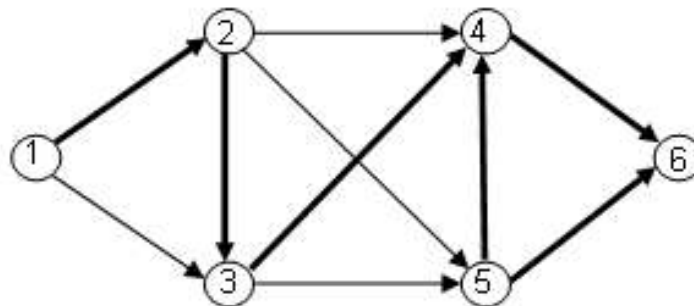


OPERÁCIÓKUTATÁS

No.6.

Szántai Tamás

PERT ALKALMAZÁSOK



Szántai Tamás:
PERT ALKALMAZÁSOK

OPERÁCIÓKUTATÁS No.6

Megjelenik az FKFP 0231 Program támogatásával

a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem,
Operációkutatás Tanszék gondozásában

Budapest, 2004

Szántai Tamás:
PERT ALKALMAZÁSOK

Lektorálta: Klafszky Emil

Készült az Aula Kiadó Digitális Gyorsnyomdájában.
Nyomdavezető: Dobozi Erika

Tartalomjegyzék

Előszó	1
1. Determinisztikus időtervezési feladat (CPM)	5
1.1. Gráfelméleti bevezetés	5
1.2. A legrövidebb út probléma	13
1.3. Az időtervezési feladat	28
2. Sztochasztikus időtervezési feladat (PERT)	45
2.1. A PERT modell	45
2.2. A többdimenziós normális eloszlás	47
2.3. A centrális határeloszlás tétel alkalmazása	63
2.4. Sztochasztikus programozási megközelítés	79

Előszó

Ez a jegyzet a hálózati optimalizálás gyakorlati alkalmazások szempontjából egyik legfontosabb problémájával, az időtervezési, vagy más szóval tervütemezési feladattal foglalkozik. Célunk az, hogy a sztochasztikus időtervezési feladat néhány legújabb elemzési módszerét ismertessük. Ehhez az első fejezetben megadjuk a gráfelmélet néhány alapfogalmát és algoritmusát. Ezután ismertetjük a determinisztikus időtervezési feladatot (CPM), majd áttekintjük az annak megoldására szolgáló legfontosabb hálózati optimalizálási algoritmusokat. Ezt a fejezetet Klafszky Emilnek a magyar nyelvű szakirodalomban klasszikusnak tekinthető [22] "Bolyai jegyzete", illetve a későbbiek során Klafszky Emil miskolci egyetemi előadásai alapján tanítványai által lejegyzett [23] előadásai angol nyelven megjelent jegyzete alapján tárgyaljuk. Ezekben a jegyzetekben a legrövidebb útkereső algoritmus és a tervütemezési feladat legkorábbi, illetve legkésőbbi kezdési időpontokat meghatározó algoritmusai egységes keretben, a feladatra kimondott primál-duál feladatpár dualitás tételére alapozva vannak kidolgozva. A legrövidebb út keresésére megadjuk Ford egy algoritmusát is, leginkább csak azért, hogy példát mutassunk olyan algoritmusra is, amely hurokmentes hálózatban negatív élhosszak mellett is működik. Nem célja a jegyzetnek az e célra rendelkezésre álló sok kiváló és hatékony algoritmus ismertetése.

A második fejezetben először röviden ismertetjük a sztochasztikus időtervezési feladatot (PERT), majd megmutatjuk, hogy Prékopa András és J. Long nem túl nagyméretű PERT modellekre milyen módszert dolgoztak ki arra, hogy a projekt véletlen nagyságú megvalósítási idejének a valószínűségi eloszlásfüggvényére alsó és felső korlátokat tudjanak számítani, illetve nagy megbízhatósággal becsülni tudják

annak az értékeit (lásd [32]). Ennek a módszernek a továbbfejlesztéseként Prékopa András, Szántai Tamás és J. Long [40] dolgozata alapján megmutatjuk, hogy ezek a módszerek hatékonyabbá tehetők, és ezáltal a gyakorlati alkalmazások számára reális méretű PERT modellek esetén is sikerrel alkalmazhatókká válnak. Numerikus tesztfeladatokon mutatjuk be az új módszerek alkalmazhatóságát. Végül az utolsó szakaszban egy együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modellt mutatunk be, amely a PERT modellek elemzésére egy egészen más megközelítést alkalmaz. Ez a megközelítés a tevékenységi idők valószínűségi modellezésére a Dirichlet eloszlás alkalmazását is lehetővé teszi. Tekintettel arra, hogy a PERT modellekben általánosnak tekinthető a béta eloszlás ilyen célú alkalmazása és a Dirichlet eloszlás egydimenziós peremeloszlásai közismerten béta eloszlások, ez az új modellezés az eddigi modellezési módszerek fontos általánosításának tekinthető. A Dirichlet eloszlás ilyen célú alkalmazását a jegyzet szerzője egy 1992 márciusában a Berlin közeli Gosen-ben tartott nemzetközi konferencián ismertette először D. Monhorral közös előadás keretében. A valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat megoldását Dirichlet eloszlás esetén is lehetővé tevő számítógépes program kifejlesztéséről a jegyzet szerzője 1996-ban Prágában számolt be, mely konferencia kötetében ezek az eredmények írásban is megjelentek (lásd [39]).

1. Fejezet

Determinisztikus időtervezési feladat (CPM)

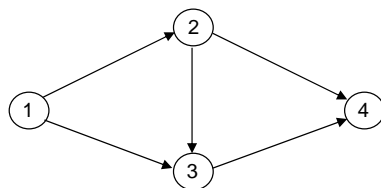
1.1. Gráfelméleti bevezetés

Vezessük be az *irányított*-, vagy más szóval *digráf* fogalmát a következő definícióval.

1.1.1. Definíció: A $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ véges halmazokból álló struktúrát *irányított*-, vagy *digráfnak* nevezzük, ahol \mathcal{N} a pontok, vagy csúcsok halmaza, $\mathcal{N} = 1, 2, \dots, n$ és \mathcal{A} az élek, vagy rendezett pontpárok halmaza, $\mathcal{A} = e_1, e_2, \dots, e_m$, $e_k = (i, j)$, $i \in \mathcal{N}$, $j \in \mathcal{N}$ és azt mondjuk, hogy i az e_k él kezdőpontja, j pedig a végpontja.

A digráfokat grafikusan a legegyszerűbben úgy ábrázolhatjuk, hogy a digráf csúcsait a sík számozott pontjaival, míg a digráf éleit olyan nyilakkal adjuk meg, melyek az él kezdőpontjából azok végpontjába mutatnak. Az 1.1. ábra egy egyszerű digráfra mutatja ezt a grafikus ábrázolást.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti definícióban nem engedünk meg úgynevezett hurokért, azaz az élek \mathcal{A} halmazában nem fordulhat elő $e_k = (i, i)$, $i \in \mathcal{N}$ alakú él, valamint nem engedünk meg úgynevezett többszörös éleket sem, azaz az élek \mathcal{A} halmazában nem fordulhat elő $k \neq l$ indexekkel egyidejűleg az $e_k = (i, j)$, $i \in \mathcal{N}$, $j \in \mathcal{N}$ és az $e_l = (i, j)$, $i \in \mathcal{N}$, $j \in \mathcal{N}$ él (lásd az 1.2 ábrát).



1.1. ábra. Egy egyszerű digráf grafikus ábrázolása



1.2. ábra. Hurokél és többszörös él szemléltetése

A számítógépen történő tárolás, illetve a digráfokon végrehajtandó numerikus algoritmusok számítógépen történő végrehajtása szempontjából fontos olyan megadási módokat találni, melyek a grafikus leírás helyett numerikusan, azaz számokkal leírható módon adják meg a digráfokat. Erre a digráfot alkotó pontok és élek halmozának egyszerű felsorolásán túl leggyakrabban a következő három lehetőséget használjuk.

a) *Pont–pont incidencia mátrix megadási mód.*

A pont–pont incidencia mátrixon egy olyan $n \times n$ méretű A mátrixot értünk, amely a_{ij} elemeire

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (i, j) \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az 1.1. ábra egyszerű digráfjára a pont–pont incidencia mátrix a következőképpen néz ki:

	1	2	3	4
1		1	1	
2			1	1
3				1
4				

b) *Pont-él incidencia mátrix megadási mód.*

A pont-él incidencia mátrixon egy olyan $n \times m$ méretű B mátrixot értünk, amely b_{ij} elemeire

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } e_j \text{ élnek } i \text{ kezdőpontja,} \\ -1, & \text{ha az } e_j \text{ élnek } i \text{ végpontja,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az 1.1. ábra egyszerű digráfjára a pont-él incidencia mátrix a következőképpen néz ki:

	1	2	3	4	5
1	1	1			
2	-1		1	1	
3		-1	-1		1
4				-1	-1

A fenti pont-él incidencia mátrixban az 1.1. ábra digráfjának az éleit az $(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$ sorrendben számoztuk meg 1-től 5-ig.

c) *Egy, a számítógépes tárolás számára gazdaságos megadási mód.*

Egy P tömb i -edik eleme mutasson egy másik C tömbnek arra az elemére, amelytől kezdve az i csúcsból induló élek végpontjai vannak felsorolva. Könnyen meggondolható, hogy ezzel egyetlen n elemű P és m elemű C tömbbel a digráfot egyértelműen adtuk meg, ahol n a digráf csúcsainak, m pedig a digráf éleinek a száma. Az 1.1. ábra egyszerű digráfjára a P és C tömbök a következőképpen néznek ki:

P	C
1	2
3	3
5	3
0	4
	4

A következő definíciókkal két fontos fogalmat vezetünk be a digráfokra, a *vágás* és az *út* fogalmát.

1.1.2. Definíció: Legyen $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ egy tetszőleges digráf, amelyben a csúcsok \mathcal{N} halmaza két diszjunkt, nem üres \mathcal{S} és \mathcal{S}' halmazra van felosztva, vagyis $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}' = \mathcal{N}$ és $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \emptyset$. Jelölje $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ azon élek összességét, amelyek \mathcal{S} -beli csúcsból indulnak és \mathcal{S}' -beli csúcsba érkeznek. Az $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ élhalmazt az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráf vágásának nevezzük.

Ha $s, s' \in \mathcal{N}$ olyan csúcsok, hogy $s \in \mathcal{S}$ és $s' \in \mathcal{S}'$, akkor azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ vágás az s és s' csúcsokat elválasztja.

1.1.3. Definíció: Legyen adott egy tetszőleges $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráf és legyen $s, s' \in \mathcal{N}$ két tetszőleges csúcs. Legyen $x_0, x_1, \dots, x_p \in \mathcal{N}$ csúcsok egy olyan sorozata, melyre $x_0 = s$, $x_p = s'$ és $(x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{A}$ minden $i = 1, \dots, p$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy x_0, x_1, \dots, x_p egy \mathcal{S} -ből \mathcal{S}' -be vezető út. Jelölése: $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_p = s')$.

1.1.1. Tétel: (Minty tétele) Legyen $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ tetszőleges digráf és $s, s' \in \mathcal{N}$ két tetszőleges csúcsa ennek a digráfnak. Ekkor vagy van út s -ből s' -be, vagy van olyan, az s, s' csúcsokat elválasztó vágás, amelyik üres.

Bizonyítás: Konstruáljuk meg az \mathcal{S} halmazt úgy, hogy $s \in \mathcal{S}$ legyen, és mindaddig vegyünk új $y \in \mathcal{N}$ csúcsokat az \mathcal{S} halmazba, ameddig van olyan $x \in \mathcal{S}$ csúcs, hogy $(x, y) \in \mathcal{A}$.

Ha az \mathcal{S} halmaz már nem bővíthető, akkor

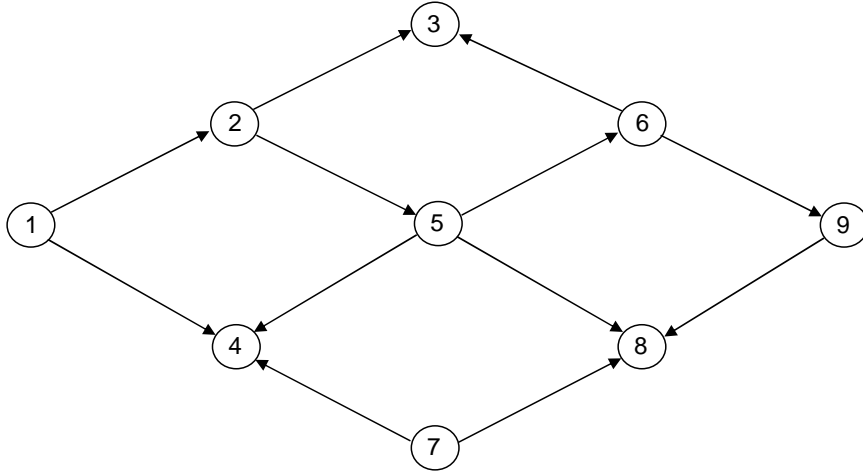
- a) $s' \in \mathcal{S}$ esetén az \mathcal{S} halmaz konstrukciója miatt nyilván van út s -ből s' -be.
- b) $s' \notin \mathcal{S}$ esetén legyen $\mathcal{S}' = \mathcal{N} \setminus \mathcal{S}$, mikoris az \mathcal{S} halmaz konstrukciója miatt az s, s' csúcsokat elválasztó $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ vágás üres.

□

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a Minty tétel bizonyításában alkalmazott gondolatmenet segítségével hogyan lehet eldönteni egy tetszőleges $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráf két

adott $s, s' \in \mathcal{N}$ csúcsáról, hogy van-e s -ből s' -be vezető út a digráfban, vagy épenséggel létezik az s, s' csúcsokat elválasztó üres vágás. A Minty tétel konstruktív bizonyításának megvalósításához hasznos segédeszköz az úgynevezett *címkézési technika*.

Címkézési algoritmus: A Minty tétel bizonyításában megkonstruált \mathcal{S} halmaz felépítésének egy algoritmus a következő. Rendeljünk az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráf minden csúcsához egy, a csúcsot azonosító címkét (praktikusan számozzuk meg sorra a csúcsokat és az így hozzájuk rendelt sorszám legyen a címkéjük), és a majdan végrehajtandó iterációs lépések mindegyikére egy tároló rekeszt, vagyis valójában egy tömböt. A nulladik, inicializáló lépésben soroljuk be az s csúcsot az \mathcal{S} halmazba, és ezt a tényt fejezzük ki azzal, hogy a címkéjét beírjuk a nulladik iterációnak megfelelő rekeszébe. Ezután minden iterációs lépés során válasszunk egy, az \mathcal{S} halmazhoz tartozó x csúcsot, azaz egy olyan csúcsot, amely valamely korábbi iterációs lépéshez tartozó rekeszében már tartalmaz címkét. Írjuk be az x csúcs címkéjét minden olyan, eddig még meg nem címkézett csúcs adott iterációs lépéshez tartozó rekeszébe, amely csúcsból vezet el az x csúcsból, hiszen ezek a csúcsok mind az \mathcal{S} halmazba kell, hogy tartozzanak. Az \mathcal{S} -beli csúcsok újbóli megvizsgálása egyszerűen kiküszöbölhető a címkézés előjelezésével. Eszerint amikor egy csúcsba eljutunk, akkor először csak negatív címkével látjuk el, és ha ebből a csúcsból tovább léptünk mindenhová, ahová csak lehetett, akkor a címkét pozitívvá változtatjuk át. Ennek megfelelően a nulladik lépésben az s csúcs nulladik iterációnak megfelelő rekeszébe is a címkéje mínusz egyszeresét kell tenni. Összefoglalva, a címkézési algoritmusunk egy általános iterációs lépése tehát a következő. Tekintsük sorra az előző iterációs lépésnek megfelelő rekeszükben negatív címkével bíró csúcsokat. Ezek negatív címkéjét írjuk be az összes olyan még meg nem címkézett csúcs adott iterációs lépésnek megfelelő rekeszébe, amely csúcsba vezet az éppen vizsgált csúcsból el. Ezt követően a vizsgált csúcs előző iterációs lépésnek megfelelő rekeszében változtassuk át a negatív címkét pozitívvá. Az iterációs lépéseket vagy akkor kell leállítani, amikor az s' csúcs egy rekeszébe címkét írunk, vagy pedig akkor, amikor már nem találunk több negatívan megcímkézett csúcsot. Az első esetben megszerkeszthető egy s -ből s' -be vezető út,



1.3. ábra. Az 1.1.1. és 1.1.2.. példák digráfja

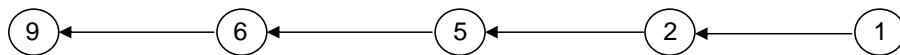
míg a második esetben megadható egy olyan $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ üres vágás, amely az s és s' csúcsokat elválasztja.

A címkézési algoritmus legcélszerűbben a digráf pont–pont incidencia mátrixos leírásának a használatával hajtható végre. Ezt az alábbi két példán szemléltetjük. Mindkét példa ugyanarra az 1.3. ábrán megadott digráfra vonatkozik, csak a kezdő- és végpontok megválasztása különböző. Az 1.1.1. példában $s = 1$, $s' = 9$, mikor is a 4. iterációs lépésben címke kerül a végpont rekeszébe. Ez azt jelenti, hogy létezik út s -ből s' -be, amely út „visszagöngyölíthető” olymódon, hogy elindulunk a végpontból, ahová a rekeszébe beírt címkének megfelelő csúcsból jutottunk, ebbe a csúcsba az ő előző iterációbeli rekeszébe beírt címkének megfelelő csúcsból és így tovább egészen a kezdőpontig. Az 1.1.2. példában $s = 7$, $s' = 3$, mikor is azt látjuk, hogy már az 1. iterációs lépésben elakadunk, nem maradt negatív címkéjű csúcs és még nem jutottunk el a végpontba. Ez azt jelenti, hogy ha az \mathcal{S} halmazba soroljuk az összes megcímkézett csúcsot, az \mathcal{S}' halmazba pedig a többi, akkor az $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ vágás egy olyan üres vágás, amely az $s = 7$ kezdő- és az $s' = 3$ végpontokat elválasztja.

1.1.1. Példa: Tekintsük az 1.3. ábrán adott digráft és legyen $s = 1$, $s' = 9$. A következő táblázat felső részében megadjuk a digráf pont–pont incidencia mátrixát, az alatta lévő sorokban pedig az egyes iterációs lépések címke sorait. Látható, hogy ebben a példában létezik út s -ből s' -be, azt az iterációs lépések során tárolt címkék

segítségével egyszerű vissza is keresni. Ennek eredménye a $P = (s = 1, 2, 5, 6, 9 = s')$ út, amelyet az iterációs lépések táblázata alatt a „visszagöngyölítésnek” megfelelően visszafelé haladó módon ábrázoltunk.

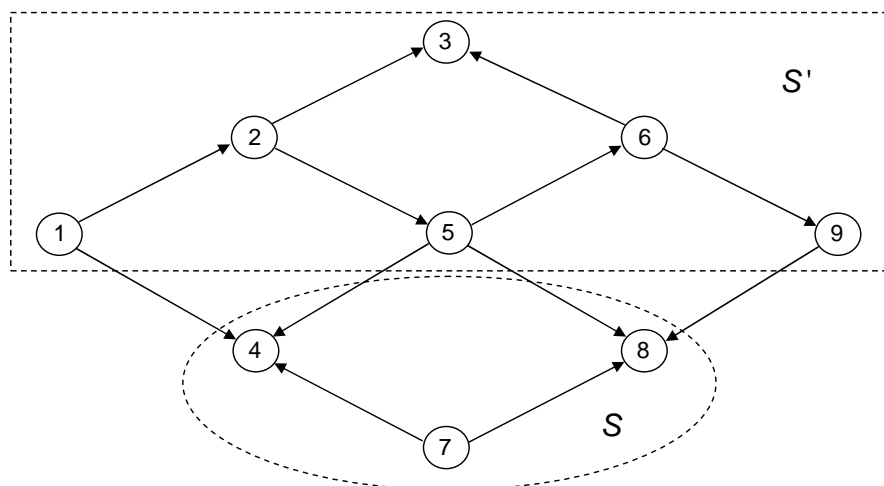
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1		1					
2			1		1				
3									
4									
5				1		1		1	
6			1						1
7				1				1	
8									
9								1	
	+1								
		+1		+1					
			+2		+2				
						-5		-5	
									-6



1.1.2. Példa: Tekintsük most is az 1.3. ábrán adott digráfot, azonban most legyen $s = 7$, $s' = 3$. A következő táblázat az 1.1.1. példához hasonlóan, a digráf pont-pont incidencia mátrixa alatt mutatja az egyes iterációs lépések címke sorait. Látható, hogy ebben a példában az első iterációt követően elakadunk, nem létezik negatív címkével ellátott csúcs és ugyanakkor az $s' = 3$ csúcs sincs még megcímkézve. Ezért a már megcímkézett $\mathcal{S} = \{4, 7, 8\}$ csúcsok halmazával és a megfelelően képzett $\mathcal{S}' = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$ csúcsok halmazával képezett $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ vágás egy olyan üres vágás, amely elválasztja az $s = 7$ és $s' = 3$ csúcsokat. Ezt szemlélteti a számolási táblázat alatti ábra, melyen azt kell megfigyelni, hogy az \mathcal{S} halmazból egyetlen él sem vezet át

az \mathcal{S}' halmazba, vagyis az $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ vágás valóban üres és elválasztja az $s = 7$ és $s' = 3$ csúcsokat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1		1					
2			1		1				
3									
4									
5				1		1		1	
6			1						1
7				1				1	
8									
9								1	
							+7		0. lépés
				+7				+7	1. lépés



Vegyük észre, hogy mindkét példa esetében a pont–pont incidencia mátrix alatt, az iterációs lépéseket mutató mátrix rész minden oszlopában legfeljebb csak egy címke szerepelhet, hiszen korábban megcímkézett csúcsot újból már nem címkézzünk meg sohasem. Ezért valójában minden csúcshoz elég egyetlen címke tárolására szolgáló rekeszt rendelni, mikoris utólag már nem lesz nyomonkövethető, hogy az egyes csúcsok mely iterációs lépés során lettek címkével ellátva. Ez azonban nem

befolyásolja a végeredményt, így a továbbiakban egyetlen címkesorral fogunk mi is dolgozni.

1.2. A legrövidebb út probléma

Tekintsünk most egy olyan $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfot, amely éleihez nemnegatív számok vannak hozzárendelve. Jelölje $\tau(x, y) \geq 0$ az $(x, y) \in \mathcal{A}$ élhez rendelt számértéket. $\tau(x, y)$ úgy is tekinthető, mint az x csúcsból az y csúcsba történő átjutás „utazási ideje”. Ekkor, ha tekintjük a digráf két, s és s' csúcsát, megfogalmazható a következő feladat. Keresendő az az s -ből s' -be vezető út, amely mentén az utazási idő minimális. Ha a $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_p = s')$ út hosszára bevezetjük az $l(P) = \sum_{i=1}^p \tau(x_{i-1}, x_i)$ jelölést, akkor az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfban az s -ből s' -be vezető legrövidebb út keresésének a problémája úgy fogalmazható meg, mint

$$\min_{\forall P} l(P). \quad (1.1)$$

Egy, a fenti optimalizálási feladattal *duális feladatot* is megfogalmazhatunk a következő módon. Ehhez először ekvivalens módon átfogalmazzuk az előző legrövidebb út keresési problémát. Jelölje most $\tau(x, y) \geq 0$ az $(x, y) \in \mathcal{A}$ él mentén egységnyi árú szállítási költségét és legyen a feladatunk az, hogy s -ből s' -be minimális szállítási költséggel szállítsunk el egy egységnyi árút. Ez a probléma a szállító szemszögéből a következőképpen tekinthető. A szállító a megrendelőnek árajánlatot ad, hogy bármely $x \in \mathcal{N}$ csúcsba mennyiért hajlandó egységnyi árút elszállítani s -ből. Jelölje $\mu(x)$ ezt az értéket. Ahhoz, hogy aszállítónak ez az ajánlata a megrendelő számára elfogadható legyen, nyilván minden $(x, y) \in \mathcal{A}$ él esetén teljesülni kell a

$$\mu(y) \leq \mu(x) + \tau(x, y),$$

azaz a

$$\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$$

feltételnek. Az is nyilvánvaló továbbá, hogy $\mu(s) = 0$ kell, hogy legyen. Ezen feltételek teljesülése mellett a szállító célja az s' -be történő egységnyi szállítás árának

a maximalizálása:

$$\begin{aligned} & \max \mu(s') \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & \mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y), \forall (x, y) \in \mathcal{A}, \mu(s) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

A csúcsokhoz rendelt $\mu(x)$ számokat *duálváltozóknak*, vagy *potenciáloknak*, míg az (1.1) feladatot *primál feladatnak*, az (1.2) feladatot *duál feladatnak* nevezzük. Erre a két optimalizálási feladatra könnyen igazolható a következő lemma.

1.2.1. Lemma: *Tetszőleges s -ből s' -be vezető P út és a $\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő potenciálok esetén*

$$l(P) \geq \mu(s'), \tag{1.3}$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, ha

$$\tau(x, y) = \mu(y) - \mu(x), \forall (x, y) \in P. \tag{1.4}$$

Bizonyítás:

$$l(P) = \sum_{i=1}^p \tau(x_{i-1}, x_i) \geq \sum_{i=1}^p [\mu(x_i) - \mu(x_{i-1})] = \mu(x_p) - \mu(x_0) = \mu(s') - \mu(s) = \mu(s'),$$

ahol a két összeg akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha minden tagjuk egyenlő, azaz ha (1.4) teljesül.

□

1.2.1. Következmény: *(Gyenge egyensúly) Ha az s -ből s' -be vezető P út és a $\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő μ potenciálok olyanok, hogy (1.3) egyenlőséggel teljesül, akkor a P út az (1.1) primál feladatnak, a μ potenciálok pedig az (1.2) duál feladatnak optimális megoldásai.*

Bizonyítás: Legyen $l(P) = \mu(s')$ és tegyük fel, hogy a P út nem optimális megoldása az (1.1) primál feladatnak. Ekkor léteznie kell egy olyan s -ből s' -be vezető \hat{P} útnak, amelyre

$$l(\hat{P}) < l(P). \tag{1.5}$$

Az 1.2.1. lemma szerint azonban erre a \hat{P} útra is $l(\hat{P}) \geq \mu(s') = l(P)$, ami ellentmond az (1.5) szigorú egyenlőtlenségnek.

