EGYENSÚLY *és* OPTIMUM

Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára

EGYENSÚLY ÉS OPTIMUM

EGYENSÚLY *és* OPTIMUM

Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára

Aula Kiadó, 2012

Ez a könyv az OTKA 101224 pályázat támogatásával jelent meg.

Szerkesztette és lektorálta Solymosi Tamás és Temesi József

LaTeX szerkesztő Farkasházi Nóra

ISBN 978-963-339-018-4

AULA Kiadó Kft.
Az AULA Kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesületének tagja.
Felelős kiadó: Horváth Béla ügyvezető igazgató
Műszaki vezető: Kis Virág
Nyomás: Aula Nyomda

Köszöntés (előszó helyett)

Tanulmánykötetünk Forgó Ferenc 70. születésnapjára készült. Az itt szereplő tanulmányok szerzőiben közös, hogy az ünnepelt eddigi hosszú életútjának valamely szakaszában tanítványként, beosztottként, kollégaként, barátként (sőt, ezen szerepek közül többen vagy akár mindegyikben) együtt dolgoztak vele, s most megragadták az alkalmat, hogy tiszteletteljes jókívánságaikat e módon juttassák kifejezésre. A kötet írásait 28 szerző jegyzi. Impozáns szám, ám nyilván nagyságrendekkel nagyobb érték képviselné mindazokat, akik ismerik, szeretik és sokra értékelik Forgó Ferencet. Ezen tanulmányok éppen csak jelzik azokat a területeket, ahol az eddigiek során működött, alkotott – s remélhetőleg velünk együtt még sokáig dolgozni fog.

A kötet címe – „Egyensúly és optimum” – a szerkesztők szándéka szerint azonban többet jelent, mint tudományterületi kulcsszavakat. Igaz ugyan, hogy Forgó Ferenc jelentős munkáinak többségét a játékelmélet és a matematikai programozás területein publikálta, azonban a puszta jelentésen túl mindkét kifejezés hordoz valamit az ő személyiségéből is. Tanárként, tanszék- vagy intézetvezetőként, tudományos társaságok tagjaként, vagy magánemberként is érzékelhettük azt a szelíd törekvést, amivel a legjobb megoldás felé terelte diákjait, kollégáit, tudóstársait, barátait. Ha pedig konfliktusok merülnek fel, mindig számíthatunk arra, hogy olyan megoldást keres, amelyik mindenkinek megfelel, ahonnan nem érdemes elmozdulni, s ahol a közösség is a legtöbbet profitálhat.

Az ünnepelt nem szereti az ünneplést. Kicsit félve nyújtjuk át ezt a kötetet is, nem csipked-e meg bennünket bölcs iróniával ezért a „személyi kultuszért”. Hiszen az egyik fontos dolog, amit tanulhattunk tőle, az, hogy a kiegyensúlyozott, magas színvonalú munka az élet nélkülözhetetlen tartozéka, nem feltétlenül van szükség a kerek évszámokhoz kötött megemlékezésekre. Most azonban „fellázadtunk”, úgy gondolva, a 70. életév már alkalmat adhat arra, hogy kicsit megálljunk és emlékezzünk, röviden végigtekintve Forgó Ferenc életútján is.

A Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszéke természetes módon magán viseli az elődök jegyeit. A Matematika Tanszék, később a Matematikai és Számítástudományi Intézet, ezen belül, majd utána az Operációkutatás Tanszék mind-mind a nagy egyéniségek, kiváló tanárok és tudósok munkája nyomán lett országosan elismert műhellyé. Forgó Ferenc egyetemi pályáját 1960-ban a legendás terv-matematika szakon indította el Krekó Béla és Szép Jenő tanítványaként, majd hamarosan kollégájukká vált, és a stafétabotot Meszéna Györgytől átvéve 1987-től nehéz időszakokban közel 15 éven keresztül sikeresen kormányozta az intézet és a tanszék hajóját. Az ő nemzetközi kapcsolatai, hazai kutatói elismertsége, vezetői kvalitásai is hozzájárultak ahhoz, hogy ebben az időszakban az Operációkutatás Tanszéken dolgozni, publikálni presztízst, szakmai rangot jelentett.

1970-ben Ford-ösztöndíjjal egy évet töltött az Egyesült Államokban (University of Southern California), majd több alkalommal, összesen 3 év időtartammal, hosszabb vendégtanári meghívást is kapott a tengerentúlon. Az operációkutatás egyes területein (nemkonvex programozás, játékelmélet) nemzetközileg elismert eredményeket ért el, magyar és angol nyelvű szakkönyveket írt egyedül és társszerzőkkel. Cikkei referált folyóiratokban jelentek meg, publikációs listája impozáns. Az MTA Operációkutatási Bizottságának több mint 20 éve folyamatosan tagja, az Operációkutatási Társaság és a Gazdaságmodellezési Társaság aktív tagja, az előzőnek alelnöke, az utóbbinak elnöke volt az 1990-es években. Nemzetközi és hazai szakmai konferenciák előadója, szekcióvezetője, programbizottsági tagja volt számos alkalommal. Alkalmazói tevékenysége szintén jelentős, mint azt e téren született publikációinak sora is jelzi. 1995 óta négy játékelméleti OTKA-kutatási csoportban vett részt, egynek vezetője volt. Ugyancsak részt vett egy EU kutatási projektben, a magyar csoport vezetőjeként.

Sokoldalú tevékenysége elismeréséül 1998-ban Szentgyörgyi Albert díjat, 2007-ben Magyar Köztársaság Arany Érdemkeresztje kitüntetést kapott. A szakma 2000-ben Krekó Béla díjjal jutalmazta. Hallgatói értékelései magasak, tanítványai tisztelik és szeretik. Bár munkakedve, alkotóereje töretlen, a felsőoktatási rendeletek kivételt nem ismerő szabályai szerint aktív tanszéki szerepét 2012-ben fel kell cserélnie a Professor Emeritus címmel. Ennek ellenére mindannyian – őt is beleértve – úgy véljük, ez nem lesz akadálya annak, hogy az eddigiekhez hasonló aktivitással vegyen részt a kutatásban, a doktori iskolák munkájában, fontos tanszéki feladatok megoldásában. Ugyanakkor remélhetőleg az eddiginél több ideje lesz családjával, unokáival, no meg sporttal, zenével, utazással foglalkoznia.

E kötet szerzői, szerkesztői, a többi tanítvány és kolléga nevében, mi mást kívánhatnánk, mint hogy (szakmai) sikerekben gazdag, kiegyensúlyozott, egészséges évek sora következzen az újabb kerek évfordulóig!

Budapest, 2012. április

Temesi József
Solymosi Tamás

Tartalomjegyzék

I. rész
Játékelmélet

Alkuegyensúlyok és stabil halmazok

Bednay Dezső

Kivonat
A játékelmélet egy fontos kutatási területe a Nash-program, amely a kooperatív és nemkooperatív megoldáskoncepciók között próbál kapcsolatot teremteni. Dolgozatomban az egyik első kooperatív megoldást vizsgálom, a stabil halmazokat. Harsányi egy 1974-ben megjelent cikkében foglalkozott a témával, megfogalmazta a nehézségeket a stabil halmazok nemkooperatív játékokba ültetésével kapcsolatban, valamint megadta a játékok egy olyan részhalmazát, ahol ez probléma nem áll fenn. Ezen az osztályon a stabil halmazok előállnak úgy, mint egy nemkooperatív alkujáték egyensúlyi stratégiáinak fixpontjai. Ezt az alkujátékot változtatom meg, és megmutatom, hogy így már a hozzárendelési játékok (amelyek csak nagyon speciális esetben voltak a Harsányi-féle osztályban) stabil halmazai is előállnak egyensúlyként.

1. Bevezetés

Átváltható hasznosságú játékon, röviden TU-játékon egy (P,v) párt értünk, ahol P egy nemüres véges halmaz, a játékosok halmaza, v pedig egy $\mathscr{P}(P) \to \mathbb{R}$ függvény, amire $v(\emptyset) = 0$. Ez a függvény azt mutatja meg, hogy a játékosok adott részhalmaza (koalíciója) együttműködve mennyi pénzt (a szereplők között átváltható hasznosságot) képes elérni.

Az együttműködés eredményeként „megtermelt” pénzösszeget valahogyan szét kell osztani a játékosok között. Vizsgáljuk meg az ilyen kifizetések tulajdonságait:

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (P,v) játékban az $x = (x_i)_{i\in P} \in \mathbb{R}^P$ kifizetés-vektor*

- *elérhető az S koalíció számára, ha $x(S) = \sum_{i\in S} x_i \leq v(S)$;*

Bednay Dezső
Budapesti Corvinus Egyetem, email: bednay@gmail.com

- *elfogadható az S koalíció számára, ha $x(S) \geq v(S)$;*
- *előnyösebb az S számára, mint az $y = (y_i)_{i \in P}$ kifizetés-vektor, ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$-re;*
- *az S koalíción keresztül dominálja az y kifizetés-vektort, ha az S számára az x elérhető, és előnyösebb mint az y (jelölése: $x\,\mathrm{dom}_S\,y$);*
- *nem dominált az S koalíción keresztül, ha nincs az S számára elérhető olyan z kifizetés-vektor, amire $z\,\mathrm{dom}_S\,x$;*
- *dominálja az $y = (y_i)_{i \in P}$ kifizetés-vektort, ha létezik egy olyan S koalíció, amelyre $x\,\mathrm{dom}_S\,y$, (jelölése: $x\,\mathrm{dom}\,y$);*
- *nem dominált, ha egyetlen S koalíción keresztül sem dominált.*

Egy társulás létrejöttéhez elengedhetetlen, hogy a benne résztvevők meg tudjanak egyezni az együtt elérhető legnagyobb haszon mindegyikük számára elfogadható elosztásában. Sok játékban (például az általunk is vizsgált hozzárendelési játékban) a társadalomnak érdeke a nagykoalíció megalakulása, mert így összesen nagyobb hasznot képesek elérni, mint kisebb csoportokban. Ezért ezt a $v(P)$ összeget akarják egymás között szétosztani. A nagykoalíció számára elérhető kifizetés-konfigurációkon belül a koalíciók általi elfogadhatóság szempontjából a következő hierarchiát szokás felállítani.

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (P, v) játékban az $x = (x_i)_{i \in P}$ kifizetés-vektor egy*

- *szétosztás, ha $x(P) = v(P)$, vagyis a P számára elfogadható és elérhető;*
- *félelosztás, ha $x(P) \leq v(P)$, és $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in P$-re, vagyis a nagykoalíció számára elérhető és minden egyszemélyes koalíció (vagyis játékos) számára elfogadható;*
- *elosztás, ha $x(P) = v(P)$, és $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in P$-re, azaz olyan szétosztás, amelyik minden egyszemélyes koalíció (minden játékos) számára elfogadható;*
- *mag-elosztás, ha $\sum_{i \in P} x_i = v(P)$, és $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ minden $S \subseteq N$-re, azaz olyan szétosztás, amelyik minden koalíció számára elfogadható.*

Jelölje $\mathscr{I}^*_{(P,v)}$ a szétosztások halmazát, $\mathscr{I}'_{(P,v)}$ a félelosztások halmazát, $\mathscr{I}_{(P,v)}$ az elosztások halmazát, és $\mathscr{C}_{(P,v)}$ a mag-elosztások halmazát, röviden a (P, v) játék magját.

