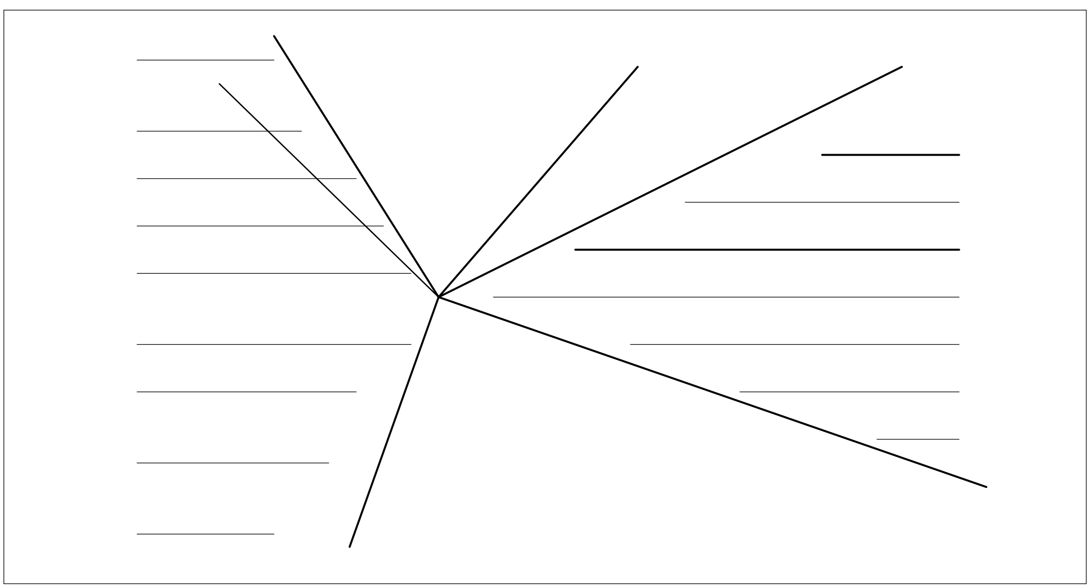
OPERÁCIÓKUTATÁS

No.7.

Komáromi Éva

KOCKÁZAT, DÍJ, TARTALÉK
Matematikai módszerek a biztosításban



Átdolgozott, bővített kiadás, Budapest 2009

Komáromi Éva

KOCKÁZAT, DÍJ, TARTALÉK

Matematikai módszerek a vagyonbiztosításban

OPERÁCIÓKUTATÁS No.7

Szerkeszti: Komáromi Éva

Megjelenik a Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás Tanszéke gondozásában

Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

E könyvet mindenekelőtt tankönyvnek szánjuk aktuárius képzésben résztvevő egyetemi hallgatók számára, de hasznos olvasmány lehet azoknak is, akik biztosításban és pénzügyekben alkalmazható matematikai koncepciók és módszerek iránt érdeklődnek, feleleveníteni vagy bővíteni szeretnék ismereteiket.

Számítunk az olvasó jártasságára a matematikai analízisben, valószínűségszámításban és optimumszámításban. A szövegben felhasznált valószínűségszámítási, optimalizálási és sztochasztikus programozási eredményeket, tételeket emlékeztetőül függelékekben összefoglaltuk. Arra törekszünk, hogy a könyvben eligazodjanak azok az olvasók is, akik nem matematikus végzettségűek, de kellő vonzalmat mutatnak a matematika és gyakorlati alkalmazásai iránt. A tételek terjedelmesebb bizonyítására külön szekciót szánunk vagy a fejezet végére hagyjuk.

A hangsúlyt olyan kockázatelméleti modellek és eljárások bemutatására helyezzük, amelyek alapvetőek az aktuáriusi gyakorlat szempontjából mind a nem-életbiztosítás, mind az életbiztosítás területén.

Az első fejezetben a biztosítási tevékenységet közgazdasági összefüggésébe helyezzük. A második fejezetben a legismertebb kockázati modelleket mutatjuk be. A biztosító döntései díjról, tartalékról, stb. a szóban forgó kötvényállomány teljes kárának ismeretén alapulnak, amely kárt az egyéni kockázati modellek körében az egyes kötvények kárainak összegeként fogjuk fel, míg a kollektív kockázati modellek körében a bekövetkező károkat nem az egyes kötvényekhez kapcsoljuk, hanem a biztosítási állományt mint kockázatközösséget fogjuk fel, és az állomány egészében bekövetkező károk nagyságát, számát, stb. vizsgáljuk.

A harmadik fejezetben a kockázati modellekkel kapcsolatos ismereteinket általánosítjuk azzal, hogy a káralakulást és az ettől és a biztosítás díjától függő többlet alakulását hosszabb időszakra követjük. Azt vizsgáljuk, mekkora kezdeti többlet (szavatoló tőke) szükséges ahhoz, hogy az inszolvencia (csőd, tönkremenés) valószínűségét kellően alacsony szinten tartsuk.

Ha egy kockázat túl nagy a biztosító társaság számára, vagy ha egy egész állománnyal kapcsolatos veszteség lehetősége túl súlyos, akkor a társaság a saját és a biztosítottak biztonsága, a szolvencia fenntartása érdekében viszontbiztosítással védelmet vásárol. A negyedik fejezet a viszontbiztosítás változatait és klasszikus modelljeit foglalja össze.

Az ötödik fejezetben a biztosítási díjnak azt a részét vizsgáljuk, amely a biztosított kár nagyságához kapcsolódik szorosan. Bemutatjuk a díjszámítás során követett elveket és ezeknek a csőd bekövetkezése valószínűségére gyakorolt hatását is.

A kockázatok biztonságos kezelésének - a viszontbiztosítás mellett – a tartalékképzés az eszköze. Biztosításban sok fajta biztosítástechnikai tartalék szükséges. Az aktuáriusok figyelme elsősorban az IBNR (Incurred-But-Not-Reported) károk tartalékának meghatározására irányul. A hatodik fejezetben bemutatjuk a legismertebb módszereket és egyben egy matematikai programozási modellt az IBNR tartalék koncepcionális felfogására.

Pénzintézetek, különösen életbiztosító társaságok befektetési stratégiájukat törekednek úgy megválasztani, hogy a befektetési portfoliójukból származó jövedelmeik minden időszakban lehetővé tegyék a kötelezettségeik zavartalan teljesítését. Ez az eljárás az ALM (eszköz–kötelezettség menedzsment, eszköz–forrás illesztés). A hetedik fejezet ennek a modellezésébe ad betekintést.

Köszönet illeti Vékás Pétert a szöveg gondos lektorálásáért, szakszerű javításáért.

Budapest, 2009. január

1. fejezet

BIZTOSÍTÁS ÉS HASZNOSSÁG

A döntéshozó - vagyon tulajdonosa, biztosított, biztosító, vállalkozó, stb. - gazdasági lehetőségei közül olyant választ, amely a "legkedvezőbb" jövőbeli kilátásokkal rendelkezik. A jövőbeli kilátások azonban véletlen természetűek. Ha például két befektetési lehetőségünk van, közülük azt szeretnénk választani, amelyik a szóbanforgó időszak végére nagyobb hozamot biztosít majd a számunkra. De a befektetési lehetőségek hozama a gazdasági környezettől és annak alakulásától függ. Tisztázandó ezért, mi lenne az alapja egy rangsor felállításának a döntéshozatal időpontjában, mit jelent az, hogy "legkedvezőbb".

A biztosító és a biztosított is gazdasági szereplők, mindkettő gazdasági döntést hoz, amikor választ: kössön-e szerződést vagy ne. A biztosító arról dönt, hogy vállalja-e, milyen mértékben és milyen díj fejében a biztosított vagyoni kártalanítását egy esetleg bekövetkező véletlen kár esetén. A biztosított arról dönt, hogy hajlandó-e fizetni és mennyit a biztosító által ajánlott szolgáltatásért vagy nem hajlandó és ezzel vállalja a kockázatát annak, hogy véletlen események kedvezőtlen financiális hatásaként tervei nem valósulhatnak meg vagy éppen romlását okozzák. Mindkét fél számára akármelyik döntés következménye a saját vagyonának a gyarapodása vagy csökkenése is lehet.

1.1. Pénzben mérhető döntési alternatívák

A döntési alternatívákat - az egyes döntések lehetséges financiális következményeit - valószínűségi változók jellemzik, ezeket a döntéshozónak ismernie kell. Elképzelése kell, hogy legyen arról, hogy ha valamely döntési alternatívát választ, döntése következményeként egy jövőbeni időpontban milyen valószínűséggel milyen összegű lehet a vagyona (nyeresége, költsége, stb.). A biztosított esetében például a biztosításról hozott döntés következménye az időszak végi vagyona, amely a biztosítási szerződésnek megfelelően így alakul:

vagyona az időszak végén = vagyona a biztosítási időszak elején

- a kifizetett biztosítási díj

- az időszakban a vagyonában bekövetkezett kár

+ a biztosító által kifizetett kártalanítás értéke.

Az időszak végi vagyon tehát a kár nagyságától függő értékeket vehet fel, ezek valószínűségi változónk lehetséges értékei, amelyek bekövetkezési valószínűségeit ismertnek tekintjük. Az egyes biztosítási lehetőségek közötti választás így valószínűségi változók közötti választást jelent. Kérdés, milyen alapon rangsoroljunk valószínűségi változókat.

Az egyik gyakran alkalmazott elv *a várható érték elve.* Ez azt jelenti, hogy a döntéshozó két gazdasági lehetőség közül azt választja, amely esetében a számára pozitív kilátásokat jellemző valószínűségi változó (nyereség, hozam, stb.) várható értéke nagyobb. A közgazdaságtanban pénzbeli kifizetéssel járó véletlen következmény várható értékét gyakran a következmény *aktuáriusi értéké*nek is hívják.

Sok gazdasági szereplő azonban a döntési alternatíváit mint valószínűségi változókat nem azok várható értékei alapján hasonlítja össze, hanem a kilátások "hasznosságának" várható értékei alapján – ahol a hasznosságot a döntéshozó hasznossági függvénye méri. A valószínűségi változó minden függvénye, beleértve a döntéshozó hasznossági függvényét is, szintén valószínűségi változó. A várható hasznosság elve azt jeleneti, hogy a döntéshozó két gazdasági lehetőség közül – jelölje X és Y a megfelelő valószínűségi változókat - azt részesíti előnyben, amelyiknek a várható hasznossága nagyobb:

$$X \text{ előnyösebb } Y\text{-nál, ha } E\left[u(X)\right] > E\left[u(Y)\right],$$

ahol $u(v)$ jelöli a döntéshozó hasznossági függvényét. Hasznossági függvény bármilyen függvény lehet. Ésszerű és óvatos magatartást azonban olyan u függvény fejez ki, amely növekvő és növekedési üteme csökkenő: vagyis ha kétszer differenciálható, akkor $u' > 0, u'' \leq 0$. Ha $u'' < 0$, akkor a döntéshozó "kockázatkerülő", ha $u'' > 0$, akkor "kockázatkedvelő". Ha az u hasznossági függvény lineáris: $u\left(v\right) = av + c, a > 0$, akkor

$$E\left[u(X)\right] = E\left[aX + c\right] = aE\left[X\right] + c > E\left[u(Y)\right] = E\left[aY + c\right] = aE\left[Y\right] + c$$

akkor és csak akkor, ha $E\left[X\right] > E\left[Y\right]$: azaz ekkor a várható hasznosság elve megegyezik a várható érték elvvel.

Az alábbi példa azt illusztrálja, hogy a várható hasznosság elve akár kimondatlanul is megjelenik a döntések hátterében.

1.2. Szentpétervári paradoxon

A szentpétervári paradoxon néven híressé vált problémát Daniel Bernoulli írta le 1738-ban "A kockázat mérésének új elmélete" című cikkében. Olyan játékra vonatkozik, amelyben a játékos egy pénzérmét dob fel egymás után addig, amíg fej-et nem dob. A játékos nyereménye 2^{k-1} dukát, ahol k azt jelöli, hányadik dobásra dobott a játékos először fej-et. Annak a valószínűsége, hogy a játékos először a k-adik dobásra dob fej-et: $\frac{1}{2^k}$, e játék várható értéke tehát: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^{k-1}$ végtelen. Mégis, mint Bernoulli írja, minden józan játékos szívesen elcseréli a játék lehetőségét 20 dukátra. Mi ennek az oka? Csak az lehet, hogy a játékos nem a várható nyereményével, hanem a nyereménye várható hasznosságával méri a kilátásait.

1.1. Példa. *Mi a játékos hasznossági függvénye, ha $ak+b$ alakú függvénnyel értékeli a 2^{k-1} nyereményét, $a > 0$? Az a és b paraméterek milyen értéke mellett lesz a várható hasznosság 20 dukát és a hasznosság varianciája 2 dukát^2?*

Megoldás. A kérdés tehát az, mi az $u(v)$ függvény, ha tudjuk, hogy $u(2^{k-1}) = ak+b$, az X nyeremény várható értéke és varianciája: $E[u(X)] = 20, Var[u(X)] = 2$.

A számításhoz szükségünk van az alábbi összegekre, amelyek meghatározásának menetét azért is tüntetjük itt fel, hogy emlékeztessük az olvasót korábban, a matematikai analízis keretében tanultakra.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{1}{2^{k-2}} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)'' \Big|_{x=\frac{1}{2}} + 2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-x} \right)'' \Big|_{x=\frac{1}{2}} + 2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{2}{(1-x)^3} \Big|_{x=\frac{1}{2}} + 2 = 6. \end{aligned}$$

Így az

$$E[u(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} (ak+b) \frac{1}{2^k} = 2a + b = 20$$

összefüggésből $b = 20 - 2a$. A varianciára vonatkozó

$$\begin{aligned} Var[u(X)] &= E\left[u(X)^2\right] - E^2[u(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} (ak+b)^2 \frac{1}{2^k} - 400 = \\ &= a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1}{2^k} + 2ab \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{2^k} + b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 400 \\ &= 6a^2 + 4ab + b^2 - 400 = 2. \end{aligned}$$

összefüggésből a $b = 20-2a$ helyettesítéssel $a = 1$ és $b = 18$ adódik, vagyis $u\left(2^{k-1}\right) = k + 18$. Ha az u hasznossági függvény argumentumát v-vel jelöljük, a $v = 2^{k-1}$ összefüggésből: $k = \frac{\ln v}{\ln 2} + 1$. Így azt kapjuk, hogy

$$u(v) = \frac{a}{\ln 2} \ln v + a + b = \frac{1}{\ln 2} \ln v + 19.$$

Ez tehát a keresett hasznossági függvény.

1.3. Biztosítás és hasznosság

Biztosítási szerződés megkötésekor mindkét gazdasági szereplő: a biztosított és a biztosító is, két gazdasági cselekmény közül választ. A biztosított számára az egyik az, hogy biztosítja a vagyonát, a másik az, hogy nem köt biztosítást. Az első esetben kifizeti a szolgáltatás díját, amivel csökken a vagyona, a második esetben vállalja a vagyonában bekövetkező, X valószínűségi változóval kifejezett veszteséget. A két lehetőség közül a várható hasznosság elve szerint választ, de a választás függ a biztosító által kirótt díjtól. Mi az a maximális D díj, amit a döntéshozó hajlandó megfizetni vagyona teljes védelméért? Annyi díjat hajlandó fizetni, hogy vagyonának a hasznossága a biztosítási időszak végén ne legyen kevesebb, mint vagyona várható hasznossága abban az esetben, ha kárát szerződés hiányában a biztosító nem téríti meg.

Jelölje a döntéshozó vagyonának jelenlegi értékét V. Ha az u hasznossági függvénye növekvő, és ezt a továbbiakban feltételezzük, akkor e D érték az alábbi értékegyenletet elégíti ki:

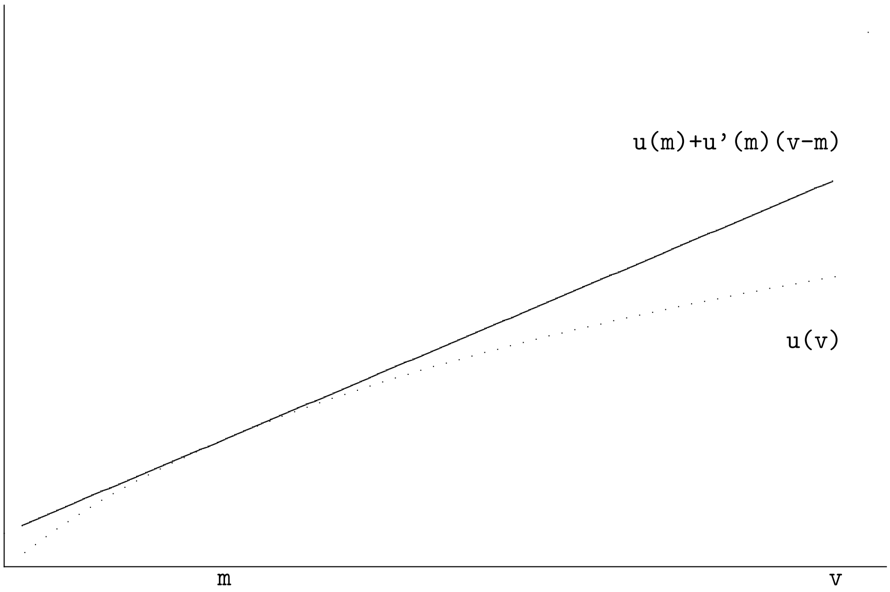
$$E\left[u\left(V-D\right)\right]=u\left(V-D\right)=E\left[u\left(V-X\right)\right].$$

A biztosító részéről is felmerül a kérdés: Mi az a minimális díj, ami megfizetése fejében teljes védelmet hajlandó adni a V vagyonnal rendelkező ügyfelének? Annyi díj fejében hajlandó a kárt fedezni, hogy saját vagyona várható hasznossága a biztosítási időszak végére ne csökkenjen.

Jelölje a biztosító vagyonát (saját tőkéjét) V_B, a biztosító által megszabott minimális díjat D_B, növekvő hasznossági függvényét u_B. A D_B érték ki kell, hogy elégítse az alábbi értékegyenletet:

$$u_B\left(V_B\right)=E\left[u_B\left(V_B+D_B-X\right)\right]$$

Mindkét értékegyenletben a díjat a várható hasznossággal hasonlítottuk össze. Kérdés, milyen kapcsolat áll fenn a díj és a fedezett kár várható értéke között?



1.1. ábra.

1.4. Jensen egyenlőtlenség

Ha az u hasznossági függvény konkáv és differenciálható, akkor

$$E\left[u\left(X\right)\right] \leq u\left(E\left[X\right]\right)$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha u lineáris vagy X konstans.

Bizonyítás. Az u konkávitása miatt

$$u\left(v\right) \leq u\left(E\left[X\right]\right) + u'\left(E\left[X\right]\right)\left(v - E\left[X\right]\right)$$

fennáll az X valószínűségi változó minden v lehetséges értékére, amint ez az 1.1. ábrán látható, ahol $m = E\left[X\right]$. Minthogy az egyenlőtlenség az $u\left(X\right)$ és az $u\left(E\left[X\right]\right) + u'\left(E\left[X\right]\right)\left(X - E\left[X\right]\right)$ valószínűségi változók minden lehetséges értékére fennáll, ezért várható értékeikre is fennáll:

$$E\left[u\left(X\right)\right] \leq E\left[u\left(E\left[X\right]\right) + u'\left(E\left[X\right]\right)\left(X - E\left[X\right]\right)\right].$$

Mivel

$$\begin{aligned} & E\left[u\left(E\left[X\right]\right) + u'\left(E\left[X\right]\right)\left(X - E\left[X\right]\right)\right] \\ = \; & u\left(E\left[X\right]\right) + u'\left(E\left[X\right]\right)\left(E\left[X\right] - E\left[X\right]\right) = u\left(E\left[X\right]\right), \end{aligned}$$

az állítás adódik.

1.5. Díj és várható kockázat

Határozzuk meg, mi az a maximális díj, amit a biztosított hajlandó fizetni a V vagyonában keletkező X kár megtérítéséért és az a minimális díj, amiért a biztosító hajlandó vállalni ezt a védelmet.

Ha a biztosított a várható hasznosság elvét alkalmazza, hasznossági függvénye konkáv, differenciálható és növekvő, akkor az értékegyenlet és a Jensen egyenlőtlenség figyelembe vételével fennáll, hogy

$$u\left(V-D\right)=E\left[u\left(V-X\right)\right]\leq u\left(V-E\left[X\right]\right).$$

Az u függvény növekvő volta miatt ez azt jelenti, hogy a $D\geq E\left[X\right]$ egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia és egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha u lineáris vagy X konstans. A döntéshozó tehát a veszteség várható értékénél nagyobb díjat is hajlandó fizetni a vagyona védelméért, ha kockázatkerülő. (Hasonló megfontolással belátható, hogy a várható veszteségnél kevesebbet hajlandó fizetni, ha kockázatkedvelő.)

Vizsgáljuk meg a biztosító által minimálisan kirovandó díj nagyságát. Ha a biztosító a várható hasznosság elvét alkalmazza, hasznossági függvénye konkáv, differenciálható és növekvő, akkor az értékegyenlet és a Jensen egyenlőtlenség figyelembe vételével fennáll, hogy

$$u_B\left(V_B\right)=E\left[u_B\left(V_B+D_B-X\right)\right]\leq u_B\left(V_B+D_B-E\left[X\right]\right).$$

Az u_B függvény növekvő volta miatt ez azt jelenti, hogy a $D_B\geq E\left[X\right]$ egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia és egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha u_B lineáris vagy X konstans. Vagyis a biztosító által megszabott díj sem lehet alacsonyabb a kockázat (kár) várható értékénél.

A biztosító és a vagyon tulajdonosa között tehát akkor jöhet létre biztosítási szerződés, ha $D\geq D_B\geq E\left[X\right]$ fennáll.

1.6. Jellemző hasznossági függvények

- *Lineáris függvény:* $u\left(v\right)=av+b$, $a>0$.

Ekkor a várható hasznosság elve ekvivalens a várható érték elvvel, amint ezt már láttuk. Az alábbi hasznossági függvényekre, mint ez könnyen belátható, teljesül, hogy $u'(v) > 0, u''(v) < 0$, tehát kockázatkerülő döntéshozó preferenciáját képviselik.

- *Exponenciális függvény:* $u(v) = -e^{-\alpha v},\ \alpha > 0.$

Hasznos tulajdonsága ennek a függvénynek, hogy a biztosított által fizetendő (a biztosító által kirovandó) díj nem függ a biztosított (biztosító) vagyonától, amint ez az értékegyenletekből következik: A biztosított egyenlete:

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha(V-D)} &= E\left[-e^{-\alpha(V-X)}\right] \\ e^{\alpha D} &= E\left[e^{\alpha X}\right] = M_X(\alpha). \end{aligned}$$

A biztosító egyenlete:

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha_B V_B} &= E\left[-e^{-\alpha_B(V_B+D_B-X)}\right] \\ e^{\alpha_B D_B} &= E\left[e^{\alpha_B X}\right] = M_X(\alpha_B), \end{aligned}$$

ahol $M_X(t)$ az X valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye: $M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right]$. Ebből

$$D = \frac{\ln M_X(\alpha)}{\alpha} \text{ és } D_B = \frac{\ln M_X(\alpha_B)}{\alpha_B}$$

adódik.

- *Logaritmus függvény:* $u(v) = a \ln v,\ a > 0.$
- *Törtkitevős hatványfüggvény:* $u(v) = v^r,\ 1 > r > 0.$

1.7. A momentumgeneráló függvény

Az S valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye a következő:

$$M_S(t) = E\left[e^{St}\right].$$

E függvény értelmezési tartománya azon valós t értékek összessége, amelyekre a definícióban szereplő várható érték létezik.

A ”momentumgeneráló függvény” elnevezés magyarázatra szorul. Emlékeztetünk arra, hogy az exponenciális függvény hatványsora a következő:

$$e^{az} = 1 + az + a^2 \frac{1}{2!} z^2 + a^3 \frac{1}{3!} z^3 + \ldots...., \ a \ konstans.$$

Írjuk fel az e^{St} hatványsorát:

$$e^{St} = 1 + St + S^2 \frac{1}{2!} t^2 + S^3 \frac{1}{3!} t^3 + ...$$

Itt S az S valószínűségi változó tetszőleges lehetséges értékét képviseli. Olyan t értékekre, amelyekre e^{St} várható értéke létezik, felírhatjuk, hogy

$$M_S(t) = E\left[e^{St}\right] = 1 + E[S]\, t + E\left[S^2\right] \frac{1}{2!} t^2 + E\left[S^3\right] \frac{1}{3!} t^3 + ...$$

Írjuk fel $M_S(t)$ t szerinti deriváltját:

$$M_S'(t) = E[S] + E\left[S^2\right] t + E\left[S^3\right] \frac{1}{2!} t^2 + ...$$

Írjuk fel $M_S(t)$ második deriváltját:

$$M_S''(t) = E\left[S^2\right] + E\left[S^3\right] t + ...$$

Látható, hogy

$$M_S'(0) = E[S]\, ; \ M_S''(0) = E\left[S^2\right], ...$$

Összefoglalhatjuk tehát: A momentumgeneráló függvény első deriváltja a 0 helyen megadja a szóban forgó valószínűségi változó várható értékét: első momentumát, második deriváltja a 0 helyen a négyzet várható értékét: második momentumát, stb. - feltéve természetesen, hogy e momentumok léteznek.

Mutassuk meg, hogy a μ várható értékű és σ szórású normális eloszlású ξ valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye a következő:

$$M_\xi(t) = e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}.$$

Figyelembe véve, hogy ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

az $e^{\xi t}$ várható értéke így írható fel:

$$\begin{aligned}
M_\xi(t) &= E\left[e^{\xi t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+xt}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2x\mu+\mu^2-2xt\sigma^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2x(\mu+t\sigma^2)+(\mu+t\sigma^2)^2-t^2\sigma^4-2\mu t\sigma^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2x(\mu+t\sigma^2)+(\mu+t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+t\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx = e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}},
\end{aligned}$$

mert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-(\mu+t\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}$ a $\mu+t\sigma^2$ várható értékű és σ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye, amelynek integrálja a valós számegyenesen 1.

Mutassuk meg, hogy a β paraméterű exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye a következő:

$$M_\xi(t) = \frac{\beta}{\beta-t},\ t<\beta.$$

Figyelembe véve, hogy ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & \textit{ha } x\geq 0 \\ 0 & \textit{különben}, \end{cases}$$

az $e^{\xi t}$ várható értéke így írható fel:

$$\begin{aligned}
M_\xi(t) &= E\left[e^{\xi t}\right] = \int_0^\infty e^{xt}\beta e^{-\beta x}dx = \beta\int_0^\infty e^{(t-\beta)x}dx \\
&= \frac{\beta}{t-\beta}\left[e^{(t-\beta)x}\right]_0^\infty = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta-t}, & \textit{ha } t<\beta \\ +\infty & \textit{különben}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy a λ paraméterű Poisson eloszlású ξ valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye a következő:

$$M_\xi(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Figyelembe véve, hogy ξ eloszlása

$$P(\xi=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ n=0,1,2,...$$

az $e^{\xi t}$ várható értéke így írható fel:

$$M_\xi(t) = E\left[e^{\xi t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

ahol az utolsó egyenlőség azért áll fenn, mert az itt található végtelen összeg az $e^{\lambda e^t}$ hatványsora.

1.8. Portfolió-választás várható hasznosság maximalizálással.

Ebben a részben olyan befektetőről beszélünk, aki befektetési alternatíváit azok várható hasznossága szerint rangsorolja.

Tegyük fel, hogy a befektető V vagyonnal rendelkezik és hasznossági függvénye szigorúan növekvő konkáv függvény. Portfólióját adott n fajta értékpapírból állítja össze, amelyekből származó jövedelmek ugyanazon későbbi időpontban esedékesek. Az egyes értékpapírok (vagyonelemek) ára: $P_1, ..., P_n$ a döntés időpontjában ismeretes. Az egyes értékpapírok egy-egy egységéből származó jövendő $d_1, ...d_n$ jövedelmek valószínűségi változók ismert valószínűségi eloszlással. (Ez a megfogalmazás természetesen nem zárja ki a modellből a determinisztikus bevételű vagyonelemeket, amelyek esetében a vagyonelemből egyetlen lehetséges későbbi időpontbeli jövedelem származik és biztosan: 1 valószínűséggel.)

A befektető portfoliót szeretne összeállítani, vagyis meghatározni az egyes értékpapíroknak azt a mennyiségét, amelyekkel ezek a portfólióban szerepelnek. Jelölje e meghatározandó mennyiségeket - változókat - $\theta_1, ..., \theta_n$. Ekkor a befektető vagyona a szóban forgó későbbi időpontban így írható fel: $x = \theta_1 d_1 + ... + \theta_n d_n$. Minthogy $d_1, ...d_n$ valószínűségi változók, ezért x is valószínűségi változó, amelynek lehetséges realizációi és azok bekövetkezési valószínűségei a $d_1, ...d_n$ realizációiból és azok bekövetkezési valószínűségeiből számíthatók. A befektető tehát maximalizálni akarja a portfólióból származó jövendő x vagyona hasznosságának a várható értékét tudva, hogy jelenlegi V vagyonánál nem fektethet be többet.

Modellünk tehát a következő:

$$
\begin{aligned}
E\left[u(x)\right] &\rightarrow \max \\
\sum_{i=1}^{n} \theta_i d_i &= x \\
x &\geq 0 \\
\sum_{i=1}^{n} \theta_i P_i &\leq V.
\end{aligned}
$$

Itt $x \geq 0$ azt jelzi, hogy az x valószínűségi változó lehetséges értékei csak nemnegatívak lehetnek.

1.2. Példa. *Tekintsünk egy befektetést, amely* 2 *év múlva a befektető* V *vagyonát háromszorosan megtéríti, ha nagyon kedvező feltételek állnak be, a befektető visszakapja vagyonát közepesen kedvező feltételek mellett, és teljes egészében elveszti, ha rosszul alakulnak a dolgok. E három állapot valószínűségei sorra:* $0,3; 0,4; 0,3$. *A várható megtérülés tehát:* $0,3 \cdot 3 + 0,4 = 1,3$. *Ez azonban csak egy kicsit kedvezőbb, mint ha kockázatmentes értékpapírba fektet, amelynek megtérülése* $1,2$. *Kérdés, vagyonából mennyit kellene e kockázatos befektetésben és mennyit kockázatmentes értékpapírban tartania, ha hasznossági függvénye a logaritmus függvény és mindkét befektetés egységára azonos: egy értékű?*

Két változónk van tehát: θ_1 és θ_2. Foglaljuk táblázatba az adatainkat:

Állapotok	*Valószínűség*	*Kockázatos befektetés*	*Kockázatmentes befektetés*	*A portfolió realizációi*
Nagyon kedvező	0,3	3	1,2	$3\theta_1 + 1,2\theta_2$
Közepesen kedvező	0,4	1	1,2	$\theta_1 + 1,2\theta_2$
Kedvezőtlen	0,3	0	1,2	$1,2\theta_2$
Ár		1	1	$\theta_1 + \theta_2$

Megoldandó feladatunk a következő:

$$\begin{array}{lrcl}
(P) & 0,3\ln x_1 + 0,4\ln x_2 + 0,3\ln x_3 & \to & \max \\
& 3\theta_1 + 1,2\theta_2 & = & x_1 \\
& \theta_1 + 1,2\theta_2 & = & x_2 \\
& 1,2\theta_2 & = & x_3 \\
& \theta_1 + \theta_2 & \leq & V \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

Vizsgáljuk meg a feladatot. Elhagyjuk az első feltételcsoportot és x_i $(i = 1, 2, 3)$ megfelelő kifejezését behelyettesítjük a célfüggvénybe. Ez azt is lehetővé teszi, hogy az x nemnegatívitására vonatkozó feltételt elhagyjuk, mert a ln függvény alkalmazásával az argumentumot automatikusan pozitívnak írjuk elő. Végül a feltétel az optimális megoldásban, a logaritmus függvény növekvő volta miatt, szükségképpen egyenlőséggel teljesül. Marad tehát a következő feladat:

$$\begin{array}{rcl}
0,3\ln(3\theta_1 + 1,2\theta_2) + 0,4\ln(\theta_1 + 1,2\theta_2) + 0,3\ln(1,2\theta_2) & \to & \max \\
\theta_1 + \theta_2 & = & V.
\end{array}$$

A konvex programozás irodalmából ismeretes, hogy feladatunk optimális megoldása kielégíti a következő ún. egyensúlyi feltételeket (a Kuhn-Tucker feladatot):

$$\begin{array}{rcl}
\bigtriangledown L(\theta_1, ..., \theta_n, \lambda) & = & \bigtriangledown E\left[u\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i d_i\right)\right] - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i - V\right) = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}\theta_i P_i & = & V
\end{array}$$

ahol L a feladat Lagrange függvénye, λ pedig az egyetlen megmaradt feltételünkhöz tartozó duális változó.

Példánkban ez a feltételrendszer a következőket jelenti: Mivel a ln függvény θ_i szerinti deriváltja az argumentum reciproka szorozva az argumentum θ_i szerinti deriváltjával, ezért a példa-feladat egyensúlyi feltételei így néznek ki:

$$\begin{aligned} \frac{0,3\cdot 3}{3\theta_1+1,2\theta_2}+\frac{0,4}{\theta_1+1,2\theta_2} &= \lambda \\ \frac{0,3\cdot 1,2}{3\theta_1+1,2\theta_2}+\frac{0,4\cdot 1,2}{\theta_1+1,2\theta_2}+\frac{0,3\cdot 1,2}{1,2\theta_2} &= \lambda \\ \theta_1+\theta_2 &= V. \end{aligned}$$

E három egyenlet három ismeretlenét V függvényében ki tudjuk számítani. Az eredmény: $\theta_1 = 0,089V; \theta_2 = 0,911V; \lambda = 1/V$. Más szavakkal: a befektetőnek vagyona $8,9\%$-át érdemes a kockázatos, és $91,1\%$-át a kockázatmentes befektetésben tartani - legalábbis a következő két évre a példában bemutatott körülmények között.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a modellben nem zártuk ki, hogy valamelyik θ_i változó negatív legyen, azaz nem zártuk ki az ú.n. "rövidre eladás" (short selling) lehetőségét. Természetesen kizárhatjuk. Ekkor egy további feltételcsoportot alkotnak a θ_i változókra vonatkozó nemnegatívitási feltételek. (Példánkban ugyan ilyen feltétel nem szerepel, az optimális portfolió azonban negatív befektetést így sem tartalmaz.) Kiegészíthetjük, az adott helyzettől függően, más feltételekkel is a feladatot, pl. adhatunk felső korlátot a portfolió varianciájára, stb. A feladat megoldását illetően a kiegészítések azzal a következménnyel járnak, hogy explicit formulák helyett számítógépes program adhatja meg az optimális portfóliót. Előfordulhat az is, hogy a kiegészítő feltételek miatt megszűnik a feladatnak a megoldhatóság szempontjából igen fontos tulajdonsága: a konvex volta. Mivel ekkor egy lokális optimum pont többé nem feltétlenül globális is, ezért általában nem számíthatunk arra, hogy a rendelkezésre álló számítógépes programok megbízható eredményt adnak.

1.9. Gyakorlatok

1. Legyen a hasznossági függvényünk $u(v) = -e^{-5v}$. Két gazdasági lehetőség közül akarunk választani. Az egyiket jellemző X valószínűségi változó normális eloszlású 5 várható értékkel és 2 értékű varianciával. Az Y valószínűségi változó szintén normális eloszlású 6 várható értékkel és $2,5$ értékű varianciával. Melyiket részesítsük előnyben?

2. Legyen a döntéshozó hasznossági függvénye: $u(v) = k \ln v, k > 0$ konstans. Legyen vagyona: $V > 1$, X vesztesége a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mennyi az a maximális D díj, amit a teljes védelemért hajlandó fizetni?

3. Legyen a biztosított vagyona 100 egység, hasznossági függvénye $u(v) = \sqrt{v}$. A $(0, 100)$ intervallumban egyenletes eloszlású kár érheti. Mekkora az a maximális díj, amit a teljes védelemért hajlandó fizetni?

4. Annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos vagyontárgy kárt szenved a következő időszakban: $0,25$. Ha az X kár bekövetkezik, a kár eloszlását az $f(x) = 0,01e^{-0,01x}$, $x > 0$ sűrűségfüggvény írja le, vagyis a kár nagysága $0,01$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A vagyontárgy tulajdonosának és a biztosítónak egyaránt a következő a hasznossági függvénye: $u(v) = -e^{-0,005v}, v > 0$. A biztosító felajánlja a tulajdonosnak, hogy esetlegesen bekövetkező kárának a felét téríti.

a) Gondolja meg, alkalmas-e az exponenciális eloszlás a vagyontárgyban bekövetkező kár leírására?

Fogadjuk el a kár leírására a 100 várható értékű exponenciális eloszlást.

b) Mekkora díjat hajlandó a tulajdonos maximálisan fizetni a felajánlott részleges védelemért?

c) A biztosító minimálisan mekkora díjat állapít meg?

d) Mennyi a biztosító által vállalt kár várható értéke?

e) Létrejöhet-e a szerződés?

5. Az 1.2. példa (P) feladatára hivatkozunk. A $\theta_1 = V - \theta_2$ helyettesítéssel a feladat egyváltozós függvény maximalizálásává alakul. Oldja meg, és vesse össze a megoldást a példa megoldásával!

2. fejezet

KOCKÁZATI MODELLEK

A biztosítással kapcsolatos kockázatnak három fő eleme a biztosító által kifizetendő kárösszeg, a díjbevétel és a biztosító fizetőképessége, azaz a szolvencia. A kockázati díj a biztosítás díjának az a része, amely a szóban forgó kockázatot hivatott fedezni, figyelmen kívül hagyva a biztosító társaság fenntartásával, a kötvények eladásával kapcsolatos, stb. költségeket. Ahhoz, hogy meghatározzuk a kockázati díjat, a kárgyakoriságot és kárnagyságot kell ismernünk, számítanunk. A tanulmányozott modellek alapvető feltételezése az, hogy a kár bekövetkezése és a kár összege elkülönülten vizsgálható. Ez gyakran indokolt feltételezés - pl. az infláció hat a kárnagyságra, de nem hat a kárgyakoriságra; a biztonsági öv kötelezővé tétele csökkenti a kárnagyságot, de csak kis hatással van a kárgyakoriságra; a szigorúbb alkoholtilalom csökkenti a kárgyakoriságot, de kevésbé a kárnagyságot -, de nem mindig: csúszós, havas időben pl. a kárszám és a kár nagysága is megnőhet.

Tekintsünk egy kockázatállományt. Az ebből az állományból származó összkár érdekel bennünket. Először ennek az alakulását egy rövid időszakra: egy periódusra vizsgáljuk. Ha az állomány zárt, vagyis n darab fix időtartamú biztosításból áll, és lényegében nincs belépő, sem kilépő; ha az egyes kötvényekre a többi kötvénytől függetlenül következnek be káresemények; és ha a biztosítási állományhoz kapcsolódó kockázatot, kárnagyságot az egyes kötvényekre bekövetkező károk összegeként fogjuk fel, akkor egyéni kockázati modellekről beszélünk. A modellek másik csoportját a kollektív kockázati modellek alkotják, amelyek körében a bekövetkező károkat nem az egyes kötvényekhez kapcsoljuk, hanem a biztosítási állományt mint kockázatközösséget fogjuk fel, és az állomány egészében bekövetkező károk nagyságát, számát, stb. vizsgáljuk.

2.1. EGYÉNI KOCKÁZATI MODELLEK

Álljon az állományunk n darab kötvényből. Az i. kötvényre a szóbanforgó időszakban benyújtott kárigény valószínűségi változó, jelölje X_i. Feltesszük, hogy minden kötvényre legfeljebb egy kár következik be, és az egyes kötvényekre benyújtott kárigények egymástól függetlenül következnek be. Megjegyezzük, hogy ez nem túl realisztikus feltevés pl. árvízkár elleni biztosítás esetén, de pl. nagyszámú személygépkocsi felelősségbiztosítás vagy egyéves időtartamra szóló életbiztosítások esetén realisztikus.

Az állományunk összkára így alakul:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

S szintén valószínűségi változó, ennek az eloszlása érdekli a biztosító társaságot. A teljes kárigény eloszlása (várható értéke, varianciája és egyéb tulajdonságai) képezik a díjszámítás, a tartalékképzés alapját, ebből következtethet a biztosító arra, fenyegeti-e csőd, és ha igen, milyen valószínűséggel.

2.1.1. A kárszám

Ha az egyes kötvényekre azonos valószínűséggel következik be kár, akkor a kárszám binomiális eloszlású.

A valószínűségelméletben a binomiális eloszlást a következőképpen szokás bevezetni: Végezzünk n számú független kísérletet annak a megfigyelésére, hogy egy bizonyos p valószínűségű esemény e kísérletek alkalmából hányszor következik be. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékeit a szóbanforgó esemény bekövetkezéseinek lehetséges számai alkotják, ezek: $0, 1, 2, ..., n$. Annak a valószínűsége, hogy az n számú kísérlet során a szóban forgó esemény pontosan k alkalommal következik be, a kísérletek függetlensége miatt: $P(\xi = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$ Könnyen látható, hogy $E[\xi] = np$ és $Var[\xi] = np(1-p)$.

Az n kötvényt tartalmazó állomány esetében az i. kísérlet arra irányul, hogy megfigyeljük, az i. kötvényre bejelentenek-e kárt az adott időszakban. Ha kötvényenként legfeljebb egy kár következik be, egymástól függetlenül és azonos valószínűséggel, akkor az állományra bejelentett károk száma szükségképpen binomiális eloszlású valószínűségi változó.

Mint ismeretes, a binomiális eloszlást normális eloszlással közelíthetjük, ha az np várható kárszám nagy, vagy Poisson eloszlással, ha p elég kicsi, vagyis np és $np(1-p)$ közelítőleg azonos értékű.

2.1.2. A biztosítási állomány összkára

Négy módszert ismertetünk arra, hogyan járhatunk el a biztosító által vállalt kockázat: az S teljes kárigény eloszlásának a meghatározásában.

Közelítés normális eloszlással

Ha az állomány homogén, vagyis az egyes kötvények kárigénye azonos eloszlású, és az egyes kárigények közel normális eloszlásúak, vagy nem normális eloszlásúak, de n elég nagy (hüvelykujj-szabály: $n \geq 30$), akkor, mint a valószínűségelméletből ismeretes, S közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető (központi határeloszlás tétel). Ez az egyszerű eset: ekkor csak a közelítő normális eloszlás két paraméterét: az eloszlás várható értékét és szórását kell az egyes kötvényekre eső kárigények várható értéke és varianciája (szórásnégyzete) ismeretében meghatároznunk. S várható értéke a várható értékek összege:

$$E[S] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n],$$

és a függetlenség feltevése miatt S varianciája a varianciák összege:

$$Var[S] = Var[X_1] + Var[X_2] + ... + Var[X_n].$$

Valószínűségi változók összege konvolúcióval

Ha S nem tekinthető normális eloszlásúnak, akkor az eljárás hosszadalmasabb: meghatározandó az egyes kötvények kárigényének eloszlása és ezekből az összeg eloszlása. Az összeg eloszlását két valószínűségi változó összegének eloszlására vonatkozó számítások ismételt alkalmazásával nyerhetjük a következő módon:

Legyenek ξ és η tetszőleges nemnegatív diszkrét valószínűségi változók. A $\varsigma = \xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye definíció szerint a következő:

$$F_\varsigma(x) = P(\varsigma < x) = P(\xi + \eta < x).$$

A teljes valószínűség tételének alkalmazásával diszkrét esetben a következőt kapjuk:

$$F_\varsigma(x) = \sum_{v<x} P(\xi + \eta < x|\eta = v)P(\eta = v) = \sum_{v<x} P(\xi < x - v|\eta = v)P(\eta = v).$$

Ha ξ és η függetlenek, akkor $P(\xi < x - v|\eta = v) = P(\xi < x - v)$. A $P(\xi = x) = f_\xi(x), P(\eta = v) = f_\eta(v)$ jelölést alkalmazva F_ς és f_ς mint az F_ξ,F_η és f_ξ, f_η függvények konvolúciója így írható fel:

$$F_\varsigma(x) = \sum_{v<x} F_\xi\left(x - v\right) f_\eta\left(v\right); P\left(\varsigma = x\right) = f_\varsigma\left(x\right) = \sum_{v<x} f_\xi\left(x - v\right) f_\eta\left(v\right).$$

Folytonos nemnegatív valószínűségi változók esetében a megfelelő összefüggések a következők:

$$F_\varsigma\left(x\right) = \int_0^x P(\xi < x - v|\eta = v) f_\eta\left(v\right) dv = \int_0^x F_\xi\left(x - v\right) f_\eta\left(v\right) dv;$$
$$f_\varsigma\left(x\right) = \int_0^x f_\xi\left(x - v\right) f_\eta\left(v\right) dv;$$

Momentumgeneráló függvény alkalmazása

Az összkár eloszlását néha a momentumgeneráló függvény segítségével határozhatjuk meg:

$$M_S\left(t\right) = E\left[e^{tS}\right] = E\left[e^{t(X_1+X_2+...+X_n)}\right] = E\left[e^{tX_1}e^{tX_2}...e^{tX_n}\right].$$

Ha $X_1, ..., X_n$ függetlenek, akkor $e^{tX_1}, ..., e^{tX_n}$ is függetlenek, ezért szorzatuk várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával:

$$M_S\left(t\right) = M_{X_1}\left(t\right) M_{X_2}\left(t\right) ... M_{X_n}\left(t\right).$$

A momentumgeneráló függvények szorzatához tartozó egyetlen eloszlás néha felismerhető.

Rekurziós módszerek

Ha az összeadandó valószínűségi változók eloszlása bonyolult, vagy nem függetlenek, nagyszámú eloszlás összegének a meghatározása nehéz feladat. Közelítő rekurziós módszerek azonban gyakran alkalmazhatók, ezekről statisztikai kézikönyvekből tájékozódhat az érdeklődő olvasó.

Az első két esetben is szükség van az i. kötvényre benyújtott X_i kár várható értékére és szórására, a második esetben X_i eloszlására is. A következő részben azt vizsgáljuk, hogyan határozhatjuk meg a bekövetkező kárnagyság eloszlásának ismeretében a biztosítási szerződés szerinti (pl. ha önrészt tartalmaz vagy a kártérítés maximális összegét kiköti) B_i kártérítés eloszlását. Ezután a kötvényre eső X_i kárigény eloszlását elemezzük, ha tudjuk, mekkora p_i valószínűséggel következik be kár a kötvényre.

Mind a B_i, mind az X_i valószínűségi változó az esetek nagy részében kevert eloszlású: a valószínűségi változó lehetséges értékeinek tartománya tartalmaz olyan szakaszokat, amelyeken az összesen 1 valószínűség egy része folytonosan oszlik el, és olyan pontokat, amelyekben pozitív valószínűség összpontosul. Vizsgáljuk meg, miként írhatók le e kevert eloszlások egy diszkrét és egy folytonos eloszlás segítségével.

2.1.3. Kevert eloszlások

Legyen ξ diszkrét, η pedig folytonos valószínűségi változó. ξ eloszlását azzal írjuk le, hogy megadjuk a lehetséges értékeit és azok bekövetkezési valószínűségeit: a $P(\xi = x) = f_\xi(x)$ értékeket; η eloszlását pedig az $f_\eta(x)$ sűrűségfüggvény jellemzi. Mindkettőt egyértelműen leírja az eloszlásfüggvénye is: $P(x \leq \xi < x + dx) = F_\xi(x + dx) - F_\xi(x) = P(\xi = x) = f_\xi(x)$, ha dx elég kicsi, és $P(x \leq \eta < x + dx) = F_\eta(x + dx) - F_\eta(x) = \int\limits_x^{x+dx} f_\eta(t)dt \approx f_\eta(x)dx$, ha dx elég kicsi. A kevert eloszlások tartalmaznak pozitív valószínűségű pontokat és olyan intervallumokat is, amelyeken a valószínűség folytonosan oszlik el.

Nézzük először, hogyan származtatható egy kevert eloszlás a diszkrét ξ és a folytonos η valószínűségi változókból.

Legyen I karakterisztikus eloszlású: $P(I = 1) = p, P(I = 0) = 1 - p, 0 \leq p \leq 1$, valamint I, ξ és η függetlenek. Ekkor a $\zeta = I \cdot \xi + (1 - I) \cdot \eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$\begin{aligned} F_\zeta(z) &= P(\zeta < z|I = 1)P(I = 1) + P(\zeta < z|I = 0)P(I = 0) \\ &= p\, P(\xi < z) + (1 - p)P(\eta < z) = pF_\xi(z) + (1 - p)F_\eta(z). \end{aligned}$$

Így $dF_\zeta(z) = P(z \leq \zeta < z + dz) = F_\zeta(z + dz) - F_\zeta(z) = pf_\xi(z) + (1-p)f_\eta(z)dz$, ha dz elég kicsi. Látható, hogy $pf_\xi(z)$ azt mutatja, hogy a z pontban, $(1 - p)f_\eta(z)dz$ pedig közelítőleg azt, hogy z és $z + dz$ között mennyi valószínűség koncentrálódik az összesen 1 értékű valószínűségből.

ζ egy g függvényének várható értéke ezért a következő, ahol az összegezés ξ lehetséges x_k értékeire történik:

$$\begin{aligned} &E\left[g\left(\varsigma\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right) dF_\varsigma\left(x\right) = p\sum_{x_k} g\left(x_k\right) f_\xi\left(x_k\right) + (1-p) \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right) f_\eta\left(x\right) dx \\ &= pE_\xi\left[g\left(\xi\right)\right] + (1-p)\, E_\eta\left[g\left(\eta\right)\right]. \end{aligned}$$

ζ momentumgeneráló függvénye tehát:

$$\begin{aligned} M_\varsigma\left(t\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_\varsigma\left(x\right) \\ &= p \cdot \sum_{x_k} e^{tx_k} f_\xi\left(x_k\right) + (1-p) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_\eta\left(x\right) dx \\ &= pM_\xi\left(t\right) + (1-p)\, M_\eta\left(t\right). \end{aligned}$$

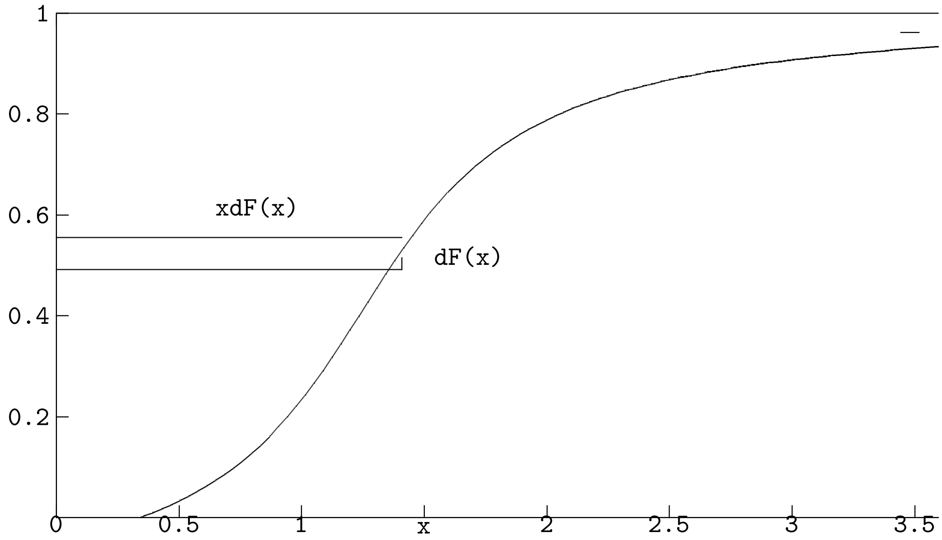
A valószínűségelméletből ismeretes, hogy egy nemnegatív ζ valószínűségi változó várható értéke csak az eloszlásfüggvénye segítségével is kifejezhető: $E\left[\varsigma\right] = \int_0^\infty \left(1 - F_\varsigma\left(x\right)\right) dx$.

Ezt az összefüggést belátjuk, ha az eloszlás folytonos. Parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty x f_\varsigma\left(x\right) dx = -\left[x\left(1 - F_\varsigma\left(x\right)\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \left(1 - F_\varsigma\left(x\right)\right) dx.$$

Be kell látnunk, hogy az első tag 0-hoz tart. Vegyük észre, hogy

$$x\left(1 - F_\varsigma\left(x\right)\right) = x \int_x^\infty f_\varsigma\left(t\right) dt \leq \int_x^\infty t f_\varsigma\left(t\right) dt.$$



2.1. ábra.

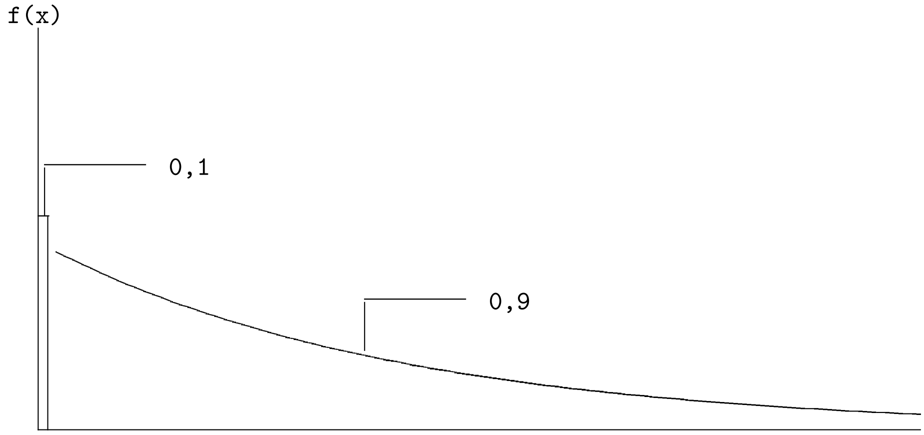
Mivel $\lim_{x\to\infty}\int\limits_x^\infty tf_\varsigma(t)\,dt=0$, hiszen feltettük, hogy ζ várható értéke létezik, ezért $\lim_{x\to\infty}x\left(1-F_\varsigma(x)\right)=0$. Ezzel az állítást beláttuk.

Az összefüggést folytonos, diszkrét és kevert eloszlás esetére egyaránt illusztrálja az 2.1. ábra.

Nézzük most, egy kevert eloszlásból hogyan következtethetünk arra, hogy milyen alkotó elemekből áll a valószínűségi változónk. Tekintsük a következő kevert eloszlású ζ valószínűségi változót: $P(\zeta=0)=0,2; P(\zeta=10)=0,4; P(z\le\zeta<z+dz)=0,125dz$, ha $2\le z, z+dz<5,2$, vagyis

$$F_\varsigma(z)=\begin{cases}0;\ ha\ z\le 0\\ 0,2;\ ha\ 0<z\le 2\\ 0,2+\frac{z-2}{8};\ ha\ 2<z\le 5,2\\ 0,6;\ ha\ 5,2<z\le 10\\ 1;\ ha\ z>10\end{cases}$$

Látható, hogy $\zeta=I\cdot\xi+(1-I)\cdot\eta$, ahol $P(I=1)=0,6$, a ξ és η összetevők közül ξ diszkrét eloszlású: $P(\xi=0)=0,2\cdot\frac{1}{0,6}$; $P(\xi=10)=0,4\cdot\frac{1}{0,6}$, η pedig a (2, 5,2) intervallumon egyenletes eloszlású. $M_\varsigma(t)=0,6\cdot\left(\frac{0,2}{0,6}+\frac{0,4}{0,6}e^{10t}\right)+0,4\int\limits_2^{5,2}e^{tx}\frac{1}{3,2}dx$.



2.2. ábra.

A gondolatmenet akkor is alkalmazható, ha két folytonos vagy két diszkrét valószínűségi változót „keverünk össze”. Ha ζ momentumgeneráló függvénye például $M_{\varsigma}(t) = p \cdot \frac{5}{5-t} + (1-p)\frac{7}{7-t}$, akkor tudjuk, hogy ζ két – 5 illetve 7 paraméterű - exponenciális eloszlású valószínűségi változó keveréke, sűrűségfüggvénye tehát $f_{\varsigma}(z) = p \cdot 5 \cdot e^{-5z} + (1-p) \cdot 7 \cdot e^{-7z},\ z > 0$. Ha ζ momentumgeneráló függvénye $M_{\varsigma}(t) = 0,1 + 0,9 \cdot \frac{7}{7-t}$, akkor tudjuk, hogy ζ egyik összetevője az a degenerált valószínűségi változó, amelynek egyetlen lehetséges értéke a 0, amelyet ennélfogva 1 valószínűséggel vesz fel, a másik összetevő pedig egy 7 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye:

$$F_{\varsigma}(z) = \begin{cases} 0;\ ha\ z \leq 0, \\ 0,1 + 0,9\left(1 - e^{-7z}\right);\ ha\ 0 < z \end{cases}$$

Az eloszlás az 2.2. ábrán látható.

2.1.4. A kár, amit a biztosító megtérít

A kárigény - a biztosító által vállalt kockázat - különbözhet a ténylegesen bekövetkező kár nagyságától, hiszen a biztosítási szerződés tartalmazhat önrészt, maximálisan fizetendő kártalanítási értéket, stb. Példákon mutatjuk be, hogyan járhatunk el, ha a biztosító által megtérítendő B kárnagyság eloszlását szeretnénk meghatározni, természetesen a bekövetkező kárnagyság eloszlásának ismeretében.

2.1. Példa. *A biztosító maximálja a megtérített kárt.*

Egy biztosítási állományban a bekövetkező károk nagysága $0,5$ paraméterű exponenciális eloszlást követ, vagyis sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, ha\ x \geq 0, \\ 0\ különben. \end{cases}$$

Ha kár következik be, a biztosító teljes egészében kifizeti a kárt, ha az nem haladja meg a 3 értéket, ha meghaladja, akkor pedig 3-at fizet (ugyanolyan mértékegységben, mint a várható érték: lehet 1000 Ft-ban, 10000 Ft-ban, stb.). Számoljuk ki a biztosító által fizetendő kártérítés eloszlását, várható értékét, varianciáját.