Fordítva, legyen $l(P) = \mu(s')$ és tegyük fel, hogy a μ potenciálok nem optimális megoldásai az (1.2) duál feladatnak. Ekkor léteznie kell olyan $\hat{\mu}$ potenciáloknak, amelyre

$$\hat{\mu}(s') > \mu(s'). \quad (1.6)$$

Az 1.2.1. lemma szerint azonban ezekre a $\hat{\mu}$ potenciálokra is $\hat{\mu}(s') \leq l(P) = \mu(s')$, ami ellentmond az (1.6) szigorú egyenlőtlenségnek.

□

A következő tétel konstruktív bizonyítása lehetővé teszi, hogy algoritmust szerkesszünk a legrövidebb út (1.1) feladatának megoldására.

1.2.2. Tétel: *(Ford tétele) Tetszőleges $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráf bármely két s, s' csúcsára létezik olyan s -ből s' -be vezető P út és léteznek a $\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő olyan μ potenciálok, hogy igaz rájuk (1.4), és így az (1.3) egyenlőtlenséget is egyenlőséggel teljesítik, vagyis az 1.2.1. következmény értelmében a P út az (1.1) primál, a μ potenciálok pedig az (1.2) duál feladat optimális megoldásai.*

Bizonyítás: Tekintsük kiindulásként az azonosan nulla potenciálértékeket, azaz legyen $\mu(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathcal{A}$. Ezekre a potenciálokra nyilvánvalóan teljesülnek a $\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$ feltételek.

Legyen $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ egy olyan digráf, hogy \mathcal{B} -be azok az (x, y) élek tartoznak, amelyekre $\mu(y) - \mu(x) = \tau(x, y)$.

Ha az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban van s -ből s' -be vezető út, akkor arra, és a μ potenciálokra nyilván teljesül (1.4), amivel a tétel bizonyítását befejezettnek tekinthetjük.

Ha az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban nincs s -ből s' -be vezető út, akkor a Minty tétel értelmében létezik az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban üres (S, S') vágás, amely az s és s' csúcsokat elválasztja. Ez a vágás a teljes $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfban azonban nem lehet üres, hiszen ha üres lenne, akkor megint csak a Minty tétel értelmében egyáltalán nem létezne s -ből s' -be vezető út, és a legrövidebb út keresésének a feladata is értelmetlen lenne. Az

(S, S') vágásban így található minden élre teljesül, hogy

$$\mu(y) - \mu(x) < \tau(x, y).$$

Legyen

$$\epsilon = \min_{\substack{(u,v) \in \mathcal{A} \\ (u,v) \in (S, S')}} [\tau(u, v) - \mu(v) + \mu(u)] > 0.$$

Definiáljunk új $\hat{\mu}(x)$ potenciálokat a következőképpen:

$$\hat{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), & \text{ha } x \in \mathcal{S}, \\ \mu(x) + \epsilon, & \text{ha } x \in \mathcal{S}'. \end{cases}$$

Ezekre az új potenciálokra továbbra is teljesül $\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$, ugyanis egyrészt

$$\hat{\mu}(s) = \mu(s) = 0,$$

másrészt $(x, y) \in \mathcal{A}$ -ra négy különböző eset lehetséges:

(i) ha $x \in \mathcal{S}, y \in \mathcal{S}$, akkor

$$\hat{\mu}(y) - \hat{\mu}(x) = \mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y),$$

(ii) ha $x \in \mathcal{S}', y \in \mathcal{S}'$, akkor

$$\hat{\mu}(y) - \hat{\mu}(x) = \mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y),$$

(iii) ha $x \in \mathcal{S}', y \in \mathcal{S}$, akkor

$$\hat{\mu}(y) - \hat{\mu}(x) = \mu(y) - \mu(x) - \epsilon \leq \mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y),$$

(iv) ha $x \in \mathcal{S}, y \in \mathcal{S}'$, akkor

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(y) - \hat{\mu}(x) &= \mu(y) + \epsilon - \mu(x) = \mu(y) - \mu(x) + \min_{\substack{(u,v) \in \mathcal{A} \\ (u,v) \in (S, S')}} [\tau(u, v) - \mu(v) + \mu(u)] = \\ &= \tau(x, y) - [\tau(x, y) - \mu(y) + \mu(x)] + \min_{\substack{(u,v) \in \mathcal{A} \\ (u,v) \in (S, S')}} [\tau(u, v) - \mu(v) + \mu(u)] \leq \tau(x, y). \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\hat{\mu}(s') = \mu(s') + \epsilon > \mu(s'), \quad (1.7)$$

vagyis s' -n a μ -höz képest nőtt a $\hat{\mu}$ potenciál értéke.

Az egész eddigi eljárásunkat megismételhetjük az új $\hat{\mu}$ potenciál értékekkel. Mivel az ismétlések során $\mu(s')$ értéke legalább ϵ -nal nő és az 1.2.1. lemma értelmében $\mu(s')$ felülről korlátos, azért véges sok ismétlés után létezni kell az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban s -ből s' -be vezető útnak, miáltal a tétel bizonyítottá válik.

□

1.2.2. Következmény: *(Erős egyensúly) Ha az s -ből s' -be vezető P út az (1.1) primál feladatnak, a μ potenciálok pedig az (1.2) duál feladatnak optimális megoldásai, akkor (1.3) egyenlőséggel teljesül.*

Bizonyítás: A Ford tételből következik, hogy létezik olyan az s -ből s' -be vezető \hat{P} út és léteznek olyan $\hat{\mu}$ potenciálok, amelyekre (1.3) egyenlőséggel teljesül, azaz

$$l(\hat{P}) = \hat{\mu}(s') \quad (1.8)$$

és amelyek ezért az (1.1) és az (1.2) feladatok optimális megoldásai, mivel pedig P is és μ is ugyanazoknak a feladatoknak az optimális megoldásai, azért

$$l(\hat{P}) = l(P),$$

$$\hat{\mu}(s') = \mu(s')$$

és így az (1.8) egyenlőség miatt az

$$l(P) = \mu(s')$$

egyenlőségnek is teljesülni kell.

□

Legrövidebb utat kereső algoritmus: A Ford tétel konstruktív bizonyítása alapján könnyen szerkeszthető olyan algoritmus, amely adott $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfban megkeresi az s -ből s' -be vezető legrövidebb utat. Ehhez először definiáljuk a $\delta(x, y)$ mennyiségeket a következőképpen:

$$\delta(x, y) = \tau(x, y) - [\mu(y) - \mu(x)] = \tau(x, y) + \mu(x) - \mu(y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A},$$

majd írjuk ezeket a $\mu(y) - \mu(x) \leq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$ feltételek teljesülése estén nyilvánvalóan nemnegatív értékeket a $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráf pont–pont incidencia mátrixában

a megfelelő 1-esek helyébe. Ennek a $\delta(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó „pont–pont incidencia mátrixnak” az lesz az előnye, hogy csak a nulla értékű elemeit tekintve könnyen azonosítani tudjuk a Ford tétel bizonyításában szereplő $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráf \mathcal{B} élhalmazának az elemeit. Ezért a $\delta(x, y)$ értékek mátrixát használva, a Minty tétel és a címkézési algoritmus segítségével kereshetjük az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban s -ből s' -be vezető utat.

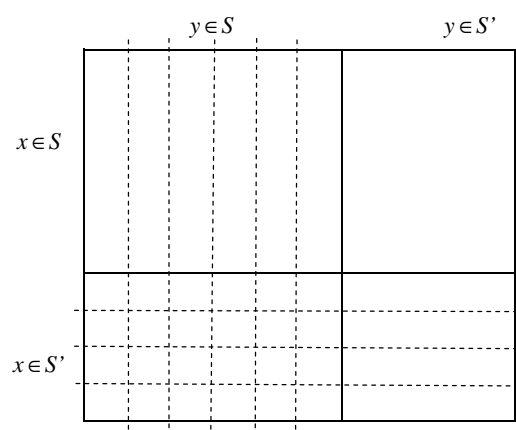
Ha találunk ilyen utat, akkor az 1.2.1. következmény szerint az szükségképpen az s -ből s' -be vezető legrövidebb út.

Ha ilyen út nem létezik, akkor a megtalált, s -et s' -től elválasztó, az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban üres $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ vágás és a Ford tétel bizonyításában a $\hat{\mu}$ potenciálok számítására megadott képlet alapján az új, $\hat{\delta}(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$ értékek a következőképpen számíthatók:

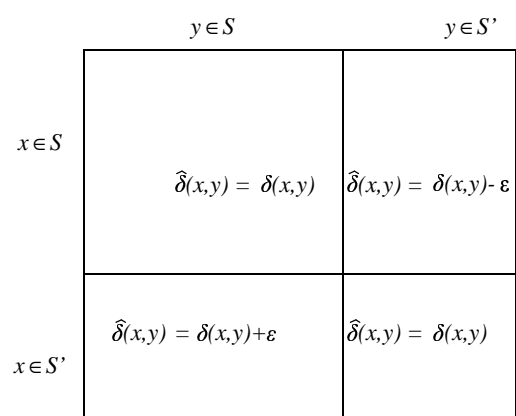
$$\hat{\delta}(x, y) = \begin{cases} \delta(x, y), & \text{ha } x \in \mathcal{S}, y \in \mathcal{S} \\ \delta(x, y) - \epsilon, & \text{ha } x \in \mathcal{S}, y \in \mathcal{S}' \\ \delta(x, y) + \epsilon, & \text{ha } x \in \mathcal{S}', y \in \mathcal{S} \\ \delta(x, y), & \text{ha } x \in \mathcal{S}', y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

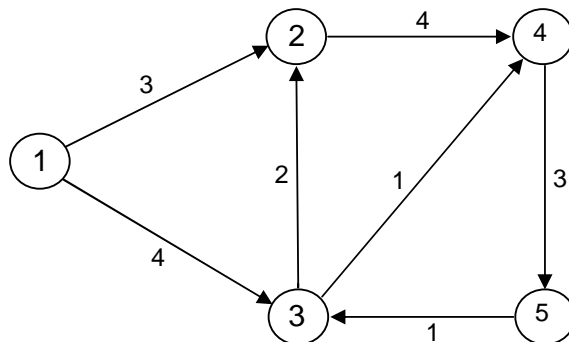
Szemléletesebbé tehetjük a fenti transzformációs formulákat, ha a $\delta(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó „pont–pont incidencia mátrix” \mathcal{S} -nek megfelelő oszlopait és \mathcal{S}' -nek megfelelő sorait vonalakkal fedjük le. Ekkor a $\delta(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó mátrixból a $\hat{\delta}(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó mátrix úgy lesz számítható, hogy változatlanul hagyjuk az egy vonallal lefedett elemeket, hozzáadunk ϵ -t a kétszer fedett elemekhez és kivonunk ϵ -t a fedetlen elemekből, amint azt az 1.4 és 1.5 ábrák is szemléltetik.

Végül az utolsó $\delta(x, y)$ mennyiségeket, valamint az eredeti $\tau(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó mátrixból és a $\mu(s) = 0$ kezdeti feltételből az optimális $\mu(x)$, $x \in \mathcal{N}$ potenciálértékek is könnyen kiszámíthatók.



1.4. ábra. A megfelelő vonalakkal lefedett pont–pont incidencia mátrix

1.5. ábra. A $\hat{\delta}(x, y)$ értékek transzformációs sémája



1.6. ábra. Az 1.2.3. példa digráfja és élhosszai

A következő egyszerű kis példán bemutatjuk a fent vázolt legrövidebb út keresési algoritmust.

1.2.3. Példa: Tekintsük az 1.6 ábra digráfját, ahol az élekre írt pozitív számok az élek $\tau(x, y)$ hosszait jelentik és legyen feladatunk az 1-es csúcsból az 5-ös csúcsba vezető legrövidebb út meghatározása.

A következőkben sorra megadjuk az egyes iterációs lépések $\delta(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó táblázatait. A 0. lépés a $\mu(x) \equiv 0$ kiinduló potenciálértékekkel számolt $\delta(x, y)$ mennyiségek táblázata, majd minden iterációs lépés táblázata egy s -ből s' -be $\delta(x, y) = 0$ éleken át vezető út keresésének az eredményét szemlélteti, ahol a csúcsok címkéit a táblázat alatti egyetlen sor tartalmazza. Amennyiben nem létezik út s -ből s' -be, akkor a táblázat mellett megadjuk a megtalált \mathcal{S} halmazt; a táblázaton szaggatott vonallal lefedjük az \mathcal{S} -beli csúcsoknak megfelelő sorokat és az \mathcal{S}' -beli csúcsoknak megfelelő oszlopokat; és végül a táblázat mellett megadjuk a fedetlen elemek minimumát, mint ϵ értéket. Az utolsó táblázatban már \mathcal{S}' alá is címke kerül, ekkor nem szükséges a táblázat sorainak illetve oszlopainak vonalkázása, így ϵ értéke sem határozható meg. Ezzel szemben a szokásos módon visszakereshető az s -ből s' -be vezető út, amely a példabeli feladat megoldását adja.

0. Lépés.

	①	②	③	④	⑤
①		3	4		
②				4	
③		2		1	
④					3
⑤			1		

1. Lépés.

	①	②	③	④	⑤
①		3	4		
②				4	
③		2		1	
④					3
⑤			1		
	+1				

$S=\{1\}$

$\varepsilon=3$

2. Lépés.

	①	②	③	④	⑤
①		0	1		
②				4	
③		2		1	
④					3
⑤			1		
	+1	+1			

$S=\{1,2\}$

$\varepsilon=1$

3. Lépés.

	①	②	③	④	⑤	
①		0	0			
②				3		$S=\{1,2,3\}$
③		3		1		
④					3	$\varepsilon=1$
⑤			1			
	+1	+1	+1			

4. Lépés.

	①	②	③	④	⑤	
①		0	0			
②				2		$S=\{1,2,3,4\}$
③		3		0		
④					3	$\varepsilon=3$
⑤			2			
	+1	+1	+1	+3		

5. Lépés.

	①	②	③	④	⑤	
①		0	0			
②				2		$S=\{1,2,3,4,5\}$
③		3		0		
④					0	
⑤			5			
	+1	+1	+1	+3	+4	

Az 5. lépésben meg lehetett címkézni az $s' = 5$ csúcsot, miszerint már létezik az $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ digráfban s -ből s' -be vezető út. Ez úgy olvasható ki az utolsó, címkéket tartalmazó sorból, hogy az 5-ik csúcsba a 4-es csúcsból, a 4-edik csúcsba a 3-as csúcsból, a 3-adik csúcsba pedig az 1-es csúcsból jutottunk, vagyis a keresett legrövidebb út a $P = \{1, 3, 4, 5\}$ út, amely hossza $l(P) = 4 + 1 + 3 = 8$. A potenciálértékek meghatározásához vegyük először figyelembe a $\mu(1) = 0$ kezdeti feltetelt és a $\delta(1, 2)$ értéket definiáló

$$\delta(1, 2) = \tau(1, 2) + \mu(1) - \mu(2)$$

összefüggést, amiből

$$\mu(2) = \tau(1, 2) + \mu(1) - \delta(1, 2) = 3 + 0 - 0 = 3.$$

Másodszor a

$$\delta(1, 3) = \tau(1, 3) + \mu(1) - \mu(3)$$

összefüggésből

$$\mu(3) = \tau(1, 3) + \mu(1) - \delta(1, 3) = 4 + 0 - 0 = 4,$$

majd a

$$\delta(2, 4) = \tau(2, 4) + \mu(2) - \mu(4)$$

összefüggésből

$$\mu(4) = \tau(2, 4) + \mu(2) - \delta(2, 4) = 4 + 3 - 2 = 5,$$

és végül a

$$\delta(4, 5) = \tau(4, 5) + \mu(4) - \mu(5)$$

összefüggésből

$$\mu(5) = \tau(4, 5) + \mu(4) - \delta(4, 5) = 3 + 5 - 0 = 8.$$

Látható tehát, hogy az 1.2.2. tétel értelmében a példa hálózatára valóban teljesül, hogy az 1.1. primál és az 1.2. duál feladatok optimális megoldásaira $l(P) = \mu(s') = 8$.

A továbbiak során még egy legrövidebb utat kereső algoritmust ismertetünk részletesen. Erre azért van szükségünk, mert az előző, a dualitás tétel konstruktív bizonyításán alapuló algoritmusunkban fontos feltétel volt az, hogy a $\tau(x, y)$ élhosszak nemnegatívak. Az 1.3. szakasz időtervezési feladatában, illetve annak a 2. fejezetben tárgyalandó sztochasztikus kiterjesztésében ezzel szemben nemnegatív élhosszúságú digráfokban a leghosszabb út megkeresése lesz az egyik tipikus feladat. Ezt megoldhatjuk úgy is, hogy az élhosszak mínusz egyszereseivel tekintett digráfban legrövidebb utat keresünk. Ehhez azonban olyan legrövidebb út kereső algoritmusra van szükségünk, amely negatív élhosszak mellett is működik. Ahhoz, hogy ilyen algoritmus létezessen, illetve hogy értelme legyen egyáltalán legrövidebb útról beszélni, fel kell tennünk a digráfról azt, hogy nem tartalmaz olyan utat, amely egy csúcsból indulva ugyanebbe a csúcsba visszatér. Az ilyen utat horoknak nevezzük, tehát a továbbiakban csak úgynevezett hurokmentes digráfokat fogunk tekinteni. Nyilvánvaló ugyanis, hogy egy esetleges csupa negatív hosszúságú élekkel bíró hurok létezése esetén a „legrövidebb út” az lenne, hogy végtelen sokszor körbejárnánk ebben a hurokban, miáltal az útunk hossza tetszőlegesen kicsivé lenne tehető. Ez a feltevés teljesen természetesnek tekinthető az 1.3. szakasz időtervezési feladatában. Az egyik legegyszerűbb ilyen algoritmus a következő.

Ford legrövidebb út kereső algoritmus a negatív élhosszúságokat is tartalmazó digráfokra:

1. lépés. *Inicializálás.* Rendeljünk az s csúcs kivételével minden csúcsához $l(i) = \infty$ és $p(i) = 0$ címke értékeket és legyen $l(s) = 0$, $p(s) = s$.

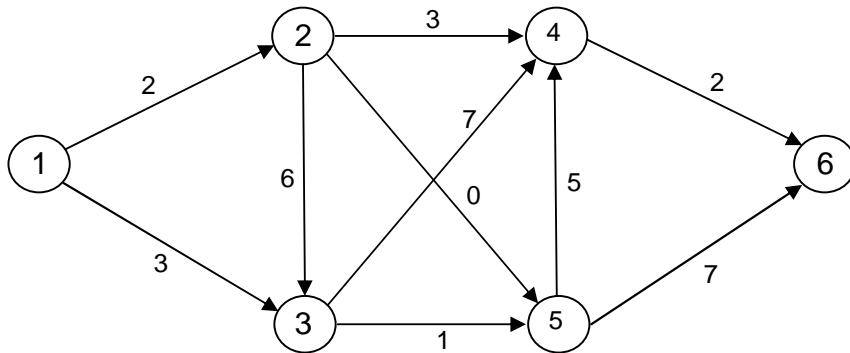
2. lépés. *Iterációs lépés.* Minden $j \in \mathcal{N}$ csúcsra ellenőrizzük, hogy létezik-e olyan $(i, j) \in \mathcal{A}$ él, amelyre teljesül az $l(i) + \tau(i, j) < l(j)$ egyenlőtlenség. Ha ilyen él létezik, akkor az első megtalálásakor menjünk a 3. lépésre, különben állítsuk le az iterációs lépéseket és magát az algoritmust.

3. lépés. *A címkék aktualizálása.* A j csúcs $l(j)$ címkéjét cseréljük $l(i) + \tau(i, j)$ -re, $p(j)$ címkéjét pedig i -re. Menjünk a **2. lépésre**.

1.2.4. Példa: Tekintsük ismét az 1.6 ábra digráfját az élekre írt $\tau(x, y)$ élhosszakkal, és keressük most is az 1-es csúcsból az 5-ös csúcsba vezető legrövidebb utat.

Az iterációs lépéseket úgy szemléltettük, hogy a $\tau(x, y)$ élhosszakokat tartalmazó pont–pont incidencia mátrix bal oldalán minden iterációs lépéshez megadtuk az aktuális l -címkéket, a jobboldalán az iterációsorozat végére kialakult p -címkéket, míg alatta az egyes iterációs lépések során számított $l(i) + \tau(i, j)$ és $l(j)$ értékeket (ez utóbbiakat mindig vastagon szedve). Vegyük észre, hogy a táblázat alatt, az egyes iterációkon belül a sorok sorszáma a j , a sorokon belüli elemek sorszáma pedig az i indexnek felel meg, és mindenütt csak akkor számítottuk az $l(i) + \tau(i, j)$ menynyiségeket, amikor az (i, j) él létezik, illetve leálltunk azok számításával is, amikor először teljesült az $l(i) + \tau(i, j) < l(j)$ egyenlőtlenség. Ekkor töltöttük ki az adott iterációhoz tartozó l -címke oszlopot és aktualizáltuk a p -címke oszlopot, azaz felülírtuk a p -címke oszlop annyiadik elemét, mint az iteráció ahányadik sorában álltunk le, és olyan számot írtunk oda, mint az iteráció utolsó sorában ahányadik helyre számoltunk éppen $l(i) + \tau(i, j)$ értéket (nem vastagon szedett számot a sorban). Végül a p -címkékből a keresett legrövidebb út ugyanúgy a $P = \{1, 3, 4, 5\}$ út, $l(P) = 4 + 1 + 3 = 8$ összhosszal, amint ahogyan azt az 1.2.3. példában korábban már megkaptuk. A μ potenciálértékeket most azonban nem tudjuk közvetlenül kiszámítani.

1.2.5. Példa: Tekintsük az 1.7 ábra digráfját az élekre írt $\tau(x, y)$ élhosszakkal, és keressük az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető leghosszabb utat.



1.7. ábra. Az 1.2.5. példa digráfja és élhosszai

l-címkék

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	①		-2	-3						
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	∞	②			-6	-3	0				
-8	-8	-8	-8	-8	-8	-3	∞	∞	∞	③				-7	-1				
-15	-15	-15	-15	-5	∞	∞	∞	∞	∞	④							-2		
-9	-9	-2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	⑤				-5			-7		
-17	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	⑥									

p-címkék

1

1

2

3

3

4

0

-2 ∞

1. iteráció

0

-2 -2

-3 ∞

2. iteráció

0

-2 -2

-3 -8 -3

3. iteráció

0

-2 -2

-3 -8 -8

-5 ∞

4. iteráció

0

-2 -2

-3 -8 -8

-5 -15 -5

5. iteráció

0

-2 -2

-3 -8 -8

-5 -15 -15

-2 ∞

6. iteráció

0

-2 -2

-3 -8 -8

-5 -15 -15 -7

-2 -9 -2

7. iteráció

0

-2 -2

-3 -8 -8

-5 -15 -15 -14

-2 -9 -9

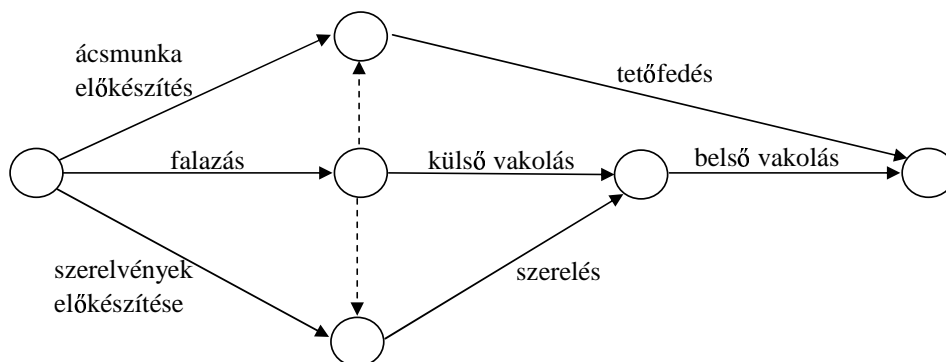
-17 ∞

8. iteráció

A leghosszabb utat úgy kerestük meg, hogy vettük az élhosszak mínusz egyszerűségeit és az ezekkel tekintett digráfban legrövidebb utat kerestünk Ford algoritmusával. a p -címkékből a keresett leghosszabb út most a $P = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ út, $l(P) = 2 + 6 + 7 + 2 = 17$ összhosszal.

1.3. Az időtervezési feladat

A feladat megfogalmazásához tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen a feladatunk egy családi ház építésének a minél gyorsabb végrehajtása. Végezze az építési munkákat egy kőműves, egy szerelő és egy ács brigád. A kőműves brigád tevékenységei legyenek: falazás, külső és belső vakolás; a szerelő brigádé a szerelvények előkészítése majd beszerelése; az ácsoké a faszerkezetek előkészítése, majd a tetőfedés. A brigádok a tevékenységeiket nyilván csak a felsorolásuk sorrendjében végezhetik, emellett bizonyos mértékig egymáshoz is alkalmazkodniuk kell, így például a tetőfedés csak a falazás befejezése után kezdődhet. Célszerű ezért a házépítés munkafolyamatait egy ábrán szemléltetni (lásd az 1.8 ábra). Az ábrán a szaggatott vonalak úgynevezett látszattevékenységeket jelentenek, melyek csak az ábrán előtűnik, illetve utánuk található tevékenységek végrehajtásainak egymásutániságát írják elő, de önmagukban nem jelentenek semmiféle tevékenységet. Az 1.8 ábrán látható speciális digráfot *tervütemhálónak* nevezzük.



1.8. ábra. A házépítés munkafolyamatainak ábrája

1.3.4. Definíció: A tervütemháló matematikai definíciója a következő. Egy $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfot akkor nevezünk tervütemhálónak (hálónak), ha hurokmentes, létezik benne $s \in \mathcal{N}$ kezdőpont és $s' \in \mathcal{N}$ végpont úgy, hogy bármely $x \in \mathcal{N}$ ponton keresztül vezet út s -ből s' -be.

Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ háló csúcsait *eseményeknek* fogjuk nevezni, éleit pedig *tevékenységeknek*. A háló $s \in \mathcal{N}$ kezdőpontját ennek megfelelően *kezdő eseménynek*, $s' \in \mathcal{N}$ végpontját *befejező eseménynek* nevezzük a továbbiak során. Az $(x, y) \in \mathcal{A}$ élhez rendelt $\tau(x, y) \geq 0$ élhosszakokat pedig *tevékenységi időknek* fogjuk tekinteni. A látszattervékenységek tevékenységi ideje nyilván $\tau(x, y) = 0$ kell, hogy legyen.

A tervütemháló által leírt projekt végrehajtásához készítsünk tervet, azaz minden eseményhez rendeljünk hozzá egy $\mu(x)$ realizálási időpontot, vagy *eseményidőt*. Ezen $\mu(x)$, $x \in \mathcal{N}$ eseményidők összességét *ütemezésnek* (*időpolitikának*) nevezzük. Az eseményidőkre nyilván teljesülni kell a

$$\mu(y) - \mu(x) \geq \tau(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}$$

összefüggéseknek. A $\mu(s') - \mu(s)$ különbséget az *ütemezés értékének* nevezzük, amely megadja a projekt végrehajtási idejét is. A célunk nyilvánvalóan az, hogy olyan tervet készítsünk, amely megvalósítása esetén a projekt legkorábban befejezhető, azaz a projekt végrehajtási ideje minimális. Ezt juttatja kifejezésre a következő primál feladat

$$\begin{aligned} &\min \mu(s') \\ &\text{feltéve, hogy} \\ &\mu(y) - \mu(x) \geq \tau(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}, \quad \mu(s) = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Másik feladatként tekinthetjük azt, hogy a $\tau(x, y) \geq 0$ $(x, y) \in \mathcal{A}$ tevékenységidők ismeretében határozzuk meg azt a legrövidebb időt, amely alatt a projekt végrehajtható. Ehhez nyilván azt kell tenni, hogy az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ tervütemhálón meg kell keresni azt az s -ből s' -be vezető $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_p = s')$ utat, amely mentén az $l(P) = \sum_{i=1}^p \tau(x_{i-1}, x_i)$ érték maximális, azaz az alábbi „leghosszabb út” problémát kell megoldani:

$$\max_{\forall P} l(P). \quad (1.10)$$

Ezt a leghosszabb utat, amely a projekt legrövidebb végrehajtási idejét adja, *kritikus út*-nak is szokás nevezni. Az (1.9) feladatot most is *primál feladatnak*, az (1.10) feladatot pedig *duál feladatnak* nevezhetjük és a korábban az (1.1), (1.2) primál–duál feladatpárra bizonyított állítás sorozathoz hasonló eredményeket lehet bebizonyítani. Az 1.2.2. tételnek (Ford tételének) megfelelő 1.3.3. dualitás tétel konstruktív bizonyításai most is alapjául fognak szolgálni az időtervezési feladat két különböző szempont szerinti megoldó algoritmusának a felépítéséhez.

1.3.2. Lemma: *Tetszőleges s -ből s' -be vezető P út és a $\mu(y) - \mu(x) \geq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő ütemezés esetén*

$$l(P) \leq \mu(s'), \quad (1.11)$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, ha

$$\tau(x, y) = \mu(y) - \mu(x), \quad \forall (x, y) \in P. \quad (1.12)$$

Bizonyítás:

$$l(P) = \sum_{i=1}^p \tau(x_{i-1}, x_i) \leq \sum_{i=1}^p [\mu(x_i) - \mu(x_{i-1})] = \mu(x_p) - \mu(x_0) = \mu(s') - \mu(s) = \mu(s'),$$

ahol a két összeg akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha minden tagjuk egyenlő, azaz ha (1.12) teljesül.

□

1.3.3. Következmény: *(Gyenge egyensúly) Ha az s -ből s' -be vezető P út és a $\mu(y) - \mu(x) \geq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\mu(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő μ ütemezés olyanok, hogy (1.11) egyenlőséggel teljesül, akkor a μ ütemezés az (1.9) primál feladatnak, a P út pedig az (1.10) duál feladatnak optimális megoldásai.*

Bizonyítás: Legyen $l(P) = \mu(s')$ és tegyük fel, hogy a P út nem optimális megoldása az (1.10) duál feladatnak. Ekkor léteznie kell egy olyan s -ből s' -be vezető \hat{P} útnak, amelyre

$$l(\hat{P}) > l(P). \quad (1.13)$$

Az 1.3.2. lemma szerint azonban erre a \hat{P} útra is $l(\hat{P}) \leq \mu(s') = l(P)$, ami ellentmond az (1.13) szigorú egyenlőtlenségnek.

Fordítva, legyen $l(P) = \mu(s')$ és tegyük fel, hogy a μ ütemezés nem optimális megoldása az (1.9) primál feladatnak. Ekkor léteznie kell olyan $\hat{\mu}$ ütemezésnek, amelyre

$$\hat{\mu}(s') < \mu(s'). \quad (1.14)$$

Az 1.3.2. lemma szerint azonban erre a $\hat{\mu}$ ütemezésre is $\hat{\mu}(s') \leq l(P) = \mu(s')$, ami ellentmond az (1.14) szigorú egyenlőtlenségnek. □

A következő tétel konstruktív bizonyításai lehetővé teszik, hogy algoritmust szerkesszünk az időtervezés (1.9) primál feladatának megoldására, valamint annak ismeretében az időtervezés (1.10) duál feladatának a megoldására, azaz a kritikus útnak a meghatározására is.

1.3.3. Tétel: *(Az időtervezési feladat dualitás tétele) Adott $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ tervütemhálón tetszőleges $\tau(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathcal{A}$ tevékenységidők esetén bármely két s, s' eseményre létezik olyan s -ből s' -be vezető P út és létezik a $\mu(y) - \mu(x) \geq \tau(x, y), \forall (x, y) \in \mathcal{A}, \mu(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő olyan μ ütemezés, hogy igaz rájuk (1.12), és így az (1.11) egyenlőtlenséget is egyenlőséggel teljesítik, vagyis az 1.3.3. következmény értelmében, a μ ütemezés az (1.9) primál, a P út pedig az (1.10) duál feladat optimális megoldásai.*

Bizonyítás: Két bizonyítást is adunk a tételre, mindkettő konstruktív.

Első bizonyítás. Legyen az \mathcal{N} halmaz felosztva $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ diszjunkt halmazokra úgy, hogy $s \in \mathcal{S}$ legyen és \mathcal{S} -ből csak kifelé menjen él, vagyis ne legyen olyan $(x, y) \in \mathcal{A}$ él, hogy $x \in \mathcal{S}'$ és $y \in \mathcal{S}$. Emellett legyen adott az \mathcal{S} -beli események egy olyan $\underline{\mu}(x), \forall x \in \mathcal{S}$ ütemezése is, amellyel minden $x \in \mathcal{S}$ eseményhez vezet s -ből „kritikus út”, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\underline{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Ezeknek a feltételeknek kiindulásként nyilván megfelel a csak az s -et tartalmazó egyelemű \mathcal{S} halmaz és ezen a $\underline{\mu}(s) = 0$ ütemezés.

Ha $\mathcal{S} \equiv \mathcal{N}$, akkor s -ből s' -be is vezet „kritikus út”, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\underline{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Ekkor az 1.3.3. következmény szerint a $\underline{\mu}(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$ ütemezés az (1.9) primál feladatnak, az s -ből s' -be vezető P út pedig az (1.10) duál feladatnak optimális megoldásai, amivel a tétel bizonyítását befejezettnek tekinthetjük.

Ha $\mathcal{S} \not\equiv \mathcal{N}$, akkor az \mathcal{S} eseményhalmazt bővítsük egy olyan $y \in \mathcal{S}'$ eseménnyel, amely y -ba csak \mathcal{S} -ből vezet él. Ilyen esemény létezik, mert különben \mathcal{S}' -ben hurok lenne, ami a teljes tervütemhálóra is kizárt. Ahhoz, hogy ez az y is s -ből „kritikus úton” elérhető legyen, a $\underline{\mu}(y)$ eseményidőt a következőképpen kell megválasztani:

$$\underline{\mu}(y) = \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ (x, y) \in \mathcal{A}}} [\underline{\mu}(x) + \tau(x, y)].$$

Az eljárást tovább folytatva, véges számú lépés után eljutunk oda, hogy $\mathcal{S} \equiv \mathcal{N}$.

Második bizonyítás. Legyen az \mathcal{N} halmaz felosztva \mathcal{S} , \mathcal{S}' diszjunkt halmazokra úgy, hogy $s' \in \mathcal{S}'$ legyen és \mathcal{S}' -be csak befelé menjen él, vagyis ne legyen olyan $(x, y) \in \mathcal{A}$ él, hogy $x \in \mathcal{S}'$ és $y \in \mathcal{S}$. Emellett legyen adott az \mathcal{S}' -beli események egy olyan $\bar{\mu}(x)$, $\forall x \in \mathcal{S}'$ ütemezése is, amellyel minden $x \in \mathcal{S}'$ eseményből vezet s' -be „kritikus út”, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\bar{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Ezeknek a feltételeknek kiindulásként nyilván megfelel a csak az s' -t tartalmazó egyelemű \mathcal{S}' halmaz és ezen a $\bar{\mu}(s') = 0$ ütemezés.

Ha $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{N}$, akkor s' s -ből is elérhető „kritikus úton”, azaz olyan úton, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\bar{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Ekkor az 1.3.3. következmény szerint a $\bar{\mu}(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$ ütemezés az (1.9) primál feladatnak, az s -ből s' -be vezető P út pedig az (1.10) duál feladatnak optimális megoldásai, amivel a tétel bizonyítását befejezettnek tekinthetjük.

Ha $\mathcal{S}' \not\equiv \mathcal{N}$, akkor az $(\mathcal{S}'$ eseményhalmazt bővítsük egy olyan $y \in \mathcal{S}$ eseménnyel, amely y -ból csak $(\mathcal{S}'$ -be vezet él. Ilyen esemény létezik, mert különben \mathcal{S} -ben hurok lenne, ami a teljes tervütemhálóra is kizárt. Ahhoz, hogy ebből az y -ból is s' „kritikus úton” elérhető legyen, a $\bar{\mu}(y)$ eseményidőt a következőképpen kell

megválasztani:

$$\bar{\mu}(y) = \min_{\substack{x \in S' \\ (y,x) \in \mathcal{A}}} [\bar{\mu}(x) - \tau(y, x)].$$

Az eljárást tovább folytatva, véges számú lépés után eljutunk oda, hogy $\mathcal{S} \equiv \mathcal{N}$.

□

1.3.4. Következmény: *(Erős egyensúly) Ha a μ ütemezés az (1.9) primál feladatnak, az s -ből s' -be vezető P út pedig az (1.10) duál feladatnak, optimális megoldásai, akkor (1.11) egyenlőséggel teljesül.*

Bizonyítás: A dualitás tételből következik, hogy létezik olyan az s -ből s' -be vezető \hat{P} út és léteznek olyan $\hat{\mu}$ potenciálok, amelyekre (1.11) egyenlőséggel teljesül, azaz

$$l(\hat{P}) = \hat{\mu}(s') \quad (1.15)$$

és amelyek ezért az (1.9) és az (1.10) feladatok optimális megoldásai, mivel pedig μ is és P is ugyanazoknak a feladatoknak az optimális megoldásai, azért

$$l(\hat{P}) = l(P),$$

$$\hat{\mu}(s') = \mu(s')$$

és így az (1.15) egyenlőség miatt az

$$l(P) = \mu(s')$$

egyenlőségnek is teljesülni kell.

□

Mielőtt az időtervezési feladatra elkészítenénk a dualitás tétel konstruktív bizonyításain alapuló megoldó algoritmusokat, értelmezzük a kétféle bizonyításban megszerkesztett $\underline{\mu}$ és $\bar{\mu}$ ütemezéseket.

A dualitás tétel első bizonyítása szerint megszerkesztett $\underline{\mu}(x)$, $x \in \mathcal{N}$ ütemezésnél minden x csúcsba vezet s -ből kritikus út. Ez azt jelenti, hogy minden olyan tevékenység, amely x -ből indul, legkorábban a $\underline{\mu}(x)$ időpontban kezdődhet. Ezért ezeket a $\underline{\mu}(x)$ értékeket *legkorábbi időknak* nevezzük.

A dualitás tétel második bizonyítása szerint megszerkesztett $\bar{\mu}(x)$, $x \in \mathcal{N}$ ütemezésnél minden x csúcsból vezet kritikus út s' -be. Ez azt jelenti, hogy minden olyan tevékenység, amely az x eseményben végződik, legkésőbb a $\bar{\mu}(x)$ időpontban be kell, hogy fejeződjön. Ezért ezeket a $\bar{\mu}(x)$ értékeket *legkésőbbi időknak* nevezzük.

A $\underline{\mu}(s)$ és a $\bar{\mu}(s')$ értékek tetszés szerint választhatók meg. Célszerű azonban a $\bar{\mu}(s') = \underline{\mu}(s')$ választás, mely esetben nyilván $\bar{\mu}(s) = \underline{\mu}(s)$ is teljesülni fog.

A $\underline{\mu}$ és a $\bar{\mu}$ időütemezéseken kívül további időpolitikák is lehetnek optimálisak, nevezetesen igaz a következő állítás is: ha μ_1 és μ_2 két optimális időütemezés, és $0 \leq \lambda \leq 1$ tetszőleges valós szám, akkor $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ is optimális időütemezés.

Vegyük még észre, hogy ha μ egy tetszőleges optimális időütemezés, akkor

$$\underline{\mu}(x) \leq \mu(x) \leq \bar{\mu}(x), \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

és természetesen

$$\underline{\mu}(s') = \mu(s') = \bar{\mu}(s').$$

Ezért a $\underline{\mu}$ és a $\bar{\mu}$ időütemezések mintegy a két határhelyzetet jelentik az optimális időütemezések között, melyek segítségével az egyes (x, y) tevékenységekre vonatkozó, a projekt ütemezések gyakorlati megvalósításakor szemléletes tartalommal további bíró fogalmakat lehet megadni. Ezek közül néhány fontosabb a következő.

Maximális időtartalék abban az esetben jön létre, ha a tevékenység legkorábban kezdődhet és legkésőbb végződhet. Értéke: $\bar{\mu}(y) - \underline{\mu}(x) - \tau(x, y)$.

Szabad időtartalék akkor keletkezhet, ha a tevékenység legkésőbb kezdődhet és legkorábban kell befejeződnie. Értéke: $\underline{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) - \tau(x, y)$.

Feltételes időtartalék abban az esetben jön létre, ha a tevékenység legkorábban kezdődhet, de nem ronthatja el az őt követő tevékenységek legkorábbi kezdési időpontját. Értéke: $\underline{\mu}(y) - \underline{\mu}(x) - \tau(x, y)$.

Független időtartalék úgy keletkezhet, hogy az x -be érkező tevékenységek befejezése után kezdődik a tevékenység, de nincs tekintettel az y -t követő tevékenységekre. Értéke: $\bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) - \tau(x, y)$.

Az (x, y) tevékenységre vonatkozóan szokás még a $\bar{\mu}(y) - \tau(x, y)$ *legkésőbbi kezdési*, és a $\underline{\mu}(x) + \tau(x, y)$ *legkorábbi befejezési* időértékeket is számontartani.

Az 1.3.3. dualitás tétel mindkét konstruktív bizonyítása alapján könnyen szerkeszthető hatékony algoritmus az időtervezési feladat megoldására. Az első bizonyításra alapozott algoritmus előnye az, hogy segítségével megkapjuk a $\underline{\mu}(x)$, $x \in \mathcal{N}$ legkorábbi időket is, míg a második bizonyításra alapozott algoritmus előnye az, hogy segítségével megkapjuk a $\overline{\mu}(x)$, $x \in \mathcal{N}$ legkésőbbi időket is.

Algoritmus az időtervezési feladat megoldására (a legkorábbi idők megkeresésével): Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ hálón ismert egy olyan \mathcal{S} halmaz, hogy $s \in \mathcal{S}$ és \mathcal{S} -ből csak kifelé vezet él; valamint ismert egy olyan, a $\underline{\mu}(y) - \underline{\mu}(x) \geq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\underline{\mu}(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő $\underline{\mu}(x)$, $x \in \mathcal{S}$ ütemezés, hogy minden $x \in \mathcal{S}$ csúcshoz vezet s -ből kritikus út, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\underline{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Kezdetben alkalmas választás az $\mathcal{S} = s$ és $\underline{\mu}(s) = 0$.

Ha $\mathcal{S} \equiv \mathcal{N}$, akkor akkor s -ből s' -be is vezet „kritikus út”, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\underline{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Ekkor az 1.3.3. következmény szerint a $\underline{\mu}(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$ ütemezés az (1.9) primál feladatnak, az s -ből s' -be vezető P út pedig az (1.10) duál feladatnak optimális megoldásai. A P kritikus út megkeresését célszerűen az $\underline{\epsilon}(x, y) = \underline{\mu}(y) - \underline{\mu}(x) - \tau(x, y)$ értékek táblázatán kereshetjük meg olymódon, hogy s -ből s' -be keresünk utat az $\underline{\epsilon}(x, y) = 0$ feltételnek eleget tevő élek mentén.

Ha $\mathcal{S} \neq \mathcal{N}$, akkor az \mathcal{S} halmazt olyan $y \in \mathcal{S}'$ csúccsal kell bővítenünk, amely y csúcsba csak \mathcal{S} -ből vezet él. Ezt úgy végezhetjük el, hogy a $\tau(x, y)$ értékek táblázatában lefedjük az \mathcal{S} -beli csúcsoknak megfelelő sorokat és oszlopokat, amint azt az 1.9 ábra mutatja. Ekkor az \mathcal{S} halmaz bővítéséhez csak olyan $y \in \mathcal{S}'$ csúcs használható, amely oszlopának fedetlen részében nem található $\tau(x, y)$ érték. Ekkor ugyanis az $y \in \mathcal{S}'$ csúcsba csak $x \in \mathcal{S}$ csúcsból vezet él. Ilyen $y \in \mathcal{S}'$ csúcsnak mindig kell léteznie, mivel ellenkező esetben könnyen belátható, hogy az \mathcal{S}' halmazban létezik hurok, ami ellentmond annak a ténynek, hogy az egész $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ háló hurokmentes.

Az így kiválasztott $y \in \mathcal{S}'$ csúcsra legyen

$$\underline{\mu}(y) = \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ (x, y) \in \mathcal{A}}} [\underline{\mu}(x) + \tau(x, y)].$$

The diagram shows a 2D grid representing a domain. It is divided into two main horizontal regions. The top region is labeled $x \in S$ on the left and $y \in S$ on the top. The bottom region is labeled $x \in S'$ on the left and $y \in S'$ on the top. The grid is composed of solid lines forming a 2x2 block of cells, with dashed lines indicating further subdivisions within each cell.

1.9. ábra. A megfelelő vonalakkal lefedett $\tau(x, y)$ táblázat

Ezt az eljárást ismételve minden lépésben egy új csúcshoz rendelünk $\underline{\mu}$ ütemezést, ezért pontosan annyi iterációs lépés után, mint amennyi csúcsa van a hálónak az összes $\mu(x)$, $\forall x \in \mathcal{S}$ ütemezést meg fogjuk határozni.

Algoritmus az időtervezési feladat megoldására (a legkésőbbi idők megkeresésével): Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ hálón ismert egy olyan \mathcal{S}' halmaz, hogy $s' \in \mathcal{S}'$ és \mathcal{S}' -be csak befelé vezet él; valamint ismert egy olyan, a $\bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) \geq \tau(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}$, $\bar{\mu}(s) = 0$ feltételeknek eleget tevő $\bar{\mu}(x)$, $x \in \mathcal{S}'$ ütemezés, hogy minden $x \in \mathcal{S}'$ csúcsból vezet kritikus út s' -be, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\bar{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Kezdetben alkalmas választás az $\mathcal{S}' = s'$ és $\bar{\mu}s' = 0$.

Ha $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{N}$, akkor akkor s' -be s -ből is vezet „kritikus út”, azaz olyan út, amely mentén a $\tau(x, y)$ tevékenységidők és a $\bar{\mu}$ ütemezés értékek eleget tesznek az (1.12) egyenlőségeknek. Ekkor az 1.3.3. következmény szerint a $\bar{\mu}(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$ ütemezés az (1.9) primál feladatnak, az s -ből s' -be vezető P út pedig az (1.10) duál feladatnak optimális megoldásai. A P kritikus út megkeresését célszerűen az $\bar{\epsilon}(x, y) = \bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) - \tau(x, y)$ értékek táblázatán kereshetjük meg oly módon, hogy s -ből s' -be keresünk utat az $\bar{\epsilon}(x, y) = 0$ feltételnek eleget tevő élek mentén.

Ha $\mathcal{S}' \neq \mathcal{N}$, akkor az \mathcal{S}' halmazt olyan $y \in \mathcal{S}$ csúccsal kell bővítenünk, amelyből csak \mathcal{S}' -be vezet él. Ezt úgy végezhetjük el, hogy a $\tau(x, y)$ értékek táblázatában

1.10. ábra. A megfelelő vonalakkal lefedett $\tau(x, y)$ táblázat

lefedjük az \mathcal{S}' -beli csúcsoknak megfelelő sorokat és oszlopokat, amint azt az 1.10 ábra mutatja. Ekkor az \mathcal{S}' halmaz bővítéséhez csak olyan $y \in \mathcal{S}$ csúcs használható, amely sorának fedetlen részében nem található $\tau(x, y)$ érték. Ekkor ugyanis az $y \in \mathcal{S}$ csúcsból csak $x \in \mathcal{S}'$ csúcsba vezet él. Ilyen $y \in \mathcal{S}$ csúcsnak mindig kell léteznie, mivel ellenkező esetben könnyen belátható, hogy az \mathcal{S} halmazban létezik hurok, ami ellentmond annak a ténynek, hogy az egész $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ háló hurokmentes.

Az így kiválasztott $y \in \mathcal{S}$ csúcsra legyen

$$\bar{\mu}(y) = \max_{\substack{x \in \mathcal{S}' \\ (y, x) \in \mathcal{A}}} [\bar{\mu}(x) - \tau(y, x)].$$

Ezt az eljárást ismételve minden lépésben egy új csúcshoz rendelünk $\bar{\mu}$ ütemezést, ezért pontosan annyi iterációs lépés után, mint amennyi csúcsa van a hálónak az összes $\bar{\mu}(x)$, $\forall x \in \mathcal{S}$ ütemezést meg fogjuk határozni.

1.3.6. Példa: Tekintsük most is az 1.7 ábrát mint tervütemhálót, ahol az élekre írt $\tau(x, y)$ élhosszak a tevékenységek végrehajtási idejeit jelentik. Legyen az 1-es a kezdő és a 6-os a befejező esemény, keresendők az optimális ütemezések, az azokkal kapcsolatos időtartalékok és a kritikus út.

A következőkben a $\tau(x, y)$ mennyiségeket tartalmazó táblázatokon sorra megadjuk az egyes iterációs lépések aktuális \mathcal{S} halmazának megfelelő fedővonalakat, a táblázatok bal oldalán a már meghatározott $\underline{\mu}$ értékeket, jobb oldalán pedig az aktuális \mathcal{S} halmazt és az éppen meghatározott új $\underline{\mu}$ értéket.

0. Lépés.

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3			
②			6	3	0	
③				7	1	
④						2
⑤				5		7
⑥						

1. Lépés.

μ		①	②	③	④	⑤	⑥	
0	①		2	3				$S=\{1\}$
	②			6	3	0		
	③				7	1		
	④						2	$\mu(2)=2+0=2$
	⑤				5		7	
	⑥							

2. Lépés.

μ		①	②	③	④	⑤	⑥	
0	①		2	3				
2	②			6	3	0		$S=\{1,2\}$
	③				7	1		
	④						2	$\mu(3)=\max(3+0,6+2)=8$
	⑤				5		7	
	⑥							

3. Lépés.

μ		①	②	③	④	⑤	⑥
0	①		2	3			
2	②			6	3	0	
8	③				7	1	
	④						2
	⑤				5		7
	⑥						

$S=\{1,2,3\}$

$\mu(5)=\max(0+2,1+8)=9$

4. Lépés.

μ		①	②	③	④	⑤	⑥
0	①		2	3			
2	②			6	3	0	
8	③				7	1	
	④						2
9	⑤				5		7
	⑥						

$S=\{1,2,3,5\}$

$\mu(4)=\max(3+2,7+8,5+9)=15$

5. Lépés.

μ		①	②	③	④	⑤	⑥
0	①		2	3			
2	②			6	3	0	
8	③				7	1	
	④						2
9	⑤				5		7
	⑥						

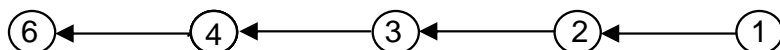
$S=\{1,2,3,4,5\}$

$\mu(6)=\max(2+15,7+9)=17$

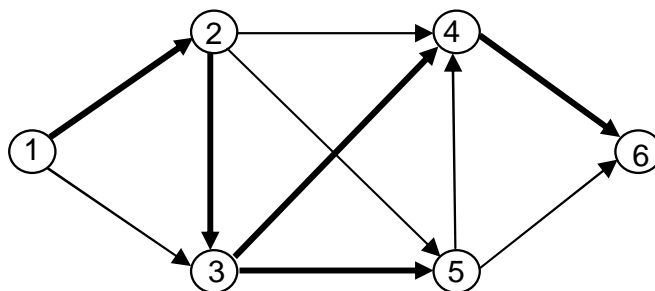
A kritikus út keresése az $\underline{\varepsilon}(x,y)$ értékek táblázatán:

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		0	5			
②			0	10	7	
③				0	0	
④						0
⑤				1		1
⑥						
	+s	+1	+2	+3	+3	+4

A kritikus út:



A kritikus élek:



A primál-duál feladatpár optimális célfüggvényértékei:

$$\underline{\mu}(s') = \underline{\mu}(6) = 17$$

$$l(P) = \tau(1,2) + \tau(2,3) + \tau(3,4) + \tau(4,6) = 2 + 6 + 7 + 2 = 17$$

A $\bar{\mu}$ időütemezések meghatározása teljesen hasonlóan történhet, a különbség csak annyi, hogy a táblázatok fölötti cellasorban adjuk meg a már meghatározott $\bar{\mu}$ értékeket, jobb oldalán pedig értelemszerűen az aktuális \mathcal{S}' halmazt és az éppen meghatározott új $\bar{\mu}$ értéket tüntetjük fel. Induláskor célszerűen legyen $\bar{\mu}(s') = \underline{\mu}(6) = 17$.