Szétosztás minden játékban található. Félelosztás és elosztás viszont akkor és csak akkor van, ha $v(P) \geq \sum_{i \in P} v(\{i\})$, ami egy igen gyenge feltevés a szétosztható $v(P)$ nagyságára vonatkozóan. Mag-elosztások létezéséhez már egy ennél jóval szigorúbb feltételnek kell teljesülnie. Az általunk vizsgált hozzárendelési játékokban ez a feltétel mindig teljesül, a mag tehát sosem üres (Shapley és Shubik, 1972), a mag-elosztások pedig jellemezhetők úgy, mint azok az elosztások, amiket semmilyen más elosztás nem dominál.

Neumann és Morgenstern (1953) alapvetően olyan játékokat vizsgáltak, amelyekben nincsen mag-elosztás, ezért ők az elosztások egyenkénti nem domináltsága helyett egy ennél gyengébb stabilitásfogalmat vezettek be.

3. Definíció (Stabil halmaz). *Egy $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{I}_{(P,v)}$ halmaz stabil, ha teljesíti a következő két tulajdonságot:*

- *Belső stabilitás:* $\nexists\, x, y \in \mathscr{V} :\ x \text{ dom } y.$
- *Külső stabilitás:* $\forall\, y \in \mathscr{I}_{(P,v)} \setminus \mathscr{V}\ \ \exists\, x \in \mathscr{V} :\ x \text{ dom } y.$

A stabil halmaz elnevezést az indokolja, hogy ha ennek a halmaznak egy eleme ellen egy koalíció fellép és kikényszerít egy másik, ezt domináló elosztást, akkor van egy másik koalíció, amelyik elérheti, hogy visszatérjenek egy a stabil halmazbeli elosztáshoz (nem feltétlenül az eredetihez). Ezért a halmaztól való minden eltérés csak ideiglenes lehet, így nem is éri meg ettől eltérni.

Harsányi (1974) a stabil halmazoknak ezt az interpretációját kritizálta, mert csak annyi igaz, hogy a halmaz valamelyik pontjába kerülnek vissza, de lehet, hogy a halmaznak ez az utóbbi pontja az eredeti elosztástól eltérő koalíció minden tagja számára szigorúan jobb, csak számukra nem volt megvalósítható. Így közvetlenül nem tudtak volna eljutni oda, csak a másik koalíció segítségével. Ha ez a helyzet, akkor mégis van olyan koalíció, amelyik el fog térni a stabil halmaztól, tehát az „nem is olyan stabil".

Ez a probléma abból adódik, hogy a dominancia relációban a játékosok rövidlátóak: csak az érdekli őket, hogy a következő lépésben szigorúan jobban járjanak. Ezzel szemben az előbb leírt példában a koalíciók már számoltak azzal, hogy ha eltérnek, akkor egy következő koalíció is el fog térni, …, és több lépéssel később mi lesz a helyzet. Az ilyen, több lépésben történő dominanciát nevezte Harsányi közvetett dominanciának, mert itt a két kifizetésvektor nem közvetlenül, hanem más vektorokon keresztül vezető úton, közvetetten dominálja egymást.

4. Definíció (Közvetett dominancia). *Egy y vektor közvetetten dominálja az x vektort a koalíciók egy $S_1, S_2 \dots S_n$ sorozatán keresztül, ha létezik egy olyan $x = x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n = y$ sorozat, amiben minden $i = 1, 2, \dots, n$-re $x^i \operatorname{dom}_{S_i} x^{i-1}$, továbbá minden $j \in S_i$-re $y_j > x^{i-1}_j$.*

Itt az S_1 koalíció nem csak a következő állapottal számol, hanem azzal is, hogy ha kikényszerítik az x^1 vektort, akkor utána az S_2 kikényszeríti az x^2-t, …, végül eljutnak az y vektorhoz. Az S_i koalíció tagjainak akkor éri meg folytatni ezt a láncot, ha az y vektor előnyösebb számukra mint az x^{i-1}, amitől ők térnek el.

1. Példa. Nézzük az $A = [10, 6, 2]$ mátrixhoz tartozó hozzárendelési játékot. Jelölje M az eladót, és N_1, N_2, N_3 a három vevőt, kifizetésüket pedig rendre u, és v_1, v_2, v_3. Mivel szétosztható többletet csak egy $\{M, N_i\}$ típusú koalíció tud elérni, dominálás is csak rajtuk keresztül történhet, jelölje ezt röviden dom_i $(i = 1, 2, 3)$.

Ebben a hozzárendelési játékban az $(u; v_1, v_2, v_3) = (0; 10, 0, 0)$ elosztást közvetetten dominálja a $(2; 7, 0, 1)$ elosztás, mégpedig a koalíciók $\{M, N_3\}$, $\{M, N_1\}$ és az elosztások $(0; 10, 0, 0)$, $(1; 6, 2, 1)$, $(2; 7, 0, 1)$ sorozatán keresztül, mivel:

$$(2; 7, 0, 1)\ \mathrm{dom}_1\ (1; 6, 2, 1)\ \mathrm{dom}_3\ (0; 10, 0, 0),$$

és az $\{M, N_3\}$ koalíció mindkét tagja számára előnyösebb a végső $(2; 7, 0, 1)$ elosztás, mint a kiinduló $(0; 10, 0, 0)$ elosztás.

Közvetlen dominancia viszont nincs a két vektor között. Ilyen dominancia csak az eladó és a harmadik vevő alkotta koalíción keresztül lenne lehetséges, mivel a $(2;7,0,1)$ vektor csak nekik előnyösebb a másiknál, számukra viszont ez nem elérhető.

A későbbiekben érdekes lesz számunkra a következő, Harsányi (1974) által vizsgált játékosztály:

5. Definíció (Abszolút stabil játék). *Egy játékot abszolút stabil játéknak nevezünk, ha a játékban a közvetett dominanciából következik a közvetlen, azaz ha a játékban egy elosztás dominál egy másikat egy S koalícióval kezdődő sorozaton keresztül, akkor az S koalíción keresztül közvetlenül is dominálja.*

Könnyű belátni, hogy minden olyan játék abszolút stabil, amiben csak a nagykoalíció és a $(|P|-1)$-tagú koalíciók értéke pozitív, a többié pedig 0. Ilyen például minden legfeljebb 3-szereplős játék. Egy másik példa az abszolút stabil játékra a Gale és Shapley (1964) által definiált házaspárosítás-játék, mivel ezekben a játékokban minden párosítás elérhető a koalíciók számára.

2. Harsányi modellje

Egy (P,v) kooperatív játékhoz definiáljunk egy nemkooperatív alkujátékot a következőképpen: a játékosok halmaza legyen $P \cup \{0\}$, ahol a 0 játékos az alku vezetője. A játék az alábbi forgatókönyv szerint zajlik: van egy x^0 elosztás (vagy félelosztás), ami az alku aktuális állapotát mutatja. Először a 0 játékos kijelöl egy S koalíciót, ennek a tagjai – szimultán módon – javaslatot tehetnek egy új elosztásra (vagy félelosztásra). Két lehetőség van:

1. Ha a kijelölt S koalíció tagjai nem mind ugyanazt a vektort javasolták, vagy ha ugyan mind ugyanazt az x^1-et javasolták, de az x^1 nem dominálja az x^0 vektort az S koalíción keresztül, akkor a játék véget ér és a P-beli játékosok megkapják az x^0-beli kifizetésüket.
2. Ha mindannyian ugyanazt az x^1-et mondják és $x^1 \operatorname{dom}_S x^0$, akkor az alku aktuális állapota megváltozik x^1-re és a vezető kijelöl egy újabb koalíciót, ...

A kifizetések a következők: ha az alku véget ér, akkor a P-beli játékosok megkapják az utolsó x^i vektort, ha nem ér véget, akkor mindenki 0-t kap. A vezető kifizetése, ha t lépésben ér véget az alku, akkor $\sum_{j=0}^{t} 2^{-j}$, ha pedig nem ér véget, akkor $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2$ lesz. A vezető célja tehát, hogy minél tovább tartson az alkudozás.

Amennyiben egy koalíció egy adott állapotban nem akar dominálni, akkor feltehető, hogy ha megkérdezik őket, akkor az éppen aktuális állapotot fogják javasolni, nem pedig különböző elosztásokat, vagy egy olyan vektort, amelyik nem képes dominálni. Éppen ezért azokat az állapotokat, amelyekben megáll az alku, nevezhetjük a stratégiaprofil fixpontjának. Harsányi (1974) megmutatta, hogy a stabil halmazok előállnak, mint egyensúlyi stratégiák fixpontjai, hiszen az abszolút stabil játékok osztályán nem különbözik a közvetlen és a közvetett dominancia.

1. Tétel (Harsányi, 1974). *Az abszolút stabil játékokban a Harsányi-féle alkujáték részjáték tökéletes koalíciós Nash-egyensúlyi stratégiaprofiljainak fixpontjai egy stabil halmazt alkotnak. Fordítva, minden stabil halmazhoz található egy részjáték tökéletes koalíciós Nash-egyensúlyi stratégiaprofil, amelynek fixpontjai a halmazbeli kifizetések.*

A koalíciós Nash-egyensúly azt jelenti, hogy nem csak egy embernek van lehetősége megváltoztatni a stratégiáját, mint általában a Nash-egyensúlynál, hanem egyszerre többnek is. Például a Fogolydilemma játéknak nincs koalíciós Nash-egyensúlya, mert ott a két játékosnak megéri egyszerre eltérni a dezertál-dezertál stratégiától.

Erre a változtatásra az alkujáték szimultán része miatt van szükség, mivel ha koalíciós helyett csak rendes Nash-egyensúlyt követelnénk meg, akkor egyensúlyi lenne az a viselkedés, hogy egyetlen helyzetben sem akar senki sem dominálni. Ugyanis a kialakult állapoton egyénileg egyetlen játékos sem képes változtatni, hiába mondana mást, az alku nem folytatódna tovább, így nem érné meg neki eltérnie.

A későbbiekben ezt a tételt szeretnénk általánosabban, egy bővebb játékosztályon is belátni. A bizonyítás érdekében változtassunk egy kicsit az alkujátékon. A Harsányi-féle tétel az új alkujátékkal is érvényes lesz, de így nem csak az abszolút stabil játékokra, hanem a hozzárendelési játékokra is, amelyek pedig – amint azt a fenti példában is láttuk – nem abszolút stabilak.