Megoldás. Először leírjuk a biztosító által megtérített B kárnagyság eloszlását. Megállapítjuk, hogy az 1 valószínűségből annyi koncentrálódik a 3 pontban, amennyi annak a valószínűsége, hogy a kár 3 vagy több:

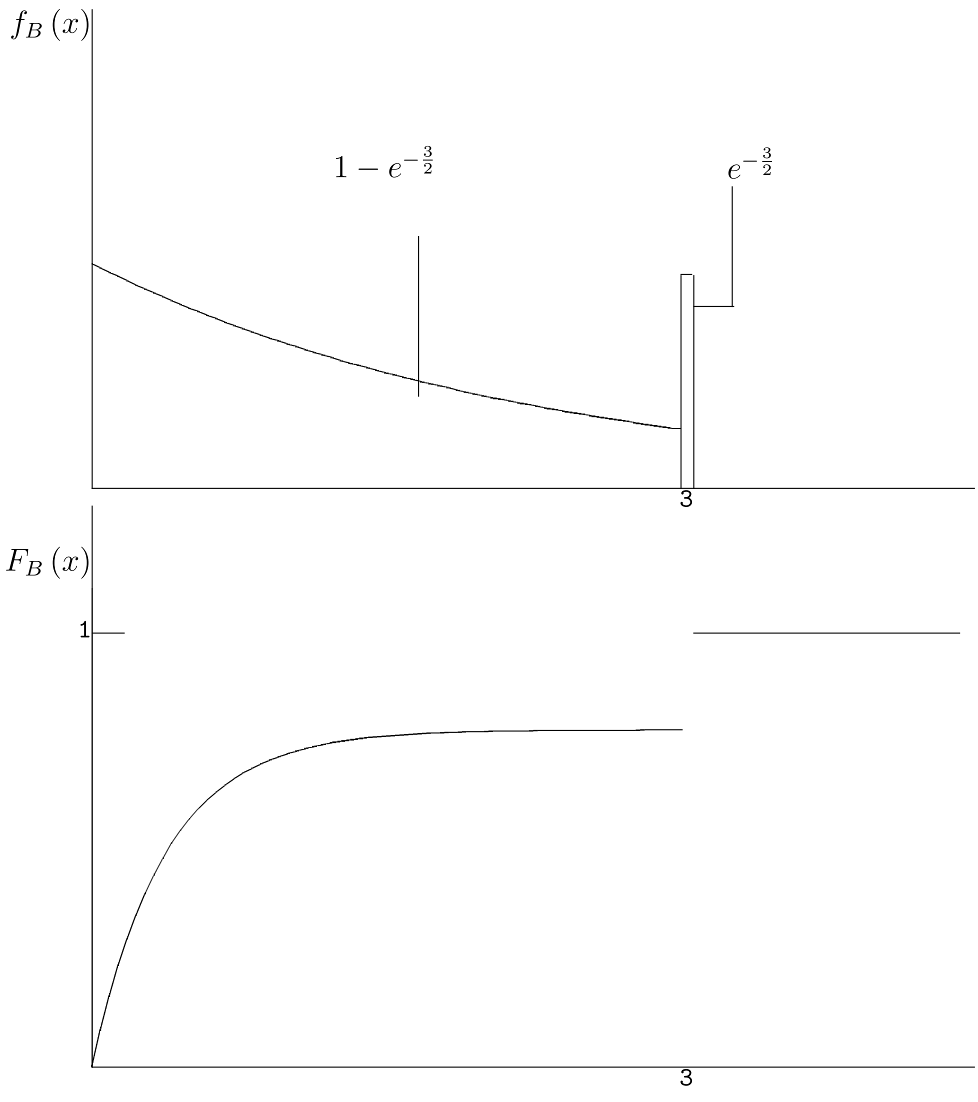
$$f_B(3) = \int_3^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_3^\infty = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,2231.$$

A maradék $1-e^{-\frac{3}{2}}$ valószínűség a $(0,3)$ intervallumon oszlik el. B eloszlását, amelyet a 2.3. ábra mutat, tehát az alábbi eloszlásfüggvény írja le:

$$F_B(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x};\ ha\ 0 < x \leq 3; \\ 1;\ ha\ x > 3; \\ 0;\ ha\ x \leq 0. \end{cases}$$

A μ várható értéket és σ^2 varianciát számoljuk:

$$\begin{aligned} \mu = E[B] &= 3e^{-\frac{3}{2}} + \int_0^3 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}xdx \\ &= 3e^{-\frac{3}{2}} + \left[-xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \int_0^3 e^{-\frac{1}{2}x}dx \\ &= 2\left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx 1,5537; \end{aligned}$$



2.3. ábra.

$$
\begin{aligned}
E\left[B^2\right] &= 9e^{-\frac{3}{2}} + \int_0^3 \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}x^2dx \\
&= 9e^{-\frac{3}{2}} + \left[-x^2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \int_0^3 2xe^{-\frac{1}{2}x}dx = 4\left(2-5e^{-\frac{3}{2}}\right); \\
\sigma^2 &= 8-20e^{-\frac{3}{2}} - 4\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \approx 1,1233.
\end{aligned}
$$

2.2. Példa. *A szerződés meghaladásos önrészt tartalmaz.*

Egy biztosítási állományban a bekövetkező károk nagysága $0,5$ paraméterű exponenciális eloszlást követ, vagyis sűrűségfüggvénye a következő:

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, ha\ x \geq 0, \\ 0\ különben. \end{cases}
$$

Az egyes szerződések meghaladásos önrészt tartalmaznak, azaz a biztosító az önrész alatti károkat nem téríti meg, az önrész feletti károkat azonban teljes egészében megtéríti. Az önrész 1 értékű. Számoljuk ki a biztosító által fizetendő kártérítés eloszlását, várható értékét, varianciáját.

Megoldás. Először leírjuk a biztosító által megtérített B kárnagyság eloszlását. Megállapítjuk, hogy ha kár következik be, a biztosító vagy 0 értéket térít vagy legalább 1 értéket. Az 1 valószínűségből tehát annyi koncentrálódik a 0 pontban, amennyi annak a valószínűsége, hogy a kár 1-nél nem nagyobb:

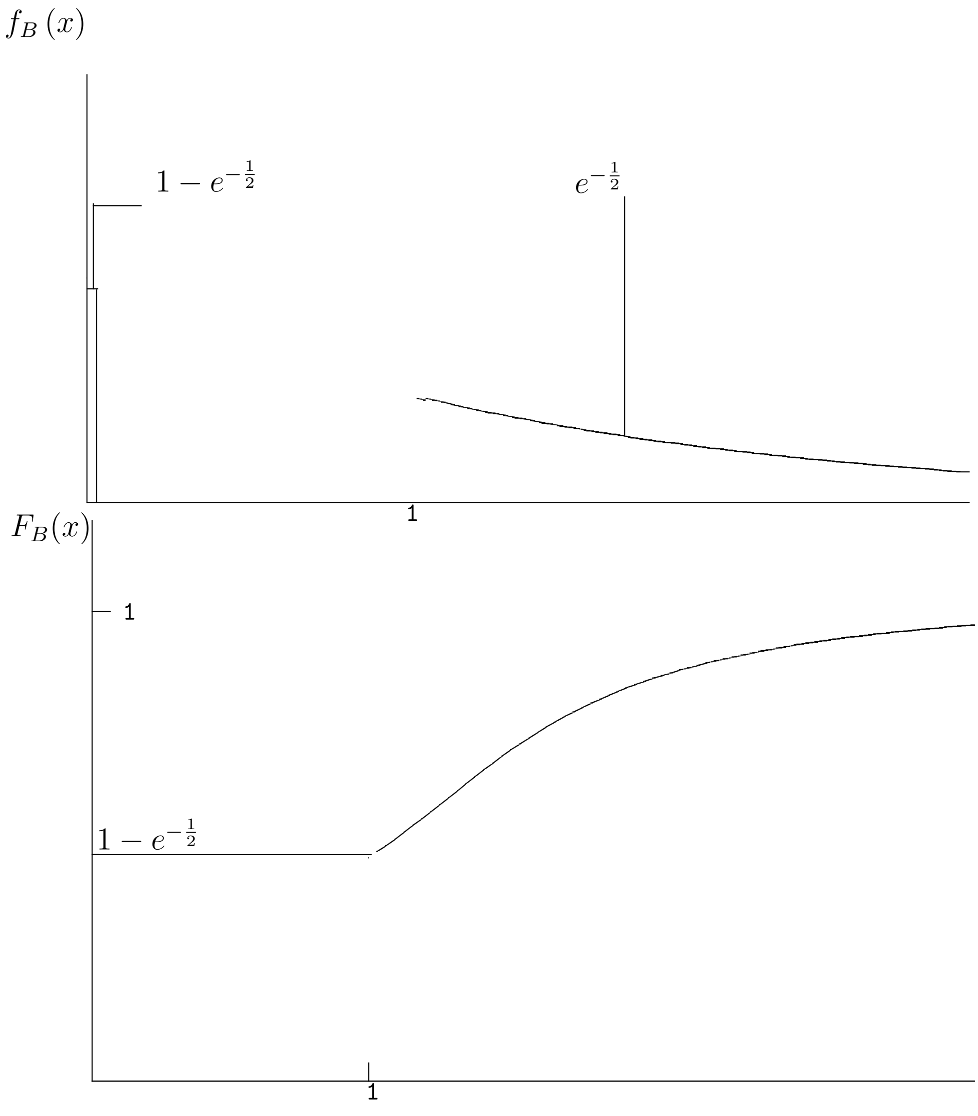
$$
f_B(0) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^1 = 1-e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,3935.
$$

A maradék $e^{-\frac{1}{2}}$ valószínűség az $(1,\infty)$ intervallumon oszlik el. B eloszlását tehát, amelyet a 2.4. ábra mutat, az alábbi eloszlásfüggvény írja le:

$$
F_B(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{2}};\ ha\ 0 < x \leq 1; \\ 1-e^{-\frac{1}{2}} + \int_1^x \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = 1-e^{-\frac{1}{2}x};\ ha\ x > 1; \\ 0;\ ha\ x \leq 0. \end{cases}
$$

A μ várható érték és σ^2 variancia a következő lesz:

$$
\begin{aligned}
\mu = E[B] &= 0,3935 \cdot 0 + \int_1^\infty \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}xdx \\
&= \left[-xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x}dx = 3e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,819;
\end{aligned}
$$



2.4. ábra.

$$E\left[B^2\right] = 0,3935 \cdot 0^2 + \int\limits_1^\infty \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}x^2dx$$
$$= \left[-x^2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_1^\infty + \int\limits_1^\infty 2xe^{-\frac{1}{2}x}dx = 13e^{-\frac{1}{2}};$$
$$\sigma^2 = 13e^{-\frac{1}{2}} - \left(3e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \approx 4,57.$$

2.3. Példa. *A szerződés levonásos önrészt tartalmaz.*

Egy biztosítási állományban a bekövetkező károk nagysága $0,5$ paraméterű exponenciális eloszlást követ, vagyis sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x};\ \textit{ha}\ x \geq 0, \\ 0\ \textit{különben}. \end{cases}$$

Az egyes szerződések levonásos önrészt tartalmaznak, azaz a biztosító az önrész alatti károkat nem téríti meg, az önrész feletti károkból pedig az önrészt levonja a kártérítésből. Az önrész 1 értékű. Számoljuk ki a biztosító által fizetendő kártérítés eloszlását, várható értékét, varianciáját.

Megoldás. Először leírjuk a biztosító által megtérített B kárnagyság eloszlását. Megállapítjuk, hogy az 1 valószínűségből annyi koncentrálódik a 0 pontban, amennyi annak a valószínűsége, hogy a kár 1-nél nem nagyobb:

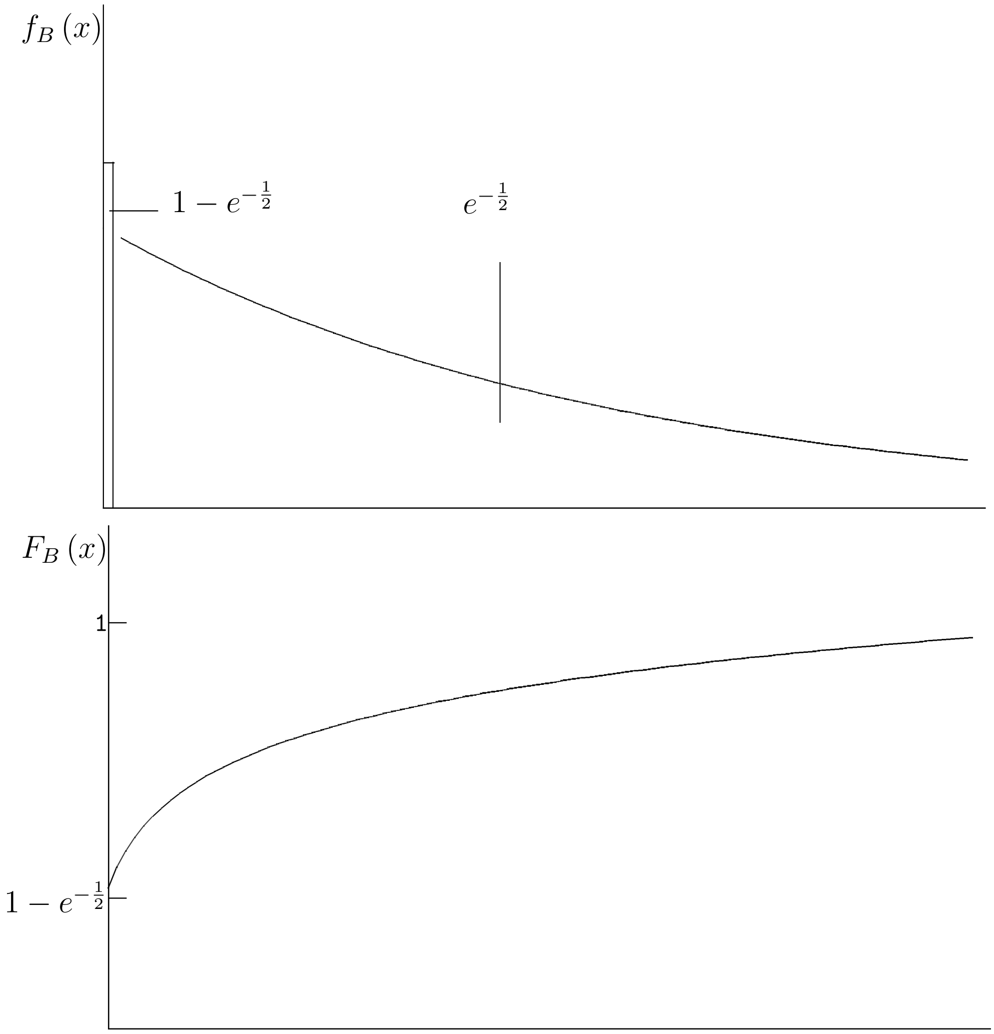
$$f_B(0) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,3935.$$

A maradék $e^{-\frac{1}{2}}$ valószínűség a $(0,\infty)$ intervallumon oszlik el, a ténylegesen bekövetkezett $B+1$ kárnagyság eloszlását követi oly módon, hogy:

$$P(a < B < b) = P(a+1 < \text{kárnagyság} < b+1)$$
$$= \int\limits_{a+1}^{b+1} \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = \int\limits_a^b \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+1)}dx$$
$$= e^{-\frac{1}{2}} \int\limits_a^b \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx, a > 0, b > a.$$

B eloszlását tehát, amelyet a 2.5. ábra mutat, az alábbi eloszlásfüggvény írja le:

$$F_B(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^x \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = 1 - e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x};\ \textit{ha}\ x > 0; \\ 0;\ \textit{ha}\ x \leq 0. \end{cases}$$



2.5. ábra.

A μ várható érték és a σ^2 variancia a következő:

$$\begin{aligned}\mu = E[B] &= \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot 0 + e^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} x dx \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \left[-xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{\infty} + e^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} dx = 2e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,213;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[B^2] &= \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot 0^2 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x} x^2 dx \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \left[-x^2 e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{\infty} + e^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} 2xe^{-\frac{1}{2}x} dx = 8e^{-\frac{1}{2}}; \\ \sigma^2 &= 8e^{-\frac{1}{2}} - \left(2e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \approx 3,38.\end{aligned}$$

2.1.5. A kötvényre benyújtott kárigény

Vezessük be az I_i valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha az i. kötvényre bekövetkezik kár, 0, ha nincs kár. Legyen a kár bekövetkezésének valószínűsége az i. kötvényre: $P(I_i = 1) = p_i$. Az I_i valószínűségi változó tehát a jól ismert karakterisztikus eloszlással rendelkezik, $E[I_i] = p_i; Var[I_i] = p_i(1 - p_i)$. Ez azt jelenti, hogy ha $p_i = p$ minden i-re és a károk egymástól függetlenül következnek be, akkor az állományban bekövetkező károk száma: $N = I_1 + I_2 + ... + I_n$ binomiális eloszlású.

Jelölje az i. kötvényre bekövetkezhető kárigényt B_i. Amint erről már szó volt, feltesszük, hogy a B_i kárnagyság és a kárszámot jelentő I_i valószínűségi változók függetlenek. Jelölje X_i az i-edik kötvényre bekövetkező kárigényt. Hagyjuk el az indexeket és számoljuk ki X eloszlását. Minthogy az X valószínűségi változó lehetséges értékeit B lehetséges értékei alkotják, ha $I = 1$, illetve X a 0 értéket veszi fel, ha $I = 0$, ezért az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következőképpen írható fel (szintén a teljes valószínűség tétele alkalmazásával):

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x | I = 1)P(I = 1) + P(X < x | I = 0)P(I = 0);$$

$$F_X(x) = P(B < x)P(I = 1) + g(x)P(I = 0), \tag{2.1}$$

ahol $g(x) = 1$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$ különben.

Határozzuk meg most X várható értékét és varianciáját, ha $E[B] = \mu$ és $Var[B] = \sigma^2$ ismeretesek. Felhasználjuk a következő összefüggést, amely fennáll tetszőleges ξ,

η valószínűségi változók között:

$$E[\xi] = E[E[\xi|\eta]], \; Var[\xi] = E[Var[\xi|\eta]] + Var[E[\xi|\eta]].$$

Az X valószínűségi változó I feltétel melletti várható értéke és varianciája így írható fel:

$$E[X|I] = IE[B] = I\mu; \; Var[X|I] = IVar[B] = I\sigma^2.$$

A második összefüggésben felhasználtuk, hogy I és B függetlenek. Így

$$\begin{aligned} &E[X] = E[E[X|I]] = E[I\mu] = p\mu; \\ &Var[X] = E[Var[X|I]] + Var[E[X|I]] = E[I\sigma^2] + Var[I\mu] \\ &= p\sigma^2 + \mu^2 p(1-p). \end{aligned}$$

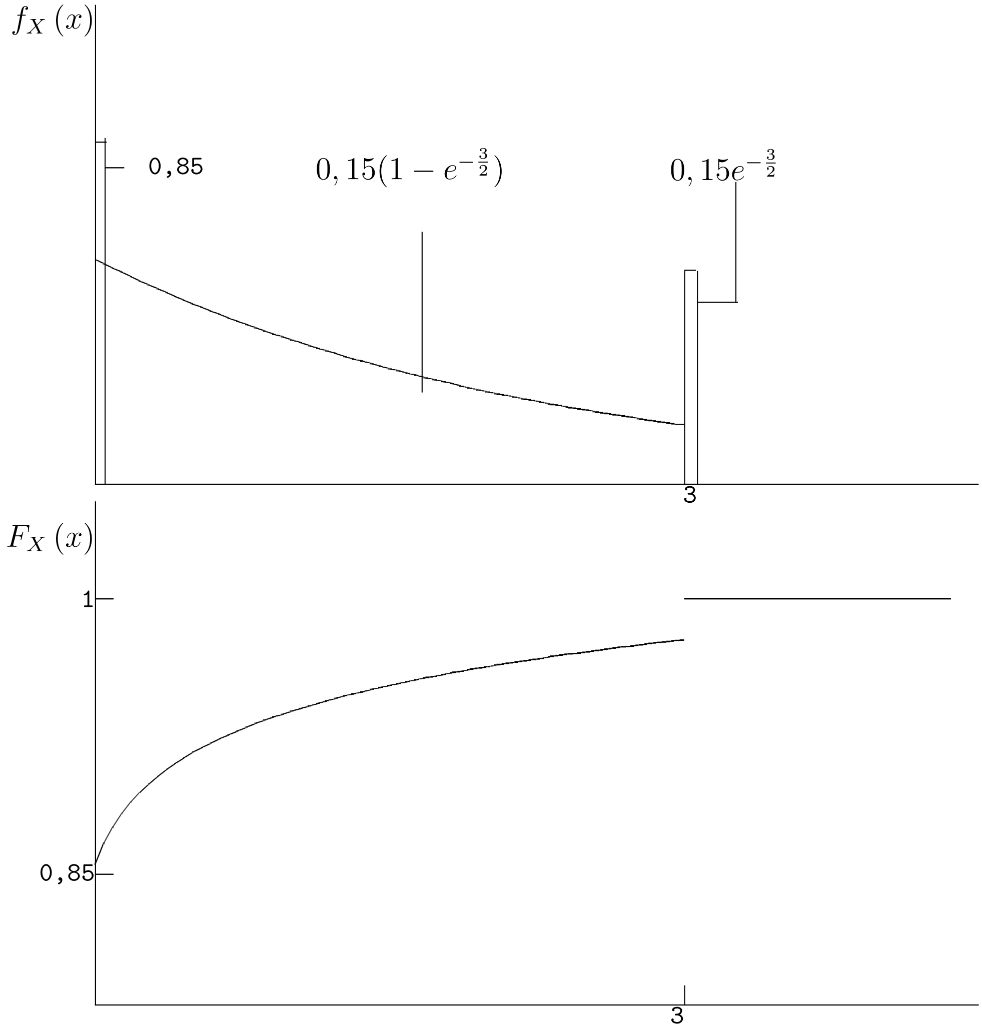
Folytassuk az előző fejezetben bemutatott példákat a kötvényre eső X kárigény eloszlásának a meghatározására.

2.4. Példa. *A biztosító maximálja a megtérített kárt.*

Tekintsük az 2.1. Példában leírt gépjármű-töréskár biztosítási állományt. Múltbeli adatokból tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egy kötvényre kárigényt jelentenek be: $0,15$. a) Számoljuk ki egy kötvény káreloszlását, várható értékét, varianciáját. b) Mennyi legyen a kötvény biztosítási díja (ezer Ft-ban), hogy a díj 95%-os valószínűséggel fedezze a kárt?

Megoldás. a) Felhasználjuk a biztosító által megtérített B kárnagyság eloszlását, amelyet a 2.1. példa megoldásában kaptunk. Megállapítjuk, hogy $0,85$ valószínűséggel nem következik be kár, vagyis ekkora valószínűség koncentrálódik a 0 pontban. A maradék $0,15$ valószínűség B eloszlásával arányosan oszlik el. Így az X valószínűségi változó szintén kevert típusú – ld. 2.6. ábra -, eloszlásfüggvénye a következő:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1; \quad ha\ x > 3; \\ 0,85 + 0,15\left(1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right); \quad ha\ 3 \geq x > 0; \\ 0; \quad ha\ x \leq 0. \end{cases}$$



2.6. ábra.

X várható értékének és varianciájának a kiszámításához a B valószínűségi változó már meglévő μ várható értékét és σ^2 varianciáját felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$E[X] = 0,15\mu = 0,15 \cdot 1,5537 = 0,233;$$

$$Var[X] = 0,15\sigma^2 + 0,15 \cdot 0,85\mu^2 = 0,4763.$$

b) Számoljuk ki a D biztosítási díjat, ha a díj 95%-os valószínűséggel fedezi a kárt:

$$P(X \leq D) = 0,95.$$

Minthogy 3 vagy annál nagyobb értéket az X 0,05-nél kevesebb valószínűséggel vesz fel, ezért a (0,3) folytonos szakaszon kell keresnünk D értékét. Az eloszlásfüggvény definícióját felhasználva a következőt kapjuk:

$$0,85 + 0,15\left(1 - e^{-\frac{1}{2}D}\right) = 0,95;$$

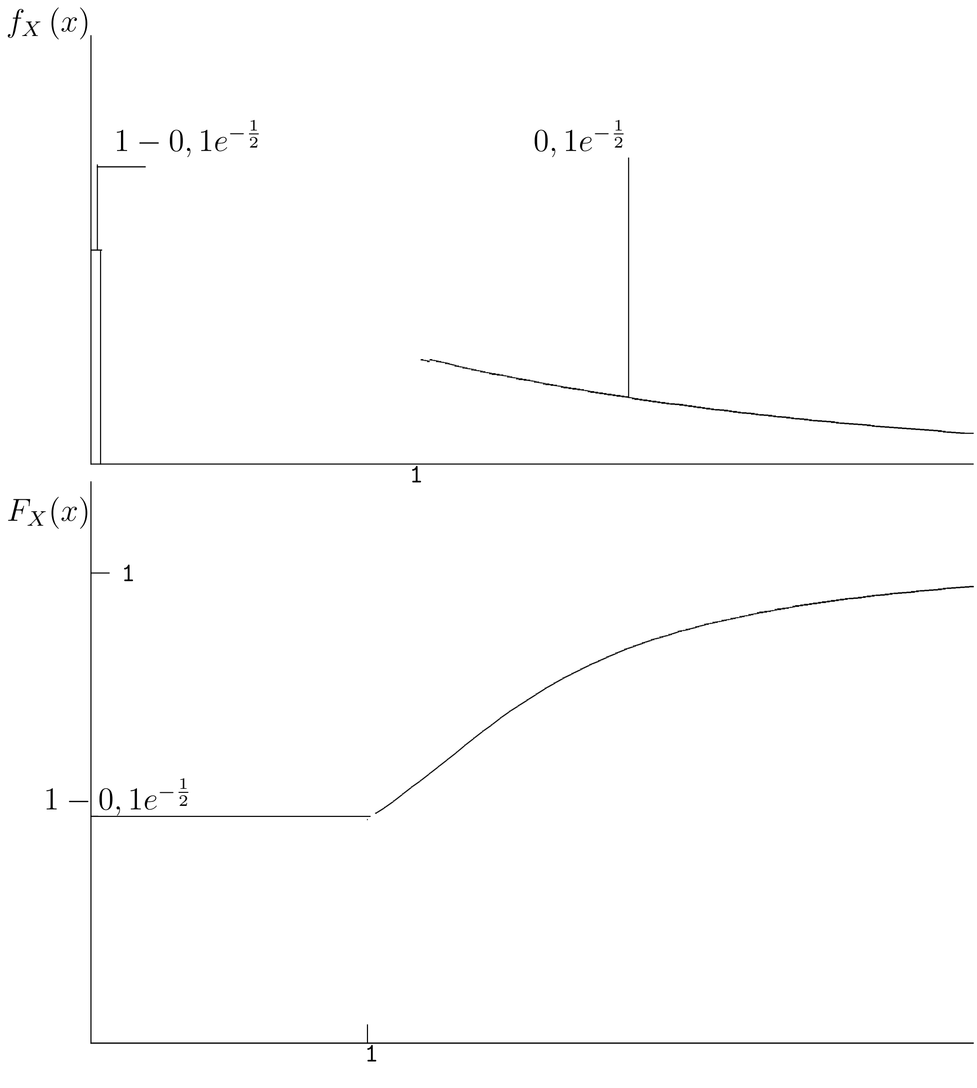
$$D = -2\ln\left(1 - \tfrac{0,1}{0,15}\right) \approx 2,197.$$

2.5. Példa. *A szerződés meghaladásos önrészt tartalmaz.*

Tekintsük a 2.2. Példában leírt gépjármű-töréskár biztosítási állományt. Múltbeli adatokból tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egy kötvényre kárigényt jelentenek be: $0,1$. Határozzuk meg az egy kötvényre eső X kárigény eloszlását, várható értékét és varianciáját.

Megoldás. Felhasználjuk a biztosító által megtérített B kárnagyság eloszlását, amelyet a 2.2. példa megoldásában kaptunk. Megállapítjuk, hogy $0,9$ valószínűséggel nem következik be kár és ha kár bekövetkezik, $0,1$ valószínűséggel, még akkor is $1 - e^{-\frac{1}{2}}$ valószínűséggel a biztosítót nem terheli kártérítési kötelezettség. Összesen tehát $0,9 + 0,1\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 0,94$ valószínűség koncentrálódik az $x = 0$ pontban. A maradék $0,1 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$ valószínűség B eloszlásával arányosan oszlik el. Így az X valószínűségi változó szintén kevert típusú – ld. 2.7. ábra -, eloszlásfüggvénye a következő:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - 0,1e^{-\frac{1}{2}}; \quad ha\ 0 < x \leq 1; \\ 1 - 0,1e^{-\frac{1}{2}} + 0,1\int\limits_1^x \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = 1 - 0,1e^{-\frac{1}{2}x}; \quad ha\ x > 1; \\ 0; \quad ha\ x \leq 0. \end{cases}$$



2.7. ábra.

X várható értékének és varianciájának a kiszámításához a B valószínűségi változó már meglévő μ várható értékét és σ^2 varianciáját felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$E[X] = 0,1\mu = 0,1 \cdot 1,819 = 0,1819;$$

$$Var[X] = 0,1\sigma^2 + 0,1 \cdot 0,9\mu^2 = 0,58.$$

2.6. Példa. *A szerződés levonásos önrészt tartalmaz.*

Tekintsük a 2.3. Példában leírt gépjármű töréskár biztosítási állományt. Múltbeli adatokból tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egy kötvényre kárigényt jelentenek be: $0,1$. Határozzuk meg az egy kötvényre eső X kárigény eloszlását, várható értékét és varianciáját.

Megoldás. Felhasználjuk a biztosító által megtérített B kárnagyság eloszlását, amelyet a 2.3. Példa megoldásában kaptunk. Megállapítjuk, hogy $0,9$ valószínűséggel nem következik be kár, és ha kár bekövetkezik, $0,1$ valószínűséggel, még akkor is $1 - e^{-\frac{1}{2}}$ valószínűséggel a biztosítót nem terheli kártérítési kötelezettség. Összesen tehát $0,9 + 0,1\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$ valószínűség koncentrálódik az $x = 0$ pontban. A maradék $0,1 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,06$ valószínűség B eloszlásával arányosan oszlik el. Így az X valószínűségi változó szintén kevert típusú – ld. 2.8. ábra -, eloszlásfüggvénye a következő:

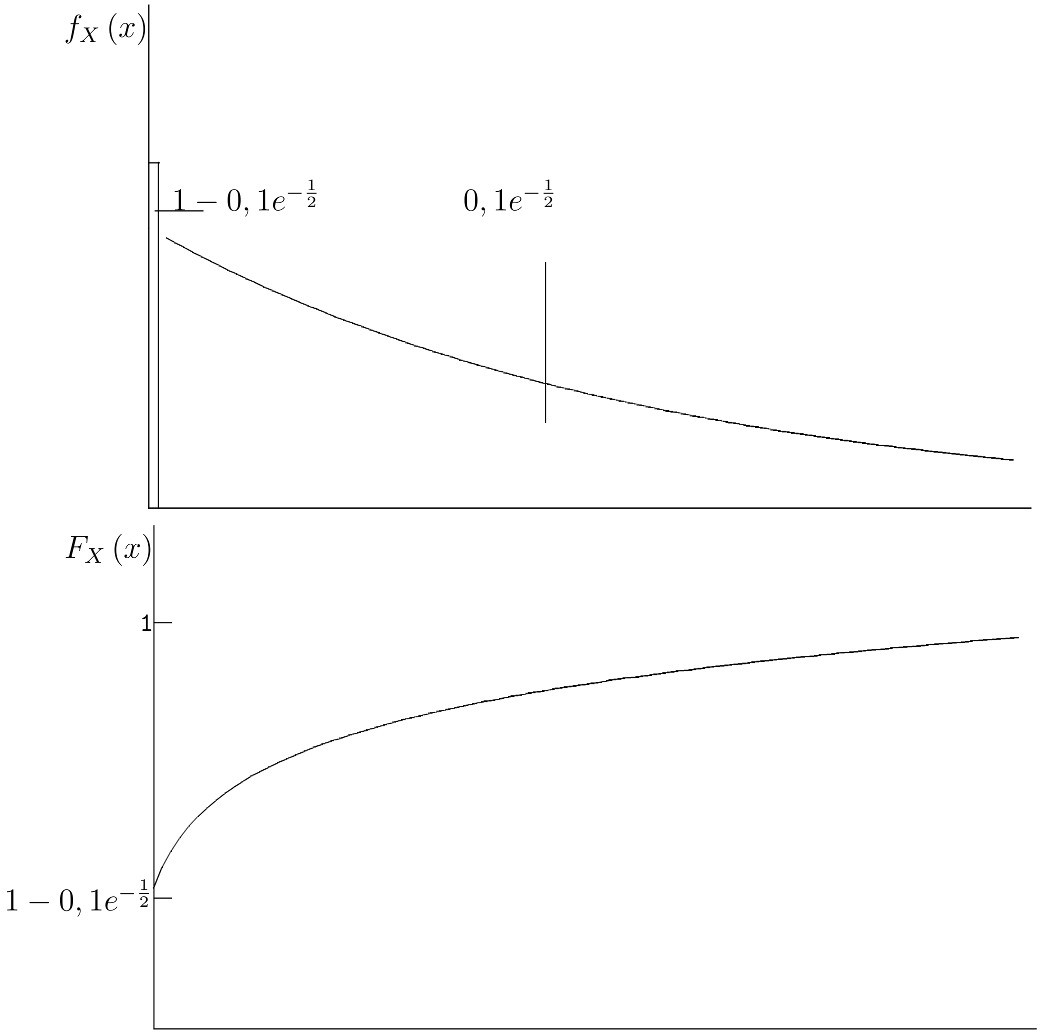
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - 0,1e^{-\frac{1}{2}} + 0,1 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}z} dz = 1 - 0,1 \cdot e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x}; \ ha\ x > 0; \\ 0; \ ha\ x \leq 0. \end{cases}$$

X várható értékének és varianciájának a kiszámításához a B valószínűségi változó már meglévő μ várható értékét és σ^2 varianciáját felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$E[X] = 0,1\mu = 0,1 \cdot 1,213 = 0,233;$$

$$Var[X] = 0,1\sigma^2 + 0,1 \cdot 0,9\mu^2 = 0,47.$$

A következő példák az állomány teljes kára kiszámításának menetét mutatják be.


$f_X\left(x\right)$
$1-0,1e^{-\frac{1}{2}}$
$0,1e^{-\frac{1}{2}}$
$F_X\left(x\right)$
1
$1-0,1e^{-\frac{1}{2}}$

2.8. ábra.

2.1.6. Az S összkár

2.7. Példa. *Normális eloszlással közelítünk.*

Az előző két rész első példájával folytatjuk: Egy gépkocsi biztosítási állomány 1000 kötvényt tartalmaz. Minden kötvényre legfeljebb egy kár következik be, egymástól függetlenül. A kárnagyságok azonos eloszlásúak.

a) Határozzuk meg a biztosítási állomány S kárnagyságának várható értékét és varianciáját.

b) Mennyi legyen az állomány egészére befolyó díj, és ebből mennyi jut egy kötvényre, ha az összesen befolyó díj 95%-os valószínűséggel fedezi az állományra bejelentett kárt? Hasonlítsa össze az eredményt az előző szakasz első példájában az egy szerződésre megállapítandó díjjal abban az esetben, ha a szerződést nem önmagában, hanem az állomány részeként tekintjük!

Megoldás. a) Felhasználjuk az előző részben az X várható értékére és varianciájára kapott eredményeket. A kötvényekre bekövetkező károk függetlensége miatt nemcsak a várható értékek, hanem a varianciák is összeadódnak:

$$E[S] = 1000E[X] = 1000 \cdot 0,233 = 233;$$

$$Var[S] = 1000Var[X] = 1000 \cdot 0,4763 = 476,3.$$

b) A kötvények nagy száma és a kötvényekre bekövetkező károk függetlensége miatt S -t normális eloszlásúnak tekinthetjük. A befolyó D díjra adott feltételünk tehát így írható fel:

$$P(S < D) = \Phi\left(\frac{D - 233}{\sqrt{476,3}}\right) = 0,95,$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A Φ függvény az $1,645$ argumentum mellett veszi fel a $0,95$ értéket, vagyis

$$\frac{D - 233}{\sqrt{476,3}} = 1,645 \quad \Rightarrow \quad D \approx 269.$$

Ebből egy szerződésre kb. $0,512$ díj jut (abban az egységben, amelyben a károkat mértük). Az első példában az egy szerződésre jutó díjat szintén azon feltétel mellett számítottuk, hogy a díj a kárt 95%-os valószínűséggel fedezze, de a szerződést önmagában tekintettük és nem egy állomány részeként fogtuk fel. Így egy szerződésre kb. $2,197$ díj jutott. A rendkívül nagy eltérés annak tudható be, hogy a várható érték többszörösét kitevő szórás hatása a kötvények nagy száma miatt jelentőségét veszti és így a díj a várható érték közelébe kerül.

2.8. Példa. *Konvolúciós eljárást alkalmazunk.*

[1]Az X_1, X_2, X_3 olyan független valószínűségi változók, amelyek eloszlását az alábbi táblázat első három oszlopa tartalmazza. Számoljuk ki $X_1 + X_2 + X_3$ eloszlását.

Megoldás. A 2.1. táblázat $(4)-(8)$ oszlopait számoljuk. $F_1(x)$ az X_1 eloszlásfüggvényét, $F^{(2)}(x)$ és $F^{(3)}(x)$ az $X_1 + X_2$ illetve az $X_1 + X_2 + X_3$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét, $f^{(2)}(x)$ és $f^{(3)}(x)$ ezek valószínűségeloszlását jelentik. Az első oszlopban az egyes valószínűségi változók lehetséges értékeit soroljuk fel. A számítások eredményeit a táblázatban tüntetjük fel.

Pl. a (4) oszlop $X = 2$ -höz tartozó sorában lévő $0,7$ értéket a következőképpen kaptuk: $F_1(2) = P(X_1 < 2) = P(X_1 = 0 \text{ vagy } X_1 = 1) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$

Pl. a (7) oszlop $X = 3$ -hoz tartozó sorában lévő $0,16$ értéket a következőképpen kaptuk:

$$\begin{aligned}
&f_2(3) = P(X_1 + X_2 = 3) \\
&= P(X_1 = 0 \quad \& \quad X_2 = 3) + P(X_1 = 1 \quad \& \quad X_2 = 2) \\
&+ P(X_1 = 2 \quad \& \quad X_2 = 1) + P(X_1 = 3 \quad \& \quad X_2 = 0) \\
&= 0,4 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,16.
\end{aligned}$$

Látható, hogy a konvolúciós eljárás diszkrét esetben jól automatizálható, könnyen alkalmazható eljárás.

2.9. Példa. *A momentumgeneráló függvényt alkalmazzuk.*

[2]Az X_1, X_2, X_3 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók,

$$E[X_i] = i, \text{ha } i = 1, 2, 3.$$

[1]A példa Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. könyvének 34. oldalán található.

[2]A példa Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. könyvének 43. oldalán található.

2.1. táblázat.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$F_1(x)$	$F^{(2)}(x)$	$F^{(3)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$
0	0,4	0,5	0,6				0,20	0,120
1	0,3	0,2	0	0,4	0,20	0,120	0,23	0,138
2	0,2	0,1	0,1	0,7	0,43	0,258	0,20	0,14
3	0,1	0,1	0,1	0,9	0,63	0,398	0,16	0,139
4	0	0,1	0,1	1	0,79	0,537	0,11	0,129
5	0	0	0,1	1	0,90	0,666	0,06	0,115
6	0	0	0	1	0,96	0,781	0,03	0,088
7	0	0	0	1	0,99	0,869	0,01	0,059
8	0	0	0	1	1	0,928	0	0,036
9	0	0	0	1	1	0,964	0	0,021
10	0	0	0	1	1	0,985	0	0,010
11	0	0	0	1	1	0,995	0	0,004
12	0	0	0	1	1	0,999	0	0,001
13				1	1	1	0	

Határozzuk meg az $S = X_1 + X_2 + X_3$ eloszlását

a) a momentumgeneráló függvény segítségével;

b) konvolúciós eljárással.

Megoldás.

a) Határozzuk meg az $S = X_1+X_2+X_3$ eloszlását momentumgeneráló függvénye segítségével. Felhasználjuk, hogy a β paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye: $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \frac{\beta}{\beta - t}, \quad ha \quad t < \beta.$ Ezért

$$M_S(t) = E\left[e^{tS}\right] = E\left[e^{t(X_1+X_2+X_3)}\right] = E\left[e^{tX_1}\right] E\left[e^{tX_2}\right] E\left[e^{tX_3}\right]$$
$$= \frac{1}{1-t} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - t} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} - 4 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} + 3 \cdot \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - t}$$

Az eredményt a kicsit hosszadalmas, de jól ismert parciális törtekre bontással kaptuk. Az eljárást ismertetjük, előbb azonban megállapítjuk, hogy S momentumgeneráló függvénye három exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye lineáris kombinációjának bizonyult. Ekkor S sűrűségfüggvénye e három exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének lineáris kombinációja (ld. a kevert eloszlásokról mondottakat), így írható fel:

$$f_S(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right) e^{-x} + (-4)\, \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{9}{2}\right) \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \\ = \frac{1}{2} e^{-x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{3}x};\ ha\ x > 0 \\ 0;\ ha\ x \le 0. \end{cases}$$

Most bemutatjuk a parciális törtekre bontás menetét. Olyan törtek összegeként keressük a szorzatot, amelyek tagjaiban a nevezőket az egyes tényezők nevezői alkotják:

$$\frac{1}{6} \frac{1}{1-t} \frac{1}{\frac{1}{2} - t} \frac{1}{\frac{1}{3} - t} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{\frac{1}{2} - t} + \frac{C}{\frac{1}{3} - t}$$

$$\tfrac{1}{6} = A\left(\tfrac{1}{2} - t\right)\left(\tfrac{1}{3} - t\right) + B\left(1 - t\right)\left(\tfrac{1}{3} - t\right) + C\left(1 - t\right)\left(\tfrac{1}{2} - t\right)$$

$$\tfrac{1}{6} = A\left(\tfrac{1}{6} + t^2 - \tfrac{5}{6}t\right) + B\left(\tfrac{1}{3} + t^2 - \tfrac{4}{3}t\right) + C\left(\tfrac{1}{2} + t^2 - \tfrac{3}{2}t\right)$$

$$\tfrac{1}{6} = t^2\left(A + B + C\right) + t\left(-\tfrac{5}{6}A - \tfrac{4}{3}B - \tfrac{3}{2}C\right) + \tfrac{A}{6} + \tfrac{B}{3} + \tfrac{C}{2}$$

$$\Rightarrow A + B + C = 0; -\tfrac{5}{6}A - \tfrac{4}{3}B - \tfrac{3}{2}C = 0; \tfrac{A}{6} + \tfrac{B}{3} + \tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{6};$$

$$\Rightarrow A = \tfrac{1}{2}; B = -2; C = \tfrac{3}{2}.$$

b) Határozzuk meg az $S = X_1 + X_2 + X_3$ eloszlását konvolúciós eljárással. Alkalmazva a két független valószínűségi változó összegét leíró képletet azt kapjuk, hogy

$$f_{X_1+X_2}(y) = \int_0^y e^{-(y-v)}\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}v}dv = e^{-y}\int_0^y \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}v}dv$$
$$= e^{-y}\left[e^{\frac{1}{2}v}\right]_0^y = e^{-y}\left(e^{\frac{1}{2}y} - 1\right) = e^{-\frac{1}{2}y} - e^{-y}, y > 0.$$

$$f_{X_1+X_2+X_3}(x) = \int_0^x \left(e^{-\frac{1}{2}(x-v)} - e^{-(x-v)}\right)\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}v}dv$$
$$= e^{-\frac{1}{2}x}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}v}\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}v}dv - e^{-x}\int_0^x e^{v}\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}v}dv$$
$$= e^{-\frac{1}{2}x}\int_0^x \tfrac{1}{3}e^{\frac{1}{6}v}dv - e^{-x}\int_0^x \tfrac{1}{3}e^{\frac{2}{3}v}dv$$
$$= e^{-\frac{1}{2}x}2\left[e^{\frac{1}{6}v}\right]_0^x - e^{-x}\tfrac{1}{2}\left[e^{\frac{2}{3}v}\right]_0^x$$
$$= e^{-\frac{1}{2}x}2\left(e^{\frac{1}{6}x} - 1\right) - e^{-x}\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}x} - 1\right)$$
$$= \tfrac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + \tfrac{1}{2}e^{-x}, x > 0.$$

Természetesen a két eljárással ugyanahhoz a sűrűségfüggvényhez jutunk.

2.2. KOLLEKTÍV KOCKÁZATI MODELLEK

Az egyéni kockázati modellekkel ellentétben most a teljes kárösszeg eloszlását más szemszögből, az adott kötvényállomány egészére modellezzük. Az egész kötvényállomány kárgyakoriságát és kárnagyságát vizsgáljuk. Jelölje N egy kötvényállomány adott időszak alatt bekövetkező kárainak számát, legyen $X_1, X_2, ..., X_N$ az első, második, N-edik kár összege. Ekkor az időszakban az állományban bekövetkező összkár:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N.$$

A károk száma és az eseti kárösszegek is valószínűségi változók. Csak olyan modellekkel foglalkozunk, amelyekben $X_1, X_2, ..., X_N$ azonos eloszlásúak, függetlenek egymástól és N-től is. Jelölje a közös eloszlású valószínűségi változót: X.

2.2.1. Az S összkár összetett eloszlású

Kollektív kockázati modellekben az összkár valószínűségi eloszlását két eloszlással tudjuk megadni: a kárszám eloszlásával és az eseti kár nagyságának eloszlásával. Az összkár tehát összetett eloszlású, nevét a kárszám eloszlásról kapja. Az összkár eloszlása, hasonlóan az egyéni kockázati modellekhez, általában normális eloszlással közelíthető a várható érték és variancia ismeretében, amennyiben a kárszám várható értéke elég nagy; vagy konvolúciós eljárással illetve rekurzióval; vagy a momentumgeneráló függvény segítségével számolható. Mielőtt e három megközelítésre rátérnénk, vizsgáljuk meg, hogyan határozható meg az összkár várható értéke, varianciája és momentumgeneráló függvénye az egyes károk momentumai és momentumgeneráló függvénye segítségével.

Megállapítjuk, hogy $E[S|N] = NE[X]$, és mivel feltettük, hogy az N kárszám és az X kárnagyság független valószínűségi változók, ezért $Var[S|N] = NVar[X]$. Az S várható értékét és varianciáját tehát így kapjuk:

$$E[S] = E[E[S|N]] = E[N]E[X] \tag{2.2}$$

$$Var[S] = E\left[Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i|N\right]\right] + Var\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i|N\right]\right]$$
$$= E[NVar[X]] + Var[NE[X]] = E[N]Var[X] + Var[N]E^2[X] \tag{2.3}$$

Hasonló módon származtatjuk S momentumgeneráló függvényét is:

$$M_S(t) = E\left[e^{tS}\right] = E\left[E\left[e^{t\sum_{i=1}^{N} X_i}|N\right]\right] = E\left[E\left[\prod_{i=1}^{N} e^{tX_i}|N\right]\right]$$

$$M_S(t) = E\left[M_X(t)^N\right] = E\left[e^{N\ln M_X(t)}\right] = M_N(lnM_X(t)) \tag{2.4}$$

Az alábbi példákban a momentumgeneráló függvényt alkalmazzuk S eloszlásának meghatározására. Feltesszük, hogy az N kárszám p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó, vagyis

$$P(N=n)=pq^n, n=0,1,2,...$$

ahol $0<p<1, q=1-p$.

2.10. Példa. *Határozzuk meg az összkár momentumgeneráló függvényét az egyes károk $M_X(t)$ momentumgeneráló függvénye segítségével.*

Megoldás. Mivel

$$M_N(t)=E\left[e^{tN}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}pq^n=\sum_{n=0}^{\infty}p\left(qe^t\right)^n=\frac{p}{1-qe^t}$$

a geometriai sor összegképletét alkalmazva, ha $t<\ln q$, ezért a (2.4) összefüggés alapján

$$M_S(t)=\frac{p}{1-qM_X(t)}.$$

2.11. Példa. *Legyen ezen felül az egyes X kárigények nagysága exponenciális eloszlású $\frac{1}{\beta}$ várható értékkel. Határozzuk meg az összkár eloszlását.*

Megoldás. Az X eloszlásfüggvénye $F_X(x)=1-e^{-\beta x}\,(x>0)$, ezért, mint már láttuk, $M_X(t)=\frac{\beta}{\beta-t}, t<\beta$. Behelyettesítve ezt $M_S(t)$-nek az előző példában szereplő fenti kifejezésébe, némi átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$M_S(t)=p+\frac{qp\beta}{p\beta-t}.$$

Mivel 1 a momentumgeneráló függvénye a konstans 0 értékű valószínűségi változónak, és $\frac{p\beta}{p\beta-t}$ a $p\beta$ paraméterű exponenciális eloszlásnak, ezért S eloszlása e két valószínűségi változó eloszlásának p-vel illetve q-val súlyozott átlaga:

$$F_S(x)=\begin{cases}0, \text{ } ha \text{ } x\leq 0,\\ p+q\left(1-e^{-p\beta x}\right), \text{ } ha \text{ } x>0.\end{cases}$$

Az összkár eloszlása tehát kevert típusú, a teljes 1 valószínűségből p koncentrálódik az $S=0$ pontban, q pedig $p\beta$ paraméterű exponenciális eloszlás szerint oszlik el. Előző példáinkban az összkár összetett geometriai eloszlású. Az összkár eloszlását két paraméterrel adjuk meg, az első a kárszám eloszlást azonosító paraméter vagy paramétercsoport - példáinkban p -, a második az egyedi kárnagyság eloszlásának valamilyen azonosítója: eloszlásfüggvénye vagy valószínűségi függvénye. Jellemző összetett eloszlások még az összetett binomiális eloszlás, az összetett negatív binomiális eloszlás. Leggyakrabban talán az összetett Poisson eloszlást alkalmazzák az aktuáriusok, egyrészt statisztikai megalapozottsága miatt, másrészt pedig azért, mert meglehetősen jó tulajdonságokkal rendelkezik, amint ezt a következőkben látjuk.

2.2.2. Az összetett Poisson eloszlás

A káresetek N számát rendszerint és itt a következőkben λ paraméterű Poisson eloszlással modellezzük, vagyis feltesszük, hogy

$$P(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ n=0,1,2,...$$

Mint ismeretes, a Poisson eloszlás várható értéke és varianciája egyenlő az eloszlás λ paraméterével:

$$E[N]=\lambda,\ Var(N)=\lambda,$$

momentumgeneráló függvénye pedig:

$$M_N(t)=E\left[e^{tN}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}. \tag{2.5}$$

Ezért a (2.2) és (2.3) összefüggések felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$E[S]=\lambda E[X] \tag{2.6}$$

$$Var[S]=\lambda Var[X]+\lambda E^2[X]=\lambda E[X^2],$$

$$M_S(t)=e^{\lambda(M_X(t)-1)}.$$

Ha a káresetek N száma Poisson eloszlású λ várható értékkel és a kárösszegek eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor azt mondjuk, hogy az S összkár λ és $F(x)$ paraméterű összetett Poisson eloszlású.[3]

[3] A valószínűségelméletből ismeretes, hogy ha a károk száma λ paraméterű Poisson eloszlású, ez annyit jelent, hogy két kár bekövetkezése között eltelt időt exponenciális eloszlásúnak tekintjük,

Az összetett Poisson eloszlással való modellezésnek számos előnyös tulajdonsága van, mivel független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson eloszlású. A következő állítás összetett Poisson eloszlású valószínűségi változók összegéről szól.

Állítás. Ha $S_1, S_2, ..., S_m$ független valószínűségi változók, S_i összetett Poisson eloszlású λ_i és $F_i(x)$ paraméterekkel, $i = 1, ..., m$, akkor az $S = S_1 + S_2 + ... + S_m$ valószínűségi változó ismét összetett Poisson eloszlású

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \; és \; F(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)$$

paraméterekkel.

Bizonyítás. Legyen $M_i(t)$ az F_i momentumgeneráló függvénye. Akkor az $S = S_1 + S_2 + ... + S_m$ valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye a függetlenség miatt

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m} M_{S_i}(t) = e^{\sum_i \lambda_i (M_i(t)-1)} = e^{\lambda\left(\sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - 1\right)},$$

ahol $\lambda = \sum_i \lambda_i$. Látható, hogy $M_S(t)$ ismét összetett Poisson eloszlás momentumgeneráló függvénye, amelynek paraméterei: $\lambda = \sum_i \lambda_i$ és $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)$.

Ebből az következik, hogy ha összekapcsolunk m biztosítási állományt, amelyek mindegyikében az összkárok összetett Poisson eloszlásúak és függetlenek, akkor az összegzett biztosítási állomány összkára ismét összetett Poisson eloszlású lesz. Ugyanúgy, ha egy biztosítási állományt megfigyelünk m éven át és az m számú éves kárösszeg független és egyenként összetett Poisson eloszlású, akkor az m éves időszak teljes kárösszege is összetett Poisson eloszlású. Vegyük észre, hogy az ily módon összekapcsolással keletkezett állomány eseti kárnagyságai már nem azonos

amelynek paramétere (a várható érték reciproka) szintén λ. Ha a kárnagyság is (β paraméterű) exponenciális eloszlású, akkor azt mondjuk, hogy a kockázati folyamat leírására az Erlang modellt használjuk. Az elnevezés történelmi eredetű. Erlang dán matematikus a 20. század elején a telefonközpontok működését sorbanállási rendszernek fogta fel és a működési modellt úgy alkotta meg, hogy mind a telefonhívások időtartamát, mind két telefonhívás közötti időtartamot exponenciális eloszlással közelítette. Erlang modell esetén tehát az összkár momentumgeneráló függvénye egyszerű alakot ölt: $\ln M_S(t) = \lambda \frac{t}{\beta - t}, t < \beta$.

eloszlásúak, az összkár mégis úgy viselkedik, mintha azonos eloszlású valószínűségi változók összege lenne.

2.12. Példa. *A biztosító társaság két, egyenként $n = 5000$ kötvényből álló állományt egyesít. Az egyikben a biztosítási összeg 1 millió Ft, a másikban 2 millió Ft. Egy kötvénytulajdonos átlag $p = 0,04$ számú kárigényt nyújt be. Milyen az egyesített állomány káreloszlása, ha a károk számát Poisson eloszlásúnak tekintjük? Írja fel az összkár eloszlását, momentumgeneráló függvényét, várható értékét és varianciáját.*

A történet kötvényekről szól, tehát a helyzet egyedi kockázati modellel lenne leírható, ami azt is jelenti, hogy a kötvényekre bekövetkező károk függetlensége miatt a kárszám mindkét állományban binomiális eloszlású $\lambda = np = 5000 \cdot 0,04$ várható értékkel. Az a feltételezés, hogy a kárszám Poisson eloszlású, ténylegesen azt jelenti, hogy a károk bekövetkezésének számát Poisson eloszlással közelítjük. E közelítés akkor jogos, ha a két eloszlás várható értéke: np és varianciája: $np(1-p)$ közeli értékek, vagyis akkor, ha p elég kicsi. A példában ez teljesül: $p = 0,04$, így $1 - p = 0,96$ közelítőleg 1-nek vehető.

Megoldás: Az 1 millió Ft összegű kötvények állományának kárszáma a feltevés szerint Poisson eloszlású, amelynek várható értéke és egyben a Poisson eloszlás paramétere: $\lambda_1 = np = 5000 \cdot 0,04 = 200$. Az összkár tehát összetett Poisson eloszlású λ_1 és F_1 paraméterekkel, ahol

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, \ ha\ x \leq 1, \\ 1\ különben. \end{cases}$$

A 2 millió Ft összegű kötvények állományának kárszáma a feltevés szerint Poisson eloszlású, amelynek várható értéke és egyben a Poisson eloszlás paramétere: $\lambda_2 = 5000 \cdot 0,04 = 200$. Az összkár tehát összetett Poisson eloszlású λ_2 és F_2 paraméterekkel, ahol

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, \ ha\ x \ \leq 2, \\ 1\ különben. \end{cases}$$

Az egyesített állomány összkára tehát szintén összetett Poisson eloszlású $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 400$ és F paraméterekkel, ahol

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ ha\ x \leq 1, \\ 0,5, \ ha\ 1 < x \leq 2, \\ 1\ különben. \end{cases}$$

Az összkár várható értékének és varianciájának kiszámításához szükségünk van az $E[X] = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2 = 1,5$; $E[X^2] = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 4 = 2,5$ értékekre, S momentumgeneráló függvényének felírásához pedig X momentumgeneráló függvényére:

$$M_X(t) = 0,5e^t + 0,5e^{2t}.$$

Így

$$E[S] = \lambda E[X] = 400 \cdot 1,5 = 600,$$
$$Var[S] = \lambda E[X^2] = 400 \cdot 2,5 = 1000,$$
$$M_S(t) = e^{400\left(0,5e^t + 0,5e^{2t} - 1\right)}.$$

A várható érték egysége természetesen millió Ft, a varianciáé pedig ennek a négyzete.

Az $E[S]$ és $Var[S]$ értékeket S momentumgeneráló függvénye segítségével is kiszámíthatjuk:

$$E[S] = M_S'(0) = (400 \cdot 0,5e^0 + 400 \cdot 0,5 \cdot 2e^0)\, e^{400\left(0,5e^0 + 0,5e^{2\cdot 0} - 1\right)} = 600;$$
$$E[S^2] = M_S''(0) = \left((400 \cdot 0,5e^t + 400 \cdot 0,5 \cdot 2e^{2t})\, e^{400\left(0,5e^t + 0,5e^{2t} - 1\right)}\right)' |_{t=0}$$
$$= 1000 + 600^2;$$
$$Var[S] = E[S^2] - E^2[S] = 1000.$$

2.2.3. Összetett Poisson eloszlás közelítése normálissal

Állítás: Ha S összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó λ és $F(x)$ paraméterekkel, akkor a

$$Z = \frac{S - \lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}}$$

valószínűségi változó eloszlása tart a standard normális eloszláshoz, ha $\lambda \to \infty$ - itt $p_1 = E[X]$, $p_2 = E[X^2]$.

Bizonyítás. Az állítást azzal igazoljuk, hogy belátjuk, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}},$$

vagyis $M_Z(t)$ tart a standard normális eloszlás momentumgeneráló függvényéhez.

Világos, hogy

$$M_Z(t) = E\left[e^{t\frac{S-\lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}}}\right] = e^{-\frac{\lambda p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}}} M_S\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}}\right)$$
$$= e^{-\frac{\lambda p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}}} e^{\lambda\left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}}\right)-1\right)}.$$

A momentumgeneráló függvény definíciója szerint

$$M_X(t) = 1 + \frac{p_1 t}{1!} + \frac{p_2 t^2}{2!} + ...,$$

amely hatványsorba ha t helyére $\frac{t}{\sqrt{\lambda p_2}}$ -t helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2} + \frac{p_3 t^3}{6\sqrt{\lambda p_2^3}} + ...}.$$

A kitevőben az összes többi tag $\lambda - t$ a nevezőben tartalmazza. Amint $\lambda \to \infty$, e tagok 0-hoz tartanak, és így a kifejezés értéke $e^{\frac{t^2}{2}}$ -höz. Ez az, amit belátni akartunk.

