vagyok az egyik játékos, akkor bizonyos állásokból tudok nyerni, másokból pedig nem. (Itt most magamról is és az ellenfelemről is feltételezem, hogy elég okosak vagyunk ehhez a játékhoz; tehát ha logikailag van valamire mód és lehetőség, akkor azt képesek is vagyunk kitalálni.)

Jelölje U mindazon állások halmazát, melyekből én nem bírok nyerni, ha éppen én következek. Vegyük észre, hogy U csak stabil halmaz lehet, mert ha volna benne két szögpont-számhármas úgy, hogy az egyikből a másikba lehet lépni, akkor — definíció szerint — az utóbbiból az ellenfelem sem bírna nyerni, tehát én az előbbiből mégiscsak nyerhetnék. Másrészt viszont ha a stabil U halmaz bármely szögpont-számhármas eleméből is lépek egyet, azaz átlépek egy szomszédos szögpont-számhármasra, definíció szerint az ellenfelem vissza tud lépni U -ba. Ez a jelenség indokolja a *stabil* elnevezést. (Megjegyezzük, hogy — véletlen folytán — a stabil jelentésű angol *stable* szónak *istálló* jelentése is van. Neumann istállója tehát olyan versenylovakokkal van tele, melyek csak veszíteni tudnak!)

Ha már felcsigáztuk a nim játékkal kapcsolatban az érdeklődést, eláruljuk, hogy itt mi lesz a szóban forgó U stabil ponthalmaz. Ennek megadásához minden (a, b, c) számhármaszt írjunk át olyan alakra, hogy a, b, c mindegyike különböző kitevős 2-hatványok összege legyen: Például $(7, 5, 3) = (4 + 2 + 1, 4 + 1, 2 + 1)$ vagy $(5, 4, 0) = (4 + 1, 4, 0)$. Most az U halmazt mindazon (a, b, c) számhármasok alkotják, melyekben minden előforduló 2-hatvány-tag pontosan 2-ször szerepel. Tehát az U elemei a következők:

$$(0, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 2, 0), (2 + 1, 2 + 1, 0),$$

$$(2 + 1, 2, 1), (4, 4, 0), (4 + 1, 4 + 1, 0), (4 + 1, 4, 1),$$

$$(4 + 2, 4, 2), (4 + 2, 4 + 1, 2 + 1),$$

$$(4 + 2 + 1, 4, 2 + 1), (4 + 2 + 1, 4 + 2, 2).$$

(Gyakorlásképpen ellenőrizendő, hogy ezek a szögpontok valóban egy stabil halmazt alkotnak!) Mindebből már látszik, hogy az eredeti játékot az a játékos nyerheti meg, aki az első lépést megteszi. De csak akkor nyerhet, ha a kezdeti $(7, 5, 3)$

szögpont-számhármáról a $(6, 5, 3)$ vagy $(7, 4, 3)$ vagy $(7, 5, 2)$ szomszédos szögpont-számhármak valamelyikére lép. (Hogy melyikre, az mindegy.)

Térjünk vissza az általános egyszerű gráfokhoz! Egy nem éltelen (V, E) gráfról könnyen látható, hogy akkor és csak akkor két részes, ha V előáll két darab (nem feltétlenül diszjunkt) stabil halmaz úniójaként. Ez az észrevétel vezet a következő definícióhoz:

Definíció. Valamely $k = 1, 2, \dots$ szám esetében egy (V, E) gráfra azt mondjuk, hogy k részes, ha V előáll k darab stabil halmaz úniójaként.

Világos, hogy egy n pontú gráf mindig n részes, továbbá akkor és csak akkor nem $n - 1$ részes, ha teljes gráf. Csak az éltelen gráfok 1 részesek, és csak a páros gráfok 2 részesek.

A 20. század matematikájának egyik legismertebb eredménye a következő, melyet még a hidrogénbombát kifejlesztő *Teller Ede* is alkalmazott egyik kémiai dolgozatában. (Ennek az alkalmazásnak az az érdekessége, hogy amikor Teller felhasználta a matematikai tényt, akkor arra még csak hibás bizonyítások voltak ismertek. Mindezek ellenére a Teller vezette kutatócsoportnak — felhasználva többek között Neumann János zsenialitásának és kemény munkájának sok más eredményét is — végül mégiscsak sikerült begyűjtani a hidrogénbombát, és — sokak vélekedése szerint semmi mással, hanem éppen ezzel — sikerült elérni, hogy a hidegháború ne csapjon át atomháborúvá, sőt még azt is, hogy ne az amerikai, hanem a szovjet gazdaság roppanjon össze a fegyverkezési hajszá következtében.

Tétel. Minden síkba rajzolható gráf 4 részes.

Ez a tétel — melynek bizonyítása nem is észveszejtően nehéz, csak kényelmetlenül hosszú — inkább olyan változatban ismeretes, mint a *térképek négy színnel való színezhetősége*. Ha egy kontinensen négy vagy több ország úgy helyezkednek el, hogy mindegyik ország „egy darabban van”, akkor 4 szín felhasználásával kiszínezhető a kontinens térképe úgy, hogy a szomszédos országok (azaz olyan országok, melyeknek akárcsak 1 méter közös határszakaszuk van) mindig különböző színt kapjanak.

A gráfelméleti eredmények alkalmazásai között nagy jelentőségűek az ütemezési

alkalmazások. Ilyenre mutatunk egy példát:

Egy építő vállalatnak 5 nagy daruja van, és minden építkezésnél előre meghatározott napok között szükség van egyre a nagy daruk közül. Az már mindegy, hogy a nagy daruk közül melyiket viszik melyik építkezésre. Az egyes építkezések jelentik majd egy gráf szögpontjait. Egy uv gráfél akkor merül fel, ha időbeni ütközés miatt, vagy pedig földrajzi okokból adódó lassú átszállítási lehetőségek miatt, vagy esetleg más összeférhetetlenség miatt az u és v építkezésekhez nem vehető igénybe egyazon daru. Ellátható-e minden építkezés daruval, ez itt a kérdés. Átfogalmazva: A gráf 5 részes-e?

Legyen $k \geq 3$ egy rögzített egész szám. *Turán Pál* 1941-ben és 1954-ben megjelent dolgozataiban két fontos kérdést vizsgált. Egyrészt azt, legfeljebb hány él lehet egy olyan n pontú gráfban, ami nem k részes. Ez még nem olyan nagyon nehéz kérdés! Készítsünk ugyanis egy gráfot a következőképpen: Tekintsünk n szögpontot úgy, mint az $1, 2, \dots, n$ számokat, és tekintsük mindazokat az uv éleket $1 \leq u < v \leq n$ esetén melyekre u és v különböző maradékot adnak a $k - 1$ számmal, mint osztóval való maradékos osztáskor. Jelölje $E_{n,k}$ az így nyert élek halmazát.

Definíció. A $(\{1, \dots, n\}, E_{n,k})$ gráf az n pontú, $k - 1$ részes *Turán gráf*.

Az könnyen látható, hogy ez a gráf valóban $k - 1$ részes, és azt sem nehéz megmutatni, hogy

$$|E_{n,k}| = \frac{(k-2)(n^2 - r^2)}{2(k-1)} + \frac{r(r-1)}{2}$$

ahol az r szám az n számnak a $k - 1$ számmal való maradékos osztásakor keletkező maradékot jelöli.

A másik — mélyebb — eredményt azzal érte el *Turán Pál*, hogy megmutatta, hogy ha n pontú gráfnak több éle van, mint a fenti szám, akkor nemcsak, hogy $k - 1$ részes nem lehet, hanem még olyan k szögpontja is van, melyek közül bármely kettő szomszédos.

Építési daruk nyelvére lefordítva *Turán* eredménye ez: Ha mondjuk $n = 23$, akkor

$$|E_{23,6}| = \frac{(6-2)(23^2 - 3^2)}{2(6-1)} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 211,$$

ezért ha ennyi darabnál több ütközés van az építkezések között, akkor nem is kell megvizsgálni a lehetőségeket, mert biztosak lehetünk abban, hogy az 5 daru nem lesz elég. Ez nagyon mutatós eredmény, de a darusok nem nagyon tudják használni! Nekik ugyanis a fenti számnál lényegesen kevesebb ütközéssel van gondjuk, de mégsem világos számukra, hogy elég lesz-e az 5 daru. A gráf szerkezetének részletes vizsgálata nem kerülhető ki!

A gráfok szerkezetének részletesebb vizsgálatához szükség lesz a következő fogalomra:

Definíció. A (V, E) gráfnak $\emptyset \neq U \subseteq V$ esetén az $(U, E \cap \binom{U}{2})$ gráf *feszített részgráfja*.

Szavakkal fogalmazva: Egy gráfból úgy kaphatunk egy feszített részgráfot, ha elhagyjuk néhány pontját (lehet, hogy 0 pontot, de semmiképpen sem az összes pontot).

Könnyen látható, hogy egy éltelen gráfnak minden feszített részgráfja is éltelen, egy teljes gráfnak minden feszített részgráfja is teljes gráf, egy nem éltelen gráfnak feszített részgráfja a 2 pontú teljes gráf. További példák: Az n pontú $k - 1$ részes Turán gráf feszített részgráfja az $n + 1$ pontú $k - 1$ részes Turán gráfnak.

Definíció. A (V, E) gráfban $\emptyset \neq K \subseteq V$ esetén K egy *klikk*, ha a $(K, E \cap \binom{K}{2})$ feszített részgráf teljes gráf. A klikk *maximális*, ha nem részhalmaza egyetlen másik klikknek sem. A klikk *maximum*, ha nincs olyan másik klikk, aminek több pontja lenne.

Lássunk példákat: Az éltelen gráfokat az jellemzi, hogy a klikkjeik egyetlen eleműek. Egy nem éltelen páros gráf klikkjei az élek. Az 1.1. ábrán megadott gráf klikkjei is azonosak az élekkel, pedig az a gráf nem páros. A 2.4. ábrán látható hat összefüggő gráf közül az alsó három nem páros. Ezek közül a baloldalinak 2 klikkje van: az egyik 2, a másik 3 elemű. A középsőnek is 2 klikkje van, és itt mindegyik klikk 3 elemű. A jobboldali gráf — teljes gráf lévén — csak egyetlen klikket bír, a teljes szögponthalmazt.

Definíció. A $G = (V, E)$ gráf *maximum klikk mérete*, $\omega(G)$, a maximum klikk

pontjai számát jelöli. A gráf *stabilitási száma*, $\alpha(G)$, a legnagyobb elemszámú stabil halmaz elemeinek száma.

Például az 1.1. ábrán látható gráfra $\omega = 2$ és $\alpha = 5$. Egy éltelen gráfra $\omega = 1$ és α a pontok száma. Egy teljes gráfra ω a pontok száma és $\alpha = 1$. Egy (legalább 2 pontú) fa gráfra $\omega = 2$ és α értéke lehet a pontok száma mínusz 1, vagy kevesebb, de mindig legalább a pontok számának fele.

A definíciókból nyilvánvaló, hogy egy n pontú és k részes gráfra $\omega \leq k$ és $k\alpha \geq n$.

4. fejezet

Perfekt gráfok

Definíció. A $G = (V, E)$ gráf *perfekt*, ha akárhogyan is elhagyva belőle néhány (esetleg nulla) pontot, a visszamaradó gráf annyi részes, amekkora benne ω .

Átfogalmazva: Egy gráf *perfekt*, ha minden feszített részgráfja annyi részes, amekkora benne a legnagyobb klikk.