3. Egy új alkujáték

A Harsányi (1974) által definiált játékhoz képest annyit változtatunk, hogy nincs vezető, hanem minden félelosztáshoz tartozik a koalícióknak egy sorrendje. Először a sorrendben első koalíció tagjait kérdezik meg. Ha meg tudnak állapodni egy új, az előzőt domináló vektorban, akkor áttérnek az új vektorra, ha nem, akkor megkérdezik a sorrendben következő koalíciót. Ha egyik koalíció tagjai sem képesek megegyezni, csak akkor történik meg a szétosztás.

Megtehettük volna azt is, hogy megtartjuk az alkuvezetőt, csak neki most már a koalíciók egy sorrendjét kell mondania, és van valamilyen preferenciája a megvalósuló elosztásokon, vagy az eredeti modellhez hasonlóan az a célja, hogy minél tovább tartson az alku.

A leírás egyszerűsítése miatt feltehetjük, hogy amikor megkérdezzük egy koalíció tagjait, akkor nem csak ezen koalíció tagjainak, hanem az összes játékosnak kell egy javaslatot tenni az új félelosztásra, de csak a kijelölt koalíciót vesszük figyelembe, teljesen mindegy, hogy a többiek mit mondanak.

Egy játékos stratégiája egy $\mathscr{I}' \times \{1,2,\dots,2^{|P|}\} \to \mathscr{I}'$ függvény, ami azt mutatja meg, hogy mit mond először, másodszor, ..., $2^{|P|}$-edszer a játékos, ha az alku egy adott félelosztásnál tart. A Harsányi-féle játékhoz képest sokszor egyszerűbb, hogy nincs vezető, mivel innentől egyáltalán nem érdekes, mikor ér véget az alku, csak az, hogy véget ér-e, és ha igen, melyik állapotban. Amit a játékvezető elhagyásával megspóroltunk, azt a játékosok stratégiáinak bonyolultságával kell megfizetnünk, mivel ha egy koalíció nem dominál, akkor nem történik meg a kifizetés, hanem egy újabb koalíciót kérdeznek meg. Ezért lényeges, hogy az adott koalíció mikor következik, kik azok, akiknek utána még van lehetőségük alkudozni.

Ezen különbségek ellenére a két játék nagyon hasonlít egymásra. Ennek az a fő oka, hogy a vezető feladatát valójában csak szétosztottuk a játékosok között. Egyensúlyban nehezen elképzelhető, hogy az alku a Harsányi-féle játékban megáll, míg a másikban folytatódik, mert akkor a vezető nem optimálisan választott koalíciót.

1. Állítás. *Az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza zárt.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz van egy fixpontokból álló $\{x^i\}$ sorozat, aminek az x határértéke nem fixpont. Ekkor van egy koalíció, amelynek megéri eltérni az x vektortól, mert az alku végén mindegyikük szigorúan jobban fog járni, mégpedig legalább ε-nal, ahol $\varepsilon > 0$. Ebben az esetben viszont az x vektor $(\varepsilon/2)$-sugarú környezetében nem lehet fixpont, mert az előző koalíciónak ettől a fixponttól is megérné ugyanígy eltérni, ami ellentmondás. ❑

2. Állítás. *Az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmazára teljesül a belső stabilitás.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz és van két fixpont, x és y, valamint egy S koalíció, amin keresztül az y dominálja az x-et. Ebben az esetben az S koalíciónak megéri változtatnia a stratégiáján: ha az x helyzetben, amikor rájuk kerül a sor, mindenki y-t mond az x helyett, azzal mindannyian nyernek, mivel az y elosztás fixpont volta miatt az alku ott fog megállni, és ezzel mindannyian jobban járnak, mivel $y\,\mathrm{dom}_S\,x$. Ezért az eredeti stratégia nem lehetett egyensúlyi. ❑

3. Állítás. *Egy egyensúlyi stratégiához tartozó fixpontok halmaza része az elosztáshalmaznak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és van egy $x \in \mathscr{I}'\backslash\mathscr{I}$ fixpont. Növeljük meg x minden koordinátáját $(v(P)-x(P))/|P|$-vel, és jelöljük ezt a vektort y-nal. Nyilvánvaló, hogy $y \in \mathscr{I}$ és $y\,\mathrm{dom}_P\,x$. Ha x fixpont volt, akkor az y-nak is annak kell lennie, mivel, ha y-tól megéri eltérni egy koalíciónak, akkor x-től is megéri eltérnie. Viszont y dominálja x-et a nagykoalíción keresztül, ami a 2. Állítás miatt ellentmondás. ❑

Ezek az eredmények általánosan is igazak minden kooperatív játékból származtatott alkujátékban. Hozzárendelési játékok esetén (amikor a játékosok két csoportra bonthatóak és dominancia szempontjából csak a vegyespárosok számítanak, a nagykoalíció értéke pedig megegyezik a vegyespárosok által elérhető maximális összhaszonnal) ennél több is elmondható:

4. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza háló.*

Bizonyítás: A gondolatmenet gyakorlatilag ugyanaz, mint a mag, valamint a stabil halmaz háló tulajdonságának bizonyításánál.

Legyen $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ két fixpont. Ekkor $(x^1 \vee x^2;y^1 \wedge y^2)$ és $(x^1 \wedge x^2;y^1 \vee y^2)$ közül legalább az egyik félelosztás. A szimmetria miatt választhatjuk az elsőt. Ha ez nem lenne fixpont, akkor van olyan (i,j) vegyespáros koalíció, amelynek megérné ettől eltérni és egy $(x^3;y^3)$ félelosztást mondani. A szimmetria miatt feltehető, hogy $y_j^1 \leq y_j^2$. Ekkor viszont $(x^3;y^3)\,\mathrm{dom}_{ij}(x^1;y^1)$ miatt az (i,j) vegyespárosnak megéri eltérnie az $(x^1;y^1)$ esetben is, tehát az nem lehet fixpont.

Azt kaptuk tehát, hogy ha $(x^1 \vee x^2;y^1 \wedge y^2)$ egy félelosztás, akkor fixpont is. A 3. Állítás miatt ekkor $(x^1 \vee x^2;y^1 \wedge y^2)$ egy elosztás, ekkor viszont az $(x^1 \wedge x^2;y^1 \vee y^2)$ is elosztás, tehát fixpont is, azaz a fixpontok halmaza háló. ❑

5. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza tartalmaz egy olyan pontot, amiben mindent az eladók kapnak, és egy olyan pontot, amiben mindent a vevők kapnak.*

Bizonyítás: A szimmetria miatt elég megmutatni, hogy van olyan pont, amiben mindent az eladók kapnak. Az 1. és 3. Állítás szerint a fixpontok halmaza egy zárt háló, így van olyan pontja, amelyben az eladók azt a maximális összeget kapják, amennyit egy fixpontban csak kaphatnak. Ha ebben a pontban nem mindent az eladók kapnak, akkor vegyük azt a pontot, amiben a vevők kifizetését az eladók között egyenlő arányban szétosztjuk. Ez nem lehet egy fixpont, mivel minden eladó többet kap, mint a maximális fixpontban. Ekkor viszont van olyan koalíció, amelyiknek megéri ettől eltérni, mert az alku végén egy ennél szigorúan jobb elosztáshoz jut. Ilyen viszont nem lehet, mert ennek az utolsó pontnak egy fixpontnak kell lennie, ebben viszont az eladók nem járhatnak jobban, mint az eredeti elosztásban, ami az eladók számára optimális volt. ❑

6. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak a halmazában bármely két pont között van egy harmadik.*

Bizonyítás: Legyen $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ két fixpont. Megmutatjuk, hogy található a kettő között egy harmadik fixpont is. Feltehető, hogy $x^1 \leq x^2$ és $y^1 \geq y^2$, mivel ha nem így lenne, akkor az $(x^1 \wedge x^2; y^1 \vee y^2)$ pont jó lenne harmadik fixpontnak. Legyen $(x^3; y^3) = ((x^1; y^1) + (x^2; y^2))/2$. Ha az $(x^3; y^3)$ egy fixpont, akkor találtunk egy $(x^1; y^1)$ és $(x^2; y^2)$ közötti fixpontot. Ha nem fixpont, akkor van olyan (i, j) vegyespáros, akiknek megéri eltérni az $(x^3; y^3)$ elosztástól, mert így az alku végén egy $(x^4; y^4)$ fixponthoz jutnak, ami mindkettőjüknek előnyösebb, mint az $(x^3; y^3)$. Ha $x_i^1 \leq x_i^3$ és $y_j^1 \leq y_j^3$, akkor az $(x^1; y^1)$ elosztástól is megérné eltérni. Tehát $x_i^1 > x_i^3$-nek vagy $y_j^1 > y_j^3$-nek fenn kell állnia. A szimmetria miatt feltehető, hogy az első egyenlőtlenség teljesül. Ekkor $x_i^1 > x_i^3 = (x_i^1 + x_i^2)/2 > x_i^2$. Hasonlóan $x_i^2 > x_i^3$ és $y_j^2 > y_j^3$ közül is valamelyiknek teljesülnie kell. Az első egyenlőtlenség nem teljesülhet, így a másodiknak kell teljesülnie. Ekkor $y_j^2 > y_j^3 = (y_j^1 + y_j^2)/2 > y_j^1$. A 3. Állítás miatt $\mathrm{med}((x^1; y^1); (x^2; y^2); (x^4; y^4))$ egy fixpont, és $y_j^1 < y_j^3 < y_j^4$, valamint $x_i^2 < x_i^3 < x_i^4$ miatt különbözik az $(x^1; y^1)$-től és az $(x^2; y^2)$-től is. ❑

Mivel a fixpontok halmaza zárt és bármely két pontja közt van egy harmadik, így összefüggő is.

7. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza tartalmazza a bármely két pontja közti félelosztások magját.*

Bizonyítás: Az $(x^1; y^1)$ és $(x^2; y^2)$ pontok közti félelosztások magja azon $(x; y)$ félelosztásokból áll, amelyeknél minden (i, j) vegyespárosra $x_i + y_j \geq a_{ij}$ vagy $x_i = x_i^1 \vee x_i^2$ vagy $y_j = y_j^1 \vee y_j^2$ teljesül. Ha egy ilyen félelosztás nem fixpont, akkor van olyan vegyespáros, amelyiknek megéri ettől eltérni, de akkor ennek a vegyespárosnak ugyanígy megéri eltérnie $(x^1; y^1)$-től vagy $(x^2; y^2)$-től is, tehát az nem lehet fixpont. ❑

2. Tétel. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjai egy stabil halmazt alkotnak.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz felhasználjuk a stabil halmazok hozzárendelési játékokon vett karakterizációját (Bednay, 2011), miszerint
Egy hozzárendelési játékban az elosztáshalmaz egy részhalmaza pontosan akkor stabil halmaz, ha

1. *teljesíti a belső stabilitást;*
2. *tartalmaz egy olyan pontot, ahol mindent az eladók kapnak és egy olyat, ahol mindent a vevők kapnak;*
3. *összefüggő;*
4. *tartalmazza a bármely két pontja közti elosztások magját.*

Azt, hogy minden fixpont egy elosztás a 3. Állításban láttuk be. A belső stabilitás a 2. Állításból, az pedig, hogy tartalmazza a két szélsőséges elosztást az 5. Állításból adódik. Az összefüggőség az 1. és a 6. Állítás együttes következménye. Az utolsó feltételt pedig a 7. Állításban mutattuk meg. ❑

Ennek az állításnak a fordítottja is igaz.