2.13. Példa. *Legyen S összetett Poisson eloszlású $\lambda = 48$ paraméterrel és a $(0,1)$ intervallumon egyenletes X kárnagyság-eloszlással. S eloszlását normális eloszlással közelítve számoljuk ki a $P(S < 32)$ valószínűséget.*

Megoldás. Az összkár várható értékét és varianciáját kell meghatároznunk. Ehhez szükségünk van az eseti kárnagyság első és második momentumára:

$$E[X] = 0,5; E[X^2] = \tfrac{1}{3};$$
$$E[S] = 0,5 \cdot 48 = 24; Var[S] = \tfrac{1}{3} \cdot 48 = 16.$$

Így $P(S < 32) = \Phi\left(\frac{32-24}{4}\right) = \Phi(2)$, Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

2.2.4. Az összkár eloszlásának meghatározása konvolúcióval

Végül, amikor a kárnagyságok azonos eloszlásúak, függetlenek, de a kárszám várható értéke kicsi, és ezért a teljes kárösszeg eloszlása normális eloszlással nem közelíthető, a konvolúció módszeréhez folyamodhatunk. A diszkrét esettel foglalkozunk.

Jelölje, mint eddig, $f_X(x)$ az eseti kár eloszlását: $f_X(x) = P(X = x)$. Jelölje $f_X^{*k}(x)$ az $f_X(x)$ önmagával vett k-adik konvolúcióját; $f_X^{*0}(x) = 1$, ha $x = 0$ és értéke 0 különben. Nyilvánvaló, hogy $f_X^{*1}(x) = f_X(x)$. Látható, hogy

$$f_X^{*k}(x) = P(S = x | N = k).$$

Ezért az összkár eloszlása a teljes valószínűség tétele értelmében a következő:

$$f_S(x) = P(S = x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X^{*k}(x) P(N = k), x \geq 0.$$

2.14. Példa. *Legyen S összetett Poisson eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel és a következő kárnagyság-eloszlással: $P(X = x) = 0,1x; x = 1, 2, 3, 4$. Számítsuk ki, hogy az S összkár a $0, 1, 2, 3$ és 4 értékeket milyen valószínűséggel veszi fel.*

Megoldás: Az összkárra és a kárszámra vonatkozó számításokat és a 0-tól különböző valószínűségeket az alábbi táblázat foglalja össze.

	$f_X^{*0}(x)$	$f_X^{*1}(x)$	$f_X^{*2}(x)$	$f_X^{*3}(x)$	$f_X^{*4}(x)$
0	1				
1		0,1			
2		0,2	0,01		
3		0,3	0,04	0,001	
4		0,4	0,1	0,006	0,0001
N	0	1	2	3	4
$e^{-2}\frac{2^n}{n!}$	e^{-2}	$2e^{-2}$	$2e^{-2}$	$\frac{4}{3}e^{-2}$	$\frac{2}{3}e^{-2}$

A táblázat segítségével számolhatjuk az S eloszlását:

$P(S=0) = e^{-2};$

$P(S=1) = 0,1 \cdot 2e^{-2};$

$P(S=2) = 0,2 \cdot 2e^{-2} + 0,01 \cdot 2e^{-2} = 0,42e^{-2};$

$P(S=3) = 0,3 \cdot 2e^{-2} + 0,04 \cdot 2e^{-2} + 0,001 \cdot \frac{4}{3}e^{-2} = 0,68e^{-2};$

$P(S=4) = 0,4 \cdot 2e^{-2} + 0,1 \cdot 2e^{-2} + 0,006 \cdot \frac{4}{3}e^{-2} + 0,0001 \cdot \frac{2}{3}e^{-2} = 1,00806e^{-2}.$

Megjegyezzük, hogy a konvolúciós módszer alkalmazását itt meglehetősen egyszerű esetekre korlátozzuk. Sokkal szélesebb körben alkalmazható módszerként ajánljuk azonban az érdeklődő olvasónak a Panjer rekurziót, amelyről bőséges irodalmat találhat, ld. például Kaas et al. (2001) könyvében.

2.3. Gyakorló feladatok

1. Négy kötvényre a kárigény eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat. E károk egymástól függetlenül következnek be. Alkalmazzuk a konvolúciós eljárást az $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ kárösszeg eloszlásának meghatározására. A táblázatban $f^{(i)}(x)$ jelöli az első i valószínűségi változó összegének eloszlását. Tüntesse fel a táblázat hiányzó elemeit.

2. [4] Legyen a 100 kötvényből álló állományban minden kötvény kárigényének momentumgeneráló függvénye azonos:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-9}, \quad t < \frac{1}{2}$$

Az egyes kötvények kárigénye egymástól független. Adjon becslést annak a díjbevételnek az összegére, amely 95% -os valószínűséggel fedezi az összesen felmerülő kárt.

3. [5]Egy tűzbiztosítással foglalkozó társaság 160 építményt biztosít. A biztosítási

[4]A példa Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. könyv 43. oldalán található.

[5]A példa a Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. könyv 43. oldalán található.

X	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$
0	0,6	0,7	0,6	0,9	0,42		
1	0,0	0,2	0	0	0,12		
2	0,3	0,1	0	0	0,27		
3	0,0	0	0,4	0	0,06		
4	0,1	0	0	0,1	0,10		
5	0,0	0	0	0	0,02		
6	0,0	0	0	0	0,01		
7	0,0	0	0	0	0		
8	0,0	0	0	0	0		
9	0,0	0	0	0	0		
10	0	0	0	0	0		
11	0	0	0	0	0		

összegeket (1000 Ft-ban) és a szerződésszámokat az alábbi táblázat tartalmazza: Mindegyik építménynél tűz bekövetkezésének a valószínűsége $0,04$. A biztosítási

Biztosítási összeg	Szerződésszám
10	80
20	35
30	25
50	15
100	5

időszakban a biztosító legfeljebb egy tűzeset kárát fedezi (enyhíti). A tűzesetek egymástól függetlenül következnek be. Ha tűz következik be, a kárnagyság egyenletes eloszlású a (0, biztosítási összeg) intervallumban. Jelölje N a tűzesetek számát a biztosítási időszakban, S az összkárt.

a) N milyen eloszlású? Számítsuk ki N várható értékét és varianciáját. b) Számítsuk ki S várható értékét és varianciáját. c) Mekkora relatív biztonsági pótlékot alkalmaz a biztosító, hogy a díjbevétel 95% valószínűséggel fedezze a felmerülő kárt, ha az S összkár eloszlását normális eloszlással közelítjük? d) Mi szól amellett és mi szól ellene annak, hogy az S valószínűségi eloszlását normálissal közelítsük?

4. Egy biztosítási állomány 500 kötvényből áll. Annak a valószínűsége, hogy egy kötvényre kár következik be: $0,15$. Ha a kár bekövetkezik, a kárnagyság exponenciális eloszlást követ 1 várható értékkel. Ha a kár nagysága több, mint $2,5$, akkor a biztosító csak $2,5$ egységet fizet.

a) Mennyi lesz az egyes kötvények kárigényének várható értéke és varianciája? b) Mekkora relatív biztonsági pótlékot tartalmaz a díj, ha 95% valószínűséggel fedezi a teljes kárigényt?

5. Legyen az N kárszám binomiális eloszlású $n = 8$ és $p = 0,2$ paraméterekkel. A binomiális eloszlású N momentumgeneráló függvénye, mint láttuk:

$$M_N(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n .$$

Legyen az X eseti kárnagyság eloszlása a következő:

$$P(X=1)=0,4; P(X=2)=0,6.$$

Határozzuk meg az

$$E[N], Var[N], E[X], Var[X], E[S], Var[S]$$

értékeket, és az S összkár momentumgeneráló függvényét.

6. Vizsgáljunk egy biztosítási portfoliót, amelyben az N kárszám eloszlása a következő:

$$P(N=0)=0,1; P(N=1)=0,3; P(N=2)=0,4; P(N=3)=0,2.$$

Az X eseti kárnagyság eloszlása a következő:

$$P(X=1)=0,5; P(X=2)=0,4; P(X=3)=0,1.$$

Számítsuk ki az S összkár eloszlását!

7. Legyen az előző példában N Poisson eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Az S összkár milyen valószínűséggel lesz $0, 1, 2$ illetve 3 értékű? Határozzuk meg az $E[S], Var[S]$ értékeket és az $M_S(t)$ függvényt!

8. Legyen S_1 összetett Poisson eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel és a következő X_1 kárnagyság-eloszlással:

$$P(X_1=1)=0,2; P(X_1=2)=0,6; P(X_1=3)=0,2.$$

Legyen S_2 összetett Poisson eloszlású $\lambda = 6$ paraméterrel és a következő X_2 kárnagyság-eloszlással:

$$P(X_2=3)=0,5; P(X_2=4)=0,5.$$

Ha S_1 és S_2 függetlenek, mi az eloszlása az $S_1 + S_2$ valószínűségi változónak?

9. Egy biztosítási állomány 10000 kötvényből áll. Közülük 2000 esetében a biztosítási összeg egyforma valószínűséggel 3 illetve 4 ezer Ft, 4000 esetében 5 ezer Ft és 4000 esetében $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 6 és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel 7 ezer Ft. Egy kötvénytulajdonos átlag $0,02$ kárigényt nyújt be. Milyen az állomány aggregált káreloszlása, ha a károk számát mindegyik csoportban Poisson eloszlásúnak tekintjük? Mennyi díjbevételre van a biztosítónak szüksége ahhoz, hogy 95%-os valószínűséggel fedezze a kárkiadásait?

3. fejezet

KOCKÁZAT HOSSZÚ TÁVON: A CSŐD VALÓSZÍNŰSÉGE

A kollektív kockázati modellekkel kapcsolatos ismereteinket általánosítjuk azzal, hogy a káralakulást és az ettől és a biztosítás díjától függő tartalékunk (többletünk) alakulását hosszabb időszakra követjük. Érdeklődésünk elsősorban arra irányul, hogy megállapítsuk, mekkora kezdeti tartalék (többlet, szavatoló tőke) szükséges ahhoz, hogy a biztosítási állományunk (az üzletág, a biztosító társaság) működése pénzügyi szempontból kellően stabil legyen, az inszolvencia (csőd, tönkremenés) valószínűségét kellően alacsony szinten tartsuk.

Bemutatunk két modellt, amelyek a biztosító többletének az alakulását írják le. Többleten itt azt az összeget értjük, amellyel egy kiinduló pénzeszköz (melynek forrása az induló tőke) plusz a befolyó díjak (eszközök) összege meghaladja a kifizetett kárt (kötelezettségek). A többlet ilyen meghatározásban természetesen nem teljesen számviteli kategória, bajt okoz azonban, ha negatívvá válik. Ha negatívvá válik, akkor azt mondjuk, hogy csőd (fizetésképtelenség, katasztrófa, tönkremenés) következett be. Ez az elnevezés nem jelent jogi értelemben vett csődöt, nem is feltétlenül tragikus esemény, inkább jelzés a biztosítónak, hogy azonnali intézkedést igénylő helyzet alakult ki.

A bemutatott modellek azt vizsgálják, hogy hosszabb időszak alatt az idő függvényében hogyan alakul a többlet, és hogy milyen valószínűséggel következhet be csőd, hogyan lehet ezt a valószínűséget csökkenteni.

A folytonos modellben a többletet a kezdési időpontot követő minden időpontra leírjuk, a diszkrét modellben pedig diszkrét időpontokban elemezzük a többlet alakulását. A folytonos modellt vizsgáljuk részletesebben, észrevételeink azonban a diszkrét modellre is érvényesek lesznek.

3.1. A folytonos modell

A biztosító többletén a következő függvényt értjük:

$$U(t) = u + Dt - S(t),$$

ahol u: a kezdeti többlet (kezdőtőke); D: az egységnyi időszakra eső, de folyamatosan fizetendő biztosítási díj; $S(t)$: a t időpontig bekövetkezett összkár.

Jelölje $N(t)$ a t időpontig bekövetkező károk számát, $X_1, X_2, ..., X_{N(t)}$ a t időpontig bekövetkezett károk nagyságát. Ekkor nyilvánvalóan

$$S\left(t\right) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}.$$

Feltesszük, hogy egy időpontban legfeljebb egy kár következik be. Minthogy az $X_1, X_2, ..., X_{N(t)}$ kárnagyságok és az $N(t)$ kárszám valószínűségi változók, ezért az $S(t), U(t)$ függvények is valószínűségi változók minden nemnegatív t értékre. E függvényeket sorra többlet folyamatnak, kárszám folyamatnak, összkár-folyamatnak nevezzük és így jelöljük:

$$\left\{U(t) : t \geq 0\right\}, \left\{N(t) : t \geq 0\right\}, \left\{S(t) : t \geq 0\right\}.$$

Modellünkben a biztosítási díj a bekövetkező károk nagyságának a várható értékével arányos, mégpedig az alábbi módon:

$D =$ Egységnyi időszakra eső kár várható értéke $\cdot \left(1 + \theta\right)$,

ahol θ a relatív biztonsági pótlék, és a díjnak a kár várható értéke feletti része az abszolút biztonsági pótlék.

Jelölje T azt a legkorábbi időpontot, amikor csőd következik be, vagyis

$$T = T\left(u\right) = \inf\left\{t : t \geq 0, U\left(t\right) < 0\right\}$$

- értéke $+\infty$, ha nem lesz csőd - és $\Psi(u)$ a csőd (fizetésképtelenség, katasztrófa) bekövetkezésének valószínűségét az u kezdeti többlet függvényében:

$$\Psi(u) = P(T < +\infty).$$

Az a feladatunk, hogy $\Psi(u)$ értékét vizsgáljuk. Ha pontos értékét nem is tudjuk feltétlenül kiszámítani minden esetben, legalább alsó és/vagy felső korlátot szeretnénk $\Psi(u)$ értékére adni. Ehhez lesz szükségünk a következő fogalmakra.

3.2. Összetett Poisson folyamat

Azt mondjuk, hogy $\{N(t) : t \geq 0\}$ λ paraméterű Poisson folyamat, ha bármely t_1 és t_2 időpontok ($t_1 < t_2$) között bekövetkező károk száma $\lambda(t_2 - t_1)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, továbbá a kárszám-eloszlás független attól, hogy előzőleg hogyan alakult a károk száma:

$$P(N(t_2) - N(t_1) = k | N(s), s \leq t_1) = e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^k}{k!} \quad \forall\, t_2 \geq t_1 \geq 0.$$

Azt mondjuk, hogy $\{S(t) : t \geq 0\}$ λ és $F(x)$ paraméterű összetett Poisson folyamat, ha $X_1, X_2, ..., X_{N(t)}$ az $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel meghatározott azonos eloszlású, egymástól és a λ paraméterű Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ kárszám folyamattól is független valószínűségi változók - jelölje X ezt a közös valószínűségi változót. A továbbiakban feltesszük, hogy X momentumai léteznek. Jelölje S az egységnyi időszakra eső összkárt. Ekkor fennáll, hogy $E[S] = \lambda E[X]$ és

$$E[S(t)] = \lambda t E[X];\ Var[S(t)] = \lambda t E\left[X^2\right];\ D = \lambda E[X](1 + \theta).$$

A józan észre hallgatva is csak olyan biztosítási díjat veszünk figyelembe, amely meghaladja az egységnyi időszakra eső kár várható értékét. Támasszuk alá ezt az álláspontunkat a matematika eszközével is: Mivel $Var\left[\frac{U(t)}{t}\right] = \frac{1}{t}\lambda E[X^2]$ tart 0-hoz, ha t tart ∞-hez, ezért a nagy számok törvénye szerint $\frac{U(t)}{t}$ sztochasztikusan konvergál $D - \lambda E[X]$ -hez. Ha $D - \lambda E[X] < 0$, akkor U(t) negatív lesz előbb vagy utóbb. Ha $D - \lambda E[X] = 0$, akkor a határérték 0, de $Dt - S(t)$ varianciája igen nagy, ezért $\Psi(u) = 1$ bármely u kezdeti többlet mellett, a csőd 1 valószínűséggel bekövetkezne.

3.3. Az illeszkedési együttható

Az illeszkedési együttható (Lundberg együttható, korrekciós tényező, szolvencia paraméter) az alábbi egyenlet pozitív megoldása:

$$D \cdot r = \ln M_S(r) \Longleftrightarrow e^{D \cdot r} = M_S(r) \Longleftrightarrow M_{S-D}(r) = 1.$$

Ennek az egyenletnek nem mindig van pozitív megoldása, vagyis az illeszkedési együttható nem mindig létezik, ha azonban van, akkor az egyértelmű. Gondoljuk meg, miért.

Emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges ξ valószínűségi változó $M_\xi(r)$ momentumgeneráló függvénye szigorúan konvex, ha legalább egy 0-tól különböző lehetséges értéke van: minden $0 \leq \lambda \leq 1$ és $r_1 \neq r_2$ esetén az exponenciális függvény szigorúan konvex volta miatt

$$\begin{aligned}
&M_\xi(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2) = E\left[e^{\lambda r_1 \xi + (1-\lambda) r_2 \xi}\right] \\
&\leq E\left[\lambda e^{r_1 \xi} + (1-\lambda) e^{r_2 \xi}\right] = \lambda E\left[e^{r_1 \xi}\right] + (1-\lambda) E\left[e^{r_2 \xi}\right] \\
&= \lambda M_\xi(r_1) + (1-\lambda) M_\xi(r_2),
\end{aligned}$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 1$ vagy ξ egyetlen lehetséges értéke 0.

$M_{S-D}(r)$ tehát szigorúan konvex, ha S legalább egy D-től különböző értékkel bír. Értéke a 0 pontban: $M_{S-D}(0) = 1$; kérdés, felveszi-e ismét az 1 értéket egy pozitív pontban. (A szigorú konvexitás miatt két pontban nem veheti fel.) Ennek szükséges feltétele, hogy a függvény a pozitív félegyenesen először csökkenjen, azután nőjön, vagyis hogy deriváltja a 0 pontban negatív legyen: E[S] < D, majd pozitívra forduljon. Szükséges azonban az is, hogy a függvény értéke elérje az 1-et, aminek elégséges feltétele az, hogy az $M_{S-D}(r)$ értelmezési tartománya nem korlátos. A függvény deriváltja pozitívra fordul, ha az S –nek van D-nél nagyobb értéke, mert ekkor az

$$\begin{aligned}
&M_{S-D}(r) = \int_{-D}^{\infty} e^{rx} dF_{S-D}(x) \\
&= \int_{-D}^{D} e^{rx} dF_{S-D}(x) + \int_{D}^{\infty} e^{rx} dF_{S-D}(x)
\end{aligned}$$

összefüggésben a második tag végtelenhez tart, ha r tart végtelenhez.

Vegyük észre, hogy e feltételek az „illeszkedési együttható” elnevezést is megmagyarázzák. Egy kicsit önkényes magyarázatként azt mondhatjuk, hogy összhangot teremt a díj és az általa fedezendő kár között. Ilyen összhang nincs, ha a díj az ésszerűnél kevesebb és akkor sem, ha nem kisebb, mint amekkora kár legfeljebb bekövetkezhet. Azt mutatja, hogy a díj és a kár nem illeszkednek megfelelően, ha túlzottan elválnak egymástól.

3.4. Az illeszkedési együttható, ha S(t) összetett Poisson folyamat

A továbbiakban feltesszük, hogy $N(t)$ λ paraméterű Poisson eloszlású, az $X_1, X_2, ..., X_{N(t)}$ eseti károk függetlenek és függetlenek $N(t)$ – től, azonos eloszlásúak, S jelöli az egységnyi időszakra eső kárigényt, D az egységnyi időszakra megállapított biztosítási díjat, X az eseti kár nagyságát. Ekkor

$$\ln M_{S(t)}(r) = \lambda t (M_X(r) - 1),$$

amint ezt az előző fejezetben beláttuk, és speciálisan, ha $t = 1$:

$$\ln M_S(r) = \lambda (M_X(r) - 1) \quad \forall \quad 0 < r < \gamma,$$

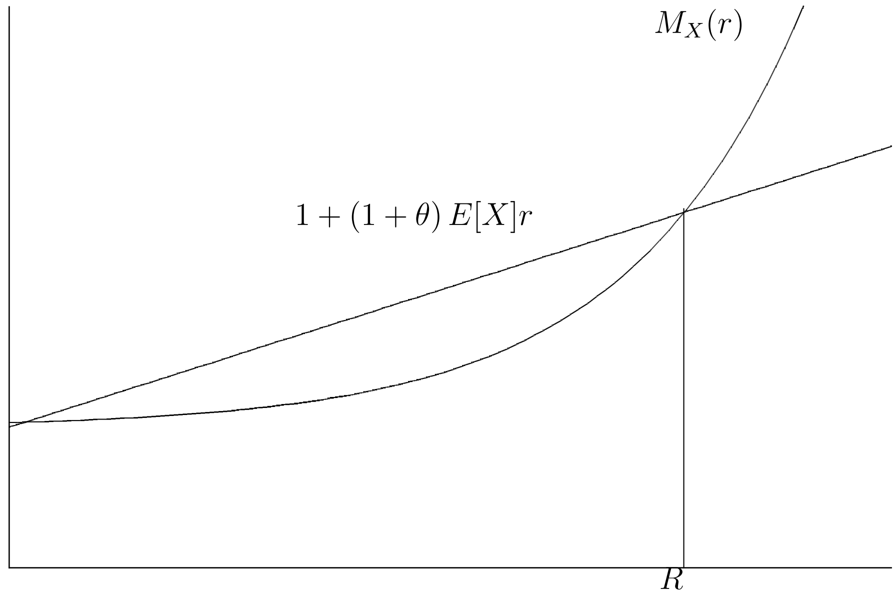
ahol γ az M_S értelmezési tartományának legkisebb felső korlátja. Az R Illeszkedési együttható meghatározására szolgáló egyenlet ezért a következő lesz:

$$\lambda + D \cdot r = \lambda M_X(r), 0 < r < \gamma. \tag{3.1}$$

Figyelembe véve, hogy $E[S] = \lambda E[X]$ és ezért $D = \lambda E[X](1+\theta)$, az egyenlet tovább így alakítható:

$$1 + E[X](1+\theta) r = M_X(r), 0 < r < \gamma. \tag{3.2}$$

Látható, hogy ez esetben elegendő X momentumgeneráló függvényét ismernünk ahhoz, hogy az illeszkedési együtthatóra vonatkozó egyenletet felírjuk. Az egyenlet



3.1. ábra.

megoldhatóságának: az illeszkedési együttható létezésének a feltételei is más alakot öltenek, foglaljuk össze őket:

(a) $\{S(t) : t \geq 0\}$ összetett Poisson folyamat;

(b) $D > \lambda E[X]$, azaz $\theta > 0$;

(c) Ha az X kárnagyság momentumgeneráló függvényének az értelmezési tartománya $(-\infty, \gamma)$, akkor $\gamma > 0$ és $M_X(r) \to \infty$, ha $r \to \gamma$.

A (c) feltétel nem zárja ki, hogy az X momentumgeneráló függvénye az egész valós egyenesen értelmezett legyen. Az (a) feltétel mellett S összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó.

Az egyenlet R megoldását mutatja az 3.1. ábra.

Mind az $M_X(r)$ görbe, mind az egyenes az 1 pontban metszik a függőleges tengelyt. Minthogy $M'_X(0) = E[X]$ és az egyenes iránytangense $(1+\theta)E[X] > E[X]$ a (b) feltétel miatt, ezért létezik egyetlen pozitív R argumentum, amelyben a görbe és az egyenes metszik egymást. Látható, hogy ha θ nullához tart, akkor, amint $r \to 0$, az egyenes meredeksége $M_X(r)$ iránytangenséhez tart. Így, ha $\theta \to 0$, akkor $R \to 0$.

3.1. Példa. ***(X exponenciális eloszlású)*** *Legyen az összkár folyamat összetett Poisson folyamat, X exponenciális eloszlású β paraméterrel. Számoljuk ki az R*

illeszkedési együtthatót.

Megoldás. Mivel $E[X] = \frac{1}{\beta}$, ezért az egyenlet (3.2) szerint így néz ki:

$$1 + \frac{(1+\theta)\,r}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - r},\ 0 < r < \beta.$$

Ennek a megoldása:

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}. \tag{3.3}$$

Általában ilyen explicit alakban nem határozható meg R értéke, iterációs eljárással azonban jól közelíthető.

3.2. Példa. *Legyen az összkár folyamat összetett Poisson folyamat, a relatív biztonsági pótlék: $\theta = 2$, X eloszlása a következő: $P(X=1) = \frac{1}{3}, P(X=2) = \frac{1}{2}, P(X=3) = \frac{1}{6}$. Számítsuk ki az illeszkedési együtthatót.*

Megoldás. $E[X] = \frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}$, R a következő egyenlet megoldása (3.2) szerint:

$$1 + (1+2)\,\frac{11}{6} r = \frac{1}{3} e^{r} + \frac{1}{2} e^{2r} + \frac{1}{6} e^{3r}.$$

Számítsuk ki a bal oldal és a jobb oldal értékeit r különböző választása mellett:

Ha $r = 1$:	$6,5$	$7,94$
Ha $r = \frac{1}{2}$:	$3,75$	$2,65$
Ha $r = \frac{3}{4}$:	$5,125$	$4,5$

$R = 0,85$ elfogadható közelítés.

3.5. Tétel a csőd valószínűségéről

Az alábbi tétel, amely a csőd valószínűségét a kezdeti többlet függvényében fogalmazza meg, az olasz iskolához tartozó DeFinetti és a svéd iskolához tartozó Lundberg és Cramer nevéhez fűződik:

1. Tétel: Az (a), (b) és (c) feltételek mellett

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)} | T < +\infty\right]},\ u \geq 0,$$

ahol R az illeszkedési együttható.

A tétel bizonyítását bemutatjuk a fejezet végén. Foglaljuk össze a tétel tulajdonságait:

1. A $\Psi(u)$ valószínűséget meghatározó tört számlálója 1 -nél kisebb, mivel $R > 0$ véges érték.

2. A nevező nagyobb 1-nél, hiszen $U(T)$ negatív, az $e^{-RU(T)}$ valószínűségi változó minden lehetséges értéke tehát 1-nél nagyobb.

3. Ha θ nullához tart, akkor R is nullához tart, ez pedig a tétel értelmében implikálja, hogy a $\Psi(u)$-t meghatározó tört értéke, vagyis a csőd bekövetkezésének valószínűsége 1 - hez tart.

4. Ha $R > 0$, akkor $\Psi(u) < 1$ és 1 - $\Psi(u) > 0$ minden $u \geq 0$ mellett. Ezért, ha valamilyen $u_0 \geq 0$ esetén 1 - $\Psi(u_0) = 0$, akkor R = 0 és $\Psi(u) = 1$ minden $u \geq 0$ értékre.

Mivel $\Psi(u)\, e^{Ru} = \frac{1}{E\left[e^{-RU(T)}|T<+\infty\right]} \leq 1$, ezért ésszerű az a következtetés, hogy $\lim_{u\to+\infty} E\left[e^{-RU(T)}|T < +\infty\right] = c,\ c \geq 1$. Az alábbi tétel ennél pontosabb állítást tartalmaz. Ennek és a következő tételnek a bizonyítása megtalálható Michaletzky (1997) jegyzetében.

2. Tétel (Cramer-Lundberg approximáció): Ha R létezik és $M_X(r)$ véges R egy környezetében, akkor

$$\lim_{u\to\infty} \Psi(u)\, e^{Ru} = \frac{D - \lambda E[X]}{\lambda M_X'(R) - D},$$

ahol λ az egységnyi időszak várható kárszáma, X az eseti kár, D az egységnyi időszakra eső díj.

Ez az összefüggés lehetővé teszi, hogy elég nagy u kezdeti többlet esetén a csőd valószínűségét így közelítsük:

$$\Psi(u) \approx \frac{1}{c} e^{-Ru}.$$

. A következő tétel a csőd méretéről szól, ha a csőd bekövetkezik.

3. Tétel: Legyen $\Psi(u,y) = P(T < +\infty \quad \& \quad U(T) > -y)$. Ekkor

$$\Psi(u,y) = \frac{\lambda}{D}\int_0^u \Psi(u-z,y)(1-F_X(z))\,dz + \frac{\lambda}{D}\int_u^{u+y}(1-F_X(z))\,dz,$$

ahol F_X az X eseti kár eloszlásfüggvénye.

E tétel következményei önmagukban is fontos összefüggések:

3.1. Következmény: $\Psi(0,y) = \frac{\lambda}{D}\int_0^y (1-F_X(z))\,dz$.

3.2. Következmény:

$$\Psi(0,\infty) = \Psi(0) = \frac{\lambda}{D}E[X] = \frac{1}{1+\theta}.$$

3.3. Következmény: Annak a valószínűsége, hogy a többlet a kezdeti többletnél valaha kisebb lesz, csak a biztonsági pótléktól függ:

$$P(\exists t : U(t) < u) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Ez abból adódik, hogy az az esemény, hogy a többlet a kezdeti többlet alá esik, ekvivalens $u = 0$ esetén a csőd bekövetkezésével.

3.4. Következmény: Ha $U(0) = 0$, akkor

$$P(U(T) > -y | T < +\infty) = \frac{P(T < +\infty \quad \& \quad U(T) > -y)}{P(T < +\infty)} = \frac{\Psi(0,y)}{\Psi(0)}$$

3.6. A maximális aggregált veszteség

Vizsgáljunk egy újabb valószínűségi változót, amely a t időpontig bekövetkező veszteség: a kár és a befolyó díj különbségének maximuma t-ben:

$$L = \max_{t \geq 0}\{S(t) - Dt\}.$$

Mivel $S(0) = 0$, ezért $L \geq 0$. Az az esemény, hogy $L > 0$ azt az eseményt jelenti egyúttal, hogy van olyan véges időpont, amelyben $U(t) < u$.

Megfontolásaink eredményét állítások formájában foglaljuk össze.

1. Állítás: Az $L > u$ és $T < +\infty$ események ekvivalensek, ezért

$$\Psi(u) = P(T < +\infty) = P(L > u) = 1 - F_L(u) - P(L = u).$$

Vizsgáljuk most azokat az időpontokat, amelyekben a többlet folyamat egy káresemény bekövetkezésével mélypontot ér el: minden ezt megelőző és ezt követő káresemény bekövetkeztekor is ennél nagyobb a többlet. Jelölje ezeket a mélypontokat $t_1, t_2, ..., t_0 = 0$. Jelölje az L_j valószínűségi változó azt a mennyiséget, amellyel a j. mélypontban a többlet a j - 1. mélypontbeli többletnél kisebb: $L_j = U(t_{j-1}) - U(t_j)$. A 3.2. ábrán mutatjuk a többlet alakulását[1]. Jelölje M a mélypontok számát. Vegyük észre, hogy a maximális aggregált veszteség:

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_M.$$

2. Állítás: Minthogy a Poisson folyamat memória nélküli, ezért

- annak a valószínűsége, hogy egy mélypont az utolsó, hogy több mélypont nem lesz, minden mélypontra ugyanannyi;

- $L_1, L_2, ..., L_M$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók.

Annak a valószínűsége, hogy a t_j mélypont az utolsó (j = 0, 1, ...), egyenlő annak a valószínűségével, hogy u = 0 kezdeti többlet mellett t_0 az utolsó mélypont, azaz nem következik be csőd: $1 - \Psi(0)$. Az M valószínűségi változó tehát geometriai eloszlású:

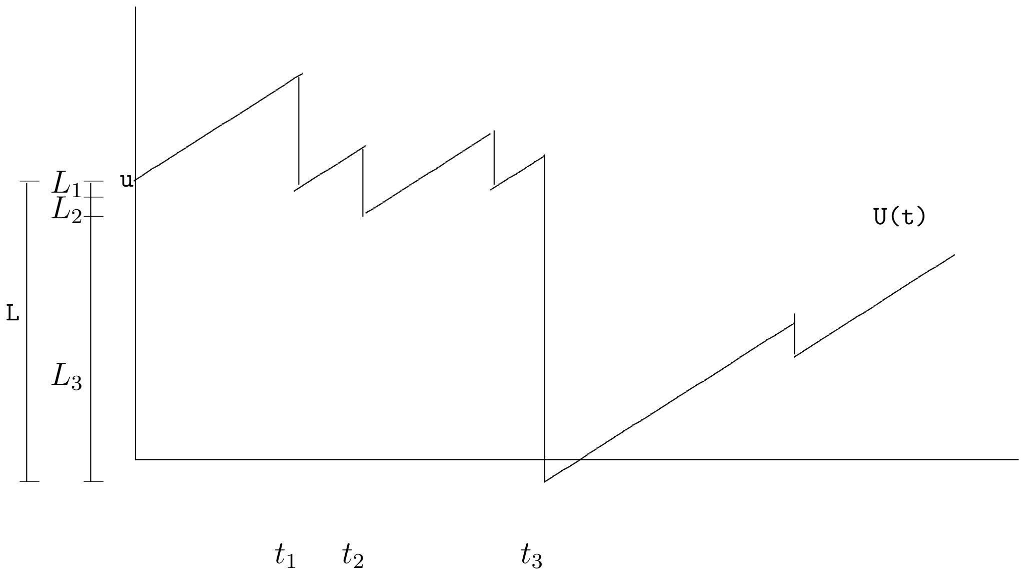
3. Állítás: $P(M = k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, ...$; $q = 1-p$, ahol $p = 1 - \Psi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$ a 3.2. Következmény szerint. Így L összetett geometriai eloszlású.

Annak a valószínűsége, hogy u = 0 kezdeti többlet esetén legalább egy további mélypont van, ekvivalens azzal, hogy csőd következik be, az L_1 veszteség nagysága pedig e mélypontban megegyezik $-U(T)$ nagyságával. Ezért L_1 $(L_2, L_3, ...)$ valószínűségi eloszlása megegyezik a $-U(T)$ valószínűségi változónak a T < +∞ feltétel melletti eloszlásával:

$$P(L_1 < y | T < +\infty) = P(U(T) > -y | T < +\infty).$$

A 3.4. Következmény szerint L_1 $(L_2, L_3, ...)$ eloszlását – eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és momentumgeneráló függvényét - így kapjuk:

[1] Az ábra a Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (2001) könyv 362. oldalán található.



3.2. ábra.

4. Állítás: $y > 0$:

$$F_{L_1}(y) = \frac{\Psi(0,y)}{\Psi(0)} = (1+\theta)\Psi(0,y)$$

$$f_{L_1}(y) = \frac{\lambda(1+\theta)}{\lambda(1+\theta)E[X]}(1-F_X(y)) = \frac{1-F_X(y)}{E[X]}$$

$$M_{L_1}(r) = \tfrac{1}{E[X]}\int\limits_0^\infty e^{ry}(1-F_X(y))\,dy$$
$$= \tfrac{1}{E[X]}\left\{\left[\tfrac{1}{r}(e^{ry}-1)(1-F_X(y))\right]_0^\infty + \int\limits_0^\infty \tfrac{1}{r}(e^{ry}-1)dF_X(y)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{E[X]r}(M_X(r)-1)$$

A 3. és 4. Állításokból következik az

5. Állítás: Az L maximális aggregált veszteség momentumgeneráló függvénye a 2. állítás szerint a következő:

$$M_L(r) = M_M(\ln M_{L_1}(r)) = \tfrac{p}{1-(1-p)M_{L_1}(r)}$$
$$= \tfrac{\theta}{1+\theta}\tfrac{1}{1-\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{E[X]r}(M_X(r)-1)}$$

3.3. Példa. *Milyen eloszlású az az összeg, amennyivel a többlet a kezdeti többletnél az első alkalommal kisebb, ha minden kárigény 1 értékű?*

Megoldás. Ekkor

$$F_X(y) = P(X < y) = \begin{cases} 0, \; ha \; y \leq 1 \\ 1, \; ha \; y > 1. \end{cases}$$

Ezért

$$f_{L_1}(y) = \begin{cases} \frac{1-F_X(y)}{E[X]} = 1, ha \; 0 < y \leq 1 \\ 0, ha \; y > 1 \; vagy \; y \leq 0. \end{cases}$$

L_1 tehát egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, vagyis a többlet nagysága akkor, amikor először esik a kezdeti többlet alá, egyenletes eloszlású az $(u-1,u)$ intervallumon.

3.4. Példa. *Milyen eloszlású az az összeg, amennyivel a többlet a kezdeti többletnél az első alkalommal kisebb, ha minden kárigény* 2 *paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó?*

Megoldás. Ekkor

$$F_X(y) = P(X < y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y}, \; ha \; y > 0, \\ 0 \; különben. \end{cases}$$

$$1 - F_X(y) = e^{-2y}, ha \; y > 0.$$

Ezért

$$f_{L_1}(y) = \begin{cases} \frac{1-F_X(y)}{E[X]} = 2e^{-2y}, ha \quad y > 0 \\ 0, ha \quad y \leq 0. \end{cases}$$

L_1 tehát szintén 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

3.7. Lundberg egyenlőtlenség

A csőd valószínűségére mindig rendelkezésre áll egy felső korlát - ezt fejezi ki a Lundberg egyenlőtlenség:

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}. \tag{3.4}$$

Mivel az 1. Tételben szereplő hányados nevezőjének explicit kiértékelésére általában nincs mód, egy elfogadhatónak tekintett csődvalószínűséggel összhangban álló kezdeti többlet konzervatív becslésére a Lundberg egyenlőtlenséget egyenlőség formájában szokták alkalmazni. Ha ε jelöli az elfogadható csődvalószínűséget (értéke jellemzően $0,01$ és $0,1$ közötti), akkor az $\varepsilon = e^{-Ru}$ egyenlőségből kapott

$$u = -\frac{\ln \varepsilon}{R}$$

érték a kezdeti többlet konzervatív becslésének tekinthető, mivel ekkor a csőd bekövetkezésének valószínűsége biztosan nem nagyobb a megadott ε értéknél.

Ha az X kár értékkészlete korlátos, azaz van olyan pozitív m érték, hogy $P(X \leq m) = 1$, akkor a csőd bekövetkezésének valószínűségére alsó korlátot is tudunk adni. Ekkor $U(T) \geq -m$, mivel az $U(T)$ többlet a csőd időpontjában negatív és a csőd előtti utolsó többlet nemnegatív. Ezért $e^{-RU(T)} \leq e^{Rm}$ és

$$E\left[e^{-RU(T)} | T < +\infty\right] \leq e^{Rm}.$$

Ekkor $\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)}|T<+\infty\right]} \geq e^{-Ru}e^{-Rm} = e^{-R(u+m)}$.

3.5. Példa. *Legyen az összkár folyamat összetett Poisson folyamat, a relatív biztonsági pótlék: $\theta = 2$, X eloszlása a következő: $P(X = 1) = \frac{1}{3}, P(X = 2) = \frac{1}{2}, P(X = 3) = \frac{1}{6}$, a kezdeti többlet: $u = 2$. Adjunk alsó és felső korlátot a csőd bekövetkezésének a valószínűségére.*

Megoldás. Ehhez a feladathoz meghatároztuk már az R illeszkedési együtthatót: az $R = 0,85$ értéket elfogadható közelítésnek tartottuk. Az eseti kár 3 -nál nagyobb értéket nem vesz fel. Így

$$0,0143 \approx e^{-0,85(2+3)} \leq \Psi(2) < e^{-0,85 \cdot 2} \approx 0,183.$$

3.8. Az eseti kár exponenciális eloszlású

Számoljuk ki a csőd valószínűségét abban az esetben, ha a kár β paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

A tétel nevezőjében lévő várható érték kiszámításához szükségünk van $-U(T)$ eloszlására, először ezt szeretnénk meghatározni.

A csőd, ha egyáltalán bekövetkezik, akkor a T időpontban következik be először. Közvetlenül előtte a többlet szükségképpen nemnegatív, jelölje ezt az értéket u'. Válasszunk egy $y > 0$ számot. Az az esemény, hogy $U(T) < -y$ vagyis $-U(T) > y$, átfogalmazható úgy, hogy a bekövetkező X kár, amely a csődöt okozza, nagyobb, mint $u' + y$, feltéve, hogy X csődöt okoz, vagyis $X > u'$. Ezen esemény feltételes valószínűsége így írható fel:

$$P\left(-U\left(T\right) > y | T < +\infty\right) = P\left(X > u' + y | X > u'\right)$$
$$= \frac{P(X > u'+y \;\&\; X > u')}{P(X > u')} = \frac{P(X > u'+y)}{P(X > u')}, y > 0.$$

Figyelembe véve, hogy a kár β paraméterű exponenciális eloszlású, ez azt jelenti, hogy

$$P\left(-U\left(T\right) > y | T < +\infty\right) = \frac{\beta \int_{u'+y}^{\infty} e^{-\beta x} dx}{\beta \int_{u'}^{\infty} e^{-\beta x} dx} = e^{-\beta y}, y > 0. \tag{3.5}$$

Így

$$P\left(-U\left(T\right) < y | T < +\infty\right) = 1 - P\left(-U\left(T\right) \geq y | T < +\infty\right)$$
$$= 1 - P\left(-U\left(T\right) > y | T < +\infty\right)$$
$$= 1 - e^{-\beta y},$$

azaz $-U\left(T\right)$ is β paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. (Az utolsó előtti egyenlőtlenség azért áll fenn, mert $-U\left(T\right)$ folytonos eloszlású.) Ez azt jelenti, hogy

$$E\left[e^{-RU(T)} | T < +\infty\right] = M_{-U(T)}\left(R\right) = \frac{\beta}{\beta - R}.$$

Ezért az 1. Tétel a következő formát ölti:

$$\Psi\left(u\right) = e^{-Ru} \frac{\beta - R}{\beta} = \frac{e^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)E[X]}}}{1+\theta}. \tag{3.6}$$

3.6. Példa. *Mekkora u kezdeti többlet szükséges ahhoz, hogy a csőd bekövetkezésének a valószínűsége* $0,1$*-nél ne legyen nagyobb, ha az összkár folyamat összetett Poisson folyamat* $\lambda = 1$ *paraméterrel, az* X *eseti kárnagyság exponenciális eloszlású valószínűségi változó* $\beta = \frac{1}{5}$ *paraméterrel, és ha az időegység alatt fizetendő díj* *akkora, hogy az átlagosan bekövetkező egyetlen eseti kárt legalább* 95%*-os valószínűséggel fedezi?*

Megoldás. Először megállapítjuk a fizetendő díjat. A

$$P(X < D) = 1 - e^{-\frac{D}{5}} = 0,95$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy $D = 5 \ln 20$. Minthogy $E[X] = 5$ és $D = \lambda E[X](1+\theta) = 5(1+\theta)$, ezért $\theta = \ln 20 - 1$. Így az R együttható értéke: $R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} = \frac{\ln 20 - 1}{5 \ln 20}$. Felhasználva a (3.6) formulát, amelyet a csőd bekövetkezésének valószínűségére exponenciális eseti kár esetében nyertünk, fenn kell állnia a

$$\Psi(u) = \frac{e^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)E[X]}}}{1+\theta} = \frac{e^{-\frac{(\ln 20 - 1)u}{5 \ln 20}}}{\ln 20} \le 0,1$$

egyenlőtlenségnek. Ebből u értékére ezt kapjuk: $u \ge 9,05$.

3.9. A diszkrét modell

A következő modellben a kárt, többletet diszkrét időpontokban vizsgáljuk. A biztosító többletén a következő függvényt értjük:

$$U(n) = u + nD - S(n),$$

ahol u a kezdeti többlet, D az egyes periódusokban fizetendő díj, $S(n)$ az első n periódusban összesen bejelentett károk összege:

$$S(n) = S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

S_i az i. periódusban bejelentett teljes kárösszeg, $S_1, S_2, ...S_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók - e közös eloszlású valószínűségi változót jelölje S. Jelölje:

$$T' = \min\{n : U(n) < 0\}$$

a legkorábbi időpontot, amelyben a többlet negatívvá válik és

$$\Psi'(u) = P(T' < +\infty)$$

ennek bekövetkezési valószínűségét.

Az R' *illeszkedési együttható*, ha létezik, az alábbi egyenlet egyetlen pozitív megoldása:

$$e^{-D\cdot r} M_S(r) = 1. \tag{3.7}$$

Annak a feltételeit, hogy az R' együttható létezzen, a fejezet elején vizsgáltuk.

E modellben a kárszám vizsgálata csak az egyes időpontok közötti periódusokban jelenik meg. A következő tételben feltesszük, hogy a kárnagyság minden periódusban azonos paraméterű összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó.

4. Tétel: (Tétel a csőd valószínűségéről): Ha az egyes periódusok S összkárai egymástól független összetett Poisson eloszlású valószínűségi változók, és ha létezik az R' illeszkedési együttható, akkor

$$\Psi'(u) = \frac{e^{-R'u}}{E\left[e^{-R'U(T')} | T' < +\infty\right]}, \ u \geq 0.$$

E tételt a fejezet végén bizonyítjuk.

A tétel következményeként a csőd valószínűségére a kezdeti többlet függvényében felső korlát adható a *Lundberg egyenlőtlenség* formájában:

$$\Psi'(u) \leq e^{-R'u}. \tag{3.8}$$

Álljon itt egy példa annak az illusztrálására, hogy az illeszkedési együttható nem mindig létezik.

3.7. Példa. *Legyen az S kárösszeg eloszlása:* $P(S=1) = 0,2; P(S=2) = 0,8.$

Először legyen a díj: $D = 2,5$. Ekkor a kárösszegnek nincs a díjnál nagyobb lehetséges értéke, ezért az

$$e^{-2,5\cdot r}\left(0,2e^r + 0,8e^{2r}\right) = 1$$

egyenletnek $r = 0$ az egyetlen megoldása.

A $D = 1,5$ választás mellett a díj a kár várható értékénél kisebb, ezért az

$$e^{-1,5\cdot r}\left(0,2e^r + 0,8e^{2r}\right) = 1$$

egyenletnek ismét $r = 0$ az egyetlen megoldása.

A $D = 1,9$ választás mellett az

$$e^{-1,9\cdot r}\left(0,2e^{r} + 0,8e^{2r}\right) = 1$$

egyenlet egyetlen pozitív megoldása: $r \approx 1,84$.

A következő példában a θ relatív biztonsági pótlékra adunk konzervatív becslést a Lundberg egyenlőtlenség felhasználásával.

3.8. Példa. [2]*Legyen az S éves kár nagysága fix a érték, bekövetkezésének valószínűsége p. Az éves D díjat az éves kár pa várható értékére építjük: $D = pa\,(1+\theta)$. Mennyi legyen a relatív biztonsági pótlék az R illeszkedési együttható függvényében?*

Megoldás. Alkalmazzuk az illeszkedési együttható meghatározására szolgáló egyenletet:

$$e^{Rpa(1+\theta)} = pe^{Ra} + (1-p)$$

Ebből

$$\theta = \frac{\ln\left(pe^{Ra} + (1-p)\right)}{Rpa} - 1.$$

Látjuk, hogy a p kárvalószínűség növekedésével a relatív biztonsági pótlék csökken, hiszen az $Ra\,(1+\theta) = \frac{\ln\left(pe^{Ra}+(1-p)\right)}{p}$ függvény p szerinti deriváltja negatív.

3.10. Az illeszkedési együttható közelítő értéke

Az R közelítő értékének meghatározására az ekvivalens

$$\ln M_S\,(r) - Dr = 0$$

összefüggést használjuk fel, és a $\ln M_S\,(r)$ függvényt sorba fejtve, sorának első három tagjával - kvadratikusan - közelítjük. Mint tudjuk

$$\begin{aligned}\ln M_S\,(r) &= \ln M_S\,(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln M_S(0))^{(k)}}{k!} r^k \\ &\approx \ln M_S\,(0) + \ln M_S\,(0)'\,r + \tfrac{1}{2}\ln M_S\,(0)''\,r^2,\end{aligned}$$

[2] A példa részben József Sándor: Általános aktuárius módszertan c. szakdolgozatából (2001) (BKAE Biztosítási Oktató és Kutató Csoport, Aktuárius posztgraduális szak, 2004) származik, 16. oldal

$\ln M_S(0)^{(k)}$ a $\ln M_S(r)$ k-adik deriváltja az $r=0$ helyen. Meghatározzuk az első és második deriváltakat, és felhasználjuk, hogy $M_S(0)=1; M_S'(0)=E[S]; M_S''(0)=E[S^2]$:

$$(\ln M_S(r))' = \frac{1}{M_S(r)} M_S'(r);$$

$$(\ln M_S(r))'' = \frac{-1}{M_S(r)^2} M_S'(r)^2 + \frac{1}{M_S(r)} M_S''(r).$$

Így

$$\ln M_S(r) \approx E[S]r + \tfrac{1}{2}\left(E[S^2] - E^2[S]\right) r^2;$$

$$\ln M_S(r) - Dr \approx E[S]r + \tfrac{1}{2} Var[S] r^2 - Dr.$$

A $\ln M_S(r) - Dr$ kifejezés értékét nullává tévő R illeszkedési együttható tehát a következő közelítéssel kapható meg:

$$R \approx \frac{2(D - E[S])}{Var[S]}. \tag{3.9}$$

Vegyük észre, hogy ez a közelítés R pontos értékét adja, ha S normális eloszlású. Ekkor ugyanis S momentumgeneráló függvénye: $M_S(r) = e^{E[S]r + \frac{r^2 Var[S]}{2}}$, így a $\ln M_S(r) - Dr = 0$ egyenlet egyenértékű az $r = \frac{2(D-E[S])}{Var[S]}$ egyenlettel.

3.11. A tételek bizonyításai.

Az 1. tétel bizonyítása:

Válasszuk a $t > 0$ és $r > 0$ értékeket tetszőlegesen. Írjuk fel a teljes valószínűség tételének felhasználásával $-U(t)$ momentumgeneráló függvényének értékét az r helyen:

$$E\left[e^{-rU(t)}\right] = E\left[e^{-rU(t)} | T \le t\right] P(T \le t) + E\left[e^{-rU(t)} | T > t\right] P(T > t).$$

Figyelembe véve azt, hogy $-U(t) = -u - Dt + S(t)$, és $M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(M_X(r)-1)}$, mivel $S(t)$ összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó, ezért az egyenlet bal oldala így írható fel:

$$E\left[e^{-rU(t)}\right] = E\left[e^{-ru-rDt+rS(t)}\right] = e^{-ru-rDt} E\left[e^{rS(t)}\right]$$

$$= e^{-ru-rDt} M_{S(t)}(r) = e^{-ru-rDt+\lambda t\{M_X(r)-1\}}.$$

Az egyenlet jobb oldala első tagjában $U(t)$ így írható fel:

$$U(t) = U(T) + \{U(t) - U(T)\} = U(T) + D(t-T) - \{S(t) - S(T)\}.$$

$S(t) - S(T)$ összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda(t-T)$ és $F(x)$ paraméterekkel. Ezért

$$e^{r\{S(t)-S(T)\}} = e^{\lambda(t-T)\{M_X(r)-1\}}.$$

Vizsgáljuk az

$$E\left[e^{-rU(t)}|T \le t\right] = E\left[e^{-rU(T)}e^{-rD(t-T)}e^{r\{S(t)-S(T)\}}|T \le t\right]$$

összefüggést. Mivel $t \le T$ esetén $e^{-rU(T)}, e^{-rD(t-T)}, e^{r\{S(t)-S(T)\}}$ függetlenek a Poisson folyamat tulajdonságai miatt, így szorzatuk várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával. Ezért

$$E\left[e^{-rU(t)}|T \le t\right] = E\left[e^{-rU(T)}e^{-rD(t-T)+\lambda(t-T)\{M_X(r)-1\}}|T \le t\right].$$

Ha $r = R$, akkor a $\lambda + D \cdot R = \lambda M_X(R)$ összefüggés miatt

$$E\left[e^{-RU(t)}\right] = e^{-Ru};$$
$$E\left[e^{-RU(t)}|T \le t\right] = E\left[e^{-RU(T)}|T \le t\right].$$

Ezért azt kapjuk, hogy

$$e^{-Ru} = E\left[e^{-RU(T)}|T \le t\right] P(T \le t) + E\left[e^{-RU(t)}|T > t\right] P(T > t).$$

Nézzük, mi történik, ha $t \to \infty$. Ekkor $T \le t$ azt jelenti, hogy $T > +\infty$ és

$$\lim_{t\to\infty} P(T \le t) = P(T < +\infty) = \Psi(u).$$

A tétel bizonyításához be kell még látnunk, hogy $lim_{t\to\infty} E\left[e^{-RU(t)}|T > t\right] P(T > t) = 0$. Ez következik.

A T > t eseményt U(t) értékétől függően két részre osztjuk és külön vizsgáljuk az $U(t) < u_0(t)$ illetve $U(t) \ge u_0(t)$ eseteket egy alkalmasan választott $u_0(t)$

függvény mellett. Megjegyezzük, hogy T > t maga után vonja, hogy U(t) $\geq$ 0, vagyis $e^{-RU(t)} \leq 1$. Azt kapjuk, hogy

$$E\left[e^{-RU(t)}|T>t\right]P(T>t)$$
$$=E\left[e^{-RU(t)}|T>t \quad \& \quad 0\leq U(t)<u_0(t)\right]P(T>t \quad \& \quad 0\leq U(t)<u_0(t))$$
$$+E\left[e^{-RU(t)}|T>t \quad \& \quad U(t)\geq u_0(t)\right]P(T>t \quad \& \quad U(t)\geq u_0(t))$$
$$\leq P(U(t)<u_0(t))+e^{-Ru_0(t)}$$

Az összeg második tagja 0-hoz tart, ha $\lim_{t\to\infty} u_0(t) = +\infty$. Az első tag kiértékeléséhez felhasználjuk egyrészt a tétel azon feltevését, hogy a többlet minden t időpontra összetett Poisson eloszlású:

$$E[U(t)] = u + D\cdot t - \lambda tE[X]\,; Var[U(t)] = \lambda tE\left[X^2\right],$$

másrészt a Csebisev tételt, amely szerint

$$P(|U(t)-E[U(t)]|\geq\varepsilon(t))\leq\frac{Var[U(t)]}{\varepsilon(t)^2}$$

minden ε(t) > 0 számra. Ez az egyenlőtlenség maga után vonja, hogy

$$P(U(t)<E[U(t)]-\varepsilon(t))\leq\frac{Var[U(t)]}{\varepsilon(t)^2}.$$

Felhasználva, hogy $D > \lambda E[X]$, válasszuk az $u_0(t)$ függvényt úgy, hogy a $\lim_{t\to\infty}\frac{E[U(t)]-u_0(t)}{\sqrt{t}}=\infty$ is teljesüljön, (pl. $u_0(t)=\sqrt{t}$) és válasszuk ε(t)-t úgy, hogy $E[U(t)]-\varepsilon(t)=u_0(t)$ fennálljon. Azt kapjuk, hogy

$$P(U(t)<u_0(t))\leq\frac{\lambda tE[X^2]}{(E[U(t)]-u_0(t))^2}=\frac{\lambda E[X^2]}{\left(\frac{E[U(t)]-u_0(t)}{\sqrt{t}}\right)^2}$$

és $lim_{t\to\infty}E\left[e^{-RU(t)}|T>t\right]P(T>t)=0$. Így $e^{-Ru}=E\left[e^{-RU(T)}|T<+\infty\right]\Psi(u)$, ami éppen az állítás.

A 4. tétel bizonyítása.

A diszkrét modellben használt fogalmakat egy „ ' „ jelzéssel különböztettük meg a folytonos modellben használt fogalmaktól. Itt a jelölés egyszerűsítése érdekében ezt elhagyjuk.

Vizsgáljuk a következő azonosságot:

$$E\left[e^{-RU(n)}\right] = \sum_{i=0}^{n} E\left[e^{-RU(n)}|T = i\right] P\left(T = i\right) + E\left[e^{-RU(n)}|T > n\right] P\left(T > n\right).$$

Vegyük észre, hogy mivel U(n) = U(n – 1) + D – S, az illeszkedési együttható választása miatt $E\left[e^{-RU(n)}\right] = E\left[e^{-RU(i)}\right]$, $i = 0, 1, ..., n$. Ezért az azonosság bal oldalán e^{-Ru} áll és, figyelembe véve, hogy U(n) – U(i) független a T = i eseménytől, azt kapjuk, hogy

$$e^{-Ru} = \sum_{i=0}^{n} E\left[e^{-RU(i)}|T = i\right] P\left(T = i\right) + E\left[e^{-RU(n)}|T > n\right] P\left(T > n\right).$$

Ha n $\to$ ∞, akkor az első tag a jobb oldalon a következőhöz konvergál:

$$\sum_{i=0}^{\infty} E\left[e^{-RU(i)}|T = i\right] P\left(T = i\right) = E\left[e^{-RU(T)}|T < \infty\right] P\left(T < \infty\right)$$

Be kell még látnunk, hogy a jobb oldal második tagja eltűnik, ha $n \to \infty$. Ugyanazt a megfontolást alkalmazzuk, mint az 1. tétel bizonyításában, felhasználva, hogy S összetett Poisson eloszlású és a díj nagyobb a fedezni hivatott kár várható értékénél.

3.12. Gyakorló feladatok

1. Legyen az összkár folyamat összetett Poisson folyamat, az X kárnagyság diszkrét eloszlású: $P\left(X = 1\right) = \frac{1}{4}, P\left(X = 2\right) = \frac{3}{4}$. Ha az R illeszkedési együttható értéke $\ln 2$, mennyi legyen a relatív biztonsági pótlék, hogy az 1. tételben szereplő hányados számlálója a csőd bekövetkezésének valószínűségére az u kezdeti többlet függvényében megfelelő felső korlátot adjon? Mennyi lesz a biztosítási díj, ha a Poisson paraméter értéke: $\lambda = 3$?

2. [3]Egy kockázati folyamatra $\theta = 0,4$, az eseti kár eloszlását az

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(3e^{-3x} + 7e^{-7x}\right)$$

sűrűségfüggvény írja le. Válaszoljunk a a következő kérdésekre:

[3]A példa Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit M. (2001) könyvéből származik, 106. oldal

a) A 0; 1; 6 értékek gyökei az illeszkedési együttható meghatározására szolgáló $1 + (1+\theta)\, E\,[X]\, r = M_X\,(r)$ egyenletnek. Melyik az igazi illeszkedési együttható?

b) A következő függvények közül az egyik a csődvalószínűség erre a folyamatra. Melyik az, miért, és a többi miért nem lehet csődvalószínűség?

- $\Psi\,(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{1}{35}e^{-6u}$;
- $\Psi\,(u) = \frac{24}{35}e^{-u} + \frac{11}{35}e^{-6u}$;
- $\Psi\,(u) = \frac{24}{35}e^{-0{,}5u} + \frac{1}{35}e^{-6{,}5u}$;
- $\Psi\,(u) = \frac{24}{35}e^{-0{,}5u} + \frac{11}{35}e^{-6{,}5u}$.

c) Mennyi lesz c azon értéke, amelyre fennáll, hogy $\lim_{u\to\infty} \Psi\,(u)\, e^{Ru} = \frac{1}{c}$?