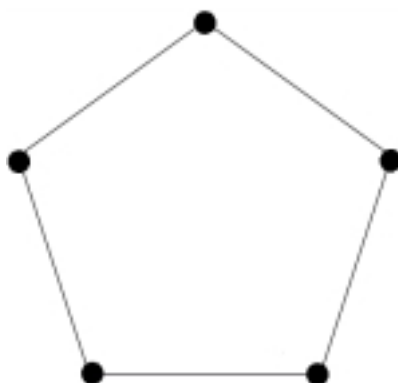
A *perfekt* gráfok fogalma az utolsó fél évszázadban rendkívül fontossá vált. Először lássunk példát *perfekt* gráfokra.

Egy *éltelen* gráfból elhagyva pontokat *éltelen* gráf marad vissza, ami 1 részes. Ezért az *éltelen* gráfok *perfektek*. Hasonlóan látható, hogy a teljes gráfok is *perfektek*. Egy nem *éltelen* páros gráfból elhagyva pontokat vagy egy *éltelen* gráfot kapunk vagy egy nem *éltelen* páros gráfot. Az előbbi 1 részes, az utóbbi 2 részes. Az ω értéke is az előbbi esetben 1, az utóbbi esetben 2. Tehát a páros gráfok is mind *perfektek*.

Egyesével ellenőrizhetjük az összes gráfot, melyeknek legfeljebb 5 pontjuk van. Úgy találjuk, hogy egyetlen egy gráf kivételével mindegyik *perfekt*, és ez az egyetlen kivétel az következő ábrán látható:

Definíció. A itteni ábrán látható gráf neve: *pentagon*, jelölése: C_5 .

Ábra nélkül fogalmazva: C_5 az az 5 pontú összefüggő gráf, melyben minden pontnak 2 szomszédja van.



4.1. ábra.

Mivel az legelső ábra grájából is megkapható a pentagon a középső pontok elhagyásával, ezért a szóban forgó ábra gráfja sem perfekt.

A pentagon mintájára további gráfokat készíthetünk: Tekintsük a hétszög, a kilencszög, a tizenegyszög stb. alkotta gráfokat. (Itt tehát a csúcsok száma $2k + 1$ valamely $k = 3, 4, \dots$ esetén, és az élek száma is $2k + 1$; a gráfok összefüggők, és mindegyik pontnak 2 szomszédja van.)

Definíció. Ha $k = 3, 4, \dots$, akkor az $\{1, 2, \dots, 2k + 1\}$ szögponthalmazon két gráfot is értelmezünk: az elsőnek az élei az ij alakú pontpárok, ahol $|i - j|$ értéke vagy 1 vagy $2k$; a másodiknak az élei az ij alakú pontpárok, ahol $|i - j|$ értéke nem 0, nem 1 és nem is $2k$. Az első gráf neve: C_{2k+1} , a másodiké $co-C_{2k+1}$.

Állapítsuk meg: C_{2k+1} és $co-C_{2k+1}$ is összefüggő, és az előbbiben minden pontnak 2 szomszédja van, az utóbbiban minden pontnak $2k - 2$ szomszédja van.

Definíció. Ha egy (V, E) gráfból pontok elhagyásával nem kapható meg egyik sem a C_5, C_7, C_9, \dots és a $co-C_7, co-C_9, \dots$ gráfok közül, akkor azt mondjuk, hogy a gráf *Berge* gráf.

Másképpen fogalmazva: A Berge gráfok azok, melyeknek a felsiorolt gráfok egyike sem feszített részgráfja.

A Berge szó egy francia matematikus nevéből ered; ejtése: *berzs*. Claude Berge (1926–2002) volt az, aki az ilyen gráfok vizsgálatát fél évszázada megkezdte, miután néhány magyar matematikus eredményei inspirálták.

Tétel. (Berge, 1960) Ha egy (V, E) gráf perfekt, akkor Berge gráf is.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a C_5, C_7, C_9, \dots gráfok egyike sem páros, és hogy ω értéke mindegyiknél 2. A definíciók alapján ebből már következik, hogy a C_5, C_7, C_9, \dots gráfok egyike sem kapható meg pontok elhagyása után egy perfekt gráfból. Most már csak azt kell megmutatni, hogy hasonlóképpen a $\text{co-}C_7, \text{co-}C_9, \dots$ gráfok egyike sem kapható meg. De $k = 3, 4, \dots$ esetén a $\text{co-}C_{2k+1}$ gráf nem k részes, viszont ω értéke k (amint az könnyen látható). Ezzel teljes a bizonyítás. \square

Ez a tétel még nem volt igazán mély dolog. Annál érdekesebb a megfordítása! Berge a hatvanas évek elejétől egyre erősebben hitte, hogy a tétel megfordítása is igaz, de ezt csak Berge halála előtt pár héttel sikerült bizonyítani.

Tétel. (Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas, 2002) Minden Berge gráf perfekt.

Napjainkra mintegy hat-hétszáz dolgozat, több tucat könyv, számtalan doktori és habilitációs értekezés született a témában. A gyakorlati alkalmazások is jelentősek. Rendkívül sok — mind elméleti, mind gyakorlati szempontból jelentős — érdekes fogalom, tény merült fel a fél évszázad során. Mielőtt néhány ilyen ismeretetésébe belefognánk, hadd meséljünk el egy anekdotát.

A hetvenes években történt. New York City szemetének rendszeres elszállítása komoly szervezést igényelt. Egy konferencián ismertettek egy algoritmust, amely a kukásautók optimális útvonalát számolta ki. Egy matematikus az előadónak támadt, hogy az algoritmus feltételezi, hogy Berge sejtése igaz, pedig azt még senkinek sem sikerült bizonyítani. A szemetesek diszpécsera visszavágott — szerintünk magyar származású lehetett ő is —: Azzal, hogy az elméleti matematikusok még nem elég okosak, a szemetesek mit sem törődnek. Ne legyen már az is az ő számlájukra írva! Ha pedig netán a szemetesek algoritmusai csak azért működne hibásan, mert rossz a sejtés, akkor ez sem a szemetesek szégyene lenne, hanem inkább a matematikusoké, hiszen a „szakemberek” régóta hittek olyan dologban, amit pedig még szemetesek munkájának elemzésével is meg lehetett volna cáfolni.

Komolyra fordítva a szót: Berge a Németországi Szövetségi Köztársaságban egy konferencián ismertette a sejtését 1960-ban. A sejtésre azonban a következő években

csak bizonyos nagyon speciális esetekben született bizonyítás. Tíz évvel később ugyanoda konferenciát szerveztek, és hírért vették a sikertelen szakemberek, hogy egy ifjú titán Magyarországon lényeges, rendkívül fontos eredményt ért el a sejtéssel kapcsolatban. Az egyetemista *Lovász László* volt. Lacit akkor itthon mindenki ismerte már, mert megnyert egy televíziós vetélkedősorozatot. Meghívták tehát gyorsan Lacit is a „nyugatnémet” konferenciára, Laci ment is volna, de nem kapta meg az útlevelét. Indoklás: „Egy fontos nemzetközi tudományos konferencián a Magyar Népköztársaságot nem képviselheti olyan valaki, aki csak egyetemista.” (Hamarosan Laci zsenialitása újra nevetségessé tette a magyar „jogrendet”: eredményei okán már kandidátus volt, kandidátusnak doktori cím is dukál, de doktor nem lehet olyan, akinek még egyetemi diplomája sincs, de Laci — nem tehetett róla — akkor még nem volt annyi idős, hogy a magyar jogrend szerint kijárhatta volna az egyetemet.)

Lovász híres eredménye a *Perfekt Gráf Tétel* sokféleképpen megfogalmazható. Előbb szükségünk lesz egy definícióra:

Definíció. Ha egy (V, E) gráfot *p-kritikus* gráfnak nevezzük, ha nem perfekt, de bármely pontját elhagyva már perfekt lesz.

Könnyen látható, hogy a C_5, C_7, C_9, \dots és a $\text{co-}C_7, \text{co-}C_9, \dots$ gráfok mindegyike *p-kritikus*. Berge sejtése egyenértékű azzal, hogy nincs is más *p-kritikus* gráf.

Tétel. (Lovász, 1970) Ha egy n pontú gráf *p-kritikus*, akkor $n = \alpha\omega + 1$.

Bizonyítás. (Amit itt közlünk, *Gasparian* ötletét követi 1996-ból.) Tekintsünk egy tetszőleges S stabil ponthalmazt egy n pontú *p-kritikus* (V, E) gráfban. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Egyrészt — a *p-kritikusság* tényét felhasználva — vegyük észre: ω értéke nem csökkenne le, ha a gráfból elhagynánk a összes S -beli pontot. Másrészt a *p-kritikusságból* az is következik, hogy ha az eredeti gráfból bármely x pontot is hagyjuk el, a maradék gráf ω részes. Mivel minden $|S| \leq \alpha$, ezért minden „rész” legfeljebb α pontot tartalmaz; következésképpen az x pont elhagyásával nyert gráfban legfeljebb $\alpha\omega$ pont van. Tehát $n \leq \alpha\omega + 1$. A bizonyítás hátralévő részében csak az $n \geq \alpha\omega + 1$ egyenlőtlenséget kell kimutatnunk. Ezt úgy fogjuk megmutatni, hogy készítünk egy olyan

A mátrixot, melynek $\alpha\omega + 1$ sora lesz és n oszlopa, továbbá egy olyan B mátrixot, melynek n sora és $\alpha\omega + 1$ oszlopa lesz, és megmutatjuk, hogy az AB mátrixszorzatnak a rangja $\alpha\omega + 1$ lesz. Ezért — a lineáris algebra ismert eredményei alapján — az A mátrix oszlopai közül is legalább $\alpha\omega + 1$ darabnak lineárisan függetlennek kell lenni, ami triviálisan maga után vonja, hogy az oszlopok száma legalább $\alpha\omega + 1$.

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $V = \{1, 2, \dots, n\}$ utolsó α darab eleme egy stabil halmazt alkot. Jelölje $S_{\alpha\omega+1}$ ezt a halmazt, és $q = 0, 1, \dots, \alpha - 1$ esetén legyen $s_q = n - q$. Mivel bármely s_q pontot elhagyva az eredeti gráfból, a maradék gráf ω részes lenne, ezért az eredeti gráfban vannak olyan $S_{q\omega+1}, S_{q\omega+2}, \dots, S_{q\omega+\omega}$ módon jelölhető stabil halmazok, melyek uniója $V - \{s_q\}$. (Félreértés ne essék: itt $q\omega$ a q és az ω számok szorzatát jelöli.)

Definiáltunk tehát $\alpha\omega + 1$ darab stabil halmazt: $S_1, S_2, \dots, S_{\alpha\omega+1}$. Ezek segítségével definiáljuk az $\alpha\omega + 1$ sorú, n oszlopú A mátrixot úgy, hogy minden eleme legyen 0 kivéve az i -edik sor j -edik elemét, ami 1 lesz akkor és csak akkor, ha j eleme az S_i stabil halmaznak.

