





BOLYAI FARKAS ÉS BOLYAI JÁNOS



$$\text{gegeben } m = \frac{s}{p} \text{ Log} \left[\left(\frac{p^2}{s^2} + 1 + \left(\frac{p^2 x^2}{s^2} + \frac{2px}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(\frac{p^2 (x-n)^2}{s^2} + 1 + \left(\frac{p^2 (x-n)^2}{s^2} + \frac{2p(x-n)}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

Man kann sich aus der vorstehenden Gleichung

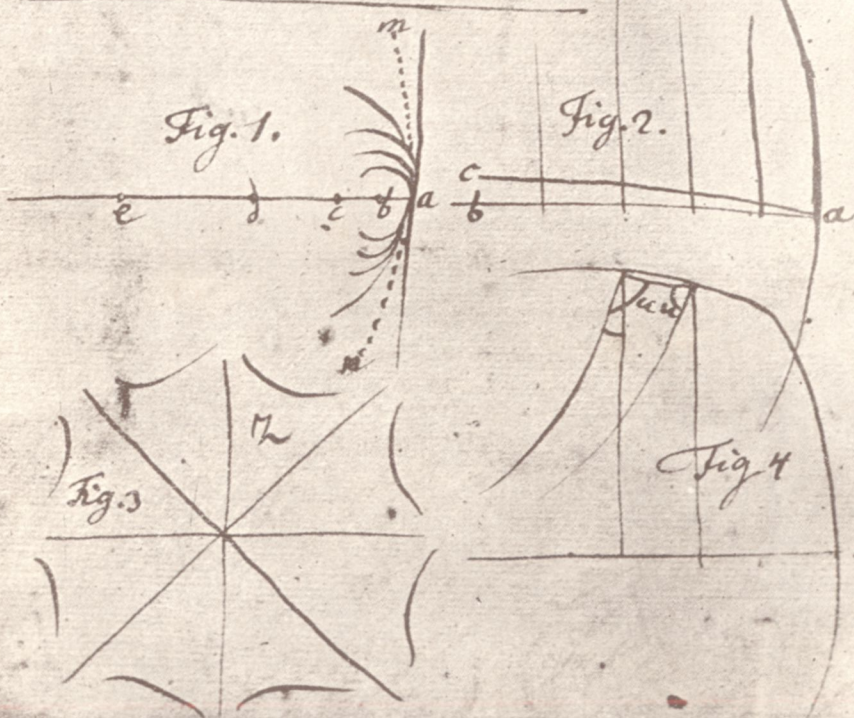
$$z = \frac{1}{p} (p^2 x^2 + 2pxs)^{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$z' = \frac{1}{p} [p^2 (x-n)^2 + 2ps(x-n)]^{\frac{1}{2}}, \text{ folglich}$$

$$z + z' = l = \frac{1}{p} (p^2 x^2 + 2pxs)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{p} [p^2 (x-n)^2 + 2ps(x-n)]^{\frac{1}{2}} \quad (II)$$

Jetzt setzen wir 2 Gleichungen ^{zusammen} in z und z' ein, um x zu finden.

A' Parallelarum Theoriae.



BOLYAI FARKAS ÉS BOLYAI JÁNOS

GEOMETRIAI VIZSGÁLATAI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL

KIADTA,

ÉLETRAJZZAL ÉS MAGYARÁZATTAL ELLÁTTA

STÄCKEL PÁL

MAGYARRA FORDÍTOTTA

RADOS IGNÁCZ

ELSŐ RÉSZ

A KÉT BOLYAI ÉLETE ÉS MŰVEI

BOLYAI JÁNOS EGYIK FÖLJEGYZÉSÉNEK HASONMÁSÁVAL ÉS HUSZONHAT
A SZÖVEG KÖZÉ NYOMTATOTT ÁBRÁVAL



BUDAPEST

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1914

SCHMIDT FERENCZ

ÉPÍTÉSZ

A BOLYAIK ÜGYE FÁRADHATATLAN

ELŐHARCZOSA EMLÉKÉNEK

AJÁNlja E Művet

A SZERZŐ

A FORDÍTÓ ELŐSZAVA.

A szerző megtisztelő fölhívására vállalkoztam, hogy e mű magyar kiadását sajtó alá rendezem. A mű keletkezéséről beszámol maga a szerző, a ki sok éven át nagy szeretettel, bámulatos körültekintéssel és ernyedetlen kitartással végzett kutatásainak eredményeit összefoglalva mutatja be a matematikus-közönségnek, úgy hogy én pusztán arra szorítkozhatom, hogy a fordítás készítésénél követett eljárásról adjak számot.

Az I. rész, az életrajz, lehetőleg hű fordítása az eredeti német szövegnek; de a két BOLYAI műveiből és hagyatékából idézett azokat a részleteket, melyeket ők magyarul írtak meg, a mennyire megszerzésük módomban volt, az eredeti alakban mutatom be az olvasónak. A magyar kiadás I. része csak annyiban tér el a némettől, hogy a szerző beleegyezésével, mint a magyar olvasóra nézve fölöslegeseket elhagytam a bevezetés első bekezdéseit, melyeknek az a rendeltetésük, hogy a nem-magyar olvasót megismertessék Erdély történetével. Evvel szemben, mint olyan dolgot, mely a magyar olvasó érdeklődésére inkább számíthat, közöltem a *Tentamen* magyar toldalékának azt a részletét, melyben BOLYAI Farkas azokat az elveket kifejti, a melyek őt az új mesterszók alkotásánál vezérelték. Ezt a szerző is csak azért mellőzte, mert megértéséhez elengedhetetlen kellék a magyar nyelv ismerete.

A II. részben, mely a két BOLYAI műveiből a szemelvényeket tartalmazza, azt az eljárást követtem, hogy a latin szövegeket az eredetiből fordítottam és fordításomat csak ezután hasonlítottam össze a szerzőnek kéziratban rendelkezésemre bocsátott német fordításával, és ha valahol eltérés mutatkozott a felfogásban, a szerzővel folytatott tanácskozás alapján állapítottuk meg a végleges szöveget. A két BOLYAINAK németül megírt műveit a szerző természetesen az eredeti alakban közölhette; magyarra való lefordításuk szokatlan stílusuk miatt sokkal nagyobb nehézséget okozott, mint a latin részleteké és ezért lehetséges hogy a magyar szöveg egyes helyeken nem is egészen találó.

A nehézségeken, melyekkel e mű magyar kiadásának készítése járt, KÜRSCHÁK József barátom segített keresztül, ki mint az egész anyagnak alapos ismerője, kezdettől fogva támogatott becses tanácsaival és nagy elfoglaltsága mellett is magára vállalta, hogy a próbái-veket átolvassa. Fogadja e helyen is őszinte köszönetemet. De nagy mértékben voltak segítségemre azok a becses útmutatások is, melyekkel a szerző támogatott; fogadja ő is hálám kifejezését.

Hálával kell megemlékeznem dr. SZABÓ Péter tanár úrról is, ki szíves volt rendelkezésemre bocsátani annak a levélnek eredeti szövegét, melyet BOLYAI Farkus 1820 április hó 4-dikén BOLYAI Jánosnak írt; ezenkívül pedig e mű magyar kiadása számára átengedte nekünk báró KEMÉNY Simon életrajzát, melyet ő a saját kutatásai alapján írt meg és HEREFEI Ádámnak azt a levelét, melyet BOLYAI Farkashoz marosvásárhelyi beköszöntője után intézett. Köszönetemet fejezem ki e helyen PÁL Gusztáv úrnak, a marosvásárhelyi ref. kollegim igazgatójának, ki a legnagyobb előzékenységgel megengedte, hogy a kollegium könyvtárában a két BOLYAI hagyatékát megtekintsem és belőle azt, a mire szükségem van, lemásolhassam. Kezemre járt GULYÁS Károly, a kollegium könyvtárosa is, ki később is a hozzá intézett kérdéseimre a legnagyobb készséggel adta meg a kívánt felvilágosításokat és több ízben szíves volt számomra részleteket másolni a két BOLYAI irataiból. Baráti támogatásáért fogadja ő is köszönetemet.

A Franklin-Társulat avval a készségével kötelezett le, mely-lyel e mű kiállítására és külső alakjára vonatkozó minden kívánsá-gomat teljesítette és nagy gondosságával, melyben e könyv előállítását részesítette.

Budapesten, 1914 június havában.

Rados Ignác.

A SZERZŐ ELŐSZAVÁBÓL.

E mű előmunkálatainál és kiadásánál a Magyar Tudományos Akadémia hathatós támogatásában részesültem. Kötelességemnek tartom, hogy ezért az Akadémia volt főtitkárának, SZILY Kálmán úrnak legmelegebb hálámat fejezzem ki; nem kisebb hálával tartozom KÖNIG Gyula tanár, osztálytitkárnak, ki, fájdalom, már nem érhetette meg e könyv megjelenését.

A marosvásárhelyi ref. kollegium, melynek BOLYAI Farkas tanára és BOLYAI János növendéke volt, előzékenységevel abba a helyzetbe juttatott, hogy Erdélyben való ismételt tartózkodásom alkalmával (1898 márczius havában, 1901 augusztus, majd 1909 szeptember havában) e két férfiúnak a kollegium könyvtárában őrzött hagyatékát megtekinthessem és könyvem számára felhasználhassam. Nagyra becsülöm azokat a szóbeli és írásbeli közléseket is, melyeket Farkas utolsó tanítványának: néhai Koncz Józsefnek, a kollegium későbbi tanárának köszönök; requiescat in pace.

Habár BOLYAI János *Appendixét* már régebben ismertem, mégis csak SCHMIDT Ferencz építész volt az, ki 1894-ben, mikor vele Bécsben a természettudósok gyűlésén találkoztam, arra buzdított, hogy a két BOLYAI műveivel behatóbban foglalkozzam. Jelen művemet e férfi felejtethetlen emlékének ajánlottam, ki fáradhatatlan előharczosa volt a két BOLYAI ügyének.

Az előkészületek hosszú évein át végig kísért a két BOLYAI két földijének élénk érdeklődése és soha cserben nem hagyó támogatása; KÜBSCHÁK József budapesti tanár úrra és SCHLESINGER Lajos gieszeni tanár úrra gondolok, ki 1897-től 1911-ig a kolozsvári egyetemen működött. Nagy örömemre szolgál, hogy nekik e helyen nyilvánosan fejezhetem ki köszönetemet.

RADOS Ignác budapesti tanár úr elvállalta a Magyar Tudományos Akadémia költségén megjelenő magyar kiadásnak sajtó alá ren-

dezését; nemcsak ezzel kötelezett le ő engem, hanem a próbaivek áttekintésében való részvételével is.

Fölvilágosításaikért, közléseikért és adalékaiért még sok másnak hálával tartozom. Első helyen emlitem közülök Szabó Péter budapesti tanár urat, ki a birtokában levő fontos okiratokat a legnagyobb készséggel bocsátotta rendelkezésemre és kinyomtatásukra is megadta az engedélyt; halára köteleztek még a következő urak: BREDEL M. tanár majnai Frankfurthban, BRODMANN C. könyvtárigazgató Karlsruheban, DANTSCHER V. tanár Grácban, ENGEL F. tanár Gießenben, NEUMANN C. tanár Heidelbergben, RÉTHY Mór tanár Budapesten, ROTH K. tanár Segesvárt, SCHUR F. tanár Straßburgban, TÉREY Gábor szépművészeti muzeumi aligazgató Budapesten.

Heidelbergben, 1913 július havában.

Stärkel Pál.

AZ ELSŐ RÉSZ TARTALMA.

	Oldalszám
I. fejezet. A Bolyai-család; Bolyai Farkas ifjúkora (1775–1796) ...	1—4
II. fejezet. Bolyai Farkas Németországban; baráti viszonya Gauss-szal (1796–1799) — — — — —	5—9
III. fejezet. Visszatérés a hazába; Kolozsvár és Domáld (1799–1804)	10—13
IV. fejezet. Bolyai Farkas mint marosvásárhelyi tanár (1804–1853)	14—25
V. fejezet. Bolyai Farkas mint matematikus.	
Első rész: Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos introducendi — — — — —	26—36
VI. fejezet. Bolyai Farkas mint matematikus.	
Második rész: A geometria alapjaira vonatkozó vizsgálatai — — — — —	37—49
VII. fejezet. Bolyai János ifjúsága (1802–1818) — — — — —	50—59
VIII. fejezet. Bolyai János a mérnök-akadémián (1818–1823) — — — — —	60—67
IX. fejezet. Bolyai János mint katonatiszt — — — — —	68—72
X. fejezet. Az abszolút geometria fölfedezése Bolyai János által.	
Első rész: Euklides XI. axiómájának bebizonyítására irányuló kísérletei — — — — —	73—81
XI. fejezet. Az abszolút geometria fölfedezése Bolyai János által.	
Második rész: A XI. axióma bebizonyíthatatlan volta.	
Az Appendix (1823–1832) — — — — —	82—93
XII. fejezet. Bolyai János Domáldon — — — — —	94—97
XIII. fejezet. Bolyai János további vizsgálatai az abszolút geometria terén — — — — —	98—120
XIV. fejezet. Bolyai Farkas és Bolyai János dolgozatai a képzetes mennyiségekről — — — — —	121—130
XV. fejezet. Bolyai János és Lobatschefskij Ivánovics Miklós.	
Első rész: Hogyan értesült János Lobatschefskijnek »Geometrische Untersuchungen«-jéről — — — — —	131—136
XVI. fejezet. Bolyai János és Lobatschefskij Ivánovics Miklós.	
Második rész: Bolyai János »Észrevételei Lobatschefskij Geometrische Untersuchungen über die Parallellinien« című művére — — — — —	137—158

	Oldalszám
XVII. fejezet. Bolyai Farkas utolsó évei (1848—1856)	— 159—169
XVIII. fejezet. Bolyai János Maros-Vásárhelyt (1846—1860); előrehaladt korából való matematikai vizsgálatai	170—184
XIX. fejezet. Bolyai János Üdvtana	185—191
XX. fejezet. Zárószó	192—200
Jegyzetek és utalások	201—278
Tárgy- és névmutató	279—288

A BOLYAI-család; BOLYAI Farkas ifjúkora (1775—1796).

Nagyszebentől három mértföldnyire északra van Bolya, a BOLYAI-család ősi fészke. A család czimere zöld halom kék mezőben, a halmon egy páva áll természetes színezésben. A BOLYAI név már a XIII. és XIV. század okirataiban szerepel, és a XVI. század kezdetétől fogva a család származási rendje hézag nélkül van megállapítva. Abban az időben tekintélyes nagybirtokosok voltak a BOLYAIak, kik különösen a törökök elleni harcokban mint katonák is megállották helyüket; az egyik BOLYAI János, ki a XVI. század vége felé élt, *homo regius* volt. Nemsokára ezután a család hanyatlásnak indult és elvesztette földbirtokának legnagyobb részét. BOLYAI Gáspár (1732—1804) már csak egy Bolya mellett fekvő birtokocskát vallhatott magáénak. «Gazdaságát nagy szorgalommal vezette, úgy hogy birtokos társai azt mondták róla: „ha BOLYAI Gáspár sokáig élne, a mennyi kopár hegy van Bolyában, mind zöldelővé tenné“. Pedig sok szerencsétlenség érte életében. De a sors csapásai nem törték meg a filozófikus gondolkodású erős jellemű férfiút.» «Atyám, a tiszteletreméltó aggastyán» — írja 1804 márczius hó 1-sején BOLYAI Farkas GAUSS-nak — «február 17-ikén földi börtönéből... kiszabadult; mindig erős, vidám lelke halálos ágyán sem hagyta el... elbúcsúzott és az utolsó pillanatban kérdezte: Hol van az, a kiből reménykedhetem? az Isten! és azután belészunnyadt a hosszú hosszú jó éjszakába.» Felesége pávai VAJNA Krisztina volt, a ki 1777-ben anyai örökségül a Maros-Vásárhely közelében fekvő Domáld mellett birtokot hozta a házhoz, «a domáldi nemesi kúriát a hozzátartozó szántóföldekkel, rétekkel, szőlőkkel, korcsmai joggal és hat jobbágygyal». E házasságból két fiú származott: Farkas, a marosvásárhelyi evangélikus-református kollégium tanára (1775—1856) és Antal, Felső-Fehérmegye főjegyzője (1778—1845), ki mint szorgalmas, értelmes, tiszteletre méltó ember általános becsülésben részesült.

BOLYAI Farkas 1775 február 9-ikén Bolyán született. Az első tanításban atyja részesítette. De már 1781 szeptember havában szekerre tették a fiút és Nagyenyedre vitték, hol az evangélikus-református

kollegiumba nevelőbe adták. A kis diák ládikáját Farkas fia, Gergely, 1887 május havában odaajándékozta a marosvásárhelyi collegiumnak, melynek könyvtárában ereklje gyanánt most is őrzik.

Erdély hat ev.-református collegiuma: a nagyenyedi, a kolozsvári, a marosvásárhelyi, a székelyudvarhelyi, a szászvárosi és a zilahi a magyar ifjúságnak nevezetes iskolái és nevelőhelyei voltak. Tantervük megfelelt a XVIII. század német «akadémiai gimnáziumok» tantervének. Körülbelül 9 éves korukban léptek be a tanulók a legalsó, a grammatikai osztályba, a melyben egy évet töltöttek. Erre következtek egy-egy évfolyammal a szintaktikai, a német, a retorikai és a poétikai osztály; az egészet betetőzte a két évfolyamú filozófiai osztály. Mint «deákok» a fiatal emberek még két évig maradtak a collegiumban: a tanítás ekkor akadémiai jelleget öltött és az átmenetet egyengette az egyetemre. A felső osztályokban a tanítás nyelve a latin volt; a fősúlyt a régi nyelvekre helyezték, a melyek mellett a németet, a francziát és a történetet is tanították; hogy pedig az egyházi hatóságoknak alárendelt collegiumokban nem hanyagolták el a vallástant sem, az magától értetődik. A matematikában a számolásban való bizonyos készség megszerzésére és az arithmetika és geometria elemeinek emlékezeteszerű betanulására szorítkoztak.

Farkast Nagyenyeden először az ő külön tanítója (præceptor), HEREPEI János tanította. A fiú szokatlan tehetsége hamarosan figyelmet gerjesztett. «Nagyon kicsiny gyermek voltam, mikor az iskolába küldtek» — beszéli el Farkas — «mint tanulóknak, élénk és nem játékos [gyermek] mindent előre megtanultam; kilencz éves koromban. magam tanulva ezt meg, mindenről latin verseket rögtönöztem; Homerosból 500 verset tudtam könyv nélkül és a héberből is tudtam egyet-mást; mint ügyes fejszámoló, 14[-jegyű] számokból hibátlanul vontam négyzet- és köbgyököt és még több[-jegyű] számokat kértem; de még azt sem tudtam, hogy ennek okát is kell tudni. Mint valami csodára mutattak reám, de én [nagyon is] együgyű voltam arra, hogy képzeledjem és csak szóttem, mint a nyű». Mint sok más kiváló matematikusnak is, Farkasnak nagy hajlandósága volt a nyelvekre; anyanyelvén kívül ura volt a latinnak, németnek, angolnak meg francziának és románul úgy beszélt, mint valami született oláh.

Sajnos, hogy tanítói nem találták el a kellő bánásmódot az ilyen nem mindennapi tanítvánnyal szemben. A helyett, hogy felizgatott lelkiületét csillapították volna, inkább ösztökölték, és a csodagyermeket büszkén mutogatták a collegium látogatóinak. Nem szívelték meg egyik nagytekintélyű vendégöknek: gróf TELEKI Józsefnek (1738—1796) okos figyelmeztetését, a ki kikelt a fiúnak túlkorai

érlelése ellen. A «makacsság» jelentkezését a legszigorúbban büntették; BOLYAI Farkas még késő vénkorában is kelletlenül beszélt azokról a kintásokról, melyeket Nagyenyeden el kellett tűrnie. Kétségtelen, hogy e káros hatások még sok éven át befolyással voltak reá. Ezekre, habár csak részben, vezethetők vissza későbbi életének nyughatatlansága és állhatatlansága; mert káros befolyással voltak reá még más kedvezőtlen körülmények is, mint pl. egy tifusz-roham, mely nagyenyedi iskolázása idejére esik.

Nagy szerencséje volt a fiúnak, hogy 12. évében a valamivel fiatalabb báró KEMÉNY Simon mellé tanulótársul adták. Ez őt kellemes, gond nélküli helyzetbe juttatta és finom lelkű és finom érzésű tanulótársában olyan barátira talált, kinek hűséges érzése egy életre szólt. A két fiú HERPEI Ádámnak, az említett HERPEI János testvérenek felügyelete alatt állott. Az 1790. év körül HERPEI Ádám tanár lett; ekkor Simon és Farkas Kolozsvárra mentek, hol a református kollegiumban folytatták a tanulást és SZATHMÁRI (PAP) Mihály theologiai tanárnál laktak, kinek egyénisége Farkasra nagy hatással volt. Hallgatta theologiai előadásait és evvel új, rejtélyes világ nyílt meg előtte, a melynek lelkesedéssel szentelte magát; a matematikában eddig kifejtett buzgósága ellenben ellankadt. «A mi leginkább tévedésbe ejtett» — beszéli el Farkas — «a következő volt: a theológiának egy több hollandi jutaloméremmel díszített, Mózes csipkebokrának tűzével tanító tanára gyakran mondá nekem, hogy a matematikához csak óvatosan közeledjem; mert különben majd a vallásban is olyan kézzelfogható bizonyításokat követelek, és akkor Satanas a pokolba visz engem; ez elég volt arra, hogy a matematikától elforduljak». Épen ezért, midőn báró RADÁK Ádám felajánlotta neki, hogy őt a maga költségén a bécsi mérnöki akadémiába küldi, azt felelte neki, «hogy ideigi fényért örök idvességemet fel nem áldozom».

Ebből a rajongásból azonban hamarosan kijózanodott. «Az examen után — írja Farkas —» gyakran mentem a nagy Gamalielhez, hogy bevádoljam Satanast az ellenvetések miatt, melyekkel el akar engem csábítani; izgatottságomban, kétségbe estem és úgy éreztem, mintha az ördög kezébe kerültem volna. Azután atheista lettem... és nem sokkal később meg találtam lelkem nyugalma a tiszta, emberek által el nem rontott vallásban.» Bizonyos miszticizmus azonban egész életén át volt rajta észlelhető; hogy mily nagy értéket tulajdonított ezeknek a gondolatoknak, látszik abból, hogy nagy matematikai művében, a később megbeszélendő *Tentamen*ben is helyet juttatott nekik.

Mint akárhány olyan fiatal ember, ki sokoldalú tehetséggel meg van áldva, Farkas sem tudott megállapodásra jutni, hogy mit tűzzön

ki magának életeczélul. Nyugtalan lelke egyik dologról a másikra terelte és ilyen maradt egész életén át, mindig *novarum rerum cupidus* volt. Rajzmestere, ki tehetséget látott benne, biztatta, hogy festő legyen; két olajvázlatot, melyet Farkas készített, a marosvásárhelyi kollegium könyvtárában őriznek. Festő pályájának megvalósításában egy baleset akadályozta. A maga készítette puskapor fellobbbanása annyira meggyengítette szemeit, hogy le kellett mondania az olyan foglalkozásról, mely a látóképességnek nagyobb megerőltetésével jár.

Ebben az időben, bizonyára Buda és Pest példájától indítva, hol 1790-ben egy műkedvelő társaság szindarabokat magyar nyelven kezdett előadni, Kolozsvártt, az erdélyi magyar szellemi élet közép-pontjában is a nemzeti nyelven kezdtek színházat játszani. Farkas velük tartott és a színház annyira megtetszett neki, hogy komolyan kezdte megfontolni, vajjon ne lépjen-e a színészi pályára. Végre báró KEMÉNY Simon reávette, hogy mint kísérője vele Németországba menjen. A XVIII. században ugyanis szokásban volt, hogy az erdélyi főnemesek fiai további kiképeztetésük végett a német egyetemeket látogatták és a szülők ilyenkor egy idősebb és tehetségesebb tanuló-társat adtak mentorként melléjük.

Az 1796. év elején a két barát útnak indult. Farkasnak azonban már Zilahon el kellett maradnia s az ifjú báró KEMÉNY Simon egyedül folytatta útját Jenába. «Zilahon valami változásom esvén, hánytatót adtak s ostve egy jó öreg asszony szép szőlővel kínált; és én a theologiai systema kiterjedt eltanulása után azt feleltem, hogy nem tudom, nem árt-e a hánytatóra? s az asszony is csak annyit tudva erősítvén, hogy még megfrissíti a belső részeket, ettem, semmi remény nem volt hozzám s csak holtigi gyomorgyengeséggel maradtam meg.»

Így történt, hogy Farkas csak júliusban érkezett Bécsbe, hol egy ideig tartózkodott. Kis híjja volt, hogy élete itt egészen más irányba nem terelődött. «A mint ott» — beszéli fia, Gergely — «a tűzérakadémiaát meglátogatta és a hallgató, de a magok helyén annál hatalmasabban megszólaló ágyúkat és szobáikban az akadémistákat az előttük nyitva álló VEGA felsőbb mennyiségtanával asztalaiknál ülve meglátta, lángeszének vérmes fantáziája úgy lön elragadtatva a katonai pálya költői oldalától, hogy egy lépést sem akart tovább menni s erőnek erejével ott akart maradni katonának.» Maga Farkas beszéli el továbbá: «A mely nap felesküdtém volna... a már Jenában volt b. KEMÉNY Simon levelét vettem, melyben kért, hogy ha valaha ért a szava előttem valamit, monjek fel, hogy beszéljünk elébb együtt.» Farkas engedett e felszólításnak. A már most következő három évi németországi tartózkodás döntőleg folyt be egész életére.

II. FEJEZET.

BOLYAI Farkas Németországban; baráti viszonya GAUSS-szal (1796—1799).

BOLYAI Farkas Jenában, hol csak 1796 július havában érkezett meg, nem iratkozott be az egyetemre; de azért báró KEMÉNY Simonnal ott maradt szeptember végéig. «Jenában akkor tanított FICHTE; SCHILLER nem tanított, de szerencsénk volt [őt] személyesen tisztelni.» Abban az időben GOETHE Wertherjét olvasta, a mi nyomasztó hatással volt reá. Egyáltalában akkoriban kezdett alaposabban megismerkedni a német irodalommal, a mennyire még mindig gyöngye szeméi megengedték. Ehhez járult a matematikával való foglalkozása, mely őt nemsokára egészen lekötötte.

«Az holott is csak hamar a Sále vize mellett sétálva kezdettem kevés szétszórt homályos mathesisi ismeretemből azt az utat, melyen megvénülve is találom magamat. Kettő vitt rá: egyik a szememre nézve adott orvosi tanács, melyért nem mervén sokat olvasni, sok ideig mind csak gondolkodva tanultam; a másik pedig a tudatlanság, mely miatt a természet lett vezérem. Úgy is megszoktam volt ezen módot, hogy nehezen vettem magamat az olvasásra;... belejövén, nem kis kedvetlenséggel láttam, sok sajátomnak véltet meglenni.» Hasonló értelemben, nyilván apja szóbeli közlése alapján írja a fia, János: «Csak Jénában kezdte magát a matematikára adni és annak alapjait vizsgálni; ekkor keresett egyéb alaptanokon kívül a +, — jelekről, a szorzásról, az osztásról, a hatványozásról,... az egyenesről tiszta és általános fogalmakat, főleg pedig a tizenegyedik axióma bebizonyítását. És mindenütt sokkal jobbat alkotott.»

Szeptember végén báró KEMÉNY Simon és BOLYAI Farkas elhagyták Jénát és Göttingába mentek, hol október 11-ikén iktatták őket az egyetemi hallgatók sorába. Hogy az 1737-ben alapított Georgia Augusta vonzotta őket, az könnyen érthető; hiszen ott sok olyan jeles férfi tanított, kinek neve a mai napig sem ment feledésbe. Elég, ha itt a következőket említjük fel: HEEREN (1760—1842) historikust, HEYNE (1729—1812) és MITSCHERLICH (1760—1854) filologusokat, BLUMENBACH (1752—

1840) természetbúvárt, LICHTENBERG (1744—1799) fizikust, KÄSTNER (1719—1800) matematikust. Sok földijüket is találták ottan; a midőn megérkeztek, körülbelül harminczan voltak ott magyarországi ifjak. Közülük Farkas — úgy látszik — legközelebbi viszonyban állott ZEYK Dániellel és szorosabb érintkezést tartott fenn egy SIMONIS nevű erdélyi szászszal is, ki theológiát tanult; ott volt BODOR Pál is, kivel Farkas később otthon is fenntartotta a baráti viszonyt. De érintkezett Farkas német körökkel is. KÄSTNER és LICHTENBERG «kedvelték»; ez a viszony azonban nem lépte túl a kölcsönös megbecsülés határait. SEYFFER Károly Felix (1762—1822), a csillagászat rendkívüli tanára ellenben baráti pártfogásában részesítette a magyar ifjút. Ez talán annak a körülménynek tulajdonítandó, hogy SEYFFER is a geometria alapjaival foglalkozott. Saját vizsgálatokat nem bocsátott ugyan közre, de a tizenegyedik axióma bebizonyításának kísérleteiről 1801-ben a *Göttinger gelehrte Anzeigen*ben közölt két megbeszéléséből látszik, hogy SEYFFER az e tárgyra vonatkozó műveket értelemmel olvasta és kritikus élel bírálta; sőt ahhoz a belátáshoz is jutott, hogy «több mint kétségesnek látszik, hogy egyáltalában lehetséges lesz a tizenegyedik axiómát bebizonyítani a nélkül, hogy valamely más, új axióma segítségül vétetnék».

SEYFFERNél ismerkedett meg Farkas avval a német emberrel, a kivel később a legszorosabb viszonyba lépett és kihez igaz ifjúkori barátság fűzte: GAUSS Károly Frigyessel. GAUSS, ki 1777 október hó 30-ikán Braunschweigban született, szintén már mint gyermek fel-tűnést keltett szokatlan tehetségével és a fejszámolásban tanusított könnyedségével és biztosságával. KÁROLY VILMOS FERDINAND herczeg nemeslelkű támogatása lehetségessé tette neki, hogy a braunschweigi *Collegium Carolinum*ot látogassa. Az 1795. év október hava óta Göttingában tartózkodott, nem annyira azért, hogy ott tanulmányait végezze, mert tizenhatsz éves korában a felső matematikának egész terjedelmében ura volt már, hanem inkább azért, hogy saját kutatásait az akadémiai élet szabad légkörében folytathassa. Arithmetikai vizsgálatai már 1796 márczius havában a szabályos tizenhatszög geometriai szerkesztésének messzevágó felfedezésére vezették, és akkor határozta el, hogy kizárólag a matematikának szenteli magát.

«Miután [Farkas] Jénából Göttingába ment» — beszéli el Bolyai János — «Seyffer tanárnál véletlenül találkozott GAUSSszal és itt igen nyíltan és határozottan nyilatkozott arról, hogy a matematikát mily könnyelműen szokták tárgyalni. Nemsokára ezután a bátyán sétálva GAUSSszal találkozott; egymáshoz közeledtek. Atyám egyebek közt elmondta az egyenesek értelmezésére és a tizenegyedik axióma bebizo-

nyitásához kínálkozni látszó utakra vonatkozó gondolatait és a tudomány felsőbb régióiban, különösen a számelméletben már akkor kolosszus GAUSS elragadtatva és meglepetve e lakonikus szavakba tört ki: „*Ön lángész! Ön barátom!*” és mindjárt barátságot kötöttek.

GAUSS-szal való érintkezéséről a következőt mondja el Farkas: „a... legszerényebb és a legkevesebbet mutató; nem harmadnapig, mint Plátóval, évekig lehetett vele valaki a nélkül, hogy megtudja nagyságát — kár, hogy nem tudtam ezt a czímetlen sarkú hallgató könyvet felnyitni s olvasni; én se tudtam, hogy ő milyen sokat tud s ő is saját módomat látva, igen sokat hitt rólam s nem tudta, mely kevés vagyok — az igazi (nem könnyűszerűleg színen járó) mathesiai szenvedelem s erkölcsi egyezés kötött egybe úgy, hogy többször gyalog utazva együtt, mindenik külön maga tárgyáról gondolkodva, órákig nem szóltunk.” „Szakadatlan, csendes munkája után többnyire nálam pihent; semmiről sem beszélt előre, sőt arról is hallgatott, a mi már kész volt; csak egyszer észleltem rajta mérsékelt örömet, a mikor nekem ajándékozta azt a kis [pala]táblát, a melyen a 17-szöget — Disqu. Ar. 662. old. — kiszámította.” „Szüleihez is ketten együtt gyalogoltunk el Braunschweigba, a hol anyja, mikor GAUSS nem volt bent a szobában, azt kérdezte tőlem, hogy válik-e valami a fiából? Válaszomra, hogy „*Európa első matematikusa*”, könnybe lábadt.”

Göttingai tanulmányi ideje alatt GAUSS csak kicsiny társaskörre szorítkozott, mely csupa derék emberből állott, a kikkel érintkezésbe lépni Farkasra nézve bizonyára nagy nyereség volt. Mindenekelőtt említendő GAUSS két földije: a braunschweigi ESCHENBURG (1778—1861) és IDE (1775—1806), kik közül az előbbi jogász, az utóbbi pedig matematikus volt; velük GAUSS már a Carolinumban ismerkedett meg. Hozzájuk sorakoztak a Wertheimből származó jogász, EICHORN (1779—1856) és a Hamburg vidékéről származó matematikus, BRANDES (1777—1834). GAUSS családokba is bevezette Farkast. „Férjhez mentek-e a szőke [KLINDWORTH] Lina és barátnője, a barna MURRAI Zsófia?” kérdi GAUSS-hoz 1816 április hó 10-én intézett levelében; majd 1832 január hó 16-ikán kelt levelében azt kérdezi: „Boldog anyák-e KLINDWORTH Lina és Murrain Zsófia? és váltak-e a rózsákból tövek, a melyeken rózsák virítanak?”

Arra nézve, hogy göttingai barátai miképen vélekedtek Farkas felől, jellemző IDENAK GAUSS-hoz 1799 május hó 23-ikán intézett levele, melynek egyik helyén így ír: „Ha jól számítok, BOLYAI kellő időben tér vissza [Göttingába], hogy még valami része legyen a lövészek ünnepének vigalmaiban. (Úgy tudom, hogy szombaton a királyt har-

sógó zeneszó és harangzúgás mellett háromszor vezetik a ház körül és erre a korhely-séta következik.) Ebben bizonyára részt vesz, de mint filozófus, ki ilyen alkalommal mindig anyagot talál arra, hogy az emberek oktalanságai felett elmélkedjék. Már csak ez az ő elve, a mire több esetből következtetek; az ilyen világi ügyek közül nem egykönnyen mulaszt el egyet sem; még pedig nem azért, hogy a többiekkel együtt élvezzen, hanem azért, hogy lelki nyugalmában megerősödjék. A multkor is vigadtak a burschok, a minek véletlen tanui voltunk. Minthogy a dolog késő éjszakáig elhúzódott, én 10 órakor haza mentem, őt azonban nem tudtam reábirni, hogy velem tartson, nem azért, mintha nagy dolgokat akart volna művelni (hiszen mindkettőnknek üres volt a zsebe), hanem azért, hogy az aktus hiábavalósága fölött filozofálhasson, a mit megtett már az egész időn át, míg vele voltam.»

Az akadémiкус triennium lejártá után GAUSS 1798 szeptember végén visszatért Braunschweigba. Búcsúzáskor a két barát fogadást tett egymásnak, hogy minden hónap végén megülik a «barátság ünnepét» olyanformán, hogy egymásra gondolva egy-egy pipa dohányt szívnak el. «Leveledet» — írja GAUSS 1798 november hó 29-ikén BOLYAINAK — «épen a mult hó utolsó napjának estéjén hozták el nekem, a mikor leültem, hogy barátságunk ünnepnapját megüljem; karosszékembe ültem, elédbbe teszem megtömött pipádat és fekete zekécskéddel és fekete sapkáddal ide álmodlak téged magamhoz és beszélgetek veled elmúlt időkről, és épen ekkor levelednek kérdése arról győz meg, hogy te mostan épen úgy gondolsz én reám, hogy álomom — úgy mondjam — nem álom.» Egy későbbi levélben Farkas tüzes lelke ekkora lendülettel nyilatkozik meg: «[1799] augusztus utolsójának estéjén dohányomat olyan kellemesen szomorú gondolatok mellett szíttam el, míg az álom későn éjfélkor még mindig te reád irányuló gondolataim között talált — azt gondolám: Ha a sors megengedi, hogy pályáinkat végigfussuk, oh akkor, ha valamikor az aggkor testeinkben kitette a címerét és ledöntve a büszke oszlopokat, a melyeken a sok évi diadalt megszokott ifjúkorunk az elemekkel daczolt, a kecsesség lánczai, melyek ifjúkori alakunkat fenntartották, elszakadtak és a hid, mely bennünket az érzéki világ ingereivel összeköt, romba dől, oh majd akkor hozza barátságunk édes gyümölcseit — ha valamely október utolsó napján, a mikor a természet hosszas álmát megkezdí, pipáinkat elszíjjuk, majd akkor téríti el borús gondolatainkat a halál és az örökkévalóság beláthatatlan barlangjaitól, kellemes melancholiát keltve, a mely az elmúltaknak visszaidézésével megfiatalít bennünket.»

BÁRÓ KEMÉNY Simon már 1798 június havában tért vissza Erdélybe.

Farkasnak ott kellett maradnia Göttingában. «KEMÉNY Simonért vesztegetés nélkül a költség sokkal haladván felül a küldött pénzt, kezes maradtam. KEMÉNY Simontól egy évig nem kaphatván pénzt, sokat szenvedtem, de soha oly boldog nem voltam; az az idő, melyre mindig örömmel nézek vissza — barátsági önkéntes áldozattal az igazság keresése tiszta éterében, a testi gyönyörök posványi felett magasan; [a matematika iránti] nemesebb szenvedelem egész künnlétemben (sok kísérletek közt) tiszta életem védangyala volt — az akkori magamat ma is tisztetem.»

Az 1799. év május havában végre megérkezett a váltó. Az adóságok kifizetése után Farkasnak olyan kevés pénze maradt, hogy arra kellett magát elhatároznia, hogy gyalog utazzék haza Erdélybe. Mielőtt Németországot elhagyta, még egyszer akarta látni barátját, GAUSS-t. Megállapodásuk szerint május 24-ikén napnyugtakor Clausthal mellett a Harzban találkoztak; pipáikat ide is elhozták magukkal. Akkor — úgy látszik csak röviden jelezve — beszélte el Farkas, hogy most sikerült neki a tizenegyedik axiómát bebizonyítania. Erre az ő «Göttingai párluzamosok elméletére» még részletesen reá fogunk térni. Május 25-ikének reggelén Farkas elkísérte barátját egy domb tetejéig. «A honnan... egy haldoklás búcsúkezevel váltunk el (csaknem némán) azon egy zászló alól kétfelé küldetve, azzal a különbséggel, hogy ő a dicsőség templomába hatolt fel, én pedig elestem.»

Göttingát Farkas 1799 június hó 5-ikén hagyta el. «Leindultam gyalog. Az astronomia professor [Seyffer] (a ki Napoleonnal volt Austerlitznél s azután ingenieur Oberstere lett) s mások a szomszéd faluig kísérték gyalog; az elváláskor sirva, mint a gyermek, akaratom ellen mentem vissza, míg erőt vettem magamon, az utolsó tetőről, a honnan még látszott Göttinga, még egyszer visszánéztem, megállva, míg az örökre elválás homályában a Daguerrotyp megmaradott.»

A visszaemlékezés Göttingára Farkast egész életén át kísérte. Levelében, melyet rövid idővel halála előtt, 1856 július hó 13-ikán SARTORIUS VON WALTERSHAUSENhez intézett, még meghatottan beszélt a földöntúli évekről, melyeket ő meg GAUSS ottan, az egyetlen Uránia oltára előtt töltöttek.

III. FEJEZET.

Visszatérés a hazába; Kolozsvár és Domáld (1799—1804).

Az 1799. év június havában hagyta el Farkas Göttingát. Csak szeptemberben érkezett hazájába. Úti élményeiről ő maga és elbeszélései alapján a fia, János ad hirt.

Kilencz nap alatt, legnagyobbreszt gyalog, tette meg az utat Regensburgig. Az utazást kis menetelésekkel kezdte, melyeket napról-napra hosszabbra terjesztett ki olyan módon, hogy korábban kelt útra és későbbben hagyta abba a menetelést. Még Regensburgba való megérkezése napján szállt hajóra, mely őt a Dunán lefelé Bécsig vitte.

Útközben kiszállt Passauban, hol két kalandba keveredett, mely könnyen rosszul végződhetett volna. Betért egy kávéházba s ott pipára gyújtott. Talán tilos volt ott a dohányzás, vagy talán feltűnő külseje és viselkedése visszatetszett a jelenlevő filisztereknek; ott ült sűrű, hosszú, vállára hulló hajával, tüzes, nagy szemeivel, mint valami német «bursch», a ki semmivel a világon nem törődik. Tizen vették körül és ki akarták dobni. Hirtelen a terem közepébe szökött és facsaros furkósbotját bámulatos gyorsasággal feje fölött forgatva, rögtön halált ígért annak, a ki magyar, nemesi burschtestéhez hozzányúlni mer. Bátor fellépésével és lélekjelenlétével annyira megfélemlítette támadóit, hogy egymásután visszavonultak. Mikor ezután egy őrszem előtt elhaladt és pipáját — a mint akkor a civileknek kötelessége volt — nem vette ki a szájából, az őrszem a pipát erőszakkal akarta tőle elragadni. Farkas az őrszemet merészen mellé ragadta és a falhoz lökte; aztán háborítatlanul folytatta útját.

Utazása további folyamán egyszerre csak a hajósnép lármája ébresztette föl ábrándozásából. Greinon alul voltak, az akkor híres és rettegett örvénynél. Állva akarta a veszedelmes helyet megtekinteni. Midőn azonban a hajósok a henye báméskodóra haragos pillantásokat vetettek, letérdelt és csak lopva szemlélte az örvénylő habokat. De romanticizmus hijján sem volt utazása. Csinos, tizenöt éves leány szállt a hajóra. «Ment szegény Bécsbe szolgálni, a szep-

lőtlen tisztaság olyan mocsok árjába, melyre nincs pecsétkivevő.» Védő angyalának szegődött. «Felnyitottam előtte az erény mennyét és a vétek poklát s mindenként megvehetlen erősséget akartam csinálni egy szellő után hajló virágból.» Június 19-ikén Bécsben megérkezve, jobbnak tartotta, hogy tőle elváljék «meggondolva, hogy a szűzhó is a nap mosolyára sárrá lesz s őtet se tarthatva meg, magam veszhetek el.»

Két hónapig maradt Bécsben. Úgy látszik vig czimborákra talált, kik jószívűségét kiaknázták. Mikor pénze már végére járt, elhagyták és néhány forinttal a zsebében egyedül maradt a rengeteg városban. Rövid elhatározással napszámosnak szegődve egy szerb kereskedő hajójára és reggeltől estig hajtvá az evezőt, 1799 augusztus havában érkezett Pestre.

Míntha csak valami gonosz szellem üldöző, itt is csakhamar nehéz körülmények közé jutott. Egy korcsmában, a melybe betért, azt kérdezték tőle, hogy mi az, a mit a kezében tart. Törös bot volt. Megmutatta. Mikor aztán a tört vissza akarta dugni hüvelyébe, megsértette vele bal térdét. A seb elmérgeződött. Elhagyatva, üres erszény-nyel a «Vörös ökörben» feküdt; nem kapott orvosságot és kicsinyes, bizalmatlankodó emberek kegyelmére volt utalva. A véletlen okozta, hogy levelére, melyet haza írt, nem kapott választ. Eleinte még el tudta nyomni a nyomorult helyzetéből fakadó érzelmeket és lelki nagyságával túl tudta magát tenni a testi fájdalmonkon, sőt olyan jó kedve volt, hogy a szálló vendégei mulatni jártak hozzá. Végre mégis csak erőt vett rajta a kétségbeesés, és ekkor elfordultak tőle az emberek. «Ekkor egyedül hagyatva, könnyes szemekkel emelkedtem a pusztáról kimondhatlan érzéssel a véghetlenbe, a számtalan napok feneketlen tengere kútfejéhez! s azon órában érkezett a segítség — meggyógyultam s báró KEMÉNY Simontól küldött szekérrel lejöttem.»

Szüretkor atyjánál volt Bolyán. «Midőn pedig beláttam, hogy gondolkodásunk módjának végtelen különbsége miatt az én tervem szerint nála (egyelőre) nem élhetnék, KEMÉNYÉK házában [Kolozsavárt] nevelői állást vállaltam, mert épen kellő időben kínáltak meg vele és a tizennégy éves fiú (növendékem) rendkívülinek ígérkezik... Itt most meglehetősen csendesesen és függetlenül élek. Az a szándékom, hogy némi idő multával hazamegyek» (GAUSSHOZ 1800 ápr. hó 13-ikán intézett leveléből).

Kolozsavára főleg a szellemileg kiemelkedő emberekkel való érintkezés vonzotta, mely életszükségletévé vált. «Semmi terve, célja, megállapodása nem volt; ép úgy, mint egyetemi évei alatt, az élet anyagi oldalával nem törődött; egy kört keresett magának élénk,

nyugtalan szelleme, a hol megnyilatkozhatson, a hol szabadjára röpködhessen. Ilyen kört abban az időben Erdélyben leginkább csak Kolozsvártt találhatott; s e körnek minden bizonynyal ő maga igen kedvelt és marasztalt tagja volt... Ezeket a fiatal embereket később ott látjuk egyik-másik kollegiumi tanári széken vagy eklézsiában, mint lelkipásztorokat, neve nem egynek feltűnik hazai irodalmunk, tudományosságunk történetében» (BEDŐHÁZI).

Farkas barátai közé tartozott mindenekelőtt a már említett BODOR Pál, az erdélyi *delegatu provincialis cassa* ellenőre. Bodor élénken érdeklődött az irodalom és a művészetek iránt, és a kolozsvári nemzeti színház alapítása körül is szerzett magának érdemeket. Farkas később levelezés útján tartotta fenn vele az érintkezést.

De a magyar főnemesség hölgyeivel is jól tudott bánni és késő vénétségig kedvenczük maradt. Bolyai János elbeszéli: «Maguk a hiú ifjak megvallják, hogy az öreg Bolyai az úri asszonyok vagy dámák körül is úgy tud járni, hogy sokszor egész sornak teszi a szépet; pillangó módra egyiktől másikhoz repdesve, különbnél-különb elmés gondolatokkal elragadva, bolondítva őket s gyors visszatérésre varakoztatva s egyszersmind egész sereg udvarló ifjat, kik eléltén csak unalmasan, szellem-meddön ásitoznak... könnyűszerüleg kihányva a nyeregből.» «Oly élénken társalgott sokszor, hogy mikor hazament, zsémbelve mondotta: *ellobogtam* s még akkor is lángoltak villogó szemei» (KONCZ).

Az 1800. év farsangján egy bálban megismerkedett a fiatal Zsuzsánnával, árkosi BENKŐ József chirurgusnak és szász családból származó feleségének, BACHMANN Juliannának leányával. «Egy kölcsönös sympathia, akkori fantáziámat, mely egy puszta vászonra is kerubimot festett volna, úgy felgyújtotta, hogy minden fellegváram elégték s a szív foglalta el az okosság királyi székét.» GAUSSNAK pedig 1800 április 13-ikán írja: «Az én társadalmi osztályomba tartozó tizenennyolcz éves magyar leány — egyebet nem kell mondanom, mint azt, hogy én meg ő teljességgel szeretjük egymást. Nem épen tündöklő szépség, de rendkívül vonzó, szelid, finom lelkű, játszik a fortepiánón, kellemesen énekel kottából és igen jó zenei ízlése van — már sokra tanítottam és be akarom fejezni a művet.»

Esküvőjük 1801 szeptember 28-ikán volt. A kolozsvári eklézsia-ban ez volt első hivatalos ténykedése KRIZBAI Elek Dénesnek, az épen akkor megválasztott fiatal papnak. A fiatal pár Domáldon telepedett le. «Kis jószágomban gazda lettem három évig [1801—1804]; kertemben patakvitel, vizesés, erdő, kunyhó, oltó oskolák, plántálás sok évet elvevő kertészi szenvedelembé vittek.»

Az 1802. év december 15-ikén felesége szüleinek házában, Kolozsvárt a Tivoli- (1909 óta Bolyai János-) utcában fiuk született, ki a keresztségben a János nevet kapta. «Ő (hála istennek!) egészséges, nagyon szép gyermek; vonásai finomak, haja és szemöldöke fekete és tüzes, sötétkékek szeme olykor úgy sziporkázik, mint két drágakő» (Gaussához 1803 február hó 27-ikén intézett leveléből). «Rendkívül boldogan folynak a fiatal János első évei Domáldon, az atyai birtokon; a gyakran házi gondoktól és kellemetlen rokoni viszonyoktól megzavart családi élet az imádott fiú körül, mint egy világot és vidámságot sugárzó nap körül forog» (SCHLESINGER). «A mi fiunk pompás legényke, lelkünk éjszakájának ébresztő sugara» (Gaussához 1804 márcz. hó 1-sején intézett leveléből).

«A hallgatag jövőendő nehéz felhőkbe burkolva közeledik, melyeknek dörgése csak akkor csattog fülünkbe, mikor már itt vannak», írta Farkas prófétai szellemmel 1802 szeptember hó 11-ikén Gaussnak. Nagyon is hamar vonultak föl a felhők. Zsuzsánna kiváló tehetségű, de beteg asszony volt. A hiszteria csirája bizonyára anyai családjában rejlett; két fivére is psychopathikus volt. «Nagy, lehangoló szerencsétlenség, ha az embernek beteg felesége van» (Gaussához 1804 szept. hó 16-ikán intézett leveléből). Farkasnak fenékgig kellett üritenie a szerencsétlenségnek ezt a poharát. A későbbi nehéz esztendőekben a domáldi évek a két házastársnak a boldogság gyorsan elmuló éveinek tetszetek; ott lelte Zsuzsánna utolsó nyugvóhelyét is.

IV. FEJEZET.

BOLYAI Farkas mint marosvásárhelyi tanár (1804—1853).

Csernátoni VAJDA Jánosnak, a matematika és filozófia tanárának 1803 november 12-ikén bekövetkezett halála után a marosvásárhelyi református kollegium tanári testülete elhatározta, hogy a jövőben e két szak egymástól elválasztassék és a matematika, fizika és chemia külön tanszéke szerveztessék. Miután az erdélyi egyházkerület legfelsőbb hatósága a kollegium e javaslatát elfogadta, 1804 január hó 22-ikén kelt rendeletével BOLYAI Farkast hívta meg e tanszékre.

Az 1804. év márczius hó 1-sején Farkas Domáldról írja GAUSSnak: «Az az újság nálunk: kettőt a legidősebb deákok közül küldtek ki hozzám hivatalos levelekkel. Soká töprengtem. Inkább arra hajlottam, hogy ne fogadjam el, mert gazdaságomat most már meglehetősen berendeztem és nem nyomnának olyan kijelölt bilincsek, mint a milyennek azok a gondok, melyeket a napok szülnek. Ámde sokan avval vádoltak, hogy rossz polgár és embergyűlölő vagyok. Végre elhatároztam magamat; ez kívánsága volt atyámnak is, ki azt az elvet vallotta, hogy az embernek hivatalt kell ellátnia, és jól tudta, hogy más hivatalt nem fogok ellátni sohasem.»

Hogy Farkas a meghívást elfogadta, utolsó öröme volt atyjának, ki már akkor súlyosan beteg volt és február 17-ikén meghalt. «Most már nyugodtan halok meg» — mondá — «mert fiaim czélrt értek: Farkas marosvásárhelyi professor s Antal vicanotarius.»

Az 1804. év április havában Farkas új otthonába költözött és május hó 4-ikén foglalta el hivatalát, melyet 47 évnél hosszabb ideig, egészen 1851 október haváig viselt.

Maros-Vásárhely kies, dombos vidéken fekszik. E város közép-pontja a Székelyföld nyugoti részének. Főépületei a várkastély kaszárnnyájával, a református templom, több római katolikus templom és a minorita-kolostor, továbbá a gróf TELEKI-féle palota nagy könyvtárával, melyet gróf TELEKI Sámuel alapított és főleg jogi műveket, de néhány becses matematikai és fizikai művet is tartalmaz. Végül megemlítendő a kollegium tekintélyes épülete számos tanuló-

nak elegendő osztálytermeivel és lakószobáival; 1766-ban ennek az intézetnek 784 növendéke volt. A kollegium 1557-ben Sárospatakon alapított. Büszkén említik, hogy COMENIUS, a híres pedagógus, kit I. RÁKÓCZI György hívott meg oda, 1650—1652. tanított benne. Később Gyulafehérvárra, azután Bethlenre helyezték át és 1718-ban egy Maros-Vásárhelyt már fennálló kisebb intézettel, a particulával egyesítették.

A tanárok szerény fizetése a természetieken kívül 400 magyar forint volt (1 magyar forint körülbelül 84 fillér); némi mellékjövedelmet hozott nekik az ismétlő-oktatás. BOLYAI Farkas fizetésén kívül még egy udvar, ház és nagy kert használatát is élvezte. Elődjének lakása omladozó faház volt. Már 1803-ban határozták el, hogy helyette új, jobb házat építenek, de az új szállás csak 1806-ban készült el. A régi épületet a kollegium czéljaira kicsiny nyomdává alakították át; ebből került ki BOLYAI Farkas főműve, a *Tentamen*.

A lakás, melyet Farkas egészen haláláig, 1856-ig elfoglalt, három szobából, konyhából, kamarából és kettős pinczéből állott. Az elülső helyiségek egyikét ő maga használta, a többi családjának engedte át. Szobájának barna falain függött barátjának, GAUSSnak, azután SHAKESPEAREnek, *«a természet fiának»* és SCHILLERnek, *«a természet unokájának»* arcképe, továbbá hegedűje. Itt állott *«palladiuma»* is: a fekete tábla. A ház mögött terjedt el a majdnem kétholdas kert, mely részben dísz- és konyhakertül szolgált, részben pedig akáczerdő volt. *«Mennyire szeretnélek a most már megnőtt és termő kertemben a sötét nyárfaerdőben kigyózó patak mellett egész családdal együtt megvendégszolgálni... Tíz és még több évig szenvedélyem volt a kertészet, sok időt vett el tőlem»* (Gauss-hoz 1816 ápr. hó 16-ikán intézett levélből). A szűk utcuzát, a melyben a telek fekszik, 1872-ben kiszélesítették; 1884 óta Bolyai-utcának hívják. A ház 1909-ben új épületnek adott helyet, de egy tábla emlékeztet arra a férfira, ki itt a város és a haza dicsőségére élt és munkálkodott.

Hivatala elég alkalmat nyújtott Farkasnak, hogy ismét a matematikával foglalkozzék, mely Domáldon háttérbe szorult. Az 1804. év márcz. hó 1-sején írja Gaussnak: *«Könyvekben nagyon szegény vagyok, a kinek kevés a könyve, azt nálunk ökörnek tartják... állítsd össze számomra a legjelesebb matematikai és fizikai könyvek katalógusát.»* Kis jövedelme és minden nehézség ellenére, melyet lakóhelyének félreeső volta a könyvek beszerzésének útjába gördített, Farkas lassanként mégis a matematikai és fizikai könyvek elég tekintélyes gyűjteményét hozta össze. A jegyzék szerint, melyet rövid idővel halála előtt, 1856 augusztus havában állított össze, egyebek közt bir-

tokában voltak EUKLIDES, KEPLER, ADRIANUS METIUS, NEWTON, BERNOULLI JÁNOS, EULER, LAGRANGE, GAUSS egyes művei, LITTRON, KÄSTNER, KARSTEN, LA CROIX nagy tankönyvei, LALANDE *csillagászata*, MONTUCLA *A matematika története*.

Mindjárt hivatalos állásának elfoglalása után fogott hozzá Farkas az ő matematikai *rendszerének* kidolgozásához. Hosszas, gyakran megszakított munkájának eredménye az ő nagy tankönyve, a *Tentamen*; e művét lényegében csak 1829 őszén fejezte be. Az aritmetika és a geometria alapjaira vonatkozó vizsgálatainak próbájaként az 1804. év szeptember hó 16-ikán *Göttingi párhuzamosok elméletét* küldte el GAUSSnak. GAUSS november hó 25-iki válaszában kijelenti, hogy BOLYAI eljárása még nem elégíti ki. Az 1808. év december hó 27-ikén Farkas előbbi munkájának egy toldalékát küldte el GAUSSnak, a melyről azonban később ő maga is belátta, hogy nem kielégítő. Még több éven át viaskodott Farkas a párhuzamosok elméletének régi rejtvényével. «De a paralellák megmutatására tett próbámmal nem lévén megelégedve s sok idők után, nóha talán a lehetőség határáig nyomozva se nyugván meg, a mathesisi tüzem meglankadott s ez vitt a poezisre.»

Az 1807. év december 18-ikán panaszolja Farkas GAUSSnak: «A tömeg mindig gyűlölni fogja a matematikát, mikor ide jöttem, alig volt valaki a kollegiumban, ki többet tudott volna, mint mechanikusan a négy alapműveletet. Most sokan vannak, kik az algebrában, a kúpszeletekben, az alkalmazott matematikában és a fizikában meglehetősen előrehaladtak, és kiket a differenciál- és integrálszámításba is beavattam. — Tudod, hogy ott künn is milyen kevesen szeretik a matematikát.»

Ama három tulajdonság közül, melyet a jó tanítónak magában egyesítenie kell, Farkasban nagy mértékben megvolt kettő: a lelkesedés tudományáért és a meleg szív az ifjúság iránt. A mi benne hiányzott, az volt, hogy nem jutott neki abból az adományból, hogy gondolatait könnyen megérthető alakban kifejezhesse. Előadásának magával ragadó élnkségével hatni tudott ugyan hallgatóira és ha költői lelkesedésében Istent, mint az igazság és szeretet ősforrását dicsérte, elbűvölte a fiatal lelkeket. Ámde csak kevés kiválasztott volt az, ki matematikai fejtegetéseit követni tudta; a többség kevés hasznot merített belőlük. Mikor egyszer a táblán egy matematikai feladat tárgyalásába bocsátkozott és jóllehet feszített figyelemmel hallgatták, még sem értette meg senki, második fia, Gergely, ki akkor tanítványa volt, bátorságot vett magának megmondani, hogy igazán nem tudják megérteni és kéri, hogy a dolgot még egyszer magyarázza meg. «Mintha

a csillagos égből a föld sarába rántották volna le, oly megütközéssel vetette fiára s többi tanítványaira villám szemeit, mondván, hogyan lehetséges, hogy azt ép és józan eszű ember ne értse? Másodszor is előadta, de illuziója oda volt egészen» (Koncz).

E helyen meg kell emlékeznünk Farkasnak arról a törekvéséről is, a melylyel a magyar nyelvnek akkor még kevéssé fejlett matematikai terminológiáját kiképezni igyekezett. Ez félreismerhetetlenül függ össze a neológusok egyidejű törekvéseivel, kiknek élén KAZINCZY Ferencz (1759—1831) állott. «Mennél többet fordítottak a tizenhatszadik század három utolsó évtizedében, annál inkább vált érezhetővé a nyelv szegénysége, főleg az absztrakt fogalmak kifejezésére szolgáló szókban. Továbbá a XVIII. század hanyatlása okozta, hogy a nyelv-kincsbe a latin és német szóknek egész tömege keveredett, a mi az eleganciának kárára volt. Így tehát a nyelvészek és írók feladatává vált, hogy részben új képzések, részben rövidítések, részben pedig új képzők segítségével új szókat alkossanak, hogy a költészet és próza minden műfaját és bármely tudományos művet magyar nyelvre lehessen áttenni. Ha átlapozzuk azt a méhszorgalommal gyűjtött anyagot, melyet SZILY Kálmán *A nyelvújítás szótárában* (1902) összehordott, bámulatba ejt az új szóknek sokasága, melyeknek képzését KAZINCZY és követői megindították... Hogy a neológusok gyakran a kellő határon túlmentek, hogy a régi szókiucset nem aknázták ki kellően és olyan szókat teremtettek, melyekre semmi szükség sem volt, az ma már általánosan elismert igazság» (KONT Ignác). «A nyelvújításnak vagy megújított nyelvnek a nemzet közakarata, a társadalom felsőbb és alsóbb osztályainak a nyelv ügyéhez egyetértő csatlakozása és a jobb írók elszaporodása végképen diadalmat szerzett. A mi jó volt benne, a mi a nemzeti közérzéssel összefért, kész szívvel és nem-sokára elfogadta a közönség egyetértése. Egyesek akarátja, néha kénye kezdte vagy eszközölte, de a mozgalom, ha néha forradalmivá fajult is, valódi szükséglet pótolta és jó munkát végzett; ezt igazolta a közvélemény. Ennek a nemzeti akaratnak felelt meg az akadémia, mely 1830-tól fogva kezdett főképp a nyelv művelése végett munkálkodni» (IMRE Sándor).

Ily módon a magyar nyelv az újonnan képzett szók ezreivel gazdagodott. Azok a matematikai műszók, melyeket BOLYAI Farkas hozott javaslatba, azokhoz az új képzésekhez tartoznak, a melyek nem vertek gyökeret; de azért Farkasnak e téren kifejtett tevékenysége mégis egészséges hazafias érzelemre vall és nem maradhat figyelmen kívül. A *Tentamen*-ben írja: «...de ha egyfelől elpirulunk, midőn a Mathesisben más nemzeteknek tanítói éppen nem, tanítványi is

(annyira a' mennyire is) kevesen vagyunk; másfelől, hogy valaha tanítói is lehessünk, *éljünk legalább most mig ideje vagyon, éppen ezen elmaradásunkból származott* olyan jussunkal, a melyet más nemzetek már elvesztettek; a' midőn már régen a Mathesis' böltsői nyelvét fordítván le, sok olyan szók gyökereztek a' századokba, melyek a' tanuló' elméjét a' tudványi értelemtől félre vonják. Befolyása van ennek a' nemzeti kimivelődésre. Azokat az elveket, melyeket új műkifejezéseinek alkotásánál szem előtt tartott, ugyanott a következő módon fejt ki:

«A' tiszta Mathesisi műszókra nézve is, melyeknek egy részével az *Arithmetika' Elejiben M. Vásárhelyt* 1830 éltem... következőket jelenteni hazafiui kötelességem.»

«I. Azoknak formálásában ezen három fő régulám volt:»

«a) hogy a' mennyiben lehet rövidek, a' nyelv' természetéből folyók, legalább azzal nem ellenkezők, könnyen megszokhatók, 's tudványba való igaz belátással a' dolog természetére mutatók legyenek.»

«b) hogy azonegy szó ne tegyen különbözőket; 's hogy egyebet jelentsen, egy kis helyes változtatás engedtessek meg.»

«c) hogy a' melyeket okvetlen szükséges megkülönböztetni, azoknak külön (ha lehet más atyafiásból formált) név adattassék.»

«A' mi az elsőt illeti: világos, hogy a' kezdő annál nehezebben érti a' dolgot meg, minél különbözőbb a' szónak tulajdon értelme a tudványtól, 's annál könnyebben érti meg, minél inkább magára a' dologra mutat. A' kurtítás pedig túl mehet a' határon, de azon belől könnyít; hogy lenne képes egy felsőbb mathesisi dolog' előadása azon nemzetnél, mely a' 3-at *Polertarirorunkuráknak* nevezte? 's az Análisisi rövid 's okos jegyek melly igen megkönnyítik a' különben áthatlan dolgokat — melly rövid 's mathesisi lehet a' felső lények nyelve!»

«Azért tsak móddal legyen, sok a' szokatlanság miatt elébb visszataszító, azután megértve szokottá lesz — mennyi példa nints erre az újabb időkben: mely szokatlan vala elébb *át, gyönyör...*, *kellemes* kellemetes helyett, *közvetlen* közvetlen helyett 's a' t. Így jövény, nyugalom, türelem, győzelem, veszelem, etc.: az efféle újítás könnyü lévén, mihelyt szabad, omlik mindenfelől — kár, hogy *Erb-schaft* nem bár örökmény, 's örökség *Ewigkeit* helyett oly hosszú szóval élünk, mintha azzal akarnok kifejezni.»

«A' 2-dikra nézve, bajt tsinálván a *szeg* Nagel, melly szint is teszen, mivel szeglet, zugoly (Winkel) igen hosszak az összetételben: maradna *Dugonits* szerint Winkel szögnek, 's mikor *szeg* szint teszen,

hagyatnék el az s; vagy szög tenné a' szint, 's zeg vagy zög lenne Winkel; még mons és apex is lehetne hegy és högy. —

«A' 2-dikra 's 3-dikra nézve, legyen szabad például hozni elé: *Id Zeit, idő Wetter, Vil* (az honnan villám) *Licht, Világ Welt; han* (mintegy ha! n!) *Schall, hang* tonus vagy megfordítva; Nap *Sonne, viradtól estig Napp* (lehetne *Vily*); dies soláris *napi kétdélköz* (röviden az illy dies *délköz*). *Densitas töm, tömeg* (Fogarasi szerint) *massa.*»

«Az 1-sőre 's 2-dikra nézve, legyen szabad a' hol *egyenlőt* mondani hosszas volna, *eggyel* jelenteni ki, 2 gyvel, hogy *egytől* unum megkülömböztessék (p. o.) *eggyoldalú háromszög* nem 1 oldalú, hanem *egyenlő oldalú háromszöget* tegyen.»

Farkas tehetségekkel gazdagon megáldott ember volt, sőt talán az volt a végzete, hogy nagyon is sok jutott neki a tehetségekből; a helyett, hogy egy téren a lehető legnagyobbat végezte volna, szétszórta és elforgácsolta tevékenységét. Ha azonban azt kérdezik, hogy melyik tehetsége áll első helyen, kétség kívül fantáziáját kell említenünk. Minden, a mit írt, önkénytelenül költeménybe alakult át; majdnem minden levele, könyveinek majdnem minden oldala tesz erről tanuságot.

Midőn Zsuzsánna iránti szerelme fiatal szívét lánggra lobbantotta, a dalok forrása nyílt meg előtte. «Lehet, ... hogy ezek a sohasem érzett, intenzív érzelmek szikrát pattantottak lelkembe, mely a költői tüzet ébresztette benne» (GAUSSHOZ 1800 április hó 13-ikán intézett leveléből). Szerelmének tüze is csakhamar elaludt. «Mint megcsalódik, a ki azt hiszi caniculában, hogy mind olyan meleg lesz decemberben is, így jár a szerelemből házassuló is.» De «*igaz társa*», a matematika iránti szenvedélye is lehűlt. «Ebben a hangulatban egy *ideális világba* kellett kivándorolnom» (SARTORIUS VON WALTERSHAUSENHEZ 1856 július hó 13-ikán intézett leveléből).

A mint az első fejezetben elbeszéltük, Magyarországon 1790-ben Budán egy műkedvelő-társaság kezdett színdarabokat magyar nyelven előadni. A színház ugyan nem tarthatta fenn magát soká, de a jég meg volt törve és a magyar színészet kezdett terjedni Magyarországon. Ez a mozgalom — a mint láttuk — áterjedt Erdélyre is, és 1821-ben Kolozsvárt nyílt meg az első állandó nemzeti színház, miután alapítását a rendek már 1811-ben elhatározták. Hogy ez az intézet méltóan felavattathassék, több erdélyi mágnás a megnyitásakor előadandó drámára egy 1000 r. forintos díjat tűzött ki. A pályázat kihirdetését az Erdélyi Múzeum vállalta el; a bírálóbizottság élén DÖBRENTI Gábor állott. Az 1815. év szeptember haváig tíz dráma érkezett be;

köztük három BOLYAI Farkastól. Minthogy három szerző kérte, hogy a pályázat feltételei értelmében a benyújtás határidejét meghosszabbítsák, a munkák megbirálásával váraakoztak, és így az eredmény kihirdetése még majdnem két évig késett. Farkas a késedelem miatti türelmetlenségét nem tudta legyőzni és végre a nélkül, hogy a díjkiosztást bevárta volna, kinyomtatta a benyújtott három drámát, a melyekhez még két újat is hozzácsatolt. Az 1817. évben Nagyszebenben *«Öt szomorújáték, írta egy hazafi»* czimen jelentek meg. E műről hiányzott a szerző neve; sőt, hogy az embereket félrevezesse, a 178 előfizető nevei közé Farkas a magáét is iktatta. E drámák czimeai a következők:

1. *Pausanias vagy a nagyravágyás áldozatja.*
2. *Mohamed vagy a ditsőség győzedelme a szerelmen.*
3. *Kemény Simon vagy a hazaszeretet áldozatja.*
4. *A virtus győzedelme a szerelmen.*
5. *A szerelem győzedelme a virtuson.*

A pályázat eredményét 1817 július hó 8-ikán hirdették ki. A bírálóbizottság kijelentette, hogy a díjat a benyújtott darabok egyikének sem adhatja ki. Ámde TOKODY János szomorújátéka: *A pártosság tüze* különös figyelmet érdemel; azonban az odaitélendő díj nagyságára nézve majd csak akkor hoznak határozatot, ha a szerző drámáját átdolgozza. Ez pedig nem történt meg soha, és így a díj kiosztatlan maradt.

Farkas darabjairól a bírálóbizottság következőképen nyilatkozott: *«Karaktere ezen munkáknak: a benne levő váratlan gondolatok nagysága, szelid meleg érzés, merészséggel elegyült olvadó képzelés. Poétai nyelve egynek sincs a beküldők között olyan, mint az övé, csak kár, hogy néhol felette buja növéssé, nem tisztált, nem szoros. Ezen íróról sok természeti erejénél fogva azt kell hinnünk, hogy bizonyosan csak kritikáink nem léte s a más nyelven írottaknak általa elmulasztott olvasása, a mint maga vallja előbeszédjében, okozza drámai művészete hiányait. Állanak ezek ebben: Nem gondolkodott a drámai bog megkötéséről, mely az olvasó figyelmét nyughatlan vágyásba ragadná, annálfogva nincs a bognak közepe, nincs feloldása s így munkája mindenütt csak sima. Nem váltják fel egymást sebesen a váraakozást, meglepődést vagy fájdalmat okozó tettek; e helyett személyei majd mindenütt hosszasan dialogizálnak. Hanem egyedül a gondolatok nagyságára nézve nem ismer az ítélő jobb munkát drámai literaturánkban mint ezeket és KISFALUDY Hunyadi Jánosát, mindeniket külön értelemben véve... A mi vélekedésünk szerint ezen játékok füzetlen gyöngyök.»*

Egészen figyelmen kívül hagyták a bírálók KATONA József (1792—1830) *Bánk bánját*, mely csak szerzőjének halála után részesült a megérdemelt elismerésben és még ma is a legjobb és legeredetibb magyar tragédia.

Ha Farkas darabjai nem is kerültek színpadra, mégis van bizonyos jelentőségük a magyar dráma történetében; mert KISFALUDY Károly (1788—1830) legjobb művéhez, az *Iréne*hez Farkas drámájából, a *Mohamed*ből kölcsönözte a tárgyat és merítette lelkesedését. Iréne szép görög fogoly volt, a kit Mohamed szultán szeretett. Hogy a keresztények sorsát enyhítse, lemond jegyesének szerelméről és odaadja magát a szultánnak. A mióta a szultánon uralkodik, a mészárlások abbamaradtak. Ámde a háborús párt hívei meggyőzik a szultánt, hogy a keresztény nő cselekvéseinek nem a szerelem, hanem a számítás a mozgóatója, és haragjában a szultán megöli Irénét.

Az 1818. évben Farkas új darabot adott ki: *A párisi per*, egy érzékeny játék öt felvonásban. A következő évben megjelent tőle egy kötet fordítás német és angol költőkből; ebben találhatók mindenekelőtt POPE egy didaktikus költeménye, *Essay on man* (1733), azután MILTON, THOMSON, GRAY és SCHILLER egyes költeményei. A fordításnál Farkas nagy szabadságot engedett meg magának; így például megváltoztatta SCHILLER *Resignation* című költeményének végét: «múló napfogyatkozás volt az ő [SCHILLER] belső egén», írja 1856 július 13-ikán SARTORIUS VON WALTERSHAUSENNÉK.

A mit egyéb költői tervezetet Farkas följegyzett, azt 1836-ban a kolera idejében elégette. «Azonban a szegénység, idő s csendesség hiánya s egyéb nem mondható kedvetlen állásom egy sötét órámban arra vittek, hogy több tragédiáimat s még egyebeket elégettem (1836 körül), ma is meg van a hamva; még nem is voltak kitisztálva s láttam, hogy időm teljességgel nincs s ha el nem égetem, az igaz társamhoz, a mathesishez leszek a szeretőért hűségtelen, azt is gondolván, hogy akármikor lejendene időm, könnyen mást írnék; mert akkor úgy voltam, hogy ha szabad lettem volna s nem nyomtatva le a szegénységtől, csaknem minden hónapban egy drámát írtam volna prózában s azon módon még kitisztázatlanul.»

Hallgassuk még meg, hogy BEDŐHÁZI, Farkas magyar életrajzírója, mit mond róla, mint költőről. «Nála a főszempont túlnyomóan etikai, tragédiáinak határozott célja, hogy az olvasót ne csak gyönyörködtesse, hanem kiválólag tanítsa, javítsa is. Ő maga mondja egy később kiadott darabjának, a *Párizsi Per* című érzékeny játékának előszavában, hogy «ebbe is hosszú és igen tanító Dialogusok vannak. Ebbe is akármelyik szól, igen hallik az Auctor hangja». Nála

a drámai forma, a drámai cselekvény inkább csak egy eszköznek látszik, hogy elmondhassa dialogusokba öntött szép, fenséges gondolatait, megkapó, csillogó metaphoráit, képeit, erkölcsi világnézetét az ő felettébb buja növésű költői nyelvén. Ez a nyelv az, a melyről ama néhány ismeretes lap [GAUSSHOZ és hozzá intézett levelek] után ítélve SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN megjegyzi, hogy eredeti kifejezőmódja JEAN PAUL stylusát juttatja eszünkbe... Az „Arithmetika eleje” későbbi kiadásában [Maros-Vásárhely 1843] bizonyos műveletek megjelölésére a Venus, Saturnus, félholdak csillagászati jegyeit használva, itt is, mint mindenütt, mihelyt alkalmá nyílik a hasonlatokra, képekre, azonnal kicsap a rendes mederből... Nem kereste ezeket a kifejezéseket: ezen a nyelven adott elé, társalgott, levelezett, elmélkedett magában... Az ő költői nyelve megragadta bírálóit is, a kik kiemelik, hogy „egyedül a gondolatok nagyságára nézve, nem ismernek jobb munkát drámai litteraturánkban”. Gondolatgazdagsága, fellengő dialogusai olvasóközönséget szereztek s BRASSAI Sámuel tanuskodása szerint „olvasói egyaránt szerették és bámulták”... BOLYAI tragédiái, bár mint tragédiáknak irodalmi becsük kétes, a színpadi kíváncsnak pedig éppen nem felelnek meg, a részletekben sok olyat tartalmaznak, a mi teljesen indokolja egyik akkori bírálójának ama nyilatkozatát, hogy az „Őt szomorújáték mind e fogvatkozásaik daczára is fűzetlen orientál gyöngyök” [DÖBRENTER].»

Mikor Ferencz József 1852-ben Erdélyt beutazva, Maros-Vásárhelyre ért, július 31-ikén a collegiumot is meglátogatta. Mint a tanári testület képviselője, Farkas üdvözlő beszédet intézett a királyhoz és hódolattal adta át neki latin, német és magyar költeményeinek egy fekete bársonyba kötött kis gyűjteményét, mint ő maga mondá, *az agy poétának hattyudalát*. «A tanárokat BOLYAI mutatta be rendre, magát kihagyván. — És ki ön? — kérdé az uralkodó. — Én a mathesis és physika professora vagyok — válaszolt BOLYAI, elhallgatván nevét» (BEDŐHÁZI).

Meg kell itt emlékeznünk Farkas zenei képességéről is. Gergely nevű fia a következőt közli SZILLYvel: «Többször elbeszélte, hogy gyermek- és fiatal korában az itthon hallott cigányzene nem sok hatással volt reá; de Göttingában az első opera hallatára a zenét s különösen a hegedűt úgy megkedvelte, hogy másnap egy hegedűtanítóhoz ment leczkéket venni. A tanító figyelmeztette, hogy elkéssett a hegedű-tanulással, mert már ujjai sebességet sohasem szerezhetnek, s ez okból nem is akarta tanítványul elfogadni. De oly nagy volt benne a vágy, hogy teljeséggel nem tágitott és szigorúan követelte a tanítótól, hogy teljesítse kötelességét és a fizetni kész tanulni vágyót tanítsa is. Végére, mi-

után a mester a lelkesült fiatal embertől semmikép sem bírt menekedni, elfogadta tanítványul és rendes leczkéket adott neki. Fáradozása nem is volt eredménytelen; mert tanítványa kitartó szorgalommal annyira vitte, hogy a nagyobb sebességet nem kívánó darabokat erős taktussal és nagy pontossággal eljátszotta... Ifjú tanár korában a hegedűt a kevesebb sebességet kívánó brácsával cserélte fel s ebben is annyira begyakorolta magát, hogy társas zenében, nehéz quartettekben is pontosan lejátszotta a maga darabját. A zene iránti érzéke, ízlése, ítélő tehetsége annyira ki volt mívelve, hogy előtte a zene mezején a legmagasabb régióig — mint állítják — terra incognita sehol sem volt.»

Valóban, Farkas igazi művész-egéniség volt, de azért mélyreható elméjében helyük akadott az olyan dolgoknak is, melyek az élet ellenkező oldalán szerepelnek. Alig lohadt le a dráma iránti lelkesedése, egy nagyon is praktikus, prózai feladat megoldásának feküdt neki. Egy az osztrák kormány által kiküldött, Bécsben székelő bizottság takarékos kályhák építésével foglalkozott a nélkül, hogy czélt ért volna. Ezt megtudta Farkas és rögtön a nála megszokott buzgósággal fogott hozzá a dologhoz. Hosszas, fáradságos kísérletek után valóban czélt is ért. Az általa feltalált *Bolyai-kemencze*, mely ugyanazon a gondolaton alapszik, mint az újabb regenerációs kályhák, Erdélyben szerte volt használatban. Hogy Farkasnak volt érzéke az olyan feladatokhoz, melyek a technika terére átnyúlnak, kitűnik a GAUSS-hoz 1802 szeptember 11-ikén intézett leveléből is; abban az időben avval a kérdéssel foglalkozott, hogy miképen lehetne a vizet legczélszerűbben valamely kútból a magasabban fekvő kertjébe hajtani. A harminczas években — a mint KONCZ József közli — olyan kocsit talált fel, melyet az utas maga indíthatott mozgásnak, tehát a draisine egy nemét, melyet egy régi hintó darabjaiból állított össze. Egy először három-, később négykerekű állványon egy házikó állott, melynek hátul ajtaja volt, «hogy elragadás esetében veszély nélkül lehessen kiszállani belőle». A házikóban asztal, szék, sőt egy kéménynyel ellátott kis kályha is volt. Evvel a járóművel kirándulásokat tett a környékre.

Nyugtalan lelke azonban mindig új dolgokra terelte. 1820-ban meghalt GUILLEAUME Atanáz Erdély erdő-inspektora. Halála után a gubernium elrendelte, hogy ez az állás a jövőben bennszülött erdélyivel töltsék be. Az akkori viszonyokhoz képest elég jövedelmező állás volt; az 1500 r. ezüstforint fizetéshez még tekintélyes készpénzbeli és természetbeni mellékjövedelmek is járultak. Hogy Farkas, tekintve csekély jövedelmét, helyzetén javítani óhajtott, könnyen ért-

hető. Ámde csak kevesen tudták volna megtenni, a mit ő. Hogy az állásra alkalmasnak és méltónak mutatkozzék, rövid idő alatt negyven az erdészetre vonatkozó könyvet tanulmányozott át és az így megszerzett ismeretek alapján mindjárt könyvet írt erről a tárgyról, az első ebbe a szakmába vágó magyar könyvet. Igaz, hogy fiókjában maradt, mert befolyásos személyek pártfogása sem tudta kieszközölni, hogy az állást megkapja. Valami RÁTH Ignác nyerte el 1822-ben; olyan férfi, kiről semmi egyéb dolog nem ismeretes.

Hogy Farkas a huszas években ismét a matematikához tért vissza, azt főleg fiának, Jánosnak köszönhetjük, kinek matematikai lángeszre akkor érte el tetőpontját. Akkor fejezte be Farkas a már említett tankönyvét, a *Tentament*. Kinyomtatására már 1829 október 12-ikén kapta az engedélyt, de a nagy nehézségek, a melyek a collegium kicsiny és hiányosan felszerelt műhelyében a kinyomtatást gátolták, valamint a pénz hiánya a megjelenést annyira késleltették, hogy az első rész csak 1832-ben, a második pedig csak 1834-ben láthatott napvilágot.

A *Tentament* megelőzte egy az arithmetika elemeire kiterjedő munka: Az *arithmetica eleje* (Maros-Vásárhely 1830), melynek második javított kiadása 1843-ban jelent meg. Erre a könyvre következett Az *Arithmetikának, Geometriának és Physikának Eleje a M. Vásárhelyi Kollégyombéli alsobb Tanulók számára. Első kötet* (M. Vásárhely 1834). E művét, mint a *Tentamen*nek részletesebb kidolgozását, öt kötetre tervezte, de csak az első készült el belőle. Még felemlítendő az arithmetika és geometria 1850-ben és 1851-ben megjelent két kisebb kézikönyve: *Arithmetica eleje kezdőknek és Ürtan elemei kezdőknek*. A zárókövet végre alkotja egy németül megírt kis könyve, a *Kurzer Grundriss eines Versuchs* (M. Vásárhely 1851), melyben a Tentamen alapgondolatait vázolta; ez a mű bizonyos tekintetben Farkas matematikai végrendelete.

Farkas hosszú és fáradhatatlan munkálkodásának csak legfőbb pontjait érinthettük a megelőzőben. Az elmondottak azonban elegendők arra, hogy fogalmat nyújtsanak az ő egyéni sajátosságáról. Hogy miképen állott azoknak szeme előtt, kik őt még személyesen ismerték, azt BEDŐHÁZI eseteli: „Ha képet akar képzeletünk festeni róla, mindig az a középtermetű, szikár, hosszúkás, beretvált, nyájas arcú, kissé meggörnyedt öreg ember alakja áll előttünk kétfelé választott, vállaira omló hosszú fehér hajával, ajkai körül a melabú, a szelid bánat sajátságos vonásával, villogó mély tűzű szemével. A mint megjelen kathedráján fekete, kissé kopottas ruhájá-

ban, hosszúszerű csizmákban, vállain kéesszínű hosszú köpenyben, kezében széles karimájú kalapjával: mintha hallanók köhécselését, rekedtes hangját, a mely az előadás tűzében átmelegedve, visszanyeri csengését; vagy a mint otthon gondolataiba vagy számjaiba merülve, asztala előtt ül fehér flanel ujjasában, szemén a zöld ernyővel: mintha látnók tollának izgatott futását a papíron, mialatt betűi, keze nem tudván gondolataival versenyt haladni, alig olvasható sorokká alakulnak.»

V. FEJEZET.

BOLYAI Farkas mint mathematicus.

Első rész: Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos introducendi.

BOLYAI Farkas mathematicai írói minőségében talán még csekélyebb hatást gyakorolt, mint a tanításával; könyvei hazájában nem találtak elismerésre és a külföldön is jóformán ismeretlenek maradtak. Ha halála után a tisztelet minden nemét tanusították is iránta, mathematicai műveit mégis mindig csak kevesen fogják olvasni és még kevesebben méltatni. Farkas osztozkodik ebben a sorsban a legtöbb olyan férfiúval, kit *előhírnöknek* szokás nevezni, ellentétben a külső sikerekben gazdagabb követőkkel, kik átveszik azt, a mit a nagy felfedezők feltaláltak és a nagy tömeg számára hozzáférhetővé teszik. Ő fölismerte, hogy a matematikának új korszaka virrad, de mint Mózes az ígért földjét csak a hegyről nézhette és nem volt neki szabad reálélnie. Élénken érezte a meglevőnek elégtelen voltát, de a hiányokra nem tudott pontosan reámutatni és még kevésbbé tudta őket megszüntetni. Nem egy fontos kérdésnek, melylyel későbbi mathematicusok foglalkoztak, férközött a közelébe, de arra nem volt képes, hogy ezeket a kérdéseket megragadja, szilárdan megfogja és velük megbirkózzék.

Farkas főműve a *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris, ac sublimioris, methodo intuitiva evidentialique huic propria, introducendi*, a mely az 1832. és 1833. évszámokkal ellátva két részben jelent meg Maros-Vásárhelyt, *typis collegii reformatorum*. Már elbeszeltük, hogy a Tentamen alapgondolatai Farkasban még Jénában való tartózkodása idejében (1796) ébredtek és hogy a marosvásárhelyi tanszék elvállalása indította őt a «rendszer» kidolgozására; de csak hosszas és gyakran megszakított munka után tudott 1829-ben előzetes befejezéséhez jutni. «Az élet majdnem mindennapi szükségével küzdő és ezenkívül családi, házi tűzhelyénél is folytonosan zavart, zaklatott tanár lángszellemét az élet viharos, zivataros hullámai nem zsibbasztották el, nem törték

meg, sőt mondhatni erejét edzették, fokozták. A szél a kis lángot eloltja, a nagyot éleszti» (Koncz).

Az előfizetési felhívás 1829 május 4-ikéről van keltezve. Érdeemes reá, hogy itt helyet találjon.

«Kollégiumunk' Typographiája jobb lábra állván, 'következő munkát szándékozom ezen most érkezett betűkkel, mellyekkel ezen Jelentés nyomtatva van, itt adni-ki:»

«*Tentamen Systematis elementorum Matheseos purae (elementaris, ac sublimioris) demonstratae cum Appendice triplici. In usum studii proprii accomodatum.*»

«Okom az itt leendő kiadásra az, hogy tulajdon vigyázatom alatt hibátlanabb legyen.»

«Tzéлом egy olyan Compendiumot adni az Ifjaknak, a' millyent magam kívántam volna: mellyben

1° Az Axiomák előre nyilván kitétetvén, minden egyéb a' mi a' Tudomány menetelére szükséges, szorossan meg legyen mutatva.

2° A' képzetek a' legegyszerűbbeken kezdődve, úgy rakattassanak egybe, a' mint születnek, egészen addig a' sferáig, mellyet a' dolog természete kíván.

3° Hogy minden a lehetőség egyszerűen, röviden 's kézzelfoghatolag adattassék elé: úgy mindazáltal, hogy egyfelől a' felsőb-
beknek — is (a' millyen a' Calculus Differentialis, Integralis, Variationum) természetes utja találtatván, a' nehezek meg-könnyüljenek, mind a' tiszta igazság' szoros megmutatására, mind azoknak (p; o; a' Geometriára, Mechanicára való) alkalmaztatására nézve; de másfelől az alsobbak' nehézsége se lépettessék könnyűséggel által. — A' mi a' Systéma' valóságához tartozik, mind eggyaránt fontos; nints kitsi ott nints nagy, egy jussok van a' figyelemre.

4° Az Alkotvány a' leg-alsobb fundamentomokrol láthatólag emelkedjék fel, míg az ég' tűz-koszorúi között a feneketlenbe el merül: hogy látván az Ifjú, az ész akármikor és hol, 's akármely név alatt lett legyen (az emberi nemé az), miként lépett a' legmagasabbakra is, ne tsudálkozzék vakon.»

«Reménységem hogy jollehet ez koránt sem olyan, a' millyent kedvezőbb környülállások közt magam-is hozhattam volna elé, az Ifjú ez által-is sok idő és erő megnyeréssel, mind az alsobb, mind a' felsőbb Mathesisbe fundamentomoson vezetthetik-bé; 's annál fogva, résszerént ha Mathematicus nem lessz-is, azon lélekkel járva mindenütt a' lehetőségig tiszta, meghatározott képzeteket keres, 's nem maradva a' dolog' héjján, bé-néz, 's fundamentommal itél, — résszerént pedig valahára vissza-is adhat azon külső világosságból,

mellyel még csak, mint fél-holdak, szürkületesen világítunk ebbe a' viradástól meszsze lévő éjtzakába.»

«Az Appendix áll azokból, mellyeket az úgy nevezett *Applicata Mathesis*, és *Physica* esztendéjébe tanítani idő nem jutván, a' *Mathesis* esztendéjére tettem: ezek a *Perspectiva*, *Gnomonica* és *Chronologia*, az holott némely nem leg-könnyebb dologok' szoros megmutatásából könnyű közönséges regulák adattatnak.

«Példa csak annyi van a' mennyi a' megértésre szükséges; azt lehet kapni mindenütt: így is a' sok Tárgynak két darabba kell kötetni — a Tábla is sok, 's jegyeket kell hozatni, sőt ujjakat is öntetni: melyre nézve az árra előre fizetve 2 Rhfl. 30 kr. ezüstbe.»

«Mihelyt elég előfizetés gyűl, a' nyomtatás azonnal meg-indul. 's egymásután foly; és kiki nem-sokára a' magáét az elő-fizetést bévevő Urtol hiba nélkül kezéhez kapja.—»

«Ha pedig oskolai esztendőnk' bé-végződéséig (mely Julius közepére esik) nem gyűl elég pénz: úgy kiki a magáét a' kinek adta, attol vissza kapja.»

«Sajnálom, hogy ezen Munkát magyarul nem adhatom-ki; részszerént azért, mivel a' dolog természetét igazán. és minden más nyelven bé-vetteknél jobban ki-fejező mesterszókat lehetne bé-hozni — részszerént pedig azért, hogy a' *Mathesis* (ez az ég' Leánya) nyelvünkön szollva, inkább meg-kedveltetnék: de ezen munka nagy részint már régen deákul lévén meg-írva, 's fordítására most időm tellyességgel nem lévén; ezen hazafiui kötelességemnek ezután másként szándékozom eleget tenni.»

«Minden ollyas helységekben, méltóztatik valamely Professor Ur (vagy más buzgo Hazafi) az előfizetést bé-venni, 's engem annak idejében tudositani, és háladatosságom' jeléül minden kilencz példányra egyget el-fogadni.»

Az alatt a rövid idő alatt, mely 1829 május elejétől július közepéig eltelt, nem érkeztek be előfizetések; a közlekedés akkor Erdélyben olyan lassú volt, hogy a felhívás ennyi idő alatt el sem juthatott az ország távolabb eső részeibe. Ezért az aláírási határidőt egy évvel meghosszabbították. «De ha lehetetlen lessz» — írja Farkas az 1830. évben kiadott *Aritmetica Eleje* előszavában — «1-a Julii 1830-ig is [szándékomat kivinni]: nem kiáltva többé hiába a' pusztába, vissza ereszkedem a' köz alvásba, a' Dácia halmaira (hol Hazánk hajdoni Oriássai feküsznek) süto hőldvilágon... a' remény utolsó szikrájáig lemondani nem akarván, ezen munkátskából jöhető kiti nyereséggel is a' kevés előfizetést kívántam pótolni; hogy a' midőn egyfelől építeni igyekezem, ne rontsam másfelől házomat le.»

Az 1830. év május havában az előfizetők száma még igen kicsiny volt. «A' Deákhoz fognék» — panaszkodik Farkas Bod Péter nevű tanítványának 1830 május hó 6-ikán Bécsbe küldött levelében — «de a' Magyarra [Arithmetica Eleje] lett költségnek is tsak hatoda jött ki 's igen kevés a deákra valo prænumeratio; a' mi van, kérem gyűjtse-bé 's ha lehet szaporítsák, hogy a károgó világ ellenére is jöjjön ki.»

A mint az előfizetőknek az első kötet végén közölt névsora mutatja, a mű megrendelőinek száma 127 volt, kik többnyire Erdély főnemességéhez tartoztak. «A' 2-dik darabot» — így nyilatkozik Farkas az első kötethez csatolt magyar függelékben — «magyarul akartam kiadni; egyfelől azért, mivel az első darab (az *Arithmetika' Elejében* vallott kárommal együtt) szinte minden költséget elnyelvén, nem láttam más módját a' 2-diknak, hanem hogy megrövidítve oltsobb papirosra 300-at nyomtattassak (nem 500-at mint az elsőből), mathesisből ennyi is felesleg lévén nálunk; — másfelől így Hazámnak egy közhasznú könyvet adni reménylettem, melyhez az első darabot is ugyan magyarul hozzá alkalmaztam volna; de az előfizetők közül többen, a' kiknek tanácsokat meg nem vethettem, azt kívánták, hogy ha az első deák, a' második is úgy legyen.»

«BOLYAI Tentamenjével» — írja BEDŐHÁZI — «úgy volt a közönség, mint a KLOPSTOCK 'Messias'-ával vannak, sokan emlegették, de kevesen ismerték. Tudták, hogy egy nagy embernek nagy műve, de hogy miben áll e nagyság, nem is sejtették. A 'Magyar Tudós Társaság' sem e műve alapján választotta meg a matematikai osztály levelező tagjául, miután a választás még a 'Tentamen' megjelenése előtt, 1832 márczius 9-edikén történt, s inkább egyesek közvetlen tapasztalata és ismeretsége szolgált reá, hogy mint nagy hírű tudós az akadémia tagjainak sorába felvétessék.»

BEDŐHÁZI a valóságnál talán még mindig kedvezőbben itéli meg azt a fogadtatást, melyben a *Tentamen* részesült; mert maga Farkas erről 1835 április 20-ikán a következőt írja GAUSSNAK: «Itt mindenki kiált ellene, kivéve tanítványaimat, kik idő megtakarításával szerencsésen boldogulnak... Szó sincs róla, hogy [az előfizetőkön kívül] más valaki ilyesmit megvenne; még tanítványaimnak is (ha szegények) oda ajándékozom vagy kölcsönzöm, csak hogy tanuljanak. Így állunk mi még... Ha a rossz (bár elég nagy) nyomtatás szemedet (az Igazság templomának drágaságát) nem bántaná és a reá fordított idő templomrablás nem volna, merészkedném a te ítéletedet kikérni: bár eltekintve minden hibától (melyeknek ugyanavval az igazságszeretettel való kimutatását látni szeretném), némi figyelmet érdemel egy

hihetetlen kevés előismerettel kutatónak természetes menete, melyet, még a jót sem, a mi benne van, (fiamon kívül) nem méltat senki.» És 1836 október hó 3-ikán írja GAUSSnak: «A matematika itt nem kell senkinek; tanítványaim közül is csak kevésnek van hozzá igazi érzéke — művemet makulaturára használom, csomagolásra és más effélére... Jele annak, hogy nálunk a matematika hogyan áll, az, hogy a Tudós Társaság mostanában egy magyarul kiadott művet, mely az arithmetika és algebra elemeit tárgyalja [szerzője NAGY Károly], kétszáz arannyal jutalmazott, bár e műnek egyéb érdeme nincsen, mint az, hogy Bécsben szépen és pontosan kinyomtatták; a legcsekélyebb eredetiség és minden elmeél hijával van, semmi sincsen benne tisztázva, a szigorúságnak még szikrája is hiányzik belőle és kevés a tartalma, nemcsak középszerű, hanem rossz; nem szeretném, ha valamely leendő matematikus ebből tanulna — még jó mesterszó sincsen benne, minden csak rabszolgai módon van lefordítva. — De mégis örvendek neki, mert ez már lépés az első lépcsőfokra; egy évszázad, és az elsőből az ezredik lesz (vagy legalább lehet). Nekem itt nincsen már reményleni valóm; én már az örökkévalóság felkelő sugarai között állok, melyekben ez a, mint az éjszakában világító Föld sötét ponttá válik, és az időnek e harmatcseppje eltűnik. Megnyugtató, hogy — ha még oly keveset is — annyit tettem, a menyire körülményeim között képes voltam.»

Annál nagyobb örömet okozhatott Farkasnak az az elismerés, melyben GAUSS a *Tentament* részesítette. «Mathematikai műved példányát.» — írja GAUSS 1836 október hó 23-ikán — «szívesen megköszönöm. Mindenütt örömmel vettem észre benne az alaposságra és önállóságra irányuló becsületes törekvést. Csak sajnós, hogy a közönségben kevés az érzék az ilyen törekvések iránt. A legtöbb ember legjobban szereti a felületest; attól is tartok, hogy a te könyvedtől némely embert az a követelés fogja eljjesztani, hogy új jelölésekkel kell megismerkednie.» Hogy GAUSS fiatalkori barátjának művét figyelemben és megbecsülésben részesítette, kitűnik MENTOVICH Ferencz közleményéből, ki 1843-ban Göttingában jártakor meglátogatta GAUSST. E közleményben olvashatjuk: «Miután tudatám vele, hogy erdélyi vagyok, csak hamar élénk részvéttel kérdezé: ha valljon erdélyi jó barátjáról professor BOLYAIRól nem tudnék-e valami újabb tudósítást mondani egy öt előttem nem sok idővel meglátogatt erdélyi hazámfiánál professor SZÁSZNÁL?... Láttam BOLYAINK matematikai munkáját dolgozó asztala melletti kisded könyvtárában, hová ugy látszott kedveltebb íróktól 's inkább kézi könyvül használni szokott művek valának beszorítva. E' jeles férfiú minden szavából kitetszett, miként BOLYAINKAT

nemcsak mint barátját — tiszteli, de tudományos érdemeit is sokra méltatja.» GAUSS hajdani tanítványát és barátját, GERLINGET, a marburgi egyetem tanárát is figyelmeztette a *Tentamenre*, mire GERLING levelezni kezdett Farkassal. Farkas levelei, fájdalom, úgy látszik, elvesztek.

Miután a *Tentamen* a könyvpiacson ritkává vált, a Magyar Tudományos Akadémia elhatározta, hogy belőle új, a szerzőhöz méltó kiadást rendez. Ennek első, KÖNIG Gyula és RÉTHY Mór által kiadott kötete 1897-ben, második, KÜRSCHAK József, RÉTHY Mór és zepethneki TÖRÖSSY Béla által kiadott kötete pedig 1904-ben jelent meg.

A *Tentamen* első kötetéhez külön lapon az *arithmetika és geometria fái* vannak mellékelve, melyekben Farkas «rendszerét» alapvonalaiiban kifejti. Ennek magyar fordítása található e mű második részének 114—122. oldalain. «A külső és belső képzetekről» — kezdi Farkas — «absztrakció útján jutunk mindannak végső helyeihez, a mi a külső világban megvan és a mi a külső és belső világban történik. Ezek a tér és az idő, a melyeket részint külön-külön, részint pedig együttesen szoktunk vizsgálni. Ha t. i. a külső világban valamely testet abból a helyből, a melyet elfoglalni látszik, egészen eltávolítunk és kérdezzük, hogy mi az, a mi hátramarad és a mi ezen túl van, származik a *tiszta tér szemléleti képe* és ugyanabból, a mit különböző helyeken észlelünk vagy pedig különbözőkből, a melyeket ugyanazon a helyen észlelünk, vagy pedig különböző képzetekből, melyek ugyanabban a képzeteket alkotó alanyban felmerülnek, származik az *idő szemléleti képe*.» A tiszta tér a *geometriának* tárgya, az idő alakjára visszavezetett mennyiség az *arithmetikának* tárgya, «úgy hogy mind a két testvér-fa, melyeknek gyökerei össze vannak növe, egyik a másiknak segítséget nyújtva, a tér és idő örökkévaló házasságának fényes pályái között az ég rengeteg magasságában koronájával összeérjen»; ez az összeérés pedig a mechanikában történik.

Farkas e felfogásával egészen a KANT-féle filozófia alapján állva, a melylyel németországi tartózkodása idejében megismerkedett, abban is követi a königsbergi filozófust, hogy az épület architektonikájára is nagy súlyt helyez. Nem bizonyos erőszak nélkül iparkodik az arithmetika és geometria között párhuzamosságot létesíteni. Nyilvánul az abban a törekvésében, hogy ellentétben a még a XIX. század nagy részében szokásos összevegyítéssel, e két tudomány mindegyikének önálló alapját vesse meg; persze nem sikerült neki, hogy ezt az elválasztást következetesen keresztülvigye. Jellemzi e törekvését a következő nyilatkozata, mely GAUSSnak az algebrai egyenletek gyökeinek létezésére vonatkozó első bebizonyításáról szóló közlésében

olvasható. Miután GAUSS dissertatióját lelkes szavakkal, mint «a legdúsabb aratás első termését» dicséri, matematikai lelkiismerete mégis arra készíti, hogy hozzátegye: «történik pedig a geometria segítségével; ámde egyik igazság sem származik más nemből, mint más igazság». Ugyanerre az álláspontra helyezkedik mindenesetre az apa befolyása alatt Farkas fia, János is, ki GAUSSnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete ellen méltán azt a kifogást emelte, hogy a *jobbira* és *balra* benne alkalmazott fogalmai nem eléggé meghatározottak és hogy az aritmetikában a geometriára való hivatkozás egyáltalában kerülendő.

Az aritmetika önálló fölépítésének koronája az irracionális számokról szóló újabb tan. Farkas az itt mutatkozó nehézségeket úgy kerülte meg, hogy támaszkodva KANTRA, az időt tekintí a folytonosan változó *mennyiség* hordozójának, ezt élesen megkülönböztetve a diszkrét *számtól*. Az idő belevonása, melyhez a XIX. század első felének más matematikusai, mint pl. HAMILTON is folyamodnak, figyelemre méltó átmenete a folytonosan változó mennyiség fogalmának geometriai alapvetéséről a tisztán aritmetikai megalapozására. Ezek az eddig alig figyelembe vett törekvések bizonyára behatóbb vizsgálatra érdemesek.

Farkasnak a geometria alapjaira vonatkozó vizsgálatairól részletesen a következő fejezetben számolunk be; ebben a fejezetben még csak az aritmetika néhány különösen fontos helyére akarunk reámutatni. A ki a *Tentamen* gondolatvilágába mélyebben akar behatolni, jól teszi, ha mindenekelőtt az 1851-ben megjelent *Kurzer Grundriss* veszi kezébe, a melyben Farkas főművének tartalmáról rövid áttekintést nyújt. E most már ritkává vált művecskének magyar fordítása található e mű második részének 123—191. oldalain.

Nagy gonddal fejtette ki Farkas a pozitív és negatív raczionális számok elméletét, és itt kielégíti tárgyalása a szigorúságnak ama követelményeit, melyeket az újabb axiomatika felállít. Hogy a negatív számokra tegyen szert, pl. az eredeti egység, a «+1» mellett egy új egységet, a «-1»-et vezeti be. Áthatva e gondolat jelentőségétől, ellentétben a hozzáadás és elvétel «+» és «-» jeleivel a pozitív és negatív egység jelölésére a külön «+1» és «-1» jeleket vezette be. Valóban igazi nehézséget okoz a + és - jeleknek az a kettős jelentése, hogy az összeadás és kivonás jelei és e mellett a számok pozitív vagy negatív voltát is jelölik. E nehézséget újabb időben HANKEL eljárása szerint úgy kerülik el, hogy az összeadás és kivonás jelölésére eleinte új jeleket, pl. a \frown és \smile jeleket használják. Utólagosan azután megmutatják, hogy meg van engedve, hogy helyettük a + és - jeleket használjuk; mert ha azoknak az új jeleknek meg is

van a maguk haszna a negatív számok tanának alapvetésében, mégis ajánlatos e bilincseket minél előbb ismét levetni, nehogy a tárgyalás nehézkessé és túlterjengővé váljék.

A képzetes mennyiségekre nézve is jobbat iparkodott nyújtani Farkas, mint előzői. Hogy épen ez a tárgy őt mennyire foglalkoztatta, mutatja a *Tentamen* második kötetének előszava, melynek egyik helye így hangzik: «Midőn pedig a tiszta képzeteseknek csakis saját meggyőződéseim szerint értelmet tulajdonítani próbáltam, attól tartottam, hogy ki fognak engem nevetni; míg meg nem ismerkedtem a (messze az én dicséretemen felül álló) göttingai nagy férfiúnak (a Göttinger gelehrte Anzeigenben) már régebben kiadott képzetes mennyiségek alapvonalaival és egyidőben ezeknek [a mennyiségeknek közönséges] tárgyalására vonatkozó panaszával. Ez nagy vigasztalásomra szolgált: és az én elméletemet (a mely úgy, a hogyan megalkotni tudtam, már ki volt nyomtatva) csak addig kell tanítványaimnak előadnom, míg amaz meg nem jelen. Ha pedig meg fog jelenni, meg vagyok győződve, hogy egyenlőrangú lesz a többi művekkel, melyekben az ő biztos, átható (és majdnem csálhatatlan) elméjét az igaznak mesterkéletlen bélyege árulja el; én pedig meg leszek elégedve, hogy legalább ugyanazt akartam, a mit az ilyen nagy elme.»

Farkasnak a képzetes számokra vonatkozó elméletében alapvető a következő megjegyzés. Ő minden mennyiséget bizonyos még szabadon választható egységgel gondol ellátva, úgy hogy a \sqrt{a} jel amaz egység alkalmas választása esetében mindig valami valósat jelent. «Az egységet [a többi matematikusok] önkényesen veszik fel és $\sqrt{-4}$ csakis az e feltevésen alapuló szorzás miatt nem valós. Hogyan állana a dolog, ha az egységet negatívnak vennők fel? Nyilvánvaló, hogy akkor [a szorzás esetében] az egyenlő előjelek —ra és a különböző előjelek +ra vezetnének. Legyen tehát szabad azokat a mennyiségeket, melyeknek valós voltak a +1-re vonatkozó szorzáson alapszik, +1-re vonatkozólag valósaknak (röviden *valósaknak*), azokat pedig, melyeknek valós voltak a —1-re vonatkozó szorzáson alapszik, —1-re vonatkozólag valósaknak vagy tiszta képzeteseknek nevezni. (A $\sqrt{-a}$ lehet valós, ha a pl. —4-et jelent.) A —1-re vonatkozólag valóság jelöltessenek egy alájuk helyezett ponttal; így pl. $\sqrt{-4} = \pm 2$, $\sqrt{4} = \pm 2$; és a —1-re vonatkozólag valóság külön összeadva a +1-re vonatkozólag valósaknak összegével összekapcsolva, de össze nem keverve összeget alkotnak, pl. $2 + 1 - 3 = 1 - 1$. Azilyent (bővebb értelemben) nevezzük *képzetesnek*.»

Érthető, hogy Farkas a képzetes mennyiségeknek már most következő szorzása értelmezésénél és még nagyobb mértékben az

osztásánál nehézségekbe ütközött. Az ezekre vonatkozó fejtegetései meglehetősen homályosak és helyenként még hibáktól sem mentesek. Ki kell azonban emelnünk, hogy Farkas a képzetes mennyiségekre vonatkozó elméletében nagyon közel járt a *permanencia elvéhez*, melyet PEA-COCKRA (1830) és HANKELRE (1867) szokás visszavezetni; a számolásra vonatkozó szabályoknak — mondja — úgy kell alakulniok, «hogy a műveletek az általánosság vitorlája alatt folytathatók legyenek és az általánosság, a mennyire lehetséges, el ne vesszen».

BOLYAI Farkasnak a negatív és képzetes mennyiségekre vonatkozó gondolatainak természetszerű továbbfejlesztéséből eredt BOLYAI Jánosnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete, mely ezen a téren lényeges haladást jelent. Erről a XIV. fejezetben bővebben lesz szó.

Ha a folytonosan változó mennyiség arithmetikai fogalma Farkasnál hiányzik is, mégis a *határ fogalmát* megfeszített fűrádozás árán olyan szigorúsággal fogta fel, mely kortársainak felfogását messze túlhaladja.