3. [4]Állományunkban az éves összkár összetett Poisson eloszlású, $\lambda = 1$ a várható kárszám, az X eseti károk $\beta = 0,001$ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Foglalja össze táblázatban a tőke (kezdeti többlet) és a díj (tőke) arányának hatását a csőd valószínűségére, ha $\theta = 0,2$ és $u = 1000$ vagy $u = 3000$, illetve ha $\theta = 1$ és $u = 1000$ vagy $u = 2000$ vagy $u = 5000$.

[4]A példa József Sándor szakdolgozatából (2004) származik, 20. oldal

4. fejezet

VISZONTBIZTOSÍTÁS

Ha egy kockázat túl nagy a biztosító társaság számára, vagy ha egy egész állománnyal kapcsolatos veszteség lehetősége túl súlyos, akkor a társaság a saját és a biztosítottak biztonsága érdekében úgy dönt, vagy éppen előírások kötelezik arra, hogy viszontbiztosítással védelmet vásároljon. A viszontbiztosító társaság gyakran ugyanezt csinálja, vagyis tovább adja a viszontbiztosításba vett kockázat egy részét vagy egészét egy harmadik társaságnak. Ezzel a folyamatban részt vevő társaságok felosztják egymás között a kockázatot és így nagyon kedvezőtlen káralakulás sem jár tragikus következménnyel egyik résztvevő félre nézve sem. Viszontbiztosítással általában nagy tőkeerővel, széleskörű technikai és adminisztratív tapasztalattal, nemzetközi hálózattal bíró társaságok foglalkoznak.

A viszontbiztosítás is a biztosítási üzlet egy nagy ágazata, amelyben különböző szereplők vesznek részt. Mi a következőkben ezt leegyszerűsítjük két szereplőre: az egyik a direkt biztosító, amely a biztosítottal szerződik, a másik a viszontbiztosító, amely a direkt biztosítóval szerződik.

Viszontbiztosítási megállapodások számtalan variációban és kombinációban köttetnek. Hogy valamelyest tipizáljunk, három szempontot említünk. Létrejöhetnek eseti szerződések, amelyek fakultatívak abban az értelemben, hogy a szerződő felek egyedi megállapodásától függnek - ellentétben azokkal a szerződésekkel, amelyeknek megkötését-elfogadását korábban kötött keretegyezmény a felek részére előírja. A szerződések vonatkozhatnak a vállalt kárral arányos kockázatmegosztásra szemben a nem arányos vagy fix megtartási szint mellett történő kockázatmegosztással, amelyet általában nagy károk fedezetére alkalmaznak. Végül a viszontbiztosítás díja lehet a direkt biztosítóhoz befolyó díjból a kockázatvállalással arányos, vagy azzal nem arányos részesedés. (A biztosítási díj megosztását befolyásolja a különböző jutalékokra: szerzési jutalék, nyereség, adminisztrációs költségek, vonatkozó megállapodás.)

Az arányos viszontbiztosítás klasszikus formái közé tartoznak a Quota Share és Surplus, a nem-arányos viszontbiztosítás klasszikus formái közé az Excess of Loss és a Stop Loss szerződések. A magyar biztosítási szóhasználatban is az angol elnevezések jelennek meg, ezért itt nem próbálkozunk meg a fordításukkal. Ezeket a formákat összefoglaljuk röviden és kissé leegyszerűsítve.

4.1. A viszontbiztosítás klasszikus formái

4.1.1. Arányos viszontbiztosítás

A *Quota Share* esetében egy állomány minden káreseményére (kötvényére) a kár azonos hányada a viszontbiztosító által fedezett rész. Így viszontbiztosításba kerül

$$X_v = \alpha X,\ 0 < \alpha \leq 1,$$

ahol az X valószínűségi változó a bekövetkező kár nagysága. A kár $(1-\alpha)$ hányada marad saját megtartásban:

$$X_d = (1-\alpha)\, X.$$

X_v, X_d a viszontbiztosító illetve a direkt biztosító eseti kárának nagyságát jelöli.

A *Surplus* szerződések lehetővé teszik, hogy a viszontbiztosításba kerülő hányad kockázatonként változzon. Ez a forma a direkt biztosítónak inkább lehetővé teszi, hogy a viszontbiztosítás révén a nagyobb károkra nagyobb védelmet kapjon.

4.1.2. Nem-arányos viszontbiztosítás

Az *Excess of Loss* szerződés keretében minden egyes kárigényre nézve a viszontbiztosító a szerződésben rögzített m megtartási szint feletti károkat fedezi. A viszontbiztosítási szerződés a megtartási szintet meghatározhatja kötvényenként, káreseményenként vagy kárcsoportonként is. A viszontbiztosító illetve a direkt biztosító kockázata a következő valószínűségi változó lesz:

$$X_v = \begin{cases} 0, \ ha \ X \leq m \\ X - m, \ ha \ X > m; \end{cases}$$

$$X_d = \begin{cases} X, \ ha \ X \leq m \\ m, \ ha \ X > m. \end{cases}$$

Stop Loss viszontbiztosítást a direkt biztosító egy üzletág kockázatának a csökkentése érdekében köt oly módon, hogy az időszakban felmerülő összkárra határoz meg megtartási szintet. Ha a direkt biztosító megtartási szintje d, a viszontbiztosító illetve a direkt biztosító által fedezett S_v és S_d összkár a következő valószínűségi változó lesz:

$$S_v = \begin{cases} 0, \ ha \ S \leq d \\ S - d, \ ha \ S > d; \end{cases}$$

$$S_d = \begin{cases} S, \ ha \ S \leq d \\ d, \ ha \ S > d. \end{cases}$$

A különböző viszontbiztosítási formák közötti választásban kulcsszerepe van a viszontbiztosítás díjának, amely pedig a viszontbiztosító által fedezett teljes kockázat eloszlására, mindenekelőtt annak várható értékére épül. A viszontbiztosítás nettó díja e várható érték. Bármi legyen is a kiválasztott viszontbiztosítási forma, az eseti károkra és az összkárra egyaránt érvényes, hogy az érte vállalt kötelezettség megoszlik a viszontbiztosító és a direkt biztosító között (kivéve az SL biztosítást, ahol a megosztás természetesen csak az összkárra érvényes):

$$X = X_v + X_d; \ S = S_v + S_d.$$

4.2. A viszontbiztosítás nettó díja

Felmerül a kérdés, vajon a biztosítási állomány tulajdonságai, főként az, ha az állomány aggregált kárösszege összetett Poisson eloszlású, fennmaradnak-e a viszontbiztosítás során. Ha igen, ez megkönnyíti a viszontbiztosítás nettó díjának a kiszámítását, hiszen akkor az eddigi számítási, kiértékelési módszereink továbbra is alkalmazhatók.

Hogy eldönthessük, a viszontbiztosításba kerülő (ill. a direkt biztosítónál maradó) teljes kárösszeg összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó-e, felidézzük, milyen tulajdonságokkal kell bírnia: a) az egyedi károk egymástól és a kárszámtól függetlenül következnek be és azonos eloszlásúak; b) a kárszám Poisson eloszlású.

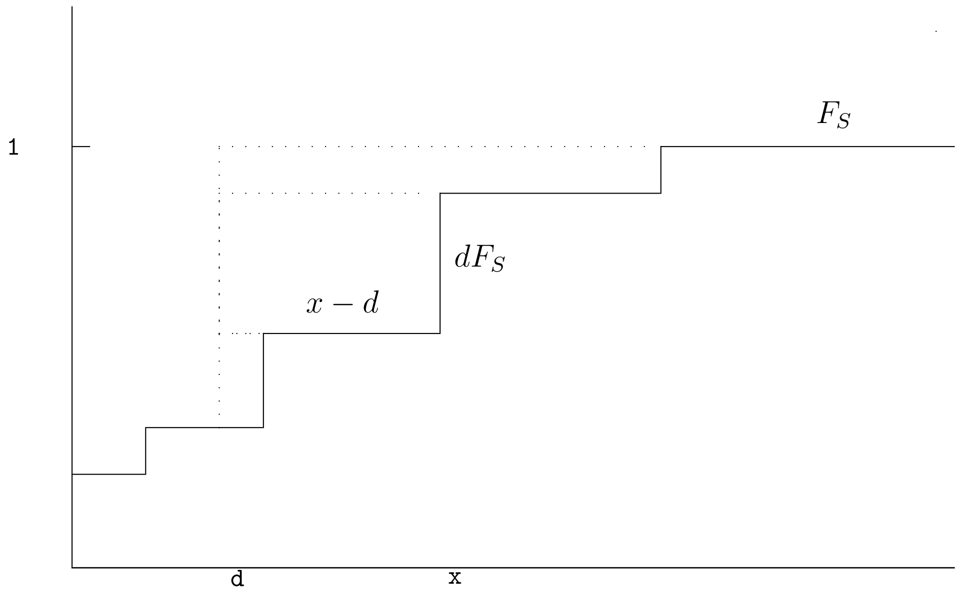
A Quota Share és az Excess of Loss biztosítási forma esetében a viszontbiztosításba kerülő egyedi károk változatlanul függetlenek és azonos eloszlásúak, bár eloszlásuk természetesen megváltozik; a kárszám pedig marad, ami volt. A Surplus esetében az egyedi károk nem maradnak azonos eloszlásúak, hiszen a viszontbiztosításba kerülő kárhányad kockázatról kockázatra változik. Stop Loss viszontbiztosítás esetében pedig a viszontbiztosításba kerülő kárösszeg már egyáltalán nem követi az állományban bekövetkezett eseti károk tulajdonságait, sőt a kárszámtól sem függ közvetlenül, ekkor tehát nem használhatjuk ki az állományunknak azt a számítások szempontjából kényelmes tulajdonságát, hogy összkára összetett Poisson eloszlású, ezért más megközelítést alkalmazunk.

A Stop Loss viszontbiztosítás nettó díja, vagyis a viszontbiztosításba kerülő összkár várható értéke definíció szerint a következő: $E\left[S_v\right]=\int\limits_d^\infty (x-d)\, dF_S(x)$, ahol d a megtartási szint, x az állomány S összkárának a lehetséges értékeit képviseli.

E várható érték, mint ismeretes, így is felírható: $E\left[S_v\right]=\int\limits_0^\infty \left(1-F_{S_v}(y)\right) dy$.

Minthogy

$$\begin{aligned}
F_{S_v}(y) &= P\left(S_v<y\right)\\
&= P\left(S_v<y|S\le d\right)P\left(S\le d\right)+P\left(S_v<y|S>d\right)P\left(S>d\right)\\
&= P\left(S-d\le 0\right)+P\left(0<S-d<y\right)\\
&= P\left(S-d<y\right)=F_S\left(y+d\right),
\end{aligned}$$



4.1. ábra.

ha $y > 0$, ezért

$$E\left[S_v\right] = \int_0^\infty \left(1 - F_{S_v}(y)\right) dy = \int_d^\infty \left(1 - F_S(x)\right) dx.$$

Ezt jól mutatja a 4.1. ábra[1], ha S diszkrét eloszlású.

Bizonyítsuk az állítást közvetlenül, ha S folytonos eloszlású. Ekkor

$$\begin{aligned} E\left[S_v\right] &= \int_d^\infty (x-d)\, f_S(x)\, dx \\ &= -\left[(x-d)\left(1 - F_S(x)\right)\right]_d^\infty + \int_d^\infty \left(1 - F_S(x)\right) dx \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy az első tag 0:

$$x\left(\,1 - F_S(x)\right) = x \int_x^\infty f_S(t)\, dt \le \int_x^\infty t f_S(t)\, dt \to 0,$$

ha $x \to \infty$, mert S várható értékéről feltettük, hogy létezik.

A viszontbiztosító várható kárának meghatározására egy másik megközelítés is ajánlható, amelyet diszkrét eloszlás esetében mutatunk be részletesen. Ekkor

[1] Az ábra a Kaas et al. (2001) könyvben található, 11.o.

$E[S_v] = \sum\limits_{x \geq d} (x-d) f_S(x)$. A formula azt mutatja, hogy szükségünk van az állomány összkára eloszlásának ismeretére. Megmutatjuk, hogy elegendő ismernünk az eloszlást csak a d megtartási szintnél kisebb lehetséges értékekre:

$$\begin{aligned} \sum_{x \geq d}^{\infty} (x-d) f_S(x) &= \sum_{x \geq 0} (x-d) f_S(x) - \sum_{x<d} (x-d) f_S(x) \\ &= \sum_{x \geq 0} x f_S(x) - d \sum_{x \geq 0} f_S(x) - \sum_{x<d} (x-d) f_S(x). \end{aligned}$$

Azaz

$$E[S_v] = E[S] - d + \sum_{x<d} (d-x) f_S(x).$$

Folytonos eloszlású S összkárát az f_S sűrűségfüggvénnyel adjuk meg. Ekkor a viszontbiztosítás nettó díja hasonlóképpen határozható meg:

$$E[S_v] = E[S] - d + \int_0^d (d-x) f_S(x)\, dx.$$

Mint már megállapítottuk, folytonos, diszkrét és kevert eloszlások esetén egyaránt megkaphatjuk e várható értéket az S eloszlásfüggvénye segítségével:

$$E[S_v] = \int_d^{\infty} (1 - F_S(x))\, dx = E[S] - d + \int_0^d (1 - F_S(x))\, dx$$

A harmadik lehetőség az, ha a direkt biztosítónál maradó összkár eloszlásából indulunk ki:

$$\begin{aligned} P(S_d = k) &= P(S = k),\ ha\ k < d; \\ P(S_d = d) &= P(S \geq d) = 1 - P(S < d). \end{aligned}$$

Nyilvánvalóan

$$E[S_d] = E[S] - E[S_v].$$

Vegyük észre, hogy a viszontbiztosító várható kockázatának meghatározására alternatív formulákat kaptunk, amelyek közül konkrét esetben az alkalmasabbat választhatjuk. A gondolatmenet Excess-of-Loss viszontbiztosítás esetén hasonló, ekkor az S összkár szerepét a kötvény kára képviseli.

Nézzünk egy példát a viszontbiztosító várható kockázatának vagyis a viszontbiztosítás nettó díjának a meghatározására különböző viszontbiztosítási formák esetében.

4.1. Példa. *A biztosítási állományunk teljes kárösszege összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó, a kárszám várható értéke: $\lambda = 2$, az évi befolyó díj: $D = 6$ és az eseti károk két értéket vehetnek fel:*

$$P(X = 1) = 0,3, P(X = 2) = 0,7.$$

Határozzuk meg a viszontbiztosítás díját, ha a viszontbiztosító a díjmegállapításban $\theta = 1$ relatív biztonsági pótlékot alkalmaz, és határozzuk meg a direkt biztosítónál maradó díjrésznek a direkt biztosítónál maradó várható kockázat feletti részét (várható nyereségét), ha a társaság

a) Excess of Loss viszontbiztosítást köt $m = 1$ megtartási szinttel;

b) Stop Loss viszontbiztosítást köt $d = 2$ megtartási szinttel.

Megoldás. Állapítsuk meg, hogy

$$E[X] = 0,3 + 1,4 = 1,7;\ E[S] = 2 \cdot 1,7 = 3,4.$$

a) Az eseti kár viszontbiztosítóhoz kerülő, illetve direkt biztosítónál maradó része a következő eloszlású:

$$P(X_v = 0) = 0,3;\ P(X_v = 1) = 0,7;\ P(X_d = 1) = 1.$$

A viszontbiztosító összkára összetett Poisson eloszlású, várható értéke és egyben a viszontbiztosító nettó díja: $E[S_v] = \lambda E[X_v] = 1,4$. A viszontbiztosítás díja tehát: $D_v = E[S_v](1 + \theta) = 2,8$. A direkt biztosítónál marad a díjból: $D_d = 6 - 2,8 = 3,2$, a kárösszeg várható értékéből: $E[S_d] = E[S] - E[S_v] = 3,4 - 1,4 = 2$. A direkt biztosító várható nyeresége ezért: $D_d - E[S_d] = 3,2 - 2 = 1,2$.

b) A viszontbiztosítóhoz kerülő teljes kárösszeg már nem összetett Poisson eloszlású. Várható értékének a kiszámításához határozzuk meg az állomány S kárösszege első négy lehetséges értékének a valószínűségét:

$$\begin{aligned} f(0) &= P(S=0) = e^{-\lambda} = e^{-2} = 0,135; \\ f(1) &= P(S=1) = 2e^{-2}0,3 = 0,081; \\ f(2) &= P(S=2) = 2e^{-2}0,7 + \frac{2^2}{2}e^{-2}0,3^2 = 0,214; \\ f(3) &= P(S=3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2}0,3^3 + 2\frac{2^2}{2}e^{-2}0,3 \cdot 0,7 = 0,119. \end{aligned}$$

A viszontbiztosító összkárának várható értéke és egyben a viszontbiztosító nettó díja:

$$\begin{aligned} E[S_v] &= E[S] - 2 + \sum_{x<2}(2-x)f(x) \\ &= 3,4 - 2 + 2 \cdot f(0) + f(1) = 1,751. \end{aligned}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a direkt biztosító összkárának eloszlásából indulunk ki:

$$\begin{aligned} P(S_d = 0) &= P(S=0) = 0,135; \\ P(S_d = 1) &= P(S=1) = 0,081; \\ P(S_d = 2) &= 1 - 0,135 - 0,081 = 0,784. \end{aligned}$$

Így $E[S_d] = 0,081 + 2 \cdot 0,784 = 1,649$ és $E[S_v] = 3,4 - 1,649 = 1,751$. A viszontbiztosítás díja tehát: $D_v = E[S_v](1+\theta) = 3,5$. A direkt biztosítónál marad a díjból: $D_d = 6 - 3,5 = 2,5$. A direkt biztosító várható nyeresége ezért: $D_d - E[S_d] = 2,5 - 1,649 = 0,851$.

4.3. Viszontbiztosítás és díjvisszatérítés.

Fordítsuk most a figyelmünket arra, milyen megfontolások alapján téríti vissza a díj egy részét a biztosítási év eltelte után a kötvénytulajdonosoknak a biztosító abban az esetben, ha az S összkárt a befizetett díj meghaladja. Megmutatjuk, hogy a díjvisszatérítés és a Stop Loss viszontbiztosítás koncepciója nem csak hasonlóságot mutat, hanem értelmezésük is összekapcsolódik.

Jelölje D az összesen befizetett díjat: $D - E[S] > 0$. A díjnak az a része, amely a kár fedezésére szolgál:

$$kD,\ 0 < k < 1.$$

A biztosító visszatérít a díjból G összeget, amely a következő valószínűségi változó:

$$G = \begin{cases} 0, \ ha\ S \geq kD, \\ kD - S, \ ha\ S < kD. \end{cases}$$

A díjvisszatérítés várható értéke:

$$E[G] = \int_0^{kD} (kD - x) f_S(x)\, dx,$$

ha S folytonos és f_S az S sűrűségfüggvénye;

$$E[G] = \sum_{x \leq kD} (kD - x) f_S(x)$$

ha S diszkrét és f_S az S valószínűségi függvénye.

Írjuk fel egy kicsit részletesebben a díjvisszatérítés várható értékét a folytonos esetben (diszkrét eloszlású S esetében ugyanígy járunk el):

$$\begin{aligned} E[G] &= \int_0^{kD} (kD - x) f_S(x)\, dx \\ &= \int_0^{\infty} (kD - x) f_S(x)\, dx + \int_{kD}^{\infty} (x - kD) f_S(x)\, dx \\ &= kD \int_0^{\infty} f_S(x)\, dx - \int_0^{\infty} x f_S(x)\, dx + \int_{kD}^{\infty} (x - kD) f_S(x)\, dx. \end{aligned}$$

A jobb oldal első tagja kD, a második tag a kár várható értéke, a harmadik pedig a Stop Loss viszontbiztosítás nettó díja kD megtartási szint esetén:

$$E[G] = kD - E[S] + E[S_v(kD)].$$

A viszontbiztosítás összkárát itt $S_v(kD)$ -vel jelöljük, hogy hangsúlyozzuk a megtartási szintet. Ez az összefüggés arra indít bennünket, hogy megvizsgáljuk, fennáll-e nem csak a várható értékekre, hanem a szóban forgó valószínűségi változókra is egy hasonló összefüggés, fennáll-e, hogy

$$S + G = kD + S_v\left(kD\right).$$

A válasz igen, ezt a következőképpen igazoljuk: Ha $S \leq kD$, akkor $G = kD - S$ és $S_v\left(kD\right) = 0$, vagyis az egyenlőségjel mindkét oldalán kD lesz. Ha $S > kD$, akkor $S_v\left(kD\right) = S - kD$ és $G = 0$, vagyis az egyenlőségjel mindkét oldalán S lesz. Elemezzük ezt az azonosságot és nézzük meg, milyen összefüggést tár elénk. Vonjunk ki az azonosság mindkét oldalából D-t:

$$S + G - D = S_v\left(kD\right) - \left(1 - k\right)D$$

A bal oldalon az összes, a kárral összefüggő $S + G$ kifizetésnek a díj feletti részét kapjuk. Így az $\left(1 - k\right)D$ díjrészt a kD megtartási szint mellett kötött Stop Loss viszontbiztosítás díjának tekinthetünk. Ez az értelmezés azt sugallja, hogy a biztosító először a díj k-ad részéből fedezi a kárt, azon károkra pedig, amelyekre ebből nem telik, az $\left(1 - k\right)D$ díjú Stop Loss viszontbiztosítás nyújtana fedezetet. Végül, ha az azonosságot az alábbi formában írjuk fel:

$$G = kD - S + S_v\left(kD\right),$$

arra a konklúzióra jutunk, hogy a díjvisszatérítést a díjnak a kár fedezésére szánt hányadából fennmaradó rész és a Stop Loss viszontbiztosításból származó bevétel összege alkotja.

Vegyük észre azt is, hogy az összes költséget a díjból a kárkifizetés és a díjvisszatérítés után maradó összeg kell, hogy fedezze. Írjuk fel, hogy a tervezés időszakában, amikor a várható értékekre hagyatkozunk, mit mond ez az összefüggés:

$$E\left[összes\ költség\right] = D - E\left[G\right] - E\left[S\right].$$

4.2. Példa. *Az előző példához kapcsolódva határozzuk meg, hogy $D = 6$ értékű díj és $k = 0,5$ kárszorzó esetén*

1. *mennyi a díjvisszatérítés várható értéke?*

2. várhatóan mekkora összeg marad a költségek fedezésére?

Megoldás. (a)

$$G = \begin{cases} 0, \ ha \ S \geq 0,5 \cdot 6 = 3, \\ 3 - S, \ ha \ S < 3. \end{cases}$$

Az előző példában számított valószínűségeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E[G] &= 3f(0) + 2f(1) + f(2) \\ &= 3 \cdot 0,135 + 2 \cdot 0,081 + 0,214 = 0,781. \end{aligned}$$

Természetesen az

$$E[G] = kD - E[S] + E[S_v(kD)] = 0,5D - E[S] + E[S_v(3)]$$

összefüggésből ugyanezt az eredményt kapjuk.

(b) E[összes költség] $= D - E[G] - E[S] = 6 - 0,781 - 3,4 = 1,819.$

4.4. Az optimális viszontbiztosítás

A viszontbiztosítási módozatok közötti választáskor a biztosító társaság különböző szempontokat alkalmazhat. Az első esetben az SL (vagy XL) viszontbiztosítást hasonlítjuk össze tetszőleges más viszontbiztosítási módozattal, azt vizsgáljuk, melyik esetében lesz a biztosítónál maradó kárrész varianciája a kisebb, ha e kárrész várható értéke a két módozat esetében azonos.

A második esetben – azt feltételezve, hogy a viszontbiztosító a díjban érvényesített biztonsági többletét a vállalt kár varianciájának arányában határozza meg - a viszontbiztosító által vállalt kár varianciáját szeretnénk minimalizálni a direkt biztosító kárrészének adott varianciája mellett.

Jelölje $I(X)$ a nemnegatív X kárnak a viszontbiztosító által fedezett részét valamilyen viszontbiztosítási konstrukcióban. Az I függvény ésszerűen kielégíti a következő feltételt:

$0 \leq$ I(x) $\leq$ x minden x ≥ 0 esetén.

Kezdjük az első feladattal. Az állítás az, hogy ha a direkt biztosító kárának várható értéke a két módozat esetében azonos és a biztosító a kár varianciáját akarja minimalizálni, akkor SL (vagy XL) viszontbiztosítást érdemes kötnie.

A viszontbiztosító által fedezett kárrészt így jelöljük: $(X-d)_+$.

1. Állítás: Ha $E[I(X)] = E[(X-d)_+]$, akkor $Var[X - I(X)] \geq Var[X - (X - d)_+]$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a következő jelölést a direkt biztosítónál maradó kárrészre:

$V(X) = X - I(X)$ illetve $W(X) = X - (X-d)_+$. Mivel $E[V(X)] = E[W(X)]$ a feltevés szerint, ezért

$Var[V(X)] \geq Var[W(X)] \leftrightarrow E[V^2(X)] \geq E[W^2(X)]$

$\leftrightarrow E[(V(X)-d)^2] \geq E[(W(X)-d)^2]$. Az utóbbi egyenlőtlenség teljesül, ha $|V(X)-d| \geq |W(X)-d|$

1 valószínűséggel. Ezt látjuk be:

Ha X $\geq d$, akkor $W(X) = d$, vagyis az állítás teljesül.

Ha X < d, akkor W(X) = X és

$V(X) - d = X - d - I(X) \leq X - d = W(X) - d < 0$. Ez az állítás.

Nézzük a második feladatot. Az állítás az, hogy a viszontbiztosító díja arányos viszontbiztosítás mellett lesz minimális, feltéve, hogy a viszontbiztosító a díjban érvényesített biztonsági pótlékot a vállalt kár varianciájának arányában határozza meg és a direkt biztosítónál maradó kárrész varianciája előírt érték.

2. Állítás: Ha Var[X – I(X)] = V, akkor Var[I(X)] $\geq$ Var[βX], ahol $\beta = 1 - \sqrt{\frac{V}{Var[X]}}$.

Bizonyítás: Írjuk fel a következő azonosságot:

$$Var[I(X)] = Var[X] + Var[I(X) - X] - 2Cov[X, X - I(X)].$$

A jobb oldal első két tagjának az értéke adott, a bal oldal minimális értékű, ha Cov[X,X – I(X)] maximális értékű. Az X és X – I(X) valószínűségi változók kovarianciája akkor maximális, ha korrelációs együtthatója maximális, hiszen e valószínűségi változók szórása adott. Korrelációs együtthatójuk akkor maximális, ha közöttük lineáris függőség áll fenn: I(x) $= \alpha + \beta x, \beta\ > 0$. Mivel $0 \leq I(x) \leq x$, ezért $0 \leq\ \beta\ \leq 1$ és $\alpha = 0$, azaz $I\left(x\right) = \beta x$ és $I\left(X\right) = \beta X$. A $Var[I(X) - X] = V$ feltételből azt kapjuk, hogy $\left(1-\beta\right)^2 = \frac{V}{Var[X]}$. Ebből az állítás következik.

4.3. Példa. *Az X kárt leíró valószínűségi változó egyenletes a (0, 100) intervallumon.*

1. *Tekintsünk egy arányos viszontbiztosítási szerződést, amelyben*

   I_1(X) = α X, 0 < α < 1, és egy SL (vagy XL) szerződést

$$I_2\left(X\right) = \begin{cases} 0, & ha\ X \leq d \\ X-d, & ha\ X > d. \end{cases}$$

   Határozzuk meg az α és d értékeket úgy, hogy a viszontbiztosított kár várható értéke 12,5 legyen mindkét esetben.

2. *Számoljuk ki és hasonlítsuk össze a Var[X - I_1(X)] > Var[X – I_2(X)] értékeket!*

Megoldás. $E[X] = 50; Var[X] = \frac{2500}{3}$.
(a) $E[I_1(X)] = \alpha 50 = 12,5 \rightarrow\ \alpha = 0,25$.
$E[I_2(X)] = \frac{1}{2}\left(100-d\right)\left(1-\frac{d}{100}\right) = 12,5\ \rightarrow d = 50$.
(b) $Var[X - I_1(X)] = Var[0,75X] = 0,75^2\frac{2500}{3} = 468,75$.
$E[X - I_2(X)] = \frac{50}{2} + \int\limits_0^{50} x\frac{1}{100}dx = 37,5$.
$Var[X - I_2(X)] = \frac{2500}{2} + \int\limits_0^{50} x^2\frac{1}{100}dx - 37,5^2 = 260,42$.

4.5. A viszontbiztosítás és a csőd valószínűsége

A Lundberg egyenlőtlenség szerint a csőd bekövetkezésének a valószínűsége a folytonos modell esetén

$$\Psi\left(u\right) = P\left(\exists t \geq 0 : U\left(t\right) = u - Dt + S\left(t\right) < 0\right) \leq e^{-Ru},$$

ahol $U\left(t\right)$ a többlet a t időpontban, u a kezdeti többlet, D a folyamatosan fizetendő, egy periódusra eső díj, $S\left(t\right)$ a t időpontig bekövetkező összkár, $\{S\left(t\right) : t \geq 0\}$

összetett Poisson folyamat. S jelöli egy periódus összkárát, amely összetett Poisson eloszlású valószínűségi változó. Diszkrét modell esetén

$$\Psi(u) = P(\exists n \in N : U(n) = u - Dn + S(n) < 0) \leq e^{-Ru},$$

ahol $U(n)$ a többlet az n. periódusban, u a kezdeti többlet, D az egy periódusra eső díj, $S(n)$ az n. periódussal bezáróan bekövetkező összkár. Diszkrét modell esetén

$$S(n) = S_1 + S_2 + ... + S_n,$$

$S_1, S_2, ..., S_n$ az egyes periódusok összkárát jelentik, független azonos összetett Poisson eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásukat S jelöli. R mindkét modellben az illeszkedési együttható, amelynek értéke az alábbi egyenlet egyetlen pozitív megoldása:

$$e^{Dr} = E\left[e^{Sr}\right] = M_S(r).$$

A folytonos modellben az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\lambda + Dr = \lambda M_X(r).$$

Megoldás létezése az $M_S(r)$ illetve $M_X(r)$ függvények alakjától is függ, erről korábban már szó volt. Diszkrét esetben az R illeszkedési együttható az egyes periódusok összkárának eloszlásához, a folytonos esetben az eseti káreloszláshoz kapcsolódik.

A felidézett tétel azt mutatja, hogy adott pozitív kezdeti többlet mellett a csőd bekövetkezési valószínűségének felső korlátja csökken, ha az illeszkedési együttható nő. Az illeszkedési együttható nagysága így a biztonság egy mérőszámának tekinthető, ezért szolvencia paraméternek is nevezik. A viszontbiztosítás azonban megváltoztatja az illeszkedési együtthatót. A viszontbiztosítás módozatának illetve a megtartási szintnek a megválasztását (arányos viszontbiztosítás esetén a biztosító által megtartott arányt) ezért szükségképpen befolyásolja az, hogyan hat az illeszkedési együttható értékére.

A következő példában a különböző viszontbiztosítási lehetőségeket a várható nyereség és az illeszkedési együttható értéke alapján hasonlítjuk össze.

4.4. Példa. *Legyen az állomány egy évre eső S összkára összetett Poisson eloszlású, amelynek paraméterei: a λ értéke és az eseti káreloszlás, amint az előző példában, itt is a következő:*

$$\lambda = 2;\ P(X = 1) = 0,3;\ P(X = 2) = 0,7.$$

Az éves díj: $D = 6$. Határozzuk meg a direkt biztosítónál maradó díjrésznek a direkt biztosítónál maradó kockázat feletti részét (várható nyereségét) és az illeszkedési együttható értékét, ha a társaság

1. *Quota Share viszontbiztosítást köt $1 - \alpha = 0,4$ megtartott kárhányaddal;*

2. *nem köt viszontbiztosítást;*

3. *Excess of Loss viszontbiztosítást köt $m = 1$ megtartási szinttel és a viszontbiztosító a díjmegállapításban $\theta = 1$ relatív biztonsági pótlékot alkalmaz;*

4. *Stop Loss viszontbiztosítást köt $d = 2$ vagy $d = 3$ megtartási szinttel és a viszontbiztosító $\theta = 1,8$ relatív biztonsági pótlékot alkalmaz.*

   Hasonlítsuk össze a kapott alternatívákat.

Megoldás.

(a) Ha Quota Share viszontbiztosítást köt, akkor a díjat, a várható kockázatot és a várható nyereséget a két biztosító egyformán osztja meg. Az eseti kár viszontbiztosítóhoz kerülő, illetve a direkt biztosítónál maradó része a következő eloszlású:

$$\begin{aligned} P(X_v = 0,6) &= 0,3;\ P(X_v = 1,2) = 0,7; \\ P(X_d = 0,4) &= 0,3;\ P(X_d = 0,8) = 0,7. \\ E[X_v] &= 0,18 + 0,84 = 1,02;\ E[X_d] = 0,12 + 0,56 = 0,68. \end{aligned}$$

A direkt biztosító összkára összetett Poisson eloszlású, várható értéke:

$$E[S_d] = \lambda E[X_d] = 2 \cdot 0,68 = 1,36.$$

A várható nyereség: $D_d - E[S_d] = 6 \cdot 0,4 - 1,36 = 1,04$. Az R illeszkedési együtthatót a

$$\begin{aligned} \lambda + D_d r &= \lambda M_{X_d}(r) \\ 2 + 2,4r &= 2\left(0,3e^{0,4r} + 0,7e^{0,8r}\right) \end{aligned}$$

egyenlet megoldásaként kapjuk: $R \approx 1,4$.

(b) Ha a direkt biztosító nem köt viszontbiztosítást, akkor várható nyeresége: $D - E[S] = 6 - 3,4 = 2,6$. Az illeszkedési együtthatót a

$$2 + 6r = 2\left(0,3e^{r} + 0,7e^{2r}\right)$$

egyenlet megoldásaként kapjuk: $R \approx 0,55$.

(c) Ha Excess of Loss viszontbiztosítást köt, akkor várható nyeresége, mint láttuk: $D_d - E[S_d] = 1,2$. Az R illeszkedési együtthatót a $\lambda + D_d r = \lambda M_{X_d}(r)$: $2 + 3,2r = 2e^{r}$

egyenlet megoldásaként kapjuk: $R \approx 0,85$.

(d) Ha Stop Loss viszontbiztosítást köt $d = 2$ megtartási szinttel és $\theta = 1,8$, akkor azt kapjuk, hogy $D_v = 2,8E[S_v] = 2,8 \cdot 1,751 = 4,9$; a direkt biztosítónál maradó díjrész: $D_d = 6 - 4,9 = 1,1$. A direkt biztosító várható nyeresége ezért $D_d - E[S_d] = 1,1 - 1,649$ negatív, így ez az alternatíva nem jöhet szóba.

(e) Ha Stop Loss viszontbiztosítást köt $d = 3$ megtartási szinttel, akkor

$$\begin{aligned} E[S_v] &= E[S] - d + \sum_{x<d} (d-x) f_S(x) \\ &= 3,4 - 3 + 3f(0) + 2f(1) + f(2) \\ &= 0,4 + 3 \cdot 0,135 + 2 \cdot 0,081 + 0,214 = 1,181. \end{aligned}$$

Ekkor, mivel $\theta = 1,8$,

$$\begin{aligned} D_v &= 2,8E[S_v] = 2,8 \cdot 1,181 = 3,3; \ D_d = 6 - 3,3 = 2,7; \\ E[S_d] &= 3,4 - 1,181 = 2,22. \end{aligned}$$

A direkt biztosító várható nyeresége ezért $D_d - E[S_d] = 2,7 - 2,22 = 0,48$. Az R

illeszkedési együtthatót a

$$\begin{aligned} e^{2,7r} &= M_{S_d}(r) = E\left[e^{S_d r}\right] \\ e^{2,7r} &= 0,135 + 0,081e^{r} + 0,214e^{2r} + 0,57e^{3r} \end{aligned}$$

egyenlet megoldásaként kapjuk: $R \approx 1,61$.

Foglaljuk össze az eredményeinket:

- Quota Share: $\alpha = 0,6$: $D_d - E[S_d] = 1,04; R = 1,4$.
- Viszontbiztosítás nélkül: $D - E[S] = 2,6; R = 0,55$.
- Excess of Loss: $m = 1; \theta = 1$: $D_d - E[S_d] = 1,2; R = 0,85$.
- Stop Loss: $d = 2; \theta = 1,8:$ $D_d - E[S_d] < 0$: elfogadhatatlan.
- Stop Loss: $d = 3; \theta = 1,8:$ $D_d - E[S_d] = 0,48; R = 1,61$.

Nyereség szempontjából a legkedvezőbb az, ha nem kötünk viszontbiztosítást, a biztonság mérésére alkalmas szolvencia együttható pedig Stop Loss viszontbiztosítás és $d = 3$ megtartási szint mellett a legkedvezőbb. A lehetőségek közül csak egyet zárhatunk ki: a Stop Loss viszontbiztosítást $d = 2$ megtartási szinttel. A két mutató nem feltétlenül növekszik ellentétesen, de az itt kapott alternatívák közül csak döntéshozói preferencia alapján választhatunk.

4.6. A kezdeti tartalék becslése

A tartalékot az u kezdeti tartalék, a befolyó D díj és kifizetett károk alapján az idő függvényében írtuk fel. Egy időszakra leegyszerűsítve a következő értékegyenlethez jutunk:

$$U = u + D - S$$

ahol U az időszak (év) végi tartalék, S pedig az időszakban kifizetett kár nagysága. Többletről beszéltünk elsősorban, de már eddig is használtuk a tartalék szót az u és U jelentésére, jogos az is, ha u-t nyító tőkének hívjuk.

Alkalmazzuk, mint eddig is gyakran, az

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

összefüggést, ahol N jelöli az időszak alatt bekövetkező károk számát, amelyről feltesszük, hogy Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Tudjuk, hogy ekkor $E[N] = Var[N] = \lambda$. Feltesszük, hogy az $X_1, X_2, ..., X_N$ eseti kárnagyságok azonos eloszlásúak - jelölje X ezt a közös eloszlású valószínűségi változót -, függetlenek egymástól és az N kárszámtól: az S összkár tehát összetett Poisson eloszlású.

Ekkor S várható értéke és varianciája a következő: $E[S] = \lambda E[X], Var[S] = \lambda E[X^2]$, és a várható érték díj elv alkalmazása esetén a díj: $D = \lambda E[X](1+\theta)$, θ a relatív biztonsági pótlék. Az S összkár normális eloszlással közelíthető, ha λ elég nagy.

Azt vizsgáljuk, mekkora időszak eleji tőkére – tartalékra– van szükség ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy az időszak alatt csőd következik be, ne haladja meg az előre megadott és elfogadhatónak tekintett ε valószínűséget u értékű kezdőtőke esetén: *P(tartalék az időszak végén)* $\leq$ ε Ez azt jelenti, hogy fenn kell állnia a

$$P\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right) < S\right) \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$P\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right) \geq S\right) \geq 1 - \varepsilon$$

összefüggésnek.

Ha S folytonos, akkor

$$P\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right) \geq S\right) = P\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right) > S\right)$$
$$= F_S\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right)\right),$$

ahol F_S az S valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Vagyis az egyenlőtlenség így írható fel: $F_S\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right)\right) \geq 1 - \varepsilon$.

Ha λ elég nagy - és itt ezt is feltesszük -, akkor S eloszlása normális eloszlással közelíthető, így

$$F_S\left(u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right)\right) = \Phi\left(\frac{u + \lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right) - \lambda E\left[X\right]}{\sqrt{\lambda E\left[X^2\right]}}\right) \geq 1 - \varepsilon,$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Minthogy Φ növekvő függvény, ezért létezik inverze és teljesül, hogy

$$\frac{u+\lambda E\left[X\right]\left(1+\theta\right)-\lambda E\left[X\right]}{\sqrt{\lambda E\left[X^2\right]}}\geq\Phi^{-1}\left(1-\varepsilon\right),$$

Azt kapjuk tehát, hogy u értéke kielégíti a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} u &\geq \sqrt{\lambda E\left[X^2\right]}\Phi^{-1}\left(1-\varepsilon\right)-\lambda E\left[X\right]\theta \\ &= \sqrt{Var\left[S\right]}\Phi^{-1}\left(1-\varepsilon\right)-E\left[S\right]\theta. \end{aligned}$$

Megállapíthatjuk, hogy

- az időszak eleji tartalék és biztonsági pótlék összefügg: minél magasabb a biztonsági pótlék, annál kisebb időszak eleji tartalékra van szükség és fordítva;
- ha a biztonsági pótlék 0, akkor az időszak eleji tartalék arányos az összkár szórásával;
- ha a jobb oldal negatív: ha

$$\theta>\frac{\sqrt{Var\left[S\right]}\Phi^{-1}\left(1-\varepsilon\right)}{E\left[S\right]},$$

akkor nincs szükség időszak eleji tartalékra.

Tekintsünk egy példát.

4.5. Példa. *Az alábbi táblázat egy biztosítási portfólió megfigyelt kárnagyságait mutatja intervallumonként (ezer Ft-ban) egy adott évben és a káresemények relatív gyakoriságát: azon százalékát, amelyek kárnagyságai az adott intervallumba estek. (Ha felrajzolnánk e relatív gyakoriságokat a kárnagyság függvényében, a jól ismert hisztogramot kapnánk). Az intervallumokat a számításokban középpontjaikkal becsüljük. A biztosítási portfólió* 1000 *kötvényt tartalmaz. A biztosító év eleji tartaléka 200 (ezer Ft). A biztosítási díj várható érték elvű, a biztonsági pótlék* 5%. *Annak a valószínűsége, hogy egy kötvényre kár következik be:* $0,035$. *Ha szükséges, a biztosító Excess of Loss viszontbiztosítást köthet* $20,30$ *vagy* 40 *(ezer Ft) megtartási szint mellett. Mi az a megtartási szint, amely mellett a biztosító* 99%*-os valószínűséggel fedezni tudja a kárkifizetési kötelezettségeit, ha az összkár becslésére az összetett Poisson eloszlást alkalmazza?*

Megoldás. A táblázat utolsó oszlopában az intervallumok középpontjainak négyzeteit is feltüntettük, utolsó soraiban pedig a kárnagyság várható értékének illetve négyzete várható értékének becslésére a középpontok illetve négyzeteik átlagát tüntettük fel viszontbiztosítás nélkül és $20, 30$ illetve 40 (ezer Ft) megtartási szint mellett.

Kárnagyság	*Középpont*	*Relatív gyakoriság*	*Középpont négyzete*
$[0 - 10)$	5	0,5	25
$[10 - 20)$	15	0,220	225
$[20 - 30)$	25	0,155	625
$[30 - 40)$	35	0,094	1225
$[40 - 50)$	45	0,031	2025
viszontbiztosítás nélkül	14,36		336,8
$m = 20$	11,4		174
$m = 30$	13,425		271,375
$m = 40$	14,205		323,625

Foglaljuk össze az adatainkat: A nyító tőke: $u = 200$ (e Ft), $\theta = 0,05; \varepsilon = 0,01; \Phi^{-1}(0,99) = 2,33$. Az állományban bekövetkező károk száma, mint erről az egyéni kockázati modellek vizsgálatakor már szó volt, binomiális eloszlást követ, amelynek becsült várható értéke: $1000 \cdot 0,035 = 35$. A binomiális eloszlást Poisson eloszlással közelítjük, amit megtehetünk azért, mert a kár bekövetkezésének valószínűsége "elég kicsi". Így a várható érték és a variancia közel azonos értékű, ez az érték egyben a Poisson eloszlás paramétere: $\lambda = 35$.

Újabb közelítést alkalmazunk: mivel λ "elég nagy", ezért az összkár eloszlását normálisnak foghatjuk és fogjuk fel. Írjuk fel az összkár várható értékét, szórását és a szükséges kezdeti tartalékot az egyes megtartási szintek mellett: Ha nincs viszontbiztosítás:

$$E[S] = 35 \cdot 14,36 = 502,6; Var[S] = 35 \cdot 336,8 = 11788;$$

$$u \geq 2,33 \cdot \sqrt{11788} - 0,05 \cdot 502,6 = 227,844.$$

Vegyük észre, hogy

$$\Phi\left(\frac{200 + 35 \cdot 14,36 \cdot 0,05}{\sqrt{11788}}\right) = \Phi(2,074) = 0,981,$$

vagyis a 200 értékű kezdeti tartalék 98,1% biztonságot nyújt. Ha $m = 20$:

$$E[S] = 399; Var[S] = 6090; u \geq 161,39.$$

Ha $m = 30$:

$$E[S] = 469,875; Var[S] = 9498,125; u \geq 183,63.$$

Ha $m = 40$:

$$E[S] = 497,175; Var[S] = 11326,875; u \geq 223,12.$$

Ha tehát a biztosító társaság e viszontbiztosítási lehetőségek közül választ, akkor legfeljebb 30 (ezer Ft) lehet a megtartási szintje, ennél nagyobb megtartási szint mellett a 200 értékű kezdeti tartalék nem nyújt 99%-os valószínűséggel fedezetet a kötelezettségeire. Megjegyezzük, hogy ugyanezt a fedezetet a biztosító társaság úgy is elérheti, hogy a 200 értékű nyitó tőkét az előző év végén megtoldja 27,844 értékű biztosítástechnikai tartalékkal, vagy ilyen mérvű tőkeemelést hajt végre.

4.7. Gyakorló feladatok

1. Legyen az egy évre eső kárszám Poisson eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, az egyes kárigények egymástól és a kárszámtól függetlenek, azonos eloszlásúak, eloszlásuk a következő: $P(X = 1) = 0,5;\quad P(X = 2) = 0,4; P(X = 3) = 0,1$. Az éves díj: $D = 2$. Határozzuk meg a várható nyereséget (a díjnak a várható kockázat feletti részét) és az R szolvencia paraméter értékét

- viszontbiztosítás nélkül;

- Stop Loss viszontbiztosítás esetén, ha a megtartási szint $d = 1$, ha $d = 2$, illetve ha $d = 3$, és a viszontbiztosítás díja a fedezett kár várható értékének a másfélszerese.

2. Tegyük fel, hogy a és b olyan számok, amelyekre $P(a < S < b) = 0$. Mutassuk meg, hogy mi az összefüggés $E[S_v(d)]$ és $E[S_v(a)]$ között, ha $a < d < b$.

3. Egy viszontbiztosító a d megtartási szint fölötti rész 80%-át fizeti meg, de legfeljebb egy m maximális értéket. Fejezzük ki a viszontbiztosító által vállalt kár várható értékét az SL viszontbiztosítás várható értéke segítségével.

4. Legyen S összetett Poisson eloszlású, paraméterei: $\lambda = 3$ és $P(X = 1) = 5/6; P(X = 2) = 1/6$. Határozzuk meg az $f_S(x), P(S \leq x), E[S_v(x)]$ értékeket $x = 0, 1, 2$ esetén.

5. Egy 20000 kötvényből álló haláleseti biztosítási állomány három csoportra osztható a biztosítási összegek szerint, amint a táblázat mutatja. Minden biztosított esetében 0,01 annak a valószínűsége, hogy a biztosított meghal egy éven belül. A kötvényekre a biztosító XL viszontbiztosítást köt. A viszontbiztosító díja az általa

Biztosított összeg:	Kötvények száma:
1	10000
2	5000
3	5000

vállalt kár várható értékének 120 %-a. Azután, hogy az állományból az összes díj beérkezett, a biztosító T értékű tőkével rendelkezik. A biztosító arra törekszik, hogy a T tőke legalább 0,95 valószínűséggel fedezze a kárkifizetésből + a viszontbiztosítónak kifizetett díjból álló összes költségét.

Mennyi legyen legalább e T tőke, ha a h megtartási szint:

a) h = 1; b) h = 2;

c) 1 < h < 2: Írjuk fel a szükséges tőkét h függvényében!

d) Milyen valószínűséggel fedezi a költségeket a biztosító tőkéje, ha T = 405 és h = 2,5?

5. fejezet

DÍJSZÁMÍTÁS

A biztosítási termék helyes árazása életbevágóan fontos lehet, hiszen a túl alacsony ár veszteségbe sodorhatja a biztosító társaságot, a túl magas ár pedig kiszoríthatja a piacról. A biztosítás díja ezenkívül politikai kérdés is lehet pl. a társadalombiztosítás, egészségbiztosítás, gépkocsi felelősségbiztosítás területén. Végül a felügyelet is különleges figyelemmel figyeli a biztosítási díjakat.

A szerződésben megállapított biztosítási díj nyilvánvalóan magában kell hogy foglalja a biztosítással kapcsolatosan felmerülő összes költséget és a társaság nyereségét is. Mi azonban itt a költségeknek csak azt a részét vesszük figyelembe, amely a biztosított kár nagyságához kapcsolódik szorosan. A díj a kár nagyságának a várható értékére épül, de tükrözi azt a tényt is, hogy a kár nagysága a várható értékkel csak ritkán vagy soha nem egyezik meg, ezért a díj egy, a kárnagyság terjedelmét kifejező biztonsági pótlékot is magában foglal. Erről az eddigi fejezetekben már sok szó esett, koncepcionális újdonságot nem várhat az olvasó, egyik célunk az, hogy összefoglaljuk és rendezzük azt, amit a biztosítási díjról eddig megtudtunk. Másik célunk az, hogy bemutassuk, hogyan vehetjük figyelembe a kockázatról szerzett múltbeli tapasztalatokat a díj megállapításában. Két modellt mutatunk be ebben a fejezetben: a megbízhatósági díj és a kármentességi bónusz számítását.

5.1. Díj elvek

*Díj elv*nek hívják gyakran azt a módszert, ahogy a díjat a vállalt kockázat alapján a biztosító meghatározza. Felsorolunk az alábbiakban néhány gyakran alkalmazott díj elvet, ésszerű, de ad hoc módszert. Minthogy egységnyi időszakra szól, a díjat az egységnyi időszak S kárával vetjük össze: $D = D(S)$.

Nettó díj elv: A díj nem tartalmaz biztonsági pótlékot:

$$D = E[S].$$

Alkalmazása arra a feltevésre épül, hogy a kár nagyságának változékonyságával kapcsolatos kockázat eltűnik, ha az állomány eléggé nagyszámú azonos eloszlású kötvényből áll. A kockázatelméletből tudjuk, hogy a díj ilyen választása miatt a csőd 1 valószínűséggel bekövetkezik. Mégsem irreális ez a választás egyrészt azért, mert a tervezési horizont véges, szemben a kockázatelmélet végtelen horizontjával, másrészt a díj indirekt módon így is magában foglal egy pótlékrészt azáltal, hogy a befizetett díj befektetéséből származó kamatot figyelmen kívül hagyja. Befektetésre persze csak akkor van mód, ha a díjat hosszabb időszakra előre fizetik.

Várható érték díj elv:

$$D = E[S](1 + \theta),$$

$\theta > 0$. Ez az előző díj elv kiegészítve egy, a vállalt kockázattal arányos biztonsági pótlékkal.

Variancia díj elv:

$$D = E[S] + aVar[S], a > 0.$$

Az előzőhöz hasonló, de a biztonsági pótlék a kárnagyság varianciájának egy pozitív konstanssal való szorzata.

Szórás díj elv:

$$D = E[S] + b\sqrt{Var[S]}, b > 0.$$

A biztonsági pótlék a kárnagyság szórásának egy pozitív konstanssal való szorzata. Vagyonbiztosításban gyakran alkalmazzák.

Exponenciális díj elv:

$$D = \frac{1}{\alpha} \ln E\left[e^{\alpha S}\right], \alpha > 0.$$

A egyenértékű hasznosság díj elvből is származtatható, amint ezt látni fogjuk. Pénzügyi befektetések biztosítására alkalmazzák, illetve különböző biztosítási termékek árazására dinamikus piacokon.

Egyenértékű hasznosság díj elv: A D díj kielégíti a következő egyenletet:

$$u(V) = E\left[u(V + D - S)\right],$$

ahol u hasznossági függvény, növekvő és konkáv, és V a biztosító kezdeti vagyona. Ezzel az egyenlettel találkoztunk már az 1. fejezetben. Az egyenlet megoldását "közömbösségi árnak" is nevezik, hiszen ekkor a biztosító számára mindegy, hogy ezen az áron eladja a biztosítási termékét vagy nem köt szerződést.

Belátható, hogy "kis" kockázat esetén a variancia díj elv jól közelíti az egyenértékű hasznosság díj elvét, ha az ott szereplő együtthatót így választjuk:

$$a = -\frac{1}{2}\frac{u''(V)}{u'(V)},$$

ahol u' és u'' az u hasznossági függvény deriváltjai.

Ha az u hasznossági függvény a következő: $u(v) = -e^{-\alpha v}$ valamilyen pozitív α értékre, akkor az egyenértékű hasznosság díj elv éppen az exponenciális díj elvhez vezet, amint ezt az 1. fejezetben bemutattuk.

Zéró hasznosság díj elv: Ha bevezetjük a $v(x) = u(V + x)$ függvényt és a fenti értékegyenletbe ezt helyettesítjük be, akkor a

$$v(0) = E\left[v(D - S)\right]$$

egyenlethez jutunk. Ennek megoldását zéró hasznosság díj elvként emlegetik, bár nyilvánvalóan megegyezik az egyenértékű hasznosság díj elvvel.

A következő két díj elv elsősorban azt illusztrálja, hogy sajátos megfontolások is alkalmazhatók a biztosítási módozathoz illeszkedően.

Svájci díj elv: A D díj kielégíti a következő egyenletet:

$$E[S - pD] = z((1 - p)D),$$

ahol $0 < p < 1$ és z növekvő konvex függvény. Ez a zéró hasznosság elve általánosításának tekinthető.

Holland díj elv: A díjat a következőképpen határozzuk meg:

$$D = E\left[S\right] + \theta E\left[(S - \rho E[S])_{+}\right],$$

ahol $\rho \geq 1$ és $0 < \theta \leq 1$, a $+$ jel az indexben a kifejezés nemnegatív részét jelenti. Viszontbiztosításban és a tapasztalati díjszabásban alkalmazzák.

Percentilis díj elv: A D díj előírt p valószínűséggel fedezi a kárt:

$$D = \inf\left(z : P(S < z) \geq p\right)$$

5.2. Az exponenciális díj elv és a csődelmélet

Amint a 4. fejezetben láttuk, egy elfogadhatónak tekintett ε csődvalószínűséggel összhangban álló u kezdeti többlet (év eleji tartalék) konzervatív becslésére a Lundberg egyenlőtlenség egyenlőség formájában alkalmazandó, vagyis a kezdeti többletet az

$$u = -\frac{\ln \varepsilon}{R}$$

összefüggés adja, ahol az R illeszkedési együttható a következő egyenlet pozitív megoldása:

$$E\left[e^{rS}\right] = e^{rD}.$$

Ha a D díj kiszámítására a biztosító társaság az exponenciális díj elvet alkalmazza adott $\alpha > 0$ paraméterrel, akkor a kirótt díj a következő lesz:

$$D = \frac{1}{\alpha} \ln E\left[e^{\alpha S}\right], \alpha > 0.$$

Az R illeszkedési együttható tehát kielégíti az

$$E\left[e^{rS}\right] = e^{r\frac{1}{\alpha}\ln E\left[e^{\alpha S}\right]} \Leftrightarrow E\left[e^{rS}\right] = E\left[e^{\alpha S}\right]^{\frac{r}{\alpha}}$$

egyenletet. Ennek az egyenletnek, mint erről szó volt, egyetlen pozitív megoldása van (ha egyáltalán van megoldása). Az $R = \alpha$ láthatóan kielégíti az egyenletet és

$\alpha > 0$, ezért arra a következtetésre jutottunk, hogy az egyenlet egyetlen pozitív megoldása: $R = \alpha$ és $\alpha = -\frac{\ln \varepsilon}{u}$. Így az exponenciális díj elv szerint számított díj az elfogadhatónak tekintett ε csődvalószínűséggel és az u kezdeti többlettel kifejezve a következő lesz:

$$D = -\frac{u}{\ln \varepsilon} \ln E\left[e^{-\frac{\ln \varepsilon}{u} S}\right] = -\frac{u}{\ln \varepsilon} \ln M_S\left(-\frac{\ln \varepsilon}{u}\right).$$

Ha pl. az időszakra eső teljes S *kár normális eloszlású*, akkor

$$M_S(r) = e^{E[S]r + \frac{Var[S]r^2}{2}},$$

ezért a díj így alakul:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{u}{\ln \varepsilon}\left(-E[S]\frac{\ln \varepsilon}{u} + \frac{Var[S]}{2}\left(\frac{\ln \varepsilon}{u}\right)^2\right) \\ &= E[S] - \frac{Var[S]}{2}\frac{\ln \varepsilon}{u}. \end{aligned}$$

Látható, hogy ez a variancia díj elvnek felel meg.

Ha S összetett Poisson eloszlású és a kárszám λ várható értéke elég nagy, akkor az S összkár, mint láttuk, normális eloszlással közelíthető, vagyis a díjszámításra ez a formula alkalmazható.

Ha S összetett Poisson eloszlású, akkor $M_S(r) = e^{\lambda(M_X(r)-1)}$ - ahol X az eseti kár nagysága -, ezért a díj így alakul:

$$D = -\frac{u}{\ln \varepsilon} \cdot \lambda\left(M_X\left(-\frac{\ln \varepsilon}{u}\right) - 1\right).$$

Ha S összetett Poisson eloszlású és az X eseti kárnagyság exponenciális eloszlású β paraméterrel (Erlang modell, ld. 1. fejezet), akkor $M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}, r < \beta$, vagyis

$$D = -\frac{u}{\ln \varepsilon} \cdot \lambda\left(\frac{\beta}{\beta + \frac{\ln \varepsilon}{u}} - 1\right) = \frac{\lambda}{\beta + \frac{\ln \varepsilon}{u}}.$$

Ekkor β, ε és u között fenn kell, hogy álljon a $\beta + \frac{\ln \varepsilon}{u} > 0 \Leftrightarrow e^{u\beta} > \frac{1}{\varepsilon}$ összefüggés.

Ha S normális eloszlású és a díj az u kezdeti többletre osztalékot is tartalmaz, akkor

$$D = E[S] + \left(-\frac{\ln \varepsilon}{u}\right)\frac{Var[S]}{2} + i \cdot u.$$

Ha ε és i adott, vizsgáljuk meg, mekkora kezdeti többlet kell ahhoz, hogy a legalacsonyabb (legversenyképesebb) díjat állapítsuk meg? Mekkora ez a díj?

$$\frac{\partial D}{\partial u} = 0 = -\frac{\ln \varepsilon}{2} Var\left[S\right] \frac{-1}{u^2} + i \Rightarrow u = \sqrt{Var\left[S\right]} \sqrt{\frac{-\ln \varepsilon}{2i}}.$$

A díj tehát: $D = E\left[S\right] + \sqrt{2i\left|\ln \varepsilon\right|} \sqrt{Var\left[S\right]}$

A szórás díj elvhez jutottunk.