Hogy mindez érthetőbb legyen, példaként megadjuk az A mátrixot a pentagon esetében, amikor is

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{13, 14, 24, 25, 35\}.$$

Ekkor $\alpha = \omega = 2$ és $S_5 = \{4, 5\}$. Továbbá $q = 0$ esetén nyerjük az $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{3, 4\}$ stabil halmazokat, és $q = 1$ esetén nyerjük az $S_3 = \{1, 5\}, S_4 = \{2, 3\}$ stabil halmazokat. Ezért ebben az esetben

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Térjünk vissza az általános esethez. Az n sorú, $\alpha\omega + 1$ oszlopú B mátrixot úgy készítjük el, hogy a legtöbb eleme ennek is 0 lesz kivéve mindegyik oszlopban ω

darab elemet, melyek 1-esek lesznek. A j -edik oszlopot tekintve azt a tényt használjuk ki, hogy az eredeti gráfból elhagyva S_j pontjait a visszamaradó gráfban nem kisebb ω . Ezért ki tudunk jelölni ω darab i pontot, melyek közül bármely kettő szomszédos. Tekintünk egy ilyen kijelölést, és pontosan ezekre az i pontokra lesz a B mátrix j -edik oszlopában az i -edik elem 1-es.

Hogy mindez érthetőbb legyen, a fenti példa esetében megadjuk a B mátrixot is. Itt most $S_1 = \{1, 2\}$ elhagyása után az $\{13, 14, 24, 25, 35\}$ élhalmazból csak a 35 él marad meg, $S_2 = \{3, 4\}$ elhagyása után csak a 25 él marad meg, $S_3 = \{1, 5\}$ elhagyása után csak a 24 él marad meg, $S_4 = \{2, 3\}$ elhagyása után csak az 14 él marad meg, végül az $S_5 = \{4, 5\}$ stabil halmaz elhagyása után csak az 13 él marad meg. Ezért most

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebben az esetben tehát

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az nem véletlen, hogy ilyen szabályos lett a szorzat.

Visszatérve ugyanis az általános esethez állíthatjuk, hogy az AB szorzat egy olyan négyzetes mátrix lesz, melynek mindegyik eleme 1-es, kivéve a főátlót, ahol viszont mindegyik elem 0. Az utóbbi állítás a definíciók alapján nyilvánvaló, az előbbi állítás pedig a bizonyítás elején tett megállapítások és a mátrixok definíciója alapján ellenőrizhető.

Tudjuk tehát, hogy az AB szorzat egy olyan n -szer n -es mátrix, melynek a főátlójában minden elem 0, a főátlón kívül pedig minden elem 1. Erre a mátrixra $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együtthatókkal az oszlopoknak egy nemtriviális lineáris kombinációját tekintve a lineáris kombinációnak saját magával vett skalárszorzatára azt kapjuk, hogy

$$(n-1) \sum_j \xi_j^2 + (n-2) \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j$$

Ezt átírva:

$$\sum_j \xi_j^2 + (n-2) \left(\sum_j \xi_j \right)^2$$

Mivel a lineáris kombináció nem triviális, ezért a fenti szám pozitív. Mindebből az következik, hogy az AB n -szer n -es mátrix oszlopai függetlenek, azaz AB rangja n . Mindez teljessé teszi Lovász tételének bizonyítását. \square

5. fejezet

P4-szerkezet és perfektség

Egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráfra értelmezhetjük a következőket:

Definíció. A G gráf *komplementer* gráfja — más néven *kiegészítő* gráfja — a $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$ gráf.

Szavakban: A komplementer gráfnak ugyanazok a szögpontjai, és az élei pedig az eredeti gráf nem-élei.

Példa gyanánt megemlítjük, hogy a teljes gráfok komplementerei az éltele gráfok, és viszont. Minden egyéb gráf akkor és csak akkor páros, ha a komplementerében $\omega \leq 2$. Egy Turán gráf komplementere különálló — azaz egymásból nem elérhető — teljes gráf feszített részgráfokból áll.

Definíció. A $\binom{V}{4}$ halmazon azt a halmazt értjük, amelynek alamei a V halmaz 4-elemű részhalmazai.

Definíció. Ha $\{a, b, c, d\} \in \binom{V}{4}$, akkor azt mondjuk, hogy $\{a, b, c, d\}$ egy P_4 , ha a 4 pont egy olyan feszített gráfot határoz meg, melyben 3 él van, és van 2 pont, melyek távolsága 3.

Szavakban: Egy P_4 az egy olyan 4-pontú halmaz, mint amilyen 2.2. ábrán felsoroltak közül a második.

Definíció. A G gráf P_4 -szerkezete a $\binom{V}{4}$ halmaz azon részhalmaza, melyet a P_4 -ek alkotnak.

Például a legfeljebb 4 pontú gráfok P4-szerkezete majdnem mindig az üres halmaz; az egyetlen kivétel a most említett P4. A Lovász-tétel bizonyításában példaként felhozott pentagon P4-szerkezete pedig ez:

$$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\},$$

azaz a teljes $\binom{V}{4}$.

Két gráfot tekintve feltehetjük, hogy mindegyiknek a szögpontjai az 1, 2, ... számok, tehát 1-től kezdve folyamatosan az egész számok. Akár ugyanannyi pontú a két gráf, akár nem, előfordulhat hogy a két P4-szerkezet — mind 4-elemű halmazokból álló halmaz — azonos. Nyilvánvaló például, hogy egy gráfnak és a komplementerének azonos a P4-szerkezete.

Definíció. A G gráf *kográf*, ha a P4-szerkezete üres halmaz.

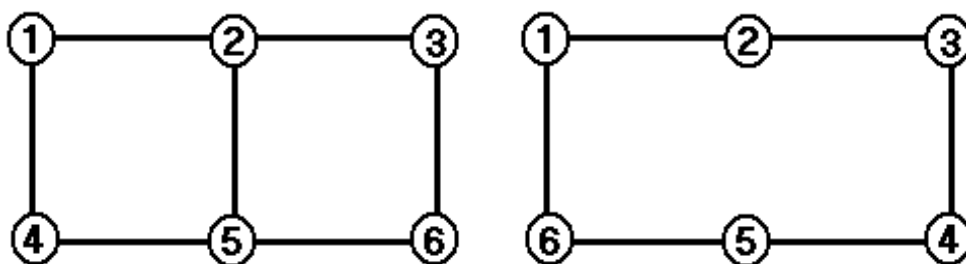
Például az éltelen gráfok, a teljes gráfok, P4 kivételével a legfeljebb 4 pontú gráfok, továbbá azok gráfok, melyekben — vagy a komplementerükben — nincs két, egymástól 3 távolságra lévő pont, mind kográfok.

Ismeretes, hogy a kográfok mind perfektek; ez a tény már abból is látszik, hogy a Berge által felsorolt p-kritikus gráfok egyike sem kográf. Azonban ennél erősebb állítás is igaz.

Definíció. Induljunk ki egy kográfból. Képzeljük el lerajzolva. Tekintsünk diszjunkt stabil halmazokat. Mindegyik stabil halmazból válasszunk ki egy-egy pontot, és az ezek által feszített részgráfot — ha még nem teljes — tegyük teljes gráffá újabb élek hozzávételeével. Majd minden stabil halmazt húzzunk össze egyetlen ponttá. Esetleg többszörös élek keletkezhetnének; azokat csak egyszeresen vegyük figyelembe. Az így nyerhető gráfok neve: *kográf kontrakció*.

Tétel. (Hujter és Tuza, 1996) Minden kográf kontrakció perfekt.

A tételt itt most nem bizonyítjuk, csak megemlítjük, hogy ha valaki Seymour és társai eredményének felhasználásával akarná bizonyítani, akkor annak csak azt kellene megmutatni, hogy a Berge által felsorolt p-kritikus gráfok egyike sem kográf kontrakció.



5.1. ábra.

A kográf kontrakciók vizsgálata napjainkban is folyik. Németországi és amerikai kutatók kiderítették, hogy hogyan lehet ezeket a gráfokat hatékonyan felismerni és fontosabb papamétereket — például stabilitási szám — gyorsan kiszámítani.

Egy ábrán két összefüggő gráfot mutatunk, melyeknek azonos P_4 -szerkezete:

$$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$$

Történetesen mindkét gráf páros — következésképpen perfekt is — de egyik gráf sem kográf kontrakció.

A perfeket gráfok P_4 -szerkezetének a jelentőségét a következő eredmény adja:

Tétel. (Chvátal és Reed, 1987) Ha két gráf azonos P_4 -szerkezetű, és az egyik gráf perfekt, akkor a másik is.

A tételnek egyenes következménye az alábbi tétel:

Tétel. (Lovász, 1970) Egy perfekt gráf komplementer gráfja is perfekt.

Ezt a tételt gyakran „gyenge” perfekt gráf tétel (*weak perfect graph theorem*) néven is említik, mivel ennek a bizonyítására „csak” egy évtizedet kellett várni, ellentétben a Seymour és társai által bizonyított — fent kimondott — „erős” perfekt gráf tétellel (*strong perfect graph theorem*), melynek bizonyítására majdnem fél évszázadot kellett várni, és még — egyszerűsítési céllal — mindig nagyon sokat kell rajta dolgozni. Az „erős” tételből nyilvánvalóan következik a „gyenge” tétel is. Chvátal és Reed fent említett tétele a két tétel között helyezkedik el. Ezért azt a tételt „félíg erős” tétel (*semi strong perfect graph theorem*) néven is szoktak emlegetni. Ez utóbbira helyesebb lenne a „látszatra — de csak látszatra — nem

annyira gyenge" tétel elnevezés. Gyakorlati jelentőségét tekintve Lovász tétele a legfontosabb! Ez a tétel Lovásznak a p -kritikus gráfokra vonatkozó — a fentiekben bizonyított — tételéből is nyilvánvalóan következik.

6. fejezet

Perfekt magyar módszer

Ebben a fejezetben olyan négyzetes mátrixokról lesz szó, melyek minden eleme nem-negatív egész szám. Az úgynevezett *hozzárendelési probléma* a következőképpen fogalmazható meg: Adott egy m -szer m -es mátrix. Szeretnénk kiválasztani az m^2 darab szám közül összesen m darabot úgy, hogy egyrészt minden sorból, másrészt minden oszlopból pontosan egyet-egyet választhatunk ki, harmadrészt pedig azt szeretnénk, hogy a kiválasztott elemek összege a lehető legkisebb legyen.

Definíció. Legyen *min-elem* a neve a mátrix azon elemeinek, melyek a saját sorukban is és a saját oszlopukban is egyaránt minimálisak.

Nyilván minden 0 elem a mátrixban min-elem, de lehetnek más min-elemek is. Ha viszont már minden sorban és minden oszlopban van legalább egy 0, akkor már a 0 elemek és az min-elemek azonosak. Például ez következik be a Lovász tételének bizonyításában felmerült AB szorzatmátrixok esetében is. De teljes általánosságban csak annyit mondhatunk, hogy az m -szer m -es mátrixban legalább egy min-elem van, hiszen az m^2 darab mátrixelem között a legkisebb bizonyosan min-elem, és olyan mátrix is könnyen készíthető, melyben csak egyetlen min-elem van.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az m -szer m -es mátrix A *típusú*, ha tartalmaz m darab min-elemet, melyek mind különböző sorokban és oszlopokban vannak.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a mátrix B *típusú*, ha van összesen legfeljebb $m - 1$ sora és oszlopa, melyek együtt az összes min-elemet tartalmazzák.

A hozzárendelési probléma megoldása kézenfekvő, ha a mátrix A típusú, hiszen csak az A típus definíciójában szereplő m darab min-elemet kell tekintenünk, és azok (és csak olyanok) jelentik a hozzárendelési probléma optimális megoldását. A nehézséget az okozza, hogy a hozzárendelési problémát nemcsak A típusú mátrixokra kell megoldani.

Világos, hogy a mátrix nem lehet egyszerre A és B típusú. A következő tételre a későbbiekben *szétválasztási tétel* néven fogunk hivatkozni.