3. Tétel. *Hozzárendelési játékban minden stabil halmazhoz található olyan egyensúlyi stratégiaprofil, aminek a fixpontjai a stabil halmaz elemei.*

Bizonyítás: Legyen $\mathscr{V}$ egy stabil halmaz az A mátrixhoz tartozó hozzárendelési játékban és legyen $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{V}$ egy, a $\mathscr{V}$ két sarkát (ahol mindent a vevők és ahol mindent az eladók kapnak) összekötő monoton görbe. Egy ilyen görbe biztosan létezik a stabil halmazok előző tételben leírt karakterizációja miatt. Vegyük azt a stratégiaprofilt, amiben az (i,j) koalíció a következőt teszi:

- Ha az alku a $\mathscr{V}$ valamelyik pontjában tart, akkor nem akarnak dominálni.
- Ha egy nem $\mathscr{V}$-beli $(x;y)$ pontban vagyunk és nincs az $\mathscr{X}$ görbének olyan pontja, amivel mindketten jobban járnak, akkor szintén nem akarnak dominálni.
- Ha az $\mathscr{X}$-nek van olyan pontja, amivel mindketten jobban járnak, és az dominálja is az aktuális pontot, akkor mindketten ezt mondják (ha több ilyen van akkor ezek közül egyet).
- Ha az $\mathscr{X}$-nek van olyan $(u;v)$ pontja, amivel mindketten jobban járnak, de ez nem dominálja az aktuális pontot, mert nem elérhető az (i,j) vegyespáros számára, akkor legyen $(x^1;y^1)$ az a pont az $(x;y)$-t és $(u;v)$-t összekötő szakaszon, amelyre $x_i^1+y_j^1=a_{ij}$. Legyen $(u^1;v^1)$ az $\mathscr{X}$ görbének egy olyan pontja, amelyre $x_i^1=u_i^1$, az $(u^2;v^2)$ pedig egy olyan, amire $y_j^2=v_j^2$. Ilyen pont van, mivel az $(u;v)\in\mathscr{X}$ pontnak a megfelelő koordinátái nagyobbak, mint $(x^1;y^1)$-éi, $\mathscr{X}$ végpontjaiban a megfelelő koordináták kisebbek, és $\mathscr{X}$ összefüggősége miatt minden, a kettő közötti értéket felveszi $\mathscr{X}$-nek valamelyik pontja. Legyen $(x^3;y^3)$ az $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ vektorok minimuma, azaz $(x^3;y^3)=(x^1\wedge x^2;y^1\wedge y^2)$. Ebben az esetben az (i,j) koalíció mindkét tagja ezt az $(x^3;y^3)$ vektort mondja be.

Ez egyensúlyi stratégia lesz, mivel ha mindenki ezt játssza, akkor biztos, hogy egy $\mathscr{V}$-beli pontba (általában egy $\mathscr{X}$-belibe, kivéve ha eredetileg $\mathscr{V}$-ből indult az alku) jutunk. A fent leírt stratégiától egyik koalíciónak sem érdemes eltérnie, mivel:

- Egy $\mathscr{V}$-beli pontból egy koalíciónak sem éri meg eltérnie, mivel ha eltérnek, akkor az alku végén biztos, hogy egy másik $\mathscr{V}$-beli vektorba jutnak el, ami $\mathscr{V}$ belső stabilitása miatt nem lehet mindkettőjüknek előnyösebb, mint az eredeti.
- Ha nem $\mathscr{V}$-beli pontból indulunk ki, akkor az eredeti stratégia végül egy $\mathscr{X}$-beli pontot fog eredményezni. Ezen egy koalíciónak sem érdemes változtatnia. Tegyük fel, hogy ez mégis megéri a játékosok egy csoportjának. Nézzük az utolsó párost, akik eltértek. Ők egy $\mathscr{V}\setminus\mathscr{X}$-beli pontot mondtak (ha nem ilyet, akkor onnan végül egy $\mathscr{X}$-belibe érne az alku, mivel ettől kezdve mindenki követi az eredeti stratégiáját).

Ez az elosztás viszont dominálja azt a $\mathscr{X}$-beli pontot, ahova eltérés nélkül jutottak volna, mivel megvalósítható és előnyösebb is az utolsó pár számára (különben nem érte volna meg változtatni a stratégián), ami ellentmond az $\mathscr{X}$ belső stabilitásának.

- Eddig azt láttuk be, hogy ha a fent leírt stratégiától egy koalíció eltér, az is egy $\mathscr{X}$-beli kifizetést fog eredményezni. Az $\mathscr{X}$ monotonitása miatt viszont nem érheti meg szigorúan a páros mindkét tagjának eltérni, hogy a mostani végeredmény helyett egy másik $\mathscr{X}$-beli pontba jussanak, ezért a stratégia egyensúlyi.

❑

Köszönetnyilvánítás:
A szerző köszöni Forgó Ferencnek, hogy figyelmébe ajánlotta Harsányi (1974) tanulmányát és az abban rejlő kutatási lehetőségeket. A szerző munkáját az OTKA K-72856 pályázat támogatta.

Hivatkozások

Bednay D. (2011). Stabil halmazok hozzárendelési játékokban. *Kézirat*, http://web.uni-corvinus.hu/matkg/konf_papers/konf_2011_bednay_dezso.pdf.

Gale, D., Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69:9–15.

Harsányi, J. (1974). An equilibrium-point interpretation of stable sets and a proposed alternative definition. *Management Science*, 20:1472–1495.

Neumann, J., Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior (Third edition)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Shapley, L. S., Shubik, M. (1972). The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, 1:111–130.

Együttműködés és verseny ellátási láncokban: játékelméleti perspektíva

Dobos Imre

Kivonat
Az ellátási láncok feladata az, hogy fogyasztói szükségletet elégítsenek ki. Az ellátási láncok vállalatok halmazai, amelyek kapcsolatban állnak egymással. Ezen vállalatokat a köztük lévő anyag- és információáramlás köti össze. Mivel komplex rendszereket nehéz vizsgálni, ezért az elemzések két és három vállalat kapcsolatát tanulmányozzák. Ebben a dolgozatban a Banerjee (1986) által javasolt modellt terjesztjük ki arra az esetre, amikor a kereslet a beszerzési ártól függ. Összehasonlítjuk a közös megegyezéssel kialakított rendelési tételnagyságot a verseny esetén kialakuló rendeléssel.

1. Bevezetés

Az ellátási láncokban felmerülő anyag- és információáramlás problémái ismertek voltak ugyan, de a vállalatgazdasági vizsgálatok megmaradtak az egyes vállalatok szintjén. Az első elemzések, amelyek az ellátási láncok költségproblémáit két vállalat esetére elemezték, viszonylag rövid múltra tekintenek vissza. Az irodalomban Goyal (1977) és Banerjee (1986) dolgozatai elemezték a vállalatok közötti rendelési tételnagyság meghatározását két vállalat esetén. Érdekes módon az utóbbi modell vált ismertebbé, talán azért, mert az 1970-es években a tudományos közvélemény még nem volt nyitott a kölcsönhatások elemzésére, az nem okozott hatékonysági problémát, vagy ha mégis, akkor a problémát más módszerekkel próbálták megoldani. Ebben a cikkben Banerjee (1986) modelljét vizsgáljuk arra az esetre, ha a készletezési költségeken kívül a beszerzési költségek is a döntést befolyásoló szerepet játszanak. Az ellátási láncok koordinációjának irodalmában a most leírt modellt beszerzési

Dobos Imre
Budapesti Corvinus Egyetem, Logisztika és Ellátási Lánc Menedzsment Tanszék,
email: imre.dobos@uni-corvinus.hu

ár szerződésnek hívják, hiszen a kialakult ár egy megállapodás eredménye (Cachon, 2003). Az ellátási láncok koordinációja matematikai oldalról szoros kapcsolatban van a játékelmélettel, ugyanis egy olyan „szerződést" kell kötni, amely mindkét fél számára kielégítő. Ekkor alkalmazhatóak a játékelmélet eredményei (Szép és Forgó, 1974).

Ebben a dolgozatban feltételezzük, hogy az ellátási lánc két szereplőből áll: a beszállítóból és a termelőből. A láncban a beszállítóról feltételezzük, hogy áralakító, azaz nincs piaci ár, az a két fél megállapodásán nyugszik. Ugyanakkor a termelő dönt arról, hogy egy adott áron mekkora tételnagyságot rendel. Feltételezzük, hogy a megállapodás eredményét mindkét fél elfogadja, ahhoz tartja magát. A kérdés tehát az lesz, hogy mekkora mennyiséget rendel a termelő a beszállító által javasolt áron. Ehhez ismertnek tételezzük fel a termelő keresleti függvényét a beszerzési ár függvényében. A modell ebben a formájában egy klasszikus determinisztikus játékelméleti feladattá egyszerűsödik a releváns költségek ismeretében.

Ugyanakkor az irodalomban ismert, hogy ez a játékelméleti megoldás, azaz a Nash-egyensúly nem optimális a rendszer egészének szempontjából, azaz ha együttes stratégiával lépnének fel a felek, például egy mediátorral/tárgyalóval történő egyeztetés révén, vagy a költséginformációkat teljesen megosztanák, akkor nagyobb nyereséget érnének el (Banerjee, 1986). Ebben az esetben azonban a többletnyereség elosztása lenne a következő feladat, amivel dolgozatunkban nem foglalkozunk.

A dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a javasolt beszerzési ár szerződés mennyire tér el a közös, azaz Pareto-optimumtól. A következő részben a modellt ismertetjük, valamint azt, hogy hogyan működik a modell. A harmadik fejezetben a feladat Nash-egyensúlyát elemezzük, az egyensúlyi rendelési tétellel és beszerzési árral. A következő rész a közösen elérhető maximális nyereséghez rendelhető döntési változókat, vagyis a tételnagyságot és az árat határozza meg. Ezután az ötödik fejezet egy numerikus példát mutat be, végül összegezzük eredményeinket.

2. A modell

A modell paraméterei a következőek:

- s_t a termelő egy rendelésre eső rendelési költsége,
- h_t a termelő készlettartási költsége, pénzegység/darab/év,
- s_b a beszállító egy rendelésre eső fixköltsége, pénzegység,
- h_b a beszállító készlettartási költsége, pénzegység/darab/év.