5.3. A díj elvek tulajdonságai

Amikor egy biztosítási termék díját tervezzük, célszerű ellenőrizni, hogy a figyelembe vett díj elv rendelkezik-e bizonyos kívánatos tulajdonságokkal. Néhányat itt felsorolunk.

Függetlenség: A díj csak a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűségétől és a bekövetkezhető kár nagyságának eloszlásától függ, független a többi kártól, a kárszámtól, stb.

Biztonság: A díj a kár várható értékénél nem lehet kevesebb.

Maximális kockázat: Ha a biztosított kockázat nagysága nem halad meg egy bizonyos értéket, akkor a díj sem lehet ennél az értéknél nagyobb.

Eltolás invariáns: Ha a kockázatot egy fix értékkel növeljük, akkor annak a díja ugyanazzal a fix értékkel nő:

$$D\left(S + a\right) = D\left(S\right) + a,$$

ahol $D(S)$ az S kockázat díját jelöli.

Skála invariáns: Ha a kockázatot egy fix értékkel szorozzuk, akkor annak a díja ugyanazzal a fix értékkel szorzódik:

$$D(bS) = bD(S).$$

Az e tulajdonsággal rokonszenvezők azzal érvelnek, hogy ez az arbitrázsmentességet biztosítja. Mások azonban úgy vélik, hogy a biztosítási kötvény nem olyan likvid értékpapír, hogy akár a biztosító, akár a biztosított hasznot húzhatna abból, ha ez a tulajdonsága a díj elvnek nem teljesül.

Additivitás: A skála invarianciához hasonló tulajdonság:

$$D(S+Y) = D(S) + D(Y).$$

A szubadditivitás illetve szuperadditivitás tulajdonságokban az egyenlőségjelet a $\leq$ illetve a $\geq$ jel helyettesíti.

5.4. Az exponenciális díj elv közelítései

A nettó díj elvet az exponenciális díj elvből megkapjuk, ha $\alpha \to 0$:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln M_S(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{M_S'(\alpha)}{M_S(\alpha)} = E[S].$$

A variancia díj elv az exponenciális díj elv másodfokú közelítésének tekinthető, ezt mutatjuk be. Írjuk fel $\ln M_S(\alpha)$ hatványsorát:

$$\ln M_S(\alpha) = \ln M_S(0) + \frac{(\ln M_S(\alpha))'|_{\alpha=0}}{1!}\alpha + \frac{(\ln M_S(\alpha))''|_{\alpha=0}}{2!}\alpha^2 + \ldots\ldots$$
$$= E[S]\alpha + \tfrac{1}{2}Var[S]\alpha^2 + \ldots\ldots$$

Osszuk el α-val: ez a variancia díj elv $\alpha/2$ paraméterrel.

5.5. Megbízhatósági díj

Amikor a biztosító egy kötvény díját meghatározza, általában a kockázat várható értékéből indul ki, mégpedig nem egyedül a szóban forgó kötvényre vonatkozóan, hanem a hasonló kötvényekkel kapcsolatos kártapasztalatokra épít.

Ésszerű azonban az egyes kötvény (kockázat csoport, stb.) múltbeli kártörténetét is, amennyiben van és most feltesszük, hogy van, figyelembe venni. A megbízhatósági díj (credibility premium) számításának hátterében általában az ún. empírikus Bayes-i megbízhatóságelméleti modell áll. Csak annyit teszünk fel itt, hogy egy időszakban (évben) valamennyi eseti kár függetlenül következik be és azonos eloszlású.

Megbízhatósági díjról beszélünk, de igazából a nettó díjról, vagy másként: a "tapasztalati" kár várható értékéről van szó itt is. A módszer, amit itt bemutatunk, ráadásul nem csak a kárnagyság várható értékének, hanem a kárszám várható értékének a becslésére is alkalmazható. A továbbiakban kárnagyságokról beszélünk, de behelyettesíthetjük a "kárszám" kifejezést is.

Legyen μ: a hasonló kategóriába tartozó kockázatok - szuperpopuláció - (évi) átlagos kárnagysága és x^e: a szóban forgó kockázatnak (kötvénynek, homogénnek tekintett alállománynak, stb.) az időszakban felmerülő (évi) átlagos kárnagysága. Ekkor a kockázat megbízhatósági díja a két átlagkár konvex kombinációja:

$$D = \gamma x^e + (1-\gamma)\mu,\ 0 < \gamma < 1.$$

A γ megbízhatósági tényező annak a mértéke, hogy a biztosító társaság mennyire bízik meg a szóban forgó kockázat adataiban. Jogos elvárni, hogy γ értéke növekedjék, ha

- növekszik a kockázatról a társaság rendelkezésére álló adatok (évek) száma,
- ha csökken az egyes kockázatokon belüli szóródás a kockázatok közötti szóródáshoz viszonyítva.

A számításokat egy példán mutatjuk be.

5.1. Példa. *Az alábbi táblázatban a szuperpopuláció 4 kockázatból áll:* $n = 4$ *és* 5 *éven át tapasztalt káradatokat tüntetünk fel. Határozzuk meg a 2. kockázat megbízhatósági díját!*

Megoldás: A táblázat utolsó három sorában lévő adatok már a számítások eredményeit tartalmazzák. A táblázatban feltüntetetteken kívül a következő számításokat végezzük el:

Az éves átlagok várható értéke:

$$w = \frac{\sum_{j=1}^{4} Y_{.j}}{4} = \frac{119 + 85,2 + 80,8 + 75,8}{4} = 90,2.$$

Az éves átlagok varianciája, amely a kockázatok közötti szóródást fejezi ki:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sum_{j=1}^{4} (w - Y_{.j})^2}{4-1} \\ &= \frac{(90,2-119)^2 + (90,2-85,2)^2 + (90,2-80,8)^2 + (90,2-75,8)^2}{3} \\ &= 383,4. \end{aligned}$$

Kockázatok:	1	2	3	4
1.*év*	122	72	87	67
2.*év*	144	78	71	105
3.*év*	99	98	88	71
4.*év*	95	88	88	68
5.*év*	135	90	70	68
$\acute{A}tlagok : Y_{.j}$	119	$85,2$	$80,8$	$75,8$
$\sum (Y_{ij} - Y_{.j})^2$	1866	$420,8$	$354,8$	1075
$Varianci\acute{a}k :$	$466,5$	$105,2$	$88,7$	$268,8$

Az egyes kockázatok varianciáinak átlaga, amely az egyes kockázatokon belüli, az évek szerinti szóródást jellemzi az állomány egészére nézve:

$$E = \frac{466,5 + 105,2 + 88,7 + 268,8}{4} = 232,3.$$

Ezután a megbízhatósági díj együtthatója így határozható meg:

$$\gamma = \frac{n}{n + \frac{E}{V}} = \frac{5}{5 + \frac{232,3}{383,4}} = 0,892.$$

Foglaljuk össze a jelöléseket: n az évek száma, E a kockázatok évek szerinti szórásnégyzetei becslésének az átlaga, V az egyes kockázatokra vonatkozó átlagok varianciájának a becslése. A 2. kockázatra $x^{(2)} = 85,2$, a μ becslésére a szuperpopulációra vonatkozó w szolgál, ezért a 2. kockázat megbízhatósági díja a következő lesz: $0,892 \cdot 85,2 + 0,108 \cdot 90,2 = 85,7$.

5.6. Kármentességi bónusz

A biztosító gyakran díjengedményt ad a következő időszakra azoknak a biztosítottaknak, akik az adott időszakban nem jelentettek be kárt, illetve magasabb díjat állapít meg a bejelentett kártól függően. Ez a bónusz-málusz rendszer, amelynek fő célja az, hogy a biztosítottat érdekeltté tegye a kármentességben.

Ha a biztosító már alkalmazza a bónusz-málusz rendszert, ez azt jelenti, hogy már meghatározott bónusz illetve málusz osztályokba sorolta be a kötvényeket. A következő időszak díjainak megállapításához tudni szeretné, várhatóan mennyien tartoznak majd a következő időszakban az egyes osztályokba. Ehhez szüksége van az úgynevezett "átmeneti valószinűségek" mátrixára, amelynek i. sorában és j. oszlopában álló p_{ij} szám azt mutatja meg, mennyi a valószinűsége annak, hogy egy kötvénytulajdonos az i. osztályból a j. osztályba lép át. Ha $x_1, x_2, ..., x_r$ jelenti az első, a második, az r. osztályban jelenleg lévő kötvények számát, akkor a következő időszakban az egyes osztályokba kerülők várható száma sorra a következő lesz:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i p_{i1}, \sum_{i=1}^{r} x_i p_{i2}, ..., \sum_{i=1}^{r} x_i p_{ir}.$$

Amint a megfogalmazásból már kiderült, lényegében zárt állományt képzelünk el, amelyből nem lépnek ki és amelyhez nem csatlakoznak biztosítottak. (Tudjuk, hogy ez a feltétel csak korlátozott mértékben teljesülhet.) Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük és fel is tesszük itt, hogy $x_1, x_2, ..., x_r$ az $1., 2., ..., r.$ osztályokban jelenleg lévő kötvények arányát képviselik, ezért x_j felfogható úgy, mint annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kötvény a j. osztályban van. Ezek a valószínűségek évről évre változnak. Ha a biztosító már hosszú ideje alkalmazza a bónusz-málusz rendszert, akkor általában stabilizálódik az egyes osztályokban lévő kötvények aránya. Ez az átmeneti valószínűségektől függ ugyan, de ésszerű rendszerekben a stabilizálódás végbe megy. E stabil $x_1, x_2, ..., x_r$ arányok természetszerűleg ki kell, hogy elégítsék a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ... + x_r &= 1, \\ \sum_{i=1}^{r} x_i p_{ij} &= x_j, \quad j = 1, ..., r. \end{aligned}$$

Feladatunk az, hogy ezeket a stabil arányokat: a *stacionárius valószínűségek*et meghatározzuk.

A következő részben felhívjuk az olvasó figyelmét a kármentességi bónusz modell szélesebb elméleti és módszertani kontextusára, majd egy példán bemutatjuk azt az eljárást, amellyel a stacionárius valószínűségeket meghatározhatjuk.

5.6.1. A kármentességi bónusz modell: Markov lánc

A t-edik évi $\left(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, ..., x_r^{(t)}\right)$ valószínűségeloszlást a kiinduló: 0-adik évi $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_r^{(0)}\right) = (x_1, x_2, ..., x_r)$ valószínűségeloszlás és az átmeneti valószínűségek értékei egyértelműen meghatározzák.

Vezessük be a ξ_t valószínűségi változót, amely azt írja le, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kötvény melyik osztályban van a t-edik évben. Lehetséges értékei az $1, 2, ..., r$ és a hozzájuk tartozó valószínűségek: $P(\xi_t = i) = x_i^{(t)}$. Vegyük észre, hogy $\{\xi_t : t > 0, \quad t \quad egész\}$ diszkrét idejű sztochasztikus folyamat, hasonlóan a (diszkrét) kárszám folyamathoz, többlet folyamathoz, amelyekről korábban szó volt. Markov folyamatot (Markov láncot) alkot, mert a következő tulajdonságokkal rendelkezik: 1) A ξ_t -nek véges számú lehetséges értéke van: egy kötvény minden évben véges számú "állapot" valamelyikében van; 2) Az, hogy egy kötvény a következő évben milyen "állapotba" kerül, csak attól függ, hogy jelenleg milyen "állapotban" van és nem függ az előző évek történetétől; 3) Az átmeneti valószínűségek évről-évre változatlanok; 4) adott a ξ_0 valószínűségi változó eloszlása. Ha mindegyik állapotból minden más állapotba előbb-utóbb el lehet jutni, akkor az átmeneti valószínűségek mátrixát irreducibilisnek nevezzük. Ahhoz, hogy stacionárius valószínűségek létezzenek, szükséges feltétel, hogy az átmeneti valószínűségek mátrixa irreducibilis legyen.

5.2. Példa. *Egy biztosító gépjármű-biztosítási kötvényeire a biztosítottak 5 szintű engedményt kapnak, ezek:* $0\%, 5\%, 15\%, 30\%, 50\%$. *Jelölje* $x_1, x_2, ..., x_5$ *az egyes bónusz osztályokban jelenleg lévők arányát. Közöttük az átlépés az alábbiak szerint történik: Egy kármentes év után a biztosított a következő osztályba lép, vagy az* 50%*-os szinten marad. Ha egy kár történt, kettővel alacsonyabb szintre lép vissza, vagy csak eggyel, ha az* 5%*-os szinten volt, illetve marad, ha a* 0%*-os szinten volt. Ha kettő vagy több kár történik, akkor a biztosított a* 0%*-os szintre lép vissza (ott marad). Minden egyes biztosított kárszáma Poisson eloszlást követ* λ *várható értékkel. Az állomány nagyszámú kötvényből áll, a biztosító régóta alkalmazza ezt a bónusz-málusz rendszert változatlan szabályok szerint, az egyes osztályokban lévők,* *illetve kerülők aránya stabilizálódott. Határozzuk meg az egyes osztályokban lévők arányát: a stacionárius valószínűségeket az állományon belül. Határozzuk meg az egyes osztályokban lévők arányát, ha $\lambda = 0,2$.*

Megoldás: Először írjuk fel az átmeneti valószínűségek mátrixát. Figyelembe véve a szabályokat és a biztosítottak kárszám-eloszlását, a mátrix a következő lesz:

	0%	5%	15%	30%	50%
0%	$1-e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}$	0	0	0
5%	$1-e^{-\lambda}$	0	$e^{-\lambda}$	0	0
15%	$1-e^{-\lambda}$	0	0	$e^{-\lambda}$	0
30%	$1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	0	0	$e^{-\lambda}$
50%	$1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}$	0	$\lambda e^{-\lambda}$	0	$e^{-\lambda}$

Ha az $x_1, x_2, ..., x_5$ értékek stabilak, ki kell, hogy elégítsék a következő egyenleteket.

$$\begin{aligned}
1 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \\
x_1 &= (x_1+x_2+x_3)\left(1-e^{-\lambda}\right)+(x_4+x_5)\left(1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\right) \\
x_2 &= x_1e^{-\lambda}+\lambda x_4e^{-\lambda} \\
x_3 &= x_2e^{-\lambda}+\lambda x_5e^{-\lambda} \\
x_4 &= x_3e^{-\lambda} \\
x_5 &= (x_4+x_5)\,e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk. Egy megközelítés lehet az alábbi. Tekintetbe véve az első és utolsó egyenletet, átalakítjuk a második egyenletet, majd ebből a harmadik, negyedik és ötödik egyenletet:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1-e^{-\lambda}-\lambda x_5 \\
x_2 &= e^{-\lambda}-\left(e^{-\lambda}\right)^2-2\lambda x_5e^{-\lambda}+\lambda x_5 \\
x_3 &= \left(e^{-\lambda}\right)^2-\left(e^{-\lambda}\right)^3-2\lambda x_5\left(e^{-\lambda}\right)^2+2\lambda x_5e^{-\lambda} \\
x_4 &= \left(e^{-\lambda}\right)^3-\left(e^{-\lambda}\right)^4-2\lambda x_5\left(e^{-\lambda}\right)^3+2\lambda x_5\left(e^{-\lambda}\right)^2
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az arányok összege 1, az

$$\left(e^{-\lambda}\right)^4 = x_5\left(1 - 2\lambda\left(e^{-\lambda}\right)^3\right)$$

egyenletből x_5, majd a többi egyenletből a többi arány kifejezhető. Ha $\lambda = 0,2$, akkor $x_1 = 0,066; x_2 = 0,075; x_3 = 0,1557; x_4 = 0,1275; x_5 = 0,5757.$

5.6.2. A díj Loimaranta hatékonysága

Az egyes bónuszosztályokban lévők stabil arányai a kárszám valószínűségeloszlásától és annak paramétereitől, példánkban a Poisson eloszlás λ paraméterétől függenek: $(x_1, x_2, ..., x_r) = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), ..., x_r(\lambda))$. A továbbiakban feltesszük, hogy a kárszám λ paraméterű Poisson eloszlású, a gondolatmenet azonban más eloszlások esetében is alkalmazható.

Az $(x_1(\lambda), x_2(\lambda), ..., x_r(\lambda))$ arányoknak és az egyes bónuszosztályokban lévők $(b_1, b_2, ..., b_r)$ díjelőírásának ismeretében meghatározhatjuk az átlagdíjat:

$$b(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} x_i(\lambda)\, b_i.$$

A $(b_1, b_2, ..., b_r)$ díjelőírás hatékonyságát a $b(\lambda)$ átlagdíj elaszticitásával mérhetjük, ami lényegében azt mutatja, hány százalékkal változik az átlagdíj, ha a kárszám λ várható értéke 1%-kal nő - ez a Loimaranta hatékonyság [1]:

$$e(\lambda) = \frac{\lambda}{b(\lambda)} \frac{db(\lambda)}{d\lambda}.$$

A gyakorlatban, ésszerű díjak esetében $0 < e(\lambda) < 1$. A $(b_1, b_2, ..., b_r)$ díjelőírás annál hatékonyabb, minél közelebb van 1-hez.

5.3. Példa. *Határozzuk meg a fenti példában a $b(\lambda)$ átlagos díjbevételt, ha $\lambda = 0,2$ és az egyes osztályokban a díjak:* $(100, 95, 85, 70, 50)$*! Mennyi ekkor a díjelőírás hatékonysága?*

Megoldás. Ha $\lambda = 0,2$, akkor az átlagos díjbevétel: $b(0,2) = 64,68$. Ha $\lambda = 0,202$, akkor az átlagos díjbevétel $b(0,202) = 64,84173$, vagyis a várható kárszám 1%-os növekedése az átlagdíj negyedszázalékos növekedését vonja maga után.

[1] Ld. Kaas et al. (2001), Loimaranta (1972). A koncepciót általánosítják pl. De Pril (1978) és Borgan et all. (1981)

5.7. Gyakorlati feladatok

1. Gondoljuk végig, hogy a skála invariancia tulajdonság nem teljesülése miért és hogyan tartalmazza arbitrázs lehetőségét! Mit jelent ebből a szempontból a szubadditivitás illetve szuperadditivitás?

2. Vegyük sorra a felsorolt díj elveket és állapítsuk meg, hogy a felsorolt tulajdonságok közül melyekkel rendelkeznek!

3. A kötvények száma a portfolióban n, egy kötvényre p valószínűséggel következik be kár és a relatív biztonsági pótlék θ. Az egyes kötvények kárigényei egymástól függetlenek. A kár nagysága, ha a kár bekövetkezik, β paraméterű exponenciális eloszlású. A biztosító kezdeti többlete: u, a biztosító által elfogadható csődvalószínűség: ε.

Legyen n = 1000; $\beta = 0{,}1$; $\theta = 0{,}1$; p = 0,05; $\varepsilon = 8$ %.

a) Mennyi lesz az állomány teljes díjbevétele, ha a várható érték díj elvet alkalmazzuk?

b) Mennyi lesz az állomány teljes díjbevétele, ha az exponenciális díj elvet alkalmazzuk, a teljes kár összetett Poisson eloszlású (vagyis a kárszám binomiális eloszlását Poisson eloszlással közelítjük) és u = 351?

c) Mennyi lesz az állomány teljes díjbevétele, ha az exponenciális díj elvet alkalmazzuk, a teljes kár normális eloszlású és u = 351?

d) Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy az előző pontban megállapított díj fedezi a kárt?

e) Mennyi lesz az állomány teljes díjbevétele és mennyi legyen a kezdeti többlet (saját tőke), ha az exponenciális díj elvet alkalmazzuk, a teljes kár normális eloszlású, a kezdeti többletre 10%-os osztalékot is beépítünk a díjba, de ezen feltételek mellett versenyképes díj megállapítására törekszünk?

6. fejezet

TARTALÉK

Nem-életbiztosításban előfordul, hogy a teljes fizetendő kár egy kötvény esetében jóval a díjfizetéssel lefedett időszak után válik csak ismertté. Késedelem merülhet fel a káresemény és annak bejelentése illetve a kárbejelentés és annak rendezése között. A kárrendezés ráadásul több részletben is történhet. A kárbejelentés és a kárrendezés gyakori és elkerülhetetlen késedelme miatt nem lehet mindig pontosan meghatározni az egy kötvényre kifizetendő teljes kár nagyságát a díjfizetéssel lefedett időszak végén, ezért a biztosító meg kell, hogy becsülje a függőben maradt kár nagyságát, és erre biztosítástechnikai tartalékot kell képeznie, fedezendő a még hátralévő kötelezettségeit. A tartalékolás különböző módszerekkel történhet a kockázat természetétől függően. Lehet tartalékolni kötvényenként, káreseményenként vagy állományonként (portfoliónként).

A függő károk tartaléka (IBNS: Incurred But Not Settled): a díjjal fedezett biztosítási időszak végéig nem rendezett károk tartaléka további két részre osztható:

- IBNR (Incurred But Not Reported): Már bekövetkezett, de még be nem jelentett: kései károk tartaléka;
- RBNS (Reported But Not Settled): Már bejelentett, de még nem teljes egészében rendezett károk tartaléka.

Az aktuáriusok figyelme elsősorban az IBNR károk tartalékának meghatározására irányul. Megjegyezzük azonban, hogy e módszerek alkalmasak az IBNS és ezen belül az RBNS tartalék meghatározására is.

Az IBNR tartalék meghatározására számos determinisztikus és sztochasztikus statisztikai módszert fejlesztettek ki. E módszerek mindegyike először a múltbeli adatokat foglalja össze, rendezi és megkísérel szabályosságot feltárni a kárrendezések (károagyság és kárszám) kifutásában, majd számba véve a várható változásokat (pl. az infláció, a biztosítási döntéseket érintő törvénykezési, bírói gyakorlat változása, makrogazdasági tényezők, stb), a feltárt szabályosságot alkalmazza a jövendő kései kár és tartaléka becsléséhez.

A múltbeli adatok összefoglalása és minősítése a módszerek ésszerű alkalmazásának igen fontos feltétele. Gyakran előfordul, hogy egyes adatok hiányoznak vagy láthatólag irreálisak, korrekcióra szorulnak. Minthogy az IBNR tartalékmódszerek múltbeli trendet feltárva becsülik meg a jövendőt, ezért az adatok szélsőséges értékeket csak nagyon indokolt esetben tartalmazhatnak. Az adatok előkészítése tehát figyelmet és alaposságot igényel. Mint minden statisztikai módszerre, az IBNR tartalék módszerekre is fennáll, hogy nem vezethetnek "pontos" eredményre, vagyis az eredményt minősíteni kell. Lehetnek olyan múltbeli trendek például, amelyeket nehéz vagy lehetetlen megmagyarázni, vagy kétségek merülhetnek fel afelől, vajon az eddigi trend folytatódik-e a jövőben - ilyenkor nagy bizalommal nem lehetünk a jövőbeni károkra kapott becslés iránt. Vagy ha a múltbeli adatok oly mértékben szóródnak, hogy nehéz bármiféle szabályosságot feltárni, akkor akármelyik módszert alkalmazzuk is mechanikusan, a kapott eredmény megbízhatóságában kételkednünk kell. Bizonytalanságunkat növeli az is, hogy még akkor is, ha múltbeli adataink megfelelően stabil és megmagyarázható szabályosságot mutatnak, a különböző módszerek különböző eredményekre vezetnek. Ha a biztosító társaság leteszi a voksát egy módszer mellett, az azzal az előnnyel jár, hogy az egyik évről a másikra kapott (és adott) adatok összehasonlíthatók. Gyakori az is, hogy a társaság több módszert alkalmaz, de az eredményeket kombinálja, pl. bizonyos súlyozott átlagukat tekinti.

A módszerek közötti választást befolyásolja például az a kérdés, hogy a képzendő tartalék meghatározásában vajon igazítsuk-e a múltbeli adatokat és a jövőbeli becsült kárösszegeket a bekövetkezett illetve becsült inflációhoz, vegyük-e figyelembe a tartalék befektetéséből származható hozamot. A módszerek egy része, mindenekelőtt a legrégibb és máig legnépszerűbb "lánclétra módszer" lehetővé teszi ezt. Van azonban olyan nézet, amely szerint inflációt nem kellene figyelembe venni, mert a múltbeli adatok magukban foglalják a bekövetkezett inflációt, amelyet ezért előre vetítenénk. A "szeparációs módszer" például a kifizetett kárösszeget szorzat formájában fogja fel, amelynek egyik tényezője a káresemény naptári évét, a másik a kései kár kifizetésének naptári évét és a harmadik a késedelem időtartamát jellemzi. E tényezők a külső hatásokra és a társaság belső szabályozásában beállt változásokra és ily módon a kárkifutási adatok dinamikus voltára reflektálnak. Egy másik probléma az, hogy a legutóbbi években bekövetkezett káreseményekről még nagyon kevés adatunk van. Kérdés, vajon az ez idő alatt bekövetkezett külső és belső változások a kárkifutások alakulását mennyire változtatják meg a korábban bekövetkezett káresemények kárkifutásának alakulásához képest. Ezt a problémát próbálja kezelni a *Cape Cod* módszer azzal, hogy az IBNR tartalék értékét a veszteségarányra (kárhányadra) építve határozza meg, és ebből számítja ki a teljes kárösszeg értékét - szemben a másik két módszerrel, amelyek a teljes kárösszeget határozzák meg, és ebből levonva a már teljesített kifizetéseket adják meg az IBNR tartalékot. E módszert itt nem ismertetjük, de az olvasónak szíves figyelmébe ajánljuk.

Bármelyik módszert alkalmazzuk is, az IBNR károk várható értékét tudjuk csak meghatározni, a kár azonban valószínűségi változó, amelyet az eloszlásával tudnánk jellemezni. Ha adataink és a meghatározandó IBNR kártartalék egy elegendően nagy, elegendően homogén állományról szólnak, akkor az állomány adott naptári évre vonatkozó összkára, benne a már kifizetett kárösszeg és a kései kár nagysága is normális eloszlásúnak tekinthető. Az eloszlást a várható értékével és a szórásával tudjuk megadni. A várható értéket valamelyik IBNR tartalékmódszerrel becsülni tudjuk. A szórás becslésére is lehetőséget nyújtanak a múltbeli adatok, de ez külön eljárást igényel, része az adatelemzésnek – és főként annak, hogy az egyes években keletkezett és az egyes kifutási években kifizetett összeg mint valószínűségi változó eloszlásáról mit tételezünk fel. Ha például Poisson eloszlásúnak feltételezzük, akkor a variancia, ha exponenciálisnak, akkor a szórás egyenlő a várható értékkel. A becsült várható érték és szórás birtokában választ adhatunk arra a kérdésre, legalább mennyit kell tartalékolnunk az IBNR károkra ahhoz, hogy a tartalék ésszerűen adott (pl. 70%-os) valószínűséggel fedezze a ma még nem ismert, a jövőben fedezendő IBNR károkat. Minthogy egy normális eloszlású valószínűségi változó bármilyen nagy lehetséges értéket felvehet, igaz, egyre csökkenő valószínűséggel, ezért ésszerű feltenni - és megválaszolni - azt a kérdést is, legfeljebb mennyit kell tartalékolnunk, ha nem akarunk túlbiztosítani, azaz megelégszünk azzal, hogy a tartalék pl. 90%-os valószínűséggel fedezze a kárt. E két valószínűséget a biztosító társaság belső szabályzatában rögzítheti is.

A következőkben először bemutatjuk az ún. kifutási háromszöget, amely valamennyi függőkártartalék-képzési módszer alapja. Ezután a két legnépszerűbb tartalékképzési módszert, a lánclétra módszert és a szeparációs módszert ismertetjük. Egységes koncepcionális keretbe foglaljuk őket azáltal, hogy entrópiaprogramozási modellként fogjuk fel az IBNR tartalékolás problémáját.

A modellek különbözőségeiből adódóan a módszerek természetszerűleg különböző eredményekre vezetnek. A kapott eredmények "helyességét", a szóbanforgó biztosítótársaság, biztosítási állomány leírására való alkalmasságát azzal tesztelhetjük például, hogy az egyes módszerekkel visszamenőlegesen becsülhető károkat összehasonlítjuk a ténylegesen bekövetkezett károkkal. Mindhárom módszer bő teret ad az aktuáriusi megítélésnek, konkrét alkalmazásukkor számos kérdést az aktuárius dönt el, ilyen pl. a kárkifizetési hányadosok kiválasztása ésszerű kereteken belül, az eredmények kombinációja, a feltételezések ellenőrzése. A kár keletkezési évét feltüntethetjük a keletkezés naptári évével, de a vizsgált időszak kezdő évét feltüntethetjük 0-adik évként, stb. A "kifutási év" azt mutatja, hogy a keletkezési évhez képest hányadik naptári évről beszélünk. A 0-adik kifutási évben fizetjük ki azt a kárösszeget, amelyet a keletkezés évében fizetünk, az első kifutási évben azt, amelyet a keletkezés évét követő évben fizetünk ki, stb. Hangsúlyozzuk, hogy a leírásban jelzett időszakok lehetnek évek, hónapok, negyedévek, stb., a módszerek lényegét a választott időegység nem érinti.

6.1. A kifutási háromszög

Jelölések:

$C_{i,j}$: az i. évben bekövetkező káreseményekre a j. kifutási évben kifizetett kárösszeg, $i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., n$; valószínűségi változó realizációja, ha $i + j \leq n$;

$X_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} C_{i,k}$: az i. évben bekövetkező káreseményekre a j. kifutási évig bezárólag kifizetett (halmozott) kárösszeg, $i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., n$.

$n + 1$: az évek száma.

$X_{i,n-i}$: az i. évben bekövetkezett káreseményekre eddig, a vizsgálat időpontjáig bezárólag ténylegesen kifizetett kárösszeg, $i = 0, 1, ..., n$.

λ_j : a j. és $j - 1$. kifutási évig felhalmozott kárkifizetések hányadosa, valószínűségi változó, $j = 1, ..., n$.

$H_j = \prod_{k=j+1}^{n} \lambda_k, j = 0, 1, ..., n - 1$; $H_n = 1$: kárfelhalmozási tényező (Loss Development Factor: LDF).

$L_j = \frac{1}{H_j}$: késedelmi tényező (Lag Factor) : a j. kifutási évvel bezárólag kifizetett kárösszegnek a teljes kárhoz mért aránya, $j = 0, 1, ..., n$.

$X_i = \lim_{j\to\infty} X_{ij}$: az i. időszakban bekövetkezett káreseményekhez kapcsolódó teljes kárösszeg, $i = 0, 1, ..., n$.

P_i : az i. időszakban befolyt díj, $i = 0, 1, ..., n$.

$Y_i = X_i - X_{i,n-i}$ $(i = 0, 1, ..., n)$ az i. időszakban bekövetkezett károk IBNR tartaléka.

Az IBNR tartalék becslésére szolgáló módszerek az ún. kifutási háromszögből indulnak ki. Ez egy olyan $n + 1 \times n + 1$ méretű mátrixhoz tartozik, amelynek $n + 1$ sora a káresemények $0., 1., ..., n.$ bekövetkezési éveit képviselik, $n + 1$ oszlopa pedig a $0., 1., ..., n.$ kifutási éveket. A mátrix bal felső felében, a jobb felső sarokból a bal alsó sarokba vezető átlót is beleértve, a ténylegesen kifizetett kárösszegeket tüntetjük fel, $i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., n$; $j \leq n - i$; a mátrix jobb alsó sarkában pedig az egyes keletkezési évekhez tartozó és a hátralévő kifutási években kifizetendő kár várható értékét. A $\{C_{i,j}\}$ és $\{X_{i,j}\}$ táblázatokat $(i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., n$; $j \leq$

$n-i$) egyaránt kifutási háromszögeknek nevezzük. Az IBNR károkat az n. évet követő évekre becsüljük, vagyis azt határozzuk meg, mennyi a becsült teljes kár és az egyes években bekövetkezett károkra ténylegesen kifizetett $X_{i,n-i}$ halmozott kárösszeg különbsége.

Ha nem tételezhetjük fel, hogy a kárkifizetés "kifut" $n+1$ év alatt, bármi legyen is a keletkezés éve, akkor a kifutási háromszög első sorát kiegészítjük az első évben (időszakban) keletkezett káreseményhez kapcsolódó ún. függő kár-értékekkel, megadjuk tehát azt, hogy az $n+1$. év letelte után vélelmünk szerint mennyi kár lesz még esedékes a következő évekre. Ha két vagy több évre is feltételezünk még függőben maradó károkat, akkor a többi keletkezési évre is megadjuk a megfelelő függőkár feltételezésünket. Felmerülhet a kérdés, hogyan határozzuk meg, mennyi kár marad függőben az $n+1$ kifutási év után. Statisztikai módszereket alkalmazhatunk ennek a meghatározására. Pl. függvényt illesztünk az éves kifizetések összegeire, és így tanulmányozzuk, hogyan csengenek le, a függvény alakjából következtetünk arra, hogy még mennyi kötelezettségünk van hátra, a függőben maradó kötelezettségünk a függő kár nélkül számított teljes kárösszeg milyen arányát képviseli - a további keletkezési évekre ezután ezzel az aránnyal számolunk. Megjegyezzük azonban, hogy az aktuáriusi megítélés felülbírálhatja, akár helyettesítheti ezeket a számításokat.

A módszerek ismertetésénél erre nem térünk ki azért, hogy ne vesszünk el a jelölések rengetegében. Ennek megfelelően a bemutatott példák sem tartalmaznak az $n+1$. kifutási év után még függőben lévő károk becslésére vonatkozó számításokat.

6.2. A lánclétra módszer

A módszer a következő feltevésekre épül: (1) Két egymást követő kifutási év halmozott kárai hányadosának a várható értéke nem függ az eredet - a káresemény bekövetkezésének - évétől, sem pedig a szóban forgó kifutási éveket megelőző kárkifizetésektől, csak a kifutás évétől, vagyis a káresemény óta eltelt időszakok számától. E feltételes várható érték tehát így írható fel:

$$\lambda_j = E\left[\frac{X_{ij}}{X_{i,j-1}} \mid X_{i1}, ..., X_{i,j-1}\right].$$

(2) Különböző keletkezési évekre vonatkozó halmozott kárkifizetések mint valószínűségi változók vektorai függetlenek egymástól. (3) Az $\{X_{i,j}\}$ kifutási háromszögre fennáll, hogy $\sum\limits_{i \leq n-j} X_{i,j-1}$ pozitív minden $j = 1, \ldots, n$ indexre.

Az algoritmus a következő:

1. Lépés: Meghatározzuk a λ_j kárkifizetési hányadosok $\overline{\lambda_j}$ becslését a következő módon:

$$\overline{\lambda_j} = \frac{\sum\limits_{i \leq n-j} X_{i,j}}{\sum\limits_{i \leq n-j} X_{i,j-1}}, \; j = 1, ..., n$$

2. Lépés: Meghatározzuk a H_j kárfelhalmozási tényezők és az L_j késedelmi tényezők becslését a következő módon:

$$\overline{H_j} = \prod_{k=j+1}^{n} \overline{\lambda_j}, \; j = 0, 1, ..., n-1; \; \overline{H_n} = 1; \; \overline{L_j} = \frac{1}{\overline{H_j}}, \; j = 0, 1, ..., n.$$

3. Lépés: Meghatározzuk az egyes időszakokban bekövetkezett káreseményekhez kapcsolódó teljes kárösszeg és az IBNR kár becslését a következő módon:

$$\overline{X_i} = X_{i,n-i} \cdot \overline{H_{n-i}} = \frac{X_{i,n-i}}{\overline{L_{n-i}}}; \; \overline{Y_i} = \overline{X_i} - X_{i,n-i} = \left(1 - \overline{L_{n-i}}\right) \frac{X_{i,n-i}}{\overline{L_{n-i}}}; \; i = 0, 1, ..., n.$$

<u>Megjegyzések.</u>

A kárkifizetési hányadosok $\overline{\lambda_j}$ becslésére más módszereket is alkalmaznak a gyakorlatban, közülük a múltbeli adatok birtokában és láttán az aktuárius meggyőződése szerint választ vagy saját módszert alakít ki. Bemutatunk további négy lehetőséget:

- csak az utolsó $n-k$ kárkeletkezési évet vesszük figyelembe:

$$\overline{\lambda_j} = \frac{\sum\limits_{k \leq i \leq n-j} X_{i,j}}{\sum\limits_{k \leq i \leq n-j} X_{i,j-1}}, \; ha \; j = 0, ..., n-k; \; \overline{\lambda_j} = 1, \; ha \; j > n-k;$$

- a soronkénti hányadosok átlagát képezzük: $\overline{\lambda_j} = \frac{\sum_{i \leq n-j} \frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}}}{n-j+1}, \; j = 0, 1, ..., n;$

- a soronkénti hányadosok átlagát képezzük, de csak az utolsó $n-k$ kárkeletkezési évet vesszük figyelembe: $\overline{\lambda_j} = \frac{\sum_{k \leq i \leq n-j} \frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}}}{n-j+1-k}, \; ha \; j = 0, 1, ..., n-k; \; \overline{\lambda_j} = 1, \; ha \; j > n-k;$

- A soronkénti hányadosok átlagát képezzük, de kihagyjuk az extra nagy, vagy extra kis kárkifizetési értékeket tartalmazó sorokat.

A lánclétra módszer előnye az egyszerűsége. Hátrányai is vannak azonban. Kérdés, hogy a feltevéseket helytállónak tekinthetjük-e az adott helyzetre. A kárfelhalmozási tényezők valószínűségi változók hányadosai szorzatainak a várható értékei, amelyek becslését szorzat formában: a halmozott károk hányadosai várható értékei becsléseinek szorzataiként írunk fel. Ez azt implikálja, hogy a szorzat várható értékét a várható értékek szorzataként adjuk meg, vagyis vélelmezzük a tényezők korrelálatlanságát, ami eléggé alaptalan feltevésnek tekinthető. Érzékeny az adatok kis változására is.

Az L_i késedelmi tényező jelentésére rávilágít a módszer, tekintsük a magyarázatot. Az X_i teljes kárösszeg és az eddig összesen bejelentett $X_{i,n-i}$ összeg illetve az Y_i IBNR tartalékár között fennáll az

$$X_{i,n-i} = L_{n-i} \cdot X_i, \; Y_i = (1 - L_{n-i}) \cdot X_i$$

összefüggés, ami azt mutatja, hogy a teljes kárösszeg L_{n-i}·100%-át jelentették be eddig, vagyis a tartalék a teljes kár $(1 - L_{n-i})$ ·100%-a kell, hogy legyen. Ez felveti a díjtartalék problémáját, arra utal, hogy a teljes díj L_{n-i}·100%-át tekinthetjük megszolgáltnak. Ez maga után vonja, hogy az $\frac{X_i}{P_i}$ végső veszteségarány (kárhányad) így írható fel:

$$\frac{X_i}{P_i} = \frac{X_{i,n-i}}{L_{n-i} \cdot P_i}.$$

6.1. Példa. *A biztosító 2010-2015 év közötti kései kár kifizetéseire vonatkozó adatait tartalmazza az alábbi kifutási háromszög. A 2016. év elején vagyunk, és feltételezzük, hogy öt év alatt minden káreseményt rendezünk, vagyis a 2015-ben keletkezetteket is legkésőbb 2020-ig. Számoljuk ki, mennyi tartalékot kell a biztosítónak képeznie a 6.1. táblázatban foglalt adatok - tapasztalatok - alapján ahhoz, hogy a 2015. évig bekövetkezett, tehát díjfizetéssel fedezett, de még nem jelentett károkat várhatóan fedezni tudja.*

(A 6.1. táblázatban szereplő és a továbbiakban számított értékek millió Ft-ban értendők. A számok természetesen csak a példa céljait szolgálják.)

6.1. táblázat. A kárkifizetések kifutási háromszöge

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	400	220	120	50	30	23
2011	500	413	193	159	64	
2012	543	340	232	184		
2013	652	660	310			
2014	739	220				
2015	752					

Itt pl. a 2011. év sorában és az 1 kifutási év oszlopában található 413 szám azt mutatja, hogy a biztosító 413 (millió Ft)-t fizetett ki olyan károkra, amelyek 2011-ben keletkeztek, de velük kapcsolatos kötelezettségei e részének tudomására csak a következő évben jutott, ezért kifizetése is csak ekkor vált esedékessé. Így a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba vezető átlóban lévő számok összege: 752 + 220 + 310 + 184 + 64 + 23 = 1553 a biztosítót 2015-ben terhelő olyan költség, amely az előző 5 évben és 2015-ben bekövetkezett káreseményekből származik.

A példa megoldásakor vegyük figyelembe az inflációt is - amennyiben ezt elhanyagol(hat)juk, akkor minden inflációs szorzó természetszerűleg 1. Feltesszük, hogy az összes kiadás minden év közepén merül fel. A táblázatban szereplő Ft-értékeket és az ezután következő öt évre számítandó várható IBNR károkat egységes pénzben fogjuk megadni, ez lehet az értékek bármely választott időpontbeli jelenértéke. Legyen ez itt a 2015. június 30-án érvényes forint.

Megoldás. Ahhoz, hogy összehasonlításra alkalmas módon egységes pénznemben írjuk fel a kárértékeket, meg kell adnunk a múltbeli és a jövőbeli (feltételezett) inflációt.

Az elmúlt hat év tényleges inflációját és a következő öt évre feltételezett inflációt, valamint a következő öt évre feltételezett befektetési hozamrátát a 6.2. táblázatban foglaljuk össze. Feltüntetjük az adatoknak megfelelő inflációs szorzókat és a hozamrátákat is figyelembe vevő indexálási tényezőket is. Minden adatunk kerekített

6.2. táblázat. Infláció és hozam

	Inflációs ráta	**Inflációs szorzó**	**Hozam-ráta**	**Indexálási tényezők**
	(ezrelékben)	**(ezredekben)**	**(ezrelékben)**	**(ezredekben)**
2010.júl.1.-2011.jún.30.	100	1 469		
2011.júl.1.-2012.jún.30.	90	1 335		
2012.júl.1.-2013.jún.30.	80	1 225		
2013.júl.1.-2014.jún.30.	70	1 134		
2014.júl.1.-2015.jún.30.	60	1 060		
2015.júl.1.-2015.dec.31.	0	1 000		
2016.jan.1.-2016.jún.30.	50		70	1 050
2016.júl.1.-2017.jún.30.	50		70	1 103
2017.júl.1.-2018.jún.30.	45		65	1 152
2018.júl.1.-2019.jún.30.	40		60	1 198
2019.júl.1.-2020.jún.30.	35		55	1 240

Ezeknek megfelelően átszámoljuk a 6.1. táblázatban szereplő kárértékeket[1], és feltüntetjük a 6.3. táblázatban, majd a 6.4. táblázatban az inflációval korrigált halmozott kárkifizetéseket.

Azt feltételezzük, hogy a következő évek kései kár-kifizetései megfelelnek az eddigi

[1]* Az IBNR tartalék számítására bemutatott példákban a táblázatok a Fábián Csaba által írt EXCEL szoftverrel készültek.

6.3. táblázat. A kifutási háromszög jelenértéken

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	587	294	147	57	32	23
2011	668	506	219	169	64	
2012	665	386	246	184		
2013	739	700	310			
2014	783	220				
2015	752					

6.4. táblázat. A halmozott kárkifizetések kifutási háromszöge

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	587	881	1 028	1 085	1 117	1 140
2011	668	1 173	1 392	1 561	1 625	
2012	665	1 051	1 297	1 481		
2013	739	1 439	1 749			
2014	783	1 003				
2015	752					

tapasztalatoknak abban az értelemben, hogy a károkra a j. kifutási évvel bezárólag és a j -1. évvel bezárólag összesen kifizetett összegek aránya stabilnak tekinthető. Adatainkra támaszkodva ezekre az arányokra és az ezekből számított kárfelhalmozási és késedelmi tényezőkre a becsléseket az algoritmusban leírt módon számítjuk ki, és összefoglaljuk őket a 6.5. táblázatban.

6.5. táblázat. Trendek

Kifutási arányok (lambda)					
1, 611	1, 203	1, 110	1, 036	1, 021	1, 000
$\overline{\lambda_1}$	$\overline{\lambda_2}$	$\overline{\lambda_3}$	$\overline{\lambda_4}$	$\overline{\lambda_5}$	
kárfelhalmozási tényezők (H)					
2, 275	1, 412	1, 174	1, 058	1, 021	1, 000
$\overline{H_0}$	$\overline{H_1}$	$\overline{H_2}$	$\overline{H_3}$	$\overline{H_4}$	$\overline{H_5}$
késedelmi tényezők (L)					
0, 439	0, 708	0, 852	0, 946	0, 980	1, 000
$\overline{L_0}$	$\overline{L_1}$	$\overline{L_2}$	$\overline{L_3}$	$\overline{L_4}$	$\overline{L_5}$

Ezen arányok segítségével készítünk becslést a 2016-2020 évekig várható károkra 2015. júniusi árakon. A halmozott kárkifizetések táblázatának eddig ki nem töltött részét határozzuk meg ily módon (ld. 6.6. táblázat).

Példaként: várhatóan 1388 a biztosítónak az 2014. évben keletkezett kár alapján 4 éven át, azaz a 2018. évig bezáróan fizetendő kötelezettsége, ez a 2014. év sorában és a 4. kifutási évnek megfelelő oszlopban található szám, amelyet úgy kaptunk, hogy a 3. kifutási évre számított becslésünket: 1340-t megszoroztuk $\overline{\lambda_4} = 1,036$ - tal.

A hiányzó halmozott kárkifizetéseket, beleértve az utolsó oszlopban található teljes kárösszegeket is, közvetlenül a $\overline{H_j}$ kárfelhalmozási tényezők segítségével is számolhatjuk. A teljes kárösszegeket, a ténylegesen eddigi felhalmozott kárkifizetéseket és különbségüket: az IBNR tartalék becslését 2015. júniusi árakon a 6.7. táblázat

6.6. táblázat. A halmozott kárkifizetések mátrixa

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	587	881	1 028	1 085	1 117	1 140
2011	668	1 173	1 392	1 561	1 625	**1 658**
2012	665	1 051	1 297	1 481	**1 534**	**1 566**
2013	739	1 439	1 749	**1 942**	**2 012**	**2 053**
2014	783	1 003	**1 207**	**1 340**	**1 388**	**1 417**
2015	752	**1 212**	**1 458**	**1 618**	**1 677**	**1 711**

foglalja össze.

A modell jóságának ellenőrzése érdekében készíthetünk egy másik halmozott kárkifizetések mátrixát, amelyben az eredeti kifutási háromszög helyén a módszerrel becsült múltbeli értékeket tüntetjük fel, és vizsgáljuk a két kifutási háromszög: a tényleges és a becsült értékeinek az eltérését (százalékos arányban, a különbségek négyzetösszege vagy más eltérésfüggvény segítségével). Itt úgy kaptuk a becsült értékeket, hogy a 0. kifutási évben kifizetett értékre támaszkodtunk, és a megfelelő kárfelhalmozási tényezővel szoroztuk a mátrix megelőző oszlopának elemeit.

Ha a következő évek inflációját és befektetési lehetőségeinket is figyelembe akarjuk venni, akkor tovább számolunk. A halmozott kárkifizetések táblázatából meghatározzuk az egyes években keletkezett káreseményekből származó éves kötelezettségeket a 2015. évet követő évekre, először 2015. júniusi árakon. Esedékes kiadásaink azonban a kifizetéskor érvényes Ft-ban merülnek majd fel, ezért át kell őket számolnunk a feltételezett inflációs szorzók segítségével. Amit tartalékolnunk kell, mégsem ezek az összegek, hiszen a tartalékot befektetjük, vagyis rajta a felhasználás időpontjára hozam keletkezik. A 6.9. táblázat a kifizetéskor szükséges összegeket tartalmazza az egyes keletkezési, illetve kifutási éveknek megfelelően.

6.7. táblázat. IBNR tartalék 2015. júniusi Ft-ban

Keletkezési évek	**Teljes kárösszeg**	**Ténylegesen kifizetett**	**IBNR Tartalék**
2010	1 140	1 140	0
2011	1 658	1 625	33
2012	1 566	1 481	85
2013	2 053	1 749	304
2014	1 417	1 003	414
2015	1 711	752	959
Összesen:	9 545	7 750	1 795

6.8. táblázat. A kifutási háromszög becsült értékei

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	587	947	1 139	1 264	1 310	1 337
2011	668	1 076	1 294	1 436	1 488	
2012	665	1 072	1 289	1 431		
2013	739	1 192	1 433			
2014	783	1 262				
2015	752					

6.9. táblázat. Jövendő kárkifizetések a keletkezés éve szerint

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Összesen
2010						
2011					35	**35**
2012				56	35	**91**
2013			202	78	48	**328**
2014		214	146	56	34	**450**
2015	483	271	185	70	43	**1 052**
Összesen:						**1 956**

Végül összefoglaljuk a következő öt évben várható összes kifizetéseket és ezek fedezetére a 2015. év végén képzendő tartalékokat a 6.10. táblázatban.

6.10. táblázat. Jövendő kárkifizetések és tartalék a kifizetés éve szerint

	Jövendő kárkifizetések	**Szükséges tartalék**
2016	990	925
2017	530	463
2018	288	237
2019	104	81
2020	43	31

Megjegyezzük, hogy az infláció figyelembe vétele nem kötelező, a tartalék jövőbeli hozama lehet a társaság eredménye. Ha a jövőbeli várható kifizetéseket az inflációval diszkontáljuk, akkor a jelenlegi szabályozás szerint a különbözetet ki kell mutatni, és pl. annak értékével a szavatoló tőke fedezetet csökkenteni kell.

Fontos, hogy a modellezett helyzetnek megfelelő ”inflációt” vegyünk figyelembe. Tűzbiztosításban pl. az építési árak alakulása lehet ez, személyi sérülések esetén a kieső jövedelem (elmaradt haszon) alakulása, stb.

6.3. A szeparációs módszer

A szeparációs módszer azt feltételezi, hogy a káradatok (a halmozott kárösszegek növekményei) olyan tényezők szorzataként írhatók fel, amelyek a keletkezési évre, a kifutási évre és a kifizetések naptári évére jellemzők. További jelöléseket vezetünk be:

r_j: a teljes kárnak az a várható aránya, amelyet a j. kifutási évben jelentenek be: $\sum r_j = 1$. Azzal a feltevéssel élünk, hogy ezek az arányok függetlenek a keletkezés évétől.

δ_{i+j}: a naptári évre jellemző tényező (ez foglalja magában pl. az inflációt, politikai, törvénykezési változásokat, stb.);

N_i : a káresemények száma az eredet évében;

$B_{ij} = \frac{C_{ij}}{N_i}$: az i. évben keletkezett káreseményekre eső kárkifizetés a j. kifutási évben, $C_{ij} = X_{ij} - X_{i,j-1},\ j = 1, ..., n$;

f_{n+j} : az n. évet követő j. évben a feltételezett éves infláció.

Az algoritmus a következő feltevésre épül:

$$E\left[C_{ij}\right] = c \cdot N_i \cdot r_j \cdot \delta_{i+j} \Leftrightarrow$$

$$\frac{E[C_{ij}]}{N_i} = c \cdot r_j \cdot \delta_{i+j},\ i = 0, 1, ..., n;\ j = 0, ..., n.$$

Itt c arányossági tényező, amelyet az aktuáriusi irodalomban szokásos módon feltüntetünk, de a továbbiakban csak a $c \cdot \delta_{i+j}$ szorzatban jelenik meg.

A jobb oldalon lévő szorzatot úgy foghatjuk fel $i \leq n-j$ indexekre, mint a kifutási háromszög bal felső sarkában álló múltbeli becsült adatokat szorzat formában, a többi i indexre pedig a jövőbeli várható kifizetéseket a következő n évre. Ha e várható kifizetéseket meghatározzuk, akkor megkapjuk az egyes keletkezési évekre eső teljes várható kárösszeget, az IBNR tartalékot, illetve az egyes évekre képzendő tartalék értékeit is, amint ezt a lánclétra módszer alkalmazásánál láttuk már.

Ha a tényleges N_i kárszám becslése rendelkezésünkre áll, és számításainkban N_i értékére ezt használjuk, akkor a tényadatok bal felső háromszögének egyes sorait ezekkel a kárszámokkal osztva a számítandó r_j és $c \cdot \delta_{i+j}$ értékek becsléseit e kifutási háromszög diagonális összegeit felhasználva egy egyszerű eljárás segítségével meghatározhatjuk. A diagonális összegek ugyanis a következők lesznek:

$$d_0 = c \cdot r_0 \cdot \delta_0$$

$$d_1 = c \cdot r_0 \cdot \delta_1 + c \cdot r_1 \cdot \delta_1 = c\,(r_0 + r_1)\,\delta_1$$

$$d_2 = c \cdot r_0 \cdot \delta_2 + c \cdot r_1 \cdot \delta_2 + c \cdot r_2 \cdot \delta_2 = c\,(r_0 + r_1 + r_2)\,\delta_2$$

....

$$d_{n-1} = c\,(r_0 + r_1 + ... + r_{n-1})\,\delta_{n-1} = c\,(1 - r_n)\,\delta_{n-1}$$

$$d_n = c\,(r_0 + r_1 + ... + r_n)\,\delta_n = c \cdot \delta_n$$

Az algoritmus ezt az egyszerű eljárást tartalmazza. Az algoritmus leírásában minden számított érték becslés, amit azonban azért nem jelölünk, mert a hosszas képletek leírását és áttekintését ezzel megnehezítenénk.

Az algoritmus.

0. Lépés: Írjuk fel a tényleges C_{ij} kárösszegekből alkotott felső kifutási háromszöget, osszuk el a sorokat az adott N_i kárszámokkal (becslésekkel): újabb kifutási háromszöget kapunk a $B_{ij} = \frac{C_{ij}}{N_i}$ értékekből. Határozzuk meg a

$$d_0 = B_{0,0}, d_1 = B_{0,1} + B_{1,0}, ..., d_n = B_{0,n} + B_{1,n-1} + ... + B_{n,0}$$

diagonális összegeket.

1. Lépés: Végezzük el sorban a következő számításokat:

$$c \cdot \delta_n = d_n$$

$$r_n = \frac{B_{0n}}{c \cdot \delta_n}$$

$$c \cdot \delta_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - r_n}$$

$$r_{n-1} = \frac{B_{0,n-1} + B_{1,n-1}}{c \cdot \delta_n + c \cdot \delta_{n-1}}$$

$$c \cdot \delta_{n-2} = \frac{d_{n-2}}{1 - r_n - r_{n-1}}$$

$$r_{n-2} = \frac{B_{0,n-2} + B_{1,n-2} + B_{2,n-2}}{c \cdot \delta_n + c \cdot \delta_{n-1} + c \cdot \delta_{n-2}}$$

$$.....$$

2. Lépés: A $c \cdot \delta_n$ és az r_j értékek birtokában meghatározzuk az átlagos kárkifizetések $\{B_{ij}\}$ mátrixának alsó kifutási háromszögét a következő módon: Az $i = 1, ..., n; j = 1, ..., n, i + j > n$ indexekre $\delta_{i+j} = \delta_n$ és

$$B_{ij} = c \cdot \delta_{i+j} \cdot r_j = c \cdot \delta_n \cdot r_j$$

Megszorozzuk a sorokat az adott kárszámokkal, így megkapjuk az egyes évek kárkifizetései $\{C_{ij}\}$ mátrixának alsó kifutási háromszögét, a becsült várható kárkifizetéseket.

3. Lépés: A becsült inflációs adatok segítségével az $i = 1, ..., n$ indexekre a becsült várható kárkifizetéseket megszorozzuk a megfelelő inflációs szorzóval, és a $\{C_{ij}\}$ mátrix alsó háromszögének új értékeit a következőképpen kapjuk:

$$C_{i,j}^{uj} = C_{i,j}^{regi} \cdot \prod_{0<k\leq j} (1 + f_{n+k}), \quad n \geq j > n - i.$$

Megállapítjuk az egyes keletkezési évekre eső IBNR tartalékokat illetve teljes kárösszeget.

Megjegyzések.

Felmerülhet a kérdés, hogyan határozzuk meg az N_i kárszámokat. Nyilvántartásunkból csak az eddig bejelentett károkra derül fény, miközben N_i magában foglalja azokat a káreseményeket is, amelyekről a biztosítónak még nincs tudomása. Statisztikai módszereket alkalmazhatunk annak a becslésére, hogy az egyes kifutási években a káresemények hány százalékát jelentik be. Pl. kiindulunk a leghosszabb történettel bíró első keletkezési év bejelentéseinek az egyes kifutási évekre eső arányaiból. Egy függvényt illesztve e kárszámokra (vagy azok halmozott értékeire) tanulmányozzuk, hogyan csengenek le a keletkezési évre vonatkozó károk új bejelentései (rendszerint nagyon gyorsan). A függvény alakjából lehet következtetni arra, hogy még mennyi van hátra. A szóban forgó keletkezési évre összesen bejelentett kárszám és a becsült hátralévő új bejelentés-szám összegéből kiszámíthatjuk, hogy egy adott évben a keletkezett károk várhatóan hány százalékát jelentik be ugyanabban az évben, a következőben, és így tovább - ezeknek az összege természetszerűleg 100. Ezeknek az arányoknak a birtokában a további években keletkezett károk teljes számát úgy lehet megbecsülni, hogy összevetjük a kárszám tényleges kifutását illetve arányait a kiszámított arányokkal. Hangsúlyozzuk ismét, hogy az aktuáriusi megítélés a számításokat helyettesítheti, illetve eredményeit felülbírálhatja.

A szeparációs módszer itt leírt és leggyakrabban alkalmazott változatában az $\{r_j\}$ és $\{c\delta_{i+j}\}$ értékek becsléseit határozzuk meg, és ezek birtokában számoljuk az IBNR tartalékot illetve a teljes kárkifizetést. E becsült paraméterek segítségével azonban becslést adhatunk arra is, mekkorák lennének a múltbeli kárkifizetések az egyes keletkezési évek és kifutási évek tekintetében, ha értékük a feltételezett szabályt követné. A következtetés, amit ebből levonhatunk, ismét kétirányú:

(a) Az "arány" módszer ("ratio method") arra az elképzelésre épül, hogy ha a múltbeli tényleges kifizetések meghaladják a múltra vonatkozó várható kifizetéseket, akkor a várható jövendő kifizetéseket is ennek arányában kell felfelé igazítani és fordítva, ha kisebbek annál, akkor lefelé kell a várható jövendő kifizetéseket kiigazítani.

(b) A "teljes kárkifizetés" módszer ("total payment method") ezzel ellentétes felfogást tükröz, nevezetesen azt, hogy a teljes várható kár fix, rögzített érték. Ha tehát a múltbeli várható kifizetések meghaladják a tényleges kifizetéseket, akkor a jövőbelieknek ugyanannyival kisebbeknek kell lenniük a becsültnél és fordítva.