Tétel. Minden m -szer m -es mátrix vagy A vagy B típusú.

Bizonyítás. A bizonyítást Lovász tétele segítségével végezzük el. Először definiálunk egy gráfot. Ezután belátjuk, hogy a gráf perfekt. A perfektség alkalmazásával következik majd a tétel állítása.

A szögpontok halmaza legyen a sorok halmazának és az oszlopok halmazának az únioja. Két szögpont legyen szomszédos, ha vagy mindkettő sor, vagy mindkettő oszlop, vagy pedig az egyik sor, a másik oszlop, de ebben az utóbbi esetben a sor és az oszlop kereszteződésében egy nem min-elem van. Vegyük észre, a mátrix akkor és csak akkor B típusú, ha erre a gráfra $\omega > m$. Másrészt vegyük észre azt is, hogy a mátrix akkor és csak akkor A típusú, ha a gráf m részes. Ezért a bizonyítás teljessé válik, ha megmutatjuk, hogy a gráf perfekt.

Indirekt bizonyítás céljából tegyük fel, hogy a gráf nem perfekt. Egyesével hagyjunk el belőle pontokat mindaddig, amíg a maradék gráf megmarad nem perfekt gráfnak. Mivel a legfeljebb 4 pontú gráfok mind perfektek, ezért a mostani gráfunkból legalább 5 pont megmarad. Nyertünk tehát végül egy p -kritikus gráfot. Mivel ez a gráf nem perfekt, nem lehet teljes gráf. Ezért a szögpontok között legalább egy sornak és legalább egy oszlopnak lenni kell, mivel definíció szerint a gráfban két szögpont csak akkor lehet nem szomszédos, ha egyikük sor, másikuk oszlop. Jelölje n a p -kritikus gráf pontjai számát, és tekintsük erre a p -kritikus gráfra az α és ω számokat. Mivel a gráf nem teljes, azért $\alpha \geq 2$. Másrészt legalább 3 szögpont között mindig van legalább 2 sor vagy legalább 2 oszlop, tehát 3 szögpont között mindig van legalább 2 szomszédos, mindazonáltal $\alpha \leq 2$. Tehát $\alpha = 2$.

Most alkalmazva Lovász tételét azt kapjuk, hogy $n = 2\omega + 1$. Tehát a szögpontok

száma páratlan a p -kritikus gráfban. Vagy a sor-szögpontok száma több, mint az oszlop-szögpontoké, vagy fordítva. Előbb tegyük fel, hogy az első eset következik be. Az $n = 2\omega + 1$ darab szögpontnak tehát több, mint a fele sor-szögpont, azaz legalább $\omega + 1$ darab. No de ezek a sor-szögpontok a gráf definíciója szerint klikket alkotnak! Mindez ellentmond ω definíciójának. A másik esetben is hasonlóképpen ellentmondást kapunk. Ezzel a tétel bizonyítása teljessé vált. \square

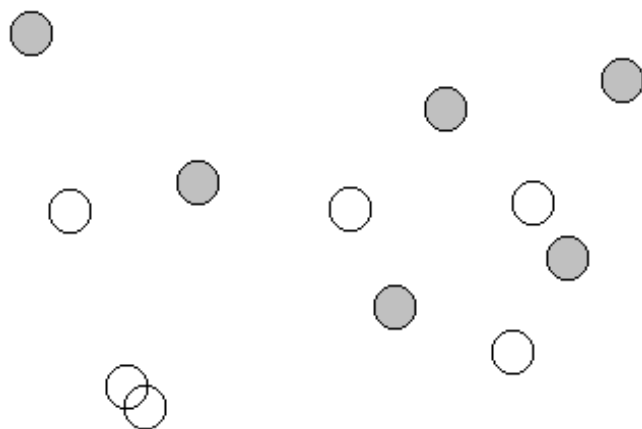
Két példán érzékeltetjük a szétválasztási tételt. A következő két mátrix közül a baloldali A típusú, a jobboldali pedig B típusú, hiszen a baloldalon 4-esek és az 5-ösök a min-elemek, a jobboldalon pedig csak a 0 elemek.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

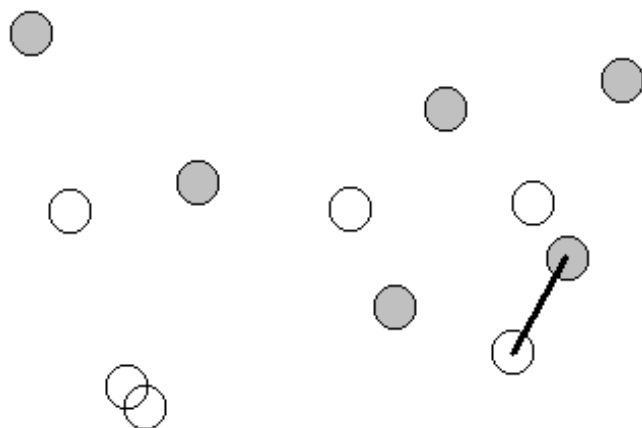
A hozzárendelési problémának és fenti szétválasztási tételnek nagyon sok változata ismeretes. A hosszú történet több mint két évszázada kezdődött, Franciaországban, XVI. Lajos királysága idején *Gaspard Monge* a következő kérdést vizsgálta.

Valakiknek egy vízszintes terepen földet kell talicskázni egyik helyről a másikra. Összesen m talicskányi földet kell átszállítani. Tegyük fel, hogy ki van már jelölve m pont a síkon, ahol a talicskát megrakják. (Ezek között a pontok között természetesen azonosak is lehetnek.) Tegyük fel azt is, hogy ki van már jelölve az az m pont is, ahol a talicskát kiürítik. (Természetesen ezek között is lehetnek azonos pontok.) A földmunkások maguk dönthetik el, hogy melyik rakodási helyről melyik ürítési helyre tolják a talicskát. A megrakott talicskát nehéz tolni. Ezért természetes, hogy mind az m esetben a megrakott talicskák nyomvonala egy-egy egyenes szakasz. Az is hamar belátható, hogy optimális szállítási terv esetében az említett egyenes szakaszok nem keresztezik egymást.

Mindezen józan ész szülte megállapítások alapján Monge azt javasolta, hogy toljunk egy egyenes vonalzót oldalról a $2m$ ponthoz úgy, hogy a vonalzó széle



6.1. ábra.

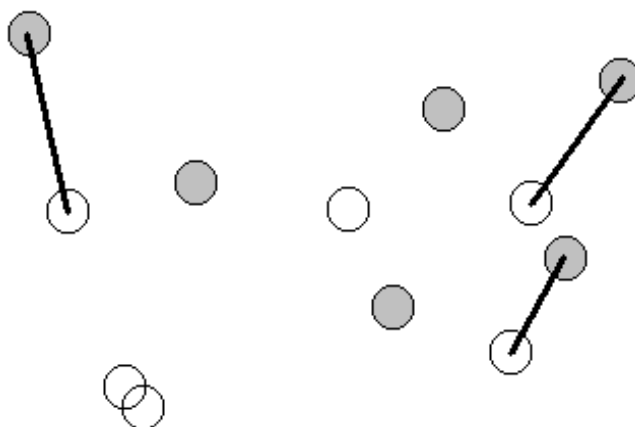


6.2. ábra.

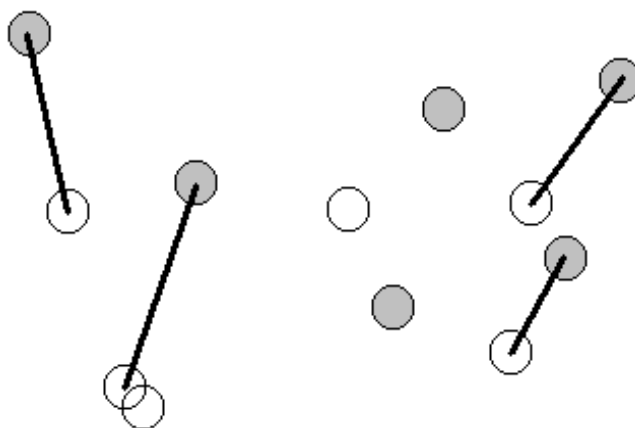
ráfeküdjön legalább egy rakodási pontra és egyúttal legalább egy ürítési pontra, de a többi pont a most kijelölt egyenesnek a túloldalán — tehát a vonalzó lapjával átellenes oldalon — vagy az éppen kijelölt egyenesen legyen. A vonalzóval egy rakodási pontot és egy ürítési pontot most már összeköthetünk, és indulhat is a talicska. A visszamaradt $m - 1$ rakodási és $m - 1$ ürítési pontra aztán megismételhetjük az eljárást.

Egy konkrét példán bemutatjuk Monge módszerét. Az első ábrán a fehér köröskét jelzik, hogy honnan kell talicskázunk, a szürke köröskék pedig azt, hogy hova.

Az első fuvart a következő ábra mutatja.



6.3. ábra.



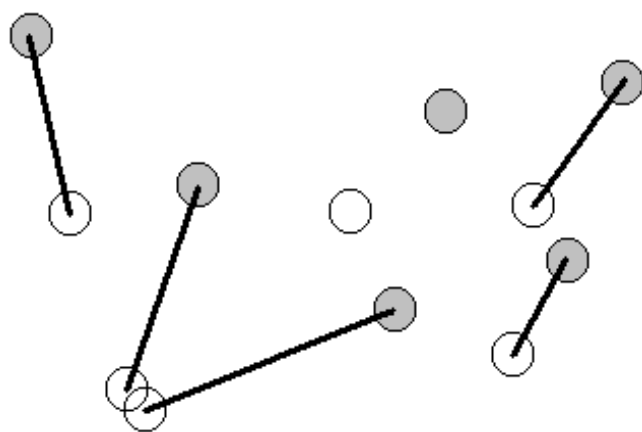
6.4. ábra.

Az utána következő néhányat a következő pár ábra szemlélteti:

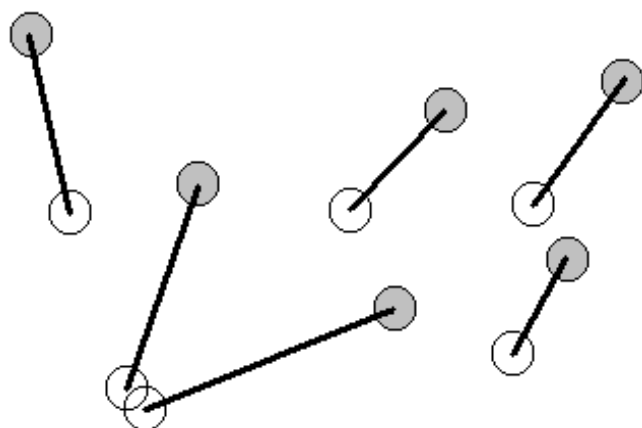
Az utolsó ábrán végül a teljes szállítási terv látható.

Ha készítünk egy m -szer m -es mátrixot úgy, hogy a sorok a rakodási helyeknek, az oszlopok az ürítési helyeknek felelnek meg, a mátrix elemei pedig a távolságoknak, akkor Monge feladata egy speciális hozzárendelési feladatnak felel meg. A mátrixos változat akkor is felírható, ha a talicskával esetleg akadályokat is ki kell kerülni, de olyan esetben Monge módszerének optimális volta már nem garantált.

A sors fintora az, hogy XVI. Lajos ezen nagy tudósa — részben éppen nagy tudása elismeréseképpen — 1792-ben tengerészeti miniszter lett, és ilyen minőségében



6.5. ábra.