A *Tentamen* előleges megjegyzéseiben (I. e. könyv második részének 32—35. oldalait) először is *A*) alatt néhány axiómát és a belőlük folyó következtetéseket állította össze, «nehogy egyes esetekben szükség legyen azokat ismételni».

Az axiómák közül a következőket idézzük: Az idő folytonos mennyiség. Bármely véges idő, a mely még nem volt meg, eljőnn majd, de az idő összessége sohasem. A mi az időnek *p* oszthatatlan része alatt megvan vagy a *B igenjével*, vagy a *B nemjével* (azaz *B*-vel vagy *nem-B*-vel) van meg. Ebből kiindulva az apagogikus bebizonyítás alapjait tárja fel. Ha ugyanis *A* és *B* a *p* alatt a *C igenjét* és *nemjét* állítják és *A* áll: akkor *B* nem áll; ha pedig *A* nem áll, akkor *B* áll.

E) alatt azután következik a határ fogalmának értelmezése. «Ha bizonyos, hogy a folytonos *T* időtartam minden pontjában *A* fennáll, és valamikor a *t* alatt, mely a *T* után következik be, *A* már nem áll fenn: akkor a végtelenbe növekedő *T* elejétől számítva [mindenesetre] találhatunk olyan *p*-t, a mely az utolsó azok között az időpontok között, a melyek mindegyikéről elmondhatjuk, hogy közte és a *T* eleje között *A* mindig fennáll.» Magában a *Tentamen*ben ez így folytatódik: «A *p* után azonban van olyan a *p*-vel kezdődő folytonos idő, a melynek egyik pontjában sem áll fenn az *A*.» A több mint 60 oldalra terjedő *errata*k között, melyek az 1834—1846. években csatoltattak hozzá a *Tentamen*hez, Farkas ezt a hibát a következő módon igazítja helyre: «*p*-ben azonban vagy *utoljára* áll fenn *A*, vagy legelőször áll fenn *nem-A*. Ha *p*-ben *nem-A* állana: akkor a

p után vagy egy darabig, vagy mindig A állana, vagy mindig *nem- A* ; ha csak p után nem minden p' pont olyan, hogy p és p' között mind A , mind *nem- A* fordul elő. Ez alapja a határ fogalmának.

Látszik ebből, hogy Farkas lassanként kiküzdötte magának a lineáris pontthalmaz felső határának fogalmát, a melyre, mint ismeretes, az analízisben fellépő határátmenet folyamata támaszkodik.

Az *aritmetika általános vázlatában*, az aritmetikának első szakaszában, melynek első 23 paragrafusa magyar fordításban e könyv második részének 35—49. oldalain olvasható, Farkasnak olyan meg gondolásaival találkozunk, melyeket ma a *halmazelméletbe* soroznánk. Legyen szabad Farkas gondolatait az új kifejezésmódok használatával kifejtenuünk, minthogy az ő fejtegetései épen azért, mert az ilyen kifejezésmódot nélkülözte, nehezen érthetők. Ha tételeinek érvényessége szélesebb körű is, itt az egyszerűség kedvéért csak pontthalmazokra nézve fogjuk azokat kimondani.

Legyen A valamely zárt pontthalmaz, p ennek valódi része. Az r maradékot tegyük az A halmazból vett elemek (sűrűsödési helyek) hozzávételével zárttá és az így származó részlethalmaz legyen r' . Ha r' azonos A -val: akkor a p halmazt az A *elválaszthatatlan* részének nevezzük. Így pl. valamely köz pontja ennek a köznek elválaszthatatlan része. Az r maradék máris zárt, tehát r' -rel azonos lehet; ekkor a p és r' halmazoknak semmijük sem közös. Ha azonban p -ben és r' -ben valamely s halmaz közös, akkor megtörténhetik, hogy ez az s az A -nak elválaszthatatlan része. Akkor és csakis akkor, ha az említett két eset valamelyike fennáll, mondjuk, hogy p az A -nak *alkotó része*.

Most már könnyen bebizonyíthatók a következő tételek: A p résznek elválaszthatatlan i része az egész A -nak is elválaszthatatlan része. A P alkotó résznek p alkotó része az egész A -nak is alkotó része. Legyen p az A -nak alkotó része; r' úgy, mint előbb, az r maradékból nyert zárt halmaz: akkor r' is alkotó része A -nak.

A legfontosabb az elválaszthatatlan rész és az alkotó rész fogalmainak az az alkalmazása, mely nekik a 4. §-ban a kontinuum értelmezésében jut. (L. e. könyv második részének 38. oldalát.) Ez az értelmezés a következőképen hangzik: «Ha a részek vizsgálatát tovább folytatva, olyan [zárt egész] A -ra akadunk, a melynek minden A' alkotó része olyan, hogy valamije közös avval a [zárttá tett] B -vel, a mely A -ban a A' -n kívül megvan: az ilyen A -t kontinuumnak nevezzük.» Az itt kimondott követelésnek az a jelentése, hogy az A halmaz ne ossék szét egymástól elválasztott részekre; a mi Farkas szeme előtt lebegett, tehát egyenlő értelmű avval az értelmezéssel, hogy

a kontinuum összefüggő, perfekt halmaz. Ez pedig ugyanaz az értelmezés, melyet CANTOR György a kontinuumról nyújtott. Farkas bizonyára távol volt attól, hogy a *ponthalmaz*, *zárt*, *perfekt* fogalmait élesen és tisztán felfogja; de fejtegetései világosan mutatják, hogy az itt szóban forgó kérdéstételek nála tudatosakká váltak.

A ki BOLYAI Farkas *Tentamenjében* szeretettel és türelemmel kutat, bizonyára még sok olyan vizsgálat előjátékára akad, a melyet csak későn a szerző halála után valóban hajtottak végre. De a matematikai gondolatok keletkezésének és gyarapodásának megfigyelése felé bizonyára mindig csak kevés embernek érdeklődése fog fordulni; a tömeg a könyvtől azt követeli, hogy kész ismereteket a használatra alkalmas alakban nyújtson, és ezért mindig csak úgy lesz, hogy e mély és eredeti gondolkodású szerzőnek művét csak kevesen fogják olvasni és még kevesebben fogják méltatni.

VI. FEJEZET.

BOLYAI Farkas mint matematikus.

Második rész: A geometria alapjaira vonatkozó vizsgálatai.

Ha már az arithmetikában mutatkozott, hogy BOLYAI Farkas alkotó munkája főleg e tudomány alapjai felé irányult, ez még nagyobb mértékben áll a geometriára nézve. Farkas maga világosan fölismerte, hogy mire utasítja őt tehetsége. «Igenis, ha sikerülne» — írja 1808 deczember hó 27-én GAUSSnak — «szép volna, ha te fent a büszke tornyok tetején munkálkodnál, én pedig alapjaikon tépelődném».

Farkas geometriai vizsgálatainak legnagyobb része a párhuzamosuk elméletét illette. Az «irtózatos, óriási munkákat», melyeket a XI. axióma bebizonyítása céljából végzett, de melyek végül még sem hoztak neki megnyugvást, igen élénken írja le azokban a levelekben, melyeket az 1820—1821. években János fiához intézett. Minthogy ezek a levelek szoros kapcsolatban állanak az abszolút geometriának János által való felfedezésével, mely felfedezés mutatja, hogy Farkas célja valóban elérhetetlen volt, csak a X. fejezetben fogjuk őket közölni. De Farkas semmiképen sem pusztán a párhuzalok elméletére szorítkozott, hanem kezdettől fogva az egész geometriának jobb, szigorúbb alapvetését tartotta szem előtt. Célyszerű lesz tehát, ha először a *Geometria Általános vázlatáról* számolunk be, a melyet a *Tentamen* magában foglal, és csak azután térünk rá a *párhuzamosak elméletére*.

A geometria rendszere BOLYAI Farkas szerint az egyszerű tényeknek oly sorozatára támaszkodik, melyek a közvetetlen szemléletből erednek. Rendszer pedig «áttekinthető rendben való összefoglalása:

1. a szabatos értelmezéseknek, melyek a legegyszerűbb fogalmakból indulnak ki és a megalkotottakról újabb összetettekre haladnak előre (mindaddig, míg elő nem állanak azok [a fogalmak], melyek legalább mindazt felölelik, a mi oda [t. i. a rendszerbe] tartozik);

2. a legegyszerűbb axiómáknak, a melyek közül egyik sem vezethető le a többiből:

3. az ezek segítségével bebizonyított tételeknek».

Ha sok hiba is van annak, hogy Farkas rendszere az ő saját követelményeinek megfelelően, mégis figyelemre méltó az a világosság, a melylyel a rendszer fogalmát felfogja. De különösen figyelemre méltó, hogy a *Tentamen* bizonyára az első mű, melyben egész általánosságban az axiómák kölcsönös függetlenségéről van szó; ez pedig Farkas korában mindenesetre egészen új gondolat volt.

Amaz egyszerű alaptényeknek megállapításában, melyeken a geometria felépül, Farkas ÜBERWEG és HELMHOLTZ előhírnökének bizonnyul, a mennyiben merev testek létezéséből és azoknak a térben való mozgathatóságából indul ki. De habár Farkas csak előhírnök volt — mert nem hatolt keresztül egészen a HELMHOLTZnak tulajdonítandó döntő fordulatig, hogy a számoknak minden olyan háromszorosan kiterjedő sokasága, mely a felállított követeléseket kielégíti, állandó görbületű — mégis megérdemli, hogy gondolatait elemezzük. Ez az elemzés egyszersmind megkönnyíti a nem mindenütt könnyen érthető *A geometria általános vázlatának* olvasását, melynek magyar fordítása e könyv második részének 49—113. oldalain található. Az az olvasó, a ki HELMHOLTZ klasszikus értekezését ismeri, maga hasonlítja össze egymással a két kifejtést.

A közvetlen szemléletről mindenek előtt az van átvéve, hogy a tér mindenfelé végtelen kontinuum (1. §). A térben lényeges különböző alakzatokként megkülönböztetendők az egymással egyenlő térbeli pontok, a vonalak, a felületek és a tér alkotó részei (2. §). Ezután következik a térben meglevő merev testek szemlélete alapján a «mozgatható» fogalmának megalakítása, azaz olyan geometriai alakzaté, mely alakjának megváltoztatása nélkül a térben mozgatható (3. §). Ebből származik a *kongruencia* fogalma. «T. i., ha feltételezünk ilyen mozgathatót [merev alakzatot], és ez különböző időkben *A*-val és *B*-vel eshetik egybe: akkor a szemlélet azt mutatja, hogy *A* kongruens *B*-vel.» A további vizsgálat az ilyen merev alakzatok mozgására támaszkodik. «Ha az említett mozgást megengedjük, a geometria élénkebbé, könnyebbé és érthetőbbé válik, és a görög és a britanniai ARCHIMEDES alkalmazták is a mozgást; és mihelyt az egyik háromszöget a másikra helyezzük, mint azt EUKLIDES teszi, a mozgást a kifejtett értelemben mindig meg kell engednünk.» Miután a 4. §-ban néhány a merev alakzatok mozgására vonatkozó fogalom meg volt magyarázva, az 5. §-ban következik «a mozgás három primitív fájának» jellemzése. A mozgás első faja a szabad mozgás. A mozgás második faja a forgás egy pont körül, a mely a gömbhöz, BOLYAI Farkas geometriai rendszerének alapalakzatához vezet. A mozgás har-

madik faja a forgás két pont körül. Az ilyen mozgás közben valamely harmadik pont általában olyan vonalat ír le, a melyről axiómaszerűleg feltételezi, hogy egyszerű, egyenletes és önmagába visszatérő; a «gömbnek ez az elsőszülöttje» a *gyűrű*, a hogyan Farkas a körvonalat nevezi. Megtörténhetik azonban az is, hogy a harmadik pont a forgatás alkalmával «egyetlen» marad. Ama pontok összessége, melyeknek az adott két pontra nézve ez a tulajdonságuk megvan, *egyenes* alkot. Általánosítás révén végre az egyenesről a *síkra* jut.

A 14. §-ban megkísérli Farkas annak kimutatását, hogy az így értelmezett gyűrűnek, egyenesnek és síknak rendre megvannak azok a tulajdonságai, a melyeket az ezekkel a nevekkel közönségesen megnevezett alakzatoknak tulajdonítani szoktunk. Fejtegetései nemcsak meglehetősen bonyolódottak, hanem gyakran homályosak és a szigorúságot nélkülözők is. Nem volnánk azonban méltányosak, ha olyan matematikussal szemben, ki az axiómatika bajos területén az első tapogató kísérleteket végezte, a ma szokásos igényeket támasztanók. De más mentséget is lehet felhozni Farkas mellett. Az ő általa követett útra — a geometriát a gömbből kiindulva felépíteni — a XIX. század folyamán többen léptek, a nélkül, hogy törekvésük kielégítő eredményre vezetett volna. Ugyanaz áll arról a gondolatról is, hogy a kör szolgáljon kiindulópontul, a minek kivételét — mint azt a XVIII. fejezetben látni fogjuk — Farkas fia, János kísérlette meg, és ezért HILBERT, PASCH, PEANO, SCHUR és mások az egyenesre, a síkra és a térre vonatkozó postulatumokkal kezdték meg tárgyalásaikat.

Részletekbe itt nem bocsátkozhatunk. A ki nem kiméli a fáradtságot, hogy kövesse azokat a célzásokat, melyeket Farkas az olvasónak csak úgy «odavetni» szeret, nem egy olyan gondolat csirájára akad nála, mely az újabb matematikában jelentőségre emelkedett. Elég lesz, ha itt példaképen Farkasnak a *végszerűen egyenlő területekre* vonatkozó tételeit hozzuk fel, a melyek *Az arithmetika általános vázlatának* egy közbeiktatott részében (35. §, XIX.) találhatók.

Végszerűen egyenlőnek nevez Farkas két olyan sík-felületdarabot, a melyek egyenlő számmal levő kölcsönösen kongruens darabokra bonthatók fel; e darabok az egésznek összetételénél mindig pozitívoknak veendőek. HILBERT szerint az ilyen felületpárokat *felbontásukra nézve egyenlőknek* (*zerlegungsgleich*) nevezhetnők. Farkas teljes szigorúsággal bebizonyította, hogy két területére nézve egyenlő egyenesvonalú sokszög mindig végszerűen egyenlő. Ellenben méltán kifogásolták nála annak az állításnak a bebizonyítását, hogy két egymást csak részben elfedő kongruens felületnek nem közös részei végszerűen egyenlők. RÉTHYÉ az érdem, hogy ezt a hézagot betöltötte és

nagyobb általánossággal állította fel annak szükséges és elegendő feltételeit, hogy két olyan egyenlő területű síkfelület, melynek határvonalai önmagukat sehol sem metszik és két különböző helyzetben csak véges számmal levő metszéspontot tüntet fel, végszerűen egyenlő legyen.

Hátra van még, hogy BOLYAI Farkasnak ama vizsgálatairól beszámoljunk, melyek EUKLIDES XL. axiómájára vonatkoznak. Ez az axióma, vagy helyesebben az 5. postulatum a következő:

Ha valamely egyenes, mely két egyenest metsz, ezekkel ugyanazon az oldalon fekvő olyan belső szögeket alkot, melyek [együtt/kisebbek két derékszögnél: akkor a két [metszett] egyenes vég nélkül meghosszabbítva, metszi egymást azon az oldalon, a melyen azok a szögek fekszenek.

«PROKLUS útján tudjuk, hogy [az 5. postulatum] folytonos támadásoknak volt kitéve, pl. PTOLEMAEUS részéről is, és ennek oka világos. A gyakorlat embereinek tapasztalata megteremtette a geometriát, a geometria behatóbbá tette az alkalmazott matematikát, de EUKLIDESnek a mozgást illető aggodalmát a mérnökök és a csillagászok nem osztották; az ő álláspontjukról tekintve EUKLIDES követelése nélkülözötte a szemléletességet, mert a valóságos mozgás útján a nem-metszés sohasem és a metszés in praxi legtöbbszörre szintén nem állapítható meg... EUKLIDES ezt a dolgot sokkal élesebben fogta fel. Ő — mint Proklus egészen helyesen megjegyzi — meg akarta fordítani ezt a tételt: Minden háromszögben két szög összesen kisebb két derékszögnél. Ennek bebizonyítása minden iparkodása ellenére nem sikerült neki, belátta, hogy itt új postulatumra van szükségünk, ha eleget akarunk tenni annak a ténynek, hogy szemléletünk szerint a mi terünkben két különböző irányú egyenes metszi egymást» (SIMON M.).

A geometerek törekvése mindenekelőtt arra irányult, hogy az 5. postulatumot annak kimutatásával tegyék mellőzhetővé, hogy ez mint EUKLIDES többi axiómáinak logikai következménye adódik ki, tehát alapján felesleges. E törekvésnek majdnem kétezer éves történetét illetőleg a könnyen hozzáférhető részletes művekre utalunk. Itt elegendő, ha arra mutatunk rá, hogy a bebizonyításnak mind e kísérletei vagy valami hibás következtetést tartalmaztak, vagy pedig abban a hibában szenvedtek, hogy EUKLIDES axiómáját tudatosan vagy öntudatlanul egy másikkal, vele egyenlő értékűvel pótolták. Hogy SEYFFER, a göttingai csillagász (1762—1822), a kivel Farkas barátságosan érintkezett, úgy vélekedett, hogy «több mint kétségesnek látszik, hogy egyáltalában lehetséges lesz a tizenegyedik axiómát bebizonyítani a nélkül, hogy valamely más, új axióma segítségül vé-

tetnék», már a II. fejezetben beszéltük el. SEYFFERT talán KÄSTNER befolyásolta, a ki — mint SCHWEIKART említi — «a megoldás lehetőségén elcsüggedve, érthetetlen resignációval, a helyett hogy a helyes bebizonyítást kereste volna, nyilvánosan a vaktában való elfogadást tanácsolta». Ugyanezt az álláspontot foglalta el KLÜGEL is, ki KÄSTNER ösztönzésére 1763-ban doktori dissertációjában mint első tárgyalta a párhuzamosak elméletének történetét.

Abban az időben, mikor BOLYAI Farkas Göttingában tanult (1797—1799), KANT *Kritik der reinen Vernunft*-jának (1781) erős és tartós hatása a geometria alapjaival, különösen a párhuzamosak elméletével való foglalkozást új életre keltette. Farkas «a parallelák áldozatának szentelte magát», de a göttingai szkepticizmus befolyása alatt, nagyobb óvatossággal és kritikával fogott hozzá ehhez a tárgyhoz, mint előzői. Helyesen jegyezte meg János, hogy apja «bizonyára minden előzőjénél jobban ismerte a tárgy nehézségeit és birtokában volt önalkotta, messze ható jobb tanoknak». Ámde Farkasnak sem volt szánva, hogy a kétezer éves talányt megoldja, «hajótörést szenvedett» és végül a parallelákkal való foglalkozást «élete szerencsétlenségének» tekintette; «ijesztő csatatér ez, melyen mindenkor megverettem; a kutató elme minden törekvésével daczoló bevehetetlen sziklavár. Ebben a materiában az egész élet csak égő, a tengerbe merített fáklya. Valóságos betegség, az örület egy neme, zsarnok eszme».

Mikor GAUSS és BOLYAI Farkas, az előbbi Braunschweighból, az utóbbi pedig Göttingából érkezve, 1799 május hó 24-ikén Clausthal im Harz mellett egymástól elbúcsúztak, Farkas — a mint a II. fejezetben említettük — barátjának, úgy látszik, csak röviden jelezve elbeszélte, hogy neki sikerült a XI. axiómának bebizonyítása. «Nagyon sajnálom» — írja GAUSS 1799 december hó 16-ikán — «hogy hajdani közelségünket nem használtam fel arra, hogy többet tudjak meg a geometria első alapjaira vonatkozó vizsgálataidról; bizonyára evvel sok hiábavaló fáradságtól megkímélhettem volna magamat és nyugodtabb lehettem volna, mint a hogyan lehet olyasvalaki, mint én, addig, a míg valamely ilyen tárgyra nézve még annyi kívánni való van hátra. Én magam erre vonatkozó munkálataimban messze haladtam előre (habár más, ettől egészen elütő dolgaim kevés időt engednek reá); ámde az az út, a melyet én követtem, nem annyira a kívánt célhoz vezet, a melyről biztosítasz, hogy elérted, mint inkább oda, hogy a geometria igazsága kétségessé válik. Igaz ugyan, hogy némely olyan dologra jutottam, a mely a legtöbb embernél már bebizonyítás-számba menne, de az én szememben nem bizonyítanak semmit. Pl. ha azt lehetne bebizonyítani, hogy lehetséges olyan egyenesvonalú

háromszög, melynek területe nagyobb bármely adott felületnél, képes volnék az egész geometriát teljes szigorúsággal bebizonyítani. A legtöbben ennek, mint axiómának adnának helyet; én nem; hiszen lehetséges volna, hogy bármily messze is vennők fel a térben a Δ három csúcsát, területe mégis valamely adott határon alul (*infra*) maradna. Több efféle tétellel rendelkezem, de egyikükben sem talállok kielégítőt. Hozd ám nemsokára nyilvánosságra a te munkádat; bizonyára aratod érte nem ugyan a nagy közönségnek háláját (a melyhez némelyik olyan ember is tartozik, kit ügyes matematikusnak tartanak), mert mindinkább jobban győződöm meg róla, hogy az igazi geometerek száma fölötte csekély és a legtöbben az ilyen munkákban felmerülő nehézségeket megítélni, sőt megérteni sem tudják, de aratod majd bizonyára mindazoknak a háláját, kiknek ítélete egyedül igazán becses lehet előtted.*

GAUSSnak e nyilatkozata mutatja, hogy ő akkor, hasonlóképen mint előtte SACCHERI (1733) és LAMBERT (1766) annak a feltevésnek következményeit kezdte kifejteni, hogy EUKLIDES 5. postulatum-a nem teljesül. Hogy GAUSS mikor ismerkedett meg LAMBERTnek *Theorie der Parallellinien* című értekezésével, melyet III. BERNOULLI JÁNOS (1744—1807) LAMBERT hagyatékából a *Magazin für die reine und angewandte Mathematik* 1786-iki évfolyamában hozott nyilvánosságra, azt nem tudjuk; de hogy LAMBERTnek közvetlenül vagy közvetve volt tudomása SACCHERI művéről, az bizonyos. Ellenben BOLYAI FARKAS és a fia, JÁNOS, soha semmit sem tudtak meg SACCHERI és LAMBERT előző vizsgálatairól, a mint egyáltalában csak igen kevés olyan mű akadt kezükbe, mely a párhuzamosak elméletére vonatkozik.

BOLYAI FARKAS az ezután következő leveleiben nem tért rá GAUSSnak 1799 december havában tett megjegyzéseire. Hogy ezek meggyőződését a XI. axióma bebizonyítható voltáról nem ingatták meg, hanem hogy inkább folytatta a bebizonyítás Göttingában megkezdett kísérletnek kidolgozását, mutatja a GAUSShoz 1804 szeptember hó 16-ikán intézett levele. «E levélbe zárva küldöm neked *göttingai elméletemet a párhuzamosokról*... Valami három évig hevert, körülményeim eltereltek tőle, mostan [a marosvásárhelyi kollegiumon folytatott] tanítás[om] céljából elő kellett vennem, szűk helyre szorítottam össze. A hibát nem tudom benne felfedezni, vizsgálj meg te az igazsághoz híven és írd, mihelyt csak lehetséges, írd meg a te ellenvetéseidet, vagy pedig ha valahol rosszul vagy pedig nagyon röviden fejeztem volna ki magamat, vagy íráshibát követtem volna el... Itten az ilyen dolgok nincsenek az embereknek inyére, és az itteni áltudósok engem különben is átok alá helyeztek. Feltéve azt

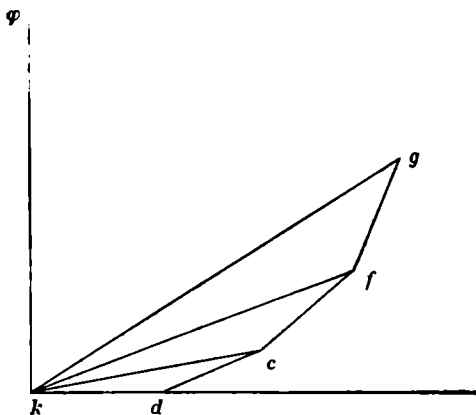
az esetet, hogy ezt a művecskét reá érdemesnek tartod, küldd el valamely tiszteletre méltó akadémiának megítélés végett (hogy pecséttel legyen ellátva). Én a dolog rosszabbik végére is el vagyok készülve, bár nem tagadom, hogy még nem adtam volna ki, ha nem volnék kénytelen azért, hogy sok bírám között valamivel nyugodtabban élhessek, valami külső megbecsülésre pályázni. Tudod, hogy Hamlet mondja: 'the spurns, that patient merit of th' unworthy takes'. Isten veled, kedves barátom! és válaszolj, mihelyt csak lehetséges!.

GAUSS az 1804 november hó 25-ikén kelt válaszában a bebizonyítás kísérletének magvát és egyszersmind Farkasnak a következtetésben elkövetett hibáját olyan tökéletes világossággal adta elő, hogy legjobbnak tartjuk, ha levelének illető helyét idézzük. Az egész bebizonyítás magyarra lefordítva e könyv második részének 1—15. oldalain található.

«Dolgozatodat nagy érdeklődéssel meg figyelemmel olvastam át és igazán gyönyörködtem a valódi és alapos elmeéledben. De te nem várod üres dicséretemet, mely némileg részrehajlónak látszhatnék már azért is, mert a te eszmemeneted sokban hasonlít az enyémhez, a melynek alapján hajdan e gordiusi csomónak kibontását megkísérlettem és mindeddig hiába próbáltam. Te csak őszinte, nyílt ítéletemet kívánod. Ez pedig az, hogy a te eljárásod engem még *nem* elégit ki. Megpróbálom, hogy a botrányozás követ, melyet még benne találok (és a mely ismét szintén a szirtek ama csoportjához tartozik, a melyeken az én kísérleteim mindeddig hajótörést szenvedtek), oly tisztán, a mennyire tőlem telik, megmutassam. Van ugyan még mindig reményem, hogy ama szirtek valamikor, még az én [életem] vége előtt átjárást engednek. Nekem azonban egyelőre annyi másféle dolgom van, hogy most reá sem gondolhatok, és hidd el nekem, hogy szívből örülnék, ha engem megelőznél és sikerülne neked, hogy legyőzz minden akadályt. Én aztán a legbensőbb örömmel megtennék mindent, hogy a te érdemed — a mennyire tőlem telik — érvényesüljön és a kellő világosságba helyezkedjék. Mindjárt reátérek a dologra.»

«Valamennyi többi következtetés ellen nincsen semmi lényeges kifogásom: a mi *nem* győzött meg engem, csupán a XIII. cikknek okoskodása. Te ott egy a határozatlanba folytatott *II* azaz]... *kdcfg*... vonalat [1. ábra a 44. oldalon] képzelsz, a mely csupa egyenes és egyenlő *kd*, *dc*, *cf*, *fg* stb. darabból áll és hol a *kdc*, *dcf*, *cfg* stb. szögek egymással egyenlők, és be akarod bizonyítani, hogy *II* előbb-utóbb túl fog menni a $k\varphi$ -n. E végből a $kd\infty = Q$ egyenest úgy mozgatod azon oldal felé, a melyen *II* fekszik, a *k* körül, hogy egymásután a *II* sokszög egyik oldalától annak következő oldalához jusson. Helyesen megmutatod,

hogy Q , a mint fokozatosan a d, c, f, g -n megy át, mindig közelebb jut $k\varphi$ -hez: mindezek ellen semmi kifogás sem lehet; de folytatod:



1. ábrn.

„Ezért Q -t az előírt módon addig mozgathatjuk, míg $k\varphi\infty$ -be jut stb.” és ez az a következtetés, melyet nem tudok átlátni. A te okoskodásodból az én belátásom szerint épen nem következik még, hogy az a szög, a melylyel Q (felfelé) a II egyik oldalán végig menve, a $k\varphi$ -hez közeledik, nem fogy-e annyira, hogy az aggregatuma valamennyi egymásra következő közeledésnek, bármennyire gyakran is ismétlődnek ezek,

nem válhatik [elég] nagygyá arra, hogy a Q -t a $k\varphi$ -be hozza. Ha be tudnád bizonyítani, hogy $dkc = ckf = fkg$ stb., a dolog mindjárt tisztában volna. De ez a tétel igaz ugyan, ámde aligha bebizonyítható a párhuzamosak elméletének feltételezése nélkül.»

«Még mindig lehetne tehát attól tartani, hogy a dkc, ckf, fkg stb. szögek fokozatosan fogynak. Ha ez (csak a példa kedvéért) geometriai haladvány szerint történnék, úgy hogy $ckf = \psi \times dkc$, $fkg = \psi^2 dkc$ stb. (hol ψ kisebb az 1-nél), akkor valamennyi közeledés összege, bárhányszor is folytatjuk ezeket, mégis mindig kisebb marad, mint $\frac{1}{1-\psi} \times ckf$, és ez a határérték azután mindig még kisebb lehetne, mint a $dk\varphi$ derékszög. Összinte ítéletemet kérted: én szolgáltam vele, és ismételve biztosítlak arról, hogy majd szívből örülök, ha minden nehézséget leküzdesz.»

A levélváltásban most szünet állott be. A csak 1807 december hó 18-ikán kelt válaszában ezt írja Farkas: «Családi életem harmóniája soha nem áll [többé] helyre; az iskolai ügyek ellátása is sok időt vesz igénybe és kifárasztja az elmét... Sokat ugyan nem cselekedhettem, de mégis valamit, a mi azonban ép olyan keveset jelent, mint az, a mit a hangya a Cimborasóból elhordhat. A parallelákát is most már talán befejeztem: nem küldöm mostan, nehogy ez a levél még további halasztást szenvedjen, mert már nyomasztónak érzem tartozásomat. — Akkor, nemsokára miután neked írtam, eszembe jutott, hogy világosabban kellett volna magamat kifejeznem; lassan-

ként, a mint ezt egy másik levélben meg akartam tenni, magam is belezavaródtam; előre tudtam, hogy te nem leszesz meglegedve, habár nem egyenesen arra feleltél, a miben én különösen megütköztem, hogy (t. i.) ha az intervallum A és B között sohasem válhatik olyan kicsinynyé, hogy ne növekedhessék nagyobbra valamely állandónál, akkor A sohasem mehet túl a B -n, föltéve, hogy A végtelen. Most sehogyan sem akarok ebbe az anyagba belebocsátkozni, hogy levelem halasztást ne szenvedjen, reményilem, hogy nemsokára az egészet közölhetem veled. Mielőtt neked irtam, egy végtelen folyó képe nyugtatott meg engem, a hol az innenső oldalon egy szöveget tűztek ki. Azután még valamit próbáltam, most egy idő óta én sem foglalkoztam vele, úgy hogy nem vagyok benne a dologban.»

A jelzett toldulékot a göttingai párhuzamosak elméletéhez, melynek magyar fordítása e mű második részének 16—22. oldalain olvasható, Farkas 1808 december 27-ikén küldte el GAUSSNAK. «Úgy küldöm el neked ide becsatolva, a mint a karácsony éjszakáján, mikor a katolikusok a szomszédomban levő templomban a Megváltó születésének ünnepét ülték, kigondoltam és tegnap leírtam. Holnap jószágomra kell utaznom, nem érek rá, hogy átnézzem, ha most elmulasztom, lehet, hogy még egy év telik belé, vagy pedig megtalálom benne a hibát és el sem küldöm neked, a mint már százzal megtörtént, a melyeket, mikor feltaláltam őket, valódiaknak tartottam; de ezeket leírni nem volt kedvem, talán mert nagyon hosszúk, nagyon nehezek, nagyon mesterkélték voltak, de a mostanit azonnal leírtam. Te, mihelyt csak lehet, majd megírod nekem igazi ítéletedet. Ha sikerül, neki bátorodom meglehetősen felszaporodott okoskodásaim kiadására, ellenkezőleg nem is lesz kedvem a geometriához, és a világban sem emelkednének érvényre.»

Hogy levélváltásuk hosszabb időre megszakadt, annak bizonyára az volt az oka, hogy GAUSS ezúttal a válaszszal adós maradt. Csak 1816 április havában irt ismét Farkas GAUSSNAK, de levele persze ismét válasz nélkül maradt.

Az az axióma, melyre az 1807 december 18-ikáról keltezett levélben a dült betűkkel nyomtatott eme szavak czéloznak: «hogy (t. i.) ha az intervallum A és B között sohasem válhatik olyan kicsinynyé, hogy ne növekedhessék nagyobbra valamely állandónál, akkor A sohasem mehet túl a B -n», benne van mint az eltérés axiómája a Tentamenben, még pedig *A geometria általános vázlatának* 16. §-ában (e könyv második részének 101—102. oldalain), a hol Farkas tömör összeállításban mutatja be a parallelák elméletére vonatkozó sok évi vizsgálatait. Ugyanott egyszersmind János tér-tudo-

mányáról is beszél, a ki — a mint látni fogjuk — a *Tentamen* első kötetéhez csatolt *Appendix*-ben megmutatta, hogy a geometriának önmagában következetes rendszere a párhuzamosakra vonatkozó axióma nélkül is építhető fel, hogy tehát ez az axióma EUKLIDES többi feltevéseiből nem vezethető le. De ha el is ismerjük BOLYAI János *abszolút geometriájának* önállóságát, mégis jelentősége van annak a kérdésnek, vajjon — PRAFF kifejezésével élve — a XI. axióma nem «szimplifikálható»-e, azaz nem helyettesíthető-e olyan postulatumokkal, a melyek közelebb állanak a szemlélethez vagy különös egyszerű fogalmazásukkal tűnnek ki. Befejezésül tehát azokat a XI. axiómával egyenlő értékű axiómákat akarjuk áttekinteni, melyeket Farkas *A geometria általános vázlatának* említett 16. §-ában és az 1851-ben megjelent *Kurzer Grundriß eines Versuchs*-ben felállított.

Azokat a feltevéseket, a melyekre támaszkodva EUKLIDES XI. axiómáját bebizonyítani, és így az euklidikus paralellák elméletének alapját megvetni lehet, Farkas *A geometria általános vázlatában* a következő négy fajba osztotta be: *A hasonlóság, a helyzet, a quantitás és az eltérés axiómái.*

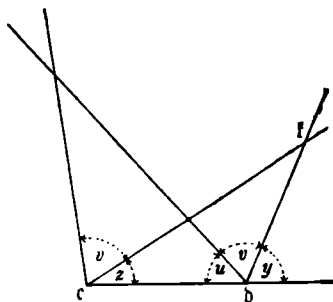
I. *A hasonlóság axiómái.* Már WALLIS 1663-ban az 5. postulatumot avval a másikkal pótolta, hogy minden háromszöghöz egy tetszés szerinti méretű vele hasonló legyen rajzolható és erre a javaslatra később CARNOT, LAPLACE, LEGENDRE és mások visszatértek; sőt SACCHERI azt is kimutatta, hogy elég feltételeznünk, hogy egyetlen olyan háromszög van, a melyhez egyetlen tőle különböző, de vele egyenlő szögű háromszög tartozik. Farkas a hasonlóság axiómáját abba a szemléletesebb alakba öntötte, hogy «egyetlen gömb sem különbözik más tulajdonságában bármely más gömbtől, mint nagyságában és helyében». Méltán jegyzi meg LOBATSCHESKY (1835) WALLIS javaslatáról: «Eleinte az ilyen feltevés ép oly egyszerűnek, mint szükségesnek látszik; de ha kutatni próbáljuk, hogy milyen fogalmaink vannak róla, honnan veszi eredetét, kénytelenek vagyunk ép olyan önkényesnek mondani, mint valamennyi többit, a melyre eddig jutottak.»

II. *A helyzet axiómái.* Farkas három ilyen axiómát állít fel; a harmadik nagyon körülményes, azért legyen elég, ha csak a két első idézzük.

1. «Bármennyire is növekedjék valamely egyenes, a belső szögek összege, melyeket vele két olyan egyenes alkot, a mely tőle ugyanannak a síknak ugyanarra az oldalára esik, folytonosan fogyva, nem válhatik kisebbé bármely megadhatónál, ha csak az a két egyenes nem metszi egymást.»

2. «Ha (a 2. ábrában) a z nem foglalja magában y -t, akkor $z+v$ sem foglalja magában $y+v-t$.»

Ezt a második axiómát Farkas a legegyszerűbbnek tartotta valamennyi feltevés közt, melyet ő hozott javaslatba, és ezért tanítványainak a marosvásárhelyi kollegiumban ezt adta elő. Belőle a XI. axiómára a következő meggondolás vezet: «Ha ugyanis (a 2. ábrában) $u+v < 2R$: akkor, ha ezeket a szögeket a b pontnál egymás mellé rakjuk, nevezzük a maradékot y -nak. Ha már mostan az y szög szárának valamely tetszés szerinti f pontjából egyenest húzunk c -ig; nevezzük azt a szöget, melyet fc a cb -vel alkot, z -nek, és rakjuk fel c -nél z felett a v szöget.



2. ábra.

Szembevetendő, hogy z nem foglalja magában y -t, és így (az axióma szerint) $z+v$ sem foglalhatja magában $y+v-t$. Ebből következik, hogy metszés jó létre, ha a belső szögek u és $v+z$, és még inkább történik ez, ha $v+z$ helyébe a kisebb v szöget tesszük.

A megelőzőből kitűnik, hogy a megvizsgált axióma kimondható ebben az alakban is: «Ha fennáll, hogy, ha bizonyos egyenes végpontjaiból kiinduló és ehhez bizonyos u és v szögek alatt hajló egyenesek egymást metszik, az ugyanazon egyenes végpontjaiból kiinduló és ehhez az $u+z$ és $v-z$ szögek alatt hajló egyenesek is metszik egymást (a mikor t. i. a belső szögeknek ugyanaz az összege tetszőleges más módon van elosztva): akkor fennáll a XI. axióma.»

III. A *quantitativ axiómák*. Elég lesz, ha e három egymással közel rokon axióma közül a másodikat idézzük.

«Semmi A -nak ninesen számtalan olyan teljesen elválasztott része, a melyek mindegyike teljesen egyenlő A -val.»

Véges A mennyiségekre nézve ez az állítás magától értetődő. A XI. axióma bebizonyításánál azonban csak úgy van neki haszna, ha végtelen nagy mennyiségekre, t. i. a végtelenbe kiterjedő területekre alkalmazzuk. A XI. axiómának bebizonyítását végtelen nagy területek összehasonlítása segítségével BERTRAND (1778) és LEGENDRE (1833) kísérelték meg. «Szükséges volna» — mondja LOBATSCHESKIJ (1835) — «hogy az ilyen bebizonyításokat a mennyiség fogalmának magyarázata előzze meg, a melyet a geometriában csak a mérésel kapcsolatban lehet megérteni, ha azonkívül még megbeszéljük, hogy milyen ismertető jelek alapján különböztethető meg a nagyobb a kisebbtől. Így pl. valamely görbe vonal határolta terü-

letet nagyobbnek tartunk olyan sokszögnél, melyet amaz egészen magában foglal, ellenben ennél kisebbnek, ha megfordítva ama területet a sokszög teljesen körülzárja, még akkor is, ha egyáltalában nem ismer-nénk módot e területek kimérésére. Ha azonban határtalan kiterjedésű területekről van szó, akkor itt is, mint mindenütt a matematikában, két végtelen nagy szám aránya alatt azt a határértéket kell értenünk, a melybe amaz átmegy, ha a tört számlálója és nevezője folytonosan növekednek. Azonkívül geometriai mennyiség alatt itt legalább is olyant kell értenünk, a melyet az egyenlőtlenség ismertető jelei szerint megítélve, megközelítőleg meghatározhatunk. E tekintetben BERTRAND bebizonyítása ép úgy, mint valamennyi többi, távolról sem elégíti ki a követelményeket, mert nem találunk bennük a területek kimérésére szolgáló eljárást, arról nem is szólva, hogy a területeknek először határoltaknak kell lenniök és azután határaiknak nagyobboldásával a végtelenbe növekedniök.»

IV. Az eltérés axiómái. Az egyetlen idetartozó axióma így hangzik :

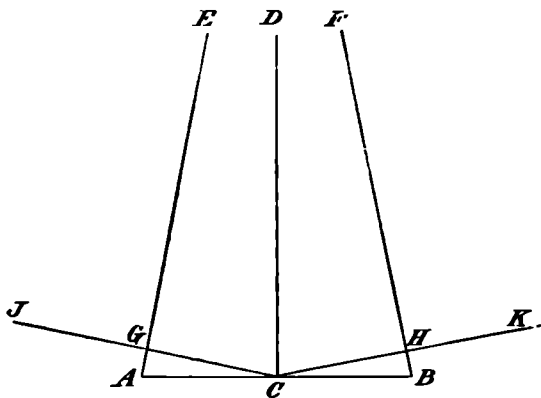
«Ha két egyszerű, egyenletes, mindkét felé végtelen, a síkban egymást metsző vonal nyílása (azaz a metszéspontjuknál levő szög) a t idő vége előtt mind a két oldalon ugyane vonalok alkotta valamely állandó szögnél nagyobb marad: akkor a t -t a végén határoló oszthatatlan időpontban az egyik nem ugorhatta át a másikat.»

A míg a két vonal metszéspontja a végesben marad, az axióma alkalmazása ellen nem lehet kifogásunk, de ha a metszéspont a végtelenbe távozik — és FARKAS bebizonyításában épen ez az eset forog fenn — KUMMER szerint mondhatjuk: «A végtelenben minden lehetséges.»

A *Kurzer Grundriß eines Versuchs*ban (1851) FARKAS a XI. axiómát olyan feltevessel helyettesítette, melyet talán jobban ismernek, mint bármely más matematikai alkotását: «Ha bármely olyan három pont, mely nincsen ugyanabban az egyenesben, mindig egy gömbfelületébe eshetnék, evvel be volna bizonyítva EUKLIDES XI. axiómája». (E könyv második részének 160. old.)

FARKAS feltevése egyenlő jelentésű avval, hogy három nem ugyanabban az egyenesben levő pont mindig valamely körhöz tartozik. FARKAS ebben találkozik GAUSSnak egy tanítványával, F. L. WACHTER-rel, ki 1817-ben megpróbálta, hogy a párhuzamosok elméletének felhasználása nélkül vezesse le azt a tételt, hogy a sík három nem ugyanabban az egyenesben fekvő pontján át mindig fektethető kör. Ha a bebizonyításnak ez a kísérlete hajótörést szenvedett is, mégis az az eljárás, melylyel WACHTER az ő tételéből a párhuzamosok elméletéhez jutott, megérdemli, hogy itt bemutassuk.

«Legyen valamely megadott, az A és B pontok határolta egyenes [3. ábra] a C pontban felezve és a C ponton át húzzunk egy második, az AB egyenesre merőleges CD egyenest. Az A és B pontokból az AB és CD egyenesek síkjában húzzuk az AE és BF egyeneseket, a melyek az adott AB egyenessel valamely hegyes szöget alkotnak. A C pontból bocsássuk az AE és BF egyenesekre a CG és CH merőlegeseket, melyek az előbbieket a G és H pontokban messék. Hosszabbítsuk meg CG -t és CH -t J -ig és K -ig, úgy



3. ábra.

hogy $CJ=2CG$, $CK=2CH$ legyen. Akkor a C, J, K három ponton át olyan kör fektethető, melynek középpontja, a mint a rajzból látszik, a CD egyenesnek metszéspontja az AE vagy BF egyenessel, [és ez az a kör], a melynek létezését szándékunk volt kimutatni.»

Helyes FRISCHAUFnak az a kijelentése, hogy valamennyi axióma közt, melyeket a párhuzamosak axiómájának pótlására javaslatba hoztak, a leginkább szemléletes az, hogy három olyan pontnak, mely nincsen ugyanabban az egyenesben, egy gömbfelületben kell feküdnie.

BOLYAI János nem sokkal atyja halála előtt, 1856-ban egy befejezetlenül maradt dolgozatában, melyben a *XI. axióma bebizonyításáról* értekezik, apjának a párhuzamosak elméletére vonatkozó vizsgálatairól olyan ítéletet mond ki, a melyhez lényegében még ma is hozzájárulhatunk. «Ő a dologhoz sokkal és hasonlíthatatlanul erőlyesebben fogott hozzá, [mint előzői], sőt majdnem azt lehet mondani, hogy minden lehetséges módot kimerített a nélkül, hogy ez által csak egy lépéssel is közelebb jutott volna a célhoz, mert — a mint ő maga igen helyesen mondja — a *Si paullum a summo discessit, vergit ad inum* itt is teljesen alkalmazható... De csalatkozik, ha itt magában a ∞ esetében a legcsekélyebb súlyt is helyezi annak lehetetlenségére, hogy a részek az egészszel egyenlők és egyáltalában valamely új vagy más axiómára gondol.»

VII. FEJEZET.

BOLYAI János ifjúsága (1802—1818).

BOLYAI János, ki 1802 deczember hó 15-dikén Kolozsvárt született, eleinte atyja birtokán, Domáldon nevelkedett. Az 1804. év április havában szülei Maros-Vásárhelyre költözködtek; de azért ezután is gyakran tartózkodtak a szép birtokon, különösen nyáron és szüretkor.

A fiú elméje már korán kezdett ébredezni és szokatlan matematikai tehetségének csirái csakhamar mutatkoztak. «Nem mindennapi gyermek» volt, kinek olyan gondolatok fordultak meg a fejében, mint a kis Jánosnak. «Mikor körülbelül három éves koromban beszélni hallottam arról, de minden közelebbi magyarázat nélküli, hogy a világnak, a mi alatt akkor csak a Földet értettem, nincsen vége, azt gondoltam, ha a Földnek, melyet a mélység felé a végtelenbe terjedőnek képzeltem, vége is volna, azaz, ha széle volna, legalább rajta túl mégis valami végtelen mélységnek, azaz üres térnek kellene lennie, és így a térről már magam alkottam magamnak valami fogalmat.» És apja 1807 deczember hó 18-dikán tele büszkeséggel írja GAUSSnak: «Játék közben megismerkedett az ég sok csillagzatával és a közönséges geometriai alakokkal meg más effélével. Fogalmait ügyesen alkalmazni is tudja. Például krétával magátol rajzolja belé a csillagok helyét a csillagzatokba. Egyszer, még a múlt télen egy pityókat vagdalt össze és elkiáltotta magát: „Hi TÁTI! mit kaptam; pityóka arcusnak pityóka sinussát” — és ez így volt valóban. Majd midőn falun megpillantotta a Jupitert, mondá, hogyan van az, hogy azt a városbelit innen is lehet látni: nagyon messze lehet. Máskor azt követelte tőlem, hogy három távoli helyet, melyeken ő megfordult, egyetlen szóval jelöljek meg; nem tudtam, és akkor azt kérdezte, vajjon az egyik a többiekkel ugyanabban az [egyenes] vonalban van-e és így sorjában; nó, — mondá — tehát háromszög és sok effélé. Nagy kedvvel metéli a papirost ollóval. Egyszer háromszöget vágott ki, derékszögű volt; akkor, habár a háromszögek fajairól soha semmit sem beszéltem neki, mondá, hogy ez olyan háromszög, a milyen a derékszögű négyyszög fele.»

Mindezeket játszva tanulta meg János; mert az óvatos apa a tudni-vágyó gyermeknek csak «célzásokat vetett oda». A tervszerű tanítással Farkas még a fiú kilencz éves koráig várt.

Okulva saját ifjúságának tapasztalatain és ROUSSEAU *Émilejének* befolyása alatt, melyet alaposan ismert, a fiú testi fejlesztésére különös gondot fordított Farkas, «hogy az erők egyensúlyban maradjanak, testvériesen együtt haladjanak, egyik se váljék zsarnokává a másiknak» (GAUSSHOZ 1803 febr. hó 27-ikén intézett leveléből). «Testét különösen gyakorlom, kis kapájával jól tudja megművelni a földet» (GAUSSHOZ 1807 decz. hó 18-ikán intézett leveléből). Később is szerette János a kerti munkát, gyönyörködött a labda- és bujdosdi-játékban, és feltűnt «a madárfészkek után való majom-ügyességű mászásával.»

Mikor János körülbelül hat éves volt, csak néhány utasítás szerint, majdnem észrevétlenül tanult meg olvasni. Egy évvel reá megkezdte a német nyelv tanulását. Kilencz éves korában atyja a gimnázialis tárgyak tanulására fogta, még pedig oly módon, hogy az első oktatást a szülei házában nyerte. A házi tanítókat Farkas a legjobb deákok közül választotta ki. János első házi tanítója VAJDA Dániel volt, a kitől SZILÁGYI József vette át a tanítást. A matematikai kiképezés vezetését Farkas magának tartotta fenn. János elbeszéli: «... a mi után nemsokára megtanultam EUKLIDES hat első könyvét. E mellett atyám csak annyit tett, hogy különösen a pont magyarázatánál megjegyezte, hogy az időnek ép úgy vannak rész nélküli részei, mint a térnek; például a 8. óra vége és 9. óra kezdete egy és ugyanaz [az ilyenfajta pont]. Később áttanulmányoztatta velem EULER algebrájának elejét, bezárólag a harmad- és negyedfokú egyenletekig. Azután átvettem VEGA matematikájának és DÖRTLER fizikájának nagy részét.» A fiú felvilágosuló lángesze egy pillanat alatt áttekintette valamely tétel bebizonyítását vagy valamely feladat megoldását; «mint az ördög» — beszéli el apja — «szökött elembe és sürgetett, hogy menjek tovább». Tizenkét és fél éves korában már a planimetriát, stereometriát és trigonometriát vette volt át és az analitikai geometriából a kúpszeleteket fejezte be.

Tizenkettedik évétől kezdve János a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium osztálytanításában részesült. E mellett hallgatta azokat az előadásokat is, melyeket Farkas a *deákok* számára tartott. Erről 1816 április hó 10-kén GAUSSNAK a következőt írja Farkas: «VEGANAK, (mely kollegiumi előadásaim vezérfonala) nemcsak a két első kötetét ismeri teljesen, hanem járatos a harmadik és negyedik kötetben is, szereti a differenciál- és integrálszámítást és ezekkel rendkívüli készséggel és könnyedén számol. Most nemsokára befejezi fizikai és chemiai

előadásaimat. Egy alkalommal [1816 febr. 22-kén] ezekből is felnőtt tanítványaimmal együtt igen dicséretes módon nyilvános vizsgálatot tett latin nyelven, a mikor részint mások ad aperturam kérdezték, részint pedig én néhány mechanikai bebizonyítást végeztettem vele az integrálszámítás segítségével a változó mozgásra, a ciklois tautochronismusára és más effélére vonatkozólag. Nem maradt mit kívánni való; a nemes egyszerűség, a világosság, a gyorsaság és könnyedség az idegeneket is elragadták. Gyors felfogású feje van, melybe sok fér bele és némelykor lángeszének felvillanásával egy pillantással megragadott több sort egyszerre tekint át; szereti a tiszta, mélyreható elméleteket és a csillagászatot.»

A tudományokban való kiképeztetése mellett Jánosnak a művészetekben való gyakorlását sem hanyagolták el; hiszen jól tudta Farkas, hogy a nemes örömöknek mily bő forrása fakad a művészetekből, hogy mennyi vigasztalást nyújtanak borús órákban. A hegedűt Jánosnak már hét éves korában adták kezébe. Kilencz éves korában már kottából is jól tudott játszani, és tíz éves korában klasszikus vonós-négyesekben az első hegedűt ő játszotta. Farkasnak a fia ifjú korára vonatkozó feljegyzései között ezt találjuk: «Tíz esztendő s korába componálva 's leírva találtam valami Adagio 's Allegrokat, mellyekbe mind volt valami, nem tsak gondolat, mélyetske érzés is», és SZILY Kálmán elbeszéli: «Már 12 éves korában oly kitűnő hegedűs volt, hogy a legnehezebb darabokat első látásra játszotta. Abban az időben adták talán elő az első operát M.-Vásárhelytt, melyen a zeneszerző is, ki vak volt, megjelent. Az első hegedűt egy százsz fiatal ember, a másodikat János játszotta. Előadás közben elszakad a primista hegedűjének egyik húrja; hirtelen kótát cserélnek s a gyermek első látásra úgy játsza a primet, hogy a vak compositeur, ki addig mind zúgolódott, felkiáltott: «bravo! most dominál a prim!»

A rajzolást János kilencz és fél éves korában kezdte meg, de nemsokára abbahagyta; e mulasztását később pótolta. Ellenben a költészet sohasem nyerte meg tetszését; ismételten kimondta azt a nézetét, hogy «a költői nyelv képtelenség».

Miután János az iskola utolsó osztályát, a logikait, elvégezte, 1817 június hó 30-ikán letette a *rigorosumot*, és evvel deákká lépett elő. A legjobb volt osztálytársai között; a matematikában és fizikában még a deákokon is túltett: A latinban is jól haladt; a reánk maradt latin vizsgálati dolgozatát nagyon dicsérték. Hogy a latin nyelvet mesterileg tudta kezelni az *Appendix* (1830) és a *Responsio* (1837) is mutatják.

Hogy abban az időben fiáról mit tartott Farkas, 1817 augusz-

tus 13-iki följegyzéséből tetszik ki, mely megérdemli, hogy egész terjedelmében közöljük.

«A' tudományok' 's különösen a' Mathezis tanulására nagy hajlandósága van. A' musikákba 's különösen a hegedübe virtuosus lehet. A' rajzolásra is van egy kevés hajlandósága. A' Poëzisbe nem vettem semmi hajlandóságát észre. Meglehet, hogy ezután lessz. A' nyelveket könnyen tanulja. Ezek mind természeti ajándékok.»

«Szép ítélő tehetsége van mind az emberek közt mind egyebekbe. Nem formátlan. Launicht, úgy hogy tanulásbeli kötelességét némelykor nem tellyesíti, némelykor igen tanul reggeltől estig, egészsége kárával is, mely hiba: *μυρδὲν ἄρα*. Némelykor igen hypocondriakus némelykor igen levis olyan okból is, a' mit más nem lát. Szereti másokat secirozni, úgy hogy ritka emberrel nem jő össze. Ez éretlenség. Némelykor engedetlen kivált az annyának, mely a' nevelés hibája. Mindazáltal megjobbithattya, ha akarja. Másokat nem rágalmaz, ha jot nem tud valakiről mondani, semmit sem mond. Nem hazug. Az igazságot nem engedi, a' mely nem prudentia. Szánakozo, a mikor nem segíthet is. Háládatos. Senkit hibájáért, nem utál. Jo szívé. Haragos a' mig elfelejti a' megbántatást. Nem fantlis.»

«Itt vannak hibák és joságok, az Isten adgya, hogy a' hibák egy két esztendő alatt légyenek ellenkezők, a' joságok pedig maradjanak meg.»

Már 1807-ben, azokhoz, a miket GAUSS barátjának, az öt éves János szokatlan matematikai hajlamáról ír, Farkas ezeket a szavakat teszi hozzá: «Ha nem csalóka a remény, 15 éves korában hozzátok fog utazni és a te tanítványod lesz; ha akkoriban egészséges leszek, elkisérem hozzád.» Közben azonban az ifjúkori baráthoz való viszonya lazult. Farkasnak 1808 december 27-kén kelt levele válasz nélkül maradt. GAUSS első sorban talán azért késlekedett az írással, mert elhibázottnak tartotta Farkasnak azt a kísérletét, melylyel a tizenegyedik axiomának 1804. évi állítólagos bebizonyítását helyre akarta igazítani; azután meghalt az első felesége, és bekövetkeztek a háborús idők zavarai. Farkasnak ez a hallgatás fájt, de azért nem kételkedett benne, hogy barátjának iránta való érzülete olyan maradt, mint a milyen «az ifjúkor virágos tavaszában» volt, és ragaszkodott ahhoz a gondolathoz, hogy fiát GAUSSHOZ viszi. János is, ki már akkor GAUSSNAK apja birtokában levő műveiben olvasgatott, osztozkodott atyjának «a göttingai matematikai kolosszus» iránti mély tiszteletében, és nem volt neki forróbb vágya annál, hogy GAUSS vezetése mellett szentelhesse magát a matematikának.

Ennek természetesen nagy nehézség állott útjában, melyet le

kellett küzdeniök. Farkas nem volt abban a helyzetben, hogy a szándékolt három évi göttingai tartózkodás költségeit fedezhesse. Szerény tanári jövedelme a háztartás költségeinek fedezésére is alig volt elég; ehhez még hozzájárult az is, hogy abban a nehéz időben, a nagy háborúk után csak rendetlenül, elértéktelenedett papirospénzben kapta fizetését. A magántanításból, a gazdaságból és a borkereskedésből eredő mellékjövedelmek is csak vékonyan folytak be. Ezeket még tetézte, hogy Farkas sohasem tudott a pénzzel bánni — a mint ő maga mondja — «rossz gazdálkodó» volt. Ha nemes pártfogói, különösen a KEMÉNY bárók és a TELEKI grófok nem törődtek volna vele, nyomorulttan belefulladt volna adósságaiba.

Nagy szerencséje volt tehát, hogy — a mint 1816 április havában BODORNak írja — «G. KENDEFFI Ádám önként a' fiamhoz azzal a' gratiával volt, hogy Göttingába GAUSShoz leendő felmenetelekor segítségét ígérte.» Hogy azonkívül az egyházi főtanács támogatását is megszerezze, elhatározta Farkas, hogy fiát egyelőre még a marosvásárhelyi kollegiumban tartja, hogy egy évvel a rigorosum után három kollegiumban, a kolozsvárban, a nagyenyediben és a marosvásárhelyben letegye a külföldi tanulmányútra készülő ifjaknak előírt nyilvános vizsgálatokat.

Most már azt tartotta: itl az ideje, hogy szándékát GAUSSsal közölje. Ez megtörtént a már eddig is említett, 1816 április 10-ikén kelt levelében. Fia matematikai tehetségét megdicsérvén, kéri barátját, hogy őt két év múlva hozzá küldhesse. «Három évig nálad szeretném tartani és, ha lehetséges... a te házában, mert tizenöt éves ifjút magára hagyni nem lehet és hogy nevelőt küldjek vele, túlmegy az erőmön, melyet a sok per gyengített. Magától értetődik, hogy feleséged ő nagyságát kártalanítanám. — Mindent elrendezhetnénk, a mikor hozzád megyek vele. Tekintettel erre a tervre, közöld velem leplezetlenül: 1° Nincs-e olyan leányod, ki akkor (reciproce) veszedelmessé válhatnék, természetes, hogy az ifjúságnak ezt a csatát meg kell vívnia, és csak kis része van benne az észnek, ha az elysiumi álmokból nem vak golyótól eltalált nyomorékokként ébredünk fel. 2° Egészségesek vagytok-e, nem-e szegények, meglegedettek-e, nem-e mogorvák? főleg feleséged ő nagysága kivétel-e a nemebeliei között? nem-e változékonyabb, mint a szélkakasok? nem-e olyan kevésbé előre kiszámítható, mint a barometer változásai? 3° Valamennyi körülményt összefoglalva, könnyebben mondhatod nekem egy szóval, hogy nem lehetséges; mert majd sohasem kételkedem abban, hogy nem a sziveden mult.»

Apa és fiú türelmetlenül várták a választ, melynek döntenie

kellett János jövője felett. Hetek és hónapok multak el, de a várvárt levél nem érkezett meg Göttingából.

A mint BEDÖHÁZI megjegyzi, szemére vetették GAUSSnak, hogy régi barátjának levelét még válaszra sem méltatta. BEDÖHÁZI úgy véli, hogy ennek oka vagy abban keresendő, hogy GAUSS akkoriban új csillagdájának berendezésével volt elfoglalva, melybe 1816 őszén költözött be, vagy pedig GAUSS családi körülményeiben. GAUSS 1810 augusztus 4-ikén újból megnősült és a két házasságából származott négy gyermek volt a házánál, 10 évestől lefelé egészen két évesig; az ötödik, az 1816 június 19-dikén született legifjabb leánya, Teréz pedig útban volt. «Aztán végül is» — mondja BEDÖHÁZI — «bármily forrónak is tűnik fel kezdetben a barátság, oly hosszú időn át a személyes érintkezés hiányában csak hidegül az.» A mióta az 1816 április 10-kén kelt levél szó szerinti szövege ismeretes, melyet BEDÖHÁZI még nem használhatott fel, az előbbiekhöz hozzájárul még egy másik ok is. «Nem annyira GAUSSnak magatartásán» — nyilatkozik SCHLESINGER — «mint inkább azon, már a naivságon is túlmenő módon kell csodálkoznunk, a melylyel Farkas saját tervének pro és contráját GAUSS családjának bevonásával tárgyalja.»

Hogy János maga miképen ítélte meg GAUSS viselkedését, egyik följegyzéséből tűnik ki, melyet nemsokára atyja halála után (1856 november havában) készített. «Együttal olyan eseményt említek fel, mely gyermekkoromban megtörtént. Minthogy a matematika iránt különös hajlandóságot mutattam, atyám GAUSSnak ajánlott, hogy engem esetleg magához vegyen, hogy ott az ő közelében és környékében képességeim annál jobban fejlődjenek, mely alkalommal atyám egyben egy nagy, szép tájékpipát küldött neki ajándékba. Valószínű azonban, hogy GAUSS az ajánlatot sem elfogadni, sem visszautasítani nem akarta — az elsőt, tekintve a tanítástól való idegenkedését, nem csodálom, minthogy az én csekélységem is, különös eseteiktől eltekintve, végtelen idegenkedéssel viseltetik iránta, az utóbbi pedig, t. i. atyám kérésének megtagadása viszonyukat nyomasztóvá, vagy legalább kényelmetlenné tette volna — szóval GAUSS jobbnak látta, hogy ettől az időtől fogva a válaszszal adós maradjon és folytatta a hallgatást egészen 1832 tavaszáig [márczius 6-ikáig, a mikor... és csak azután fejlődött új levélváltás vagy levélbeli érintkezés a két kolosszus között. BOLYAI Farkas teljesen egyenlőrangú GAUSSsal. Mindent összevéve, egyetlen halandó sem lehet tökéletes. Farkas munkássága sem kevésbé fontos, és előnyösebbnek tartom, hogy inkább az utóbbinak vezetése alatt álltam, mint a GAUSSé alatt, mert GAUSS sohasem csepegtethette volna belém a matematika, és még kevésbé a

filozófia iránti tiszta lelkesedést, és egyáltalában nem lett volna képes önképzésemnek [nekem] legkedvesebb és legjobb részéhez úgy járulni hozzá, mint BOLYAI Farkas, részben egyes, bár munkáinak 1829-ben történt megjelenéséig csak ritkán velem közölt eszméivel, és még inkább az ezek által felidézett saját eszméimmel.»

Miután az a terve, hogy Jánost Göttingába vigye, hajótörést szenvedett, arra gondolt Farkas, hogy őt, kit «a matematika áldozatának szentelt», a pesti vagy a bécsi egyetemre küldi. Ámde e két főiskola egyikén sem működött olyan matematikus, ki Jánosra hatással lehetett volna, és a szabad főiskolai élet veszedelmeinek sem akarta kitenni fiát. Így tehát végre arra határozta el magát, hogy Jánost a katonai pályára adja, a melyhez ő maga, mint ifjú nagy mértékben vonzódott; még pedig azt határozta el, hogy a bécsi cs. k. mérnök-akadémiára küldi, mely a bel- és külföldön kitűnő hírnévnek örvendett. Úgy vélte Farkas, hogy ebből nemcsak a szép haladás reménye fakad fia számára, hanem módja is lesz neki arra, hogy tovább képezhesse magát a matematikában, mely az akadémia tantervében a főhelyet foglalta el.

Az 1856. évi följegyzéseiben, a melyekből az imént egy részletet közöltünk, János keservesen panaszkodik e felett az elhatározás felett «Az illő tiszteletet megadva az ottani mérnök-akadémiai nevelésnek, mégis a mellett a tehetség mellett, melyet bennem felfedezett, reám nézve czélszerűbb és kívánatosabb lett volna, hogy otthon tartson magánál és maga gondoskodjék az én nevelésemről, hogy a matematikai tudománynak, a melyhez mindig különösen és ellenállhatatlanul vonzódtam, még inkább és következetesebben szentelhessem magamat. Én legalább, ha szerencsém lett volna ilyen fiúhoz, nem távolítottam volna el magamtól.» E szavakból a szemrehányás mellett a fiú megható bizalma tetszik ki az apa iránt, a kinek valóban matematikai kiképzésének legjavát köszönhet.

A bécsi mérnök-akadémia szervezetét és tantervét részletesen majd csak a következő fejezetben ismertetjük; itt csak azt jegyezzük meg, hogy hét évfolyama volt, melyeket alulról felfelé az I—VII számokkal jelöltek. A szabályzat szerint a növendékeknek 11—12 éves korukban kellett belépniök, de felvételi vizsgálat alapján, a melynél főleg a matematikai ismeretek kipuhatolására helyeztek súlyt, idősebb fiúkat is vettek fel.

Még az 1817. év nyarán kezdte meg Farkas fiának az akadémiára való előkészítését, hogy ugyanannak az évnek őszén az V. osztályba beléphessen. Ez gyorsan ment; mert János a matematikából többet tudott, mint a mennyit a IV. osztályban végeztek. A fő-

dolog az volt, hogy vegye át HAUSER matematikai tankönyvét, melyet a VEGA helyett használtak az akadémiában, és hogy a német nyelv használatában gyakorolja magát, a mely nyelven kellett a vizsgálatot letennie. A marosvásárhelyi collegium felső osztályaiban ugyanis körülbelül 1842-ig csak latinul beszéltek.

Igazi gondot Farkasnak azonban más körülmény okozott: az t. i., hogy honnan szerezzé azt a meglehetősen sok pénzt, mely fia akadémiai tanulmányai költségeinek fedezésére szükséges, és e gondja még fokozódott, mikor egyik bécsi ismerősétől megtudta, hogy az akadémiába csak a IV. osztályig vesznek fel új tanulókat; mert a katonai jelleg elsajátítására a legalább is négy évi kiképeztetést feltétlenül szükségesnek tartották.

Igy történt, hogy János a kiállott rigorozum után, mint filozófus deák tovább látogatta a marosvásárhelyi collegiumot.

Hogy a kettős csalódás Jánost elkedvetlenítette, érthető és ez részvétet kelt iránta. Aggasztó tünet volt azonban, hogy már akkor kezdtek jellemének olyan vonásai mutatkozni, melyek később végzetessékké váltak reá nézve; mindenekelőtt hevesessége és szenvedélyessége, a mely alkalomadtán rettentő dührohamokban tört ki. Kétségkívül a családi körülmények ezt előmozdították. Szüleinek egyetlen gyermeke volt; kis nővére, ki 1805-ben született, még 1807 előtt halt meg. Betegeskedő anyja, ki bálványozó szeretettel csüngött fián, minden szeszélyének engedett és elkényeztette. De úgy látszik, hogy az apa sem birt a fiúval, ki épen akkor erős kézre szorult volna.

•Előadásra csak nagy ritkán ment. A téli vizsga közeledtével a történelem akkori tanára, ANTAL János, később reform. püspök, elpanaszolta az atyjának, hogy János mindig csak ostáblázik, előadásra nem jár. Az apa elővette a hanyag fiút, megdorgálta — mit ő számba sem vett; — egyszer-kétszer átolvasta a cursust s felment a vizsgára; eminenter felelt, akár hol és akár hányszor szölitették föl, mindenütt otthon volt. A következő félévben is folytatta az ostáblázást; tanára sem szólt, s a vizsgán megint jól ment minden. (SZILY Kálmán).

Végre sikerült Farkasnak fia számára a collegium Kolozsvárt élő főgondnokának, gróf KEMÉNY Miklós támogatását biztosítani. Gróf KEMÉNY Miklós elvállalta, hogy az akadémiai négy éven át a díjakat ő fizeti. Ez nem volt kevés. Az első felszerelésért 225 forintot kellett fizetni és azonkívül évenként 1000 forintot. Különben már egy évvel János felvétele után az évi díjat 880 forintra szállították le és a további három éven át ez a díj változatlan maradt.

Az 1818. év augusztus havában János elbúcsúzott a hazától és

Bécsbe utazott; úgy látszik, hogy pártfogója, gróf Kemény Miklós vitte őt magával.

A szülők nehéz szívvel bocsátották el egyetlen fiukat «Itthon ne maradjon», — mondá anyja — «de ha elmegy, meg fogok örülni.» Hogy anyja milyen bensőséggel ragaszkodott fiához, kitűnik néhány fennmaradt sorából, melyet Jánoshoz intézett. «Oh Édes Fiam! nem mindenkor van az embernek kedve sok dologhoz, de hozzá kell szoknunk jó idején azt tennünk a' mihez telyeséggel nints kedvünk... tavasz süt ha rollad jót hallok; örökös tél borul előmbe az ellenkező esetben.»

Zsuzsánnának ama sejtelve nagyon is hamar vált valóvá. Már 1819 június havában írja Farkas Bodornak: «A' feleségemet el-nyomta a' hysterika, az a pokoli burján, melynek még leánykorába megismerhettem volna a' tsiráját, ha a Cocytus partjai Botanicájába járatos lettem volna — meg nőtt öszre horrende, kertésze jó volt (tudod ki a' Mater) aëre, földje, szegénység, fatumok nem halálos, de rosszabb a' halálnál 's tébolyodástól félti Szottyori [az orvos].»

A szerencsétlen asszony lelke mindinkább jobban elborult. Az 1821. év augusztus havában azt az óhajt fejezte ki, hogy ifjúsága paradicsomát, Domáldot, szeretné még egyszer látni. «Kivitem 's vissza is hoztam nagy bajjal: ott sok szomorúsággal elég édes óráink voltak: egy része a' kertnek meg meg-hajolva fárad az áldás alatt, más helyt sűrűségbe kigyozó utak, patak, viz-esések körül köre, mintha egy havasi erdőbe volna az ember — remete gunyhó egy viz-esésnél, kő asztal; ott ebédeltünk hárman, a' János kitett képivel, körül kereken a' Jánossal egyidejű nyirfák az égbe emelkedő fejeikkel — 's egy szép kis lyánka fürödött a viz-esésnél meztelen, kis még el nem tsalt Eva, 's mi az eset után még egyszer a' paradicsomba» (Az 1821 szept. 3-kán Bodorhoz intézett levélből).

Zsuzsánna nemsokára ezután, 1821 szeptember 19-kén meghalt. «Számptalan sok szép érzései 's hosszasan egymásra ömlő szép beszédei — versei — szép Szent éneklései — 's nagy szenvedései, mikor eszembe jutnak; lelkemnek minden fájdalmas hurjai jajgatnak utánna — Alig hiheted, 's magam se hittem volna mint fáj nekem... Szépen ki derülve 's tsendes bátor lélekkel ment a' halállal szembe, 's mint egy szent a' nyenykapujához érkezve olyan örömmel mosolygott a' mellyet semmi földi nem hozhat elé . 's minden rándulás nélkül tsak verklärte lett. Meg hagyása szerint Domáldra vittem, 's oda tettem a' hova ő ki mutatta volt, ott helybe szép beszédekkel — a' kertembe van egy magas hegy, 's annak közepén van egy szép hely... meg vitta a maga harczát győzedelmesen 's meg koszoruzva

nyugszik a' föld anyai karjai közt — maga is egy (szerentsés szeren-
tsétlen) Anya (sok tekintetben) fiaért való önnön áldozat, kinek a'
végzése a' maga gyermekét, mikor örömet ér, meg ölelni nem enged-
ték Mikor itt a' nép egybe volt gyűlve, akkor jutott eszembe,
a' fia képét az övé alá szegeztem reszkető kezekkel; az előtt mikor
senki se volt, az anyja behunt szemei elébe tartottam 's egybe tso-
koltattam — most az Anya leánykori képére tettem, a szűz karján
a fiu; ez az én oltár képem mely előtt én sokszor könnyekkel áldo-
zom.» (Farkasnak 1821 okt. 10-kén Boborhoz intézett leveléből.)

Megható gyöngédséggel értesíti Farkas a fiát az anyja elhunytá-
ról. Két könnyét hullatva, melyeknek nyomai a papiroson is látha-
tók, írja: «Sird te is ide a te könnyeidet, mert meg érdemli ő azo-
kat, hogy az enyémeikkel egybe szakadva folyjanak. Alul azon a szép
napfényen, melyen ő most mosolyog, de ha szeretted ötet tsak annyit
sirj, a' mennyit ő kívánt, hogy a férfiui erősség a könnyekbe fel ne
olvadjon 's pályafutásod tüze meg ne alugyék Kevés örömet
vesztek azon szenvedésekhez képest, melyektől meg szabadult 's ki
tudja még mik várták — Valamikor egy boldog órát ad az ég, min-
denkor fájni fog hogy vele meg nem oszthatom; de ki potolják azon
sok élet kedvetlenségei és terhei, melyeket örvendek, hogy ő nem
szenvedi. Te pedig, bárhogy az fáj, hogy el-vesztetted az ő hozzád
volt szeretetét itt a' földön, gondold, hogy reám maradt az, marad-
jon a te hozzá volt szereteted is reám! . nyugodj meg az örök
rend folyásába, adj egynéhány könnyet Édes Anyád megnyugodott
porainak, 's folytasd férfiui munkán pályafutásodat, hogy nem sokára
ugy ölelhesselek meg, hogy csak az fájjon, hogy miért nints Édes
Anyád is ott.»

VIII. FEJEZET.

BOLYAI János a mérnök-akadémián (1818–1823).

A bécsi cs. k. mérnök-akadémiának rendeltetése főleg az volt, hogy a műszaki csapatok számára derék tiszteket képezzen; ámde ilyenekül csak legkiválóbb növendékeit alkalmazták, míg a többieket a sorhadhoz osztották be. Ezt az akadémiát az a dicsőség illeti, hogy belőle hírneves vezérek, érdemes tábornokok, hősiek tisztek és kitünő várépítők tekintélyes számmal kerültek ki.

A mérnök-akadémiának Bécs székes fővárosban való felállítását SAVOYAI JENŐ javaslatára III. Károly 1717 december hó 24-én kelt döntésével határozta el. Az akadémia 1869-ig állott fenn, a mikor helyette és az ugyanakkor megszűnt tüzér-akadémia helyett a mödlingi cs. és k. katonai műszaki akadémiát (k. u. k. technische Militär-Akademie) állították fel.

Az 1798–1851 években az akadémia, a savoyai lovag-akadémia Ob der Laimgruben levő épületében volt elhelyezve, a hol most a Stiftgasse-ban a cs. és k. hadi levéltár (k. u. k. Kriegs-Archiv) van. Hét évfolyama volt; ezeken kívül volt még egy külön osztálya ama növendékei számára, kik az intézet sikeres látogatása után mérnök-tiszthelyettesi (Ingenieur-Corps-Cadett) kinevezésben részesültek.

A tanítás tárgyai a következők voltak: matematika, német nyelv, latin nyelv, franczia nyelv, cseh nyelv, szép- és helyesírás, levelezés és ügyiratok, világtörténet, földrajz. Ezekhez járultak a műszaki tárgyak: szabadkézi rajz, helyszínrajz, geometriai és perspektivikus rajz, erődítményi és építészeti rajz. A test fejlesztésére szolgáltak a vívás, a táncz és a lovaglás. Ezeken kívül, de csak a nyári hónapokban, valamennyi osztályban a legfelsőbb osztályok növendékeinek vezénylete mellett katonai csapatgyakorlatokat is végeztek, a két legfelsőbb osztályban pedig a katonai fegyverfogásokat gyakorolták.

A tanítás tárgyai között a főhelyet a tiszta és alkalmazott matematika foglalta el. A matematikai tananyag volt a III. osztályban: arithmetika és algebra; a IV. osztályban: egyszerű geo-

metria, stereometria, nivellálás és a sík trigonometriája, mérő-asztali felvételek, gömbi trigonometria; az V. osztályban: kúpszeletek, magasabb fokú egyenletek megoldása, a differenciál- és integrálszámítás elemei, matematikai földrajz; a VI. osztályban: a szilárd és cseppfolyós testek mechanikája; a VII. osztályban a matematika tanítása megszűnt és helyébe a következő tárgyak léptek: a taktika általános alapelvei, erődítéstan, megerősített helyek támadása és védelme, földalatti erődítmények és földalatti harcz, polgári építészet, víz-, út- és várépítészet.

A tanításban követett eljárásra vonatkozólag az igazgatónak, BOURGEOIS tábornoknak, 1803 április 20-ikáról keltezett igazgatói jelentése a következő adatokat tartalmazza, melyek mély belátásról és szabadelvű felfogásról tesznek tanúságot. «A tudományos tanításban az analitikus módszert fogadtuk el, mely leginkább fér hozzá az értelemhez és a fogalmak összekapcsolására tanít. Törekvésünk az, hogy az előadott tantárgyakból biztos magyarázatokkal tiszta fogalmakat nyújtsunk a tanulónak, és arra tanítsuk meg őt, hogy feltételezett tételekből és igazságokból helyes következtetéseket tudjon levonni. Gondunk van rá, hogy következtetéseiben ne ugorják át közbeeső tételeken, és arra törekszünk, hogy ép úgy, mint tulajdonképeni matematikai ismeretekre, geometriai észjárásra is tegyen szert; mert az, ki geometriai módon tud következtetni, magában a tudományban sem marad el. Ez az oka annak, hogy keveset vagy épen semmitsem tanulnak könyv nélkül, hanem arra szorítjuk a tanulót, hogy saját előadása alkalmával, a mennyire csak lehetséges, más kifejezéseket vagy ábrákat használjon mint tankönyve, a mely eljárás mellett jobban ismerhető fel, vajjon valódi értelmében és terjedelmében fogta-e fel a tárgyat. A tanítás e módszerét nem csak a matematikai tudományokban, hanem az egész többi oktatásban is követjük, vagy pedig, a mennyire a tantárgyak azt megengedik, megközelítjük.»

BOURGEOIS tábornok 1811-ig volt az akadémia igazgatója, utódja gróf NOBILI altábornagy volt. Minthogy 1819-ben, a mikor BOLYAI JÁNOS, az akadémiába belépett, a tanári testület nagyrészt olyan férfiakból állott, kik még BOURGEOIS alatt szolgáltak, feltehető, hogy ott akkor is még mindig ugyanaz a jó szellem uralkodott, mint BOURGEOIS idejében.

A matematika, a katonai tantárgyak és a helyszínrajz tanítói a mérnök-kar kiváló tisztjei voltak; a taktikát a sorhad egy oda rendelt tisztje adta elő. A többi tárgyak tanítására «polgári» tanítókat alkalmaztak.

A növendékek egyenruhát viseltek és bent laktak az intézetben;

a tanítás ideje a következő órákra terjedt ki: d. e. $7\frac{1}{2}$ órától $11\frac{1}{2}$ óráig, d. u. 2 órától 6 óráig és 7 órától 8 óráig. «Hogy a szellemi erőket túlságosan ki ne fárasztjuk, a mindennapi tanítás beosztásánál gondot fordítottunk arra, hogy az absztrakt tárgyakra reggel kerüljön a sor, és hogy más, kevésbé nehéz tárgyakkal váltakozzanak. A délutánt leginkább a rajzolásra és a reggel tanultaknak ismételtesére fordítjuk. D. e. $11\frac{1}{2}$ —12-ig, azután 1—2-ig és este 6—7-ig, üdülnek a növendékek. Ebben az időben az ifjúság bármely kedvére való játékok tetszése szerint űzhet, kivéve az olyanokat, a melyeknél megsérülhetnének. Valahányszor az évszak és az időjárás megengedik, az ifjúság ezt az időt a szabad levegőn, a kertben tölti... A fegyelmet pontosan kezeljük, de nincs benne semmi szolgál, és az ifjúságot a szükséges voltáról kioktatjuk... Egyébként csinálhat az ifjúság bármit, a mit a házirend nem épen parancsol, de el sem tilt, és a mi nem ellenkezik az illemmel és a jó erkölccsel».

A növendékekkel való bánásmódra irányadó az az elv volt, hogy az ifjak közt más különbséget nem szabad tenni, mint a melynek alapja a jobb haladás a tanulmányokban és a jobb magaviselet. Tisztte való kineveztetésre a cs. k. udvari hadi tanácsnak (k. k. Hof-Kriegsrat) csak olyan növendékeket ajánlottak, kik szorgalmukkal és magaviseletükkel erre érdemeseknek mutatkoztak, és alig fordult elő olyan eset, hogy az ajánlottak közül valamelyik e megtiszteltetésre méltatlannak mutatkozott volna.

Az akadémia legfelsőbb vezetése egy kiváló férfiúnak, János főhercegnek, I. FERENCZ király öcsésének kezébe volt letéve, ki ezt az állását legkevésbé sem tekintette tiszteletbelinek, hanem atyai szívvél karolta fel az akadémiкусok ügyeit. Ő a neki alárendelt intézeteket: a mérnök-akadémiát és a bécsujhelyi hadapród-akadémiát magas fokú virágzásnak indította.

Jánost 1818 augusztus 24-ikén vették fel az akadémia IV. osztályába. Nagy megnyugvással vett erről tudomást Farkas. «Örömmel értettem» — írja fiának — «hogy már bé vagy az új kertbe ültetve; adja Isten, hogy foganj meg, az ültetéssel nemesedj, mint a' plánták szoktak, nőjj magasan fel erről az alattvaló földről az égre, 's térj vissza valaha onnan szelid árnyékkal 's jó gyümölcsökkel arra a' földre, a' honnan felnőttél».

A felvételi vizsgálat alapján János a hatodik helyre került. Valószínű, hogy csak rövid idővel a vizsgálat előtt dölt el, hogy Bécsbe megy, úgy hogy nem maradt elég ideje mindazoknak a házagoknak betöltésére, melyeket a reá nézve nem igen szerencsés

1817/18. év okozott. A következő osztályban, az ötödikben, János már a második volt. Németül olyan jól tudott, hogy az ezen a nyelven való tanulás nem okozott neki nehézséget. Ellenben gyakorlatlan volt a rajzolásban, mely szakra tekintettel a növendékek jövőre hivatására nagy súlyt helyeztek az akadémiában. De ebben a tantárgyban is nemsokára szépen haladt. «A' fiam küldött le két kötet rajzolatot: reménységim felett jók; fejek, kezek, lábak, egész testek, de csak contour. Összel ígérte, hogy küld straffirozottakat 's granirozottakat is». (Farkasnak Bodor-hoz 1819 szept. hó 3-kán intézett leveléből).

Nagyobb nehézséget okozott Jánosnak a katonai fegyelem és alárendeltség megszokása. Az apa nagyon is jól ismerte fiát, midőn nyomatékkaal inti: «Tsak a' másokhoz való szelidséget, meg-betsüllést, felsőbbekhez való engedelmességet és azt a' Modestiát ajánlom, mely a' tudosnak olyan ékessége, mint az ifjunak a' szemérmetesség. Az indulatokon tanulj uralkodni, hogy az okosság világa mint a' nap süssön a' fellegeket tornyozó szélvésznek felett». A felügyelő tisztek egyike, HALÁSZ Gedeon utász-százados, kinek figyelmébe őt gróf KEMÉNY ajánlotta, pártfogásába vette és átsegítette a kezdet nehézségein.

Az 1820. év elején az akadémia csendes munkáját nehéz zavar akasztotta meg. Már az 1819. év karácsonyakor az V. osztály, melybe János járt, és a VI. osztály elkeseredett gyűlölettel teltek el egymás iránt; a tanulók azonban a VII. osztály közbelépésére ismét kibékültek. Ámde a helyreállott béke nem vezetett jóra; mert a most összebarátkozott régi ellenfelek erőszakos csínyt követtek el, mely az erélyes beavatkozást tette szükségessé. Ugyanis egy árkász-altsíztet, ki nyers modorával valamennyi növendék haragját vonta magára, tettelesen bántalmaztak és megkínóztak. Az igazgató, gróf NOBILI, ki a felbujtókat méltán a VII. osztály tanulói között sejtette, avval fenyegette ennek az osztálynak a növendégeit, hogy egyiküket sem fogja a tisztí állásra ajánlani. Erre egyik növendék HALÁSZ felügyeletes kapitánytól követelte, hogy az igazgató vonja vissza fenyegetését. Mikor ezt a kívánságot visszaautasították, január 21-ikén a legtöbb növendék lázongva hagyta el az akadémia épületét és még egy fogságban levő bajtársukat is erőszakosan kiszabadították.

Ezek a sajnálatos események, melyek egyedül állanak az akadémia történetében, kinos feltűnést keltettek Bécsben. János főherceg azonnal a legnagyobb körültekintéssel és erélyvel lépett közbe. Tapintatos fellépésével és személyiségének nyomatékával képes volt a növendékeket visszatérésre bírni és az izgatott kedélyeket lecsillapítani;

a hol pedig szüksége mutatkozott, a szigorú büntetés alkalmazásának sem állott útjában. Április 27-ikén egy olyan intézkedést hajtottak végre, a melyet már régen elhatároztak, de eddig szándékosan elhalasztottak. Gróf NOBILI-t elbocsátották és helyébe báró HERZOGENBERG vezérőrnagyot nevezték ki. Az új igazgató vaskezü ember volt. Gondoskodott róla, hogy a növendékek éjjel-nappal folytonos felügyelet alatt álljanak. Az engedélyt, hogy a növendékek vasárnap kimenjenek és künn ebédeljenek, szűkebbre szorította; fiatalabb növendékeknek nem volt szabad kíséret nélkül az intézetet elhagyniok. Sőt 1820 szeptember havában, a szünidőben egyetlen növendék sem kapott szabadságot a hazamenetelre.

Úgy látszik, hogy János az 1820. évi «zavargásban» nem vett részt. E mellett mindenekelőtt az a körülmény szól, hogy Farkas 1820 április 4-ikén kelt levelében kéri Jánost, hogy JÁNOS főherczegnél járjon közbe az ő érdekében, t. i. hogy terjeszsze elő a főherczegnek azt a kérését, hogy őt a nagyszebeni erdő-inspektori álláshoz segítse. Ugyanebből a levélből egyszersmind kitetszik, hogy már az 1820. évi április előtt olyan esemény játszódott le, mely Jánosra nézve nagy jelentőségű volt. Mikor JÁNOS főherczeg — a mint SZILY Kálmán, BOLYAI Gergely feljegyzései alapján elbeszéli — meglátogatta az akadémiát, bement János osztályába is. János gyorsan kidolgozta a tanító által neki kitűzött feladatot, azután belekezdett a következőbe, és így folytatta. A főherczeg bámulatba ejtve a fiú lángeszétől, félbeszakította őt és azt mondta a tanítónak: «Ennek a fiúnak keze alá kell adni a többieket is, mert többet tud az egész osztálynál». Ennek a kijelentésnek megértésére meg kell jegyeznünk, hogy akkor a matematikai tanításban különös eljárás volt szokásban: t. i. az osztálytanítás mellett a növendékek kölcsönösen is tanították egymást, még pedig úgy, hogy a legtehetségesebb akadémikusok voltak a «korrepetitorok.»

«Kevéssel utóbb» — beszéli el SZILY — «erdélyi mágánások voltak fenn Bécsben a főherczegnél kihallgatáson. A főherczeg elbeszélte nekik, hogy milyen zseni egy fiú van Erdélyből az akadémián, s kérdezte tőlük, hogy ismerik-e az apját? Nemcsak hogy ismerték, de nagyon jó emberei is voltak. Elmondták, hogy az apa is milyen lángész. A főherczeg azt izente tőlök az atyának, hogy a fiában nagy öröme van, s ha különben jól viseli magát, nagy előmenetelre számíthat.»

A következő két esztendő a csendes és eredményes munka éveit voltak. János a VI. és VII. osztályban is a második volt. Az 1821. év márczius havában írja Farkas BODOR-nak. «A' fiamról jókat hallok.

A' rajzolásba is jó most, belé jött; a' Musikába tsak egy van valamivel jobb, 's az is a Bétsi első hegedűstől MEISELERTől veszen per 5 rhf. órát, a' fiamnak per se nints módja órát venni, hanem az a' nállánál valamivel jobb vasárnapon ki-viszi magával MEISELERhez, 's még egy negyedikkel a' legszebb Quartettekét tsinálják; ez neki költség nélkül jó gyakorlás. Tanulásra és talentomra nézve distingválják a' Generalis 's 'a többi tisztek és Professorok, bizonyos datumokból tudom».

Ez a levél mutatja, hogy Jánost az apja csak szűken láthatta el pénzzel. Farkas akkoriban mind jobban eladósodott és fiának csak nehezen tudott hébe-korba 10—20 forint zsebpénzt küldeni. János bizonyára már akkor megtanulta, hogy kevésből beérje, a mi később javára vált. Szép bizonyossága a rokonérzésnek, melyet János maga iránt tudott kelteni, az, hogy hajdani házi tanítója, SZILÁGYI József, szegény ember létere két év alatt 40 rhforintot küldött neki. De más oldalról is kellemes támogatásban részesült János. Az 1821. év július 15-ikén közli Farkas Bodorral: «Lengyel írja, hogy G. Kendeffi Adam olyan jó volna, hogy a' fiam számára méltóztatott a' Magyar Országai Arendájából 250 Rhfl. applacidálni... ez a pénz különösen jókor jött, mikor éppen két órával azelőtt vettem levelét Jánosnak, melyben írja, hogy az ő Classisából mind rég lovagolnak, egyedül Ő nem 's erőssen fatalis dolog, hogy nem lehet kintsinálni; még a télen megirta volt, hogy a Generalis maga felhivatta volt mikor meg a' sor ötöt nem ütötte, 's azt mondotta, hogy nagyon szeretné, ha a' szülei azon kis áldozatot megtennék, 's az akkori lovaglói vacantiára ő menne — meg írta volt akkor, mennyi 1 esztendőre a' kis áldozat, nints annyi a' mennyit G. Kendeffi applacidált».

Ha szigorú is volt az intézet rendtartása, a jó társasággal való érintkezést Jánosnak mégsem kellett nélkülöznie. Gróf KEMÉNY Miklós Bécsben tartózkodása alatt szívesen fogadta őt, de apjának más ismerőseinél, SZENT-GYÖRGYI Imrénél, BODOKI Sámuelnél is szokott megfordulni, kik mint magas tisztviselők Bécsben laktak. Gyakran járt gróf TELEKI Elek házához is, a hol 1817 óta egyik földije, Szász Károly volt a házi tanító. Szász Károly, ki 1798 január havában Vizaknán született, a nagyenyedi kollegiumot látogatta és azután jogi tanulmányokat végzett. Az 1820. év végén mint Nagyenyedre meghívott jogtanár visszatért hazájába, Jánosnak Szász Károlylyal való érintkezéséről részletesebben a X. fejezetben lesz szó. Itt csak annyit említünk meg, hogy Szász Károly 1848-tól kezdve Maros-Vásárhelyt élt; az 1851. évben ősszel ott BOLYAI Farkas utódjává választották, de még ennek halála előtt, 1853 október hó 23-kán elhunyt.

Tanítói közül a fiatal Bolyai legjobban Wolter von Eckwehrt Jánoshoz vonzódott. Wolter, ki 1789-ben a csehországi Königsgrätzben született, a mérnök-akadémiát látogatta és 1818-ban ősszel, mint tanár tért oda vissza, hol főleg a IV. osztályban az aritmetikát és a geometriát tanította. 1823-tól 1835-ig Aradon a hadmérnöki igazgatóságnál volt alkalmazva, hol János 1825-től 1830-ig, mint hadnagy alantasa volt. Hadmérnöki minőségben kifejtett kitünő tevékenység után 1857-ben Krakkóban mint altábornagy halt meg.

Az idősebb tanárok közt János Lencker Mihály őrnagyot becsülte nagyra, ki 1778-ban Bécsben született, és 1804 óta volt az akadémia tanára. Felsőbb geometriai és matematikai földrajzi tankönyvei azt mutatják, hogy nyílt eszű ember volt. Lencker-re Farkas fordította János figyelmét. «Lenckert absolute használd, megfogod banni ha elmulated».

A VII. osztályt János az 1822. év szeptember havában fejezte be. Ennek az osztálynak 19 növendéke közül 7 hadmérnökkari hadapróddá lépett elő és még egy esztendőig maradt az akadémián. Köztük János a második volt. A minden osztályban évenként kétszer meg-ejtett rangbeosztásba a növendékeknek is volt nyomós beleszólásuk. Titkos szavazással ők állapították meg a rangsort. A döntés ugyanis a tanároknak és az igazgatóságnak volt fenntartva, de a feljebbvalók az osztály határozatát komolyan vették számba; mert a bajtársak szavazata majdnem mindig pártatlan és tárgyilagos volt. Mikor az 1822. év szeptember havában a VII. osztály rangsorát megállapították, a tanárok Jánost tették az első helyre; a tanulók azonban csak a második helyet jutatták neki. Az igazgató a tanulókhöz csatlakozott, mert — bár Jánost az erődítéstanban és a polgári építészetben elsőnek kellett tekinteni — Czermák József a III. osztálytól kezdve a többi tudományos szakmákban állandóan az első helyet tartotta meg. Czermák fiatalon, már 1828-ban mint főhadnagy halt meg. János bizonyítványa valóban fényes volt; majdnem minden tantárgyból a legjobb osztályzatot kapta; csak a történelemből, a francia nyelvből és a rajzból egy fokkal alacsonyabb volt az osztályzata.

Az akadémián való tartózkodásának egész ideje alatt Jánost az atyai szeretetet, gondoskodás és aggódás kísérte. 1818-tól 1823-ig, e reá nézve oly nehéz esztendőben, Farkasnak az egyedüli vigasztalást fiának gyors előmenetele és fényes sikerei szereztek. Jánosra célozva, 1817 ápr. hó 2-kán írja Bodornak: «mintha a' fiamat lántznak adta volna az én sorsom, mellyel a tömlöczbe tartson». Nagy azoknak a jó tanácsoknak a száma, melyeket fiának ad; a már felemlítettekhez még csak néhány jellemzőt csatolunk hozzá. Ilyen, hogy jól használja

ki az időt. «Hova tovább azt hiszem, hogy nagy Mathematikus tsak a' lehet, a' ki excellens elmével jókor, jó moddal hozzá fogva, szünetlen valo gyakorlással, mint a' nyelvbe, olyan készséget kap». Midőn János a VI. osztályba lép, ismétli intését: «El-folynak az esztendőök 's semmit se hagynak annak a' ki nem nézve ki az okosság perspectivájával a' jövendő vidékeire, tsak a' jelenvalo virágait szedi — jaj annak, a' kinek az el-múlt időket, tsak tett pusztításaik mutatják — 's szerentsés, a' ki meg-tudta az esztendőket tartani, mint az élőfa mindenikbe egy-egy karikával vastagodva».

Az életmódra vonatkozó tanácsokkal sem fukarkodik Farkas; sőt ezek a tanácsai gyakran igen terjengősek és körülményesek. Legjobban félti fia tisztaságát. «Az első lépéstől irtózz, mert a' meredek' széléről bé feneketlen az örvény, 's meg állani többé nem lehet — őrizkedj az olyan motsoktól, melyet ki-törteni többé nem lehet.. Tsak az virágzik ki testében 's lelkében, 's az érik meg férjfiuvá, 's annak van ereje, akaratja és álhatatossága, 's tsak úgy ég a' sáni lángja szépen tisztán 's tartosan, ha annak forrása mennyei tisztaságába marad». A mint az akadémiából való kilépés ideje jobban közeledik, Farkas még gyakrabban és sürgetőbben emeli fel hangját. «Őrizd meg a' te tisztaságodat! Szünetlen vigyázva, hogy az égből gyult tűz mint a' Vesta templomába ki ne alugyék — minden szikrája a' földi örömmek, melyről le-mondassz, mint egy örök világu tsillag úgy fog ragyogni életed ezutáni vidékei egén». És mintha előre látná, hogy intelmei hiábavalók, írja: «Én tégedet a' Duellumtól féltetek leginkább 's a' fejjérnépektől».

János sokat köszönhetett az akadémiának. Mindenekelőtt a rendes, nyugodt élet éveit, melyekben legjobb tehetségei kifejlődhettek. Azután a rendszeretetet és a pontosságot, olyan erényeket, melyeket apja nem ismert. Végre pedig alapos matematikai kiképeztetését, a melylyel arra a felszerelésre tett szert, a melyre neki a geometria alapjaira vonatkozó vizsgálataiban szüksége volt; a több itt kevesebb lett volna, mert eltérítette volna őt attól a feladattól, melynek megoldására hivatva volt. Egyre azonban még az olyan jeles intézet, mint a mérnök-akadémia sem volt képes: a matematikusból olyan katonatisztet formálni, ki magát testtel lélekkel hivatásának szenteli. Erre azonban senki és semmi sem lett volna képes; mert ki parancsol a «zsarnoki gondolatnak» mely a lángészt gyöttri és lelkesíti?

IX. FEJEZET.

BOLYAI János mint katonatiszt (1823—1833).

Csak mintegy tíz évig tartozott János mint hadmérnök-tiszt az osztrák hadsereg kötelékébe. Hogy fényesen meginduló katonai pályája olyan gyors véget ért, a körülményeknek valóban tragikus láncolatában leli okát.

Az 1823. év szeptember hó 1-én Jánost a temesvári erődítési helyi igazgatóságához alhadnagynak nevezték ki; hogy ilyen módon ismét szülőföldje közelébe jutott, azt bizonyára előljárói jóindulatának köszönhetette. Szeptember 17-kén hagyta el Bécsét és 30-ikán érkezett meg új állomáshelyén. Innen már november 3-án közli apjával azt az erős elhatározását: «a parallelákról egy munkát adok ki, . . . semmiből egy ujj más világot teremtettem.» Az abszolút geometriának BOLYAI János által való fölfedezéséről részletesen majd a két következő fejezetben adunk számot. Mindazonáltal elkerülhetetlen, hogy lehető rövideggel már itt ne mutassunk reá működésének erre az oldalára, mely oly lényeges befolyással volt egész életére.

Szabad idejét, mely szolgálatbeli kötelességeinek teljesítése után fennmaradt, János tovább is geometriai vizsgálatok végzésére fordította, és a mikor 1825 tavaszán atyját Maros-Vásárhelyt meglátogatta, bemutathatta neki «a tér abszolút tudományának tervezetét». Nagyon valószínű, hogy ez a tervezet lényegében az 1831-ben kinyomtatott *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* első 33 paragrafusával megegyezett. A 1825. év folyamán, vagy legkésőbbben 1826 elején ezt a tervezetet János régi tanítójának WOLTER von ECKWEHR akkori századosnak is elküldte, a kivel levelezést folytatott.

Fia látogatásáról 1825 február 22-én írja Farkas Bodornak: «Nagy kemény természetű szép ifju, a katonai bátorság az ártatlanság szemérmességével be pelgyedett — se nem kártyázik, se bort pálinkát se kávé nem iszik, se nem pipázik, se nem tubákol, még nem borotválkozik, csak péhés — rendkívül való mathematicus, igaz genie, excellens hegedűs — minden hivatalok közt leginkább szereti a ka-

tonaságot; csak az Otiumot szeretné inkább, melybe dolgozhatnék, már is sokat dolgozott a hivatal mellett is. Tisztel tégedet».

Ugyanakkor, mikor az 1825. év február és márczius hónapjaiban együtt voltak, először támadt egyenetlenség az apa és fiú között. János nem tapasztalta Farkas részéről azt az elismerést és megértést új geometriai rendszere számára, a melyre számított. Ezt még családi ügyek is tetézték. Farkas 1824 december 31-én másodszor nősült. Második felesége, Nagy Teréz, ki 1797 február 11-én született, egy marosvásárhelyi vaskereskedő leánya volt. Nagyszebenben jó nevelésben részesült; szépen énekelt és hárfázni is tudott. Az 1826. év május 13-án Farkast egy fiúval, Gergelylyel ajándékozta meg; egy később született leánykájuk már korán meghalt. Sajnos, hogy nemsokára betegeskedni kezdett és 1833 április 2-án a tüdővésznek esett áldozatul.

Úgy látszik, hogy látogatása alkalmával János kicsiny anyai örökségének kifizetését követelte. Ez Farkast nagy zavarba hozta, mert adósságainak terhe második házassága következtében még súlyosbodott. Míg Farkas pénzbeli ügyekben örökké gyermek maradt, János jól tudott számolni.

Ez alkalommal még hamar békültek ki. Április hó 24-én írja Farkas Bodornak: «Az én Vulcan fiam is megszeliődött, kétszer is írt Temesvárról».

Jánosról, mint alhadnagyról még más oldalról is van hírünk. A BOLYAI-kutatás körül nagy érdemeket szerzett SCHMIDT Ferencz pesti építész atyja, SCHMIDT Antal, ki 1817—1860 Temesvárott építész volt, gyakran katonai épületek felállításával volt megbízva. Későbbi éveiben egy erdélyi mérnökkari tisztről mesélt, a kivel félt érintkezni. Ez a tiszt hogy karjának erejét és damaskusi pengéjének jó-ságát látogatóinak bemutatassa, egy vágással leütötte az ajtófélfába erősített vasszegeket. Ez a tiszt pedig BOLYAI János volt.

De damaskusi pengéjét nem csak szegek leütésére használta. Jánost heveessége és szenvedélye gyakran becsületbeli ügyekbe keverte, a melyekből ő, kit az akadémián a legjobb vívónak tartottak, mindig mint győző került ki. Azt beszélik róla, hogy egyik állomáshelyén tizenhárom lovas-tiszttel verekedett meg és valamennyit legyőzte; csak azt kötötte ki, hogy két-két párbaj után szeretett hegedűjén játszva pihenhessen.

Az 1826. év márczius hó 26-án Jánost Aradra helyezték át, hol több mint négy évig, egészen 1830 szeptember 2-ikáig maradt. Itt találkozott WOLTER von ECKWEHR Jánossal, ki mint százados közvetlenül előjárója volt. Szolgálatával — úgy látszik — akkor meg voltak elégedve; mert már 1827 szeptember 28-án főhadnaggyá léptették elő.

A mint a katonai okiratokból kitűnik. János, ki addig a legjobb egészségnek örvendett, 1826 óta ismételten beteg volt; talán már Aradon, mikor Nagy-Váradra és Szegedre vezényelték, kapta meg a váltólázát, melyről az 1841. évben kelt egyik levelében megemlékezik.

Az 1825. évi február és márczius havi látogatása óta a hadseregéből 1833. évi június hóban történt kiválásáig János nem járt többet Maros-Vásárhelyt. Az 1830. év szeptember hó 2-ikán Lembergbe helyezték át. De mielőtt Magyarországot elhagyta, egyszer még látta apját; «véletlen találkozás» volt, melyről nem tudjuk, hogy hol esett meg. E találkozásból nyerte János az ösztönzést arra, hogy «a dolog [geometriai kutatása] lényegét latinul megfogalmazza és 1831-ben atyjának átadja». Ez a latin értekezése a már említett *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, mely a *Tentamen* 1832-ben megjelent első kötetéhez, mint függelék volt hozzácsatolva. Ámde különlenyomatok is készültek belőle, melyek már 1831 június havában láttak napvilágot; a nyomtatás költségeire János 104 forint és 54 krajczárt adott át atyjának.

A külön lenyomatok egyikét azonnal, 1831 június hó 20-kán, GAUSSnak küldték. Az említett találkozás alkalmával ugyanis Farkas és János ismét összetűztek, mert a fiú úgy vélte, hogy atyja az ő érdemeit nem tudja méltatni. «Miután beláttam», — írja János — «hogy érvekkel itt semmire sem megyek, még csak tekintélylyel reméltem az asymptoták illő megbecsülésére bírni. Egyet (GAUSS) én említettem neki, megjegyezvén, hogy ez a kolosszális geometer bizonyára a dolgot nemcsak könnyen fogja megérteni, hanem majd kedve is telik benne és valódi becsét el fogja ismerni, egyszersmind ajánlottam, küldjük el [vizsgálódásaimat] a nagy férfinak. Erre apám uram még nagyobb tűzbe jött; az ajánlat annál is inkább tetszésére volt, mert úgy vélte, hogy a tekintély [GAUSS] *quasi* fegyvert szolgáltat neki ellenem.»

Valahányszor a két BOLYAINAK dolga akadt GAUSSzal, mindig valami különös balszillagzat uralkodott felettük. Az elküldött különlenyomat «a fatalis kolera-bajok» miatt nem került GAUSS kezébe. Egy második lenyomatot, melyet Farkas 1833 január havában utána bocsátott az elsőnek, ZEYK József, Farkas és GAUSS göttingai tanuló társának, ZEYK Dánielnek fia, adott át a nagy geometernek. GAUSS az első benyomás alatt 1832 február hó 14-én Marburgba írja tanítványának és barátjának, GERLINGnek:

«Még megemlítem, hogy e napokban Magyarországból egy a nem-euklidikus geometriát tárgyaló művecskét kaptam, amelyben vala-

menyi *saját eszmémet és eredményemet* nagy eleganciával kifejtve újból feltalálom, habár olyan alakban, melyet azok, kiknek ez a dolog új, tömörsége miatt nehezen követhetnek. Szerzője, ki *nagyon* fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak, a kivel 1798-ban e dologról gyakran társalogtam, habár akkor eszméim még távol voltak attól a kialakulástól és érettségtől, melyet ez a fiatal ember saját gondolkodása alapján nekik kölcsönzött. Ezt a fiatal geometert, BOLYAI-t, elsőrangú lángésznek tartom.»

Az 1832 márczius hó 6-ikán Farkashoz intézett levelében, a melyet a XI. fejezetben részletesen fogunk ismertetni, GAUSS kiváló nagyra-becsülését fejezi ki János iránt. Farkas e levél másolatát elküldte Lembergbe a fiának és hozzátette: «GAUSSnak a te művedre vonatkozó válasza, igen szép és hazánknak, valamint nemzetünknek dicsőségére válik. Egyik jó barátunk nagy elégtételnek mondta.»

Egészen másképen hatottak GAUSS nyilatkozatai Jánosra. Hogy GAUSS az *Appendix*-et nem méltatta nyilvános elismerésre és a prioritást a maga számára vette igénybe, az Jánosnak olyan csalódást okozott, melyet sohasem tudott kiheverni. Ehhez még hozzájárult, hogy más helyről is elmaradt az az elismerés, mely után tüzes lelke vágyódott; az idejüket megelőző gondolatai ugyanis megértetlenül maradtak, és az *Appendix*-nek a *Tentamen*-ben való közrebocsátása sem járt semmiféle észrevehető sikerrel.

Ha még meggondoljuk, hogy János egészsége már 1826 óta megrendült, könnyen megértjük, hogy lelkében most szomorú változások játszódtak le. «Az elismerést» — mondja SCHLESINGER — «melyet a világ tőle megtagadott, ugyancsak beteges önmagasztalással akarja pótolni, minek következtében az ő szenvedélyes ugyan, de személyes ismerősei tanúsága szerint, rendkívül szeretetreméltó természete ingerlékenyre és bizalmatlankodóra változik; büszkén és elzárkózva kerüli tisztársainak a körét, személyes bátorsága viszálykodó, igazságszeretete sértő ridegséggé fajul.»

Az 1832. év márczius hó 14-ikén János második osztályú kapitánnyá neveztetett ki. Nemsokára ezután Olmützbe helyezték át, hol szolgálatát május 6-ikán kezdte meg. Olmützből 1832 augusztus 8-ikán kérvényt intézett János főherceghez, melyhez az *Appendix* első 33 paragrafusát német fogalmazásban és GAUSS márczius 6-ikáról kelt levelének kivonatát mellékelte. Forró kívánsága, — írja e kérvényben — hogy a szolgálat után szabadon fennmaradt óráiban végzett matematikai vizsgálatait teljesen kidolgozhassa. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha szellemi képességeit osztatlanul erre a dologra tudja fordítani, különösen minthogy tartós ideges baj előidézte gyengélkedő

állapotában egészségét illetőleg a legrosszabbtól kell tartania. Kéri tehát, hogy három évre a tulajdonképeni mindennapi szolgálat alól felmentsék, és Nagyszébenbe, a honi levegőbe helyezték át; egyúttal három havi, atyjánál Maros-Vásárhelyt eltöltendő szabadság engedélyezését is kéri.