A modell döntési változói az alábbiak lesznek:

- p a beszállító által javasolt beszerzési ár, pénzegység, nemnegatív,
- q a termelő rendelési tételnagysága, darab, nemnegatív.

A termelő éves keresleti függvénye is adott, monoton csökkenő függvénye a beszerzési árnak. Tételezzük fel, hogy ez a függvény lineáris, és egy adott p_0 árnál többet nem hajlandó az áruért a termelő fizetni. A keresleti függvény a következőképpen írható fel:

$$D(p) = a - bp,\ 0 < p < p_0,$$

ahol az a és b paraméterek ismertek korábbi tapasztalatok alapján, és feltesszük, hogy $p_0 < a/b$, vagyis a maximális árnál is pozitív a kereslet. Ehhez az árhoz tartozik egy minimális kereslet, amit feltétlenül el kell adni, hogy a beszállító vállalat ne legyen veszteséges.

A beszállító nyereségfüggvénye az árbevétel és a készletezési költségek különbségeként értelmezhető:

$$TC_b(p,q) = pD(p) - \left[s_b \frac{D(p)}{q} + \frac{q}{2} h_b\right]. \tag{1}$$

Ez a konstrukcióval egy konkáv függvényt ad.

A termelőnek esetünkben csak költségei vannak, a piacon a végtermékéből elért árbevételét nem vesszük figyelembe, mert csak az adott tranzakcióra összpontosítjuk figyelmünket:

$$TC_t(p,q) = pD(p) + \left[s_t \frac{D(p)}{q} + \frac{q}{2} h_t\right]. \tag{2}$$

Az (1)-(2) feladat megoldásait keressük. Két formában kutatjuk fel az egyensúlyi pontokat. Ha a probléma versenyegyensúlyát, azaz a Nash-egyensúlyát keressük, akkor olyan $\left(p^N, q^N\right)$ párt akarunk felkutatni, amelyre

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) \geq TC_b\left(p, q^N\right)$$

és

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) \leq TC_t\left(p^N, q\right)$$

ami azt jelenti, hogy a beszállító a nyereségét maximalizálja, míg a termelő kizárólag a költségek minimalizálását tűzi ki céljául.

Foglalkozzunk most azzal a problémával, ha a felek a költségeiket összegzik, azaz úgy viselkednek, mintha egy vállalat lennének. Ekkor a közös „költségfüggvény” az alábbi formát veszi fel:

$$TC^p(p,q) = TC_b(p,q) + TC_t(p,q) = (s_b + s_t) \frac{D(p)}{q} + \frac{q}{2}(h_b + h_t) \tag{3}$$

ugyanis a beszállító árbevétele a termelő költsége, vagyis kioltja azt, ezért nem szerepel az összegzett költségfüggvényben. A (3) feladat megoldása egyben Pareto-optimumot jelent, amit a (p^p, q^p) pont jelöl.

A Nash-egyensúly és a Pareto-optimum kapcsolatáról ismert, hogy az elért összes hasznosság (esetünkben a „játékosok” összes minimális költsége, mint negatív hasznosság) a

Pareto-optimumban nagyobb, mint a Nash-egyensúlyban, vagyis

$$TC^p\left(p^N,q^N\right) \geq TC^p\left(p^p,q^p\right).$$

Az ellátási láncok koordinációjának irodalmában arra a kérdésre keresik a választ, hogy milyen koordinációs mechanizmussal lehet ezt a Pareto-optimumot elérni.

3. A probléma Nash-egyensúlya

Határozzuk meg az (1)-(2) probléma egyensúlyi pontjait. Először adott rendelés esetén optimalizáljuk a feladatot a beszállító szemszögéből, azaz a q rendelési tételnagyságot változatlannak feltételezve.

Az (1) nyereségfüggvényt a következőképpen írhatjuk fel:

$$TC_b\left(p,q^N\right) = p\left(a-bp\right) - s_b\frac{a-bp}{q^N} - \frac{q^N}{2}h_b,\;\; 0 \leq p \leq p_0.$$

A beszállító összköltségét egyszerűbb formában is felírhatjuk az ár függvényében:

$$TC_b\left(p,q^N\right) = -bp^2 + \left(a + \frac{s_b b}{q^N}\right)p - \left(s_b\frac{a}{q^N} + \frac{q^N}{2}h_b\right),\;\; 0 \leq p \leq p_0.$$

A beszállító által adható ár, amely mellett maximalizálja a termelését adott rendelési mennyiség esetén:

$$p^N\left(q^N\right) = \begin{cases} \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} & 0 \leq \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} \leq p_0 \\ p_0 & \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} > p_0 \end{cases}. \tag{4}$$

Ezzel definiáltuk a beszállító egyensúlyi döntését. Tekintsük most a termelő problémáját azzal a feltételezéssel, hogy az ár adott számára. A (2) költségfüggvény nem függ az anyagköltségtől, ezért csak a készletezési költségeket kell minimalizálni:

$$TC_t\left(p^N,q\right) = p^N D\left(p^N\right) + \left[s_b\frac{D\left(p^N\right)}{q} + \frac{q}{2}h_t\right],$$

ami a klasszikus optimális tételnagyságot adja megoldásként:

$$q^N\left(p^N\right) = \sqrt{\frac{2s_t D\left(p^N\right)}{h_t}}. \tag{5}$$

Eredményünket az alábbi állításban foglalhatjuk össze.

1. Állítás. *Az (1)-(2) játékelméleti modell Nash-egyensúlyát a következő ár és tételnagyság írja le:*

$$p^N\left(q^N\right) = \begin{cases} \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} & 0 \leq \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} \leq p_0 \\ p_0 & \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} \geq p_0 \end{cases}$$

$$q^N\left(p^N\right) = \sqrt{\frac{2s_t D\left(p^N\right)}{h_t}}.$$

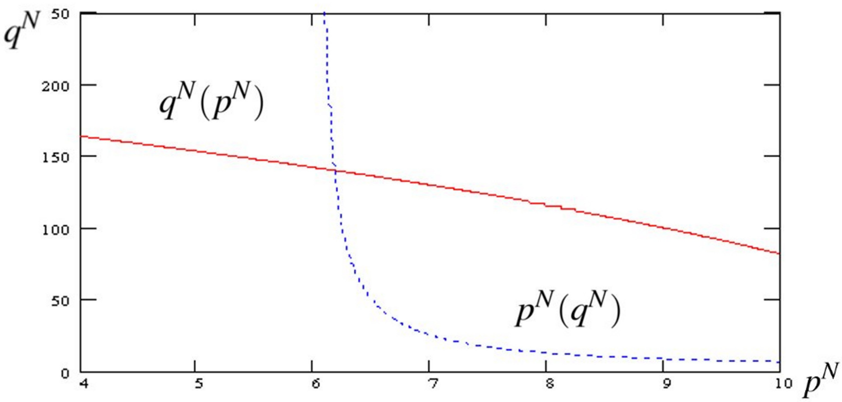
Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) = -b\left(p^N\right)^2 + \left(a + \frac{s_b b}{q^N}\right)p^N - \left(s_b\frac{a}{q^N} + \frac{q^N}{2}h_b\right),$$

míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) = p^N\left(a - bp^N\right) + \sqrt{2s_t h_t\left(a - bp^N\right)}.$$

A játékelméleti feladat numerikus megoldásához az 1. ábra nyújt segítséget. Az analitikus megoldás meghatározása nem lehetséges, annak előállítása közelítéssel történhet. Közelítő eljárásokkal nem foglalkozunk, a numerikus analízisben rendelkezésre állnak az optimumhoz vezető módszerek.



1. ábra. A modell egy grafikus megoldás

Mivel mindkét függvényünk, az ár- és mennyiségfüggvény is monoton, ezért, ha létezik a feladatnak megoldása, akkor az egyértelmű.

A Nash-egyensúly meghatározása után vizsgáljuk a feladat Pareto-optimumát.

4. A Pareto-optimum

A Pareto-optimum meghatározás nem okoz gondot, ugyanis a (3) optimalizálási feladatot kell megoldanunk a változók szerint.

A probléma megoldása az ár vonatkozásában nagyon egyszerű, mert a keresleti függvényünk monoton csökkenő egy zárt intervallumban, így

$$p^p = p_0.$$

A maradék feladat pedig nem más, mint az egyesített optimális tételnagyság modellje, aminek a megoldása a klasszikus EOQ, azaz az optimális tételnagyság lesz:

$$q^p = \sqrt{\frac{2\left(s_b + s_t\right)\left(a - bp_0\right)}{h_b + h_t}}.$$

Eredményünket a következő állítás tartalmazza.

2. Állítás. *A (3) probléma optimális ár és mennyiségi megoldása, valamint a hozzájuk tartozó minimális összköltség a következő hármassal jellemezhető:*

$$p^p = p_0,$$

$$q^p = \sqrt{\frac{2\left(s_b + s_t\right)\left(a - bp_0\right)}{h_b + h_t}},$$

$$TC^p\left(p^p, q^p\right) = \sqrt{2\left(s_b + s_t\right)\left(h_b + h_t\right)\left(a - bp_0\right)}.$$

Ezzel a felvázolt probléma Nash-egyensúlyát és Pareto-optimumát is meghatároztuk. Röviden érintsük azt a problémát, hogy a javasolt koordinációs mechanizmus, vagyis a beszerzési ár szerződés koordinálja-e az ellátási láncot.

5. Koordinálja-e az ellátási láncot beszerzési ár szerződés?

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy létezik-e olyan p_0 beszerzési ár, amely mellett a felek a Nash-egyensúly feltételeit megtartva a Pareto-optimumba jutnak el, vagyis koordinálhatja-e a beszerzési ár szerződés az általunk vizsgált ellátási láncot.

A feltett kérdés megválaszolásához elemezzük azt, hogy van-e megoldása az alábbi egyenleteknek:

$$q = \sqrt{\frac{2s_t D\left(p_0\right)}{h_t}} = \sqrt{\frac{2\left(s_b + s_t\right)\left(a - bp_0\right)}{h_b + h_t}},$$

és

$$p = p_0 = \frac{aq + s_b b}{2bq}.$$

Ha a fenti egyenletrendszernek lenne megoldása, akkor a Nash-egyensúly egybeeshetne a Pareto-optimummal, amit nevezhetünk rendszerszintű optimumnak is.

A kérdésre a válasz csak akkor igenlő, ha a paraméterek egy sor speciális tulajdonságot teljesítenek. Az első ilyen tulajdonság, hogy a beszállító és a termelő egységnyi rendelési és készletezési költségei arányának is azonosnak kell lennie:

$$\frac{s_b}{h_b} = \frac{s_t}{h_t},$$

és teljesülni kell a következő azonosságnak is:

$$p_0 = \frac{a}{2b} + \frac{s_b}{2}\sqrt{\frac{h_t}{2s_t\,(a - bp_0)}}.$$

Mivel ez utóbbi egyenlőség csak nagyon speciális paraméteregyüttes esetén teljesülhet, ezért a válasz általánosságban nemleges a kérdésünkre. Az utóbbi egyenlőségünk az árak felső határára csak akkor teljesül, ha egy harmadfokú polinomnak van pozitív megoldása, és ez éppen az előre megadott lehetséges maximális ár. A következő részben mutatunk olyan példát, amikor a paraméterek értékei mellett a Nash-egyensúly és a Pareto-optimum egybeesik. Ekkor a versenyegyensúly egyben a kooperatív egyensúllyal is megegyezik. Természetesen a költségek különbsége becsülhető, amit szintén egy számpéldán demonstrálunk.