6.2. Példa. *Használjuk fel ismét a lánclétra módszerben bemutatott értékeket. A 6.11. táblázat 2015. júniusi millió Ft-ban tünteti fel az egyes évek kárkifizetései*

$\{C_{ij}\}$ mátrixának felső kifutási háromszögét, és tartalmazza az egyes évek kárszámait is.

6.11. táblázat. Kifutási háromszög (2015. júniusi millió Ft-ban) és a kárszámok

Keletkezési	**Kifutási évek**						**A károk**
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**száma**
2010	587	294	147	57	32	23	20
2011	668	506	219	169	64		18
2012	665	386	246	184			21
2013	739	700	310				20
2014	783	220					20
2015	752						22

A feltételezett infláció és a megfelelő inflációs szorzók, amelyeket ahhoz kell alkalmaznunk, hogy lássuk, nominálisan milyen kötelezettségeink lesznek az adott évben, a következő évekre a 6.12. táblázat foglalja össze.

6.12. táblázat. Becsült infláció ezredekben és az inflációs szorzók

2015.j l.1.-2016.jún.30.	50	1,050
2016.júl.1.-2017.jún.30.	50	1,103
2017.júl.1.-2018.jún.30.	45	1,152
2018.júl.1.-2019.jún.30.	40	1,198
2019.júl.1.-2020.jún.30.	35	1,240

Határozzuk meg az IBNR tartalékot és a teljes kárösszeget az egyes keletkezési évekre.

Mennyi lesz a teljes kárösszeg, ha

1. az "arány" módszert alkalmazzuk?

2. a "teljes kárkifizetés" módszert alkalmazzuk?

Megoldás. A számítások során kerekített értékeket tüntetünk fel.

Kezdjük a 0. Lépéssel: Osszuk el a sorokat a kárszámokkal: a 6.13. táblázatban megkapjuk az egy káreseményre jutó átlagos kárösszegek $\{B_{ij}\}$ mátrixát. Ebből felírjuk a diagonális összegeket ezeket tartalmazza a 6.14. táblázat.

6.13. táblázat. A kifutási mátrix átlagos kárkifizetésekkel

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	29, 350	14, 700	7, 350	2, 850	1, 600	1, 150
2011	37, 111	28, 111	12, 167	9, 389	3, 556	
2012	31, 667	18, 381	11, 714	8, 762		
2013	36, 950	35, 000	15, 500			
2014	39, 150	11, 000				
2015	34, 182					

6.14. táblázat. A kifutási mátrix átlós összegei kifizetési évenként

2010	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
29, 350	51, 811	67, 128	70, 348	96, 853	74, 149

Az 1. Lépésben meghatározzuk az egyes kifutási évekhez tartozó r_i kifutási arányok és a 2010-2015 évekhez tartozó, a külső hatásokat kifejező $c \cdot \delta_{i+j}$ szorzók becsléseit, ld. 6.15. táblázat.

Az r_5 értéket például így kaptuk: $r_5 = \frac{B_{2010,5}}{c \cdot \delta_{2010+5}} = \frac{1{,}15}{74{,}149}$, a $c \cdot \delta_{2010+4}$ értéket pedig így: $c \cdot \delta_{2010+4} = \frac{d_4}{1-r_5} = \frac{96{,}853}{1-0{,}016}$.

6.15. táblázat. A $c \cdot \delta_{i+j}$ szorzók és az r_j kifutási arányok

A külső hatásokat kifejező szorzók					
2010	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
64, 732	71, 480	77, 219	73, 693	98, 379	74, 149
A kifutási arányok					
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0, 453	0, 271	0, 144	0, 085	0, 030	0, 016

A 2. Lépésben meghatározzuk a mátrix alsó háromszögét, és egyben megszorozzuk a sorokat a kárszámokkal, ld. 6.16. táblázat.

6.16. táblázat. A kifutási mátrix és a már kifizetett kár

Keletkezési	**Kifutási évek**						**Összesen**	**Kifizetve**
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**9335**	**7751**
2010	587	294	147	57	32	23	1140	1140
2011	668	506	219	169	64	21	1647	1626
2012	665	386	246	184	47	24	1552	1481
2013	739	700	310	126	44	23	1942	1749
2014	783	220	214	126	44	23	1410	1003
2015	752	443	236	139	49	25	1644	752

A 3. Lépésben: A jövendő kárkifizetéseket igazítjuk az inflációhoz, ld. 6.17. táblázat.

Összefoglaljuk az egyes keletkezési évekre eső IBNR tartalékokat és a teljes kárösszeget a 6.18. és 6.19. táblázatokban.

Foglalkozzunk feladatunk második részével.

6.17. táblázat. A jövendõ kárkifizetések inflációval korrigálva

Keletkezési	**Kifutási évek**						**Összesen:**
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
2011						22	22
2012					49	27	76
2013				133	49	26	208
2014			225	139	51	28	443
2015		465	260	160	58	31	974
Összesen:							**1723**

6.18. táblázat. Számított IBNR tartalék a károk keletkezési éve szerint

Kifizetési év	**IBNR tartalék**	**Ténylegesen kifizetve**	**Teljes kár**
2010	0	1140	1140
2011	22	1626	1648
2012	76	1481	1557
2013	208	1749	1957
2014	443	1003	1446
2015	974	752	1726
Összesen:	**1723**	**7751**	**9474**

6.19. táblázat. Jövendő kárkifizetések a kifizetés éve szerint

Kifizetési év	**IBNR: Jövendő kárkifizetések**
2016	893
2017	475
2018	238
2019	86
2020	31
Összesen:	**1723**

2. A teljes kárösszeg meghatározására először bemutatjuk az *"arány" módszer* alkalmazását.

Helyettesítsük a $\{C_{ij}\}$ mátrix felső kifutási háromszögében szereplő tényleges értékeket azok várható értékével: a $c \cdot \delta_{i+j}$ és r_j tényezők és a kárszámok szorzatával. Ekkor a 6.20. táblázatot kapjuk.

Foglaljuk össze az eredeti és ezen táblázat alapján 2015. júniusig bezárólag a tényleges és várható kifizetések halmozott összegét az eredet évei szerint. Határozzuk meg a tényleges és a várható kifizetések halmozott összegének a hányadosait, és ezzel a hányadossal szorozzuk meg a kapott IBNR tartalékokat: így nyerjük az "arány" módszer alapján számított korrigált IBNR tartalékot, amelyet a 6.21. táblázat mutat be.

A *"teljes kárkifizetés" módszer* alkalmazásához vegyük ismét a várható kárkifizetések mátrixát. Határozzuk meg a teljes várható kárt, és ebből vonjuk ki a 2015. június 30-ig ténylegesen kifizetett kárösszegeket. Így nyerjük a "teljes kárkifizetés" módszer alapján számított korrigált IBNR tartalékot, amelyet a 6.22. táblázat mutat be. Negatív tartalékot természetesen nem képzünk, a kapott eredmény tehát csak információ az aktuárius számára.

6.20. táblázat. A várható kifizetések kifutási háromszöge

Keletkezési	**Kifutási évek**						Teljes kár	Várhatóan kifizetve
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**		
2010	586	387	222	125	59	24	1403	1403
2011	583	377	191	151	40	22	1364	1342
2012	735	419	297	132	49	27	1659	1583
2013	668	533	214	133	49	26	1623	1415
2014	891	402	225	139	51	28	1736	1293
2015	739	465	260	160	58	31	1713	739

6.21. táblázat. Korrigált IBNR: arány módszer

Keletkezési év	**Számított IBNR tartalék**	**Ténylegesen/ várhatóan kifizetve**	**Korrigált IBNR: Arány módszer**
2010	0	1140/1403	0
2011	22	1626/1342	27
2012	76	1481/1583	71
2013	208	1749/1415	257
2014	443	1003/1293	344
2015	974	752/739	991
Összesen:	**1723**		**1690**

6.22. táblázat. Korrigált IBNR: teljes kárkifizetés módszer

Kifizetési év	**Teljes várható kár**	**Ténylegesen kifizetve**	**Korrigált IBNR: teljes kárkifizetés**
2010	1403	1140	263
2011	1364	1626	-262
2012	1659	1481	178
2013	1623	1749	-126
2014	1736	1003	733
2015	1713	752	961
Összesen:	**9498**	**7751**	**1747**

6.4. Modellezés entrópia–programozással

Egészítsük ki a kifutási háromszöget a sor- ill. oszlopösszegekkel, ezeket tartalmazza a 6.23. táblázat utolsó sora és oszlopa, $T = \Sigma A_i = \Sigma B_j$:

6.23. táblázat. Kifutási háromszög

Keletkezési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**...**	**n-1**	**n**	
0	C_{00}	C_{01}	...		C_{0n}	$\mathbf{A}_0$
1	C_{10}	C_{11}	...	$C_{1,n-1}$		$\mathbf{A}_1$
...	...	...	...			
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$				$\mathbf{A}_{n-1}$
n	C_{n0}					$\mathbf{A}_n$
	$\mathbf{B}_0$	$\mathbf{B}_1$		$\mathbf{B}_{n-1}$	$\mathbf{B}_n$	**T**

Előfordul, hogy a kifutási háromszög tényadatai közül egyesek hiányoznak, pl. azért, mert láthatóan megbízhatatlan némelyik adat, vagy más okból, vagy egyesek lehetnek negatív vagy nulla értékűek. Nevezzük ezeket tiltott celláknak. Ilyenek megléte módosítja a modellt, elsősorban azáltal, hogy ha ezeket a cellákat a számításokból kihagyjuk, csökkentjük a változók számát. E helyzet aprólékosabb elemzést igényelne, az itt következő tárgyalásban tiltott cellát nem engedünk meg. Feltesszük, hogy a C_{ij}, és így az A_i, B_j $(i = 0, \dots, n;\ j = 0, \dots, n)$ paraméterek pozitívok.

A táblázat átlói az egyes naptári évek kifizetési adatait tartalmazzák, a bennük szereplő értékek összege az egyes években összesen kifizetett kárérték. Feladatunk az, hogy e tényadatokra támaszkodva egy kifutási trendet modellezzünk, és elkészítsünk egy mátrixot, amelynek jobb alsó háromszögét az egyes keletkezési évekhez illetve a hátra lévő kifutási évekhez tartozó becsült várható kárkifizetések töltik ki, bal felső háromszöge pedig egy olyan kifutási háromszög, amelyet a modell szerint az elmúlt időszakra „várnánk”. A táblázat szerkezete azt a feltételezést implikálja, hogy az elmúlt n+1 évben bekövetkezett káreseményekhez kapcsolódó kárkifizetések a következő n évben kifutnak. Modellezési megfontolásaink azonban akkor is érvényben maradnak, ha a kifutási évek száma a keletkezési évek számánál több vagy kevesebb.

Részben a lánclétra módszer elméleti megalapozását elősegítendő születtek olyan módszerek, amelyek a kárértékek vagy az ezekből számított halmozott kárkifizetések (rendszerint az exponenciális családhoz tartozó) valószínűségi eloszlására vonatkozó feltételezéseket tartalmaznak és zömmel ún. loglineáris modellhez vezetnek. Itt az a célunk, hogy egy más összefüggésbe: az általánosított entrópia-programozás nyújtotta elméleti keretbe helyezzük az IBNR kár tartaléka problémát, és egyben entrópia-programozási elméleti megalapozást is nyújtsunk a lánclétra módszerre. A modell alkalmazása a kárértékek egy más elrendezése esetén a szeparációs módszerhez vezet – erről a fejezet végén lesz szó.

Vegyük észre azt, hogy a kifutási háromszögben foglalt értékek a T egységnyi kárkifizetés (kárszám, stb.) egy realizált eloszlását képviselik a keletkezési év - kifutási év cellák között, valószínűségi eloszlást, ha (a feltevés szerint pozitív) adatainkat T-vel elosztjuk. Modellünkben csak a kifutási háromszög sor- és oszlopösszegeit tekintjük adottnak, más adatot nem használunk fel.

A modell gondolatmenete

Az első kérdés az, hogy a sor- és oszlopösszegek ismeretében ésszerűen milyen módon osztjuk el a szóban forgó T értéket a cellák között, mi a teljes kifizetett T összeg „igazi" eloszlása. Ha erre egy modell formájában sikerül válaszolnunk, akkor az is kiderül, mit gondolhatunk a jövőről. Vegyük észre először, hogy ha a sor- és oszlopösszegeket sem ismernénk, nem lenne okunk arra, hogy különbséget tegyünk a cellák között, vagyis minden cellába ugyanakkora értéket helyeznénk: „egyenletesen" osztanánk el a T összeget. A sor- és oszlopösszegek ismeretében ezért olyan x_{ij} eloszlást kell keresnünk ($i = 0,\dots, n$; $j = 0 ,\dots, n$; $i+j \leq n$), amely ezen (diszkrét) egyenletes eloszlástól a legkevésbé tér el.

Az eltérésfüggvényeket két tulajdonság jellemzi: (i) nemnegatívok; (ii) értékük

0 akkor és csak akkor, ha a két vektor, amelynek eltérését mérjük, egyenlő. Nem kötjük ki sem a szimmetriát, sem a tranzitivitást, sem a háromszög-egyenlőtlenséget.

Feladatunk általánosságban tehát a következő:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j:i+j\leq n} d\left(x_{ij}, R\right) \rightarrow \min$$

$$\sum_{j:i+j\leq n} x_{ij} = A_i, \ i = 0, ..., n$$

$$\sum_{i:i+j\leq n} x_{ij} = B_j, \ j = 0, ..., n$$

ahol gondolatmenetünk szerint R = 2T/(n+1)(n+2), vagyis az egyes cellákba egyenlően eső értékek. A matematikai kezelhetőség érdekében feltesszük, hogy a d eltérésfüggvény az első változójának szigorúan konvex és differenciálható függvénye. (Az $x_{ij} \geq 0, \ i = 0, ..., n, \ j = 0, ..., n$ előírással nem élünk.)

A feladat megoldása tehát a T kárösszeg egy olyan eloszlása az (i,j) cellák között, amelynek az egyenletestől való eltérése a legkisebb, egy a prioritásainkat tükröző eltérésfüggvény alkalmazása mellett. A megoldás szerkezete iránymutató arra nézve, hogy a már bekövetkezett, de teljes egészében még nem rendezett károk esetében milyen lesz várhatóan a jövendő kárkifizetések eloszlása és nagysága. Kézenfekvő, hogy a jövendő kárkifizetések becslése „jóságát” is az alkalmazott célfüggvény szerinti eltéréssel mérjük.

Megjegyezzük, hogy egy $(y_1, ..., y_m)$ vektornak egy $(z_1, ..., z_m)$ vektortól való eltérését mérő függvényeknek kiemelkedő jelentőségű csoportját alkotják a Csiszár féle ϕ-divergencia körébe tartozók illetve az ún. Bregman függvények. Közéjük tartozik:

- a Kullback-Leibler relatív entrópia-eltérés: $\sum_{i=1}^{m} \left(y_i \ln \frac{y_i}{z_i} + z_i - y_i\right)$;
- ennek a változók fordított sorrendjét tartalmazó változata: $\sum_{i=1}^{m} \left(z_i \ln \frac{z_i}{y_i} + y_i - z_i\right)$;
- $\sum_{i=1}^{m} \left(\sqrt{z_i} - \sqrt{y_i}\right)^2$;
- a négyzetes eltérés: $\sum_{i=1}^{m} \left(z_i - y_i\right)^2$;
- a Burg entrópia: $\sum_{i=1}^{m} \left(-\ln \frac{z_i}{y_i} + \frac{y_i}{z_i} - 1\right)$.

Különböző eltérésfüggvények – entrópiaszerű függvények - alkalmazása különböző feladatokhoz és megoldásokhoz vezet. A négyzetes eltérés kivételével a felsorolt függvényekkel csak pozitív vektorok eltérését mérhetjük. A modellt a Kullback-Leibler relatív entrópia alkalmazása esetén vesszük részletesen szemügyre.

A következő konvex programozási feladatot vizsgáljuk:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:i+j\leq n}\left(x_{ij}\ln\tfrac{x_{ij}}{R}+R-x_{ij}\right)\to\min$$

$$\sum_{j:\,i+j\leq n} x_{ij}=A_i,\ i=0,...,n$$

$$\sum_{i:\,i+j\leq n} x_{ij}=B_j,\ j=0,...,n$$

Nem tüntettük fel az $x_{ij}\geq 0,\ i=0,...,n,\ j=0,...,n$ feltételt, de látható, hogy a célfüggvény értelmezési tartományának és a megengedett megoldások halmazának közös része nem tartalmaz negatív komponenssel bíró elemet.

A modell tulajdonságainak az elemzéséhez a nemlineáris programozás optimalitásra és dualitásra vonatkozó, függelékben összefoglalt eredményeit alkalmazzuk.

Megállapítjuk, hogy a modellnek mindig van a feltételeket kielégítő pozitív megengedett megoldása: a rendelkezésünkre álló C_{ij} tényadatok által alkotott megoldás.

Vegyük észre, hogy a $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}\left(x_{ij}\ln\tfrac{x_{ij}}{R}+R-x_{ij}\right)$ célfüggvény minimalizálása egy egyszerűbb függvény minimalizálásával ekvivalens. Bemutatjuk az átalakítást:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}\left(x_{ij}\ln\tfrac{x_{ij}}{R}+R-x_{ij}\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}x_{ij}\ln x_{ij}-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}x_{ij}\ln R+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}R-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}x_{ij}$$

Mivel a második és harmadik tag - a feltételek teljesülése esetén - konstanssá válik, ezért a modell célfüggvényét a $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}(x_{ij}\ln x_{ij}-x_{ij})$célfüggvénnyel fogjuk helyettesíteni. Megoldandó feladatunk a következő:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j:\,i+j\leq n}(x_{ij}\ln x_{ij}-x_{ij})\to\min$$

$$(E1)\qquad \sum_{j:\,i+j\leq n} x_{ij}=A_i,\ i=0,...,n$$

$$\sum_{i:\,i+j\leq n} x_{ij}=B_j,\ j=0,...,n$$

Minthogy x lnx tart 0-hoz, ha x tart 0-hoz, ezért a célfüggvényt kiterjeszthetjük a 0 értékű változókra is a $0 \ln 0 = 0$ alkalmazásával. Ezzel a célfüggvény értelmezési tartományának és a megengedett megoldások halmazának közös része korlátos és zárt halmazzá vált, amelyen, ha nemüres, a folytonos célfüggvény felveszi a minimumát. A célfüggvény szigorúan konvex volta miatt a feladatnak legfeljebb egy minimum pontja van. Mivel a feladatnak van pozitív megengedett megoldása, ezért, mint ezt Klafszky (1974), illetve Fang, Rajasekera és Tsao (1997) bizonyították, az egyetlen optimális megoldása pozitív. Erre épül a következő állítás.

1. Állítás: Léteznek olyan $\{u_i^*, v_j^*;\ i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n\}$ értékek, hogy az (E1) modell egyetlen pozitív optimális $\left\{x_{ij}^*;\ i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n;\ i + j \leq n\right\}$ megoldásának komponenseire fennáll, hogy $x_{ij}^* = e^{u_i^*} e^{v_j^*}$, illetve az $\alpha_i^* = e^{u_i^*}$, $\beta_j^* = e^{v_j^*}$ helyettesítést alkalmazva: $x_{ij}^* = \alpha_i^* \beta_j^*$, $\alpha_i^* > 0, \beta_j^* > 0$, $i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n;\ i + j \leq n.$

Bizonyítás: A modell duális feladata a következő:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j:\, i+j\leq n} (x_{ij} \ln x_{ij} - x_{ij}) + \sum_{i=0}^{n} u_i \left(A_i - \sum_{j:\, i+j\leq n} x_{ij} \right) + \sum_{j=0}^{n} v_j \left(B_j - \sum_{i:\, i+j\leq n} x_{ij} \right)$$

$$\to \max$$

$$\ln x_{ij} - u_i - v_j = 0,\ i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n;\ i + j \leq n.$$

Wolfe dualitási tétele értelmében – amelynek feltételei teljesülnek: a modell célfüggvénye konvex és differenciálható az optimális $\{x_{ij}^*; i = 0, ..., n; j = 0, ..., n; i + j \leq n\}$ pontban, a feladat reguláris - léteznek olyan $u_i^*, v_j^*;\ i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n$ értékek, hogy $u_i^*, v_j^*;\ i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n$, $x_{ij}^*;\ i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n;\ i + j \leq n$ együttesen megengedett és egyben optimális megoldását alkotják a duális feladatnak. A $\ln x_{ij} - u_i - v_j = 0$ egyenletet ekvivalens átalakítással és helyettesítéssel felírhatjuk az $x_{ij} = e^{u_i} e^{v_j}$; illetve $x_{ij} = \alpha_i \beta_j, \alpha_i > 0, \beta_j > 0$ alakban. Ezzel az állítást beláttuk.

Az optimális megoldás tehát a következő formákban kereshető: $x_{ij}^* = e^{u_i^*} e^{v_j^*}$ illetve $x_{ij}^* = \alpha_i^* \beta_j^*, \alpha_i^* > 0, \beta_j^* > 0$, $i = 0, ..., n;\ j = 0, ..., n;\ i + j \leq n$, ahol az u_i^*, v_j^*, illetve α_i^*, β_j^* változók ki kell, hogy elégítsék a következő egyenletrendszereket:

$$(*) \qquad \tfrac{A_i}{\alpha_i} = \sum_{j=0}^{n-i} \beta_j; i = 0, ..., n; \tfrac{B_j}{\beta_j} = \sum_{i=0}^{n-j} \alpha_i; j = 0, ..., n;$$

$$(**) \qquad A_i = e^{u_i} \sum_{j=0}^{n-i} e^{v_j}; i = 0, ..., n; B_j = e^{v_j} \sum_{i=0}^{n-j} e^{u_i}; j = 0, ..., n.$$

Modellünk megoldása tehát a két egyenletrendszer valamelyikének a megoldásával ekvivalens. Alkalmazzuk a (*) ún. loglineáris alakot tartalmazó egyenletrendszert, és határozzuk meg a modell megoldását az $x_{ij}^* = \alpha_i\beta_j$; $i = 0, ..., n$; $j = 0, ..., n$; $i + j \leq n$ formában. Vegyük észre, hogy a $2(n + 1)$ változót tartalmazó $2(n + 1)$ egyenlet összefügg. Alaposabb vizsgálat után beláthatjuk, hogy a feltételeket alkotó egyenletrendszer mátrixának rangja pontosan $2n + 1$, ezért mind a (*), mind a (**) egyenletrendszernek egy szabadságfoka van. Egy kiegészítő feltétel beiktatásával egyértelművé tehetjük a megoldást, e feltételként a következőt választjuk:

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_j = 1.$$

Látható, hogy ekkor $\{\alpha_i; i = 0, ..., n\}$ éppen az i-edik évben bekövetkezett káreseményekhez kapcsolódó teljes kárkifizetést jelenti, $\{\beta_j; j = 0, ..., n\}$ pedig a teljes kárösszegnek az egyes kifutási évekhez tartozó arányát.

A modell megoldásaként a kifutási háromszög bal felső sarkának „igazi" értékeit határozzuk meg. Ésszerűnek tűnik – $\{\alpha_i; i = 0, ..., n\}$ és $\{\beta_j; j = 0, ..., n\}$ ismeretében - a jövendő várható kárkifizetések becslésére is a modell struktúráját alkalmazni:

$$x_{ij} = \alpha_i\beta_j; i + j > n$$

Kérdés, ezt a megoldást kapjuk-e akkor is, ha a modell megoldásából adódó és az egyes keletkezési évekre vonatkozó várható teljes kárértékek illetve az egyes kifutási évekre vonatkozó várható teljes kárértékek ismeretében ismét alkalmazzuk a kiinduló megfontolásunkat, vagyis hogy az egyenleteshez legközelebbi eloszlást keressük keletkezési év – kifutási év felbontásban.

Rögzítsük az $(E1)$ feladat optimális megoldását:

$$\begin{aligned} u_i^*, v_j^*, \alpha_i^* &= e^{u_i^*}, \beta_j^* = e^{v_j^*}, \quad i = 0, ..., n; j = 0, ..., n; \\ x_{ij}^* &= \alpha_i^*\beta_j^*, \quad i = 0, ..., n; j = 0, ..., n; i + j \leq n, \end{aligned}$$

és tekintsük a következő optimalizálási feladatot, amelyben $A_i' = \alpha_i^*, i = 0, ..., n$;

és $B_j' = \beta_j^* \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i^*, j = 0, ..., n$:

$$(E2) \qquad \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(x_{ij}\ln x_{ij} - x_{ij}) \to \min \\ &\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = A_i', \; i = 0, ..., n \\ &\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = B_j', \; j = 0, ..., n \end{aligned}$$

A kérdés más megfogalmazásban az, vajon az $(E2)$ feladatnak $\left\{x_{ij} = \alpha_i^*\beta_j^*; i = 0, ..., n; j = 0, ..., n\right\}$–e az optimális megoldása.

2. Állítás: Az $(E1)$ feladat optimális $\left\{x_{ij}^* = \alpha_i^*\beta_j^*, i = 0, ...n; j = 0, ..., n; i + j \leq n\right\}$ megoldásából számított $\left\{x_{ij} = \alpha_i^*\beta_j^*, i = 0, ...n; j = 0, ..., n\right\}$ optimális megoldása az $(E2)$ feladatnak.

Bizonyítás. Írjuk fel az $(E2)$ modell Kuhn-Tucker feladatát:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = A_i', \; i = 0, ..., n \\ &\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = B_j', \; j = 0, ..., n \\ &x_{ij} = \alpha_i\beta_j, \; i = 0, ..., n; \; j = 0, ..., n. \end{aligned}$$

Mivel

$$\alpha_i = \alpha_i^*, \beta_j = \beta_j^*, x_{ij} = \alpha_i^*\beta_j^*$$

kielégíti e feladat feltételeit, ezért – az optimalitás elégséges feltételéről szóló Kuhn-Tucker tétel értelmében - az állítás következik.

Algoritmus a modell megoldására.

A := jelölés jelentése a következő: legyen egyenlő.

0. Lépés: $\alpha_0 := A_0; \beta_n := \frac{B_n}{\alpha_0}; V_n := 1; U_0 := \alpha_0; k := 1.$

1. Lépés: $V_{n-k} := V_{n-k+1} - \beta_{n-k+1}$

2. Lépés: $\alpha_k := \frac{A_k}{V_{n-k}}; U_k := U_{k-1} + \alpha_k$

3. Lépés: $\beta_{n-k} := \frac{B_{n-k}}{U_k}$

4. Lépés: Ha k = n : meghatározzuk az $x_{ij} = \alpha_i\beta_j, i = 0, ...n; j = 0, ..., n$ értékeket, amelyek az olyan (i,j) indexpárokra, amelyekre i+j > n, a jövőbeli, ha

$i + j \leq n$, akkor a múltbeli várható kárkifizetések becslései. Ezzel az eljárás véget ér. Ha $k < n : k := k + 1$ és folytatjuk az eljárást az 1. Lépéssel.

3. Állítás: Az itt leírt eljárás eredménye megegyezik a lánclétra módszer eredményével.

Bizonyítás: Ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre, csak a sorrend különbözik. Ennek a megfontolását az olvasóra hagyjuk.

Végül, a kapott megoldás „jóságának” mérésére ismét a Kullback-Leibler relatív entrópia-eltérést alkalmazzuk a múltbeli számított és a realizált kárkifizetések eltérésének meghatározására:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n+1-i} \left(\alpha_i \beta_j \ln \frac{\alpha_i \beta_j}{C_{ij}} + C_{ij} - \alpha_i \beta_j \right)$$

Látható, hogy csak abban az esetben alkalmazható, ha a múltbeli realizált C_{ij} kárkifizetések értéke pozitív.

Arra jutottunk, hogy a modell megoldásának komponensei a káresemény bekövetkezési évétől és a kifutás évétől függő tényezők szorzataként állnak elő. Az első feltétel csoport a kifutási háromszög soraira, a második pedig az oszlopaira vonatkozik, nyilvánvaló, hogy a duális változók a bekövetkezési évek illetve kifutási éveknek a kárkifizetésre gyakorolt hatását magyarázzák. Ez további kérdéseket is felvet, például: milyen módon érvényesülnek ezek a hatások, ha más eltérés függvényt választunk célfüggvényként. Ha további feltételeket is támasztunk, pl. a kárkifizetések éveire vonatkozóan, újabb magyarázó változók jelennek meg, amelyeknek az IBNR tartalék-képzéssel összefüggő tartalom adható.

6.5. Gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a bemutatott modell megoldása valóban a lánclétra módszerrel kapott eredményt adja.

2. Induljunk ki a 6.1. táblázatban foglalt kifutási háromszögből. Azt feltételezzük, hogy e táblázat adatait úgy kaptuk, hogy az eredeti kifutási háromszög sorait már elosztottuk a megfelelő keletkezési évek becsült kárszámaival, amint ezt a

szeparációs módszer alkalmazásakor tesszük. Adatainkat most átrendezzük a következőképen: az oszlopok változatlanul a kifutási éveket képviselik, a sorok azonban a kifizetés éveit:

Kifizetési	**Kifutási évek**					
évek	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2010	400					
2011	500	220				
2012	543	413	120			
2013	652	340	193	50		
2014	739	660	232	159	30	
2015	752	220	310	184	64	23

Mutassuk meg, hogy a szeparációs módszer külső hatásokat kifejező szorzóihoz, illetve a kifutási arányaihoz jutunk, ha az $(E1)$ entrópia-programozási modellt a feladatnak erre a formájára alkalmazzuk, e feladat sorösszegeit és oszlopösszegeit tekintjük adottnak, és a bal alsó háromszög "igazi" értékeit határozzuk meg a szorzat formájában.

3. Mutassuk meg, hogy a bemutatott (E1) modell megoldása valóban a lánclétra módszerrel kapott eredményt adja.

7. fejezet

ESZKÖZ-KÖTELEZETTSÉG MENEDZSMENT (ALM)

Pénzintézetek, különösen életbiztosító társaságok befektetési stratégiájukat törekednek úgy megválasztani, hogy a befektetési portfoliójukból származó jövedelmeik minden időszakban lehetővé tegyék a kötelezettségeik zavartalan teljesítését. Úgy állítják össze befektetési portfoliójukat, hogy a befektetési időpontok és a befektetett eszközökből származó pénzáramlás időpontjai és nagysága is összhangban legyenek a biztosítási portfoliójukkal: a biztosítottakkal szemben fennálló szerződéses kötelezettségeikkel - beleértve a díjfizetéseket is, amelyek eszközként: negatív kötelezettségként foghatók fel. Ezt az eljárást hívják eszköz-forrás menedzsmentnek, eszköz-kötelezettség menedzsmentnek, eszköz-kötelezettség illesztésnek is, az angol rövidítésnek megfelelően ALM-ként (Asset-Liability Management, Asset-Liability Matching) hivatkoznak rá. Ha a befektetési portfolióból származó jövedelmek minden időpontban megegyeznek a biztosítási portfolióbeli kötelezettségekkel, akkor teljes illesztésről beszélhetünk. Ilyen azonban gyakorlatilag nincs. Arra törekedhetünk csak, hogy a jövőbeli pénzáramlás értéke a kamatlábak változása esetén is legyen a két portfolióban elég közeli.

Az eszköz-kötelezettség portfólió-együttesben rejlő kockázat feltárására alkalmazzák a várható hátralévő futamidő- és konvexitás elemzést, illetve ennek eredményeképpen a kamatlábváltozásokból adódó kockázataik csökkentése érdekében a biztosító társaságok összehangolják: "immunizálják" a befektetési portfoliójuk és kötelezettség portfoliójuk együttesét, erről lesz szó a következő fejezetben. A jövőbeli pénzáramlás jelenértékét persze nem ismerhetjük, függ a kamatlábváltozásoktól, amelyeket előre csak becsülni lehet. A kötelezettségekkel való összehangolás érdekében a befektetési portfolióban rejlő piaci kockázatot is fel kell mérni. E kockázatot azzal írhatjuk le, ha megadjuk a portfolió értékének mint valószínűségi változónak az eloszlását a kérdéses jövőbeli időpontokban (vagy minden jövőbeli időpontban, ekkor a portfolió értékének a folyamatát írjuk le, hasonlóan ahhoz, ahogy a kockázatelméleti fejezetben a többlet folyamatról, kárszám folyamatról, stb. beszéltünk).

A kockázat és mértékének modellezésében különösen sztochasztikus programozási modellekre és módszerekre támaszkodhatunk. (Függelékben összefoglaljuk a legismertebb sztochasztikus programozási modelleket.) Az immunizációról szóló alfejezet után bevezetjük a "kockáztatott érték": Value-at-Risk (VaR) fogalmát. Majd bevezetjük a feltételes kockáztatott érték: Conditional-Value-at-Risk (CVaR) fogalmát, és felírjuk, milyen modelleket kapunk, ha a portfolió kockázatát e két mutató valamelyikével mérjük, és ezt egyéb kikötések teljesülése mellett minimalizálni akarjuk. Ezután a portfolió értékének maximalizálására vonatkozó szándékunkat kifejező modellek következnek, majd ismertetünk egy többlépcsős sztochasztikus programozási modellt annak illusztrálására, hogyan lehet a portfolió kondíciókat kiegyensúlyozni a pénzügyi kondíciók változásának megfelelően. Végül valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladatként fogalmazunk meg egy optimális befektetési stratégiára vonatkozó ALM modellt, amely vagyonbiztosításban alkalmazható.

7.1. Immunizáció

Az eszköz-kötelezettség portfólió-együttesben rejlő kockázatot két, a pénzügyi irodalomban gyakran használt fogalommal írjuk le, ezek: a *várható hátralévő futamidő* (duration) és a *konvexitás*. Az irodalomban sokféle formulát találhatunk ezekre, közülük négy formulát ismertetünk. Az immunizáció olyan eljárás, amely a befektetési portfoliónak a kötelezettségek portfoliójához való illesztését segíti elő, és az illesztés e két jellemző mutató szempontjából történik.

Ha két portfoliót illeszteni akarunk, kézenfekvő arra törekednünk, hogy kis kamatváltozás esetén legyen lényegében egyenlő az értékük: a jelenértékük. Ha a két portfolió jelenértékeinek, mint a kamatlábváltozás függvényeinek a hatványsorát felírjuk, és e hatványsorok minden tagjának az együtthatója megegyezik, akkor a kamatlábváltozás bármely értéke mellett a két portfolió értéke egyenlő. A két portfolió értéke a kamatláb kis változása esetén közeli, ha megegyezik a hatványsorok első két tagja: vagyis jelenértékük és a jelenértéküknek a kamatláb változása szerinti deriváltjai, azaz a két hatványsor nulladfokú és elsőfokú tagjai. Még erőteljesebb a hasonlóság a két portfolió között, ha emellett jelenérték függvényük hatványsorának másodfokú tagjai is megegyeznek. Egy portfolió hátralévő várható futamidejét (duration) úgy kapjuk, hogy a portfolió jelenértéke hatványsorában az elsőfokú tag együtthatóját (a jelenérték deriváltját) elosztjuk a jelenértékkel és a hányadost -1-gyel megszorozzuk. Egy portfolió konvexitását úgy kapjuk, hogy a portfolió jelenértéke hatványsorában a másodfokú tag együtthatójának kétszeresét (a jelenérték második deriváltját) elosztjuk a jelenértékkel. (E számításokban a jelenérték függvény-nek és deriváltjainak az azonnali kamatlábak mellett felvett értékét tekintjük.)

A kötelezettségek portfoliója és egy fix jövedelmezőségű befektetési portfolió akkor illeszkedik tehát jól, ha a jelenértékük, hátralévő futamidejük és konvexitásuk megegyezik. A jelenérték függvény alakjának tanulmányozása azonban arra a megállapításra vezet, hogy ha a befektetési portfoliónk konvexitása meghaladja a kötelezettségek konvexitását, akkor a kamatlábnak a feltételezetthez képesti kis eltolódása a társaság számára még némi nyereséget is hozhat. Az immunizáció alábbi megfogalmazása, amely ezt az észrevételt is tartalmazza, Redington (1952) nevéhez fűződik, az itt bemutatott általános alakját azonban később kapta.

A formulákban $r_1, r_2, ..., r_m$ azokat az azonnali kamaterősségeket, illetve diszkrét kamatozás esetén kamatlábakat jelölik, amelyek a befektetési illetve a kötelezettségeket magában foglaló portfolióból származó pénzáramlás $t_1, t_2, ..., t_m$ időpontjaira érvényesek. A befektetések jelenértékét P_b, a hátralévő várható futamidejét

D_b, konvexitását K_b jelöli, a kötelezettségek portfoliójára ugyanezeket a fogalmakat P_k, D_k, K_k jelöli. Azt mondjuk, hogy a kötelezettségek portfoliója és egy befektetési portfolió együttese immunizált a kamatláb kis változásával szemben, ha

- a befektetések jelenértéke egyenlő a kötelezettségek jelenértékével:

$$P_b\left(r_1, r_2, ..., r_m\right) = P_k\left(r_1, r_2, ..., r_m\right);$$

- a befektetések hátralévő futamidejének várható értéke egyenlő a kötelezettségek hátralévő futamidejének várható értékével:

$$\begin{aligned} D_b\left(r_1, r_2, ..., r_m\right) &= -\frac{P_b'\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)}{P_b\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)} \\ &= -\frac{P_k'\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)}{P_k\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)} = D_k\left(r_1, r_2, ..., r_m\right); \end{aligned}$$

- a kötelezettségek portfoliójának a konvexitása nem nagyobb, mint a befektetések portfoliójának a konvexitása:

$$\begin{aligned} K_b\left(r_1, r_2, ..., r_m\right) &= \frac{P_b''\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)}{P_b\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)} \\ &\geq \frac{P_k''\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)}{P_k\left(r_1, r_2, ..., r_m\right)} = K_k\left(r_1, r_2, ..., r_m\right). \end{aligned}$$

A várható hátralévő futamidőre és konvexitásra a pénzügyi irodalomban alkalmazott négy nevezetes formula abból adódik, hogy egy portfolió jelenértékét négyféle módon számoljuk: folytonos illetve diszkrét kamatozást feltételezve, és mindkét esetben minden időpontra ugyanaz illetve különböző azonnali kamatlábak mellett. Bemutatjuk, hogyan kapjuk, a négy különböző jelenérték függvényt, mint a kamatváltozás (párhuzamos eltolás) függvényét sorba fejtve, a várható hátralévő futamidőnek illetve a konvexitásnak a pénzügyi irodalomban ismeretes képleteit. Az érdeklődő, de a jelenérték függvény sorbafejtésének részleteibe elmélyülni nem kívánó olvasó kedvéért a részletes kifejtést a fejezet végére hagytuk, de a négy formulát itt összefoglaljuk. A formulákban $c_1, c_2, ..., c_m$ a $t_1, t_2, ..., t_m$ időpontokban esedékes pénzáramot jelentik.

- Folytonos kamatozás és minden időpontra ugyanazon r azonnali kamaterősség esetén a "Macaulay duration" és a hozzá tartozó konvexitás a következő:

$$D=\sum_{k=1}^{m} t_k \frac{c_k e^{-t_k r}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j e^{-t_j r}}; \quad K=\sum_{k=1}^{m} t_k^2 \frac{c_k e^{-t_k r}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j e^{-t_j r}}.$$

- Diszkrét kamatozás és minden időpontra ugyanazon r azonnali kamatláb esetén a "módosított duration" és a hozzá tartozó konvexitás a következő:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{m} t_k \frac{c_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{(1+r)^{t_j}}}; \\ K &= \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{k=1}^{m} t_k (t_k+1) \frac{c_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{(1+r)^{t_j}}}. \end{aligned}$$

- Folytonos kamatozás és a $t_1, t_2, ..., t_m$ időpontokra $r_1, r_2, ..., r_m$ azonnali kamaterősségek esetén a "Fischer-Weil duration" és a hozzá tartozó konvexitás a következő:

$$D=\sum_{k=1}^{m} t_k \frac{c_k e^{-t_k r_k}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j e^{-t_j r_j}}; \quad K=\sum_{k=1}^{m} t_k^2 \frac{c_k e^{-t_k r_k}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j e^{-t_j r_j}}.$$

- Diszkrét kamatozás és a $t_1, t_2, ..., t_m$ időpontokra $r_1, r_2, ..., r_m$ azonnali kamatlábak esetén a "kvázi módosított duration" és a hozzá tartozó konvexitás a következő:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+r_k} t_k \frac{c_k \frac{1}{(1+r_k)^{t_k}}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{(1+r_j)^{t_j}}}; \\ K &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+r_k)^2} t_k (t_k+1) \frac{c_k \frac{1}{(1+r_k)^{t_k}}}{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{(1+r_j)^{t_j}}}. \end{aligned}$$

A "várható hátralévő futamidő" elnevezés még magyarázatot igényel. E magyarázatban folytonos kamatozást és minden időpontra ugyanazon r azonnali kamaterősséget feltételezünk. Egy portfolióból származó pénzáramlás $t_1, t_2, ..., t_m$ időpontjait úgy fogjuk fel, mint a hátralévő futamidő mint valószínűségi változó lehetséges értékeit: realizációit, amelyek súlyai, azaz bekövetkezési valószínűségei azt mutatják meg, hogy az egyes időpontokban esedékes jövedelmek jelenértékei milyen arányt képviselnek az egész portfolió jelenértékében. Ekkor a hátralévő futamidő várható értéke (duration) e valószínűségi változó várható értéke lesz, a hátralévő futamidő négyzetének a várható értéke pedig a konvexitás. A többi képlet esetén kis módosításokkal, de hasonló magyarázat adható.

7.2. Kockáztatott érték: Value - at - Risk (VaR)

Ahhoz, hogy kockázatot menedzselni lehessen, valamit tudni kell róla. A VaR bűvszó a kockázat mérésére alkalmas valamilyen mutatót is jelent, de az eljárást is, amivel meghatározzuk. Csak likvid eszközök esetén alkalmazható a mutató, számszerűsíti a kockázatot. Egy VaR mutató (mérték) adott portfoliót jellemez egy jövőbeni időpontban, és a portfoliót jellemző minden számszerű mutató: a portfolió jelenlegi ismert értékének és a jövőbeni nem ismert, valószínűségi változóként leírt értékének bármely függvénye ebbe a körbe tartozik. Egy korai példaként említhető Markowitz (1952), aki a hozam varianciáját alkalmazta portfolió optimalizálási modelljében.

A leggyakrabban azonban egy portfolió VaR mutatóján a portfolió értékében beálló veszteség megadott p-kvantilisét értik (p rendszerint 0,90; 0,95 vagy 0,99) egy adott időpontra (VaR horizontra): l_p azt a számot jelenti valamilyen megadott pénznemben, amelyre fennáll, hogy annak a valószínűsége, hogy a portfolió értéke (ára) a jelenlegi P^0 értékéhez képest a szóban forgó időpontra legfeljebb l_p-vel csökken, egyenlő $p-$vel. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy $1-p$ annak a valószínűsége, hogy a portfolió akkori P^1 értéke legfeljebb $P^0 - l_p$ lesz. Az egynapos 95% HUF VaR például egy ma P^0 értékű portfolió esetében azt az $l_{0,95}$ értéket jelenti magyar forintban, amelyre fennáll, hogy 95% annak a valószínűsége, hogy egy nap múlva a portfolió értéke legalább $P^0 - l_{0,95}$ lesz: $P\left(P^1 \geq P^0 - l_{0,95}\right) = 0,95$.

Bármely VaR mutató a portfolió piaci értékének a valószínűségeloszlására épül, amelyet a piaci kockázat minden forrása befolyásol, legalábbis elméletben. Egy VaR mutató a portfolió értékét a szóbanforgó időpontban leíró valószínűségeloszlás valamilyen jellemző értéke, pl. az $l_{0,95}$, vagy pl. az eloszlás varianciája vagy szórása.

Ha ismerjük e valószínűségeloszlást, akkor meg tudunk határozni bármilyen VaR mutatót. Az első teendő természetesen az, hogy leírjuk a portfolió P^1 értékének a valószínűség eloszlását a P^0 ismeretében. Gyakran előfordul, hogy feltételezhetjük, P^1 valamilyen ismert eloszlást követ: ekkor a feladatunk leegyszerűsödik arra, hogy az eloszlás paramétereit meghatározzuk. Ha például arra a következtetésre jutunk, hogy P^1 normális eloszlású μ^1 várható értékkel és σ^1 szórással, akkor a $P\left(P^1 \geq P^0 - l_{0,95}\right) = 0,95$ egyenlet, amely ekvivalens a

$$P\left(P^1 < P^0 - l_{0,95}\right) = 0,05$$

egyenlettel, így fogalmazható meg:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{P^0 - l_{0,95} - \mu^1}{\sigma^1}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
\frac{P^0 - l_{0,95} - \mu^1}{\sigma^1} &= -1,645,
\end{aligned}$$

Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ebből

$$l_{0,95} = 1,645\sigma^1 + P^0 - \mu^1$$

adódik. Ha ezen felül azt is reális feltételezni, hogy P^1 várható értéke a portfolió jelenlegi P^0 értékével közelíthető, akkor például

$$\begin{aligned}
95\%\ VaR &= l_{0,95} \simeq 1,645\sigma^1; \\
90\%\ VaR &= l_{0,90} \simeq 1,282\sigma^1; \\
99\%\ VaR &= l_{0,99} \simeq 2,326\sigma^1.
\end{aligned}$$

Egy portfolió jövendő értékének (árának) a várható értéke és varianciája a portfoliót alkotó vagyonelemek jövendő értékének a várható értékétől és varianciájától, illetve az ezek közötti korrelációs együtthatóktól függ, vizsgáljuk meg, hogyan. Tekintsünk egy m-féle vagyonelemből álló portfoliót, az egyes vagyonelemek mennyiségét a portfolióban jelölje $x_1, ..., x_m$. Ekkor a portfolió P^1 ára, ha a $P_1^1, P_2^1, ..., P_m^1$ valószínűségi változók jelölik e vagyonelemek árát egy jövendő időpontban, a következő valószínűségi változó lesz:

$$P^1 = x_1 P_1^1 + x_2 P_2^1 + ... + x_m P_m^1.$$

P^1 várható értékét és szórását $P_1^1, P_2^1, ..., P_m^1$ várható értékeinek, szórásainak és korrelációs együtthatóinak segítségével számolhatjuk ki, amelyeket az alábbi m komponensű vektorokban illetve $m \times m$ méretű mátrixban foglaljuk össze:

$$\begin{aligned} m &= \left(\mu_1^1, \mu_2^1, ..., \mu_m^1\right); \\ s &= \left(\sigma_1^1, \sigma_2^1, ..., \sigma_m^1\right); \\ r &= \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & ... & \rho_{1m} \\ & & & \\ & & \rho_{ij} & \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & ... & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Itt μ_j^1 a P_j^1 várható értéke, σ_j^1 a szórása, ρ_{ij} pedig a P_i^1 és P_j^1 korrelációs együtthatója az adott időpontban. A valószínűségelméletből ismeretes, hogy P^1 várható értéke:

$$\mu^1 = x_1\mu_1^1 + x_2\mu_2^1 + ... + x_m\mu_m^1,$$

P^1 szórása pedig így kapható:

$$\sigma^1 = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{m} \left(x_i^1\sigma_i^1\right)^2 + 2\sum\nolimits_{j>i} \left(x_i^1\sigma_i^1\right)\left(x_j^1\sigma_j^1\right)\rho_{ij}}.$$

E képletek alkalmazásához nincs szükség P^1 valószínűség eloszlásának ismeretére, csak a portfoliót alkotó vagyonelemek jövendő várható értékeire, szórásaira, korrelációs együtthatóira, amelyek múltbeli áradataik segítségével becsülhetők. Ha azonban jogos azt feltételeznünk, hogy a portfolióban lévő vagyonelemek jövendő árai egyenként normális eloszlás szerint alakulnak, akkor a portfolió ára is normális eloszlású lesz.

Nézzünk egy példát arra, hogyan alkalmazhatjuk az immunizációval és a kockáztatott értékkel kapcsolatos fogalmakat. Megjegyezzük, hogy az alkalmazott fogalmak és összefüggések birtokában e kis példával illusztrált modell többféle irányban továbbfejleszthető.

7.1. Példa. *Kötelezettségünk egyetlen, két év múlva esedékes, 100 darab egységnyi értékű kifizetésből áll. Három befektetési lehetőségünk van:*

- *egy hároméves lejáratú, évente 5% kamatot fizető kötvény, az egységnyi névértékű papír ára* $P_1^0 = 0,9$ *(valamilyen pénzegységben);*
- *egy négyéves lejáratú kötvény, amely négy év múlva a névérték* 124%*-át fizeti, az egységnyi névértékű papír ára* $P_2^0 = 0,94$*;*
- *egy kétéves lejáratú kötvény, amely egy év múlva* 10% *kamatot, két év múlva a névértéket fizeti, az egységnyi névértékű papír ára* $P_3^0 = 0,91$.

A diszkonttényzők az egyes évekre: $(0,901; 0,826; 0,772; 0,735)$. *Számításainkban folytonos kamatozást feltételezünk.*
Lehet, hogy két év múlva a portfoliót el kell adnunk azért, hogy kötelezett-ségünknek eleget tegyünk. Kötvényeink P_1^1, P_2^1, P_3^1 *árai két év múlva normális eloszlást követő valószínűségi változók, várható értékük, szórásuk és korrelációs együtthatóik a következők:*

$$\begin{aligned}
\mu_1^1 &= 1,15; \mu_2^1 = 1,10; \mu_3^1 = 1,20;\\
\sigma_1^1 &= 0,01; \sigma_2^1 = 0,025; \sigma_3^1 = 0,02;\\
\rho_{12} &= -0,1; \rho_{13} = 0,1; \rho_{23} = -0,01.
\end{aligned}$$

Mennyit tartalmazzon a befektetési portfoliónk e három értékpapírból, ha kötelezettségünkhöz legjobban illeszkedő portfoliót szeretnénk összeállítani, és szeretnénk, hogy ha erre szükség mutatkozna, eladásuk révén 90%-os valószínűséggel ki tudnánk fizetni kötelezettségünket. E feltételek mellett minimalizálni akarjuk a befektetési portfoliónk jelenlegi árát.
Írjunk fel egy matematikai modellt e feladat megoldására.

Megoldás. Modellünk változói: x_1, x_2, x_3 azt mutatják, hogy a portfolió a három értékpapírból hányat tartalmazzon. Vegyük sorra a feltételeket.

Az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorra teljesülnie kell a nemnegativitási feltételnek.
Határozzuk meg a modellben szereplő együtthatókat a várható futamidőre és a konvexitásra vonatkozó Redington feltételekhez.
A kötelezettségek és a szóba jöhető befektetések pénzáramlásának időpontjai: $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, 2, 3, 4)$, 0 a jelenlegi: az értékelési időpont.

A 2. évben esedékes 100 értékű kötelezettségünk jelenértéke: $P_k = 100 \cdot 0,826 = 82,6$.

A kötelezettségünk hátralévő futamidejének várható értéke maga a futamidő, és konvexitása: $D_k = 2$ és $K_k = 2 \cdot 2 = 4$.

Az egyes befektetési portfolió elemek pénzáramlását és azok jelenértékeit a következő táblázat tartalmazza:

7.1. táblázat. A befektetési portfolió elemek pénzáramlása és jelenértékei

Hátra lévő futamidő	*1. kötvény*	*Jelen-értéke*	*2. kötvény*	*Jelen-értéke*	*3. kötvény*	*Jelen-értéke*
1 év	0,05	0,04505	0	0	0,1	0,0901
2 év	0,05	0,0413	0	0	1,0	0,826
3 év	1,05	0,8106	0	0	0	0
4 év	0	0	1,24	0,9114	0	0
Összesen		0,89695		0,9114		0,9161

A befektetési portfolió jelenértéke így a következő lesz:

$$P_b = 0,89695x_1 + 0,9114x_2 + 0,9161x_3.$$

Következzék a várható hátralévő futamidő és a konvexitás elemzése. A hátralévő futamidő mint valószínűségi változó - jelöljük t-vel - lehetséges értékei: 1, 2, 3 és 4. Az egyes időpontok bekövetkezési valószínűségeit úgy kapjuk, hogy a szóban forgó időpontbeli pénzáram jelenértékét elosztjuk az egész portfolió jelenértékével:

$$P(t=1) = \frac{0,04505x_1 + 0,0901x_3}{P_b},$$
$$P(t=2) = \frac{0,0413x_1 + 0,826x_3}{P_b},$$
$$P(t=3) = \frac{0,8106x_1}{P_b},$$
$$P(t=4) = \frac{0,9114x_2}{P_b}.$$

A befektetési portfolió várható hátralévő futamideje és konvexitása így

$$\begin{aligned} D_b &= 1P(t=1) + 2P(t=2) + 3P(t=3) + 4P(t=4); \\ K_b &= 1^2P(t=1) + 2^2P(t=2) + 3^2P(t=3) + 4^2P(t=4). \end{aligned}$$

A számításokat automatizálhatjuk, ha táblázatba foglaljuk:

7.2. táblázat. A pénzáram jelenértékei szorozva az időpontokkal és négyzeteikkel

Hátra lévő	*1. kötvény*		*2. kötvény*		*3. kötvény*	
futamidő	$\cdot t$	$\cdot t^2$	$\cdot t$	$\cdot t^2$	$\cdot t$	$\cdot t^2$
1	0,04505	0,04505	0	0	0,0901	0,0901
2	0,0826	0,1652	0	0	1,652	3,304
3	2,4318	7,2954	0	0	0	0
4	0	0	3,6456	14,5824	0	0
Összesen:	2,5601	7,50565	3,6456	14,5824	1,7421	3,3941

A befektetési portfolió hátralévő várható futamideje ebből a következő:

$$D_b = \frac{2,5601x_1 + 3,6456x_2 + 1,7421x_3}{P_b};$$

és konvexitása:

$$K_b = \frac{7,5065x_1 + 14,5824x_2 + 3,3941x_3}{P_b}.$$

A befektetési portfolió jelenlegi ára így írható fel:

$$P^0 = 0,9x_1 + 0,94x_2 + 0,91x_3.$$

Következzék a 90% VaR feltétel. Szükségünk van a portfoliónk két év utáni P^1 értékének várható értékére és szórására:

$$\begin{aligned} \mu^1 &= 1,15x_1 + 1,1x_2 + 1,2x_3; \\ \left(\sigma^1\right)^2 &= 0,01^2x_1^2 + 0,025^2x_2^2 + 0,02^2x_3^2 \\ &\quad -2\cdot 0,1\cdot 0,01\cdot 0,025x_1x_2 \\ &\quad +2\cdot 0,1\cdot 0,01\cdot 0,02x_1x_3 \\ &\quad -2\cdot 0,01\cdot 0,025\cdot 0,02x_2x_3. \end{aligned}$$

A $P\left(P^1 \geq 100\right) \geq 0,90$ feltételünk ekvivalens a következő feltétellel:

$$P^0 - l_{0,9} = -1,282\sigma^1 + \mu^1 \geq 100.$$

Ez a következő kvadratikus egyenlőtlenséghez vezet:

$$\begin{aligned} 100 \quad \leq \quad & -1,282 \cdot 10^{-2}\sqrt{x_1^2 + 6,25x_2^2 + 4x_3^2 - 0,5x_1x_2 + 0,4x_1x_3 - 0,1x_2x_3} \\ & +1,15x_1 + 1,1x_2 + 1,2x_3. \end{aligned}$$

Foglaljuk össze megoldandó modellünket:

$$0,9x_1 + 0,94x_2 + 0,91x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 0,8972x_1 + 0,9114x_2 + 0,9165x_3 &= 82,6, \\ 2,5601x_1 + 3,6456x_2 + 1,7429x_3 &= 165,2, \\ 7,5075x_1 + 14,5824x_2 + 3,3957x_3 &\geq 330,4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1,282 \cdot 10^{-2}\sqrt{x_1^2 + 6,25x_2^2 + 4x_3^2 - 0,5x_1x_2 + 0,4x_1x_3 - 0,1x_2x_3} & \\ +1,15x_1 + 1,1x_2 + 1,2x_3 \geq & \quad 100, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7.3. Feltételes kockáztatott érték (CVaR)

Legyen n számú befektetési lehetőség, az első k számú kötvény(alap), n-k számú részvény(alap). Vagyonunkból az egyes befektetéseink arányait foglalja magában az x vektor: x = (x_1, x_2, … , x_n), amelynek elemei a számítandó értékek. Előírjuk, hogy kötvényekbe kell fektetni a portfolió legalább ρ arányát, és azt is előírjuk az egyes befektetések (μ_1, μ_2, … , μ_n) várható értékeinek ismeretében, hogy a portfolió várható értéke legalább adott μ_0 legyen. Adott időszakra a befektetési veszteségek (= negatív hozamok) valószínűségi változók: ξ_1, ξ_2, … , ξ_n. Szeretnénk, ha (a helyzethez igazodó feltételek mellett) az

$$L(x) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$$

összes veszteség:a lehető legkisebb lenne. $L(x)$ azonban valószínűségi változó, specifikálnunk kell, mit értünk azon, hogy „legkisebb".

Az egyik lehetőség az, hogy megkeressük a legkisebb olyan u értéket, amelynél a veszteség α valószínűséggel nem nagyobb: Minimalizáljuk a $VaR_\alpha(x) = inf\{u : P(L(x) \leq u) \geq \alpha\}$ függvényt, ahol α általunk megadott (elég nagy) valószínűség. Nyilvánvaló, hogy $P(L(x) \leq u) = F_{L(x)}(u)$ adott x esetén, ha $L(x)$ folytonos eloszlású. Ekkor a feladat:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
& VaR_\alpha(x) \rightarrow \min \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, j = 1, ..., n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j \geq \mu_0, \\
& \sum_{j=1}^{k} x_j \geq \rho, \\
& ...,
\end{aligned}
$$

ahol $\mu_j = E\left[\xi_j\right],\ j = 1, ..., n,\ 0 \leq \rho \leq 1$. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ normális eloszlásúak, akkor $VaR_\alpha(x)$ konvex függvény. Más esetekben, különösen, ha $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ diszkrét eloszlású, akkor a feladat nem konvex, megoldása reménytelen vagy hosszadalmas.

A másik lehetőség a következő: Adott x esetén definiáljuk a $T_\alpha(x)$ *valószínűségi változó*t, amelynek lehetséges értékei $L(x)$ azon lehetséges értékei, amelyek $VaR_\alpha(x)$ – nél nem kisebbek, eloszlásfüggvénye pedig a következő:

$$
F_{T_\alpha(x)}(u) = \begin{cases} 0,\ ha\ u < VaR_\alpha(x) \\ \frac{F_{L(x)}(u) - \alpha}{1-\alpha},\ ha\ u \geq VaR_\alpha(x). \end{cases}
$$

Definiáljuk a $CVaR_\alpha(x) = E\left[T_\alpha(x)\right] = E\left[L(x) | L(x) > VaR_\alpha(x)\right]$ feltételes kockáztatott érték: Conditional-Value-at-Risk függvényt[1].