0. Lépés.

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3			
②			6	3	0	
③				7	1	
④						2
⑤				5		7
⑥						

1. Lépés.

$\bar{\mu}$						17
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3			—
②			6	3	0	—
③				7	1	—
④						2
⑤				5		7
⑥	—	—	—	—	—	—

$S' = \{6\}$

$\bar{\mu}(4) = 17 - 2 = 15$

2. Lépés.

$\bar{\mu}$				15		17
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3	—		—
②			6	3	0	—
③				7	1	—
④	—	—	—	—		2
⑤				5		7
⑥	—	—	—	—	—	—

$S' = \{6, 4\}$

$\bar{\mu}(5) = \min(17 - 7, 15 - 5) = 10$

3. Lépés.

$\bar{\mu}$				15	10	17
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3			
②			6	3	0	
③				7	1	
④						2
⑤				5		7
⑥						

$S' = \{6, 5, 4\}$

$\bar{\mu}(3) = \min(10-1, 15-7) = 8$

4. Lépés.

$\bar{\mu}$			8	15	10	17
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3			
②			6	3	0	
③				7	1	
④						2
⑤				5		7
⑥						

$S' = \{6, 5, 4, 3\}$

$\bar{\mu}(2) = \min(10-0, 15-3, 8-6) = 2$

5. Lépés.

$\bar{\mu}$		2	8	15	10	17
	①	②	③	④	⑤	⑥
①		2	3			
②			6	3	0	
③				7	1	
④						2
⑤				5		7
⑥						

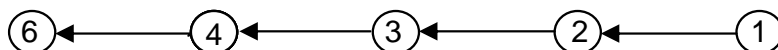
$S' = \{6, 5, 4, 3, 2\}$

$\bar{\mu}(1) = \min(8-3, 2-2) = 0$

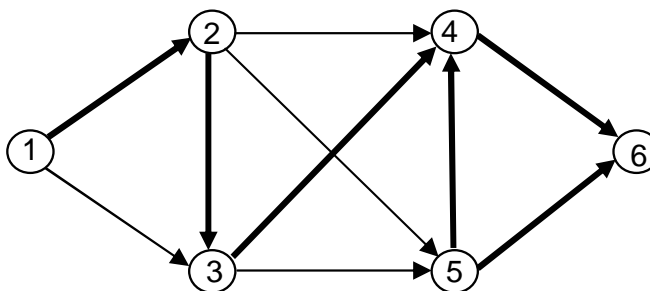
A kritikus út keresése az $\varepsilon(x,y)$ értékek táblázatán:

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		0	5			
②			0	10	8	
③				0	1	
④						0
⑤				0		0
⑥						
	+s	+1	+2	+3		-4

A kritikus út:



A kritikus élek:



A primál–duál feladatpár optimális célfüggvényértékei:

$$\bar{\mu}(s') = \bar{\mu}(6) = 17$$

$$l(P) = \tau(1,2) + \tau(2,3) + \tau(3,4) + \tau(4,6) = 2 + 6 + 7 + 2 = 17$$

A különböző tartalékidők táblázatai pedig a következők lesznek.

Maximális időtartalékok:

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		0	5			
②			0	10	8	
③				0	1	
④						0
⑤				1		1
⑥						

Szabad időtartalékok:

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		0	5			
②			0	10	7	
③				0	0	
④						0
⑤				0		0
⑥						

Feltételes időtartalékok:

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		0	5			
②			0	10	7	
③				0	0	
④						0
⑤				1		1
⑥						

Független időtartalékok:

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		0	5			
②			0	10	8	
③				0	1	
④						0
⑤				0		0
⑥						

2. Fejezet

Sztochasztikus időtervezési feladat (PERT)

2.1. A PERT modell

A PERT elnevezés az angol „Project Evaluation and Reviewing Technique” elnevezésből képzett betűszó. Jelentése ezért magyarul úgy fogalmazható meg, mint „projektek kiértékelési és újratervezési módszere”. Projektnek különféle *tevékenységek* egymástól függő sorozatát nevezzük, mely tevékenységek elvégzése a projekt megvalósítását jelenti. A projektet alkotó tevékenységeket $\{a, b, \dots\}$ kis latin betűkkel jelöljük és feltesszük, hogy közöttük definiálva van egy $a \prec b$ -vel jelölt, úgynevezett *elsőbbségi* reláció, amely azt jelenti, hogy a b tevékenység végrehajtását csak akkor lehet elkezdni, amikor az a tevékenység végrehajtása már befejeződött. Ez a reláció nyilván rendelkezik a tranzitivitási tulajdonsággal, azaz ha $a \prec b$ és $b \prec c$, akkor $a \prec c$ is teljesül. Bármely projekt úgy ábrázolható, mint egy hurokmentes irányított gráf, amelyben az irányított élek a tevékenységeket jelentik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az irányított gráfban pontosan egy olyan csúcs van, amelyikbe nem vezet egyetlen él sem és ugyancsak pontosan egy olyan csúcs van, amelyből nem vezet ki egyetlen él sem. Ha a csúcsokat általában *eseményeknek* nevezzük, akkor ezek a speciális csúcsok úgy tekinthetők, mint *kezdő*, illetve *befejező események*. Minden tevékenységnek van egy *végrehajtási*

ideje, vagy *hossza*. Ennek megfelelően beszélhetünk a hurokmentes irányított gráf bármely útjának hosszáról is, mint az útban foglalt tevékenységek végrehajtási ideinek az összegéről. Különös jelentősége van a kezdő eseményt a befejező eseménnyel összekötő utak hosszainak. Ezen utak közül a leghosszabb határozza meg ugyanis azt a legrövidebb időtartamot, amely alatt a projekt teljesíthető, azaz minden tevékenysége végrehajtható. Ezt az időtartamot a *projekt megvalósítási idejének*, az ennek megfelelő leghosszabb utat pedig *kritikus útnak* nevezzük. Ezért, ha a tevékenységek végrehajtási idejei determinisztikusan meghatározottak lennének, akkor a projekt megvalósítási idejének meghatározása csak annyit jelent, hogy egy hurokmentes, irányított gráfban meg kell keresni két kijelölt csúcs között a leghosszabb, vagy ami ezzel ekvivalens, a legrövidebb utat. A PERT modellek azzal – a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából lényeges – feltételezéssel élnek azonban, hogy a projekt tevékenységeinek a végrehajtási idejei véletlen mennyiségek, vagy más szóval valószínűségi változók. A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy ilyen feltételezés mellett hogyan lehet a projekt ugyancsak véletlen megvalósítási idejét jellemezni.

Tegyük fel, hogy a projektet leíró gráfunknak n csúcsa van, melyeket az $1, 2, \dots, n$ egész számokkal azonosítunk. Tegyük fel továbbá, hogy p különböző út létezik a kezdő, azaz az 1-es csúcsból a befejező, azaz az n csúcsba. Ezeket az utakat egy $A = (a_{ij})$ út-él incidencia mátrixszal írhatjuk le:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } aj \text{ tevékenység szerepel az } i \text{ útban,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jelölje A_i az A mátrix i -edik sorát, mint sorvektort ($1 \leq i \leq p$). Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ a tevékenységek véletlen végrehajtási ideiből képezett oszlopvektor. Ekkor az $R(\xi)$, „véletlentől függő kritikus úthossz” úgy írható fel, mint

$$R(\xi) = \max_{1 \leq i \leq p} A_i \xi.$$

Ha P_1, \dots, P_p jelöli a kezdő eseményből a befejező eseménybe vezető utakat, mint élhalmazokat, akkor ugyanez úgy is írható, mint

$$R(\xi) = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j \in P_i} \xi_j.$$

Az $R(\xi)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelölje $F(x)$:

$$F(x) = P(R(\xi) \leq x). \quad (2.1)$$

A 2.2 szakaszban a többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvény értéke alsó és felső korlátainak meghatározására, illetve szóráscsökkentés szimuláción alapuló becslésére szolgáló legújabb módszereket mutatjuk be, majd a 2.3 szakaszban ezeket a módszereket a (2.1) eloszlásfüggvény becslésére és szimulációs közelítésére alkalmazzuk.

Eredetileg a PERT modellezést D.G. Malcolm és munkatársai fejlesztették ki (lásd [26]), melyben csupán a projekt várható befejezési idejének a meghatározására vállalkoztak. Később korlátokat és közelítéseket határozott meg ugyanerre D.R. Fulkerson ([19]), C.T. Clingen ([11]), S.E. Elmaghraby ([15]), P. Robillard és M. Trahan ([33], [34]), L.P. Devroye ([12]) és sokan mások. A gyakorlati alkalmazások szempontjából ennél fontosabb azonban korlátokat, illetve közelítéseket megadni a kritikus út valószínűségi eloszlásfüggvényére. Ilyen irányú korábbi eredményeket illetően a következő dolgozatokat ajánljuk: G.B. Kleindorfer ([24]), A.W. Shogan ([35]), A. Nádas ([29]), I. Meilijson és A. Nádas ([27]), B.M. Dodin ([13]), G. Weiss ([45]), D. Monhor ([28]), S.W. Wallace ([44]).

2.2. A többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvény értéke becslési módszerei

Legyen $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tetszőleges eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Vezessük be az

$$A_1 = \{\xi_1 < x_1\}, \dots, A_n = \{\xi_n < x_n\}$$

eseményeket, ahol x_1, \dots, x_n tetszőleges valós számok, ekkor a ξ valószínűségi vektortörváltó együttes valószínűségi eloszlásfüggvénye a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) \\ &= P(A_1 \cdots A_n) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1 + \cdots + \overline{A}_n). \end{aligned}$$

Ezért az $F(x_1, \dots, x_n)$ eloszlásfüggvény érték becslése visszavezethető az

$$\overline{A}_i = \{\xi_i \geq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

események összegére vonatkozó becslésekre. Ezért, ha az $F(x_1, \dots, x_n)$ eloszlásfüggvény értékre szeretnénk alsó és felső becsléseket megadni, illetve szóráscsökkentő szimulációs kiértékeléssel becülni azt, akkor elegendő megmutatni, hogy a 2.2 események összegére hogyan lehet azt megtenni. Ebből a célból vezessük még be az

$$\overline{S}_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_k}), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

képlettel az $\overline{A}_i, i = 1, \dots, n$ események ún. binomiális momentumait.

Események összegének a valószínűségére legkorábban G. Boole ([4]) adott meg egy felső korlátot, melyben csak a $P(\overline{A}_i), i = 1, \dots, n$ valószínűségek összegét, azaz az úgynevezett első binomiális momentumot, \overline{S}_1 -et használta. Ezt a felső korlátot általánosították a C.E. Bonferroni által adott egyenlőtlenségek (lásd [3]), melyek szerint az $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_h, h < n$ binomiális momentumok váltakozó előjelű összege páratlan h esetén mindig felső korlátot, páros h esetén pedig alsó korlátot ad az $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n$ események uniójának a valószínűségére. Ezt követően a Bonferroni egyenlőtlenségek általánosításainak egy sora jelent meg, míg végül Prékopa András dolgozatai zárták le a kutatások ezen irányát azzal, hogy bebizonyították az addig megtalált, első három binomiális momentumot használó Bonferroni típusú egyenlőtlenségekről, hogy azok élesek, valamint az első négy binomiális momentumot használó éles felső korlát explicit megadása mellett felírták azt a lineáris programozási feladatpárt, amely megoldásai akárannyi $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_h, h < n$ binomiális momentum ismeretében szolgáltatják az éles Bonferroni típusú alsó és felső korlátokat.

Mivel a binomiális momentumok számítása a gyakorlatban legtöbbször a (2.3) képlettel történik, azért az első h binomiális momentum ismerete feltételezi azt, hogy a bennük foglalt $P(\overline{A}_{i_1}), P(\overline{A}_{i_1}\overline{A}_{i_2}), \dots, P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_h}), 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n$ szorzatesemény valószínűségeket is mind külön-külön számítani tudjuk, illetve ki is számítottuk. Ezért logikus az a törekvés, hogy ne csupán az első h binomiális momentumba aggregált, hanem az egyes szorzateseményekben külön-külön meglévő információt is próbáljuk meg a $P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n)$ valószínűség még jobb korlátainak a készítésére felhasználni. Ebben az irányban az első lépéseket már G. Boole is megtette, hiszen voltaképpen megfogalmazta az úgynevezett diszaggregált lineáris programozási feladatpár duál feladatát. Mivel azonban az ő idejében még nem volt ismert annak megoldására egy általános megoldó módszer, azért csupán speciális, egyedi becsléseket tudott a módszerével megadni. G. Boole munkáját Th. Hailperin elevenítette fel először (lásd [20]), majd ennek, és egymás munkájának ismerete nélkül D. Hunter ([21]) és K.J. Worsley ([46]) adott meg olyan felső korlátot a $P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n)$ valószínűsége, amely az \overline{S}_1 első binomiális momentumon túl a $P(\overline{A}_{i_1}\overline{A}_{i_2}), 1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ szorzatesemény valószínűségek közül csak azokat használja, amelyek egy n csúcsú, az éleket a $P(\overline{A}_{i_1}\overline{A}_{i_2}), 1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ valószínűségekkel súlyozó teljes gráf maximális súlyú feszítőfájának élei mentén találhatók. Ugyanakkor az így kapható felső korlátról könnyű belátni, hogy élesebb, mint az első két binomiális momentumot használó legjobb Bonferroni típusú felső korlát.

Ezt követően I. Tomescu ([41]) általánosította a Hunter–Worsley féle felső korlátot úgy, hogy páros h esetén az első $h + 1$ binomiális momentum váltakozó előjelű összegéből levonta, illetve páratlan h esetén az első $h + 1$ binomiális momentum váltakozó előjelű összegéhez hozzáadta egy speciális hipergráf struktúrának, az úgynevezett $(h + 2)$ -*hiperfa* (egy speciális $(h + 2)$ -uniform, azaz olyan hipergráf, mely minden éle $(h + 2)$ csúcsból áll) éleinek megfelelő szorzat események valószínűségeinek az összegét. Ezzel nyilvánvaló módon élesítette a Bonferroni-féle felső, illetve alsó korlátokat. Megjegyezzük, hogy $h = 0$ esetén a Tomescu féle felső korlát azonos a Hunter–Worsley féle felső korláttal. A Tomescu féle korlátok előnye, hogy alsó korlátok is vannak közöttük, sajnos azonban a legélesebb Tomescu féle korlátok meg-

határozásához a $(h + 2)$ –hiperfák körében kellene maximális súlyút keresni, amely feladat megoldására általánosan nem ismert hatékony algoritmus, csupán a $h = 0$ esetben tudjuk, hogy az megoldható mohó típusú algoritmusokkal.

Prékopa András, Vizvári Béla és Regős Gábor ([31]) abból a feltételezésből indultak ki, hogy egy valószínűségi mező tetszőleges $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ eseményére mind a $P(\bar{A}_i), i = 1, \dots, n$ egyedi, mind a $P(\bar{A}_{i_1} \bar{A}_{i_2}), \dots, P(\bar{A}_{i_1} \cdots \bar{A}_{i_h}), 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n$ szorzatesemény valószínűségek rendelkezésre állnak. Az ezen információ birtokában megfogalmazott lineáris egyenlőség–egyenlőtlenség rendszerhez lineáris célfüggvényeket hozzávéve és a keletkezett lineáris programozási feladatokra duálmegengedett megoldásokat szerkesztve az n esemény különféle Boole-függvényeire tudtak korlátokat megadni. Sajnos az így felírt lineáris programozási feladatok mérete túl nagy ahhoz, hogy az optimális megoldását, és így az adott információ birtokában lehetséges legélesebb korlát megtalálását 15 – 20-nál nagyobb n érték esetén egyáltalán remélni lehessen. Speciálisan az n esemény uniójának a valószínűségére azonban meg tudtak adni néhány egyszerű hipergráf struktúrát, melyekhez a lineáris programozási feladat egy-egy olyan duálmegengedett megoldását lehetett rendelni, hogy az a Hunter–Worsley korlátnál bizonyíthatóan jobb felső korlátot eredményezett.

Bukszár József ([7]) PhD értekezésében ugyancsak speciális, szemléletesen *cseresznyefának* elnevezett hipergráf struktúrát definiált, amely segítségével igen jó felső korlátot tudott adni n esemény uniójára. Később Bukszár József és Prékopa András ([8]) azt is megmutatták, hogy a cseresznyefák halmazában található olyan részhalmoz, amely elemeihez szintén tartozik az előbbi lineáris programozási feladat egy duálmegengedett megoldása. Ezeket a speciális cseresznyefákat *t-cseresznyefának* nevezték el, és arra javasolták felhasználni, hogy a hozzátartozó duálmegengedett megoldásból duálmegengedett bázismegoldást készítve, néhány duálszimplex iterációt végrehajtva még jobb felső korlátot nyerjenek. Mivel azonban ezeket az iterációkat is értelemszerűen a diszaggregált lineáris programozási feladaton kell végrehajtani, azért ez az eljárás sem alkalmazható 15–20-nál nagyobb n értékek esetén.

Szántai Tamás és Bukszár József a *hipercseresznyefa* fogalmának bevezetésével

általánosította a cseresznyefa fogalmát, és megmutatta, hogy míg a cseresznyefák segítségével a $h = 0$ -ra vett Tomescu-féle első felső korlátot lehetett csak élesíteni, addig ezen új gráfstruktúra alkalmas arra, hogy bármely $h > 0$ -ra vett Tomescu-féle, tehát akár alsó, akár felső korlát élesítését is megadja.

Legújabban további speciális gráfstruktúrákon, az úgynevezett merevkörű gráfokon alapuló korlátokat adtak meg Boros Endre és P. Veneziani ([5]), valamint K. Dohmen ([14]), melyekkel itt nem foglalkozunk. Megadjuk viszont a Bukszár József által kidolgozott (lásd [9] és [10]), hipermultifának nevezett gráfstruktúrán alapuló korlátok egy általános sémáját, mivel a korlátoktól való eltérések szimulációs kiértékelésének a módszerét ezekre a legjobb korlátokra fogjuk a továbbiakban részletesen is bemutatni.

A hipermultifa gráfstruktúrán alapuló valószínűségi korlátoknak egy elég általános sémája tehát a következő:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) &\leq \sum_{k=1}^{h+1} (-1)^{k-1} \overline{S}_k \\
&- \sum_{(i_1, \dots, i_{h+2}) \in_h \overline{\mathcal{E}}_2} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_{h+2}}) \\
&+ \sum_{(i_1, \dots, i_{h+3}) \in_h \overline{\mathcal{E}}_3} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_{h+2}} \overline{A}_{i_{h+3}}) \\
&\vdots \\
&+ (-1)^m \sum_{(i_1, \dots, i_{h+m+1}) \in_h \overline{\mathcal{E}}_{m+1}} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_{h+2}} \cdots \overline{A}_{i_{h+m+1}}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol h páros és

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) &\geq \sum_{k=1}^{h+1} (-1)^{k-1} \overline{S}_k \\
&+ \sum_{(i_1, \dots, i_{h+2}) \in {}_h\mathcal{E}_2} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_{h+2}}) \\
&- \sum_{(i_1, \dots, i_{h+3}) \in {}_h\mathcal{E}_3} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_{h+2}} \overline{A}_{i_{h+3}}) \\
&\vdots \\
&+ (-1)^{m+1} \sum_{(i_1, \dots, i_{h+m+1}) \in {}_h\mathcal{E}_{m+1}} P(\overline{A}_{i_1} \cdots \overline{A}_{i_{h+2}} \cdots \overline{A}_{i_{h+m+1}}),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ahol h páratlan.

Ezeket a korlátokat (h, m) –hipermultifa korlátoknak fogjuk nevezni. Könnyen látható, hogy a (h, m) –hipermultifa korlátok között a legtöbb korábbi korlát speciális esetként megtalálható:

- $h \geq 0, m = 0$: Bonferroni korlátok,
- $h \geq 0, m = 1$: Tomescu korlátok,
- $h = 0, m = 1$: Hunter–Worsley korlát (egy speciális Tomescu korlát),
- $h = 0, m = 2$: Bukszár és Prékopa cseresznyefa korlátja,
- $h = 0, m \geq 3$: Bukszár–féle multifa korlátok,
- $h = 1, m = 1$: Tomescu egy fontos speciális hiperfa korlátja,
- $h = 1, m = 2$: Bukszár és Szántai hipercseresznyefa korlátja,
- $h = 1, m \geq 3$: Bukszár–féle hipermultifa korlátok.

Az nyilvánvaló, hogy a h paraméter értékét célszerű a lehető legkisebbnek választani, hiszen a $h+1$ –edik szintig minden binomiális momentumot ismerni kell és elég nagy n értékre ezek kiszámítása önmagában igen időigényes feladatot jelent. Ezért a továbbiakban csak a $h=0$ és $h=1$ paraméterekkel leírt hipermultifa korlátokat fogjuk használni.

A $h=0$ értéknek megfelelő speciális felső korlát a következő:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) &\leq \overline{S}_1 \\
&- \sum_{(i_1, i_2) \in {}_0\overline{\mathcal{E}}_2} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2}) \\
&+ \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in {}_0\overline{\mathcal{E}}_3} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \overline{A}_{i_3}) \\
&\vdots \\
&+ (-1)^m \sum_{(i_1, \dots, i_{m+1}) \in {}_0\overline{\mathcal{E}}_{m+1}} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \cdots \overline{A}_{i_{m+1}}) = {}_0U_m.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

A $h=1$ értéknek megfelelő speciális alsó korlát pedig a következő:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) &\geq \overline{S}_1 - \overline{S}_2 \\
&+ \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in {}_1\underline{\mathcal{E}}_2} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \overline{A}_{i_3}) \\
&- \sum_{(i_1, \dots, i_4) \in {}_1\underline{\mathcal{E}}_3} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \overline{A}_{i_3} \overline{A}_{i_4}) \\
&\vdots \\
&+ (-1)^m \sum_{(i_1, \dots, i_{m+2}) \in {}_1\underline{\mathcal{E}}_{m+1}} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \overline{A}_{i_3} \cdots \overline{A}_{i_{m+2}}) = {}_1L_m.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

A hipermultifa gráfstruktúrát leíró ${}_h\overline{\mathcal{E}}_m$ és ${}_h\underline{\mathcal{E}}_m$ halmazokat a hipercseresznyefák hiperéleinek és hipercseresznyéinek választásához hasonló heurisztikával lehet megkapni, erről bővebb leírást Bukszár József ([9] és [10]) dolgozataiban lehet találni. Ugyanezekben a dolgozatokban található a $h=0$ és $h=1$ paraméterekkel leírt hipermultifa korlátok egy további praktikus átalakítása, melyek az $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n$ események ellentettjeire is azaz az A_1, \dots, A_n eseményekre vonatkozó valószínűségek felhasználásával jelentősen csökkentik a korlátok kiszámítási idejét.

A $h=0$ értéknek megfelelő (2.6) felső korlát ezen átalakítása a következő:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) &\leq 1 - P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{m+1}}) \\
&+ \sum_{\{j_1, \dots, j_m, j_{m+1}\} \in \mathcal{M}} P(A_{j_1} \cdots A_{j_m} \overline{A}_{j_{m+1}}),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ahol $\{\{i_1, \dots, i_m\}, i_{m+1}\}$ a $(0, m)$ -hipermultifa rekurzív konstrukciójában az első m -multicseresznye, míg \mathcal{M} a $(0, m)$ -hipermultifa összes m -multicseresznyéjének a halmaza, kivéve az elsőt. Mivel az m -multifa $n - m$ számú m -multicseresznyéből áll, azért a felső korlát (2.8) képlettel történő számításához csupán $n - m$ darab $m+1$ esemény szorzatából összeálló esemény valószínűségét kell kiszámítani!

A $h=1$ értéknek megfelelő (2.7) alsó korlát átalakítása pedig a következő:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) &\geq 1 - P(A_{i_1} \cdots A_{i_{m+2}}) \\
&+ \sum_{k=2}^{n-m-1} \left[P(A_{i_1^{(k)}} \cdots A_{i_{m+1}^{(k)}} \overline{A}_{j^{(k)}}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\{\{j_1^{(k)}, \dots, j_m^{(k)}\}, j_{m+1}^{(k)}\} \in \mathcal{M}^{(k)}} P(A_{j_1^{(k)}} \cdots A_{j_m^{(k)}} \overline{A}_{j_{m+1}^{(k)}} \overline{A}_{j^{(k)}}) \right],
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ahol $\{i_1, \dots, i_{m+2}\}$ az $(1, m)$ -hipermultifa rekurzív konstrukciójában az első m -multicseresznye, j_k a k -adik lépésben bevonásra kerülő csúcsex indexe, $\{\{i_1^{(k)}, \dots, i_m^{(k)}\}, i_{m+1}^{(k)}\}$ a k -adik lépésben meglévő csúcsokból szerkesztett $(0, m)$ -hipermultifa első m -multicseresznyéje, míg $\mathcal{M}^{(k)}$ a k -adik lépésben meglévő csúcsokból szerkesztett $(0, m)$ -hipermultifa összes m -multicseresznyéjének a halmaza, kivéve az elsőt. Könnyű ellenőrizni, hogy ily módon az alsó korlát (2.9) képlettel történő számításához csupán $(n - m)(n - m - 1)/2$ darab $m + 2$ esemény szorzatából összeálló esemény valószínűségét kell kiszámítani!

Minden szimulációs eljárás alapja olyan valószínűségi változók megadása, melyek várható értéke megegyezik a becsülni kívánt valószínűséggel és amely valószínűségi változók felvett értékeit hatékonyan lehet szimulálni. Ezért először bebizonyítunk egy tételt, amelyben egyszerre több valószínűségi változót is bevezetve mindegyikről megmutatjuk, hogy a várható értéke megegyezik az $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n$ események összegének $P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n)$ valószínűségével.