6.6. ábra.

neki kellett királyán a hírhedt halálos ítéletet végrehajtatnia. Monge 1798-ban elkísérte Napóleont Egyiptomba. Állítólag a geometriában ismert Napóleon-tételnek is valójában Monge a szerzője: Ha egy tetszőleges háromszög oldalaihoz — mint alapokhoz — egy-egy 120 fokos szögű egyenlő szárú háromszöget illesztünk — mindegyiket kívülről vagy mindegyiket belülről —, akkor a három új pont egy szabályos háromszöget alkot.

Monge fentemlített hozzárendelési feladata és megoldási módszere pár évtizeddel később *Bolyai Farkast* és *Bolyai Jánost* is megihlették.

A 20. század elején a híres német matematikus, *Georg Frobenius* a négyzetes mátrixok *determinánsát* vizsgálta. Megállapította, hogy a determináns általában nem bontható szorzattá, ha a mátrix elemei különböző ismeretlenek. Ha a mátrix elemeinek egy részét 0-ra cseréljük, de elég sok nemnulla elemet meghagyunk abban az értelemben, hogy a mátrix determinánsát nem engedjük azonosan nullává válni, akkor megkérdezhetjük: Vajon nem válik-e a determináns szorzattá akakíthatóvá? Ha az m -szer m -es mátrixban összességében m darab sor és oszlop kereszteződése nem tartalmazhat csupa 0 elemet, akkor és csak akkor — Frobenius tétele szerint — még mindig nem lehet szorzattá bontani a determinánst. Lássunk példákat!

$$\det \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & f \\ 0 & g & h & i \end{bmatrix} = -bcdi$$

Itt tehát a determináns szorzattá bontható. Másrészt

$$\det \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ x & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & f \\ 0 & g & h & i \end{bmatrix} = (afh - bfg + bei)x - bcdi$$

Ez a determináns nem bontható szorzattá. A két mátrix között az a különbség, az előbbi mátrixnak van 2-szer 2-es almátrixa, melynek minden eleme 0, az utóbbinak

pedig nincs, de 1-szer 3-as vagy 3-szor 1-es csupa nulla almátrixa sincs.

Az 1910-es évek közepén az ismert magyar matematikusnak, *König Gyulának* nem kevésbé tehetséges *Dénes* fia Frobenius eredményét vette vizsgálat alá. Észrevette, hogy Frobenius eredményének lényege tulajdonképpen egy páros gráfokra vonatkozó megállapítás:

Tétel. (König Dénes, 1915) Minden páros gráfban van α darab klikk úgy, hogy azok úniója a teljes szögponthalmaz.

Emlékeztettünk arra, hogy egy páros gráfban minden klikk vagy egyetlen pont, vagy egyetlen él.

Megjegyezzük, hogy α darab klikknél kevesebb klikk úniójaként nem várhatjuk semmilyen gráfban sem, hogy megkapjuk a teljes szögponthalmazt, hiszen egy stabil halmazból minden klikk legfeljebb egy-egy elemet tartalmazhat. Bizonyos gráfok — például a p -kritikus gráfok — esetében pedig még α darab klikk úniójától sem várhatjuk el, hogy kiadják a teljes szögponthalmazt, hiszen az n pont közül — Lovász tétele következtében — egy n pontú p -kritikus gráfban α darab klikk úniója legfeljebb $n - 1$ elemű halmaz lehet. Ha egy páros — azaz két részes — gráfból elhagyunk pontokat, nyilván páros gráfot kapunk. Másrészt egy páros gráfban — feltéve, hogy nem éltelen — fennáll, hogy $\omega = 2$. Mindazonáltal König Dénes tétele következik abból a tényből, hogy nincs p -kritikus páros gráf.

Bizonyítás. Tegyük fel, (V, E) egy p -kritikus páros gráf. Mivel minden páros gráf két részes, ezért van a gráfban két stabil halmaz — U és W — úgy, hogy $V = U \cup W$. Feltehetjük, hogy $|U| \geq |W|$. Mivel a p -kritikus gráf nem éltelen, de két részes, ezért $\omega = 2$. Így Lovász tétele következtében: $|U| > \alpha$. De ez ellentmond α definíciójának. Mindez teljessé teszi König Dénes tételének bizonyítását. \square

Természetesen König Dénes eredetileg nem így bizonyított. Megjegyezzük, hogy a szétválasztási tétel König Dénes tételéből is könnyen levezethető. Ezt az utat járta *Egerváry Jenő* 1930-ban, aki ki tudta egészíteni a szétválasztási tételt a következőképpen: Ha van egy B típusú m -szer m -es mátrixunk, akkor tekintsünk abban — a definíció szerint létező lehetőségek közül választva — legfeljebb $m - 1$ sort és oszlopot, melyek az összes min-elemet tartalmazzák. Ne feledjük, minden 0 min-elem!

Az ezen legfeljebb $m - 1$ sor és oszlop által nem tartalmazott elemek tehát mind pozitívak. Azok legkisebbikét jelölje ε . Most a kijelölt, legfeljebb $m - 1$ sor és oszlop közül tekintsük csak a sorokat, és azok minden eleméhez adjuk hozzá az ε számot. Egy új mátrixot nyertünk így, melyben az m^2 darab elem összege az $sm\varepsilon$ számmal növekszik az eredeti mátrix elemei összegéhez képest, ahol s jelöli a megnövelt sorok darabszámát. Vegyük észre, hogy az új mátrixban legalább $s + 1$ olyan oszlop lesz, melyben minden elem legalább ε . Ezen oszlopok minden elemét csökkentsük az ε számmal. Végül egy olyan m -szer m -es mátrixot nyerünk, melynek minden eleme továbbra is egy-egy nemnegatív egész szám, de az m^2 darab elem összege legalább az $(s + 1)m\varepsilon - sm\varepsilon = m\varepsilon$ számmal kisebb, mint a kiindulási mátrix esetében.

Kiindultunk tehát egy B típusú mátrixból, és nyertünk egy kisebb elemösszegű új mátrixot. Ha ez újra B típusú, megismételhetjük a fenti eljárást. És ezt folytassuk mindaddig, amíg B típusú mátrixunk van. Mivel az elemösszeg folyton csökken, ezért mindez nem mehet a végtelenségig, hiszen az elemösszeg nem lehet negatív. Előbb-utóbb tehát nyerünk egy A típusú mátrixot. Mindezt a következőképpen összesíthetjük:

Tétel. (Egerváry Jenő, 1930) Minden nem B típusú mátrixból készíthető A típusú mátrix úgy, hogy az eredeti mátrix néhány sorához hozzáadjuk néhányszor azt az m komponensű sorvektort, melynek minden eleme 1-es, és néhány oszlopból néhányszor levonjuk azt az m komponensű oszlopvektort, melynek minden eleme 1-es.

Térjünk vissza a hozzárendelési problémához. Azt vegyük észre, hogy a feladat lényegét egyáltalán nem érinti egy olyan változtatás az eredeti mátrixon, mint amilyen változtatásokról Egerváry Jenő tételében van szó. Nevezetesen a mátrix m^2 darab eleme közül ugyanazt az m darabot lehet kiválasztani a hozzárendelési probléma optimális megoldásaként mind az eredeti, mind a módosított mátrix esetében. Így a hozzárendelési feladat megoldására egy algoritmust nyerünk:

1. lépés. Keressük meg a mátrixban a min-elemeket.
2. lépés. Állapítsuk meg, hogy a mátrix A típusú-e.
3. lépés. Ha a mátrix A típusú, a min-elemek közül válogatva megadhatjuk a

hozzárendelési feladat optimális megoldását. Utána véget és az algoritmus.

4. lépés. Ha a mátrix B típusú, akkor végezzük el a fent ismertetett sor-növeléseket és oszlop-csökkentéseket, és térjünk vissza az 1. lépéshez.

Ez az algoritmus annyira lenyűgözte 1955-ben az amerikai *Harold Kuhn* fiatal matematikust, hogy publikálta is a módszert *Hungarian method* néven, mivel minden eredményt Kőnig Dénes és Egerváry Jenő magyar és német nyelvű munkáiból vett át. Azóta is így ismerik az egész világon az eljárást: *magyar módszer*.

Egy példán is ismertetjük a magyar módszert. Legyen a kiindulási mátrix a következő:

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Először megkeressük a min-elemeket; ezeket a következő — hiányosan kitöltött mátrix — tartalmazza:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Látható, hogy B típusú mátrixszal állunk szemben. Tekintve — mondjuk — az 1., 3. és 4. sorokat, az ε számot a következő mátrixelemek legkisebbkikeként kell vennünk:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Tehát $\varepsilon = 4$. Az eredeti mátrix 1., 3. és 4. soraihoz tehát 4-et adunk; ezt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 7+4 & 2+4 & 1+4 & 9+4 & 4+4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 3+4 & 8+4 & 3+4 & 1+4 & 8+4 \\ 7+4 & 9+4 & 4+4 & 2+4 & 2+4 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 5 & 13 & 8 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 7 & 12 & 7 & 5 & 12 \\ 11 & 13 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Minegyik oszlopban megkeressük a legkisebb elemet (illetve elemeket):

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 \\ 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot & 4 & \cdot \end{bmatrix}$$

Mindegyik oszlopot annyival csökkenthetjük, amennyi az oszlop legkisebb eleme:

$$\begin{bmatrix} 11-7 & 6-4 & 5-5 & 13-4 & 8-5 \\ 9-7 & 6-4 & 9-5 & 5-4 & 5-5 \\ 7-7 & 12-4 & 7-5 & 5-4 & 12-5 \\ 11-7 & 13-4 & 8-5 & 6-4 & 6-5 \\ 8-7 & 4-4 & 7-5 & 4-4 & 8-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Most más csak a 0-ák lesznek a min-elemek. A mátrix még mindig B típusú; az összes min-elemet tartalmazó legfeljebb $m-1$ sor és oszlop egy lehetséges megválasztása: 1., 3. és 5. oszlop és 5. sor. Most ε új értékéhez a következő készletből kell

minimumot keresni:

$$\begin{bmatrix} \cdot & 2 & \cdot & 9 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 8 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 9 & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Tehát $\varepsilon = 1$. A mátrix a következőképpen módosul:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 1+1 & 0+1 & 2+1 & 0+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Csökkentető lesz a 2. és a 4. oszlop, mindegyik 1-gyel:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2-1 & 0 & 9-1 & 3 \\ 2 & 2-1 & 4 & 1-1 & 0 \\ 0 & 8-1 & 2 & 1-1 & 7 \\ 4 & 9-1 & 3 & 2-1 & 1 \\ 2 & 1-1 & 3 & 1-1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Még mindig B típusú a mátrix: az 1., 2., 3. és 5. sorok tartalmazzák az összes min-elemet (melyek most is a 0-kkal azonosak). Az ε értéke a 4. sor legkisebb eleme, tehát 1. Ez következik:

$$\begin{bmatrix} 4+1 & 1+1 & 0+1 & 8+1 & 3+1 \\ 2+1 & 1+1 & 4+1 & 0+1 & 0+1 \\ 0+1 & 7+1 & 2+1 & 0+1 & 7+1 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 2+1 & 0+1 & 3+1 & 0+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Az oszlopok csökkentése után ezt nyerjük:

$$\begin{bmatrix} 5-1 & 2-1 & 1-1 & 9-1 & 4-1 \\ 3-1 & 2-1 & 5-1 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 8-1 & 3-1 & 1-1 & 8-1 \\ 4-1 & 8-1 & 3-1 & 1-1 & 1-1 \\ 3-1 & 1-1 & 4-1 & 1-1 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ez az utolsó mátrix már végre A típusú, ahogy az az a min-elemek következő kiválasztásból is látszik:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

A min-elemek kiválasztásának ezen mintája adja az eredeti mátrixon is az optimális megoldást:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

A magyar módszer sikeréhez hozzájárult, hogy az algoritmus meglehetősen gyorsá tehető. Sikertült olyan megvalósításokat konstruálni, melyben az m szám növekedése nem vonja maga után az algoritmus összes lépései számának elviselhetetlenül nagymértékű megnövekedését. Példának okáért az m szám megduplázódása a lépésszámnak csak a 5.7-szereződését eredményezi, ami kiváló teljesítménynek tekinthető az algoritmusok elméletében. A kutatók tovább dolgoznak, és elméletileg nem kizárt, hogy az 5.7-et sikerül lenyomni 4 közelébe. Viszont már néhány évtizede sehogy sem sikerül 5.7-ről 5.6-ra jutni.