6. Egy numerikus példa az egyensúlyok meghatározására

Az első példánkban egy általános megoldást mutatunk be. Ekkor a megoldás létezik, és a részvevők összköltsége a Pareto-optimumban a legkisebb.

6.1. Példa az általános megoldásra

Paramétereink értékeit az alábbiak szerint adtuk meg:

s_t = 100 PE/rendelés,

h_t = 3 PE/db/év,

s_b = 50 PE/rendelés,

h_b = 3 PE/db/év,

a = 600,

$b \;\; = 50,$

$p_0 = 10$ PE.

A keresleti függvény: $D(p) = 600 - 50p, \quad 0 \leq p \leq 10$

Ezen paraméterek mellett a Nash-egyensúly:

$$p^N = 6,1795\,\text{PE},$$
$$q^N = 139,29\,\text{db}.$$

Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) = -1554,63\,\text{PE},$$

mivel a negatív költség a nyereséget jelöli, míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) = 2216,26\,\text{PE}.$$

A Nash-egyensúly teljes költsége $TC\left(p^N, q^N\right) = 661,63\,\text{PE}$.

A Pareto-optimum értékei a következőek:

$$p^p = 10,00\,\text{PE},$$
$$q^p = 77,46\,\text{db}.$$

Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^p, q^p\right) = -857,99\,\text{PE}$$

mivel a negatív költség a nyereséget jelöli, míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^p, q^p\right) = 1245,29\,\text{PE}.$$

A Pareto-optimum teljes költsége $TC\left(p^N, q^N\right) = 387,30\,\text{PE}$.

Látható, hogy a számpéldánkban az összköltség a Pareto-optimumban 274,33 pénzegységgel, azaz tehát mintegy 42%-kal csökkent. Ennek az az ára, hogy a termelő 696,64 pénzegységnyi nyereségről mondott le a beszállító javára, hogy az csökkenthesse a költségeit.

6.2. *Példa arra az esetre, amikor a Nash-egyensúly és a Pareto-optimum egybeesik*

Paramétereink értékeit az alábbiak szerint adtuk meg:

$s_t = 120$ PE/rendelés,

$h_t = 3$ PE/db/év,

s_b = 80 PE/rendelés,
h_b = 2 PE/db/év,
a = 600,
b = 50,
p_0 = 6,264 PE.

Keresleti függvényünk formája megegyezik az előző példában ismertetettel, azzal az eltéréssel, hogy a maximális ár kisebb: $D(p) = 600 - 50p$, $0 \leq p \leq 6,264$. Ellenőrizzük, hogy a speciális feltételeink teljesülnek-e:

$$\frac{s_b}{h_b} = \frac{s_t}{h_t} = 40$$

valamint

$$p_0 = \frac{a}{2b} + \frac{s_b}{2}\sqrt{\frac{h_t}{2s_t(a - bp_0)}} = 6,264,$$

vagyis erre a speciális paraméteregyüttesre a Nash-egyensúly egyben Pareto-optimumot is jelent.

Az egyensúlyi termelési és árdöntés ekkor:

$$p^N = 6,264\,\text{PE},$$
$$q^N = 151.47\,\text{db}.$$

Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) = -1493,59\,\text{PE}$$

mivel a negatív költség a nyereséget jelöli, míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) = 2250,95\,\text{PE}.$$

Az egyensúly teljes költsége $TC_t\left(p^N, q^N\right) = 757,36\,\text{PE}$.

7. Összegzés

Dolgozatunk egy diadikus ellátási láncot vizsgált a beszerzési ár, mint koordinációs mechanizmus mellett. A termelő ismert keresleti függvénye mellett sikerült meghatározni a probléma Nash-egyensúlyát és Pareto-optimumát is. Megmutattuk azt is, hogy bizonyos paraméteregyüttes mellett a Nash-egyensúly egybeesik a Pareto-optimummal. Ebben a nagyon speciális esetben a beszerzési ár szerződés koordinálja az ellátási láncot, az együttműködés „versenyzés” mellett is rendszerszintű optimumhoz vezet.

Az ismertetett modellt három irányba lehet továbbfejleszteni. Elsőként a modell által adott költségmegtakarítás felosztási mechanizmusát lehetne tisztázni egy alkufolyamat során. Egy második általánosítási lehetőség lehet más koordinációs mechanizmusok tesztelése, eltérő szerződést feltételezve, például a költség- vagy nyereségmegosztási szerződés beépítése a modellbe. Végül harmadikként azt lehetne megvizsgálni, hogy mi történik akkor, ha három vállalat vertikális integrációban van egymással. Ez a modelltípus mélyebb betekintést nyújthatna a kooperatív játékelméleti modell megoldásainak struktúrájába, ami a költségmegtakarítások elosztásának mechanizmusát is árnyaltabbá tehetné.

Hivatkozások

Banerjee, A. (1986). A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor. *Decision Sciences*, 17(3):292–311.

Cachon, G. (2003). Supply chain coordination with contracts. In: Kok, A., Graves, S. (szerk.) *Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation*. Handbooks in Operations Research and Management Science, Elsevier, Amsterdam. pp. 229–339.

Goyal, S. K. (1977). An integrated inventory model for a single supplier-single customer problem. *International Journal of Production Research*, 15(1):107–111.

Szép J., Forgó F. (1974). *Bevezetés a játékelméletbe*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

A Harsányi-program

Pintér Miklós

Kivonat
Ebben a cikkben áttekintjük és rendszerezzük a típusterek irodalmát (Harsányi-program), törekedve mind az intuíciók világos bemutatására, mind a matematikai fogalmak pontos ismertetésére. Következtetésünk világos: az irodalomban kevésbé népszerű tisztán mérhető típusterek a megfelelőek a nem teljes információs szituációk modellezésére.

1. Bevezetés

Az egyik, talán a legfontosabb elvárás a nem teljes információs szituációk modelljeivel szemben az, hogy azok kezelni tudják a játékosok véleményrangsorait, tehát megadják azt, hogy mit gondol egy játékos az adott szituációról, mit gondol arról, hogy a többi játékos mit gondol az adott szituációról, és így tovább a végtelenségig. A véleményrangsorok azonban nem könnyen kezelhető matematikai konstrukciók, így nagyon kívánatos, hogy azok csak rejtetten, nem pedig direkten jelenjenek meg a modellben.

A fent említett probléma, a véleményrangsorok kezelésének bonyolultsága ösztönözte Harsányit is (Harsányi, 1967-68) (163. oldal): „It seems to me that the basic reason why the theory of games with incomplete information has made so little progress so far lies in the fact that these games give rise, or at least appear to give rise, to infinite regress in reciprocal expectations on the part of the players."

Harsányi (1967-68) megoldási javaslata a következő:

(1) Helyettesítsük a véleményrangsorokat típusokkal (166. oldal): „Instead of assuming that certain important *attributes* of the players are determined by some hypothetical random events at the beginning of the game, we may rather assume that the players

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: miklos.pinter@uni-corvinus.hu

themselves are drawn at random from a certain hypothetical population containing the mixture of different ”types”, characterized by different attribute vectors (i.e., by different combinations of relevant attributes).”

(2) Gyűjtsük össze az összes típust egy objektumba, értelmezzünk az objektumon egy valószínűségeloszlást, ami a játékosok véleményét reprezentálja (165. oldal): „As we have seen, if we use the Bayesian approach, then the sequential-expectations model for any given I-game G will have to be analyzed in terms of infinite sequences of higher and higher-order subjective probability distributions, i.e., subjective probability distributions over subjective probability distributions. In contrast, under own model, it will be possible to analyze any given I-game G in terms of one *unique* probability distribution R^* (as well as certain conditional probability distributions derived from R^*).”

Harsányinak ezt a kétlépéses módszerét Harsányi-programnak nevezzük. A Harsányi-program egyes lépéseihez kapcsolódóan egy-egy kérdés merül fel:

(1) Helyettesíthetőek-e a véleményrangsorok típusokkal?
(2) Alkalmas-e a típus fogalma a kitűzött modellezési célok elérésére?

A (2) kérdést előre véve két alkérdést fogalmazhatunk meg:

(2A) Össze lehet-e gyűjteni minden típust egy objektumba?
(2B) Lehet-e a játékosok véleménye tetszőleges valószínűségeloszlás az összegyűjtött típusok objektumán?

A (2A) kérdés az egyetemes típustér fogalmához köthető (Heifetz és Samet, 1998). Az egyetemes típustér egy olyan típustér, amibe minden más típustér egyértelműen „beágyazható”. A (2B) kérdés a típustér teljességéhez kötődik (Brandenburger, 2003). Egy típustér teljes, ha minden benne kifejezhető véleménytípust tartalmaz.

Az (1) kérdésre általában a válasz negatív (Heifetz és Samet, 1999), ha tetszőleges véleményrangsort tekintünk, akkor nem lehet minden véleményrangsort típussal helyettesíteni. Ezért (is) a típustereket (és a véleményrangsorokat) nem általánosan, hanem konkrét megközelítések mentén elemezzük.

A típusterek két fajtája ismert az irodalomban: a topologikus típusterek, ahol a használt fogalmak topológiaiak, és a tisztán mérhető típusterek, ahol a használt fogalmak tisztán mértékelméletiek.[1] Az 1. táblázatban összevetjük a két megközelítés főbb jellemzőit.

A topologikus és a tisztán mérhető modellek különbsége mély, alapvető döntéselméleti kérdéseket érint. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a topologikus modellekben a játékosok kognitív képességei erősebbek (sőt túl erősek), mint a tisztán mérhető modellekben. Tehát már önmagában az a kérdés, hogy mi a jó modellje a játékosok kognitív képességeinek, elvezet a topologikus és a tisztán mérhető modellek közötti választás kérdéséhez.

---

[1] A két megközelítés vegyíthető, lásd Pintér (2005).

Megközelítés	Tisztán mérhető	Topologikus
Paramétertér	Mérhető tér	Topologikus tér
Világállapotok tere	Mérhető tér	Topologikus tér
Az események osztálya	σ–algebra	Borel σ–algebra
Típusfüggvény	Mérhető függvény	Folytonos függvény
Vélemények	Val. mértékek	Reguláris val. mértékek
Típusmorfizmus	Mérhető függvény	Folytonos függvény

1. táblázat. Típusterek

A típusterek és általában a véleményrangsorok modellezésének egy alapvető kérdése, hogy milyen struktúrát definiáljunk a játékosok véleményeinek halmazán.