Kérését elutasították. Valószínűleg akkor jegyezték be minősítő táblázatába: «Egy művecskéjeért GAUSS lovag, udvari tanácsos, a legnagyobb matematikusok egyike által 1832-ben megdicsértetett... A felsőbb matematika tanári állására alkalmas.» Amit ezek a hivatalos feljegyzések egyebet tartalmaznak, mutatja, hogy János állapota abban az időben sajnálatra méltó volt. «Szótlan, ingerlékeny, hirtelen haragú, kerüli a tisztek társaságát, a mérnöki szolgálatban nem tanúsít buzgóságot, szenvedélyes sakkjátékos.» «A szolgálati buzgóság hiánya és felfortyanó viselkedése miatt 1833-ban megintésben részesült.»

Ez az utolsó megjegyzés bizonyára Jánosnak porosz határőrökkel való heves összekocczanására vonatkozik. Egy porosz-sziléziai utazásáról visszatérve, az éjszakát a Visztula melletti Schwarzbachban töltötte. Midőn más nap, 1832 július hó 7-ikén reggel onnan elindult, összepörölt a porosz vámtisztekkel, kiknek felhívását, hogy a kocsijához erősített ládát kinyissa, vonakodott teljesíteni. Olmützben megérkezve, felsőbb hatóságuknál panaszt adott be a határőrök ellen, de az erődítvényi helyi igazgatóság a panasz visszavonására szorította őt. Ámde most BISCHOFF, porosz határbiztos, Jánost panaszolta be a katonai hatóságnál. János, kit nyilatkozatra hívtak fel, e panasz ellen egy még most is meglevő, 7 folio-oldalra terjedő, 1832 november hó 14-ikéről keltezett memorandumban védekezett; az ebben foglalt fejtegetései mutatják, hogy akkor János milyen magasfokú túlzogatott állapotban volt. A kinos ügy most már a Bécsben székelő legmagasabb hatóság tudomására is jutott, a minek az volt a következménye, hogy a hadsereg főparancsnoksága 1833 május hó 28-ikán kelt rendeletével Jánost, mint félrokkantát, június 16-diki hatálylyal nyugalomba helyezte. Az a hozzátétel: «kilátással a későbbi visszahelyezésre» mutatja, hogy nem szívesen bocsátották el; azt várták, «hogy lecsillapodjék» és remélték, hogy szolgálatát később újból igénybe vehetik. Ez azonban nem történt meg sohasem.

János megúnta a katonai szolgálatot. Hivatást érzett magában, hogy a «matematika reformációját», sőt — mint János főherceghez intézett folyamodványából kitetszik — az egész emberi nem reformációját keresztülvigye, és erős elhatározása volt, hogy minden erejét e nagy czélok megvalósításának szentelje. Bármennyire nemes és tiszta volt e törekvése, mégis ismét csak új, nehéz csalódások és balsikerek vártak reá.

X. FEJEZET.

Az abszolút geometria fölfedezése BOLYAI János által.

Első rész: Euklides XI. axiómájának bebizonyítására irányuló kísérletei (1820—1823).

BOLYAI János hagyatékából terjedelmes följegyzések kerültek elő, melyekben *abszolút geometriájának* keletkezéséről ő maga számol be. E följegyzések egyik része az 1833 és 1835 közötti időből, másik része pedig az 1851 és 1858 közötti időből származik. Minthogy e följegyzések nem nyomtatásra kész szövegek, hanem csak be nem fejezett vázlatok sokszoros hézagokkal, ismétlésekkel, törlésekkel és részint a szövegbe közbeiktatott, részint czédulákra följegyzett pótlásokkal, azért teljes kinyomtatásukról le kellett mondanunk. De a rendelkezésre álló anyagból és néhány fennmaradt levélből, melyet Farkas Jánoshoz és János Farkashoz intézett, az abszolút geometria BOLYAI János által való fölfedezésének történetét úgy sikerült megszerkesztenünk, hogy benne lényegben ő meg apja viszik a szót. Hogy mennyire fontos az ilyen okiratszerű előadás, az nyilvánvaló; becsét még emeli az a körülmény, hogy csak kevés azoknak az eseteknek a száma, hogy valamely alapvető matematikai tan felfedezője annak keletkezéséről olyan beható és megbízható módon számolt be, mint az a fennforgó esetben történt.

A paralellák elméletével való foglalkozásra János az első impulzust atyjától nyerte, ki maga tanította őt a matematikára és «a paralellák, az egyenes és más alaptanok hiányosságára figyelmeztette.» Egy 1820 április hó 4-ikén kelt levelében, a melyre még ismételtlen vissza kell térnünk, fia kívánságára megírja Farkas, hogy mire tanította őt a paralellákról. «Az a' semmi axioma, melyet gyermekek számára gondoltam volt, itt van; abból *per se* könnyen ki-jő. Minthogy kevésből áll le-írom kívánságodra. Ez *eadem internorum summa aliter partita*. Ki-írom a munkámból.» Valóban, ez az axióma annak a bebizonyításával együtt, hogy belőle a XI. axióma következik, megvan a *Tentamenben*, és ennek a könyvnek második részében (a 101. és 102. oldalain) található. Ellenben a többi a *Tentamenben* elő-

adott, a XI. axióma lehetséges bebizonyítására vonatkozó gondolatait — a mint János határozottan kijelenti — Farkas titokban tartotta előtte, és később is csak töredékeket közölt vele belőlük. Nem nehéz kitalálni, hogy mi volt Farkas e kételkedő eljárásának indító oka. Egyáltalában nem akarta, hogy fia a parallelák elméletével foglalkozzék, mely neki «az életét elrontotta», de azért nem tudott annak a váagnak ellentállni, hogy szóba ne hozza előtte. Korán megérett fia megértette őt és szavait hiven őrizte meg szívében. «Egyszer azt mondta, a ki a tizenegyedik axiómára bebizonyítást találna, akkora gyémántot érdemelne, mint a Föld. Máskor: kinek ez sikerülni fog, annak, halandók, örök emléket állítsatok.»

És így megjött, a minek jönnie kellett. Midőn János az 1818. év őszén a bécsi mérnök-akadémiába belépett, «a feladatnak egészen különös kiválóságától és nagy fontosságától ingerelve» elhatározta: «bár-mint legyen is, ebben a dologban minden lehetőt megteszek», és valóban, a parallelák-elmélete csakhamar «kedvencz foglalkozása» volt.

«A XI. axióma bebizonyíthatására» — írja János — «először azt az utat követtem, hogy bebizonyítsam, hogy az egyenessel egyenközü vonal, azaz a síkban tőle mindenütt egyenlő távolságra levő vonal szintén egyenes, és e végből megvizsgáltam, hogy mik az ilyen vonal tulajdonságai az ellenkező esetben.» Ma tudjuk, hogy SACCHERI (1733) és LAMBERT (1766) ugyanerre az útra léptek és jó darabot meg is tettek rajta. A mi a részleteket illeti, János különösen azt iparkodott kimutatni, hogy olyan «szabályos tört vonal, melynek minden töréspontja valamely egyenestől egyenlően távol van», ezt okvetetlenül metszi, és ily módon találkozott apjával, a ki — a mint láttuk — a «Göttingai parallelák elméletében» szintén ilyen szabályos tört vonalat vizsgált.

Midőn 1820 tavaszán János a XI. axióma bebizonyítására vonatkozó kísérleteiről hirt adott atyjának, ez nagyon is megijedt és megindító szavakban intette fiát, hogy hagyja abba ezt a dolgot.

«A' Parallelákat azon az úton ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig — meg mértem azt a feneketlen éjszakát én is az életemnek minden világossága minden öröme kialudt benne — az Istenért kérek! haggy békét a' paralleláknak — úgy irtozz tőlle mint akármitsoda feslett társalkodástól, éppen úgy megfoszthat minden idődtől, egésségedtől, tsendességedtől 's egész életed boldogságától — Az a' feneketlen sötétség talám ezer Newtoni oriási tornyokat elnyél — soha sem világosodik meg a földön — 's soha sem lessz a' szegény emberi nemnek semmije tökéletes tiszta, a' Geometria se; nagy 's örökös seb ez az én lelkemen; az Isten őrizzen meg téged, hogy ez valaha [nálad is] olyan méjjen bé-egye magát — ez a' Geometriá-

hoz, a' földhöz elveszi az ember kedvét: én fel-tettem volt magamban, hogy fel-áldozzam magamat az igazságért, 's kész lettem volna Martyr lenni, tsak hogy a' Geometriát meg-tisztítva ezen motsokból adhassam az emberi nemnek: irtoztato oriási munkákat tettem: sokkal jobbakat tsináltam, mint addig, de tökéletes meg elégedést nem találtam; itt pedig *si paullum a summo discessit, vergit ad imum* — vissza tértem mikor által láttam, hogy ennek az éjszakának a' földről fenekét érni nem lehet vigasztalás nélkül, sajnálva magamat 's a' szegény emberi nemet. Tanulj te az én példámon; én a' parallelákat akarva megtudni, tudatlan maradtam, életem 's időm virágját mind az vette el — sőt minden azutáni hibáimnak töve mind ott volt 's a' házi fellegzésekből esett reá — Ha a' parallelákat fel-találtam volna, ha senki se tudta volna is meg, hogy én találtam, angyal lettem volna.»

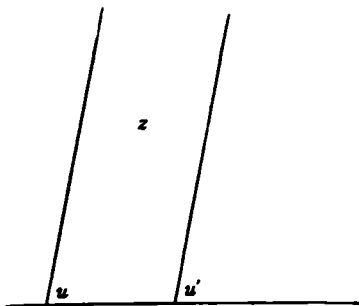
«Higgy nekem! 's tanulj most, haladj, jegyezd fel, mit nem értesz, hol találsz hiányosságot, 's menj tovább... El-fogom én neked küldeni az én próbáimat: 's akkor meg-győződöl közelebbről mégmost, a' mit VAJDA urral nektek tanítottam, melyet legkönnyebbnek találtam gyermeknek, ha érkezem lehet hogy most le-írom. A' munkámból szóról szóra ki-irhatom; ha az axióma meg-állitódik, a' többi *per se* jö, ez is a' többi is; de az Axiomaim egyik se olyan a' millyennek lenni kellene, egyik demonstratiomba is. — Meg-foghatatlan hogy ez az el-háritthatatlan homály ez az örök nap-fogyatkozás ez a' motsok hogy hagyatott a' Geometriába, ez az örök felleg a' szüz tiszta igazságon.»

«Ne próbáld, soha meg nem mutatod, hogy azokkal a' meg nem szünő mind egymértékű bé-hajlásokkal valaha az also rectát vágni fogja — egy örökké magába vissza forgato *circulus* van ebbe a' materiába — szünetlen be-tsalo labirintus — mint a kints-áso el-szegényül, a' ki ebbe elegyedik, 's tudatlanul marad. — Akár mitsoda absurdumra menj ki, mind semmi, nem teheted axiómának; felteszem hogy Δ -ot 's akárhányoldalú *polygonumot* lehet tsinálni, ha nem igaz a *parallelas theoria*, melynek minden szegleteinek *summája omni dabili kissebb*, 's ezer efélék. A' *recta* egyedül volna, mely a' reá irt perpendicularisokat mind vágná több *recta* nem volna, mely mind vágná azokat — a' leg-kissebb szegletbe be lehetne tenni a' leg-nagyobb *convexus angulust* mind a két *infinitum crussával* —»

«Akármekkora akármilyen kitsi *summa duorum internorum* lehetne demonstrálni, hogy vágja két *recta* egymást akármilyen nagy *rectának* két végéről, osztán a' többit *cum rigore* tudom; de már

ilyent axiómának venni nem lehet. Mindenik demonstratio sokból áll; külön is némellyik hosszú — egyszer mind közlöm.»

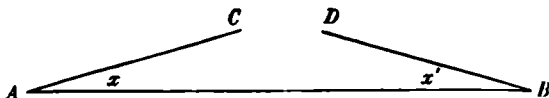
«Vannak olyan axiómák is az enyimek között, melyek hirtelen jóknak tetszenének; de nem jók, nem tökéletes simplex 's elég tiszta



4. ábra.

fundamentum egy olyan tudomány-nak a' millyen a' Geometria. Itt az ember a quantitással semmire se menyen, mert itt *totum est aequale parti*. *Ex. gr. $u=u'$* 4. ábra¹ 's congruál, ha reá teszem, a' mint pedig itt van, *z* köz feljül marad. — Azért hiába tudom azt is demonstrálni, hogy ha a' *parallelarum theoria* nem igaz, tehát *x* [5. ábra apadjon 0-ig, *CA* (*C* felé *in infinitum* ki-nyujtva) forduljon *A* pont körül, míg *AB*-be ér,

és bár *x'* mindég egyenlő legyen *x*-hez, *B* lehet olyan messze minden állására nézve *AC*-nek, hogy míg *AC* *AB*-be ér *BD* (*in infinitum* ki-nyujtva) soholt se vágja *AC*-t; és így itt a' *summa internorum fit omni dabili minor, decrescit ad null[um]* s' míg *AC* bé-érkezik *AB*-be a' *planum infinitum* mind a szárai között egészen el-fér *n*-dje hijján, 's *n* *omni dabili* nagyobb szám, 's ha lehetne meg-



5. ábra.

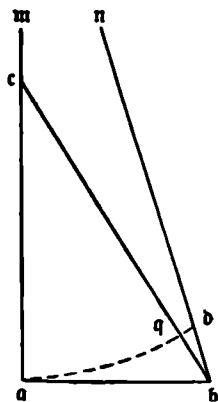
adni akármitsoda kitsi de meg-határozott rectát, melynek két végéről a' recták egymást, akármitsoda kitsivel legyen a'

summa internorum kisebb a 2 rectusnál, egymást vágnák, úgy nyert per volna, — 's még mind is nem elég, 's ne hogy próbáld ki-potolni. el-végezni, tovább menni; ezeken a tájakon vannak a Hercules columnái; egy lépést se menj tovább, különben elveszett ember vagy.»

E «nagyon nyomatékos és erélyes intés, mely talán alkalmasnak látszik arra, hogy még a legmerészebbet is mindenkorra meg-fossza bátorságától», nem fogott Jánoson. Azt írja: «A helyett, hogy elriasztattam volna, érdeklődésem csak még élénkült, és a leghevesebbre fokozódott vágyam és energiám, hogy a lehetőség szerint minden áron keresztül hatoljak rajta.» Ama tört vonal vizsgálatát természetesen abbahagyta, de helyette még 1820-ban tért arra az útra, mely őt végre abszolút geometriájának fölépítéséhez és ahhoz a meggyőződéshez vezette, hogy a XI. axióma nem bizonyítható be.

«Az út, melyet e mellett követtem» — írja János — «annál

inkább érdemli meg a közelebbi megjelölést, mert a tárgy elég fontosnak tekinthető és azonkívül majd látszik, hogy ez az *egyetlen* ösvény, mely a meghódítandó várhoz vezet. Beláttam, hogy az egyenes vonalú háromszögből a tizenegyedik axiómát illetőleg alig adódik ki valamivel több, mint az, hogy két szögének összege $< 2R$, \geq oldallal egyidejűleg \geq szög [fekszik szemben], két oldal összege $>$ a harmadiknál; itt azonban észrevettem, hogy mikor az egyik oldalt vég nélkül meghosszabbítjuk, míg egy másik oldal, valamint az e két oldal által bezárt szög állandók maradnak, a háromszög bizonyos konkrét térbeli határalakhoz közeledik, a melyben mégis legalább több *közelebbi vonatkozás* ismerhető fel a meglevő 6 alkotó rész között. Bizonyos volt ugyanis, hogy $bam + abn$ 6. ábra] nem $> 2R$; a harmadik szög *ellűn!*, és mindjárt sejtettem, hogy ha a c körül ca -val az a -n keresztül körvonalokat húzunk: akkor (ha $ac \sim \infty$) a valóságos metszéspontoknak, melyekben azok a bn -t metszik, egy konkrét b határpontjuk van és hogy (felületesen beszélve) bd a két végtelen egyenesnek am , bn -nek különbsége, vagy szigorúan kifejezve, a végtelenbe növekedő bc , ac oldalak különbségének határértéke. Azt is felismertem azonnal, hogy midőn a sugár $[ca] \sim \infty$: akkor a körvonalnak van egy térbeli határvonala vagy, ha a szót valamivel bővebb értelemben vesszük, felismertem a végtelen sugarú körvonal létezését, mely a véges sugarú körvonalokkal és az egyenessel egyenközű vonalokkal olyan vonatkozásban áll, mint a parabola az ellipszisekkel és hiperbolákkal. Ez már mindenesetre *valami*, nem is szalasztottam el többé; élénken éreztem, hogy a helyes útra tértem.»



6. ábra.

E fontos és termékeny gondolatok keletkezésére János és Szász Károly már említett baráti érintkezésének nagyjelentőségű befolyása volt. A paralellák elméletéről «vasár-, ünnep- és általában kimenő napokon» folytatott beszélgetéseik közben egyszer Szásznak a következő «szellemes, valóban geometriai és a XI. axiómatól független tér-tudománya helyes kifejtésének alapjául szolgáló eszméje volt, hogy ha azt az egyenest, melyet valamely b pontból (6. ábra) valamely másik egyenesnek valamely c pontján keresztül húztunk, a két egyenes meghatározta síkban ama b pont körül forgatjuk, akkor a forgó egyenes, mely a másik am egyenest egy ideig metszi, attól egy bizonyos helyzetben — Szász kifejezésével élve — *elpattan*, és e $[bn]$ helyzetben ő a legközelebbi paralellának vagy nem vágónak nevezte». Később

János ezt az egyenest asymptotikus parallelának vagy röviden *asymptotának* nevezte.

Máskor Szász azt a kérdést vetette fel «vajjon abból, hogy bn (6. ábra) az am asymptotája, nem következik-e, hogy $am=bn$ », és erre — mondja János — «rögtön nemmel feleltem». «Mert ha ab merőleges am -re és cb -re c -től kezdve mindig reá rakjuk a $cq=ca-t$: akkor a q pont, ha bc -t b körül a bn helyzetbe forgatjuk, végre bizonyos d pontba megy át, mely abban az esetben, ha abn nem derékszög, a b -től különböző.»

Továbbá azt beszéli el János, hogy a két barát «ösztönszerűleg sejtette e végtelen sugarú kör természetének és a XI. axióma igazsága kérdésének szoros összefüggését, és nem kételkedtek benne, hogy a XI. axióma szigorúan igazolható, mihelyt e végtelen sugarú körnek egyenes voltát sikerül kimutatni», valamint, hogy «nagy ügyességre tettek szert a szóban forgó esetben elégtelen tételek használhatatlan voltának felismerésében.» «De ennél» — végzi János — «aztán meg is álltunk.»

Mikor Szász Károly 1820 végén vagy 1821 elején Bécsset elhagyta, János és ő azt a «gyerekes és tulajdonképen ostoba ígéretet tették egymásnak, hogy ha a jövőben, az elválás után ebben a dologban, melynek vizsgálatát együtt kezdték meg, egyikük célzott érne, akkor az érdemben osztozkodnak». «Ez azonban» — teszi hozzá János — «csak a XI. axióma bebizonyítására vonatkozott; mert csak ezt kerestük és egy ettől *független* geometria még álmunkban sem jutott eszünkbe».

A mint már említettük, Szász Károly az 1848. évtől kezdve egészen az 1853. évi október hó 23-ikán bekövetkezett haláláig Maros-Vásárhelyt tartózkodott. Mielőtt Maros-Vásárhelyre került, Németországban utazgatott és Göttingában meglátogatta Gauss-t. Abban az időben, amaz ígéretre támaszkodva, megpróbálta, hogy János fölfedezéséből részt biztosítson magának. Erre a dologra vonatkozik Jánosnak 1855 január 20-ikán apjához intézett következő levele.

«Sz[ász] K[ároly] miért ellenezte a' német [Kurzer Grundriß] kiadását? tán a LOBATSEWSKI és *Appendix* közötti pár-vonalért. De föl-híva érzem magamat az állitmányjára: „azt ketten csináltuk volt már régen ki' halála után is megismételni azt, mit életében is régen ki-mondottam... mert én tőle semmit sem tanultam; igaz ugyan, hogy beszéltük (tulajdonképen én mondván azt is leg-előbb) hogy ha a' XI. Ax[ioma] nem igaz: ugy a' kör-határ, vagy ha tetszik *circul[us] rad. ∞* egy görbe *unif[ormis]* vonal *in plano*; vagy-is, hogy ha annak egyenességét meg lehetne mutatni: ugy a' XI. Ax[ioma] meg-

volna mutatva De mind-ezt sem vitattuk tovább vagy vettük apróra 's bizonyítottuk-meg együtt; 's ennél tovább, többre nem is mentünk: mi onnan is ki-világlik, hogy én aztán magamra mindent ki-dolgozva, az ő *(mint akkor mindjárt irtam)* TOMPA Profral 's egy Enyedi Deákkal Aradon nálam jártakor én *mint merőben új dolgokat nagy Zelus, enthusiasmuossal*, ~ * fogadtatást várva közöltem vele az *eredményeket*: mikor azonban ő *becsüköt és halásukat* telyességgel nem volt még csak képes is átlátni, mind csak azt erősítvén: *hisz a' nem formula! biz a' nem formula*, nyilvános jeléül annak, hogy *mind azt nem együtt* csináltuk. Továbbá az App[*endix*] ki-jötte után Enyeden át-jötemkor a VÁRADI Dr. és VAJDA jelenlétében (ki tehát ma is élő tanu lehet) kérdeztem Szásztól, szo kerülvén az App[*endix*]re, hogy hát el-olvasta-e? Felelé: El. Kérdém: egészen? Felelé: egészen: de hogy leg < része lett volna benne arról altissimum silentium volt: pedig ott jo rés lett volna most alacsonul hát-megett el-lopott részéhez jogát meg-említani. És ha itt léte alatt magát hozzám le-alázta volna: mindenkor kész voltam telyes föl-világosítást és ki-elégítést adni; 's úgy tudom ez az igazság' utja, nyiltan értekezni és mind-két felet ki-hallgatni: nem pedig (hallatlanul) hát megett bitorolni szerzői czimet, mintha azért, hogy föl-teszem G[AUSS]-vel egyszer kétszer vagy bár hányszor is beszéltem, azt állítani, hogy ketten irtuk a' *Disqu. Ar-t.* 'S G[AUSS]-nál is hiában locsogott olyasmit, mert okos ember az ilyesmit nem hiszi...

Térjünk azonban vissza az 1820. év eseményeire. Midőn János új vizsgálatairól hirt adott apjának, Farkas ezekkel szemben merően tagadó álláspontot foglalt el. «A mi a végtelen sugárú kört illeti, azt egészen elvetette, mondván, hogy ettől EUKLIDES elfordítaná arczát, és el akarván velem hitetni, hogy azon GAUSS és általában mindenki bizonyosan meg fog ütközni, és hogy nélkülözhető.»

Farkas most szükségesnek tartotta, hogy fiát körülbelül a következő szavakkal újból óvja a parallelák elméletének veszélyeitől. «Megvallom, hogy egyenesed elpattanásától sem várok semmit. Azt velem, ezeken a tájakon is jártam; e pokoli holt tenger minden szirtje mellett elhajóztam és mindenhonnan szétzúzott árbocczal és elfoszlott vitorlákkal tértem vissza, és innen számítom kedvem pusztulását és bukásomat. Meggondolatlanul életemet es boldogságomat erre tettem — *aut Caesar aut nihil*. Alighanem ezzel NEWTON is egész becses életét eltékozolta volna. Én ezt nagy szerencsétlenségnek tekintem. Sajnállak. Látom, hogy szerencsétlen életem benned ismét-

lódik. Mintegy vészes szirtek között, hol még mindenki hajótörést szenvedett, látlak sötét viharban ide-oda hányatni. Ijesztő csatatér ez melyen mindenkor megverettem; a kutató elme minden törekvésével daczoló bevehetetlen sziklavár. Ebben a materiában az egész élet csak égő, a tengerbe mártott fáklya. Valóságos betegség, az örület egy neme, zsarnok eszme. Olyan, mint a kör quadraturája, a bölcsék kövének keresése, az aranycsinálás, a kincsásás. A kincsásó elrongyosodik; mennél mélyebbre ásta saját sírját, annál jobban reménykedik; mindig is csak kevés az, a mi hiányzik, mint valamely végtelen sornál. Mindez — a mint látom, jobb elméknél a parallelák is — betegség. Nemsokára belátva, hogy e téren semmit sem tettél, aligha én hozzám hasonlóan mindenkorra el fogsz kedvetlenedni. Erre és más dolgokra nézve okulj példámon. Ha csakugyan kitaláltad volna, természetesen jobban örülnék neki, mint valami uradalomnak. De ezt egyáltalában nem hívén, attól félek, hogy mindenedet elveszted feltéve egy milliós betétű sorsjátékon.»

János elbeszélését 1820. évi vizsgálatairól megerősíti egy abból az időből származó följegyzése; ez legrégibb bizonyítéka annak a munkálkodásnak, melyet ő az abszolút geometria terén kifejtett. Ősszel a VI. osztályba lépett, a melyben a mechanikát tárgyalták. Egyik füzetében, mely az elemi mechanikába tartozó feladatok megoldását tartalmazza, négy ábra látható ezzel a felirással: *A Parallelarum theoria*. Az e könyv elején található hasonmáson az 1., 2. és 4. ábrák a végtelen sugarú körre vonatkoznak, a 3. pedig olyan háromszögeket tüntet fel, melyeknek egyik oldala a másik kettőnek aszimptotája.

Hogy az akadémián való tartózkodása idejében János e téren mennyire haladt, arra nézve a fennmaradt följegyzésekből csak részletek ismerhetők fel. Törekvése mindenesetre odairányult, hogy a XI. axiómát bebizonyítsa. Ennek eszközéül azokat a vonatkozásokat akarta felhasználni, a melyek az axióma helytelen volta esetében a síkbeli egyenesvonalú háromszög 6 alkotó része között fennállanak. Abban az időben azonban még nem hatolt át az egész anyagon és csak bizonyos előkészítő tételeket tudott felállítani. Mennél jobban haladtak előre János vizsgálatai, annál kevesebb elismeréssel volt irántuk atyja, ki nyilván nem tudta követni lángelméjű fia gondolatainak röptét, de azért mégis azt hitte, hogy tapasztalat dolgában őt felülmulja. Néhány dologból látja ugyan — írja akkor a fiának Farkas — hogy mélyen hatolt, talán az ő saját mélységeinek fenekéig; ámde először János magát ezt a feneket egészen meg nem érte el, másodszor pedig, ha vinné is anyjára, ez hiábavaló fáradság volna, mert még sem elegendő. «Azt is tette hozzá, hogy a parallelákat úgy, a mint az kívánatos volna, nem

fogom soha sem feltalálni. Akkor is, mikor mindenféle szép és a XI. axióma lényegének kipuhatolására nézve fontos és nélkülözhetetlen dolgot, mint pl. az *Appendix* 23. §-át, bebizonyítás nélkül vele közöltem, még inkább folytatta ezen a hangon, mert semmiképen sem értett meg engem, sőt szavaimban kételkedni is kezdett. Én azonban kijelentettem neki, hogy azon az úton, melyet követni kezdtem, a nélkül, hogy valamelyik bebizonyítását velem közölné, képes vagyok bármelyik axiómájából a XI. axiómát levezetni. Ámde ő, a nélkül, hogy ennek értékét felismerte és a csomó kioldódását remélte volna, inkább azt válaszolta, hogy eddig még az ő saját bebizonyításait tekinti a legjelesebbeknek, és tovább is közléseimet kicsinyléssel fogadta és csak felületesen, alig is nézte át.»

János panaszai atyja ellen még néhány oldalt töltenek be. Támadásai mindinkább hevesebbek, haragja folyton fokozódik. Hirtelenül félbeszakítja vádjait ezekkel a szavakkal: «Hagyd abba, légy jó!» Legyünk jók mink is, a vad szenvedély e kitöréseit a feledékenységnak adva át.

A mint már kiemeltük, az 1820-tól 1823-ig terjedő időben János törekvése oda irányult, hogy a XI. axiómát bebizonyítsa. Egyszer hitte is, hogy az erősen óhajtott célt elérte. Ígéretéhez hiven arra kérte atyját, hogy a vélt bebizonyítást küldje el Szász Károlynak. Farkas ezt megtette, megjegyezve azt, hogy hiba van benne, «mert a földteke annyi geometerével» — írja János — «abban a [közös] sorsban részesültem, hogy elhamarkodásból egy hézagot nem vettem észre, és így elbuktam... Mindazonáltal, hogy ez a bebizonyítás tekintettel az *akkori* célra sikertelen maradt, ez, valamint semilyen a legnagyobb mértékben is áthághatatlanak látszó akadály sem lohasztotta le bátorságomat. A legjobban mindenesetre atyámnak ezekre vonatkozó nyilatkozatai sujthattak volna, a ki bizonyára minden előzőjénél jobban ismerte a tárgy nehézségeit és birtokában volt önalkotta messze ható jobb tanoknak... Vigasztalva magamat SENECA szavaival: *Suspice viros, etsi deciderint, magna conantes*, a mi annyit tesz: Becsüld a nagyra törekvő férfiakat bukásukban is, és új bátorságot merítve, még inkább fokozódó vágygyal újra fogtam neki a támadásnak, és így váltakozó fordulatokkal folytatott küzdelmek közt és némely részleges és barátságtalan győzelem és terep-elfoglalás után végre az 1823. évben sikerült teljesen keresztül törnöm, ezt a minden módon megvihatatlan sziklavárat megrohannom és véglegesen bevennem és evvel egy új, még fogalma szerint sem sejtett tudományt, a tér tudományát megalapítanom.»

XI. FEJEZET.

Az abszolút geometria fölfedezése BOLYAI János által.

Második rész: A XI. axióma bebizonyíthatatlan volta.
Az Appendix (1823—1832).

«A tér tudományára vonatkozó munkám leglényegesebb részének» — beszéli el BOLYAI János — «már az 1823. év végén voltam birtokában, a mikor télen, éppen éjfélkor hatoltam át az *Appendix* 29. §-ának lényegén, habár más úton, mely azonban szintén sajátos szépségnek örvend.» Ez a paragrafus tartalmazza annak a vonatkozásnak levezetését, a mely fennáll valamely pontból valamely egyenesre bocsátott y merőleges és amaz u szög között, melyet a ponton át az egyeneshez húzott aszimptota a merőlegessel alkot. Ez olyan vonatkozás, mely az abszolút trigonometriához vezető utat megnyitja és lehetőségessé teszi, hogy a XI. axiómától független geometriának így levezetett rendszerét az euklidikus geometriával egy rangba helyezzessük.

A hosszú és fáradságos munkával kiküzdött siker feletti nagy örömeiben 1823 november 3-ikán Temesvárról a következőt írja János Farkasnak:

«Kedves Édes Apám! Annyi teménytelen megírni valam van az ujj találmányaimról, hogy éppen most nem tudok másként segíteni magamon, mintha semmibe se ereszkedek belé, 's tsak egy quartára irok.» Erre olyan közlések következnek, melyek itt nem jönnek tekintetbe, de a levél végén visszatér János a földologra. «A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, el-készítem, 's mód leszsz, a' parallelákrol egy munkat adok ki; ebbe a' pillanatba *nincs* kitalálva, de az az út, mellyen mentem, tsaknem bizonyosan ígérte a' tziel el-érését, ha az egyébaránt lehetséges; *nincs* meg, de olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam el-bámultam, 's örökös kár volna el-veszni; ha meg-látja Édes Apám meg-esmeri; most többet nem szollhatok, tsak annyit: *hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem*; mind az, valamit eddig küldöttem, tsak kártyaház a torony-

hoz képeest. Meg vagyok győződve, hogy nem sokkal fog kevesebb betáületemre szolgálni, mintha fel-találtam volna.»

János akkori álláspontját SCHLESINGER találóan a következő szavakkal ecseteli: «... abból a föltevésből, ha a parallelák axiomája nem volna igaz, levonta a következményeket, ezek a következmények alkotják azt az új más világot, a melyről ír, és már most e következményekben keresi az ellentmondást; de már kételkedik abban, hogy ilyen ellentmondás egyáltalában létezik-e.» «Hogy [János] mikor tette meg a döntő lépést» — folytatja SCHLESINGER — «azaz mikor jutott arra a meggyőződésre, hogy az a geometriai rendszer, a mely a parallelák axiomájától független, magában fenállhat, teljes biztonsággal meg nem állapítható; csak az bizonyos, hogy az 1825. év tavasza előtt.»

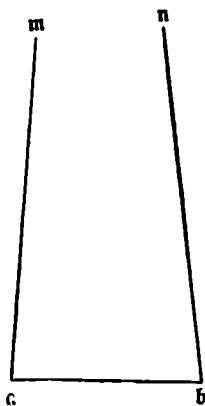
Mielőtt azonban János vizsgálatainak e döntő fordulatra reátérnénk, még arról kell beszámolnunk, hogy milyen álláspontot foglalt el Farkas a fia felfedezéseivel szemben. Mindenekelőtt azt a kívánságát nyilvánította, hogy fölvehesse fiának parallelák elméletét az ő *Tentamenjébe*, a melyen már 20 év óta dolgozik és melynek kiadását — úgy remélte akkor — már nemsokára megvalósíthatja. «Azt tanácsolta nekem, hogy ha valóban sikerült, akkor nyilvánosságra való bocsátásával két okból is sietnem kell, először is mert az eszméket könnyen más sajátíthatja el, ki aztán előbb adja ki, másodsor pedig abban is van valami igaz, hogy bizonyos dolgoknak mintegy megvan a maguk korszaka, a mikor különböző helyeken egyidőben fedeztetnek fel, a mint tavaszkor az ibolyák mindenütt kikelnek, és mert minden tudományos törekvés csak nagy háború, a melyre nem tudom, hogy mikor következik a béke, azért siessünk mielőbb győzni, minthogy itt az első illeti meg az elsőbbség.»

Farkas sejtelve helyes volt. GAUSS már 1819 előtt birtokában volt a nem-euklidikus trigonometriának; a geometria alapjait illető gondolataira pedig nemsokára visszatérünk. Továbbá 1826-ban TAURINUS nyomtatta ki *Geometriae prima elementa* című művét, mely mutatja, hogy szerzője a nem-euklidikus trigonometriát ismerte és ügyesen tudott vele bánni. Végül LOBATSCHESKIJ bizonyára már 1826-ban volt e trigonometria birtokában és 1829-ben adta ki *A geometria alapjairól* című értekezését, a melyben részletesen kifejti rendszerét. Az orosz kutató és János vizsgálatainak összehasonlítására a XVI. fejezetben lesz alkalmunk, a melyben János kritikai észrevételeit LOBATSCHESKIJ *Geometrische Untersuchungen* (1840) című művéről mutatjuk be.

Az 1823 november hó 3-ikán kelt levélre írt válaszában Farkas

nem állhatta meg, hogy fiát ismét óvatosságra ne intse. Emlékezteti, hogy hogyan járt KÄSTNER. Ez az *Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie* című művében, mely Farkas birtokában volt és a melylyel bizonyára már Göttingában ismerkedett meg, elbeszéli, hogy sokáig azt hitte, hogy azt a nehézséget, mely a parallela tanában fellép, HAUSEN *Elementa matheseos* [1734] című műve elhárította, míg megnyugvásából ki nem ábrándította COSTE, a lipcei francia község volt hitszónoka, ki értésére adta, hogy HAUSEN hibát követett el. Végül most sem maradt el Farkasnak az az intése, hogy egyetlen fia ne essék, úgy mint ő, a paralleláknak áldozatul.

Mikor János 1825 február havában atyját Maros-Vásárhelyt meglátogatta, az *abszolút tér-tudománynak* magával hozott kidolgozását terjesztette neki elő. Farkasnál nem talált megértésre és elismerésre, a mi más vizálykodások által még jobban kiélesedett meghasonlást idézett elő apa és fiú között, mely e kettőnek, ki alapjában szoros összetartozása tudatában volt, életének sok évét elkészerítette. «Értékét minden gondolható módon kisebbíteni törekedett és minden tőle telhető módon szavalt ellene, minek okát abban a tehetetlenségében kerestem, hogy képtelen volt a dolog velejébe hatolni. Például magyarázataim után kicsinyléssel, mely azonban ő reá szállt vissza, mondta, hogy ez csak az antieuklidikus rendszer kidolgozása. Még ha valóban is csak az lett volna, akkor sem látszott volna neki olyan



7. ábra.

jelentéktelennek, ha értelmével világosabban fogta és kedélye elfogulatlanabb lett volna. Egész kétségbe ejtő módon azt is állította, hogy csak két (*subjective successive* gondolható) rendszer van, t. i. az euklidikus, és ha ez nem áll fenn, akkor egyetlen másik, melyben a parallelszög nagysága absolute meg van határozva, és e rögzítmét nem lehetett fejéből kiverni és a lehető legvilágosabban előadott érveim után sem bírta belátni, hogy számtalan hypothetikus rendszer lehetséges, melyek közül a valódit nem vagyunk képesek kiválasztani, minthogy pl. ugyanazt az ab alapvonalat [7. ábra] és ugyanazt a bam belső szöveget tartva meg, $bn || am$ [bn aszimptotikus am -hez] esetében a másik belső

szögnek nyilván 0-tól (kizárólag) $2R$ — bam -ig bezárólag bármely tetszés szerinti értéket tulajdoníthatunk, a mint az magában a [tér-]tudományban részletesebben ki van fejtve.

•Meglepte, hogy az e betű a kifejezésekben gyakran lép fel, és az ~~átolvasás~~ után azt kérdezte tőlem, vajjon ez szükségszerűleg fordul-e

elő. Én igennel feleltem, de értésére adtam, hogy olyan kifejezésekben, a milyen pl. $e^{\frac{1}{2}}$, az e betű annyiban nem lényeges, a mennyiben helyébe minden más hosszúság tehető, hacsak i helyébe is a megfelelő hosszúságot választjuk. Erre az e parádézásán, mint valami játékszeren érzett öröme lelohadt, és azt mondá: «Bizony, bizony! ebben a tudományban az e nem lép fel szükségszerűleg. E szerint az i -vel jelölt hosszúság nagy fontosságáról távolról sem volt sejtelme, csak önkényszerűségnek gondolta.»

SCHLESINGER «a dolog lényegét», melyet Farkas nem volt képes felfogni és a mely tényleg olyan belátásra mutat, mely csak a tizenkilencedik század végén talált teljes méltatására, a következő módon fejti ki.

«A geometria egy a prioristicus tudomány, melynek feladata abban áll, hogy a tér világának a tünetényeit, melyekről a szemlélet révén szerzünk tudomást, leírja. A geometria rendszerének, mely egészen abstract fogalmakból építendő fel, csak azt a feltételt kell tehát kielégítenie, hogy eredményei a térbeli szemlélettel összhangzatban legyenek. De mivel ez a szemlélet csak véges tartományra terjedhet ki, az EUKLIDÉS postulátumából eredő kérdésre más feleletet nem adhat, mint azt, hogy a mennyire a kérdéses két egyenes a metsző harmadikon mérve, véges távolságot mutat, e két egyenes mindig a két deréknél kisebb összegű belső szögek oldalán találkozik addig, a míg ezt a szemlélettel követni tudjuk, azaz addig, a míg ama két szög összege egy bizonyos határon alul marad. Hogy mekkora ez a határ, ezt a szemlélettel — azaz *gyakorlatilag* (practice), a mint János mondja — nem lehet eldönteni; csak alsó határát állapíthatjuk meg annak az értéknek és vele együtt a BOLYAI-féle i értéknek. Tegyük mindjárt hozzá, hogy még fennmarad annak a lehetősége is, hogy a két egyenes a metsző egyenesnek másik oldalán találkozik, a mi ugyanaz, mint a BOLYAI-tól elvetett I. feltevés [véges tér feltevése], a mely képzetes i -nek felel meg.»

«Az abszolút geometria rendszere tehát egy tetszés szerinti állandót tartalmaz; ha ezt BOLYAI szerint pozitívnak és azokhoz a távolságokhoz képest, melyek a szemléletnek hozzáférhetők, elég nagynak vagy pedig a csak később RIEMANN által kiépített I. feltevés értelmében képzetesnek és abszolút értékre nézve elég nagynak választjuk, a geometria olyan rendszerét nyerjük, a mely teljesen megegyező a szemlélettel. Csak a nevelésnek és a szokásnak tulajdonítandó, hogy még ma is rendesen csak az euklidesi rendszert tekintik *szemlélhetőnek*, a mely az i végtelen nagy értékének felel meg.»

«Az a kétezer esztendőös kérdés tehát, hogy vajjon EUKLIDÉS

postulatuma helyes-e vagy sem, BOLYAI János szerint teljesen hiába-való, e postulatum sem nem helyes, sem nem hamis, hanem a geometria felépítésére egyszerűen felesleges. EUKLIDÉS rendszere, a Σ — a mint azt BOLYAI nevezi — a térbeli tünemények leírására ép oly alkalmas, mint akármelyik S rendszer, a melyben i -nek véges és elég nagy értéke van; történelmileg az euklidesi rendszer azért fejlődött először, mert bizonyos tekintetben a legegyszerűbb. De evvel az egyszerűséggel szemben ki kell emelni, hogy a tetszőleges állandót tartalmazó S rendszer sokkal változatosabb, mint az euklidesi rendszer, a Σ . Az S -nek viszonylata a Σ -hoz — hogy egy ugyancsak matematikusnak szembetűnő hasonlatot használjak — olyan, mint az elliptikus függvényeké a trigonometrikus függvényekhez, mint az ellipszisé a körhöz.»

Ha arra a vizálykodásra, mely 1825 tavaszán Farkas és János között a tér tudománya miatt kitört, a mint a IX. fejezetben láttuk, nemsokára be is következett a kibékülés, a béke köztük nem volt tartós; mert azok az okok, melyek köztük a meghasonlást előidézték, tovább is fennállottak. Farkasnak még mindig újabb kétségei és aggodalmai támadtak; bizonyára jót akart vele, hogy intelmeit nem hagyta abba; az volt a kívánsága, hogy János ne pazarolja fiatal erejét a parallelákra, hanem más vizsgálatokra térjen át, a melyekkel még nagy sikereket érhetne el. Ámde Jánosnak teljesítenie kellett azt a küldetést, a melyre hivatva volt, és ezért hallgatott a belső szózatra.

Elég, ha azokból a levelekből, melyeket 1825 és 1829 között Farkas Jánoshoz intézett, még csak egy igen jellemző részletet közlünk.

«Ha nekem akkor sikerült volna [a parallelák elméletét rendbe hozni] egészen más ember vált volna belőlem, nem házasodtam volna kétszer, sem magamat a kertészetre, a költészetre, sem pedig a faze-kasságra nem adtam volna, elvesztett kedvemet másutt keresve; erkölcseileg jobb ember vált volna belőlem és hivatalomban és háztartásomban a helyemet jobban töltöttem volna be. A ki boldog, könnyebben boldogít másokat is; mi csurogjon az olyan forrásból, mely maga is száraz? Egyetlen órát se vesztegess vele. Jutalmat nem hoz, és megmérgezi az egész életet. Általában még száz nagy geometer évszázadokon át tartó fejtörésével sem lehet [a tizenegyediket] új axióma nélkül bebizonyítani. Azt hiszem, hogy minden erre vonatkozólag kigondolható eszmét kimerítettem. Ha GAUSS idejét tovább is a XI. axióma fölötti tépelődéssel töltötte volna, akkor a sokszögek tana, a *Theoria motus corporum coelestium* és minden egyéb munkái nem kerültek volna a napvilágra, és ő egészen elmaradt volna. Írásban [az 1804 november 25-én kelt levélben] megmutathatom, hogy

fejét a paralellákon törte. Szóval és írásban kijelentette, hogy eredménytelenül gondolkozott róluk. Eszméim, bár ezek [Göttingai párhuzamosak elmélete] korántsem elégitették ki, nagyon tetszettek neki, és Ő figyelmeztetett reá, hogy milyen nagyfontosságú materia a paralellák dolga. Az arithmetika és geometria elemeiben akkor GAUSS (ki egyebiránt sok toronyemelettel kimagaslott fölöttem) kevésbbé volt erős mint én pusztán magamtól, de neki a magasabb számítások már csak játék voltak, mikor nekem még csak sejtelmem sem volt róluk».

Figyelemre méltó, hogy Farkas ebben a levélben a XI. axióma bebizonyítását lehetetlennek mondja. János leírja, hogy apja ezt hogyan értette. «Az ő érvelése a lehetőség ellen az, hogy minden, a mi a XI. axiómával ellenkezik, a végtelenben rejtőzhetik, és hogy ha ott hol először (*ugyanabban a síkban levő egyenesek*) metszését tárgyalni kezdjük, bármiként vesszük fel ennek törvényét, ezt az előzmények nem ronthatják le; mert bennök a metszésnek törvényéből még semmi sem foglaltatván, tehát belőlük a metszés törvénye nem is vezethető le. A XI. axióma helytelensége és minden, a mi ebből következik, a többi geometriai tétellel megfér. Hogy ez az okoskodás mennyire értéktelen és erőtlen, nem is szorul bebizonyításra. Ugyanavval a joggal azt is lehetne állítani, hogy semmiféle új tárgyról *nem* szerezhetünk tiszta ismereteket. A lehetetlenség helyes bebizonyítása bizonyára mélyebben rejlő alapon épül fel».

János itt reámutat a *Tentamen* első kötetének 490. oldalára (l. e mű második részének 99—100. oldalait). Saját kísérletéről, mely oda irányul, hogy a XI. axióma bebizonyításának lehetlenségét kimutassa, csak később számolunk be.

Az elismerést, melyet apja tőle megtagadott, János végre másoknál kereste. Már 1826-ban, akkori kapitányának, WOLTER von ECKWEHR Jánosnak «egy írásbeli dolgozatot adott át, a melyben már az egésznek az alapja le van téve és a mely valószínűleg még nála van». E dolgozat megtalálására fordított minden fáradság, fájdalom, eredménytelen maradt. A mint a IX. fejezetben láttuk, János később azt kívánta, hogy a dolgot Gauss döntse el.

«Nagyrabecsült GAUSS! Bocsásd meg, hogy óriás-pályádban háborgatlak; tarts egy kis szünetet és ajándékozd meg egy percczel a baráti viszonyt». E szavakkal, melyeken érezni, hogy írójuknak nehezebbre estek, vezette be 1831. június hó 20-án Bolyai Farkas a tizenöt évi szünet után megújuló levelezést ifjúkori barátjával. Miután röviden a maga sorsáról beszél és János fiáról elreferál, írja: «Az ő kérésére küldöm e művecskét hozzád: légy szives, itéld meg éles, átható sze-

meddel és magas ítéletedet kimélet nélkül ird meg válaszdoban, melyet epedve várok.» A boríték belső oldalán néhány rövid, az Appendix tartalmára vonatkozó megjegyzés olvasható. «GAUSS-nak kicsiny, tiszta képet nyújtottam dolgozatodról» — írja 1831 szeptember hó 17-én Farkas Jánosnak — «ne hogy előre megborzadjon a materiától; de nem is jutott eszembe, hogy a művecskét nem kapja egyidőben levelemmel. Késő ősszel művemet neked is meg Gaussnak is fogom elküldeni».

Farkas levele ZEYK József útján jutott GAUSS-hoz, de a művecskét nem kapta meg. «Ezt a művecskét» — írja 1832 január hó 16-án Farkas GAUSS-nak — «az első levéllel egyidejűleg küldtem neked és sokáig nem tudtam, hogy a fatális kolera-bajok miatt hová lett. Most a postán ajánlva küldöm ZEYK József úrnak avval a kéréssel, hogy valami módot gondoljon ki, a melylyel az én művem, mihelyt megjelen, neked díjtalanul kézbesíthető legyen . . . Fiam írja Lembergől, hogy azóta egyet-mást egyszerűsített és elegánsabban vezetett le és bebizonyította, hogy a priori lehetetlen eldönteni, vajjon a XI. axióma igaz-e vagy sem. Bocskásd meg alkalmatlankodásomat — fiam többre becsüli a te ítéletedet, mint egész Európáét — és csakis erre vár. Szívből kérlek, értesíts engem nemsokára a te ítéletedről, a melynek értelmében majd írok neki Lembergbe».

Hogy GAUSS a második küldeményt hogyan fogadta, arról szól az átadónak, ZEYK Józsefnek értesítése, ki az 1832. év márczius havában szüleinek a következőt írja :

«BOLYAINAK mondják meg instállom, hogy az Olvaso társaságban butsut vévén GAUSS-tól és kérdezvén, hogy nem akar é neki valamit izenni azt felelte, hogy nem sokkal ez előtt válaszolt levelére, a melyre el butsuztunk, azután csak egyszerre félre tévén az ujságot, ismét fel keresett és kérdezte, ha esmerem é személyesen az ő, az az a BOLYAI fiát, melyre midőn igennel feleltem, azt mondotta: Der ist ein sehr ausgezeichnete Kopf, ja sehr ausgezeichnet; azutánn egy munkáját is által adta nekem, melyet haza menetelelkor oda fogok adni BOLYAINAK. Nem tudom, írtam-é, hogy mikor a János munkáját leg előbb által adtam neki és titulussát el olvasta meg hümmegte magát neki, egyszersmind el mosolyodván, mintha mondotta volna: magna petis Faëton de úgy látom mostani ki felyezéséből hogy jonak találta még is. —»

A válasz, melyet GAUSS 1832 márczius hó 6-án «régí felejtetetlen barátjához» intézett, János egész további életére oly nagy hatással volt, hogy szükségesnek tartjuk az ő reá vonatkozó részleteket itt szó szerint közölni.»

Miután GAUSS a ZEYK úr által neki kézbesített két levél átvételét elismeri, röviden családi ügyeiről ír, és azután ily módon folytatja:

«Most valamit a fiad munkájáról. Ha avval kezdem, hogy *nem szabad megdicsérenem*, bizonyára egy pillanatra meghökkensz; de mást nem tehetek; ha megdicséreném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérem: mert a mű egész tartalma, az út melyet fiad követett, és az eredmények, a melyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott meditációimmal. Valóban ez rendkívül meglepett engem».

«Szándékom volt, hogy saját munkámból, melyből egyébiránt mostanáig csak keveset tettem papirosra, életemben semmit se bocsátok nyilvánosságra. A legtöbb embernek nincs is meg a helyes érzéke az iránt, a min ez a dolog múlik, és én csak kevés olyan emberre akadtam, a ki azt, a mit vele közöltem, különös érdeklődéssel fogadta. Erre csak az képesít, hogy élénken érezzük, hogy mi az, a mi tulajdonképen hiányzik, és ami ezt illeti a legtöbb ember nincsen vele tisztában. Ellenben az volt a szándékom, hogy idővel mindent úgy írjak meg, hogy legalább majdan velem el ne pusztuljon.»

«Nagyon meglepett tehát, hogy e fáradságtól már most megkimélhetem magamat, és nagyon örvendek, hogy épen régi jó barátom fia az, ki engem olyan csodálatos módon megelőzött.»

«Nagyon jellemzőknek és rövideknek találom a jelöléseket: de azt hiszem, hogy jó lesz némely főfogalomra nemcsak jelet vagy betűt, hanem meghatározott nevet is megállapítani, és én már régen gondoltam néhány ilyen névre. A míg a dolgot közvetetlenül szemlélve átgondoljuk, nevekre vagy jelekre nincsen szükségünk, ezek csak akkor válnak szükségessékké, ha másokkal akarjuk magunkat megértetni.»

«Így pl. azt a felületet, melyet fiad F -nek nevez, parasphaerának, az L vonalat pedig paracyklusnak lehetne nevezni: alapjában ezek a végtelen sugarú gömb ill. kör. Hypercyklusnak volna nevezhető ama pontok összessége, melyek valamely egyenestől, melylyel együtt ugyanabban a síkban fekszenek, egyenlő távolságra vannak; hasonló volna a hypersphaera. Ámde mindezek csak jelentéktelen mellékes dolgok; a fődolog a tartalom, nem a forma.»

«A vizsgálat némely részében én némileg más úton haladtam; mutatványul ide csatolom (a fővonásaiban) tisztán geometriai bebizonyítást annak a tételnek, hogy valamely háromszög szögei összegének különbsége a 180° -tól arányos a háromszög területével...»

«Itt csak a bebizonyítás alapvonalait akartam bemutatni min-

den simítás és csiszolás nélkül, a mit neki megadni most nem érek reá. Szabadságodban áll, hogy fiaddal közöld; mindenesetre arra kérlek, hogy őt részemről szívélyesen üdvözzöld és különös nagyra-becsülésemről biztosítsd. Hívd fel egyszersmind arra, hogy a következő feladattal foglalkozzék: *Meghatározandó a tetraëder (négy sík által határolt tér) köb tartalma.*»

«Minthogy a háromszög területe olyan egyszerűen állítható elő, várható volna, hogy erre a térfogatra is van ilyen egyszerű kifejezés: ez a várakozás, úgy látszik, csalfa.»

«Hogy a geometriát kezdetétől fogva rendesen tárgyalhassuk, nélkülözhetetlen, hogy a *planum* lehetőségét bebizonyítsuk; a közönséges értelmezés túlsokat tartalmaz és tulajdonképen alattomban magában foglal egy tételt. Csodálatos, hogy EUKLIDESTől kezdve a legújabb időkig minden író oly hanyagul látott hozzá ehhez a dologhoz; ámde ez a nehézség merően más természetű, mint az a nehézség, hogy döntsünk Σ és S között, és az előbbinek a mellőzése nem olyan nagyon nehéz. Valószínű, hogy már a te könyved is fog engem e tekintetben kielégíteni.»

«Épen annak lehetetlensége, hogy *a priori* Σ és S között döntsünk, legvilágosabb bizonyítéka annak, hogy KANTnak nem volt igaza, midőn azt állította, hogy a tér csak *formája* a mi szemléletünknek. Más ép olyan erős okra egyik kis dolgozatomban mutattam reá, mely a Gött. Gel. Anzeigen 1831. évi kötetében található, mint 64. darab a 625. oldalon. Talán nem fogod megbánni, ha abban fáradozol, hogy a G. G. A. ezt a kötetét megszerezd (a mi bármelyik bécsi vagy budai könyvkereskedő útján történhetik), mert benne találok néhány oldalon kifejtve a képzetes mennyiségekre vonatkozó nézetemnek lényegét is.»

A mi GAUSS hagyatékában a geometria alapjaira vonatkozó följegyzés található volt, az mind műveinek 1900-ban megjelent VIII. kötetében van összeállítva, a mihez hozzá vannak csatolva a BOLYAI Farkassal, OLBERSSEL, GERLINGGEL, WACHTERREL, TAURINUSSzal, SCHUMACHERREL, ENCKEVEL és STRUVEVEL folytatott levelezésének ide vonatkozó helyei. Mint az elliptikus függvények esetében, úgy itt is fényes igazolása mutatkozik ezekben GAUSS állításai helyességének, ha egyáltalában ilyen igazolásra szükség volna. A legfontosabb helyeknek egynéhányát itt idézzük, egyébiránt pedig GAUSS műveinek VIII. kötetére és műveinek X. kötetében tervezett tudományos életrajzára utalunk.

1797. július 28-iki kelettel naplójába bevezette GAUSS: *Plani possibilitatem demonstrari*; egy másik talán épen 1832 márczius

havában történt erre vonatkozó följegyzés található egyik jegyzőkönyvében (Werke VIII. 194. o.) Naplójában azután következik az 1799. év szeptember havában beírt följegyzés: *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus*; hogy ezek a vizsgálatok milyen irányúak voltak, kitűnik a BOLYAIhoz 1799 december hó 16-án intézett leveléből, melyről már a VI. fejezetben volt szó. Erre az az idő következett, a mikor GAUSS azon fáradozott, «hogy a nem-euklidikus geometriában ellenmondást, következtelenséget fedezzen fel»; e mellett ezt a geometriát annyira kifejlesztette, hogy «minden feladatot teljesen meg tudott oldani, ha az állandó = C meg van adva» (GERLINGhez 1819 márczius hó 16-án intézett leveléből, Werke VIII. 181. o.). Az ilyen állandó fellépésében előbb egy SCHUMACHERhez az 1808. évben intézett nyilatkozata szerint nehézséget látott (Werke VIII. 165. o.). A mint az 1824. november hó 8-án TAURINUSHoz intézett levele (Werke VIII. 187. o.) mutatja, akkor már arra a meggyőződésre jutott, hogy a nem-euklidikus geometria ellenmondás nélküli. Ebben a levélben ezt írja: «Az a feltevés, hogy [a háromszög] 3 szögének összege kisebb 180° -nál, egy sajátságos, a miénktől (az euklidikus geometriától) egészen különböző geometriára vezet, a melyet magam számára egészen kielégítő módon kifejtettem, úgy hogy benne minden feladatot meg tudok oldani, kivéve egy állandó meghatározását, a mely a priori nem puhatolható ki. Mennél nagyobb-nak vesszük fel ezt az állandót, annál jobban közeledünk az euklidikus geometriához és értéke végtelen, ha a két geometria egybe-esik. Ama geometria tételei részben paradoxonoknak és a nem gyakorlottak képteleneknek látszanak; a dolgot azonban pontosabban és nyugodtabban megfontolva, azt találjuk, hogy nincsen benne semmi lehetetlen».

Végül a SCHUMACHERhez 1831 május 17-én intézett levelében (Werke VIII. 213. o.) olvasható: «Saját [a párhuzamosakra vonatkozó] meditációimból, a melyek részben már körülbelül 40 évesek, de a melyekből soha semmit sem irtam fel, . . . néhány hét előtt egyet-mást feljegyezni kezdettem. Mégis kívánom, hogy velem el ne pusztuljon». Ezekből a feljegyzésekből (Werke VIII. 202—209. o.) látható, hogy BOLYAI János valóban «csodálatos módon megelőzte» GAUSS-t.

GAUSSnak levelét Farkas Ilentzfalvi Szász Pál nevű tanítványaival lemásoltatta és a másolatot Lembergbe küldte el Jánosnak; a postabélyegző szerint a küldemény 1832 április 6-kán érkezett oda. Később az eredeti levelet a fiának ajándékozta oda, a ki neki egy sajátkezűleg készített másolatot adott helyette. Ez a másolat 1856-ban SARTORIUS v. WALTERSHAUSENhez került, a mikor Farkas

ifjúkori barátjának leveleit, «kivéve a csakis commissio-szerű, semmi érdekést nem tartalmazókat» Göttingába küldte. Legelőször 1897-ben nyomtatták ki a Göttinger Nachrichtenben. Az eredetit, mely elveszettnek látszott, 1905-ben SZABÓ Péter találta meg apja, SZABÓ Sámuel hagyatékában, ki 1858-tól 1868-ig a marosvásárhelyi ref. kollegium tanára volt; most ezt is Göttingában a GAUSS-archívumban őrzik.

Mikor GAUSS nyilatkozata János tudomására jutott, eleinte semmiképen sem akarta elhinni, hogy GAUSS valóban tőle függetlenül és már jóval ő előtte szintén a nem-euklidikus geometriához jutott. Ennek megegyezésére hivatkozott GAUSS következő szavaira, melyek abban a levelében foglaltatnak, melyet 1804 november 25-kén Farkashoz intézett: *Megvan ugyan még mindig a reményem, hogy ama szirtek valamikor, és még az én végem előtt megyengedik az átjárást; sőt az a rút gyanúja is támadt, hogy az Appendixben lerakott eszméket atyja árulta el GAUSSnak, és ez most őt a prioritástól meg akarja fosztani.* De még akkor sem volt sehogyan sem megelégedve GAUSSnak iránta tanúsított viselkedésével, mikor már ennek a feltevésnek alaptalan voltáról meggyőződött. Nagy igazságtalanságnak tartotta, melyet egész életében nem tudott elfelejteni, és bár GAUSSról mindig mint «a kolosszális geometer»-ről, «a most élő legnagyobb matematikus»-ról beszélt, belsejében halálos gyűlöletet táplált iránta.

János följegyzéseiben részletes nyilatkozatokat találunk GAUSS viselkedéséről. Itt csak a következő helyet akarjuk közölni.

«Nézetem szerint, és mint erősen meg vagyok győződve, minden elfogulatlanul ítélőnek nézete szerint, mindazok az okok, melyeket GAUSS arra felhoz, hogy miért nem akart e tárgyra vonatkozó dolgozataiból életében mitsem közölni, erőtlene és semmise; mert hisz a tudományban úgy, mint magában a közönséges életben, mindig arról van szó, hogy szükséges és közhasznú, de még homályos dolgokat kellően tisztázzunk és az igaz és helyes iránt még hiányzó vagy inkább szunnyadó érzéket felkeltsük, kellően edzzük és előmozdítsuk. A matematika iránti érzék általában az emberiség nagy kárára és hátrányára, fájdalom, csak igen kevés emberben ébred; és ilyen okból vagy ürügyből, GAUSSnak, hogy következetes maradjon, kitűnő műveinek még igen jelentékeny részét magánál kellett volna rejtienie. És az a körülmény, hogy, fájdalom, a matematikusok között, még pedig a híresek között is, nagy számmal vannak felületesek, értelmes embernek nem szolgálhat okul arra, hogy csak felületest és középszerűt alkosson és a tudományt lethargikusan csak az örökölt állapotban hagyja. Efféle feltevés egyenesen természetellenesnek és merő oktalanságnak nevezhető; és ennél fogva csak annál inkább zokon esik, ha GAUSS a helyett,

hogy az *Appendix* és az egész *Tentamen* nagy becsét egyenesen, határozottan és nyíltan elismerte volna, és nagy örömét és érdeklődését nyilvánítva, arra törekedett volna, hogy a jó ügynek illő fogadtatást szerezzen, inkább mindezek elől kitérve csak jámbor kívánságokkal és a kellő műveltség hiánya fölötti panaszokkal érte be. Bizony nem ebben áll az élet, a munkálkodás és az érdem.»

Bármennyi igaz és megszívlelendő van is ezekben a szavakban, mégis helyt kell adnunk SCHLESINGER megfontolásának, mikor mondja: «De talán mégis helyesen cselekedett GAUSS, midőn a fejlődés folytonos menetét nem akarta megszakítani, talán az ő tartózkodása — melyet mi, kik nagy szellemének útjait követni nem tudjuk, érthetetlennek találunk — óvta meg attól, hogy Bæoticusok őt mint bolondot és eretneket rágalmazták, és így legalább a magány nyugalmaiban részesíté azt, ki mint más úttörő is, meg nem élhette a tőle ültetett magból fakadó termésnek a megérését.»

XII. FEJEZET.

BOLYAI János Domáldon (1834—1846.).

Az 1833. év június hó 15-én BOLYAI János Olmützből elutazott Maros-Vásárhelyre. Itt eleinte apja házában élt, kinek második felesége röviddel ezelőtt, 1833 április hó 2-kán meghalt. Házánál tartotta akkor Farkas a második házasságából származó fiát, a hét éves Gergelyt is. A Farkas és János közötti viszony rossz volt és csakhamar elviselhetetlenné vált. «A legkeményebb csapás pedig, mely megtörte szívemet» — panaszolja 1835 április hó 20-kán barátjához, Gauss-hoz intézett levelében Farkas — «fiamnak, a kiért oly sokat (néhánykor túlságosan sokat) tettem, majdnem hihetetlen hálátlansága; évek óta (de főleg az utóbbi években) mártirja vagyok — egy éve most, hogy végtére kénytelen voltam őt az apai körből száműzni... Minden tehetsége mellett szörnyen felfortyanó és bosszúvágyó katona, ki valami csak gyanított semmiségért tartósan kiengesztelhetetlen, — tehát mindenütt összeférhetetlen... Lehetséges ugyan, hogy a hatalmas forrongás után leülepszik, de addig én a bűtől elpusztulok.»

Annak oka, hogy János Farkas házat elhagyni volt kénytelen — a mint SZILY Kálmán elbeszéli — az volt, hogy a fiú annyira megfélemedezett magáról, hogy apját párbajra kihívta. Nagybátyja, BOLYAI Antal, kibékítette őket; de Farkas ahhoz kötötte magát, hogy fia ne lakjék többé nála. János ezentúl részben atyja jószágán, Domáldon, részben pedig atyjától külön, Maros-Vásárhely városában lakott. Apa és fiú elkerülték, hogy egymást lássák. Ámde azért sajtáságos levélváltás útján érintkeztek egymással. Az értesítések, melyeket egymáshoz juttattak, sem megszólítással, sem aláírással nincsenek ellátva; főleg tudományos, különösen matematikai kérdésekre vonatkoznak, azonkívül pénzügyi ügyekről és a domáldi jószág kezeléséről is esik bennük szó.

Mindazoknak az akadályoknak ellenére, melyek a tudományos segédeszközök és a tudományos érintkezés hiányából származtak, az 1833—1837 években, betegeskedő állapotában is, melyet még a váltóláz rohamai is súlyosbítottak, buzgón munkálkodott János a tér abszolút

tudományára vonatkozó vizsgálatainak tökéletesbitésén és folytatásán, hogy ezeket a tér tudományának olyan összefoglaló tankönyvébe egyesíthesse, a melynek az *Appendix* csak előjátéka lett volna. Persze, az eredmény nem felelt meg öröklődésének.

«János folyton ígérette, hogy nagy dolgokat fog tenni» — írja Bedőházi — «hanem mindezek csak ígérek maradtak. Dolgozott ugyan sokat, de csak kapkodva, félbehagyva az elkezdetteket, egyszerre többhöz is fogva. Maga is megvallja, hogy szegényli atyjával többször találkozni, magának téve szemrehányást, míg valamit nem mutathat. A midőn pedig valami jelét akarja adni, hogy él, atyja egyik-másik felfogását, bár gyakran nem volt igaza, kiméretlen bírálatnak veti alá... [Farkas] nem olvasta kellő figyelemmel talán [János] leveleit, alig átfutva félre vetette, s sokszor legderekabb tanait is félreértette.» Talán hivatkozott is néha az 'auctoritásra' [GAUSSRA] s fia későbbi munkálatában nem találva az 'Appendix'-hez méltó, rendszeres, önálló egészet, nem gondolta meg, hogy e kis mű is egy emberi életnek számot tevő nagy eredmény, s hogy egy második olyant alkotni nem lehet minden pillanatban. Talán nagyon is hiszékeny volt más emberek mende-mondáival szemben fiát illetőleg, s ennek komoly kérését, hogy 'ne legyen rossz véleménynyel róla, ne higgyen semmit meggyőződés nélkül, mert meglátja, hogy nem hiában fáradozt', érzékeny lelkét hamar érintő valamely olyas szóbeszédre kész volt csak aféle kibeszélésnek tekinteni. Egyet azonban BOLYAI János nem tagadhatott meg atyjától, a szeretetet... Az ő szívét keserűség töltötte el, de gyűlölség sohasem férkezett abba. És fia? úgy látszik, mintha az igazi megbánás és gyöngédség hatná át az ő szívét is» «Egész tanom készítésében» — írja János életrajzi jegyzeteiben — «főleg őt is tartom szemem vagy elmém előtt kérdezgetve magamat, hogy valyon megelégedésére lesz-e nekie munkám, melyet hálám' jeléül nekie kívánok szentelni, 's legalább melylyel bár nyerhetném-meg némi kedvét 's szerezhethnék életünk' vége felé a' sok keserű 's boru után valami enyhítő vagy fájdalom-enyészető 's boru-oszlato 's az Eget szép fiatal-módra még egyszer kiderítő, engesztelő, 's a volt nagy fatalis —t lerontó 's helyre-hozó balzsamot.»

Jánosnak a tér tudományával való foglalkozását az szakította felbe, hogy az 1837. év őszén ő meg apja a herceg lipcei JABLONOWSKI-féle tudós társaság egy pályázatában vettek részt, melyet a képzetes mennyiségek szerkesztése tanának tökéletesítése céljából írtak ki. E pályázat történetéről a XIV. fejezetben lesz szó; itt csak azt jegezzük meg, hogy sem Farkas, sem János nem nyerte el a díjat.

A fájdalmas balsikerhez még hozzájárult Jánosnak egy új viszály-

kodása apjával, melyet a lipcei pályázatban való egyidejű részvételük idézett elő. Hogy Farkas mennyire neheztelt fiára, mutatja az a körülmény, hogy 1838 április havában a domáldi birtok kezelését illető minden ügynek elintézését Antal öcsésére bízta. Domáldra János saját elhatározásából ment száműzetésbe; több éven át nem is látta apját. Az 1842. év december havában apja így üdvözölte születése napján: «Egészséget testben! 's a lélekben oly tüzet a tanhoz; hogy lássak még, mielőtt elhunynék, egy Appendixet... Az integralis calculusnak végtelen mezeje van, két század óriásai is lassan haladnak; ott lehetne ifjú erővel próbálni.» Aztán azt javasolja neki, hogy nyilvánítsa véleményét TAYLOR sora maradékának LAGRANGE féle alakjáról, vagy készítse el a legegyszerűbb bebizonyítását a $4n+1$ alakú törzsszámok két négyzet összege alakjában való előállításának, vagy szolgáltatassa a következő tétel legegyszerűbb bebizonyítását: Ha két négyzet-szám összege osztható egy másik négyzetszámmal: akkor a hányados vagy maga is négyzetszám, vagy pedig két négyzetszám összege. «EULER-től vett ideából tsináltam ki. A Petersburgi aktákban van.» Hogy János régebben a felsőbb arithmetikával buzgón foglalkozott, Farkasnak 1831 június hó 20-kán GAUSSHOZ intézett leveléből tűnik ki, melynek illető helye így hangzik: «Fiamnak szándéka volt, hogy a te polygon-elméletedet németül, a kisebb [kaliberű] elméknek valamivel könnyebben hozzáférhető módon adja ki, mert bosszantja, hogy ezt az elméletet nem ismerik annyira, a mint ő kívánná; ámde én megmondtam neki, hogy valakitől (nem tudom, hogy kitől) hallottam, hogy te magad adtad ki külön; ezt magam is szeretném látni.»

Apja levele arra birta Jánost, hogy az 1843. év tavaszán Maros-Vásárhelyre menjen. Ámde nemsokára megújult az apjával való viszálykodása, és hat hét múlva ismét visszatért a jószágra, vissza a terméketlen, testi élvezetekben kimerülő élethez, a melybe a szerencsétlen 1837. év óta elmerült; úrrá lett most rajta a hiszterikus anyjától örökölt beteges ingerlékenység és elpusztította testét és lelkét.

Az 1845. évben meghalt BOLYAI Antal. Hagyatékában János az apjának egy 1838 márczius hó 19-kén kelt bizalmas levelét találta, melyben keservesen panaszkodik fiáról. Bár az óta hosszú évek teltek el, János mégis éktelen haragra lobbant, a melyet rideg módon éreztetett apjával. Ebhez még hozzájárult az is, hogy öcsésének halála után Farkas ismét törődni kezdett a domáldi birtok kezelésével. Kitünt, hogy János rosszul gazdálkodott; a birtok el volt hanyagolva, a szép erdő egy darabja ki volt irtva és a fa belőle el volt adva. Farkas most megvonta fiától az engedélyt, hogy Domáldon lakjék, és bérbe adta birtokát.

Az 1846. évben János visszatért Maros-Vásárhelyre, hol házat épített a maga és ORBÁN Rozália részére, kivel 1834 augusztus hava óta közös háztartásban élt, és a ki Dénes, Gyula és Amália nevű gyermekeinek volt az anyja. Szándéka volt őt elvenni, de nem volt abban a helyzetben, hogy a katonai hatóság által követelt biztosítékot előteremtse. Farkas megtagadta tőle a követelt apai örökség kiadását és a perrel való fenyegetéssel sem félemlítettette meg magát, részint mert ellene volt a házasságnak, részint pedig azért, mert ezzel kisebbik fia, Gergely, megkárosodott volna.

«Hogy ha bár az asszonynyal rosszul él is, legalább a gyereket szereti» írja Farkas az öcscsének, Antalnak. Dénes fiát maga János részesítette az első tanításban, remélve, hogy a fiú az ő matematikai tehetségét örökölte. Ámde az öröm és bű, melyben Farkast lángeszű fia részesítette, tőle meg voltak tagadva. BOLYAI Dénesből derék, becsületes tisztviselő lett; Gyulafehérvárott törvényszéki igazgató volt és ugyanott az 1913. év szeptember havában meghalt. Másik fia, BOLYAI Gyula, kalapos volt és 1902-ben mint öngyilkos fejezte be életét.

XIII. FEJEZET.

BOLYAI János további vizsgálatai az abszolút geometria terén.

A *Geometria általános vázlatában*, melylyel a *Tentamen* első kötete befejeződik, azt mondja BOLYAI Farkas: «Valamennyi olyan rendszert, a mely, ha [az Euklides-féle XI. axiómától eltekintve] a többi axiómákon kívül semmi egyebet nem tételezünk fel, reánk nézve subjective lehetséges, azaz, a melyek között csak egyetlen van olyan, mely absolute igaz, de hogy melyik az, azt eldönteni nem tudjuk, az *Appendix szerzője*, ki különös elmeélel fog hozzá e dologhoz, általánosan foglalt össze, és olyan geometriát épített fel, mely minden esetben absolute igaz; habár e kötet függelékében a nagy tömegből csak a legszükségesebbeket mutatta be, és a rövidség kedvéért sokat elhagyott, mint a milyen például a tetraeder megoldása és több más elegáns vizsgálat.» Hogy János túlment azon, a mit az *Appendix* tartalmaz, az 1835 április hó 20-ikán Gauss-hoz intézett levelében is említi Farkas. «A második kötet végén néhány az első kötetben bemutatott fogalom megvilágításán kívül megvan fiam felfogása szerint a két trigonometriának bizonyos megegyezése is. Szívesen a *tetraeder* megoldását is kinyomtattam volna, melyre fiam még egy évvel *Appendix*-ének kiadása előtt reájött: de a képletek, a melyeket láttam, nagyon is bonyolódottak voltak és én nem tudom őket. És mindenek felett annak bebizonyítását szerettem volna kinyomtatni, hogy emberi szemnek *absolute* lehetetlen belátnia, vajjon a XI. axióma igaz-e vagy sem: fiam azt állítja, hogy ő ezt *meggyőző módon* be tudja bizonyítani.»

E nyilatkozatokból kitűnik, hogy BOLYAI János az 1830-tól 1835-ig terjedő időben a következő három kérdés fejtegetésével foglalkozott:

1. Milyen vonatkozás áll fenn az abszolút trigonometria és a gömbi trigonometria közt?

2. Az abszolút geometriában mi a köbtartalma a tér olyan darabjának, melyet négy sík határol?

3. *Eldönthető-e, hogy az abszolút geometriának subjective lehetséges rendszerei közül a valóságban melyik áll fenn?*

Azokból a följegyzésekből, melyeket az 1830. és 1835. év közé eső időben ezekre a kérdésekre vonatkozólag János készített, fájdalom, csak kevés lap maradt fenn; de ezeket becses módon kiegészítik a János utolsó éveiből (1851—1858) származó följegyzések. Ezekről az utóbbiakról majd a XVI—XIX. fejezetekben számolunk be; mindazonáltal czélszerűnek tartjuk, hogy a felsorolt három kérdésre vonatkozó darabokat már ezen a helyen ismertessük.

A pótlások között, melyeket BOLYAI Farkas a *Tentamen*nek csak az 1834. évben megjelent második kötetéhez csatolt hozzá, van egy toldalék az első kötet *Appendix*éhez, melyet ő maga szerkesztett:

«Végül legyen szabad valamit, a mi az *Appendix* szerzőjének tulajdona, mint betetőzést ide csatolni; de bocsásson meg, ha egyhez-máshoz nem az ő elmeélével fognék hozzá.»

«A dolog röviden a következőben áll: a gömbi trigonometria képletei, melyek az említett *Appendix*ben EUKLIDÉS XI. axiómájától függetlenül vannak bebizonyítva, a sík trigonometria képleteivel megegyeznek, ha (a mindjárt kifejtendő módon) a gömbi háromszög oldalait valósoknak, az egyenes vonalúét pedig képzeteseknek vesszük fel, úgy hogy, a mi a trigonometria képleteit illeti, a sík képzetes gömbnek tekinthető, ha valósnak azt vesszük fel, a melyben $\sin R = 1$.»

Ezzel megegyeznek Jánosnak olyan följegyzései, melyek még a *Tentamen* második kötetének megjelenése előtti időből származnak. Ezekben elmondja: «Atyámat (az *Appendix*) nyomtatásának befejezése után Lembergben írásban figyelmeztettem arra, hogy ha az egyenes vonalú háromszög valamennyi oldalát *i*-re, mint egységre vonatkoztatva, ép olyan nagyságú képzetes mennyiségeknek tekintjük, akkor az egyenes vonalú háromszögre vonatkozó minden reláció teljes analógiában áll azokkal, melyek a gömbi háromszögre vonatkoznak. Pl. valamely derékszögű háromszögben, melynek befogói *a*, *b*, átfogója *c*, ha a háromszög gömbi,

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

és így tehát, hogy ha egyenes vonalú,

$$\cos + c = \cos + a \cos + b$$

[hol $+ = \sqrt{-1}$]. Ezen a módon a két trigonometria igen egyszerűen egybe van összevonva. És mégis sajnálom, hogy erre legalább nem mutattam rá, mert [hiszen] mindenkinek azonnal észre kell

vennie. Ez [a dolog] az óta, hogy ezeket a képleteket először feltaláltam, nem került el többé figyelmemet, csakhogy akkor főleg a parallelák materiáját, mint földolgot tartva szem előtt és a képzetes mennyiségek tanának általános hiányosságát és érthetetlen voltát véve fontolóra, annak a kísérletnek daczára, hogy ezt az eszmét el ne ejtsem, nem tudtam magamat reávenni, hogy olyan hiányos tant vegyek fel, a milyen a képzetesekről szóló addig volt, és minthogy az akkori körülmények parancsolta rövidség nem engedte meg, hogy [a képzetes mennyiségek tanába] mélyebben belebocsátkozzam, bár nem szívesen, elhatároztam magamat, hogy ezt a dolgot más alkalomra halasztom.»

Ez az alkalom kínálkozott 1837-ben, mikor Jánost a lipcsei herczeg JABLONOWSKI-féle társaság pályakérdése arra indította, hogy kidolgozza a képzetes mennyiségekre vonatkozó elméletét, melyet «lényegében már az 1831. évben kigondolt». E pályázatról majd a XIV. fejezetben számolunk be.

E *Responsio* 9. §-ában a következőt találjuk:

«Az {1832-ben Maros-Vásárhelyt megjelent} *«Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentialique huius propria introducendi»* című könyv első kötetének függelékében előadatnak a sík trigonometriájának képletei arra az esetre, ha helytelen volna az a tétel, a melyet EUKLIDÉS (valamennyi éles elméjű geometer ítélete szerint) helytelenül a XI. axióma alakjában állított fel (minthogy később a tér tudománya az említett axiómától függetlenül állapítottatott meg). Minden nehézség nélkül ugyanazokból a képletekből következik, hogy

$$\sin + \frac{a}{i} = \sin a \sin + \frac{c}{i},$$

$$\cos + \frac{c}{i} = \cos + \frac{a}{i} \cos + \frac{b}{i},$$

hol a , b , c a befogókat és az átfogót, a az a befogóval szemben fekvő szöget és i bizonyos ott értelmezett (a mostani feltevés mellett önmagában és önmaga által meghatározott) egyenest jelent. Már ebből a két egyenletből foly a sík trigonometriájának valamennyi többi egyenlete.»

«A ki ezeket az egyenleteket figyelmesen szemléli, belátja, hogy a derékszögű sík háromszög, és így tehát az egész sík, valamint a tőle egyenlő távolságú felületek (melyeket már sok évvel ez előtt, midőn erre az elméletre jutottam, *hypersphaerikusoknak* neveztem) a számítással teljesen hasonló módon tárgyalhatók, mint a gömb felülete; még pedig úgy, hogy ha azt az r mennyiséget, a melylyel bár-

mely mindenütt egyenletes felületben a derékszögű háromszög oldalait osztanunk kell, hogy a

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}$$

egyenlőség fennálljon, pl. ama felület *parameterének* nevezzük: akkor a sphaerikus felületek parameterei *valóságok*, a siktól egyenlő távolságú felületek parameterei *képzetesek* (azaz valóban létező mennyiségek a \vdash , \dashv jellel ellátva), a sík parametere $\dashv i$ (és hasonlóképen $\vdash i$).

„Ámde ezt a dolgot másképen is lehet felfogni. Lehet ugyanis a síkot {t. i. kevésbé természetes, alkalmas, helyes, egyszerű és elegáns módon} az i parameterhez tartozónak is tekinteni, és magukat az egyeneseket, a melyek a síkban a legnagyobb körök íveinek helyébe lépnek, az i parameterre nézve mint *képzetes íveket* felfogni. Ezen a módon azonban (a mint azt be lehet bizonyítani) magánál az i -nél *kisebb* parametereknek semilyen olyan egyenletes felület nem felel meg, a melyben az ívek az épen kifejtett célra képzeteseknek vehetők.»

Egy a *Responsio* fogalmazványához mellékelt lapon megvan a 9. § bővebb kidolgozása, melyet itt magyar fordításban közlünk.

„Mindazonáltal a következő elég érdekes megjegyzést eleganciaja miatt, valamint azért, mert az (úgy nevezett) képzetes mennyiségeknek igen kiváló alkalmazására mutat reá és segítségével az egész (a XI. axiómától független) *tér-tudományt* lehetőleg egyszerűen és kényelmesen adhatjuk elő, nem mellőzhetjük hallgatással. Távol maradjon azonban, hogy az igazságnak olyannyira *reális* tudománya *nem-létezőkről* való elmélkedéssel bemocskoltassék. Mi az értelme $\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ -nek, ha $\sqrt{-1}$ -nek nincsen értelme? Világosság háramlik e dologra, ha jól megjegyezzük, hogy a mennyiségek elébe tett $+$, $-$, \vdash , \dashv jelek egyebet nem jelentenek, mint azt a módot, a mely szerint bizonyos megállapodás után, melynek meg kell történnie, magukkal az abszolút, vagyis a jellel megelőzött mennyiségekkel az algebrai számolásban el kell bánnunk.»

„Ha t. i. a rövidség és egyszerűség kedvéért \vdash -t írunk $+\sqrt{-1}$ helyett és \dashv -t $-\sqrt{-1}$ helyett, úgy hogy $\vdash 1 \cdot \vdash 1 = -1$ és $\vdash 1 \cdot \dashv 1 = +1$ és a [33.] §, III szerint i -t fogadjuk el *egységnek*, akkor [az *Appendix* 31. §, I. pontjában előforduló elegáns képletekkel való összehasonlítás alapján könnyen meggyőződünk róla, hogy

$$1 : \sin a = \sin \vdash c : \sin \vdash a,$$

vagy ha a még nagyobb egyszerűség kedvéért nem a positive, hanem a \vdash jellel vett oldalokat jelöljük a , b , c -vel, hogy

$$1 : \sin a = \sin c : \sin a,$$

és ép úgy következik II-ből, hogy

$$\cos \alpha : \sin \beta = \cos a,$$

III-ból, hogy

$$\cos c = \cos a \cos b \quad \text{és} \quad \cot a \cot \beta = \cos c,$$

a 30. §-ból, hogy

$$\operatorname{tg} z = \rightarrow \sin + y \quad \text{és} \quad + \bigcirc y = 2\pi \sin + y,$$

vagy ha egyszer és mindenkorra megállapítjuk, hogy minden számításnál a sík minden egyenese a $+$ jellel veendő, úgy hogy azután $+y$ helyett y és $+ \bigcirc y$ helyett (a mennyiben az egész $\bigcirc y$ jel vonalat jelent) $\bigcirc y$ írható, akkor egyszerűen

$$\operatorname{tg} z = \rightarrow \sin y, \quad \bigcirc y = 2\pi \sin y;$$

továbbá a 32. § III. pontjából következik, hogy

$$\frac{r}{p} = \cos \eta, \quad s = p \sin \eta,$$

IV-ből, hogy

$$\bigcirc x = 2\pi \cos x - 2\pi = -2\pi \sin \operatorname{vers} x$$

s. a. t.»

«Nincsen senki, kinek nem tűnnék fel e kifejezéseknek a Σ -beli gömbfelület ugyanolyan nevű mennyiségeinek kifejezéseivel való igen nagy hasonlósága, vagy még inkább teljes megegyezése. Ha olyan gömböt gondolunk, melynek L alakú radiusa $= i = 1$ (tehát egyenes radiusa a 30. § szerint egyenlő $\log \operatorname{nat} (1 + \sqrt{2})$): akkor ennek a gömbnek felszíne és legnagyobb köre egyenlő az 1 radiussal leírt gömbéivel a Σ -ban, és valamennyi előbb nyert kifejezés teljesen megegyezik az ugyanazon mennyiségeknek megfelelő kifejezésekkel ebben a felületben.»

«Általánosan bebizonyítható, hogy bármely mindenütt egyenletes felületben — mely, eltekintve F -től, csak sphaerikus, sík vagy a síkkal párhuzamos [a siktól egyenlő távolságú] lehet — bármely legrövidebb (vagyis valamely tengelyen átmenő síkban fekvő) a vonalat abban az esetben, ha a felület sphaerikus, a megfelelő (ugyanabban a középponti szögben fekvő) ívet kifejező szám, ha pedig a felület sík vagy a síkkal párhuzamos, olyan egyenes darabnak mértékszámát fejezi ki, mely az első esetben magában abban a síkban, máskülönben a felülettel párhuzamos [egyenlő távolságú] p síkban, az a végpontjaiból reá merőlegesen bocsátott egyenesek talppontjai között fekszik, és ha

az előbbi esetben a felület minden vonalát a $+$ jellel, az utóbbiban pedig a $+$ jellel vesszszük, akkor mindezeknek a felületeknek elméletét ugyanazok a képletek fejezik ki és valamennyire nézve egymásnak teljesen megfelelő tételek érvényesek. Így pl. a gömbi trigonometria ismeretes képleteiből minden további beható vizsgálat nélkül azt következtethetjük, hogy a

$$\cot a = \cot a \sin b, \quad \cot c = \cot a \cos \beta \text{ stb.}$$

képletek egyenes vonalú derékszögű háromszögekre nézve is érvényesek, és ugyanazon a módon lehet fordítva a síknak minden ilyen értelemben kifejezett tulajdonságáról a gömbnek valamely tulajdonságára következtetni.»

«Itt elég, ha csak a legfontosabb tulajdonságokat érintjük, hogy megmutassuk, miképen történik ez az *átvitel* és hogyan lehet segítségével a tér tudományát legkényelmesebben az analitikai módszerrel tárgyalni, *a nélkül hogy tudnók*, vajjon Σ -e vagy S az érvényes.»

«Mindenekelőtt megjegyzendő, hogy rövideg kedvéért (nehogy új szót legyen szükséges képeznünk) a *gömb* (és *kör*) elnevezéseket *bővebb* értelemben fogjuk használni, úgy hogy minden mindenütt egyenletes felületet és vonalat ezekkel a nevekkkel illetünk meg. Bővebb vagy analitikai értelemben bármely mindenütt egyenletes felület vagy síkbeli egyenletes vonal *sugarának* [radiusának] bizonyos algebrai mennyiséget nevezünk, a mely nyilván semmiképen sem az *euklidesi sugár*, hanem az épen talált kifejezésekből azonnal kifejtendő módon adódik ki, a gömbön pedig valamely egyenletes vonal *sugarának* egy a gömböt két egybevágó részre osztó egyenletes vonal olyan darabját nevezzük, mely a görbületet méri. *Bármely gömbön minden körnek végtelen sok sugara van, míg euklidesi sugara épen csak egy van, vagy egy sincsen.* Ama sugarak kifejezése

$$y = 2n\pi,$$

hol n tetszés szerinti a $+$ vagy $-$ jellel vett egész számot jelent. Egyszersmind

$$\bigcirc (y = 2n\pi) = \bigcirc y,$$

hol a \rightarrow jel a sík és a vele párhuzamos felületek esetében, a $-$ jel pedig *önmagában záródó* gömbfelület esetében érvényes.»

E kézirat folytatása, fájdalom, nem volt megtalálható; de kiegészítésül szolgálhatnak János lapszéli jegyzetei az *Appendix* első 33. §-ának német kidolgozásában, melyet, mint a IX. fejezetben említettük, 1832 augusztus havában János főherczegnek átnyújtott.

Úgy látszik, hogy ezeket a lapszéli jegyzeteket BOLYAI János az 1837. évben készítette.

Az *Appendix* 30. §-ához hozzáteszi:

$$\circ y = 4\pi \frac{e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}}{2} = + 4\pi i \sin \rightarrow \frac{y}{i} = \rightarrow 4\pi i \sin + \frac{y}{i} .$$

Itt úgy, mint a képzetes mennyiségekről szóló 1837. évi értekezésében a jelölés szokásos módjától eltérően 4π az 1 radiussal leírt euklidesi kör területét jelenti.

«Olyan gömbön, melynek radiusa az i -vel egyenlő *paracyklikus* iv függőleges ordinátája (magassága), az y *cyklikus* sugarú \circ

$$= 4\pi i \sin \frac{y}{i} .$$

Valamely a sikkal párhuzamos hypersphærán pedig

$$\circ y = n \circ \left(\frac{y}{n} \right) \text{ (a sikkban) } = \rightarrow 4\pi n i \sin + \frac{y}{ni} = \rightarrow 4\pi i' \sin \frac{y}{i'} ,$$

ha az $ni = i'$ helyettesítést végezzük (hol i' az a hypercyklikus hosszúság, a melyre nézve ugyanazon a hypersphærán $I' = e$). És épen úgy az olyan gömbön, melynek radiusa a i' -vel egyenlő *paracyklikus* iv függőleges ordinátája, általánosan

$$\circ y = 4\pi i' \sin \frac{y}{i'} ,$$

a miből rögtön a hypersphærán érvényes kifejezést nyerjük, ha a sugár és a kör elébe is a $+$ (vagy mind a kettő elébe) a \rightarrow jelt teszszük. Hogy a parasphærán érvényes kifejezést nyerjük, csak $i' \sin \frac{y}{i'}$ határértékét kell vennünk (ha $i' \rightarrow \infty$); mert ez y -nal egyenlő, tehát valóban ezen a módon $\circ y$ -nak a parasphærán helyes kifejezése áll elő. Itt i' -t a gömb fősugarának (az $L = \infty$) és $\frac{+}{-}$ -t a hypersphæráénak nevezhetjük...

«Lehet a felületbeli sugárnak, vagy, ha úgy tetszik, a *parameternek* olyan értelmezését is adni, mely bármely egyenletes felületben levő minden egyenletes vonalra általánosan alkalmazható (még ha nem is záródik). Ugyanis ama vonalak a felülettel párhuzamos síkban előállított vetületeinek egyenes sugarát előbb értelmeztük, és nyilvánvaló, hogy a két vonal egyenes sugarainak szorzata a felületen levő kérdéses görbének értelmezendő sugara.»

Az 1851. évben János e gondolatokat új fogalmazásban dol-

gozta ki. E kidolgozás egyik fejezete annak a bírálathoz, melyet LOBATSCHESKIJ Miklós *Geometrische Untersuchungen* című művéről írt, a mely bírálattal majd a XV. és XVI. fejezetben foglalkozunk. LOBATSCHESKIJ a gömb geometriája és az «imaginarius» geometria közötti összefüggést pusztán mint analitikai tényt tünteti föl. E formalisztikus felfogással szemben János a magasabb, a geometriai felfogást akarta érvényre juttatni. E tekintetben János jóval túlhaladta LOBATSCHESKIJT és olyan magaslatra emelkedett, melyet csak a tizenkilencedik század végén értek el ismét. Megmutatta, hogy minden *meghatározott i*-nek megfelelő *S* rendszerben olyan felületek vannak, a melyek alakváltoztatás nélkül önmagukban minden irányban eltolhatók (*undique uniformes*); még pedig először olyan felületek, a melyekben tetszés szerinti radius mellett a gömbi trigonometria érvényes, másodszor olyanok, a melyekben a sík euklidesi geometriája megvalósul és harmadszor olyanok, a melyekben a síknak valamely tetszés szerinti *i*-nek megfelelő abszolút geometriája érvényes; más mindenütt egyenletes felületek nincsenek. A görbületi mérték fogalma segítségével, melyet GAUSS a János előtt úgy látszik ismeretlen maradt *Disquisitiones circa superficies curvas* című 1828-ban megjelent értekezésében vezetett be, e tény úgy fejezhető ki, hogy minden *S* rendszerben, de nem Σ -ban, alakváltoztatás nélkül önmagukban eltolható olyan felületek vannak, melyeknek görbületi mértéke valamely tetszés szerinti, a $-\infty$ és $+\infty$ között fekvő *állandó* érték. Ámde határozottan ki kell jelentenünk, hogy János nem ismerte fel a síknak valamely tetszés szerinti *i*-nek megfelelő abszolút geometriája és az *euklidesi térben, a Σ -ban levő*, állandó negatív görbületi mértékkel bíró felületek között fennálló azt az összefüggést, melyet 1869-ben BELTRAMI fedezett fel.

Áttérünk most BOLYAI Jánosnak a tetraeder köbösítésére vonatkozó vizsgálataira. melyeknek kezdete az 1831. évre esik. E tárgyra vonatkozó reánk maradt följegyzései egynek kivételével az 1856 körüli időből származnak. Kibetűzésüket az a körülmény nehezítette meg, hogy János bennük számos olyan rövidítést és új jelölést használt, melyeknek jelentését csak fáradság árán lehetett kipuhatolni. Minthogy ezeknek az újításoknak követése nem látszik ajánlatosnak, a szöveget a közönséges jelölés-módokkal adjuk elő.

János biztosította ugyan atyját, hogy feltalálta a tetraeder általános megoldását; följegyzéseiben azonban csak olyan különös tetraederekre szorítkozik, melyek úgy származnak, ha valamely a b-ben derékszögű abc háromszög c csúcsában a háromszög síkjára merő-

(és (1)-ből, hogy $\cot + y = \frac{\sqrt{\cot^2 + z - a^2}}{a}$); tehát

$$x = \rightarrow \arcsin \frac{a\beta}{\sqrt{\cot^2 + z - a^2}},$$

$$\begin{aligned} dx &= \rightarrow \frac{a\beta \cot + z \cdot d + z}{\sin^2 + z(\cot^2 + z - a^2) \sqrt{1 - \frac{a^2\beta^2}{\cot^2 + z - a^2}} \sqrt{\cot^2 + z - a^2}} = \\ &= \rightarrow \frac{\beta \cdot d + z \cdot \cos + z \cdot \operatorname{tg} a}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right) \sqrt{\cos^2 + z \left(1 + \frac{a^2}{\sin^2 b}\right) - \frac{a^2}{\sin^2 b}}}. \end{aligned}$$

Ámde [az $a-bcb$ derékszögű háromélből]

$$\cot a = \cot c \cdot \sin b, \quad \frac{a}{\sin b} = \cot c,$$

és így

$$dx = \rightarrow \frac{\operatorname{tag} a \cdot \operatorname{tg} c \cdot d + z \cdot \cos + z}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right) \sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}},$$

a miből [(1)-nek felhasználásával] az következik, hogy

$$K = - \frac{\frac{1}{2} \beta \cdot \operatorname{tg} c \cdot z \cdot d + z \cdot \sin + z}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right) \sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}}.$$

Ha ba a b -től kezdve növekedik, úgy hogy ∞ , akkor $b, c \rightarrow 0$, tehát $[\cos b,] \cos c \rightarrow 1$ és

$$\beta \cdot \operatorname{tg} c = \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \rightarrow \frac{c}{b} \quad (\text{mert } \frac{\sin c}{\sin b} \rightarrow \frac{c}{b}) = \operatorname{tg} a;$$

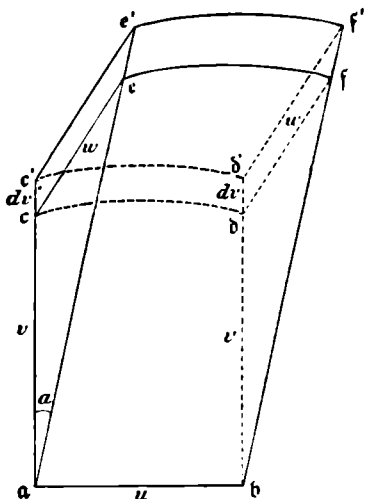
tehát

$$K \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot z d + z}{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot z d + z}{\frac{\cos^2 z}{\cos^2 a} - 1}.$$

Egy mellékelt czédulán, melynek hátára az előbbi katonai jelentés egy másik fogalmazványa van írva, (más följegyzéseken kívül) megtaláljuk az előbb említett útmutatást a K képletének levezetésére. Úgy látszik, hogy János e dolgot a következőképen gondolta.

Az $ab = u$ egyenesre (9. ábra) ugyanabban a síkban álljanak merőlegesen az $ac = bd = v$ egyenesek. Legyen továbbá $cb \parallel ab$ (Appendix 27. §-a) A cb vonal pontjaiban állítsunk w hosszúságú merő-

legeseket az $abdc$ síkra; főleg legyen $ce = df = w$. Végül fektessünk ace , bbf , $abef$ -en át síkokat. Ily módon olyan test származik, melyet négy sík és a $cdbfe$ hengerfelület darabja határol; ennek köbtartalmát jelöljük K -val.



9. ábra.

Növekedjék már mostan v a dv -vel oly módon, hogy ac -t és bd -t $cc' = dd' = dv$ vel meghosszabbítjuk. Ha a c' és d' pontokban a $c'e'$, $d'f'$ merőlegeseket emeljük, melyek az $abef$ síkot a e' és f' pontokban metszik, akkor a köbtartalomnak növekménye dK , mely másodrendű végtelen kicsinyektől eltekintve, annak a testnek a köbtartalmával egyenlő, mely úgy származik, hogy a $cdb'c'$ alapsíkra csupa w hosszúságú merőlegest állítunk. Ha azonban a p területű sík alapra csupa q hosszúságú merőlegest állítunk, olyan test származik, melynek J köbtartalmát az Appendix

32. § III-ban felállított és könnyen bebizonyítható

$$J = -\frac{1}{4} p \sin + 2q + \frac{1}{2} p'q$$

képlet szolgáltatja, a melyben úgy mint előbb $i = 1$ -nek veendő. Ámde a $cdb'c'$ alap területe egyenlő a következő szorzattal:

$$dv \cdot cb = dv \cdot u \cos + v,$$

és ennél fogva

$$dK = +\frac{1}{4} dv \cdot u \cos + v + v \cdot \sin + 2w + \frac{1}{2} dv \cdot w \cdot u \cos + v.$$

Továbbá az ace derékszögű háromszögből, ha az eac szöget a -val jelöljük, a következőt nyerjük:

$$\cot + w = \frac{\cot a}{\sin + v} = \frac{a}{\sin + v}$$

a miből az következik, hogy

$$\sin + w = \frac{\sin + v}{\sqrt{a^2 + \sin^2 + v}}, \quad \cos + w = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \sin^2 + v}}$$

és

$$\sin + 2w = \frac{2a \sin + v}{a^2 + \sin^2 + v},$$

úgy hogy dK számára végre a következő kifejezést nyerjük:

$$\begin{aligned}
 dK &= -\frac{1}{2} u \cos + v dv \frac{a \sin + v}{a^2 + \sin^2 + v} - \\
 &\quad -\frac{1}{2} u \cos + v dv \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin + v}{a} \right) = \\
 &= -\frac{1}{4} au \cdot \frac{2 \sin + v \cdot d(\sin + v)}{a^2 + \sin^2 + v} - \frac{1}{2} u \cdot d(\sin + v) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin + v}{a} \right).
 \end{aligned}$$

Ebből, ha v szerint 0-tól v -ig integrálunk, azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
 K &= \left[-\frac{1}{4} au \log \operatorname{nat}(a^2 + \sin^2 + v) - \right. \\
 &\quad \left. -\frac{1}{2} u \cdot \sin + v \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin + v}{a} \right) \right]_0^v + \\
 &+ \frac{1}{2} u \int_0^v \sin + v \cdot d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin + v}{a} \right) = -\frac{1}{2} u \sin + v \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin + v}{a} \right).
 \end{aligned}$$

a mi helyett azt is írhatjuk, hogy

$$K = -\frac{1}{2} u \sin + v \cdot w.$$

Minthogy a K test alapja,

$$abdc = -u \sin + v,$$

míg $w = ce$ magasságának nevezhető, ezzel azt a tételt nyertük:
 «A K test (*absolute*) = az alap és magasság fél szorzatával.»

Ennyire jutott János. Ha már most meggondoljuk, hogy GAUSS 1832 márczius hó 6-ikán írt BOLYAI Farkasnak János művéről, az *Appendix*-ről, a mikor Farkast arra kérte, hogy hívja fel Jánost arra, hogy

«a tetraeder (négy sík határolta tér) köbtartalmát kiszámítsa», ha továbbá figyelembe vesszük, hogy Farkas e levél másolatát elküldte Jánosnak, ki azt 1832 április hó 6-ikán vette kézhez, akkor nagyon valószínűnek fogjuk tartani, hogy János az imént közölt följegyzést GAUSS levelétől indítva írta le, a mivel az 1835 május hó 5-diki keltezés is igen jól megegyeztethető.

Fellette csodálatos, hogy az a módszer, a mely szerint GAUSS a tetraeder köbösítését végezte, teljesen azonos a Jánoséval. Ez kitűnik a GAUSS hagyatékában levő, 1832 márczius havából származó följegyzésből, mely GAUSS műveiben (VIII. k. 228. o.) ki van nyomtatva; GAUSS szakasztott ugyanavval a speciális tetraederrel foglalkozik (csak hogy ő $abcd$ helyett 3142-vel jelöli) és teljesen azonos módon az $ab(31)$ -re merőleges síkok segítségével bontja szét.

János későbbi följegyzéseiben akadunk még a

$$T = \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} c \cdot \int_0^z \frac{z d \cos (+z)}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1 \right) \sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}}$$

képlet átalakításaira, melyek arra a célra irányultak volt, hogy az integrálás elemi függvények segítségével («véges alakban») legyen elvégezhető. Minthogy az erre irányuló törekvéseknek a tárgy természeténél fogva meddőeknek kellett maradniok, e dolgok közlését itt mellőzzük.

Második módszer.

Szétbontás olyan síkok segítségével, melyek ab-n vagy cd-n mennek át.

A már említett czédulán, mely a tetraeder köbösítésére vonatkozó 1832. évi május havi följegyzéshez mellékelve van, még a következő megjegyzés is olvasható:

«Ha $\triangle abc$ [8. ábra a 106. oldalon] ab körül forog, akkor a származott egyenes kúpnak differenciálja,

$$dK = -2\pi dx \sin^2 + y.$$

Ez alatt az a korong értendő, mely $ee'ff'$ -nek az ab tengely körüli forgása révén keletkezik. A mondott képlet előfordul az *Appendix*-ben (32. §, VII); π pedig itt ismét a *quadrant*-t jelenti.

«Ámde

$$x = - \operatorname{arc} \sin \frac{\beta}{\cot + y},$$

$$dx = - \frac{d \frac{\beta}{\cot + y}}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\cot^2 + y}}} = - \frac{\beta \cdot -d \cot + y}{\cot + y \sqrt{\cot^2 + y - \beta^2}};$$

tehát

$$dK = + \frac{2\pi \beta \cdot d + y \cdot \sin^2 + y}{\cos + y \sqrt{\cos^2 + y - \beta^2 \sin^2 + y}} =$$

$$= - \frac{2\pi \cdot d \cos + y \cdot \sin + y}{\cos + y \sqrt{\frac{\cos^2 + y}{\cos^2 b} - 1}}.$$

«Ha azért, hogy a legegyszerűbb és egyszersmind a leginkább figyelemre méltó esetre jussunk, felteszszük, hogy $b \rightarrow 0$, akkor

$$dK \sim \frac{2\pi d \cos + y}{\cos + y}$$

és

$$\begin{aligned} K &= 2\pi \log \text{nat} \cos + y + (C=0) = \\ &= 2\pi \cdot y\text{-nak abszcisszája az } L\text{-ben.} \end{aligned}$$

«Ha most a T derékszögű asymptotikus tetraederben a da -val növekedik, akkor nyilván

$$dT = \frac{da}{4\pi} \cdot 2\pi \log \cos + eg$$

és [az efg derékszögű háromszögben]

$$\cot + eg = \cot + y \cdot \cos a,$$

tehát

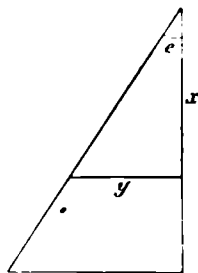
$$\cos + eg = \frac{\cot + y \cdot \cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 + y \cdot \cos^2 a}}$$

és

$$T = \frac{1}{2} \int da \log \text{nat} \frac{\cot + y \cdot \cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 + y \cdot \cos^2 a}} \cdot$$

Azokban a följegyzéseiben, melyek körülbelül az 1856. évből származnak, János ezt a gondolatot részletesebben fejtette ki. Miután az előbb közölt első módszert előadta, ezt mondja:

«Arra, hogy S -ben a tetraeder köbtartalmát meghatározhassuk, még egy szép út kínálkozik, ha előbb az egyenes kúpot kifejezzük, a mi (a végtelen sok lehetséges mód közül) két egyszerűbb módon történhetik; ugyanis először az alappal párhuzamos metszetek segítségével; másodszor a tengelyen át fektetett függőleges síkok segítségével. Az utóbbi módon [10. ábra]



10. ábra.

$$\cot + y = \frac{\cot c}{\sin + x}, \quad d(\text{kúp}) = - \frac{dx \cdot 2\pi \cdot \sin^2 + x}{\sin^2 + x + \cot^2 c}.$$

Azután a tetraedert a cd -t tartalmazó síkokkal [kell] metszenünk.»

Ehhez mellékelve van egy az itteni 11-dik ábrához hasonló ábra (a pontoknak stbinek betűkkel való megjelölése nélkül). Az egyenes kúppal való összefüggés, melyre János reámutat, abban áll, hogy a tetraeder ctt' -b térfogateleme olyan körkúp térfogatelemének is tekinthető, melynek tengelye cd , és mely a $c'dt$ derékszögű háromszög forgatása révén származik.

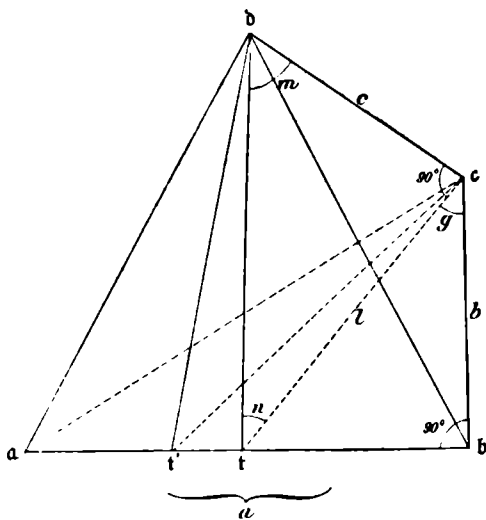
Más helyen visszatér János erre a gondolatra. Ott a következőt írja:

«Ha ab 11. ábra merőleges bc -re, cd merőleges abc -re, $b = bc$, t a ba -ban van, g egyenlő a bct szöggel, $l = ct$, m egyenlő a cdt szöggel, n egyenlő a ctd szöggel, T az $abcd$ [tetraeder köbtartalma]: akkor

$$\cot + l = \cot + b \cdot \cos g,$$

$$\cot m = \cot + l \cdot \sin + c = \cot + b \cdot \cos g \cdot \sin + c,$$

$$\cot n = \cot + c \cdot \sin + l = \frac{\cot + c}{\sqrt{1 + \cot^2 + b \cdot \cos^2 g}},$$



11. ábra.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dg} &= \frac{1}{4} \frac{\cos^2 + c \cdot \cos^2 + l}{\sqrt{1 + \cot^2 + l \cdot \sin^2 + c}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 + l \cdot \sin^2 + c}} \right) \log \frac{\cot + b \cdot \cos g}{\sqrt{1 + \cot^2 + b \cos^2 g}} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\cos^2 + c \cdot \cos^2 + b \cdot \cos^2 g}{(1 + \cot^2 + b \cdot \cos^2 g) \sqrt{1 + \cot^2 + b \cdot \cos^2 g \cdot \sin^2 + c}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 + b \cdot \cos^2 g \cdot \sin^2 + c}} \right) \log \frac{\cot + b \cos g}{\sqrt{1 + \cot^2 + b \cdot \cos^2 g}}. \end{aligned}$$

De ez a kifejezés még sokkal bonyolódottabb, mint az első úton nyert, mert itt nemcsak két négyzetgyök, hanem egy logaritmus is fordul elő.»