A magyar módszer számtalan helyen nyert gyakorlati alkalmazást. Itt most csak egyet említünk: *adatok tömörítése*.

Egy új típusú mobil telefon készüléket a központból küldött SMS üzenetek révén szeretnénk programozni. Az egyes parancsok azonosítására kijelölünk jelsorozatokat. Az mindegy lesz, hogy melyik parancsot melyik jelsorozat azonosít, de egyszer s mindenkorra el kell döntenünk, hogy melyik jelsorozatot melyik parancs azonosítására fogjuk használni. Célszerű lesz a gyakori parancsokat rövidebb jelsorozattal azonosítani, mert akkor jobb esélyünk lesz arra, hogy egy bonyolultabb program is elfér egyetlen SMS-ben. Készítünk tehát egy m -szer m -es mátrixot, melynek i -edik sora az i -edik parancsnak, j -edik oszlopa a j -edik jelsorozatnak felel meg. A mátrix i -edik sorának j -edik eleme egy olyan nemnegatív szám lesz, ami azt fejezi ki, átlagosan SMS-enként hány egységnyi költséggel jár majd használat közben az a tény, hogy az i -edik parancsnak történetesen a j -edik jelsorozat lett megfeleltetve. Ez a szám sok mindentől függhet, például a jelsorozat hosszától, vagy a parancs előre várható gyakoriságától, illetve a parancs jellegétől. Mihelyt elkészült a mátrix, már csak meg kell oldani a hozzárendelési feladatot, és megkapjuk a parancsoknak és a jelsorozatoknak a várható költségek szempontjából optimális egymáshoz rendelését.

7. fejezet

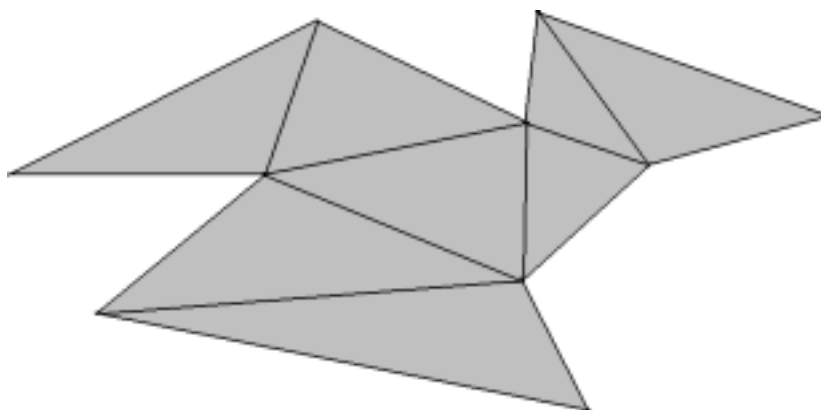
Merev körrel perfekt

Tekintsünk egy teszőleges (V, E) gráfot. Tekintsünk benne különböző pontokat úgy, hogy az egymás utániak szomszédosak: v_1, v_2, \dots, v_k , ahol $j = 1, 2, \dots, k - 1$ esetén $v_j v_{j+1} \in E$.

Definíció. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a v_1, v_2, \dots, v_k pontsorozat egy *út*. Ha még $k \geq 3$ és $v_k v_1 \in E$ is teljesül, akkor az út még *kör* is. Ha egy ilyen körben van még legalább egy $v_i v_j \in E$ él is, ahol $3 \leq i + 2 \leq j \leq k$, akkor azt mondjuk, hogy a kör *merev*. Ha egy gráfban egyáltalán nincs kör, akkor azt mondjuk, hogy a gráf egy *erdő*. Ha egy gráfban minden minden kör merev (ide értve azt az esetet is, amikor a gráf erdő), akkor a gráf neve: *merev körű*.

Könnyen látható, hogy egy k pontú úton az első és utolsó pontok távolsága a gráfban legfeljebb k . Ezért egy összefüggő gráfban bármely két pont valamely út első és utolsó pontja. (Ha a két pont azonos, akkor $k = 1$, ha a két pont szomszédos, akkor $k = 2$, ha a két pont nem szomszédos, akkor $k > 2$.)

Az is könnyen látható, hogy a fa gráfok és az összefüggő erdők ugyanazok a gráfok. Minden erdő merev körű, de nemcsak az erdők! És nem minden nem erdő sem merev körű! Például a legelső ábrán látható gráf nem merev körű. A 2.2. ábra összefüggő gráfjai között 4 merevkörű van. Egy páros gráf csak akkor lehet merev körű, ha erdő. A Berge által felsorakoztatott C_5, C_7, C_9, \dots és a $\text{co-}C_7, \text{co-}C_9, \dots$ p-kritikus gráfok egyike sem merev körű. Seymour és társainak friss tétele szerint



7.1. ábra.

ebből már látható, hogy merevkörű gráfok mind perfektek, de a nem erdő páros gráfok példája mutatja, hogy sok perfekt ggráf nem merev körű.

A merev körű gráfok vizsgálatát *Hajnal András* és *Surányi János* kezdték el már majdnem fél évszázada.

Tétel. (Hajnal és Surányi, 1958) Minden merev körű gráf perfekt.

Ezt a tételt kicsit később, Seymourék tételének mellőzésével bizonyítottuk.

A merev körű gráfok vizsgálatába hamarosan egy újabb magyar kapcsolódott be: *G. A. Dirac*. (Tán meglepő, de Dirac szintiszta magyar, hiszen anyja Wigner Manci, a híres fizikus Wigner Jenő testvérhúga; G. A. Dirac szülőapja is magyar volt, és a híres fizikus Dirac — Wigner Jenő jó barátja és kollégája — a matematikus Diracnak — annak 12 éves korában — mostohaapja lett.)

Definíció. Egy gráfban egy pont *szimpliciális*, ha a szomszédjai egymással is mind szomszédosak.

Az elnevezés onnan ered, hogy ha geometriai szimplexeket lapjaik mentén egymáshoz ragasztunk, akkor a keletkezett testek élhálózati gráfján a nem ragasztott csúcsok szimpliciális pontok lesznek. A mellékelt ábrán egy ilyen élhálózati gráfot mutatunk be 2 dimenzióban, ahol a szimplexek a szürke háromszög-lapok. Az ábrán a legbaloldalibb, a legjobboldalibb és a legalsó csúcspontok szimpliciálisak, de a többi pont csúcspont nem.

Egy éltelen gráfnak vagy egy teljes gráfnak mindegyik pontja szimpliciális. A Berge által felsorakoztatott C_5, C_7, C_9, \dots és a $\text{co-}C_7, \text{co-}C_9, \dots$ p-kritikus gráfok egyikének sincs szimpliciális pontja. Egy gráfban egy olyan pont, aminek 0 vagy 1 szomszédja van, nyilván szimpliciális. Ezért — mivel egy fának kevesebb éle van, mint pontja — egy fa gráfnak mindig van legalább egy szimpliciális pontja.

Tétel. (Dirac, 1961) Ha egy összefüggő gráfnak legalább két pontja van, és a gráf merev körű, de nem teljes gráf, akkor van a gráfban legalább két szimpliciális pont, melyek nem szomszédosak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (V, E) egy összefüggő gráf, két pontja van, és a gráf merev körű, de nem teljes gráf. Könnyen látható, hogy a pontok száma legalább 3. A bizonyítást a pontok száma szerinti teljes indukcióval végezzük. Ha a pontok száma 3, akkor az egyik pontnak 2 szomszédja van, mely szomszédok mindegyikének ez a kiragadott, 2 szomszédú pont az egyetlen szomszédja. Megvan tehát a két nem szomszédos szimpliciális pont: a 2 szomszédossal bíró pont két szomszédja.

Tegyük fel tehát, hogy a pontok száma $n \geq 4$, és azt is, hogy kevesebb pontú gráfokra már igazoltunk a tételt. Mivel a gráf nem teljes, van olyan pontja, melynek legfeljebb $n - 2$ szomszédja van. Először tegyük fel, hogy a gráfnak egyáltalán nincs szimpliciális pontja. Ellentmondásra kell jutnunk. Tekintsünk egy olyan v pontot a gráfban, aminek a lehető legkevesebb szomszédja van. Mivel v nem szimpliciális, ezért v szomszédjainak száma legalább 2, sőt van legalább 2 szomszédja, melyek egymásnak nem szomszédai. Jelöljön u és w két ilyen szomszédot. Most az eredeti gráfból hagyjuk el a v pontot. A keletkezett gráf — melyet jelöljön G_{-v} — merev körű marad, de ebben a G_{-v} gráfban nem lehet u és w egymásból elérhető, hiszen ha u és w távolsága k lenne, akkor nyerhetnénk az eredeti gráfban egy $k + 1$ pontú nem merev kört, melynek első három pontja u, v, w lehetne. Most a G_{-v} gráfból hagyjuk még el mindazokat a pontokat is, amik nem elérhetők u -ból G_{-v} -ben. A visszamaradó gráf — akár teljes, akár nem — mindenképpen összefüggő. Ha teljes gráf lenne, akkor u szimpliciális pont lenne az eredeti gráfban; tehát a visszamaradó gráf összefüggő, de nem teljes. Az indukciós feltevés miatt van benne két nemszomszédos szimpliciális pont. Mivel egyik sem lehet az eredeti gráfban

szimpliciális, ezért mindkettő szomszédja v -nek az eredeti gráfban. De akkor akár ezt a két pontot is választhattuk volna az előbb az u és v pontoknak, ezért a G_{-v} gráfban nem lehet a két pont egymásból elérhető. Node a két pont ugyanabban az összefüggő gráfban van! Ellentmondásra jutottunk!

Feltehetjük tehát, hogy az eredeti gráfban legalább 1 szimpliciális pont van. Válasszuk meg a v csúcsot úgy, hogy v szimpliciális legyen. Ha v -nek $n - 1$ szomszédja van, akkor a G_{-v} gráfra alkalmazva az induciót készen vagyunk a bizonyítással. Feltehetjük tehát, hogy v -nek legfeljebb $n - 2$ szomszédja van. Mivel az eredeti gráf összefüggő és mivel v szimpliciális pont, ezért a G_{-v} gráf is összefüggő. Mivel az eredeti gráfban v -nek legfeljebb $n - 2$ szomszédja van, a G_{-v} gráfnak van legalább egy pontja, mely nem szomszédja v -nek az eredeti gráfban. Megvan tehát a második szimpliciális pont is abban az esetben, ha történetesen G_{-v} teljes gráf. A továbbiakban feltehetjük, hogy G_{-v} összefüggő, de nem teljes. Most az indukciós feltevés alkalmazásával válik teljessé a tétel bizonyítása. \square

Dirac tétele alapján már nem nehéz bizonyítani Hajnal és Surányi tételét sem a pontok száma szerinti teljes indukcióval.