2.2.1. Tétel: Tekintsük az alábbi valószínűségi változókat:

$$\nu_{CR} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu = 0 \\ 1, & \text{ha } \mu \geq 1 \end{cases}$$

$$\nu_{BOL_2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 2 \\ \frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2), & \text{ha } \mu \geq 3 \end{cases}$$

$$\nu_{BOU_1} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 1 \\ 1 - \mu, & \text{ha } \mu \geq 2 \end{cases}$$

$$\nu_{BML_2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 1 \\ \frac{1}{i^*(i^* + 1)}(\mu - i^*)(\mu - i^* - 1), & \text{ha } \mu \geq 2 \end{cases}$$

$$\nu_{BMU_2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 1 \\ \frac{1}{n}(\mu - 1)(\mu - n), & \text{ha } \mu \geq 2 \end{cases}$$

$$\nu_{BML_3} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu = 0 \\ \frac{1}{j^*(j^* + 1)n}(n - \mu)(\mu - j^*)(\mu - j^* - 1), & \text{ha } \mu \geq 1 \end{cases}$$

$$\nu_{BMU_3} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 1 \\ \frac{1}{k^*(k^* + 1)}(1 - \mu)(\mu - k^*)(\mu - k^* - 1), & \text{ha } \mu \geq 2 \end{cases}$$

$${}_0\nu_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 1 \\ 1 - \mu + {}_0\tau_2 - \dots + (-1)^{m+1}{}_0\tau_{m+1}, & \text{ha } \mu \geq 2 \end{cases}$$

$${}_1\nu_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \leq 2 \\ 1/2(\mu - 1)(\mu - 2) - {}_1\tau_2 + \dots + (-1)^m{}_1\tau_{m+1}, & \text{ha } \mu \geq 3 \end{cases}$$

és a $P(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i)$ valószínűségekre vonatkozóan a (2.6) és (2.7) képletekkel már bevezetett

${}_0U_m$ és ${}_1L_m$ felső és alsó korlátokat, valamint az alábbi ismert korlátokat:

$$P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \geq \bar{S}_1 - \bar{S}_2 = BOL_2,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \leq \bar{S}_1 = BOU_1,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \geq \frac{2}{i^* + 1} \bar{S}_1 - \frac{2}{i^*(i^* + 1)} \bar{S}_2 = BML_2,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \leq \bar{S}_1 - \frac{2}{n} \bar{S}_2 = BMU_2,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \geq \frac{j^* + 2n - 1}{(j^* + 1)n} \bar{S}_1 - \frac{2(2j^* + n - 2)}{j^*(j^* + 1)n} \bar{S}_2 + \frac{6}{j^*(j^* + 1)n} \bar{S}_3 = BML_3,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \leq \bar{S}_1 - \frac{2(2k^* - 1)}{k^*(k^* + 1)} \bar{S}_2 + \frac{6}{k^*(k^* + 1)} \bar{S}_3 = BMU_3,$$

A fenti képletekben mindenütt

$$\begin{aligned} i^* &= 1 + \left\lfloor \frac{2S_2}{S_1} \right\rfloor \\ j^* &= 1 + \left\lfloor \frac{-6S_3 + 2(n-2)S_2}{-2S_2 + (n-1)S_1} \right\rfloor \\ k^* &= 2 + \left\lfloor \frac{3S_3}{S_2} \right\rfloor \end{aligned}$$

és a μ valószínűségi változó az $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ események közül egy véletlen kísérletben bekövetkezők száma, a ${}_0\tau_2, \dots, {}_0\tau_{m+1}$ valószínűségi változók rendre a (2.6) képlettel definiált ${}_0U_m$ hipermultifa felső korlát ${}_0\bar{\mathcal{E}}_2, \dots, {}_0\bar{\mathcal{E}}_{m+1}$ hiperél halmazai egyes elemeinek megfelelő szorzat események közül egy véletlen kísérletben bekövetkezők száma, ${}_1\tau_2, \dots, {}_1\tau_{m+1}$ valószínűségi változók pedig rendre a (2.7) képlettel definiált ${}_1L_m$ hipermultifa alsó korlát ${}_1\underline{\mathcal{E}}_2, \dots, {}_1\underline{\mathcal{E}}_{m+1}$ hiperél halmazai egyes elemeinek megfelelő szorzat események közül egy véletlen kísérletben bekövetkezők száma. Ekkor az alábbi

valószínűségi változók mindegyikének $P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n)$ a várható értéke:

$$\nu_{CR}$$

$$\nu_{BOL_2} + BOL_2$$

$$\nu_{BOU_1} + BOU_1$$

$$\nu_{BML_2} + BML_2$$

$$\nu_{BMU_2} + BMU_2$$

$$\nu_{BML_3} + BML_3$$

$$\nu_{BMU_3} + BMU_3$$

$${}_1\nu_m + {}_1L_m$$

$${}_0\nu_m + {}_0U_m$$

Bizonyítás: A ν_{CR} valószínűségi változó definíciójából nyilvánvaló, hogy az valójában az $\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n$ esemény karakterisztikus valószínűségi változója, azaz

$$\nu_{CR} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n \text{ bekövetkezik,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezért ha P jelöli a $P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n)$ valószínűséget, akkor $E(\nu_{CR}) = 1 \cdot P + 0 \cdot (1 - P) = P$, amint azt állítottuk.

A $\nu_{BOL_2} + BOL_2$ és $\nu_{BOU_1} + BOU_1$ valószínűségi változókra vonatkozó állítás bizonyítása a

$$BOL_2 = \overline{S}_1 - \overline{S}_2 \leq P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) \leq \overline{S}_1 = BOU_1$$

legegyszerűbb Bonferroni alsó, illetve felső korláton alapul. Mivel a szita formula szerint

$$P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n) = \overline{S}_1 - \overline{S}_2 + \dots + (-1)^{n+1} \overline{S}_n,$$

azért ha ismét P jelöli a $P(\overline{A}_1 + \dots + \overline{A}_n)$ valószínűséget, akkor

$$P - BOL_2 = \overline{S}_3 - \dots + (-1)^{n+1} \overline{S}_n,$$

$$P - BOU_1 = -\overline{S}_2 + \dots + (-1)^{n+1} \overline{S}_n.$$

Mivel a tételben bevezetett μ valószínűségi változó binomiális momentumai $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_n$, vagyis

$$E\left[\binom{\mu}{k}\right] = \overline{S}_k, k = 1, \dots, n$$

(lásd pl. [30], 182. oldal, (6.2.1) képlet), azért a

$$\nu_{BOL_2} = \binom{\mu}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{\mu}{n}$$

és

$$\nu_{BOU_1} = -\binom{\mu}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \binom{\mu}{n}$$

valószínűségi változókkal nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$E(\nu_{BOL_2} + BOL_2) = P$$

és

$$E(\nu_{BOU_1} + BOU_1) = P.$$

A ν_{BOL_2} és ν_{BOU_1} valószínűségi változók tételben megadott alakjai a fent megadottakból egyszerű algebrai átalakítással adódnak, ha figyelembe vesszük, hogy a binomiális momentumok váltakozó előjelű összege nulla, illetve, hogy $\binom{\mu}{k} = 0$, ha $\mu < k$.

A $\nu_{BML_2} + BML_2$ és $\nu_{BMU_2} + BMU_2$ valószínűségi változókra vonatkozó állítás bizonyítása a

$$BML_2 = \frac{2}{i^* + 1} \overline{S}_1 - \frac{2}{i^*(i^* + 1)} \overline{S}_2 \leq P\left(\sum_{i=1}^n \overline{A}_i\right) \leq \overline{S}_1 - \frac{2}{n} \overline{S}_2 = BMU_2$$

másodrendű binomiális momentum alsó, illetve felső korláton alapul. Ismét a szita formulát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$P - BML_2 = \overline{S}_1 - \overline{S}_2 + \dots + (-1)^{n-1} \overline{S}_n - \frac{2}{i^* + 1} \overline{S}_1 + \frac{2}{i^*(i^* + 1)} \overline{S}_2,$$

$$P - BMU_2 = -\overline{S}_2 + \dots + (-1)^{n-1} \overline{S}_n + \frac{2}{n} \overline{S}_2.$$

Ezért a

$$\nu_{BML_2} = \binom{\mu}{1} - \binom{\mu}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{\mu}{n} - \frac{2}{i^* + 1} \binom{\mu}{1} + \frac{2}{i^*(i^* + 1)} \binom{\mu}{2}$$

és

$$\nu_{BMU_2} = -\binom{\mu}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{\mu}{n} + \frac{2}{n}\binom{\mu}{2}$$

valószínűségi változókkal nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$E(\nu_{BML_2} + BML_2) = P$$

és

$$E(\nu_{BMU_2} + BMU_2) = P.$$

A ν_{BML_2} és ν_{BMU_2} valószínűségi változók tételben megadott alakjai a fent megadottakból ismét egyszerű algebrai átalakítással adódnak.

A $\nu_{BML_3} + BML_3$ és $\nu_{BMU_3} + BMU_3$ valószínűségi változókra vonatkozó állítás bizonyítása a

$$\begin{aligned} BML_3 &= \frac{j^* + 2n - 1}{(j^* + 1)n} \bar{S}_1 - \frac{2(2j^* + n - 2)}{j^*(j^* + 1)n} \bar{S}_2 + \frac{6}{j^*(j^* + 1)n} \bar{S}_3 \\ &\leq P\left(\sum_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \\ &\leq \bar{S}_1 - \frac{2(2k^* - 1)}{k^*(k^* + 1)} \bar{S}_2 + \frac{6}{k^*(k^* + 1)} \bar{S}_3 = BMU_3 \end{aligned}$$

harmadrendű binomiális momentum alsó, illetve felső korláton alapul. A szita formulát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P - BML_3 &= \bar{S}_1 - \bar{S}_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \bar{S}_n \\ &\quad - \frac{j^* + 2n - 1}{(j^* + 1)n} \bar{S}_1 + \frac{2(2j^* + n - 2)}{j^*(j^* + 1)n} \bar{S}_2 - \frac{6}{j^*(j^* + 1)n} \bar{S}_3, \\ P - BMU_3 &= -\bar{S}_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \bar{S}_n \\ &\quad + \frac{2(2k^* - 1)}{k^*(k^* + 1)} \bar{S}_2 - \frac{6}{k^*(k^* + 1)} \bar{S}_3. \end{aligned}$$

Ezért a

$$\begin{aligned} \nu_{BML_3} &= \binom{\mu}{1} - \binom{\mu}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{\mu}{n} \\ &\quad - \frac{j^* + 2n - 1}{(j^* + 1)n} \binom{\mu}{1} + \frac{2(2j^* + n - 2)}{j^*(j^* + 1)n} \binom{\mu}{2} - \frac{6}{j^*(j^* + 1)n} \binom{\mu}{3} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \nu_{BMU_3} = & -\binom{\mu}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{\mu}{n} \\ & + \frac{2(2k^* - 1)}{k^*(k^* + 1)} \binom{\mu}{2} - \frac{6}{k^*(k^* + 1)} \binom{\mu}{3} \end{aligned}$$

valószínűségi változókkal nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$E(\nu_{BML_3} + BML_3) = P$$

és

$$E(\nu_{BMU_3} + BMU_3) = P.$$

A ν_{BML_3} és ν_{BMU_3} valószínűségi változók tételben megadott alakjai a fent megadottakból nem túl bonyolult algebrai átalakítással adódnak.

Az ${}_1\nu_m + {}_1L_m$ és ${}_0\nu_m + {}_0U_m$ valószínűségi változókra vonatkozó állítás bizonyítása a (2.7) képlettel definiált ${}_1L_m$ hipermultifa alsó és a (2.6) képlettel definiált ${}_0U_m$ hipermultifa felső korlátan alapul. A szita formula felhasználásával

$$\begin{aligned} P - {}_1L_m &= \sum_{k=3}^n (-1)^{k-1} \overline{S}_k \\ &- \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in {}_1\mathcal{E}_2} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \overline{A}_{i_3}) \\ &\vdots \\ &+ (-1)^{m+2} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{m+2}) \in {}_1\mathcal{E}_{m+1}} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \cdots \overline{A}_{i_{m+2}}). \\ P - {}_0U_m &= \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \overline{S}_k \\ &+ \sum_{(i_1, i_2) \in {}_0\mathcal{E}_2} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2}) \\ &\vdots \\ &+ (-1)^{m+1} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{m+1}) \in {}_0\mathcal{E}_{m+1}} P(\overline{A}_{i_1} \overline{A}_{i_2} \cdots \overline{A}_{i_{m+1}}). \end{aligned}$$

Ezért az

$${}_1\nu_m = \sum_{k=3}^n (-1)^{k-1} \binom{\mu}{k} - {}_1\tau_2 + \cdots + (-1)^{m+2} {}_1\tau_{m+1}$$

és

$${}_0\nu_m = \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \binom{\mu}{k} + {}_0\tau_2 - \cdots + (-1)^{m+1} {}_0\tau_{m+1}$$

valószínűségi változókkal nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$E({}_1\nu_m + {}_1L_m) = P$$

és

$$E({}_0\nu_m + {}_0U_m) = P.$$

Az ${}_1\nu_m$ és ${}_0\nu_m$ valószínűségi változók tételben megadott alakjai a fent megadottakból egyszerű algebrai átalakítással adódnak.

□

2.2.1. Megjegyzés: $A {}_0\nu_m, {}_1\nu_m$ valószínűségi változókat célszerűbb a (2.8) és a (2.9) képletek alkalmazásával megadni:

$$\begin{aligned} {}_0\nu_m &= \mathbf{1}_{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{m+1}}} \\ &- \sum_{\{\{j_1, \dots, j_m\}, j_{m+1}\} \in \mathcal{M}} \mathbf{1}_{A_{j_1} \cdots A_{j_m} \bar{A}_{j_{m+1}}}, \\ {}_1\nu_m &= \mathbf{1}_{A_{i_1} \cdots A_{i_{m+2}}} \\ &- \sum_{k=2}^{n-m-1} \left[\mathbf{1}_{A_{i_1^{(k)}} \cdots A_{i_{m+1}^{(k)}} \bar{A}_{j^{(k)}}} \right. \\ &- \left. \sum_{\{\{j_1^{(k)}, \dots, j_m^{(k)}\}, j_{m+1}^{(k)}\} \in \mathcal{M}^{(k)}} \mathbf{1}_{A_{j_1^{(k)}} \cdots A_{j_m^{(k)}} \bar{A}_{j_{m+1}^{(k)}} \bar{A}_{j^{(k)}}} \right], \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{1}_A$ egy tetszőleges A esemény karakterisztikus valószínűségi változója, azaz az értéke 1, ha A bekövetkezik és 0 különben. $A {}_0\nu_m$ és az ${}_1\nu_m$ valószínűségi változóknak ez az alakja a szimulációs számítások céljaira azért előnyösebb, mert csak $n-m$ -szer kell $m+1$, illetve $(n-m)(n-m-1)/2$ -szer kell $m+2$ tényezőjű szorzat esemény bekövetkezését ellenőrizni a szimulációs iterációk során.

2.2.2. Megjegyzés: A szimulációs kiértékelés során nyilván elég a ν_{CR} , ν_{BOL_2} , ν_{BOU_1} , ν_{BML_2} , ν_{BMU_2} , ν_{BML_3} , ν_{BMU_3} , ${}_1\nu_m$, ${}_0\nu_m$ valószínűségi változók várható értékeit becsülni, hiszen ezen becslésekhez a megfelelő alsó, illetve felső korlátokat hozzáadva nyerhetjük a $P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots + \bar{A}_n)$ valószínűség becslését. Célszerű továbbá

a ν_{BOL_2} helyett a $2\nu_{BOL_2}$, a ν_{BML_2} helyett az $i^*(i^* + 1)\nu_{BML_2}$, a ν_{BMU_2} helyett az $n\nu_{BMU_2}$, a ν_{BML_3} helyett a $j^*(j^* + 1)n\nu_{BML_3}$ és a ν_{BMU_3} helyett a $k^*(k^* + 1)\nu_{BMU_3}$ valószínűségi változók várható értékeit becsülni, mert az így kapott várható értékeket végül le lehet osztani a megfelelő konstans szorzóval és így a szimulációs iterációk során sok szorzási műveletet meg lehet takarítani.

2.2.3. Megjegyzés: A ν_{CR} , ν_{BOL_2} , ν_{BOU_1} , ν_{BML_2} , ν_{BMU_2} , ν_{BML_3} , ν_{BMU_3} , ${}_1\nu_m$, ${}_0\nu_m$ valószínűségi változók várható értékeinek a szimulációs becslését célszerű egyetlen szimulációs ciklusban, ugyanazoknak a szimulált véletlen vektoroknak a segítségével végrehajtani. Ekkor lehetőség nyílik a valószínűségi változók kereszt szorzatainak és így a kovariancia mátrixuk elemeinek a becslésére is. Ezeket használva, a Monte Carlo szimulációs irodalomban regresszió néven ismert módszerrel előállítható egy, az összes eddiginél kisebb szórású becslés. Készítsük el a P valószínűség kilenc különböző becsléséből a

$$\hat{P} = w_1\hat{P}_1 + \dots + w_9\hat{P}_9$$

végző becslést, ahol ha $w_1 + \dots + w_9 = 1$ teljesül, akkor \hat{P} szintén a keresett valószínűség torzítatlan becslése. A w_1, \dots, w_9 együtthatókat válasszuk úgy, hogy \hat{P} szórása minimális legyen. Jelölje

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & \dots & \hat{c}_{19} \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & \dots & \hat{c}_{29} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_{91} & \hat{c}_{92} & \dots & \hat{c}_{99} \end{pmatrix}.$$

a becslések becsült kovariancia mátrixát. Ezzel \hat{P} szórásnégyzete $\mathbf{w}^T \hat{C} \mathbf{w}$ lesz, ahol $\mathbf{w}^T = (w_1, \dots, w_9)$ és könnyen megoldható a legkisebb szórású végső becslés megkeresésére szolgáló Lagrange feladat:

$$\min \mathbf{w}^T \hat{C} \mathbf{w}$$

feltéve hogy

$$w_1 + \dots + w_9 = 1.$$

Mivel $\mathbf{w}^T \hat{C} \mathbf{w}$ gradiense egyenlő $2\mathbf{w}^T \hat{C}$ -vel, azért az ismeretlen w_1, \dots, w_9, λ értékek meghatározásához csak az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{11}w_1 + \dots + \hat{c}_{19}w_9 - \lambda &= 0, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \\ \hat{c}_{91}w_1 + \dots + \hat{c}_{99}w_9 - \lambda &= 0, \\ w_1 + \dots + w_9 &= 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Numerikus teszt számítások során bebizonyosodott, hogy elég a 2.2.1. tétel kilenc valószínűségi változója közül csak hármat használni egy szimulációs becslésben. Ez a három változó célszerűen a nyers Monte Carlo becslés valószínűségi változója és egy tetszés szerinti alsó, illetve felső korláttól való eltérést kifejező valószínűségi változó. Ekkor ugyanis jó eséllyel két egymással negatívan korrelált becslést is nyerhetünk (a felső korláttól való eltérést leíró valószínűségi változó negatívan korrelált lehet mind az alsó korláttól való eltérést leíró, mind a nyers Monte Carlo becslést eredményező valószínűségi változótól) és ez a végső becslés lényeges szóráscsökkenését eredményezheti. A regressziós eljárást azért sem célszerű az összes nyerhető becslésre alapozni, mert egyrészt feleslegesen sok időt kellene a szimulációs kiértékelésre fordítani, másrészt a megoldandó (2.10) lineáris egyenletrendszer könnyen rosszul kondicionálttá is válhat.

2.3. A centrális határeloszlás tétel alkalmazása

Látható, hogy a (2.1) eloszlásfüggvény számításához ismernünk kell az összes, a kezdő csúcsból a befejező csúcsba vezető utat. Ezek száma már közepes méretű projektek esetén is óriás lehet. Ha azonban ezek mégis rendelkezésre állnának, akkor Prékopa András és J. Long [32] dolgozatukban két olyan algoritmust is javasolnak, amelyek akár egymást követően alkalmazva is képesek a kritikusként szóba jöhető utak számát jelentősen csökkenteni. A két algoritmus azon a feltevésen alapul, hogy a tevékenységek ξ_1, \dots, ξ_n véletlen végrehajtási idejei mind alulról, mind felülről korlátosak. Ez a feltételezés könnyen elfogadható, hiszen a PERT modelle-

zés szakirodalmában leggyakrabban úgy tekintik, hogy a ξ_i valószínűségi változók $\xi_i = l_i + (u_i - l_i)\eta_i$, alakban állnak elő, ahol l_i és u_i ($l_i < u_i$) rendre az i -edik tevékenység végrehajtási idejének úgynevezett optimista és pesszimista becslései, melyeket az aktuálisan vizsgált projekt szakértőitől lehet bekérni; az η_i valószínűségi változók pedig a $(0, 1)$ intervallumon béta eloszlásúak, $i = 1, \dots, n$. Az l_i optimista és u_i pesszimista becsléseken túl a szakértőktől be szoktak kérni még egy, az i -edik tevékenység legvalószínűbb végrehajtási idejének tekintett m_i értéket is. Ennek a három becslésnek az ismeretében a ξ_i valószínűségi változó várható értékére és szórásnégyzetére általánosan elfogadott közelítés (lásd például A. Battersby [2], T.K. Littlefield és P.H. Randolph [25]) a következő:

$$E(\xi_i) = \frac{l_i + 4m_i + u_i}{6}, i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

$$\text{Var}(\xi_i) = \frac{(u_i - l_i)^2}{36}, i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

A tevékenységek végrehajtási idejére adott l_i optimista és u_i pesszimista becslések segítségével $L(P_i)$ alsó és $U(P_i)$ felső korlátokat adhatunk meg az egyes utak hosszaira is az alábbi módon:

$$L(P_i) = \sum_{k \in P_i} l_k, \quad U(P_i) = \sum_{k \in P_i} u_k, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Vezessük be ezen túl még a következő jelöléseket is:

$$L(P_i \setminus P_j) = \sum_{k \in P_i \setminus P_j} l_k, \quad U(P_i \setminus P_j) = \sum_{k \in P_i \setminus P_j} u_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, \quad i \neq j.$$

Ha egy adott P_i, P_j útpárra a hosszai között lehetséges legnagyobb különbség kisebb, vagy egyenlő, mint nulla, azaz ha $U(P_i \setminus P_j) \leq L(P_j \setminus P_i)$, akkor a P_i út nyilvánvalóan redundáns. Ahhoz, hogy az ilyen értelemben redundáns utak mindegyikét elimináljuk, $\binom{p}{2}$ páronkénti utak közti összehasonlítást kell végrehajtanunk, ha a kiinduló utak összes száma p . Ezzel szemben, ha előzetesen sorba rendezzük az utakat a hosszai felső korlátjai szerint növekvő sorrendben, és első lépésben elhagyjuk azokat az utakat, amelyek hosszának felső korlátja kisebb, mint az összes út között az úthosszakra található legnagyobb alsó korlát, akkor $O(p \ln p)$ idő alatt az

utak p száma a legtöbbször lényegesen, mondjuk p' -re csökkenthető és így második lépésben már csak ezzel a kisebb p' útszámmal kell a $\binom{p'}{2}$ számú páronkénti utak közti összehasonlítást végrehajtanunk. A fentiek értelmében tehát a következő két eliminációs algoritmus egymásutáni végrehajtását javasolja Prékopa András és J. Long:

1. Eliminációs algoritmus.

1. Lépés. Rendezzük az utakat úgy, hogy $U(P_1) \geq U(P_2) \geq \dots \geq U(P_p)$ teljesüljön.

2. Lépés. Keressük meg az $a = \max_{1 \leq i \leq p} L(P_i)$ értéket és a legkisebb olyan k indexet, amelyre $U(P_k) \leq a$. Elimináljuk az összes olyan P_j utat, amelyre $j \geq k$.

Legyen az 1. eliminációs algoritmus után megmaradó p' számú út 1-től p' -ig folytonosan számozva. Ekkor a következő második eliminációs algoritmust hajthajuk végre.

2. Eliminációs algoritmus.

0. Lépés. Legyen definíció szerint az összes $1, 2, \dots, p'$ index „jelöletlen”, legyen továbbá $i = l = 1$.

1. Lépés. Ha nincs jelöletlen $j > l$ index, menjünk az 5. lépésre, különben válasszuk ki a legkisebb jelöletlen $j > l$ indexet.

2. Lépés. Ha $L(P_i \setminus P_j) \geq U(P_j \setminus P_i)$, akkor jelöljük meg a j indexet, legyen $l = j$ és menjünk az 1. lépésre.

3. Lépés. Ha $L(P_j \setminus P_i) \geq U(P_i \setminus P_j)$, akkor jelöljük meg az i indexet, keressük meg a legkisebb jelöletlen $k > i$ indexet, legyen $i = l = k$ és menjünk az 1. lépésre.

4. Lépés. Legyen $l = j$ és menjünk az 1. lépésre.

5. Lépés. Ha nincs jelöletlen $k > i$ index, akkor STOP, egyetlen jelöletlen indexű út sem eliminálható már; különben keressük meg a legkisebb jelöletlen $k > i$ indexet, legyen $i = l = k$ és menjünk az 1. lépésre.