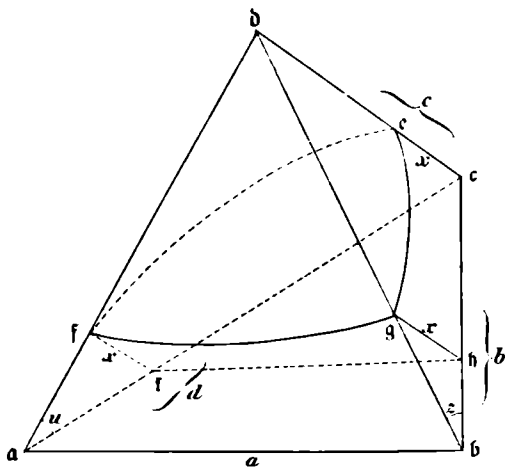
Csodálatos találkozás, hogy az $abcd$ tetraeder kiszámítására szolgáló ez az eljárás teljesen azonos avval, melyet LOBATSCHESKIY az

1829-ben megjelent «*A geometria alapvonalairól*» című művében alkalmazott. LOBATSCHESKIJ $\frac{dT}{dg}$ -nek helyes értékét is adja; János ennek kiszámításánál hibát követett el.

Harmadik módszer.

Szétbontás olyan hypersphaerák segítségével, melyek az abc alappal párhuzamosak.

A két első módszerhez János (az 1856. év körüli följegyzéseiben) még két újat csatolt, a nélkül azonban, hogy e módszereket teljesen végrehajtotta volna. A harmadik módszer abban áll, hogy az abcd tetraedert olyan hypersphaerák segítségével bontja szét, melyek az alappal párhuzamosak (az alaptól egyenlő távolságúak).



12. ábra.

«[Legyen] ab [12. ábra] merőleges a bc -re, abc a cd -re, $a=ab$, $b=bc$, $c=cd$, e essék a cd -be, $x=ce$. Az e -n át az abc -vel párhuzamosan fektetett hypersphaera messe az $abcd$ tetraedert az fgh hypersphaerikus háromszögben. Ha gh merőleges a bc -re [és a gbh szög= z]: akkor

$$\cot z = \cot + c \cdot \sin + b,$$

$$\sin + bh = \frac{\cot z}{\cot + x} = \frac{\cot + c \cdot \sin + b}{\cot + x},$$

$$ch = b + \arcsin \left(\frac{\cot + c \cdot \sin + b}{\cot + x} \right) \cdot v$$

„Ha hasonlóképen ff merőleges ac-re, $d=ac$ [és az faf szög= u], akkor

$$\cot u = \cot + c \cdot \sin + d = \cot + c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 + a \cdot \cos^2 + b},$$

$$\sin + af = \frac{\cot u}{\cot + x} = \frac{\cot + c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 + a \cdot \cos^2 + b}}{\cot + x},$$

$$\left[cf = d + \arcsin \left(\frac{\cot + c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 + a \cdot \cos^2 + b}}{\cot + x} \right) \right].$$

„Most már a hcf háromszög [meg van határozva] ch, a hcf szög és cf által, és így a h-nál, f-nál levő szögek az általános háromszögre érvényes képletek segítségével kiszámíthatók. Ezután ebből kiszámítható a gef [hypersphærikus] háromszög és ily módon megkapjuk a tetraeder differenciálját, [azaz] az abcd tetraedernek azt a határolt darabját, mely [az x és $x+dx$ távolságban szerkesztett] két párhuzamos felület közé esik, és most már csak azon mulik minden, hogy ezt integráljuk.»

János ehhez hozzáteszi, hogy ez az út megérdemli, hogy végig kövessük, hogy azonban a látszattól itélve, a képletek bizonyára nagyon bonyolódottak lesznek. FRISCHAUF J. az 1876-ban megjelent *Elemente der absoluten Geometrie* című művében függetlenül BOLYAI János-tól, kinek hagyatéka akkor még átvizsgálatlan volt, megjelölte ezt a harmadik módszert a nélkül, hogy a számítások kivételét közölte volna; mert ő is úgy, mint János, azt hitte, hogy a képletek nem lesznek elég egyszerűek. Miután azonban STÄCKEL 1901-ben BOLYAI János vizsgálatait ismertette, FRISCHAUF visszatért a harmadik módszerre és megmutatta, hogy segítségével végül ugyanarra az integrálképletre jutunk, a melyre az első módszer vezetett; e mellett még kiadódik annak a képletnek egy bebizonyítása is, mely az első módszernél a K testeletet szolgáltatta.

Negyedik módszer.

Visszavezetés asymptotikus tetraederekre.

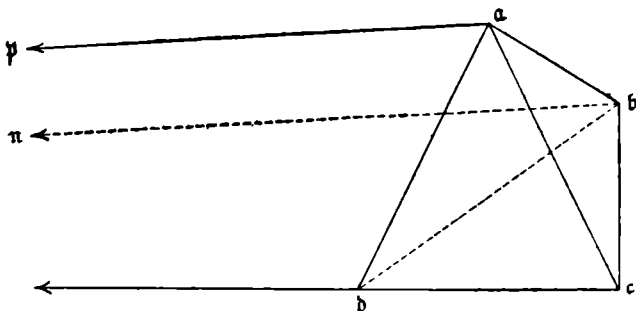
A negyedik módszer gondolatát, mely talán szintén János ifjúkori időszakából való, a következő följegyzés tartalmazza:

„A legegyszerűbben a tetraeder kifejezéséhez alkalmasint úgy jutunk, ha felvesszük, hogy $ab \perp bcd$, a bcd szög egyenlő R -rel [13. ábra], bn , ap \perp cb és mind a $\triangle abc$ alapú, mind a $\triangle abb$ alapú háromélű vég nélküli csőnek határozzuk meg a köbtartalmát és az utóbbit az előbbiből kivonjuk, mert különbségük nyilván egyenlő

ücb-vel. Az ább háromszögön nyugvó cső köbtartalmát a legegyszerűbben úgy találjuk... de véges alakban ép oly kevésbé lesz kifejezhető.»

Olyan asymptotikus tetraederek, a milyeneket János vizsgált, LOBATSCHESKIJ-nél is szerepelnek, a ki kiszámításukra igen egyszerű direkt módszert jelölt meg. Annál is inkább fontos lett volna, ha János hagyatékában reá lehetett volna akadni arra a módszerre, melyet ő az asymptotikus tetraederek direkt kiszámításánál alkalmazni szándékozott; de fájdalom, ez nem sikerült.

Érdemes visszapillantunk, hogy szemügyre vegyük azt az egész munkát, melyet BOLYAI János a tetraeder köbösítésének feladata körül



13. ábra.

kifejtett. Ő e feladat megoldásához különböző módokon fogott hozzá és fejtegetései mutatják, hogy a feladat sajátosságát átértette. Nem sikerült neki azonban a tetraeder köbtartalmát kifejező képleteket egyszerű, a számításra alkalmas alakra hozni, jórészt azért, mert abban a téves hitben élt, hogy az itt fellépő integrálképleteknek zárt alakban előállíthatóknak kell lenniök.

Ezen a téren is GAUSS és LOBATSCHESKIJ voltak János vetélytársai. GAUSS két képletet csak felírt, de bebizonyításukat nem adta; az ő képletei teljesen megegyeznek azokkal, melyeket János talált. LOBATSCHESKIJ ellenben beható vizsgálatokat végzett, melyek a tetraeder köbtartalmát kifejező integrálképletek analitikai előállítását jelen-
tekenyen előmozdították, és így ezen a téren Jánossal szemben őt illeti meg az elsőség.

Míg a jelen fejezet elején felsorolt kérdések közül, a két elsőre vonatkozólag Jánosnak terjedelmes följegyzései állanak rendelkezésünkre, addig a harmadikra vonatkozólag, vajjon eldönthető-e, hogy

a geometriának subjective lehetséges rendszerei közül a valóságban melyik áll fenn, csak igen kevés és nem is teljesen kielégítő nyilatkozatát ismerjük. A mérések alapján történendő «praktikus döntésről» a LOBATSCHESKIJ 1840-ben megjelent *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* című művéről 1851-ben írt *Észrevételeiben* értekezett János. E vizsgálatával behatóbban majd a XVI. fejezetben foglalkozunk; itt csak azt jegyezzük meg, hogy arra az eredményre jutott, hogy földi mérésekkel nem dönthető el, vajjon Σ -e vagy pedig valamely S a fennálló rendszer; de eddig csillagászati észlelések sem szolgáltattak adatot e kérdés megvilágításához.

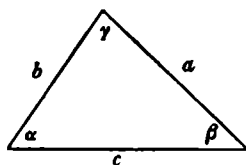
Az ilyen *a posteriori* döntés mellé azonban állít János egy *a priori* döntést, és épen ez az, a melylyel már 1830-ban vagy talán még előbb is foglalkozott. Ezt mutatják az *Appendix* végszavai: «Végül (hogy a tárgyat teljesen kimerítsük) be kellene bizonyítanunk, hogy (valamilyen feltevés nélkül) lehetetlen eldönteni, vajjon Σ -e vagy pedig valamely S (még pedig melyik) felel meg a valóságnak. Ezt azonban valamely kedvezőbb alkalomra tartjuk fenn.»

Mikor Farkas, mint e fejezet elején említettük, 1835 április hó 20-ikán megírta GAUSSnak: «hogy emberi szemnek *absolute* lehetetlen belátnia, vajjon a XI. axióma igaz-e vagy sem: fiam azt állítja, hogy ő ezt meggyőző módon be tudja bizonyítani», röviddel megelőzőleg, április hó 15-ikén levelet kapott Domáldról, melyben János e tárgyra vonatkozó gondolatait röviden kifejti; sőt mondhatni, nagyon is röviden, mert e levélből nem állapítható meg biztosan, hogy mi volt János tulajdonképeni végeztélja. Mindenesetre hasznosat vélünk cselekedni, ha e levelet itt kinyomtatjuk.

«Edj járást válaszolok néhány főbb materiara. Látván, hogy az imposs[ibilitas]ra nézve még nintsen meg-nyugova (ki magam sem szoktam *eo ipso* és *per se* addig nyugodni valamin, míg *meg* nem nyugszom rajta és meg nem elégszem, és a legseverusabb biro szeretem az effélébe lenni, valamint minden objectioja vagy scrupulussa a censornak nekem épen jól esik) küldök egy kis világosítást. A' dolog perse erősen fontos, méltóságos és épen olyan kényes lévén, méltán semmi el-nem mulatik a' tökélyes tisztába való hozására. Mekkora nyereség (mint réa magára, mint az emberi nemre nézve), ha bár egy GAUSSi talentom is a' jövő időkbe meg-mentődik az által a' feneketlenbe való belevesztéstől? A' könnyebb ellátásért és tisztaságért a demo[nstratio]t lehető rövidbe szorítom, 's azután néhány jegyzéssel világítom.»

«1. Vagy van véges $i\{p+q\}$, vagy nints; 's ha azon æquatioba,

mely a planum $\triangle \wedge$ -tét az oldalokkal kiteszi, melyből, mint tudatik, a többi mind foly, és a' melyet itt rövidségért \mathfrak{X} -nek nevezek, a 2-dik esetben a limesse vevődik azon szögnek, melyhez tendal (a' formula szerint) a [14. ábra] pro $i \sim \infty$: constat, hogy az említett formula absol[ute] igaz. Meg-adodnak tehát a , b , c és i által α , β , γ »



14. ábra.

•2. És világos: hogy (*directe* adva elé a' dem[onstrati]ot) akár-melj ugyanazon \triangle planum peripheriája vi'sgálásából \mathfrak{X} által *per se* soha meg nem határozodhatik, hogy *vané* i vagy nints (nyilván tsak erre volna szükség); mert ha tudná is az ember, hogy S van, világos, hogy *a priori* i -re nézve több meghatározás nem tétethetik, mint a' mi már számokkal definiálva van; és ha tudnánk tökélyes planumot, rectat tsinálni, és olyan circinust, akkor *a posteriori* (és ebbe az esetben tsak ugy) leg-alább approximative i -t determinálhatnok; 's a praxisra nézve (akarmilyen lehetetlen is tökélyes planumot etc. tsinálni) mindenként elegendő accuratioval a' fel-tett tzielra valo nézt, construalnok i -t (tsak tudnok hogy van). A' \triangle planum periph[erijá]-ból tehát \mathfrak{X} által, épen azért mivel \mathfrak{X} a' \wedge -tét nem másként, hanem i -vel teszi ki, i -re nézve nyilvántságosan soha se lehet *prorsus* semmit határozni. Ez a' conclusio nem volna igaz akkor, ha a $p + q$ (az hol p , q vagy mindenik realis, vagy mind imag. hossz) \mathfrak{X} -be i helyébe tévődik. Mert ha ekkor a $3\wedge$ -tel kiteszem egyik oldalt a -t, könnyen látszik, hogy $\cos \frac{a}{p+q} =$ volna egy *realis quant.*-hoz, a' mi nyilván tsak ugy lehet, ha $\frac{a}{p+q}$ *quant. pura*, nem *mixta* (én is rég ugy nevezem), tehát vagy p , vagy $q = 0$ és i is *pura*. Ekkor tehát *határozodott* valami i -re nézve. Továbbá, mivel $\cos \frac{a}{p} = \cos \left(2n\pi - \frac{a}{p} \right)$ pro quovis n integro reali, látszik és kézzelfogható, hogy pro respective üsdem α , β , (γ) , c végiről etc. tsak egy planum \triangle lehetvén (mivel $a\tilde{c}$ nem vágja $b\tilde{c}$ -t többször), szükségesképpen $2n\pi - \frac{a}{p}$ *mixtum*, 's tehát ($2n\pi$ reale lévén) p *pure imaginarium*. A fennebbi g[ene]ralis feltételből, hogy t. i. $i = p + q$, tehát könnyen következett *annyi* meghatározás, hogy i *reale*. (Az iminti dem[onstrati]ot, lehet könnyen *apogogice* is adni.) Még tehát a' van hátra, hogy *már ennél többet* nem lehet határozni i -re nézve. »

Körülbelül ugyanabból az időből való vagy még régebb egy tervezet kezdete, mely ekként hangzik :

«Bebizonyítása annak, hogy EUKLIDES XI. axiómáját akár bebizonyítani, akár megdönteni lehetetlen.

«Tétel. Vajjon (a valóságban) a $bn \parallel am$ esetében $bam + abn =$ vagy $< 2R$; vajjon minden véges x hosszúságnak megfelelő X [Appendix 23] (§) = vagy > 1 ; vajjon, ha bnn a bam -ben fekszik, bármely két olyan amm , bnn egyenes, mely valamely harmadiknak, abn -nek végpontjaiból kiindul, ab -vel ugyanabban a síkban a bam , abn belső szögeket alkotva, melyeknek összege $< 2R$, egymást metszi-e vagy pedig a nem-metszés esete is következhetik be... röviden vajjon a valóságban az euklidikus geometria-e vagy pedig valamely anti-euklidikus rendszer áll fenn, az logikai következtetésekkel nem dönthető el. Csak annyi mutatható ki a $bn \parallel am$ esetében, hogy a $bam + abn$ összeg nem $> 2R$, továbbá hogy bármely X nem < 1 . Vajjon a (20. § értelmében) i véges-e, avagy végtelen, ... leleplezhetetlen titok marad minden olyan értelem előtt, a mely ezt közvetlenül nem tudja belátni. Minthogy pedig az ilyen axiomatikus szemléletet semilyen emberi elme átlátni nem tudja, és soha nem is fogja tudni, azért örök talány marad.»

Fennmaradt továbbá egy Jánosnak címzett levélboríték, melynek belső oldalára ő, ki levélborítékokat gyakran följegyzésekre szokott felhasználni, a következő megjegyzést írta:

«A trigonometria segítségével tehát nem megy: minden alkalmazásánál csak megegyezéseket találunk a határozatlan rendszerben, a rendszer meghatározása sohasem következik belőle. Evvel annak bebizonyítása, hogy i -t meghatározni lehetetlen, teljessé vált.»

«Megnyugodhatunk-e ilyen körülmények között? Sőt nagyon is! A tér tudománya pedig mégis csak elég szép marad. Épen a dolog természetében rejlik, hogy ez logikai következtetések útján nem ismerhető fel, [hanem] csak a közvetlen szemlélet alapján. Sőt még az angyalok számára is hozzáférhetetlen marad, ha közvetlenül ki nem tapasztalhatják. Csak egyetlen olyan lény van, kinek szemlélete előtt az egész természet nyitva áll: Isten, a tér mestere.»

Ugyanebbe a gondolatsorozatba tartozik az 1850 és 1858 közé eső időből származó következő följegyzés:

«Valamely [pontokból álló] síkbeli rendszer elemzésénél nyilván teljesen ugyanazokat a képleteket nyerjük, mint a gömbön, és minthogy a gömbön a gömbi trigonometria *abszolút* érvényessége miatt a teljes elemzés mindig csak megegyezésekre vezethet: világos, hogy ép úgy a síkban a pontrendszerek bármely vizsgálatánál örök megegyezésnek kell fennállania. Ebből világos, hogy S -ből a síkban sohasem [vezethető le ellenmondás]. Direkt úton sem juthatunk i meghatározá-

sához. Mert bármely utat kövessünk is a síkban, bármely részét vizsgáljuk is a síknak, a részt] azonnal *absolute* tudjuk kifejezni, és gyakran ez a legtöbb, a mit eddig tehetünk, *i*-nek meghatározása pedig nem következik belőle. Ámde *i* mégsem marad *teljesen* határozatlan. Sőt inkább kimutatható, hogy *ha* a síkbeli derékszögű háromszög kifejezése ilyen:

$$\sin + \frac{b}{r} : \sin + \frac{c}{r} \sim \sin ac,$$

ha $r \sim i$, akkor *i* sem vegyes állás, sem 0 nem lehet, hanem *sima* állásnak kell lennie. Mert stb.»

Sima állásnak nevez János valós mennyiséget, *vegyes állásnak* pedig valamely komplex mennyiséget. Az *állás* szó használatát azzal a megjegyzéssel okolja meg, hogy beszélnek a hőmérő állásáról, melyet valamely pozitív vagy negatív valós mennyiség fejez ki. Ha az idegen *scalar* szót magyarul akarnók helyettesíteni, az *állás* szót komolyan kellene számba vennünk.

Ha János ehhez hozzászól: «Ámde vajjon *i* véges-e vagy végtelen, azt a síkban végzett vizsgálat örökké eldöntetlenül hagyja. Kérdés már most az, vajjon a térben végzett vizsgálatok nem vezethetnek-e Σ igazolására»: akkor ezzel olyan ellenvetést fejez ki, a melyet később régi bebizonyítása ellen felhozott. «Az önálló tér tudománya alapvonalainak latin kiadásában még reménylette a szerző, hogy lehetetlenségét kimutathatja. A közelebbi vizsgálat inkább azt mutatta, hogy megvan annak lehetősége, hogy az euklidesi rendszer mellett történjék a döntés, és megvan az eldöntetlenül maradásnak lehetősége is, és hogy (addig, míg ez a dolog eldöntetlen) sem a döntés lehetséges voltát, sem pedig a döntés lehetetlen voltát a priori nem bizonyíthatjuk be, úgy hogy a döntésre irányuló minden további kísérlet olyan kincsásóra emlékeztetne... A XI axióma vagy bebizonyítható, vagy nem bizonyítható be. Bebizonyíthatatlan volta egyáltalában nem bizonyítható be, és azt is, hogy bebizonyítható csak magával a tettel, azaz egy valóságos bebizonyítással lehetne kimutatni.»

Hogy János mikor jutott annak felismerésére, hogy bebizonyításának kísérlete nem teljes, biztossággal nem volt megállapítható. Úgy látszik, hogy már 1837-ben merültek fel kételyei, mert az *Appendix* német kiadásához készített lapszéli jegyzeteiben, melyek körülbelül abból az időből származnak, így nyilatkozik:

«Vajjon eldönthető-e — és a tér tudománya ebben a tekintetben is betetőzhető — hogy e kettő közül, t. i. *i* véges vagy végtelen volta közül, melyik áll fenn, az eddig ismeretlen. Annyi bizonyos,

hogy a döntés, ha egyáltalában lehetséges, csak az itt jelzett úton vívható ki.»

Ez a «jelzett út» pedig abban áll, hogy az abszolút geometria teljesen kidolgozandó és azután megvizsgálendő az, vajjon nem származik-e belőle ellenmondás.

Jánosnak minden annak bebizonyítására irányuló kísérlete, hogy nem dönthető el, vajjon Σ -e vagy pedig az S rendszerek valamelyike áll fenn, végül abban a kérdésben csúcsosodik ki, vajjon a határozatlan i -nek megfelelő S rendszer abban az értelemben, mint az újabb matematikusok veszik, *consistens-e*, azaz önmagában ellenmondás nélküli. Míg az 1825. évben János az ő új geometriájának ellenmondás nélküli voltáról meg volt győződve és e meggyőződéséhez a következő években is ragaszkodott, később mint azt a közölt följegyzések mutatják, ez iránt kételyei támadtak, sőt azokban a följegyzésekben, a melyekből az előbb közölt darabok ki vannak szelelve, így nyilatkozik: «a mennyiben pedig, ha S logikailag gondolható, Σ is (mint különös eset) [ilyen], de nem fordítva S , ezért Σ valószínűbb, habár semmi esetre sem bevégzett tény». Sőt az 1856. évben János térbeli vizsgálatai alapján azt hitte, hogy valóban ellenmondást mutatott ki S -ben és ezzel a *párhuzamosak axiómájának abszolút érvényességét* bebizonyította.

Megható tragikum nyilatkozik abban, hogy BOLYAI János öreg korában kételkedett abban a felfogásában, mely halhatatlan dicsőségére vált, hogy t. i. az általa megalapított abszolút geometria önmagában ellenmondás nélküli és hogy nem dönthető el, hogy a subjective lehetséges geometriai rendszerek melyike veendő a geometriai tények leírásának alapjául. Ezt a tragikumot még megrendítőbbé teszi az a körülmény, hogy János ellenvetése, hogy t. i. a *sík* abszolút trigonometriájának és a gömb trigonometriájának æquivalentiája még nem biztosítja az abszolút geometria ellenmondás nélküli voltát a *térben*, egészen jogosult és elmeéletének becsületére válik. Azonban ezek a vizsgálatok későbbi időből valók, mint az a korszak, a melyet most kell ecsetelnünk, és ezért a reájuk vonatkozó fejtegetéseinket a XVIII. fejezetnek tartjuk fenn.

XIV. FEJEZET.

BOLYAI Farkas és BOLYAI János dolgozatai a képzetes mennyiségekről.

Abban a levelezésben, melyet BOLYAI Farkas és BOLYAI János az 1835—1837. években folytattak, jelentékeny szerep jut a képzetes mennyiségeknek.

Farkasnak arra irányuló kísérleteiről, hogy a matematikának erre, az akkori időben még igen homályos területére világosságot áraszon, már az V. fejezetben számoltunk be; hogy pedig János geometriai vizsgálataiban a képzetes mennyiségek milyen jelentőségre emelkedtek, az előbbi fejezetben láttuk. Így tehát önmagában is teljesen hihetőnek látszik Jánosnak az az állítása, melyet a hagyatékában feltalált följegyzések is igazolnak, hogy az e tárgyra vonatkozó gondolatai lényegükben már 1831. évben alakultak ki.

Azt a viszályt, mely apa és fiú között kitört, mikor János az abszolút geometriát felfedezte, részben az idézte elő, hogy Farkas, ki ugyan nem volt féltékeny fia sikereire, minden áron fenn akarta tartani atyai tekintélyét. Érthető tehát, hogy János bírálata, melyet leveleiben atyjának a képzetes mennyiségekre vonatkozó fejtegetéseiről mondott, az apát annál inkább is érzékenyen bántotta, mert János ellenvetéseit kiméletlenül élességgel fejezte ki. Ehhez mértek voltak Farkas válaszai. János azonban mindinkább nagyobb kort ért el, fölismerste a maga becsét, és a mint egyes alkalmi nyilatkozataiból kitűnik, ő, mint kapitány, egyenjogúnak érezte magát a professzorral, és így vitájuk mind jobban elkeseredett.

A mi tárgyi véleménykülönbségük főpontját illeti, az igazság mindenesetre János oldalán volt. Farkas az abszolút szorzás és osztás fogalmára vonatkozó meglehetősen homályos fejtegetések alapján a komplex mennyiségek tartományában a proporeciónak olyan magyarázatát adta, melyből az

$$1 \quad \sqrt{-1} \quad \sqrt{-1} : 1$$

egyenlőség következett: «Nints mód, hogy ezt [a hibát] kegyed észre ne vegye 's meg ne győződjék állításom' alaposságáról, mert a' nap nem fénylik, ragyog oly tisztán, mint ez; 's ha meggyőződött, győzze meg arról is magát (mi nem < ditsőségére válik mint a' tanjai), hogy minden szép, remek elmésség, igazi alaposság 's evidentia vadászat mellett e tárgyban — mint ember 's mint magam is, ideig nem csak egyszer, mint calculáló — megbotlott, 's homályos alapra épített. Hogy oly hosszú ideig úgy el volt az egyik legfontosabb tárgy iránt fogulva: oka az 's onnan eredett, hogy előre megkedvelt 's adoptalt, de nem tzélszerű, alapideáját mi szerént a' multiplicatiót előbb $+1$ -re, azután $*$ — 1 -re nézve kívánja véghez vitetni, többé teljességgel szeme elől nem akarta elbotsátani; 's a' collisiót meg érezvén: kész volt inkább a' proportio definitioján, 's azonnal a' természetben is erőszakot tenni, mint lemondani kedvelt alapideájáról. Most már nints mód, hogy meg ne legyen győződve, hogy theoriaja össze van omolva: bármily hosszas homályom vagy tévelyem elosztatása nekem éldelet, gyönyör 's reményilem kegyednek is az lesz».

Igy állott az ügy, mikor 1837 őszén Farkast egyik marosvásárhelyi ev. ref. kollegiumbeli tanártársa, Dósa Elek, az *Allgemeine Literaturzeitung* (Halle-Leipzig) Intelligenzblattjának márcziusi számában megjelent egyik közleményre figyelmeztette. Ebben a közleményben arra emlékeztettek, hogy a lipcsei herczeg JABLONOWSKI-féle társaság folyó pályázataira benyújtandó munkák beküldésének határideje november havával lejár; egyúttal a pályakerdések is újból közöltek. A matematikai pályakérdést M. W. DROBISCH (1802—1896.), a lipcsei egyetemen a matematika rendes tanára tűzte ki, mely (az eredeti latin szövegezés ott adott német fordításának magyar fordításában) így hangzik:

«A mint ismeretes, a képzetes mennyiségeket jelenleg nemcsak az analízisben, hanem az analitikai geometriában is gyakran alkalmazzák. GAUSS megmutatta, hogy ezek a mennyiségek, melyeknek minden reális voltát közönségesen tagadni szokták, ép oly kevés nélkülülzik a megérzékíthetőséget, mint a negatív mennyiségek. Azonkívül más geometerek, név szerint, BUÉE, MOUREY, WARREN annak kimutatására törekedtek, hogy ha geometriai vizsgálatok képzetes mennyiségekre vezetnek, ezek mindig meg is szerkeszthetők. Mint-hogy azonban ez a tan még nem talált általános elismerésre, a társaság azt a kérdést veti fel:

vajjon a képzetes mennyiségek szerkesztésének tana úgy alapítható-e meg és fejleszthető, hogy ez által a szerkesztések biztos

szabályok szerint legyenek megállapíthatók, melyek bizonyára mindenütt, a hol a geometerek a képzetes mennyiségeket alkalmazzák, burkolt alakban rejtőznek, vagy pedig ha ez lehetetlen, legalább azok a feltételek derüljenek ki, melyek mellett ama mennyiségek megszerkeszthetők.»

Ezzel, úgy látszott, meg volt adva annak a lehetősége, hogy a Farkas és János közti vitát részrehajlatlan bírák egyenlítsék ki. Farkas tehát írt Jánosnak, tudósította a pályázatról, kijelentette, hogy ő pályázik és azonnal hozzá is fog a munkához, és felhívta Jánost, hogy ő ép úgy cselekedjék.

János erre szerkesztett egy értekezést, mely egy ivre (nyolcz negyedrért oldalra) terjedt, és átadta atyjának. Kikötötték, hogy egyikük se olvassa el a másiknak dolgozatát; mind a két értekezést együtt Farkas egyik bécsi ismerősének akarták átadni, hogy Bécsből a lipcei társulat titkárához, KÜHN professorhoz juttassa. Farkas és János azt remélték, hogy gróf TELEKI Sámuel, ki épen akkor készült Bécsbe, magával viszi az iratokat, de tudakozódásukra azt a hírt kapták, hogy a gróf már elhagyta Maros-Vásárhelyt. Így tehát a postát kellett igénybe venniök. A becsomagolásnál Farkas nem tudott annak a kísértésnek ellentálni, hogy értekezését fiának meg ne mutassa. János elolvasta és hirtelen elhatározással a saját értekezését ismét magához vette, azt mondva, *sajnálja, hogy megírta.*

Hogy mi okozta Jánosnak e sajnálkozását, nehezen állapítható meg. A két munka félreismerhetetlen hasonlósága volt-e és annak érzete, hogy ő a magáéban mennyit köszön atyjának? Avagy fordítva a fölháborodás a felett, hogy az apa tőle származó gondolatokat használt fel? Annak érzete volt-e, hogy az ilyen verseny apa és fiú között disztelen? Bármilyen is lett légyen ez az ok, János csakhamar mást gondolt. Mintán Farkast elhagyta, a postára ment és Lipcsébe küldte értekezését. Apjának, talán álszégyenből, erről nem tett említést.

Farkas a maga értekezését visszatartotta, mert meg akarta várni, vajjon János nem másítja-e meg elhatározását és nem vesz-e mégis részt a pályázatban. Később azonban az az aggodalma támadt, hogy a késlekedés miatt a határidőt elmulaszthatja, mert nem volt biztos benne, vajjon ez a kifejezés: *«A benyújtás határideje november havával végződik»*, a hó elejét vagy a végét jelenti-e. Azt mondta tehát fiának, hogy ő a maga értekezését már most elküldi, és kérdezte, hogy hogyan van ő az övével. János erre azt válaszolta: *«Most én nem küldöm»*.

Minthogy Farkas nem volt benne biztos, vajjon a Bécsben tartózkodó KATONA Elek az ő értekezését, melyet hozzá küldött, továbbította-e Lipcsébe, volt tanítványához, Bod Péterhez fordult, ki akkor szintén Bécsben tartózkodott. Bod Péterhez intézett egyik levelében, mely 1837 november havában kelt, panaszkodik, mily rútul viselkedett János. «A' minap a' postára menvén, ott látom Lipsiabol, az övének vételéről a professor KÜHN aláírását.»

E kínos esetnek, mely az apa és fiú között hosszú évekig tartó elidegenedést idézett elő, fájdalom, még végzetes utójátéka is volt. Farkas 1838 márczius 19-kén levelet írt Antal fivérének, melyben szabad folyást engedett János viselkedése feletti panaszainak. A mi ebben a levélben János életmódjáról és cselekedeteiről olvasható, mutatja, hogy Jánosnak rossz híre volt Maros-Vásárhelyt. Mindezt azonban itt annál is inkább mellőzhetjük, mert most már az igazság a pletykától és besúgásoktól nem választható el. Ámde meg kell említenünk, a mit Farkas e levélben közös pályázatukról elbeszél. «A' dissertatioja rossz volt, 's noha a' maga idejében meg ment, *per se* nem nyerhetett. Az enyém a' terminus után egy nappal érkezett meg. Ő csufosan hazudott volt, hogy nem küld, bánja is, hogy miért írt, holott *evidenter* kijött, hogy elküldötte volt.»

E levélre Farkas reá írta: «égesd el!» Antal ezt nem tette és halála után, 1846-ban, a levél János kezébe került, ki rettenetes dühében a következőt írta Farkasnak:

«Ide zárva küldöm kegyednek egy Antalhoz írott levelet is, a melyet, minthogy ott is, mint a' többi teménytelenben is, becsületeimet igyekszik sérteni 's elásni, Gergely' hírével el tettem volt, hogy magamat menthessem: a mit ezennel, hogy vége legyen az izetlenségnek, részint e copertán, részint külön darab papirokon véghez is viszek.»

«Hogy én, a mi kevés érintkezésbe jöttem volt Vásárhelyt lakomban az emberekkel: magamat mocskoltam volna, az nem igaz; 's mennyiben volt illő, még föl téve, ha igaz lett volna is, egy apának oly alkalman *kapva éldeletesen* kedves és szeretettnék írott testvérenek olyat írni: annak megítélését kegyedre bízom. .»

De következik rám nézve az erkölcsileg >, terheesebb vád: hogy én csufosan hazudtam! ez a' szó *per se* maga is már disztelen... gyermekkoromtól fogva (kétségen kívül a kegyed' én reám nézve nevelésének, elveinek sokat köszönve, sok részt szellemileg nem rosszul idomult Wesen-em, compaction mellett) egyik fő-alap vonása volt jellememnek (Charakter) az igazság (tani és erkölcsileg) határtalan szeretete...»

«A'kor is igazat mondtam én tehát teljességgel, hanem . méltatlankodásomban el-vive kegyedtől a dissertatiomat egyenesen magam tettem postára és miután ez meg-esett: a kegyed kérdésére, küldök-é? politikával élven 's az angol törvény szerint, a' szót betű szerint vévén; mit is azonban minden tisztasága mellett, nem egészen a' morállal megegyezőnek tartok magam is, 's csak nehezen 's ritkán... engedtem meg magamnak, azt feleltem megmérve és megnyomva: «én már nem küldök», mi tehát igaz is volt, midőn t. i. már a'kor el-küldöttem volt. — Quod erat demonstrandum.»

A szenvedély vihara lecsillapult és János módját kereste, hogy ősz apját, kinek kétszeres keserűséget okozott, kibékíthesse. «Erős reménye van, hogy a mint ellenkeztek az előtt sokban, tanilag és erkölcsileg is, megcsalódva, elfogulva valamely elragadó ideától vagy olvtól: úgy meg fognak, ha élnek még e földön, nem sokára egyezni, lehullván minden hájog a szemről s a tévely homályos és sötét utai meg világosulván... Töröljenek el minden kodvetlenséget, új életet kezdve mint szellemi nemes emberekhez illik.»

Farkas kész volt a békülésre. Eltelt néhány csendes esztendő, míg végül újból heves viszály tört ki köztük. De nem akarunk a későbbi fejezeteknek elébe vágni, hanem visszatérünk a herczeg JABLONOWSKI-féle tudományos társaság pályázatára.

A társaság 1838 márczius havában hirdette ki az eredményt. Három értekezést nyújtottak be, mely a kitűzött mathematikai kérdést, a képzetes mennyiségek szerkesztését tárgyalja, de a társaság mély sajnálatára a díjra egyik sem mutatkozott érdemesnek.

«Mert az első munka, melynek jeligéje: *Sigillum veri simplex* (Az egyszerű az igaznak jele) meglehetősen abban a bajban szenved, hogy nyelvezete homályos, a fogalmak értelmezése benne nem világos, ok nélkül gyűjti halomra a szokatlan jelöléseket és hiányában van a szüretelendő gyümölcsnek, hacsak a gyümölcsért kárpótlásul nem vesszünk a szerzőnek azt a tanácsát, hogy azokat a görbéket, melyeknek egyenlete pusztán valós mennyiségekből van összetéve, fekete festékkel, azokat pedig, a melyeknél képzetes képletek szerepelnek, vörös festékkel ábrázoljuk.»

«Nem sokkal dicséretesebbnek mutatkozott a második munka, melynek jeligéje: *Fructus nonnisi maturi decerpendi* (Csak az érett gyümölcsöt szabad leszedni). Ez amaz elsőhöz minden tekintetben, nevezetesen pedig abban is hasonlít, hogy, ha nem is olyan nagy mértékben, ugyanazokba a hibákba esik, melyeket az előbbinek megítélésénél megróttunk.»

«Az a munka, melynek jeligéje *«Auf dem Gebiete der Mathematik stb.»* (A matematika terén stb.), annyira kiválik a többi közül, hogy a társaság a szerző úrnak a kérdéses díj felét ítélte oda, hacsak ő maga nem tartja jobbnak, hogy értekezését tekintettel a társaság programjában megjelölt hézagokra és hiányokra 1838 november hó vége előtt átdolgozva és bővítve újból nyújtsa be a társaságnak. Felkéri tehát őt, hogy elhatározását írásban közölje a társasággal.»

E harmadik munka szerzője KERÉKES Ferencz (1784—1850) volt, ki akkor Debreczenben mint az ev. ref. kollegium tanára működött. Latin nyelven írt értekezését 1862-ben CSÁNYI Dániel mint KERÉKES «A felsőbb mértan valódi alapelvei» czimű hátrahagyott művének függelékét adta ki. Ehhez mellékelve van KERÉKESnek egy KÜHNHÖZ intézett, 1838 november hó 23-án kelt levele, a melyben azt jelenti, hogy a társaságnak fenti felhívását csak nyolcz nappal ezelőtt kapta meg, és így a határidőt nem tarthatja be; késznek nyilatkozik azonban a hiányok pótlására, ha az említett programot neki megküldik. Erre — a mint CSÁNYI megjegyzi — nem érkezett válasz Lipsceből.

BOLYAI Farkas *Sigillum veri simplex* jeligéjű értekezése, melyet ő később Lipsceből visszaküldetett magának, megkerült a hagyatékában; csak utolsó lapja hiányzik. Az, a mit Farkas benne nyújt, lényegében megegyezik a *Tentamen* megfelelő fejezeteivel; kivétel ez alól csak a logaritmus tárgyalása, mely félreismerhetetlenül hasonló ahhoz a felfogáshoz, melyet János a *Responsio* 8. §-ában juttat kifejezésre. Kétségtelen, hogy Farkas felfogása haladást jelent, és hogy ő azon az úton haladt, mely a képzetes mennyiségek új tanához vezetett. Ámde gondolatait olyan nehezen érthető alakban fejezte ki, hogy a lipcsei társaságnak vele szemben tanusított visszaautasító magatartása nem vehető rossz néven. Ehhez még hozzájárult az, hogy a tulajdonképeni témát, a képzetes mennyiségek geometriai szerkesztését, csak egészen felületesen tárgyalta.

János *Fructus nonnisi maturi decerpendi* jeligéjű értekezése szintén a hagyatékában került meg. Magyar fordítása megvan e könyv második részében (237—249. old.). Ebben a munkában is csak a 10. § és a 11. §-nak egy része vonatkozik a képzetes mennyiségek geometriai szerkesztésére, a miért a logaritmusnak és a hatványnak a 8. §-ban tárgyalt, a maga idejét túlhaladó elmélete sem nyújthat kárpótlást, és a nem-euklidikus geometriát illető fejtegetéseknek, önmagukban bármennyire értékesek is, az akkori idő avatatlan olvasója előtt érthetetleneknek kellett lenniök.

E szerint a társaságot nem illetheti szemrehányás azért az ítéleteért, melyet mély sajnálatára János értekezéséről ki kellett mon-

ania. Jánosnak természetesen ez az új balsikere igen nagy csalódást okozott, a mely a már gyengült erejét évek során át megtörte.

«Kár hogy e nagy kincs méltatlan kezekbe került» írja abban a följegyzésében, melyet értekezéséhez mellékel. «A társaság tőle kitelhetőleg teljesítette kötelességét; most rajtam a sor, hogy én bíraskodjam a társaság felett. Itt nincs mit védeni, hol az ellenfél mitsem bírál meg részletesen, sem pedig nem okolja meg, hogy valamit miért tart jelentéktelennek, vagy érthetetlennek, hanem csak halált mérő hatalmi szóval általában mondja ki az egészről, hogy haszontalan és érthetetlen. Az ilyen ritkán hallott ítélet csak olyan munkára illik, a mely semmi jót vagy érthetőt nem tartalmaz; de rólam ilyent állítani, kinek sokkal nehezebb és rejtettebb dolgokkal volt alkalmam egy GAUSS (mely kolosszushoz képest ti csak törpék vagytok!) különös nagyrabecsülését és megelégedését kiérdemelnem, ez valóban merészség, és nem tudom eleget csodálni, a társaság ezt hogyan merte — és nem érezte inkább szükségét, mielőtt ilyen döntő ítéletet bátorzkodott kimondani, hogy [a dolgot] ismételten megvizsgálja — mert ez örök szégyenére válik.»

Igaz, hogy Jánosnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete «nagy kincs» volt, melyet azonban, hogy értékesíthetővé váljék, előbb pénzzé kellett kivenni; jelentékeny lépést jelentett ez az elmélet arról az állásponttól, melyet GAUSS elfoglalt, a komplex mennyiségek új tana felé. Ámde az, a mit mostan tisztán és világosan látunk, János előtt még ködbe és párába volt burkolva. Ő genális intuitiójában sejtette a probléma megoldását, de nem volt képes rá, hogy kidolgozzott, általánosan érthető alakban adja elő.

E tekintetben úgy járt mint atyja, ki, mint az V. és VI. fejezetben láttuk, a *Tentamen* annyi helyén közel járt a modern matematika kérdéseivel, a nélkül hogy azokat megragadhatta és fogva tarthatta volna.

Ép úgy mint Farkas a matematika két ágát, az aritmetikát és a geometriát (ellentétben a kettőnek még a tizenkilencedik században is sokáig szokásos összekeverésével) külön-külön törekedett fölépíteni, János is (a 11. §-ban) Gaussnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete ellen azt a kifogást emeli, hogy a *balra* és *jobbra*, *fenn* és *lenn* benne alkalmazott fogalmai nem eléggé meghatározottak, és azt követeli, hogy aritmetikai vizsgálatokban a geometriai fogalmak belekeverése általában kerülendő legyen.

De különös fontosságú volt János vizsgálataira nézve a negatív mennyiségeknek az az elmélete, melyet Farkas a *Tentamen*ben kifejtett. Jánosnak sikerült atyja gondolatait olyan világossággal és élességgel

kifejezésre juttatni, a milyenre atyja sohasem tudott emelkedni. Arról az alapvető belátásról van itt szó, hogy a negatív mennyiségek csak úgy nyernek értelmet, ha arra határozzuk el magunkat, hogy a megvizsgálandó dolgoknak két «determinatio»-t tulajdonítsunk, azaz, ha az eredeti egységen, a «+1»-en kívül még egy új egységet a «-1»-et vezetjük be. Áthatva felfogásának jelentőségétől, Farkas a hozzáadás «+» és az elvétel «-» jelein kívül a pozitív és negatív egység jelölésére még két külön jelt, a «+1»-et és a «-1»-et vezet be. E jelek a negatív mennyiségek megalapításában hasznosak lehetnek, de ajánlatos e bilincseket minél előbb ismét lerázni; különben a tárgyalás, a képletek és a számítások fölöslegesen hosszadalmasakká és nehézkesekké válnak.

BOLYAI Farkas a negatív mennyiségekre vonatkozó elméletének természetes továbbfejlesztéséből származott Jánosnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete; az atya itt is «fia elé világított». János mindjárt a következő négy egységet vezeti be: $+1$, -1 , $+i$, $-i$; az első kettőt valóságoknak és egymással ellentetteknek, a két utolsót pedig képzeteseknek és egymással ellentetteknek nevezi és ezután gondosan és részletesen kifejti azokat a szabályokat, a melyek szerint az e négy egységből alkotott mennyiségekkel számolnunk kell; a mint határozottan kimutatja, e mennyiségek a redukált $a + \sqrt{-1} b$ alakra is hozhatók, hol a és b pozitív vagy negatív valós mennyiségeket jelentenek. Természetes, hogy csak tetemesen megnehezítette feladatát avval, hogy teljesen atyja gondolatmenetét követve, az egységeknek $+1$, -1 , $+i$, $-i$ jelein kívül még a megfelelő $+$, $-$, $+$, $-$ műveleti jeleket is bevezette. Ez azonban csak külső fogyatékoság, a mely nem gátolhat meg bennünket abban, hogy el ne ismerjük azt a lényeges haladást, melyet Jánosnak a képzetes mennyiségekre vonatkozó elmélete az akkori időben jelentett.

Ez mindenesetre csak bizonyos megszorítással értendő. Ugyanabban az esztendőben, melyben János Lipcsébe küldte értekezését, megjelent HAMILTON műve: *Theory of conjugate functions or algebraic couples*, melyet szerzője már négy évvel azelőtt terjesztett elő a dublini akadémiának. E műben, mint már a címe jelzi, a közönséges komplex számoknak valós számok párjaiként való felfogása teljes tisztaságában volt kimondva és végrehajtva. Szelesebb körök HAMILTON gondolataival csak *Lectures on quaternions* (1853) című művének előszava révén ismerkedtek meg; az 1837-ben megjelent dolgozatát, melyet annak idején nem méltattak figyelemre, csak újabban STUDY hozta ismét napvilágra. Legyen szabad belőle a következő helyet idéznünk, mely HAMILTON elméletének magvát tartalmazza.

«A számegyedek elméletében a $\sqrt{-1}$ jel képtelenség és lehetetlen gyökvonást vagy pusztán képzetes számot jelent. De a számpárok elméletében ugyanennek a jelnek van értelme és lehetséges gyökvonást vagy valós számpárt jelent, t. i. a $(-1, 0)$ pár négyzetgyökének főértékét. Ebben, de nem amaz elméletben, a $\sqrt{-1}$ jelt teljes joggal használhatjuk, és ha előnyösebbnek tartjuk, bármely tetszés szerinti (a_1, a_2) pár helyett írhatjuk:

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \sqrt{-1},$$

hol az $a_1 + a_2 \sqrt{-1}$ kifejezésben az a_1 és a_2 jeleket mint az $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$ főpárok symbolumait fogjuk fel és ugyanabban a kifejezésben a $\sqrt{-1}$ -et, mint a második egység, vagy a $(0, 1)$ második tiszta pár symbolumát.»

HAMILTON értekezésének kétségtelenül nagy előnyei vannak a Jánosé felett. Nemcsak előadása jóval világosabb, hanem HAMILTON tovább is lát; már tudja, hogy a több mint két, vagy ha a negative vett egységeket külön számítjuk, a több mint négy egységből alkotott mennyiségeknek hasonló elmélete állítható fel. János azt állítja ugyan, hogy épen az ő négy egysége vezetendő be, sem több, sem kevesebb, de ennek bebizonyításával adósunk marad. Mindenesetre van hagyatékában egy lap, mely mutatja, hogy e kérdéshez közelebb férközött. Egy 1830 márczius havából való katonai jelentés hátsó oldalán megpróbálja ugyanis a szorzást oly rendszerben megmagyarázni, mely hat egységből alakul és megvizsgálja, hogy mi az eredmény, ha két egység szorzatát ismét valamely egységgel vesszük egyenlőnek. Megjegyzi, ha az ilyen hat egységből alakuló rendszert veszünk fel, «akkor elvesznek a legszebb következtetések, habár lehetetlenséget nem tartalmaz». Hogy mi ennek az értelme, mutatja ez a megjegyzése: «Akkor a négyzetgyököknek is több mint két értéke volna».

Míg továbbá János a komplex mennyiségek szorzásának szabályait minden megokolás nélkül, úgyszólván hatalmi szóval vezeti be, addig HAMILTON a szorzás legáltalánosabb képletét a distributív törvény alapján adja meg; megjegyzi azonban, hogy ajánlatos a benne előforduló állandókat úgy választani, hogy a közönséges komplex számokra jussunk. János javára azonban ki kell emelnünk, hogy ő egészen tisztában volt azzal, hogy a komplex mennyiségekkel való számolás szabályait előbb definiálnunk kell és hogy épen úgy, mint a negativ számok esetében, itt sincsen megengedve, hogy a közönséges számokkal való számolás szabályait közvetlenül az új számokra vigyük át. Ennek helyes felismerése különösen abban mutatkozik, hogy János GAUSSnak levezetése ellen, mely szerint a komplex egész

számok a síkban egy négyzetes háló pontjaival ábrázolhatók, joggal azt a kifogást emeli, hogy GAUSS ily módon a proporció fogalmát, mely első sorban csak valós számokra érvényes, meg nem engedhető módon képzetes mennyiségekre terjeszti ki.

Ha Jánosnak nem is volt elég ereje, hogy gondolatait tisztázza és kialakítsa, ha fájdalom, nem adatott meg neki, hogy ifjúsága sokat ígérő gyümölcsét megérlelje, a képzetes mennyiségek elméletére vonatkozó alkotásai mégis méltók az *Appendix* szerzőjéhez és örök időre helyet biztosítanak neki ennek az elméletnek a történetében.

XV. FEJEZET.

BOLYAI János és LOBATSCHESKIJ Ivánovics Miklós.

Első rész: Hogyan értesült János LOBATSCHESKIJnek *Geometrische Untersuchungen*jéről.

Ismeretes, hogy LOBATSCHESKIJnek a nem-euklidikus geometriára vonatkozó munkái csak azután részesültek az érdemelt elismerésben, miután 1863-ban GAUSS és SCHUMACHER levelezésében megjelent GAUSS-nak egy 1846 november hó 28-án kelt levele, melyben a *Princeps mathematicorum* az orosz tudósnek «*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*» czimen 1840-ben megjelent művét egy igazi geometer mesterművének nevezte. De megjegyzésre méltó, hogy már 1851-ben más oldalról, habár eredménytelenül, történt, utalás LOBATSCHESKIJre, még pedig BOLYAI Farkas részéről, a ki a *Kurzer Gruudriß eines Versuchs* című művében a *Geometrische Untersuchungen* méltatásába bocsátkozik (l. e munka második részét 158—161. old.) és kiemeli e mű csodálatos megegyezését fiának, Jánosnak 1832-ben megjelent *Appendix*ével; «évezredek után» — írja — «mind a kettőnek (hiszen egyik sem látta a másikat) az igazságnak ugyanaz az ösképe jelent meg».

BOLYAI és GAUSS levelezéséből kitűnt, hogy BOLYAI LOBATSCHESKIJnek ama művéről GAUSStól kapott értesítést. 1848 január hó 28-án Farkas azt a kérdést intézte ifjúkori barátjához, hogy mi a címe annak az orosz matematikai munkának, mely annyira hasonlít az övéhez és GAUSS 1848 április 20-án így felelt: «Az orosz matematikus művei legnagyobbbrészt a kázáni egyetem emlékirataiban foglaltatnak. Gondolom, hogy könnyebben kaphatod a következő kicsiny jeles értekezését: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus LOBATSCHESKY*. Berlin 1840 in der G. Finckeschen Buchhandlung».

Evvel azonban a talánynak csak egyik része nyerte megoldását; hátra marad még annak a kipuhatólása, hogy mi indította Farkast arra, hogy GAUSSnál az orosz matematikai munka után tudakozód-

jék. Ezt illetőleg nyomra vezet Farkas egy levele, melyet 1844 szeptember hó 10-kén a Domáldon tartozkodó Jánoshoz intézett. E levélben, melynek egy rossz karban levő másolatát a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium könyvtárában őrzik, Farkas a következőket írja: «Az újságban (a Társalkodóban) jött ki Mentovich' GAUSSali dia[logja]..., bizonyos (nem említett nevű) muszka Mathematicusnak [művét] mutatta GAUSS, mit asztalához közel levő könyvei között az enyém mellé téve... azon nyilatkozattal, hogy a be... ásig egyezik BOLYAIakéval, holott egyik se vehette a másol.»

Az újságczikk, melyre Farkas hivatkozik, «Naplótöredékek IV.» czímen a Kolozsvárt megjelent «Nemzeti Társalkodó» 1844 augusztus 30-iki számában jelent meg.

MENTOVICH Ferencz (1819—1879) Nagyenyeden, Bécsben és Berlinben matematikát és természettudományokat hallgatott és hazajövet 1843 szeptemberben Göttingán is keresztül utazván, ott meglátogatta GAUSS-t. Később Nagykőrösön, 1856-tól pedig BOLYAI Farkas tan-székén Maros-Vásárhelyt a matematika és physika tanára volt. GAUSS-szal folytatott beszélgetéséről írt följegyzését mindjárt 1843 szeptember hó 1-sején vezette be naplójába és így bizvást hitelesnek tekinthetjük.

Hosszabb bevezetés után MENTOVICH így nyilatkozik GAUSS-ról: «Miután tudatám vele, hogy erdélyi vagyok, csak hamar élénk részvéttel kérdezé: ha valljon erdélyi jó barátjáról professor BOLYAIról nem tudnék-e valami újabb tudositást mondani egy őt előttem nem sok idővel meglátogatott erdélyi hazámfiánál professor Szász nál?: Mire válaszul adám: hogy csak óbbakkal szolgálhatok, minthogy már harmadfél éve lesz hogy hazul eljöttem. És ezen a' megkezdett tárgyról beszé-
getésünknek éppen nem megnyujtatására szolgált feleletem után sem vala béfejezve BOLYAIunk feletti szóváltásunk; látszott rajta miszerint kedvencz tárgyán állapodott meg, miről a' beszédben nem oly könnyen szeretünk eltérni. Magamhoz hasonlóan mint megöszült 's megöregedhetett az én barátom; valóban ha még egyszer találkozhatnám vele, nem kis örömmel juttatna birtokába, mert az ember késő öregségben — midőn jó barátai és ismerősei mellőle apránként kidőlnek — megnövekedett hévvel ragaszkodik még fennmaradt kevés jóembereihez.' Így sohajta fel a' tudós, 's látszott egész külsőjén egy rövid ideig tartó elmerengés az ifjukor együtt-töltött napjaira. Majd felvidámodva felkele ülőhelyéről, 's egy még egészen új külsejű könyvet vona elő, melyről azt mondá hogy nem régiben vevé egy orosz matematikustól 's előtte azért érdekes, mert nézeteiben merőben egyezik a' BOLYAIak mathesis körüli önállóbb nézeteikkel; holott meg van győződve, miszerint — mint olly egymástól messze fekvő tarto-

mányok lakói — a' legkisebbet sem tud egyik a' másikról 's eszméiket nem cserélhették egymással ki. E' munka — folytatá tovább — megérdemli a figyelmet; 's magyarnak a' csodálatos nézetekonságért kétszeresen érdekes 's könnyen hozzájutható lehet, mert orosz nyelven van írva. Ezen nyilatkozatából úgy látszik GAUSS is — mind a' mellett hogy magyar barátja van — azon felette tévedt véleményben van — mi egyébiránt általános meggyőződés a' németországi nem philologus tudósoknál — miszerint a' magyarnyelv, mint a' lengyel, tót, cseh 'stb. egy rokon ága a szláv nyelvtörzsöknek; melly tudatlanság valóban megbocsáthatatlan a' mindentudást igénylő német tudósoknál...

«Láttam Bolyaink matematikai munkáját dolgozó asztala melletti kisdud könyvtárában, hová úgy látszott kedveltebb írótól 's inkább kézi könyvül használni szokott művek valának beszorítva. E' jeles férfiú minden szavából kitetszett, miként Bolyainkat nemcsak mint barátját — tiszteli, de tudományos érdemeit is sokra méltatja. Miután bucsuzám, meghagyá üdvözlőnem nevében öreg barátját, 's mondanám meg miszerint nagy öröme leendne, ha jelen állapotja felől egy legujabb alkalom által: saját levelében értesítenék. Ezt én megígértem.»

De miként történt, kérdezhetjük most, hogy Bolyai Farkas csak több mint három év múlva, 1848 január havában, tudakozódott GAUSSnál az orosz matematikus munkájának czime után? Valószínűleg eleinte fölöslegesnek tartotta az olyan munka beszerzését, melynek nyelvét nemcsak hogy ő maga nem értette, hanem alighanem más sem, a kihez fordulhatott volna. Hogy e dologra később visszatért, arra bizonyára János indította. János hagyatékában terjedelmes «Észrevételek» találhatók LOBATSCHESKY *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* című munkájáról, melyek tartalmáról még pontosan be kell számolnunk. Az «Észrevételek» végén elbeszéli János, hogy mi indította LOBATSCHESKY művének megbirálására. «GAUSS» — írja ő — «...mi-után abbeli régi munkámat, ismégelve, bár-is kerülő szókkal, 's a' többi között az általa leg-> mértékbeni meg-lepődése nyilvánítása által meg-dicsérte... egy később ott járt jeles Nála járt Hazánk-fija nyilatkozatja szerint, az addig meg-lehető szótlan, társaságban rész-vétlen Nagy Ember 's Colossus, a |-krol kezdvén szólni Hon-fi-társunk... egyszerre... kiderült arczezal 's meggyult hévvel a' LOBATSEWKY' abbeli művét kezdé mint jól sikerültet, tiszta aranyhoz hasonló *gediegent* és az ő szelleme szerintit... dicsérni; régebb csakugyan nyilvánított bámulatja után oly csodálatos egyezésnek a 2 mű között, akkor többé az Appendixről nagyon

méltatlan-, igazságtalan-, helytelenül, 's a' végén, ön-maga alatt a fát le-vágólag, nevetségesen és nem kis... szégyenére válólag még csak emlékezni sem akart: holott eléggé meg-volt fölőbb mutatva az: hogy, ha LOBATSEWSKY különösen a' § 35-től ki-hozatalában a' némi lap- Δ -viszonynak, igen-is valódi eredeti, gyönyörű remek-derék, jeles Szerzőül tünt-föl...: úgy más-felől, mind a' mellett is, műve, minden a' körüli keringés és a' végczélhoz is, első tekintetre némi közel járnai láttatás mellett, a' végén csakugyan koránt sem ér oda,... vagy is az Appendix' és Tentamen' 2-dik darabja' végéni toldalék-bani eredménytől messze elmaradott.»

A «jeles Hazánk-fia» nevét biztossággal megállapítani, fájdalom, nem sikerült, habár közel esik az a sejtélem, hogy ez Szász Károly volt. De bárki lett legyen is, bizonyos, hogy nyilatkozata félreértésen alapszik; mert GAUSSnak az 1848. és 1849. években SCHUMACHERhez és GERLINGhez intézett levelei mutatják, hogy ő soha sem szünt meg érdeklődéssel viseltetni minden iránt, a mi fiataalkori barátját illette. Hogy azonban Jánost, kinek már GAUSS 1832 márczius hó 6-án kelt levele amúgy is nagy és soha el nem feledett csalódást okozott, GAUSSnak ez az állítólagos nyilatkozata erősen bántotta, figyelembe véve az ő szerencsétlen, ingerlékeny és gyanakvó természetét, nagyon is érthető.

Hatalmas viharok tombolhattak akkor János szenvedélyes lelkében. Hogy *Appendix*e nem részesült abban az elismerésben, melyet remélt és méltán is remélhetett, keserves volt reá nézve; mindazonáltal ebbe lassanként beletörődött, talán vigasztalva apja példája által, kinek *Tentamen*je ugyanabban a sorsban részesült. Hogy azonban a nem-euklidikus geometria felfedezését a maga számára más valaki vegye igénybe és őt attól a dicsőségtől megfoszsza, a melyet az igazságosabb utókortól várhatott, elviselhetetlen gondolat volt reá nézve. A rajta elkövetett sérelem tetőpontját pedig GAUSS viselkedésében látta, ki — a mint ő vélte — nemcsak vetélytársának pártját fogta, hanem vissza akarta színi még azt a fukar elismerést is, melyben az *Appendix*et részesítette. Mi ennek a magyarázata? Csak az — véli János — hogy GAUSS, eltelve haraggal és féltékenységgel, az abszolút geometria feltalálásának dicsőségét tőle irigylí, és minthogy ő maga «a böötiaiak kiáltását utálja», az orosz matematikust tolta előtérbe, a kivel János gondolatait titokban közölte. Izgatott agyveleje ezt a gondolatot mindig csak tovább szövögeti. Nagy furfangossággal törekszik bebizonyítani, hogy a *Geometrische Untersuchungen* szerzőjének az *Appendix*et ismernie kellett és e szerző alapján csak maga GAUSS lehetett. A galád igazságtalanság, melyet rajta elkövet-

tek, boszút kíván. De e boszúnak nemesnek kell lennie, méltónak ahhoz a férfihoz, kinek minden igyekezete és törekvése az emberiség «üdvére» irányul. A meddő életmódból, melybe évek óta elmerült, ki akarja magát ragadni és a világnak meg akarja mutatni, hogy mire képes. Nagy műveket akar teremteni, a melyek mint egyenrangúak a göttingai kolosszusai mellé sorakozhassanak és majd akkor ennek el kell ismernie, hogy mily súlyosan vétkezett ifjúkori barátjának fia ellen!

Így tehát az 1848. év október hó 17-ikével, azzal a nappal, a melyen följegyzései szerint atyjától LOBASCHESKIJ I. M. *Geometrische Untersuchungen*jét kapta, új szakasz kezdődött János életében, melyben szakadatlan, majdnem lázas tevékenységet fejtett ki és ezt mindaddig folytatta, míg nem végre súlyos betegség kiragadta kezéből a tollat. Szomorú dráma játszódik le szemünk előtt. Lelkesítve attól a becsvágytól, hogy egy GAUSSzal versenybe állhasson, a matematika legnehezebb és legmagasabb problémáiig merészkedik. De ezek a problémák könnyörület nélkül taszítják vissza azt a vakmerőt, ki megoldásukra nincsen hivatva; János pedig már nem tartozott a hivatottak közé. Ő a neki rendelt feladatot már teljesítette. Teremtő ereje most már meg volt törve és mikor a tér tudományát és a képzetes mennyiségeket újból elővette, még ezen a téren sem tudta többé azt a magvas rövidséget és eredetiséget elérni, melyek régibb műveit jellemzik; a mit nyújtott, az régi gondolatainak csak terjengős továbbszövése, a mi gátolta a tervezett művek befejezését.

Az első munka, melyhez János hozzáfogott LOBASCHESKIJ I. M. *Geometrische Untersuchungen* című művének beható bírálata volt. Míg János máskor matematikai tartalmú följegyzéseit majdnem kizárólag németül vagy latinul szerkesztette, addig ezt anyanyelvén írta, mert — mint maga mondja — kijelentéseit nem szánja a nyilvánosságnak. Helyesnek tartottuk tehát, hogy Jánosnak ezt a följegyzését, melynek teljes címe: «Észrevételek LOBATSEWSKY Miklós orosz császári valóságos tanácsnok és a kasani egyetemeni rendes tanárnak az egy-közü egyenek vagyis a' XI. Euklidi elv' tárgyában tett Berlinben 1840. évben ki-jött és a Fincke könyv-(kereskedő)-boltjában található ür-tani vizsgálataira nézve», ne nyomtassuk ki azó szerint, hanem hogy inkább azokból a fejezetekből, melyek személyi jellegűek, csak azt közöljük, a minek történeti becse van. De a matematikai tartalmú fejezeteket is rövidítenünk kellett, mert János előadása nagyon is terjengős és ismétlésekkel van tele. A közlött darabokat az elhagyott részek rövid jellemzéseivel oly módon fűzzük össze, hogy az olvasó az egésznek gondolatmenetéről képet nyerhessen. Alapul vet-

tünk fel egy terjedelmes fogalmazványt, mely tiszta írásánál fogva több olyan előmunkálat kidolgozásának látszik, melyeknek egyes darabjai szintén megvannak a hagyatékában. Ez a fogalmazvány az 1851. év újéve körüli időből származik, mert meg van benne említve, hogy BOLYAI Farkas, ki 1775 február 9-kén született, majdnem 76 éves. A följegyzések kibetűzése, mely KÜRSCHÁK Józsefnek köszönhető, fárasztó munkát okozott, mert leírásukra János egy különös írást használt, melynek betűit, a latin írás betűinek a magyar nyelvhez alkalmazkodó átalakításait, atyja találta föl (*Arithmetica eleje* Maros-Vásárhely 1830.). Ehhez még hozzájárul, hogy igen gyakran tőle és atyjától származó egész szokatlan elnevezéseket is használ, a mi összefügg Jánosnak avval a törekvésével, hogy a magyar nyelvre támaszkodó világnyelvet alkosson. Erre azonban csak a XIX. fejezetben térünk vissza.

Még határozottan kell az olvasót arra figyelmeztetnünk, hogy az *Észrevételek* megértéséhez az *Appendix* ismerete okvetetlenül szükséges, de a *Geometrische Untersuchungen* ismerete is kívánatos. Végül pedig megjegyezzük, hogy LOBATSCHESKIJ, úgy látszik, sohasem szerzett tudomást BOLYAI János *Appendix*éről; mert különben az 1856-ban megjelent *Pangéométrie*ben bizonyára rámutatott volna az ő és a magyar matematikus gondolatainak csodálatos megegyezésére.

XVI. FEJEZET.

BOLYAI János és LOBATSCHESKIJ Ivánovics Miklós.

Második rész: BOLYAI János Észrevételei LOBATSCHESKIJ Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien című művére.

«E nagyon nevezetes munka' egész szelleme és eredményje» — így kezdi János *Észrevételeit* LOBATSCHESKIJ Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien című művére — «bár-is sokban különböző úton menyen, a' Maros-Vásárhelyt már 1832-dik évben megjelent... *Tentamen Matheseos*' latin toldalékja vagy *Appendix*hez annyira hasonló, és sok benne lévő... jegyzetek a *Tentamen*ben ugyan-azon tárgyról meg tett reflexiokkal is oly rokon-szelleműök és egy-hanguak: hogy annak meg-pillantása valóban csak rendkívül... csodálkozást okozó... lehet; és ha GAUSS nyilatkozata szerint rend-kivül és leg-főlső mértékben meg-volt lepetve előbb az *Appendix* által 's... újabban... a magyar és muszka nyitánász* oly csodálatos egybe-találkozásán: valóban magam sem vagyok kevésbé meg-lepetve.»

«Mert bár-is a' tiszta tan' lényege bár-hol is a' Világon, természet-szerint csak egy-féle lehet, 's a' mit egyik véges okos lény föl talál, azt magában másnak sem lehetlen föl-találnija, 's mind a' mellett, hogy a szellemi teremtményeknek is, mint a' kül-terményeknek némileg — az összes Emberiség' fejlődése' stadiuma szerint... — ideje szokott el jönni, mi-szerint, mint például a' differential- és integral-számítás, a' tengeren és szárazon, ugyan-egy tárgy több-helyt is vizsgáltatik 's rokon eszmék ébrednek, 's mind a' mellett, hogy a jelen tárgy magában éppen nem valami különös nehéz vagy el-rőjtött: mind-ezek mellett is mondom, meg-gondolva azt, aránylag mily kevesen foglalkoztak e tárggyal, vagy-is mily kevés élesb iapintatu

* [Nyi a BOLYAIaknál mennyiséget jelent, *nyitan* = mennyiségtan (matematika), nyitánász = matematikus.] Fordító megjegyzése.

és jobb-izlésüőknek volt meg a jobb nyitanások között is még csak érző-szere vagy *Sinnje* rá, az ebbeli hiányt észre-venni, tisztán 's elevenen át-látni 's érezni, 's annak ki-pótlását vagy be-töltését lelkesen és tettel... kivinni; továbbá hogy Euklid, tehát körülbelül 2150 év, sőt az Emberiség' létezése óta — mely keresztény történeti számítás szerint mint-egy 6000 éves, más népek állitmánya szerint sokkal régiebb is, jelesen a sinaiak hite szerint Isten tudja tán hány száz-ezer éves — e' tárgybeli sok szép elmés vizsgálatok mellett is — melyek között is szigor-, fény- és mélységre nézve kételesen kívül [az] első helyet érdemlik a *Tentamen*' Szerzőjének abbeli közvetlenül az említett *Appendix* előtti vizsgálatai — mint nem tétetett, legalább nyilván vagy a' Közönség előtt, a jelen tárgyban magában, csaknem semmi lépés; mily röjtök- és sötétben hevert az és mily kevés be-látás, érdek 's fogékonyság mutatkozott mind az újabb időkig annak méltánylására — úgy hogy még az egyéb-aránt jeles és derék ERTINGSHAUSEN is a' már kész *Appendix*' becsét sem volt képes fölfogni --: ily körülmények között tán valóban szintoly kevéssé lehet valószínűnek állítani azt, hogy két, sőt három ember, egymástól oly messze, és egymásról nem tudva, csaknem ugyan-egy időben, 's bár-is külön-utakon, a' dolgot egyszerre csaknem egészen bevégezze, mint nem könnyen hihető az, hogy két három kincs-ásó néhány ezer évi sükertelen abbeli fáradság után ugyan-egy perczben bukkanjon külön-külön tömérdek kincsre.»

«Melyeket meg-fontolva, meg-vallom hogy — bár-is a' lehetőségig senkiben kételkedni vagy igazságtalanságot föl-tenni, ... nem örömet teszem ezen, egyéb-aránt csakugyan nem is köz-hírré teendő, hanem csak közöttünk maradó vagy magán-nyilatkozatot — nem tartom alaptalannak azon gyanut: mi-szerint *vagy* LITTBOW — ki mint a *Kasani* Universitas' Tiszteletbeli Tagja, vagy tán éppen hajdan oda-való Matheseos Professor... LOBATSEWSKYvel könnyen lehetett levelezésben — ennek a *Tentament*, melyet atyám ERTINGSHAUSENéknek meg-küldött volt Bécsbe, meg-küldötte, és LOBATSEWSKY, mint tagadhatlanul különös szép elméjű ember, annak szellemét, ... cél-ját és becsét föl-fogva, más úton is meg-kisértette a' cél el-érését; *vagy* pedig, mi előttem még valószínűbbnek látszik, hogy az ugyan a' nélkül is oly tömérdek kincscsel bíró colossus GAUSS, nem szüvölhetvén azt, hogy ebben is valaki meg-előzze, 's ennek már elejét csakugyan nem vehetvén, éppen *maga* dolgozta-ki az egész munkát, és adatta ki a LOBATSEWSKY' neve alatt...»

Miután János e föltevését bőven megokolta és GAUSSnak vele szemben tanusított viselkedése ellen kikelt, megjegyzi, hogy az

Appendix elsőségehez kétely csak abban az esetben férhet, ha LOBATSCHESKIJ ugyanazokat a tanokat már 1829-ben a «Kázáni Híradó»-ban (Kasanskij Wjestnik) kiadta. Bizonyos, hogy ő már 1823-ban fedezte föl a dolog lényegét, t. i. az *Appendix* 29. §-ának tételét és 1826-ban adta át tér-tudományának vázlatát akkori előjárójának, WOLTER mérnökkari századosnak, ki a mérnök-akadémián tanára volt. Továbbá elmondja még, hogy eszméinek fejlődésére befolyással volt SZÁSZ Károly, kivel akadémiai évei alatt érintkezett, és hogy sokat köszön atyjának, ki megadta életének a «tántorithatlan hűséggel megtartott főirányt».

E részletes bevezetés után a *Geometrische Untersuchungen* megbeszélésére tér át János. A 16. §-tól kezdve e mű egyes paragrafusait vagy szó szerint, vagy csekély változtatásokkal ismétli és észrevételeivel kíséri.

A 22. §-hoz fűzött észrevételeiben mondja: «Csak azt jegyzem... meg: hogy a' «képzelt ür-tan» név szintügy nem illő és czélszerű, mint a' «képzetes nyi» név, mivel mind-két-féle ür-tan... egy-joggal képzeltető, és örökre lehetlennék marad el-dönteni... azt: a' két-féle közül már melyik legyen a... valóságban,... vagy tárgyilag.»

A 25. § után, a melyben a parallelákra (vagy szerinte az asymptotákra) vonatkozó tételek véget érnek, János kifejti, hogy e tant a tervezett «tökélyes rendszerben» milyen sorrendben fogja előadni.

«Az *Appendix*' 1. §-ja három részre szaggatva: melyből az első a szintér' * magyarázatát foglalja magában.»

«1. §. Ha $bn || am$, 's c bár-hol van $m\tilde{a}$ -ban...: úgy... $bn || cm$ is... Apróra-véve megmutatva.»

«2. §-ba jöhet akár ez: Ha $bn || am$, 's c bár-hol van... bn -ben...: úgy cn is $|| am$...»

«Vagy pedig ez:»

«Ha $bn || am$; c, d $a\tilde{m}$ -ben vannak..., $cb = cd$, $ac \sim \infty$...: úgy $adb \sim 0$.»

Azután:

«§. Ha $bn || am$: úgy am is $|| bn$.»

János e tétel bebizonyítására LOBATSCHESKIJ módját akarja használni és azután az eddigi eredményeket az *Appendix* 6. §-ának tételében összefoglalni. Erre következnek:

* [Sintér = szinte érő, asymptota.] Fordító megjegyzése.

«§. Ha $bn ||| am$ és cp is $||| am$: úgy $bn ||| cp$ (és $cp ||| bn$) is.»

«Vagy előre bocsáttatik ez:»

«Ha $bn ||| am$; c $b\bar{a}m$ -en kívül van: úgy az mac és nbc' vágatja is $||| am$ -hez is, bn -hez is.»

«Aztán»

«*Első eset*: Ha c kívül van $b\bar{a}m$ -en.»

«*2-dik eset*, mikor... benne van.»

«§. Ha $bn ||| \triangleleft am$, c ab -közép, cp bam -ben $\perp ab$: úgy $am ||| cp ||| bn$.»

«§. Bár-mely am -re nézve van oly bn , mely $||| \triangleleft am$...»

«Mit röviden így:»

«Ha $cp \perp de$, c de -ben, $cd = ce$, $bq ||| cp ||| er$: úgy nyilván $bq ||| \triangleleft er$.»

«§. Ha $bn ||| am$, $map \perp mab$, c $bamp$ -ben [van], azaz $b\bar{a}m$ -nek p -felén; $cbna$ ür- $\wedge < R$: úgy map , nbc egymást vágják.»

Éles bírálatot mond János a *Geometrische Untersuchungen* 27. §-áról. Először az ő fejtegetéseit közöljük, de ezekhez azután néhány megjegyzést fűzünk; mert János túllőtt a célon és az az állítása, hogy itt LOBATSCHESKIJ «szarvas hibába esik», nem jogosult.

«§ 27'. elején [LOBATSCHESKIJ] a' gömb- Δ oldalait π -vel hasonlítja össze, 's π -nél $<$ -nek állítja: miből egyszer, ellene-mondhatlan-vagy csálhatlanul az következik: hogy π az oldallal *egy*-féle nyit, még pedig tehát vagy *valóságos hossz*at, vagy csupán arányt, vagy-is *el-vont*... *nyit*, hogy ne mondjam *számot* [ért], mi név az irrationalisokra éppen nem alkalmazható, 's a' törönyökre¹ sem czélszerűleg ki-terjesztendő, midőn *szám* alatt czélszerűöbbs 's kényelmesb csak *egész*-nyit érteni. És hogy már π -t az *utóbbi* értelemben veszi, vagy-is avval úgy él, mint csupa *arány*nyal: az is még ki-világlik a lap 28' közepéből azon állitmányából, mi-szerint az otti gömb- Δ -okat is π -hez $=$ -nek állítja: mi előbbieket alatt is tehát szükséges-képpen mind arányokat kell gondolnija, mivel csak úgy válhatik hossz is *lep*² is ugyan-egy-féle nyivel egy-félévé. Igen! de mihelyt valamely bár-mely *különös* vagy *concreta* nyiről, mint arányról van szó, már okvetlenül bizonyos *fő-mértéket*³ [kell] nekie adni 's állítani, ... mely által kiméressék... És így aztán *lepet* vagy *torjét*⁴ vonallal 's annak hosszával egybe lehet ugyan a' számításban hason-

¹ [Töröny = tört.] Fordító megjegyzése.

² [Lep = felület.] Fordító megjegyzése.

³ [Főmérték = egység.] Fordító megjegyzése.

⁴ [Terj = terület.] Fordító megjegyzése.

litni; de például, hogy egy F -eni *parallelogrammum* terjét $=$ -nek lehessen állítani az oldalai szorzatjához, megbizonyítatik az, hogy a terj-főmértékeül azon négyezet¹ kell venni, melynek oldala $=$ a hossz-főmértékhez. Mind mikről szólni a' Nagy-Érdemű Szerző elmulatván, eléggé kiviláglik... az, hogy a' π -t és $2R$ -t össze-zavarja, 's azokról korántsem ad világos fogalmat.. Az ő okoskodásából tehát csak annyi foly, hogy ha bár-mely gömbnek bár-mely két fő- vagy leg-> köre \wedge -én... az illető 2 fél-kör közötti $<$ -ik czikk-jét értjük]: úgy bár-mely gömb- Δ -terj $=$ feléhez a' 3 \wedge -je' összevegének a' fél-gömb-kül² híján. De számokrol 's arányokrol itt még semmi szó sincs.»

János szerint azonban «sokkal egyszerűbb és egyedül tökélyes mód», ha szög alatt, melyet két egyenes vagy több ugyanazon a ponton átmenő sik alkot, a síknak, illetőleg a térnek azok által határolt részét értjük. «És akkor... meg-bizonyítható az, hogy még pedig mind a' gömb-, mind a lap-, általában bár-mely körös-körül és bár-mely pontjára nézve egy-idomú³ lapbani fő vonalak által határozott Δ -terj $= z = a \wedge$ -összeghez $2R$ híján, szorozva azon egy-idomú lap' sugara' másod' rangjával,⁴ úgy hogy tehát ennek folytán... az l -hosszú L -ívű sugarú gömb- Δ -terj egyszerűleg $= z$; a' lap- Δ -terj is, mivel ott a' $z \rightarrow$, és a sugár $\vdash i = \sqrt{-1}$, [szintén] $= z$ abszolút értékéhez].

«LOBATSEWSKY mindjárt a vizsga' elején, a' § -16-ban a \wedge -öket is π -vel hasonlítja össze, miből is, midőn a \wedge -ökon is vagy a' ∞ szárak közötti ∞ lap-darabot, vagy csupa arányt kell érteni, a' többivel össze-vetve az világlik-ki, hogy minden nyin ő arányt ért: mit ugyan meg-is-tehet, ha a' \wedge -főmértékül azon \wedge -öt veszi-föl, melynek högye körül, annak szárai között írott kör-ív... oly arányban van az ugyan-azon sugaru fertály-kör-ív-hosszhoz, mint 1 ... az úrtantól függetlenül már meghatározott és ismeretes π -hez. Azonban, mikor aztán azt állítja, hogy ily értelemben a gömb-czikk vagy 2-högyü $\wedge =$ az illető högyénéli lap- \wedge -höz, 's tehát a fél-gömb-kül $= \pi$: ezen állítmány részint alaptalan és határozatlan, ... részint pedig éppen merőben hamis... Úgy de a \wedge , oly értelemben [véve], bár-mely sugarat nézve ugyan-egy, vagy-is a' sugártól független... A czikk pedig a' sugárral változván, már ebből nyilván ki-világlik az: hogy itt hiányzik valami... lényeges, még pedig a gömb-sugar'

¹ [Négyeg = négyzet.] Fordító megjegyzése.

² [Gömb-kül = gömfelület.] Fordító megjegyzése.

³ [Egyidomú = egyenletes = állandó görbületű.] Fordító megjegyzése.

⁴ [Rang = hatvány.] Fordító megjegyzése.

meg-adása, melynek czikkjéről szó van, mely sugárral pedig csak *ez-után* lehet meg-mutatni azt, hogy annak mekkorának kell lenniye, és hogy az a' leg-egyszerűbbön = az i -hez = L -iv \perp ordinátájához. De akkor meg-lehet-mutatni azt, hogy nem az egész, hanem csak a' fél-cikk = az említett \wedge -höz; mi-szerint itt LOBATSEWSKY... szarvas hibába esik..., ha csak nem képzei alattomban, mit. korántsem lehet föl-tenni, hogy a' gömb-sugárt a két i -hez = L -iv \perp ordinátájához = -nek veszi.»

Egy későbbi helyen — hosszabb megjegyzés alakjában — vissza-tér János a szögmérésre. « \wedge -öt» — mondja — «... leg-egyenesben az által lehet meghatározni, hogy azt, mivel magában... ∞ nyi, más \wedge -vel úgy össze-mérve..., hogy högyeik össze-essenek, vagy-is akként tekinteti [relativ] nyinek nézve, annak aránya adatik-meg a' $4R$ -hez: mire nézve aztán nyilván méltán nevezhetni az R -t fő vagy alap- vagy *fertály*- \wedge -nek, mit különben *derék*-, vagy *egyenes*- \wedge -nek szoktak nevezgetni. És ezen első mód *össze-rakó* [synthetikus]... és leg-egyszerűbb.»

«A 2-dik... kínálkozó mód pedig. az: hogy F' minden esetre... létezvén és abban ugyan-azon \wedge' szárai közötti bár-mely kör-ívnek saját sugaráhozi aránya... változhatlan lévén: ezen *arány* adassék meg, és abból... találtassék-meg a' \wedge -nek a $4R$ -hezi aránya, mi az előbbi-szerint végre egyedül ad világos fogalmat a \wedge' nyíjéről.»

«S-ben nyilván az is \wedge -határhozó, ha mind a' lapbani sugár, mind. a megfelelő *egyenes* szárak közötti kör-ív-hossz. ön-állólag. számok által meg-adatik: mi mód azonban... még sokkal több bajjal járna..., úgy hogy egyedüli természetes, egyszerű és a gyakorlatban a \wedge -méréskor követtetni is szokott módnak csak az első marad.»

Mit felelt volna LOBATSCHEFSKY e fejtegetésekre? Hogy az igazságosság kötelességének eleget tegyünk, próbáljuk meg őt megvédeni! Mindenesetre meg kellene engednie, hogy a *Geometrische Untersuchungen*-ben, melyet lehetőleg rövidre akart szorítani, nem mondta meg határozottan, hogy nála a π mit jelent, ámde a 9. oldalon világosan látható, hogy ő a π -t csak a $2R$ jele gyanánt használja. A 27. §-ban pedig annak kimutatásáról van szó, hogy a háromoldalú testszög egyenlő a lapszögek félösszege és a derékszög különbségével és ehhez egyáltalában nem szükséges, hogy megadjuk a gömb sugárát; a félgömb itt nem jelent egyebet, mint a $2R$ -nyi lapszöget. Ezt igazolják azok a részletes fejtegetések, melyeket 1829. évi értekezésében hozott nyilvánosságra. Ebben így szól:

«Valamely körív nagyságát úgy határozzuk meg, hogy összehasonlítjuk annak a körnek a kerületével, melynek a körív része. Az így nyert arány független a sugár nagyságától és csak annak a két sugárnak a kölcsönös helyzetétől függ, melyek az ívnek végpontjain átmennek. Hogy az egységül szolgáló ív választását ne korlátozzuk, a kerületet 2π -vel jelöljük. Az így jellemzett ívet *egyenes vonalú szögnek* vagy ama két egyenes szögének nevezik, melyek az ív végpontjain átmennek és a kör középpontjában találkoznak. Épen úgy 2π -vel jelöljük a gömb felületét is, ha belőle kimetszett részeket vele magával hasonlítunk össze. Ha ilyen részt két olyan sík metsz ki, mely a középponton átmegy, akkor nagyságát *lapszögnek*, ha pedig más módon történik a kimetszés, *testszögnek* nevezzük. Lapszögek és testszögek nem függnek a gömbfelület sugarától, hanem azoknak a síkoknak kölcsönös helyzetétől, melyek a gömbfelület középpontjából kiindulnak.»

Sőt az *Új alapvonalakban* (Nówija natschála geometrii) (1836) LOBATSCHESKIJ még azt is mondja: «A π számot néha 200-nak, gyakrabban pedig 180-nak veszik, a szerint, a mint az új dekadikus vagy a régi hatvanas beosztást követik... Néha π alatt olyan számot értenek, mely csak közelítőleg határozható meg és mely a 355:113 törttől csak igen keveset különbözik.»

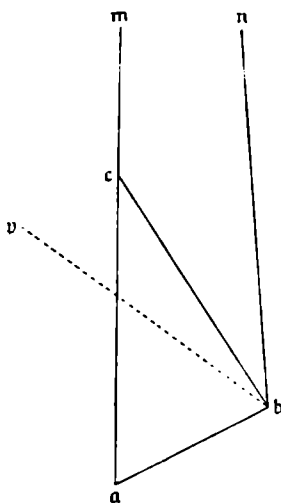
Ha a π szám e szokatlan használatát valaki helyteleníti, meg kell jegyeznünk, hogy az *Appendix* is nem egy olyan szokatlan jelölést tartalmaz, a melynek megértésére gyakran szükséges, hogy az olvasó a sorok között olvasson, pl. midőn a 26. §-ban minden további magyarázat nélkül a gömbi háromszög oldalának sinusáról van szó.

A 32. § utolsó tételéhez János a következő megjegyzést fűzi:

«Azon... állitmány végre; mi-szerint F egy ∞ sugaru gömb-lap, 's L egy ∞ sugaru kör-vonal lenne, szigorán, és oly értelemben véve, mi-szerint a' gömb, kör *középpel* bir, ... helytelennek mutatkozik. Lehet azonban csakugyan a' gömb és kör' eszméjét úgy szélesbitni és módosítani, hogy nem csak F és L , hanem a *túl-gömb* 's *túl-kör*, vagy-is *hypersphaera*- és *hypercycclusok* is be-foglal-tassanak.»

«Még pedig F és L -nél... e' dolog... elérhető. tisztán *ürileg* [geometriai úton] is, ha következő értelmezvény állittatik föl: bc [15. ábra a 144. oldalon] ac *mellett* van..., ha ac-nek minden pontja vagy ac egészen \overline{bc} -nek egyik oldalán van: de bár-mely bp által $\triangle abc$ -ben b-től ac... két darabra vágatik.» Itt, a mint János megjegyzi, ac és bc akár véges, akár végtelen egyenesek lehetnek.

«A' *túl-gömb* és *túl-körökre* nézve a ki-terjesztés és be-foglalás csak üdileg [analitikailag] lehet és mehet, mi az F és L -re nézve is áll; tudni illik az által, hogy azon hossz-nyi, melylyel kell az afféle körös-körül 's minden pontjára nézve egy-idomú lepek' \triangle -einél az oldalokat mér-párazni [osztani] hogy az ismeretes gömb- \triangle -tan azokra . . rögtön alkalmaztathassék, nevezessék az illető lep' sugarának.»



15. ábra.



16. ábra.

«De a' *határ- \triangle* nevet, melyet LOBATSEWSKY az F - \triangle -nek ad, czélszerűbbnek tartom a' véges, vagy egy vagy mind-két felől ∞ alapu $\|$ -s lap [háromszögnek] adni [16. ábra].»

A

$$s' = se^{-x}$$

egyenletnek a 33. §-ban adott bebizonyításáról joggal mondja János, hogy «bár-is . . . a' dolog körül jár, még sem látszik tisztán az, minnek lenniye kellene.» Már HOÜEL is a *Geometrische Untersuchungen* francia fordításában szükségesnek tartotta, hogy ezt a helyet szöveg alatti jegyzettel megmagyarázza. Egyébiránt az a levezetés, melyet LOBATSCHEFSKY 1837-ben az *Új alapvonalak* 117. §-ában ad, világosság tekintetében teljesen megfelelő, a miből látszik, hogy a 33. § fogalmazásának csak a rövidségre való törekvés ártott. Evvel magyarázhatók a *Geometrische Untersuchungen* különböző más hiányai is, melyek azt okozzák, hogy ez a mű, a mi a tömör és mégis világos előadás művészetét illeti, messze elmarad az *Appendix* mögött.

De Jánosnak LOBATSCHEFSKY fejtegetései ellen még más kifogásai is vannak.

«Rossz ki-fejezet LOBATSEWSKYben, hogy e , mint ő nevezi az itti I -t, *ismeretlen-szám*, nem is nyi, 's csak azon . . . korlát alá vettetett, hogy >1 ; 's kissé hirtelen vagy rögtönözve, ámbár még sem hely-

telenül, rántja-ele azon eszmét, mi-szerint I -t leg-egyszerűbb lesz ...
 $= c$ -hez venni, miután lesz aztán

$$x = \log \text{ nat } X.»$$

«Az is NEWTONI ... izlésű ... állitmánya, hogy ha $x = \infty$, úgy $s' = 0$ vagy *végre éppen nincs*; mert a végetlennek, tehát véghetlennak is éppen lényegében és fogalmában van az, hogy *ne legyen* ... ott *végző* vagy *utolsó* állapot, 's lehetlenségről egyebet állítani. annál, hogy *lehetlen*,. csak szóbeli játéknak ... tartandó: mi szóhasználat 's el-járás a'. józan. agyu művölötlen .. embernél is rögtön mosolyt idézne elé annak nyilvános jeléül: hogy ő az afféle beszédet csak tréfának vagy szerinte *komázásnak* veszi.»

Ezt a kifejezést: «ismeretlen» LOBATSCHESKIJ az 1829-ben kiadott értekezésében így magyarázta: «mert ismeretlen, hogy az egyenes mérésénél melyik vonal veendő egységnek».

Különösen érdekes megjegyzéseket írt János a 35. §-ról, melyben LOBATSCHESKIJ kifejti, miképen juthatni a XI. axióma felhasználása nélkül a gömbi trigonometria képleteihez.

«A' mint az *Appendix*nek §-29 ... kételyen kívül egyik leg-sarkalatosb része ..., úgy LOBATSEWSKYNél is itt kezdődik leg-lényegeseb eredetisége 's el-térése az *Appendix*től; 's valóban megkell-adni azt: hogy általjában az egész munkája, főleg pedig innen kezdve ... hatalmas, ... teremő lángelmét ... árul-el ...; és azon út és mód, kivált jelen §-tol kezdve ... melyet követ, 's azon eredmény melyre vezettedik, őt ... kételyen kívül könnyön egyszerre a' leg-első rangu ... ür-tanászok közé helyezi ...»

«Fő-eszméje remek; ő is jó röjtök-szögben jó tapintattal ... kereskedik és találja meg. az igazságot; bár-is sok-résztint borzasztón hosszasan be-bonyolítva bajlódik, 's csakugyan még meg-lehetős távol marad azon tökélytől, mely kívánható, és melyet el-is-értem, mind mi mellett is műve valóságos mester-műnek el-ismerendő.»

«De, hogy ne tapogatozzunk sötétben ...: mielőtt tovább menénk, nagyon jó lesz itt előre .. a vég-czélnek lényegét ... meg-ismerni ... és ki-jelölni ... A' közelebbi czél tehát nem egyéb, mint mind a' gömb-, mind a' lap- Δ -tan ... teljes előadására szükséges ... egyenleteket ... föl-állítani ...; még pedig leg-közelebről csak a leg-egyszerűbb olyakat, a melyekből a többi .. ki-fejtethetik.»

«Ismeretes, mi-szerint ... néhány kivétellel, melyeknél a' Δ -földolás ... csak *kétesen* eshetik-meg, bár-melyik 3 eleme [oldala vagy szöge] által egy, akár lapi, akár gömb- Δ , bár-mi-féle R - \wedge -ü

Δ pedig tehát bár-melyik az R -től különböző két eleme által, teljesen meg-van-határozva.»

«Mi-szerint minden esetben $3+1$ vagy-is négy Δ -elemnek kell-vén minden a Δ -földróást... tárgyzó... egyenletben elő-fordulnija: könnyön láthatólag csak négy-féle egyenlet elég bár-mely e' részben elő-fordulható kérdésre [való] megfelelésre. Elég

1. a' 3 oldal és egy \wedge [abcA],

2. 2 oldal 's a' két egyiken fekvő \wedge [bcAB],

3. 2 oldal 's az azokkal szemben levő \wedge -ök [abAB],

4. egy oldal és 3 \wedge között [aABC] viszonyt vagy egyenletet állítani-föl.»

«A' Δ ' elemei közötti viszonyok a' leg-egyszerűbbön kör- vagy \wedge -függönyök* által, tehát annyiban csak kerülőleg nyertethetvén és állittathatván föl, a' fölöb említett ki-vételeknél vagy kétes esetekben a kéteesség mindenkor a' keresett elemnek az illető egyenletből csak sinusa általi meg-határozódása... által idéztetik elő.»

«De menjünk már tovább. Hogy bár-mely iveny** és bár-melyik kör- vagy \wedge -függönyje között algebrai viszony általánosán nem létezhet: azt, még pedig tudtomra, sőt hitem szerint, a' Földön ugyan, leg-előbb... teljes szigorral és fénynyel meg-mutatam más-helyt, mint hason Nemű következő tanokat is: hogy kört \square -ből 's más görbe határu, 's áltáljában görbe lep- vagy örököt... mikor lehet egymásból ki-rakni, tehát azoknak véges egyenlőségüköt meg-mutatni; hogy irrationalis $\sqrt[n]{}$ -t, 's áltáljában 2-nél fölsőbb rangú algebrai gyökeret másod-rangúakkal kitenni, vagy is oly ki-fejezetet... szigorú értelemben ürilegi [geometria]... határozása... nem teljesíthető; az algebrai egyenletek... átlátszó tanjával együtt az algebrai radical-tant is áltáljában, az EUKLID' éles [elméjű] 10-dik könyve lényege' teljes ki-szélesítése, minden oda-valót be-foglalása... által. Ilyen az elv-XI' igazsága vagy hamissága közötti... el-dönthetés... lehetlenségének is teljes szigorral és fénynyeli ok-mutatványa... Az által per se koránt sem állittatik az: hogy ne lehetne némely különös iveny, például a $\sqrt{2}$ -nyi és sinusa között algebrai viszony is; sőt ne lehetne magát a'... π -t is tán algebrailag is kitenni; mind eddigelé tudtomra... még az sem lévén... el-döntve, hogy a π irrationalis[-e] vagy nem. De azt már állitom, hogy a fölöb említett 4-féle Δ -tani egyenletet, az illető 4 elem közötti algebrai viszony által nem lehet föl-állítani.»

* [Függöny = függvény.] Fordító megjegyzése.

** [Iveny = szög ívmértéke.] Fordító megjegyzése.

Ehhez utólagosan czeruzával hozzáírta János: «még kérdés az is! adhuc sub iudice lis est.» Ennélfogva az előbbi állításokat is csak puszta sejtelmeknek tarthatjuk.

«Vizsgáljuk-meg már előre, azokat még nem is ismerve, az említett 4-féle egyenlet'... tartalmát és hogy mennyiben lappang tán némelyik közülük másban... Vegyük... itt csak a' gömb- Δ -öt, melynek tanja az EUKLID-ellenes ür-tanban nem csak a' lap- Δ -tannal egyezik, hanem abból a' sugárnak ∞ -re nyújtása 's határ-vevés által még az F - Δ -tan is ki-jő.»

«Az elsőből [tehát $abcA$ -ból] foly az a , A -nak b , B -veli megcserélése által hasonló viszony $bacB$, vagy-is... $abcB$; 's hasonlólag $abcC$ között. Lássuk már azt meg: e' 3 egyenlet bármelyik kettejéből... mi foly. Röviden szólva $abcA$ és $abcB$ -ből egyszer az a -t szám-üzve, ... máskor pedig c -t: találtatik viszony $bcAB$, aztán $abAB$ között, melyek azonnal a' fölőbbi 2- és 3-dik egyenletnek felelnek meg, sőt azokkal azonosak is, mivel különbön még egy elemet lehetne szám-üzni 's csak 3 elem között viszonyt találni, mi pedig, az olyan bizonyos határok között kényelmesek [tetszés szerintiek] lévén, nyilván lehetlen. A' $bcAB$ -ból foly $bcAC$ is: mikből b -t, vagy c -t szám-üzve, lesz a' 4-dik viszony [$bABC$, illetőleg] $cABC$ között. Mi-szerint az első egyenlet mind a' többi hármat is magában tartja.»

« $bcAB$ -ból pedig az előbbi szerint $cABC$ folyván, mi utóbbi nyilván hasonló az első egyenlethez, 's attól, leg-alább a' betűkre nézve csak abban különbözik, hogy mind-egyikben nagy betű van ott, hol a' másokban kis betű van. [Tehát] nyilván az $aABC$ vagy 4-dik [egyenlet]ből; és a' 2-dikből is foly mind a' többi 3.»

«Végre az $abAB$ -ból foly $acAC$ és $bcBC$, azonban e' 3' bármelyik kettejéből mind csak a' 3-dik jő-ki, mi viszonyból tehát így soha több nem jöhet ki.»

János különböző följegyzésekben megkísérlette, hogy az $abAB$ sinus-tételből az első egyenletet, és így valamennyit oly módon vezesse le, hogy a háromszöget egy transverzálissal két részlet-háromszögre osztotta és a sinus-tételt ezekre alkalmazta; a számítás elvégzése azonban azt mutatja, hogy így mindig csak az eredeti háromszögre vonatkozó sinus-tételhez jutunk.

János most már a derékszögű háromszög vizsgálatára tér át, a melyre, ha C a derékszög, csak a következő 6 egymástól lényegesen különböző egyenlet vonatkozik: abc , abA , acA , acB , aAB , cAB (és az ezekből a betűk fölcserélése révén származó abB , bcB , bcA , bAB egyenletek) és megvizsgálja ezeknek összefüggését.

Miután bemutatta, hogy LOBATSCHESKIJ miképen vezeti le a

derekszögű gömbháromszög oldalai és szögei között fennálló egyenleteket, megjegyzi:

«Ily éleken járva, 's högyökön állva, supplantja-ki nagyon nagyon gyönyörűn és Nemesen, jelesen, derekason főszmájében, LOBATSSEWSKY, a kötélén 's dróton tánczoló leg->, ügyösb 's finomabb művészek módjára a gömb- Δ -tan ön-állóságát.»

«Azonban ezen része a' dolognak minden efféle... előkészület nélkül is el-végeztethetik már azon uton is: hogy ha a sugár ~ 0 , a' gömböni viszonyok vagy ugyan-azok mint Σ -ban], vagy röviden szólva törekednek a Σ -beliekhez. Már pedig azok nyilván bár-mely sugárnál, változhatlanok, vagy-is attol függetlenek. Tehát [csak az első eset lehetséges].»

«A' mint... következő más úton is ugyan-ezen célhoz érhetni... Σ az S -ek határa lévén, úgy hogy bár-mely... S' föltételére épített... viszony határa, ha $i \sim \infty$, Σ -ban áll; továbbá Σ -ban az ismeretes \bigcirc [gömb]- Δ -tan állván, S -ben is csak oly afféle lehet, mely vagy *állandó*, vagy határában... a' Σ -bani viszonyt adja meg, mely 2 eset közöl itt az első van [meg],... tudni illik az, hogy azon S -beni viszony bár-mely i -re nézve állandó, bár-mely gömb- Δ -elem [még az oldalak is végelemzésben] szög lévén.»

A 36. §-ban LOBATSCHESKIJ meghatározza a $II(x)$ függvényt és a

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} II(x) = e^{-x}$$

egyenletet találja, «hol e bármely tetszés szerinti az 1-nél nagyobb szám lehet, mert $II(x) = 0$, ha $x = \infty$ ». Abban a hitben, hogy itt vetélytársa álláspontjának gyengéjére talált, János a *Geometrische Untersuchungen* e két sora ellen heves támadást intéz. Valóban nem tagadható, hogy e helyen hiány mutatkozik, mely persze nem olyan nagy, a mint János állítja. Minthogy János fejtegetései nem elég világosak, sőt ellenvetésének magva nincsen határozott szavakban kifejezve, e följegyzését mellőzendőnek véljük és inkább a tényállás rövid jellemzésére szorítkozunk.

A 33. §-ban be van bizonyítva, hogy ugyanazon két tengely között egymástól x távolságban húzott két határirvra nézve a

$$\frac{s'}{s} = e^{-x}$$

egyenlet áll fenn, hol « c ismeretlen szám és csak az $c > 1$ feltételnek van alávetve». A 36. §-ban bebizonyítja LOBATSCHESKIJ, hogy a

$$(\cot \frac{1}{2} II(x))^{\frac{1}{2}}$$

kifejezés független x -től, tehát állandó. Hogy ennek az állandónak mi az értéke, itt még eldöntetlen marad. E bebizonyítás ellen, melyről János méltán mondja, hogy «el-röjtött, zugolyából nehezebben... föl-található, ... nagyszerű és fényes», mitsem lehet felhozni. Hiány azonban az, hogy LOBATSCHESKIJ ezt az állandót ismét e -vel jelöli; mert ha határozottan mondja is, hogy « e bármely olyan szám lehet, mely nagyobb az egységnél», mégis ugyanaz érvényes a 33. §-ban fellépő e -re nézve is. Hogy az orosz geometernek volt ez iránt érzéke, kitűnik az 1855-ben megjelent *Pangéométrie*jéből. Ott először azt írja (*Oeuvres*, t. II. 621. old.):

$$\frac{s'}{s} = E^{-x}$$

és azután (a 633. oldalon)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$

később pedig (a 645. oldalon) bebizonyítja, hogy

$$E = e.$$

Igaz, hogy ezt az egyenlőséget bizonyos tekintetben mint olyan számítások mellékeredményét nyeri, melyek az egyenes általános egyenletének felállításánál szerepelnek.

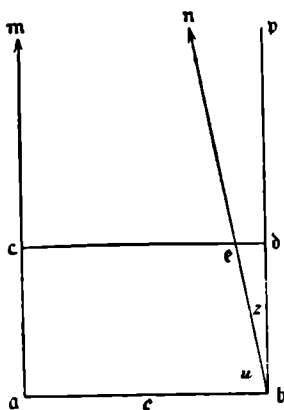
Hibát LOBATSCHESKIJ csak akkor követett volna el, ha ama két állandó egyenlőségét *bebizonyítás nélkül* állította volna, vagy pedig a

$$\frac{s'}{s} = e^{-x}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

egyenleteket *egyidejűleg* használta és bennük az e állandót ugyanannak az értéknek, mondjuk, a NEPER-féle logaritmusok alapszámának vette volna. De, a mint könnyen meggyőződhetünk, ez nem történt; ellenkezőleg a 36. §-ban egyedül csak a második egyenlet szerepel (55. old. és implicite 60—61. old.); akkor pedig egyre megy, hogy e -nek milyen értéket tulajdonítunk, és így szabad neki azt az értéket tulajdonítanunk, mely a számítások kivitelénél legkényelmesebbnek bizonyul.

LOBATSCHESKIJ abban a meggyőződésben, hogy honfitársait a tárgy követésében alighanem előbbi munkáinak terjedelme akadályozta, ez alkalmommal vizsgálatainak csak lényegét óhajtotta bemutatni, és talán ez az oka annak, hogy a 33. és 36. §-okban fellépő állandók kapcsolatának kérdését nem taglalta, habár *azoknak egyenlő voltát jól tudta*. Erre ugyanis nem volt szüksége a háromszög oldalai és szögei között fennálló egyenletek levezetésénél, a melyeknek felállításával a *Geometrische Untersuchungen*t be akarta fejezni.

Hogy LOBATSCHESKIJ amaz egyenlőséget jól ismerte, kitűnik 1829. évbéli *A geometria alapvonalairól* című értekezéséből. Ebben ugyanis először a $\Pi(x)$ -re vonatkozó egyenletet vezeti le és csak később bizonyítja be, hogy azután $s':s = e^{-x}$. «Ezt az egyenletet közvetlenül is megkaphatjuk, ha a határkörök tulajdonságaira támaszkodunk». Itt nyilván arra a levezetésre céloz, a melyet 1836-ban az *Új alapvonalak* 117. §-ában adott és innen 1840-ben a *Geometrische Untersuchungen*-be átvett. Ezzel meg van czáfolva Jánosnak az az állítása, hogy a *Geometrische Untersuchungen*-nek szerzője az *Appendixet*, a melyben a két állandó egyenlő volta ki van mutatva, ismerte és megdől egyszersmind a belőle vont az a következtetése, hogy «itt alkalmasint úgy erkölcsileg, mint tanilag nincs tiszta dolog». Ép oly kevéssé igaz, hogy LOBATSCHESKIJ-nek csak «történetesen»,



17. ábra.

vagy mert «az *Appendix*. által vezetődött félre» jutott eszébe, hogy a két állandót egyenlőnek vegye. Ezért elegendőnek tartjuk, hogy Jánosnak a 36. §-ra vonatkozó észrevételeiből csak a két állandó egyenlő voltára vonatkozó bebizonyítását közöljük.

LOBATSCHESKIJ befejezetlen bebizonyításának kiegészítése végett «legyen [a 17. ábrában] am \perp ab, bn \parallel am, meg \angle bam-ben bp is \perp ab; \angle abn = u, \angle pbn = z; ac = ab = c; cb \perp bp, mi előbbi bn-t e-ben vágja; és lesz itt

$$\cotg \frac{1}{2}u = \cotg (\frac{1}{2}R - z) = \frac{1 + \tg \frac{1}{2}z}{1 - \tg \frac{1}{2}z} = 1 + 2 \tg \frac{1}{2}z + w,$$

hol w [még z-hez viszonyítva is] ~ 0 , ha $c \sim 0$.

«Más-felől akkor [az *Appendix* 23. §-a szerint]

$$C \doteq \frac{ab}{ce},$$

vagy-is

$$\frac{ab}{Cce} \sim 1.$$

A \doteq jel azt jelenti, hogy a bal oldal egyenlővé válik a jobboldallal, ha $c \sim 0$.

«De $ce = cb - eb$; az *Appendix* § 27-je szerint

$$\frac{cb}{ab} : \frac{1}{\sin u} \sim 1, \quad \frac{ac}{bb} \sim 1;$$

egy más, a' szóban forgó megbizonyítandótól függetlenül megerősíthető... tan-szerint, az általjában ∞ oldalú Δ bde-ben az elemek' viszonyja, röviden szólva... az F -ben vagy Σ -banihoz töreködik, vagy-is...

$$\frac{de}{c} \sim \operatorname{tg} z,$$

vagy-is

$$\frac{de}{c \operatorname{tg} z} \sim 1 \quad \text{és} \quad \frac{de}{cz} \sim 1.$$

Innen... csak könnyűszerűleg érintve az ok' pontjait,

$$cd \doteq \frac{c}{\sin u}, \quad de \doteq cz, \quad ce \doteq \frac{c}{\sin u} - cz,$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{c}{\sin u}}{\frac{c}{\sin u} - cz} &= \frac{\sin u}{1 - z \sin u} \doteq C \doteq \frac{\cos z}{1 - z \cos z} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \dots}{1 - z + \dots} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \dots; \end{aligned}$$

és innen végre [ha $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c) = \mathbb{C}$]

$$\frac{\frac{1}{2} \log \operatorname{nat} C}{\frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \mathbb{C}} = 1,$$

és így... el-végre... már most nem csak... álomban vagy pusztán képzelődve, [hanem] valóban ki-víva a

$$\cot(\tfrac{1}{2} \Pi c) = C.$$

A *Geometrische Untersuchungen* befejező 37. §-a ellen is különböző kifogásokat emel János. Megrójjja, hogy az átmenet az imaginárius geometriáról a közönségesre «könnyelmű és felületes» és nélkülözi azt a fontos megjegyzést, hogy «az S -beni lap- Δ ' viszonyai úgy is a Σ -baniakhoz tör[nek], ha $i \sim \infty$ » továbbá «mi-szerint a' S , ha abban Σ' esetére az $i \sim \infty$ -nek meg-felelő kifejezetbeli határok vétetni gondoltatnak, *határu*l Σ -t is magában foglalja, ... és tehát S oly értelemben, bár alaptalan föl-tétén épült, már ön-állólag vagy függetlenül is igaz» és végre, «hogy [S -ben] a' ∞ oldalú Δ -nek a véges F - Δ -hezi viszonyja' vizsgálatából 's meg-fontolásából, a' lap- Δ -tanból is határ-vétel által ki-jő az F - Δ -tan is». Valóban fontos előnye az *Appendix*-nek, hogy benne a trigonometria képletei az i állandót tartalmazzák, úgy hogy — modern kifejezéssel élve — módunkban van a tér görbületi mértékét megváltoztatni, míg LOBAT-

SCHEFSKIJ a trigonometria képleteinek levezetésénél kezdettől fogva az $i = 1$ értéket használja.