Ekkor a feladat:

[1] A fogalmat Rockafellar, R.T. és Uryasev, S. (2000) vezette be.

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
& CVaR_{\alpha}(x) \to \min \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, j = 1, ..., n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j \geq \mu_0, \\
& \sum_{j=1}^{k} x_j \geq \rho, \\
& ...
\end{aligned}
$$

A CVaR mérték jóval komplikáltabbnak tűnik, mint a VaR mérték. A (2) feladat azonban a látszat ellenére sokkal jobban kezelhető, mint az (1) feladat, legalább is akkor, ha $L(x)$ olyan diszkrét valószínűségi változó, amely véges sok értéket vehet fel - amint azt itt vázoljuk.

Definiáljuk a következő függvényt:

$$\Gamma_{\alpha}(x, u) = u + \frac{1}{1-\alpha} E\left[[L(x) - u]_+\right].$$

Itt $[a]_+$, mint eddig is, a zárójelben lévő kifejezés nemnegatív része, vagyis értéke a, ha $a \geq 0$ és 0, ha a negatív.

A következő állítás bizonyítását az olvasó megtalálhatja a Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2000) dolgozatban.

Állítás: $\Gamma_{\alpha}(x, \cdot)$ véges és folytonos. $CVaR_{\alpha}(x) = \min\limits_{u \in R} \Gamma_{\alpha}(x, u)$.

Következmény: Ha L konvex x-ben, akkor $CVaR_{\alpha}(x)$ konvex és $\Gamma_{\alpha}(x, u)$ konvex (x, u) –ban.

Ha $\underline{L(x)\text{ diszkrét}}$ S számú lehetséges értékkel, akkor

$$\Gamma_{\alpha}(x, u) = u + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^{S} p_s [L_s(x) - u]_+,$$

ahol $L_s(x)$ az $L(x)$ s-edik lehetséges értéke, $s = 1, \ldots, S$. Ha $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix}$ lehetséges értékei:

$$r^{(1)} = \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ \ldots \\ r_n^{(1)} \end{pmatrix}, r^{(2)} = \begin{pmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \\ \ldots \\ r_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, r^{(S)} = \begin{pmatrix} r_1^{(S)} \\ r_2^{(S)} \\ \ldots \\ r_n^{(S)} \end{pmatrix},$$

és a hozzájuk tartozó valószínűségek: $p_1, p_2, \ldots, p_S$, akkor az $L(x)$ veszteségfüggvény s-edik lehetséges értékét így írhatjuk fel:

$$L_s(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j^{(s)} = x\, r^{(s)}.$$

Feladatunk ezzel az átalakítással a következő alakot ölti:

$$(2a) \qquad \begin{aligned} & u + \tfrac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^{S} p_s \left[x r^{(s)} - u \right]_+ \to \min \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j \geq \mu_{0,} \\ & \sum_{j=1}^{k} x_j \geq \rho, \\ & \ldots \end{aligned}$$

A feladat kétlépcsős sztochasztikus programozási feladatnak bizonyult.

A 2. lépcsőben minimalizáljuk u-ban a célfüggvényt, ha $x = (x_1, \ldots, x_n)$ adott. Az alábbi optimalizálási feladat optimális megoldásában szükségképpen $y_s = \left[x\, r^{(s)} - u \right]_+$ egyenlőség teljesül.

$$(3) \qquad \begin{aligned} & \Gamma_\alpha(x, u) = u + \tfrac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^{S} p_s y_s \to \min \\ & x r^{(s)} - u - y_s \leq 0 \Leftrightarrow y_s \geq x r^{(s)} - u \\ & y_s \geq 0,\ s = 1, \ldots, S. \end{aligned}$$

Így a $\min_u \Gamma_\alpha(x,u)$ függvényt mint x komponenseit alkotó változók függvényét írtuk fel egy lineáris programozási feladat optimális célfüggvényértéke formájában..

Az 1. lépcsőben az x vektor komponenseit kell meghatároznunk úgy, hogy minimalizálják a $\min_u \Gamma_\alpha(x,u)$ függvényt az adott feltételek mellett:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_\alpha(x) = \min_u \Gamma_\alpha(x,u) \to \min\\
&\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\\
&x_j \geq 0, j = 1, ..., n\\
&\sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j \geq \mu_0\\
&\sum_{j=1}^{k} x_j \geq \rho.
\end{aligned}$$

A $\min_u \Gamma_\alpha(x,u)$ függvény kiértékelését nagyon megkönnyíti, hogy a (3) feladat duális feladata, ha a célfüggvényt $(1-\alpha)$ -val megszorozzuk, a következő egyszerű lineáris programozási feladat lesz:[2]

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^{S} \pi_s (x r_s) \to \max\\
&0 \leq \pi_s \leq p_s, \ \sum_s \pi_s = 1-\alpha
\end{aligned}$$

7.4. Portfolió-optimalizálás

A portfolió-választási feladatban adottak n vagyonelem jövendő értékei a ξ_i valószínűségi változók formájában egy következő időszak végén, $i = 1, \ldots, n$. Ismertek az i-edik vagyonelem μ_i várható értéke, σ_i szórása és a kovarianciák: $C = \{\sigma_{ij}\}, \sigma_{ii} = \sigma_i^2$. A befektető arról dönt, hogy vagyona milyen x_i arányát fektesse be az i-edik vagyontárgyba. A feltételek:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots ..., n; \text{ esetleg más feltételek.}$$

Minden egyes $x = (x_1, ..., x_n)$ döntéssel együtt jár a portfolió jövendő $\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$ értéke, amely szintén valószínűségi változó, várható értéke és vari-

[2] A feladat elemzéséről és megoldásáról ld. Rockafellar és Uryasev cikke mellett Fábián Cs. (2005) illetve Künzi-Bay, A. and J. Mayer (2005) dolgozatokat.

anciája:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu = E[\xi] = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i\mu_i, \\ \sigma^2(x) &= \sigma^2 \ = Var[\xi] = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

A befektető azt szeretné, hogy portfoliója jövendő értéke minél nagyobb legyen.

1. modell: (Markovitz, 1952):

$$\begin{gathered} \sigma^2(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \to min \\ \mu(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i \geq \mu_0 \ , \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n; \\ \text{esetleg más feltételek.} \end{gathered}$$

2. modell: (Markovitz):

$$\begin{gathered} \mu(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i \to max \\ \sigma^2(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \leq \sigma_0 \ , \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \ \geq 0, \ i = 1, \ldots, n; \\ \text{esetleg más feltételek.} \end{gathered}$$

A befektetőnek nyilvánvalóan az az érdeke, hogy minél nagyobb legyen a μ várható érték és minél kisebb a σ^2 variancia. Markovitz szerint a befektető úgy választ – vagy úgy kellene választania – portfoliót, hogy választása ún. efficiens pont legyen, vagyis a portfolió jövendő értékének μ várható értéke ne legyen növelhető anélkül, hogy a kockázatot kifejező σ^2 varianciája ne nőne és fordítva, a variancia csökkentése csak a várható érték csökkentése esetén valósítható meg. Efficiens pont azonban rendszerint végtelen sok van. Kérdés, közülük hogyan válasszunk. E kérdésre az egyik ésszerű válasz az, hogy súlyozzuk a két célt: minimalizáljuk a két célfüggvény egy lineáris kombinációját a lehetséges befektetési döntések halmazán. Legyenek α és β a befektető szándékát kifejező adott pozitív paraméterek:

3. modell: (Markovitz): $\alpha, \beta \ > 0$:

$$- \alpha \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i + \beta \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \to \min$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n;$$
esetleg más feltételek.

E célfüggvénnyel az a gond, hogy ha megváltoztatjuk az egységet, amelyben a portfolió értékét mérjük, akkor ez a változtatás a második tagban négyzetesen érvényesül, magyarán a fügyvény két tagját nem ugyanabban az egységben mérjük. Ezért szokás a várható érték és a szórás súlyozott összegét választani célnak:

4. modell:

$$- \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i + \beta (\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{1/2} \to \min$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n;$$
esetleg más feltételek.

A következő két modell a sztochasztikus programozási modellek körébe tartozik.

5. modell: Olyan $x = (x_1 , \ldots , x_n)$ porfoliót szeretnénk választani, amelyre maximális annak a valószínűsége, hogy a portfóliónk jövendő ξ teljes értéke az adott feltételek mellett egy kívánatosnak tekintett d értéket elér:

$P(\xi \geq d)$ maximális értékű.

Vegyük észre, hogy

$P(\xi \geq d) = P(\mu - \xi \leq \mu - d) \geq P(|\mu - \xi| \leq \mu - d) \geq$

$\geq 1 - \frac{\sigma^2}{(\mu - d)^2}$ (Csebisev egyenlőtlenség)

Mivel a $P(\xi \geq d)$ maximalizálása általában elég komplikált, helyette az egyszerűbb feladatot választjuk:

$$\frac{\sigma^2}{(\mu-d)^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i - d\right)^2} \to min$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n;$$
esetleg más feltételek.

6. modell (Kataoka, 1953): Tegyük fel, hogy a portfolió egy jövendő időpontbeli $\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$ értéke normális eloszlású. A befektető maximalizálni akarja azt a d értéket, amelyet egy (elegendően nagy) előírt p valószínűséggel a portfolió értéke e jövendő időpontban meghalad:

$$d \quad \to max$$
$$P(\xi \geq d) \geq p$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n;$$
$$\text{esetleg más feltételek.}$$

ahol $0 < p < 1$. Ekvivalens a következővel:

$$-d \to min$$
$$F_{-\xi}(-d) = P(-\xi \leq -d) \geq p,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\ ;$$
$$\text{esetleg más feltételek.}$$

A feladat konvex, ha $F_{-\xi}$ kvázikonkáv - pl. ha logaritmikusan konkáv. Ez ellenőrízhető:

Állítás: Egy folytonos eloszlásfüggvény logaritmikusan konkáv, ha sűrűségfüggvénye logaritmikusan konkáv (Prékopa, 1971).

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebbe a körbe tartozik a leggyakrabban alkalmazott többváltozós eloszlás is: a normális eloszlás. Feltesszük, hogy ξ normális eloszlású. Ekkor a -ξ valószínűségi változó is normális eloszlású, paraméterei: várható értéke és szórása szintén adottak:

$$E[-\xi] = -\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i; \sigma^2 = Var[-\xi] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}.$$

Az optimális d értékre $P(-\xi \leq -d) = p$ kell, hogy teljesüljön, hiszen ha $P(-\xi \leq -d) > p$ lenne, akkor $-d$ csökkenthető, d növelhető lenne a feltétel sérelme nélkül. Írjuk fel a feltételt:

$$P(-\xi \leq -d) = F_{-\xi}(-d) = \Phi\left(\frac{-d-E[-\xi]}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-d+\mu}{\sigma}\right) = p$$

Az összefüggés alkalmazásakor feltettük, hogy $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$ egyetlen szóba jöhető $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ portfolió esetén sem lesz 0. Az összefüggésből következik, hogy

$$-d = -\mu + \Phi^{-1}(p)\,\sigma = -\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i + \Phi^{-1}(p)\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right)}.$$

A feladat ekvivalens a következővel:

$$-d = -\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i + \Phi^{-1}(p)\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right)} \to \min$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\ ;$$

esetleg más feltételek.

Ha $p > 0,5$, akkor $\Phi^{-1}(p) > 0$, ezért a célfüggvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók kvázikonvex függvénye, amelynek szinthalmazai konvex halmazt alkotnak. Így a feladat maga is konvex. A megoldás efficiens pontja a 4. modellnek $\alpha = 1$ és $\beta = \Phi^{-1}(p)$ együtthatókkal.

7.2. Példa. *Álljon a választási lehetőségünk két vagyonelemből, amelyek jövendő értékeit jelentő valószínűségi változók normális eloszlásúak a következő paraméterekkel:*

$\mu_1 = E[\xi_1] = 1{,}1;\ \sigma_1 = 0{,}5\ ;\ \mu_2 = E[\xi_2] = 1{,}15;\ \sigma_2 = 0{,}4;$

kovariancia együtthatójuk : $\sigma_{12} = E\left[(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)\right] = 0,1$.

Olyan portfoliót szeretnénk összeállítani, hogy az az érték, amelyet portfoliónk jövendő értéke legalább 95 %-os valószínűséggel meghalad, a lehető legnagyobb legyen.

Megoldás. Vegyük észre, hogy $0,1 = \rho\sigma_1\sigma_2$, vagyis $\rho = 0,5$. Tudjuk, hogy $\Phi^{-1}(0,95) = 1,645$. Minthogy mindössze két vagyonelemből választhatunk, ha $x = x_1$ jelöli az első vagyonelem arányát, akkor a második vagyonelem aránya: $x_2 = 1 - x_1 = 1 - x$. Feladatunk tehát a következő:

$$-d = -1,1x - 1,15(1-x) + 1,645\sqrt{0,25x^2 + 0,2x(1-x) + 0,16(1-x)^2} \to min$$
$$1 \geq x \geq 0$$

E feladatot megoldhatjuk valamilyen konvex programozási módszerrel. De megpróbálkozhatunk azzal is (és itt ezt tesszük), hogy elemezzük a $-d$ függvényt. Először kicsit egyszerűbb alakban írjuk fel $-d$ –t és deriváljuk:

$$-d = 0,05x - 1,15 + 1,645\sqrt{0,16 - 0,12x + 0,21x^2}$$
$$\frac{\partial(-d)}{\partial x} = 0,05 + 1,645 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-0,12 + 0,42x}{\sqrt{0,16 - 0,12x + 0,21x^2}}$$

Megállapítjuk, hogy a derivált értéke az $x = 0$ pontban negatív és az $x = 1$ pontban pozitív. Felveszi tehát a függvény a minimumát a (0, 1) intervallum belsejében, határozzuk meg ezt a pontot:

$$\tfrac{\partial(-d)}{\partial x} = 0,05 + 1,645 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{-0,12+0,42x}{\sqrt{0,16-0,12x+0,21x^2}} = 0$$
$$0,05\sqrt{0,16 - 0,12x + 0,21x^2} - 0,0987 + 0,34545x = 0$$
$$\Rightarrow x = 0,23$$

Az optimális portfoliónk tehát a következő: Befektetésre szánt pénzünk 0,23-szorosát az első, 0,77-szeresét a második vagyonelembe fektetjük. Ekkor 0,95 valószínűséggel portfoliónk jövendő értéke nem lesz kevesebb, mint jelenlegi befektetendő pénzünk 0,515-szöröse, és $1/2$ valószínűséggel több lesz, mint portfoliónk várható értéke: $1,1 \cdot 0,23 + 1.15 \cdot 0,77 = 1,1385$.

A következő modellt az első fejezetben már elemeztük.

7. modell: Portfolió választás várható hasznosság maximalizálással:

$$E[u(\xi)] \rightarrow max$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n; \text{ esetleg más feltételek.}$$

7.3. Példa. *Tekintsünk egy befektetést, amely 2 év múlva a befektetett összeget háromszorosan megtéríti, ha nagyon kedvező feltételek állnak be, a befektető visszakapja a befektetett összeget közepesen kedvező feltételek mellett, és teljes egészében elveszti, ha rosszul alakulnak a dolgok. E három állapot valószínűségei sorra:* $0,3; 0,4; 0,3$. *A befektető másik választási lehetősége: kockázatmentes értékpapírba fektet, amelynek megtérülése 1,2.*

Kérdés, vagyonának milyen arányát fogja a kockázatos befektetésben és mennyit kockázatmentes értékpapírban tartani, ha a leírt modelleket alkalmazza.

7.3. táblázat.

Állapotok:	Valószínűség	Kockázatos befektetés	Kockázatmentes befektetés	A portfolió realizációi
Nagyon kedvező	0,3	3	1,2	$3x_1 + 1{,}2x_2$
Közepesen kedvező	0,4	1	1,2	$x_1 + 1{,}2\ x_2$
Kedvezőtlen	0,3	0	1,2	$1{,}2\ x_2$
Befektetési arány		x_1	x_2	

Megoldás. Az első 6 modellben az $x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1$ feltételeket helyettesítjük a következővel:

$$x = x_1,\ x_2 = 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1.$$

Ekkor a portfolió várható értéke $\mu(x) = 1,3x + 1,2(1 - x) = 0,1x + 1,2$, és varianciája: $\sigma^2(x) = x^2\left(0,3(3 - 1,3)^2 + 0,4(1 - 1,3)^2 + 0,3 \cdot 1,3^2\right) = 1,41x^2$.

1. modell: $\mu_0 = 1,25$:

$$1,41x^2 \to min$$
$$0,1x + 1,2 \geq 1,25; \quad 0 \leq x \leq 1$$

Numerikus megoldás: $x_1 = 0,5$; $x_2 = 0,5$; $\mu = 1,25$; $\sigma^2 = 0,35$.

2. modell: $\sigma_0^2 = 0,3$:

$$0,1x + 1,2 \to max$$
$$1,41x^2 \leq 0,3; \quad 0 \leq x \leq 1$$

Numerikus megoldás: $x_1 = 0,463$; $x_2 = 0,537$; $\mu = 1,2463$; $\sigma^2 = 0,3$.

3. modell: $\beta > 0, \alpha = 1$:

$$-0,1x - 1,2 + \beta 1,41x^2 \to min$$
$$0 \leq x \leq 1.$$

Numerikus megoldás: Ha $\beta \leq 1/28:\ x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ \mu = 1,3;\ \sigma^2 = 1,41$. Ha $\beta > 1/28:\ x_1 = 1/(28\beta);\ x_2 = 1 - 1/(28\beta);\ \mu = 1,2 + 0,1/(28\beta);\ \sigma^2 = 1,41\{1/(28\beta)\}^2$.

4. modell: $\beta > 0,\ \alpha = 1$:

$$-0,1x - 1,2 + \beta(1,41)^{0,5}x \rightarrow min$$
$$0 \leq x \leq 1.$$

Numerikus megoldás: Ha $\beta > 0,0845$, akkor a célfüggvény egy pozitív meredekségű egyenes, amely a $0 \leq x \leq 1$ intervallumon a 0 -ban veszi fel a minimumát. Ekkor $\mu = 1,2,\ \sigma^2 = 0$. Ha $\beta < 0,0845:\ x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ \mu = 1,3;\ \sigma^2 = 1,41$.

5. modell: d: változó

$$\tfrac{1,41x^2}{(0,1x+1,2-d)^2} \rightarrow \min$$
$$0 \leq x \leq 1.$$

Legyen $d = 1,25$:

$$\tfrac{1,41x^2}{(0,1x-0,05)^2} \rightarrow \min$$
$$0 \leq x \leq 1.$$

Numerikus megoldás hiperbolikus programozási feladatként: Alkalmazzuk a $t = \frac{1}{0,1x-0,05}$ és $y = xt$ helyettesítést:

$$1,41y^2 \rightarrow \min;\ y \geq 0;\ y \leq t;\ \ 0,1y - 0,05t = 1$$

Ezt kapjuk: $y = 10(1 + 0,05t)$ és $y \leq t-$ ből: $t \geq 20$. Minél kisebb a t, annál kisebb az y. Ezért $t = 20$ és

$y = 20,\ x = 1;\ x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ \mu = 1,3;\ \sigma^2 = 1,41$.

6. modell: $p = 0,95$, a két befektetésről azt feltételezzük, hogy normális eloszlásúak.

Numerikus megoldás: $\beta = 1,645$ választás mellett (mivel $\beta > 0,0845$) a 4. modell megoldása: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ \mu = 1,2;\ \sigma^2 = 0$.

7. modell: A befektető hasznossági függvénye a logaritmus függvény.

$$E\left[u\left(x_1 d_1 + x_2 d_2\right)\right] =$$

$$0,3\ln(3x_1 + 1,2x_2) + 0,4\ln(x_1 + 1,2x_2) + 0,3\ln(1,2x_2) \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \quad \geq 0.$$

E modellt az első fejezetben már megoldottuk.

7.5. Többlépcsős sztochasztikus modell

[3]Egy befektető portfoliót akar összeállítani ismert eszközökből (értékpapírokból, banki betétekből, stb.) Mindegyik eszközt az ára jellemez – ez valószínűségi változó. A lehetséges jövendő árakat egy eseményfával lehet leírni. A befektető célja az, hogy az időhorizont végén: T periódus múlva portfoliójának várható értéke maximális legyen. Minden periódusban eladhat és vehet, minden tranzakciónak költsége van. Figyelembe kell vennie az egyes periódusokban felmerülő kötelezettségeit és a portfolió értékét növelő befizetését. Dönteni akar afelől, hogy az egyes periódusokban mennyi eszközt adjon el, vásároljon illetve tartson meg.

Jelölések:

T: az idő periódusok száma;

t : a szóban forgó idő periódus, $t = 1, \ldots\ldots, T$;

I : azon eszközfajták száma, amelyek közül a befektető választhat;

i : eszköz, $i = 1, \ldots\ldots, I$;

S: szcenariók száma;

s : szcenárió, $s = 1, \ldots\ldots, S$.

Adott paraméterek:

ár$_{its}$: az i. eszköz ára a t. periódusban az s_i szcenárió esetében, $i \in \{1, ..., I\}, t \in \{1, ..., T\}, s \in \{1, ..., S\}$;

p_s: az s. szcenárió bekövetkezési valószínűsége, $s \in \{1, ..., S\}$;

[3]E modellt Di Domenica N., Birbilis G., Mitra G., Valente P (2003) mutatták be.

L_t: a t. periódusban a befektető kötelezettsége, $t \in \{1, ..., T\}$;

F_t: a t. periódusban a befektető e portfolióba történő befektetése, $t \in \{1, ..., T\}$;

A_t: a t. periódusban a portfoliónak egy előre meghatározott célértéke, $t \in \{1, ..., T\}$;

R: a portfolió árának (értékének) a célértéktől való maximális relatív eltérése;

$H0_i$: az i. eszköz mennyisége kezdetben a portfolióban, $i \in \{1, ..., I\}$;

g: egy tranzakció költségaránya.

A döntési változók:

H_{its}: az i. eszköz mennyisége a t. periódusban az s. szcenárió esetében, $i \in \{1, ..., I\}$, $t \in \{1, ..., T\}$, $s \in \{1, ..., S\}$;

B_{its}: az i. eszköz azon mennyisége, amelyet a t. periódusban az s. szcenárió esetében veszünk, $i \in \{1, ..., I\}, t \in \{1, ..., T\}, s \in \{1, ..., S\}$;

S_{its}: az i. eszköz azon mennyisége, amelyet a t. periódusban az s. szcenárió esetében eladunk, $i \in \{1, ..., I\}, t \in \{1, ..., T\}, s \in \{1, ..., S\}$.

A célfüggvény, amit maximalizálni akarunk: a végső portfolió várható értéke:

$$\max \sum_{s=1}^{S} p_s \sum_{i=1}^{I} ár_{iTs} H_{iTs}.$$

A feltételek:

Az eszközök mennyiségére vonatkozó feltételek:

$H_{i1s} = H0_i + B_{i1s} - S_{i1s}, \quad i \in \{1, ..., I\}, \ s \in \{1, ..., S\};$

$H_{its} = H_{it-1s} + B_{its} - S_{its}, \quad i \in \{1, ..., I\}, t \in \{2, ..., T\}, s \in \{1, ..., S\}.$

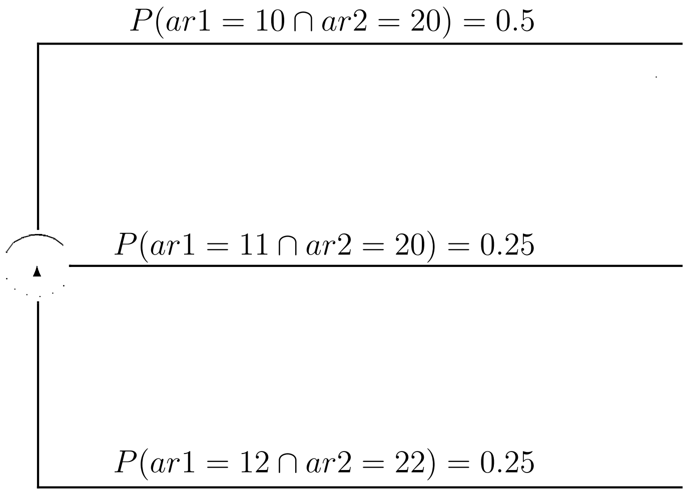
Az eszközök értékére vonatkozó feltételek:

$$(1-g)\sum_{i=1}^{I} ár_{its} S_{its} - L_t + F_t = (1+g)\sum_{i=1}^{I} ár_{its} B_{its}, \quad t \in \{1, ..., T\}, s \in \{1, ...S\}.$$

A portfolió célértékére vonatkozó feltételek:

$$A_t - \sum_{i=1}^{I} ár_{its} H_{its} \le A_t R, \quad t \in \{2, ..., T\}, s \in \{1, ...S\}.$$

A leírást kiegészíthetjük más, a jövő eseményeitől nem függő feltételekkel.



7.4. Példa. *Legyen két eszköz, amelyből vásárolhatunk, az elsőből kezdetben darabonként 10 Ft-ért, a másodikból 20 Ft-ért. Összesen 5.000 Ft-unk van. A portfoliónkra vonatkozó előírás szerint kezdetben a másodikból legalább háromszor annyi (darab) kell, hogy legyen, mint az elsőből. Egy időszakot vizsgálunk. Az időszak során vásárolhatunk, három szcenáriónak megfelelően, a következő árak valamelyikén:*

- *az 1. eszköz ára: 10 Ft és a 2. eszköz ára: 20 Ft,*
- *az 1. eszköz ára: 11 Ft és a 2. eszköz ára: 20 Ft,*
- *az 1. eszköz ára: 12 Ft és a 2. eszköz ára: 22 Ft.*

E három lehetséges kimenetel bekövetkezési valószínűségei sorra: $1/2$, $1/4$, $1/4$. *Az időszakban a nettó kötelezettségünk (kötelezettség – időszak közi befektetés) = 10 Ft. A tranzakciós költség 5%.*

Döntsük el, hogy mennyit adjunk, vegyünk, illetve mennyit tartsunk az egyes eszközökből a portfoliónkban úgy, hogy az időszak végi portfolió várható értéke maximális legyen.

Megoldás. A feladatot illusztráló eseményfa, amelynek ágai mellett az eszközeink árai által alkotott valószínűségi változó vektort tüntettük fel, igen egyszerű:

$P(ár_1 = 10 \ \& \ ár_2 = 20) = \frac{1}{2}$; $P(ár_1 = 11 \ \& \ ár_2 = 20) = \frac{1}{4}$ $P(ár_1 = 12 \ \& \ ár_2 = 22) = \frac{1}{4}$. 20 változónk van, ebből kettő a portfolió kezdeti összetételére vonatkozik, minden kimenetelnek 6 változó felel meg. A fenti feltételek közül értelemszerűen elmaradnak a portfolió célértékére vonatkozó feltételek, mert csak egy időszak van. A döntési változókat, az eszközök mennyiségére, illetve értékére vonatkozó feltételeket és a célfüggvény együtthatóit a 7.4. táblázatban foglaltuk össze.
A táblázatban leírt lineáris programozási feladat optimális megoldása a következő:

$$H_{01} = H_{11} = H_{12} = H_{13} = 71,4286;$$

$$H_{21} = H_{22} = 213,7594; \ H_{23} = 213,8073;$$

$$H_{02} = 214,2857; \quad S_{21} = S_{22} = 0,5263; \quad S_{23} = 0,4785.$$

Az optimális célfüggvény-érték: 5150,188.

7.6. ALM a vagyonbiztosításban

Egy valószínűséggel korlátozott lineáris programozási modell [4]

Vagyonbiztosító társaságok befektetési és biztosítási politikájukat rendszerint egy időszakra (évre) tervezik meg. Jövedelmeik az egyes befektetések hozamából és az egyes biztosítási tevékenységekből profitként származnak – ez utóbbit a biztosítási tevékenység hozamának tekintjük. Modellünkben a biztosító társaság saját tőkéje évi hozamának maximalizálását tekintjük célnak, ezért a társaság portfoliója befektetési lehetőségeket és biztosítási szerződéstípusokat egyaránt tartalmaz. Ezek egy egységéhez tartozó hozamokat normális eloszlású valószínűségi változóknak feltételezzük, és feltesszük, hogy a társaságnak saját tőkéje után más hozama nincsen.

A feltételek egy részét az egyes befektetés-fajták illetve biztosítási szerződéstípusok részesedésére vonatkozó korlátozások jelentik. A befektetés-fajtákra a korlátozások lehetnek hatósági előírások is: a biztonság érdekében a befektetési állományban a kockázatos értékpapírok maximális arányát jogszabály írja elő. A biztosítási

[4] E modell Li, S. X. (1995) dolgozatában található.

7.4. táblázat.

	Kezdő portfolió		Mennyiségekre vonatkozó feltételek						Értékekre vonatkozó feltételek			Célfgv.
H_{01}	10	3	-1	-1	-1							
H_{02}	20	-1				-1	-1	-1				
H_{11}			1									5
B_{11}			-1						-10,5			
S_{11}			1						9,5			
H_{12}				1								2,75
B_{12}				-1						-11,55		
S_{12}				1						10,45		
H_{13}					1							3
B_{13}					-1						-12,6	
S_{13}					1						11,4	
H_{21}						1						10
B_{21}						-1			-21			
S_{21}						1			19			
H_{22}							1					5
B_{22}							-1			-21		
S_{22}							1			19		
H_{23}								1				5,5
B_{23}								-1			-23,1	
S_{23}								1			20,9	
≥ 0	$= 5000$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 10$	$= 10$	$= 10$	Max

portfolió-elemek mennyiségére is ésszerű előírni korlátozásokat, hiszen széleskörű biztosítási termékajánlattal rendelkező társaságok egyik évről a másikra drasztikusan nem növelhetik, sem csökkenthetik állományaikat lényeges piaci veszteség nélkül. A következő feltételt a biztosítási díjbevételek saját tőkéhez viszonyított aránya jelenti, amely arányra felső korlátot, a szolvencia érdekében, szintén jogszabály mond ki. (Magyarországon ez 16-18%.) A biztosítási díjbevételek befektethető részaránya illetve a szolgáltatások kifizetéséhez szükséges likvid eszközrész leírása szerepel az utolsó feltételben.

Minthogy a hozamráták valószínűségi változók a modellben (és a valóságban is), ezért a saját tőke hozama is valószínűségi változó, így maximalizálni csak a várható értékét lehet, vagy, amint a modellünkben tesszük, maximalizálni annak a valószínűségét, hogy e hozam egy elfogadhatónak tartott hozamnál nem lesz kisebb.

A saját tőke jelenlegi mennyiségét a következőkben egy értékűnek tekintjük. Ez csak annyit jelent, hogy ez a pénzértékegység a modellben, a továbbiakban minden pénzértéket ebben mérünk.

Soroljuk fel a modellben szereplő fogalmakat és jelöléseket, és fogalmazzuk meg a feltételeket.

- $\rho_1 \rho_2, \ldots, \rho_n$ jelöli az n fajta befektetési lehetőség évi hozamrátáját,

  $\rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \ldots, \rho_{n+h}$ jelöli a h fajta biztosítási szerződéstípus évi hozamrátáját (profitrátáját) – valószínűségi változók, együttes valószínűségi eloszlásuk normális. Ismertek a várható értékük, varianciájuk és kovarianciájuk, az i-edik hozamráta várható értéke: $E[\rho_i] = r_i$, $Var[\rho_i] = \sigma_i^2$, az i-edik és j-edik kovarianciája: $cov\left[\rho_i, \rho_j\right]$, $(i = 1, ..., n+h, j = 1, ..., n+h)$;

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az n befektetési lehetőség mennyisége és $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+h}$ a h biztosítási szerződéstípus díjbevételeiből a kötelezettség teljesítésére fordított mennyiségek (a továbbiakban díjbevételen ezt értjük) a portfolióban – egyúttal ezek a saját tőkéhez viszonyított arányok is, hiszen a saját tőke értéke 1. Ezek az értékek együttesen képviselik a portfolió összetételét. A modellben ezeket fogjuk meghatározni, ezek a modell változói.

- $x^{'} = \left(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_{n+h}^{'}\right)$ és $x^{"} = \left(x_1^{"}, x_2^{"}, ..., x_{n+h}^{"}\right)$

$n + h$ komponensű vektorok az egyes befektetési ill. biztosítási portfolióelemek mennyiségére - saját tőkéhez viszonyított arányára - előírt alsó és felső korlátok. A portfolió összetételének tehát teljesítenie kell az alábbi feltételeket, amelyek a modell első feltételcsoportját alkotják:

$$x_i' \leq x_i \leq x_i" \quad i = 1, ..., n, n+1, ..., n+h.$$

π a saját tőke éves hozama: a befektetésből származó hozam és a díjbevételekből származó profit összege:

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} x_i \rho_i + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \rho_i = \sum_{i=1}^{n+h} x_i \rho_i.$$

π szükségképpen valószínűségi változó, normális eloszlású, hiszen normális eloszlású valószínűségi változók összege. Várható értéke és varianciája, mint ismeretes, így számolható:

$$E\left[\pi\right] = \sum_{i=1}^{n+h} x_i r_i, \quad \sigma^2 = Var\left[\pi\right] = \sum_{i=1}^{n+h} \sum_{j=1, j\neq i}^{n+h} x_i x_j cov(\rho_i, \rho_j) + \sum_{i=1}^{n+h} x_i^2 \sigma_i^2.$$

Minthogy a díjakat előre fizetik, és lényeges időbeli eltérés lehet a kárkifizetés és a kár bekövetkezése között, a díjtartalék egy része befektethető. Hogy milyen része, az függ a szóban forgó biztosítási terméktől, a kárrendezés időtartamától. Jelölje $\gamma_{n+1}, ..., \gamma_{n+h}$ az első, a második, ..., a h-adik biztosítási termék esetében a díjbevételnek a szolgáltatás teljesítésére szánt részének – a díjtartaléknak – a befektethető arányát.

Fogalmazzuk meg, hogy a befektethető alapok forrásainak és azok felhasználásának egyensúlyban kell lennie: Az összes befektetés a saját tőkének és a díjbevétel befektethető részének az összege:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \gamma_i,$$

az értékegyenletben 1 a saját tőke mennyisége.

A biztosítási díjbevételek saját tőkéhez viszonyított arányára alsó korlátot - a szolvencia érdekében - rendszerint jogszabály mond ki. Itt ezt az arányt δ jelöli. A biztosító társaságnak nem lehet érdeke, hogy a szükségesnél nagyobb saját tőkével rendelkezzen, ezért a következő feltétel ezt az előírást egyenlőség formájában mondja ki:

$$\sum_{i=n+1}^{n+h} x_i = \delta.$$

A kárkifizetés rendszerint a beérkező díjbevételekből történik. Ha ez nem elegendő, akkor a biztosítónak készpénzzé kell tennie eszközeinek egy részét. Ezért a biztosító társaság elég likvid eszközzel kell, hogy rendelkezzék ahhoz, hogy a készpénzfizetési kötelezettségének eleget tehessen. Nézzük, miből származhat a társaságnak készpénze.

- Készpénzzé teheti a likvid befektetéseit teljes egészében hozamaikkal együtt,
- nem likvid befektetéseinek likvid részét illetve azok hozamát: l_i és d_i jelöli ezeket (i = k+1, ... , n); és
- a biztosítási tevékenységből származó profitot.

Az n befektetési lehetőség közül az első k-t tekintjük likvid befektetésnek, a következő $n-k$-t pedig nem likvid befektetésnek.

A következő egyenlőség ezt az összefüggést fogalmazza meg. A biztosító készpénzének és likvid eszközeinek összege valószínűségi változó, y jelöli:

$$y = \sum_{i=1}^{k} x_i(1+\rho_i) + \sum_{i=k+1}^{n} x_i(l_i + d_i) + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i\rho_i.$$

A hozamok sztochasztikus természete miatt nem zárhatjuk ki annak a lehetőségét, hogy a biztosító társaság nem tud eleget tenni egy fix minimális $-$ β–val jelölt - készpénzfizetési kötelezettségének. E modellben a biztosító kockázati szintjét ennek az eseménynek a bekövetkezési valószínűsége képviseli. Ezért olyan portfolió-összetételt keresünk, amely azt a feltételt is kielégíti, hogy a biztosító kockázati szintje ne legyen nagyobb egy előre megadott α értéknél:

$$P\left(y < \beta\right) \leq \alpha.$$

(Ez azt jelenti, hogy a biztosító társaság a minimális készpénzfizetési kötelezettségének legfeljebb α valószínűséggel nem tud eleget tenni.)
A biztosító társaságok gyakran megállapítanak saját tőkéjükre kielégítő hozamszintet, jelölje ezt π_0. Ezért a biztosító célja az, hogy maximalizálja annak a valószínűségét, hogy π hozama ezt a kielégítő hozamszintet eléri.

Írjuk fel a kapott sztochasztikus programozási modellt:

$$P(\pi \geq \pi_0) \rightarrow \max$$

$$(1) \quad x_i' \leq x_i \leq x_i\text{''} \quad i = 1, ..., n, n+1, ..., n+h,$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \gamma_i,$$

$$(3) \quad \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i = \delta,$$

$$(4) \quad y = \sum_{i=1}^{k} x_i(1+\rho_i) + \sum_{i=k+1}^{n} x_i(l_i + d_i) + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \rho_i,$$

$$(5) \quad P(y < \beta) \leq \alpha,$$

$$(6) \quad \pi = \sum_{i=1}^{n+h} x_i \rho_i.$$

A szóban forgó hozamráták mint valószínűségi változók tulajdonságainak ismeretében felírható e modell determinisztikus ekvivalens megfogalmazása is. Az átalakítás részleteitől megkíméljük az olvasót, de egy kis példán bemutatjuk a menetét. Megjegyezzük, hogy az átalakítás eredményeként kvadratikus feladathoz jutunk, amelynek a megoldása még nagy méretek esetén sem reménytelen – abban az esetben, ha valamennyi valószínűségi változó normális eloszlásúnak tekinthető.

7.5. Példa. *Annak a valószínűségét maximalizáljuk, hogy a saját tőke hozama legalább az előre megadott π_0 értéket eléri.*

Egyetlen befektetési lehetőség van: éves ρ_1 hozamrátájának várható értéke: $E[\rho_1] = 0,12$, varianciája: $Var[\rho_1] = 0,01$. Eladható évközben.
Két biztosítási termékünk van, hozamrátájuk ρ_2 és ρ_3 , $E[\rho_2] = 0,15$, $Var[\rho_2] = 0,0025$ illetve $E[\rho_3] = 0,18$, $Var[\rho_3] = 0,0036$.
Mindhárom valószínűségi változó normális eloszlású és páronként függetlenek, ezért $cov(\rho_i, \rho_j) = 0$, ha $i \neq j$ $(i = 1, 2, 3)$.

A további paraméterértékek legyenek a következők:

$\delta = \ 0,18$; $\alpha = 0{,}05$; $\gamma_2 = 0{,}5$; $\gamma_3 = 0{,}6$.

β és π_0 értékét a feladatban nem specifikáljuk.

Írjuk fel a π és y valószínűségi változókat – (4) és (6) feltétel -, várható értéküket és varianciájukat:

$$\pi = x_1\rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3$$

$$y = x_1 (1 + \rho_1) + x_2\rho_2 + x_3\rho_3$$

$$E[\pi] = 0,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3$$

$$Var[\pi] = 0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2$$

$$E[y] = 1,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3$$

$$Var[y] = 0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2$$

Vizsgáljuk meg a feltételeket. Alsó és felső korlátokat itt nem adtunk meg, ezért, mivel a portfolió összetételének komponensei értelemszerűen nemnegatívok, az (1) feltételcsoport az $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ feltételekből áll.

A (2) feltétel így alakul: $x_1 = 1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$.

A (3) feltétel: $x_2 + x_3 = 0,18$.

Az (5) feltétel azt mondja ki, hogy annak a valószínűsége, hogy az y valószínűségi változó értéke kisebb, mint a β minimális szint, ne legyen nagyobb 0,05-nél: $P(x_1 (1 + \rho_1) + x_2\rho_2 + x_3\rho_3 < \beta) \leq 0,05$.

Minthogy az $y = x_1 (1 + \rho_1) + x_2\rho_2 + x_3\rho_3$ normális eloszlású valószínűségi változók összege, így maga is normális eloszlású, ezért az egyenlőtlenség baloldalán lévő valószínűség a standard normális valószínűségi eloszlás Φ eloszlásfüggvényének az értéke a $\frac{\beta - E[y]}{\sqrt{Var[y]}}$ helyen. A feltétel tehát így alakul:

$$\Phi\left(\frac{\beta - 1,12x_1 - 0,15x_2 - 0,18x_3}{\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2}}\right) \leq 0,05.$$

A Φ eloszlásfüggvény értékei táblázatokban is megtalálhatók. Az az argumentum, amelyre Φ értéke 0,05: -1,645. Ezért az (5) feltétel így alakul:

$$\frac{\beta - 1,12x_1 - 0,15x_2 - 0,18x_3}{\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2}} \leq -1,645,$$

vagyis

$$-1,645\sqrt{0,01x_1^2+0,0025x_2^2+0,0036x_3^2}+1,12x_1+0,15x_2+0,18x_3\geq\beta.$$

Végül nézzük a célfüggvényt. Annak a valószínűségét maximalizáljuk, hogy a saját tőke π hozama legalább az előre megadott π_0 értéket eléri:

$$P\left(x_1\rho_1+x_2\rho_2+x_3\rho_3\geq\pi_0\right)\to\max.$$

Ez azonos azzal, hogy minimalizáljuk annak a valószínűségét, hogy a saját tőke π hozama kisebb az előre megadott π_0 értéknél:

$$P\left(x_1\rho_1+x_2\rho_2+x_3\rho_3<\pi_0\right)\to\min.$$

Minthogy π normális eloszlású, a minimalizálandó célfüggvényünk értéke:

$$\Phi\left(\frac{\pi_0-(0,12x_1+0,15x_2+0,18x_3)}{\sqrt{0,01x_1^2+0,0025x_2^2+0,0036x_3^2}}\right).$$

Ez pedig akkor lesz minimális, ha az argumentum minimális.

Foglaljuk össze a modellt a példabeli feladatunkra:

$$\frac{\pi_0-(0,12x_1+0,15x_2+0,18x_3)}{\sqrt{0,01x_1^2+0,0025x_2^2+0,0036x_3^2}}\to\min$$

(1) $x_1,x_2,x_3\geq 0,$

(2) $x_1=1+0,5x_2+0,6x_3,$

(3) $x_2+x_3=0,18,$

(5) $-1,645\sqrt{0,01x_1^2+0,0025x_2^2+0,0036x_3^2}+1,12x_1+0,15x_2+0,18x_3\geq\beta.$

Megjegyezzük, hogy ez a feladat a hiperbolikus programozás körébe tartozik. Ezért további olyan átalakításokra is nyílik mód, amelyek a feladat megoldását megkönnyíthetik. Jelöljük a célfüggvény nevezőjének a reciprokát a t változóval. Szorozzuk meg az egyes feltételeket t-vel és helyettesítsük tx_i-t y_i-vel. A következő feladathoz jutunk:

$$\pi_0 t - 0,12y_1 - 0,15y_2 - 0,18y_3 \to \min$$

$$(1) \quad y_1, y_2, y_3, t \geq 0,$$

$$(2) \quad y_1 - 0,5y_2 - 0,6y_3 - t = 0,$$

$$(3) \quad y_2 + y_3 - 0,18t = 0,$$

$$(5) \quad 1,12y_1 + 0,15y_2 + 0,18y_3 - \beta t \geq 1,645.$$

Lineáris programozási feladatot kaptunk tehát. Ha a feladat y_1, y_2, y_3, t optimális megoldásában t > 0, akkor $x_1 = \frac{y_1}{t}, x_2 = \frac{y_2}{t}, x_3 = \frac{y_3}{t}$ eredeti feladatunknak is optimális megoldása.

7.7. A jelenérték hatványsora

Portfolió jelenértéke, ha a pénzáramlás időpontjai $t_1, t_2, ..., t_m$ és nagyságai: $c_1, c_2, ..., c_m$, és a jelenlegi időpont $t_0 = 0$, a következő módokon írható fel:

$$(1) \quad P(r) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{-t_k r},$$

ha r a mindegyik időpontra azonos azonnali kamaterősség, a jelenértéket folytonos kamatozással számoljuk;

$$(2) \quad \overline{P}(r) = \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}},$$

ha r a mindegyik időpontra azonos azonnali kamatláb, a jelenértéket diszkrét kamatozással számoljuk;

$$(3) \quad \overline{\overline{P}}(r_1, ..., r_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{-t_k r_k},$$

ha $r_1, r_2, ..., r_m$ az egyes időpontokra az azonnali kamaterősség, a jelenértéket folytonos kamatozással számoljuk;

$$(4) \quad \overline{\overline{\overline{P}}}(r_1, ..., r_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{1}{(1+r_k)^{t_k}},$$

ha $r_1, r_2, ..., r_m$ az egyes időpontokra az azonnali kamatláb, a jelenértéket diszkrét kamatozással számoljuk.

A következő részben az $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ vektornak és azon n-komponensű vektornak az összegét, amelynek minden komponense λ, $\underline{x} + \lambda$ jelöli. Emlékeztetünk arra, hogy egy m- változós f függvénynek az értéke az $(x_1 + \lambda, ..., x_m + \lambda)$ helyen, azaz $f(\underline{x} + \lambda)$, az f függvény és λ szerinti deriváltjainak az $\underline{x} = (x_1, ..., x_m)$ helyen felvett értékeinek: $f(\underline{x}), f'_\lambda(\underline{x}), f"(\underline{x})$, stb. ismeretében a következőképpen írható fel:

$$f\left(\underline{x} + \lambda\right) = f(\underline{x}) + \frac{1}{1!} f'_\lambda(\underline{x})\lambda + \frac{1}{2!} f''_\lambda(\underline{x})\lambda^2 + \frac{1}{3!} f'''_\lambda(\underline{x})\lambda^3 + ...$$

Használjuk fel ezt az összefüggést arra, hogy felírjuk a portfolió jelenértékének a másodfokú közelítését az $\underline{r} + \lambda = (r_1 + \lambda, ..., r_m + \lambda)$ helyen. Az első két jelenérték-függvényben $r_1 = r_2 = ... = r_m = r$. Szükségünk van mindegyik jelenérték-függvény λ szerinti első és második deriváltjára és ezek értékeire a $\lambda = 0$ helyen:

$$(1) \quad P'_\lambda(\underline{r}) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{m} c_k e^{-t_k(r+\lambda)} \,|_{\lambda=0} = -\sum_{k=1}^{m} t_k c_k e^{-t_k(r+\lambda)} \,|_{\lambda=0} = -\sum_{k=1}^{m} t_k c_k e^{-t_k r},$$

$$(1) \quad P''_\lambda(\underline{r}) = \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{k=1}^{m} c_k e^{-t_k(r+\lambda)} \,|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{m} t_k^2 c_k e^{-t_k(r+\lambda)} \,|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{m} t_k^2 c_k e^{-t_k r}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overline{P}'_\lambda(\underline{r}) &= \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(1+r+\lambda)^{t_k}} \,|_{\lambda=0} = -\frac{1}{(1+r+\lambda)} \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k c_k}{(1+r+\lambda)^{t_k}} \,|_{\lambda=0} \\ &= -\frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k c_k}{(1+r)^{t_k}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overline{P}''_\lambda(\underline{r}) &= \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(1+r+\lambda)^{t_k}} \,|_{\lambda=0} = \frac{1}{(1+r+\lambda)^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k\left(t_k+1\right)c_k}{(1+r+\lambda)^{t_k}} \,|_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{t_k\left(t_k+1\right)c_k}{(1+r)^{t_k}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \overline{\overline{P}}'_\lambda(\underline{r}) &= \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{m} c_k e^{-t_k(r_k+\lambda)} \,|_{\lambda=0} = -\sum_{k=1}^{m} t_k c_k e^{-t_k(r_k+\lambda)} \,|_{\lambda=0} \\ &= -\sum_{k=1}^{m} t_k c_k e^{-t_k r_k}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \overline{\overline{P}}''_{\lambda}(\underline{r}) &= \frac{d^2}{d\lambda^2}\sum_{k=1}^{m} c_k e^{-t_k(r_k+\lambda)} \mid_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{m} t_k^2 c_k e^{-t_k(r_k+\lambda)} \mid_{\lambda=0} \\
&= \sum_{k=1}^{m} t_k^2 c_k e^{-t_k r_k}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \overline{\overline{\overline{P}}}'_{\lambda}(\underline{r}) &= \frac{d}{d\lambda}\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(1+r_k+\lambda)^{t_k}} \mid_{\lambda=0} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+r_k+\lambda)}\frac{t_k c_k}{(1+r_k+\lambda)^{t_k}} \mid_{\lambda=0} \\
&= -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+r_k}\frac{t_k c_k}{(1+r_k)^{t_k}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \overline{\overline{\overline{P}}}''_{\lambda}(\underline{r}) &= \frac{d^2}{d\lambda^2}\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(1+r_k+\lambda)^{t_k}} \mid_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+r_k+\lambda)^2}\frac{t_k(t_k+1)c_k}{(1+r_k+\lambda)^{t_k}} \mid_{\lambda=0} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+r_k)^2}\frac{t_k(t_k+1)c_k}{(1+r_k)^{t_k}}.
\end{aligned}
$$

Ezek segítségével írjuk fel a jelenértékek másodfokú közelítését:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad P(\underline{r}+\lambda) &\simeq P(\underline{r}) - \lambda\sum_{k=1}^{m} t_k c_k e^{-t_k r} + \lambda^2\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} t_k^2 c_k e^{-t_k r}; \\
(2)\quad \overline{P}(\underline{r}+\lambda) &\simeq \overline{P}(\underline{r}) - \lambda\frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{m}\frac{t_k c_k}{(1+r)^{t_k}} + \lambda^2\frac{1}{2}\frac{1}{(1+r)^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{t_k(t_k+1)c_k}{(1+r)^{t_k}}; \\
(3)\quad \overline{\overline{P}}(\underline{r}+\lambda) &\simeq \overline{\overline{P}}(\underline{r}) - \lambda\sum_{k=1}^{m} t_k c_k e^{-t_k r_k} + \lambda^2\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} t_k^2 c_k e^{-t_k r_k}; \\
(4)\quad \overline{\overline{\overline{P}}}(\underline{r}+\lambda) &\simeq \overline{\overline{\overline{P}}}(\underline{r}) - \lambda\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+r_k}\frac{t_k c_k}{(1+r_k)^{t_k}} + \lambda^2\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(1+r_k)^2}\frac{t_k(t_k+1)c_k}{(1+r_k)^{t_k}}.
\end{aligned}
$$

A képletekből a várható hátralévő futamidő és konvexitás már ismertetett képletei könnyen megkaphatók.

7.8. Gyakorló feladatok

1. Portfoliónk két értékpapírt tartalmaz: egy 3 éves lejáratú, évente a névértékre 5%-os kamatot fizető kötvényt, és egy egyéves lejáratút, amely egy év múlva a névérték 124%-át fizeti. Mindkettő 1 névértékű. Tegyük fel, hogy az azonnali kamatláb 1

évre 11 %, 2 évre 10%, 3 évre 9%. (Megjegyezzük, hogy az ezeknek megfelelő kamaterősségek: $ln1,11 = 0,10436; ln1,1 = 0,0953; ln1,09 = 0,0862$.) Számításainkban folytonos kamatozást feltételezünk. Határozzuk meg a portfolió hátralévő átlagos futamidejét és konvexitását.

2. Portfoliónk kétféle kötvényt tartalmazhat, amelyek jelenlegi ára (értéke): $P_1^0 = 0,91$ illetve $P_2^0 = 1,05$ valamely pénzegységben. Egy év múlva a portfoliót el kell adnunk azért, hogy egy 1000 Ft értékű kötelezettségünknek eleget tegyünk. Feltételezzük, hogy e két kötvény jövendő P_1^1 és P_2^1 ára normális eloszlást követ, várható értékük, szórásuk és korrelációs együtthatójuk a következő:

$$\mu_1^1 = 1,04; \mu_2^1 = 1,12; \sigma_1^1 = 0,1; \sigma_2^1 = 0,025; \rho_{12} = -0,2$$

Hányat vegyünk az egyes kötvényekből, ha szeretnénk, hogy eladásukkal 95% valószínűséggel ki tudjuk fizetni 1000 értékű kötelezettségünket?

3. A 7.4. példához kapcsolódunk: Határozzuk meg, hány változónk lenne, ha két időszakot vizsgálnánk, és a második időszakban az árak vektorának két lehetséges értéke van:

$$P\left(\begin{pmatrix} ár_1 \\ ár_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{3}$$

$$P\left(\begin{pmatrix} ár_1 \\ ár_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{2}{3}$$

Rajzoljuk fel a döntési fát! Írjuk fel a megoldandó LP feladatot táblázatos formában! Oldjuk meg!

8. fejezet

MEGOLDÁSOK

1. fejezet

1. A várható hasznosság elvét alkalmazzuk. Írjuk fel az értékegyenletet: $E[u(X)] = E\left[-e^{-5X}\right] = -M_X(-5) = -e^{(-5)5+\frac{(-5)^2 2}{2}} = -1$; $E[u(Y)] = E\left[-e^{-5Y}\right] = -M_Y(-5) = -e^{(-5)6+\frac{(-5)^2 2{,}5}{2}} = -e^{1{,}25}$. Az X valószínűségi változóval jellemzett lehetőséget választjuk tehát annak ellenére, hogy Y várható értéke nagyobb.

2. Az értékegyenlet, amelyben D a maximális fizethető díjat jelenti, a következő: $\ln(V-D) = E[\ln(V-X)]$. Minthogy X sűrűségfüggvényének az értéke a $(0,1)$ intervallumban 1, azon kívül pedig 0, ezért a várható érték formula behelyettesítésével és parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\ln(V-D) &= \int_0^1 \ln(V-x)dx \\
&= [x\ln(V-x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{-x+V-V}{V-x}dx \\
&= \ln(V-1) - 1 - V\ln(V-1) + V\ln V \\
&= \ln\left\{(V-1)^{1-V}V^V e^{-1}\right\}.
\end{aligned}$$

$D = V - \frac{V^V}{e(V-1)^{V-1}}$.

3. Az értékegyenlet, amelyben D a maximális ésszerű díjat jelenti, a következő: $\sqrt{100-D} = E\left[\sqrt{100-X}\right]$. Ez az egyenlet így írható fel: $\sqrt{100-D} = \int_0^{100} \frac{\sqrt{100-x}}{100}dx$. Az integrálást elvégezve kapjuk a megoldást: $\sqrt{100-D} = \left[\frac{-2(100-x)^{\frac{3}{2}}}{300}\right]_0^{100} = \frac{20}{3}$, vagyis $D = \frac{500}{9}$.

4. a) Az, hogy a biztosított vagyonában bekövetkezhető kár exponenciális eloszlású valószínűségi változó, egyben azt is jelenti, hogy a kár - és ezzel együtt a vagyon is, amelyben bekövetkezik - bármekkora értéket felvehet. Ez természetesen lehetetlen, a kár nagyságának leírását mégis tekinthetjük jó közelítésnek. El kell azonban gondolkodnunk azon, mekkora vagyon mellett fogadhatjuk el a 100 várható értékű exponenciális eloszlást a kár jó leírásának és így a leírt módszerrel kiszámított díj értékeket kiinduló alapnak. Ahhoz, hogy elfogadjuk, a vagyon 100-nál nyilvánvalóan több kell, hogy legyen. Elfogadjuk-e jó közelítésnek, ha a vagyon 700 vagy több? Támaszkodhatunk arra a körülményre, hogy a közelítő leírás szerint $0,1\%$-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a kár nagysága nagyobb lenne 700-nál, valóságos szituációban azonban a válasz a döntéshozóra vár.

b) Az értékegyenlet, amelyben D a maximális ésszerű díjat jelenti, a következő: $E\left[0,75u\left(V-D\right)+0,25u\left(V-D-\frac{X}{2}\right)\right]$
$=E\left[0,75u\left(V\right)+0,25u\left(V-X\right)\right]$. A hasznossági függvényt és a várható értéket behelyettesítve ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} & 0,75\left(-e^{-0,005(V-D)}\right)+0,25\int_0^\infty\left(-e^{-0,005\left(V-D-\frac{x}{2}\right)}\right)0,01e^{-0,01x}dx \\ = \; & 0,75\left(-e^{-0,005V}\right)+0,25\int_0^\infty\left(-e^{-0,005(V-x)}\right)0,01e^{-0,01x}dx. \end{aligned}$$

Osszuk el mindkét oldalt $-e^{-0,005V}$-vel:

$$\begin{aligned} & 0,75e^{0,005D}+0,25\int_0^\infty e^{0,005\left(D+\frac{x}{2}\right)}0,01e^{-0,01x}dx \\ = \; & 0,75+0,25\int_0^\infty e^{0,005x}0,01e^{-0,01x}dx. \end{aligned}$$

Tovább azt kapjuk, hogy $0,75e^{0,005D}+0,25e^{0,005D}M_X(0,0025)=0,75+0,25M_X(0,005)$, vagyis $e^{0,005D}\left(0,75+\frac{1}{3}\right)=0,75+0,5$, amiből $D\approx 28,6$.

c) Az értékegyenlet, amelyben D_B a minimális fizetendő díjat jelenti, a következő (V_B a biztosító vagyona):

$$E\left[0,75u\left(V_B+D_B\right)+0,25u\left(V_B+D_B-\frac{X}{2}\right)\right]=u(V_B).$$

A hasznossági függvényt és a várható értéket behelyettesítve ez azt jelenti, hogy

$$0,75\left(-e^{-0,005(V_B+D_B)}\right)+0,25\int_0^\infty\left(-e^{-0,005\left(V_B+D_B-\frac{x}{2}\right)}\right)0,01e^{-0,01x}dx=-e^{-0,005V_B}.$$

Osszuk el mindkét oldalt $-e^{-0,005V_B}$–vel:

$$0,75e^{-0,005D_B}+0,25\int_0^\infty e^{-0,005\left(D_B-\frac{x}{2}\right)}0,01e^{-0,01x}dx=1.$$

Tovább azt kapjuk, hogy $0,75e^{-0,005D_B}+0,25e^{-0,005D_B}M_X(0,0025)=1$, vagyis $e^{-0,005D_B}=\frac{12}{13}$, $\quad D_B\approx 16$.

d) A biztosító által vállalt kár várható értéke: $0,25\int\limits_0^\infty\frac{x}{2}0,01e^{-0,01x}dx=12,5$.

e) A szerződés létrejöhet, mert a minimálisan fizetendő díj kisebb, mint az a maximális díj, amit a biztosított hajlandó fizetni ezért a szolgáltatásért.