Bizonyítás (Hajnal és Surányi tételére). Ha a pontok száma legfeljebb 4, akkor nincs mit bizonyítani, hiszen megfigyeltük már, hogy minden legfeljebb 4 pontú gráf perfekt. Tekintsünk tehát $G = (V, E)$ merev körű gráfot $n \geq 5$ ponttal, és tegyük fel, hogy minden kevesebb pontú merev körű gráf már bizonyítottan perfekt. Ha elhagyunk egy v pontot G -ből, a visszamaradó G_{-v} gráf merev körű marad és az indukciós feltevés miatt perfekt. Ez azt jelenti, hogy G vagy perfekt, vagy p-kritikus. Az előbbi esetben nem kell már semmit bizonyítani. Az utóbbi esetben tekintsünk egy v szimpliciális pontot. (Dirac tétele miatt ilyen létezik.) Azt a p-kritikusságból tudjuk, hogy G_{-v} -re ugyanaz marad ω értéke. Mivel — az indukciós feltevés miatt — G_{-v} perfekt, ezért ω részes. Az ω darab stabil halmaz közül, melyek uniója a G_{-v} gráf teljes szögponthalmaza, legalább egy stabil halmazból nincs v -nek szomszédja G -ben, hiszen a v szimpliciális pontnak ω definíciója miatt legfeljebb $\omega - 1$ szomszédja lehet G -ben. Ebből már következik, hogy G is ω részes, hiszen v hozzávehető az említett stabil halmazhoz, és az a halmaz G -ben is stabil marad.

Ezzel a bizonyítás teljessé vált, hiszen ellentmondásra jutottunk a p -kritikussággal.
□

Abból a célból, hogy a merev körű gráfokról alkotott ismereteinket teljesebbé tegyük, még egy tételt bizonyítunk:

Tétel. Egy gráf akkor és csak akkor merev körű, ha bárhogy elhagyva belőle pontokat (esetleg nulla darabot, de nem az összeset), a maradék gráfban legalább egy szimpliciális pont található.

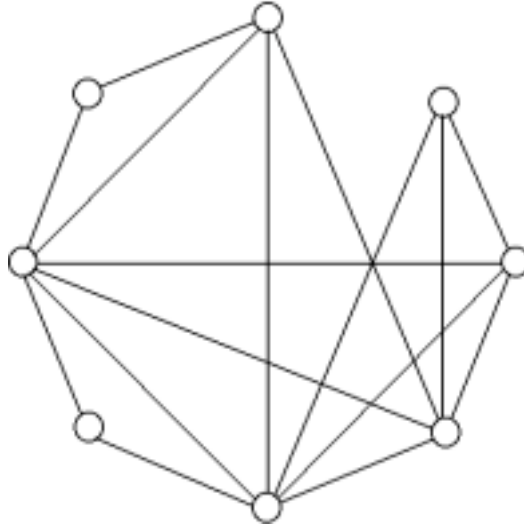
Másként mondva: Egy gráf akkor és csak akkor merev körű, ha minden feszített részgráfjának van legalább egy szimpliciális pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a gráf merev körű, és megmutatjuk, hogy van benne legalább egy szimpliciális pont. Mivel pontok elhagyása után a gráf nyilván merev körű marad, ezért a maradék gráfban is lesz szimpliciális pont.

Tekintsünk egy olyan v pontot az eredeti n pontú merev körű gráfban, melynek minimális számú szomszédja van. Ha a szomszédok száma 0 vagy 1, nyertünk, hiszen ekkor már maga v is szimpliciális. Feltehetjük tehát, hogy a v pont szomszédjainak száma legalább 2. Most hagyjunk el minden olyan pontot a gráfból, melyek nem elérhetők v -ből. A visszamaradó gráf merev körű és összefüggő lesz, és nyilván tartalmazza v -t is és a szomszédait is. Dirac tétele szerint ez az összefüggő gráf vagy egy teljes gráf, vagy van benne két szimpliciális pont is. Az előbbi esetben legalább 3 szimpliciális pontot is nyerünk. Akárhogyan is, az összefüggő gráfban van tehát legalább 2 szimpliciális pont. De ezek az eredeti gráfban is szimpliciális pontok. Ezzel a tétel állításának „csak akkor” részét beláttuk.

Most tegyük fel, hogy egy n pontú gráf olyan, hogy bárhogyan is hagyunk el belőle pontokat, a maradék gráfban legalább egy szimpliciális pont lesz. Meg kell mutatnunk, hogy a gráfban minden kör merev. Valóban, ha lenne egy nem merev kör, akkor minden, a körhöz nem tartozó pontot elhagyva nem maradna szimpliciális pont! Ezzel a bizonyítás kész!
□

A fenti tételek alapján már tudható, hogyan lehet n pontú merev körű gráfokat gyártani. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $V = \{1, 2, \dots, n\}$.



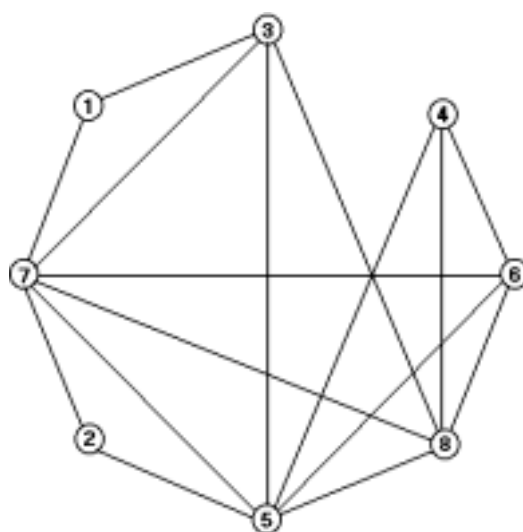
7.2. ábra.

Most sorra tekintjük a $i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$ pontokat, és mindegyik ilyen rögzített i -re felépítjük azon ij alakú élek halmazát, melyekre $i < j \leq n$. Ennél a halmaznál csak arra kell vigyáznunk, hogy az j számok klikket alkossanak. Másképpen fogalmazva: a i pont a már elkészített gráfban szimpliciális legyen.

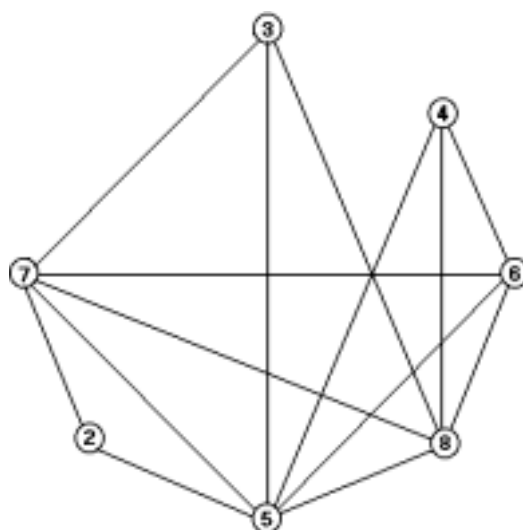
Könnyen látható, hogy így sohasem hozhatunk létre nem merev kört. Tehát az elkészített gráf merev körű lesz. Másrészt a fenti tétel alapján minden merev körű gráf elkészíthető a fenti módon.

A következő ábrán megadunk egy merev körű gráfot. Az a tény, hogy ez a gráf valóban merev körű, úgy látható, hogy az utána következő ábrán megadjuk a pontoknak egy olyan megszámozását, mely számozás alapján látható, hogy a fenti eljárással hogyan készíthető el a gráf. Visszafelé haladva az időben megmutatjuk, hogy épült fel ez a gráf:

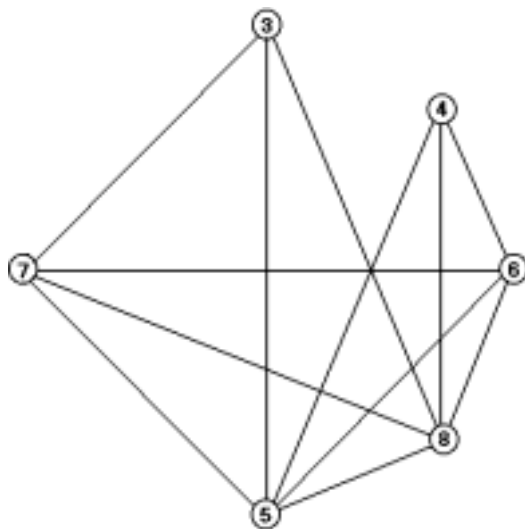
A merev körű gráfok fogalma és tulajdonságai jól felhasználhatók a numerikus analízis tudományágban a nagy méretű, de ritka mátrixok hatékony kezelésére. Ennek a fejezetnek a háralévő részében tekintsünk egy n -szer n -es A mátrixot, és tegyük fel, hogy adott egy merev körű gráf a $V = \{1, 2, \dots, n\}$ szögponthalmazon E élhalmazzal. Tegyük fel, hogy olyan kapcsolat van a gráf és a mátrix között, hogy ha $i, j \in V$ és $i \neq j$, akkor az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme 0. Most tekintsünk



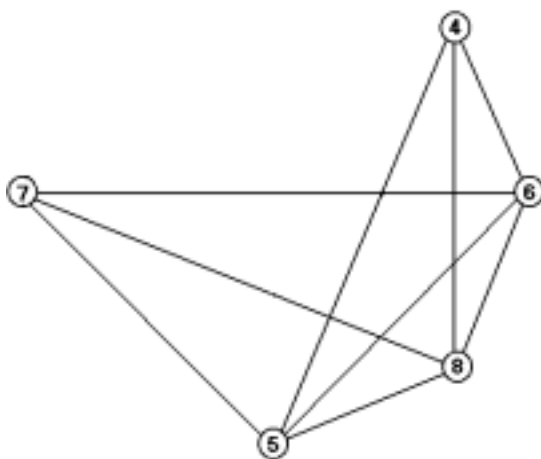
7.3. ábra.



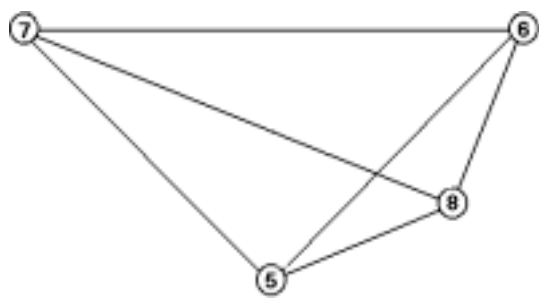
7.4. ábra.



7.5. ábra.



7.6. ábra.



7.7. ábra.



7.8. ábra.



7.9. ábra.