Fontosabb ennél a kifogásnál az a bírálat, melynek János LOBATSCHESKIJ arról az állításáról mond, «hogy a' nyert lap- Δ -tannak léte... már magában elég alap... arra: hogy az S' föl-tétele éppen olyan lehetőknek tartassék, mint a Σ -jé». «Ugyan-is ilyesmi' állíthatására» — mondja János — «még előbb telyes szigorú és fényes ok-mutatvány szükséges, mit is, minden ebbeli kétely-, homály-, 's hiú... remény-sugár'... örökös ki-oltására 's a tárgynak e' részben is be-végzésére... valódi nyi-tani szellemben telyesítendek.» Ha János evvel arra céloz, hogy a sík trigonometriája képleteinek ellenmondás nélküli voltából még nem következik, hogy a XI. axióma nem bizonyítható be esetleg *térbeli* szerkesztésekkel, akkor kétségtelen, hogy ez az ellenvetés jogos. Valóban János hagyatéka mutatja, hogy ő e tekintetben LOBATSCHESKIJ álláspontján felül emelkedett, bár a «szigorú bebizonyítást» befejezni neki sem sikerült.

LOBATSCHESKIJ továbbá kijelenti, hogy e szerint annak megítélésére, hogy a közönséges geometria alapján végzett számításoknak milyen mértékű pontosságot tulajdonítsunk, más módunk nincsen, mint az, hogy a csillagászati megfigyeléseket hívjuk segítségül. Ezekből azonban következik, mint azt egyik értekezésében kimutatta, hogy olyan háromszögekben, melyeknek oldalai méréseink számára hozzáférhetők, a három szögnek az összege még egy másodpercznek századrészével sem tér el a két derékszögtől. Sőt a valóságban — LOBATSCHESKIJ ugyanis számítási hibát követett el — az eltérés kevesebb a másodpercz százazredrésznél.

E kérdés *gyakorlati eldöntéséről* János a következőképen nyilatkozik: «Leg-finomabb vagy élesb és Nemesb érző-szer a szöm..., [de] már azon [légköri] vil-any*- (sugár)-törődés. vagy *refractio lucis* miatt tévelybe... esnék a' tovább nem ügyös- és okoskodó, 's azon különbséget új vizsga által... elenyésztetni... nem töröködő... A' mellett per se, bár-mely... idomukat szilárdul meg-tartó hossz- és \wedge -mérő-szerekkel legyünk is el-látva, 's bár-mily szorgos vagy gondos ügyölettel járjunk is el a' méréskor, 's bár-mi lehető *naggyból* a' kisebbe menve: arról nyilván soha senki sem... kezeskedhetik..., hogy bár-mely akár a' természettől, akár művészileg készített tárgyak «gymáshozi. helyzetüket leg-alább annyira meg-tartják, hogy abban, leg-alább mi, semmi változást meg-határozni képesek nem vagyunk. Ugyan-is már lehető föld-ingás egész nagy föld-darabot, 's

* [Vil-any = világító anyag. azaz fény.] Fordító megjegyzése.

akár gránit-hegyet el-fizomíthatna helyéből. Csakugyan ellenőrös mérések által a' nyert határozatok elég helyességéről . . . nyerhetni eléggé meg-nyugtató eredményt. A' világ-tévedés, . . . az-az *aberratio lucis*nak ugyan csak a Földön kívüli Égi testekről jövő világra nézve van helyje.»

«A' kisebbről menve és következtetve a' nagyobbra, a' kisebbnél netán elkövetett hiba mind nőhetvén és terjedhetvén, ellenben a' nagyobbnál becsuszott hiba a' kisebbnél kevésbbé lévén érezhető — egy lehető nagy, nagyjában hozzá-férhető, 's az egyen-oldalutól nem fölötte sokat különböző $\triangle abc$ -t, melynek högyei lehető magos és nagy lát-határu hegyek tetején föl-vétetvék; és mérjük-meg, bár a'... leg-jobb, de leg-egybe-rakottabb és drágább... \wedge -mérővel a REICHENBACH szorzó-theodolitja, sőt szorzó-körével is annak 3 \wedge -ét lehető leg > szigorral vagy pontossággal.»

Mi a remélhető legnagyobb pontosság? «A' Föld nagyjában 1000 föld-rajzi mértföldnyi sugaru gömb, leg-magosb hegye a' Dhavalagiri körülbé 1 mértföld. Tetejéről a' gömbhöz vont érintény [érintő]

$$\sqrt{1001^2 - 1000^2} = \sqrt{2001} = 44.7 \text{ mértföld.}$$

[Tehát] a' legnagyobb a' Földöni táv, melynek egyik végéről a' másikig látni lehet, körülbé 45, sőt a' helyi akadályokat is véve, alig több 30 föld-rajzi mértföldnél. Az Osztrák-Hon'... catastral-föl-mérésénél leg-nagyobb \triangle -oldal azonban csak körülbelül $6\frac{1}{2}$ föld-rajzi mértföld. Nem kellvén feledni azt is: hogy növöködő távval a' tárgyról jövő vil-sugárnak is az annál inkább változékonyságnak alája vetetett vagy arra több alkalmat találó légben annál nagyobb el-távo-zása 's tévedése lehet a helyes iránytól; tehát, ha mi nyereség lehetne egy felől > távnál, más felől föl-számíthatlan veszteség és kétely... fűrhatná be magát.»

«De tegyük fel azt, hogy mint az Osztrák ország-mérésnél a' mér-rudaknál $\frac{1}{100000}$ régi vagy Párisi ölig is meg-lehessen a' hossz-zat és hossz-különbséget adni.»

«A' Herschel' lát-csöje által távjában körülbé 51000 föld-rajzi mértföldnyire a Földtől távul lévő Holdnak részeit úgy láthatni, mintha csak 17 mértföldnyire volnának, mely tehát mintegy 3000-szer nagyobb-nak mutat; 's ahhoz hasonlót föl-téve a' tán 10 ölnyire is még... látható ló-szór 30000 ölnyire is meg-látszanék. Már pedig a' 30000 öl sugarú kör kerülete közel

$$\frac{22}{7} \times 30000 \times 100000 \text{ p} = \frac{66}{7} \text{ ezermillió p,}$$

az-az mintegy tizezermillió p , ha

$$p = \frac{1}{100000} \text{ öl}$$

[és minthogy a kör kerülete

$$360 \times 60^2 = 1296000 \text{ másodperc}$$

azért] gyakorlati vizsgálati élességünk 's szigorunk körülbé csak...
 $\frac{1}{2}$ másod-perczig mehet a' \wedge -mérésnél. És ha az előbbi... $7\frac{1}{2}$ mért-
 föld helyett éppen 30 mértföldnyi sugárt 's annyival inkább Δ -oldalt
 veszünk is: az abbeli szigor leg-fölöbbs csak $\frac{1}{25}$ másod-perczig...
 üzhető... A' lát-csővök ez-után is lehető még nagyobb tökélyes- és
 élesbitésére számítva... tegyük és vegyük-föl azt, hogy \wedge -mérési
 szigorunk $\frac{1}{100}$ másod-percznyiig mehet.*

«De ha a Δ -nek mind-3 \wedge -jét lehető szigorral meg-mérjük,
 abból... meg-találtatik a \wedge -összeg: azonban... ha ez például való-
 ban $2R$ -nek jó-is-ki, ... ugyan ki állhat arról jót...: hogy a vil-
 sugár... már a törődés... vagy egyéb ismeretlen és számítás alá
 nem vehető... körülmények befolyása által is nem tért el annyit az
 igazi egyenes úttól, mennyi már valóban... általunk is észrevehető
 volna. 'S... meg-fordítva, ha a' 3 \wedge összege tán néhány, például
 16 elő-perczcel $<$ -nek jönne-is-ki — mi különbség már a' 30 mért-
 földnyi távnál egy-ölnyre menő sugár-eltérés vagy *declinatio* által
 elő-idéztethetik... — azért ki még állithatja azt biztoson, hogy
afféle, sőt csak azt is, hogy *valamely* S , nem pedig Σ van? Sőt nem
 lehet-e hasonlólag az is, bár-is az már... éppen *természet-ellenes*,
 [hogy] a' 3 \wedge összege valami érezhetővel *naggyobbnak* is adja-meg
 magát $2R$ -nél?»

«Eldönteni azt, hogy Σ , vagy valamely S van-e valósággal,
 nyilván *gyakorlati* vagy valódi ki-mérés által sem lehet.»

De felhasználhatjuk azon különbséget — véli János — mely az
 égi testek helyének kiszámításánál mutatkozik, ha azt először arra a
 föltevésre építjük, «mi-szerint a' \wedge -összeg = $2R$, és hogy a' *köz-
 vonzás törvényje mindig... a távolok' gömb-külyjei visszas... ará-
 nyában van*», azután pedig «a' $2R$ -től [mindinkább] el-távozni kezdő
 \wedge -összeg föl-tételével» ismételjük. «*Atyám' szép szova szerint, az
 üdnek örök-rokonához, az ürhözi segélyül jötte által, némi és annyira
 erősödés egész vizsga- és hatás-körünkben a gyakorlatra nézve, de
 per se soha és sehol sem elméletileg Σ -nak föl-tehelőségére nézve,*
 vagy-is abból meg-nyugtatólag következik ez. Így tehát — mert...
 csak ily úton juthatott LOBATSEWSKY célra — ha azt meg-mutat-

juk, hogy a' leg-> Földi Δ -ünkben a' \wedge -összeget $= 2R - \frac{1}{100}$ másod-percznyinek téve, az Égi testek valódi mozgása és annak föl-számítása között addig nem létezett zavar vagy-is nem-egyezés... történnék, vagy-is az addigi szép össz-hangzás meg-szűnnék, és hogy az a' $2R$ -töli különbséggel bizonyos határig mind nő: abból... méltán következtethetjük azt: hogy az említett Δ -beni \wedge -össvegnek $2R$ -töli különbsége legalább $< \frac{1}{100}$ másod-percznél, mindaddig, míg $>$ tökély- vagy élességre vitele által a lát- és mér-szereknek, [a] nyert eredmények e' következmény- 's állitmányban némi változást és igazítást nem eszközölnek.»

A *Geometrische Untersuchungen* azzal a megjegyzéssel fejeződik be, hogy «a sík trigonometriájának képletei átmennek a gömb trigonometriájának képleteibe, ha az a, b, c oldalak helyébe $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$ -et teszszük». Ekkor ugyanis

$$\sin IIa, \quad \cos IIa, \quad \operatorname{tg} IIa$$

helyébe rendre

$$\frac{1}{\cos a}, \quad \sqrt{-1} \cdot \operatorname{tg} a, \quad \frac{1}{\sqrt{-1} \cdot \sin a}$$

teendő és hasonlóan kell eljárunk a b és c oldalakra nézve is. Igaz, hogy ennek tisztázását LOBATSCHESKIJ az olvasó találékonyságára bízta, és ennyiben tárgyalása, mint túlságosan rövid, kifogás alá eshetik; de hibát nem követett el, a mint azt János véli.

Nagyobb jelentőségű Jánosnak az a megjegyzése, hogy LOBATSCHESKIJ csak «észrevette», hogy « $\sin IIa$ helyébe $\frac{1}{\cos a}$ -t» téve a sík trigonometriájának képletei a gömbéibe mennek át, de nála a mélyebb «be-látás és át-hatás», úgy látszik, hiányzik. Valóban, János itt a dolog lényegéhez közelebb jutott. «Mélyebb belátását» a következő szavakba foglalta össze:

«Mint a' gömb- Δ -nál az oldalokat azon L -ívvel kell el-osztani... az illető egyenletekben, melynek \perp ordinátája = azon gömb egyenes sugárához: úgy a' lapnál, hogy ugyan-oly egyenleteket lehessen arra is alkalmazni, csak az illető lap- Δ -oldalokat $+i$ -vel osztva kell az egyenletekbe vinni: mi-szerint a' kényelmes 1 -hez egyenlő L -ív [mérő-leges] ordinata-sugaru gömböni Δ -öknél magukat az oldalokat lehet venni; úgy hogy ily értelemben a' lap telyes... joggal úgy értelmez-tethetik...: mint egy... $+i$ -hez = L -ív sugaru, vagy-is, mi avval... egyet-tevő (bár-mely egész számú m -re nézve)

$$a = +\frac{1}{2}\pi i (4m+1)$$

egyenes-sugaru, nem gömb ugyan, hanem *tul-gömb* [hypersphæra].» Hogy a két kifejezésmód egy jelentésű, az kitűnik «az *Appendix* § 30-jából 's integrálás által is ki-hozható

$$z = i \operatorname{ctg} u$$

és a'...

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\begin{matrix} + \sin \frac{a}{+i} \end{matrix}}$$

-bol folyó

$$z = \begin{matrix} + i \sin \frac{a}{+i} \end{matrix}$$

egyenletből.»

«Mivel a *képzelt L-iv-idomu* 's *képzelt egyenes sugaraknak* még eddig... más értelem nem adatott, vagy-is értelme nem lévén, az ily... kifejezet értelméhez kétely nem férhet.»

A mondottakat «aztán a lappal || *tul-gömbökre* is alkalmazni... nagyon könnyű és önként jövő. Mi eredmény az űrtanban, .. sőt okos lényi hatás mezején kételyen kívül... a leg-gyönyörűbbek, fontosbak, érdekesbek egyike.»

Hogy az abszolút geometria síkjában a hypercyklusok a köröknek, határköröknek és egyeneseknek rendszeréhez, a térben pedig a hypersphærák a gömböknek, határgömböknek és síkoknak rendszeréhez tartoznak és hogy valamely *meghatározott i-hez* tartozó *S* hypersphæráinak geometriája a sík valamely *tetszés szerinti i-hez* tartozó abszolút geometriájával azonos, úgy látszik, BOLYAI Jánostól eredő felfogás; LOBATSCHESKIJ csak egyszer említi az egyenlő távolságú pontok vonalát (a hypercyklust). (Alapvonalak 1829.)

ENGEL Frigyes 1899-ben, három évvel BOLYAI János *Észrevételeinek* közrebocsátása előtt, összehasonlította az *Appendixet* az orosz geometer munkáival. A Kázáni Híradóban 1829/30-ban orosz nyelven megjelent értekezés, *A geometria alapvonalairól* — a mint ENGEL kifejti — a kiadás prioritását BOLYAI Jánossal szemben, LOBATSCHESKIJ-nek biztosítja; mert az *Appendix* 1831-ben nyomtatott és csak 1832-ben jelent meg. «Evvel szemben ismét figyelembe kell vennünk, hogy BOLYAI János *Appendixe* csak bizonyos számú olyan tételt tételez fel, melyeket EUKLIDES a párhuzamosak axiómájától függetlenül bebizonyított, különben pedig a nem-euklidikus geometriának valóban teljes megokolását tartalmazza, mely minden-esetre nagyon tömör és ezért, tisztán geometriai szempontból tekintve, némi szó fér hozzá; míg ellenben az *Exposition* kivonatában, me-

lyet LOBATSCHESKIJ bocsátott közre, célzás történik ugyan arra, hogy miképen lehetne a gömbfelület fogalmából kiindulva, az egész geometriát fölépíteni, de másfelől ebben a munkájában LOBATSCHESKIJ a nem-euklidikus geometriára tartozó új tételeknek egész sorozatát bebizonyítás nélkül közli. Viszont nem szabad figyelmen kívül hagynunk, hogy LOBATSCHESKIJ az új geometriát mindjárt az alkalmazásra használható alakban adja elő: a geometriai idomok kiszámítására szükséges képleteket rendszeresen fejti ki és nagy számú ide tartozó feladat teljes megoldását adja. BOLYAI János ebben a tekintetben csak a legszükségesebbet nyújtja: látni ugyan, hogy egészen ura a tárgynak, ámde mégis jelentékeny szellemi munkát kellene reáfordítanunk, ha az *Appendix* célzásai alapján ilyenmő feladatok önálló megoldásához fognáunk hozzá.»

Engel azután reátér az *A geometria új alapvonalaira*, LOBATSCHESKIJ-nek arra a terjedelmes értekezésére, mely a Kázáni Tudós Dolgozatokban az 1835—1838. években megjelent. «LOBATSCHESKIJ ebben az új geometriának teljes, összefüggő kifejtését és előadását nyújtotta, a mely ellen tiszta geometriai szempontból is aránylag nem igen sok kifogást lehet emelni. Szemmel látható az a törekvése, hogy a geometria alapjaitól az analízis minden hozzákeverését távol tartsa és a geometriát tiszta synthetikus módszerrel azon pontig fejlessze, hogy a függés minden módját mennyiségekkel kifejezni és a geometriai mennyiségek minden faja számára kifejezéseket szolgáltatni tudjunk. Ez a törekvése különösen abban mutatkozik, hogy akár tudatosan, akár csak ösztönszerűen, az *Új alapvonalakban* a folytonosságot csak nagyon takarékosan használja és hogy felette csekély azoknak a helyeknek a száma, hol a bár elkerülhető folytonosságra támaszkodik. Ezzel szemben ugyan BOLYAI János is hozzáfogott a geometria nagy és összefüggő tárgyalásának kidolgozásához, de a mit belőle leírt, papirosai között maradt eltemetve és nem jelent meg soha.» Ha ENGEL azt véli, «hogy BOLYAI János tárgyalásában hasonló elvek szerint akart eljárni, milyeneket LOBATSCHESKIJ tényleg követett», akkor majd a XVIII. fejezetben megbeszélendő *Tér tudomány*a mutatja, hogy János a LOBATSCHESKIJ-éivel némely pontban megegyező alapgondolatainak kivételében a folytonossági vizsgálatokat ki akarta ugyan kerülni, de ebben olyan akadályokba ütközött, melyeket nem tudott legyőzni. A mint ENGEL helyesen megjegyzi, János az *Appendixben* «a lehető legnagyobb rövidségre és tömörségre való törekvésnek kényszere alatt a folytonosságot nagyon is gyakran használta».

Idézzük még ENGEL záró szavait. «Hogy végre a nem-eukli-

dikus geometria két megalapítójának összehasonlítását befejezzük és a fényt és árnyékot igazságosan szétoszszuk, emlékezzünk még meg a következő tényről: BOLYAI János *Appendix*-ében különösen a nem-euklidikus geometria sajátos szerkesztési feladatainak tárgyalásába bocsátkozik. Például, igen elegáns megoldását nyújtja a következő két feladatnak: adott ponton át egy adott egyenessel párhuzamos egyenesek húzandók és az az egyenes megrajzolandó, mely valamely hegyes szög egyik szárára merőlegesen áll és másik szárával párhuzamos; azt is megmutatja, hogy a nem-euklidikus geometria esetében a kör geometriai quadraturája lehetséges. LOBATSCHESKI az *Új alapvonalakban* és többi dolgozataiban ilyenfajta kérdéseket nem érint soha, csak első értekezésében, az *Alapvonalakban* akadunk nyomokra, melyekből nagy valószínűséggel következtethető, hogy ő is birtokában volt olyan szerkesztési módoknak, melyek az először említett két feladat megoldására szolgálhatnak.*

XVIL FEJEZET.

BOLYAI Farkas utolsó évei (1848—1856).

Miután BOLYAI Farkas 1835-ben elküldte GAUSSnak a *Tentamen* két kötetét, és erre ifjúkori barátjától szívélyes választ kapott, levelezésük ismét megszakadt. Hogy Farkas 1848 január hó 18-án a levelezés fonalát újból fölvette, annak oka — a mint a XV. fejezetben elbeszéltük — főleg az a kívánsága volt, hogy megtudjon valamit annak az orosz matematikai munkának a cziméről, melyet MENTOVICH a *Nemzeti Társalkodó*ban megjelent cikkében említett. Egyben, mint már hetvenhárom éves ember, régi barátjának utolsó, bánatos üdvözlését akarta küldeni. «A napnak vége van. Te megkaptad méltó napszámodat; az enyém csak az a belső megnyugvás, hogy a sorssal küzdve, jutalom nélkül híve maradtam az igazság zászlójának; ha csak a legjobb évek egy sorozata miatt nem kellene pirulnom, mikor a párhuzamosak ki nem találása és a vele járó ezer kellemetlenség majdnem elcsüggesztett és elvette bátorságomat. Oh bár ne volna oly viharos nappal után az est olyan borús! vagy jönne nemsokára az éjszaka! és a pihenés után egy szebb nap a tiszta forrással, mely a tudás oltatlan szomját csillapítaná. Kettőnk számára a földi játék utolsó felvonása folyik; de neked majd, ha leereszkedett a függöny, az örökkévalóság tapsol; én megleégszem avval is, ha azután, hogy sorsunk hű kísértője, a harang, a föld szélén elhangzott, még még kő sem beszél többé rólam.»

Az a hang, a melyen Farkas megszólalt, visszhangra talált GAUSSnál. «Mint valamely régen elmúlt időben megszólalt kísértet hangja», írja 1848 április hó 20 án kelt válaszában, helyezte őt vissza drága régi barátjának levele abba az időbe, mely között és a jelen pillanat között oly sok, mindkettejükre nézve súlyos esztendő folyt le. «Igaz, az én életemet sok olyasmi díszítette, a mit a világ irigylésre méltónak tart. De hidd el, kedves BOLYAI, az élet fanyar oldalait, legalább az enyémeit, melyek vörös fonálként húzódnak rajta keresztül és a

melyekkel magasabb korunkban mindinkább védtelenül állunk szemben, még század részben sem ellensúlyozzák az örvendetes dolgok.»

Áttérve azokra az eseményekre, melyek akkor a kedélyeket izgatták, GAUSS így folytatja: «Az a hatalmas politikai és szociális földrengés, mely mindig tovább terjedve, majdnem az egész európai helyzetet felfordítja, a te szűkebb hazádat (*Erdélyt* értem) eddig még nem érintette. Bizom ugyan benne, hogy végül örvendetes gyümölcsöt fog hozni; de előbb még az átmeneti időszak sok csapással fog járni és (*quod tamen deus avortat*) sokáig tarthat. A mi életkorunkban mindig nagyon kétséges, vajjon a majdan eljövendő aranykort elérjük-e.»

A csapások, melyeket GAUSS említett, Farkas hazáját csakhamar a legkeményebben sújtották. Szeptemberben kitörték a «bősz viharok». «Gyilkosság és pusztítás volt a jelszó», panasolja Farkas 1853 február hó 6-án, GAUSSHOZ intézett legutolsó levelében, «Főleg a nemesség ment tönkre... Mikor II. József... a jobbágyságot megszüntette, a földbirtok a birtokosé maradt, most pedig, mikor a nemesség a birtokot is odaajándékozta a parasztoknak, hála helyett, a hol csak lehetett, a nemeseket kegyetlenül legyilkolták, mindent elraboltak és elpusztítottak. Az én kis falusi birtokomat is, melyet utolsó napjaimra szépen berendeztem, annyira elpusztították, hogy még látni sem akarom többé... Egyelőre e földön egyenlőjogúnak érzem magamat a szövegeteket fonó féreg-társaimmal, míg nemsokára, a sorssal kibékülve, névtelen siromban nem fekszem. Elsőrangú csillagok fent maradnak az éjszakai égboltozaton, köztük marad az én barátom is. Ilyen kicsiny féreg-munka eszközölte ki a [bécsi] kultusz-miniszeri biztos engedélyét, ki a mi iskolánkat látogatja; elküldöm neked, még pedig a postamester biztatására egészen bérmentve. Az arithmetikában NEWTONRA támaszkodtam, a geometriát LOBATSCHESKYVEL vezettem be. Nem részesültem abban a szerencsében, hogy utakat nyissak; kevés kivétellel minden ennek ellenére volt; most már nyugodt lelkiismerettel engedem át az ösvényt minden gaznak, egészen a minden földi hatalmának töviseiig.»

A «kicsiny féreg-munka» — Farkas hasonlata a hernyók fonására céloz — a *Kurzer Grundriß eines Versuchs* (Maros-Vasárhely 1851) volt, melynek magyar fordítását e mű második részében közöljük. Ez volt utolsó műve és egyszersmind búcsú-köszöntése a kollegiumhoz, melytől majdnem 48 évi tanári működés után, 1851 őszén elvált. Teljes fizetésének és szolgálati lakásának meghagyásával, hosszú és buzgó szolgálatának elismerő kifejezése mellett helyezték őt nyugalmába.

E levél megérkezéig GAUSS nagyon aggodott barátjáért és rajta

volt, hogy megtudjon valamit a sorsáról. 1849 márczius hó 3-án írja GERLINGnek: «BOLYAIról én is kaptam hirt, mely természetesen még valamivel régibb az önénél, t. i. egy velem közölt levél útján, melyet SCHUMACHER KREILtől kapott... A rémes jelenetek természetesen csak későbbben kezdődtek és bizonyára még most is tartanak.» Az említett levélben, mely 1849 február havában kelt, KREIL, a prágai csillagvizsgáló akkori igazgatója, ki 1848 nyarán Erdélyben meteorológiai és mágnességi észleléseket végzett és augusztus 5-ikétől 8-ikáig Maros-Vásárhelyt volt, a következőt beszéli el ottani élményeiből.

«Maros-Vásárhelyt, Erdély egy félreeső városkájában a Székelyföldön, megismerkedtem az öreg és tiszteletre méltó BOLYAI professzorral, a híres GAUSS iskolatársával, kiről ő úgy, mint a tudomány és irodalom más herosairól sokat tudott elbeszélni, és nem egy érdekes reá emlékeztető tárgyat felmutatni (egyebek közt GAUSS egy tollrajzát, mely az öreg KÄSTNERt ábrázolja, a mint a tábla előtt áll és épen két négyjegyű szám összeadásában hibát követ el, balsors, a milyen őt gyakran érte). Ez a férfi, ki, bár vagyonos, ott cynikus egyszerűségben elvonultan él, de bennünket a legbarátságosabban fogadott és megfigyeléseink valamint szép eszközeink iránt annyira érdeklődött, hogy többé el sem akart bennünket bocsátani, azon a napon, melyen tőle elváltunk, kénytelen volt társaitól a legkeserűbb szemrehányásokat eltűrni, mert velünk érintkezett... Hogyan járhatott a jó BOLYAI azokon a rémes napokon, melyek a szegény országra virradtak! Csaknem minden nap gondolok reá.»

Míg Farkas KREILban Uránia képviselőjét tisztelte és örömmel megragadta azt a neki ritkán kínálkozó alkalmat, hogy a világ forgalmától távol eső hazájában a nyugateurópai műveltség egy hírnökét üdvözlhesse, addig Maros-Vásárhelyt avval a gyanúval, a melylyel abban az időben mindent fogadtak, a mi Ausztriából jött, KREILt és kísérőit bizonyára az osztrák kormány titkos kiküldötteinek tartották. Ehhez talán még az is járult hozzá, hogy — a mint BEDŐHÁZI elbeszéli — «Farkas nem gondolta másképen nemzete fennmaradását, mintha egy idegen, mivel nemzete nyelvével próbál tovább úszni a civilizáció sodrában.» Az erdélyi ev. ref. főkonsistoriumnak az iskolák jövőndő berendezését illető hozzá intézett kérdésére ugyanis 1852-ben azt javasolta, hogy az iskolákban a deák helyett köznyelvül a németet kell behozni; arra is kell törekedni, hogy Erdély három nemzetét úgy csoportosítsák, hogy elkülönített területeken lakhassanak. Hasonlóan nyilatkozik az 1853 február 6-án GAUSShoz intézett levelében: «Itt most az évszázadokon át szunnyadó nemzetiségi őrjöngést avval keltették fel, hogy a latin nyelv helyett, melyet ISTVÁN, a magyarok

első királya, általános használatra rendelt, a nemzetiségeket izgató módon a magyart akarták bevezetni. Az általános nyelv, a nemzetek megegyezésével megállapíttatván, kulcsa legyen a tudományok templomának; a latinnak immár egész Európában vége lévén, nálunk a német lehetne [az általános nyelv], mely, ha II. József még 20 évig élt volna, mindent egészen Hamburgig egy színnel vont volna be, és az, a mi megtörtént, nem történt volna meg.»

Nem tagadható, hogy itt — a mint BEDŐHÁZI kiemeli — bizonyos ellenmondás észlelhető Farkas nézeteiben. A mint az V. fejezetben láttuk, buzgón fáradozott azon, hogy a magyar nyelvet a matematikai kifejezésmód követelményeihez hozzászabja és hogy főművét, a *Tentament*, csak bizonyos idegenkedéssel adta ki latin nyelven. Sőt 1834-ben a *Tentamen* első kötetének magyar átdolgozását is adta ki és ezt 1843-ban, és még 1850-ben is magyar nyelven szerkesztett kisebb tankönyvei követték. De ennél még tovább is ment; az 1830-ban megjelent *Az Arithmetica eleje* című könyvében megkísérlette annak a kimutatását, hogy a magyar nyelv különösen alkalmas a matematika fogalmainak kifejezésére. Ezt a gondolatot átvette tőle a fia, János, és a mint a XIX. fejezetben látni fogjuk, általánosította is, a mennyiben a magyar nyelv alapján egy ideális tökéletességű világnyelvet akart kidolgozni.

Az említett ellenmondás bizonyára abban leli magyarázatát, hogy Farkas buzgó fáradozása a nemzeti tudomány szolgálatában siker nélkül maradt, a mihez hozzájárult még az az általános elcsüggedés, mely a nemzeti mozgalom leverése után az egész nemzetet elfogta.

A már többször idézett, 1853 február hó 6-án kelt, GAUSSHOZ intézett legutolsó levelében Farkas «a sir széléről bucsúra nyújtotta kezét» barátjának. De ő, az idősebbik, túlélte az fiatalabbikat.

Az *Allgemeine Zeitung*ban olvasta, hogy GAUSS 1855 február 23-án meghalt. A hatást, melyet e hír reá gyakorolt, így írja le: «Hosszú ideig úgy maradtam, mint valami alvajáró — mig nem támadt bennem annak lehetőségének gondolata, hogy először régi barátom sirjára a telemből fakadó, bár jégvirágot, küldjek, de a hajdani tavasz szívével, és másodsor egyszersmind több őt jellemző vonást mondjak el» (KREILHOZ 1855 április havában intézett leveléből).

A «jégvirág» hat latin nyelvű hexameter volt, mely ponori THEWÆRWK Emil fordításában így hangzik:

«Mindennek velejébe hatott, mint senki se jobban:
Földéritette a legmélyebbet s legmagasabbat.

Ritka nagy ész-, nem villámló, de világot özönlő:
 Bár elhúnyt, a halál nem bírta eloltani fényét,
 S Isten színe előtt, mint Newton, úgy ő is a tiszta
 Lelkek közt örvend s ott jár a boldog egekben».

Bolyai levelét KREIL elküldte Göttingába SARTORIUS VON WALTERS-HAUSENNÉK, ki akkor GAUSS *zum Gedächtnis* című művén dolgozott. SARTORIUS erre BOLYAIHOZ fordult, kit arra kért, hogy küldje el neki GAUSS leveleit. Farkas teljesítette ezt a kérést »halotti áldozatként, hogy a lehetőség szerint minden együtt legyen, a mi az ő földi pályáját megjelöli, a melyről az égi pályákat kiszámította; habár úgy esik az nekem, mintha utolsó kedvesemnek koporsóját vinnék ki a szobából.» Kicsiny részüktől eltekintve, 1856 július hó 13-án vált meg a drága ereklýéktől; »a csupán commissionális, semmi érdekset nem tartalmazó» leveleket tartva meg magának. Azonkívül hiányzott küldeményéből GAUSSNAK 1832 márczius hó 6-án kelt fontos levele, melyet Farkas a fiának, Jánosnak, engedett át; egy erről készült másolat követte 1856-ban az első küldeményt. A mint már a XI. fejezetben elbeszéltük, a hiányzó levelek, mindössze öt, SZABÓ SÁMUEL hagyatékából kerültek elő, kinek fia dr. SZABÓ PÉTER tanár ezeket 1905-ben a göttingai GAUSS-archivumnak ajándékozta, hogy Farkas kívánsága szerint ott minden együtt legyen, a mi a nagy geometer életpályájára vonatkozik.

Mindjárt GAUSS halála után kinyomtatta Farkas Bucsúját a földtől, azaz a maga szerkesztette halotti jelentését, miután oly gyakran elvállalta, hogy ilyen jelentéseket másokról készítsen. E jelentés nagyon hosszú arra, hogy itt egész terjedelmében kinyomtasuk, de a temetésére vonatkozó kívánságai olyan különösek, hogy közlésüket nem akarjuk mellőzni. »Pénze soha se volt, de adhat olyant, a mije nincs már, s drágább a pénznél: mikor a kevés (bár későre, de szenvedéssel megkamatolt) por visszaadatik; mindennek, a ki elmenne, testál két órát, azon szíves kéréssel, hogy akkor otthon való dolgához lásson — Ő úgy se lesz ott... Se pap..., sem egyéb cérémonia, még harang se legyen; az iskola csengettyűje szólhatna... új diligentiára a felsőbb iskolában tanítványa vált tanárnak... Emlék se legyen; hanem ha valaki egy pojnik almafát ültet a ház elébe; a gyümölcsét szedőktől vagy róla oltóktól vegye köszönetét! azon 3 nevezetes almára emlékeztetve, melyekből az első anyánké s a Párisé által pokol darabantjává lett földet, a NEWTON-é az ég csillagai társaságába emelte. Sőt ezen ültetés is elmaradhat: elég az a köztakaró, melyet az Anya alvó gyermekeire az égről a földre vont

fellegszállak közt búkáló nappal sző, s naponta hulló könnyek zölden tartanak.»

Az 1856. év július havában Farkast először, augusztus havában pedig másodszor érte gutaütés. Ő ezt a két gutaütést a törvényben meghatározott megintéshez (*admonitio*) és az erre következő értesítéshez (*certificatio*) hasonlította, melyek az utolsó lépést, a végrehajtást (*executio*) készítik elő, és még augusztusban tette meg utolsó rendelkezését. Hálája kifejezéséül a collegiumra hagyta GAUSS emlékére vert két érméjét, könyveinek legnagyobb részét, köztük saját műveinek fennmaradt példányait és alapítványként két, összesen 9445 forintról szóló kötelezvényt, melyet fivérétől, Antaltól, örökölt. Ennek az alapítványnak céljául az intézet, különösen pedig a matematikai tanítás fejlesztését tűzte ki; a hosszú per után a kötelezvényekből befolyt 750 forintot 1874-ben, mint hozzájárulást használták fel egy újonnan felállítandó matematikai tanszék költségeihez.

Hogy Farkas könyveit részben a collegiumnak, részben a marosvásárhelyi Teleki-könyvtárnak hagyományozta, újból egyenetlenséget, még pedig az utolsót támasztotta közte és János között, miután az utolsó években jó egyetértésben éltek. «Mikor könyveit illető szándékát velem közölte» — beszéli el János — «azt válaszoltam: „Helyes, szabadságában áll, nem tehetek ellene semmit“, csak annyit jegyeztem még meg, hogy én az ő helyén ezt nem tettem volna. Azután meglehetősen kedvetlenül „Isten veled“-et mondtam neki és avval a szándékkal távoztam, hogy addig nem térek vissza, míg nem hivat engem. Makacs és büszke ahhoz, hogy már elhatározott tervét mások tanácsára teljesen feladja, ezt mégis annyiban változtatta meg, hogy megelégedett avval...» Itt vége szakad a följegyzésnek. Minthogy azok közt a könyvek között, melyek János hagyatékából a collegium birtokába mentek át, megvolt GAUSS 1799 évbéli inauguralis dissertációjának az a példánya, melyet GAUSS maga küldött Farkasnak, úgy látszik, hogy apja később néhány könyvét odaajándékozta neki, de egyébként fenntartotta rendelkezését.

Hogy a könyvek reá nézve veszendőbe mentek, bizonyára fájdalmasan érintette Jánost, de még fájdalmasabban érintette a tudományos működéséről kimondott ítélet, melyet ez a végrendekezés magában foglalt. Ennek ellenére János ezúttal túltette magát kedvetlenségén és mint Gergely öcséséhez intézett levelei bizonyítják, betegsége utolsó heteiben naponként meglátogatta «a szegény öreget».

Az utolsó gutaütes novemberben érte Farkast. Végso napjairól a collegium két tanítványától van jelentésünk, kik utolsó napjaiban ápolására voltak kirendelve.

RÉTHY Lajos elbeszéli, hogy, a mikor az öreg BOLYAINAK nem volt reá szüksége, ő ARANY János költeményeit olvassatta. Egy ilyen alkalommal eljött János, odalépett melléje és gúnyos hangon kérdezte: «Valami új poéta?» «Az» — mondá RÉTHY — «nem esméri százados úr?» «Nem ismerem. Írt-e ez valami olyat, a mi százszor meg ne lett volna írva? Nó lássunk egyet!» Felnyitott egyik költeményre: «Zách Klára» volt. Kicsinylő arcczal olvasni kezdte: «... fehér rózsá, piros rózsá, szőke leány...» Hirtelen megállt az olvasásban, oly mozdulatot téve, mintha a könyvet tűzbe akarná hajítani. «Ez az én bírálatom — mondá —; lám ez sem tud egyebet, csak virág és leány... Az emberiségnek minden szenvedését, visszaesését csupán a költészet okozta. Sokszor mondtam az öregnek is, hogy hagyjon fel vele, nem tévé. Leélte életét haszontalanul.»

Az ágyában csendesesen fekvő agg — így végzi RÉTHY — már nem hallotta ezt az utolsó bántalmat.

Az utolsó napon, november 20-án Vass Tamás volt az öreghez vigilnek kirendelve. Akkor nyert benyomásait 40 évvel később, 1896-ban írta le, és ha talán a részletek ecsetelésénél segítségére is lehetett a fantázia, mégis feltehetjük, hogy a borús hangulat, mely egész leírásán végig vonul, a valóságnak megfelel.

«Serdülő ifjú, kollegiumi tanuló — a hogy abban az időben mondták: *novicius deák* voltam 1856 őszén.»

«BOLYAI Farkas, a marosvásárhelyi kollegium nagyhirű tanára, az írója a «*Tentamen*»-nek, annak a világhírű munkának, melylyel a tengerentúli tudósok most foglalkoznak, betegen feküdt a róla örök nevet nyert tanári szálláson...»

«A lakás a minoriták közvetlen szomszédságában volt, abban a néptelen utcában, ... melyet az újabb időben, egykori nagynevű s szinte egyetlen lakójáról, BOLYAI-utcának neveztek el.»

«A lakás, s főleg tágas udvara, nagy változáson ment keresztül az újabb időben...»

«Akkor, a bejárattól jobbra, egy korhadtt épület, régi felhagyott tanári lakás állott, meglehetősen gondozatlan állapotban, üresen. Aztán faszin s egyéb melléképület. Az udvaron néhány öreg ákác, az egyik alatt egy kerek kút, mely ma is megvan, aztán néhány borostyán, ebből közvetlenül a ház előtt, egy egész csoport, lugassá alakítva át...»

«Ennek a háznak egyik keskeny, hosszú szobájában... feküdt a nagyhirű BOLYAI Farkas betegen.»

«Ez volt az öreg úrnak utolsó betegsége.»

«A beteg ágya épen a szoba közepén volt elhelyezve. Az ágy

mellett egy festetlen fa-szék, rajta orvosságos üvegek. A szoba plafonjához erősítve, kemény, vastag kötél nyúlt alá az ágyra, alsó végén egy odafoglalt vaskarikával, melyet a beteg csaknem állandólag kezében tartott, hogy segítségére legyen, ha az ágyban mozdulni akar.»

«Ott feküdt a fenyő deszkából készült egyszerű festetlen koporsó is, a szoba udvar felőli ablaka alá helyezve. Ezt az öreg úr elővigyázatból, még életében, talán évekkel előbb elkészíttette, valamelyik asztalos-mester komájával. S minthogy a szobában néhány széken kívül, egyéb butorzat alig volt, ez a koporsó szolgált éjjeli pihenő helyül most a beteg mellé kirendelt *deák-vigilnek*.»

«A szomszéd szobában egy nagy fekete tábla állott, állványon, beírva egészen, előttem ismeretlen algebrai képletekkel és folytatva tovább, a szoba padlatán véges-végig... Ez lehetett talán az öreg úrnak utolsó számtani mivelete.»

«1856 november 20-án a *deák-vigil* én voltam, a nappali időre beosztva, az apparitor által. Ez volt a nagy BOLYAI utolsó napja!»

«Az első hó huszadikára virradólag esett le, vastag réteggel borítva be a földet. Az időjárás egész télies szint öltött.»

«Egyedül voltam a beteg szobájában. JÓKAI egyik regényét (talán Kárpáthi Zoltánt) olvastam. Egyéb foglalkozásom a beteg körül úgy sem volt. Orvosságot már nem fogadott el. Úgy látszott, hogy magán-kívül van, azon a ponton, mikor az orvosok azt szokták mondani, hogy az *agonia* beállott.»

«Ebben a pillanatban egy ember-fej tűnt fel előttem, az udvar-felőli ablakon bekandikálva. Kiléptem az ajtón s megszólítottam az ismeretlent:»

«— Kit keres?»

«— Nézem, hogy él-e még ez a vén ember, — volt a rövid válasz.»

«A hangban volt bizonyos sajátságos hidegség.»

«Az ismeretlen egyszerű polgárnak látszott, a közönségesnél is valamivel kisebb termettel. Igénytelen alak, a minőt városon minden lépten-nyomon láthatni. Fején viseltes szőrkalap. Csizmába behúzott szürke, kopott nadrága, préselt szokmány posztóból készült kabátja s egész magaviselete és kinézése még inkább megerősített ama föltevésben, hogy az előttem álló valamely helyi iparos, az öreg úrnak valamelyik bejáró szomszédja.»

«Hanem az a konfidens, affektáló hideg hang, melylyel a fennebbi szavakat kiejtette, megvallom, bántott s egyszerre kihozott a sodromból.»

«Ott akartam hagyni a faképnél, de az ismeretlen utamat állta s tovább folytatta a beszédet.»

«— Meghalhat már, eleget élt. Inpraktikus rossz gazda volt, nem e világba való ember. Aztán tudja, nagy tudósnak tartotta magát, pedig... pedig... a mit tudott, annak sem vette hasznát sem ő, sem más. Keveset használt az emberiségnek. Tanítani, pláne, nem tudott.»

«Ki lehet ez a goromba bolond ember? tépelődtem magamban.»

«A hegedűn virtuóznak, plane, egy PAGANININEK képzelte magát — folytatta tovább — pedig, uramfia! ennek a mesterségnek még az ábéczején sem ment keresztül.»

«Ez mégis szemtelenség! — gondoltam magamban, de már annyi bátorságom nem volt, hogy mondjam is, mert az ismeretlen és igénytelennek látszó kis emberke erősen nőni kezdett előttem. Annyit mégis megkérdeztem, hogy»

«— Kicsoda az úr?»

«— Én BOLYAI János vagyok, a fia ennek a vén embernek! Aztán még utána dobta: nyugalmazott ingénieur kapitány!»

«A mi kis bátorságom még lehetett volna, az is elhagyott erre a szóra. Mert hát a vénebb deákoktól, már az előtt, igen sok furcsa, bolondos, sőt veszedelmes históriát hallottam BOLYAI János felől, a miket kapitány korában mindenütt, de főleg Bécsben laktában elkövetett. Beszélték azt is, hogy apa és fiú folytonos versengésben állottak egymással a tudományban. Nem tudták eldönteni, hogy melyik nagyobb matematikus, s melyik nagyobb zenész. Mert valóban nagy volt mind a kettő. A fiú ezenkívül még híres bajvivó, nagy kardos is, a ki Bécsben az emberek füleit csak úgy szedegette le, kardja hegyével. A közhir szerint, talán nyugalomba is azért küldötték, hogy Bécsset megszabadítsák ettől a veszedelmes embertől, a kinek csaknem mindennapra esett egy páros viaskodása...»

«— Nó hát, ifjú barátom, jöjjön, kövessen! Sétáljunk egyet a kertben — szólt és indult is.»

«Megerszeppentem, megborzadtam. Sehol senki. Segítség sehonnan!... Mentegettem magam, hogy én a beteg mellé vagyok rendelve. Onnan távoznom nem szabad! stb. stb.»

«— Nincs ott már magára szükség, ifjú barátom! Csak jöjjön!»

«Szabadkozni nem mertem tovább. Bár kedvetlenül s remegve, de mentem, mert a felhívás hangját igen határozottnak találtam.»

«Lementünk a kertbe, s annak messze lenyúló, hosszú sétaútját magunk elébe vettük. Kellemes séta volt, a bokáig érő frissen hullott hóban s egy vékony stibliben, a melyet még szeptember elején JUNG, a mi kollegiumi suszterünk készített, a meleg őszi napokhoz alkalmazva. Itt aztán elévette BOLYAI János a híres *Tentament*, úgy a

fejéből, s kiméletlen szigorral bonczolgatta és tépte szét egyes tételeit s beszélt olyan furcsa dolgokat az ismeretlenről, a mikről teljes világi életemben soha semmit sem hallottam.»

«Furcsa és kellemetlen helyzetbe jöttem. Hallgattam nagy pietással az előadást. Bámultam rettenetes módon s bólingattam a fejemmel. Igyekeztem olyan képet vágni, mintha a mondottakból értenék valamit. Dehogyan értettem! Összes számtani tudományom megmérhetetlen szűk helyen állott akkor is, azután is. Láttam, éreztem, hogy ő is bámult szörnyű tudatlanságomon, hanem azért csak mondta tovább a dolgot.»

«Aztán áttért a Szász Károly Mocnik fordításra s azt szinte kemény bírálattal vezette be. Sok hiba, sok tévedés van benne!... Bírálata, világosan emlékszem, azzal végezte, hogy Szász Károlynak kár volt ehhez hozzá nyúlni!»

«Én Szász Károly felől, kinek akkor már irodalmi működését is ismertem, egészen más véleménynyel voltam. De hallgattam, a világért sem mertem volna egyet szólani. S hogy a már akkorára egészen tűzbe jött embertől szabaduljak, erre is rábólintottam a fejemmel.»

«Szerencsésen visszaérkeztünk a kerti sétából. Vékony lábbelim egészen átázott. Megfáztam. Pedig a homlokom verejtéktől gyöngyözött s erősen törülgettem magam.»

«Sajátságos volt ez a megfázás, minőt életemben addig sohasem éreztem.»

«Talán maga BOLYAI is észrevette ezt, vagy talán a velem elpazarolt idő bántotta. Elég, hogy röviden köszönt.»

«— Nó, az isten áldja meg, ifjú barátom! s ezzel távozott.»

«Ez volt az én ismerkedésem históriája s első és utolsó találkozásom BOLYAI Jánossal.

«Most naponta eljárók sirja mellett, mely ott a temető felső részén van, néhány lépésre a felvezető úttól, jobbra. S mikor azt a darabos, szürke, hideg követ látom, melylyel nyugvó helyét a Természettudományi Társulat [helyesen: Matematikai és Fizikai Társaság] megjelölte, mindannyiszor eszembe jut ez a találkozás s az a hideg hang, mely a sodromból szinte kivetett.»

«Délután öt órakor egyik tanuló társam, Szász Dénes, váltott fel az őrségen, ki éjszakára volt oda rendelve.»

«Pontban tizenegy órakor, éjfél előtt, a nagy BOLYAI Farkas halhatatlan lelke elhagyta azt a nyomorúságos porhüvelyt.»

«Ágya mellett, az utolsó pillanatokban, Koncz Józsi barátom állott, Szász Dénessel. Ő fogta le szeméit.»

«Aztán, reggel megcsendült a kollegium két, kis csengettyűje, a

múzsák hajléka felett. Mikor ez a két csengettyű egyszerre szól, az azt jelenti, hogy a kollegiumnak halottja van.»

«S a kollegiumnak, mióta azok a tisztos szürke falak állanak, nagyobb halottja bizonyára nem volt még.»

«S mégis csak ezeknek az apró csengettyűknek volt szabad akkor szólani, a végrendelkezés értelme szerint.»

«De abból tudta mindenki, hogy ki halt meg.»

A következő tavasszal Farkas egyik hajdani tanítványa, Dicső Lajos, teljesítette tanára végső akaratát és almafát ültetett sírjára. A hála és szeretet ez a jele volt az egyetlen jel, mely 23 éven át jelölte Farkas sírját.

Nemsokára Farkas halála után, még 1856-ban megfogalmazta János atya életrajzát. A BOLYAIak nemzetségének eredetét elbeszélvén, leírja Farkas ifjúságát, göttingai tartózkodását, GAUSSzal való baráti viszonyát és ezután mindjárt képét vázolja egész egyéniségének. Igaz, hogy egyes olyan vonások hiányzanak belőle, melyeket nem szívesen nélkülözünk; ámde, ha Farkas működésének végösszegét megállapítjuk, azt kell mondanunk, hogy fiának ítélete közel jár az igazsághoz.

«Apám gyermekkorától fogva szörnyű nyakas volt, minden fennállótól el akart térni, [legalább] a tudományokban; szokásaiban nem, mert arra nagyon is aggóskodó volt. Az újítás vágya gyötörte. Röviden szólva, főkülöncz volt, és úgy szeretett volna tenni, mintha a világ diktátora volna, ha legnagyobb bosszúságára már korán nem vette volna észre, hogy nézetci, melyek között valóban sok új, jeles is volt, nem részesülnek abban a szerencsében, hogy elfogadásra találjanak. Mert különös: minden a matematikai világosság és alaposság iránti a maga nemében egyetlen, valódi érzéke és reábeszélő tehetsége mellett, nagyon is kevés kivétellel, a majdnem egy félszázadot kitevő tanári évei és számtalan magánórái, sőt félnapos tanításai daczára, nem sikerült neki eszméinek híveket szerezni, vagy azokat csak némileg is napvilágra juttatni, úgy hogy ebben a tekintetben a jelenre majdnem minden hatás nélkül maradt. Ámde igazság szerint magamat ki kell vennem, ki ozélszásainak, melyekkel főleg a tudomány és a világ tökéletlen voltára figyelmeztetett, hasznát tudtam venni; mint-hogy ugyanis munkája 1832-ben történt kiadásáig eszméit még előttem is erősen titkolta, indítva, sőt ellenállhatatlanul kényszerítve éreztem magamat, hogy mindent, a mit csak lehet, a magam erejéből csináljak meg, és ily módon keletkezett először az én tértudományom és magyarázatom a sikről és egyenesről, mely egészen új, eddig egyetlen helyes magyarázatuk, valamint a többi, az 1832. évben részben a *Tentamenben* megjelent tanaim.»

XVIII. FEJEZET.

BOLYAI János Maros-Vásárhelyt (1846—1860); előrehaladt korából való matematikai vizsgálatai.

A XV. fejezetben láttuk, hogy a végzetteljes 1848. év János életében is új szakasz kezdetét jelenti. Ismét «neki lendült a munkának», mint Farkas 1856 július hó 13-kán SARTORIUS VON WALTERHAUSEN-nek írja. Házi ügyeinek rendezését is megkísérelte, azonkívül a gyermekei jövőjéről való gondoskodás is serkentette elhatározásra. Dénes fiát, ki 1837 október havában született, a nagyszebeni cs. k. fiú-nevelő-intézetbe adta, de mert nem volt elég pénze, 1847 május havában kénytelen volt őt onnan megint kivenni. Arra, hogy fiát ebben az intézetben államköltségen neveltethesse, szükséges lett volna, hogy a katonai hatóság neki utólagos házasságra adjon engedélyt. Az 1848. év márczius havában hosszú ellenállás után Farkas késznek nyilatkozott domáldi jószágának birói megbecsültetésére, hogy Jánosnak a házassághoz szükséges biztosítéka jövőendő örökségével kiegészíthető legyen. Azután közbejötték az 1848. és 1849. évek viharai. A többitől csak annyit tudunk, hogy János kérését a katonai hatóság visszautasította, és ő azután 1852 november havában ORBÁN Rozáliával szerződést kötött, melynek értelmében a tulajdonában levő marosvásárhelyi 1004. számú házat neki ajándékozta, a minek ellenében Rozália a válásba beleegyezett és a Dénes és Amália nevű gyermekek nevelésének költségeit magára vállalta; a második fiú, Gyula, kinek valódiságában János kételkedett, a szerződésben nincsen megemlítve. Rozália 1856-ban eladta a házat és ezután, úgy látszik, elhagyta Maros-Vásárhelyt.

Életének utolsó három esztendejében, 1857—1860, János a Kalvária-út egy kis házában lakott, egészen a város végén, a temetők tözsomszédságában. Háztartását 1852 óta egy oláh nő, Szörts Julianna vezette, ki őt élete végéig ápolta. Mindig nagyobb lett körülötte a magány. Mikor 1856 november havában atyja meghalt, benne az utolsó embert vesztette el, kihez szorosabb kötelékek fűzték.

Csak a ki egy ideig Erdélyben élt és megismerte földjét és népét, elképzelheti, hogy mily rettenetes magány vette körül Jánost

hazájába való visszatérése óta; valóban, a hazatérés — a mint egyszer monda — «temetés» volt reá nézve. Még negyven évvel halála után lehetett észlelni, hogy Maros-Vásárhelyt mennyire gyűlölt és megvetett volt BOLYAI JÁNOS neve. BOLYAI Farkasban tisztelték a híres tanárt, a *Tentamen* szerzőjét; ő büszkesége volt a kollegiumnak és a városnak. De mit beszéltek Jánosról? Összeférhetetlensége és párbajdühe miatt elbocsátották a hadseregből, feslett életmódot folytatott és az emberektől elkerülve szegénységben halt meg. Egy művecskét írt valami érthetetlen tárgyról, melyet még GAUSS, a híres matematikus, is megdicsért, de valószínű, hogy csak atyja gondolatait tartalmazza, ki mint a *Tentamen* függelékét hozta nyilvánosságra. Jellemző János rossz hírére, hogy ifjúkori barátja, SZÁSZ Károly, midőn 1849-től 1853-ig Maros-Vásárhelyt tartózkodott, őt nem kereste fel, vagy inkább nem merte fölkeresni, nehogy magát is rossz hirbe keverje.

Bár csak egyetlen embere lett volna Jánosnak, ki őt megértette, gondolatait méltányolta, vagy az övéhez hasonló célra törekedett volna! Azt lehetne hinni, hogy Farkas ilyen volt. Apa meg fiú azon igyekeztek, hogy egymásnak megbocsássanak és az elmúlt években történeteket elfelejtsék. Milyen más volt most leveleik hangja, mint a domáldi időben. «Kedves fiam!» — írja Farkas 1853 szeptember hó 8-kán. — «Látván a' minap, milyen messze tartod az írást, küldök egy oculárt próbára: ha jó tartsd meg — a' Teleki [biblio]thékában kedvesen lehet el-álmodni az alig kiállható kedvetlen életet, tsak a' belső szem előtt a' külső nyissa fel, péld. LA PLACE *Mécanique céleste*[-je], melyet GAUSS *opus perfectissimum*nak mond — 's több hasonlóknak ezer évek' gyönyörű forrása van.» És János is az ebből az időből származó följegyzéseiben nagyrabecsüléssel és tisztelettel beszél apjáról. A «nem elég nagyra becsülhető *Tentamen*» szerzőjét egy rangba helyezi EUKLIDÉS-szel és szíves hálával elismeri, hogy mennyivel tartozik e tanítómesterének. Igaz, hogy úgy látszik, mintha apa és fiú a személyes érintkezést, ha nem is elkerülték, de megszorították volna, talán ösztönszerűleg félve attól, hogy könnyen újból összeveszhetnének. Ehhez hozzájárult az is, hogy mikor János Maros-Vásárhelyre visszatért, Farkas már hetvenedik életévét túlhaladta és az öregkor terheit kezdte érezni, János pedig szintén betegeskedő volt és ezért gyakran a szobához volt lánczolva.

Atyjához intézett leveleiben panaszkodik János, hogy rosszindulatú kiütésben szenved, mely őt éjjel-nappal kinozza, mire atyja, ki szeretett kuruzsolni, jóakarató tanácsokkal szolgált neki. Alkalmassint e bajával kapcsolatosak azok az ivókúrák, melyeket János a nyári hónapokban Erdély különböző fürdőhelyein szokott használni. Az 1857.

évtől kezdve egészségi állapota rohamosan rosszabbodott. Mint Gergely öcsésével közli, 1857-ben olyan erős zsábat kapott, hogy attól félt, hogy egész életében nyomorék marad, és habár egy katonaeorvos kimentette belőle, novemberben mégis még olyan gyöngé volt, hogy alig birták lábai. Ugyanannak az évnek telén lába a bokától fogva kezdett fájni és feldagadni, úgy hogy a vízkórtól félt. Gergelyhez intézett utolsó levelében, mely 1859 november hó 6-kán kelt, arról panaszkodik, hogy 15 hónap óta makacs és fájdalmas baj kinozza. 1860 január hó 7-kén csendes halállal fejezte be életét. Két nappal később a nyugalmazott kapitányt a marosvásárhelyi ev. ref. hitközség temetőjében az utolsó tiszteletben részesítették és földi maradványait a névtelen sirnak adták át.

BOLYAI János halála után terjedelmes kézirati hagyatékát a szabályzatok értelmében a katonai hatóságnak szolgáltatták ki, és miután ott megállapították, hogy katonai titkokat nem tartalmaz, kívánsága szerint a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium könyvtárába került, hol egy nagy ládába csomagolva őrzik. Följegyzéseinek csak igen kicsiny része az 1848 előtti, sőt mondhatni az 1838 előtti időből való, mert a közbeső tíz év alig jöhet tekintetbe. De az 1848-dik évtől kezdve az 1858-ig János lázas buzgalommal dolgozott. Bizonyára a hegedű, melyen még mindig mester módjára játszott, segítette őt át borús óráin; de a hegedülés nagyon izgatta szenvedélyességét. Igazi társa volt és maradt a matematika. A matematikából fakadt az Üdv-tan is, mely élete utolsó éveiben minden gondolatát lefoglalta.

Ebben a fejezetben János előrehaladott korabeli matematikai tartalmú följegyzéseit akarjuk ismertetni, a következő fejezetnek pedig az Üdv-tanra vonatkozókat tartjuk fenn. A LOBATSCHESKIJ Ivanovics Miklós *Geometrische Untersuchungen* című művéről készített észrevételeit itt mellőzzük, mert ezekről már a XV. fejezetben számoltunk be. Ajánlatosnak látszik, hogy ismertetésünket néhány általános jellegű észrevétellel vezessük be.

Bármennyire kiváló is volt az a matematikai oktatás, melyben János a bécsi mérnök-akadémiában részesült, az intézet céljainak megfelelőleg ez mégsem terjedt túl a felsőbb matematika elemein. Hogy János ily módon épen arra a matematikai készségre tett szert, mely őt leginkább az abszolút geometria felfedezéséhez vezethette, már a VIII. fejezetben emeltük ki. Így magyarázható, hogy János azt a szűkre mért időt, melyet a katonai szolgálat neki szabadon hagyott, annak a nagy feladatnak szentelte, melyre magát hivatottnak érezte: az abszolút geometria fejlesztésének. Mikor később

nyugalomba vonult, elég időt találhatott volna arra, hogy a klasszikusokkal való foglalkozás útján matematikai készségét kiegészítse és ily módon azt a felszerelést szerezzze meg magának, melyre további vizsgálatoknál szüksége lett volna. Hogy ezt elmulasztotta, annak belső és külső gátló okai voltak.

János elhagyottságára már reámutattunk. Nélkülözte a tudományos érintkezést, mely az öntevékenységet kiegészíti és szabályozza, és ehhez hozzájárult a tudományos segédeszközök hiánya is, különösen a nehéz domáldi évek alatt. Ezeket az akadályokat János talán legyőzhette volna, ha lelkesen és szilárd akarattal fogott volna hozzá a munkához. De az 1832. év április hava óta, mikor GAUSS őt a prioritástól megfosztotta és felfedezését csak hűvös jóindulattal méltatta, valami meghasadt benne. Még ha GAUSS álláspontját subjective jogosnak tartjuk is, levelének hatása mégis végzetes volt Jánosra nézve, ki ideges izgatottságában már évek óta egész reményét a »göttingai kolosszusba» helyezte, és most az erős csalódással szemben nem tudott ellentállást kifejezni. Azután 1837-ben, a lipcei díjért való versenyzése alkalmával a második csapás érte, mely őt egészen a földre terítette.

Midőn János tizenegy évvel ezután vad dühében az új igazságtalanság miatt, melyet — mint ő vélte — ugyanaz a GAUSS követett el rajta, ismét összeszedte magát, már késő volt. Égő becsvágytól serkentve, hogy a gyűlölt emberrel versenyre keljen, sőt őt felül is múlja, elhagyta a tér tudományának területét abban a meggyőződésben, hogy ő reá, ki a párhuzamosak elméletén diadalmaskodott, a matematika más területein is hasonló sikerek várnak. Fájdalom, majdnem mindig már a feladatok felállítását hibázta el, még pedig annyira, hogy már evvel is elzárta maga előtt a sikerhez vezető utat. Be akarta például bizonyítani, hogy minden algebrai egyenlet algebrai úton megoldható, hogy minden elemi függvény elemi függvények segítségével integrálható; végül olyan véges kifejezéseket akart előállítani, melyek segítségével minden valós és complex törzsszám kifejezhető, és olyan eljárást akart megállapítani, mely minden számelméleti egyenlet és egyenletrendszer megoldásához vezet, s több efféjét. Tervezetei számos ívre terjednek. Nagy fölfedezések hosszú és pompázó hirdetéseivel kezdődnek; de a mint tovább olvasunk bennük, csak hosszadalmas fejtegetésekre akadunk, melyek mindinkább összebonyolódnak és összezavarodnak, úgy hogy a biztos cél fölismerését gátolják, habár itt-ott felcsillan bennük annak a szellemnek egy szikrája, mely a remek *Appendixet* megteremtette. Boldogok azok, kik Achilleshez vagy Siegfriedhez hasonlóan halhatatlan dicsőséget vívnak ki maguknak és ifjúkoruk virágában elköltöznek; de jaj azoknak, kiket

kegyetlen végzetük arra ítél, hogy nagy tettük teljesülése után dicsőség nélkül és terméketlenül tovább éljenek, látva azt, hogy mások náluk boldogabbak diadalról diadalra haladnak.

Már a X. fejezetben említettük, hogy Jánosnak a harminczas évekből származó följegyzései nem nyomtatásra kész dolgozatok, hanem befejezetlen tervezetek számos hézaggal, ismétléssel, törléssel, közbeiktatással a szövegben és különálló czédulákon. Mindenesetre kettőnek kivételével még nagyobb mértékben áll ez az 1848 és 1858 között keletkezett följegyzésekről. Az első kivétel az *Észrevételek Lobarschewskij Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien* című művére és a második, a *Raumlehre (Tér tudománya)*, melynek egy tisztán leírt, nyilván nyomtatásra szánt kidolgozása megvan a hagyatékában; így tehát lehetséges volt, hogy e kézirat hű fordítását e mű második kötetében (251—288. old.) kinyomtassuk. De annál rosszabbul áll többi följegyzéseinek dolga. Ezekben János számos szokatlan matematikai jelöléssel él, melyek jelentését gyakran csak nagynehezen lehetett kideríteni. E jelölések részben Farkastól származnak, ki a *Tentamenben*, különösen pedig az *Arithmetika elejében* (1830) szabad folyást engedett a minden áron való újítás vágyának, részben pedig magának Jánosnak a találmányai, ki már az *Appendixben* aggasztó ily irányú hajlandóságot mutat. Ezekhez még hozzájárul Jánosnak egy további kellemetlen sajátsága, mely előrehaladott korában fejlődött ki benne, hogy t. i. a legtöbb szóhoz két, három, sőt némelykor egy egész tucsat hasonló értelmű szót tesz hozzá; ennek magyarázatát a következő fejezetben adjuk. Nem volt tehát könnyű annak a föladatnak a megoldása, ilyen följegyzésekből olyan szöveget szerkeszteni, mely azt a két követelményt kielégíti, hogy az eredetinek értelmét hiven visszatükrözze, és hogy kényelmesen olvasható is legyen; lehet, hogy egyes esetekben ez nem sikerült, de megvalósítását meg kellett próbálnunk. Az eredeti alakban meghagyott szöveg mutatványait találhatni az életleírás után következő bizonyítékok között; ezekből érthetővé válik, hogy a szövegek szószerinti közlésétől miért kellett elállanunk.

Üdvtanában, a melyre a következő fejezetben térünk reá, János mindazt összefoglalva akarta előadni, a miről biztos tudással rendelkezünk. Főrészeül a matematikát szemelte ki. A matematika ilyen encziklopedikus előadásának terve már korán fogant meg benne. «Mikor őt [az atyámat] értesítettem» — beszéli el János, hivatkozva egy hadnagy korában apjához intézett levelére — «hogy szándékom az egész matematikát kezdetétől fogva az elérhető leg-

szélsőbb tájékaig lehetőleg világosan és tökéletesen előadni [azt választotta], Szerencsét kívánok! Ez szent gondolat! Ebből oly gyümölcs érhetik, melyet az idő már régen hordoz méhében, és egy ember életének méltó [feladat]. Sok időt fogsz vele eltölteni, még az elemi részekkel is, magamról tudom, bár te egészen másképp vagy felszerelve.» Ezt a kijelentését igazolja egy *Reformation der Elemente der Mathematik* című mű címtervezete és előszava, mely 1832 márczius hava és 1833 június hava között készült; mert János benne a cs. k. hadmérnöki testület százados-hadnagyának nevezi magát. A mű két részből állónak volt tervezve. «Az első rész lényege szerint négy egymástól élesen elkülönített főrészt szakad; ezek a *számstan*, az *időtan*, a *tér tudománya*, a *mozgástan*.» A második részről mondja, hogy «a tudomány formájára vonatkozik, és így tehát a *logikát*, a *metafizikát*, ezek *szellemét* és *kritikáját* tárgyalja és különösen az első rész választott formájának *szükséges* és *egyetlen* voltát mutatja ki.»

A későbbi tervezetekben a beosztás ettől némileg eltérő. Kezdetnek volt kiszemelve a «tan-tan, a melyben a matematika sajátossága nem jó tekintetbe». Evvel a matematikai vizsgálatok logikai tartalmának fejtegetésére céloz, de erre vonatkozó részletes följegyzések nem kerültek elő a hagyatékából.

Ezután következik a «*csoporttan*». Csoportnak nevezi János a tárgyaknak olyan véges halmazát, melyben csak az elrendezés viszonyai jönnek tekintetbe; a csoport ujabbkori fogalma ismeretlen volt előtte, lényegben tehát csak a kombinatorikáról van itt szó. Erre a dologra vonatkozólag csak kevés jelentéktelen följegyzés van a hagyatékban.

A következő szakasz a «*számstanra*» vonatkozik. Szám alatt János mindig *egész* számot ért, mely akár pozitív, akár negatív lehet, úgy, hogy tehát itt a számelméletről van szó. Már mint ifjú behatóan foglalkozott János GAUSSnak *Disquisitiones arithmeticae*jével. «Fiamnak szándéka volt» — írja Farkas 1831 június hó 20-kán GAUSSnak — «hogy a te *polygon*-elméletedet németül, a kisebb [kaliberű] elméknek könnyebben hozzáférhető módon adja ki, mert bosszantja, hogy ezt az elméletet nem ismerik annyira, a mint ő kívánná: ámde én megmondtam neki, hogy valakitől (nem tudom, hogy kitől), hallottam, hogy te magad adtad ki külön; ezt magam is szeretném látni». A harminczas években, mint a X. Fejezetben elmondtuk, számelméleti vizsgálatokra Farkas buzdította Jánost. Előrehaladt korában is foglalkozott a számelmélettel, de kevés sikerrel, úgy hogy e tárgyra vonatkozó följegyzéseivel nem érdemes behatóbban foglalkoznunk.

Atyja eljárását követve, a folytonosan változó mennyiség fogalmában rejlő nehézséget János úgy törekedett legyőzni, vagy jobban

mondva, megkerülni, hogy az ilyen mennyiség ábrázolására az idő folyását használta fel. Ezért a számtan mellé rendeli az «időtant», a mely az algebrát és analízist is magában foglalja. Ide tartozik a képzetes mennyiségek tana is, melyet János az 1837. évbeli *Responsio*-ban sajátos felfogással tárgyalt. A mi előrehaladott korabeli följegyzéseiben az időtanra vonatkozik, lényegében már ebben a *Responsio*-ban elő van készítve. Jánosnak szándéka volt, hogy a képzetes mennyiségekre vonatkozó tanának bővített és javított kidolgozását is készítse el, melynek fontosságát egyenlőrangúnak tartotta az abszolút geometriáéval. De a mit ebből nyújt, csak szélesre taposott fejtegetése olyan gondolatoknak, melyeket már régebben szűkszavúan, sőt nagyon is szűkszavúan adott elő; tárgyilag új alig van benne. Hogy az algebrai egyenletekre vonatkozó terjedelmes vizsgálatai miben állanak, azt már előbb mondtuk el.

Áttérünk most a «Tér-tudományára», arra a tudományágra, melynek János élete utolsó éveig a legtöbb időt és fáradságot szentelte. Ha nem is tagadható, hogy sikere nem felelt meg fáradozásának, sőt az sem, hogy téves útra lépett és időnként az abszolút geometria következetességét kétségbe vonta, ide vágó följegyzései mégis annyi figyelemre méltót tartalmaznak, hogy ismertetésük szükséges, ha János működését a kellő méltatásban akarjuk részesíteni.

Mielőtt erre reátérnénk, még arra akarunk reámutatni, hogy a matematikát János a «mozgástannal» akarta befejezni. GAUSS *Theoria motus corporum coelestium* című műve által serkentve, ezen a téren is mint újító akart föllépni, és megígérte, hogy a bolygók és a holdak mozgásának egészen új elméletét fogja nyújtani. Hogy ennek részletes kivitelét milyennek képzelte, arról a hagyaték nem ad fölvilágosítást.

1833-ban a katonai szolgálatból elbocsátva és hazájába visszatérve, János a neki ily módon jutott szabad időt arra használta fel, hogy az *Appendixet*, mely vizsgálatainak eredményét csak részben tartalmazta, tér-tudománynyá fejlesztse ki. Ezt mutatják a *Tér tudományának* különböző tervezetei és *A tér tudományának előszava*, melyet a X. és XL. fejezetben ismételten említettünk; mert ebben mondja el részletesen, hogy miképen jutott az abszolút geometria fölfedezéséhez. Erre hosszú szünet következik. Csak az 1850. év körül folytatta a *Tér tudományának* kidolgozását.

Hogy ezt a művét nem fejezte be, már azokban a nehézségekben leli okát, melyek a kiadásával szemben állottak. Hogy a művet saját költségén kinyomtassa, az felülmúlta a szerény nyugdíjára utalt hajdani kapitány anyagi erejét; hogy pedig Németországban GAUSSHOZ

forduljon, megtiltotta neki az 1832-ben tett szomorú tapasztalata. Így tehát az a gondolata támadt, hogy magas állású honfitársaihoz folyamodjék segítségért. Hagyatéka számos olyan beadvány tervezetét tartalmazza, melyben vállalata támogatását kéri. Vajjon e beadványokat valóban elküldte-e, az kétséges; sikerük semmi esetre sem volt.

De kedvezőbb viszonyok közt is a *Tér tudománya* töredék maradt volna. János teremő ereje megbénult; a harminczas évekbeli gondolatain lényegesen már nem ment túl. Megtartotta azonban éles kritikáját, és világos óráiban fel tudta ismerni az ő *Tér tudományának* szerkezetében a gyenge helyeket. Főlismerte ugyan őket, de már nem volt ereje a hézagok betöltésére és a mű befejezésére. Ámde ez a kritika is jelentékeny eredménynek tekinthető; hisz János, a mint még részletesebben ki fogjuk fejteni, már olyan belátásnak adta tanújelét, melynek fontosságát csak egy emberöltővel későbbben ismerték fel.

Úgy látszik, mintha János a tulajdonképeni tér-tudományát, melyet EUKLIDÉS mintájára akart szerkeszteni, magyarázó jegyzetekkel szándékozott volna ellátni; legalább a *Tér tudománya* három első részének kéziratához különböző czédulákra irt ilyen jegyzetek töredékei vannak mellékelve. Különös fontosságúak azok az észrevételek, melyekben János a görbék és felületek alakjáról egész általánosságban elmélkedik.

A vonalakat *egyszerűekre és csomósokra* osztja fel. «Egyszerű vonal a pontoknak csak olyan egyesülete, a melyben annak minden pontjától ugyanannak minden más pontjához vagy csak egy, valamely anyagi pont által befutható út van, vagy mindig kétféle út van rendelkezésre.» Akkor ez a tantétel érvényes: «Valamely egyszerű vonalnak minden darabja [alkotó része] szintén egyszerű vonal, a csomósé pedig csak akkor, ha vagy nem esik belé csomó, vagy pedig egyik beléeső csomójától sincsen több mint két út.»

«Egyszerű felület» folytatja János — «csak a pontoknak minden olyan egyesülete, a melynek minden V pontjából olyan (hatetszik, csak ugyanazt a V pontot közösen bíró) \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , . . . vonalak indulnak ki, hogy e vonalak mindegyike minden A pontjának a többi vonalnak egy, de csakis egy pontja és viszont felel meg, és valamennyi az \mathfrak{A} egyik A pontjához tartozó B , C , . . . pont egyszerű vonalat alkot és minden V -ből kiinduló vonal kezdő darabja az $\mathfrak{A} * \mathfrak{B} * \mathfrak{C}$. . . összességhez tartozik.»

Most már János azt a feladatot tűzi ki magának, hogy az egyszerű felületek különböző fajait felsorolja. Mindenekelőtt megkülönböztet *teljes és átlukasztott* felületeket. Az átlukasztott felületekből a teljes, egyszerű felületeknek új fajait nyeri. «Lehet valamely tetszés

szerinti egyszerű felületből tetszés szerinti számmal lyukakat kiemelni, e helyekre csöveket illeszteni és ezeket páronként egyesíteni. A legáltalánosabb esetben az egyszerű felület ilyen természetű.» — János állítása mindenestre intuition alapszik, mert ehhez hozzáteszi: «Bebizonyítását meg kell vizsgálni!»

Az evvel a tárggyal összefüggő dolgok között figyelemre méltó az is, hogy János a polyederek csúcsai, élei és lapjai között fennálló EULER-féle kapcsolattal is foglalkozik és érvényességének terjedelmét kutatja. «A minden polyeder lapjainak, éleinek és csúcsainak számára vonatkozó felséges EULER-féle tétel» — mondja — «már rég óta, de úgy látszik, nem kellő általánossággal van bebizonyítva, mert nem minden polyeder-reláció nyerhető gúlaak lenyesése útján. Fogjunk tehát hozzá újból!» Más helyen állítja, hogy «az EULER-féle reláció bebizonyítását a gyűrűalakú polyederek és üreges sík-terek eseteire is» találta. Hogy János ezt miképpen értette, nem egészen világos, és eldöntetlennek kell maradnia, vajjon valóban tudta-e, hogy miképpen kell az EULER-féle relációt módosítani, hogy akárhányszorosan összefüggő polyederekre érvényessé válják.

A *Tér tudománya* első részének címe «*Alapvetés*». Miután a pont, mint rész nélküli hely nyerte magyarázatát, mint legegyszerűbb geometriai alakzat a $\bigcirc abc$ *gyűrű* következik; ez egyesülete valamennyi olyan pontnak, melyek mindegyike az a és b pontok összességéhez (jelekben $a * b$ -hez) képest olyan helyzetben van, mint a c pont. Mindazok a c pontok, a melyekre nézve $\bigcirc abc$ pont, az (abszolút) $aabb$ egyenest alkotják. Arra az esetre, hogy c az $aabb$ -n kívül fekszik, mint alaptétel ki van mondva, hogy $\bigcirc abc$ egyszerű, egyenletes, zárt vonal.

Egyik további alaptétel azt fejezi ki, hogy ha c az $aabb$ -n kívül fekszik, minden d pontnak megfelelőleg van olyan e pont, mely $a * b * c$ -re nézve d -vel *szimmetrikus* helyzetben van; ez az e pont d -nek képe $a * b * c$ -re nézve. Mindazoknak a d pontoknak egyesülete, melyek mindegyike $a * b * c$ -re nézve saját képe, az $abbc$ (abszolút) *sík* és ehhez mindjárt az az alaptétel fűződik, hogy a sík egyszerű, folytonos, egyenletes felület, mely a teret két darabra osztja fel.

Végül a $\bigcirc ab$ *kerektség* mint azoknak a pontoknak egyesülete van értelmezve, melyek közül bármelyik c pont az a középponthoz képest olyan helyzetben van, mint b , úgy hogy tehát $a * c$ egyenlő $a * b$ -vel, és — miután postulatumként van felállítva, hogy két \mathfrak{A} , \mathfrak{B} helynek megfelelőleg, ha \mathfrak{C} egyenlő \mathfrak{A} -val, legalább is egy olyan \mathfrak{D} hely létezik, hogy $\mathfrak{C} * \mathfrak{D} = \mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ — be van bizonyítva, hogy a kerektség egyszerű, egyenletes felület, mely a teret két darabra osztja fel.

Most már János azt próbálja kimutatni, hogy az így értelme-

zett alakzatok: a gyűrű, az abszolút egyenes, az abszolút sík, a kerektség ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, melyek a közönséges geometriában a körnek, az egyenesnek, a síknak, a gömbfelületnek jutnak, mint a milyenek például, hogy a sikot három nem ugyanabban az egyenesben fekvő pontja egyértelműen határozza meg; hogy valamely egyenes, melynek két pontja közös valamely síkkal, ebbe teljesen belécsik; hogy a gömbfelületet valamely a középpontjából kiinduló félegyenes (sugar) csak egy pontban metszi stb. Itt azonban nehézségekbe ütközött, és ezért az illető tételek után a kéziratban üres helyet hagyott. A felmerült nehézségek oka az, hogy a János választotta utat követve, az egyenes folytonosságáról és egyenletes voltáról semmit sem mondhatunk ki; erre mutatnak a Jánostól eredő lapszéli jegyzetek is.

Az első rész végét alkotják az egyenesek és síkok merőleges helyzetére vonatkozó tételek, a melyekben a kép fogalma igen hasznosnak mutatkozik. Itt János a legújabb idő törekvésével találkozik, mely oda irányul, hogy az elemi geometriát egyszerűbb és átlátzóbbá alakítsa oly módon, hogy az egyenesen és síkon való tükrözés fogalmát kezdettől fogva használja.

Mindezeknek a vizsgálatoknak rokonsága BOLYAI Farkas gondolataival egészen tiszta dolog. Eltérés ezektől főleg az, hogy Jánosnál a gömbfelület a háttérbe lép, míg Farkasnál ez szolgál kiindulópontul és csakis egyedül belőle származnak a gyűrű, a sík és az egyenes. János evvel nem értett egyet: «Ha valaki az egyenest a gömbfelületből akarja levezetni» — mondja egy helyen — «ez nemcsak elégtelen, hanem egészen természetellenes és értéktelen is; mert, habár a gömbfelület fogalma valóban egyszerűbb a síkénál és származása is egyszerűbbnek tekinthető, mint a síké, mégis csupán csak azt mondhatjuk, hogy *aabb-nek* minden a körüli kerektségben *van* pontja, a nélkül, hogy valamely ilyen pontot valóban *találhatnánk* is.»

Ebben olyan gondolat jut kifejezésre, melyre János nagy súlyt helyezett; a *Tér tudománya* második részében ugyanis, a melyre most térünk át, avval a gondolattal foglalkozik, hogy miképen lehet helyeket *találni*.

A második rész címét: «Szerkesztéstan», János mindjárt a következő módon magyarázza: «Különböző olyan alapvető helyek előállítására vonatkozó feladatok, a melyekről eddig csak homályos képük volt az embereknek, és létezésüket csak sejtették, a nélkül, hogy [létezésüket] bebizonyították és még kevésbbé, hogy e helyeket a priori valóban megtalálhatták volna». Hogy ez a dolog min múlik, azt egy mellékelt czédulán részletesen fejtette ki.

«Helyet mindig csakis olyan műveletek segítségével találunk (szerkesztünk), melyek mindegyike csak egy már talált helynek két pont körüli forgatásában áll, mi mellett csak a következő két *körelményt* kell szem előtt tartanunk:

1. Hogy csak minden a két pont körül forgatott már talátnak útja szintén talátnak tekintendő.

2. Hogy csak két már talátnak metszése talátnak tekintendő.»

«A tér tudományában ugyanis a származtatásnál egyedül a két pont körüli forgatás, mint az eredetileg egyetlen értelmezhető mozgás engedhető meg, mely a legegyszerűbb és kivitelében a legbiztosabb mozgás marad.»

E felfogásra talán befolyással volt MASCHERONI műve: *Geometria del compasso* (Pavia 1797.). Egy czédulán ugyanis a következő megjegyzést találjuk: «Mascheroni műve: *Geometria del compasso* kétségtelenül igen termékeny lángelmére vall és korszakot alkot a geometriai szerkesztésben. De mindenkinek [adjuk meg] a magáét. A fennforgó tannak a következők az előnyei:

1. Hogy a sík fölvételét és feltevését nem követeli,

2. hogy a kör leírása nem a középpont körül a síkban, hanem mindig két szilárd pont körüli forgatás útján, tehát kellő egyenletes-séggel és csínossággal megy végbe,

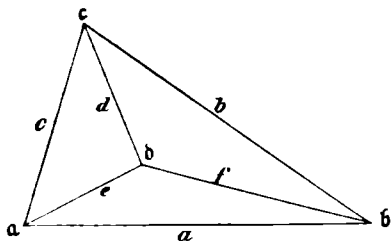
3. hogy itt EUKLIDÉS második feladata [adott pontból adott közzel egyenlő köz húzandó], melyet MASCHERONI, mint a TACQUET-féle kiadásban hiányzót, nem tárgyalt, [megoldható].»

A *Tér tudománya* harmadik része a szögek és a sokszögek tulajdonságaira vonatkozik. A tárgyalás kezdődik az egyenes vonalú szög értelmezésével, mely szerint ez a síknak két ugyanabból a pontból kiinduló félegyenes által határolt darabja. Ezután a szögek mérése körívek segítségével részesül beható megokolásban. Minden egyenesek által határolt idom neve sokszög. E mellett az általános felfogás mellett beható vizsgálatot igényel az a kérdés, hogy mi értendő a sokszög szögei alatt. Ugyanavval a gondossággal tárgyalatik a sokszög felbontása véges számmal levő háromszögre. Erre következnek szögek kapcsolataira és a háromszögek szögeire vonatkozó elemi tételek; a csúcshögek egyenlőségére vonatkozó tételnek nem kevesebb mint hét bebizonyítását találjuk benne. Evvel a kézirat felbeszakad; a *Tér tudománya* harmadik része befejezetlen maradt.

A *Tér tudománya* negyedik részében ama vizsgálatok új, bővített és javított feldolgozásának kellett volna kezdődnie, melyeket János az *Appendix*-ben hozott nyilvánosságra. Hogy erre a részre vonatkozólag a hagyatékban csak töredékek voltak találhatóak és nem,

mint az első három részre vonatkozólag, kész kidolgozás, talán úgy magyarázható, hogy János későbbi éveiben az abszolút geometria ellenmondás nélküli voltában kételkedni kezdett.

Hogy ugyanabban a *síkban* az abszolút geometria S rendszere «örökké következetes», kitűnik — úgy véli János — a sík abszolút geometriájának egyenlőértékűségéből a gömb geometriájával, ha a gömb radiusa képzetes. Lehetséges azonban, hogy a *térben* S -nek belső ellenmondása derül ki. Ennek kipuhatólására János először is a *tér négy olyan pontjának rendszerét* vizsgálja, melyek valamely $abcd$ tetraedernek (18. ábra) a csücskei. A hat él, a, b, c, d, e, f először is a 12 szöget, ab, ac, \dots -t határozza meg és ezekből adódik ki a tetraeder hat «kétsikű» szöge, még pedig mindegyik kétféle módon. «Megvizsgálandó tehát, vajjon ebből következik-e i meghatározása avagy sem.» János $\cos + a$ helyett az a és $\sin + a$ helyett a A stb. rövidebb jelölést használva, a



18. ábra.

$$\begin{aligned}\cos ac &= \frac{b-ac}{AC}, & \cos df &= \frac{b-df}{DF}, \\ \cos ae &= \frac{f-ae}{AE}, & \cos de &= \frac{c-de}{DE}, \\ \cos ce &= \frac{d-ce}{CE}, & \cos fe &= \frac{a-fe}{FE}\end{aligned}$$

egyenleteket nyeri. Ezekből az aec -vel jelölt szögre nézve, melyet az a és e meghatározta, meg az e és c meghatározta síkok alkotnak, a

$$\begin{aligned}\text{I. } \cos aec &= \frac{\cos ac - \cos ae \cos ce}{\sin ae \sin ce} = \\ &= \frac{\frac{b-ac}{AC} - \frac{f-ae}{AE} \frac{d-ce}{CE}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f-ae}{AE}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{d-ce}{CE}\right)^2\right]}}, \\ \text{II. } \cos aec &= \frac{\cos df - \cos de \cos fe}{\sin de \sin fe} = \\ &= \frac{\frac{b-df}{DF} - \frac{c-de}{DE} \frac{a-fe}{FE}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{c-de}{DE}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{a-fe}{FE}\right)^2\right]}}\end{aligned}$$

egyenletek következnek, melyek jobb oldalainak meg kell egyezniök, ha S nem vezet ellenmondásra. A számítás kivitele valóban a két kifejezés azonos voltát mutatja. Ugyanaz áll a többi öt szögre nézve is, úgy hogy e szerint «négy valamely tetraeder csúcsait alkotó pont vizsgálatából nem adódik ki semmi, mert akkor is következtesség uralkodik, bárhogyan is fejezzük ki ugyanazokat az általunk meghatározott mennyiségeket az egészset meghatározó mennyiségekkel.»

«Próbáljunk tehát ki és vizsgáljunk meg» — folytatja János — «egy öt pontból álló rendszert.» Ha az a, b, c, d pontokhoz még egy ötödik, e járul hozzá, mely semilyen hárommal az előbbieik közül nem fekszik ugyanabban a síkban, akkor e helyzetét teljesen az ae, be, ce összekötő vonalak hosszúságai határozzák meg, melyeket János k, h, i -vel jelöl, és így tehát szükséges, hogy a de összekötő vonal g hosszúsága továbbá az idomban előforduló háromszögek 30 szöge, valamint a 30 lapszög a kilenc $a, b, c, d, e, f, h, i, k$ mennyiséggel legyen kifejezhető. Itt is kitűnik, hogy e darabok némelyike két- vagy többféle módon számítható ki, és így kérdéses, vajjon az abszolút trigonometriát alkalmazva, a kiszámítás e különböző módjai mindig ugyanannak a darabnak ugyanarra az értékére vezetnek-e. Különösen g -nek háromszoros meghatározását nyerjük; mert mihelyt a 60 szög ismeretessé válik, g meghatározására elegendő kettő-kettő az eg, dg, fg szögek közül.

Az öt pont rendszerével János nagyon behatóan foglalkozott, mert, úgy látszik, biztosra vette, hogy ezen az úton a XI. axióma bebizonyításához jut. Sőt egy ideig hitte is, hogy ezélt ért, mert egy ízben nem jutott azonosságra. «Így tehát S hamis» kiált fel diadalmasan és megkezdí egy ily című dolgozat fogalmazását:

«Bebizonyítása a Földön mindidáig kétséges volt világhírű, és, mint az egész tér és mozgás tudományának alapjául szolgáló mindenek felett fontos 11. EUKLIDES-féle axiómának. Bolyai BOLYAI János nyugalmazott mérnökkari kapitánytól.»

Ennek bevezetése, melyen túl János nem jutott, ő reá és atyjára vonatkozó fontos életrajzi adatokat tartalmaz; János benne azt beszéli el, hogy atyja «épen most küldte vissza GAUSS leveleit a göttingai egyetemnek», a miből következik, hogy ezt az iratot 1856-ban fogalmazta.

Később János felismerte, hogy tévedt, a mennyiben számítási hibát követett el és így tehát «az 5 pont rendszerében is következtesség uralkodik». «Ezen a módon» — véli — «egy 6 pontból álló rendszerre térhetünk át; ámde a fárasztó munka, melylyel a 6 pontból álló rendszer megoldása jár, képes még a legbátrabb számolót is elijeszteni.»

Hogy ez az eljárás a végtelenbe vezet, János maga látta be, mert legutolsó idejéből származó följegyzéseiben csak valószínűségi okokat hoz fel az EUKLIDES-féle geometria, azaz a Σ rendszer mellett: «A mennyiben, ha S logikailag gondolható, Σ (mint különös eset) is ilyen, de nem megfordítva az S , úgy látszik hogy több szól a Σ mellett, habár ez semmi esetre sem bevégzett tény.»

Ebből kitűnik az a nevezetes tény, hogy BOLYAI János nem bizonyosodott meg benne soha, vajjon S a térben ellenmondásra vezet-e vagy sem. Valóban itt olyan nehézséggel került szembe, melyeknek leküzdésére egészen más eszközök voltak szükségesek, mint a milyenek neki rendelkezésére állottak. Hogy azonban egyáltalában fölvetette azt a kérdést, vajjon térbeli szerkesztések segítségével bebizonyítható-e a XI. axióma, az az ő elmeéletének becsületére válik és annál is inkább érdemli meg az elismerést, mert evvel fölülmulta LOBATSCHESKIJ-t, ki megemlíti ugyan, hogy a képzetes geometria nem vezethet ellenmondásra, mert a háromszög szögei és oldalai között fennálló egyenletek átmennek a gömbi trigonometria egyenleteibe, ha az oldalakat képzeteseknek vesszük, azonban képzetes geometriájának ellenmondás nélküli voltának kérdésénél csak a síkra szorítkozik.

Ama módszerek közül, melyeket később annak bebizonyítására használtak, hogy a nem-euklidikus geometria ellenmondás nélküli, az első GAUSSRA és RIEMANNRA vezethető vissza. Ők a teret a számok három-dimenziós folytonos sokaságának tekintik, a melyre az analitikai geometria ellenmondás nélküli eljárása alkalmazható. A második módszer CAYLEYnek azon a gondolatán alapszik, hogy a geometria alapja projektív úton vethető meg, ha abszolút alakzat gyanánt a képzetes gömbkör helyett valamely tetszés szerinti másodrendű felületet veszünk fel alapul. Ezt a gondolatot először KLEIN Felix dolgozta ki. Az abszolút geometriában mutatkozó ellenmondás e szerint megfelelő ellenmondásra mutatna az euklidikus geometriában.

Hogy az itt érintett kérdés mennyire kényes, kitűnik azokból az ellenvetésekből, melyeket az épen most vázolt két módszer ellen felhoztak. Annak jogosultsága, hogy a teret szám-kontinuumnak fogjuk fel, a tudomány mai állása szerint csak úgy mutatható ki, hogy először is az elemi geometriát, mintilyent, egészen a koordináták bevezetéséig kifejtjük. Annál az eljárásnál pedig, melyet KLEIN alkalmazott, azt kell követelnünk, hogy a projektív geometria a párhuzamosak axiómájától függetlenül épüljön fel. Mondhatjuk tehát, hogy csakis a direkt módszer, a mely BOLYAI János szeme előtt lebegett, t. i. az abszolút geometria kidolgozása szolgáltathatja annak teljesen kielégítő bebizonyítását, hogy az abszolút geometria ellenmondás nélküli és

együttal annak is, hogy a paralellák axiómája nem bizonyítható be. Azokra a vizsgálatokra, melyeket HILBERT, PASCH, PEANO, SCHUR, VERONESE és mások ilyen értelemben végeztek, itt nem térhetünk reá; de bármilyen nagy eredményeket értek is el ezen a téren, a jövőendő matematikusok vizsgálatainak még elég tág mező maradt fenn a megmunkálására.

A tér tudományának kidolgozásában János olyan kérdés taglalásába is bocsátkozott, melyre, mint gyakran más esetekben is, atyja hívta fel figyelmét. Farkasnak a *felületdarabok végszerű egyenlőségére* vonatkozó vizsgálatait már az V. fejezetben beszéltük meg; közel eső volt a megfelelő kérdést térdarabokra vonatkozólag is felvetni, és ezt Farkas a *Tentamen* második kötetében meg is tette. Ott olvashatjuk: «Vajjon valamely tetszés szerinti háromoldalú gúla végszerű egyenlőség útján hasábra vezethető-e vissza vagy sem (ez mostanig) még nincsen tisztázva». «Atyámnak» — beszéli el János — «az volt az eszméje, hogy mindenütt, a hol csak lehetséges, a végszerű egyenlőséget mutassa ki, és engem már kora ifjúságomban, természetesen csak néhány figyelmeztetéssel, utasított erre a fogalomra... A gúla feladata, nevezetesen bármely két egyenlő háromoldalú gúla és evvel együtt bármely két [egyenlő] sík-tér vagy polyeder végszerű egyenlőségének kimutatása, reám nézve egyike a legridegebbeknek, a legnagyobb ellentállást kifejtőknek, volt és hihetetlen nehézségeket okozott nekem. Megvallom, hogy a gúlák megfékezésére irányult minden fáradozásom és az alkalmazott elmeél ellenére, habár a tér tudományában egy csomó szép előkészítő fölfedezésre jutottam Izgatva a feladat egészen sajátosságos, legnagyobb mértékű csínosságá által, nem kevés időt szántam neki, de a mi a főczélt illeti, teljesen eredménytelenül. A ki erről meg akar győződni és erejét meg akarja ismerni, az fogjon hozzá.» Valóban magas halmai az írásoknak vonatkoznak az említett kérdésre; minthogy azonban János egyenlő térfogatú háromoldalú gúlák végszerű egyenlőségének a bebizonyítását kereste, érthető, hogy minden fáradozása hiábavaló volt. Talán vigasztalására szolgált volna, ha megtudta volna, hogy egy nála nagyobb, t. i. GAUSS Károly Frigyes, szintén nem tudott evvel a feladattal megbirkózni. Hogy GAUSS csakugyan foglalkozott vele, mutatja 1844 április 17-én kelt, GERLINGHEZ intézett levele. BRICARD, SFORZA és DEHN vizsgálataival most már eldőlt, hogy egyenlő térfogatú gúlák nem szükségképen végszerűen egyenlők.

XIX. FEJEZET.

BOLYAI János Üdvtana.

A ki BOLYAI János *Üdvtanát* helyesen akarja megítélni, annak már eleve kell óvakodnia attól a közeleső tévedéstől, hogy benne valami új szociális rendszerről van szó. Az Üdvtan inkább új vallás, mely úgy, mint más vallások, tág határok közt tud alkalmazkodni az állami és társadalmi élet legkülönbözőbb formáihoz. Hogy János az uralkodó vallásokkal való minden vitát elkerül, az helyes; de ő egyáltalában a fennállónak minden bírálatától tartózkodik és csak arra szorítkozik, hogy saját tanát kifejtse, azt véelve, hogy, a ki evvel megismerkedik, nem vonhatja ki magát meggyőző ereje alól és ezért ő feleslegesnek tartja, hogy a hamis nézetekkel harcra szálljon.

Az 1852. évből származó följegyzéseiben elbeszéli János, hogy az Üdvtannal 30 évvel ezelőtt kezdett foglalkozni. Ez arra az időre esnék, mikor az abszolút geometriát fölfedezte, és a mint a JÁNOS főherczeghez 1832-ben intézett folyamodványában mondja, «erőt érez magában az egész [emberi] nem kiképezéséhez való hozzájárulásra». De az Üdvtan eredete minden valószínűség szerint még korábbi időre teendő, János ifjúkorára, mikor apja neki «célzásokot vetett oda», olyan célzásokot, melyek benne gyökeret vertek és lassanként kialakultak. Farkas metafizikai gondolatait, melyeknek keletkezése bizonyára az ő saját ifjúkorára tehető, a *Tentamen*ben rakta le. Két eltörülhetetlen jellemvonása az Isten képének — mondja — az igazság és a szeretet és minden emberi igyekezetnek szükségképen az a célja, hogy először a csodálatra méltó mindenséget, a mennyire csak lehet, minél behatóbban áttekinteni törekedjünk és másodsor, hogy hozzájáruljunk ahhoz, hogy minden a kölcsönös szeretetben egyesüljön és a most még meglevő visszavonás mind az összességnek, mind az egyeseknek erőre és terjedelemre nézve lehető legnagyobb boldogságának összhangjába változzék át. A kapcsolatot e két látszólag egészen különböző cél között az hozza létre, hogy «a mathesis tiszta forrásából merített igazság az Istennek, az erkölcsiségnek és a haluatatlan-

ságnak velünk született érzetét ébreszti bennünk. Segítségével behatóbban ismerjük meg a belső és külső világot, úgy hogy napfényre kerül a világban élő igazság, és megszületik az erény.»

János osztozik atyjával a matematika iránti lelkesedésben. A *Reformation der Elemente der Mathematik* előszavában (1832) lelkes szavakkal dicséri azt az élvezetet, melyet ez a tudomány inkább képes nyújtani, mint minden más tudomány.

«Elvitázhatatlan, hogy egyébként egyenlő körülmények közt a matematikus a legnagyobb, legtisztább boldogság-érzet tudatában van. Csak ő örködik szigorú értelmével, csak ő marad józan az érzéki mámorától. Csak ő benne (és nem az érzéki mámorban élő költőben, ki lelkesedésében ugyan gyakran szépen csengő és az életet igen is meghatóan érintő dolgokat mond el) lobog fel az égi tűz tiszta, világos fényében. Csak ő ismeri azt a magasztos kedélyállapotot, melyben hideg, nyugodt és épen azért a legnagyobb lelkesedéssel szemléli a csodálatra méltó mindenséget és tőle telhetőleg a végső ok felé tör, min-dennek az összefüggését megmagyarázni igyekszik és a legmagasabb szellemet minél jobban megismerni törekszik, kinek lénye mindinkább világosan alakul ki benne és a ki iránt a szeretete folytonosan gyarapodik, mely a legméltóbban és a legnemesebb módon abban nyilvánul, hogy az Ő gondolata a borzongás egy fajtát keltő lelkesedéssel tölt el bennünket. A ki ennél magasztosabb feladatot és célt [vél] ismer[ni], azt nem irigylem érte, hanem sajnálnom kell őt.»

Szerinte a matematika elől még a filozófiának, tehát annak a tudománynak is háttérbe kell szorulnia, mely magának a legmagasabb rangot szokta követelni. «A közönséges scholasticus metafizika legnagyobb részt túlfeszített, beteges, az emberi tudás területén nem kellően tájékozott erők nyomorúságos szüleménye, mert a mi tudományában biztos, az a matematikához, az egyetlen, igaz *alaptudomány*hoz tartozik, a többi pedig csupa szörszálhasogatás, a mely eltérít bennünket a leghasznosabb és leggyümölcsözőbb tudományok felséges mezejétől.»

Ámde a matematikának még magasabb jelentősége is van; alapja nemcsak a szellemi, hanem az erkölcsi művelődésnek is. Habár ez a gondolat már Farkasnál is föllép, következetesen mégis csak János vitte keresztül és gondolta végig, kit nyilván az önmagán tett tapasztalatok indítottak erre. Magányában a matematika vigasztalta őt, átsegítette a szomorúság és kétségbeesés óráin, támaszt nyújtott neki, mikor a szenvedély hullámai ostromolták. A mi neki használt, segítséget, megmentést hozott — így következtet János, mint minden világjavító — az bizonyára mindenkinek üdvös. Így érthetők

kijelentései: «Az emberek boldogságához csak annyival járulhatunk hozzá, hogy az elmét alapos ismeretekkel felvilágosítani törekszünk» és megfordítva: «A világ minden baja csak arra való, hogy serkentessen a maga elhárítására, és így tehát az elmét élesítse.» De mindig újból idézi azt a mondást, melyet arra szánt, hogy Üdvтана czimlapját díszítse: «A főnek a szüvet kell művelnie.»

János előrehaladott korában még egy gondolat fűződik ezekhez. Mennél kevesebb elismerésben részesül tudományos munkássága, mennél jobban megvetik és bántják őt az emberek, annál inkább meg van győződve belső értékéről, különös hivatottságáról. Neki sikerült, mint a János főherczeghez intézett folyamodványában mondja, a tér tudományának «leglényegesebb, legfontosabb, legérdekesebb és elég bonyolódott» feladatát megoldania «és tulajdonképen alapjából egészen új, eddig egyetlen geometer által még fogalma szerint sem sejtett tudományt» felépíteni. «Ép oly sikeresen dolgozott ki még sok más fontos tárgyat is és úgy szólván (a legkiválóbb elmék egyhangú ítélete szerint) eddig igen nyomorúságosan tárgyalt matematikának teljes reformjához látott hozzá.» Most erőt érez magában, hogy az egész emberiség reformját az Üdvтана segítségével megvalósítsa, melynek elfogadása, mint ő hitte, néhány év alatt minden szenvedést meg fog szüntetni és az általános boldogsághoz fog vezetni.

Az Üdvтannak három önálló, de egymással szorosan összefüggő részből kellett volna állnia, a vezértanból, az ideiglenes üdvтанból, a tökéletes üdvтанból. A vezértan bevezetésnek volt tervezve, a mely az alapvető gondolatok tárgyalását tartalmazta volna. Ezeknek részletes kifejtése az ideiglenes üdvтан feladatául volt kitűzve. Ez az első kidolgozás ideiglenes, azaz előleges, a tudomány ezidőszerinti állásának megfelelő lett volna, és ezért ezt a tökéletes üdvтannak kellett volna követnie, mely tökéletes nyelven írva, teljes világossággal tárgyalva, az igaz tudomány minden eredményét élő egészbe összefoglalva tartalmazta volna, «ott, a hol kívánatosnak látszik, az érdem szerint tisztelt feltalálók neveinek felemlítésével».

A ki üdvösségre akar szert tenni, annak előbb az Üdvтан tartalmával kell megismerkednie. «Az üdv egyik jelentékeny és lényeges részét alkotja az Üdvтannak *megtanulása*, a másikat, nem kevésbé nemeset és jeleset az Üdvтannak megfelelő *életmód*. A tudományok összességének főrésze a matematika, ez egyetlen biztos alapja minden többi résznek, és így az általános üdvnek.» Az Üdvтannak tehát a matematika részletes tárgyalásával kellett volna kezdődnie, a melynek a már említett elrendezés: tan-tan, csoporttan, számtan, időtan, mozgástan szolgált volna alapul; azután következtek volna

a többi tanok, hasonlóan a matematikához, kevés egyszerű alaptételből kifejtve.

A «tanok és melléktanok» számos tervezete maradt fenn. Hogy János tudatában volt kísérletei tökéletlen voltának, mutatja az «ideiglenes» üdvtan címe. Fontosabbak a vezértannak töredékei, mert ezekből föl lehet ismerni, hogy miben állott volna az új vallás lényege.

«Ez a tan a következő fölötte fontos előnyöket nyújtja:

1. Kellő világossággal tárgyalt bebizonyítása annak a tételnek, hogy egyáltalában semmiféle egyéni üdv nem létesíthető vagy nem állhat fenn a közüdv nélkül, vagy pedig hogy senki sem lehet teljesen boldog, míg nem tudja, hogy egyszersmind, minden vele lehető közösségben élőknek üdve szilárdan meg van alapítva, vagy míg nem kész, a mennyire tőle telik, az ilyen közüdv előmozdításához hozzájárulni vagy, ha ez már eléretett, annak fentartásában tevékenyen résztvenni.

2. A főcélznak visszavezetése egy czélszerű tanra, úgy hogy ennek követése ellenállhatatlan varázsánál és erkölcsi hatalmánál fogva, már magától is tartalmának természetes, sőt szükségképeni következménye legyen, és így a valamennyi világbölcс által a boldogsághoz szükségesnek tartott erényes életmód nehézségének visszavezetése egy tökéletes és teljes üdvtan szerkesztésére, minek szintén szükséges következménye ennek [az üdvtannak] elterjedése, mely egyszersmind a legfontosabb, eddig nélkülözött kiegészítése az óriási könyv- és kéziratgyűjteményeket megtöltő, eddig legnagyobbbrészt terméketlen tanoknak, mert nemcsak kellő világossággal tanítja azt, a mi valóban igaz, hanem reámutat arra is, hogy miképen lehet mindig a szükségelt igazságot feltalálni, a jót követni és a valódi szépet átérezni. Különben is úgy, mint minden más feladat, a minden feladat között legszebb, legszükségesebb és legüdvösebb jelen feladat csakis valamely tan útján juthat megoldásához, mely megoldás e műben valóban el is lesz végzendő.

3. Egy részben tökéletes, részben ideiglenes üdvtan és a hozzá szükséges üdvvezértan szerkesztése és egyúttal a benne adott előírás szerinti kellő terjesztése tehát a legelső, legmagasztosabb, legfelsőbb, legszebb, legfontosabb, legélvezetesebb, legüdvösebb foglalkozás a világon.»

Az Üdvtan elterjedése és evvel együtt járó elfogadása az emberiséget «erkölcsi mechanismusba» alakítaná át és ily módon az általános boldogságot eredményezné. Minden tehát, a mi az embert az Üdvtantól eltéríthetné, számüzendő vagy legalább is a kellő határok közé visszaszorítandó, különösen a művészetek, mert nem művelik ki az értelmet

és a valóságról hamis képzeteket keltonek; csak a zenét szabad megtűrni. «Lehet és szabad jó zenét meghallgatni, szép vidéket megtekinteni, sőt kellemes érzetek is megengedhetők, mint a milyeneket például kellemes szag, jóízű ételek, élettelen tárgyak, pl. bársony megtapintása, megérintése, simogatása idéznek elő. Ép úgy meg van engedve a séta, lovaglás, kocsikázás, hintázás is. De ezek az élvezetek tompábbak, mint a tudományosak. Különösen az élő szépségeket kell lehetőleg kerülnünk és csak fűszer gyanánt szabad reájuk néznünk vagy őket megérintenünk. E tekintetben legnehezebb az éles határ kiszabása. Mert ha minden érintkezést a másik nemmel abbahagyunk, vége szakad nemünknek; sok az érintkezésből pokol, és nyomorékká tesz; gyakran sokkal könnyebb is a másik nemet egészen elkerülni, mint az érintkezésben a mértéket betartani és a célzt szem előtt tartani.»

János elkerüli, hogy részletesebben megvizsgálja azokat a következményeket, melyek az Üdvtan elfogadásából a vallási, politikai és társadalmi viszonyokra hárulnának. Sőt az Üdvtan címlapja számos tervezeteinek egyikén, azt is kijelenti, hogy e munka «a legfelsőbb szolgálat lehető és kevés erőbe kerülő előmozdítására» szolgál. Ez nem zárja ki, hogy János alkalmilag kiszínezhette magának, hogy milyen képe volna a Földnek, ha Üdvtana általános elfogadásban részesült volna; érthető, hogy közel járhatott a kommunisztikus eszmékhez, melyektől a kereszténység kezdetei sem estek távol.