Ha a megmaradó utak mindegyike elég nagy számú élt tartalmaz (mondjuk legalább 10-et), akkor teljesen közömbös, hogy az egyes tevékenységek végrehajtási idejei transzformált beta, vagy bármi egyéb valószínűségeloszlásúak-e és a várható értékeik, szórásnégyzeteik a (2.11), (2.12) képletek szerint lettek-e számítva, vagy bármi más becsléssel adódtak, a többdimenziós normális eloszláshoz való konvergenciára vonatkozó centrális határeloszlás tétel (lásd pl. S.V. Fomin [17]) értelmében a megmaradó utak hosszainak az együttes valószínűségeloszlása többdimenziós normális eloszlás lesz, melyet egyértelműen meghatároznak az egyes tevékenységek hosszainak a várható értékei és szórásnégyzetei. Legyen q a két eliminációs algoritmus után is megmaradt utak száma és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ezek a P_1, \dots, P_q utak. A továbbiakban megmutatjuk, hogyan kaphatjuk meg az

$$(A_1\xi, \dots, A_q\xi)^T \quad (2.13)$$

valószínűségi vektorváltozó együttes normális eloszlásának a paramétereit. Ha ξ_1, \dots, ξ_n sztochasztikusan függetlenek, akkor az együttes normális eloszlás minden paraméterét megkaphatjuk a $\mu_i = E(\xi_i)$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n$ mennyiségekből. Ha azonban ξ_1, \dots, ξ_n sztochasztikusan összefüggnek, akkor ismernünk kell még a (ξ_1, \dots, ξ_n) valószínűségi vektorváltozó C kovariancia mátrixát is. Jelölje \tilde{A} az A mátrix első q sorából álló részmátrixot, akkor a (2.13) valószínűségi vektorváltozó mátrixosan úgy írható fel, mint $\tilde{A}\xi$. Ekkor a valószínűségyszámításból jól ismert módon $E(\tilde{A}\xi) = \tilde{A}\mu$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ és $\tilde{A}\xi$ kovarianciamátrixa egyenlő az $\tilde{A}C\tilde{A}^T$ mátrixszal. Mivel a P_i út hossza $A_i\xi$ -vel egyenlő, a (2.1) eloszlásfüggvény a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned} F(x) &= P\left(\max_{1 \leq i \leq q} A_i\xi \leq x\right) = P(A_1\xi \leq x, \dots, A_q\xi \leq x) \\ &= P\left(\frac{A_1\xi - A_1\mu}{\sqrt{A_1CA_1^T}} \leq \frac{x - A_1\mu}{\sqrt{A_1CA_1^T}}, \dots, \frac{A_q\xi - A_q\mu}{\sqrt{A_qCA_q^T}} \leq \frac{x - A_q\mu}{\sqrt{A_qCA_q^T}}\right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

ahol az

$$\frac{A_i \xi - A_i \mu}{\sqrt{A_i C A_i^T}}, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.15)$$

valószínűségi változók standard normális eloszlásúak és a korreláció mátrixuk könnyen megkapható a $\tilde{A} C \tilde{A}^T$ kovarianciamátrixukból. Ezzel az $R(\xi)$ kritikus úthossz (2.1) eloszlásfüggvényének numerikus közelítésére használhatóvá váltak a disszertációban eddig ismertetett korlátszámítási, illetve Monte Carlo szimulációs eljárások.

2.3.1. Észrevétel: Az \tilde{A} $0-1$ mátrixnak több oszlopa azonosan nulla lehet. Ezek az oszlopok $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ valószínűségi vektorváltozó olyan komponenseinek felelnek meg, amelyek semmilyen szerepet sem játszanak a kritikus úthossz valószínűségeloszlásának a kialakításában. Ezek az oszlopok és a megfelelő valószínűségi vektorváltozó komponensek törölhetők. A ξ valószínűségi vektorváltozó megmaradó komponenseinek a száma kevesebb is lehet, mint a megmaradt utak száma, így a (2.15) valószínűségi változók együttes normális eloszlása könnyen lehet szinguláris. Természetesen az együttes eloszlás szingularitását az \tilde{A} mátrix oszlopai között meglévő lineáris összefüggések is okozhatják. Ezért tehát a PERT modellek elemzésekor fontos szerep jut a ?? szakaszban tárgyalt módszereknek.

2.3.2. Észrevétel: Nagyobb méretű hurokmentes irányított gráfokban nincs arra lehetőség, hogy a kezdő csúcsból a befejező csúcsba vezető összes utat megkeressük. Erre nincs is szükség azonban, mert helyette elég a várható tevékenység végrehajtási időkkal tekintett hálózatban az első néhány száz, például 500 leghosszabb utat megkeresni. Erre léteznek hatékony algoritmusok (lásd például D. Eppstein [16] dolgozatát, illetve a D. Eppstein algoritmusát megvalósító V. Jimenez és A. Marzal által készített számítógépes programot, mely letölthető a <http://terra.act.uji.es/REA> internet címről is). A továbbiakban elég csak ezeket az utakat úgy tekinteni, mint a sztochasztikus körülmények között legvalószínűbben kritikus utakat. Ezekre az utakra alkalmazható a Prékopa András és J. Long által javasolt két eliminációs algoritmus, illetve akár ezek helyett, akár ezeket követően végrehajtható egy nem túl nagy (például 1000) mintaelemszámú szimuláció, mely mindegyik mintaelemére meghatározható a leghosszabb, azaz a kritikus út. A szimulációs kiértékelés során összeszámolhatjuk,

hogy mely utak bizonyulnak egyáltalán kritikusnak, és elég csak ezekre az utakra alkalmazni a többdimenziós (többször szinguláris) normális eloszlással való közelítést. Erre az eljárásra fogunk példát mutatni a következő, numerikus eredményeket leíró bekezdésben.

Az eddigiek numerikus szemléltetésére a következő módon állítottunk elő egy kellően nagyméretű tesztfeladatot. Véletlenszerűen generáltunk egy hurokmentes irányított gráfot, melyben a csúcsok száma 250, az élek száma 1000, úgy hogy az 1-es a kezdő és a 250-es a befejező csúcs. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a közbülső csúcsok számozása olyan, hogy egyetlen él sem vezet nagyobb sorszámú csúcsból kisebb sorszámúba. Ekkor a véletlenszerű generálás úgy is végrehajtható volt, hogy egy 250×250 méretű mátrix, a csúcs–csúcs incidencia mátrix felső háromszög részében véletlenszerűen helyeztünk el 1-eseket, a többi helyre pedig nulla értéket feltételeztünk. Egyszerűen realizálhatók voltak a következő szabályok is. Egyetlen irányított él vég- és kezdőcsúcsa között se legyen a különbség 150-nél nagyobb (csak a fődiagonális első 150 mellék diagonálisába helyezünk el véletlenszerűen 1-eseket), mindegyik irányított élhez tartozzon legalább két közvetlenül megelőző irányított él (minden oszlopban legyen legalább két 1-es a fődiagonális fölött, kivéve természetesen az első kettőt), mindegyik irányított élhez tartozzon legalább három közvetlenül következő irányított él (minden sorban legyen legalább három 1-es a fődiagonális fölött, kivéve természetesen az utolsó hármat). Feltettük, hogy a tevékenységek végrehajtási idejei, vagyis az élek hosszai beta eloszlású valószínűségi változók, melyekre a $(10, 200)$ intervallumban generáltunk optimista és pesszimista becsült értékeket. Pontosabban generáltunk két véletlen számot a megadott intervallumban és a kisebbiket tekintettük optimista, a nagyobbikat pedig pesszimista becslésnek. Ezt követően generáltunk az optimista és a pesszimista becslések között véletlenszerűen egy újabb értéket, amelyet a legvalószínűbb érték becslésének tekintettünk. Az i -edik tevékenység esetén ezeket az értékeket rendre l_i , u_i és m_i -vel jelöltük. Ezekből a tevékenység végrehajtási idejét reprezentáló transzformált beta eloszlású ξ_i valószínűségi változót a következőképpen állítottuk elő: $\xi_i = l_i + (u_i - l_i)\eta_i$, ahol η_i a $(0, 1)$ intervallumon beta eloszlású valószínűségi változó

p_i és q_i paraméterekkel, $i = 1, \dots, n$. A (2.11) és (2.12) szokásos feltételezéseket, és m_i jelentését figyelembevéve a következő három egyenletet kaptuk az eloszlás ismeretlen p_i és q_i paramétereire:

$$E(\xi_i) = l_i + (u_i - l_i) \frac{p_i}{p_i + q_i} = \frac{l_i + 4m_i + u_i}{6}, \quad (2.16)$$

$$\text{Var}(\xi_i) = (u_i - l_i)^2 \frac{p_i q_i}{(p_i + q_i)^2 (p_i + q_i + 1)} = \frac{(u_i - l_i)^2}{36}, \quad (2.17)$$

$$l_i + (u_i - l_i) \frac{p_i - 1}{p_i + q_i - 2} = m_i, \quad (2.18)$$

minden $i = 1, \dots, n$ értékre. Ezután tekintettük a (2.17), (2.18) egyenleteket, melyekből azt kaptuk, hogy a p_i paraméternek egy harmadfokú polinom gyökének kell lennie. Ennek a polinomnak a valós gyökei között mindig lehetett találni olyat, amelyik a (2.16) egyenletet is kellő pontossággal kielégítette. Ezzel mintegy igazoltuk a szakirodalomban szokásos (2.11) és (2.12) feltételezések létjogosultságát is.

Ilyen méretű feladatok esetén a kezdő csúcsból a befejező csúcsba vezető utak száma akkora, hogy nem létezik olyan algoritmus, illetve olyan gyors számítógép, amellyel ezek mind meghatározhatók lennének. Ezért csak az 500, várható értékére nézve leghosszabb utat kerestük meg és ezekre hajtottuk végre az 1. és 2. eliminációs algoritmust. Az 1. eliminációs algoritmus nem csökkentette az utak számát, az továbbra is 500 maradt, ezzel szemben a 2. eliminációs algoritmus 396-ra csökkentette a kritikusként számításba jöhető utak számát. Ez még mindig túl nagy volt azonban ahhoz, hogy a többdimenziós normális eloszlással való közelítés módszerét alkalmazni lehessen. Ezért először egy 1000 elemű mintát generáltunk a véletlen hálózatra, minden minta esetén meghatároztuk a megmaradt 396 út közül a leghosszabbat, mikoris azt tapasztaltuk, hogy csupán 54 olyan út volt köztük, amelyek legalább egyszer leghosszabnak bizonyult volna. Az ezekhez meghatározott többdimenziós normális eloszlás olyan mértékben volt szinguláris, hogy egy 13 dimenziós altérre koncentrált. Ezzel a többdimenziós normális eloszlással elvégeztük a 2.2. fejezetben ismertetett korlát számításokat, illetve szimulációs kiértékelést az eloszlásfüggvény 3410-től 4700-ig 10-esével táblázatosított argumentum értékeire (x értéke a (2.14) képletben). A 2.1. táblázat a kritikus úthossz eloszlásfüggvényére számított $BML3$, $HML(0,3)$, $HML(0,4)$ alsó, $HMU(1,3)$, $HMU(1,2)$, $BMU3$ felső korlát értékeket tartalmazza, a középső oszlopban pedig a pontos értéket, melyet a 2.2. fejezetben ismertetett szórás-csökkentés szimulációs kiértékeléssel nyertünk.

Az utolsó táblázatolt értéket követően megadtuk az egyes oszlopokban közölt eredmények számításához szükséges összes időt másodpercben (CPU), majd a következő két sorban a megfelelő korlát pár számtani közepének a pontos értéktől számított átlagos, illetve maximális abszolút eltérését (ÁAE, MAE) adtuk meg; végül pedig az utolsó két sorban a megfelelő korlát pár számtani közepének a pontos értéktől számított átlagos, illetve maximális relatív eltérése (ÁRE, MRE) található.

2.1. táblázat: A kritikus úthossz eloszlásfüggvényének többdimenziós normális eloszlással számított alsó, felső korlátai és pontos értékei

X	$BML3$	$HML(0, 3)$	$HML(0, 4)$	pontos	$HMU(1, 3)$	$HMU(1, 2)$	$BMU3$
3410	0,0000	0,0000	0,0000	0,0120	0,0250	0,0323	0,0975
3420	0,0000	0,0000	0,0000	0,0205	0,0404	0,0498	0,1281
3430	0,0000	0,0000	0,0000	0,0334	0,0631	0,0773	0,1649
3440	0,0000	0,0000	0,0000	0,0520	0,0884	0,1066	0,2080
3450	0,0000	0,0000	0,0139	0,0777	0,1153	0,1457	0,2570
3460	0,0000	0,0000	0,0470	0,1115	0,1548	0,1916	0,3114
3470	0,0000	0,0181	0,0945	0,1540	0,1994	0,2435	0,3699
3480	0,0000	0,0829	0,1402	0,2052	0,2455	0,2961	0,4314
3490	0,0000	0,1562	0,2029	0,2643	0,3011	0,3493	0,4942
3500	0,0000	0,2206	0,2722	0,3303	0,3635	0,4106	0,5565
3510	0,0000	0,3127	0,3511	0,4002	0,4313	0,4686	0,6170
3520	0,0000	0,3999	0,4303	0,4724	0,5091	0,5360	0,6743
3530	0,0000	0,4861	0,5097	0,5448	0,5764	0,5966	0,7273
3540	0,0000	0,5693	0,5854	0,6149	0,6405	0,6563	0,7750
3550	0,1555	0,6452	0,6577	0,6801	0,7006	0,7131	0,8173
3560	0,3486	0,7131	0,7218	0,7395	0,7572	0,7651	0,8538
3570	0,5066	0,7697	0,7785	0,7915	0,8044	0,8098	0,8848
3580	0,6330	0,8215	0,8277	0,8366	0,8490	0,8527	0,9105
3590	0,7322	0,8641	0,8682	0,8739	0,8829	0,8868	0,9315
3600	0,8080	0,8982	0,9009	0,9047	0,9119	0,9138	0,9484

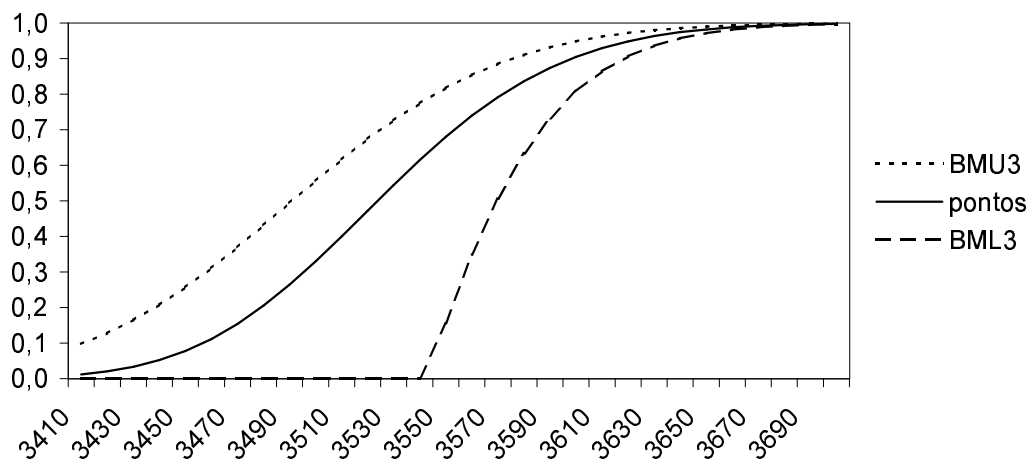
2.1. táblázat: (folytatás)

X	<i>BML3</i>	<i>HML</i> (0, 3)	<i>HML</i> (0, 4)	pontos	<i>HMU</i> (1, 3)	<i>HMU</i> (1, 2)	<i>BMU3</i>
3610	0,8646	0,9250	0,9268	0,9293	0,9342	0,9355	0,9617
3620	0,9061	0,9457	0,9469	0,9486	0,9517	0,9532	0,9719
3630	0,9358	0,9614	0,9622	0,9634	0,9651	0,9662	0,9798
3640	0,9568	0,9730	0,9735	0,9744	0,9751	0,9760	0,9856
3650	0,9714	0,9815	0,9819	0,9820	0,9828	0,9833	0,9900
3660	0,9814	0,9875	0,9877	0,9882	0,9883	0,9886	0,9930
3670	0,9880	0,9917	0,9918	0,9919	0,9922	0,9923	0,9953
3680	0,9924	0,9946	0,9946	0,9948	0,9948	0,9949	0,9969
3690	0,9952	0,9965	0,9965	0,9967	0,9966	0,9967	0,9979
3700	0,9971	0,9978	0,9978	0,9978	0,9979	0,9979	0,9986
CPU	1394,21	210,81	2312,56	591,77	0,00 ³	0,00 ³	0,00 ³
ÁAE	0,0540	0,0043	0,0034	-	-	-	-
MAE	0,2274	0,0231	0,0131	-	-	-	-
ÁRE	0,1884	0,0389	0,0252	-	-	-	-
MRE	0,7538	0,2572	0,1691	-	-	-	-

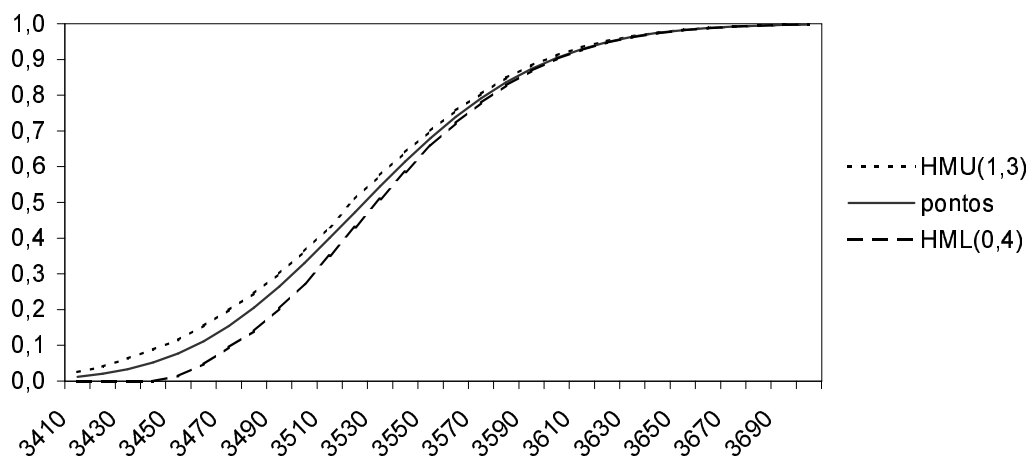
A 2.1 és 2.2. ábrák a binomiális momentum korlátokat, illetve a hipermultifa korlátokat ábrázolják grafikusan. Mindkét grafikonon a pontos értékeket is feltüntettük.

A 2.1. táblázat adataiból, illetve a 2.1 és 2.2. ábrákból látható, hogy a harmadrendű binomiális momentumokkal számított korlátok nem elég pontosak. A hipermultifa korlátok lényegesen jobbák, azonban az eloszlásfüggvény nullához közeli értékeire még a $HML(0,4)$ – $HMU(1,3)$ korlát pár sem tekinthető kielégítően pontosnak, bár az alsó és felső korlátok számtani közepe már akár el is lenne fogadható végső közelítésnek. Ezzel szemben a táblázatban és az ábrákon „pontos”-nak

³Az alsó és felső korlátok egyidejűleg lettek kiszámítva



2.1. ábra. Az eloszlásfüggvény binomiális momentumokkal készített alsó és felső korlát görbéje, együtt a pontos értékek görbéjével



2.2. ábra. Az eloszlásfüggvény hipermultifákkal készített alsó és felső korlát görbéje, együtt a pontos értékek görbéjével

minősített szimulációs közelítés kevesebb idő alatt volt számítható, mint az előbb említett korlátpárok bármelyike. Ez igazolja a szóráscsökkentés szimulációs eljárás alkalmazását ilyen feladatok megoldására.

Annak ellenőrzésére, hogy mennyire pontos az eloszlásfüggvények szóráscsökkentés szimulációs kiértékelése, egy másik szimulációs kiértékelést is elvégeztünk. Ezt a továbbiakban direkt szimulációs kiértékelésnek fogjuk nevezni és a következőképpen hajtottuk végre. N elemű véletlen mintát állítottunk elő az elimináció után megmaradt 396 útban előforduló összes tevékenység beta eloszlású végrehajtási idejére és minden mintaelemre meghatároztuk a 396 úthossz legnagyobbikát. A kritikus úthosszra így egy N elemű mintát nyertünk, amelyből a statisztikában szokásos eljárással előállítottuk a kritikus úthossz tapasztalati eloszlásfüggvényét. Ezeknek a számításoknak az eredményei találhatók a 2.2. táblázatban két különböző ($N = 1000$ és $N = 10000$) mintaméret mellett. A táblázat utolsó oszlopában ismét feltüntettük a „pontos” értékeket, illetve a táblázat alján a számítási időket és a pontos értéktől számított különböző eltérés értékeket is megadtuk. A 2.3 és 2.4. ábrák értelemszerűen a 2.2. táblázat adatait jelenítik meg grafikusan. Az a tény, hogy az $N = 10000$ -es mintaméret melletti eredmények igen jó egyezést mutatnak a „pontos” értékekkel, a többdimenziós normális eloszlással való közelítés létjogosultságát bizonyítja.

2.2. táblázat: Szimulált és pontos eloszlásfüggvény értékek

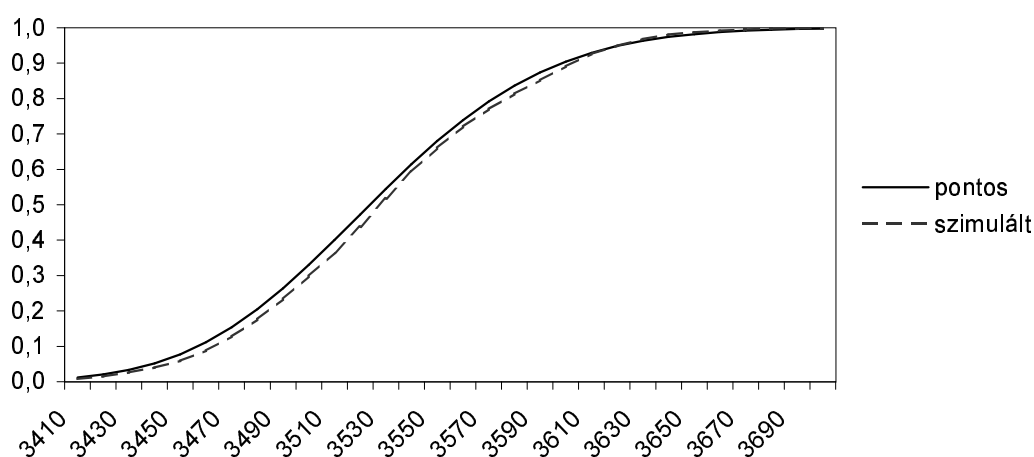
X	Szimulált (N=1000)	Szimulált (N=10000)	Pontos
3410	0,0080	0,0112	0,0120
3420	0,0155	0,0191	0,0205
3430	0,0260	0,0313	0,0334
3440	0,0395	0,0490	0,0520
3450	0,0590	0,0724	0,0777
3460	0,0880	0,1034	0,1115
3470	0,1275	0,1436	0,1540

2.2. táblázat: (folytatás)

X	Szimulált (N=1000)	Szimulált (N=10000)	Pontos
3480	0,1760	0,1932	0,2052
3490	0,2335	0,2530	0,2643
3500	0,2985	0,3178	0,3303
3510	0,3645	0,3863	0,4002
3520	0,4380	0,4588	0,4724
3530	0,5175	0,5315	0,5448
3540	0,5930	0,6040	0,6149
3550	0,6605	0,6710	0,6801
3560	0,7205	0,7322	0,7395
3570	0,7705	0,7849	0,7915
3580	0,8130	0,8284	0,8366
3590	0,8520	0,8657	0,8739
3600	0,8910	0,8981	0,9047
3610	0,9260	0,9260	0,9293
3620	0,9490	0,9480	0,9486
3630	0,9680	0,9644	0,9634
3640	0,9805	0,9755	0,9744
3650	0,9875	0,9839	0,9820
3660	0,9920	0,9896	0,9882
3670	0,9950	0,9932	0,9919
3680	0,9975	0,9956	0,9948
3690	0,9985	0,9973	0,9967
3700	0,9990	0,9986	0,9978
CPU	88,11	932,48	591,77
ÁAE	0,0153	0,0059	-

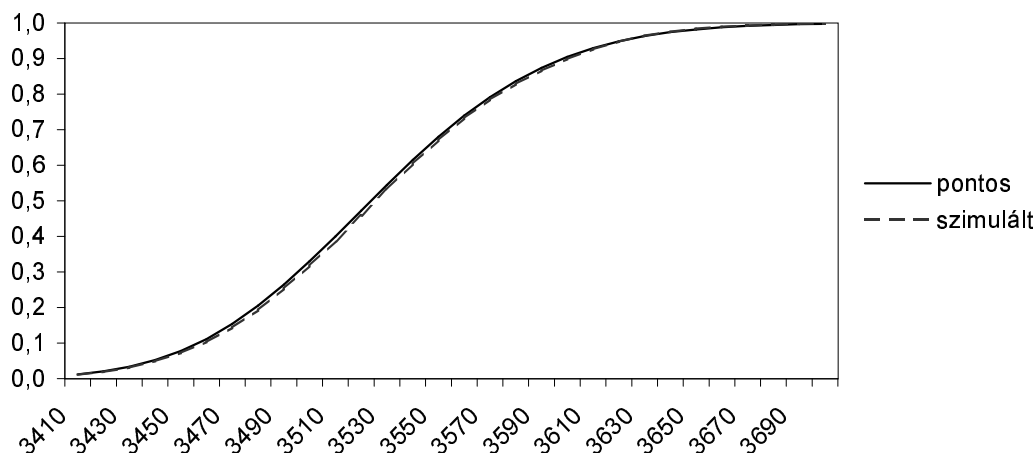
2.2. táblázat: (folytatás)

X	Szimulált (N=1000)	Szimulált (N=10000)	Pontos
MAE	0,0357	0,0139	-
ÁRE	0,0816	0,0263	-
MRE	0,3336	0,0731	-



2.3. ábra. A szimulált és a pontos eloszlásfüggvény görbék, mintaméret = 1000

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen egyéb stratégiákat lehet alkalmazni a két eliminációs eljárás alkalmazása után megmaradó utak számának csökkentésére. Emlékeztetünk arra, hogy a véletlenszerűen előállított teszt feladatunkban 396 út maradt meg az eliminációk után, melyek számát úgy csökkentettük 54-re, hogy generáltunk egy 1000 elemű mintát a véletlen hálózatra, és csak azokat az utakat tartottuk meg a 396-ból, amelyek az 1000 eset közül legalább egyszer leghosszabbnak bizonyultak. A következő stratégiák során csak 100 elemű minta alapján döntöttünk. Ekkor, ha azokat az utakat tartottuk meg, amelyek legalább egyszer leghosszabbnak bizonyultak, 37 út maradt meg; ha azokat az utakat tartottuk meg, amelyek legalább kétszer leghosszabbnak bizonyultak, 22 út maradt meg és végül, ha azokat az utakat tartottuk meg, amelyek legalább ötször bizonyultak



2.4. ábra. A szimulált és a pontos eloszlásfüggvény görbék, mintaméret = 10000

leghosszabbnak, akkor már csak 8 út maradt meg. Ezek mindegyikére alkalmaztuk a többdimenziós normális eloszlással való közelítést és azt tapasztaltuk, hogy egyedül az utolsó esetben kaptunk elfogadhatatlanul pontatlan végső becsléseket az eloszlásfüggvény értékeire. A többdimenziós normális eloszlás minden esetben degenerált volt, a 2.3. táblázatban fejlécként a megmaradt utak számát és perjellel elválasztva tőle azt a dimenziószámot adtuk meg, ahány dimenziós altérre koncentrált az eloszlás. Az utolsó táblázatot követően ismét megadtuk az egyes oszlopokban közölt eredmények számításához szükséges összes időt másodpercben (CPU). A következő két sorban a megfelelő közelítésnek a pontos értéknek tekintett 54/13-as közelítéstől számított átlagos, illetve maximális abszolút eltérését (ÁAE, MAE) adtuk meg; végül pedig az utolsó két sorban az ugyanezekre a mennyiségekre számított átlagos, illetve maximális relatív eltérés (ÁRE, MRE) található. Itt jegyezzük meg, hogy a 10 dimenziós altérre koncentrált 22 dimenziós normális eloszlás már elég jó közelítést eredményezett és erre az esetre alkalmazni lehetett azt a legújabb kidolgozott, igen hatékony számítási módszert, amely során az elfajuló normális eloszlás eloszlásfüggvény értékének a számítását visszavezetjük egy alacsonyabb dimenziós térbeli, el nem fajuló normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó konvex poliéderbe való esése valószínűségének a számítására (lásd [37]).