Minden típustérben kifejezhetőnek, kimondhatóaknak kell lenni bizonyos alapmondatoknak, azaz bizonyos halmazoknak benne kell lennie a játékosok véleményein értelmezett események osztályában. Nem teljes információs szituációk elemzésekor szükséges olyan mondatok kimondása, hogy egy adott játékos legalább p valószínűséggel hiszi az A esemény bekövetkezését (véleményoperátor (Aumann, 1999)).

Heifetz és Samet (1998) a következőképpen formalizálja ezt az elvárást a tisztán mérhető modellekre:

Legyen $(X,\mathscr{M})$ egy mérhető tér és $\Delta(X,\mathscr{M})$ az $(X,\mathscr{M})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmaza. Ekkor

$$\mathscr{A}^* = \sigma(\{\{\mu \in \Delta(X,\mathscr{M}) : \mu(A) \geq p\},\, A \in \mathscr{M},\ p \in [0,1]\}) \tag{1}$$

a $\Delta(X,\mathscr{M})$ halmazon értelmezett olyan σ-algebra, amely a legszűkebb olyan σ-algebra, ami tartalmazza az alapmondatokat.

A topologikus modellekben nem ilyen egyszerű a vélemények halmazán „jó” struktúrát megadni: legyen (X,τ) egy topologikus tér, és jelölje $B(X,\tau)$ a Borel σ-algebrát (X,τ)-n. Ekkor legyen $(\Delta(B(X,\tau)),\tau_*)$ olyan topologikus tér, hogy tetszőleges $A \in B(X,\tau)$-ra és $p \in [0,1]$-re:

$$\{\mu \in \Delta(B(X,\tau)) : \mu(A) \geq p\} \in B(\Delta(B(X,\tau)),\tau_*)\ . \tag{2}$$

Könnyen látható (Pintér, 2010b), hogy általában nincs olyan τ_* topológia, ami a leggyengébb topológia azok közül, amelyek teljesítik a (2) feltételt. Tehát a tisztán mérhető megközelítéssel ellentétben, a topologikus modellekben a vélemények halmazán a „jó” topológia fogalma nem jól definiált, illetve, úgy is mondhatjuk, hogy nincs „legjobb” topológia.

Mielőtt rátérünk a két modellcsalád részletes ismertetésére, kitérünk a típusterek és a véleményrangsorok jól ismert kapcsolatára. Egy világállapot megadja minden játékosnak az adott típustérhez tartozó véleményrangsorát (Battigalli és Siniscalchi, 1999; Pintér, 2012). Másrészről, megfelelő véleményrangsorokból összerakhatók típusterek (Heifetz és Samet, 1998; Pintér, 2012), mégpedig úgy, hogy az összerakott típustér pontosan az adott véleményrangsorokat tartalmazza. Ezek a tulajdonságok nem megközelítésfüggőek, mind a topologikus, mind a tisztán mérhető megközelítésre igazak.

A cikk felépítése a következő: először rendre megvizsgáljuk a topologikus és a tisztán mérhető típustereket, majd az utolsó fejezetben rövid összegzést adunk.

2. Topologikus típusterek

Ebben a fejezetben a topologikus típusterek fogalmát vezetjük be, és ismertetjük a fogalomhoz köthető fontosabb koncepciókat.

1. Definíció. *Legyen $\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0}$ a világállapotok halmaza. Az (S,τ_S) paramétertérre épülő topologikus típustér $((S,\tau_S),\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0},(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega)),\ \tau_*),g,\{f_i\}_{i\in N})$ egy olyan objektum, hogy*

- *a $g:\Omega\to S$ függvény τ_0-folytonos,*
- *$f_i:\Omega\to(\Delta(B(\Omega,\tau_{-i})),\tau_*)$ az i játékos τ_i-folytonos típusfüggvénye, $i\in N$,*
- *tetszőleges $A\in B(\Omega,\tau_{-i})$ olyan eseményre, hogy létezik $A'\in B(\Omega,\tau_i)$ $\omega\in A'$ és $A'\subseteq A$: $f_i(\omega)(A)=1$, ahol $i\in N$, $\omega\in\Omega$,*
- *$B(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega)),\tau_*)$ teljesíti a (2) tulajdonságot,*

ahol $\tau_\Omega=\vee_{i\in N_0}\tau_i$, $\tau_{-i}=\vee_{j\in N_0\setminus\{i\}}\tau_j$.

A világállapotok Ω halmazának minden pontja a világ egy lehetséges állapotának teljes leírását adja, a τ_i topológia az i játékos informáltságát adja meg, tehát ha pl. $\omega,\omega‘\in\Omega$ két olyan világállapot, hogy azok τ_i-megkülönböztethetetlenek, akkor az i játékos ugyanúgy viselkedik és gondolkodik a két világállapotban; τ_0 a természet informáltságát adja meg.

A g függvény azt mondja meg, hogy az adott világállapotban mi a természet paramétere, másképpen fogalmazva, g a természet típusfüggvénye. Az f_i függvény az i játékos adott világállapotbeli véleményét adja meg. Vegyük észre, hogy ebben a modellben a játékosok ismerik a saját típusukat, tehát a fenti típustér egy Harsányi-típustér (Heifetz és Mongin, 2001).

2. Definíció. *A $\varphi:\Omega\to\Omega'$ τ_Ω-folytonos függvény típusmorfizmus az $((S,\tau_S),\{(\Omega,\tau_i)\}_{i\in N_0}$, $(\Delta(B(\Omega,\tau_\Omega)),\tau_*),g,\{f_i\}_{i\in N})$ és $((S,\tau_S),\{(\Omega',\tau_i')\}_{i\in N_0},\ (\Delta(B(\Omega',\tau_{\Omega'})),\tau_*'),g',\{f_i'\}_{i\in N})$ topologikus típusterek között, ha*

- *a (3) diagram kommutatív, azaz tetszőleges $\omega\in\Omega$ világállapotra: $g(\omega)=g'\circ\varphi(\omega)$,*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \Omega' \arrow[r, "g'"] & S \end{tikzcd} \tag{3}$$

- *a* (4) *diagram kommutatív, azaz tetszőleges $i \in N$ játékosra és $\omega \in \Omega$ világállapotra:* $f_i' \circ \varphi(\omega) = \hat{\varphi} \circ f_i(\omega)$,

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\Delta(B(\Omega, \tau_{-i})), \tau_*) \arrow[d, "\hat{\varphi}_i"] \\ \Omega' \arrow[r, "f_i'"] & (\Delta(B(\Omega', \tau'_{-i})), \tau'_*) \end{tikzcd} \tag{4}$$

  ahol $\hat{\varphi}_i : (\Delta(B(\Omega, \tau_{-i})), \tau_*) \to (\Delta(B(\Omega', \tau'_{-i})), \tau'_*)$ *a következő: tetszőleges* $\mu \in \Delta(B(\Omega, \tau_{-i}))$, $A \in B(\Omega', \tau'_{-i})$*-re:* $\hat{\varphi}(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$.

φ típusizomorfizmus, ha φ homeomorfizmus, és mind φ, mind φ^{-1} típusmorfizmus.

A típusmorfizmus segítségével tudunk típustereket összehasonlítani. Azt mondhatjuk, hogy egy típustér bővebb, mint egy másik, ha létezik típusmorfizmus az utóbbiból az előbbibe.

3. Definíció. *Az* $((S, \tau_S), \{(\Omega^*, \tau_i^*)\}_{i \in N_0}, (\Delta(B(\Omega^*, \tau_\Omega^*)), \tau_*^*), g^*, \{f_i^*\}_{i \in N})$ *topologikus típustér egyetemes topologikus típustér, ha tetszőleges* $((S, \tau_S), \{(\Omega, \tau_i)\}_{i \in N_0}, (\Delta(B(\Omega, \tau_\Omega)), \tau_*), g, \{f_i\}_{i \in N})$ *topologikus típustérhez egyértelműen létezik* $\varphi : \Omega \to \Omega^*$ *típusmorfizmus.*

Az egyetemes típustér a legbővebb típustér, az tartalmazza az összes típust (lásd a (2A) kérdést). Pintér (2010b) megmutatta, hogy nincs egyetemes topologikus típustér, tehát annak ellenére, hogy számos pozitívnak látszó eredmény ismert az irodalomban (Mertens és Zamir, 1985; Brandenburger és Dekel, 1993; Heifetz, 1993; Mertens et al., 1994; Pintér, 2005), a Harsányi-program nem működik a topologikus megközelítésben.

4. Definíció. *Egy topologikus típustér teljes, ha tetszőleges játékos típusfüggvénye szürjektív.*

Tehát egy topologikus típustér teljes, ha benne minden valószínűségeloszlás típus. Fontos megjegyezni, hogy ugyan nincs egyetemes topologikus típustér, de vannak teljes topologikus típusterek. Tehát annak ellenére, hogy mind az egyetemesség, mind a teljesség valahogy ugyanazt, a típustér bőségét, gazdagságát próbálja megfogni, a két megközelítés nagyon különböző.

Ami a bevezetőben említett (1) kérdést illeti, az irodalomban elemzett topologikus véleményrangsorok (Mertens és Zamir, 1985; Brandenburger és Dekel, 1993; Heifetz, 1993;

Mertens et al., 1994; Pintér, 2005) helyettesíthetők típussal, tehát a Harsányi-program a topologikus megközelítés esetén nem az (1), hanem a (2) kérdésen bukik el.

3. Tisztán mérhető típusterek

Ebben a fejezetben a tisztán mérhető típustereket és azok tulajdonságait tárgyaljuk.

5. Definíció. *Legyen* $\{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i \in N_0}$ *a világállapotok halmaza. Az* $(S, \mathscr{A})$ *paramétertérre épülő tisztán mérhető típustér egy olyan* $(S, \{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ *objektum, hogy*

- *a* $g : \Omega \to S$ *függvény* $\mathscr{M}_0$*-mérhető,*
- $f_i : \Omega \to \Delta(\Omega, \mathscr{M}_{-i})$ *az* i *játékos* $\mathscr{M}_i$*-mérhető típusfüggvénye,* $i \in N$*,*
- *tetszőleges* $A \in \mathscr{M}_{-i}$ *olyan eseményre, hogy létezik* $A' \in \mathscr{M}_i$ $\omega \in A'$ *és* $A' \subseteq A$*:* $f_i(\omega)(A) = 1$*,* $i \in N$*,* $\omega \in \Omega$*,*

ahol $\mathscr{M}_{-i} = \vee_{j \in N_0 \setminus \{i\}} \mathscr{M}_j$.