Az Üdvtanon kívül a jövő kor emberiségét János még egy általánosan megértett, tökéletes nyelvvel is gondolta összefűzhetőnek, melyen az Üdvtant szerkeszteni szándékozott. Ezt a gondolatot is BOLYAI Farkas ébresztette benne, még pedig 1830-ban megjelent *Arithmetica eleje* című könyvével, melyet a benne foglalt, a magyar nyelvhez alkalmazkodó, javított írás megteremtésére célzó javaslat miatt már a XV. fejezetben fölemlítettünk. E művének legfontosabb helyeit Farkas a *Tentamen* első kötetének toldalékában újra kinyomtatta. «Vajha a' tudós Társaságok» — mondja Farkas — «abban egyeznének meg, hogy a' tudományok óriási növésevel, a' midőn az emberi erő 's idő nem nő, a mostani sok 's mind több-több helyett egy mathesisi 's musikai lélekkel alkotott vég nélkül tökéleyesíthető nyelven nyomtassanak mindent (a' szükségést is le fordítva): nagy részét rövid életünknek, melyben mind a koltsat keresve, alig lépünk bé a' tudományok' templomába 's a' nap le menyen, ebben tölthet-nők... A' köz nyelv mellett, minden nemzetnek ekkor is mivelni kellene a' magáét; és két nyelvet megis tanulhatna mind a' két nem; 's minden nemzet egy nyelven tudván szollani, az egymás'

megértése millyen egybefoglaló kötél lenne, (a' melly Hazánkban is olly kívánatos volna); 's melly közelítés lenne ez az emberi nem egyességére."

Hogy milyen benyomást gyakoroltak Farkas e kijelentései Jánosra, mutatja ennek egyik följegyzése, mely az 1848 utáni időből származik: «Midőn a következtelenség és tökéletlenség érzete miatt lépten-nyomon felháborodva, a német nyelven is megbotránkoztam, végre megtaláltam atyám 1830-ban megjelent *Az arithmetica elejét* és benne javított betűinket és mesterszóinkat, valamint azt a kísérletét, hogy összhangban nyelvünk természetével újat és megújítót teremtsen; ez elragad és feltüzel. De csak az 1842. év nyara óta [foglalkoztam evvel részletesebben] és még egy másik körülmény vezetett [engem] reá, az t. i., hogy az időtan egy fejezetét, az egyenletekről szóló tanomat kívántam atyámnak bemutatni.»

Más helyen mondja: «Akadályt okoz a nyelv avval, hogy ugyanazt a fogalmat és még inkább ítéletet több, sőt sokféle módon lehet kifejezni.» Ez a kijelentés szolgáltatja magyarázatát János egy már említett sajátosságának, mely először érthetetlennek, sőt beteges állapotra mutatónak látszik, hogy t. i. előrehaladott korából származó, ha nem is minden, de sok följegyzésében a legtöbb szóhoz még egy, két, három egészen egy tuczatig is rokonértelmű szót tesz hozzá. Evvel kifejezésre akarta juttatni, hogy mennyire tökéletlen a mostani nyelv, a melyben ugyanazt a fogalmat, ugyanazt az ítéletet többféle módon lehet kifejezni. A tökéletes nyelvet mint a gondolat egyértelmű leképezését tervezte.

Az egyetlen tudományágak, melyekben ez a követelmény közelítőleg teljesíthető, úgy látszik, a formális tudományok körébe tartozó logika és matematika; ezekben legalább a nem egészen sikertelen kezdeményezés megtörtént. Ellenben általában lehetetlenséget kíván az ő követelményével János, mert a szó és ítélet között, melyet hallunk, és a psychikus jelenségek között, melyeket kívátnak, nem áll fenn egyértelmű, azaz minden embernél azonos és minden egyes embernél változhatatlan vonatkozás. Ámde a megértés általános eszközüül szolgáló mesterséges nyelvre vonatkozó javaslata bizonyos fokig figyelmet érdemel, habár a kivitelével járó nehézségek nagyobbak, mint azt e gondolat képviselői hiszik. A számos kísérlethez, mely ilyen világnyelv megalkotására irányult, hozzácsatlakozik BOLYAI János világnyelve is. Alapul szolgált neki a magyar nyelv, a melyet egyszerűsíteni és különösen a kivételektől megszabadítani akart. Ennek a munkának csodálatra méltó szorgalommal szentelte magát; egyúttal itt a Farkas ajánlotta javított írást alkalmazta. Hagyatéka

az új nyelv számos szótárát tartalmazza, melyek talán a behatóbb áttekintésre érdemesek. János az Üdvtanát is ezen a nyelven kezdte kidolgozni; az illető följegyzéseknek czime: *Tan-tan*.

Mint BEDÖHÁZI elbeszéli, János az Üdvtant aggódva, mint valami titkot őrizte és csak mint utolsó rendelkezését fejezte ki azt a kívánságát, hogy följegyzéseit egy arra méltó férfi vegye át, ki a tant befejezné és nyilvánosságra hozná. Ilyen férfi nem akadt. De a mi maradandó az Üdvtanban, az tovább él: a lelkesedés a fenséges matematikai tudományért.

XX. FEJEZET.

Zárószó.

Az első mű, melynek révén a BOLYAI név Magyarországon kívül ismertté vált, SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN Farkasnak, a göttingai egyetemen az ásványtan és földtan tanárának már a XVII. fejezetben említett könyve, *GAUSS zum Gedächtnis* volt. Ez egy évvel GAUSSnak halála után, 1856-ban jelent meg. KREIL, az osztrák csillagász, ki egy tudományos utazása alkalmával 1848 augusztus havában Maros-Vásárhelyen megfordult és ott BOLYAI Farkassal megismerkedett, ennek egy hozzá intézett levelének másolatát, mely Farkas és GAUSS barátságára vonatkozott, 1855 április 24-én elküldte SARTORIUSnak. SARTORIUS erre azonnal összeköttetésbe lépett Farkassal és elkérte tőle GAUSS leveleit. Farkas 1856 július hó 13-án teljesítette e kérését. SARTORIUS, a BOLYAI és GAUSS levelezését még felhasználhatta emlékkönyvének megírásánál. Farkas ebben a könyvben mint GAUSS ifjúkori barátja szerepel, de saját tudományos működése ép oly kevésbé talál benne méltatásra, mint fiáé, a Jánosé. János ezért WALTERSHAUSEN nyilatkozataival nem igen volt megelégedve és a 169. oldalon említett, Farkas életrajzára vonatkozó följegyzéseiben az e feletti kedvetlenségének leplezetlenül adott kifejezést. «Felette valószínű, — véli János — hogy GAUSS csak miután BOLYAI Farkas munkásságát észlelte, vált figyelmessé erre a tárgyra [a parallellák elméletére] és csak ezután törekedett ezt a csomót is kibogozni (a mi annál inkább is valószínű, mert a SARTORIUS úr által 1856-ban kiadott életrajz (80. oldala) szerint GAUSS eleinte kevés érdeklődést tanusított a tér tudománya iránt, mely nagy mértékben csak később fejlődött ki benne; különben, hogy ez az érdeklődés eleinte nála hiányzott, avval magyarázom meg, hogy GAUSS akkor a rengeteg kiterjedésű számelmélet szépségétől elragadtatva, főleg evvel foglalkozott és csodálatost művelt benne, mert ifjúságában mindenki valami útra tér és csak az isteni erő mérhetetlen). Idevágó [a tér tudományára vonatkozó] vizsgálatainak eredménye az volt, hogy BOLYAI Farkasnak megírta: ha csak ki volna mutat-

ható, hogy egy tetszés szerint nagy egyenes vonalú sík \triangle létezik, akkor a többi már sikerülne neki. Más alkalommal ezt írja: 'Talán valamikor sikerül nekem e szírteket körülhajózni' és ismét egy másik alkalommal (a kronológiai sorrend ismeretlen előttem, mert BOLYAI Farkas az imént küldte vissza GAUSS leveleit a göttingai egyetemnek), hogy az általa követett út nem annyira [a XI. axióma] bebizonyításához vezet, mint inkább az igaz voltában való kételkedéshez. »

Atyjának GAUSS-szal a göttingai bástyán való találkozását elbeszélve, a következőt jelenti János: »Atyám egyebek közt elmondta az egyenesnek értelmezésére és a XI. axióma bebizonyításához kínálkozni látszó utakra vonatkozó gondolatait, és a tudomány felsőbb régióiban, különösen a számelméletben már akkor kolosszus GAUSS, elragadtatva és meglepetve, e lakonikus szavakba tört ki: 'Ön lángész! Ön az én barátom!' Egyébiránt merőben téves, ha GAUSS — mint az a göttingai SARTORIUS tanár úr által kiadott életrajzban a 17. oldalon olvasható — úgy nyilatkozott, hogy BOLYAI Farkas volt az egyetlen, ki a matematikára vonatkozó metafizikai nézeteibe be tudott hatolni, mert 1. GAUSS egész életében munkái dolgában, míg nyomtatásban napvilágot nem láttak, mindig igen tartózkodó volt, tehát atyámmal *egyáltalában* efféle *nem* közölt, kivéve azt, hogy, mikor atyám az egyenesre vonatkozó nézetét vele közölte, így felelt: 'Valóban, az egyenest gyalázatosan tárgyalják; tényleg egyenes az a vonal, *mely önmagában forog*'. De erre megjegyzem, hogy ez a kifejezés hibás, mert az egyenes két pontja körül egyáltalában nem foroghat. 2. Épen atyám tudatta vele a matematika alapjaira vonatkozó nézeteit, és minden látszat arra vall, hogy GAUSS csak akkor és ez által lett figyelmessé e nagyfontosságú tárgyra; a mi pedig nem is csoda, mert GAUSS igen korán főleg a számelmélettel foglalkozott. Ez éltetőfogytaig kedvencz tárgya maradt, a melyet, habár nem jogosan, a matematika királynőjének nevezett. »

Az, a mit GAUSS az egyenesre vonatkozólag válaszolt, épen azt mutatja, hogy ő már Farkassal való találkozása előtt gondolkodott a geometria alapjairól; hogy a dolog így áll, annak bizonyítékául szolgálnak hagyatékában talált különböző följegyzései, valamint barátjai előtt tett nyilatkozatainak egész sorozata. Szembetűnő, hogy a két barát egymástól függetlenül jutott a geometria alapjainak kérdésére, a mely KANT *Kritik der reinen Vernunft*-jának megjelenése (1781) óta mozgatta a elméket; hogy beszélgetéseik közben, egymásnak adva és egymástól fogadva, miről tárgyaltak, azt pontosan nem tudjuk és nincs is szükségünk reá, hogy tudjuk.

Fontos, hogy SARTORIUS már 1856-ban a következővel mutatott rá, hogy GAUSS a párhuzamosak elméletével foglalkozott.

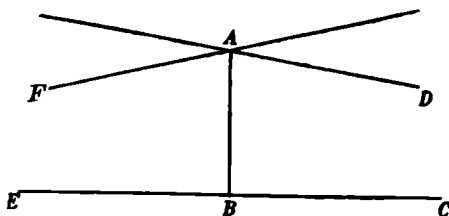
«A geometriát GAUSS csak úgy tekintette következetes épületnek, ha élére teszik a párhuzamosak elméletét, mint axiómát; ő azonban arra a meggyőződésre jutott, hogy ez a tétel nem bizonyítható be, de tapasztalatból tudjuk, pl. a Brocken, Hohehagen, Inselsberg háromszög szögeiből, hogy közelítőleg igaz. Ha azonban az említett axiómát nem akarnók elfogadni, ebből egy másik, egészen önálló geometria következne, a melyet egyszer alkalmilag megvizsgált és antieuklidikus geometriának nevezett.»

SARTORIUSnak ezt a kijelentését nemsokára igazolta a PETERS által kiadott GAUSS és SCHUMACHER levelezésének 1860-ban megjelent első kötete, melyből itt főleg az 1831. évből való levelek jönnek tekintetbe; ezek kelte megelőzi az 1832. év február havát, a mikor GAUSS a János *Appendix*-ét megkapta. Az 1863-ban megjelent ötödik kötetben említés történik LOBATSCHESKIJnek 1840-ben megjelent *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* című művéről, melyről GAUSS 1846 november hó 28-án kelt levelében a legnagyobb elismeréssel nyilatkozik. BOLYAI Farkas is szerepel ebben a kötetben, de csak mint GAUSS tanuló társa (SCHUMACHER 1849 február hó 20-án kelt levele, GAUSS ugyanannak az évnek márczius hó 12-én kelt válasza).

Minthogy GAUSS «a böotiaiak kiabálásától» irtózva, a XI. axiómára vonatkozó nézeteit nem bocsátotta nyilvánosságra, ezek a rövid közlések hatalmas benyomást gyakoroltak a matematikus-közönségre és azt eredményezték, hogy a geometria alapjainak kérdése nemsokára széles körök érdeklődését keltette. Itt nem lehet feladatunk, hogy megírjuk e mozgalom történetét, mely még mostanáig sincsen lezárva; csak azt kell belőle kiragadnunk, a mi BOLYAI Farkas és BOLYAI János méltatásánál tekintetbe jöhet.

Ha kutatjuk, hogy miképen váltak e nevek a matematikusok előtt ismeretessé, akkor azt találjuk, hogy e körül BALTZER Richard (1818 – 1887) hervadhatatlan érdemet szerzett magának. *Die Elemente der Mathematik* című műve 1862-ben megjelent első kiadásának második kötetében (a geometriában) GAUSSról, BOLYAI Jánosról és LOBATSCHESKIJről még nincsen szó; ellenben az 1867-ben megjelent második kiadásban e férfiakról oly módon tesz említést, hogy kitűnik belőle, hogy időközben egy a XI. axiómától független geometriának gondolatát teljesen felfogta. A negyedik könyvben (Planimetrie, 2. §, 7. sz.) a párhuzamosakat mint olyan egyeneseket értelmezi, melyek ugyanazon a végtelen távolban levő pont felé tartanak;

erre vonatkozólag LOBATSCHESKIJ-re (1840) és BOLYAI Jánosra (1832) utal. A 8. szám IV-ben fejtegeti, hogy az absztrakt geometriában valamely A ponton (19. ábra) két különböző egyenes, AD és AF megy át, melyek bizonyos egyenes ellenkező száraival BC és BE -vel párhuzamosak. Ezt az alapvető megkülönböztetést először GAUSS ismerte fel (1792 óta), de részletesen nem hozta nyilvánosságra. A helyes párhuzamosak elméletének igazi megalapítói BOLYAI János és LOBATSCHESKIJ Ivánovics Miklós.



19. ábra.

BALTZER mellé állott nemsokára egy másik matematikus, a bordeauxi HOÜEL Jules (1823—1886), ki BALTZER-nél nem kisebb érdemet szerzett magának a két BOLYAI megismertetése körül. HOÜEL levelezést folytatott BALTZER-rel, kinek *Elemente*-jét ő ismertette. Hogy megismerkedett LOBATSCHESKIJ és BOLYAI János munkáival, azt BALTZER-nek köszönhette. LOBATSCHESKIJ *Geometrische Untersuchungen*-jének francia fordítását a GAUSS-SCHUMACHER-féle levelezés egy kivonataival együtt, már 1867-ben adta ki a bordeauxi emlékiratokban. 1868-ban ezt követte BOLYAI János *Appendix*-ének fordítása, melyet egy rövid cikk BOLYAI Farkas és BOLYAI János életéről vezetett be. E cikk szerzője SCHMIDT Ferencz (1827—1901) temesvári, később budapesti építész, a kinél HOÜEL a BOLYAI-ak után tudakozódott. SCHMIDT mindenesetre megérdemli, hogy neve a BALTZER- és HOÜELÉ mellett említettessék. Ő 1864-ben HOÜEL-hez avval a kéréssel fordult, hogy felvilágosítást adjon neki Franciaországban megjelent bizonyos matematikai művekről, melyeket könyvtára számára akar megvásárolni. Ennek a kérésnek HOÜEL készséggel meg is felelt. Mikor később BALTZER közleményei felhívták HOÜEL figyelmét LOBATSCHESKIJ és BOLYAI dolgozataira, 1867 február hó 17-én felvilágosítás végett fordult magyar ismerősehez és pontosabb tudósítást kért tőle a két matematikusról, BOLYAI Farkasról, ki GAUSS-nak ifjúkori barátja volt és 1829-ben egy két kötetes munkát, *Tentamen stb.* adott ki és BOLYAI Jánosról, ki a *Tentamen* függelékében egy rendkívül becses munkát szerkesztett; ebben találhatók azok a gondolatok, melyeket LOBATSCHESKIJ vele egyidejűleg fedezett fel és melyek birtokában GAUSS már régen ezelőtt volt, a nélkül azonban, hogy vala- mit közölt volna belőlük. Az *Appendix* [helyesen a *Tentamen*] szerzője 1851-ben névtelenül egy csodálatos kis könyvet, *Kurzer*

Grundriß eines Versuchs... adott ki, melynek ő, HOÜEL, birtokában van.

Már elbeszéltük, hogy a BOLYAI név csodálatos módon SCHMIDT építész előtt nem volt ismeretlen; mert atyja érintkezett BOLYAI Jánossal, mikor ez Temesvárra volt vezényelve. SCHMIDT nagy buzgósággal fogott hozzá a dologhoz, összegyűjtötte a két BOLYAI-ra vonatkozó, már meglevő szétszórt és hiányos irodalmi följegyzéseket és ezekhez még újabb anyagot is tudott magának szerezni Maros-Vásárhelyről, a miben különösen SZABÓ Sámuel, az ottani református kollegium tanára, volt segítségére. Így keletkezett a két BOLYAI vonzón megírt, rövid életrajza, melyet SCHMIDT 1867 december havában Bordeauxba küldött. HOÜEL, ki a geometria alapjaiba való új belátást lelkesedéssel fogadta és egész erejét ennek terjesztésére fordította, nemcsak arról gondoskodott, hogy SCHMIDT értekezése a GRUNERTS Archivban (48. rész, 1868) megjelenjék, hanem az életrajzot le is fordította francziára és az *Appendix* mintaszerű fordításával együtt a bordeauxi akadémia emlékiratainak ötödik kötetében tette közzé; az illető füzet egyidejűleg mint önálló munka is megjelent GAUTHIER-VILLARS-nál Párisban. HOÜEL buzdításának köszönhető a SCHMIDT-féle életrajz olasz átdolgozása is, a melyet 1868-ban FORTI Angelo becsátott közre a BONCOMPAGNI herceg Bolletinojában. Ugyanabban az esztendőben adta ki BATTAGLINI a Giornalejában az *Appendix* olasz fordítását.

Az említett kutatások alkalmával kiderült, hogy BOLYAI János hagyatéka még megvan, még pedig a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium birtokában. Hogy a hagyaték felhasználása lehetővé váljék, HOÜEL közvetítésre kérte fel BONCOMPAGNI herceget, a ki e dolognak meg tudta nyerni báró Eötvös Józsefet, az akkori magyar vallás- és közoktatásügyi minisztert. Eötvös keresztülvitte, hogy a hagyatékot 1869-ben a Magyar Tudományos Akadémiának küldték fel áttekintés végett. Az iratokat először KÖNIG Gyula tanárnak, azután SCHMIDT Ferencz építésznek adták át, ki azokat 1894 június havában az Akadémiának visszaszolgáltatta. A hagyatékot most már visszaküldték Maros-Vásárhelyre, hol még ma is őrzik a kollegium könyvtárában. Az áttekintés alkalmával SCHMIDT fia, Márton, megtalálta Jánosnak 1823 november 3-ikán Farkashoz intézett fontos levelét; 1894-ben a természettudósok bécsi gyűlésén maga SCHMIDT terjesztett elő János hagyatékára vonatkozó néhány további közleményt.

A GRUNERTS Archivban megjelent értekezését SCHMIDT csak úgy tekintette, hogy előhírnöke a két BOLYAI beható életrajzának, melynek előkészítésével egész életén át foglalkozott; azonban a hivatásával

járó fárasztó munka és különféle betegségek, melyeken átesett, gátolták e nehéz vállalkozás kivitelében. Ily körülmények között arra kellett szorítkoznia, hogy 1898-ban a *Zeitschrift für Mathematik und Physik*-ben János egy rövidebb életrajzát hozza nyilvánosságra. A mi Farkas életére vonatkozólag közölni valója volt, felvételt talált a GAUSS és BOLYAI Farkas életére vonatkozó jegyzetekben, melyek a SCHMIDT és STÄCKEL által 1899-ben kiadott *Bolyai Farkas levelezéséhez* vannak csatolva. E levelek néhány töredékét már 1877-ben, GAUSS születése századik évfordulójának alkalmából nyomtatta ki SCHERING. SCHMIDT kísérletei, hogy engedjék meg neki a betekintést ezekbe a BOLYAI Farkas életrajzának megírásához nélkülözhetetlen levelekbe, sokáig eredménytelenek maradtak, míg végre 1896-ban a göttingai királyi tudományos társaság valamennyi levél másolatát neki rendelkezésére bocsátotta. Később azt is megengedte a társaság, hogy e levelek az eredetiekkel való összehasonlítás nyomán kiadathassanak. A Magyar Tudományos Akadémia tette lehetővé, hogy *BOLYAI Farkas és GAUSS levelezése* 1899 nyarán a *Tentamen* új kiadásának (1897—1904) díszes alakjában megjelenhetett.

Evvel SCHMIDT egy régi kívánsága teljesült. De már előbb is BOLYAI Jánossal szemben egy szintén régen szívében hordott kegyelet kötelességet teljesített.

Az almafa, melyet Dicső Lajos ültetett, 23 éven át volt az egyetlen jel, mely BOLYAI Farkas sírját jelölte. 1879 november havában a kollegium előljárósága elhatározta, hogy felirással ellátott sírkövet állít BOLYAI Farkasnak; egyidejűleg hajdani lakóházat is emléktáblával jelöltette meg. Az emlékkő fekete syenitből készült és felírása a következő:

Bolyai

Bolyai Farkas

*A marosvásárhelyi ev. ref.
kollegiumban*

1804—1856

*Mennyiségtan-Természettan
Tanára*

sz. 1775 † 1856

*közzadakozásból a Kollegium
Elöljárósága*

1884.

A fennmaradt pénzből és néhány adományból 100 forint gyűlt össze, melyet mint BOLYAI-GAUSS-emlékalapítványt avval a rendeltetéssel kezelnek, hogy kamatai évenként a kollegium felsőbb osztályai valamelyik jó matematikusának jutalmul ítéltesse oda.

De BOLYAI János sirja még mindig elhagyatva és feledésbe merülve maradt. 1893-ban SCHMIDT Maros-Vásárhelyre utazott és János akkor még életben levő ápolónőjével, Szörts Juliannával megmutattatta magának a felismerhetetlenné vált sírt. Visszatérve Budapestre, abban buzgólkodott, hogy a Matematikai és Fizikai Társulat gyűjtés útján teremtsen elő a pénzt, mely lehetővé tette egy trachytból készült emlékkő felállítását. Ennek egyszerű felirása:

Bolyai János

1802—1860.

alján pedig kisebb betűkkel még hozzá van téve: *A Matematikai és Fizikai Társulat kegyelete jeléül 1894.* Az 1911. év június 7-én a két Bolyai földi maradványait exhumálták és közös sírba temették.

Időközben BOLYAI János gondolatai mindjobban kezdtek elterjedni. Az *Appendix*nek 1868-ban megjelent francia és olasz fordításait követte 1872-ben a német átdolgozása, a gráci *FRISCHAUF* J. könyve, *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*; később *FRISCHAUF* egy másik könyvet *Elemente der absoluten Geometrie* címen adott ki, melyben *LOBATSCHESKI*, *HELMHOLTZ* és *RIEMANN* vizsgálataira is volt tekintettel. Az *Appendix* első 33 paragraphusának magától Jánostól származó német fogalmazása a jelen munka eredeti német kiadásában látott először napvilágot, magyar fordítása a II. rész 198—217. oldalain található. Ezt (u. o. 217—232. old.) a 32—42. paragrafusok magyar fordítása követi. Az *Appendix* angol fordítását 1891-ben Austinban (Texas) *HALSTED* adta ki, melynek 1896-ban már a negyedik kiadása jelent meg. Ennek az angol fordításnak utánnyomását 1895-ben Tokióban adták ki. Magyarországon a kolozsvári egyetemen tartott előadásai *RÉTHY* Mór 1874 óta és utódja, *VÁLYI* Gyula, 1887 óta terjesztették az abszolút geometriát és az *Appendix* tanait; de az *Appendix*et csak 1897-ben fordították le magyarra, még pedig *SUTÁK* József és *RADOS* Ignác is. Még megemlítjük, hogy a széki *TELEKI* nemzetség levéltárosa, *BIÁS* István 1907-ben Maros-Vásárhelyt az *Appendix* már ritkává vált eredetijének egy anasztikus lenyomatát adta ki.

Mintán 1884-ben *SZILY* Kálmán a Magyar Tudományos Akadémia *Értekezések a matematikai tudományok köréből* című kiadványá-

ban BOLYAI Farkas életrajzát megírta és 1886-ban BRASSAI Sámuel azt az önéletrajzot hozta nyilvánosságra, melyet Farkas 1840 október hó 5-én az Akadémiának beküldött, 1887-ben KONCZ József, ki a viszonyokat alaposan ismerte, az előbbi publikációk felhasználásával *A marosvásárhelyi evang. reform. kollegium története* című könyvében behatóan ismertette BOLYAI Farkas életét.

Mindenesetre jele a mindinkább gyarapodó elismerésnek, melyben BOLYAI Farkas és BOLYAI János hazájukban részesültek, hogy 1887-ben a Magyar Tudományos Akadémia a *Tentamen* új. a szerzőhöz méltó kiadásának rendezését elhatározta. Mint már az V. fejezetben említettük, az első kötetet KÖNIG Gyula és RÉTHY Mór 1897-ben, a másodikat KÜRSCHÁK József, RÉTHY Mór és zepetneki TÖRÖSSY Béla 1904-ben adták ki. Eltérően az első kiadástól, itt az első kötet mindazt tartalmazza, a mi az arithmetikára vonatkozik, míg a második kötet a geometriára vonatkozó dolgokat foglalja magában, tehát az *Appendixet* is.

Végül 1897-ben megjelent BEDŐHÁZI János, marosvásárhelyi kollegiumi tanár, nagy szeretettel írt könyve a két BOLYAIRÓL. Hogy hazája minél szélesebb köreiben érdeklődést keltsen az iránt a két férfi iránt, ki Magyarországon a matematika történetében olyan kiváló szerepet játszott, BEDŐHÁZI általánosan érthető nyelven írta meg könyvét és elkerült minden olyan fejtegetést, melynek megértéséhez nagyobb matematikai készség szükséges. Az ő előadásában Farkas lép az előtérbe; a mi Jánost illeti, nem tudott szabadulni attól az elfoglaltságtól, melylyel a marosvásárhelyiek még abban az időben is megítélték János dolgait.

Az 1902. év december 15-ikét, BOLYAI János születésének századik évfordulóját fényesen ünnepelték meg hazájában. Szülővárosában, Kolozsvárt 1903 január 15-ikén a Ferencz József-egyetem rendezett ünnepet, melyen SCHLESINGER Lajos tartotta az ünnepi beszédet és SZILY Kálmán, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára kihirdette az Akadémiának már 1902 január 27-ikén hozott azt a határozatát, hogy BOLYAI János és atyja és tanítója, BOLYAI Farkas emlékére 10,000 koronás díjat alapít. Ezt a díjat 1905-től kezdve minden ötödik esztendőben a decemberi ülésben a megelőző öt év alatt megjelent legjobb matematikai munka szerzőjének fogják odaitélni (1905-ben e díjban POINCARÉ Henri, 1910-ben pedig HILBERT Dávid részesült). Ugyanakkor a kolozsvári egyetem egy emlékfüzetet adott ki, a melybe BONOLA, SCHLESINGER és STÄCKEL írtak közleményeket és a Tivoli-, most BOLYAI-utczában emléktáblával jelölte meg a SCHLESINGER által kipuhatolt házat, melyben BOLYAI János született.

A Magyar Tudományos Akadémia már 1902 december 15-ikén tartotta ünnepi ülését. Ez alkalommal STÄCKEL Pál terjesztette elő *Bolyai János térelmélete* czimű értekezését, az utolsót azoknak az értekezéseknek sorozatából, melyeket Magyarország legnagyobb matematikusáról írt.

De a marosvásárhelyi református kollegium is megemlékezett kiváló hajdani növendékéről. Néhány nappal a kolozsvári BOLYAI-ünnep után, 1903 január 25-ikén iskolai ünnepet rendeztek az ő emlékére, mely alkalommal LAKATOS Sámuel és BEDŐHÁZI János tanárok tartottak beszédeket.

Így tehát bőven teljesült az az óhaj, melyet a BOLYAIak ügyének fáradhatatlan előharczosa, SCHMIDT Ferencz, 1868-ban kifejezett, hogy a BOLYAI nevet tisztelettel említsék mindenütt, hol a matematikai tudományokat művelik.

Jegyzetek és utalások.

BOLYAI Farkas és BOLYAI János életrajzának forrásául szolgáltak :

1. Azok a munkák, melyeket ők maguk adtak ki.
2. Hátrahagyott irataik és azok a reájuk vonatkozó följegyzések és levelek, melyek a Magyar Tudományos Akadémia, a marosvásárhelyi ref. kollegium és dr. SZABÓ Péter budapesti tanár úr birtokában vannak.
3. Az értekezések és munkák egész sorozata, melyek részben közvetlenül a két BOLYAIRA vonatkoznak, részben pedig a párhuzamosak elméletének és a nem-euklidikus geometriának történetét tárgyalják.

A következőben a szövegnek azokhoz a helyeihez, melyeknél a történetbuvárra nézve fontos lehet, hogy az eredeti forrásokra térhessen vissza, hozzáfűztük a szükséges utalásokat. Továbbá kinyomtatva találja benne az olvasó az olyan följegyzések egész sorozatát, melyek az életleírás illető helyeinek bizonyítékául szolgálhatnak. Végre a jegyzeteknek egész sorozata a szöveg adatainak részben magyarázatát, részben kiegészítését szolgáltatja.

BOLYAI Farkas megjelent munkáinak jegyzéke.

I. Matematikai munkái.

1. Az *arithmetica eleje*. Maros-Vásárhely 1830, XX és 162 o. A kinyomtatás engedélye 1829 október 12-ről kelt.

2. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentialique huic propria, introducendi. Cum Appendice triplici.* Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiæque Publ. Ordinario.

Tomus primus. Maros-Vásárhelyini 1832, LII és 502 o. és utána a BOLYAI János megírta *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, 30. o. A végét foglalja el a 16 oldalra terjedő, magyarul megírt *Toldalék*. Lassanként egészen az 1844. évig hozzájárultak még 50 oldalra terjedő helyreigazítások. A kinyomtatás engedélye 1829 október 12-ről kelt.

Tomus secundus. Maros-Vásárhelyini 1833, XVI és 400 o. Ez a rész tartalmazza a következő hármas függeléket : I. *De perspectiva*, II. *De gnomonica*, III. *De chronologia*. A kinyomtatás engedélye 1829 október 12-ről kelt.

3. Az *arithmetikának, geometriának és physikának eleje a Maros-Vásárhelyi kollégiumbeli alsóbb tanulók számára a helybeli professor által*. Első kötet. Maros-Vásárhelyt 1834, X és 90 o.

4. *A' Marosvásárhelyt 1829-be nyomtatott Arithmetika Elejének részint rövidített, részint bővített, általán jobbitott, 's tisztább kiadása.* A' szerző által. Marosvásárhelyt 1843, XLIV és 386 o.

5. *Arithmetica eleje kezdőknek.* 40 o. A hely, idő és szerző megnevezése nélkül. Megjelent Maros-Vásárhelyt 1850.

6. *Úrtan elemei kezdőknek.* 48 old. A hely, idő és szerző megnevezése nélkül. Megjelent Maros-Vásárhelyt 1850 51.

7. *Kurzer Grundriß eines Versuchs stb.* Maros-Vásárhely 1851, 88 old.

8. WOLFGANGI BOLYAI de BOLYA *Tentamen*, editio secunda, Tomus I: *Conspectus arithmeticae generalis*, ediderunt Julius KÖNIG et Mauritius RÉTHY, Budapestini 1897, XII és 679 o. Tomus II: *Elementa geometriae et appendices*, ediderunt Josephus KÖRSCHÁK, Mauritius RÉTHY, Béla TÖRÖSSY de ZEPETHNEK. Budapestini 1904, LIV és 439 old.; hozzájárul még egy kötet, mely 74 lapon tartalmazza a *Tentamen*hez tartozó ábrákat és 7 lapon az *Appendix*hez tartozókat.

II. Költői munkái és műfordításai.

1. *Öt szomorújáték.* Írta egy hazafi. Elöl cím, ajánlás és jelentés az olvasóhoz XII old. I. Pausanias, vagy a nagyraagyás áldozatja, 5 felv. 70 o. II. Mohamed, vagy a dicsőség győzedelme a szerelmen, 3 felv. 76 o. III. Kemény Simon, vagy a hazaszeretet áldozatja, 3 felv. 60 o. IV. A virtus győzelme a szerelmen, 5. felv. 84 o. V. A szerelem győzelme a virtuson, 5 felv. 72 o. Végül: Hibák és igazítások, némely jegyzések a 72—93. o. Szeben 1817.

2. *A párisi per.* Egy érzékeny játék, 5 felvonásban. Maros-Vásárhely 1818, X és 156 old.

3. *Az ősz lantos hatthyudalai három nyelven.* Szívhangok üdvözlétül Ferencz József ő cs. és k. apostoli Felségének Marosvásárhelyt július 31-én 1852-ben. Maros-Vásárhely 1852, 12 old.

4. *Pope próbatétele az emberről.* Anglusból fordítva. Más poétákból való toldalékkal. Maros-Vásárhely 1819, 132 o.

Jegyzéke

azoknak a műveknek, melyek BOLYAI Farkasra és BOLYAI Jánosra vonatkoznak.

Előlegesen megjegyzés. A következő jegyzék nem formál reá jogot, hogy teljesnek tekintsék; sőt ellenkezőleg szándékosan mellőztünk néhány munkát, mert semmi olyan nem található bennük, a mit az idézett források nem tartalmaznak.

Néhány szám végén *kurziv írásban* közöltük azt a rövidített jelölést, melylyel az illető művet a következőkben idézni fogjuk.

1. BEDŐHÁZI János, *A két Bolyai. Élet- és jellemrajz. Marosvásárhely 1897, 454 o. (BEDŐHÁZI).*

2. BRASSAI Samu, *Emlékezés Bolyai Farkas felett. Erdélyi Múzeum, 3. köt., 1886.*

3. ENGEL, Friedrich, *Nikolaj Ivanowitsch Lobatschewskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers. Leipzig 1898, XVI. és 476. old. (ENGEL).*

4. KONCZ József, *A marosvásárhelyi evang. reform. kollegium története. Maros-Vásárhely 1896, 774 o. Megjelent mint a programmértékezés a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium 1883—1888. és 1894/95. iskolai évi értesítőiben és mint különlenyomat Maros-Vásárhelyt 1896. A Bolyai Farkasra vonatkozó rész (271—338. o.) 1887-ben látott napvilágot. (KONCZ).*

5 a. SCHLESINGER Lajos, *Szemelvények Bolyai BOLYAI Farkasnak Léczfalvi BODOR Pálhoz 1815-től 1825-ig írt leveleiből. Matematikai és Fizikai Lapok, 11. köt. (1904), 197—230. o. (SCHLESINGER, szemelv.)*

5 b. SCHLESINGER, L., *Neue Beiträge zur Biographie von Wolfgang und Johann BOLYAI, Bibliotheca mathematica (3), Bd. 4 (1903) 260—270. o.*

6 a. SCHLESINGER Lajos, *BOLYAI János. A kolozsvári Ferencz József m. kir. Tudomány-egyetem BOLYAI-ünnepén 1903 jan. 15-én mondott emlékezés. Acta universitatis litterarum regiae hungaricae Francisco-Josephinae Kolozsváriensis Anni MCMII—III, Fasciculus II, 7—51. old.; újra kinyomtatva a Matematikai és Fizikai Lapok 12. kötetében (1903), 57—88. old. (SCHLESINGER, Emlékezés).**

6 b. SCHLESINGER, L., *Johann Bolyai. Festrede gehalten bei der von der königl. ungarischen Franz-Josefs-Universität veranstalteten BOLYAI-Feier am 15. Januar 1903, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd 12 (1903), 165—194. o.*

7. SCHMIDT, Fr., *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker, Johann und Wolfgang BOLYAI von BOLYA, Archiv der Mathematik und Physik. Bd 48, 1868, 217—228. o. HOUEL J. francia fordításában: Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. BOLYAI de BOLYA, Mémoires de Bordeaux, t. V, 1868, 191—205. o. FORTI A. olasz átdolgozásában: Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni BOLYAI di BOLYA matematici ungheresi, Bollettino di biografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, t. 1, 1868, 277—299. o.*

8. SCHMIDT, Fr., *Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann BOLYAI, k. k. Hauptmann im Geniecorps. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 8 (1898), 133—146. o.*

* Az idézetekben az oldalszámok a könnyebben hozzáférhető Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent kiadásra vonatkoznak.

9 a. SCHMIDT Ferencz és STÄCKEL Pál, *BOLYAI Farkas és GAUSS Frigyes, Károly levelezése*, a Magyar Tudományos Akadémia megbízásából szerkesztették, jegyzetekkel és életrajzzal ellátták. Budapest 1899, XV. és 208. old. (B.-G. lev.)

9 b. SCHMIDT, FRANZ und Paul STÄCKEL, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich GAUSS und Wolfgang BOLYAI*, herausgegeben mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1899, XV és 208 o.

10. STÄCKEL, Paul, *Die Theorie der Parallelinen von EUKLID bis auf GAUSS*, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, herausgegeben in Gemeinschaft mit F. ENGEL. Leipzig 1895. (STÄCKEL und ENGEL, Th. d. P.)

11. STÄCKEL, P. und F. ENGEL, *GAUSS, die beiden BOLYAI und die nichteuklidische Geometrie*, *Mathematische Annalen*, Bd 49 (1897), 149—206. o. LAUGEL L. francia fordításában, *Bulletin des sciences mathématiques*, série 2, t. 21 (1897), 206—228. o. és mint önálló füzet is, *GAUSS les deux BOLYAI et la géométrie non-euclidienne* (Paris, Gauthier-Villars 1897).

12 a. STÄCKEL Pál, *A képzetes számok elmélete BOLYAI János hátrahagyott írataiban*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 17. k. (1899), 259—292. o.

12 b. STÄCKEL, Paul, *Johann BOLYAI'S Theorie der imaginären Größen*, *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, Bd 16, Jahrg. 1898 (1899), 263—297. o.

13 a. STÄCKEL Pál, *A nem euklidikus geometria története BOLYAI János hátrahagyott írataiban*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 18. k. (1900), 241—256. o.

13 b. STÄCKEL, P., *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann BOLYAI*, auf Grund nachgelassener Aufzeichnungen Johannis dargestellt, *Math. und naturw. Berichte aus Ungarn*, Bd 17, Jahrg. 1899 (1901), 1—19. o.

14 a. STÄCKEL Pál és KÜRSCHÁK József, *BOLYAI János észrevételei LOBATSCHESKIJ Miklósnak a parallelákra vonatkozó vizsgálataira*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 20. k. (1902), 49—67. o.

14 b. STÄCKEL, P. und J. KÜRSCHÁK, *Johann BOLYAI'S Bemerkungen über Nicolaus LOBATSCHESKIJ'S Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinen*, *Math. und naturw. Berichte aus Ungarn*, Bd 18. Jhrg. 1900. (1903), 250—279. o.

15 a. STÄCKEL Pál, *Vizsgálatok az absolut geometria köréből*, *BOLYAI János hátrahagyott írataiban*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 20. k. (1902), 160—186. o.

15 b. STÄCKEL, P., *Untersuchungen aus der absoluten Geometrie, aus Johann BOLYAI'S Nachlaß herausgegeben*, *Math. und naturw. Berichte aus Ungarn*, Bd 18. Jahrg. 1900 (1903), 280—307. o.

16 a. STÄCKEL Pál, *BOLYAI János térelmélete*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 21. k. (1903), 135—145. o.

16 b. STÄCKEL, P. *Johann BOLYAI's Raumlehre*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd 19, Jahrg. 1901 (1904), 1—12. o.

17 a. SZABÓ Péter, *Adalékok GAUSS és BOLYAI levelezéséhez és BOLYAI Farkas életrajzához*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 25. k. (1907), 326—338. o.

17 b. SZABÓ, P., *Beiträge zum Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und W. BOLYAI und zur Biographie von W. BOLYAI*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd 25, Jahrg. 1907. (1909), 226—240. o.

18. SZABÓ Péter, *BOLYAI János ifjúsága*, Mathematikai és Fizikai Lapok 19. k. (1910), 135—164. o.

19. SZILY Kálmán, *Adatok BOLYAI Farkas életrajzához*, Értekezések a matematikai tudományok köréből, 11. k. 9. füzet. Budapest, 1884 (SZILY).

Jegyzetek az I. fejezethez.

1. o. 3—13. s. PÁLMAY József, Maros-Vásárhelyt, az erdélyi nemesség történetének alapos ismerője, rendelkezésemre bocsátotta a BOLYAI családra vonatkozó okiratok egész sorozatának másolatait. Neki módjában volt e másolatok készítésénél olyan kivonatokat is felhasználni, melyeket BOLYAI Farkas és BOLYAI Antal a kolozsmonostori és gyulafehérvári levéltárakban készítettek. A tulajdonképeni családi iratok ugyanis (az 1753-ban elhalt) BOLYAI Gábor kiskorúsága idejében a BETHLEN grófokhoz kerültek, a kik ezeket nem adták többé vissza. Gróf BETHLEN Elek BOLYAI Gergelylyel, Farkas fiával, közölte, hogy az iratokat három részre osztották; az a rész, a mely BETHLEN Elek birtokában volt, 1848-ban, az oláhok felkelésekor elégett, egy másik rész a BETHLEN-család Béthlenben lakó ágának birtokába került, a harmadik részt pedig a kolozsvári minorita-kolostor kapta. Mint-hogy a birtokigények, a melyek annak idején az iratok visszatartására okot szolgáltatnak, most már tárgyitalanok, úgy látszik, remélhető, hogy a betekintést az iratokba nem fogják tovább is megtagadni. Talán ez az ujjmutatás buzdításul szolgál a BOLYAIak családi történetében való további kutatásra.

1. o. 13—17. s. SZILY 2. o.

1. o. 17—22. s. *B.-G. lev.*, 57. o.

2. o. 19—10. s. al. Farkasnak SARTORIUS VON WALTERSHAUSENHEZ 1856 július hó 13-án Göttingába intézett leveléből, *B.-G. lev.*, 151. o. Hasonlót beszél el János, bizonyára apja közlése alapján, a *XI. axióma bebizonyítása* bevezetésében (1856): «6 éves korában tanulékony, élénk, nem játékos; 9 éves korában, magától tanulva azt meg, minden feladott témáról rögtönzött latin verseket készített és a poézis tanítója a három osztálylyal felette járó tanulók dolgozatait vele javíttatta. Abban az időben, a mint csodálkozva maga a hellén nyelv tanára elbeszélte, egy hat heti szünet alatt megtanult görögül és hegyibe még könyv nélkül 500 verset Homerosból; héberül is tudott. Olyan jó fejszámoló volt, hogy adott 14-jegyű számból könnyen tudott négyzetgyököt és köbgyököt vonni és még több számjegyet kért. Ámde egész matematikai tudása akkor még fölötte felületes volt és nem is tudta, hogy mindennek az okát kell megmondani.»

3. o. 10. s. SZABÓ Péter úr br. KEMÉNY Simon következő rövid életrajzát bocsátotta rendelkezésünkre:

Báró KEMÉNY Simon született 1779—1780 táján, valószínűleg családjá ősi birtokán Alsó-Gáldon (Alsóféhérmegye). Atyja Simon cs. kir. kamarás, főispán, kinek második nejétől, gr. WASS Katától született hat gyermeke közül Simon az ötödik.

Tanulmányait otthon kezdte. Nevelője HERPEI Ádám (1756—1814) volt, a ki «a fejnek és szívnek nyelvén» egyaránt tudott szólni. Ebben az időben (1788) jött melléje tanuló társul Bolyai Farkas, s innen ered az a hű barátság, mely őket mindvégig összekapcsolta. Nevelője gondos vezetése mellett elvégezte a hat gimnáziumi osztályt, ez alatt a német és francia nyelvben is szép jártasságot szerzett. Herepei 1790 után enyedi rendes professor lett és KEMÉNY S. Bolyaival együtt a kolozsvári református kollegiumba ment át felsőbb tanulmányokra. Itt főleg a híres theologus SZATHMÁRI-PAP Mihály volt reá hatással.

Tanulmányai végeztével 1795-ben Bécsen, Drezdán át Jénába, majd Göttingába ment jogot tanulni; ez utóbbinak jogi karát akkor elsőnek tartották Európában. 1798 júniusában indult haza Göttingából. 1803-ban már házas ember; neje gr. TELEKI Anna, a nagy emberbarát gr. TELEKI József leánya.

Ritka szép elméje és tanultsága nem maradt elrejtve a magán élet körében. Azonban nem érezvén elég erőt magában, a főkormányiszéki tanácsosságra való kinevezését nem fogadta el. De hogy a királyi jó indulattal szemben hálátlannak ne mutakozzék, később, élete vége felé, 1823-ban elvállalta Alsófehérmegyében az administratori állást. Ezzel a bécsi hatalom az alkotmányos főispánt pótolta, de ő ebben a helyzetben is a szívén hordá a haza alkotmányát, s annak valódi javát, s nem «az alkotmányosság külső-héjján» kapkodott.

Ezt megelőzőleg az erdélyi királyi táblán 1814-ben tiszteletbeli és 1817-ben rendes bíró volt és ebben a tisztjében is kiváló. A tárgy velejét gyorsan felfogó, hajthatatlan egyenességgel ítélő bírónak mondják. Közbecsülés és tisztelet környezte, mire magánéletével is rászolgált.

Jó atya és férj, a ki jövedelmével okosan bánt. Ügyes gazda. A fényűzést kerülte, sőt volt benne egy kis cinizmus is. Mindenkihez barátságos, de barátságot csak kevés, válogatott férfival tartott. Legszívesebben csombordi birtokán (Nagyenyed mellett) lakott; vendégeket szerető, ügyes társalgó, a ki az elmés tréfához is értett. Valaki egy színdarabot vitt hozzá, melynek címe volt «*En, te, ő*». Birálata így hangzott: «Ezt sem én, sem te. sem ő nem értheti meg».

Az 1826. év egyik őszi estéjén — épen szüret idején — így búcsúzott el családja és sógornői társaságában: *Adieu, pour toujours!* Reggel halva találták szobájában. (1826 okt. 18.) Bolyai írta róla gyászjelentésében: «eredeti mély és szép ész, egyszerű szilárd jellem, a szélvészkek közt mozdulatlan havasi kőszikla, de a szerencsétlennek megnyíló arany kebel».

Mint ennek az életrajznak forrásait SZABÓ Péter úr a következőket sorolja fel. BOLYAI F. önéletrása (Koncz 274—276. o.), KEMÉNY S.-ról írott gyászjelentése (SZILY 31. o.). Nekrologok (HASZNOS M U L T S Á G O K 1826. II. félév 37. sz., Magyar Kurir 1826. II. félév 35., 38. sz.). — Ezen kívül: K. S. néhány levele családjához 1795—1798 között (a csombordi családi levéltárból) és unokájának özv. KÜN Gézáné, br. K. Vilma úrnőnek

levele 1913 jan. 5-ről, melyet SZILY Kálmán szívességéből használhatott fel SZABÓ Péter úr.

3. o. 20—26. s. és 12—6. s. al. Farkasnak 1856 július hó 13-án SARTORIUS VON WALTERSHAUSENHEZ intézett leveléből, *B.-G. lev.*, 151. o.

3. o. 22. s. Czélzás Mózes 2. könyve, 3. részének 2. versére: «És megjelenék néki az Úrnak angyala tűznek lángjában egy csipkerbokorban, és tekintte oda Mózes, és ímé a csipkebokor ég vala, de a csipkebokor meg nem emésztetik vala.»

4. o. 3—6. s. A marosvásárhelyi ref. kollegium könyvtárában őrzik Farkas önarcképét, melyet a tükörből vett fel; ennek reprodukciója megvan BEDŐHÁZI könyvében (32. o.). Farkasról, mint rajzolórról és festőről értekezik GULYÁS Károly. Bolyai *Farkas festményei*, *Uránia* 14. k. (1813), 202—206. o., mely értekezéshez az egyik olajvázlatnak, egy idealizált családi képnek reprodukciója van mellékelve.

4. o. 9—12. s. V. ö. KONT I., *Geschichte der ungarischen Literatur*, Leipzig 1906, 147. oldalával és RIEDL, Friedrich, *Die ungarische Literatur*, Die Kultur der Gegenwart, Teil 1, Abteilung IX, Die osteuropäischen Literaturen und die slawischen Sprachen, Berlin und Leipzig 1908, 289. oldalával.

4. o. 22—27. s. Farkas *Önéletrajzából*, Koncz, 280. o. A Magyar Tudós Társaság, a későbbi Magyar Tudományos Akadémia, Farkast 1832 márczius 9-én választotta meg tagjául. Ő a társaság szabályzatai szerint betérjesztendő életrajzi jelentését gróf TELEKI József elnök sürgetésére 1840 október 5-én küldte be. Ezt az önéletrajzt 1886-ban BRASSAI adta ki és 1887-ben Koncz újból kinyomatatta. Farkasra nézve jellemző a jelentésének bevezetése: «Miután a Társaság' többszöri rendelkezéseire is elhalogattam a biographia felküldését, az Excellentiád személyes parancsára ezennel megírom, a mi eszembe jut; hiányát mentheti az idő rövidsége, midőn a tegnap vett levél előtt mára gr. BETHLEN Ádám úrhoz ígérkezvén, a lovak bejöttek s ennek végzetével indulnom kell».

4. o. 12—6. s. al. Gergely följegyzéseit atyja életéről SZILY Kálmán adta ki; SZILY, 4. o.

4. o. 12. s. al. A *tűzériskola* alatt nyilván a cs. k. *Bombardier-Corps* értendő, mely 1786—1804 az előbb a cs. k. mérnök-akadémia által elfoglalt ob der laimgrubeni épületben volt elhelyezve, v. ö. GATTL, *Geschichte der k. und k. technischen Militär-Akademie*, Bd II. Wien 1905, 33—100. oldalával. 1787-től kezdve ott a matematika tanára báró VEGA Georg (1754—1802) volt, ki mint a 2. tábori tüzérezred hadnagya kezdte megírni sok új kiadást megért, ismeretes tankönyvét, *Vorlesungen über die Mathematik*. Ebből megjelent: Bd 1, *Elementare Arithmetik*, Wien 1782, Bd 2, *Theoretische und praktische Geometrie, Trigonometrie, höhere Geometrie, Infinitesimalrechnung*, Wien 1784, Bd 3, *Mechanik fester Körper*, Wien 1788. Kiegészítése ennek a műnek a szintén sok kiadást megért *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln*, Wien 1783.

4. o. 5—3. s. al. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 275. o.

Jegyzetek a II. fejezethez.

5. o. 6—7. s., 13—21. s. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz 275. o. FICHTE 1794 május havától 1799 tavaszáig tanított Jénában.

5. o. 22—26. s. János, *A XI. axióma bebizonyítása* bevezetéséből (1856).

6. o. 6. s. Hogy BODOR Pál BOLYAI Farkassal egyidőben tartózkodott Göttingában, azt SZABÓ Péter úr közléséből vettük.

6. o. 8—9. s. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 276. o.

6. o. 10—20. s. SEYFFERRE vonatkozólag I. STÄCKEL und ENGEL, *Th. d. P.* 213—215. oldalait.

6. o. 6. s. al.—7. o. 4. s. János, *A XI. axióma bebizonyítása* bevezetésében; v. ö. a szöveg 193. oldalával is.

7. o. 6—14. s. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 276. o.

7. o. 14—22. s. Farkasnak 1856 július hó 13-án SARTORIUS VON WALTERSHAUSENhez intézett leveléből, *B.-G. lev.*, 152. o.

7. o. 16—11. s. al. ESCHENBURG később a braunschweigi herceg titkára volt és mint kormánytanácsos halt meg Detmoldban. IDE, ép úgy, mint GAUSS, braunschweigi születésű volt és GAUSS már a Collegium Carolinumban ismerkedett meg vele; 1803-ban a matematika tanárának hívták meg Moszkvába; fájdalom, nemsokára áldozatul esett az orosz éghajlatnak. EICHHORN a porosz állam szolgálatába lépett és 1840—1848 közoktatásügyi miniszter volt. BRANDES először Oldenburg nagyhercegségben gátfelügyelő volt és később mint a matematika tanára tanított a boroszlói és lipcei egyetemeken; termékeny író volt, kinek nevét később GAUSS is tisztelettel említette.

7. o. 9—6. s. al. *B.-G. lev.*, 100. és 106. o.

7. o. 3. s. al.—8. o. 14. s. V. ö. *B.-G. lev.*, 186—187. oldalával.

8. o. 19—26. s. *B.-G. lev.*, 10—11. o.

8. o. 15—2. s. al. *B.-G. lev.*, 32. o. (az 1799 szeptember hó 11-én kelt levélből).

9. o. 1—9. s. Farkas *Önéletrajzából* (1840). Erre az ügyre vonatkozik az a levél is, melyet a fiatal báró KEMÉNY Simon 1799 január hó 30-án Kolozsvárról Farkas atyjának, BOLYAI Gáspárnak írt. E levél, melyet 1907-ben SZABÓ Péter adott ki, így hangzik:

Tekintetes Úr!

Az közelebről el mult esztendőnek Juniussában, Göttingából lett elindulásom alkalmatosságával az Úr fia Farkas az én javallásomból maradt hátra Göttingába; úgy hozván azt magokkal sok itt tovább ki nem magyarázható környül állások; oly tzállal hogy a közelebről el mult ősszel ő is le jűjjen. Midőn én Göttingából el indultam akkor az én erszénym olly környül állásokban volt, hogy tellyes lehetetlen volt akkor nekem, Farkasnak több pénzt hátra hagyni, mint a mennyivel az el mult Julius végéig meg érhethe.

Reméltem a még az el fogy addig küldhetek neki mégént annyit, hogy az el mult ősszel le is jühet, ezen reménységemben meg tsalatztam és mind eddig tellyességgel nem ejthettem módját hogy rajta segíthessek. Biztam abban is, hogy az Göttingai magyaroktól kaphat az én contomra annyi pénzt, hogy azzal le jühet ebben is meg tsalatztam nem kapot talám azoknak sem volt. talám nem akartak adni!... quid quid id sit e szerint Farkas igen rossz állapotban vagyon, ott az olta eladosodott 's segedelem nélkül nem tsak nem mozdúlhat, de ha nem siet az segítség utolsó szükségre is jut, melly annyival is terhesebb, mivel utolsó levelei szerint egészsége is bomlodozolog van. Én javasoltam volt Farkasnak a feljüvést én az ott maradást 's következésképpen nekem is volna kötelességem rajta segíteni. Ez igaz. De hát ha *nem lehet*? Betsületemre írhatom az Urnak, hogy az egész Pénzem melynek Ura vagyok 20 Rf-ból az az *husz* német forintokból áll és így én nem segíthetek. Az Atyáméktól sints mit remélni, mert talám nem is jó neven vették a mint veszem észre Göttingába való hátra maradását, de ha ez nem volna is el nem hinné az Ur ha szinte meg írhatnám is, mely szük légyen az Atyámék házánál a nagy joszág mellett is a pénz és így innét sints mit remélni. — Hogy költsön kaphassok azt is mindenütt el próbáltam suhult sem kaptam, ez az Urnak talám tsudálatosnak fog látszani, de még is úgy van én tudtam okait is de nem írhatom. *Lunge Limba Bouluj dá még is nu styi vorovi.**

Illyen rosszul álván az dolgok az következő modon Gondolom hogy lehetne segíteni Farkasan tudniillik adjon az Ur nekem 400 Rf-át az az *négy száz* német forintokat költsön, arra az tzelra hogy azokkal Farkast az sárból ki huzzam, leg fellyebb 2 azaz *két* esztendőre, meg fizetem az Urnak, addig is pedig per 6 pro cent az az *hatot száz után* interestezem. Abban pedig bizonyos lehet az Ur, hogy ebben hiba nem leszen betsületemre fogadom.

Könnyen el hiszem, hogy nintsen az Urnak annyi pénze, azt is el, hogy költsön sem kaphat az Ur, még is van mód segíteni ha akar az Ur, vann az Urnak joszága adjon el az Ur egy darabot belőlle annyit érot, az Urnak ollyas kára abban nem leszsz, mikor én a pénzt meg adom, akkor azzal azt visszaveheti, ha tetszik, még is fián is segít: velem is valóságos nagy jót téssen. Az pénzt akár az Ur maga fel küldje Farkasnak akár az én kezemben szolgáltatassa az nékem mindegy azzal az különbséggel, hogy ha az Ur az pénzt maga küldi fell és abban kár történik vagy egészszen is el vész minek előtte az Farkas kezében meg menne, úgy az kár az Uré lesz és én magamat adosnak tekinteni nem fogom; ha pedig az Ur az pénzt az én kezembe szolgáltatja, úgy minden abban, annak nekem lett által adattatása után történhető akárminémű kár euyim leszen. Az pénz felküldésének ceterum az modja ez hogy ha az Ur azt maga akarja fell küldeni. Az pénzt bé kell vinni Szebenben az Bánkóban és azt oda bé kell számlálni a helylyett ott adnak egy quietantiát annyi pénzről szollott a mennyi bé számlál-

* Románul: Hosszú a marha nyelve, még se tud beszélni.

tatik az Bánkoban eztet egy missilis levélben zárván el küldi az Ur Bétsben valami bizonyos emberének, ez avval a quietántiával el menyen az Bétsi Bánkoban, ott az quietántia helyett leg ottan éppen annyi pénzt adnak a mennyit az Ur Szebenben bé tett és a mennyiről szoll az ott adatott quietántia. Azt az pénzt aztán az Ur Bétsi Correspondense el viszi egy oda valo SCHEIDLING nevű nagykereskedőhöz ez ád rolla egy kis tzédulát melyben egy Göttingai ALBERTI nevű kereskedőt arra utasít hogy az szoba forgo pénzt tudniilik a mennyit SCHEIDLINGNÁL bé tettek Farkasnak fizesse ki. Ezen tzédulát egy missilis levélben zárván az a ki az pénzt SCHEIDLINGHOZ bé tette, el küldi Farkasnak Göttingában, ő pedig azt vévén el menyen velle az szoba forgo ALBERTIHOZ ALBERTI pedig azt látván leg ottan ki fizeti az írt pénzt, de nem egészen hanem el huz belőlle százból ötöt (néemelykor hatot is). Ez az pénz fel küldésének az modja melyet szükségesnek tartottam az Urnak megírni arra az esetre hogy ha maga akarja azt fel küldeni.

Ha pedig réam akarja bizni és az pénz- mindjárt készen volna ugy adja által aztat bátran ezen levél meg vivőjének. Az abban neki lett által adattatása után történhető akár minemű kár enyim lészen. Ha pedig az pénz most készen nem volna ugy quanto otius szolgáltatassa az Ur aztat bizonyos embere által kezében Gubernialis Cancellista Bodor Pál Urnak Kolosvárra; A ki is lakik Kolosvárt, az belső közép uttzában, a mint az ember az közép kapun bé menyen a jobb kéz felől valo soron, a kaputól számlálván az negyedik háznál (belé nem számlálván mindazáltal az város falához ragasztott kis házikot.* Az hátulso szobában, (az egész telken tsak két szoba van és az ház tsak egy contignatio). Ennek pedig bátran oda lehet adni az pénzt, minden abban az neki lett által adattatás után történhető akármi némű kár is enyém lévén. Most válaszoljon az Ur sine omni mora ezen expressustol, mivel az éppen nem várakozhatik, ezután pedig ebben az dologban irando leveleit vékony papirosra írván és vékonyan bé petsételvén, tsináljon fellyül rájok egy más kopertát és azt titulálja az szoban forgo Bodor Pálnak ott az Postán Kolosvárra utasítván, így prompte és secure veszem leveleit, ha pedig tsak ugy az én Copertám alatt jűnek ugy bizonyosan el tévelyednek, mert az én mostani lakásom mindennap másunt van. Én pedig az Urnak ezután irando leveleimet az Szebeni postára dirigálom tegyen rendelést hogy vehesse. — Ha talám tsudálatosnak és helytelennek látszik kéréssem ugy képzelje az Ur az fiát és olyan fiát hazájától 200 mérföldnyire pénz nélkül, el adosodva, Creditum nélkül, és hogy az kép egész légyen betegesen, 's reméllem el tünik tsudálatossága, 's mindent

* V. ö. *B.-G. lev.*, 44. oldalával (az 1802 november hó 11-én kelt levéllel), hol Farkas kolozsvári címét így jelöli meg: Bodor Pál urnál a belső közép Utzában. E levélnek ez a helye szolgált kiindulópontjául SCHLESINGER Lajos ama kutatásainak, melyek 1902-ben BOLYAI János szülőházának megállapítására vezettek. V. ö. SCHLESINGER jelentésével: *BOLYAI János szülőházáról*, *Math. és Phys. Lapok*, 12. k. (1902), 53. o.

el fog az Ur követni, hogy kérésem be tellyesíttse; ha tsak az Ur is ama sok jo szívü emberek táborához nem tartozik, akik sajnálják az embert de egy ujjokat sem mozdítják hogy segítsenek, mikor pedig meg van az szerentsétlenség akkor aztán mint a vén szipák fél seculumig mint beszéllek hogy be kár hogy ugy történt. Denique már az Ur lássa... Én meg tettem meg tészek ezután is ebben is mint minden más dolgokban mindent a mit megtehetek és kötelességemnek lenni által láthatak, s ezzel az tudással kevésly tsendességgel várom az dolgok ki menetelét.

Kolosvár 30-dik Januarri 1799

köteles szolgálja

B. Kemény Simon, mpr.

P. S. Még sub dato Béts 9-ik Augusti 1798 irtam volt az Urnak egy levelet azt Szebenben igazítván mely mellé zárva ment egy az Urnak szollo Farkastol jövő levél is, eztet eddig perse kellett az Urnak venni ugyantsak ha nem vette volna keresse a Szebeni postán prestat sero quam nunquam.

Ez az egész levél pedig mindenestől fogva ollyan bizonyosan titokban marad, a millyen bizonyos az hogy az Ur betsületes ember.

Ceterum mihelyt az pénzt magam vagy az szoban forgo Bodor által vehetem mindjárt küldek rolla az Urnak kötelező írást.

9. o. 12—6. s. al. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 276. o.

Հայտնի a II. fejezethez.

10. o. 1 s. al. 11. o. 7. s. és 11. o. 16 —13. s. al. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 277. o.

10. o. 12—6. s. al. *B.-G. lev.*, 39. o.

10. o. 3. s. al.—11. o. 7. s. BEDŐHÁZI, 59. és 58. o.

11. o. 8—12. s. Bodor László, kolozsvári ítélőtáblai bíró birtokában van egy tekeres, mely Farkasnak az 1815—1826-ig terjedő időből való, Bodor Pálhoz intézett 35 levelét tartalmazza. E levelek kivonatát SCHLESINGER a *Mathematikai és Physikai Lapokban* 11. k. (1902), 187—230. o. hozta nyilvánosságra és később néhány fontosabb helyet belőlük *Neue Beiträge zur Biographie von Wolfgang und Johann Bolyai* czímmel német fordításban is adott ki, *Bibliotheca math.* (3) 4 (1903), 260—270. o.

12. o. 14—20. s. János, *A XI. axióma bebizonyítása* bevezetéséből (1856).

12. o. 21—22. s. Koncz, 303. o.

12. o. 16—13. s. al. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 278. o.

12. o. 12—7. s. al. *B.-G. lev.*, 39—40. o.

12. o. 3—i. s. al. Farkas *Önéletrajzából* (1840), Koncz, 578. o.

13. o. 1—3. s. E házat, mely 1903 január hó 15-ike óta emléktáblával van megjelölve, SCHLESINGER Lajos puhatolta ki; v. ö. a szöveg 199. oldalával és a hozzátartozó jegyzettel, valamint a 211. old. vonal alatti jegyzetével.

13. o. 3—6. s. és 10—11. s. *B.-G. lev.*, 49. és 57. o.

13. o. 6—10. s. SCHLESINGER Lajos, BOLYAI János, a kolozsvári Ferencz József m. kir. Tudomány-Egyetem Bolyai-ünnepén 1903 jan. 15. mondott emlékbeszéd, *Mathematikai és Physikai Lapok*, 11. k. (1903), 57—88. o.; v. ö. főleg ennek 59. oldalával

13. o. 13—14. s. *B.-G. lev.* 43. o.

13. o. 18—19. s. *B.-G. lev.*, 65. o.

13. o. 3—1. s. al. V. ö. a szöveg 58. oldalával.

Jegyzetek a IV. fejezethez.

14. o. 11—19. s. *B.-G. lev.*, 57. o.

14. o. 11—12. s. Koncz a collegium előjáróságának BOLYAIHOZ intézett meghívó leveléből a következő részletet közli: „... ezen vásárhelyi reformatum Collegiumban a mathesist, physikát és chemiát tanító, mostan pedig vacantiában levő professori hivatalra BOLYAI Farkas resolváltatott. Ezennel azon hivatal elfogadására és ezután leendő folytatása végett az ur hivatalosan és örömmel meg is hivatik, addig is pedig ezen levél vételével ne késsék az ur bizonyos dolgokról való beszélgetés végett ide M.-Vásárhelyre eljöni». Koncz 271. o.

14. o. 11—9. s. al. SZABÓ Péter úr szívesességéből közölhetjük itt HEREPEI Ádámnak azt a levelét, melyet ő Farkashoz marosvásárhelyi be-
köszöntése után intézett.

Nagy-Enyed. 1804. november.

Barátom!

Ez alatt a titulus alatt vettem leveledet, ezt a titulust meg is kívánom tartani végiglen. Az orátiót el olvastam. Hogy nem sokan értették, két okból nem tsudállom: 1^o nem minden tud gondolni. 2^o az orátor is hihetősön hamar mondhatta a ki tételeket, a mellyeket hamar nem minden érthet. Azt is hozzá adhatom még, hogy mikor másodszor dolgoznád ki te magad, inkább öszve foglalnád imitt, amott, a gondolatokat és úgy hamarább el érnék sokan a gondolatokat. Denique már tsak a tanítást értsék a tanítványok, és épületet vegyenek, a kell. Ezt én reménlem a te elmédttől, és szivemből is kívánom.

Arra pedig tsak azt ajánlanám, hogy egy bizonyos, és könnyen érthető mánuálist (Leit-pfaden) végy fel, akár kié legyen. Azon kívül, a ki sokat tud, sokat akarna. hogy tudjanak a tanítványi, és sokszor meg esik, hogy a capacitásokon tul ragadtatik, és ők innen maradnak. Illyen ajánlást h[ogy] tegyek néked, nagy helyről vettem, a ki szint' ugy akarná a szerencsés és éminens successust mint én.

Tudosításodat ollykor ki kérem. Kedvesseidet szivesen köszöntöm, és vagyok szeretettel

kedves Barátom

igaz Barátod

N. Enyeden 8^a Nov. 1804.

Herepei Ádám s. k

Kívül : Monsieur

Monsieur Volfgangue de Bollyai, Professeur en
Physique et Mathematiques,

á M. Vásárhelly

14. o. 1. s. al.—15. o. 7. s. V. ö. KONCZ József művével, *A marosvásárhelyi evang. reform. kollegium története*, mely a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium 1883—1888. és 1894—1896. évi értesítőiben megjelent.

15. o. 18—15. s. al. és 8—5. s. al. *B.-G. lev.* 101. és 58. o.

15. o. 2. s. al. Ez a jegyzék SZABÓ Péter tanár úr birtokában van.

16. o. 11—14. s. Részletesebbet e tárgyról találhat az olvasó a VI. fejezetben, 43—45. o.

16. o. 16—19. s. Farkas *Önéletrajzából* (1840), KONCZ, 278. o.

16. o. 21—27. s. *B.-G. lev.* 86. o.

16. o. 1. s. al.—17. o. 4. s. KONCZ, 301. o.

17. o. 9—24. s. KONT, I., *Geschichte der ungarischen Literatur*, Leipzig 1906, 146. o.; v. ö. egyszersmind RIEDL a 4. o. 9—12. soraihoz tartozó jegyzetben idézett könyvének 286—287. oldalával.

17. o. 24—33. s. IMRE Sándor, *A nyelvújítás története*, A magyar irodalom története, szerkesztette BEÖTHY Zsolt, II. k. 188. o.

17. o. 2. s. al.—18. o. 7. s. A *Tentamen* magyar nyelvű toldalékából, *Tentamen*, T. I., V. o., Editio secunda, T. II. 405. o.

18. o. 10. s.—19. o. 12. s. *Tentamen* T. I. IV—V. o., Editio secunda, T. II. 404—405. o.

19. o. 20—18. s. al. *B.-G. lev.* 40. o.

19. o. 13—12. s. al. Farkasnak SARTORIUS VON WALTERSHAUSENHOZ intézett leveléből, *B.-G. lev.* 153. o.

19. o. 11—5. s. al, V. ö. a 4. o. 9—12. soraihoz tartozó jegyzettel.

20. o. 18—1. s. al. Erdélyi Múzeum, 10. füzet, kiadta DÖBRENTEI Gábor, Pest (1818).

21. o. 22. s. *B.-G. lev.* 155. o.

21. o. 18—8. s. al. A fapoharat az elégett írások hamvával a marosvásárhelyi ref. kollegium könyvtárában őrzik.

21. o. 6. s. al.—22. o. 22. s. BEDŐHÁZI 105—107. és 141. o.

22. o. 6—7. s. SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN, *GAUSS zum Gedächtnis*, Leipzig 1856, 17. o.

22. o. 14—11. s. al. BEDŐHÁZI, 276. o.

22. o. 9. s. al.—23. o. 11. s. SZILY, 9—10. o. Farkas hagyatékában van egy sűrűn írt, 5½ ívre terjedő, a zenére vonatkozó kézirat, mely a Mathematikai és Physikai Lapokban, 22. k. (1913), 401—426. o. ki van nyomtatva.

23. o. 20—22. s. Farkas kemencze-szerkezetei közül néhányat leírt. Farkas hajdani tanítványa, HORVÁTH Farkas: *A szobafűtés elmélete*, Magyar Mérnök és Építészegylet Közlönye, 1875. évf. 405. o., v. ö. BEDŐHÁZI 322. oldalával és SCHLESINGER szemelvé. 206. oldalával.

23. o. 16—8. s. al. KONCZ, 313. o.

23. o. 7. s. al.—24. o. 8. s. KONCZ, 298. o., BEDŐHÁZI, 76. o., SZILY, 6. o. és SCHLESINGER szemelv. 217. o. adatain kívül felhasználtam még azokat az adatokat is, melyeket SZABÓ Péter tanár úr szives közlésének köszönök.

24. o. 6. s. al.—25. o. 8. s. BEDŐHÁZI 333—334. o. BEDŐHÁZINAK ez a könyve Farkasnak három képmását tartalmazza; mint czímképet annak a fényképnek reprodukcióját, mely Farkast halotti ágyán ábrázolja, a 32. o. mellett a már a 4. o. 3—6. soraihoz tartozó jegyzetben említett önarcképet és a 272. o. mellett annak az olajfestményének reprodukcióját, melyet SZABÓ János marosvásárhelyi festő készített, mikor Farkas 50 éves volt (1835); ez a kép később Farkas Gergely nevű fiának birtokába ment át, v. ö. BEDŐHÁZI 333. oldalával. Az utóbbi kép javított másolata a Magyar Tudományos Akadémia birtokában van és reprodukciója díszíti a *Tentamen* új kiadásának első kötetét (1897). Végül 1825-ben báró KEMÉNY Simon is festette meg ifjúkori barátjának arcképét; ez a kép 1897-ben báró KEMÉNY Kálmán birtokában Vécsén volt (BEDŐHÁZI 333. o.), de jelenlegi hol-tétéről, fájdalom, semmit sem lehetett megtudni.

Jegyzetek az V. fejezethez.

26. o. 8—6. s. al. A *Tentamen* előszavában, Ed. sec., T. I. 3. o. (magyarra lefordítva) Farkas a következőt mondja: «Alig az elemek első kezdeteivel megismerkedvén, saját jószántamból, minden más cél nélkül azon kívül, hogy az igazság utáni belső szomjúságtól vezéreltetve, magát a forrást keressem, mint szakáltalan ifjú vetettem meg alapját ennek a *Tentamennek*.»

26. o. 4. s. al.—27. o. 2. s. KONCZ, 284. o.

29. o. 21—13. s. al. BEDŐHÁZI, 267. o.

29. o. 10. s. al.—30. o. 2. s. *B.-G. lev.* 115., 116. és 117. o.

30. o. 3—22. s. *B.-G. lev.* 123. o.

30. o. 8—9. s. Szopori NAGY Károly (1797—1868) csillagászati tanulmányokat végzett és assistense volt a bécsi csillagdnak. Hosszabb külföldi tartózkodás után visszatért hazájába és a Fehérmegyei Bicskén csillagdnát épített magának, melyet 1848-ban az államnak ajándékozott. 1832 óta tagja volt az Akadémiának. Matematikai művei: *Elemi arithmologia*. Arithmographia. Első rész. Arithmetika. Számírás különös jegyekkel. II. rész. Elemi algebra. Számírás közönséges jegyekkel. Bécs 1835—1837. Ennek a munkának az első része az, melyet az Akadémia a 200 arany nagy jutalomban részesített. *A kis számító*. Magyar gyermek kézikönyve. Bécs 1837. *A kis geometra*. A terjedtség tudomány alapvonalai. Bécs 1838.

30. o. 18—11. s. al. *B.-G. lev.* 127. o.

30. o. 10. s. al. MENTOVICH Ferenczre vonatkozólag l. a szöveg 132. oldalát.

30. o. 8. s. al.—31. o. 2. s. MENTOVICH Ferencz, *Naplótöredékek IV.*,

Nemzeti Társalkodó 1844. évi augusztus 30-iki száma, újból kiadta KÖRSCHÁK József, Mathematikai és Physikai Lapok, 11. k. (1902), 90. old.

31. o. 2—5. s. A BOLYAI névről GERLING már 1832-ben értesült GAUSS-tól, mikor ez neki néhány sorban János *Appendixéről* írt (v. ö. e rész 70—71. oldalával). Később Göttingában GAUSS-nál BOLYAI egyik könyvét látta, melyet GAUSS érdekesnek mondott. (GAUSShoz 1843 december 18/21-én intézett levele, GAUSS Werke, Bd VIII, 234. o.). Mikor később néhány marosvásárhelyi ösztöndíjas deák Marburgba érkezett, egyiküket fölkerlte, hogy szerezze meg neki az apa és fiú könyveit, de ez megfedkezett róla. Miután GERLING hiába próbálta, hogy e könyvek címeit megtudja, 1843 december 18. 21-én GAUSS-tól kért róluk tudósítást. GAUSS 1844 február 4-én teljesítette kérését (Werke, Bd VIII., 235. o.) és közölte vele a teljes címeiket. Úgy látszik, hogy GERLING a könyvek ügyében később magához Farkashoz fordult, mert BEDŐHÁZI szerint ez 1853-ban elküldte neki a *Tentamen* egy példányát. GERLING először rövid levélben fejezte ki köszönetét és másfél év múlva hosszabb levelet írt Farkasnak. E levélben, mely 1854 október 31-éről kelt, írja:

„Régebbi a párhuzamosak elméletével való foglalkozásomat nem említtem, mert már az 1810—1812. években GAUSS-nál és még előbb, 1809-ben PFAFF-nál tanultam belátni, hogy az EUKLIDES-féle axióma bebizonyítására irányuló minden eddigi kísérlet kudarcot vallott. Azután előleges tudomásomra jutottak az ön dolgozatai is, és így már 1820-ban, mikor először az e dologra vonatkozó nézeteimből valamit kinyomtattam, ezt pontosan ép úgy írtam meg, a mint a legújabb kiadás 187. oldalán olvasható.»

GERLING itt a LORENZ-féle *Grundriß der Mathematik* cz. könyvet, érti, melyet ő 1820-ban kiadott; a levélben említett legújabb kiadás 1851-ben jelent meg; v. ö. GAUSS, Werke, Bd VIII. (1900), 178—179. oldalával, hol a *Grundriß* illető helye ki is van nyomtatva.

„Körülbelül ugyanakkor [1819] volt itt egy jogtanárunk, SCHWEIKART, ki hajdan Charkovban volt és hasonló eszmékre jutott, mert EUKLIDES axiómája nélkül fejtette ki egy geometria alapjait, a melyet ő *astralgeometriának* nevezett. A mit közölt velem belőle, azt elküldtem GAUSS-nak, ki arról értesített engem, hogy már mennyivel jutottak előre ezen az úton és később arról a nagy haszonról is nyilatkozott, a melyet az ön könyvének *Appendix-e* a kevés szakértőnek nyújt.»

SCHWEIKART-ra vonatkozólag l. STÄCKEL und ENGEL *Th. d. P.* 243—246. oldalait, valamint GAUSS, Werke, Bd VIII (1900), 180—182. oldalait, GAUSS-nak levelére vonatkozólag pedig, melyben GERLING-nek BOLYAI János *Appendixéről* írt l. e könyv első részének 70—71. oldalait és GAUSS, Werke, Bd. VIII (1900), 220. oldalát.

GERLING levelét Farkas elküldte Jánosnak, ki 1855 január 20-án körülbelül így nyilatkozik róla: „Nem kételkedem benne, hogy GERLING divatos tudós és talán némi érzéke is van a mi szellemi irányunk dolgai iránt (a minek azonban alig látom jelét az ő levelében). Mindenesetre azon-

ban becsülöm a jóra irányított tőle telhető törekvését és örülök neki, ha a mi művünköl csak egy szikra is pattant át az ő lelkébe; egyáltalában minden becsületes embert becsülök érdeme szerint. ETTINGSHAUSENT is becsülöm, mint nagyérdemű és előkelő férfit, habár annyira szerencsétlen, elvakult és elfogult, hogy bennünket nem tud méltatni.» Az utóbbi szavak magyarázatául szolgáljon, hogy a *Tentament* mindjárt megjelenése után elküldték ETTINGSHAUSENNEK is, a ki arról merőben elitőlőleg nyilatkozott. ETTINGSHAUSEN ítéletére vonatkozik János hátrahagyott följegyzéseinek még több helye is. (V. ö. a 71. o. 20—22. soraihoz tartozó jegyzettel.)

32. o. 16. s. HAMILTON, W. R., *Preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 17, Dublin 1837, 299—392. o. (read. Nov. 4 1833). KANTnak az időről szóló tanára vonatkozólag l. WALLENBERG G., *KANTS Zeitlehre*, Wissenschaftliche Beilage zum Programm der neunten Realschule, Berlin 1896, valamint Voss, A., *Über das Wesen der Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1913, 33. o.

32. o. 5—1. s. al. HANKEL, H., *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig 1867.

33. o. 7—20. s. *Tentamen*, Editio secunda, T. II, LVII. o.

33. o. 17—3. s. al. *Tentamen*, Editio secunda, T. I, 121. o.

34. o. 4. s. L. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band I, 11. oldalát, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome I, vol. 1, 25. oldalát, valamint Voss, A., *Über das Wesen der Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1913, 33. és 37. oldalait.

35. o. 2. s. al.—36. o. 2. s. CANTOR, G., *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Annalen, Bd 21 (1883), 575. o.; v. ö. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd I, Teil 1, 201. oldalával is.

36. o. 11—14. s. Hogy miképen ítélték meg a *Tentament* még 1886-ban is, azt mutatják BRASSAI fejtegetései a BOLYAI Farkas feletti emlékbeszédében.

«A *Tentamen* egy bámulatos encyclopædiája — nem, hanem codex az elméleti mathesisnek, egy tömör, szilárd épület, mely széles és biztos alapra van fektetve és a melynek minden darabja oly szorosan van egymáshoz illesztve, hogy egy téglát is belőle elvenni, vagy egyet is hozzátenni az épület biztonsága és symmetriája csökkentése nélkül nem lehet, szóval alkalmazva megtestesült philosophiája a mathesisnek, a mely a maga nemében egyetlen egy... Az előadott tanok, theoreémák és problémák között kevés van, a melyet ő nem bírna kevésbbé új oldaláról mutatni be, úgy hogy munkája a szakértő és a tudományban jártas férfiaknak is érdekes olvasmányul kínálkozik...»

«A kész tudós pedig az ilyen könyvben kettőt keres: 1. Új fogásokat, melyek az eddigelé oldatlan problémákat megoldják, vagy a megoldás bajos és hosszadalmas eljárásait egyszerűsíték. 2. A tudomány terén e mai napig függőben maradt egy vagy több kérdés mindeneget kielégítő eldöntését. Ily

ügyek a) A negatív mennyiségeké és mekkoráságoké, melyeket a rólok írt, mondhatni könyvtár sem hozott tisztába. Azt a követ, melyet CARNOT gördített az útbá, még senki sem morzsolta teljesen el. B. F. egyfelől a pozitívét és negatívét az addendustól és subtrahendustól nem csak fogalmilag, de symbolice is megkülönbözteti; DUMAS a negatív szám abszolút fogalmát képtelennek állítja. Az ügyet egyik sem végezte be, mert ime a tanár és akadémista, KÖNIG Gy. nem régiben kiadott algebrájában néhány lapot tölt be az ellentétes mennyiségek fogalma fejtegetésére. b) Az imaginaria quantitasok elmélete CAUCHY, KERÉKES, BOLYAI F. fejtegetései s GAUSS «keresztbeálló» (transversalis) műszava után is, melylyel ő a mathesisi bogot, mint ALEXANDER a gordiusit elvágottknak vélte, ma is oldatlan. c) Annak az állításnak, mely szerint a numericus egyenletnek annyi számú gyöke van, a hányadik a foka, minden újabb bizonyítása egészen a RIEMANN'sche Flächeig csak azt tanusítja, hogy a korábbiakkal nincs teljesen megelégedve a mathematicus világ. d) A differentiale igazi mivoltát sem magyarázta ki sem NEWTON fluxiója, sem LEIBNIZ véghetetlen kicsinye, sem az EULER «semmi és mégis valami»-je, sem LAGRANGE derivatumai, sem a születő vagy az enyésző arány, sem a határ eszméje. e) Végre az egykőzüek elmélete sincs mai napig is tisztába hozva.»

«Már pedig a két rovatbeli fennforgó vagy függő kérdésekre vár felvilágosításokat vagy épen a vita eldöntését a tudós világ; de a Tentamen az elsőbeliekre keveset, a másodbeliekre semmit sem nyújt.»

Jegyzetek a VI. fejezethez.

37. o. 7—10. s. B.-G. lev. 96. o.

37. o. 9. s. al.—38. o. 1. L. e könyv második részének 29. oldalát.

38. o. 9. s. ÜBERWEG, Friedrich, *Die Prinzipien der Geometrie*, wissenschaftlich dargestellt, Archiv für Philologie und Pädagogik, Bd 17 (1851); ennek az értekezésnek francia fordítását mellékelte DELBOEUF *Prolegomènes philosophiques de la géométrie*, Liège 1860 cz. művéhez. V. ö. KILLING, W., *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd 2, Paderborn 1898. 204. és 358. oldalaival. Überweg előhírnöke, a kit ő idéz is, ERB, K. A., *Zur Mathematik und Logik, Vorspiele zu ihrer Erweiterung und Begründung*, Erste Lieferung, Heidelberg 1821. — HELMHOLTZ, H. *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Verhandlungen des naturhist.-mediz. Vereins in Heidelberg, IV, (1868). 197—202. o., V, (1869). 31—32. o.; *Über die Tatsachen, die der Geometrie zu grunde liegen*, Göttinger Nachrichten, 1868; *Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze*, mely értekezés angol fordításban 1879-ben a Mindben jelent meg. Mind a három értekezés újra van kinyomtatva a *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd 2, Leipzig 1883, 610—660. oldalain. V. ö. ezekkel KOENIGSBERGER, L. művét, Hermann v. Helmholtz's *Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und*

Mechanik, Leipzig 1896. valamint KILLING, W., *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd 2, Paderborn 1898, 329. és 361. oldalait.

HELMHOLTZ és BOLYAI Farkas vizsgálatainak hasonlatosságára már SUTÁK József mutatott rá BOLYAI János *Appendix* 1907-ben készített magyar fordításának bevezetésében, XIV—XVI. o.

39. o. 8—6. s. al. EUKLIDÉS elkerüli a mozgás alkalmazását és csak az első kongruencia-tétel (I. könyv, 4) és megfordításának (I. 8) bebizonyításában használja.

39. o. 17—20. s. Már LEIBNIZnél találjuk ennek az iránynak kezdeteit, I. *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. J. GERHARDT, Bd 5, 183. oldalát; v. ö. egyszersmind SIMON, Max, *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, 20. oldalával. Továbbá még felemlítendő FOURIER. *Séances des écoles normales*, II^e partie, débats, t. 1 (1795), 28. o. A XIX. század szerzői közül csak a következőket említjük: GRASHOF, C. A., *Theses sphaerologiae, quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem*, Berlin 1806 és ugyanannak a szerzőnek értekezését, *Über die ersten Begriffe der Geometrie*, Programm des Karmeliter-Gymnasiums, Cöln 1826, továbbá LOBATSCHESKY geometriai értekezéseit, melyek német fordítását ENGEL adta ki, Leipzig 1898, és végül PIERI, M. nagy dolgozatát, *La geometria elementare istituita sulle nozione di «punto» e «sfera»*, *Memorie di matematica e fisica della Società Italiana delle scienze* (detta dei XL), (3) 15 (1908), 345—450. o. E törekvések kritikájára vonatkozólag I. KILLING, W., *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd 2, Paderborn 1898, 7. szakaszát, különösen 180. oldalát.

39. o. 23. s. HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie*, Göttingen 1899, 4. Auflage, Leipzig 1913; PASCH, M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882, 2. Auflage 1912; PEANO, *Sui fondamenti della geometria*, *Rivista di Matematica*, 4 (1894), 51—90. o.; SCHUB, F., *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909.

39. o. 1. s. al.—40. o. 5. s. RÉTHY Mór. *Végyszerűen egyenlő területekről*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* XI. k. (1892 3) 103—114. o. *Endlich gleiche Flächen*, *Mathematische Annalen*, Bd 38 (1891), 405. o.; *Végyszerűen egyenlő területek*, *Mathematikai és Fizikai Lapok*, 2 (1893), 1—16., 118—129., 241—253. o.; *A végyszerű egyenlőség föltételének bebizonyításához*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* XII. k. (1893 4) 279—280. o.; *Zum Beweise des Hauptsatzes über die Endlichgleichheit*, *Mathematische Annalen*, Bd 45 (1894), 471. o.; I. egyszersmind DOBBINER, H., *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Réthy über endlich gleiche Flächen*, *Mathematische Annalen*, Bd 42 (1893), 275. o.; *Der Satz: «Congruentes von Congruentem gibt Gleiches» in seiner Anwendung auf ebene Flächen*, u. o. 285. o. A végyszerűen egyenlő felületek és térszerek irodalmára vonatkozó további adatokat tartalmaz BONOLA, R. érteke-

zése, *Index operum ad geometriam absolutam spectantium*, Libellus etc., Claudiopoli 1902, 129—130. o.

40. o. 14—28. s. SIMON, Max, *Euklid und die sechs planimetrischen Bücher*. Leipzig 1901, 34. o.

40. o. 10—9. s. al. L. pl. ezeket: STÄCKEL und ENGEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895; BOXOLA und LIEBMANN, *Die nichteuklidische Geometrie*, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, Leipzig 1908; ENRIQUES, F., *Principien der Geometrie*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III, Teilband 1, Heft 1, (1907).

41. o. 2. s. SCHWEIKART, F. K., *Die Theorie der Parallellinien*, Jena und Leipzig 1807, 6. o.

41. o. 5. s. KLÜGEL, G. S., *Conatuum praeceptionum theoriæ parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent* Abrah. Gotthelf KAESTNER et auctor respondens Georgius Simon KLÜGEL, Göttinga 1763; v. ö. STÄCKEL und ENGEL, *Th. d. P.* 140. oldalával.

41. o. 15. s. al.—42. o. 14. s. B.-G. lev. 36—37. o.

42. o. 16. s. SACCHERI, G., *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ geometriæ principia*, Mediolani 1790. Ennek az első a párhuzamosak elméletére vonatkozó könyvnek német fordítása található STÄCKEL und ENGEL *Th. d. P.* 41—136. oldalain. — LAMBERT J. H., *Theorie der Parallellinien* (aufgesetzt im Sept. 1766), *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, Bd 1 (1786), újra kinyomtatva STÄCKEL und ENGEL *Th. d. P.* 152—208. oldalain.

SEGRE, C. értekezésében, *Congetture intorno alla influenza di Girolamo SACCHERI sulle formazioni della geometria non-euclidea*, *Atti della academia delle scienze di Torino*, t. 38 (1903), 535—546. o., azt a sejtését fejezi ki, hogy BOLYAI Farkas talán göttingai tartózkodása alatt elolvasta SACCHERI művét, vagy legalább hallott róla, később pedig SACCHERI gondolatairól talán beszélt fiának, úgy hogy ily módon SACCHERINEK legalább is közvetve befolyása lett volna az abszolút geometriának János által való fölfedezésére. E sejtelmének támogatására SEGRE, mint ő maga megengedi, pozitív okokat nem tudott fölhozni, hanem inkább szükségesnek tartotta, hogy ezt a kérdést pontosabban tanulmányozzák. Mint a VI. és X. fejezet mutatják e pontosabb tanulmányozás eredménye merőben negatívnek mutatkozott; Jánosra vonatkozólag l. a 42. o. 23—24. soraihoz tartozó jegyzeteit.

42. o. 18—22. s. Hogy GAUSS tanítványai körében LAMBERT értekezését ismerték, mutatja BESSELNEK ENCKEHEZ 1821 július hó 9-én intézett levele, mely most a berlini tud. akadémia birtokában van. E levélből a következő helyet közöljük: «Gothában beszélt ön nekem valamit LAMBERTNEK egy a parallelákra vonatkozó értekezéséről; elfelejtettem, hogy ez hol található és minden fáradozásom daczára sem tudom fölfedezni. Nagy szívességet tanúsít-

tana irántam, ha róla közelebbit közölne velem, mert ez a tárgy kezd engem nagyon érdekelni. Semmi esetre se felejtse el, hogy erre nekem válaszoljon.» ENCKE 1821 október 23-án írt válaszában megadja a kért értesítést. Miután GAUSS 1829 január hó 27-én BESSELhez intézett levelében a geometria alapjaira vonatkozó vizsgálataira célzott, BESSEL 1829 február 10-én így válaszolt neki (GAUSS, Werke, Bd VIII, 201. o.): «Annak alapján, a mit LAMBERT mondott és a mit SCHWEIKART élő szóval közölt velem, tisztába jöttem avval, hogy a mi geometriánk nem tökéletes és olyan igazításra szorul, mely hypothetikus és eltűnik, ha a háromszög szögeinek összege $=180^\circ$. GAUSS erre örömet fejezte ki a felett, hogy BESSEL oly könnyen fogta fel az ő nézeteit a geometriáról (1830 április 9-én kelt levél, Werke, Bd VIII, 201. o.). «különösen mert olyan kevesen vannak, kiknek erre fogékonyságuk van.» LAMBERTRE és SCHWEIKARTRA nem tér reá határozottan; SCHWEIKART eszméit ismerte, mert 1819 január havában GERLING közvetítésével az akkor Marburgban, később Königsbergben tanárkodó SCHWEIKART-tól egy jegyzetet kapott, melyben ez a szóban forgó tárgyra vonatkozó eszméit röviden kifejti (Werke, Bd VIII, 180. o.). Különben GAUSS birtokában volt LEHMANN, J. W. H., *Mathematische Abhandlungen betreffend die Begründung und Bearbeitung verschiedener mathematischen Theorien* cz. művének, a melyben említés történik SACCHERIRŐL és LAMBERTRŐL; l. még STÄCKEL P., *Franz Adolph Taurinus, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Heft IX (1899), 423–427. o.

42. o. 23–24. Hogy János mit ismert a párhuzamosak elméletének történetéből, azt leírta a *Tér tudománya* bevezetésében (1834 körül); kétségtelen, hogy e téren Farkas ismeretei sem mentek túl a fiáóin. János fejtegetése olyan fontos, hogy azt szó szerint közlendőnek tartjuk.

«Az itt következő tudományág, legalább a mennyire az alapfogalmak és a sík és egyenes alaptulajdonságainak kizárásával a háromszögek és más idomok kiszámítására vonatkozik, alapvonalaiban már az 1831. év elején latin nyelven jelent meg és néhány kevés önállónak meghagyott és részben ilyen alakban szétküldött példány kivételével a csak az 1833. év vége felé megjelent *Tentamen juventutem studiosam* etc. Maros Vásárhelyini 1832 czímű mű első kötetéhez fűzetett hozzá; jelen tárgyalása sok javítást és igen lényeges, fölötte fontos pótlásokat tartalmaz; minden megtörtént, hogy a legnagyobb tökéletességet lehetőleg megközelítse. Ha azonban képes valaki valamit még javítani rajta, ez majd nekem ép olyan örömet okoz, mint neki. Ennek az elméletnek főeredményeire már több mint 10 évvel ezelőtt jutottam. Különben helyén levőnek látszik itt néhány e tárgyra vonatkozó történeti megjegyzés azok számára, kik ennek a materiának régi tárgyalásával meg akarnának ismerkedni, hogy képesek legyenek arra a helyes álláspontra helyezkedni, a melyről az itteni újat a már meglevőtől pontosan megkülönböztethessék. Csodálatos, hogy a részben igen jeles férfiak nagy sokaságából, mint pl. LEGENDRE, maga EUKLIDES, ARCHIMEDES, egyik sem találta meg e kincstár kulcsát — habár a legnagyobb buzgósággal kutattak utána. [Hézag a kéziratban]... még

a CLAVIUSÉI vagy tulajdonképen eredetileg az arabs NASSIR-EDDINÉI sem, a ki három tételt vett föl, stb., a melyek elmésen megváltoztatva báró HAUSER *Anfangsgründe der Mathematik* [1. Teil, Wien 1778] czímű könyvébe mentek át. A híres HAUSERről mondják, hogy kilencz éven át [törte] a fejét EUKLIDES *XI. axiómáján* és végül már nem volt messze [az *Appendix*] 1. §-ának (három első sorától), melynek eszméjét azonban sehogy sem fogta fel tisztán és még kevésbé a hasznát a jövőendő épületre nézve, hogy [ugyanis] ez az egyetlen oda vezető út, a melyről, a nélkül hogy visszatérni volnánk kénytelenek, e koromsötét labyrinthus minden zúgába jutunk és végre szerencsés kijárássra találunk; [sőt inkább az a balsors érte], hogy miután egyik végét kioldotta a fonálnak, ez nála göröngyszerű gordiusi csomóvá bonyolódott össze.»

«Az ismeretes SIMSON Róbert föltételezte, hogy egy stb. LACROIX alapul azt a tételt vette fel stb., mely csak egyszerű, különös esete a XI. axiómának és tévesen azt vélve, hogy ez a tétel az egyenesnek szemlélete alapján közvetlenül belátható, néhány hézaggal belőle vezette le a párhuzamosak elméletét (a mit CLAVIUS is elegánsan és jól vitt véghez). De LACROIX az alaptételéhez csatolt jegyzetben egy másik tételt mutat be, mely BERTRAND-tól származik, (a Tentamen-ig) az elsőt a maga nemében és ezt [a tételt] LACROIX kifogástalannak tartja. Ha a dolog így áll, a materiába való meny nyire gyenge belátásra mutat, hogy ezt mintegy csak mellékesen utólag veti oda, miután elméletét már egy bizonytalan föltevésre építette fel.»

«A nagy LEGENDRE egy olyan rossz régibb bebizonyításon kívül, melyen nem csodálhatjuk eléggé, hogy ilyen elmés fejből pattanhatott ki, elegáns bebizonyítást szolgáltatja annak a tételnek, stb., de annak a bebizonyításán, hogy stb., hajótörést szenvedett.»

«PROCLUS, HAUFF, BOSSUT, KIRCHER, SCHMIDT, SCHWAB, TACQUET, KARSTEN, HINDENBURG és legújabbán BÜRGER, hogy az igazságot őszintén kimondjuk, e dologban jóformán semmire sem mentek. Hogy rajta úgy, mint más régibb és legrégebb geometerek, maga EUKLIDES is kipróbálta erejét és valóban kioldódhatott vele, eléggé kitűnik abból, hogy a tételt az *Elemek* különböző kiadásaiiban majd az alaptételek, majd (a régi kéziratokban) a követelések közé sorolta, a mi elég tiszta bizonyítéka annak, hogy maga sem igen tudta, hogy miképen tárgyalja és milyen névre keresztelje. Azonfelül a nála uralkodó szigorúság és szellem mellett mást amúgy sem tételezhetünk fel, mint azt, hogy csak akkor, a mikor (a sikertelen kísérletek után) képtelennek érezte magát arra, hogy e tétel bebizonyítását feltalálja, szükségből bebizonyítás nélkül állította fel és kereste számára a legillőbb helyet és nevet.

«ARCHIMEDES kísérlete, mondják, elveszett, a mi fölőtte sajnálatos, mert bizonyára minden olyan geometer, kinek feje rendben és szíve a helyén van és a tudomány történetében elég járatos, minden más kísérletnél érdekesebbnek fogja tartani, hogy megtudja azt, hogy az élesen látó görög ebben a kényes materiában mit végzett. Ugyanis be nem bizonyíthatta; ez már bizonyos, mert bebizonyítása nincsen. Másrészt pedig ARCHIMEDESRŐL

nem könnyen és szívesen tételezzük föl, hogy valamely hiányos bebizonyítást kifogástalannak mondott volna. Úgy látszik, ugyanis ezt tartom a leginkább valószínűnek, legföljebb annyira vitte mint P[ater], bár meg vagyok róla győződve, hogy tárgyalása tisztázottabb, egyszerűbb és elegánsabb volt. Végül a jelenkori jogkövetelők nagy sokaságából alább még csak egyet akarok megemlíteni.»

«Ebben, azaz még igen kevésbé kiművelt állapotban — mert teljes joggal állítható, hogy a rengeteg számú kísérlet daczára, melyek legalább 2100 évig a szakadatlanul buzgólkodó legjelesebb geometerek éles elméjét annyira igénybe vették, még sem történt *egyetlen tulajdonképeni* lépés sem, mely közelebb vezetett volna a célhoz — volt a XI. axióma, mikor a feladat egészen különös kiválóságától és nagy fontosságától ingerelve, azt a kétségbeesett lépést kockáztattam, melyet sokan talán vakmerőnek tartanak, hogy, bármint legyen is, ebben a dologban megteszek minden *lehető*, tölem lehetőleg törekszem reá, minthogy azt tartottam, hogy a természetet nem szabad kényszeríteni, a természetet nem szabad ábrándok szülte agyrémek szerint formálni, hanem akarnunk kell észszerűen és természetes módon az igazságot vagy magát a természetet látni és hogy meg kell elégednünk a *lehető legjobb* tárgyalással.»

Történeti adatait János legnagyobb részt HOFFMANN, Joh. Jos. Ign. *Kritik der Parallelentheorie*, Jena 1807 című munkájából merítette, melyet az 1832. évben János főherceghez intézett folyamodványában is megemlít; v. ö. a 232. oldallal. Azonkívül ismerte BÜRGER könyvét, *Vollständig erwiesene von den ältesten Zeiten bis jetzt noch unberichtigt gewesene Theorie der Parallellinien*, Heidelberg 1833.

42. o. 10. s. al.—43. o. 8. s. B.-G. lev. 65. o. Farkas göttingai párhuzamosok elméletét német fordítása kíséretében először STRICKEL és ENGEL adták ki, *Mathematische Annalen*, Bd. 49. (1897), 168—205. o. A *Theoria Parallelarum* másodszor kinyomtatott B.-G. lev. 67—74. oldalain, végül pedig magyar fordítása található e könyv második részének 5—15. oldalain.

43. o. 15. s.—44. o. 30. s. B.-G. lev. 81—83. o.

44. o. 9. s. al.—45. o. 12. s. B.-G. lev. 85 86. o.

45. o. 15—28. s. B.-G. lev. 96. o. BOLYAI Farkas és GAUSS Frigyes Károly levelezése (1899) kiadásában mindjárt a *Theoria Parallelarum* (67—74. o.) után adtam a *Supplementum ad Theoriam Parallelarumot* (75—78. o.), mert a GAUSS-archivumban őrzött eredetiek ebben a sorrendben következnek egymásra. De a B.-G. lev. 189. oldalán álló jegyzetben már akkor jelentettem ki feltűnőnek, hogy GAUSS az 1804 november hó 25-én kelt levelében a *Supplementumot* egyetlen szóval sem érinti, habár ez pontosan a *Theoria Parallelarumnak* ahhoz a helyéhez csatlakozik, a melyet GAUSS méltán kifogásolt. Ehhez még hozzájárul, hogy Farkas mindenesetre az 1808 december hó 27-én kelt levelével együtt (B. G. lev. 96. o.) a bebizonyítás egy kísérletét juttatta GAUSSHOZ; tekintve a nagy gondosságot, melylyel GAUSS ifjúkori barátjának leveleit megőrizte, fölötte valószínűtlennek

látszik, hogy éppen ez az egy darab elveszett volna. Egyik további ok, mely engem arra indított, hogy a *Theoria Parallelarum* után mindjárt a *Supplementumot* adjam, az volt, hogy Farkas 1807 december hó 18-án kelt levelében *B.-G. lev.* 85. o.) ezt írja: «habár nem válaszoltál egyenesen, arra, a miben különösen megütköztem» és erre mindjárt az *eltérés axiómáját* adja elő, a melyre a nélkül persze, hogy ezt az axiómát határozottan kimondaná, a *Supplementumban* foglalt bebizonyítást alapítja. Azonban magában a *Theoria Parallelarum*-ban található olyan hely, melyre ama «különös megütközés» vonatkoztatható; ez a következőképen hangzik (e könyv második része. 9. o., 6. bekezd.): «Így tehát \mathfrak{R} nem kerülhet sohasem Π -n belül; mert nem lehetséges, hogy az eltérés elenyészszék, minthogy az olyan mennyiség, mely — még ha egyszer fogynia is kell — mielőtt teljesen kimerülne, mindig ugyanarra az állandóra, vagy annál még nagyobb mennyiségre egészül ki, nem enyészhetik el.»

46. o. 6—8. s. HESSLING, *Versuch einer Theorie der Parallelen*, Halle a. S. 1818 cz. könyvének XXX. oldalán elbeszéli, hogy PFAFFnak az volt a véleménye, hogy az egyetlen dolog, a mely még lehetséges, az, hogy a párhuzamosak axiómáját valamely egyszerűbbel helyettesídjük, azaz «simplifikáljuk». v. ö. STÄCKEL und ENGEL *Th. d. P.* 215 oldalával és a 31. o. 2—5. soraihoz tartozó jegyzettel. PFAFFnak e nyilatkozata abból a szempontból fontos, hogy GAUSS másodszor (1799 december havától 1800 húsvétjéig) közvetlenül azután az idő után tartózkodott Helmstedben, a melyben a geometria alapjaival buzgón foglalkozott, és akkor, mint PFAFF lakótársa, evvel sűrűn érintkezett; az a levele is, melyet 1799 december hó Farkasnak írt (l. e. rész 41. oldalát), Helmstedtben kelt.

46. o. 14—18. s. V. ö. evvel Farkas kijelentéseit abban a levélben, melyet 1820 április 4-kén Jánosnak írt (szöveg 74—76. o.).

46. o. 19—33. s. A hasonlóság axiómáira vonatkozólag l. STÄCKEL und ENGEL *Th. d. P.* 19. oldalát; ott a 21—30. oldalon német fordításban található EUKLIDÉS V. postulatumának WALLIS-féle bebizonyítása (1663) is.

46. o. 13—9. s. al. LOBATSCHESKIJ, *Új alapvonalak* (1835), l. ENGEL 76. oldalát.

47. o. 3—6. s. V. ö. Farkas 1820 április 4-kén Jánoshoz intézett levelével e rész 74—76. oldalain. Farkas e levél végén, tehát a 76. o. 31. sorában álló részlet után, axiómáiról a kilátásba helyezett részletes közlését adja elő, mely itt következik:

«Az a' semmi axióma, melyet gyermekek számára gondoltam volt, itt van; abból *per se* könnyen ki-jő. Mint hogy kevésből áll, le-irom kívánságodra. Ez *eadem internorum summa aliter partita*. Ki-irom a' munkámból.»

«*Nota Bene*: Minden szegleten értessék a *planum infinitum*-nak azon szegletnek *in infinitum* ki[nyújtott] szárai közt lévő része. A szárat is mind ki-nyújtva kell érteni.»

«*Si v non capit angulum y, nec $v+x$ capit angulum $y+x$.*»

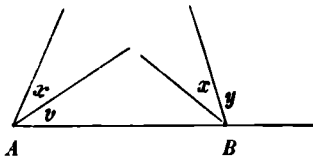
«Ezt fel-véve könnyű a' többi. Itt [20.a] ábra] látszik, hogy az y bal

szára annyit hajlik, a' mennyit v -nek bal szára el-hajlik, de perse ez semmi.»

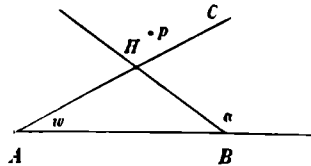
«Ha azt meg-tudnám mutatni, hogy az y bal szára n annyit fordulna is vertexe körül BA felé mint v -nek bal szára A körül AB -től el, akármekkora nagy szám legyen n , tsak meg határozott legyen; ugy-is nyert perem volna; de mind ez lehetetlen.»

«A fennebbi semmiből a' könnyű demonstratio így foly.

«I. Si w [20.b) ábra] non capit angulum a , tum BH secat AC .»



20.a) ábra.

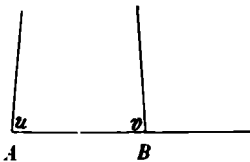


20.b) ábra.

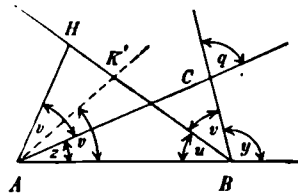
«Nam tum a habet aliquod punctum non in w cadens; hoc aut in BH ultra H cadit (et tum patet) aut supra AC in p , et tum pB transit per AC , adeoque et BH (inter AB et pB situm) transit per AC .»

«II. Si ad quantamvis rectam AB [21. ábra], ponentur interni u et v , AF et BG concurrent, si $(u+v) < 2R$.»

«Nam ponatur [22. ábra] ad verticem B angulus v penes u , quod remanet dicatur y ; e quovis puncto cruris dextrianguli $(u+v)$ ducatur recta AC , et ad verticem A deponatur ad sinistram angulus v penes z .»



21. ábra.



22. ábra.

«Tum z non capit angulum y , quia per constructionem duo crura se mutuo secant: adeoque q extra z cadit; itaque (per Axioma dictum) nec $(z+v)$ capit angulum $(y+v)$; itaque (per I) AH et BH se mutuo secant.»

Quoniam autem $(z+v) > v$, sit $KAB = v$; tum K' erit commune cruribus angulorum v et u ad extrema rectae AB positorum; adeoque crura illa se mutuo secant.

47. o. 6—5. s. sl. BERTRAND, L., *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, Genève 1778, T. II. 19. és köv. o. Az illető helyek ki vannak nyomtatva ENGELNél 451—453. o. Legendre A. M. *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*. Mémoires de l'académie des sciences, T. 12, Paris 1833, 397—399. o. A további irodalomra vonatkozólag l. STÄCKEL und ENGEL Th. d.