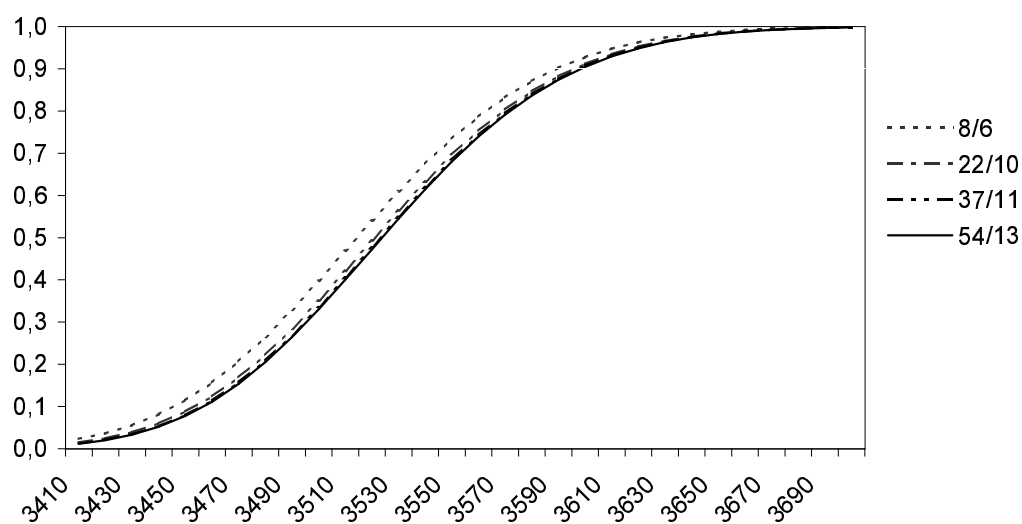
2.3. táblázat: Eloszlásfüggvény értékek különböző útredukciók alkalmazásával

X	54/13	37/11	22/10	8/6
3410	0,0120	0,0125	0,0148	0,0233
3420	0,0205	0,0213	0,0247	0,0368
3430	0,0334	0,0346	0,0393	0,0558
3440	0,0520	0,0536	0,0600	0,0817
3450	0,0777	0,0799	0,0881	0,1152
3460	0,1115	0,1143	0,1245	0,1571
3470	0,1540	0,1574	0,1694	0,2071
3480	0,2052	0,2091	0,2226	0,2649
3490	0,2643	0,2687	0,2836	0,3291
3500	0,3303	0,3347	0,3503	0,3978
3510	0,4002	0,4053	0,4209	0,4690
3520	0,4724	0,4777	0,4931	0,5403
3530	0,5448	0,5500	0,5642	0,6096
3540	0,6149	0,6194	0,6327	0,6748
3550	0,6801	0,6846	0,6964	0,7342
3560	0,7395	0,7434	0,7535	0,7869
3570	0,7915	0,7950	0,8035	0,8325
3580	0,8366	0,8402	0,8469	0,8711
3590	0,8739	0,8761	0,8825	0,9026
3600	0,9047	0,9076	0,9114	0,9276
3610	0,9293	0,9311	0,9345	0,9475
3620	0,9486	0,9499	0,9528	0,9626
3630	0,9634	0,9643	0,9658	0,9737
3640	0,9744	0,9752	0,9764	0,9820
3650	0,9820	0,9828	0,9840	0,9878
3660	0,9882	0,9887	0,9890	0,9920

2.3. táblázat: (folytatás)

X	54/13	37/11	22/10	8/6
3670	0,9919	0,9923	0,9926	0,9948
3680	0,9948	0,9950	0,9952	0,9968
3690	0,9967	0,9967	0,9969	0,9979
3700	0,9978	0,9981	0,9981	0,9987
CPU	591,77	254,51	110,12	13,24
ÁAE	-	0,0024	0,0094	0,0321
MAE	-	0,0053	0,0207	0,0688
ÁRE	-	0,0113	0,0472	0,1324
MRE	-	0,0415	0,1878	0,4846

A 2.5. ábra a 2.3. táblázat eredményeit mutatja grafikus formában.



2.5. ábra. Az útredukciós eljárásokat összehasonlító grafikon

Végül két megjegyzéssel zárjuk a disszertációnak ezt a szakaszát.

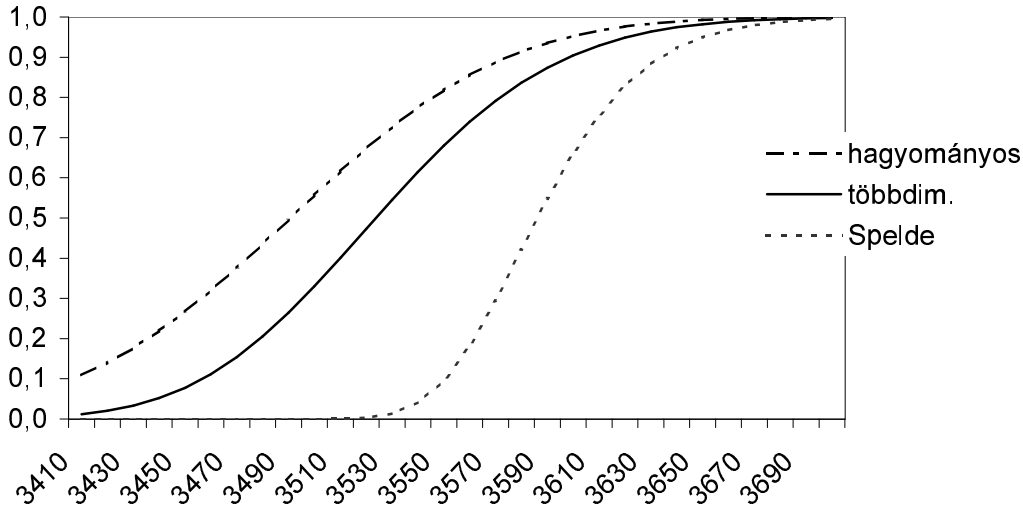
2.3.4. Megjegyzés: A 2.2. táblázat és a megfelelő 2.3 és 2.4. ábrák azt mutatják, hogy a kritikus úthossz eloszlásfüggvényének számítására a direkt szimulációs kiér-

tékeléssel nagyjából ugyanakkora idő alatt ugyanolyan jó eredmény érhető el, mint a többdimenziós normális eloszlással történő közelítéssel. A két számítási mód között azonban az a két lényeges különbség van, hogy míg direkt szimulációval az eloszlásfüggvény teljes görbáját egyszerre tudjuk csak előállítani, nem számíthatók az egyes függvényértékek külön-külön, addig ez utóbbi semmi gondot nem okoz a többdimenziós normális eloszlással történő közelítés esetén, illetve a többdimenziós normális eloszlással történő közelítés arra is alkalmas, hogy az eloszlásfüggvény gradiensét számítani tudjuk, ahol az létezik.

2.3.5. Megjegyzés: A többdimenziós normális eloszlással való közelítést K.O. Anklesaria és Z. Drezner javasolták először (lásd [1]), azonban Z. Drezner többdimenziós normális valószínűségeket számító numerikus integrálási eljárása 5 dimenziónál magasabb dimenzióra nem volt alkalmas, így a néhány tesztfeladat megoldása során nem realizálták, hogy az együttes eloszlás könnyen lehet szinguláris. A hagyományos PERT modellezésben csak a várható értékre leghosszabb út alapján (tehát csak egydimenziós normális eloszlással) készítették el a projekt végrehajtási idejének az eloszlásfüggvényét, ami meglehetősen durva felső becslésnek bizonyult csupán. Egy másik szokásos eljárást Spelde féle alsó korlát néven ismer a szakirodalom (lásd H.G. Spelde [36]), ez a várható értékre nézve leghosszabb utak közül egyszerre többet ajánl figyelembe venni, azonban ezeket az utakat sztochasztikusn függetleneknek tekinti, miáltal valóban csak (igen gyakran durva) alsó becslés nyerhető. A PERT modellezés témakörének egy jó áttekintő dolgozatát R. Möhring és munkatársai publikálták 1999-ben (lásd [6]). A 2.6. ábra grafikonján megmutatjuk, hogy a korábban látott, véletlenszerűen generált nagyméretű feladatunk esetén a hagyományos PERT modellezés felső becslése, illetve Spelde alsó becslése mennyire nem kielégítő közelítést eredményez.

2.4. Sztochasztikus programozási megközelítés

A PERT modellezés előző szakaszban vizsgált módszereinek az a legnagyobb hátránya, hogy a projekt végrehajtási idejére meghatározott valószínűségi eloszlásfüggvény csak azzal a feltételezéssel érvényes, hogy minden egyes véletlentől függő



2.6. ábra. A hagyományos PERT, a többdimenziós normális és Spelde módszere

időpontban, amikor a projekt valamelyik tevékenysége befejeződik, minden ezt a tevékenységet közvetlenül követő tevékenység végrehajtását azonnal el kell kezdeni. Ez a feltétel számítógépes *task*-ok ütemezésekor esetleg betartható lehet, azonban teljességgel elképzelhetetlen a PERT legfontosabb alkalmazása, az építkezési projektek ütemezése területén. Nem véletlen, hogy determinisztikus tevékenységi idők esetén meg szokás határozni minden egyes tevékenység úgynevezett legkorábbi és legkésőbbi kezdési időpontjait, tartalék idejeit stb. Ebben a szakaszban olyan PERT modellt mutatunk be és adunk nem túl nagy tesztfeladatra numerikus megoldást, amely minden tevékenységre megad legkorábbi kezdési időpontokat, melyeket előírt megbízhatósággal tartani lehet a projekt megvalósítása során és melyek betartása mellett a projekt megvalósítási ideje is az adott megbízhatósággal meghatározható.

Legyen adott egy $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ hurokmentes irányított gráf, ahol \mathcal{N} a csúcsok (események) halmaza, \mathcal{A} az élek (tevékenységek) halmaza. Legyenek az \mathcal{N} -beli csúcsok $c_j, j = 1, \dots, n$, melyek közül c_1 legyen a kezdő csúcs és c_n a befejező csúcs. Rendeljük a c_j csúcshoz az x_j változót, mely jelentse azt a legkorábbi kezdési időpont, amikor az összes, a c_j csúcsból induló él által reprezentált tevékenység elkezdhető, $j = 1, \dots, n$. Legyenek az \mathcal{A} -beli élek $e_i, i = 1, \dots, m$ és rendeljük az e_i élhez a d_i számokat, mint az él által reprezentált tevékenység végrehajtási idejét, $i = 1, \dots, m$. Ha ezek deter-

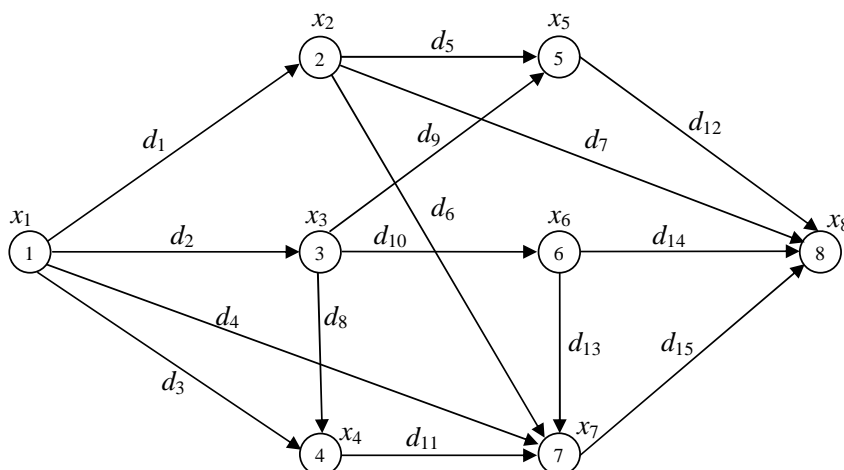
minisztikusan meghatározottak, akkor az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ hurokmentes irányított gráf által leírt projekt legrövidebb végrehajtási idejét a következő lineáris programozási feladat megoldása adja:

$$\begin{aligned} x_{v_i} - x_{k_i} &\geq d_i, i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\ \min(x_n - x_1), \end{aligned} \tag{2.19}$$

ahol k_i, v_i rendre az e_i él kezdő és végző csúcsának az indexei. Nyilván feltehetjük, hogy $x_1 \equiv 0$ és ennek megfelelően egyszerűsíthetjük a (2.19) feladatot. Ha a $d_i, i = 1, \dots, m$ tevékenység végrehajtási idők valószínűségi változók, akkor jelölje ezeket $\xi_i, i = 1, \dots, m$ és oldjuk meg a következő együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatot az $x_j, j = 1, \dots, n$ legkorábbi kezdési időpontok meghatározásához:

$$\begin{aligned} P(x_{v_i} - x_{k_i} \geq \xi_i, i = 1, \dots, m) &\geq p \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\ \min(x_n - x_1), \end{aligned} \tag{2.20}$$

ahol p egy előírt, elég nagy valószínűség, amellyel megkívánjuk, hogy a teljes projekt kivitelezhető legyen a (2.20) feladat megoldása által meghatározott x_1, \dots, x_n tevékenység kezdési időpontok szigorú betartásával. A PERT modellezés szakirodalmából ismert modellekben általános feltételezés a tevékenység végrehajtási idők sztochasztikus függetlenségének a feltételezése, mely esetben a (2.20) sztochasztikus programozási feladatban az együttes valószínűség az egydimenziós peremeloszlásokkal számított valószínűségek szorzatára bomlik és ezáltal numerikusan könnyen kezelhetővé válik. A következő, numerikus eredményeket tartalmazó rész első feladatában a szakasz címének megfelelően megmutatjuk, hogy a (2.20) sztochasztikus programozási feladat megoldható reális méretű tesztfeladatra Dirichlet együttes eloszlás feltételezése mellett is. A második feladatban normális eloszlású, sztochasztikusan független tevékenység végrehajtási idők feltételezése mellett, a 2.3. szakasz módszerével és a (2.20) sztochasztikus programozási feladat megoldásával nyert eredmények összehasonlítását mutatjuk meg.



2.7. ábra. PERT tervütem háló

Numerikus eredmények. Tekintsük először a 2.7. ábrán látható hurokmentes, irányított gráffal megadott PERT feladatot. A 2.7. ábrán $d_i, i = 1, \dots, 15$ a 15 tevékenység végrehajtási ideit, x_j az összes olyan tevékenység végrehajtása legkorábbi elkezdési időpontját jelöli, amelyek a j -edik eseménynél kezdődnek, $j = 1, \dots, 8$. Az 1-es esemény a kezdő és a 8-as a befejező esemény és feltesszük, hogy $x_1 = 0$. Ekkor, ha a $d_i, i = 1, \dots, 15$ tevékenység végrehajtási idők determinisztikusan adóttak, akkor a PERT modellt CPM (*Critical Path Method*) feladatnak tekinthetjük és a (2.19) lineáris programozási feladatnak megfelelő (2.19) feladat x_8 megoldáskomponense adja a projekt megvalósítási idejét, míg az $x_j, j = 2, \dots, 7$ megoldáskomponensek minden tevékenységre megadják a legkorábbi kezdési időpontokat. Ezekből a CPM modell minden kérdése, mint például az úgynevezett kritikus út meghatározása a szokott módon megoldható.

$$\begin{aligned}
x_2 & \geq d_1 \\
x_3 & \geq d_2 \\
x_4 & \geq d_3 \\
x_7 & \geq d_4 \\
-x_2 \quad +x_5 & \geq d_5 \\
-x_2 \quad +x_7 & \geq d_6 \\
-x_2 \quad +x_8 & \geq d_7 \\
-x_3 \quad +x_4 & \geq d_8 \\
-x_3 \quad +x_5 & \geq d_9 \\
-x_3 \quad +x_6 & \geq d_{10} \\
-x_4 \quad +x_7 & \geq d_{11} \\
-x_5 \quad +x_8 & \geq d_{12} \\
-x_6 \quad +x_7 & \geq d_{13} \\
-x_6 \quad +x_8 & \geq d_{14} \\
-x_7 \quad +x_8 & \geq d_{15} \\
x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\min(x_8)$$

Ha azonban a $d_i, i = 1, \dots, 15$ tevékenység végrehajtási idők sztochasztikusak, akkor egy, a (2.20) sztochasztikus programozási feladatnak megfelelő (2.22) feladatot kell megoldanunk. Ennek megadásához legyen most

$$\xi_i = a_i + (b_i - a_i)\eta_i, i = 1, \dots, 15,$$

ahol a_i, b_i az i -edik tevékenység végrehajtási idejének optimista, pesszimista becslései $i = 1, \dots, 15$ és az η_1, \dots, η_{15} valószínűségi változók $\vartheta_1 > 0, \dots, \vartheta_{15} > 0, \vartheta_{16} > 0$, paraméterű Dirichlet együttes eloszlásúak, azaz az együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x_1, \dots, x_{15}) = \frac{\Gamma(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_{15} + \vartheta_{16})}{\Gamma(\vartheta_1) \dots \Gamma(\vartheta_{15}) \Gamma(\vartheta_{16})} x_1^{\vartheta_1 - 1} \dots x_{15}^{\vartheta_{15} - 1} (1 - x_1 - \dots - x_{15})^{\vartheta_{16} - 1},$$

ha $x_1 \geq 0, \dots, x_{15} \geq 0$ and $x_1 + \dots + x_{15} \leq 1$. Ekkor a megfelelő együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat:

$$P \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{1}{(b_1-a_1)} (& -a_1 & +x_2 & & & & & & & & & & & & & &) & \geq \eta_1 \\ \frac{1}{(b_2-a_2)} (& -a_2 & & +x_3 & & & & & & & & & & & & &) & \geq \eta_2 \\ \frac{1}{(b_3-a_3)} (& -a_3 & & & +x_4 & & & & & & & & & & & &) & \geq \eta_3 \\ \frac{1}{(b_4-a_4)} (& -a_4 & & & & & & +x_7 & & & & & & & & &) & \geq \eta_4 \\ \frac{1}{(b_5-a_5)} (& -a_5 & -x_2 & & & +x_5 & & & & & & & & & &) & \geq \eta_5 \\ \frac{1}{(b_6-a_6)} (& -a_6 & -x_2 & & & & & +x_7 & & & & & & & &) & \geq \eta_6 \\ \frac{1}{(b_7-a_7)} (& -a_7 & -x_2 & & & & & & +x_8 & & & & & & &) & \geq \eta_7 \\ \frac{1}{(b_8-a_8)} (& -a_8 & & -x_3 & +x_4 & & & & & & & & & & &) & \geq \eta_8 \\ \frac{1}{(b_9-a_9)} (& -a_9 & & -x_3 & & +x_5 & & & & & & & & & &) & \geq \eta_9 \\ \frac{1}{(b_{10}-a_{10})} (& -a_{10} & & -x_3 & & & +x_6 & & & & & & & & &) & \geq \eta_{10} \\ \frac{1}{(b_{11}-a_{11})} (& -a_{11} & & & -x_4 & & & +x_7 & & & & & & & &) & \geq \eta_{11} \\ \frac{1}{(b_{12}-a_{12})} (& -a_{12} & & & & -x_5 & & & +x_8 & & & & & & &) & \geq \eta_{12} \\ \frac{1}{(b_{13}-a_{13})} (& -a_{13} & & & & & -x_6 & +x_7 & & & & & & & &) & \geq \eta_{13} \\ \frac{1}{(b_{14}-a_{14})} (& -a_{14} & & & & & -x_6 & & +x_8 & & & & & & &) & \geq \eta_{14} \\ \frac{1}{(b_{15}-a_{15})} (& -a_{15} & & & & & & -x_7 & +x_8 & & & & & & &) & \geq \eta_{15} \end{array} \right) \geq p \quad (2.22)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

$$\min x_8,$$

ahol p a projekt határidőre történő megvalósíthatóságának előírt valószínűsége. A 2.4. táblázatban megadjuk a projekt 15 tevékenysége Dirichlet eloszlásának azokat a jellemzőit, melyekkel a számításokat elvégeztük. Az egyes tevékenységek végrehajtási idejeinek a korrelációs együtthatói a paraméterkezből kiszámolhatóak, azokat itt nem soroltuk fel, csak megjegyezzük, hogy az értékük 0 és $-0,124409$ között volt. A 2.5. táblázatban megadjuk a (2.21) lineáris programozási feladat megoldását azokra az esetekre, amikor az optimista, a pesszimista illetve a legvalószínűbb tevékenység

2.4. táblázat. A Dirichlet eloszlás paraméterei

sorszám	optimista becslés	pesszimista becslés	legvalószínűbb érték	θ paraméter	várható érték	szórás
1	45	60	45,043	1,06	45,691	0,642
2	10	40	11,500	2,05	12,674	1,745
3	50	75	50,048	1,04	51,130	1,060
4	10	40	12,957	3,07	14,004	2,083
5	15	45	15,286	1,20	16,565	1,362
6	70	95	70,071	1,06	71,152	1,070
7	40	75	40,133	1,08	41,643	1,511
8	85	95	85,524	2,10	85,913	0,588
9	10	35	10,600	1,05	11,141	1,065
10	45	90	45,011	1,005	46,966	1,878
11	25	45	25,967	2,015	26,752	1,154
12	25	50	25,083	1,07	26,163	1,075
13	30	60	30,071	1,05	31,370	1,278
14	55	75	56,048	2,10	56,826	1,176
15	15	35	15,029	1,03	15,896	0,844
16				1,02		

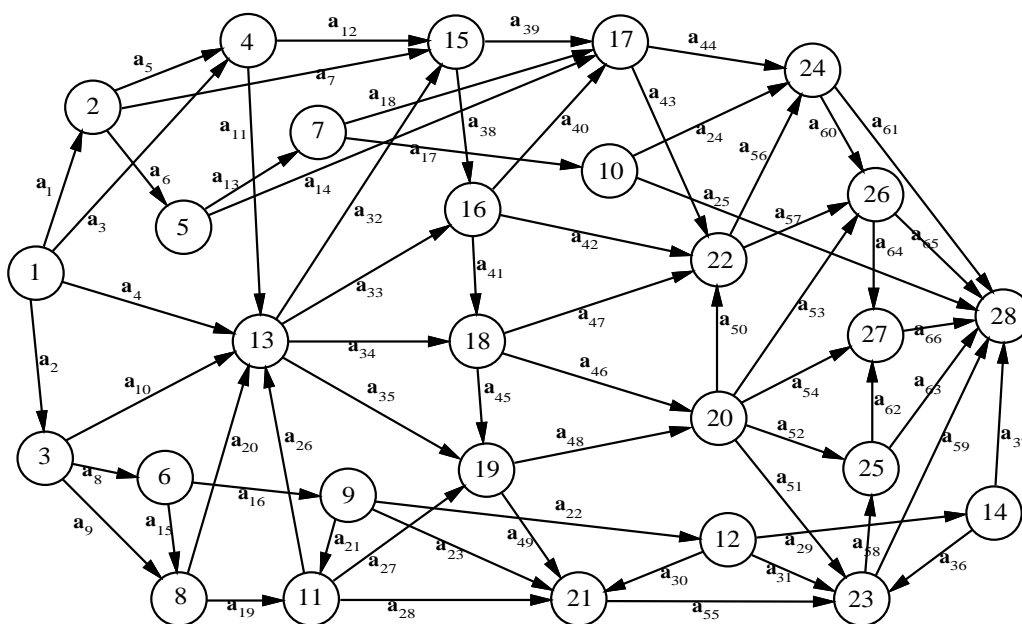
2.5. táblázat. A lineáris és a sztochasztikus programozási feladat megoldásai

	determinisztikus esetek			sztochasztikus esetek		
változók	optimista	pesszimista	legvalószínűbb	$p = 0,90$	$p = 0,95$	$p = 0,99$
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	70	130	71,963	49,695	52,784	66,084
x_3	10	40	11,500	15,291	24,443	27,131
x_4	95	135	97,024	104,492	114,908	117,901
x_5	170	255	87,249	97,479	211,694	193,509
x_6	115	175	116,951	66,897	48,993	148,067
x_7	140	225	142,035	162,424	181,097	184,299
x_8	195	300	198,082	226,194	247,067	250,336

végrehajtási értékekkel, mint determinisztikusan adott értékekkel dolgoztunk, valamint a (2.22) sztochasztikus programozási feladat a 2.4. táblázatban adott Dirichlet eloszlással vett megoldásait három különböző valószínűségi szintre: 0,9-re, 0,95-re és 0,99-re. A 2.5. táblázatban az x_8 változó értéke egyben a projekt megvalósítási idejét is jelenti. Látható, hogy a determinisztikus esetek egyike sem ad kielégítő eredményt, ha az optimista, vagy a legvalószínűbb tevékenység végrehajtási időkkel dolgozunk, akkor 0,9-nél jóval kisebb valószínűséggel lesz csak a kapott idő alatt megvalósítható a projekt, míg a pesszimista tevékenység végrehajtási időkkel dolgozva ugyan 0,99-nél is jóval nagyobb valószínűséggel lesz a projekt megvalósítható, azonban elfogadhatatlanul hosszú (300 értékű) ez a túlbiztosított megvalósítási idő. A döntéshozó aszerint választhat a három sztochasztikus változat közül, hogy mekkora kockázatot vállal a projekt határidőre történő megvalósítására. Feltehetőleg ez a választás könnyebb lesz számára, mint a csupán a determinisztikus esetek közüli választás lenne. A sztochasztikus programozási feladatok megoldása a jegyzet szerzője által kifejlesztett PCSP (*Probabilistic Constrained Stochastic Pro-*

gramming) programrendszerrel történt (lásd [38], illetve ennek gamma és Dirichlet eloszlás kezelésére is alkalmas továbbfejlesztése [39]).