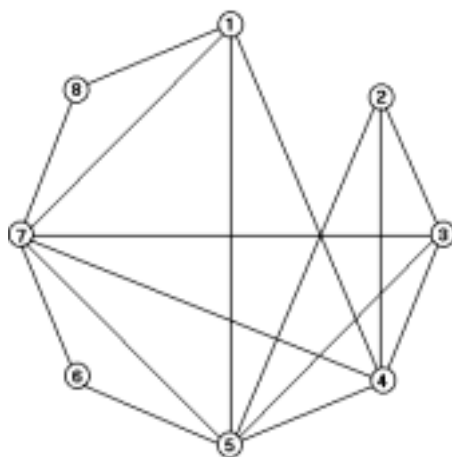
7.10. ábra.

egy szimpliciális k pontot a gráfban, és tegyük fel, hogy a mátrixon a főátló k -adik eleme szerint egy pivotálást, azaz egy Gauss-Jordan eliminációs lépést végzünk. Ez a mátrix elemeinek egy olyan átalakítása, hogy az k -adik sor valahányszorosát levonjuk mindegyik másik sorból. Vegyük észre: az átalakítás után az a tulajdonság fennmarad, hogy ha $i, j \in V$ és $i \neq j$, továbbá $ij \notin E$ akkor a mátrix i -edik sorának j -edik eleme 0. Mindazonáltal, ha mátrixból elhagyjuk a k -adik sort és a k -adik oszlopot, a gráfból pedig a k pontot, akkor majdnem az eredeti szitutációval állunk újra szemben, csak az a különbség, hogy most 1-gyel kisebbek a méretek. Újra keresve egy szimpliciális pontot a csökkentett gráfban, folytathatjuk az eljárást.

Ezen a módon a teljes Gauss-Jordan elimináció úgy végezhető el, hogy közben viszonylag keveset kell számolnunk. Mindezt egy példán szemléltetjük. Tekintsük először a következő mátrixot, melyben az elemek helyén csak pontok és csillagok vannak.

$$\begin{bmatrix} * & \cdot & \cdot & * & * & \cdot & * & * \\ \cdot & * & * & * & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & * & * & * & \cdot & * & \cdot \\ * & * & * & * & * & \cdot & * & \cdot \\ * & * & * & * & * & * & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * & * & \cdot \\ * & \cdot & * & * & * & * & * & * \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \end{bmatrix}$$

A pontok helyére majd később csak 0-akat szabad beírni, a csillagok helyére viszont bármi beírható. Ezen szabály betartásával taláломra töltjük fel elemekkel a mátrixot (az egyszerű példa érdekében történetesen itt csak a 0, 1, 2, 3, 4 számok



7.11. ábra.

közül válogatunk):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elkészítjük azt a gráfot is, amely csillagok elhelyezkedését jelzi. Itt tehát $1, 2, \dots, 8$ a pontok, és az i és j két különböző pont akkor és csak akkor alkot élt, ha vagy az i -edik sor j -edik eleme, vagy a j -edik sor i -edik eleme (esetleg mindekettő) csillag. Ezt kapjuk: Ebben a gráfban található szimpliciális pont, több is. Tekintjük a legelsőt, amely kezünkbe kerül: 2. A fenti mátrixon a legelső pivotálást tehát a 2. sor 2.

elemén végezzük. Ezt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1\frac{1}{2} & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha a gráfból elhagyjuk a 2 pontot, újra találunk szimpliciális pontot, például a 3-asat, majd azt elhagyva például a 4-eset. Ennek megfelelően a 3. sor 3. elemével, majd a 4. sor 4. elemével folytatjuk a pivotálást. Ezeket e mátrixokat nyerjük:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1\frac{1}{2} & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\frac{1}{2} & 9 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3\frac{1}{2} & 9 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 11 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\frac{1}{7} & 0 & 1\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\frac{4}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1\frac{6}{7} & 2 & 1\frac{3}{7} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ami a legfontosabb: Látható, hogy nemnulla elem csak ott jelenhet meg, ahol az eredeti csillagos mátrixban csillag volt! További szimpliciális pontok választásával az eliminációs eljárás megtartja ezt a „jó szokását”.

8. fejezet

Valószínűségi becslések

Ha adott két valószínűségi esemény, A_1 és A_2 , akkor közismerten igaz a valószínűségeikre a következő összefüggés:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

A Venn diagrammok segítségével az A_1 , A_2 és A_3 eseményekre a következő egyenlőtlenség is hamar belátható, hogy $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ értéke legfeljebb

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Ez pedig legfeljebb

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3).$$

Természetesen további összefüggések nyerhetők az alsó indexek sorrendjének megváltoztatásával. Négy eseményre már több, nemcsak az alsó indexek sorrendje szerint különböző egyenlőtlenséget is le tudunk vezetni. Íme néhány:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

Ha az események száma növekszik, az érvényes, bizonyítható, a fentiekhez hasonló egyenlőtlenségek változatossága exponenciálisan növekszik. Az ilyen egyenlőtlenségek nagyon fontosak a gyakorlati alkalmazások szempontjából is. Például ha ismert, kipróbált alkatrészekből egy bonyolultabb gépet szerelünk össze, jó lenne egy felső becslést nyernünk a szerkezet meghibásodási valószínűségére. Itt az A_j esemény azt jelenti, hogy a j sorszámú alkatrész meghibásodik. A korábban összeszerelt, kipróbált gépek statisztikai adatai alapján ismerjük a $P(A_j)$ számokat, a $P(A_i \cap A_j)$ számokat és a $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ számokat. Ha nem is az összeset ismerjük, ha nem is teljes pontossággal, de amit tudunk, azokat az adatokat felhasználhatjuk. Célunk, hogy a

$$\delta = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

különbséget — mely nyilván egy nemnegatív és 1-nél nem nagyobb szám — felülről megbecsüljük a $P(A_i \cap A_j)$ számokra és a $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ számokra vonatkozó rendelkezésre álló adatok segítségével. Ilyen célra használható a következő tételt, melyet itt most nem bizonyítottunk (bár a szimpliális pontok segítségével, indukcióval nem nehéz a bizonyítás sem):

Tétel. (Dohmen és függetlenül Boros és Veneziani, 2002) Legyen adva az $\{1, 2, \dots, n\}$ szögponthalmazon egy összefüggő merev körű gráf úgy, hogy az ij alakú élek mindegyikére ismerjük a $P(A_i \cap A_j)$ számoknak egy-egy felső becslését, amik összegét jelölje β , és tegyük fel még azt is, hogy a 3 pontú, $\{i, j, k\}$ alakú klikkek mindegyikére ismerjük a $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ számoknak egy-egy alsó becslését, mely alsó becslések összegét γ jelölje. Ekkor fennáll: $\delta \leq \beta - \gamma$.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor a merev körű gráf egy fa, akkor a tétel állítása már korábban is ismert volt: ekkor nyilván $\gamma = 0$, ezért $\delta \leq \beta$.

A fenti tételt itt most nem bizonyítjuk. De az olvasó maga is megpróbálkozhat a bizonyítással. Természetesen Dirac tételét lehet alkalmazni, és indukcióval végezhető el a bizonyítás.

9. fejezet

Perfekt gráfok alapvető algoritmusai

Nagyszerű lenne, ha a világon lenne egy olyan számítógép, melynek inputként egy gráfot adva a gép hamar — és ebből következően ingyen, vagy olcsón — meg tudná válaszolni, hogy arra gráfra mennyi α és ω , és meg tudná mondani, hogy mi az a legkisebb nemnegatív egész κ , melyre a gráf $\omega + \kappa$ részes. Ha az input gráf történetesen perfekt, akkor természetesen $\kappa = 0$ lesz. Egy (V, E) gráfra α értéke ugyanaz, mint a $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$ komplementer gráfra ω értéke; ez Lovász tételének egyszerű következménye. Nagyon tudnánk örülni tehát egy olyan számítógépnek, ami gyorsan és olcsón megmondaná nekünk ω értékét, és amennyiben a gráf nem perfekt, akkor α és k értékét is.

Sajnos ilyen számítógép és azon futó program — a szakemberek nagy erőfeszítése ellenére — még nem létezik, és — feltehetően — nem is készíthető. Ha próbálkoznánk keresni vállalkozót, akkor legfeljebb 1000 pontú gráfra mondjuk 1 amerikai dollárért kaphatnánk meg ω értékét az interneten pár perc elmúltával, de 10000 pontú gráfra még egymillió dollárért sem kapnánk garantált eredményt. A számítási költségek — időben és dollárban mérve is — a pontok számának függvényében a tapasztalatok szerint exponenciálisan nőnek.

Pedig ha gyorsan és olcsón megtudhatnánk ω értékét, annak számtalan gyakorlati alkalmazásnál láthatnánk hasznát! Hasonlóképpen hasznos lenne k értéke is, ami

pedig — a tapasztalatok szerint — még nagyobb költségek árán kapható meg.

Szerencsére a perfekt gráfok esetében nem ennyire reménytelen a helyzet. Ismét csak Lovász László sietett a megoldással. Tetszőleges gráfra hatékony módon — azaz időben és számítógép teljesítményi igényeiben olcsón — ki tud számítani egy olyan f nemnegatív — de nem feltétlenül egész, sőt lehet, hogy még csak nem is racionális — számot, amelyre $\omega \leq f \leq \omega + \kappa$. Ha a gráf perfekt, akkor persze nyert ügyünk van, hiszen $\kappa = 0$ miatt $\omega = f$. Ha az f szám értéke nem egész, akkor természetesen következtethetünk ebből arra, hogy a gráf nem nem perfekt, hiszen $\kappa \geq 1$. Előfordulhat azonban, hogy a számításainkból — a számítógép kerekítéseit is tekintetbe véve — nem tudunk következtetni arra.

A gyakorlati alkalmazások többségénél azonban nemcsak α, ω és κ értékére van szükségünk, hanem konkrétan legalább egy α méretű stabil halmazra, legalább egy ω méretű klikkre, illetve legalább egy $\omega + \kappa$ darab stabil halmazra, melyek uniója a teljes szögponthalmaz. Ha valamely oknál fogva tudjuk, hogy a vizsgálat alá vett gráf perfekt, akkor Lovász függvénye segítségével hatékonyan kiszámíthatjuk az említett szögponthalmazokat. A vezérgondolat a következő: Ha egy pontot elhagyva egy (perfekt) gráfból α értéke csökken, akkor a szóban forgó pont beletartozik egy α méretű stabil halmazba. Ezután a pontot és összes szomszédját elhagyva a maradék (perfekt) gráfban már csak egy $\alpha - 1$ méretű stabil halmazt kell keresni. Ha pedig az eredetileg vizsgált pont elhagyása nem csökkenti α értékét, akkor csak a pontot hagyjuk el, a szomszédjait nem, és a maradék gráfon ismétljük meg az eljárást.

10. fejezet

Irodalom és további kutatások

Az utóbbi évtizedekben rengeteg jó könyv jelent meg a perfekt gráfokról és az azokhoz kapcsolódó algoritmusokról. Az interneten nagyon könnyű jó anyagokat találni magyarul is, németül is, angolul is. Szánt szándékkal nem emelünk ki néhányat sem ezek közül, mert a legtöbbet jónak tarjuk, és mindet felsorolni nincs itt most lehetőség.

Inkább leírjuk azt, hogy milyen területeken folyik napjainkban kutatás. Sokan dolgoznak azon, hogy az erős perfekt gráf tétel bizonyítását leegyszerűsítsék. A gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos speciális perfekt gráfok jellegzetességeinek feltárása is sok kutató témája. A kapcsolódó algoritmusok futásidejének és egyéb, „komplexitási” paramétereinek javítása is alapos vizsgálat tárgya. Jómagam például — kollégáimmal — a perfekt gráfokat a valószínűségi becslések fejlesztése céljából kutatom.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából még a következő területek is különösen érdekesek és fontosak: perfekt gráfok alkalmazása adatok tömörítésére és titkosítására; számítógépes rendszerek és más berendezések ütemezési módszereinek javítása; a numerikus analízisben a mátrixok algoritmusainak gyorsítása.