P. 231. oldalát. Ide tartozik még KNORR, E., *Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie*, Kiew 1849, 33. o., mely munkáról beszámol ENGEL a 440—441. oldalon. Végül még idézendő HESSENBERG G., *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen 1906, Kap. I §. 1.: Das Paradoxon der Winkelvergleichung.

47. o. 6. s. al.—48. o. 15. s. LOBATSCHESKIJ, *Új alapvonalak*, I. ENGEL 71—76. oldalait.

48. o. 7—1. s. al. V. ö. STÄCKEL értekezésével, *Friedrich Ludwig Wächter. ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, *Mathematische Annalen*, Bd. 54 (1901), 49. o.; ez az értekezés tartalmazza Wächter, *Demonstratio axiomatis in Euclidis undecimi*, Danzig 1817, cz. ritka művének német fordítását is.

49. o. 17—14. s. al. FRISCHAUF J., *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, Leipzig 1872, 91. o. Az az eset, mikor a három pont ugyanabba az egyenesbe esik, mint kivételes eset megszüntethető, ha az axiómát ebben az alakban fejezzük ki: *Ha alva van bármely három pont a térben, akkor mindig lehetséges, hogy e pontok közül (alkalmasan választott) kettőn át olyan gömböt fektessünk, a melyen a harmadik pont belül fekszik* (Kürschák József közlése).

Jegyzetek a VII. fejezethez.

E fejezet forrásául szolgált az egyes jegyzetekben felsoroltakon kívül SZABÓ Péter, *BOLYAI János ifjúsága* című értekezése is, *Mathematikai és Physikai Lapok*, 19. k. (1910) 135—164. o.

50. o. 10. 16. s. *A XI. axióma bebizonyítása* bevezetéséből (1856):

50. o. 18—33. s. *B.-G. lev.*, 86. o.

51. o. 6—9. s. *B.-G. lev.*, 49. és 86. o.

51. o. 12. s. *A XI. axióma bebizonyítása* bevezetéséből (1856). «... és a tanuláson kívül, melylyel, ha hozzáálltam, nagy tüzzel foglalkoztam, szerettem főleg a majom ügyességével mászni, különösen madárfészek után, [szerettem] a labdázást, a bujósdit, tégladarabokat formákba csiszolni; később az ostábla-, a sakkjátékot, a hegedülést és egy időben a kártyázást.»

51. o. 20—27. s. *A XI. axióma bebizonyítása* bevezetéséből (1856). Az itt említett könyvek pontosabban a következők:

EULER, L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, 2 Bde, St. Petersburg 1770. János az egész első kötetet és a második kötet első szakaszát dolgozta át, csak a második kötet második szakasza maradt el, melynek tárgya a «határozatlan analitika».

VEGA, Georg Freiherr von, *Vorlesungen über Mathematik zum Gebrauch des k. k. Artilleriecorps*, 4 Bde, Wien 1786—1802, sokszori új kiadásokkal; v. ö. a 4. o. 30. sorához tartozó jegyzettel.

DÖTTLER, R. S. (a bécsi egyetem tanára), *Elementa physicae mathematico-experimentalis*, Viennae 1812.

51. o. 5. s. al.—52. o. 11. s. *B.-G. lev.*, 99. o.

52. o. 22—29. s. *SZILX*, 33. o.

52. o. 5—4. s. al. A latinnyelvi vizsgálati dolgozat, mely SZABÓ Péter úr birtokában van, a következőképen hangzik:

«Ineuntis ætas adolescentiæ imprimis notatu digna. Tum si viam ingressus sis rectam longe profecto in virtutis curriculo progredieris, licet vita brevis sit. Sin autem a via recta aberraris, et aliquandiu procul vagatus sis scopo, mox cum erroris conscius fueris, viam rectam non nisi quæsisisse magna constabit industriâ, atque nec summo studio multa assequi potueris. Magnis fortunæ adfectus muneribus adolescentulus afui, qui providi dei gratiâ parentibus educatoribusque usus viam rectam ei jam initio ostendentibus, multo tamen majoribus, horum præceptis observantiam tribuens et recta titubasse cavens viâ. Themistoclem minime tam fortunatum fuisse a Nepote traditum, quippe qui peradolescentulus et liberius vixit, et magis sui iudicii fuit, atque a patre probatus fuisset: contra ea mature ad sanitatem rediisse videtur, vitiaque magnis emendasse virtutibus; tantisque post[ea] vir evasit, ut ætate primus sua omnium respectu prudentiæ Grajûm poneretur. Quantus fieri vir talis potuisset; nusquam si a via recta deerasset: tum forte amore studioque justitiæ æquitatisque laudis Aristidis sive Epaminondæ compos fuisset. Præcipue itaque conandum: a virtute nec minimum aberrare.

53. o. 17—15. s. al. *B.-G. lev.* 86—87. o.

54. o. 9—11. s. Mikor gróf TELEKI Sámuel 1822-ben meghalt, gyermekei a szokásos temetési pompa egyszerűsítésével 2000 forintot takarítottak meg, melyet Farkasnak juttattak. Bárá KEMÉNY Simon halála után (1826) felesége Farkasnak hat darab kötelezvényt küldött: «néhai kedves Simonunk rendelete szerint küldöm a' megkapott hat darab contractust 's ha még kapok azt is elküldöm.» A *Tentamen* kiadását is a TELEKI és KEMÉNY családok támogatták.

54. o. 13—15. s. SCHLESINGER, szemelv. 205. o.

54. o. 18—2. s. al. *B.-G. lev.*, 99—100. o.

55. o. 3—13. s. BEDŐHÁZI, 192. o. GAUSS gyermekei voltak: az OSTHOF Johannával (megh. 1809 október 11-kén) kötött házasságából József, sz. 1806 augusztus 21-ikén, Minna sz. 1808 február 29-ikén; a WALDECK Minnával kötött házasságból Jenő, sz. 1811 július 29-ikén, Károly Vilmos, sz. 1813 okt. 23-ikán, Teréz, sz. 1816 június 19-ikén.

55. o. 16—19. s. SCHLESINGER, Emlékeszéd 61. o.

55. o. 22. s.—56. o. 5. s. A XI. axióma bebizonyítása bevezetéséből (1856).

56. o. 21—28. s. A XI. axióma bebizonyítása bevezetéséből (1856).

57. o. 1. s. HAUSER, Mathias Freiherr von (1741—1816), *Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik* in drei Teilen, Wien 1778—1786, 2 Aufl. 1816—1823. HAUSER 1774—1804 a bécsi cs. k. mérnök-akadémia matematika-tanára volt.

57. o. 17—9. s. al. *SZILX*, 33. o.

58. o. 6—10. s. SZABÓ Péter, *BOLYAI János iffúsága*, *Mathematikai és Fizikai Lapok*, 19. k. (1910), 162. o.

58. o. 11. s.—59. o. 9. s. SCHLESINGER *szemelv.* 214., 220., 223—224. o. Azt az ifjúkori arcképét, melyről az 58. o. 25. sorában történik említés, a mint KONCZ nekem elbeszélte, János egyik alkalommal, mikor apjával czivakodott, dührohamában maga pusztította el. Jánosnak egy porcellánra festett miniatűr arcképe az ő fia, Dénes birtokában, volt de ennek gyermekei, a kik játszottak vele, fölismerhetetlenné tették. Innen van az, hogy BOLYAI Jánosról, nincsen arcképünk.

Jegyzetek a VIII. fejezethez.

E fejezet forrásaiul szolgáltak főleg GATTI, Friedrich von, *Die Geschichte der k. u. k. Technischen Militärakademie*, Wien 1901, különösen pedig ennek első kötete, *Geschichte der k. k. Ingenieur- und k. k. Genie-Akademie 1717—1869* és SZABÓ Péter értekezése, *BOLYAI János iffúsága*, *Mathematikai és Fizikai Lapok*, 19. k. (1910), 135—164. o.

62. o. 17—12. s. al. JÁNOS főherczeg, a ki 1782 január hó 20-kán Firenzében született és 1859 május 11-kén Grácban halt meg, ismeretes a NAPOLEON elleni háborúban (1800—1810) való szerepléséről. A frankfurti birodalmi gyűlés 1848 június hó 27-ki határozatával birodalmi kormányzóvá nevezte ki, mely állásról azonban már 1849 december hó 20-kán lemondott és ezután a magánéletbe vonult vissza.

64. o. 19—38. s. SZILY, 33—34. o.

64. o. 1. s. al.—65. o. 8. s. és 65. o. 17—27. s. SCHLESINGER, *szemelv.* 217 és 218. o.

66. o. 11—12. s. LENCKER M., *Anleitung zur mathematischen Erdbeschreibung, zur Zeichnung der Land- und Seekarten, wie auch zur Kenntnis des Planeten- und Weltsystems und zur astr.-geogr. Ortsbestimmung*, Wien 1818, 8 Teile; *Lehrbuch der reinen Mathematik*, 1. und 2. T., Wien 1836—1837. Dr. FURTWÄNGLER tanár úr értesítése szerint e művek megvannak a mödlingi cs. és k. katonai műszaki akadémia könyvtárában.

66. o. 4—3. s. al. SCHLESINGER, *szemelv.* 209. o.

67. o. 1. s. al. «Zsarnok eszme», v. ö. Farkasnak 1820 április 4-kén Jánoshoz intézett levelével, e kötet 80. o. 6. s.

Jegyzetek a IX. fejezethez.

68. o. 6. s. al.—69. o. 2. s. SCHLESINGER, *szemelv.* 228. o.

68. o. 4. s. al. A XI. axióma bizonyítása bevezetésében (1856) elbeszéli János: «... később az ostábla-, a sakk-játékot, hegedülést és egy időben a kártyázást; sohasem dohányoztam, sohasem [voltam] borívó, kávé — a reggelit kivéve — csak ritkán.»

69. o. 11. s. Gergely a marosvásárhelyi ev. ref. kollegiumot látogatta. Később átvette a bolyai családi birtok kezelését, mely Antal nagy-

bátyja halála után (1845) Farkas tulajdonába ment át. Gergely meghalt 1890 aug. 26-kán Bolyán. Egyetlen fia, Gáspár, Székelyudvarhelyt él.

69. o. 14—15. s. A végleges megegyezés János anyai öröksége dolgaiban csak 1828 április hó 1-sején jött létre.

69. o. 20—21. s. SCHLESINGER, *szemelv.* 228. o.

69. o. 20—13. s. al. SCHMIDT, Franz, *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker*, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 48 (1868), 220. o.; SCHMIDT-re vonatkozólag l. a szöveg 195—198. oldalait és a hozzájuk tartozó jegyzeteket.

70. o. 10. s. és 12—13. s. *A tér tudománya* előszavából (1834 körül).

70. o. 17—18. s. *Tentamen*, Ed. sec. T. II, 416. o.

70. o. 20—11. s. al. *A tér tudománya* előszavából (1834 körül). *A XI. axióma bebizonyítása* (1856) bevezetésében János hasonlót beszél el; „... mire azt mondtam neki, hogy elítéli az én munkámat a nélkül, hogy megértené, ő meg azt mondta, hogy munkástul nem kellek neki. Erre azt mondtam neki, hogy [a munka] becse fölött ily módon nem tudunk dönteni; ámde meg akarok valakit nevezni, a kit illetékes bírónak ismerek el, és merem megigérni, hogy az ítélethez, melyet fölötte kimond, föltétlenül fogom magamat tartani (mert ismerve GAUSS szellemét, előre biztos voltam benne, hogy sérelmes ítéletet nem hozhat fölötte). Ez a férfi GAUSS. Ő [az apám] most elküldte ...”

70. o. 1. s. al. Az *abszolút és nem-euklidikus* geometriát nem mindig különböztetik meg élesen egymástól. Itt (BOLYAI János értelmében) abszolút geometriának a geometriának azt a rendszerét nevezzük, mely a párhuzamosak axiómájának igaz vagy nem igaz voltától független, úgy hogy az abszolút geometria az euklidikus geometriát (Jánosnál Σ t), mint különös esetet magában foglalja. Ellenben nem-euklidikusnak a geometriának olyan rendszerét nevezzük, mely a párhuzamosak axiómája nem igaz voltának föltevéséből adódik ki, úgy hogy (BOLYAI János értelmében, v. ö. pl. a 259. o. 1. sorával al.) ekkor az $i=\infty$ ki van zárva. V. ö. evvel a «nem-euklidikus» szónak az ittenivel megegyező használatát ENGELNél, e rész 158. oldalán.

70. o. 2. s. al.—71. o. 8. s. GAUSS Werke, Bd. VIII (1900), 220. o.

71. o. 18—22. s. A *Tentament* és evvel együtt az *Appendixet* elküldték pl. Bécsbe LITTRÖW és ETTINGSHAUSEN ottani tanároknak. LITTRÖW-ról azt írja János az *Üdvntában*, hogy az *Appendixet* nem tudta megérteni és méltatni, mert ilyesmi az ő felületes felfogó képességét túlhaladta, ETTINGSHAUSENRől pedig így nyilatkozik az 1855 január 20-kán atyjához intézett levelében: «ETTINGSHAUSEN-t is becülöm, mint nagyérdemű és előkelő férfit, habár annyira szerencsétlen, elvakult és elfogult, hogy bennünket nem tud méltatni.» V. ö. a 31. o. 2—5. soraihoz tartozó jegyzet utolsó bekezdésével.

71. o. 17—11. s. al. SCHLESINGER, *Emlébeszéd*, 74. o.

71. o. 35. s. E folyamodványának egy Lemberg, 1832 május 3-iki

keltezéssel ellátott fogalmazványa Szabó Péter úr birtokában van. Ő bocsátotta rendelkezésemre e fontos irat másolatát, melynek magyar fordítása itt következik. A kapcsos zárójelekbe { } foglalt szavakat János maga kerítette be ilyen zárójelekkel; úgy látszik, hogy magából a folyamodványból ki akarta ezeket hagyni.

«Császári Fenség!»

«Főmagasságú Főherczeg, Kegyelmes Uram, Uram!»

«A legmélyebb alázattal alulírott régebben, szolgálatmentes óráiban, a matematika körébe tartozó különböző fontos, de eddig egyáltalában vagy legalább kellőleg ki nem dolgozott tárgyakra vonatkozó — a mint ő hiszi — sikeres vizsgálatokat végzett. Forró vágya, hogy ezeket teljesen kidolgozza, és, abban a mindig melegen táplált szándékában, hogy a jó dolgokat közhasznúvá tegye, kinyomtassa, és így az elpusztulástól megóvja.»

«Ilyen nehéz dolgokat azonban, különösen olyan gyengélkedő egészségi állapot mellett, milyen az alulírotté már régen,* csak osztatlan szellemi tevékenységgel lehet véghez vinni.»

«Abban a legteljesebb meggyőződésben, hogy a jó ügy mindig cs. Fenséged legmagasabb figyelembe vételének örvendhet, legmélyebb hódolattal bátorkodik tehát [az alulírott] Fenségednek azt a legalázatosabb kérését előadni: hogy méltóztassék őt a fent felhozottak céljából három évre a tulajdonképeni mindennapi szolgálatból legkegyelmesebben eltávolítani és Nagyszebenbe a honi levegőbe vezényelni és neki egyúttal három havi szabadságot engedélyezni, melyet Maros-Vásárhelyt, atyjánál eltölthessen, hogy ott arra a személyes üdülésre, arra a szellemi nyugalomra és pihenésre találjon, mely a fent kimondott cél elérésére {és arra hogy az emberiségnek a lehető legnagyobb szolgálatot tegye} egyedül képesíti őt {a miben oly mértékben látja legnagyobb boldogságát, hogy saját értékét csak avval a képességével méri és magát csak annyira becsüli, a mennyi erőt érez magában saját tökéletesbítésére, és így az egész [emberi] nem kiképezéséhez való hozzájárulásra}.»

«De ha hirtelenül háború törne ki, azt a kegyet kéri magának, hogy ő is oda vezényeltessék.»

«A legmagasabb méltatásra a következő megjegyzéseit csatolja ide.»

«1. A mellékelt művecske igazolja, hogy fáradozása egészen rendkívüli és eddig általánosan legyőzhetetleneknek tartott nehézségek esetében sem maradt mindig eredménytelen. Hogy e műről miképen nyilatkozott lovag Gauss udvari tanácsos úr, ki köztudomás szerint minden idő egyik legkolosszálisabb elméje és a legnagyobb jelenleg élő matematikus, egyúttal pedig ép oly szigorú, mint értelmes és a dicséretben fölötté takarékos bíráló, méltóztassék annak a levelének kivonatából legkegyelmesebben tudomásul venni, melyet ő a legalázatosabban alulírottnak atyjához intézett.»

* Javítás: "... minthogy alulírottnak tartós, Lembergben kiállott idegbajától elgyengülve, egészségi állapotát illetőleg a legrosszabbtól kell tartania.»

«Cs. F. általánosan dicsért és tisztelt, gyorsan és mélyen beható tekintete bizonyára minden további reá vonatkozó megjegyzés nélkül is felismeri azt az igazi benyomást, melyet az említett művecske arra a nagy férőura gyakorolt. Mégis azt hiszi a legalázatosabban alulírott, hogy — a nélkül hogy ama lángelméő szellem kiválóan jeles, fényes érdemeit megillető tiszteletet sértené — *mind annak a dolgozatnak, mind önmagának* tartozik avval, hogy a sok megjegyzés közül, melyet az említett levélre tenni lehetne, legalább a következőket ne nyomja el. GAUSS ugyanis (más szavakkal) mondja: *Csak kevés embernek van érzéke a benne tárgyalt dolog lényegének felfogásához, és csak azok mutathatnak iránta nagyobb érdeklődést, a kik avval, hogy mi forog itt szóban, és így a dolog nagy fontosságával tisztában vannak, valamint saját meghíúsult kísérleteik közben élénken átéreztek az e gordiusi csomó kibogozásával járó akadályokat.* És mindez nagyon is igaz, de semmiképen kizárólag ennek a tárgynak sajátossága: kiterjeszthető ez ép úgy kisebb-nagyobb mértékben mindenre, a mi finomabb, nemesebb, magasabb.»

«És valóban, a nélkül, hogy *el nem árulnók gyengénket* és gyenge jelleműeknek nem mutatkoznánk, [az előbbi] sohasem hozhatjuk fel annak megokolására, hogy, az ilyen még homályos tárgyakra vonatkozó bevált saját munkáinkat miért tartjuk vissza.»

«Mi más egyébről van szó a tudományokban, mint épen arról, hogy *a homályos dolgokat tisztázzuk, és azt, a mi hiányzik, előteremtsük?* Ha GAUSS nem volna erről ép úgy meggyőződve és áthatva, mint az alulírott, és e kérdésre való válasza kétkedőbb volna, akkor hasonló okból még számosat kellett volna elrejtienie többi kiváló munkái közül. Hisz maga is úgy nyilatkozott egyik munkájáról (a *Disquisitiones arithmeticaeről*), hogy azt egész Európában akkor csak hat matematikus értette meg.»*

«Minthogy GAUSS azt a dicséretesnek látszó okot adva elő, hogy *különben önmagát kellene dicsérnie*, {a nélkül hogy különben valami kifogásolni valót találna}, a dolog valódi értékére vonatkozó *nyílt* ítélet kimondását elkerülni igyekszik, kötelességének tartja a legalázatosabban alulírott, hogy azt a terméket, valamint minden egyebet *épen* annak mondja, a mi az valóban, és a legkegyelmesebb engedélylyel irányzatáról és értékéről őszinte véleményét fejezze ki — és ezt itt annál szükségesebbnek tartja, mert részben a lehető rövidség kedvéért, részben, — mint most *világosan* látja — túlzott és, a mennyiben a jó ügy terjedését gátolja, káros szerénységből még előszót sem írt hozzá — ép ugy törekedve arra, hogy a dolgot egyenesen adja elő, a mint azt is érezte, hogy alig lehet reá olyan találó megjegyzést tenni, mely nem tartalmaz némi öndicséretet, meg lévén győződve arról, hogy a *szakértő* szemében maga az egyszerű dísz nélküli tárgyalás a legjobb fölvételre talál és amőgy sem téveszti el hatását. E mellett azonban valamennyi akadémiának, egyetemnek és egyáltalában az *alkul-*

* BOLYAI Farkashoz intézett 1808 szeptember 2-kán kelt levelében, B.-G. lev. 93. o.

mas bírónak igen szívesen megengedi, hogy saját ítéletük mellett megmaradjanak.»

«Nyilvánvaló, hogy sohasem lehet a szerző hibája, ha *valamely ítélet mindenestre csak azért ferde és kicsinylő, mert az illető bíráló nem elég mestere a dolognak.*»

«Ebben a műben olyan tárgy van *a legtökéletesebben kikutatva, áthatva és tisztázva*, a melyen a geometriának a görögök által való ismeretes művelése óta, kik egészen sajátos éles elméjüket ebben a tudományban is oly dicsőségesen kimutatták, tehát 2100 év óta, a legkiválóbb és legélesebb eszű főeknek ernyedetlen fáradozása, a mint *teljes joggal lehet mondani*, hajótörést szenvedett, habár szándékosan csak a dolog lényegének a velejét tartalmazza és ez alkalommal ezt csak tömör rövidséggel adja elő, a melyen természetesen csak a szakértő szeme hatol át.»

«Ez bizonyára a leglényegesebb, legfontosabb, legérdekesebb és elég bonyolódott feladata is a tér tudományának és tulajdonképen *alapjából egészen új, eddig egyetlen geometer által még fogalma szerint sem sejtett tudomány.*»

«Tartalmára röviden a címe mutat rá. Eddig mindig az volt a cél. hogy EUKLIDES XI. axiómáját *igazolják*; az említett műben be van bizonyítva annak *abszolút lehetetlensége*, hogy valamikor is ilyen belátáshoz jussunk, és helyette egészen más, erre nem is szoruló és egyszersmind minden esetben teljesen *kielégítő* tér tudománya van megállapítva. E nélkül az egész ismeretes geometria összeomlik, vagy pedig egy pusztán kétes hypothesisre támaszkodik.»

«Hogy a XI. axióma dolgában mi történt, egyebek közt tartalmazza HOFFMANN Joh. Jos. Ign. egyenesen erre a célra írt könyve, *Critik der Parallelen-theorie*, Jena 1807. Ez a munka, habár magában véve még elég gyöngye — és e mellett még a kritikája is hibás, és maga is kritikára szorul — mégis némi előkészítésére szolgálhat azoknak, kik a többször említett művet átvenni szándékoznak, de a dolog lényegébe mindenestre még nincsenek beavatva, a mi csakugyan némelykor kiváló matematikusoknál is előfordul, a kiknek azonban ekkor sohasem szabad magukat az elsőrangú geometerek közé számítaniok. Nagyon hasznos, ha az olvasó megismerkedik EUKLIDESSEL, az igaz geometriai és rendszeres előadás eddig *felül nem mult* vagy helyesebben eddig *el nem ért* mintaképével. — Különben az olvasónak járatosnak kell lennie a tiszta matematika egész körében. — A híres KISTNER kilencz éven át törte rajta a fejét és valóban nem jutott el a többször említett mű 1. §-áig, a mint az egész előbb idézett és az előleges olvasásra és tájékoztatásra mint nélkülözhetetlen ajánlott mű eredménye sem jut el odáig. Az egyetlen GAUSS, úgy látszik, tett néhány könnyebb lépést a cél felé, de még nagyon messze volt attól, hogy ezt magát lássa. De minden fáradozása daczára sem tudott *előrehaladni*; ezt a szerző kétségtelenné tudja tenni több adattal, melyet GAUSSNAK részint mostani, részint előbbi és az apának számos [a szerzőhöz intézett] levele tartalmaz. A szerző minden benne felmerülő főnehézséget már az 1823. év második

felében győzött le, miután már előbb, mikor még szerencséje volt a cs. k. mérnök-akadémia növendékének lenni, minden valódi tudás, és különösen az ilyen — fontosságától és nevezetességétől eltekintve — már történetileg is annyira rendkívül figyelemreméltó tárgy iránt oly élénk érdeklődés ébredt benne, hogy néhány könnyed kísérlet után, mely még távol elmaradt a céltól, nem rettent vissza egy erőteljes támadás fáradsalmaitól, hogy ezt a nagy és annyira ki nem elégítő hézagot betöltsse. És mélyen érzi, hogy nyugalmat és boldogságot nem talál addig, míg e labirinthusból ki nem tekerződik.

Ép oly sikeresen dolgozott ki még sok más fontos tárgyat is és úgyszólván az eddig igen nyomorúságosan tárgyalt matematikának (a legkiválóbb elmék ítéletének megfelelő) teljes reformjához látott hozzá. Gondolkodása e gyümölcseinek terhéből megszabadulni vágyódik a szerző teljes kidolgozásuk és nyilvános megismertetésük útján.

Lembergben, 1832 május 3-kán.

BOLYAI János,
mérnökkari százados.

A folyamodványhoz, melyet János 1832 augusztus 8-kán indított útnak, mellékelte először az *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* első 33 paragraphusának német fogalmazványát, mely e könyv német kiadása második részének 185—203. oldalain legelőször látott napvilágot és melynek magyar fordítását a jelen magyar kiadás második részének 197—217. oldalain közöljük, és másodszor annak a levélnek kivonatát, melyet GAUSS 1832 márczius hó 6-kán BOLYAI Farkasnak írt. Farkas ugyanis nemsokára, miután e levelet megkapta, másolatot készíttetett róla, melyet fiának Lembergbe elküldött, a ki 1832 április hó 6-kán kapta kézhez (v. ö. a 91. oldallal). A levélhez János jegyzeteket készített, melyek közül néhány megérdemli, hogy itt közöljük.

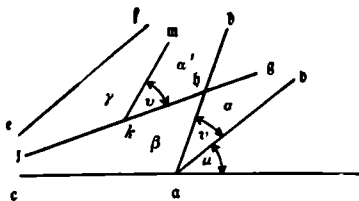
A 89. o. 32. sorához. «Első pillanatra ugyan vagy felületesen tekintve (így jött reá a szerző is már 13 évvel ezelőtt [1819], ámde szigorúbb vizsgálatban a végtelen radiusu körvonal kifejezést helytelennek és alkalmatlannak találjuk, a mit GAUSS is meg fog engedni, ha a dolgot közelebbről megvizsgálja.»

A 89. o. 35. sorához. «Ezek az elnevezések mindenesetre igen találók és kitűnők, ámde majdnem hasonló elnevezéseket találhatni a szerző legrégebbi irataiban, ki a jeleket csak később vezette be rövidség kedvéért.»

Egy czédulára, mely úgy látszik, az 1834 körüli időből származik, János a következő följegyzést írta:

•Parasphæra — paracyklus. Ezeket az elnevezéseket, miután a jelen elmélet közöltetett vele, GAUSS javasolta ugyan; ámde nem maradhatott el, hogy e tan első keletkezésekor nálam hasonló eszmék ne merüljenek fel; én akkor a paracyklust $\bigcirc\infty$ -nak és [a hypercyclust \bigcirc] hyper ∞ -nek neveztem, bár az utóbbi hibás. És valóban legrégebbi irataimban egészen hasonló elnevezéseket használtam, az analógiát a parabolával észrevettem, a mennyiben valóban is \sim reláció stb.

A 89. o. 41. sorához. «Itt GAUSS valamivel rövidebben, de bizonyára kevésbé tiszta geometriai úton, még pedig (a mint *tőle* mindig várható) elmésen, de nem elegánsabban azt bizonyította be, a mi a 42. §-ban pusztán a 39. és 41. §-ok segítségével ki van mutatva.*



23. ábra.

Egyébiránt az alulirott a 42. §. tételének még egy sokkal rövidebb bebizonyítását csatolja ide. Legyen ugyanis [23. ábra] $ab \parallel ef$, $ac \parallel fe \parallel gl$, $lg \parallel ad$, valamennyien *ugyanabban* a síkban, továbbá legyen $hf = ha$ és $fm \parallel hb$; akkor nyilvánvaló, hogy $dahg \equiv mfhb$, vagyis $\alpha = \alpha'$. Itt már most GAUSS jelölése szerint

$$f(u + v) = \beta + \gamma + \alpha', \quad fu = \beta + \alpha, \quad fv = \gamma,$$

és így

$$f(u + v) = fu + fv,$$

a miből VII szerint mindjárt a bebizonyítandó tétel következik. Különbösen ez az egész tétel még *jelentéktelen kicsinyiség* ebben a dologban, a 43. §-ban összpontosul minden megelőző, úgy hogy a kör *geometriai quadraturája* céljából szükséges volt valamennyi nehézséget, még pedig egészen másokat legyőzni.»

Csodálatos megegyezés, hogy GAUSS, is egyik jegyzőkönyvébe, egy följegyzése után, mely a Farkashoz intézett levélben foglalt bebizonyításnak főbb mozzanatait tartalmazza és valószínűleg ugyanabból az időből való, mint ez a levél, a bebizonyításnak egy módosítását írta be, mely hasonló gondolatra támaszkodik, mint János eljárása; l. GAUSS, Werke Bd VIII, 227. oldalát.

A 90. o. 7—9. soraihoz. «Az alulirott evvel a feladattal már foglalkozott és GAUSS e következtetéseit helyeseknek találta. Ámde még egy erős próba áll előtte.» V. ö. a 105—115. oldalakkal.

A 90. o. 11. sorához. «Mindezt az alulirott már régen nagyon helyesnek ismerte fel, és valóban az *egyenesnek* és a *síknak*, valamint a *térnek* a maga nemében ilyen tökéletes elméletét ki is gondolta.» V. ö. a XVIII. fejezettel.

Jegyzetek a X. fejezethez.

E fejezet forrásául szolgált STÄCKEL Pál értekezése. *A nem-euklidikus geometria története* BOLYAI János *hátrahagyott irataiban*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XVIII. k. 1900. Ebben az értekezésben főleg Farkas 1820 április 4-dikén Jánoshoz intézett levelének terjedelmes töredékei kerültek legelőször a nyilvánosság elé, melyek a János hagyatékában talált egyes czédulákra voltak följegyezve. Később SZABÓ Péter

* V. ö. B.-G. lev. 110—111. oldalaiival.

úr megtalálta magát a levelet az 1905-ben elhunyt atyjának, Szabó Sámuelnek hagyatékában, ki 1858—1868 a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium tanára volt. Szabó Péter úr nekem e levél német fordítását bocsátotta rendelkezésemre, e mű fordítójának pedig az eredeti magyar szöveget, úgy hogy ezek alapján az idézett értekezés adatai ki voltak egészíthetők.

73. o. 7—4. s. al. Hogy mit írt Farkas az ő axiómájáról, az idézve van a 47. o. 3—6. soraihoz tartozó jegyzetben.

74. o. 13—27. s. A *Tér tudománya* előszavából (1834 körül). Előrehaladott korából (1848—1858) való egyik czédulán János a következő részletes fejtegetést adja elő: „Valamely tetszés szerinti egyenletes polygonális vonal vagy tört egyenes vizsgálata, melyre a párhuzamosoknak arra a feltevésre támaszkodó értelmezése indított, hogy van két egyenes, melyeknek távolsága mindenütt egyenlő, ép úgy, mint atyámnál, nálam is az első út vagy gondolat volt, melynek alapján a XI. axiómát vagy X-et* bebizonyítani, helyesebben és biztosabban vele tisztába jönni próbáltam és bebizonyítani vagy eldönteni törekedtem, hogy minden ilyen fajta vonal vagy önmagába tér vissza, vagy legalább csomós. Még pedig szem előtt tartottam itt, hogy valamint ugyanabban a síkban ugyanazon pont körül ismételten egymáshoz illesztett egyenlő egyenes vonalú szögek valamikor az egész síkot beborítják, vagy valamely egyik pontja körül forgatott egyenes annak [a síknak] minden pontját eléri, sőt el is hagyja, úgy ennek általánosításában is, ha itt az egyenlő szög csúcsát tetszés szerinti egyenesek mentén, ezekkel egyenlő szögeket alkotva ugyanabban a síkban *bárhogyan* mozgatjuk, szükséges (?), hogy ugyanaz következze be, t. i., hogy az új száraznak valamikor a sík minden pontját el kell érniök.»

74. o. 14—13. s. al. Abban az időben János a szög harmadolásával is foglalkozott. Hagyatékában talált egyik czédula, mely ifjúkorából származik, tartalmazza e feladat szigorú megoldását egy egyenlőoldaltú hyperbola segítségével:

A szög harmadolása.

Felezd [a három részre osztandó] $\alpha\beta\gamma$ szöget [24. ábra a 236. oldalon] ec-vel; legyen $de = \frac{1}{2}dc$, az $ef \perp = \frac{1}{2}ca$ és húzd meg $fl \parallel$ -an ec-hez; rajzold már most a d ponton át az fl és fe asymptotákhoz a hyperbolát; a hol az az ab ívet metszi, ott az af $[iv] = \frac{1}{3}ab$.

74. o. 21. s. SACCHERIT és LAMBERTET illetőleg l. a reájuk vonatkozó fejezetet STRICKEL und ENGEL *Th. d. P.*-ben, valamint a 42. o. 16. sorához tartozó jegyzetet.

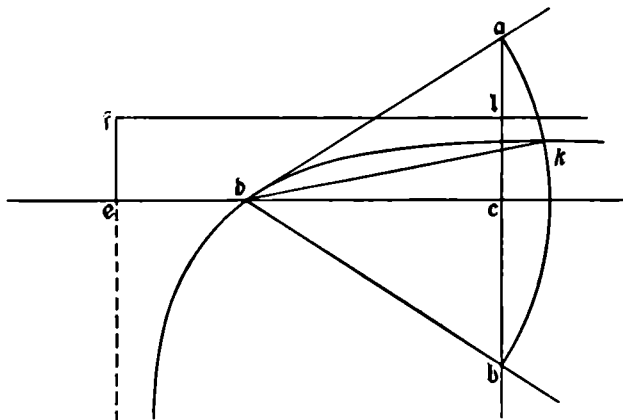
75. o. 17—20. s. Farkas ezt a szándékát végrehajtotta. Fejtegetései ki vannak nyomtatva a 224—225. oldalon, a 47. o. 3—6. soraihoz tartozó jegyzetben.

* Előrehaladott korában készített följegyzéseiben János sok olyan jelölést használt, melyet előbb ki kellett betűzni; ilyen ez is, melylyel a XI. axiómát jelöli.

76. o. 10. s. al.—77. o. 13. s. al. A *tér tudománya* előszavából (1834 körül).

77. o. 10. s. al.—78. o. 17. s. és 78. o. 23—25. s. A *Tér tudománya* bevezetéséből (1851).

78. o. 10—17. s. Hogy az euklidikus geometriában növekedő radius mellett a gömbfelület határának a sík és a kör határának az egyenes tekinthető, azt bizonyára már a görög geometerek is tudták. Ámde annak ismerete, hogy az a feltevés, hogy a határgömb sík vagy a határkör egyenes, viszont a párhuzamosak axiómájával egyenlő értékű, újabb eredetűnek látszik. Mint



24. ábra.

ennek előkészítő foka tekinthető az a megjegyzés, hogy az euklidikus sík trigonometriája a gömbi trigonometriából úgy vezethető le, hogy a gömb radiusát vég nélkül növesztjük. Az első szerző kinél e megjegyzésre akadtam EULER, L., *Principes de la trigonométrie sphérique*, Mém. de l'ac. d. sc. de Berlin, 9 (1753), 1755, 223. o. (v. ezt ö. EULER értekezésével, *De mensura angulorum solidorum*, Acta ac. sc. Petrop. 1778, pars II, 1781, bemutatva 1775-ben). Utána következik LAMBERT, L. H., *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik*, Bd. 1, Berlin 1765, 408. o. Továbbá még említendőek: KIES, Johann, *Trigonometria methodo plana et facili exposita*, Tübingen 1760 (v. ö. CANTOR, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 4, 1908, 407. oldalával), MAUDUIT, A. R., *Principes de l'astronomie sphérique*, Paris 1765 (v. ö. BRAUNMÜHL, A. von, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, Bd. 2, 1903, 165. oldalával), FERRONI, P., *Paralleli e principio unico e semplice delle due trigonometrie*, Memorie della Società Italiana (detta dei XL), 12 (1805), 106—183. o. (v. ö. BRAUNMÜHL, i. h. 179. oldalával). GRASHOF munkájában, *Theses sphaerologiae quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem*, Berlin 1806, ez a gondolat csak halványan mutatkozik, de teljes tisztaságában van kifejtve WACHTER, F. L. értekezésében, *Demonstratio axiomatis in Euclidis undecimi*, Danzig 1817 és LEHMANN, J. W. H. könyvében, *Mathematische Ab-*

handlungen, Zerst 1829. Az utóbbiakra nézve l. STICKEL értekezéseit, F. A. TAURINUS, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Heft IX, Leipzig 1899, 426. o. és F. L. WACHTER, *Mathematische Annalen*, 54 (1901), 57. o.

78. o. 9. s. al. SZÁSZ Károlyra vonatkozólag l. a szöveg 65. oldalát.

78. o. 8. s. al. LOBATSCHESKIJ-re vonatkozólag l. e rész XV. és XVI. fejezeit.

79. o. 4—7. s. János 1826 márczius havától 1830 szeptember haváig Aradra volt vezényelve. Az itt említett kidolgozás bizonyára az, melyet 1825 végén vagy 1826 elején WOLTER v. ECKWEHR kapitánynak mutatott be.

79. o. 22—23. s. Hogy Szász Károly Göttingában mikor látogatta meg GAUSST, nem volt biztosan megállapítható. MENTOVICH elbeszélése szerint (l. a szöveg 132. oldalát), ki 1843 augusztus—szeptemberében volt Göttingában, Szász «előtte nem sok idővel» járt GAUSSNÁL. MENTOVICH folytatólag elbeszéli, hogy a BOLYAIRÓL hozott hírei régiebbek a Szászéinál, mert ő már másfél évvel ezelőtt hagyta el Erdélyt. Így tehát Szász látogatásának 1842 február hava és az 1843. év nyara között kellett megtörténnie. Még határozottan ki kell emelnünk, hogy Farkas és János nagyrabecsülték Szász érdemeit, ki nem volt mindennapi férfi. Egy levél töredékében, mely a *Tentamen* nyomtatását közvetetlenül megelőző időből, tehát körülbelül 1830-ból való, Farkas körülbelül a következőket mondja: «Hogy valaki ilyen művet értéke szerint megbecsülhessen, nagyesszűnek kell lennie; ez is bizonyítéka Szász rendkívüli, különös tehetségének (melyet már régen fölismertem); örökös kár, hogy ilyen világításra termett villám és éles elme a pandekták között elpenészedik.» János pedig LOBATSCHESKIJ-nek *Geometrische Untersuchungenjére vonatkozó észrevételeibein* (l. a XV. és XVI. fejezeteket) elbeszélését arról, hogy mi része volt Szásznak az abszolút geometria fölfedezésében, a következő szavakkal vezeti be: «Szükségesnek tartom a' következőket meg említeni a' tárgy [az abszolút geometria fölfedezésének] történetére nézve, melyből ki-világlik, mennyiben és mi része van a tagadhatlanul sok részint ki-tűnő jeles és hatalmas elméjű Szász Károlynak, ki is csak kár, hogy mint mi is, nagy erejét oly sok-felé oszlatja.» V. ö. a 252—253. oldalakkal is.

79. o. 14—11. s. al. A *Tér tudománya* előszavából (1834 körül).

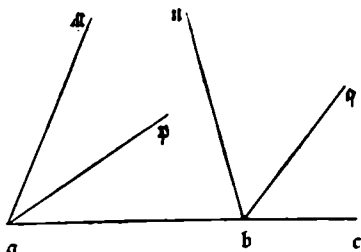
79. o. 8. s. al.—80. o. 16. s. E levél pontos kelte nem volt megállapítható; az adatok János hagyatékában levő egyes czédulákra vannak följegyezve.

80. o. 6. s. al.—81. o. 15. s. A *Tér tudománya* előszavából (1834 körül). Farkasnak ez a levele sem maradt fenn.

81. o. 21—39. s. A *Tér tudománya* egyik bevezetésének tervezetéből (1851).

A bebizonyítás sikertelen kísérletéről János a következőket beszéli el: «Mindenesetre szigorúan bebizonyítottam, hogy, ha am [25. ábra a 238. oldalon] a bn-t metszi, \wedge abn nem $< \wedge$ bam-nél, bc az ab-nek egyenes vonalú meghosszabbítása és \wedge cbn-t, \wedge cam-et, mind a kettőt geometriai arányban

kisebbitjük, például $\wedge cbq$, $\wedge cap$ -ig, úgy hogy $\wedge cbn : \wedge cbq = \wedge cam : \wedge cap$, mondom, hogy akkor ap , bq is metszik egymást. . . Ámde az akkor követett úton arra, hogy a XL. axiómát be lehessen bizonyítani, ennek megfordítottjára is lett volna szükség, hogy t. i. . . a tétel az előbbi



25. ábra.

abn , cam szögeknek az a , b körül a másik oldal felé geometriai arányban történő *megnagyobbítása* esetében is érvényes. Csakhogy nem tudom és majdnem harmincz év lefolyása után sehogyan sem emlékezhetem reá vissza, miképen eshetett meg, hogy én, ki már kilenczedik évem óta, mikor t. i. a matematikát, még pedig EUKLIDÉS elemeit kezdtem tanulni és teljesen biztos voltam annak belátásában, hogy a már bebizonyított tételeknek

megfordításai alkalmazásuk előtt szintén és nem kevésbé szorulnak bebizonyításra vagyis, hogy abból, hogy minden A egyike a B -knek, például, hogy minden ember állat, még sehogyan sem következik, hogy minden B egyike az A -nak, — mondom, miképen tudtam, elvakítva és elragadtatva a rövid ideig igaznak tartott bebizonyítás többi részeinek minden-esetre kiváló elegáncziájától, újságától és meglepő fordulatától, ezt a körülményt bizonyára nem felületességből, hanem hirtelen elhamarkodásból egy pillanattig szem elől téveszteni és megfeledezni arról, hogy az ellenkező eset bebizonyításának szükséges volta is meggondolandó, mire közelebbi és figyelmesebb vizsgálat után a nagy hézagot mindjárt fölfedezve, az akkori hamis és korai egemből lebuktam, részben ugyan nagy szomorúságomra, részben pedig, mert hibám felfedezése az igazsághoz és a célhoz, legalább *negatív* értelemben, csak annál közelebb juttatott, örömmre és vigasztalásomra. Elég az hozzá, hogy egy pillanattig azt gondoltam, hogy a fennebi tételt általánosan bebizonyítottam.

Jegyzetek a XL. fejezethez.

82. o. 5—9. s. A XL. axióma bebizonyítása bevezetéséből (1856).

82. o. 13. s. al. — 83. o. 2. s. Jánosnak 1823 november hó 3-kán atyjához intézett levelét 1884-ben felfedezte dr. SCHMIDT Márton, budapesti tanár, Jánosnak hagyatékában, melyet a Magyar Tudományos Akadémia az 1879—1894. években az ő atyjának, SCHMIDT Ferencz építésznek áttekintés végett bocsátott rendelkezésre. E levél egy részletét először SZILY Kálmán a Matematikai és Természettudományi Értesítő V. kötetében adta ki (1887), 187—188. o. SZILY közleményének német fordítása 1887-ben a Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn V. kötetének 187—189. oldalain *Ein auf den Appendix des Tentamens bezüglicher Brief Johann BOLYAI's vom Jahre 1823* címmel jelent meg. A levél itt közölt helyéről SCHMIDT Ferencz

1894-ben a Természettudósok bécsi gyűlésének tett jelentést és kiadta a *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* IV. kötetének (1897) 108. oldalán. Végül az az emlékkönyv, melyet a kolozsvári egyetem Bolyai János születésének századik évfordulója alkalmából kiadott, tartalmazza az egész levél hasonmását és latin fordítását.

83. o. 4—13. s. SCHLESINGER *Emlékbeszéd*, 66. o.

83. o. 20—28. s. A *tér tudománya* előszavából (1834 körül).

83. o. 13—11. s. al. L. a 90—91. oldalakat és a hozzájuk tartozó jegyzeteket.

83. o. 10—7. s. al. L. STÄCKEL und ENGEL *Th. d. P. F. K. SCHWEIKART und F. A. TAURINUS* cz. fejezetét. SCHWEIKART szintén önállóan jutott a nem-euklidikus geometriára; l. még GAUSS, *Werke*, Bd. VIII (1900) 180—182. oldalait.

84. o. 2—3. s. Az *Anfangsgründe* első kiadása 1757-ben jelent meg.

84. o. 13—16. s. V. ö. evvel Jánosnak egy czédulára írt följegyzését, mely Lemberg, 1832 január havi kelettel van ellátva. «Ő művem irányzatát még akkor is, mikor már az egészet kézhez vette, oly kevésbé ismerte fel, hogy már sok volt, mikor csak azt mondta: hisz ez *csupán* az *S*-nek kidolgozása, habár *Z'* az *S*-nek bizonyos tekintetben csak *egyik* különös esete. Sehogyan sincsen igaza, hogy nem égető szükség, hogy éppen maga az *S* legyen a kiindulópont, mert, a mint ebben a műben ki van mutatva, csak ezen a módon állítható fel egy általánosabb, magasabb rendszer, az *egyellen* lehetséges. Okvetetlenül szükséges tehát, hogy *a*) az [*a* rendszer] kidolgoztassék, valamint *b*) hogy mindenki, a ki belátja, hogy ily módon tökéletes tér-tudományhoz jutunk, mint a mindennapi kenyérnek, megbecsülhetetlen értéket tulajdonítson neki.»

81. o. 16. s.—85. o. 8. s. A *Tér tudománya* előszavából (1834 körül). Ennek kiegészítéséül szolgáljon Jánosnak egy nyilatkozata, mely egy az 1833. évi november havi kelettel ellátott jegyzet hátulsó lapjára van írva.

«Ő [Farkas] őszintén bevallja, hogy ez nem sikerült neki és megengedi, ha nekem sikerült, az nagyon szép és eredeti; hogy nagy nyereség, ha az [euklidikus] geometria igaz volta *F*-ben kimutatható; a [sík] geometria evvel meg van mentve. De mi van a solidometriával? De még jobban szeretne volna, ha így volna a síkkal párhuzamos [æquidistans] felületben, mert ez egyszerűbb és szemléletesebb, különben azon a módon is csinos; csak nehezen hiszi el, nem azért mert hiába próbálkozott vele, hanem mert úgy tünik fel neki, hogy akkor az *F*, *L*-re vonatkozó tételt valahogyan a síkra is át lehetne vinni. Micsoda gondolatok! Hisz mindenki az első pillantásra látja, hogy ha a tétel valamely a síkkal párhuzamos [æquidistans] felületben érvényes, akkor szükségképen a síkban is érvényes.»

85. o. 13. s.—86. o. 13. s. SCHLESINGER *Emlékbeszéd*, 72—73. o.

SCHLESINGER felfogását igazolja Jánosnak egy nyilatkozata, mely a *Tér tudománya* 1851-ben keletkezett bevezetésében olvasható: «Más körülmények és az euklidikus, azaz a XI. axiomán alapuló geometriának más

tulajdonságain kívül, mint a milyenek a kizárólagos egyetlen volta és legnagyobb egyszerűsége [a valóságban való fennállása mellett] főleg az a körülmény szólana, melyet ebben a műben szigorúan bebizonyítottam, hogy t. i. abban az esetben, ha az ilyen döntés mégis lehetséges volna, ez csak az euklidikus rendszer javára eshetnék ki, valahogyan ennek igaz volta vagy az anti-euklidikus, azaz a XI. axióma nem-általános igazságának feltevésén . . . alapuló rendszer nem igaz volta mellett. Ámde mindamellett mindezek a körülmények észszerűen és mindig annál kevésbbé tekinthetők kellően világosaknak és szigorúan döntőknek, mert a dönthetőségnek előbb említett föltevése, és így az euklidikus rendszer mellett való döntésnek erre épített elhatározása egyáltalában és egészen elesik, és csupán a külső valószínűség, mihelyt, mint ebben az esetben a teljes biztosságról és világosságról van szó, nem lehet biztos és csalhatatlan vezérünk, és HOFFMANN [*Kritik der Parallelen-theorie*, Jena 1807] szavaival élve, a szemmérték nem lehet geometriai mértékünk, és a pusztá érzéki valószínűséggel szemben a tudományos tanoknak épen abban áll az előnyük és erejük, hogy sokkal távolabbra érnek, mint a mi határolt külső érzékeink, sőt minden az illető tételben kimondott esetre terjednek ki. És a látszat pl. olyan belső szögek esetében, melyeknek összege annyira közel esik $2R$ -hez, hogy a szem a különbséget sehogyan sem képes észrevenni, itt a metszés megtörténte dolgában nyilván nem is szólhatna bele. Sőt természetesen annak lehetősége is megszűnnék, hogy ilyesmit kérdezhessünk, mert két szög esetében, [melyeknek összege] $= 2R$ bizonyos ugyan, hogy nincsen metszés, itt pedig az egyik szögpár egyik szögének szára a másik szögpár egyik szögének szárával a mi szemünkre nézve egyesítve van, és nyilvánvaló, hogy ép oly jogosan lehetne sok mást az első és egyszerűbb tételek közül, pl. hogy minden háromszögben a nagyobb oldallal stb. és viszont, a geometriai axiómák közé sorolni; de a mint egyetlen geometer sem, különösen, ha a szigorúságot kedvelő EUKLIDÉS-féle iskolához tartozik, ilyen vakmerőséget nem enged meg magának, megfordítva a XI. axióma esetében ép oly kevésbé érezheti magát felmentve bebizonyítása alól, mielőtt azt netalán állítaná.

86. o. 16. s. al.—87. o. 9. s. és 87. o. 12—23. s. A XI. axióma bebizonyítása bevezetéséből (1856).

87. o. 17—15. s. al. L. a XIII. fejezetben a 115—120. o.

87. o. 7. s. al.—88. o. 2. s. B.-G. lev. 102. o.

88. o. 9—10. s. A «művecske» bizonyára azonos az *Appendix*-nek GAUSS hagyatékában talált különlenyomatával, a melyben a sajtóhibák tollal vannak kijavítva. Címe eltérő a *Tentamen*ben foglalt későbbi lenyomatokéitól [l. e. könyv második részének 195. oldalát] és így hangzik:

Appendix prima

Scientia Spatii, a veritate aut falsitate Axiomatis XI^{mi} Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.

Auctore, Auctoris Filio Johanne BOLYAI, de eadem, Geometrarum in Exercitu Cæsareo Regio Austriaco Castrensi Locumtenente Primario.

88. o. 10—21. s. *B.-G. lev.* 106—107. o.

89. o. 4. s.—90. o. 14. s. al. *B.-G. lev.* 109—112. o.

89. o. 11—13. s. Az a kevés följegyzés, melyet GAUSS hagyatékában találtak, ki van nyomtatva művei VIII. kötetének (1900) 202—209. oldalain. Az 1831. évi április—május hónapjaiból valók, mert GAUSS abban a levelében, melyet 1831 május hó 17-kén SCHUMACHERnek írt, elmondja, hogy a párhuzamosak elméletére vonatkozó gondolatait, melyek már negyven évesek, de a melyekből eddig semmit sem jegyzett föl, néhány héttel ez előtt kezdte leírni.

89. o. 12—7. s. al V. ö. evvel Jánosnak a 233. oldalon közlött megjegyzését. Gauss az 1831. évi április—május havi följegyzéseiben (Werke, Bd. VIII. 209. o.) a paracyklust *tropusnak* nevezi; ez a kifejezés jelenti a térítő kört (*ὁ τροπικὸς κύκλος* francziául *cercle tropique*), és GAUSS ezt az elnevezést azért használja, mert a paracyklus a határ a körök és a hypercyklusok között.

90. o. 5—6. s. A tetraeder köbösítésére vonatkozólag l. a 105—115. oldalokat és a hozzájuk tartozó jegyzeteket.

90. o. 10—18. s. A GAUSS hagyatékában talált azok a följegyzések, melyek a sík értelmezésére vonatkoznak, ki vannak nyomtatva művei VIII. kötetének 193—199. oldalain; itt különösen a [3] jegyzet veendő figyelembe, melynek címe *Begründung des Planums*, mert GAUSS ezt valószínűleg 1832 márczius havában vezette be egyik jegyzőkönyvébe, a mikor Farkasnak megírta levelét. Hogy GAUSS már nagyon korán foglalkozott a sík értelmezésével, mutatja tudományos naplójának 1797 július hó 28-iki kelettel ellátott helye, mely így hangzik: «Plani possibilitatem demonstravi.»

90. o. 19—23. s. Jelentés a *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda* cz. művéről, Werke, Bd. II. 177. o.

«Ez a különbség a jobbra és balra között önmagában teljesen meghatározott, mihelyt a síkban az előre és hátra és vonatkozással a sík két oldalára a fenn és lenn már egyszer (tetszés szerint) meg vannak állapítva, habár e különbségre vonatkozó szemléletünket másokkal csak úgy közölhetjük, hogy őket a valóságban meglevő, anyagból való tárgyakra utaljuk.» Jegyzetben hozzát teszi Gauss: «Mind a két megjegyzést már megtette KANT, de nem érthető, hogy ez az éles elméjű filozófus miként vélhette, hogy az elsőben megtalálta ama véleményének bizonyítékát, hogy a tér *puszta*n külső szemléletünk formája, mikor a második olyan világosan ennek épen ellenkezőjét bizonyítja, és hogy a térnek szükségképen, függetlenül a mi szemléletünktől, reális jelentése van.» KANT kijelentése található a *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik*, Riga 1783, 13. §-ában; *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* 1768 című értekezésében pedig KANT megfordítva, a szimmetrikus idomok létezéséből a tér valóságát próbálta bebizonyítani.

90. o. 13. s. al.—91. o. 7. s. al. GAUSS a geometria alapjaira vonat-

kozó eszméinek fejlődésmenetére vonatkozólag l. még STÄCKEL und ENGEL, *Th. d. P.* 215—216. oldalait, STÄCKEL und ENGEL, GAUSS und die beiden BOLYAI *Mathematische Annalen* 49 (1897), 150—152. o. és ENGEL 374—383. oldalait.

92. o. 3—7. s. SZABÓ Péter, *Adalékok GAUSS és BOLYAI levelezéséhez és BOLYAI Farkas életrajzához*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, XXV. k. (1907), 326—338. o.; *Beiträge zum Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und W. BOLYAI und zur Biographie von W. BOLYAI* *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, Bd. XXV. (1907), 226—240. o. Mind a két értekezéshez GAUSS 1832 márczius 6-kán kelt levelének hasonmása van mellékelve. Ez a közlemény GAUSSnak négy «commissionális» levelét is tartalmazza, úgy, hogy evvel BOLYAI Farkas és GAUSS levelezése teljessé vált.

92. o. 13—14. s. *B.-G. lev.* 81. o.

92. o. 17. s. al.—93. o. 7. s. Az *Üdvtan* egyik (az 1851 utáni időből való) előszavából. V. ö. egyszersmind János nyilatkozatával a János főherceghez intézett folyamodvány 1832 május 3-diki tervezetében. Az *Appendix* egy kézi példányába, mely most a Magyar Tudományos Akadémia birtokában van, hátul egy üres lapra János a következő jegyzetet vezette be:

«Nyilvánvaló, hogy nem a szerző hibája, ha az ítélet erről csak azért fonák és kicsinylő, mert az illető bíráló nem mestere a tárgynak».

«A megítélés megkönnyítésére és a készülésre jó lesz, ha azok, kik a dolog lényegét még nem ismerik, szorgalmasan olvasgatják Joh. Jos. Ign. HOFFMANNnak Jénában 1807-ben megjelent «*Critik der Parallel-Theorie*» című művét, melyet báró VEGA cs. kir. alezredes nagybecsű *Vorlesungen*jei 2. kötetének végén ajánl; mert egyébként híres matematikusok nemcsak, hogy egészen elfogultak e tárgy iránt és tudatlanok benne, hanem eleinte érzéketlenek iránta és közönyösen állnak vele szemben. Ezek azonban sohasem tarthatják magukat elsőrangú geometereknek».

93. o. 10—16. s. SCHLESINGER, *Emlékezésed*, 74. o.

Jegyzetek a XII. fejezethez.

94. o. 8—17. s. *B.-G. lev.* 118. o.

94. o. 18—20. s. SZILY, 35. o.

95. o. 5—26. s. BEDŐHÁZI, 304—306. o.

95. o. 15—8. s. al. *Észrevételek LOBATSCHESKIJ Geometrische Untersuchungenjére*.

96. o. 7—17. s. BEDŐHÁZI, 303—304. o.

96. o. 22—17. s. al. *B.-G. lev.* 103—104. o.

96. o. 2—1. s. al. Farkas halála után fiai, János és Gergely, a domáldi birtokot 1600 pengő forintért eladták a domáldi ág. ev. egyházközségnek és 1857-ben a Farkas által hozzászerzett erdőt is bocsátották áruba.

Jegyzetek a XIII. fejezethez.

E fejezet forrásául szolgált főleg STÄCKEL Pál értekezése, *Vizsgálatok az abszolút geometria köréből* BOLYAI János hátrahagyott irataiban, *Mathematisches und Naturwissenschaftliches Archiv*, XX. k. (1902), 160—186. o.

98. o. 4—14. s. L. e mű második részének 99—100. oldalait.

98. o. 17—8. s. al. *B.-G. lev.* 115—116. o.

99. o. 13—23. s. L. e mű második részének 232. oldalát.

99. o. 14. s. al.—100. o. 10. s. Cédula az 1833 körüli időből.

100. o. 17. s.—101. o. 16. s. L. e mű második részének 245—246. oldalait.

105. o. 14—15. s. Ez mindenesetre bizonyos fenntartással értendő; a parasphæra ugyanis abban különbözik az euklidikus sftól, hogy ez a sík egy vele kongruens síkba megy át, ha egyik egyenese körül 180° -kal forgatjuk, a minék megfelelő a parasphæra esetében nem történik. E szerint az euklidikus geometriának csak ama tételei vihetők át közvetlenül a parasphærára, melyeknek bebizonyításánál az ilyen forgatást nem alkalmazzuk; v. ö. ENGEL 337—338. oldalával.

105. o. 19. s. GAUSS C. F. *Commentationes Gottingenses*, Vol. 6 (1828); *Werke*, Bd. IV. 217—258. o.; *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Heft 5, 2. Aufl. Leipzig 1900.

105. o. 28. s. BELTRAMI, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, *Giornale di Matematiche*, Vol. 6 (1868), 284—312. o.; *Opere matematiche* Tomo 1 (1902), 374—405. o.

106. o. 3—4. s. GAUSS a tetraeder köbtartalmának meghatározásáról, mint egyáltalában az abszolút geometriára vonatkozó vizsgálataiból, semmit sem bocsátott közre. A mit a tetraeder köbtartalmának meghatározásáról hagyatékában találtak, az műveinek VIII. kötetében (1900) talált helyet; ez pedig egy rövid följegyzés, *Cubierung der Tetraeder* (228. o.), melyet valószínűleg 1832 márczius havában írt le (v. ö. e rész 109. oldalával) és egy jegyzet, *Astralgeometrie* (232—233. o.), mely hihetőleg az 1841. évből való.

LOBATSCHEFSKIJ, I. M. behatóan foglalkozott a köbtartalomnak az abszolút geometriában való meghatározásával és különösen a háromoldalú gúla köbösítésére vonatkozó terjedelmes vizsgálatokat végzett. L. értekezései: *A geometria alapvonalairól* (1830), német fordítása ENGELNél, 53—59. o., *Képzetes geometria* (1835) és *A képzetes geometria alkalmazása néhány integrálra* (1836), német fordítása LIEBMAN, H.-tól, *N. J. LOBATSCHEFSKIJ-s Imaginäre Geometrie*, Leipzig 1904, 46—49. o. és 82—117. o.

109. o. 13. s. János ehhez azt a megjegyzést fűzi, hogy ha a K test w magasságát határ nélkül növesztjük, akkor a K köbtartalom is minden határon túl növekedik, ellenben a test felszíne véges marad. Hogy ez tévedés, kimutatta DANNMEYER (*Die Oberflächen- und Volumberechnung für den LOBATSCHEFSKIJ-schen Raum*, Dissertation, Kiel 1904, 40. o.)

109. o. 17—8. s. al. Ezt a sejtelmet majdnem bizonyossággá fokozza az a megjegyzés, melyet János a János főherczeghez intézett folyamodvány 1832 május 3-iki tervezetében GAUSS leveléből idézett egyik helyhez fűz (jegyzet a 90. o. 7—9. soraihoz a 234. oldalon); «Az alulírott evvel a feladattal már foglalkozott és GAUSS e következtetéseit helyesnek találta. Ámde még egy erős próba áll előtte.»

112. o. 2. s. al.—113. o. 2. s. V. ö. a 106. o. 3—4. soraihoz tartozó jegyzettel.

114. o. 14. s. FRISCHAUF, *A tetraeder köbtartalma*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő XXI. k. (1903), 309—312. o.; *Die Kubatur des Tetraeders*, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. XX, Jahrg. 1902 (1905), 92—95. o.

115. o. 4—5. s. LOBATSCHESKIJ, *Alapvonalak*, ENGEL 48., 53. és 56. o.; *Alkalmazás*, LIEBMANN 80. és 99. o.; v. ö. DANNMEYER dissertációjával is: *Die Oberflächen- und Volumenberechnung für den LOBATSCHESKIJ-schen Raum*, Kiel 1904, 41—55. o.

115. o. 10—4. s. al. BOLYAI János-, GAUSS- és LOBATSCHESKIJ-nek a tetraeder köbtartalmára vonatkozó vizsgálatait egymással összehasonlítva DANNMEYER mutatta be dissertációjában, *Die Oberflächen- und Volumberechnung für den LOBATSCHESKIJ-schen Raum*, Kiel 1904. Ebben összeállítva találjuk az e tárgyra vonatkozó meglehetősen szegényes irodalmat is: v. FRANK, *Archiv d. Math. u. Phys.* Bd 59. (1876), 76. o.; QUENSEN, *Dissertation*, Göttingen 1884; RICHMOND, *Quarterly Journal*, vol. 34 (1902), 175. o. Azóta SFORZA több értekezést szentelt e tárgynak: *Atti della società dei naturalisti e matematici di Modena*, ser. 4, t. 9 (1906), *Memorie della accademia di Modena* t. 3 (1907), *Atti della accademia di Torino*, t. 43 (1908), 1047. o., t. 44 (1909), 957. o., *Atti della soc. dei nat. e mat. di Modena* ser. 4, t. 9 (1908), *Periodico di matematica*, vol. 24 (1909).

Végül még rámutatunk LIEBMANN tárgyalására, *Nichteuklidische Geometrie*, Leipzig 1905 (2. Aufl. 1912) című művének 156—162. oldalain.

115. o. 8—4. s. al. LOBATSCHESKIJ-nek *A képzetes geometria alkalmazása néhány integrálra* (1836) című értekezése majdnem egész terjedelmében a tetraeder köbtartalmának analitikai előállítására szolgáló integrálképleteknek van szentelve.

116. o. 3—11. s. A «praktikus eldöntés» kérdésével GAUSS is foglalkozott. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN *GAUSS zum Gedächtnis*, Leipzig 1856 cz. művének 81. oldalán elbeszéli: «A geometriát Gauss csak úgy tekintette következetes épületnek, ha élére tesz a párhuzamosak elméletét, mint axiómát; ő azonban arra a meggyőződésre jutott, hogy ez a tétel nem bizonyítható be, de tapasztalatból tudjuk, pl. a Brocken, Hohenhagen, Inselberg háromszög szögeiből, hogy közelítőleg igaz.» Továbbá SCHWEIKART (GAUSS, Werke, Bd. VIII, 160. o.) az euklidikus geometriával az *astralis* geometriát állította szembe, a melyben a Bolyai-féle *i-n*ek

megfelelő állandó a mindennapi életben előforduló távolságokhoz képest mérhetetlen nagy. LOBATSCHESKIJT illetőleg l. a szöveg 152—154. oldalait, a mely hely főleg az 1840-ben megjelent *Geometrische Untersuchungen* vonatkozik, de LOBATSCHESKIJ már az *Alapvonalakban* (1829/30) nyilatkozott ilyen értelemben (ENGEL 22—25. o.); utolsó művében, az 1856-ban megjelent *Pangéometrie*-ben (LIEBMANN német fordításában, Ostwald's *Klassiker der exakten Wissenschaften*, Heft 130, Leipzig 1902, a. 76—78. oldalakon) erre a tárgyra visszatért. Ujabban foglalkoztak e kérdéssel, SCHWARTZSCHILD K., *Über das zulässige Krümmungsmass des Raumes*, Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, Bd. 35, Berlin 1900, 337—347. o. és HARZER, P., *Die Sterne und der Raum*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17 (1908), 237—267. o.

Mig az épen felsorolt vizsgálatok az álló csillagok körében végzett mérésekre támaszkodnak, BOLYAI Farkas a *Tentamenben* (1832) más szempontot emelt ki, mely eddig még nem részesült a megérdemelt méltatásban; azt. t. i. hogy a bolygók mozgásából a tér természetére lehetne következtetni, mert már nagyon csekély eltérés az euklidikus tértől azt idézné elő, hogy idő múltán a bolygók észrevehetően eltérnének euklidikus helyüktől; v. ö. a második rész 99. oldalával és János megjegyzését e rész 154—155. oldalán. A bolygók állandó görbületű terekben végbemehető mozgásának vizsgálatát megkezdtek LIPSCHITZ, *Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature*, Quarterly Journal, 12 (1873), 349—370. o.; CAYLEY, *Note in illustration of certain general theorems obtained by Dr. LIPSCHITZ*, Quarterly Journal, 12 (1873), 346—349. o., Papers, vol. 9, 110—112. o. KILLING, *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen*, Journal für reine und angewandte Mathematik, 98 (1885), 1—49. o.; NEUMANN, C., *Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze auf den Fall, dass die Bewegung auf einer Kugel stattfindet*, Leipziger Berichte, 38 (1886), 1—2. o. PERHAGMÉN, *Om några med det Poincaré'ska fallet af trekkörparsproblemet beslägtade dynamiska uppgifter* (Néhány a három test problémájának POINCARÉ-féle esetével kapcsolatos dinamikai problémáról), Bihang till Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, 15, I. oszt. Stockholm, 1890, 13. sz.; LIEBMANN, H., *Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im Nicht-Euklidischen Raum*, Leipziger Berichte, 54 (1902), 393—423. o. és *Die Zentralbewegung in der Nicht-Euklidischen Geometrie*, Leipziger Berichte, 55 (1903), 146—153. o.; v. ö. továbbá STÄCKEL történeti-kritikai megjegyzéseivel, *De ca mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat*, a kolozsvári egyetemnek BOLYAI János születésének századik évfordulója alkalmából (1903) kiadott emlékkönyvében és *Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12 (1903), 476. o.

Végül még reá kell mutatnunk POINCARÉ skeptikus nyilatkozataira a

La science et l'hypothèse, Paris 1902 (*Tudomány és föltevés*, fordította SZILÁRD Béla, Budapest 1908) V. fejezetében.

116. o. 20—22. s. B.-G. lev. 115—116. o.

119. o. 10—13. s. V. ö. BOLYAI János, *Értekezés a képzetes számokról* 4. §-ának végével. e mű második részének 242. oldalán.

Jegyzetek a XIV. fejezethez.

E fejezet forrásul szolgált főleg STACKEL értekezése, *A képzetes számok elmélete* BOLYAI János hátrahagyott irataiban, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 17. k. (1899), 259—292. o.

121. o. 10—8. s. al. Így pl. A XI. axióma bebizonyítása bevezetésében (1856) ezt írja János: „Mikor vele [az apával] később még több dolgot, főleg a két háromszögtannak, egyáltalában a tér tudományának fölfedezését közöltem, e miatt, a helyett, hogy örült volna, méltatlankodni kezdett, a mi engem becsületes törekvésem tudatában, minthogy akkor [1829 óta] már főhadnagy, tehát jellemes férfi voltam, természetesen nagyon meglepett és a megütközésig boszantott, a mi nála és azután nálam is heves kitörésekre adott okot...”

122. o. 7. s. al. BUÉE, *Mémoire sur les quantités imaginaires*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Part I, London 1806, 23—88. o. MOUREY, C. V., *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*, Paris 1828. WARREN, J., *On the geometrical interpretation of the square roots of negative quantities*, Cambridge 1828., v. ö. a *Phil. Trans.*, London 1829, 241—251. oldalával. Maga DROBISCH is 1848 szeptember 5-én a lipcei tudományos társaságnak ily című értekezését terjesztette elő: *Über die geometrische Konstruktion der imaginären Größen*, *Leipziger Berichte*, Bd 2 (1849), 171—179. o.; ez az értekezés az irodalomra vonatkozó adatokat is tartalmaz. V. még ö. a következőkkel: HANKEL, H., *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen*, 1. Teil, Leipzig 1867 és *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome 1, volume 1, fascicule 3, *Nombres complexes*, exposé d'après l'article allemand de E. STUDY, par E. CARTAN, 337—338. o.

123. o. 11—32. s. János egy leveléből, melyet 1841 december 30-án HASSE tanárhoz, a JABLONOWSKI-féle társulat akkori titkárához intézett, kitűnik, hogy ez a dolog 1837 október 17-én esett meg; v. ö. a 126. o. 31—32. soraihoz tartozó jegyzettel.

125. o. 19. s. Az eredményt kihirdették az *Allgemeine Literaturzeitung* *Intelligenzblattjának* (Halle-Leipzig) 5. kötetében (1838) a 169. hasábján.

126. o. 18—30. s. Nem tartottuk szükségesnek, hogy Farkas értekezésével részletesebben foglalkozzunk, de azért a hatvány, gyök és logaritmus fogalmaira vonatkozó fejtegetéseit mégis kivonatossan közöljük itt. Ezekről értekezésének 16. §-a szól. A szorzásból és osztásból — mondja

Farkas — származik a dignitas (hatvány) szűkebb fogalma. Hogy pedig a hatvány általános fogalmát nyerje, az

$$f(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

végtelen sort vizsgálja, melynek az a minden véges értékére nézve van értelme és az $f(a)$ függvény egy határozott értékét szolgáltatja. Ha már most $f(b)=v$ és $f(bc)=V$, akkor azt mondjuk, hogy V a v mennyiségnek a c indexhez tartozó dignitasa és jelölésére szolgál v^c . Fordítva mondjuk, hogy v a V mennyiségnek a c indexhez tartozó gyöke és jelölésére szolgál $\sqrt[c]{V}$. Végül c neve legyen: a V -nek a v alapra vonatkozó logaritmus. Ezekhez az értelmezésekhez különböző kérdések fűződnek; még pedig vajjon minden (tisztá vagy vegyes) v -nek megfelelőleg van-e olyan b , hogy $f(b)=v$, és általánosabban, vajjon a három mennyiség, c , v , V , közül bármelyik kettőhöz tartozik-e egy harmadik, és ha igen, a keresett mennyiségnek milyen természetű és hány értékét nyerjük? Erre következik az e alapú, azaz természetes logaritmusok bemutatása és a modulus értelmezése. A 2. scholionban, a melylyel a rosszul fenntartott kéziratnak vége szakad, először is C , β és b alatt meghatározott állandókat értve, valamennyi olyan mennyiséget, mely az $f(\beta x) = C$ egyenletet kielégíti, x -val jelöl és azután a következő tételeket mondja ki:

1. Minden $f(b\beta x)$ és csakis az ilyen a C mennyiségnek, azaz az $f(\beta x)$ -nak a b indexhez tartozó dignitasa; csakis C minden $f(x)$ -nak a β indexhez tartozó dignitasa; ugyanaz a C az $f(\beta)$ mennyiségnek bármelyik x indexhez tartozó dignitasa.

2. Csakis C , azaz $f(\beta x)$ a b indexhez tartozó gyöke minden $f(b\beta x)$ -nak; csakis minden $f(x)$ a β indexhez tartozó gyöke a $C=f(\beta x)$ mennyiségnek; csakis $f(\beta)$ a x indexhez tartozó gyöke a $C=f(\beta x)$ mennyiségnek.

126. o. 31—32. s. János értekezésének teljes címe:

Responsio ad quæstionem, discussionem dubii, num, et quibusnam conditionibus, quantitates vulgo pro imaginariis habitæ, in geometria occurrentes construi possint necne, concernentem, ab Inclita Societate Scientiarum Jablonoskiana Lipsiæ anno 1837 notam.

Idézni ezt az értekezést a *Responsio* néven fogjuk.

1841 deczember hó 31-én Domáldról a következőt írta János a lipcei HASSE tanárnak, a JABLONOWSKI-féle társulat titkárának: «Mint hogy az 1837 évi október hó 17-én a *Fructus non nisi maturi decerpenti* jeligével ellátott, a Tekintetes JABLONOWSKI-féle Tudós Társaságnak előterjesztett dissertatio: A képzetes mennyiségek megszerkesztése a geometriában, nem volt olyan szerencsés, a mire nagy súlyt helyeztem, hogy a Tekintetes Tudós Társaság tetszésében részesüljön, felkértem BOLYAI Farkas tanár urat, ki épen most hasonló ügyben írt Lipcsébe, hogy eszközölje ki, hogy az említett dissertatiót — szerzőjének ezennel én vallom magamat — kegyesen kezemhez juttatni méltóztassanak, mert, a mint benne említve is van, mint váltólázban szenvedő beteg sietve megszerkesztettem, vagyis inkább már

kész eszmékből összeraktam, úgy hogy pontos másolatát sem tarthattam meg és mégis forró vágyam, hogy a benne feltalálható és a Tekintetes Tudós Társaság által megjelölt hiányoktól megtisztítsam. Abból a válaszból azonban, melyet Nagyságod BOLYAI tanár úrnak írt, megtudtam, hogy csak a fentebb említett dissertatio szerzője maga kérheti a Tekintetes Tudós Társaságtól annak visszaadását.»

Erre a levélre, melyet a herczeg JABLONOWSKI-féle társaság irattárában őriznek, reá van jegyezve: «Válasz ment 1842 február 15-én és az értekezés visszaküldetett.»

128. o. 10. s. al.—129. o. 12. s. HAMILTON, R. W., *Theory of conjugate functions, or algebraic couples, Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 17, Dublin 1837, 393—423. o. (Read June 1, 1835).

129. o. 17—28. s. V. ö. a *Responsio* 11. §-ával, második rész 247—249. o.

130. o. 5—9. s. János ama további kísérleteiről, melyek a képzetes mennyiségek elméletének kiépítésére irányulnak, a XVIII. fejezet tartalmaz rövid jelentést; különösen rámutatunk a *Responsio* kidolgozásának töredékére, melyet a 256—259. oldalakon a 176. o. 7—12. soraihoz tartozó jegyzetben közlünk.

Jegyzetek a XV. fejezethez.

E fejezetnek és a következőnek forrásául szolgált STACKEL Pál és KÜRSCHAK József értekezése, BOLYAI János észrevételei LOBATSCHESKIJ Mikhálynak a parallellákra vonatkozó vizsgálataira, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 20. k. (1902), 40—67. o.

131. o. 5—11. s. V. ö. ENGEL 419—420. oldalaival. GAUSSnak SCHUMACHERhez intézett levele ki van nyomtatva GAUSS műveiben, VIII. k., 238—239. o.

131. o. 13—4. s. al. *B.-G. lev.* 130. és 134. o.

132. o. 24. s. Szász Károlyra vonatkozólag l. a 65. és 77—79. oldalakat, valamint a hozzájuk tartozó jegyzeteket.

132. o. 5—2. s. al. A «még egészen új külsejű könyv» a legnagyobb valószínűséggel LOBATSCHESKIJ, *A képzetes geometria alkalmazása néhány integrálra* (1836) című értekezésének a GAUSS hagyatékában talált különlenyomata; még pedig, a mint ENCKEhez 1841 febr. hó 1-én intézett leveléből (Werke, Bd VIII, 232. o.) kitűnik, GAUSS ezt az értekezést KNORN, Ernst, physikustól kapta, ki 1832—1846 a kázáni egyetem tanára volt; v. ö. ENGEL 437—441. oldalaival.

134. o. 11—13. s. Szász Károly 1842 február hava és 1843 augusztus hava közt járt GAUSSnál; v. ö. a 79. oldallal és a hozzátartozó jegyzettel.

134. o. 14—17. s. Lásd *B.-G. lev.* 199—200. oldalait és a szöveg 160—161. oldalait.

135. o. 15—13. s. al. A bevezetés egy részét német fogalmazásban tartalmazza az Üdvtan egyik előszava, mely az 1851 utáni időből származik.

136. o. 7 10. s. V. ö. a *Tentamen*. T. II. editio secunda 412—413.

oldalaival; ott olvasható: A' fenn említett *Arithm. Elejében* XVIII. lapon javaltatott *egy írásmód*; melyben nem csak összetett betű ne legyen, hanem egy betű se írójék kétszer egymás-után, sőt egy betű felett is, se pont, sem ékezet ne legyen, még is minden hangzónak, még pedig a' rövidnek a' hosszútól megkülönböztetett jele legyen, a' nélkül, hogy új betű vétessék fel; ott a' hosszúak szintúgy mint a' kétszer irandók, fölül vagy alól (a' mint az írás' folyása kívánja) nyújtott egyenes vonással jelentetnek ki; a' többi egy a' folyó írásra (némelly betűnél vízirányulag vive, másnál fölülről szállitva) alkalmas jeggyel tétetik ki: ma is valami ilyen formát kívánnék, hogy nyelvünk kimondása meghatározott, 's legalább írásunk' módja első lenne; de a *gy* kijelentésére inkább lehetne *d* mint *g* betűt az említett jeggyel venni, mivel *adjon* könnyen változik *aggyonra*, de *vágjon* helyett nem mond senki *vággyont*; — 's *vagyon* még kettő mellynek jegy kell; ezen szóból megtetszik *edzeni*, *findzsia*, (az utolsót egy 6 éves gyermek mondotta, hogy egyikkel se lehet le írni, az a' mi mint *giorno* mondatik): *zs* volna *z* azon jeggyel, *edzeni* íródne *z*-vel, de azon jegy megkettőztetné a' közepén, ez úgy is ritkán jön elő; valamint a' *giorno* hang, mellyet *g* eleibe tett jeggyel lehetne ki tenni.»

Jegyzetek a XVI. fejezethez.

138. o. 17—21. s. Valóban GAUSSON, BOLYAI JÁNOSON, LOBATSCHESKIJ kívül még SCHWEIKARTOT (1819 körül), TAURINUST (1829) és talán FOURIERT is kellene említeni, az utóbbira vonatkozólag L. GAUSS, Werke, Bd VIII, 188—189. o.

138 o. 14—12 s. al. LITTHROW, Josef Johann (1781—1841) az 1810—1816. években a kázáni egyetemen a csillagászat tanára volt. A fiatal LOBATSCHESKIJ, ki 1793-ban született, 1807—1812 a kázáni egyetemen tanult és azután ugyanott mint a matematika és csillagászat magistere tanított, jóindulatú pártfogásában részesítette; úgy látszik azonban, hogy később LITTHROW és LOBATSCHESKIJ között közvetlen viszony nem állott fenn; v. ö. STÄCKEL megjegyzésével ENGEL 426. oldalán.

139. o. 1—3. s. LOBATSCHESKIJnek 1829—1830. évi közleménye a Kázáni Híradóban, A *geometria alapvonalairól* című értekezése, a mely valóban a képzetes geometriának részletes tárgyalását tartalmazza. «Az új geometria» — mondja LOBATSCHESKIJ (ENGEL, 24. o.) — «ha a természetben nem is áll fenn, mindazonáltal képzeletünkben fennállhat és ha a valóságos méréseknél használaton kívül marad is, mégis tág mezéjét nyitja a geometria és analízis egymásra való alkalmazásának.» Mikor LOBATSCHESKIJ az 1815. és 1816. években előadásokat tartott a geometriáról, még az euklidikus geometria álláspontját foglalta el, sőt különféle módon próbálkozott a XI. axióma bizonyításával. Az 1823. évben fölismerete, hogy a bizonyításra irányuló eddigi kísérletei hibásak, de valószínűnek látszik, hogy akkor új geometriájának, ha közel is járt hozzá, még nem volt birtokában. Erre az új geometriájára vonatkozott értekezése, *Exposition*

succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse des parallèles, melyet 1826 február 12-én a kázáni egyetem physika-mathematikai karának előterjesztett: a Kázáni Híradóban közölt értekezés, mint LOBATSCHESKIJ megjegyzi, (ENGEL, 1. és 21. o.) az *Exposition* kivonata; v. ö. ENGEL 371—378. oldalaiival.

139. o. 7—8. s. Szász Károlyra vonatkozólag l. a szöveg 65. és 79. oldalait és a 79. oldalhoz tartozó jegyzetet.

143. o. 1—15. s. ENGEL, 8. o.

143. o. 17—21. s. ENGEL, 112. o.

144. o. 17—19. s. *Études géométriques sur la théorie des parallèles* par N. J. LOBATSCHESKIJ, traduit de l'allemand par J. HOUEL, Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. 4 (1866); a különlenyomat 21—22. o.

144. o. 19—21. s. ENGEL, 189—191. o., v. ö. ENGEL, 33. oldalával is.

145. o. 12—14. s. ENGEL, 20. o.

146. o. 4—3. s. al. A láncztörtbe való kifejtést, a melyre LAMBERT (1767) és LEGENDRE (1794) támaszkodtak, hogy a π irracionális voltát bebizonyítsák már EULER szolgáltatta értekezésében, *Dissertatio de fractionibus continuis*, Comment. acad. Petrop. 9 (1737), 1744, 98—137. o.; l. még RUDIO, *Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels*, Leipzig 1892, 55—56. o., KÜRSCHÁK József, *A körmérés elmélete és története*, Mathematikai és Physikai Lapok, 1—3. k. (1892—1894) és PRINGSHEIM, *Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π* , Münchener Berichte 28 (1898), 325—337. o.

149. o. 9—15. s. A *Pangéométrie* német fordításában, melyet LIEBMAN H. készített, (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, 130. f.) az illető egyenletek a 11., 24. és 34. oldalon találhatók.

150. o. 1—6. s. A

$$\lg \frac{1}{2} F(a) = e^{-a}$$

egyenlet (Π helyett itt LOBATSCHESKIJ F -et ír) ENGELNél a 20. oldalon, a

$$s' : s = e^{-x}$$

egyenlet pedig a 33. oldalon található. Az *Új alapvonalak*nak említett helye ENGELNél a 189—191. oldalakon olvasható.

152. o. 10—16. s. V. ö. a XVIII. fejezet fejtegetéseivel a szöveg 181—183. oldalain.

152. o. 17—26. s. V. ö. a 115. o. 25—26. soraihoz tartozó jegyzettel.

154. o. 11. s. al. — 155. o. 10. s. Az a gondolat, hogy a bolygók mozgása is vétessék figyelembe, Bolyai Farkastól ered, ki azt a *Tentamenben* kimondta, l. a második rész 99. o. Az a javaslat, hogy az abszolút tér mechanikájában a tömegvonzás fordítva arányosnak legyen veendő annak a gömbnek a felszínével, melynek radiusa az egymást vonzó testek távolságával egyenlő, LOBATSCHESKIJ *Új alapvonalai*ban (1835) is előfordul, ENGEL, 76. o.; azokra a következtetésekre vonatkozólag, melyeket újabb időben ebből a törvényből

levontak l a 245. oldalon felsorolt irodalmat, különösen LIEBMAN H., értekezéseit.

156. o. 13—23. s. V. ö. evvel a szöveg 105. oldalát és a hozzátartozó jegyzeteket a 243. oldalon.

156. o. 13. s. al. — 157. o. 13. s. ENGEL, 392—393. o.

157. o. 16—40. s. ENGEL, 393. o.

157. o. 1. s. al. — 158. o. 15. s. ENGEL, 393—394. o.

Jegyzetek a XVII. fejezethez.

159. o. 11—23. s. B.-G. lev. 128. o.

159. o. 23. s. Gauss (a GAUSS-archivumban scheda Aa jelölés alatt őrzött) egyik jegyzőkönyvébe, melyet 1798 július hava óta használt, a következő verset jegyezte be:

*Thus let me weep alone,
Thus unlamented let mi die,
And not a stone
Thells where I lie.*

Vajjon ez a mondat, «még kő sem szól rólam», nem-e czélzás a göttingai évek alatt folytatott közös angol olvasmányra? (SCHLESINGER közlése.)

159. o. 7. s. al. — 160. o. 10. s. B.-G. lev. 132—133. o.

160. o. 13—32. s. B.-G. lev. 137—139. o.

160. o. 6—5. s. al. Farkas nyugalomba vonulása után állását helyettesekkel töltötték be; még pedig 1851 október havában Szász Károlylyal (l. 66. o.) és ennek 1853 október 23-án bekövetkezett halála után HEGEDŰS Ferenczczel. HEGEDŰS 1855 márczius havában állásától visszalépett és a következő évben meghalt. 1856 június havában végre MENTOVICH Ferenczet választották meg Farkas tulajdonképeni utódjául, ki ezt az állást egészen 1879 december hó 15-én bekövetkezett haláláig töltötte be.

161. o. 2—5. s. B.-G. lev. 197. o.

161. o. 6—9. s. A jelentést azokról az észleletekről, melyeket KREIL és segédei 1848-ban Ausztriában és Magyarországon végeztek, tartalmazza KREIL, KARL és FRITSCH, Karl műve, *Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate*, 3. Jahrg., 1848, Mähren, Schlesien, das nördliche Ungarn, Siebenbürgen, Galizien. Prag 1850, 131—134. o. Végzett munkálatai: 1. mágneses meghatározások (deklináció, inklináció, horizontális intenzitás), 2. az idő, hosszúság és szélesség meghatározásához szükséges csillagászati észlelések, 3. barometerállások összehasonlítása és magassági meghatározások. Maros-Vásárhely az észlelés helye. «Bolyai tanár úrnak a minoriták temploma mellett fekvő kertje volt».

161. o. 10—24. s. B.-G. lev. 196—197. o.

161. o. 10—8. s. al. BEDŐHÁZI, 276. o.

161. o. 2. s. al.—162. o. 7. s. B.-G. lev. 143. o.

162. o. 4. s. al.—163. o. 4. s. B.-G. lev. 144. és 146. o. A vers ere-

deti latin szövege a következő:

Ima et summa simul penetrans vix exstitit alter
 Utraque digna etiam promovit acumine eodem,
 Externum haud quaerens fulgorem, luce reperta,
 Quam mors frangendo fracta ipsa extinguere nequit.
 Atque Deo gaudens (ut Newton) pectore puro
 Illius est socius per coelos ultiores.

163. o. 8—11. s. *B.-G. lev.* 147—148. o.

163. o. 17—22. s. V. ö. a 92. o. 3—7. soraihoz tartozó jegyzettel.

163. o. 24—25. s. Farkas legjobb gyászjelentései azok, melyeket ifjúkori barátjáról, báró KEMÉNY Simonról (1824-ben) és Szász Károlyról (1853-ban) írt. Mutatványul közöljük itt a Szász Károlyról írt jelentését (Sz. 31—32. o.).

*«A mathesis és physika ritka jeles
 tanára Szász Károly nincs többé!»*

«Zúg a tölgyfát derekban kitörő szélvész; de az élet órát mozgató súlyt, mikor szinte a földre ér, se látjuk. — Nyomorúlt halandó! vedd észre, hogy láthatlan nyílzáporban állasz, — nézd az óriási erősséget egyszerre össze omolva, s mint egy hajdani vár romjai előtt tisztelettel telve el, tanuld meg semmi földivel nem kevélyedni el! hanem megértve a mulandóság leczkéjét, alázd meg magad az örökkévalóság előtt, s reszkető szárnyakkal emelkedj az egyedül álló Isten felé!»

«Hallod a halotti harangoknak egy felsőbb templomba hívását a minden világokból egybe gyűlő hivekhez! a ritka-hiv párját véletlen elvesztett Özvegynek s a legjobb Atyában reményöket vesztett árváknak keserves sírását. — messziről jönnek barátjai könnyüket egyesíteni az ittlévőkéivel s nedvesek mindenfelé a szemek.»

«Oh, de nem lehet, hogy a mindenek feletti jóság úgy sebezzen, hogy balzsamot ne hozzon!»

«A születés és halál két vízüntő nemtó: amaz az új csemetét öntözve a földi életre ennek adja által. hogy egy felsőbbre keresztelje.»

«Akármely csudálatos compositio legyen is ez az élet; sírás az ouverture, vonaglás a finale, s közbe a pokoli dissonantiát még inkább éreztető mennyei accordok váltják fel: a földre bölesen van rendelve.»

«Tovább lévén a czél, e földi pályának olyannak kellett lenni, hogy át is mehessünk, s meg is válhassunk tőle: — semmi rang nem ment az élet adójától. Szenvednünk kell, hogy el ne kevélyedjünk — látva, hogy senki se tudja, hogy holtig mi éri — sokszor az oltó kertész sebez, hogy nemesítsen, s a Csőtörtököt [menybe menetel napját] megelőző Péntek [keresztre feszítés napja keresztfáján van a menybe vivő út.»

«Az elveszett után felnéző szemekből hulló könnyük közt nyugodjanak meg a megsebzett szívű keservesek!»

«Ifjak! a csaknem minden Musák egyesült lángja aludt ki — a ritka

könyü, villámsebes, s annyiféle ész, s annyit bíró testi s lelki erőteljes munkásság reánk nézve nincs többé, — megnémult a 32 évig tartott hivatalkodása alatt fáradhatatlanul tanító nyelv, mely a természet örök igazságait oly elragadólag s kristálytisztaságban szőllotta hozzátok — egy hatalmasabb tanító — a halál törölte le őt azon nagy tábláról, melyre a legfelsőbb kéz írta volt, — maradjon a tőle vett tudomány virágzástokat fölülélő emlékül, hogy tapasztalatlan korotokban az V-ik parancs véneinek útmutató lámpájára figyelvén, mikor eljő a minden virágot elfonnyasztó szél — oly készek legyetek melegebb napfényre költözni, mint a csak sárfészket hátra hagyó fecske, s mint felejtethetlen tanítótok, ki élte délpontján, alig 56 éves korában, egy felsőbb szóra még nyomatni kezdett munkáját is azonnal félbe hagyván, kész vala visszaadni sárházát az anyaföldnek, folyó október hó 26-ik napján estvéli 8 órakor.»

164. o. 8—9. s. Az érmék, melyekről itt szó van azok, melyeket V. Győrgy. hannoveri király. GAUSS halála után ennek emlékére ezüstből és bronzból veretett. A Gauss műveinek címlapját díszítő fejet innen másolták. Az érmék fölírása: Carolus Fridericus GAUSS, nat. MDCCLXXVII Apr. XXX, ob. MDCCCLV Feb. XXIII.

164. o. 5. s. al. Azok a levelek, melyeket János az öcscsének, Gergelynek írt. most a Magyar Tudományos Akadémia birtokában vannak.

165. o. 1—15. s. BÉDŐHÁZI 360—361. o.

165. o. 16—20. s. VASS Tamás, *BOLYAI utolsó napjai*, Marosvásárhelyi Füzetek, új sorozat, 2. füz., 119—125. o. (felolvasta BOLYAI Farkas halálának 40-dik évfordulóján a KEMÉNY Zsigmond Társaság 1896 nov. 22. tartott felolvasó estélyén), újra kinyomtatott a Budapesti Napló 1901 július 6-iki számában.

169. o. 19—41. s. A *XI. axióma bebizonyítása* bevezetéséből (1856).

169. o. 39—41. s. A *Tentamen* az *Appendix*-en kívül tartalmazza ennek egy toldalékát is, a melyben Farkas Jánosnak egy közlését mutatja be (l. e mű második részének 232—235. oldalait) és azonkívül még a megjegyzések egész sorozatát, melyeket Farkas mint az *Appendix* szerzőjének tulajdonát említ, mint pl. a sík és az egyenes magyarázatára vonatkozót (e mű második részének 57. oldalán) és a geometriai alakok hasonlóságának értelmezésére vonatkozót (második r. 59. o.).

Jegyzetek a XVIII. fejezethez.

A János előrehaladott korából származó matematikai vizsgálatokról szóló jelentés forrásául főleg STICKEL értekezése szolgált: *BOLYAI János tércelmélete*, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 21. k. (1903), 135—145. o.

170. o. 5—6. s. *B.-G. lev.* 154. o.

170. o. 7. s. Az 1843. évi május hó 31-ikén kelt végrendeletével «sok évi szolgálataiért hegedűjének kivételével általános örököséül» gazdaszonyát, ORBÁN Rozáliát rendeli.

170 o. 15—9. s. al. Az 1852 november hó 26-ikán kelt szerződés Szabó Péter úr birtokában van.

171. o. 12—14. s. Szász Károlyra vonatkozólag l. a 65. és 79. o., valamint az odatarozó jegyzeteket.

171. o. 19—20. s. Hogy Farkas Jánosnak munkálkodását a domáldi időben is becsülte és elismerte, mutatja az *Arithmetika eleje* 1843-ban megjelent második kiadásának egy helye (185. o.): «... az említett *Appendix*, foliántokat érő kis munka, a' tiszta igazsághoz hív mér-tanász előtt oly szép, szükséges, eredeti és colossális mív, hogy annak szerzőjétől hasonlókat várni, sőt igényelni lehet. — Hány nagy fők hiába próbálták a' legújabb időkig, az EUCLIDES' alkotmánya edjik fő alapját biztosítani? 's csak edj feltétlen álló űrtan maradott; míg az említett kis munkában, attól független minden esetre igaz űrtan állítottatott fel; 's megmutattatott, hogy van oly terj, melyben az egész EUCLIDES systemája is igaz; 's a' gömbi háromszög-tan, a gömb terje 'sat, az Euclidesi XI. Axtól független hozatott le, 's ezen XI. Arnak (melynek igazsága, a' többivel szintűgy megállhat, mint a' nem igazsága) nem igazsága' esetére a' kör négyszögítettett, 'sat. Ezen munka a' nagy GAUSS dicséretét megnyerte: de még kevesen látják becsét, holott szó-szaporítás nélkül, remek-tisztán van írva.»

171. o. 5—3. s. al. Közelebbi fölvilágosítást János betegségéről szolgáltat atyjához intézett levelének következő helye:

«Nyavalyámat illetőleg is irok már, hogy-létem iránti kérdésére valamit; a' nélkül, mint > gondok között értéktelenebbnek tartotról, alig mervén avval alkalmatlankodni. A' kiütések ugyan nagyobbára rég, még az első (szám szerint öszvesen 9, mind csak 3 egymásutániból álló megszakasztott) Jodos feredések 's Jod be-vétalkor, az itt (erga restitutionem) át küldött receptek szerint, el-múltak, noha néhány >-baknak mintegy lencsényi nagyságúlag quasi hus-színűleg látszik a helyje. De a mérges viszketegség, égedelem meg-volt (noha némileg változott modorban) ... Arra a D[oktor] az itti Rp. szerinti kénésős mosót rendelé ... De én az egész kenőcsös [kénésős?] mosót nem szerettem, zsibbasztó rosztatását éreztem, salivatíót is kaptam volt tőle ...

173. o. 17—9. s. al. Egy czédulán összeállította János azokat a problémákat, a melyekkel akkor foglalkozott, és a melyekről vélte, hogy megoldásuk hatalmában van:

1. Valamennyi egyenletnek algebrai úton való megoldása.
2. Minden differenciál véges integrálása.
3. Minden végtelen sor véges összegezése.
4. A körterület általános quadraturája valami 6 módon.
5. Valamennyi fajtájú törzsszám véges alakja.
6. Minden véges egyenletnek, vagy egyenletrendszernek raczionális megoldása.
7. A XI. axióma bebizonyítása.
8. Valamennyi egyenlő polyeder végszerű egyenlőségének bebizonyítása.

9. A mozgás tökéletes tana.

10. A folyadékok tökéletes tana.

Hogy János valóban azt képzelte, hogy a körnek körző és vonalzó segítségével való quadraturáját fölfedezte, mutatja egy értekezésnek szánt, fennmaradt következő címlap:

«*Des Kreises Quadratur und zwar algebraische und zwar durch bloßes Quadraturwurzelausziehen und somit durch geometrische Konstruktion, und zwar im allerstrengsten Verstande. Von Johann BOLYAI von BOLYA, des k. k. Geniestabes Hauptmann in Pension.*»

Úgy látszik, hogy valamelyik leggonoszabb fajtájú matematikai dilettáns könyve veszedelmes befolyást gyakorolt Jánosra. Hagyatékában ugyanis megvan a következő mű: VOGEL, A., *Mathematiker in Leipzig, Entdeckung einer numerischen Auflösung aller höheren endlichen Gleichungen von jeder beliebigen algebraischen und transzendenten Form*, Leipzig 1845.

179. o. 3—2. s. al. Mutatványul Jánosnak következő följegyzése szolgálhat:

«Hogy valamely határozott integrál határai mennyiben lehetnek képzetesek, vagyis mennyiben terjeszthető ki képzetes határokra, ... tudtommal még senki sem vizsgálta meg. Itt most meg akarom mutatni, hogy a ∂ - és \int -tan miként és mennyiben terjeszthető ki a képzetes mennyiségekre. Ha $u = f(x, y, z, \dots)$, akkor először is $p + q$, $r + s, \dots$ -t tehetjük x, y, \dots helyébe, minek következtében $v + V = g(p, q, r, s, \dots) + h(p, q, r, s, \dots)$, $v = g$, $V = h$, $dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial q} dq + \dots$, $dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq + \dots$, $d(v + V) = dv + dV = \dots$ Másrészt, minthogy a konvergencia miatt, a ∂ -tan könnyen képzetes növekményekre is érvényesíthető, az x növekménye $\Delta p + \Delta q$. Itt, fájdalom, vége szakad ennek a följegyzésnek.

János elméletét a logaritmusról és a hatványról már a XIV. fejezetben említettük. Előrehaladott korabeli följegyzéseiben visszatér ezekre és például teljes joggal megjegyzi, hogy az a -nak tetszés szerinti, sőt komplex értékeire nézve az x^a hatványnak differenciálhányadosát csak úgy vezethetjük le teljes szigorúsággal, ha x^a -t $e^{a \ln x}$ -szel helyettesítjük.

Figyelemre méltó nála az infinitezimális számítás szigorú tárgyalása is. Neki — azt mondja János — a végtelen kicsiny mennyiségek fogalma már gyermekkorában visszataszítónak és rettenetesnek tűnt föl: csak arról szabad beszélni, hogy mennyiségek a zérus felé közelednek, akkor elérhetjük, sőt túl is haladhatjuk a régieknek szigorúságát. Annak jelölésére, hogy két mennyiség bizonyos határátmenet megtörténte után egymással egyenlővé válik, a $\underline{=}$ különös jelt használja, melyet pl. a LOBATSCHESKIJ *Geometrische Untersuchungen*-re vonatkozó észrevételeiben alkalmaz (szöveg 150—151. o.).

174. o. 10—7. s. al. Erre vonatkozólag l. az *Üdvtan* címlapjának egyik tervezetét, a mely a 190. o. 17—21. soraihoz tartozó jegyzetben ki van nyomtatva.

174. o. 2. s. al.--175. o. 7. s. A *Tér tudománya* előszavából (1834 körül).

175. o. 12--6. s. al. *B.-G. Ier.* 103--104. o.

176. o. 7--12. s.* Mutatványul szolgáljon a *Responsio* latin kidolgozásának első két paragraphusa, melyet STÄCKEL, A *képzetes számok elmélete* BOLYAI János hátrahagyott irataiban cz. értekezésében (271- 275. o.) közölt. Magyar fordítása a következő:

1. §.

Ha valakinek szellemi tevékenysége oda irányul, hogy másokban azokat a képzeteket ébreszsze, melyek ő benne támadtak, nevezetesen, ha valamely tudományos rendszert akar megalkotni, a dolgot szükségképen a *fogalmak* alakításával és megszerkesztésével kell megkezdenie, azaz a tárgyalásban előforduló minden szó és másféle *jel* értelmének bizonyos *egyszerű és nem értelmezhető* szók segítségével való meghatározásával; ilyenek szükségképen vannak, mert nyilván lehetetlen és a tudományos rendszerrel ellenkező, hogy mindent értelmezzünk; értelmüket másokkal pusztán közvetetlen felmutatás útján, csak tökéletlenül közölhetjük, és néhányat közülük, ha könyvet akarunk szerkeszteni, kénytelenek vagyunk ismereteseeknek föltételezni. Azután pedig igen egyszerű, másokból le nem vezethető, vagy már önmagukban is világos tételeket állítva fel (melyeket szintén föl kell vennünk alapul), más tételnek (ha tantétel alakjában van kifejezve) *igaz vagy nem igaz voltát*, vagy pedig (ha feladat alakjában van kifejezve) *lehetséges vagy nem lehetséges* voltát másképen nem dönthetjük el, mint annak megvizsgálásával, vajjon a föltételezett axiómákból (a definíciók értelmét gondosan szem előtt tartva, bizonyos logikai törvények szerint végbemenő következtetések alapján) lehozható-e vagy sem. E szerint a jelen vizsgálat a következő három mozzanatra vezethető vissza:

1. annak értelmezésére, hogy mi a képzetes mennyiség;
2. annak értelmezésére, hogy miben áll az ilyen mennyiségek szerkesztése;
3. végre annak eldöntésére, vajjon képzetes mennyiségek megszerkeszthetők-e vagy sem? és az első esetben az ilyen szerkesztés módjának bemutatására.

Mindezekhez most már az alkalmas módszerrel és a megkívánható világossággal hozzáfogunk és mindent végre is hajtunk. A szerző a tárgyalás e módjával, — amelyhez ép úgy, mint a képzetes és valós mennyiségek egész elméletének főpontjaihoz már sok évvel ezelőtt,* más alkalommal eljutott, a melyről még alább lesz szó, a hosszú használat folytán teljesen meg-

* Ez a hely bizonyítéka annak, hogy ez a följegyzés János *előrehaladotabb* korából származik; e szerint STÄCKELnek az az állítása (A *képzetes számok elmélete* BOLYAI János hátrahagyott irataiban 262--263. o.), hogy az 1837. évbeli *Responsio* tervezetéből való volna, helyesbitendő.

barátkozott. De itt ebből az elméletből a legnagyobb rövidegességgel csak a legszükségesebbet választhatjuk ki és adhatjuk elő, a mi azonban a jelen célra elegendő.

2. §.

Bizonyára nem gondolható ki képtelenebb, az észszel inkább ellenkező dolog annál a törekvésnél, *hogy nagyobbát kisebből elvegyünk*, és a 0-nál kisebb mennyiségekről folyó üres beszéd arra az időre vall, mikor némelykor a legkiválóbb geometerek is jónak látták, hogy az egyszerű igazságokat az egészséges szemre nézve áthatolhatatlan titokzatos fátyolba burkolják, mert a felületes vizsgálat elámította őket és látszólagos eredményekkel elégedtek meg, a mi felett utólagosan semmi nyugtalanság sem gyötörte őket. Ha pl. a tartozást negatív követelésnek, a balra irányuló utat negatív jobbra irányuló útnak, a hyperbolát (a közönséges geometriában, mely arra a tételre támaszkodik, melyet Euklides helytelenül XI. axiómának vett föl) olyan ellipszisnek tekintjük, melynek kis tengelye képzetes és viszont, vagy ha olyan mennyiségekről beszélünk, melyeknek a pozitívakhoz való *hozzáadása* ezeket *kisebbiti* (úgy hogy $a+b$ kisebb a pozitív a -nál, sőt olyanná is válhatik, hogy ha valamely pozitív mennyiséghez hozzáadjuk, nem nagyobbodik), a jobbra, balra, hyperbola, ellipszis, hozzáadás szokat közönséges értelmükben véve (a mint az, ha a dolog lényegét tekintjük, bizonyára szokásos); akkor akad-e olyasvalaki, a ki a dolgot pontosabban megvizsgálva, ezt helyeselné, és nem inkább azt mondaná, hogy ily módon a természetben erőszakot követünk el, mert az ilyen tételek bizonyára ellentmondásosok. Habár ugyanis a szokásos $a-b$ jelölés igen jól megérthető, míg $a>b$, ennek a kifejezésnek nincsen többé értelme, ha $a<b$. Durva következtetési hibát követünk el, ha azokat, a mik tulajdonképen csak akkor érvényesek, ha a kivonandó kisebb a kisebbbendőnél, a többi esetekre is kiterjesztjük, és azután [a szimbolumok] olyan összességeivel, a milyen $-b$ (a melynek az értelmezés szerint csak úgy van értelme, ha a b -nél nagyobb mennyiség után következik, vagy ilyenhez kapcsoljuk), úgy bánunk el, mint a mennyiségek jeleivel.

Ilyen értelmezés mellett már a negatív mennyiségek is lehetetlenek, vagyis ilyen mennyiségek nincsenek. Ha pedig bebizonyítottak tekintjük, hogy akár két pozitív, akár két negatív tényező pozitív szorzatot ad eredményül és más természetű, mint ilyen [pozitív vagy negatív] tényezőket nem engedünk meg, akkor ép olyan jogosan állítható, hogy olyan mennyiség, melynek négyzete negatív, vagyis negatív számnak négyzetgyöke, egyáltalában lehetetlen. De, ha a szimbolumok olyan összességéhez jutunk, a milyen a $\sqrt{-1}$, a melynek (ép úgy, mint olyan képnek, a melynek nincsen eredetije) semmi tárgy sem felel meg, és megtartjuk az ilyen összességeket abban a hiszemben, hogy ez által tételeinket bizonyos általánossággal és elegáncziával ruházzuk fel, és ezeket [a szimbolumokat], bár magát $\sqrt{-1}$ -et minden további értelmet nélkülöző tárgynak tekintjük, a számolási műveleteknek vetjük alá; akkor az ilyen kibúvó nemcsak hogy sohasem

elégíti ki az értelmet, mely az elébe tett tárgyat mindig szemlélni kívánja és szemléltető ismeretre törekszik, hanem semmiképen sem egyeztethető meg a geometriának megbízhatóságával, és így a leghasznosabb, a legtökéletesebb bizonyosságnak örvendő tudomány méltósága ily módon hiú játékká alacsonyul és az ábrándképeken felépülő eredményeit méltán kéteseknek tarthatnák. Mi haszna van annak, ha tudjuk, vagy inkább, mi az értelme pl. annak a tételnek, hogy minden algebrai egyenlet az ismeretlennek ilyen $a + b\sqrt{-1}$ értékével kielégíthető (hol a és b valós mennyiségeket jelentenek), ha nem tudunk magunknak képet alkotni arról, hogy a $\sqrt{-1}$ tárgy miképen szorozható meg b -vel? És hogyan lehetünk eredményeink pontosságáról meggyőződve, ha levezetésükben lehetetlen, nem létező és költött dolgokkal úgy bánunk el, mint lehetségesekkel, létezőkkel és igazakkal? De ennek az egésznek metafizikája egészen más, a mint azt mindjárt teljes egyszerűségében alább ki fogjuk fejteni; bár ezeknek a nem találó dolgoknak orvoslására könnyen a következő mód is vezet. Azok a mennyiségek, melyeket közönségesen pozitívoknak neveznek (hogy, a mint az szükséges, az alapokra térjünk vissza), nem egyebek, mint maguk az abszolút mennyiségek. Ha már mostan (minden betűvel mennyiséget jelölve) követeljük, hogy $a + x = c$ legyen, hol c kisebb a -nál; akkor nyilvánvaló, hogy a -ból el kell venni azzal a b -vel egyenlőt, a melylyel a felülmulja a c -t; és ha ebben az esetben az x -et $-b$ -vel jelöljük, úgy, hogy $a + (-b) < a$, akkor bizonyára a $-b$, mint a -val homogén mennyiség, nem létezik. Ha azonban (a mi lehetséges) $-b$ az a -tól heterogén mennyiséget jelent, vagyis, ha $-b$ (ez alatt a $-$ és b jelek összességét vagy materiáját értve) mennyiség, — pl. ha a és b idő(tartamok), $-a$, $-b$ közök — és abban az értelmezésben állapodunk meg, hogy az ilyen kifejezés, a milyen $a + x$, a míg x az a -val homogén, az a és x -nek (közönséges értelemben vett) összegét jelenti, ha pedig (az $x = 0$ esetet a rövidség kedvéért itt mellőzve) x az a -tól heterogén, $a + x$ jelenti az a -val a mennyiséggel kisebbített a -t, a melyhez x úgy aránylik (geometriailag), mint $-a$ az a -hoz, legalább is akkor, ha a $-a$, a , x mennyiségek negyedik proporcionálisa nem nagyobb az a -nál, különben pedig a $-a$ -val kisebbített x -et jelenti: akkor a $-b$ alakú mennyiségeknek bizonyára van értelmük, és az összeadásban nehézség nélkül alkalmazhatók, hacsak b -t és a neki megfelelő $-b$ -t megalkotjuk vagy megadjuk. Ha t. i. (rövidebben) 1, valamely tetszés szerinti olyan fajtajú (szilárd) mennyiséget jelent, mint a milyen a , -1 pedig olyan tetszés szerinti (szilárd) mennyiséget, mely x -szel homogén, akkor $a + x$ jelentése: a kevesebb x -1-gyel, ha ez $[az\ x.1] < a$, és x kevesebb a -1-gyel, ha $x.1 > a$; végre az egyenlőség esetében legyen $a + x = 0$.