2. fejezet

2. 1898,7

3. a) Binomiális eloszlású, $E[N]=0,04\cdot 160=6,4$, $Var[N]=0,04\cdot 0,96\cdot 160=6,144$.

b) $E[S]=70000$; $Var[S]=1706,7$.

$\mu\,(10^3)$	$\mu^2\,(10^6)$	$\sigma^2\,(10^6)$	$E[X]=p\mu$	$p\sigma^2$	$\mu^2p\,(1-p)$	$Var[X]$
5	25	$\frac{100}{12}$	200	0,33	0,96	1,29
10	100	$\frac{400}{12}$	400	1,33	3,84	5,17
15	225	$\frac{900}{12}$	600	3	8,64	11,64
25	625	$\frac{2500}{12}$	1000	8,33	24,00	32,33
50	2500	$\frac{10000}{12}$	2000	33,33	96,00	129,66

c) Megközelítőleg egy ezrelék.

4. a) $E[X]=0,1377; Var[X]=0,1948$; b) $\theta=0,2358$.

5. $E[N]=1,6; Var[N]=1,28; E[X]=1,6; Var[X]=0,24; E[S]=2,56; Var[S]=3,6608; M_S(t)=\left(0,2\left(0,4e^t+0,6e^{2t}\right)+0,8\right)^8$.

6. $P(S=0)=0,1; P(S=1)=0,15; P(S=2)=0,22;$

$P(S=3)=0,215; P(S=4)=0,164; P(S=5)=0,095;$

$P(S=6)=0,0408;\ P(S=7)=0,0126;\ P(S=8)=0,0024;\ P(S=9)=0,0002.$

7. $P(S=0)=0,368; P(S=1)=0,184; P(S=2)=0,193;$
$P(S=3)=0,118.$ $E[S]=1,6; Var[S]=3;$
$M_S(t)=\exp(0,5e^t+0,4e^{2t}+0,1e^{3t}-1).$

8. S_1+S_2 összetett Poisson eloszlású, $\lambda=8$ és $P(X=1)=0,05; P(X=2)=0,15; P(X=3)=0,425; P(X=4)=0,375.$

9. Az egész állomány összkára összetett Poisson eloszlású a következő paraméterekkel (az összegek 1000 Ft-ban értendők): $\lambda=200$;

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases}0,\ ha\ x\leq 3\\ 0,1,\ ha\ 3<x\leq 4\\ 0,2,\ ha\ 4<x\leq 5\\ 0,6,\ ha\ 5<x\leq 6\\ 0,733,\ ha\ 6<x\leq 7\\ 1,\ ha\ x>7;\end{cases}$$

$D\geq 1201,6.$

3. fejezet

1. Az X várható értéke: $E[X]=\frac{7}{4}$, momentumgeneráló függvénye: $M_X(r)=\frac{1}{4}e^r+\frac{3}{4}e^{2r}$. Az $R=\ln 2$ ki kell, hogy elégítse az $1+E[X](1+\theta)r=M_X(r)$ egyenletet. Ez azt jelenti, hogy θ kielégíti az $\frac{1}{4}e^{\ln 2}+\frac{3}{4}e^{2\ln 2}=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{3}{4}\cdot 4=1+\frac{7}{4}(1+\theta)\ln 2$ egyenletet, vagyis a $\theta=\frac{10}{7\ln 2}-1\approx 1,061$ és $D=\lambda E[X](1+\theta)=3\cdot\frac{7}{4}\cdot 2,061\approx 10,82$ megoldás adódik.

2. a) $R=1$. b) Az első. c) $\frac{35}{24}$.

3. Az exponenciális káreloszlás 100%-os relatív szórása az oka annak, hogy vagy sokkal magasabb kockázati díjra, vagy sokkal magasabb tőkére van szükség ahhoz, hogy csőd kellően alacsony valószínűséggel következzék be.

8.1. táblázat. A csőd valószínűsége exponenciális eseti kár mellett

	Tőkeigény 20% ill. 100% biztonsági pótlékkal kalkulált díj mellett az exponenciális kárelosz-lásos modellben				
	$\theta = 0,2$	$\theta = 0,2$	$\theta = 1$	$\theta = 1$	$\theta = 1$
tőke (kezdeti) = u	1000	3000	1000	2000	5000
$E[S] = \lambda E[X] = \frac{1}{\beta}$	1000	1000	1000	1000	1000
$\sqrt{Var[S]} = \sqrt{\lambda E[X^2]} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}$	1000	1000	1000	1000	1000
$\frac{E[S]}{\sqrt{Var[S]}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Kockázati díj = D	1200	1200	2000	2000	2000
$\frac{D}{E[S]}$	1,2	1,2	2	2	2
tőke/díj = $\frac{u}{D}$	83%	250%	50%	100%	250%
P(csőd)= $\Psi(u) = \frac{e^{-\theta \frac{u}{D}}}{1+\theta}$	0,7054	0,5054	0,3033	0,1839	0,041

4. fejezet

1. Viszontbiztosítás nélkül: $R = 0,225$; a várható nyereség $= 0,4$. Stop Loss viszontbiztosítás esetén: $d = 1$: elfogadhatatlan; $d = 2 : R = 0,35$; a várható nyereség $= 0,1402$; $d = 3 : R = 0,36$; a várható nyereség $= 0,2677$

2. Minthogy $F_S(x) \geq F_S(a)$, ha $a < x \leq b$, ezért $E[S_v(d) = E[S_v(a)] - (d-a)(1-F(a))$.

3. $0,8 \cdot E[S_v(d)] - E[S_v(h)]$, ahol $h = d + m/0,8$.

4.

x	f_S(x)	$P(S \leq x)$	E[S_v (x)]
0	0,050	0,050	3,500
1	0,124	0,174	2,550
2	0,180	0,354	1,724

5. $E[S] = 10000 \cdot 1 \cdot 0,01 + 5000 \cdot 2 \cdot 0,01 + 5000 \cdot 3 \cdot 0,01 = 350$;

a) $T = 403,14$; b) $T = 396,5$;

c) $E[S_v(h)] = 5000(2-h)0,01 + 5000(3-h)0,01$;

$D_v(h) = E[S_v(h)] \cdot 1,2$; $E[S_d(h)] = 350 - E[S_v(h)]$;

$Var[S_d(h)] = 10000 \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot 0.99 + 10000 \cdot h^2 \cdot 0,01 \cdot 0.99$;

$T(h) = 1,645(Var[S_d(h)])^{1/2} + E[S_d(h)] + D_v(h)$.

d) $E[S_d] = 100 + 100 + 125 = 325; D_v = 25 \cdot 1,2 = 30$;

$Var[S_d] = 10000 \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot 0,99 + 5000 \cdot 4 \cdot 0,01 \cdot 0,99 + 5000 \cdot 6,25 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 606,375$. Annak a valószínűsége, hogy a költségeket fedezi a tőke: $\Phi\left(\frac{405-30-325}{24,625}\right) = \Phi(2,03)$.

5. fejezet

3. μ = E[biztosító által megtérített kár] $= 1/\beta = 10$;

σ^2 = Var[biztosító által megtérített kár] $= 1/\beta^2 = 100$;

E[kötvény kárigénye] = p μ = 0,5;

Var[kötvény kárigénye] $= p\sigma^2 + \mu^2 p(1-p) = 9,75$;

$E[S] = 500; Var[S] = 9750$.

a) Várható érték díj: $D = 550$.

b) $\lambda = 1000,\ p = 50$. Exponenciális díj összetett Poisson eloszlású összkár esetén: $D = \frac{\lambda}{\beta + \frac{\ln \varepsilon}{u}} = 539$.

c) Exponenciális díj normális eloszlású összkár esetén: $D = 535$.

d) $P(D \geq S) = \Phi\left(\frac{D - E[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) = \Phi(0,35)$

e) A díjat minimalizáló kezdeti többlet: $u = \sqrt{9750}\sqrt{\frac{|\ln 0{,}08|}{0{,}2}} = 351,\ D = 570$.

7. fejezet

1. Foglaljuk össze a pénzáramlás időpontjait és adatait (kerekítve): A hátralévő

Pénzáramlás						
Hátralévő futamidő	Diszkont tényezők	1. kötvény	2. kötvény	$\sum$	Jelen-érték	Súlyok
1 év	0,8958	0,05	1,24	1,29	1,1556	0,5784
2 év	0,8187	0,05	0	0,05	0,0409	0,0205
3 év	0,7634	1,05	0	1,05	0,8015	0,4011
Összesen:					1,998	1

futamidő mint valószínűségi változó lehetséges realizációi példánkban: 1, 2 illetve 3; ezek bekövetkezési valószínűségei az utolsó oszlopban találhatók. $D = 1 \cdot 0,5784 + 2 \cdot 0,0205 + 3 \cdot 0,4011 = 1,8228$. A hátralévő futamidő magasabb momentumait és egyéb tulajdonságait pontosan úgy számoljuk, ahogy a valószínűségi változók esetében, beleértve a konvexitást is, amely a portfolióból származó pénzáramlás időpontjai négyzetének a jelenérték arányokkal súlyozott összege: $K = 1 \cdot 0,5784 + 4 \cdot 0,0205 + 9 \cdot 0,4011 = 4,2703$.

2. Jelölje x_1 és x_2 a két kötvény mennyiségét a portfolióban. A portfolió P^1 ára egy év múlva normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke és szórása a következő:

$\mu^1 = 1,04x_1 + 1,12x_2$; $\sigma^1 = \sqrt{0,1^2 x_1^2 + 0,025^2 x_2^2 - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,025 x_1 x_2}$.

A $P(P^1 \geq 1000) \geq 0,95$ feltétel ekvivalens a következő feltétellel: $P^0 - l_{0,95} =$

$-1,645\sigma^1 + \mu^1 \geq 1000$. Ez a következő egyenlőtlenség megoldásához vezet:

$$1000 \leq -1,645\sqrt{0,1^2 x_1^2 + 0,025^2 x_2^2 - 0,001 x_1 x_2} + 1,04 x_1 + 1,12 x_2.$$

A feladatnak sok megoldása van, pl. $x_1 = 475; x_2 = 520$. Közülük például úgy választhatunk, hogy minimalizáljuk a portfolió jelenlegi árát, a $P^0 = 0,91x_1 + 1,05x_2$ függvényt - ez kvadratikus programozási modellhez vezet.

A. Függelék

Valószínűségszámítási fogalmak és tételek: emlékeztető

A.1. Valószínűségi változó

Egy ξ valószínűségi változót, $E[\xi]$ várható értékét és $k-$adik momentumát: $E\left(\xi^k\right)$ -t a következőképpen adjuk meg:

Diszkrét eloszlás esetén a valószínűségi változót leírjuk azzal, hogy megadjuk a lehetséges értékeit: $x_1, x_2, ...$ (lehet véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen) és a hozzájuk tartozó valószínűségeket: $P(\xi = x_1), P(\xi = x_2), ...$ Nyilvánvaló, hogy

$$\sum\nolimits_j P(\xi = x_j) = 1.$$

A ξ valószínűségi változó várható értéke és $k-$adik momentuma következő:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum\nolimits_j x_j P(\xi = x_j); \\ E\left[\xi^k\right] &= \sum\nolimits_j x_j^k P(\xi = x_j). \end{aligned}$$

Folytonos eloszlás esetén a valószínűségi változót leírjuk azzal, hogy megadjuk az $f_\xi(x)$ sűrűségfüggvényét, amelynek egy (a, b) intervallum feletti integrálja azt mutatja meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy ξ az (a, b) intervallumba esik. Nyilvánvaló, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

A ξ valószínűségi változó várható értéke és $k-$adik momentuma a következő:

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx;$$
$$E\left[\xi^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx.$$

Kevert: folytonos és diszkrét részt egyaránt tartalmazó eloszlás esetén a ξ valószínűségi változót leírjuk azzal, hogy megadjuk a diszkrét $x_1, x_2, ...x_k$ lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket: $P(\xi = x_1)$, $P(\xi = x_2)$, ... és a folytonos szakaszokon az eloszlást sűrűségfüggvénnyel írjuk le. Kevert valószínűségi eloszlás jellemzi például a biztosító által megtérített kár nagyságát önrészesedéssel bíró kötvény esetében, hiszen annak a valószínűsége, hogy a megtérített kár 0, egyenlő annak a valószínűségével, hogy maga a kárnagyság nem haladja meg az önrész mértékét: ez a valószínűség a 0 pontban koncentrálódik, a kárnagyság folytonos szakaszát pedig az önrész feletti értékek jelentik. A folytonos szakasz állhat több intervallumból, lehet korlátos és végtelen is.

Mindhárom esetben egyértelműen megadhatjuk a ξ valószínűségi változót azzal, ha megadjuk az eloszlásfüggvényét:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

Az alábbi képletekben az egyszerűség kedvéért csak egy folytonos (a,b) szakaszt tüntetünk fel, ξ_1 jelöli a diszkrét, ξ_2 a folytonos és ξ a belőlük alkotott kevert eloszlást, H a lehetséges értékek tartományát. Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_j f_{\xi_1}(x_j) + \int_a^b f_{\xi_2}(x)\,dx = \int_H dF_\xi = 1.$$

A ξ valószínűségi változó várható értéke és $k-$adik momentuma a következő:

$$E[\xi] = \sum_j x_j f_{\xi_1}(x_j) + \int_a^b x f_{\xi_2}(x)\,dx = \int_H x\,dF_\xi;$$
$$E\left[\xi^k\right] = \sum_j x_j^k f_{\xi_1}(x_j) + \int_a^b x^k f_{\xi_2}(x)\,dx = \int_H x^k\,dF_\xi.$$

Mindhárom esetben ξ varianciája:

$$Var[\xi] = E\left[\xi^2\right] - E^2[\xi].$$

A várható értékre és varianciára fennáll:

$$E[\xi+\eta] = E[\xi] + E[\eta]; \; E[a\xi] = aE[\xi]; \; Var[a\xi] = a^2 Var[\xi],$$

a konstans szorzó.

A ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ha

$$P(\xi < x \text{ és } \eta < y) = P(\xi < x) P(\eta < y) = F_\xi(x) F_\eta(y).$$

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor

- szorzatuk várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával;
- összegük varianciája egyenlő a varianciák összegével.

A.2. Néhány nevezetes diszkrét eloszlás

Karakterisztikus eloszlás

ξ karakterisztikus eloszlású p paraméterrel $(0 < p < 1)$, ha:

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= 1-p; \; P(\xi = 1) = p; \\ E[\xi] &= p; \; Var[\xi] = p(1-p). \end{aligned}$$

Binomiális eloszlás

ξ binomiális eloszlású n és p paraméterekkel ($n \geq 0$ egész, $0 < p < 1$), ha n számú független azonos p paraméterű karakterisztikus eloszlású valószínűségi változó összege:

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, ..., n; \\ E[\xi] &= np; \; Var[\xi] = np(1-p). \end{aligned}$$

Poisson eloszlás

ξ Poisson eloszlású λ paraméterrel ($\lambda > 0$), ha

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots ; \\ E[\xi] &= \lambda;\ Var[\xi] = \lambda. \end{aligned}$$

Geometriai eloszlás

ξ geometriai eloszlású p paraméterrel ($0 < p < 1$), ha:

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= (1-p)^{k-1} p,\ k = 1, 2, \ldots; \\ E[\xi] &= \frac{1}{p};\ Var[\xi] = \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Negatív binomiális eloszlás

ξ negatív binomiális eloszlású n és p paraméterekkel ($n \geq 0$ egész, $0 < p < 1$), ha

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots ; \\ E[\xi] &= \frac{n(1-p)}{p};\ Var[\xi] = \frac{n(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

A.3. Néhány nevezetes folytonos eloszlás

Normális eloszlás

ξ normális eloszlású μ és σ paraméterekkel ($\sigma > 0$), ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < x < +\infty; \\ E[\xi] &= \mu;\ Var[\xi] = \sigma^2. \end{aligned}$$

A normális eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az értéke a standard: 0 várható értékű és 1 szórású normális eloszlás Φ eloszlásfüggvényével így fejezhető ki:

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Lognormális eloszlás

ξ lognormális eloszlású μ és σ paraméterekkel, ha $\ln\xi$ normális eloszlású μ és σ paraméterekkel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0. \end{cases} \\ E[\xi] &= e^{m+\frac{\sigma^2}{2}};\ Var[\xi] = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right). \end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás

ξ exponenciális eloszlású β paraméterrel ($\beta > 0$), ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0. \end{cases} \\ E[\xi] &= \frac{1}{\beta};\ Var[\xi] = \frac{1}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Gamma eloszlás

ξ r-edrendű gamma eloszlású β paraméterrel ($r > 0, \beta > 0$), ha:

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \begin{cases} \frac{\beta^r x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\beta x}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0. \end{cases} \\ E[\xi] &= \frac{r}{\beta};\ Var[\xi] = \frac{r}{\beta^2};\ \Gamma(r) = \int\limits_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx. \end{aligned}$$

Pareto eloszlás

ξ Pareto eloszlású α és β paraméterekkel ($\alpha > 0, \beta > 0$), ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, \ x > \beta \\ 0, \ x \leq \beta \end{cases} \\ E[\xi] &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-1};\ Var[\xi] = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\right)^2. \end{aligned}$$

A.4. Központi határeloszlás tétel

Legyenek $\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n, ...$ azonos eloszlású független valószínűségi változók, μ és σ közös várható értékük és szórásuk. Ekkor az

$$X_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

valószínűségi változóra - amelynek a függetlenség miatt a várható értéke $n\mu$ és szórása $\sqrt{n}\sigma$ - fennáll bármely valós x szám esetén, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \Phi\left(x\right).$$

A tétel fontos következménye, hogy az X_n valószínűségi változó eloszlása normális eloszlással közelíthető, ha n elég nagy.

A.5. Teljes valószínűség tétele

Legyenek $B_1, B_2, ..., B_n$ páronként egymást kizáró események, amelyek összege a biztos esemény, $P(B_i) > 0,\ i = 1, ..., n$; legyen A tetszőleges esemény. Az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége így írható fel:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A \mid B_i\right) P\left(B_i\right).$$

$P\left(A \mid B_i\right)$: az A eseménynek a B_i feltétel melletti feltételes valószínűsége:

$$P\left(A \mid B_i\right) = \frac{P\left(A \frown B_i\right)}{P\left(B_i\right)}.$$

B. Függelék

A nemlineáris programozás alapfogalmai

B.1. A feladat

Tekintsük a matematikai programozási feladatot általános alakjában:

$$\theta(x) \to \min$$
$$x \in X = \{x : x \in X^0, g(x) \le 0\}$$

ahol $X^0 \subset R^n, g(x)$ m-dimenziós vektorfüggvény, θ numerikus függvény az X^0 halmazon.

Az alábbi állítások a matematikai programozás kulcstételei. Bizonyításaik megtalálhatók pl. Mangasarian (1969), Rapcsák (2005), de Klerk et al. (2004) könyveiben. Itt csak az egyszerűbb bizonyításokat közöljük.

1. Állítás. Ha $\Gamma \subset R^n$ nyílt, konvex és θ differenciálható Γ-n, akkor θ konvex Γ-n akkor és csak akkor, ha $\theta(x^{''}) - \theta(x^{'}) \ge \nabla\theta(x^{'})(x^{''} - x^{'})$ fennáll minden $x^{'}, x^{''} \in \Gamma$ pontpárra. Ha Γ nyílt, konvex és θ differenciálható Γ-n, akkor θ szigorúan konvex Γ-n akkor és csak akkor, ha $\theta(x'') - \theta(x') > \nabla\theta(x^{'})(x^{''} - x^{'})$ fennáll minden $x^{'}, x^{''} \in \Gamma$ pontpárra, $x^{'} \ne x^{''}$.

2. Állítás. Legyen X^0 konvex, g konvex X^0-n. A minimalizációs feladat lehetséges megoldásainak X halmaza konvex.

Bizonyítás. Legyen $x^{'}, x^{''}$ két lehetséges megoldás: $x^{'} \in X^0, x^{''} \in X^0$, $g(x^{'}) \leq 0, g(x^{''}) \leq 0$. Akkor $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén X^0 konvexitása miatt $\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''} \in X^0$ és g konvexitása miatt $g(\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}) \leq \lambda g(x^{'}) + (1-\lambda)g(x^{''}) \leq 0$, vagyis $\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''} \in X$.

3. Állítás. Legyen X konvex, θ konvex X-en. A minimalizációs feladat optimális megoldásainak halmaza konvex.

Bizonyítás. Legyen $x^{'}, x^{''}$ két optimális megoldás:

$$\theta(x^{'}) = \theta(x^{''}) = \min_{x \in X} \theta(x), \quad x^{'} \in X, x^{''} \in X.$$

Válasszuk $0 \leq \lambda \leq 1$-t tetszőlegesen. Ekkor

$$\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''} \in X,$$

$$\theta(\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}) \leq \lambda\theta(x^{'}) + (1-\lambda)\theta(x^{''}) = \min_{x \in X} \theta(x).$$

Ezért $\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}$ is optimális megoldás.

4. Állítás. Legyen X konvex, x^* a minimalizációs feladat optimális megoldása. Ha θ szigorúan konvex X -en, akkor x^* a minimalizációs feladat egyetlen optimális megoldása.

Bizonyítás. Legyen az állítással ellentétben $x^{'} \neq x^*$ egy másik optimális megoldás: $\theta(x^{'}) = \theta(x^*)$, $x^{'} \in X$. Ekkor $\lambda x^* + (1-\lambda)x^{'} \in X$ is optimális megoldás minden $0 \leq \lambda \leq 1$ mellett az előző tétel alapján. De $0 < \lambda < 1$ esetén $\theta(\lambda x^* + (1-\lambda)x^{'}) < \lambda\theta(x^*) + (1-\lambda)\theta(x^{'})$ fennáll a szigorú konvexitás miatt. Ellentmondásra jutottunk.

5. Állítás. Legyen X konvex, θ nemkonstans konkáv függvény X-en. A minimalizációs feladat bármely x^* optimális megoldása, ha létezik, az X tartomány határpontja.

Bizonyítás. Legyen x^* optimális megoldás. Mivel θ nemkonstans X-en, ezért $\exists x \in X : \theta(x) > \theta(x^*)$. Legyen z tetszőleges belső pontja X -nek. Ekkor $\exists y \in X$ és $0 \leq \lambda \leq 1$, hogy $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Így θ konkáv volta miatt

$$\theta(z) = \theta\left[(1-\lambda)x + \lambda y\right] \geq (1-\lambda)\theta(x) + \lambda\theta(y)$$

$$> (1-\lambda)\theta(x^*) + \lambda\theta(x^*) = \theta(x^*),$$

tehát θ nem veszi fel a minimumát a z belső pontban.

A minimalizációs feladathoz kapcsolódik a következő feladat:

B.1.1. A Kuhn-Tucker stacionárius pont probléma

Olyan $x^* \in X^0, u^* \in R^m$ vektorokat keresünk, amelyek kielégítik az alábbi feltételrendszert:

$$(K-T) \qquad \begin{aligned} &\nabla\theta(x) + u\nabla g(x) = 0, \\ &g(x) \leq 0, \quad x \in X^0, \\ &ug(x) = 0, \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

$u = (u_1, \ldots, u_m)$: duális változók, Lagrange szorzók. Az $ug(x) = 0$ az egyensúlyi feltétel: mivel u_i nemnegatív és $g_i(x)$ nempozitív ($i = 1, \ldots, m$), ezért szorzatuk és szorzataik összege nempozitív és 0 akkor és csak akkor, ha az összeg minden tagja 0, azaz $u_i = 0$, ha $g_i(x) < 0$. Ha egyenlőtlenségi feltételek helyett egyenlőségi feltételek szerepelnek a minimalizációs feladatban, akkor a megfelelő u_i Lagrange szorzók előjelkötetlenek és a megfelelő tagok az egyensúlyi feltételben 0 értékűek.

B.2. Optimalitási tételek

6. Kuhn-Tucker elégséges optimalitási tétel: Legyen X^0 nyílt, konvex, $x^* \in X^0, \theta$ és g differenciálható és konvex az x^* pontban. Ha (x^*, u^*) megoldása a $(K-T)$ feladatnak, akkor x^* optimális megoldása a minimalizációs feladatnak.

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ tetszőleges.

$$\begin{aligned} &\theta(x) - \theta(x^*) \geq \nabla\theta(x^*)(x - x^*) = -u^*\nabla g(x^*)(x - x^*) \\ &\geq u^*\left[g(x^*) - g(x)\right] = -u^*g(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Mivel $x^* \in X$, ezért $\theta(x^*) = \min_{x \in X} \theta(x)$.

Regularitási feltételek. A $g(x) \leq 0, x \in X^0$ feltételrendszert regulárisnak nevezzük, ha eleget tesz különböző regularitási feltételek valamelyikének. E regularitási feltételek közül a leggyakrabban alkalmazottak:

1° A feltételrendszer lineáris.

$2°$ A feltételrendszer kielégíti a *Slater* feltételt, ami a következő: Legyen $X^0 \subset R^n$ konvex. Az X^0-n definiált m-dimenziós g konvex vektorfüggvény kielégíti a Slater feltételt X^0-on, ha $\exists x' \in X^0$, amelyre $g(x') < 0$.

7. Kuhn-Tucker szükségességre vonatkozó optimalitási tétele: Legyen x^* a minimalizációs feladat optimális megoldása. Legyen X^0 nyílt, θ és g differenciálható az x^* pontban. Tegyük fel, hogy g lineáris vagy kielégíti a Slater feltételt X^0-on. Akkor létezik $u^* \in R^m$, hogy (x^*, u^*) megoldása a $(K-T)$ feladatnak.

B.3. Dualitás.

A minimalizációs feladat *duálisa* a következő feladat:

$$\theta(x) + ug(x) \to \max$$

$$(x,u) \in Y = \{(x,u) : x \in X^0, u \in R^m, u \geq 0, \nabla\theta(x) + u\nabla g(x) = 0\}$$

8. Gyenge dualitási tétel: Legyen X^0 nyílt, konvex, θ és g differenciálható és konvex X^0-on. Ha $x^* \in X, (x', u') \in Y$, akkor $\theta(x^*) \geq \theta(x') + u'g(x')$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
&\theta(x^*) \geq \theta(x') + \nabla\theta(x')(x^* - x') \\
&= \theta(x') - u'\nabla g(x')(x^* - x') \\
&\geq \theta(x') + u'\left[g(x') - g(x^*)\right] \\
&\geq \theta(x') + u'g(x').
\end{aligned}$$

9. Wolfe dualitási tétele: Legyen X^0 nyílt, konvex, θ és g differenciálható és konvex X^0-on. Legyen x^* optimális megoldása a minimalizációs feladatnak és tegyük fel, hogy g lineáris vagy kielégíti a Slater feltételt. Akkor $\exists u^* \in R^m$, hogy (x^*, u^*) optimális megoldása a duális feladatnak és a két optimális megoldáshoz tartozó célfüggvény-érték egyenlő:

$$\theta(x^*) = \theta(x^*) + u^*g(x^*).$$

Bizonyítás. A Kuhn-Tucker tétel értelmében létezik olyan u^*, hogy (x^*, u^*) a Kuhn-Tucker faladat megoldása. Ez azt jelenti, hogy $(x^*, u^*) \in Y$ és $u^*g(x^*) = 0$. Ezután (x^*, u^*) optimális volta a gyenge dualitási tételből következik.

C. Függelék

Sztochasztikus programozási modellek

A kiindulásul szolgáló determinisztikus modell, legáltalánosabb formájában, a következő:

Keresünk olyan x n-dimenziós döntési vektort, amely minimalizálja a $c(x,\xi)$ függvényt és kielégíti az alábbi feltételeket:

$$g_1(x,\xi) \geq 0,\ g_2(x,\xi) \geq 0, ..., g_m(x,\xi) \geq 0,\ x \in T,$$

ahol $T \subset R^n$ rögzített, rendszerint véges számú egyenlőtlenséggel meghatározott halmaz, $g_1, g_2, ..., g_m$ valós függvények, ξ jelöli azon paraméterek vektorát, amelyeket a sztochasztikus modellekben véletlen jellegűnek fogunk tekinteni.

E feladat fontos speciális esete a következő feladat, amelyben a g_i függvények lineárisak és az $x \in T$ feltételt is lineáris feltételek képviselik:

$$\begin{aligned} c(x,\xi) &\quad \to \min \\ Ax \geq \xi, &\quad Bx \geq b, \end{aligned}$$

ahol A és B adott $m\ x\ n-$ illetve $r\ x\ n-$dimenziós mátrixok, ξ $m-$dimenziós valószínűségi változó vektor. ξ mellett az A mátrix elemei is lehetnek valószínűségi változók.

Ha a modellben valószínűségi változók megjelennek, akkor jelen formájában, további magyarázat nélkül, matematikai szempontból értelmezhetetlenné válik. Másfelől azonban a valószínűségi változók megjelenése olyan óhajt, szándékot fejez ki, amit éppen leírni szeretnénk matematikailag korrekt módon. A következő modellek ebben nyújtanak segítséget.

C.1. Várhatóérték-programozás

Véletlen paramétereinket várható értékeikkel helyettesítjük. Ekkor feladataink a következők:

$$\begin{gathered} c\,(x, E[\xi]) \to \min \\ g_1\,(x, E[\xi]) \geq 0, g_2\,(x, E[\xi]) \geq 0, ..., g_m\,(x, E[\xi]) \geq 0, \\ x \in T, \end{gathered}$$

illetve

$$\begin{aligned} c\,(x, E\,[\xi]) \quad &\to min \\ Ax \geq E\,[\xi]\,, \quad &Bx \geq b. \end{aligned}$$

Ha $c(x, E[\xi]) = \ x\ E[\xi]$, akkor a célfüggvény lineáris.

C.2. Valószínűség-maximalizálás

$$\begin{gathered} P\,(g_1\,(x, \xi) \geq 0, g_2\,(x, \xi) \geq 0, ..., g_m\,(x, \xi) \geq 0) \to \max \\ x \in T \end{gathered}$$

illetve

$$\begin{gathered} P\,(Ax \geq \xi) \to \max \\ Bx \geq b. \end{gathered}$$

Ismernünk kell ξ komponenseinek együttes eloszlását.

C.3. Valószínűséggel korlátozott programozás

(Probabilistic constrained programming model)

$$c\,(x) \to min$$
$$P\,(g_1\,(x,\xi) \geq 0, g_2\,(x,\xi) \geq 0, ..., g_m\,(x,\xi) \geq 0) \geq p,$$
$$x \in T,$$

illetve

$$cx \to \min$$
$$P\,(Ax \geq \xi) \geq p$$
$$Bx \geq b.$$

Az előírt p valószínűség a rendszer megbízhatóságának a jellemzője, a modell x megoldásában rejlő kockázatot tehát az $1-p$ érték képviseli. Az utóbbi feladat a valószínűséggel korlátozott lineáris programozási modell. Nyilvánvaló, hogy $P\,(Ax \geq \xi) = F(Ax)$, ahol F az m-dimenziós ξ valószínűségi változó vektor eloszlásfüggvénye, ha ξ folytonos eloszlású, amit a továbbiakban felteszünk.

A feladat megoldhatósága és megoldásának módszere elsősorban attól függ, hogy a feladat megengedett megoldásainak halmaza konvex-e, ez pedig a ξ valószínűségi változó eloszlásától függ. A $P(Ax \geq \xi) \geq p$ feltétel ekvivalens az $F(Ax) \geq p$ feltétellel, vagyis a feltételt kielégítő n-dimenziós x vektorok halmaza konvex, ha az F eloszlásfüggvény felső nívóhalmazai konvexek, vagyis ha F kvázikonkáv, amely fennáll akkor, ha F egy szigorúan monoton függvénye konkáv. (Ld. pl. Mangasarian (1969).) Ha ez fennáll, akkor e halmaznak és a $Bx \geq b$ feltételt kielégítő hipersíkoknak a közös része, vagyis a feladat megengedett megoldásainak halmaza konvex. A következő tétel a logaritmikusan konkáv eloszlásfüggvényekről Prékopa (1971) eredménye, segít a feladat konvex voltának az eldöntésében.

Állítás: Ha ξ olyan folytonos valószínűségi változó vektor, amelynek sűrűségfüggvénye logaritmikusan konkáv, akkor eloszlásfüggvénye is logaritmikusan konkáv.

E tétel, amelyet korábban már idéztünk, következményeként megállapítjuk, hogy ha a többdimenziós ξ valószínűségi változó normális eloszlású, vagy komponensei függetlenek és exponenciális vagy béta vagy gamma eloszlásúak, akkor a feladat megengedett megoldásainak halmaza és így maga a feladat konvex. Gyakorlati problémákban a ξ valószínűségi változó suppF tartója (a legszűkebb zárt halmaz, amelynek valószínűségi mértéke 1) szükségképpen korlátos. A felsorolt eloszlásokra ugyan ez nem áll fenn, de ezek gyakran jelennek meg közelítő elméleti valószínűségeloszlásként.

A sztochasztikus programozásban gyakran alkalmazott többi modellnél a valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladatot – duálisát és megoldhatóságát – itt részletesebben vizsgáljuk. A részletek iránt kevésbé érdeklődő olvasónak azt ajánljuk, hogy ezt hagyja ki, és folytassa a következő modell ismertetésénél.

Látjuk, hogy lineáris célfüggvényt minimalizálunk nemlineáris feltételek mellett. Megoldhatósági szempontból kedvezőbb lenne, ha lineáris feltételek mellett optimalizálnánk nemlineáris célfüggvényt. Átalakítjuk ezért a feladatot. Vegyük észre, hogy azon x vektorok halmaza, amelyekre fennáll, hogy $P(Ax \geq \xi) \geq p$, megegyezik azon x vektorok halmazával, amelyekre létezik olyan m-dimenziós y vektor, hogy a $P(Ax \geq y \geq \xi) \geq p$ feltétel teljesül. Ezért a $P(Ax \geq \xi) \geq p$ feltétel két feltétellel, egy lineáris és egy nemlineáris feltétellel helyettesíthető: $Ax \geq y,\ P(y \geq \xi) = F(y) \geq p$. Az y vektort a ξ valószínűségi változó vektor suppF tartójában választjuk. Így a feladat felírható a következőképpen:

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \min \\ Ax &\geq y;\ F(y) \geq p,\ y \in R^m,\ y \in suppF, \\ Bx &\geq b. \end{aligned}$$

Modellünk tehát felfogható úgy, hogy először adott y mellett minimalizáljuk a cx célfüggvényt az $X_y = \{x \in R^n | Ax \geq y, Bx \geq b\}$ halmazon, majd olyan y vektort keresünk, amely minimalizálja a

$$z(y) = \begin{cases} \min_{x \in X_y} cx,\ \text{ha } X_y \neq \emptyset, \\ \qquad +\infty \text{ különben} \end{cases}$$

konvex függvényt az $F(y) \geq p,\ y \in suppF$ feltétel mellett:

$$z(y) \rightarrow \min,\ y \in Y = \{y | F(y) \geq p,\ y \in \text{suppF}\}.$$

Ezt tekintjük a továbbiakban a *minimalizálási feladatnak.*

A megengedett megoldások Y halmaza konvex, ha az F eloszlásfüggvény kvázikonkáv, pl. logaritmikusan konkáv. Vizsgáljuk a célfüggvényt. A lineáris programozás dualitási tétele szerint adott $y \in R^m$ esetén

$$\min_{x \in X_y} cx = \max_{(u,v) \in V = \{(u,v) \geq 0 | uA + vB = c\}} uy + vb,$$

ahol $u \in R^m, v \in R^r$, feltéve, hogy az X_y primál és a V duális feltételi halmazok egyike sem üres. A duális célfüggvény értékét $-\infty$-nek értelmezzük, ha V üres. (A lineáris programozást bemutató számtalan könyv és jegyzet közül néhányat az irodalomjegyzékben feltüntettünk.)

Modellünk tehát a következőképpen írható fel:

Minimalizáljuk az Y halmazon a $\max_{(u,v) \in V = \{(u,v) \geq 0 | uA + vB = c\}} uy + vb$ függvényt:

$$\max_{(u,v) \in V} uy + vb \to \min, \; y \in Y = \{y | F(y) \geq p, y \in suppF\}.$$

Ha az $uy + vb$ függvénynek van nyeregpontja a V halmazon történő maximalizálásra és az Y halmazon történő minimalizálásra nézve, azaz fennáll, hogy

$$\min_{y \in Y} \max_{(u,v) \in V} uy + vb = \max_{(u,v) \in V} \min_{y \in Y} uy + vb,$$

akkor a minimalizálási feladat helyett törekedhetünk megoldani a következő, lineáris feltételeket és nemlineáris célfüggvényt tartalmazó, *duális feladatot*:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y} uy + vb &\to \max \\ uA + vB &= c; (u,v) \geq 0; u \in R^m; v \in R^r. \end{aligned}$$

E feladat is konvex, mert a célfüggvény konkáv. Hogy az $uy + vb$ függvénynek mikor van nyeregpontja a V halmazon történő maximalizálásra és az Y halmazon történő minimalizálásra nézve; hogy van-e a minimalizálási feladatnak optimális megoldása akkor is, ha ilyen nyeregpont nem létezik; hogy az optimális megoldás meghatározására milyen módszert alkalmazhatunk - e kérdések vizsgálatával foglalkozik Komáromi (1986).[1]

[1]Bizonyítja, hogy ha a ξ valószínűségi változó vektor együttes eloszlásfüggvénye szigorúan logaritmikusan konkáv és suppF belsejében folytonosan differenciálható, és a duális feladatnak van (u,v), $u \neq 0$ optimális megoldása, akkor vagy $y(u) = \min_{y \in Y} uy$ véges vektor, amely esetben ez a minimalizálási feladat egyetlen optimális megoldása, vagy a minimalizálási feladatnak nincs optimális megoldása. A dolgozat a megoldásra duális algoritmust mutat be.

C.4. Véletlennel korlátozott programozási modell

(Chance constrained programming model)[2]

A megbízhatósági követelményt az egyes egyenlőtlenségi feltételekre egyenként írjuk elő:

$$
\begin{aligned}
c(x) &\rightarrow min \\
P(g_1(x,\xi) &\geq 0) \geq p_1, \\
P(g_2(x,\xi) &\geq 0) \geq p_2, \\
& ..., \\
P(g_m(x,\xi) &\geq 0) \geq p_m, \\
x &\in T,
\end{aligned}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
cx &\rightarrow \min \\
P(A_i x &\geq \xi_i) \geq p_i, \quad i = 1, ..., m, \\
Bx &\geq b,
\end{aligned}
$$

ahol ξ mellett a c vektor is lehet valószínűségi változó vektor. Csak az utóbbi modellel foglalkozunk.

Ha c konstans, akkor lineáris programozási feladathoz jutunk:

$$
\begin{aligned}
c(x) &\rightarrow min \\
A_i x &\geq a_i, \quad i = 1, ..., m, \\
Bx &\geq b,
\end{aligned}
$$

ahol $a_i = F_i^{-1}(p_i)$, A_i az A mátrix i-edik sora, F_i a ξ valQ'oszínűségi változó eloszlásfüggvénye, $i = 1, ..., m$.

Ha c valószínűségi változó-vektor, akkor három további modellt kapunk. Mindhárom esetben az x döntési vektort $x = D\xi$ alakban keressük. A feltételek a követ-

[2]E feladatcsoportot Charnes et al. (1959) mutatták be.

kező alakúak:

$$P\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{jk}\right)\xi_k \geq \xi_i\right) \geq p_i \quad i=1,...,m.$$

E-modell: a $cD\xi$ várható értékét minimalizáljuk:

$$E[cD\xi] \rightarrow min$$

Ha c és ξ sztochasztikusan függetlenek, akkor $E[cD\xi] = E[c]DE[\xi]$.

V-modell: c_o és x_o olyan vektorok, amelyek a c-ben foglalt valószínűségi változók és az x döntési vektor bizonyos preferált értékeit foglalják magukban és a minimalizálandó célfüggvény a cx szorzatnak a c_ox_o szorzattól való négyzetes eltérésének a várható értéke:

$$E[(cD\xi - c_ox_o)^2] \rightarrow min$$

P-modell: Ha az eredeti feladatban a cx célfüggvény maximalizálandó (nyereség, stb. a jelentése), akkor értelmezésünk így szól: maximalizálandó annak a valószínűsége, hogy a célfüggvényünk egy preferált értéknél nem lesz kevesebb:

$$P\left(cD\xi \geq c_ox_o\right) \rightarrow \max$$

Példa. Ez a példa azt illusztrálja, hogy a feltételek együttes teljesülésének a megbízhatóságát és a célfüggvény értékét egyaránt befolyásolja, hogy melyik modellt alkalmazzuk. Választásunk a modellek közül attól függhet, hogy a költség és biztonság közül melyiknek mekkora jelentőséget tulajdonítunk.

Tekintsük a következő feladatot:

$$x + y \rightarrow \min$$

$$2x + y \geq \xi_1,$$

$$x + 2y \geq \xi_2,$$

$$x, y \geq 0,$$

ξ_1 és ξ_2 független, a $(0,2)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

Először a feladat értelmezésére válasszuk a várhatóérték-programozást: helyettesítsük ξ_1-et és ξ_2 -t a várható értékeikkel. A következő feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned}
&x + y \to \min\\
&2x + y \geq 1,\\
&x + 2y \geq 1,\\
&x, y \geq 0.
\end{aligned}$$

E feladat grafikusan is megoldható, optimális megoldása: $(x, y) = (1/3, 1/3)$, az optimális célfüggvény érték: $2/3$. A két feltétel együttes teljesülésének a valószínűsége: $P(1 \geq \xi_1)\, P(1 \geq \xi_2) = 1/4$.

Másodszor írjuk elő, hogy a feltételek együttesen 0,9 valószínűséggel teljesüljenek. Ekkor a következő feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned}
&x + y \to \min\\
&P\begin{pmatrix} 2x + y \geq \xi_1 \\ x + 2y \geq \xi_2 \end{pmatrix} \geq 0,9\\
&x, y \geq 0.
\end{aligned}$$

A két valószínűségi változó függetlensége miatt a valószínűségi feltétel baloldala szorzattá alakul:

$$P\begin{pmatrix} 2x + y \geq \xi_1 \\ x + 2y \geq \xi_2 \end{pmatrix} = P(2x + y \geq \xi_1)\, P(x + 2y \geq \xi_2).$$

A feltételek szimmetrikus voltát figyelembe véve a szorzat mindkét tényezőjének az értéke $\sqrt{0,9}$, optimális megoldása: $(x, y) = \left(\sqrt{0,4}, \sqrt{0,4}\right)$, az optimális célfüggvényérték közelítőleg: $1,26$.

Harmadszor írjuk elő, hogy a feltételek biztosan teljesüljenek. Ez megtörténik, ha ξ_1 és ξ_2 -t legnagyobb lehetséges értékükkel: 2 - vel helyettesítjük. Ekkor a feladatunk a következő lesz:

$$x + y \to \min$$
$$2x + y \geq 2,$$
$$x + 2y \geq 2,$$
$$x, y \geq 0,$$

amelynek optimális megoldása: $(x, y) = (2/3, 2/3)$, az optimális célfüggvény érték: $4/3$, jóval nagyobb, mint az előző kettő.

Végül a feltételek teljesülésének valószínűségét egyenként írjuk elő. Ekkor a következő feladathoz jutunk:

$$x + y \to \min$$
$$P\left(2x + y \geq \xi_1\right) \geq 0,9$$
$$P\left(x + 2y \geq \xi_2\right) \geq 0,9$$
$$x, y \geq 0.$$

A két valószínűségi feltétel helyettesíthető a következő determinisztikus feltételekkel:

$$2x + y \geq F_{\xi_1}^{-1}(0,9) = 1,8$$
$$x + 2y \geq F_{\xi_2}^{-1}(0,9) = 1,8.$$

Ekkor az optimális megoldás: $(x, y) = (0,6; 0,6)$, az optimális célfüggvényérték $1,2$. A két feltétel együttes teljesülésének valószínűsége pedig a valószínűségi változók függetlensége miatt $0,9^2 = 0,81$.

C.5. Büntetéses modellek

Ebben a modellben a célfüggvény csak az x vektortól függ: $c(x,\xi) = c(x)$. A sztochasztikus feltételeket is a célfüggvényben jelenítjük meg oly módon, hogy egy, e feltételek megsértésének mértékét kifejező, büntető függvényt adunk hozzá a $c(x)$ függvényhez. Csak a lineáris modellen mutatjuk be és sztochasztikus feltételeinket az $Ax = \xi$ egyenletrendszer jelenti. Ekkor a sztochasztikus modell:

$$\begin{aligned} c(x) + E[q(\xi - Ax)] &\rightarrow \min \\ Bx &\geq b. \end{aligned}$$

A q a büntetőfüggvényre fennáll, hogy $q(z) \geq 0, z \in R^m, q(0) = 0$. E feladat fontos speciális esete a feltételek megsértését komponensenként bünteti. Ekkor

$$q(\xi - Ax) = \sum_{i=1}^{m} \left(q_i^+ (\xi_i - A_i x)_+ + q_i^- (A_i x - \xi_i)_+ \right),$$

ahol $q(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} (q_i^+ (z_i)_+ + q_i^- (-z_i)_+)$, q_i^+ és q_i^- adott konstansok, $(a)_+ = max(a, 0)$.

Ekkor $E[q(\xi - Ax)] = \sum\limits_{i=1}^{m} E\left[q_i^+ (\xi_i - A_i x)_+ + q_i^- (A_i x - \xi_i)_+\right]$, a célfüggvény második tagja szeparábilissá válik és ezért a numerikus megoldását illetően egyszerűbben kezelhetővé.

C.6. A célfüggvény valószínűségi változót tartalmaz

(a) A $c(x, \xi)$ célfüggvény $E[c(x, \xi)]$ várható értékét minimalizáljuk:

$$E[c(x, \xi)] \rightarrow min$$

Ha speciálisan $c(x, \xi) = x\xi$, akkor $E[c(x, \xi)] = E[\xi]x$ lineáris lesz.

(b) Hatékony v. efficiens v. Pareto optimalizálás:

Optimális: olyan x_o lehetséges döntési vektor, amelyre fennáll, hogy nincs olyan másik x lehetséges döntési vektor, amelyre a $E[c(x, \xi)] = E[c(x_o, \xi)]$ és $Var[c(x, \xi)] < Var[c(x_o, \xi)]$, vagy $Var[c(x, \xi)] = Var[c(x_o, \xi)]$ és $E[c(x, \xi)] > E[c(x_o, \xi)]$. Azaz két célfüggvényünk van: a $c(x, \xi)$ várható értéke (maximalizálandó) és varianciája (minimalizálandó), és e két célfüggvény szerinti optimális megoldást keresünk. Az optimális megoldások körét leszűkítjük azzal, hogy a két célfüggvényt súlyozzuk.

Ha speciálisan $c(x,\xi) = x\xi$ és ξ kovariancia mátrixa C, akkor $x\xi$ varianciája xCx lesz, és a célfüggvény az alábbi alakú: $\alpha E(\xi)x - \beta xCx$, ahol α és β alkalmasan választott pozitív konstansok.

(c) Meglévő feltételeinket kiegészítjük egy újabb feltétellel, és megoldandó feladatnak a következőt tekintjük:

$$d \to \min$$
$$P(c(x,\xi) \le d) \ge p,\ x \in T,$$

ahol p előírt, rendszerint nagy valószínűség, $0 < p < 1$.

Ha speciálisan $c(x,\xi) = x\xi$, a ξ kovariancia mátrixa C és ξ többváltozós normális eloszlású valószínűségi változó vektor, továbbá $x\xi$ nemdegenerált eloszlású, minden $x \in T$ mellett, akkor a feladat optimális megoldására

$$P(c(x,\xi) \le d) = p$$

kell, hogy teljesüljön és az optimalizálandó célfüggvény:

$$d = E(\xi)x + \Phi^{-1}(p)\sqrt{xCx},$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A determinisztikus feladat tehát a következő:

$$E(\xi)x + \Phi^{-1}(p)\sqrt{xCx} \to \min;\ x \in T$$

C.7. Valószínűségeloszlás problémák

Érdeklődhetünk

1. a véletlen optimális célfüggvényérték eloszlása ill.
2. a véletlen optimális megoldás eloszlása,

vagy az eloszlás valamilyen jellemzői (pl. várható érték, variancia) iránt.

C.8. Kétlépcsős sztochasztikus programozás

A második lépcső feladata az, hogy az első lépcsőben (itt és most) hozott döntést korrigáljuk. Ez a következő feladat megoldását jelenti:

$$\begin{aligned} qy &\rightarrow min \\ Tx + Wy &= \xi, y \geq 0, \end{aligned}$$

ahol qy képviseli a korrekció költségét, Wy a korrekciót. Itt már adottak az x és a ξ vektorok, amelyektől a második lépcső lineáris programozási feladatának optimális célfüggvény-értéke függ. Jelölje $q(x,\xi)$ az optimális célfüggvény-értéket: $q(x,\xi) = min\{qy|Tx + Wy = \xi,\ y \geq 0\}$. Ekkor az x döntési vektort a modell úgy választja ki, hogy amellett, hogy x kielégíti az eredetileg kirótt

$$Ax = b, x \geq 0,\ x \in X \subset R^n$$

feltételt, minimalizálja a felmerülő összes költség várható értékét:

$$\begin{aligned} cx + Q(x) &\rightarrow \min \\ Ax &= b; x \geq 0; x \in X \subset R^n, \end{aligned}$$

ahol $Q(x) = E(q(x,\xi))$. $x \in X$ az ún. indukált feltételeket foglalja magában.

Az indukált feltételek jelentése a következő: Csak olyan, az első lépcső eredeti feltételeinek eleget tévő x döntési vektorok alkotják a feladat megengedett megoldásait, amelyekre a második lépcsőben lévő feladat megoldható (megengedett és véges optimummal rendelkezik) a szóban forgó valószínűségi változó vektor minden lehetséges értékére:

$$Tx + Wy = \xi,\ y \geq 0$$

rendelkezik megengedett megoldással.

Ezen felül a második lépcsős feladatnak a megengedett megoldások közül olyannal is rendelkeznie kell, amelyre qy minimális – ennek a feltételét vizsgáljuk:

Állítás: Tegyük fel, hogy $x \in \{x : Ax = b, x \geq 0,\ x \in X\}$, vagyis a

$$Tx + Wy = \xi,\ y \geq 0$$

feladatnak van megengedett megoldása ξ minden lehetséges értéke esetén. Ekkor a második lépcsős feladatnak van véges optimuma akkor és csak akkor, ha $\exists z \in R^m$, amelyre

$$zW \leq q.$$

Bizonyítás: A

$$\begin{array}{lrcl} (P) & qy & \rightarrow & min \\ & Wy & = & \xi - Tx,\; y \geq 0 \end{array}$$

LP feladat duális feladata a következő:

$$\begin{array}{lrcl} (D) & (\xi - Tx)z & \rightarrow & max \\ & zW & \leq & q \end{array}$$

A lineáris programozás dualitási tétele szerint a (P) feladatnak akkor és csak akkor van véges optimuma - feltéve, hogy van megengedett megoldása -, ha a (D) feladatnak van megengedett megoldása – és ekkor az optimális célfüggvény-értékek egyenlők. Ez éppen az állítás.

Irodalomjegyzék

[1] Arató Miklós: Általános biztosításmatematika, ELTE Eötvös Kiadó, 1997

[2] Borgan, O., J. Hoem, R. Norberg: A Nonasymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems, Scandinawian Actuarial Journal (1981) pp. 92-107.

[3] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J.: Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 1986.

[4] Bernoulli, D.: Specimenn Teoriae Novae de Mensura Sortis, Commentarii Academiae Scientiarum Impreialis Petropolitanae, Tomus V, pp. 175-192. Angol fordítás: Exposition of a new theory on the measurement of risk (Dr. Louise Sommer), Econometrica 22, 1954 (pp. 23-36).

[5] Brealey, R.A., Myers, S.C.: Modern vállalati pénzügyek, Panem Kft., Budapest, 1993.

[6] Bühlmann, H.: Mathematical methods in risk theory, Springer Verlag, New York, 1970.

[7] Charnes, A., W.W. Cooper: Chance constrained programming, Management Science 6(1959), 73-89.

[8] Cramer, H.: On the mathematical theory of risk, Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.

[9] Csiszár, I.: Information Type Measures of Difference of Probability Distributions And Indirect Observations, Studia Sci. Math. Hungar. 2(1967), 299-318.

[10] Dantzig, G.B.: Linear Programming And Extensions, Princeton University Press, Princeton, N.J.

[11] De Felice, M: Immunization theory: An actuarial perspective on asset-liability management, in: Financial Risk in Insurance, (ed: Ottaviani, G), Springer, 1995 (pp 63-85).

[12] De Pril, N.: Efficiency of a Bonus-Malus System, ASTIN Bulletin 10 (1978) pp.59-72.

[13] Deák István: Bevezetés a sztochasztikus programozásba, Operációkutatás No.4., Budapest, 2004.

[14] Di Domenica N., Birbilis G., Mitra G., Valente P.: Stochastic Programming and Scenario Generation within Simulation Framework: An Information Systems Perspective, CARISMA, Tecnical Report CTR/26/03, 2003.;

[15] Encyclopedia of Actuarial Science, John Wiley and Sons, Ltd, 2004.

[16] Fábián Csaba (2006): Handling CVaR objectives and constraints in two-stage stochastic models, RRR 5-2006, Rutgers Research Reports 2006.

[17] Heilmann, W.-R.: Fundamentals of Risk Theory, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1988.

[18] Hillier, F.S., Lieberman, G.J.: Introduction to Operations Research, Holden-Day, Inc., Oakland, California, 1986.

[19] Hossack, I.B., Pollard, J.H., B. Zehnwirth: Introductory statistics with applications in general insurance, Cambridge University Press, 1983.

[20] József Sándor: A vagyonbiztosítás módszerei, BKÁE Aktuárius Jegyzetek 1, Budapest 1995.

[21] József Sándor: A vagyonbiztosítás módszerei, BCE BOKCS Szakdolgozat, Budapest 2006.

[22] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit M.: Modern actuarial risk theory, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

[23] Karlin, S. - H.M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok, Gondolat, Budapest, 1985. c.

[24] Kataoka S.: A stochastic programming model, Econometrica 31 (1953),pp.181-196

[25] Klafszky Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása, MTA SZTAKI Tanulmányok 8, 1973, p. 139.

[26] Klerk, e. de, Roors, C., T. Terlaky: Nemlineáris optimalizálás, Operációkutatás No. 5.

[27] Komáromi Éva: Kockázatkezelés a biztosításban sztochasztikus programozási modellek alkalmazásával, Aktuárius Jegyzetek 4, 2000.

[28] Komáromi Éva: Lineáris Programmozás, Operációkutatás No.2., Budapest, 2003.

[29] Komáromi, É: A Dual Method For Probabilistic Constrained Problems, Mathematical Programming Study 28 (1986) 94-112.

[30] Klafszky Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása", MTA SZTAKI Tanulmányok 8., 1973, p.139

[31] Kovács Erzsébet: Kárstatisztikai elemzések, Aktuárius Jegyzetek 2, 1997.

[32] Kovács Erzsébet: Többváltozós adatelemzés, BKÁE AULA, Bp. 2003.

[33] Künzi-Bay, A., J. Mayer (2005): Computational aspects of minimizing conditional value-at-risk, Working paper No. 211. FINRISK, Swiss national centre of Competence in Research.

[34] Li, S. X.: A Saticficing Chance Constrained Model in the Portfolio Selection of Insurance Lines and Investments, Journal of the Operational Research Cociety (1995, pp:1111-1120)

[35] Loimaranta, K.: Some Asymptotic Properties of Bonus Systems, ASTIN Bulletin 6 (1972) pp. 233-245.

[36] Luenberger, D.G.: Investment Science, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[37] Lundberg, F.: Some supplementary researches on the collective risk theory, Skandinavisk Aktuarietidskrift 15, 1932, (pp.137-158).

[38] Mangasarian, O.L.: Nonlinear Programming, Mcgraw-Hill, 1969.

[39] Markovitz H.: Portfolio Selection, Journal of Finance 7, 1952, pp. 77-91.

[40] McCutcheon, J.J., Scott, W.F.: An introduction to the mathematics of finance, The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries in Scotland, 1986.

[41] Messina E., Mitra G.: Modelling and Analysis of Multistage Stochastic Programming Problems: a Software Environment, European Journal of Operational Research, Vol. 101, pp. 343-359, 1997)

[42] Michaletzky György: Kockázati folyamatok, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.

[43] Prékopa, A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.

[44] Prékopa, A.: On Probabilistic Constrained Programming, Mathematical Programming Study 28(1970), 113-138.

[45] Prékopa, A.: Stochastic Programming, Akadémia Kiadó, Budapest, 1995.

[46] Prékopa, A.: Logarithmic concave measures with applications to stochastic programming Acta Sci. Math. 32 (1971), pp. 301-316.

[47] Rapcsák Tamás: Nemlineáris optimalizálás, Operációkutatás No.4., Budapest, 2004.

[48] Redington, F.M.: Review of the principles of life office valuations, Journal of the Institute of Actuaries 78, 1952 (pp.286-340).

[49] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.(2000): Optimization of conditional value-at-risk, J. of Risk 2, pp. 21-41.

[50] Straub, Erwin: Non-life insurance mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.

[51] Wolff, K-H.: Versicherungsmathematik, Spinger, 1970.

Az „OPERÁCIÓKUTATÁS” sorozatban eddig megjelentek:

Nagy Tamás[1] – Klafszky Emil[2]:
SZTOCHASZTIKUS JELENSÉGEK

Komáromi Éva[3]:
LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

Deák István[4]:
BEVEZETÉS A SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSBA

Hujter Mihály[5]:
PERFEKT GRÁFOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Etienne de Klerk[6] – Cornelis Roos[7] – Terlaky Tamás[8]:
NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

Szántai Tamás[9]:
PERT ALKALMAZÁSOK

---

[1] Miskolci Egyetem Matematikai Intézete, Alkalmazott Matematika Tanszék, e-mail: matente@gold.uni-miskolc.hu
[2] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építéskivitelezés Tanszéke, e-mail: klafszky@ekt.bme.hu
[3] Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem Operációkutatás Tanszéke, e-mail: komaromi@bkae.hu
[4] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, Operációkutatási Csoport, e-mail: deak@math.bme.hu
[5] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, Operációkutatási Csoport, e-mail: hujter@math.bme.hu
[6] Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo (ON), Canada, edeklerk@math.uwaterloo.ca; http://www.math.uwaterloo.ca/~edeklerk
[7] Department of Information Systems and Algorithms, T.U. Delft, Delft, The Netherlands, C.Roos@ewi.tudelft.nl; http://www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos
[8] Department of Computing and Software, McMaster University, Hamilton (ON), Canada, terlaky@mcmaster.ca; http://www.cas.mcmaster.ca/~terlaky
[9] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, e-mail: szantai@math.bme.hu