Második numerikus példaként tekintsük a 2.8. ábrán látható, Prékopa András és J. Long által publikált tervütem hálót. Ez a tervütemháló 66 tevékenységből és



2.8. ábra. Prékopa András és J. Long PERT tervütem hálója

28 eseményből áll, az 1-es eseményt tekintjük kezdő és a 28-as eseményt befejező eseménynek. A tevékenységek végrehajtási ideire a 2.6. táblázatban adtuk meg az optimista és a pesszimista becsléseket.

2.6. táblázat: A 66 tevékenység vérehajtási ideinek alsó és felső korlátjai

Sorszám	Tevékenység	Alsó korlát	Felső korlát	sorszám	Tevékenység	Alsó korlát	Felső korlát
1	(1, 2)	24	32	34	(13,18)	47	55
2	(1, 3)	48	56	35	(13,19)	44	52
3	(1, 4)	49	57	36	(14,23)	11	19
4	(1,13)	24	32	37	(14,28)	36	44
5	(2, 4)	21	29	38	(15,16)	39	47

2.6. táblázat: (folytatás)

Sorszám	Tevékenység	Alsó korlát	Felső korlát	sorszám	Tevékenység	Alsó korlá	Felső korlát
6	(2, 5)	43	51	39	(15,17)	18	26
7	(2,15)	30	38	40	(16,17)	13	21
8	(3, 6)	14	22	41	(16,18)	41	49
9	(3, 8)	28	36	42	(16,22)	42	50
10	(3,13)	29	37	43	(17,22)	38	46
11	(4,13)	36	44	44	(17,24)	27	35
12	(4,15)	19	27	45	(18,19)	26	34
13	(5, 7)	49	57	46	(18,20)	39	47
14	(5,17)	12	20	47	(18,22)	25	33
15	(6, 8)	35	43	48	(19,20)	13	21
16	(6, 9)	28	36	49	(19,21)	16	24
17	(7,10)	15	23	50	(20,22)	29	37
18	(7,17)	26	34	51	(20,23)	42	50
19	(8,11)	33	41	52	(20,25)	33	41
20	(8,13)	46	54	53	(20,26)	43	51
21	(9,11)	41	49	54	(20,27)	44	52
22	(9,12)	47	55	55	(21,23)	22	30
23	(9,21)	42	50	56	(22,24)	46	54
24	(10,24)	40	48	57	(22,26)	19	27
25	(10,28)	37	45	58	(23,25)	33	41
26	(11,13)	27	35	59	(23,28)	39	47
27	(11,19)	26	34	60	(24,26)	15	23
28	(11,21)	31	39	61	(24,28)	48	56
29	(12,14)	38	46	62	(25,27)	27	35
30	(12,21)	48	56	63	(25,28)	26	34

2.6. táblázat: (folytatás)

Sorszám	Tevékenység	Alsó korlát	Felső korlát	sorszám	Tevékenység	Alsó korlá	Felső korlát
31	(12,23)	29	37	64	(26,27)	29	37
32	(13,15)	32	40	65	(26,28)	22	30
33	(13,16)	20	28	66	(27,28)	20	28

A 2.8. ábra PERT tervütemhálójában 1623 út létezik a kezdő és befejező események között. A tevékenységi időkre 2.6. táblázatban megadott végrehajtási idő alsó és felső korlátok figyelembevételével az 1. eliminációs algoritmus után 201, míg az ezt követő 2. eliminációs algoritmus végrehajtása után csupán 8 út maradt meg, mint amelyik valaha is kritikusnak, azaz leghosszabbnak minősülhet. Mivel ebben a 8 útban csak 21 tevékenység van érintve, az ezekre az utakra redukált út-él incidencia mátrix 8×21 méretű és a 2.7. táblázatban látható.

2.7. táblázat: A 8 megmaradt út út-él incidencia mátrixa

	2	8	15	16	19	21	26	32	38	41	45	46	48	50	51	56	58	60	62	64	66
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
2	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
7	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
8	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1

Könnyen észrevehető, hogy ennek a mátrixnak csak 4 lineárisan független oszlopvektora van, ezért a többdimenziós normális eloszlással való közelítés esetén a 8-dimenziós normális eloszlás a 4-dimenziós Euklideszi térre korlátozódik. Ezen

2.8. táblázat. A 8 megmaradt út együttes normális eloszlásának a paraméterei

Várható érték	508	507	504	503	487	486	483	482
Szórásnégyzet	8,9443	8,9443	8,6410	8,6410	8,6410	8,6410	8,3267	8,3267
Korreláció mátrix	1,0000	0,8667	0,8971	0,7591	0,7591	0,6211	0,6445	0,5013
	0,8667	1,0000	0,7591	0,8971	0,6211	0,7591	0,5013	0,6445
	0,8971	0,7591	1,0000	0,8571	0,6429	0,5000	0,7412	0,5930
	0,7591	0,8971	0,8571	1,0000	0,5000	0,6429	0,5930	0,7412
	0,7591	0,6211	0,6429	0,5000	1,0000	0,8571	0,8895	0,7412
	0,6211	0,7591	0,5000	0,6429	0,8571	1,0000	0,7412	0,8895
	0,6445	0,5013	0,7412	0,5930	0,8895	0,7412	1,0000	0,8462
	0,5013	0,6445	0,5930	0,7412	0,7412	0,8895	0,8462	1,0000

a numerikus példán a többdimenziós normális eloszlással és a sztochasztikus programozással való megközelítés közti különbséget kívánjuk szemléltetni. Ehhez azt fogjuk feltenni, hogy a tevékenységek végrehajtási idejei egymástól független, normális eloszlású valószínűségi változók. A várható értékeket mint a 2.6. táblázatban adott alsó és felső korlátok számtani közepét, a szórásnégyzeteket pedig mint a két korlát érték közti különbség négyzetének a tizenketted részét választottuk, vagyis a többdimenziós normális eloszlással való közelítés úgy is tekinthető, mintha a tevékenységek végrehajtási ideire azt tettük volna fel, hogy azok egyenletes eloszlásúak az alsó és felső korlátjaik által adott intervallumon. Ezzel a feltételezéssel a megmaradt utak hosszai olyan, egy 4 dimenziós altérre korlátozódó 8 dimenziós normális eloszlásúak, amely paraméterit a 2.8. táblázat mutatja. Ahhoz, hogy a többdimenziós normális eloszlással és a sztochasztikus programozással való közelítést könnyen össze lehessen hasonlítani, megoldottuk a (2.22) sztochasztikus programozási feladatot 0-tól 1-ig terjedő valószínűségi szintekkel. Ezt az AMPL modellező nyelv (lásd R. Fourer, D.M. Gay és B.W. Kernighan [18]) és a LOQO megoldó algoritmus (lásd R.J. Vanderbei [42] és [43]) segítségével könnyen meg lehetett tenni, hiszen feltettük, hogy a tevékenységek végrehajtási idejei egymástól független, normális elosz-

2.9. táblázat. A sztochasztikus programozási feladat különböző valószínűségi szintek melletti megoldásai

val. szint	megvalósítási idő	val. szint	megvalósítási idő	val. szint	megvalósítási idő
0,01	531,358	0,35	560,794	0,70	577,641
0,05	540,927	0,40	563,087	0,75	580,677
0,10	546,329	0,45	565,351	0,80	584,153
0,15	550,112	0,50	567,624	0,85	588,333
0,20	553,206	0,55	569,945	0,90	593,796
0,25	555,927	0,60	572,353	0,95	602,312
0,30	558,427	0,65	574,897	0,99	619,592

lású valószínűségi változók. A kapott eredményeket a 2.9. táblázat tartalmazza.

Ezekből lineáris interpolációval állítottuk elő a projekt megvalósítási idejének a valószínűségi eloszlásfüggvényét a 495–625 intervallumban egységnyi lépésközökkel haladva. A többdimenziós normális eloszlással való közelítés eredményeit pedig egy, a 2.1. táblázattal azonos felépítésű táblázatban adjuk meg, ez a 2.10. táblázat.

2.10. táblázat: A kritikus úthossz eloszlásfüggvényének többdimenziós normális eloszlással számított alsó, felső korlátai és pontos értékei

X	$BML3$	$HML(0, 2)$	$HML(0, 3)$	pontos	$HMU(1, 2)$	$HMU(1, 1)$	$BMU3$
480	0,0000	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0070
481	0,0000	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0085
482	0,0000	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0008	0,0102
483	0,0000	0,0007	0,0009	0,0009	0,0009	0,0012	0,0114
484	0,0000	0,0011	0,0013	0,0013	0,0013	0,0017	0,0124

2.10. táblázat: (folytatás)

X	<i>BML3</i>	<i>HML</i> (0, 2)	<i>HML</i> (0, 3)	pontos	<i>HMU</i> (1, 2)	<i>HMU</i> (1, 1)	<i>BMU3</i>
485	0,0000	0,0016	0,0019	0,0020	0,0020	0,0025	0,0138
486	0,0000	0,0024	0,0028	0,0028	0,0028	0,0037	0,0155
487	0,0000	0,0035	0,0040	0,0040	0,0040	0,0052	0,0178
488	0,0000	0,0050	0,0056	0,0057	0,0057	0,0073	0,0208
489	0,0000	0,0070	0,0078	0,0079	0,0079	0,0100	0,0248
490	0,0000	0,0097	0,0108	0,0108	0,0108	0,0137	0,0300
491	0,0000	0,0133	0,0146	0,0146	0,0146	0,0184	0,0366
492	0,0000	0,0180	0,0195	0,0195	0,0195	0,0244	0,0448
493	0,0000	0,0240	0,0258	0,0258	0,0258	0,0320	0,0551
494	0,0000	0,0316	0,0337	0,0337	0,0337	0,0415	0,0675
495	0,0000	0,0410	0,0434	0,0435	0,0435	0,0531	0,0824
496	0,0000	0,0526	0,0554	0,0554	0,0554	0,0670	0,0962
497	0,0000	0,0666	0,0697	0,0697	0,0697	0,0837	0,1125
498	0,0000	0,0833	0,0867	0,0867	0,0868	0,1032	0,1320
499	0,0000	0,1030	0,1067	0,1067	0,1067	0,1259	0,1549
500	0,0103	0,1258	0,1297	0,1297	0,1297	0,1518	0,1812
501	0,0487	0,1518	0,1560	0,1560	0,1560	0,1810	0,2109
502	0,0873	0,1812	0,1855	0,1855	0,1856	0,2134	0,2439
503	0,1270	0,2139	0,2183	0,2183	0,2183	0,2489	0,2800
504	0,1683	0,2497	0,2541	0,2541	0,2541	0,2873	0,3188
505	0,2179	0,2884	0,2928	0,2928	0,2928	0,3283	0,3600
506	0,2731	0,3296	0,3340	0,3340	0,3340	0,3714	0,4031
507	0,3270	0,3730	0,3772	0,3772	0,3772	0,4161	0,4476
508	0,3798	0,4180	0,4220	0,4220	0,4220	0,4619	0,4928
509	0,4318	0,4641	0,4678	0,4678	0,4679	0,5082	0,5334
510	0,4830	0,5106	0,5141	0,5141	0,5141	0,5543	0,5741

2.10. táblázat: (folytatás)

X	<i>BML3</i>	<i>HML</i> (0, 2)	<i>HML</i> (0, 3)	pontos	<i>HMU</i> (1, 2)	<i>HMU</i> (1, 1)	<i>BMU3</i>
511	0,5330	0,5569	0,5601	0,5601	0,5601	0,5996	0,6148
512	0,5816	0,6024	0,6052	0,6053	0,6053	0,6436	0,6549
513	0,6284	0,6465	0,6490	0,6490	0,6490	0,6857	0,6938
514	0,6729	0,6887	0,6909	0,6909	0,6909	0,7255	0,7310
515	0,7148	0,7285	0,7304	0,7304	0,7304	0,7626	0,7661
516	0,7538	0,7656	0,7671	0,7671	0,7671	0,7967	0,7987
517	0,7895	0,7996	0,8009	0,8009	0,8009	0,8277	0,8285
518	0,8220	0,8305	0,8315	0,8315	0,8315	0,8555	0,8555
519	0,8510	0,8581	0,8589	0,8589	0,8589	0,8801	0,8795
520	0,8766	0,8824	0,8831	0,8831	0,8831	0,9015	0,9006
521	0,8989	0,9037	0,9041	0,9042	0,9042	0,9199	0,9189
522	0,9181	0,9219	0,9223	0,9223	0,9223	0,9357	0,9346
523	0,9344	0,9374	0,9377	0,9377	0,9377	0,9488	0,9478
524	0,9480	0,9504	0,9506	0,9506	0,9506	0,9598	0,9583
525	0,9593	0,9611	0,9613	0,9613	0,9614	0,9687	0,9667
526	0,9685	0,9699	0,9700	0,9701	0,9700	0,9760	0,9737
527	0,9759	0,9769	0,9771	0,9770	0,9770	0,9817	0,9796
528	0,9818	0,9825	0,9827	0,9826	0,9825	0,9863	0,9843
529	0,9865	0,9869	0,9870	0,9869	0,9869	0,9898	0,9881
530	0,9900	0,9903	0,9904	0,9904	0,9904	0,9925	0,9911
531	0,9927	0,9929	0,9932	0,9931	0,9929	0,9946	0,9934
532	0,9948	0,9949	0,9949	0,9949	0,9951	0,9961	0,9952
533	0,9963	0,9963	0,9963	0,9964	0,9964	0,9973	0,9965
534	0,9974	0,9974	0,9977	0,9975	0,9976	0,9981	0,9975
535	0,9982	0,9982	0,9984	0,9983	0,9983	0,9987	0,9983
536	0,9987	0,9987	0,9989	0,9989	0,9990	0,9991	0,9988

2.10. táblázat: (folytatás)

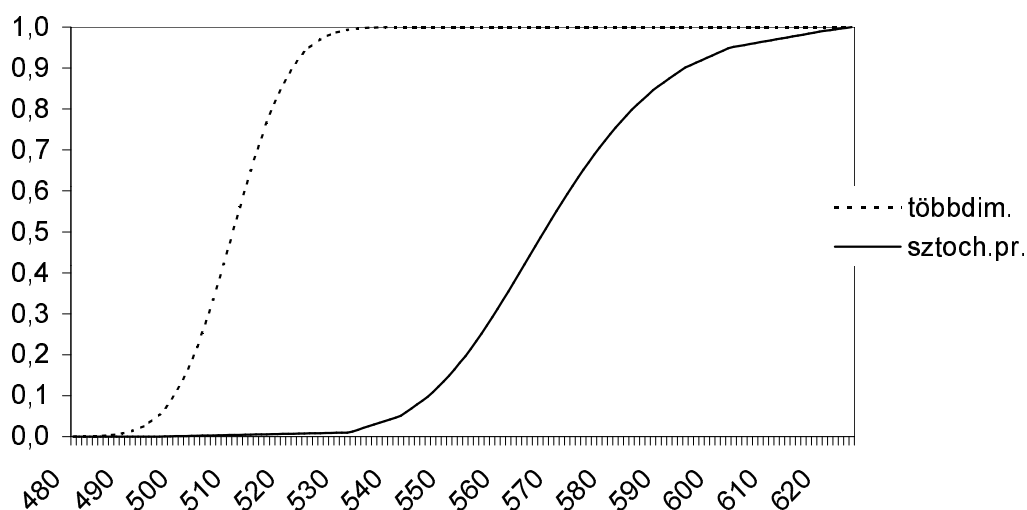
X	<i>BML3</i>	<i>HML</i> (0, 2)	<i>HML</i> (0, 3)	pontos	<i>HMU</i> (1, 2)	<i>HMU</i> (1, 1)	<i>BMU3</i>
537	0,9991	0,9992	0,9994	0,9993	0,9994	0,9994	0,9992
538	0,9994	0,9994	0,9996	0,9996	0,9995	0,9996	0,9994
539	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9996
CPU	16,02	7,46	18,23	15,69	0,00 ³	0,00 ³	0,00 ³
ÁAE	0,0069	0,0064	0,0000	-	-	-	-
MAE	0,0340	0,0184	0,0001	-	-	-	-
ÁRE	0,1594	0,0374	0,0007	-	-	-	-
MRE	0,9059	0,0820	0,0250	-	-	-	-

A 2.10. táblázatból kiolvasható, hogy a futási idők nem a 2.1. táblázatban közölt futási időkkel, hanem a 2.3. táblázat utolsó oszlopában megadott futási idővel mérhetők össze, hiszen az felel meg a 8 dimenziós normális eloszlásnak, a 2.1. táblázatban 54 dimenziós normális eloszlással történt számítási eredmények voltak megadva. Ennek megfelelően, a hipermultifa korlátokkal is elég volt csak eggyel alacsonyabb szintig elmenni (*HML*(0,3)–*HMU*(1,2) párig), hogy az alsó és felső korlátok gyakorlatilag teljesen megegyezzenek a pontos értékkel. Az is látható, hogy a többdimenziós normális eloszlással történő közelítés számítási időigénye nem függ a PERT háló méretétől, csupán attól, hogy hány út marad meg, mint számításba veendő, lehetséges leghosszabb út.

Végül tekintsük a két közelítés eredményeit grafikusán összehasonlító 2.9. ábrát. Ez egy grafikonon mutatja a projekt megvalósítási idejére két különböző megközelítéssel nyert eloszlásfüggvény görbét. Látható, hogy a sztochasztikus programozási megközelítés eloszlásfüggvény görbéje lényegesen nagyobb értékek mentén halad, azt mutatva ezzel, hogy ha minden tevékenység azonnal elkezdhető lenne, amikor véletlen időpillanatban megvalósul a kiinduló eseménye, akkor a teljes projekt lényegesen

³Az alsó és felső korlátok egyidejűleg lettek kiszámítva

rövidebb idő alatt lenne megvalósítható. Ezzel szemben, ha az egyes tevékenységek végrehajtói megkövetelik, hogy a véletlen körülmények ellenére is, még a projekt megvalósításának a megkezdése előtt biztos időpontot kapjanak a munkájuk elkezdésére, az mekkora késleltetést eredményez a projekt végső megvalósításában.



2.9. ábra. A projekt megvalósítási idő különböző módszerrel számított eloszlásfüggvényei

Irodalomjegyzék

- [1] K.O. ANKLESARIA and Z. DREZNER, A multivariate approach to estimating the completion time for PERT networks, *Journal of Operational Research Society* **37** (1986) 811–815.
- [2] A. BATTERSBY, *Network Analysis, third edition*, (St. Martins Press, New York, 1970).
- [3] C. E. BONFERRONI, *Teoria Statistica Delle Classi e Calcolo Delle Probabilità* (Volume in onor di Riccardo Dalla Volta, Università di Firenze, 1937) 1–62.
- [4] G. BOOLE, *Laws of Thought* (American reprint of 1854 edition, Dover, New York, 1854)
- [5] E. BOROS and P. VENEZIANI, Bounds of degree 3 for the probability of the union of events, *Rutcor Research Report RRR 3-2002*, January, 2002.
- [6] P. BRUCKER, A. DREXL, R. MÖHRING, K. NEUMANN and E. PESCH, Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models and methods, *European Journal of Operational Research* **112** (1999) 3–41.
- [7] J. BUKSZÁR, *Probability Bounds for the Union of Events* (PhD thesis, Eötvös Loránd University, November 1998, in Hungarian).
- [8] J. BUKSZÁR and A. PRÉKOPA, Probability Bounds with Cherry trees, *Mathematics of Operations Research* **26** (2001) 174–192.
- [9] J. BUKSZÁR, Quickly computable bounds on the probability of a union, in: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 513, Stochastic Optima-*

- tion Techniques, Numerical methods and Technical Applications, Proceedings of the 4th GAMM/IFIP-Workshop on "Stochastic Optimization Techniques, Numerical methods and Technical Applications", held at the Federal Armed Forces University Munich, Neubiberg/München, Germany, June 27-29, 2000*, eds. K. Marti, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2002) 79–89.
- [10] J. BUKSZÁR, Hypermultitrees and Bonferroni inequalities, *Mathematical Inequalities and Applications* to appear.
 - [11] C.T. CLINGEN, A modification of Fulkerson's PERT algorithm, *Operations Research* **12** (1964) 629–632.
 - [12] L.P. DEVROYE, Inequalities for the completion time of stochastic PERT networks, *Mathematics of Operations Research* **4** (1979) 441–447.
 - [13] B.M. DODIN, Bounding the project completion time distribution in PERT networks, *Operations Research* **33** (1985) 862–881.
 - [14] K. DOHMEN, Bonferroni-type inequalities via chordal graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* **11** (2002) 349–351.
 - [15] S.E. ELMAGHRABY, On the expected duration PERT type networks, *Management Science* **13** (1967) 299–306.
 - [16] D. EPPSTEIN, Finding the k shortest paths, *SIAM Journal on Computation* **28** (1999) 652–673.
 - [17] S.V. FOMIN, (1982) An estimate of the rate of convergence in the multi-dimensional central limit theorem, *Theory of Probability and Its Applications* **27** 365–368.
 - [18] R. FOURER, D.M. GAY and B.W. KERNIGHAN, *AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming* (Boyd & Fraser Publishing Company, Danvers, Massachusetts, 1993).

- [19] D.R. FULKERSON, Expected critical path lengths in PERT networks, *Operations Research* **10** (1962) 808–817.
- [20] TH. HAILPERIN, Best possible inequalities for the probability of a logical function of events, *The American Mathematical Monthly* **72** (1965) 343–359.
- [21] D. HUNTER, Bounds for the probability of a union, *Journal of Applied Probability* **13** (1976) 597–603.
- [22] KLAFSZKY EMIL, *Hálózati folyamatok, Az operációkutatás matematikai módszereinek előadássorozata jegyzete*, szerk. Prékopa András, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969.
- [23] É. MOLNÁR, Z. ERDÉLYI AND E. KLAFSZKY, *Network Flows and Transportation*, Notes for Students, Institute of Mathematics, Technical University, Miskolc, 1989.
- [24] G.B. KLEINDORFER, Bounding distributions for a stochastic acyclic network, *Operations Research* **19** (1971) 1586–1601.
- [25] T.K. LITTLEFIELD és P.H. RANDOLPH, An answer to Sasieni's question on PERT times, *Management Science* **33** (1987) 1357–1359.
- [26] D.G. MALCOLM, J.H. ROSEBOOM, C.E. CLARK, and W. FAZAR, Application of a technique for research and development program evaluation, *Operations Research* **7** (1959) 646–669.
- [27] I. MEILIJON and A. NÁDAS, Convex majorization with an application to the length of critical paths, *Journal of Applied Probability* **16** (1979) 671–677.
- [28] D. MONHOR, An approach to PERT: Application of Dirichlet distribution, *Optimization* **1** (1987) 113–118.
- [29] A. NÁDAS, Probabilistic PERT, *IBM J. Res. Dev.* **23** (1979) 339–347.
- [30] A. PRÉKOPA, *Stochastic Programming* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995).

- [31] A. PRÉKOPA, B. VIZVÁRI and G. REGŐS, Lower and upper bounds on probabilities of Boolean functions of events, *RUTCOR Research Report RRR 36-95* (December 1997).
- [32] A. PRÉKOPA and J. LONG New bounds and approximations for the probability distribution of the length of the critical path, *RUTCOR Research Report RRR 16-92* (1992).
- [33] P. ROBILLARD and M. TRAHAN, Expected completion time in PERT network, *Operations Research* **24** (1976) 177–182.
- [34] P. ROBILLARD and M. TRAHAN, The completion time of PERT network, *Operations Research* **25** (1977) 15–29.
- [35] A.W. SHOGAN, Bounding distributions for a stochastic PERT network, *Networks* **7** (1977) 359–381.
- [36] H.G. SPELDE, *Stochastische Netzpläne und ihre Anwendung im Baubetrieb*, PhD thesis, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1976.
- [37] T. SZÁNTAI, Valószínűségbecslések és alkalmazásaik, *MTA Doktori Értekezés*, Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 2003, 154 oldal.
- [38] T. SZÁNTAI, A computer code for solution of probabilistic constrained stochastic programming problems, in: *Numerical Techniques for Stochastic Programming Problems, Springer Series in Computational Mathematics*, ed. Yu. Ermoliev, R. J-B. Wets, Springer Verlag, 1988, 229-235.
- [39] T. SZÁNTAI, Probabilistic constrained programming and distributions with given marginals, in: *Distributions with given marginals and moment problems, Proceedings of the 3rd Conference on "Distributions with Given Marginals and Moment Problems", held at Czech Agricultural University, Prague, Czech Republic, September 2-6, 1996*, eds. V. Benes and J. Stepan, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston /London, 1997, 205-210.

- [40] T. SZÁNTAI, A. PRÉKOPA and J. LONG New bounds and approximations for the probability distribution of the length of the critical path, in: Proceedings of the IFIP/IIASA/GAMM/-Workshop on "Dynamic Stochastic Optimization", held at the International Institute for Applied Systems Analysis – IIASA, Laxenburg/Vienna, Austria, March 11–14, 2002, accepted.
- [41] I. TOMESCU, Hypertrees and Bonferroni inequalities, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **41** (1986) 209–217.
- [42] R.J. VANDERBEI, LOQO: An interior point code for quadratic programming, *Optimization Methods and Software* **12** (1999) 451–484.
- [43] R.J. VANDERBEI, LOQO user's manual – version 3.10, *Optimization Methods and Software* **12** (1999) 485–514.
- [44] S.W. WALLACE, Bounding the expected time-cost curve for a stochastic PERT network from below, *Operations Research Letters* **8** (1989) 89–94.
- [45] G. WEISS, Stochastic bounds on distributions of optimal value functions with applications to PERT, Network flows and reliability, *Operations Research* **34** (1986) 595–605.
- [46] K. J. WORSLEY, An Improved Bonferroni Inequality and Applications, *Biometrika*, **69** (1982) 297–302.