Szabad és meg van engedve a fogalmakat bárhogyan alkotnunk (pl. hatszögek által bezárt szabályos polyedert jelölhetünk valamely jellel és beszélhetünk róla), hacsak, mihelyt az értelmezésekben megállapodunk, azokkal össze nem férőt nem állítunk. (Ez alkalommal azonban megjegyzem, hogy az olyan dolgok, melyeknek valósága nem bizonyos, sőt talán nem is léteznek, még akkor is, ha semmi [logikai] ellenmondást sem foglal-

nak magukban, csak föltételeesen fogadhatók el és a jól megalapozott tudományban, mint nem elegánsak és a természetes egyszerűséggel ellenkezők, elvetendők.) És mindazoknak a vitáknak, melyeket a (tiszt) matematika terén néha nagy tekintélyű férfiak folytattak, a homályos fogalmakban rejlik az alapjuk. Így pl. LEIBNIZ és BERNOULLI János sem veszekedtek volna oly sokat a negatív mennyiségek logaritmusának létezése felett, ha tiszta és világos fogalmakkal rendelkeztek és a vita tárgyát mindenekelőtt (a logika törvényei szerint) világosan meghatározták volna.

De, nehogy hosszadalmas legyek, áttérek tárgyunk mibenlétének tényleges kifejtésére, mely egyszerűségével és világosságával, szóval minden tekintetben minden lehetséges kételyt eloszlat és mindenkit ki fog elégíteni, mert kétség kívül semmi kívánni valót nem hagy hátra. A dolgot különböző módon lehet elintézni, mely [módok] mindegyikét külön-külön a legáltalánosabb szempontból bemutatni nem haszontalan munka, hogy ily módon az a sarkalatos, nagyfontosságú tárgy, mely eddig oly homályos maradt, különböző oldalokról tisztáztassék és a megkívánható világosságba helyeztessék.

177. o. 17—19. s. E czédulák egyikén a közlésre érdemes következő kijelentést találjuk:

«Vajjon az idő és a tér valóban *megvannak-e*, vagy csak *látszólagosak*, annak az értelmes és eszes gondolkodóra (filozófusra) nézve ép olyan *közhíjósnek* kell lennie és minden további vizsgálatán kívül kell maradnia, a mint ez a dolog a legszigorúbb értelemben *eldönthetellen* [is], és különben ezek az eszmék olyanoknak *látszanak*, a melyeknek valóságos dolgokra kell vonatkozniok. Úgy *látszik* ugyanis, mintha az idő és tér létezésének *látszata* (eszméje) *helyes* volna és *túlmennék a kellő határon*, ha ez iránt még további kételyeket támasztanánk... Különben úgy látszik, hogy a *tapintó érzék* az egyedüli érzék, mely a tér eszméjének létesítéséhez szükséges.»

177. o. 4. s. al.—178. o. 18. s. V. ö. evvel a 180. o. 30—32. soraihoz tartozó jegyzetet.

179. o. 16—19. s. L. pl. BOREL, *Géométrie, premier et second cycles*, Paris 1905; németül kiadta STRACKEL, Leipzig 1905.

180. o. 23—24. s. TACQUET, *Elementa geometriae planae et solidae*; quibus accedunt selecta ex ARCHIMEDE theoremata, Antwerpen 1654.

180. o. 30—32. s. Ennek megfelelő módon akart később gömbi sokszögeket és polyedereket is a vizsgálatnak alávetni. Hogy ebben a vizsgálatban Jánost milyen szempontok vezérelték volna, kitűnik egyik értekezésének címéből, a mely értekezésből azonban csak csekély töredékek vannak meg hagyatékában.

«Legegyszerűbb, legrövidebb, legvilágosabb és könnyen megérthető bebizonyítása annak a fölötté fontos tételnek, hogy 1. bármely föfelületnek, azaz minden felé egyenletes, röviden sphærikus vagy általános gömbfelületnek, legyen az akár euklidikus gömb, akár para- vagy hypersphæra (mely utóbbi fajhoz a sík is és az anti-euklidikus, azaz az Euklides XI. axiómájá-

nak nem igaz voltára épített geometriában minden vele párhuzamos felület is tartozik), minden fő- vagy axiális vonalak által köröskörül határolt akár teljes, akár bármi módon átlukasztott darabja, hacsak a lyukakat szintén fővonalak határolják, csupa fő- (azaz ugyanannak a felületnek fővonalai által határolt) háromszögre; 2. minden tetszés szerinti teljes vagy átlukasztott, valamint üregekkel is ellátott sík (azaz mindenfelől síkok által határolt) tér csupa háromoldalú gúlára bontható fel, még pedig oly módon, hogy amott, azaz 1.-ben minden metszéssel mindjárt egy-egy az egészből egy főháromszöget lemetsző fővonalat húzunk, vagy pedig először csak olyant, mely az A főfelületben fekszik és csak azután metszünk le minden következő, egyik csúcstól a másikhoz húzott fővonallal egy-egy háromszöget, míg végre A -t ily módon csupa ilyen fajta háromszögre fel nem osztottuk.»

183. o. 14—19. s. V. ö. evvel LOBATSCHESKIJ ily czímű értekezésének bevezetését: *Géométrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 17 (1837), 295. o.

183. o. 22. s. GAUSS-ra vonatkozólag utalunk arra a jelentésre, mely őt mint geometert méltatja és műveinek készülő X. kötetében fog megjeleni. RIEMANN, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Habilitationsvortrag, Göttingen 1854, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13 (1867), Werke 1. Aufl. 254. o., 2. Aufl. 272. o.

183. o. 25. s. CAYLEY, *A sixth memoir upon quantics*, London, Philosophical Transactions 149 (1859), Papers, vol. 2 (1889), 561. o.

183. o. 28. s. KLEIN, F., *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen 4 (1871), 573—625. o., 6 (1873), 112—145. o., 7 (1874), 531—537. o. Lásd még KLEIN, F., *Nicht-Euklidische Geometrie*. Vorlesungen gehalten 1889—90 an der Universität Göttingen, Göttingen 1893 (autographia).

183. o. 11—4. s. al. V. ö. KLEIN, F. kritikai megjegyzéseivel: *Gutachten, betreffend den dritten Band der Transformationsgruppen von S. LIE anlässlich der ersten Verteilung des LOBATSCHESKIJ-Preises*, Mathematische Annalen 50 (1898), 583—600. o. Figyelemre méltó, de eddig, úgy látszik, észrevétlen maradt, hogy már LOBATSCHESKIJ világosan fölismerte azokat a nehézségeket, melyek akkor lépnek föl, ha a teret mint számkontinnumot akarjuk felfogni. Az *Új alapvonalakban* 1835 (ENGEL, 79. o.) azt mondja: «Közönségesen a geometriát avval kezdik, hogy a testeknek három, a felületeknek két, a vonalaknak egy kiterjedést tulajdonítanak, míg a pontnak egyet sem engednek. A három kiterjedést hosszúságnak, szélességnek és magasságnak nevezve, és ezen elnevezések alatt tulajdonképen a három koordinátát értve, ily módon elhamarkodva közölnek korai fogalmakat olyan szók segítségével, melyeknek a köznyelv már bizonyos, a szigorú tudományra nézve persze még határozatlan értelmet tulajdonított. Valóban tisztán hogyan képzelhetjük el a hosszúság kimérését, ha még nem tudjuk,

hogv mi tulajdonképen az egyenes vonal? Hogyan lehet szélességről és magasságról beszélni, a nélkül hogy előbb a merőlegesekről, a síkról vagy pedig arról mondotunk volna el valamit, hogy miképen viselkednek a merőlegesek ugyanabban a síkban és különböző síkokban? Végre pedig, ha a pontnak semmi kiterjedése nincsen, mi marad meg belőle arra, hogy valamely következtetés tárgya lehessen. Megengedem, hogy az egyenest mindenki tisztán tudja elképzelni, habár fogalmáról számot adni nem is tud; mégis megmarad az a kérdés, hogy miképen határozzuk meg az egyenes vonal segítségével a görbe vonalnak egy kiterjedését és a görbe felületnek két kiterjedését.» LOBATSCHESKIJ további fejtegetéseire vonatkozólag az olvasót az *Új alapvonalakra* kell utalnunk.

184. o. 2--4. s. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Enthüllung des GAUSS-WEBER-Denkmales in Göttingen, Leipzig 1899, 4. Aufl. Leipzig 1913; PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882, zweite Aufl. 1912; PEANO, *Sui fondamenti di geometria*, Rivista di matematica, 4 (1894), 51—99. o.; SCHUR, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909; VERONESE, *Fondamenti di geometria*, Padua 1891; 1. még VAHLEN, *Abstracte Geometrie*, Leipzig 1905.

184. o. 11—12. s. Tentamen, t. II, 195. o., Editio secunda 241. o.

184. o. 4—3. s. al. GAUSS, Werke, Bd. VIII, 244. o.

184. o. 3—1. s. al. BRICARD, *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*, Nouvelles Annales (3) 15 (1896), 331—334. o.; SFORZA, *Un'osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti*, Periodico di matematica 12 (1897), 105—109. o.; DEHN, *Über raumgleiche Polyeder*, Göttinger Nachrichten, 1900, 345—354. o.; *Über den Rauminhalt*, Mathematische Annalen, 55 (1901), 465—478. o.

Jegyzetek a XIX. fejezethez.

185. o. 15—16. s. E kérvénynek 1832 május hó 3-ikáról kelt terveze ki van nyomtatva a 230—233. oldalakon, a 71. o. 35. sorához tartozó jegyzetben.

185. o. 19—21. s. V. ö. Jánosnak az *Észrevételek LOBATSCHESKIJ Geometrische Untersuchungenjére* bevezetésében foglalt következő megjegyzésével, melyben arról a befolyásról nyilatkozik, melyet atyja egész életére gyakorolt: «Atyámtól nyertem — igazi erkölcsi elvek 's út-mutatás mellett, mit leg-nagyobbira becsülök — sok derekasb alap-eszmékkal együtt, ellenállhatlan vonzalmat 's érdeket az igazi alapos, szigorú, fényes igazságú tanokhoz, általa kezdett ízlésem művölni, általa nyertem tántorithatlan hűséggel meg-tartott fő-írányt és ébredett már fiatal- sőt gyermek-koromban igazi nemes törökődés keblemben; egy szóval, úgy szellemileg, mint anyagilag annak köszönhetem egész lényegem' alapját és nagy részét;... 's ő engem minden esetre sokban meg-előzvé, némileg illik vagy alkalmazható ránk is az AEsopus és PHAEDRUS közötti viszony..., mi-szerint, illő módosítvánnyal én is szinte el-mondhatom ezt: *Pater auctor quam ma-*

teriam reperit: Hanc ego polivi versibus senariis; az az: Szerző Atyám a' mely anyagokat talált: azt én ki művöltöm hat-lábu versekben; és ezen verselésnek is saját értelme lévén —,

Farkason kívül János Üdvtnára talán befolyással volt egyik mű, mely hagyatékában megvan: v. ECKARDTHAUSEN, *Zahlenlehre der Natur*, oder: Die Natur zählt und spricht; was sind ihre Zahlen? was sind ihre Worte? Ein Schlüssel zu den Hieroglyphen der Natur, Leipzig 1794. Hogy e mű mikor jutott János birtokába, nem volt megállapítható; nincsen kizárva, hogy Farkas 1799-ben magával hozta Németországból.

187. o. 6. s. BOLYAI János azt állítja, hogy ez a mondás: «Der Kopf muß das Herz bilden», vagy a mint más helyen írja: «Der Verstand muß das Herz erziehen», SCHILLER-től való. SCHILLER műveiben nem sikerült ilyen mondást fölfedeznem.

189. o. 12—10. s. al. *Tentamen*, t. II, Editio secunda 413. és 414. o.

190. o. 17—21. s. Nagyon jellemzők János e sajátosságára nézve az *Üdvtan* czímlapjainak tervezetei, melyekből egy tucznál is több található hagyatékában. Az egyiket itt egész terjedelmében közöljük.

All-Heil-Lehre

Zur allgemeinen Wohlfahrt oder Glückseligkeit oder Heile oder Vollkommenheit.

Für den Liebhaber

Von

Johann BOLYAI v. BOLYA,

des kaiserlich königlichen österreichischen Ingenieur-Corps

Hauptmann zweiter Klasse in Pension.

Der Kopf muß das Herz bilden SCHILLER.

Zeitliche All-Heil-Lehre

Zur Vollkommenen derlei

Mit All-Heil-Leit-Lehre dazu.

Das ist

All-Heil-Lehre

in drei, voneinander getrennten, selbständigen und deshalb hier, durch einen einfachen Kunstgriff, auch mit einem Male in jeder beliebigen der sechs möglichen Ordnungen dargestellten oder dargebotenen oder vorgelegten solche Hauptteile zerfallend oder sich teilend, wovon die zeitliche All-Heil-Lehre und Leit-Lehre, besonders letztere, in gegenwärtiger oder vorliegender oder stehender Gestalt, und zum Teile auch in Betreff des Wesens mit der — hiermit ebenfalls abgesondert erscheinenden — oder mit dem Buch-Rücken-Titel sechs ersten Titeln der vollkommenen All-Heil-Lehre — somit auch samt dem Namen der Wenigkeit des Verfassers — nur zeitlich wegen der Unvollkommenheit und bis zur völligen Ausbildung oder Vervollkommenung der bisherigen menschlichen oder irdischen Sprachen, Wissenschaften und (Lebens-)Umstände oder Verhältnisse und sehr bedeutenden Beförderung der Wohlfahrt der jetzigen Generation auf dem hier alleruntertänigst

und allerunvorgreiflichst vorzuschlagen gewagten Wege oder Art oder Weise notwendig, nützlich und heilsam sind. Für den Liebhaber mit dem sehnlichsten, heißesten, innigsten Wunsche und demselben angemessenen, vernünftigen, also festen Glauben und gegründeten Hoffnung gemäß jedoch oder indessen wenigstens mittelbar zum Besten (des Dienstes) oder zur möglichsten und in geringen Kräften stehenden Beförderung des Allerhöchsten Dienstes oder, was hiermit einerlei ist, Mittel und zwar einziges, zur tunlichsten und auch zu der — bis itzt auf der Erde für unmöglich gehaltenen oder angezweifelten — und zwar sogleich oder ungesäumt und schnell bewirkt werden könnenden gänzlichen oder vollständigen Herbeiführung des allgemeinen, teilweisen und indi[viduellen Heiles].

Zeitlicher Buch-, Umschlag- oder Couvert-Titel

zu einem nur zeitlich- oder einstweilig- oder provisorischen oder Interims- oder interimistischen, nämlich sprachgemäßen, und dem jetzigen oder dergemalig- oder heutigen Zustande oder Höhe oder Stadium der Wissenschaften überhaupt zeitgemäßen oder den Umständen und Verhältnissen auf der Erde, wenigsteos meines Wissens oder wie ich weiß, angemessenen *Umschlags*-, das ist denn — ohne dieses eingebunden werdenden — Buches oder dem Buch samt Einband doch nur zum Umschlage oder Decke oder Deckel oder Bedeckung oder Hülle oder Einhüllung oder Einwicklung oder Wickler- oder Mantel- oder Über- oder Schlafrock- oder sonst derlei Oberkleid- oder Bekleidung(s)artigen oder sterblichem Überreste oder Vor- oder Bei- oder Neben- oder Über- oder Ober- oder Leitlehre oder An- oder Einleitung oder Ankündigung oder Vorbereitung oder Eingang oder vorläufig- oder voran- oder vorhergehenden oder vorausgeschickten Anmerkung oder Beilage oder Makulare oder Makulatur oder Krusten- oder Schlacken- oder Häfen- oder Abfall- oder Auswurf-Artigen oder — bei aller einzigen Großartigkeit oder Kolossalität — sonst derlei, seiner Zeit von selbst wegfallenden und dadurch vollkommen Geläutertes oder Destilliertes zurücklassenden rauh- oder gröberen oder unedleren Teiles bestimmten oder dienen mögenden Bogen Papieres oder Papierbogens :

Lehre und Mittel

zum Besten oder Bestmöglichen oder Möglichst Gutem,

ja vollkommenen, vollständigen, zeitlichen sowohl als ewigem, und in jedem zeitlichen Leben zwar freilich oder allerdings (auch) nur endlichem, mit der Zeit aber unendlich wachsendem

Wohle oder Wohlfahrt oder Heile oder Glückseligkeit,

somit All-Bestem, All-Wohle und All-, und Ewig- und Schnell-Heile oder Heile oder (somit ganzen) Welt oder Welt-Alles und seiner Zeit eines jeden Lebenden als jedesmal nach seiner ebendermaligen Einsicht, Umständen, Verhältnissen und Wirkungskreise Haupt-, End-, Selbst- — das ist nur

seiner selbst wegen, nicht mehr um irgendeines höheren Zweckes Willen gefolgt — Ewig-Gewinn wirklichen, natürlichen und notwendigen höchsten Zweck eines jeden Individuums.

Von

Johann BOLYAI

Wien

1852

(Exemplar-Zahl)

Vollkommen —

somit auch in vollkommen oder ganz oder gehörig oder völlig oder durchaus oder durchgehends oder gründlich ausgebildeten oder vervollkommeneten oder be- und ausgearbeiteten oder zur Vollkommenheit gebrachten oder erhobenen oder gelangten oder gediehenen Sprache verfaßten oder auch in Rücksicht der Sprache oder des Ausdrucks oder Vortrages oder Verfassung oder Darstellung sowie des Körpers oder Gestalt oder Äußeren oder Ausstattung oder Kleides oder Einkleidung oder Einrichtung oder Veranstaltung oder Materiellen überhaupt und vollkommen wohl(an)geordnete oder hauptzweckmäßig systematische, kurz in jeder Hinsicht vollkommenen, vollständigen oder alle heilsamen Lehren, und zwar in einem einzigen Werke von oder bestehend aus nur einigen wenigen Bänden umfassende oder enthaltende und zum All-Heile oder Haupt- und Gemein-Zwecke zureichende, sowie auch die Erden-Bewohner und zwar (zunächst oder unmittelbar oder geradezu oder im besonderen) die ganze Menschheit oder die Menschen oder das Menschen- oder menschliche Geschlecht oder Gesellschaft oder die unseren oder diesen Irr-Stern oder Planeten bewohnenden Personen oder Vernunft- oder vernünftigen Wesen samt den in ihrem oder derselben Bereiche oder Wirkungs-Kreise befindlichen oder ihr untergeordneten oder ihr anvertrauten (noch) unvernünftigen Lebenden oder Lebens-Gefährten; und zwar allem Verhoffen oder Erwartung nach nunmehr sogleich auch schon hinnieden oder auf der Erde oder in diesem oder irdischen oder Erden-Leben und zwar auch schon die Zeitgenossen oder jetzt oder dermal Lebenden in sehr vielen oder bedeutenden und schnellst (beschleunigt) wachsenden, den hiernach oder von uns an geboren werdenden Menschen aber (auch zwar selbst) in jeder Hinsicht beglückende und heilbringende oder verschaffende

Heil-Lehre und Heil-Mittel

mit zeitlicher derlei

und Heil-Leit-Lehre zur Letzteren.

Erster Band

(Buch folgt).

Jegyzetek a XX. fejezethez.

192. o. 7—11. s. KREIL-ra vonatkozólag l. a 161. oldalt és a 6—9. soraihoz tartozó jegyzetet.

192. o. 10—12. s. B.-G. lev. 143—146. o.

192. o. 13. s. al.—193. o. 8. s. A XI. axióma bebizonyítása bevezetéséből (1856).

193. o. 10—31. s. A XI. axióma bebizonyítása bevezetéséből (1856).

193. o. 23—24. s. Az egyenesnek azt a magyarázatát, hogy ez az a vonal, «mely önmagában forog», GAUSS adta előadásaiiban. LÜBSEN, *Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, Hamburg 1851 című könyvének 11. oldalán ezt mondja: «Egyenes vonal az olyan, mely nem hagyja el helyét, ha két szilárd végpontja körül forog. Így hallottuk egyszer GAUSS-tól az egyenes vonal fogalmának megállapítását, mikor a messzelátót és annak helyes használatát magyarázta. Ez az értelmezés elméleti szempontból termékeny, mint azt a belőle tüstént következő tételek mutatják; azonkívül a jelzett tulajdonság gyakorlatilag is fontos, pl. valamely messzelátó beigazításánál, valamely henger helyes kifűrésénél stb.» LÜBSEN 1830-ban hallgatta GAUSS előadásait; v. ezt össze könyvével, *Lehrbuch der Analysis*, Hamburg 1853, 171. o. L. még GAUSS, Werke, VIII, 1900, 196. és 199. o.

193. o. 8—6. s. al. L. GAUSS, Werke, VIII, a *Grundlagen der Geometrie* cz. szakaszt (159—268. o.), valamint a GAUSS-ról, mint geometerről készülő jelentést, mely műveinek X. kötetében fog megjelenni.

194. o. 1—10. s. SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN, GAUSS zum Gedächtnis, 81. o.; ez a hely ki van nyomtatva GAUSS műveinek VIII. kötetében, a 267. oldalon.

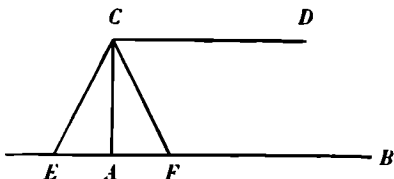
194. o. 11—22. s. Az említett levelek közül ki vannak nyomtatva GAUSS műveinek VIII. kötetében a 210—219. o. az 1831. évi, a 238—239. o. az 1816. évi és BOLYAI és GAUSS levelezésének 198—199. oldalairól az 1849. évi.

194. o. 10—6. s. al. Az *Elemente der Mathematik* első kötete 1860-ban megjelent első kiadásának előszavában (a VI. oldalon) azt mondja BALTZER, hogy különös fáradságot okozott neki azoknak a történeti adatoknak az összegyűjtése, melyeket az egyes tételekhez és problémákhoz fűzni óhajtott; sok tudásra méltó és kevésbé ismert megjegyzés akad majd köztük. Ebben két-séggelkül a BALTZER-féle *Elemente* egy olyan sajátossága nyilatkozik, a mely-nél fogva még ma is becses segédeszköze a történeti kutatásnak. A párhuzamosok tanáshoz az *Elemente* 1862-ben megjelent második kötetében (11. o.) az a megjegyzés van fűzve: «A párhuzamosoknak legrégibb külön axiómára alapított elmélete EUKLIDES-nél található I, 27—31. és azután (12. o.) BERTRAND (*Développement*, Genève 1788, II, 19. o.) nyomán megpróbálja BALTZER, hogy a párhuzamosak elméletét végtelen síksávok vizsgálata alapján axióma nélkül fölépítse.

194. o. 6. s. al.—195. o. 13. s. A BALTZER-féle *Elemente* 2. kiadása

második részének 12—13. oldalain (Planimetrie, 2. § 7. sz.) a következőt olvashatjuk.

«Valamely ponton (csúcson) végtelen sok olyan szár megy át, mely valamely adott szárt metsz és végtelen sok olyan szár, a mely az adott szárt nem metszi. Az első szárról, CD -ről [26. ábra], mely az AB szárt nem metszi, míg valamennyi az ACD szögben foglalt szár az AB szárt metszi, azt mondjuk, hogy AB -vel párhuzamos (*παρ-άλληλος*). A CD párhuzamosról mondjuk, hogy AB -vel egyenlő irányú és vele olyan elenyésző szöget alkot, a melynek csúcsa végtelen távol van, továbbá hogy a felé a végtelen távol



26. ábra.

fekvő pont felé irányul, a mely az A tól B felé mutató irányban követendő. E mellett, ha EB és FB iránya megegyező az AB -ével, EB vagy FB tehető AB helyébe, tekintve azt, hogy valamennyi az ECD vagy FCD szögben foglalt szár az EB , ill. FB szárt metszi.»

Ehhez a következő megjegyzés fűződik:

EUKLIDES szerint a sík két egymást nem metsző egyenesét nevezték párhuzamosnak és ehhez az értelmezéshez azt az axiómát (vagy valamely vele egyenlő értékűt) csatolták hozzá, hogy a síkban egy ponton át csak egy olyan egyenes húzható, mely valamely a síkban adott egyenest nem metsz. LEGENDRE-nek (*Géom.* note 2) az a véleménye, hogy az ilyen axióma bebizonyítására az egyenes természetére vonatkozó vizsgálatok fognak vezetni, nem bizonyult helyesnek. A párhuzamosoknak fenti pontosabb értelmezését először LOBATSCHESKI (*Geom. Untersuchungen*, Berlin 1840) és BOLYAI J. (BOLYAI F. *Tentamen in elementa matheseos etc.* című művének *Appendix*-ében, Maros-Vásárhely 1832) adták. A párhuzamosoknak a végtelen távolba eső közös pontját DESARGUES (1630) és NEWTON (1687) említették.»

Továbbá még tekintetbe jönn ugyanennek a 2. §-nak 8. száma, a melyben a következőt találjuk:

«A legpontosabb mérések kivétel nélkül azt mutatták, hogy a háromszög szögeinek összege 180° ; e szerint párhuzamosok esetében a belső szögek összege 180° és az AB , CD szárak [26. ábra] egy a végesben fekvő pont felé összehajlanak, ha $BAC + ACD < 180^\circ$ (Eukl. I. 11. axióma). Minden kísérletnek, mely e tétel bebizonyítására irányul, meg kellett hiúsulnia, mert önmagában az ellenkező föltevés is megengedhető, hogy a háromszögben a szögek összege és e szerint párhuzamosok esetében a belső szögek összege kevesebb 180° -nál.»

«A tapasztalatainknak megfelelő geometria, melyet a következőben ki fogunk fejteni, a közönséges, euklidikus geometria. Az ellenkező föltevésre egy absztrakt, nem-euklidikus geometria (képzetes geometria, pangeometria) építhető fel, a melyben az elenyésző kicsiny idomok a közönséges geometria törvényeinek hódolnak, és a mely bizonyos elméleteiben is a közönséges

geometriával föltétlenül megegyezik, különben pedig egy állandónak a tapasztalat alapján való meghatározására szorul.

„Ha elfogadjuk az absztrakt geometriát, valamely A ponton [19. ábra a 195. oldalon] olyan két különböző AD és AF megy át, melyek valamely egyenesnek két ellenkező szárával, BC vel és BE -vel párhuzamosak. Legyen AB merőleges CE -re, AD párhuzamos BC -vel, $EBAF$ egybevágó $CBAD$ -vel, akkor AF is párhuzamos BE -vel. Ha a közönséges geometriát fogadjuk el, a BAD szög derékszög, úgy hogy az AD és AF egyenesek egybeesnek; ekkor az ellenkező irányban végtelen távol levő pontok közt nem teszünk különbséget, minden egyenesnek csak egy a végtelenben távol levő pontot tulajdonítunk, mert a síkban valamely olyan ponton át, mely valamely egyenes mellett fekszik, egynél több olyan egyenest nem húzhatunk, a mely amaz egyenest nem metszi.

„Ezt az alapvető megkülönböztetést először GAUSS ismerte föl (1792 óta), de részletesen nem közölt róla semmit. Erre vonatkozó célzásokat találunk GAUSSnak a következő művekről szóló ismertetéseiben: SCHWAB, *Commentatio in primum elementorum EUCLIDIS librum* és METTERNICH *Theorie der Parallellinien*, Gött. gel. Anz. 1816, 617. o., MÜLLER, R. C., *Theorie der Parallelen*, Gött. gel. Anz. 1822, 1725. o. Továbbit találunk még GAUSSnak SCHUMACHERhez intézett leveleiben (1831 óta), II, 268. és 431. o., V, 246. o. L. még SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN *GAUSS zum Gedächtnis*, 81. o. A helyes párhuzamosak elméletének és az absztrakt geometriának igazi megalapítói BOLYAI J. (I. 7) és LOBATSCHEFSKIJ, *A geometria új alapvonalai a párhuzamosak teljes elméletével*, Kézáni Híradó, 1829 és Kézáni egyetem tudományos iratai, 1836—1838, *Géométrie imaginaire* 1837 (*CRELLE Journal* 17, 295. o.), *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelen*, Berlin 1840, *Pangéométrie*, Kasan 1855.

195. o. 19—21. s. *Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. LOBATSCHEWSKIJ*, traduit de l'allemand par J. HOUEL suivi d'un extrait de la correspondance de GAUSS et SCHUMACHER, Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. 4 (1866), 83—128; mint önálló mű is megjelent, Paris, Gauthiers-Villars 1866.

195. o. 22—25. s. *La science absolue de l'espace* par Jean BOLYAI, précédé d'une Notice sur la vie et les travaux de W. et J. BOLYAI par M. Fr. SCHMIDT, Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. 5 (1867), 189—248. o.; mint önálló mű is megjelent, Paris, Gauthier-Villars 1868. E könyv (7—21. o.) SCHMIDT életrajzi vázlatának (22—57. o.), az *Appendix*-nek és (58—64. o.) a *Tentamen*, valamint a *Kurzer Grundriß* az *Appendix*-re vonatkozó helyeinek fordítását is tartalmazza.

195. o. 24. s. Azt a fáradhatatlan munkásságot, melyet SCHMIDT Ferencz a két BOLYAI ügyének szentelt, behatóan méltatja STACKEL Pál a

SCHMIDT-től írt megemlékezésében, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 11 (1902), 141—146. o.

196. o. 3—5. s. L. a szöveg 69. oldalát.

196. o. 5—19. s. L. a 203. oldalon a két BOLYAI-ra vonatkozó művek jegyzékében SCHMIDT alatt.

196. o. 19—21. s. FORTI, A., *Nota intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni BOLYAI di BOLYA, matematici ungheresi*, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, pubblicato da B. BONCOMPAGNI, 1 (1868), 277—299. o.

196. o. 21—23. s. BOLYAI G., *Sulla scienza dello spacio assolutamente vera*. Versione dal latino di G. BATTAGLINI, *Giornale di matematiche*, 6 (1868), 97—116. o.

196. o. 7—4. s. al. SCHMIDT, Fr. *Mitteilungen über Johann BOLYAI*, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 4. (1894/95), 1897, 107—109. o.

197. o. 2—4. s. SCHMIDT, Fr., *Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann BOLYAI de BOLYA, k. k. Hauptmann im Geniecorps*, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Heft VIII, (1898), 133—146. o.

197. o. 4—8. s. B.-G. lev. BOLYAI és GAUSS életére és munkáira vonatkozó adatok, 174—184. o.

197. o. 8—9. s. SCHERING, *Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, Bd. 22 (1877); v. ö. B.-G. lev. 167—169. oldalával.

197. o. 9—12. s. L. B.-G. lev. 163. oldalát.

197. o. 12—18. s. BOLYAI Farkas és GAUSS *Friqqes Károly levelezése*, a Magyar Tud. Akadémia megbízásából szerkesztették, jegyzetekkel és életrajzzal ellátták SCHMIDT Ferencz és STÄCKEL Pál, Budapest 1899.

198. o. 16. s. Az exhumálásról az itt következő jegyzőkönyvet vették fel:

Sz. 4148/1911.

Jegyzőkönyv.

A Maros-Vásárhelyen 1911. évi június hó 7-én a reformatus egyház temetőjében az 1856. évben elhalt Bolyai Farkas és az 1860. évben elhalt Bolyai János tetemének 4148 1911. r. k. sz. a. kiadott hatósági engedély alapján megejtett kihantolásáról és közös sírba való helyezéséről.

Jelen voltak:

a hatóság részéről OROSZLÁNY Endre rendőrfogalmazó, ORESKOVITS Jenő rendőralkapitány, ZIEGLER Károly dr. rendőrorvos; a család részéről BOLYAI Dénes nyug. törvényszéki irodaigazgató, HINTS Elek dr., állami kórházi főorvos; a Magyar Tudományos Akadémia részéről FARKAS Gyula dr. kolosvári egyetemi ny. r. tanár; a marosvásárhelyi reformatus collegium részéről CSIKI Lajos igazgató, GYULAI D. Kálmán, KISS Tamás, GULYÁS Károly, PÁL Gusztáv és BÁTORY József tanárok. PÉTERFY István dr. ref. coll. orvos:

a marosvásárhelyi ref. egyház részéről TÓTHFALUSI József reformatus lelkész; ifj. BLÁS István, a széki Teleki grófi nemzetség levéltárosa, mint a kihantolás intézője és végül GYULAI Ferencz temetkezési vállalkozó.

A kihantolás előtt BOLYAI Dénes nyug. törvényszéki irodaigazgató, BOLYAI János fia a jelenlévők előtt kijelentette, hogy BOLYAI János tetemének maradványai kétségtelenül azon a helyen fognak lenni, a hol katonai tiszti díszkabátnak maradványai és gombjai találhatók, mert BOLYAI Jánost katonai egyenruhájában temették volt el.

Ezek után ifj. BLÁS István vezetése mellett BOLYAI János teteme kiásatván a talált leletekből, különösen a BOLYAI Dénes említett adatok alapján kétségtelenül megállapítottuk, hogy a kiásott maradványok BOLYAI János tetemével azonosak.

A kihantolás után megtaláltak BOLYAI János homlokcsontjának és két falcsontjának egymással összefüggő, erősen korhadásnak indult nagyobb részletét, egyik halántékcsonkját szintén a korhadásnak előhaladt állapotában, két alkarcsontját, két felkarcsontját, két alsó lábszárcsontját, továbbá koporsójának korhadt forgácsait és az alább felsorolt különböző ruhadarabokat.

A koponyacsontokat az elhunyt jelenlévő fiának BOLYAI Dénes gyulafehérvári lakosnak beleegyező nyilatkozata és hatósági hozzájárulás alapján tudományos vizsgálat céljából HINTS Elek dr. állami kórházi főorvos vette át avval a kötelezettséggel, hogy a marosvásárhelyi ref. kollegiumban létesítendő Bolyai-Muzeum számára fogja átadni.

Ugyancsak a Bolyai-muzeum számára GYULAI D. Kálmán kezébe átadtunk tíz db. koporsóforgácsot, négy db. selyem párnafoszlányt, egy szemfedő darabot, egy mellény jobb és bal felét, egy pár halotti cipőt, négy db koporsófogantyút, több db. külső koporsódísz, hat db. rézből való katonai kabátgombot (ebből öt db. a megmaradt kabátrészletre varrva), két nagy és egy kisebb porcellán fehérenemű gombot, egy szemfedős porladékony koporsórészt és négy db vas koporsó szeget.

BOLYAI János földi maradványainak többi részét a korhadt koporsó részekkel együtt a jelenlévők előtt érckoporsóba helyeztettük a temetői rendes sírásokkal.

Ezután BOLYAI Farkas tetemét hantoltattuk ki s a koponya kivételével teljes egészében megmaradt csontvázát a korhadt koporsó részletekkel együtt külön érckoporsóba helyeztettük. BOLYAI Farkas koponyáját BOLYAI Dénes beleegyező nyilatkozata alapján HINTS Elek dr. állami kórházi főorvosnak adtuk át szintén azon meghagyással, hogy a Bolyai-muzeum számára adja át.

Mind BOLYAI János, mind BOLYAI Farkas koporsóját még a mai nap folyamán délután 5 órakor a BOLYAI Farkas régi sírhelyén kiszélesített sírba hantoltattuk el ünnepies temetéssel egybekötve.

Ezzel a kihantolást befejezván, a jegyzőkönyvet bezártuk és aláírtuk azzal a megjegyzéssel, hogy a kihantolás szabályszerűen és a közegésségügyi rendelkezéseknek megfelelően történt, a róla írott jegyzőkönyvet pedig

hét példányban elkészítve a következő intézeteknek és hivataloknak küldöttük meg: 1. Magyar Tudományos Akadémia főtítkári hivatala Budapest. 2. Magyar Nemzeti Múzeum levéltára Budapest. 3. Erdélyi Nemzeti Múzeum levéltára Kolosvár. 4. Maros-Vásárhely sz. kir. város redőrkapitányságának levéltára Helyben. 5. Ref. egyházközség levéltára Helyben. 6. Reformatus kollegium előjárósága Helyben. 7. A széki Teleki grófok nemzetségének levéltára Helyben.

K. m. f.

Oroszlány Endre

rendőrfogalmazó

Dr. Farkaslaki Hints Elek

Dr. Ziegler Károly

rendőr orvos

Kiss Tamás

ref. koll. tanár

Gulyás Károly

ref. koll. tanár

Paál Gusztáv

ref. koll. tanár

Csiki Lajos

ref. koll. igazgató

Tóthfalusi József

ref. lelkész

Bátory József

ref. koll. tanár

Gyulai Ferencz

temetkezési vállalkozó

Dr. Farkas Gyula

a m. Tud. Akadémia képviselője

Bolyai Dénes

Gyulai D. Kálmán

ref. koll. tanár

ifj. Biás István

levéltáros

Dr. Péterfy István

ref. koll. orvos

198. o. 18—22. s. *Absolute Geometrie nach Johann BOLYAI*, bearbeitet von J. FRISCHAUF, Leipzig 1872, XII és 96. o.; *Elemente der absoluten Geometrie* von J. FRISCHAUF, Leipzig 1876, VI és 142. o.

FRISCHAUFON kívül még megemlítenők:

WAGNER, H., *Lehrbuch der ebenen Geometrie, nach Grundsätzen BOLYAIS*, Hamburg 1874. A második, «teljesen átdolgozott» kiadásban a szerző az abszolút geometriai vonatkozásokat mellőzte, «mert az a törekvés, mely a tanulók iránt támasztott követelmények leszállítására irányul, lehetetlenné teszi olyan tanmenet alkalmazását, mely a fősúlyt a tudományos alapvetésre és következetességre helyezi».

SPITZ, C., *Die ersten Sätze vom Dreiecke und die Parallelen, nach BOLYAIS Grundsätzen* bearbeitet, Leipzig und Heidelberg 1875. E művecske az abszolút geometriából többet nem tartalmaz, mint az *Appendix* 1. §-át.

SIMON, M., *Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie*, Straßburg 1890. Az 1890. év óta SIMON az abszolút geometriára vonatkozó értekezések egész sorozatát bocsátotta közre, a melyekben főleg az elemi szerkesztéseket fejleszti tovább.

198. o. 13—11. s. al. *The Science Absolute of Space by John BOLYAI*, translated from the Latin by Dr. George Bruce HALSTED, first edition, Austin, Texas, U. S. A., 1891, fourth edition 1896. Ez a könyv történeti bevezetéssel kezdődik (I—XXX. o.); erre következnek az *Appendix* fordítása (1—48. o.) és a *Tentamen*, valamint a *Kurzer Grundriß* egyes részelei (49—58. o.). A könyv a fordító megjegyzéseivel fejeződik be (59—71.), melyekben az abszolút geometria hatását az elemi geometria tanítására ecseteli. 1896-ban HALSTED meglátogatta a marosvásárhelyi kollegiumot.

198. o. 7—6. s. al. Az *Appendix* SUTÁK József által készített fordításának cízme: *A tér absolut igaz tudománya*. E fordítás, mely önálló mű, 1897-ben jelent meg. A bevezetésben (III—XIX. o.) SUTÁK a párhuzamosak elméletére, főleg BOLYAI Farkasnak és BOLYAI Jánosnak a geometria alapjait illető vizsgálataira vonatkozó történeti adatokat nyújt. Erre következik (XX—XXVIII. o.) BOLYAI János életrajza SCHMIDT Ferencztől, mely lényegében megegyezik a 197. oldalon említett német nyelven írt életrajzzal (v. ö. a 268. oldalon álló jegyzettel). A fordításra (1—72. o.) következik számos magyarázó jegyzet (73—143. o.).

198. o. 6. s. al. Az *Appendix*nek RADOS Ignác által készített fordítása *A térnek absolut igaz tudománya* cízzel a *Mathematikai és Physikai Lapok* 6. k. (1897), 147—192. oldalain jelent meg.

198. o. 2. s. al.—199. o. 1. s. SZILY Kálmán, *Adatok BOLYAI Farkas életrajzához, Értekezések a matematikai tudományok köréből* 11. k., 9. füz. Budapest 1884.

199. o. 1—3. s. BRASSAI Samu, *Emlékbeszéd BOLYAI Farkas felett*, Erdélyi Múzeum, 3. k. 1886.

199. o. 3—6. s. KONCZ József, *A marosvásárhelyi evang. reform. kollegium története*, Maros-Vásárhely 1886—1896, 271—338. o. (1887.)

199. o. 17—25. s. BEDŐHÁZI János, *A két Bolyai*, Maros-Vásárhely 1897.

199. o. 15—2. s. al. Az 1903 január 15-iki emlékünnepe leírása megjelent a kolozsvári egyetem kiadványában, *Acta universitatis literarum regiae hungaricae Francisco-Josephinae Kolozváriensis anni MCMII—III, fasciculus II*, Kolozsvár 1903. E füzet tartalmazza még SCHLESINGER emlékbeszédét, továbbá SCHLESINGER és STACKEL az emlékkönyvben (I. az alábbi jegyzetet) megjelent értekezéseinek magyar fordítását.

199. o. 12—6. s. al. A BOLYAI-díj egy emlékéremből és 10,000 korona pénzbeli jutalomból áll. A decemberben kiosztandó díj odaitélésére a Magyar Tudományos Akadémia harmadik (matematikai-természettudományi) osztálya mindig a megelőző márciusban két belső és két külső tagból álló bizottságot küld ki. E bizottság októberben dönti el, hogy ki kapja meg a díjat. Az előadó, kit a bizottság a maga kebeléből választ, a decemberi ülésben terjeszti elő jelentését, mely azután az Akadémia Értesítőjében jelen meg.

A BOLYAI-díj alapítását megelőzte 1895-ben a LOBATSCHESKIJ-díj alapítása a kázáni egyetem physikai-mathematikai társasága által. Az 500 rubeles díjat 1897 óta minden harmadik esztendőben, LOBATSCHESKIJ születése napján, (a jul. napt. szerinti) október 22-ikén adományozzák. E díj olyan geometriai, első sorban a nem-euklidikus geometriára vonatkozó munkáknak van szánva, a melyek a díj kiosztását megelőző hat éven belül kinyomattak vagy egyáltalában még nem jelentek meg; a díjra pályázó munkákat legkésőbbben egy évvel a díj kiosztása előtt a physikai-mathematikai társaságnak kell beküldeni. A bizottság jelentését és az előadó véle-

ményét a Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan cz. folyóiratban közlik. Legelőször, 1897-ben Sophus LIEnek ítéltek oda a díjat a *transzformáció-csoportokról* írt művének harmadik kötetében foglalt geometriai vizsgálatokért.

199. o. 5—4. s. al. *Libellus, post saeculum quam Johannes BOLYAI de BOLYA anno MDCCCII a. d. XVIII kalendas ianuarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriám eius immortalem ex consilio ordinis mathematicorum et naturae scrutatorum regiae litterarum universitatis hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus*, Claudiopoli MCMII. Az emlékkönyv tartalmazza először is János 1823 november hó 3-ikán Farkashoz intézett levelének hasonmását és latin fordítását. Azután következnek az értekezések: SCHLESINGER, *De nonnullis absolutae geometriae ad theoriám complexae variabilis functionum applicationibus* (1—60. o.); STÄCKEL, *De ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat* (61—79. o.); BONOLA, *Index operum ad geometriam absolutam spectantium* (81—154. o.). Miután STÄCKEL a Th. d. P. 287—318. oldalain az 1482—1837. évekbeli irodalmat állította össze, BONOLA ugyanazt tette az 1838—1902. évekbeli irodalomra nézve.

199. o. 4—2. s. al. L. SCHLESINGER, *BOLYAI János szülőházáról*, Mathematikai és Physikai Lapok, 12. k. (1902), 53—56. o. Ez a cikk azonos a kolozsvári egyetem matematikai-természettudományi karában akkor fennállott BOLYAI-bizottságnak előterjesztett jelentéssel.

199. o. 3—2. s. al. Az emléktábla pontos szövege a következő: «Az 1802. év 12. havának 15. napján itt született bolyai BOLYAI János, a magyar EUKLIDÉS, bolyai BOLYAI Farkasnak, a *Tentamen* mélygondolkodású szerzőjének fia, minek az emlékezetére száz év múltán a Ferencz József tudományegyetem matematikai és természettudományi kara állítja e követ.»

200. o. 6—10. s. Az ünnep leírását tartalmazza az *A Bolyai emlék-ünnep* című cikk a marosvásárhelyi ev. ref. kollegium 1902—1903. tanévi értesítőjében, melyhez János 1823 nov. hó 3-ikán atyjához intézett levelének hasonmása van mellékelve.

A Maros-Vásárhelyt épült új kulturpalota homlokzatát kiváló marosvásárhelyi férfiak mellszobrai és domborművei díszítik. A mellszobrok között megvannak BOLYAI Farkasé és BOLYAI Jánosé is. A János képmása természetesen csak költött, mert nem maradt fel róla arckép (l. az 58. o. 11. s.—59. o. 9. sorokhoz tartozó jegyzetet). A domborművek egyike Farkast a katedrán ülve ábrázolja; előtte ülnek tanítványai, ő pedig a mellette álló, szemeit reá szegező kis fiú felé fordul, mintha hozzá intézné magyarázatát; e kis fiú Jánost ábrázolja.

Összeállítása a BOLYAI János hagyatékából való azoknak a helyeknek, melyek az első részben kinyomtatásra kerültek.

1817-ből való latin nyelvi vizsgálati dolgozata.

227. o. 4- 20. s.

1820-ból való följegyzése egy gyakorló füzetben.

80. o. 17—25. s. Ez legrégibb bizonyítéka annak a munkálkodásnak, melyet János az abszolút geometria terén kifejtett. Hasonmása a címlap mellett található.

Az 1820. év körüli időből való czédula.

235. o. 11—7. s. al. A szög harmadolása egy egyenlő oldalú hyperbola segítségével.

Jánosnak BOLYAI Farkashoz intézett, 1823 november hó 3-ikán kelt leveléből.

82. o. 13. s. al.—83. o. 2. s. Az abszolút geometria fölfedezése.

1830-ból való czédula.

129. o. 19 28. s. Hat egységből alakuló mennyiségek rendszere.

1832-ből való czédula.

239. o. 14—25. s. Farkas nem képes az abszolút geometriát méltatni, a tökéletes tér-tudománya fontos voltáról.

1832-ből való két czédula.

106. o. 12. s.—107. o. 15. s. A tetraeder köbösítésének első módszere.

106. o. 16. s.—109. o. 13. s. A tetraeder köbösítése első módszerének segédtetele.

110. o. 13—15. s., továbbá 110. o. 19. s.—111. o. 13. s. és 111. o. 16—8. s. al. A tetraeder köbösítésének második módszere.

János főherceghez intézett folyamodványának Lemberg, 1832 május hó 3-iki keltezéssel ellátott fogalmazványa.

230. o. 5. s.—233. o. 16. s. Szabadság engedélyezése iránti kérelem; János geometriai vizsgálatainak jelentősége.

233. o. 17—13. s. al., 12—10. s. al., 234. o. 1—21. s., 14—12. s. al., 11—8. s. al. Jegyzetek Gaussnak 1832 márczius hó 6-ikán kelt leveléhez.

Följegyzés az Appendix egy kézi példányában.

242. o. 22—13. s. al. Azoknak, kik az abszolút geometriába be akarnak hatolni, első sorban HOFFMANN, *Kritik der Parallelentheorie* cz. művét ajánlja.

A tervbe vett *Reformation der Elemente der Mathematik* czimű mű 1832—1833-ból való előszavából.

175. o. 10—15. s. A mű beosztása.

186. o. 8—23. s. A matematika a legfenségesebb tudomány, a matematikus boldogsága.

1833-ból való czédula.

99. o. 14. s. al.—100. o. 10. s. A gömbi és az abszolút trigonometria kapcsolata.

A *Tér Tudománya* előszavából (1834 körül).

70. o. 10. és 12—13. s. Farkas és János 1830. évi találkozása; annak elhatározása, hogy János geometriai kutatásának lényegét latinul írja meg (*Appendix*).

70. o. 20—11. s. al. Farkas és János vizsgálja az abszolút geometria miatt; elhatározzák, hogy a kidolgozást Gaussnak küldik el.

74. o. 13—21. és 24—25. s. János első kísérlete, mely a párhuzamosak axiómájának bebizonyítására irányul.

76. o. 10. s. al.—77. o. 13. s. al. Asymptotikus egyenes; a kör határa.

79. o. 14—11. s. al. Farkas kifogást emel a végtelen sugarú kör ellen.

80. o. 6. s. al.—81. o. 15. s. Farkas nem érti meg az abszolút geometriát.

83. o. 22—14. s. al. Farkas azt tanácsolja Jánosnak, hogy az abszolút geometria fölfedezését minél előbb hozza nyilvánosságra.

84. o. 16. s.—85. o. 8. s. Farkas nem tudja az abszolút geometriát méltatni.

174. o. 3. s. al.—175. o. 6. s. A matematika encziklopedikus előadásának terve.

221. o. 19. s. al.—222. o. 12. s. A párhuzamosak elméletére vonatkozó történeti megjegyzések; az abszolút geometria keletkezése.

239. o. 16—6. s. al. Farkasnak az abszolút geometriára vonatkozó megjegyzéseiről.

Az 1834 körüli időből való czédula.

233. o. 7—1. s. al. A paracyklus és parasphæra elnevezésekről.

Jánosnak BOLYAI Farkashoz intézett, 1835 április hó 15-ikén kelt levele.

116. o. 14. s. al.—117. o. 3. s. al. A párhuzamosak axiómája bebizonyításának lehetetlenségéről.

Az 1835. év körüli időből való czédula.

118. o. 1—18. s. Töredék annak bebizonyításából, hogy a párhuzamosak axiómáját akár bebizonyítani, akár megdönteni lehetetlen.

Az 1835. év körüli időből való levélborítékra írt följegyzés.

118. o. 20—10. s. al. Az abszolút geometriának ellenmondás nélküli volta.

1837-ből való lapszéli jegyzetek az Appendix (1832-ből való) német fogalmazványához.

104. o. 4. s. és 8—31. s. A kör hosszúsága egyenletes felületekben.

119. o. 3. s. al.—120. o. 2. s. A párhuzamosak axiómájának bebizonyíthatatlan volta.

Jánosnak az 1837. év körüli időből való, BOLYAI Farkashoz intézett leveléből.

122. o. 1—18. s.

1838-ból való czédula.

127. o. 3—18. s. János bírálatot mond a JABLONOWSKI-féle társulat ítéletéről.

Jánosnak HASSE tanárhoz, a JABLONOWSKI-féle társulat titkárához intézett, 1841 deczember hó 30-ikán kelt levele.

247. o. 10. s. al.—248. o. 6. s. Kéri, hogy visszaküldjék neki a *Responsiot*.

Jánosnak az 1845. év körüli időből való, BOLYAI Farkashoz intézett leveléből.

124. o. 18. s. al.—125. o. 9. s. János panaszkodik egy levél miatt, melyet Farkas 1838-ban BOLYAI Antalnak írt.

Az 1848-tól 1850-ig terjedő időben szerkesztett *Észrevételek LOBATSEWSKY Miklós... az egy-közű egyenek, vagyis a XI. Euklidi elv' tárgyában tett... úr-tani vizsgálataira nézve*.

95. o. 15 —8. s. al. János az *A tér tudományát* atyjának akarja ajánlani.

133. o. 10. s. al.—134. o. 10. s. GAUSS állítólagos nyilatkozata LOBATSCHEFSKIJ-ról és BOLYAI Jánosról.

137. o. 6. s.—138. o. 3. s. al. János kétségbe vonja, hogy LOBATSCHEFSKIJ munkája önálló.

139. o. 15—19. s. Észrevétel a *Geom. Unters.* 22. §-ára (Imaginaris geometria).

139. o. 14. s. al.—140. o. 15. s. Az asymptotikus egyenesekről szóló tan új fogalmazása.

140. o. 20. s.—142. o. 8. s. Észrevétel a *Geom. Unters.* 27. §-ára (szögmérés).

142. o. 10—29. s. Szögmérés.

143. o. 14. s. al.—144. o. 12. s. Észrevétel a *Geom. Unters.* 32. §-ára (hypercyklusok és hypersphærák).

144. o. 15—14. s. al. és 145. o. 4—11. s. Észrevétel a *Geom. Unters.* 33. §-ára (a $s' = se^{-x}$ egyenlet).

145. o. 18. s.—147. o. 13. s. al. és 148. o. 3—20. s. Észrevétel a *Geom. Unters.* 35. §-ára (a gömbi és az abszolút trigonometria kapcsolata).

150. o. 13. s. al.—151. o. 15. s. al. Észrevétel a *Geom. Unters.* 36. §-ára (a $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$ egyenlet bebizonyítása).

151. o. 12—4. s. al., 152. o. 13. s. al.—155. o. 10. s. és 155. o. 10. s. al.—156. o. 16. s. Észrevétel a *Geom. Unters.* 37. §-ára (határátmenet a gömb trigonometriájáról a sík trigonometriájára; praktikus döntés a párhuzamosak axiómájának érvényessége dolgában; a gömbi és abszolút trigonometria kapcsolata).

237. o. 18—13. s. al. Szász Károlyra vonatkozó megjegyzés.

261. o. 10. s. al.—262. o. 3. s. BOLYAI Farkas hatása BOLYAI Jánosra.

Jánosnak az 1850. év körüli időből való, BOLYAI Farkashoz intézett leveléből.

125. o. 11—18. s. János békülékeny hangulatot tanúsít.

Az *A Tér Tudománya* egyik tervezetének 1851-ből való bevezetéséből.

77. o. 10. s. al.—78. o. 17. s. al. János érintkezése Szász Károlylyal (1819—1820); társalgásaik a párhuzamosak elméletéről.

81. o. 19—1. s. al. János egy elhibázott kísérletéről, mely a párhuzamosak axiómájának bebizonyítására irányul; csak 1823-ban sikerült neki teljesen keresztül törnie.

237. o. 3. s. al.—238. o. 15. s. al. A párhuzamosak axiómája bebizonyítására irányuló elhibázott kísérletnek bemutatása.

239. o. 3. s. al.—240. o. 13. s. al. Annak eldöntésének lehetetlensége, vajjon a párhuzamosak axiómája érvényes-e vagy sem.

Az *Üdvtan* 1851-ből való czimlapja.

262. o. 18. s.—264. o. 2. s. al.

Az *Üdvtan* 1851-ből való előszavából.

92. o. 18. s. al.—93. o. 6. s. GAUSS 1832 márczius hó 6-ikán kelt leveléről.

Az *Üdvtanra* vonatkozó, 1851-ből származó különböző czédulák.

187. o. 8—4. s. al. A matematika az *Üdvtannak* alapja.

188. o. 7—36. s. Az *Üdvtan* lényege és az általa nyújtott előnyök.

189. o. 2—14. s. A megengedett örömök.

190. o. 6—14. s. A német nyelv hiányossága; egy világnyelv tervezése.

190. o. 15—17. s. A szokásos kifejezésmódok többértelműsége.

- Az 1855. évbeli *A Tér Tudományához* tartozó különböző czédulák.
- 177. o. 20. s. al.—178. o. 14. s. A vonalak és felületek alakjáról általában; EULERnek a polyederekre vonatkozó tételéről.
 - 179. o. 6. s. al.—180. o. 11. s. A szerkesztéstan feladata.
 - 180. o. 14—24. s. MASCHERONI *Geometria del compasso* cz. művéről.
 - 181. o. 4. s.—182. o. 22. s. Az abszolút geometria ellenmondás nélküli volta; öt pont rendszere.
 - 182. o. 4—1. s. al. Hat pont rendszere.
 - 183. o. 4—6. s. A S és Σ közti döntésről.
 - 235. o. 10—25. s. János első kísérletei, melyek a párhuzamosak axiómájának bebizonyítására irányulnak.
 - 259. o. 20—29. s. A tér és idő valósága vagy látszata.
 - 259. o. 5. s. al.—260. o. 13. s. Felület- és térdarabok szétbontása háromszögekre, ill. tetraederekre.
- 1855-ből való czédula.
- 118. o. 7. s. al.—119. o. 9. s., 119. o. 16—32. s. és 120. o. 16—18. s. Kétséges annak bebizonyításának a lehetősége, hogy a párhuzamosak axiómája nem bizonyítható be.
- Az 1855. év körüli időből való czédula.
- 254. o. 13. s. al.—255. s. Ama problémák összeállítása, melyekről János azt vélte, hogy meg tudja őket oldani.
- Egy *A kör quadraturája* című értekezésnek az 1855. év körüli időből való czimlapja.
- 255. o. 6—9. s.
- Az *Értekezés a képzetes mennyiségekről (Responsio)* az 1855. év körüli időből való átdolgozása.
- 256. o. 8. s.—259. o. 17. s. 1. §. A vizsgálat módszeréről, 2. §. a negatív számokról.
- A *Responsio* átdolgozásához mellékelt, az 1855. évből való czédula.
- 101. o. 19. s.—103. o. 5. s. al. A képzetes mennyiségek tanának alkalmazása az abszolút geometriára; a mindenütt egyenletes felületek geometriája.
- Az 1855. év körüli időből való czédula.
- 255. o. 17—26. s. Határozott integrálok képzetes határokkal és képzetes változók függvényei.
- Az 1855. év körüli időből való czédula.
- 255. o. 15—13. s. al. Az x^a függvény differenciálásáról, ha a tetszős szerinti, akár képzetes érték is.
- Jánosnak az 1855. év körüli időből való, Bolyai Farkashoz intézett levele.
- 254. o. 14—24. s. al. Bolyai János ír betegségéről.

A XI. axióma bebizonyítása 1856-ból való bevezetéséből.

5. o. 12—8. s. al. Bolyai Farkas jénai tartózkodásáról.
6. o. 6. s. al.—7. o. 4. s. Bolyai Farkas Göttingában; baráti viszonya Gausszal.
12. o. 14—20. s. Bolyai Farkas viselkedése hölgyek társaságában.
50. o. 10—16. s. János gyermekkoráról.
51. o. 22—15. s. al. János első matematikai kiképztetése.
55. o. 22. s.—56. o. 5. s. Gauss viselkedése, mikor Jánost hozzá akarták küldeni.
56. o. 21—28. s. Farkasnak nem kellett volna Jánost magától eltávolítania és Bécsbe a mérnök-akadémiába küldenie.
74. o. 8—11. s. Farkas nyilatkozatai a párhuzamosak elméletének fontosságáról.
82. o. 5—9. s. János az 1823. év telén fölfedezi az *Appendix* 29. §-ának tételét.
87. o. 12—23. s. Farkasnak egy ki nem elégítő bebizonyítása a párhuzamosak axiómájának bebizonyíthatatlan voltáról.
171. o. 16 12. s. al. János haláljának kifejezése atyja iránt.
182. o. 14—11. s. al. A XI. axióma bebizonyítására vonatkozó értekezésnek részletes címe.
192. o. 13. s. al.—193. o. 8. s. és 193. o. 10—31. s. Bolyai Farkas és Gauss összehasonlítása.
206. o. 16—7. s. al. Bolyai Farkas mint gyermek Nagyenyeden.
226. o. 18—13. s. al. János gyermekkoráról.
228. o. 5—3. s. al. János sem nem játszik, sem nem dohányzik, sem nem iszik.
229. o. 14—22. s. Farkas nem tudja a János fölfedezte abszolút geometriát méltatni; elhatározzák, hogy a kidolgozást elküldik Gaussnak.
246. o. 11—17. s. Viszálykodás János és Farkas között, mert ez nincsen elég elismeréssel fia fölfedezése iránt.

1856-ból való különböző czédulák.

112. o. 1—14. s. A tetraeder köbösítésének második módszere.
113. o. 12. s.—114. o. 13. s. A tetraeder köbösítésének harmadik módszere.
114. o. 5. s. al.—115. o. 3. s. A tetraeder köbösítésének negyedik módszere.

János leveleiből, melyeket 1857—1859. az öcséhez, Gergelyhez intézett.

172. o. 1—8. s. János értesíti Gergelyt egészségi állapotáról.

Tárgy- és névmutató.

A számok az oldalszámokat jelentik.

A B. F. és B. J. rövidítések jelentése: Bolyai Farkas ill. Bolyai János.

- A'** *Marosvásárhelyt 1829-be nyomtatott Arithmetika Elejének részint rövidített, részint bővített, általán jobbított, 's tisztább kiadása. A' szerző által (1843), B. F. műve 22, 202, 254.*
- A** *párisi per, B. F. érzékeny játéka 21, 202.*
- A** *szerelm győzedelme a virtuson, B. F. szomorújátéka 20, 202.*
- A** *virtus győzedelme a szerelmen, B. F. szomorújátéka 20, 202.*
- Abszolút geometria**, mely független a párhuzamosak axiómájának helyes vagy nem helyes voltától, fölfedezése B. J. által 73—93; az a. g. rendszere 85—86; ellenmondás nélküli volta 115—120 és 180—184; az a. g. és nem-euklidikus geometria megkülönböztetése 229.
- Alberti**, göttingai kereskedő. 211.
- Alexander** (Nagy Sándor) 218.
- Alkotó rész** 35.
- Antal János**, a marosvásárhelyi kollegiumban a történet tanára, később református püspök 57.
- Appendix**, B. J. tértudománya 52, ki nyomtatása 70; az A.-et elküldik Gaussnak 71 és 88—90; 90, 95, 98, B. F. tolaléka az A.-hez 98, 99, 134 és 253; 107, 134, 137, 150, 151, 171, 174, 176, 180, 195, 216, 221, 222, 229, 253, B. F. ítélete az A.-ról 254; 266, 267, 270.
- Appendix első 33 paragrafusának német fogalmazványja** 71, 103, 119, 198, 233.
- Arany János** 165.
- Archimedes** 38, 221, 222.
- Arithmetica eleje kezdőknek** (1850), B. F. műve 24, 202.
- Axiomatika** 39.
- Axiómák a Tentamen előleges megjegyzéseiben** 34; axiómák kölcsönös függetlensége 38.
- Az arithmetica eleje** (1830), B. F. műve 18, 28, 29, 136, 162, 174, 190, 201.
- Az arithmeticanak, geometriának és physicának eleje a Maros Vásárhelyi kollégyombeli alsóbb tanulók számára a helybeli professor által** (1834), B. F. műve 24, 201.
- Az arithmetika és geometria fái** 31.
- Az ősz lantos hatyúdala három nyelven**, B. F. költői műve 22, 202.
- Állás** 119.
- Aesopus** 261.
- Bachmann Julianna**, Benkő József felesége, B. F. anyósa 12.
- Baltzer**, Richard reámutat B. F. és B. J. geometriai vizsgálataira 194—195, 265—267.
- Battaglini**, az Appendix olasz fordítója 196, 268.
- Bátory József** 268, 270.
- Bedőházi János** megírja B. F. és B. J. életrajzát 12, 21, 22, 24, 29, 55, 95, 125, 162, 191, 199, 203, 208, 212, 214, 215, 216, 227, 242, 251, 264, 271.
- Beltrami** 105, 243.
- Benkő József**, árkosi, orvos, B. F. apósa 12.
- Benkő Zsuzsanna**, árkosi, B. F. első felesége, B. J. anyja 12, 13, 19, 53, 57, 58, 59.
- Beöthy Zsolt** 214.
- Bernoulli János**, I., 16, 259.
- Bernoulli János**, III., 42.
- Bertrand**, Louis 1778-ban próbálja a párhuzamosak axiómáját végtelen nagyságdarabok összehasonlítása segítségével bebizonyítani 47, 222, 225, 265.
- Bessel** 220, 221.
- Bethlen Ádám**, gróf, 208.
- Bethlen Elek**, gróf, 208.
- Biás István** 1907-ben Maros-Vásárhelyt kiadja az Appendix egy anasztatikus lenyomatát 198; 269, 270.
- Bischoff**, porosz határőr 72.
- Blumenbach János** Frigyes, göttingai orvostanár 5.
- Bod Péter**, B. F. tanítványa 29, 124.
- Bodoki Sámuel** 65.
- Bodor László** 212.

- Bodor Pál, B. F. barátja 6, 12, 54, 58, 63, 64, 65, 68, 69, 209, 211, 212.
- Bolyai Amália, B. J. leánya 97, 170.
- Bolyai Antal, B. F. fivére 1, 14, 94, 96, 124, 164, 206, 228.
- Bolyai család 1.
- Bolyai Dénes, B. J. fia 97, 170, 228, 268, 269, 270.
- Bolyai Farkas ifjúkora (1775–1796) 1–4; B. F. a nagyenyedi kollegium növendéke 2–3; baráti viszonya báró Kemény Simonnal 3; B. F. és báró Kemény Simon a kolozsvári kollegiumban folytatják tanulmányaikat 3–4; B. F. báró Kemény Simonnal elutazik Németországba 4.
- B. F. Németországban (1796–1799) 5–9;
- B. F. Németországban (1796–1799) 5–9; Jéna 5; Göttinga 5–9; baráti viszonya Gaussal 6–9; bucsúja Gausstól 9.
- B. F. visszatérése a hazába, Kolozsvár és Domáld (1799–1804) 10–13; visszatérése a hazába 10–11; kolozsvári tartózkodása és egybekelése Benkő Zsuzsannával 11–12; tartózkodása domáldi birtokán és János születése Kolozsvárt 12–13.
- B. F. mint marosvásárhelyi tanár (1804–1853) 13–25; meghívatása 14; lakóháza 15; újból kezd a matematikával foglalkozni 15–16; tanítói működése 16–17; B. F. mint nyelvújító 17–19; B. F. mint költő 19–22; B. F. mint zenész 22–23; B. F. mint műszaki tervező, kemenczei stb. 23; B. F. pályázik az erdélyi erdőinspektori állásra 23–24; B. F. matematikai művei 24; B. F. egyénisége 24–25.
- B. F. mint matematikus 26–49; a Tentamen keletkezése és megjelenése 26–29; a Tentamen fogadtatása 29–31; B. F. matematikai rendszere 31–32; az aritmetika alapjai B. F. műveiben 32–36; a geometria alapjai B. F. műveiben 37–40; B. F.-nak a párhuzamosak axiómájára vonatkozó vizsgálatai 40–49.
- B. F. és B. J. B. J. ítélete B. F.-nak a párhuzamosak elméletére vonatkozó vizsgálatairól 49; nevelési elvek 50–52; B. F. följegyzései 15 éves fiáról 52–53; B. F. Jánost Gausshoz akarja küldeni 54; B. F. értesíti Jánost az anyja haláláról 59; B. F. erkölcsi tanácsokat ad Jánosnak, mikor ez a mérnök-akadémia növendéke 62, 63 és 66–67; B. F. kéri Jánost, hogy az ő érdekében járjon közbe János főhercegnél 64; B. J. látogatása apjánál 68; első vizálykodásuk 69; találkozásuk mielőtt János Magyarországot elhagyta 70; B. F. titokban tartja János előtt a XI. axióma bebizonyítására vonatkozó gondolatait 70; B. F. övja Jánost a párhuzamosakkal való foglalkozástól 74–76 és 79–80; vizálykodásaik az abszolút geometria elismerése miatt 80–81 és 86–87; az Appendixet elküldik Gaussnak és Gauss válasza 87–90; vizálykodásuk Jánosnak Maros-Vásárhelyre való visszatérése után 94; későbbi viszonyuk 95–96; mind a ketten pályáznak a Jablonowski-féle tudós társaság pályadíjára 121–125; újabb vizálykodásuk Farkasnak 1846-ban Bolyai Antalhoz intézett levele miatt 124–125; kibékülésük 125; utolsó vizálykodásuk (1850-ban) Farkas végrendelete miatt 164.
- B. F. utolsó évei (1848–1856) 159–169; Gauss-szal újra kezd levelezni 159–160; Kreil látogatása B. F.-nél 161; Gauss halála 162–163; «Bucsúja a földtől» 163–164; utolsó betegsége 164–169; B. J. ítélete B. F. pályájáról 169.
- B. F. és B. J. utolsó éveikben 170, 171, 174, 175, 179, 182, 184, 185, 186, 189, 190.
- B. F. Az utókor ítélete és matematikai vizsgálatainak fokozatos elismerése 192–200; a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-díja 199–200.
- B. F. megjelent munkáinak jegyzéke 201–202; azoknak a műveknek jegyzéke, melyek B. F.-ra és B. J.-ra vonatkoznak 22–205.
- Jegyzetek és utalások, 206, 207, önarcképe 208; önéletrajza 208; báró Kemény Simon 1799 január hó 30-án B. F. atyjához intézett levele 209–212; 212, a kollegium meghívó levele 213; Herepei Ádámnak B. F.-hez intézett levele 213; 214, B. F. arcképei Bedőházi könyvében 215; a Tentamen tervezésének kezdetei 215; 216, Brassai ítélete a Tentamenről 217–218; 219, 220, 221, 223; részlet a B. J.-hoz intézett, 1820 április hó 4-én kelt leveléből 224–225; 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 237, vizálykodása Jánossal az abszolút geometria miatt 239; 241, 242, 243, részlet a képzetes mennyiségekre vonatkozó pályamunkájából 246–247; új írása 248–249; 250, 251. gyászjelentése Szász Károlyról 252–253; 254, 262, 265, 267, 268; jegyzőkönyv, mely felvétellett 1911 június hó 7-én B. F. és B. J. kihantolásáról és közös sírba való helyezéséről 268–270; 271, a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-díja 271; 272.
- Bolyai Gábor 206.
- Bolyai Gáspár, B. F. atyja 1.

- Bolyai Gáspár, Bolyai Gergely fia 229.
- Bolyai Gergely, B. F. második házasságából származott fia 2, 4, 16, 22, 64, 69, 94, 124, 164, 172, 206, 208, 215, 228, 242, 253.
- Bolyai Gyula, B. J. fia 97, 170.
- Bolyai János, homo regius a XVI. században, 1.
- Bolyai János, B. F. fia 4, 6, 10, 12, 13, 24, 32, 37, 39, 45, 46.
- B. J. ifjúsága (1802–1818) 50–59; B. J. neveltetése 50–54; B. J.-t apja Gauss-hoz akarja küldeni 54–56; készülése a bécsi mérnök-akadémiába való fölvételre 56–59.
- B. J. a mérnök-akadémián (1818–1823) 60–70; fölvétele és az intézetbe való beilleszkedése 62–64; haladása, főleg a matematikában 64–65; érintkezése Szász Károlylyal 65; mint a rangsorban a másodiknak mérnökkari hadapródnak nevezik ki 66.
- B. J. mint katonatiszt (1823–1833) 68–72; alhadnagy Temesvárt 68; látogatása atyjánál 68–69; főhadnagy Aradon és Lembergben 69–71; geometriai vizsgálatai, újabb találkozásai atyjával 70; másodosztályú kapitány Lembergben és Olmützben 71–72; szabadságoltatás iránti kérvénye 71–72; minősítése 72; elbocsáttatása 72; visszatérése Maros-Vásárhelyre 72.
- Az abszolút geometria fölfedezése B. J. által 73–93; a párhuzamosak axiómájának bebizonyítására irányuló kísérletei 73–79; az első impulzust a párhuzamosakkal való foglalkozásra atyjától nyeri 73–74; első kísérletei 74; B. F. övja a párhuzamosakkal való foglalkozástól 74–76; asymptoták és paracyklusok érintkezése Szász Károlylyal 76–78; B. J. és Szász Károly egymásnak tett ígérete 78–79; B. F. újabb figyelemztetési 79–80; B. J.-nak az abszolút geometriára vonatkozó vizsgálatainak legrégibb bizonyítékai 80; B. J.-nak az az abszolút trigonometria alapvetésére irányuló törekvései 80–81; apjával való viszálykodása 80–81; a XI. axióma elhibázott bebizonyítása 81; az abszolút trigonometria megapozása 82–83; B. J. felfogása az abszolút geometria lényegéről 85–86; újabb viszálykodása apjával 86–87; a döntést Gaussra bízzák 87–88; Gaussnak 1832 márczius hó 6-án kelt levele 88–90; B. J. ítélete Gaussnak iránta tanúsított viselkedéséről 92–93.
- B. J. Domáldon (1834–1846) 94–97; viszálykodása apjával 94; sikertelen pályázata a lipcsei Jablonowski-féle tudós társaság pályadíjára 95; újabb viszálykodása apjával 94–95.
- B. J. további vizsgálatai az abszolút geometria terén 98–120; a gömbi és az abszolút trigonometria kapcsolata 99–102; az abszolút tér mindenütt egyenletes felületeinek geometriája 102–105; a tetraeder köbösítése 105–115; a párhuzamosak axiómájának bebizonyíthatatlan volta 115–120.
- B. J. elmélete a képzetes mennyiségekről 121–130; siker nélkül pályázik a lipcsei Jablonowski-féle tudós társaság pályadíjára 122–127; csizvakodása apjával 123–125; elméletének méltatása és összehasonlítása a Hamiltonéval 126–130.
- B. J. és Lobatschewskij 131–158; hogyan ismerkedett meg B. J. Lobatschewskijnek Geometrische Untersuchungenjével 131–136; B. J. észrevételei Lobatschewskij Geometrische Untersuchungenjére 136–158; a szög mérése 140–143; az abszolút trigonometria és a gömb trigonometriája 145–148; egy házag a Geometrische Untersuchungen 36. §-ában 148–151; a párhuzamosak axiómája érvényessége eldöntésének kérdése 151–155; a gömbi és az abszolút trigonometria kapcsolata 155–156; B. J. és Lobatschewskij munkáinak összefoglaló összehasonlítása 156–158.
- B. J. vizonyja atyjához az utolsó években 164 és 171.
- B. J. utolsó évei 170–172; elárulása 170–171; utolsó betegsége 171–172.
- B. J. előrehaladt korából való matematikai vizsgálatai 172–184; általános áttekintés 172–174; Reformation der Elemente der Mathematik 174–176; A tér tudománya 176–184; töredékek A tér tudományából 176–180; az abszolút geometria ellenmondás nélküli volta 181–184.
- B. J. Üdvötna 172, 174, 185–191; egy tökéletes nyelv szerkesztésére irányuló törekvése 190–191.
- Az utókor ítélete, működésének fokozatos elismerése 192–200; születése századik évfordulójának megünneplése, a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-díja 199–200.
- Jegyzéke azoknak a műveknek, melyek B. F.-ra és B. J.-ra vonatkoznak 202–205.
- Jegyzetek és utalások 206, 209, 211, 212, 213, levele Gerlingről 216–217; 220, a párhuzamosak elméletére vonatkozó történeti megjegyzései 221–223; 224, latinnyelvi vizsgálati dolgozata (1817) 227; 228, 229, János főherceghez intézett

- folyamodványának 1832 május hó 3-ról keltzett fogalmazványa 229—234; 234, 235; a szög harmadolása 235; a párhuzamosak axiómája bebizonyításának egy elhibázott kísérlete 237—238; 1823 november hó 3-án kelt, Farkashoz intézett leveléről 238—239; az abszolút geometriáról való felfogása 239—240; 241, 242, 244, 246, a Jablonowskij-féle társaság titkárához intézett levele 246; 247, 248, a képzetes mennyiségekre vonatkozó pályamunkájának teljes címe 247; 249, 253, 254, azoknak a problémáknak összeállítása, melyekkel B. J. előrehaladt korában foglalkozott 254—255; előrehaladt korából való, az anilízisre vonatkozó följegyzései 255—259; előrehaladt korából való A tér tudományára vonatkozó följegyzések 259—260; 261, az Üdvötn egyik czímtervezete 262—264; 267, 268, jegyzőkönyv, mely fölvetett 1911 június hó 7-én B. F. és B. J. kihantolásáról és közös sírba való elhelyezéséről 268—270; a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-díja 271; 272.
- Bolyai-kemencze* 23.
- Boncompagni Boldizsár, herczeg, a *Bulletino di bibliogr. e di storia d. sc. mat. c. fis.* kiadója 196, 268.
- Bonola 199, 219, 220, 272.
- Borel Émile 259.
- Bossut, Charles, 1775-ben próbálkozik a párhuzamosak axiómájának bebizonyításával 222.
- Bourgeois tábornok, a bécsi mérnök-akadémia igazgatója (1790—1811) 61.
- Brandes, Gauss barátja, a boroszlói és lipcsei egyetemen a matematika tanára 7, 209.
- Brassai Sámuel ítélete B. F. drámai műveiről 22; nyilvánosságra hozza B. F. önéletrajzát 199 és 208; emlékbeszéde B. F. felett 203; részlet az emlékbeszéből 217—218; 271.
- v. Braunmühl, A. 236.
- Bricard 184, 261.
- Bucó elmélete a képzetes mennyiségekről 122, 246.
- Bürger ír a párhuzamosak elméletéről (1833) 222, 223.
- Cantor György a kontinuum fogalmáról 36, 217.
- Cantor Móríz 236.
- Carnot, Lazare, 46, 218.
- Cartan, E. 246.
- Cauchy 218.
- Cayley 183, 245, 260.
- Clavius ír a párhuzamosak elméletéről 222.
- Comenius 1650—1652. a várospataki ref. kollégium tanára 15.
- Coste kimutatja, hogy Hausen a párhuzamosak axiómájának bebizonyítására irányuló kísérlete nem kielégítő 84.
- Crelle 267.
- Csányi Dániel 126.
- Csiki Lajos 268, 270.
- Czermák József 66.
- Dannmeyer, a köbtartalom kiszámításáról az abszolút geometriában 243, 244.
- Dehn 184, 261.
- Delboeuf 218.
- Desargues 266.
- Dicső Lajos, B. F. tanítványa, 169, 197.
- Dobner, H. 219.
- Dósa Elek, a marosvásárhelyi ref. kollégium tanára 122.
- Döbrentei Gábor 19, 22, 214.
- Döttler, a bécsi egyetemen a fizika tanára 51, 226.
- Drobisch, M. V., a lipcsei egyetemen a matematika tanára 122, 246.
- Dugonits András 18.
- Dumas 218.
- v. Eckhardt-Hausen 262.
- **Egy új más világ* 82, 238, 239.
- Egyenes értelmezése B. F.-nél 39; e. elmélete 234; e. mint a kör határa 236; B. J. az egyenesről 253.
- Egységek B. F. elméletében a negatív számokról 32; B. J. elméletében a képzetes mennyiségekről 128.
- Egyetlen 39.
- Eichhorn, Gauss barátja, porosz oktatásügyi miniszter 7, 209.
- Ellérés axiómája 46, 48, 223.
- Elválaszthatatlan rész 35.
- Encke 90, 220, 221, 248.
- Engel Frigyes összehasonlítja B. J.-nak és Lobatschewskijnek az abszolút geometriára vonatkozó munkáit 156—158; 203, 209, 216, 219, 220, 223, 224, 225, 226, 229, 235, 239, 242, 243, 244, 245, 248, 249, 250, 251, 260.
- Enriques 220.
- Eötvös József, báró, magyar vallás- és közoktatásügyi miniszter 196.
- Erb, K. A. 218.
- Eschenburg, Gauss barátja, 7, 209.
- Ettingshausen 138, 217, 229.
- Euklides 16, a mozgást lehetőleg ritkán alkalmazza 38. és 219; a párhuzamosakra vonatkozó axiómája 40; 51, 79, 90, 138, 156, 171, 180, 220, 221, 222, 232, 238, 265.
- Euler 16, 51, 96, tétele a polyederekről 178; 218, 226, 236, 250.

- Farkas** Gyula 268, 270.
Felület 38; egyszerű f. 177; teljes f. 177; átlukasztott f. 177.
Ferenoz, I., magyar király 62.
Ferenoz József király meglátogatja a marosvásárhelyi kollegiumot 22.
Ferroni, P., 236.
Fichte 5.
Forti, Angelo, 196, 268.
Fourier 219, 249.
v. Frank 244.
Frischauf, J., 49, 114, 198, 226, 244, 270.
Fritsch, Karl, Maros-Vásárhelyt mágneses észleléseket végez 251.
Furtwängler 228.
Gatti Frigyes 208, 228.
Gauss Jenő, Gauss Károly Frigyes fia, 227.
Gauss József, Gauss Károly Frigyes fia, 227.
Gauss Károly Frigyes I, baráti viszonya B. F.-sal 6–9; 13, 14, 15, 16, 19, 23, 29, 30, 31, 32, 37, 1799. december hó 11-kán k. levele a geometria alapjairól 41–42; 1804. november hó 25-ikén kelt levele, a göttingai párhuzamosak elméletének bírálata 43–44; 45, 50, 51, 53, nem válaszol B. F. levelére, melyben ez kéri, hogy Jánost magához vegye 54–55; megkapja az Appendixet 70; Gerlingnek ír az Appendixről 70–71; 72, Szász Károly meglátogatja Gauss 78–79, 83, Gaussnak 1832. márczius hó 6-ikán kelt levele az Appendixről 88–90; a geometria alapjaira vonatkozó vizsgálatai 90–91; B. J. nyilatkozata Gaussnak 1832. márczius hó 6-ikán kelt leveléről 92–93; 94, 95, 96, 98, 105, Gaussnak a tetraeder köbösítésére vonatkozó vizsgálatai 106, 113, 115; Gauss elmélete a képzetes mennyiségekről 122, 127, 129–130; 131, Mentovich meglátogatja Gauss 132–133; 133, 134, 135, 137, 159, 160, tollrajza Kästnerről 161; B. F. értesül Gauss haláláról 162–163; 164, 169, 171, 175, 183, 184, Sartorius v. Waltershausen Gauss és B. F. ifjúkori barátságáról 192–194; Baltzer Gaussnak a geometria alapjaira vonatkozó vizsgálatairól 194–195; 195, 209, 216, 220, 221, 223, 224, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 237, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 248, 249, 251, 253, 254, 260, 261, 265, 267, 268.
Gauss Károly Vilmos, Gauss Károly Frigyes fia, 227.
Gauss Minna, Gauss Károly Frigyes leánya, 227.
Gauss Teréz, Gauss Károly Frigyes leánya, 257, 227.
Gauss-archivum 92, 163.
Geometria rendszere B. F.-nál 37–38.
Gerhardt, C. J. 219.
Gerling, Gauss tanítványa és barátja, a marburgi egyetemen a matematika tanára, 31, 70, 90, 91, 134, 161, 184, 216, 221.
Goethe, B. F. olvassa G. Wertherjét 5.
Gömbfelület, B. F. geometriai rendszerének alapalakzata 38, 39, 179; gömbfelület bővebb értelemben 103, 219; gömbfelület határa 236.
Göttingai párhuzamosok elmélete 16, 42, 223–224.
Göttingai párhuzamosok elméletének toldaléka 16, 45, 223–224.
Grashof, C. A. 219, 236.
Gray Tamás, angol költő, B. F. lefordítja néhány költeményét 21.
Guillaume Atanáz, Erdély erdőinspektora, 23.
Gulyás Károly, a marosvásárhelyi ref. kollegium könyvtárának és a Teleki könyvtárnak őre, értekezik B. F.-ről mint rajzolórról és festőről 208; 268, 270, György, V., Hannover királya 253.
Gyulai D. Kálmán 268, 269, 270.
Gyulay Ferencz 269, 270.
Gyűrű B. F.-nál és B. J.-nál a körnek neve; tulajdonságai 39; gyűrű mint a geometria alapalakzata 39; 178.
Halász Gedeon, százados és a bécsi mérnök-akadémia tanítója, 63.
Halsted, George Bruce, angol nyelvre fordítja az Appendixet 198, 270.
Hamilton, W. R., az időt tekinti a folytonosan változó mennyiség hordozójának 32; elmélete a képzetes mennyiségekről 128–129, 217, 248.
Hamlet 43.
Hankel, Hermann, 32, a permanencia elve 34; 217, 246.
Harzer, a tér görbületéről 245.
Hasonlóság axiómái 46, 253.
Hasse, a lipcei Jablonowski-féle tudós társaság titkára, 248, 247.
Határ fogalma B. F.-nál 34–35.
Hatvány tárgyalása B. F.-nál 247; B. J.-nál 126.
Hauß (1793–1821) ír a párhuzamosak elméletéről 222.
Hausen 1734-ben próbálkozik a párhuzamosak axiómájának bebizonyításával 84, 222.
Hauser Máttyás, a bécsi mérnök-akadémia tanítója, matematikai tan-könyve 57, 222, 227.
Heeren, a göttingai egyetemen a történet tanára, 5.
Hegedűs Ferencz, a marosvásárhelyi

- ref. kollegiumban a matematika tanára, 251.
- Helmholtz, merev testek mozgása mint a geometria kiinduló pontja 38; 198, 218, 219.
- Helyzet axiómái 46—47.
- Herepei Ádám, B. F. és báró Kemény Simon tanítója 3, 207, B. F.-hoz intézett levele 213—214.
- Herepei János, B. F. első tanítója 2.
- Herschel 153.
- Herzogenberg, báró, a bécsi mérnök-akadémia igazgatója, (1820—1834.) 64.
- Hessenberg, G. 226.
- Hessling 224.
- Heyne, a göttingai egyetemen a klaszszikus nyelvek tanára 5.
- Hilbert, a geometria alapjai 39, 184, 219, 261, 1910-ben a Bolyai-díjjal jutalmazták 199.
- Hindenburg iratai a párhuzamosak elméletéről (1781—1799.) 222.
- Hints Elek 268, 269, 270.
- Hoffmann, Joh., Jos. Ign., műve a párhuzamosak elméletéről 223, 232, 240, 242.
- Horváth Farkas leírja B. F. kemencezerkezeteit 214.
- Hoüel, Jules, reámutat B. F. és B. J. geometriai vizsgálataira és francia nyelvre fordítja az Appendixet és Schmidt Ferencznek a két Bolyairól írt életrajzát 195—196, 267.
- Hypercyklus 89. 143, 233, 241.
- Hypsphaera 89, 100, 104, 113, 143.
- Idé, Gauss barátja, a kázáni egyetemen a matematika tanára.
- Idő, a tiszta idő szemléleti képe 31; az idő mint a folytonosan változó mennyiség hordozója 32, 175—176; Kant tana az időről 217; 259.
- Imaginárius geometria, az abszolút geometria neve Lobatschevskijnél 105, 139
- Imre Sándor 17, 214.
- Irracionális számok újabb tana 32.
- István, Szent. 161.
- Jablonowski-jéle tudós társaság Lipcsében 95, 100, 122, 248, pályakérdése a képzetes mennyiségekről 122—123; ítélete a pályamunkákról 125—126.
- János főherceg, a bécsi mérnök-akadémia főigazgatója, 62, 63, 64, B. J. hozzá intézett folyamodványáról 71—72; 103, 185, 187, 233, 228, B. J. hozzá intézett folyamodványának 1832. május hó 3-ról keltezett fogalmazványa 229—234; 242, 244.
- Jean Paul (Richter Frigyes) 22.
- Jenő, savoyai, 60.
- Jégvirág, 6 latin hexameter, melyet B. F. Gauss halálára írt, 162, 252.
- Jókai Mór 166.
- József, II., 160, 162.
- Kant befolyása B. F.-ra 31—32; A tiszta ész kritikája a geometriai alapjaira vonatkozó vizsgálatokra serkent 41 és 193; Gauss ellentmond Kant annak az állításának, hogy a tér a szemlélet formája 90 és 241; Kantnak az időről szóló tana 217.
- Karsten 16, iratai a párhuzamosak elméletéről (1758—1786) 222.
- Katona Elek, B. F. bécsi ismerőse, 124.
- Katona József 21.
- Kazinczy Ferencz 16.
- Károly, III., magyar király 61.
- Károly Vilmos Ferdinánd, Braunschweig hercege 6.
- Kästner, a göttingai egyetemen a matematika tanára, 6, 16, a párhuzamosak axiómájának bebizonyításán elcsúgig 41, 84; Gauss tollrajzot készített róla 161; 220, 232.
- Kemény Kálmán, báró, 215.
- Kemény Miklós, gróf, a marosvásárhelyi kollegium főkurátora, 57, 58, 63, 65.
- Kemény Simon, báró, B. F. hasonnevű barátjának atyja 206.
- Kemény Simon, báró, baráti viszonya B. F.-sal 3; reáveszi B. F.-t, hogy vele Németországba utazzék 4; B. F.-sal együtt tartózkodik Jénában és Göttingában 5—9; 11, életrajza Szabó Pétertől 206—207; 1799. január hó 30-ikán Bolyai Gáspárhoz intézett levele 209—212; 215, 227, 232.
- Kemény Simon vagy a házasszeretet áldozatja, B. F. szomorújátéka 20, 202.
- Kendeffi Ádám, gróf, 54, 65.
- Kepler 16.
- Kerekes Ferencz, a debreczeni ref. kollegium tanára, pályamunkája a képzetes mennyiségekről 126, 218.
- Kerekség, B. J.-nál A tér tudományában a gömbfelület neve 178.
- Képzetes mennyiségek, elméletük B. F.-nál 33—34, 121, 125, 218; B. J.-nál 126—130; Hamiltonnál 128—129.
- Kios, Johann, 236.
- Killing 218, 219, 245.
- Kircher, Adolf, műve a párhuzamosak elméletéről (1803.) 222.
- Kisfaludy Károly 20, 21.
- Kiss Tamás 268, 270.
- Klein, Felix, az abszolút geometria ellenmondás nélküli voltáról 183, 260.
- Klindworth Lina 7.

- Kloppstock 29.
 Klügel, Simon, 1763-ban megírja a párhuzamosak elméletének első történetét 41, 220.
 Knorr, Ernst, 225, 248.
 Koenigsberger, Leo, 218.
 Koncz József, a marosvásárhelyi ref. kollegium tanára, B. F. életírója 12, 17, 23, 27, 168, 203, 207, 208, 209, 212, 214, 215, 271.
 Kongruencia 38.
 Kont Ignác 17, 208, 214.
 Kontinuum fogalma B. F.-nál 35; Cantor Györgynél 36.
 Kőr bővebb értelemben 103; quadraturája az abszolút geometriában 158; határa 236.
 König Gyula, a Tentamen egyik kiadója 31, 199; 196, 218.
 Kreil meteorológiai és mágneses észleléseket végez Erdélyben 161; 162, 163, 251, 265.
 Krizbai Elek Dénes, kolozsvári ref. pap, 12.
 Kummer 48.
 Kurzer Grundriß eines Versuchs sth., B. F. műve, 24, 32, 46, 48, 131, 160, 196, 202, 267, 270.
 Kuún Gézané, báró, 207.
 Kühn, a chemia tanára a lipcei egyetemen és a Jablonowski-féle társaság titkára 123, 124.
 Kürschák József, a Tentamen egyik kiadója, 31, 199; kibetűzi B. J. följegyzését Lobatschewskij Geometrische Untersuchungen-jéről 136; 204; 226, 248, 250.
 Lacroix 16, 222.
 Lagrange 16, 218.
 Lakatos Sámuel, a marosvásárhelyi ref. kollegium tanára, 200.
 Lalande 16.
 Lambert, Theorie der Parallellinien 42, 74, 220, 221, 235, 236, 250.
 Laplace 46, 171.
 Latin betűk alkalmazása a magyar nyelvhez, B. F. új írása 138, 248–249.
 Laugel, L., 204.
 Legendre helyettesíti a párhuzamosak axiómáját avval a követeléssel, hogy létezzenek hasonló idomok 46; próbálja a párhuzamosak axiómáját végtelen síkdarabok összehasonlítása segítségével bebizonyítani 47; 221, 222, 225, 250, 266.
 Lehmann, J., W. H., 221, 236.
 Leibniz, 218, 219, 259.
 Lencker Mihály, a bécsi mérnök-akadémia tanítója 66, 228.
 Lichtenberg, a göttingai egyetemen a fizika tanára, 6.
 Liebmann 220, 243, 244, 245, 250, 251.
 Lipschitz 245.
 Littrow József 16, 138, 229, 249.
 Lobatschewskij bírálata a párhuzamosak axiómájának Wallis-féle bebizonyítási kísérletéről 46; bírálata a párhuzamosak axiómájának Bertrand-féle kísérletéről 47–48; 78, 1829-ben adja ki A geometria alapjairól című értekezését 83; felfogása a gömb geometriája és az imaginárius geometria kapcsolatáról 105; a tetraeder köbösátté- sére vonatkozó vizsgálatai 106, 112–113, 115; B. J. értesül Lobatschewskij Geometrische Untersuchungen-jéről 131–136; B. J. észrevételei a Geometrische Untersuchungen-re 136–158; 160, 183, 198, Baltzer reámutat Lobatschewskij geometriai vizsgálataira 194–195; 198, 219, 224, 226, 237, 243, 244, 245, 248, 249, 250, 260, 261, 266, 267, a Lobatschewskij-díj 271.
 Logaritmus tárgyalása B. F.-nál 126, 247, B. J.-nál 126.
 Lorenz 216.
 Lübsen 265.
 Marosvásárhelyi ref. kollegium könyvtára 4, 172, 214.
 Mascheroni, Geometria del compasso 180.
 Maunduit, A. R., 236.
 Meisler, bécsi zenetanító, 65.
 Mentovich Ferencz, a marosvásárhelyi ref. kollegium tanára, 30, látogatása Gaussnál 132–133; 159, 215, 237, 251.
 Metius, Adrianus, 16.
 Metternich, Mathias, íratái a párhuzamosak elméletéről 267.
 Mérnök-akadémia, cs. kir. bécsi 56; szervezete és tanterve 60–62; 172, 233.
 Milton, B. F. lefordítja néhány költeményét 21.
 Mindenütt egyenletes felületek az S rendszerekben 105.
 Mitscherlich, Christoph Wilhelm, a göttingai egyetemen a klasszikus nyelvek tanára 5.
 Mocnik 168.
 Mohamed vagy a dilsőség gyözedelme a szerelmen. B. F. szomorújátéka, 20, 21, 202.
 Montucla 16.
 Mozgatható 38.
 Mozgás merev testek mozgása mint a geometriai kiinduló pontja 38–39.
 Mourey elmélete a képzetes mennyiségekről 122–146.
 Murrai Zsófia 7.

- Müller, R. C., Theorie der Parallellinien (1822) 267.
- Nagy Károly, szopori 30, 215.
- Nagy Teréz, B. F. második felesége 69.
- Napoleon 9, 228.
- Nassir-Eddin, arabs matematikus, ki a párhuzamosak axiómájának bebizonyításával próbálkozik 222.
- Negatív számok elmélete B. F.-nál 32—33, 127, 218; B. J.-nál 127—128.
- Neumann, C., 245.
- Newton, 16, 38, 79, 145, 160, 163, 218.
- Nobili, gróf, a bécsi mérnök-akadémia igazgatója (1811—1820) 64.
- Olbers 90.
- Orbán Rozália 97, 253.
- Oroskovits Jenő 263, 270.
- Oroszlány Endre 268, 270.
- Osthof, Johanna, Gauss első felesége, 227.
- öt szomorújáték (1871) B. F. műve 20, 202.
- Pál Gusztáv 268, 270.
- Paganini 167.
- Paracyklus 104, 233, 241.
- Parameter 101, 104.
- Parasphaera 104, 233; a síkétől eltérő tulajdonságai 243.
- Pasch, a geometria alapjairól 39, 184, 219, 261.
- Pausanias vagy a nagyravágyás áldozatja, B. F. szomorújátéka 20, 202.
- Pálmay József 206.
- Párhuzamosak axiómája, Euklidesnél 40; bebizonyítására irányuló törekvések 40—41; B. F.-nak a párhuzamosak axiómájára vonatkozó vizsgálatai 40—49; B. J.-nak a párhuzamosak axiómájának bebizonyítására irányuló kísérletei 73—79; a párhuzamosak axiómájának bebizonyíthatatlan volta 83—85, 115—120, 151—155, 232.
- Peacock a permanencia elvéről 34.
- Peano a geometria alapjairól 39, 184, 219, 261.
- Permanencia elve 34.
- Peters, Christian August Friedrich, Gauss és Schumacher levelezésének kiadója, 194.
- Péterfy István 268, 270.
- Pfaß azt tartja, hogy a párhuzamosak axiómája nem bizonyítható be, de egyszerűsíthető 46, 216, 224.
- Phaedrus 261.
- Phragmén 245.
- Pieri, M., a geometria alapalakzatjának a gömböt veszi fel 219.
- Plató 7.
- Poincaré, Henri, 1905 ben a Bolyai-díjjal jutalmazták 199; 245.
- Pont, térbeli 38.
- Ponthalmaz, lineáris p. felső határa 35; zárt p. 35, 36; perfekt p. 36.
- Pope, angol költő, B. F. lefordítja Essay on man című költeményét 21, 202.
- Pozitív számok, elméletük B. F.-nél 32—33, 208.
- Pringsheim Alfred 250.
- Proklus elbeszélése a párhuzamosak axiómájáról 40; 222.
- Ptolemaeus próbálkozik a párhuzamosak axiómájának bebizonyításával 40.
- Quantitativ axiómák 46, 47.
- Quensen 244.
- Radák Ádám, báró 3.
- Rados Ignác magyarra fordítja az Appendixet 198, 271.
- Rákóczi György, I. 15.
- Ráth Ignác, Erdély erdőinspektora, 24.
- Reformation der Elemente der Mathematik, B. J. tervezett műve, 175, 186.
- Református kollegiumok Erdélyben a XVIII. század végén 2.
- Reichenbach multiplikátor köre 153.
- Responsio, B. J. értekezése a képzetes mennyiségekről 52, 100, 126, 176, 248.
- Réthy Lajos, B. F. utolsó napjairól 165.
- Réthy Mór, a Tentamen egyik kiadója 31, 199; a végszerűen egyenlő területekre vonatkozó vizsgálatai 39—40, 219; előadásokat tart a kolozsvári egyetemen az abszolút geometriáról 198.
- Richmond 244.
- Riedl Frigyes 208, 214.
- Riemann 85, 183, 198, 218 260.
- Roussseau 51.
- Rudio 250.
- Saccheri, Hieronymus, Euclides ab omni naevo vindicatus (1733) 42, 46, 74, 220, 235.
- Sartorius v. Waltershausen, Gauss életírója 9, 19, 21, 22, 91, 163, 170, 192, 206, 208, 209, 214, 244, 265, 267.
- Scheidling, bécsi nagykereskedő, 211.
- Schering 197, 268.
- Schiller 5, 15, B. F. lefordítja néhány költeményét 21, 262.
- Schlesinger Lajos 13, 55, 71, 83, 85, 199, 203, 211, 212, 213, 215, 227, 228, 229, 239, 242, 271, 272.
- Schmidt Antal, temesvári építész, Schmidt Ferencz atyja, 69.
- Schmidt Ferencz, budapesti építész, 69, 195, 196, 197, 198, 200, 203, 204, 229, 238, 267, 268, 271.

- Schmidt, G. G., műve a párhuzamosak elméletéről (1797) 222.
- Schmidt Márton, Schmidt Ferencz fia, felfedezi B. J.-nak B. F.-hoz intézett, 1823 november hó 3. kelt levelét 196, 238.
- Schumacher 90, 91, 131, 134, 161, 194, 195, 198, 241, 248, 267.
- Schur, a geometria alapjairól, 39, 184, 219, 261.
- Schwab, Johann Christian, iratai a párhuzamosak elméletéről (1801—1814) 222, 267.
- Schwarzschild, a tér görbületéről 245.
- Schweikart, az astralgeometria felfedezője, 41, 216, 220, 221, 239, 244, 249.
- Segre 220.
- Seneca 81
- Seyffer Károly Felix, a göttingai és müncheni egyetemen a csillagászat tanára, pártfogásába veszi B. F.-t 6; foglalkozik a geometria alapjaival 6; 9, kétségesnek tartja a párhuzamosak axiómájának bebizonyítható voltát 40—41; 209.
- Sforza 184, 244, 261.
- Shakespeare 15.
- Simon, M. a párhuzamosak axiómájáról 40, 219, 220, 270.
- Simonis, erdélyi szász származású theológiai hallgató Göttingában, 6.
- Simson Róbert próbálkozik a párhuzamosak axiómájának bebizonyításával 222.
- Sík értelmezése B. F.-nál 89; elmélete 90, 234, 241; s. mint a gömbfelület határa 236; s. és parasphaera 243; B. J. a síkról 253.
- Spitz, C. 270.
- Stäckel Pál, 114, 197, 199, 200, 204, 209, 216, 220, 221, 223, 224, 225, 226, 234, 235, 236, 239, 242, 243, 245, 246, 248, 249, 253, 258, 259, 267, 268, 271, 272.
- Struve 90.
- Study, E., 128, 246.
- Sugár bővebb értelemben 103, 144.
- Suták József magyarra fordítja az Appendixet 198, 219, 271.
- Szabó János megfesti B. F. arcképét 215.
- Szabó Péter fölfedezi Gaussnak B. F.-hoz intézett, 1832, márczius hó 6-án kelt levelét 92; 163, 204, 206, 209, 213, 214, 215, 226, 227, 228, 230, 235, 242, 253.
- Szabó Sámuel, Szabó Péter atyja, 1858—1868 a marosvásárhelyi ref. collegium tanára 92, 163, 196, 235.
- Szathmári Pap Mihály 3, 207.
- Szász Dénes 168.
- Szász Károly 1820—1848 a nagyenyedi, 1853—1855. a marosvásárhelyi ref. collegium tanára 30; érintkezése B. J.-sal Bécsben 65 és 77—78; kísérletet tesz, hogy az abszolút geometria fölfedezésében részt biztosítson magának 78—80; 81, 132, 134, 139, 168, 237, 248, 250, 251, B. F. gyászjelentése Szász Károlyról 252—253; 254.
- Szász Pál, ilentzfalvi, B. F. tanítványa 91.
- Szent-Györgyi Imre 65.
- Szilágyi József, B. J. házitanítója, 51, 65.
- Szilárd Béla 246.
- Szily Kálmán 17, 22, 52, 57, 64, 94, 198, 199, 204, 206, 208, 214, 215, 226, 228, 238, 242, 271.
- Szimmetrikus helyzet 178; szimmetrikus idomok (Kantnál) 241.
- Szotyori, B. F. orvosa, 58.
- Szög harmadolása 235.
- Szögmérés, B. J. és Lobatschewskij a szögmérésről 140—143.
- Szöts Julianna, B. J. ápolónője 170, 198.
- Tacquet Euklides-kiadása 180, 222, 259.
- Taurinus 1826-ban önállóan dolgozza ki az abszolút trigonometriát 83, 90, 91, 221, 236, 239, 249.
- Taylor 96.
- Teleki Anna grófnő, báró Kemény Simon felesége, 207.
- Teleki Elek, gróf, 65.
- Teleki József, I. gróf, 2, 207.
- Teleki József, II. gróf, 208.
- Teleki Sámuel, gróf, 14, 123, 227.
- Teleki-könyvtár 14.
- Tenamen juvenitem studiosam in elementa matheseos introducendi, B. F. főműve 3, 15, 16, 17, 24; keletkezése és megjelenése 26—29; fogadtatása 29—31 és 134; az arithmetika alapjai 31—36; a geometria alapjai 37—40; a párhuzamosak elmélete 40—49; új kiadása 31, 199, 202; 70, 83, 87, 98, 127, 162, 165, 167, 169, 171, 174, 184, 185, 189, 195, 201, 214, 215, 216, 217, Brassai itélete a T.-ről 217—218; 229, 245, 248, 253, 261, 262, 266, 267, 270.
- Tetraeder köbösítése, Gauss fölhívja B. J.-t, hogy a tetraedernek az abszolút geometriában való köbösítésével foglalkozék 90, 234 és 244; B. J.-nak a tetraeder köbösítésére vonatkozó vizsgálatai 105—115; Gaussnak a tetraeder köbösítésére vonatkozó vizsgálatai 106, 113, 243; Lobatschewskijnek a tetraeder köbösítésére vonatkozó vizsgálatai 106

- 112—113, 115, 243, 244. Frischaufnak a tetraeder köbösítésére vonatkozó vizsgálatai 114, 144.
- Tér*, a tiszta tér szemléleti képe 31; a tér kontinuum 38; tér alkotó részei 38; a tér a szemlélet formája 90, 241; elmélet a térről 234; 259.
- Tér tudománya* 174, 176—180.
- Thewrewk Emil 162.
- Thomson, James, angol költő. B. F. lefordítja néhány költeményét 21.
- Tokody János 20.
- Tompa 79.
- Tóthfalussy József 269, 270.
- Tóttóssy Béla, zepethneki, a Tentamen egyik kiadója 31, 199.
- Trigonometria*, abszolút trigonometria 82, 83, 118, 151, 152; a gömb trigonometriájának abszolút érvényessége 99, 118, 145—148; az abszolút trigonometria és a gömb trigonometriájának kapcsolata 98—102, 155, 156; mindenütt egyenletes felületek trigonometriája 102—105.
- Überweg, merev testek mozgása mint a geometria kiinduló pontja 38, 218.
- Úrtan elemei kezdőknek* (1850.), B. F. műve 24, 202.
- Vahlen, a geometria alapjairól 261.
- Vajda Dániel, B. J. első házi tanítója, 51, 75, 79.
- Vajda János, csernátóni, a marosvásárhelyi collegium tanára, 14.
- Vajna Krisztina, pávai, Bolyai Gáspár felesége, B. F. anyja 1.
- Vass Tamás elbeszélése B. F. utolsó óráiról 165—169, 253.
- Vályi Gyula előadásokat tart a kolozvári egyetemen az abszolút geometriáról 198.
- Váradí 79.
- Vega György, báró, B. J. tanul matematikai tankönyvéből 51, 226; 208.
- Veronese, a geometria alapjairól 184, 261.
- Végyszerűen egyenlő területek* 39, 184, 219.
- Vogel, A., 255.
- Vonal* 38, egyszerű v. 177; csomós v. 177.
- Voss 217.
- Wachter, F. L. 1817-ben próbálkozik a párhuzamosak axiómájának bebizonyításával 48—49, 90, 226, 236, 237.
- Wagner, H., 270.
- Waldeck Minna, Gauss második felesége, 227.
- Wallenberg 217.
- Wallis a párhuzamosak axiómáját avval a követeléssel helyettesíti, hogy létezzenek hasonló idomok (1663) 46, 224.
- Warren elmélete a képzetes mennyiségekről 122, 246.
- Wass Kata grófnő, b. Kemény Simon anyja, 206.
- Weber Vilmos Ede, a göttingai egyetemen a fizika tanára, 261.
- Wolter von Eckwehr János, a bécsi mérnök-akadémián a matematika tanára és később Aradon B. J. előjárója 66, 68, 69, 87, 138, 237.
- Zeyk Dániel, B. F. tanulótársa Göttingában 6, 70.
- Zeyk József, Zeyk Dániel fia, átnyújtja az Appendix egy különlenyomatát Gaussnak 70, 88.
- Ziegler Károly 268, 270.