A tisztán mérhető típustér mögött megbújó intuíciók azonosak a topologikus típustereknél tárgyaltakkal. Két technikai különbségre hívjuk fel a figyelmet. Mivel a tisztán mérhető megközelítésben a vélemények halmazán van „legjobb" σ-algebra (lásd $\mathscr{A}^*$-ot (1)-ben), így azt nem is jelöljük külön a tisztán mérhető modellekben. Másodszor, amint említettük a bevezetőben, a topologikus és a tisztán mérhető modellek között az egyik különbség az, hogy a topologikus modellekben több az esemény. Amint azt később látni fogjuk a túl sok esemény okozza a bonyodalmakat.

6. Definíció. *A* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ $\mathscr{M}$*-mérhető függvény* ($\mathscr{M} = \vee_{i \in N_0} \mathscr{M}_i$) *típusmorfizmus az* $(S, \{(\Omega, \mathscr{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ *és* $(S, \{(\Omega', \mathscr{M}'_i)\}_{i \in N_0}, g', \{f'_i\}_{i \in N})$ *tisztán mérhető típusterek között, ha*

- *az* (5) *diagram kommutatív, azaz tetszőleges* $\omega \in \Omega$*:* $g' \circ \varphi(\omega) = g(\omega)$*,*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \Omega' \arrow[r, "g'"] & S \end{tikzcd} \tag{5}$$

- *a* (6) *diagram kommutatív, azaz tetszőleges* $i \in N$ *játékosra* $\omega \in \Omega$ *világállapotra:* $f'_i \circ \varphi(\omega) = \hat{\varphi}_i \circ f_i(\omega)$*,*

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i}) \arrow[d, "\hat{\varphi}_i"'] \\
\Omega' \arrow[r, "f'_i"] & \Delta(\Omega', \mathcal{M}'_{-i})
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

ahol $\hat{\varphi}_i : \Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i}) \to \Delta(\Omega', \mathcal{M}'_{-i})$ *a következőképpen definiált: tetszőleges* $\mu \in \Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i})$*,* $A \in \mathcal{M}'_{-i}$*:* $\hat{\varphi}_i(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$*. Könnyen látható, hogy* $\hat{\varphi}_i$ *egy mérhető függvény.*

A φ *típusmorfizmus típusizomorfizmus, ha* φ *bijekció és* φ^{-1} *szintén típusmorfizmus.*

A fent definiált fogalom mögötti intuíció teljesen megegyezik a topologikus típusmorfizmusnál tárgyaltakkal. Fontos azonban látni, hogy elképzelhető az, hogy két topologikus típustér között egy függvény tisztán mérhető típusmorfizmus, de nem topologikus típusmorfizmus, sőt az is, hogy két topologikus típustér tisztán mérhető értelemben típusizomorf, de topologikus típusmorfizmussal össze nem vethetőek.

7. Definíció. *Az* $(S, \{(\Omega, \mathcal{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ *tisztán mérhető típustér egyetemes tisztán mérhető típustér, ha minden* $(S, \{(\Omega', \mathcal{M}'_i)\}_{i \in N_0}, g', \{f'_i\}_{i \in N})$ *tisztán mérhető típustérhez egyértelműen létezik egy* $\varphi : \Omega' \to \Omega$ *típusmorfizmus.*

Heifetz és Samet (1998) mutatta meg, hogy tisztán mérhető típusterek között van egyetemes típustér (lásd még (Pintér, 2012)).

8. Definíció. *Az* $(S, \{(\Omega, \mathcal{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ *tisztán mérhető típustér teljes, ha tetszőleges* $i \in N$ *játékosra:* f_i *típusfüggvény szürjektív.*

Meier (2001) bizonyította, hogy az egyetemes tisztán mérhető típustér teljes (lásd még (Pintér, 2012)), tehát a tisztán mérhető megközelítésben a bevezetőben feltett (2) kérdésre a válasz pozitív.

Ami a bevezetőben feltett (1) kérdést illeti, itt nem tudunk a részletekbe menni, csak megemlítjük Pintér (2012) eredményét: a tisztán mérhető megközelítés esetén minden véleményrangsor típus.

4. Összegzés

A korábbi fejezetekben tárgyalt eredményeket a 2. és 3. táblázatokban összegezzük.

A következtetés világos és kézenfekvő. Nem az irodalomban elterjedt topologikus, hanem a kevésbé „népszerű” tisztán mérhető megközelítés a megfelelő a nem teljes információs szituációk modellezésére.

	Topologikus megközelítés
(1) kérdés	$\emptyset$ (Pintér, 2010b)
(2) kérdés	✓(Mertens és Zamir, 1985; Brandenburger és Dekel, 1993) (Heifetz, 1993; Mertens et al., 1994; Pintér, 2005)

2. táblázat. A Harsányi-program I.

	Tisztán mérhető megközelítés
(1) kérdés	✓(Heifetz és Samet, 1998; Meier, 2001)
(2) kérdés	✓(Pintér, 2012)

3. táblázat. A Harsányi-program II.

Köszönetnyilvánítás:
A szerző kutatásait az OTKA K-101224 pályázat és az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

Aumann, R. J. (1999). Interacitve epistemology II: Probability. *International Journal of Game Theory*, 28:301–314.

Battigalli, P., Siniscalchi, M. (1999). Hierarchies of conditional beliefs and interactive epistemology in dynamic games. *Journal of Economic Theory*, 88:188–230.

Brandenburger, A. (2003). On the existence of a 'complete' possibility structure. In: Dimitri, N., Basili, M., Gilboa, I. (szerk.) *Cognitive Processes and Economic Behavior*, Routledge, pp. 30–34.

Brandenburger, A., Dekel, E. (1993). Hierarchies of beliefs and common knowledge. *Journal of Economic Theory*, 59:189–198.

Harsányi, J. (1967-68). Games with incomplete information played by bayesian players, Part I., II., III. *Management Science*, 14:159–182, 320–334, 486–502.

Heifetz, A. (1993). The bayesian formulation of incomplete information – the non-compact case. *International Journal of Game Theory*, 21:329–338.

Heifetz, A., Mongin, P. (2001). Probability logic for type spaces. *Games and Economic Behavior*, 35(1-2):31–53.

Heifetz, A., Samet, D. (1998). Topology-free typology of beliefs. *Journal of Economic Theory*, 82:324–341.

Heifetz, A., Samet, D. (1999). Coherent beliefs are not always types. *Journal of Mathematical Economics*, 32:475–488.

Meier, M. (2001). An infinitary probability logic for type spaces. *CORE Discussion Papers*, No. 0161.

Mertens, J. F., Sorin, S., Zamir, S. (1994). Repeated games, Part A. *CORE Discussion Papers*, No. 9420.

Mertens, J. F., Zamir, S. (1985). Formulation of bayesian analysis for games with incomplete information. *International Journal of Game Theory*, 14:1–29.

Pintér, M. (2005). Type space on a purely measurable parameter space. *Economic Theory*, 26:129–139.

Pintér, M. (2010a). The existence of an inverse limit of an inverse system of measure spaces – a purely measurable case. *Acta Mathematica Hungarica*, 126(1-2):65–77.

Pintér, M. (2010b). The non-existence of a universal topological type space. *Journal of Mathematical Economics*, 46:223–229.

Pintér, M. (2012). Every hierarchy of beliefs is a type. http://arxiv.org/abs/0805.4007.

Lexikografikus allokációk a hozzárendelési játékokban

Solymosi Tamás

Kivonat
Két új lexikografikus allokációs eljárást vizsgálunk: a leximin és a leximax eljárásokat. Ezek abban hasonlítanak a jól ismert marginális allokációs eljáráshoz, hogy (i) a kifizetések meghatározása itt is a játékosok egy eleve adott prioritási sorrendjében történik; (ii) ha az eredmény egy mag-elosztás, akkor a kapott allokáció a magnak egy extremális eleme. A két új eljárás viszont nem a koalíciós értékekből állapítja meg az egyes kifizetéseket, hanem a mag-elosztásokra vonatkozó alsó, illetve felső korlátokat igyekszik, amennyire csak lehetséges, kielégíteni. Két fő kérdésre keressük a választ, néhány általános észrevételtől eltekintve főként a mindig nem üres maggal rendelkező hozzárendelési játékokra fókuszálva: (1) Mag-elosztást kapunk-e bármelyik játékos-sorrend esetén? (2) Megkapjuk-e mindegyik extremális mag-elosztást valamilyen játékos-sorrenddel?

1. Bevezetés

A kooperatív játékok Neumann és Morgenstern (1944) által bevezetett alapmodellje két részből áll: a játékosok nemüres, véges N halmazából és egy v **karakterisztikus függvény**ből, amely az N minden S részhalmazához (koalíció) hozzárendel egy $v(S)$ valós számot, és amelyre az egyetlen kikötés az, hogy $v(\emptyset) = 0$ legyen.

A $v(S)$ számot az S koalíció értékének nevezzük és úgy értelmezzük, mint az S koalíció tagjai által a koalícióban részt nem vevő $N \setminus S$-beli játékosok döntéseitől függetlenül elérhető egyéni hasznosságok összegének legnagyobb értékét. Megengedjük, hogy a játékosok

Solymosi Tamás
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: tamas.solymosi@uni-corvinus.hu

bármelyik társulása létrejöjjön. A nemüres részkoalíciók halmazát $\mathcal{N}$-nel fogjuk jelölni, azaz $\mathcal{N} = \{S \subseteq N : S \neq \emptyset, S \neq N\}$.

Az (N,v) játék egy kimenetelét az $x \in \mathbb{R}^N$ **kifizetésvektor** adja meg. Eszerint az $i \in N$ játékos x_i kifizetéshez jut, az $S \subseteq N$ koalíció összkifizetése pedig $x(S) = \sum_{i \in S} x_i = e^S \cdot x$, ahol $e^S \in \{0,1\}^N$ jelöli az S koalíció tagsági vektorát, azaz $e^S_i = 1$ ha $i \in S$, és $e^S_i = 0$ különben.

Egy játék kimeneteleivel szemben támasztott stabilitási követelményeket fogalmaz meg a **mag**. Az (N,v) játék magján a

$$\mathbf{C}(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, e^N \cdot x = v(N),\ \ \forall S \in \mathcal{N} : e^S \cdot x \geq v(S) \right\}$$

esetleg üres halmazt értjük, elemeit mag-elosztásoknak hívjuk. A mag, ha nem üres, nyilvánvalóan egy korlátos poliedrikus halmaz, vagyis előáll, mint a véges sok extrém pontjának a konvex burka. Jelölje $\mathrm{ext}\mathbf{C}(N,v)$ az extremális mag-elosztások halmazát.

A magot definiáló feltételekből könnyen adható felső korlát is az egyes koalíciók magbeli összkifizetésére.

1. Állítás. *Tetszőleges (N,v) játékban tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra,*

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(N) - v(N \setminus S) \qquad \textit{minden } x \textit{ mag-elosztásra.} \tag{1}$$

Bizonyítás: Figyelembe véve, hogy egy valódi részkoalíció komplementere is $\mathcal{N}$-beli, a mag-elosztások meghatározásából következik, hogy

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{j \in N \setminus S} x_j = v(N) - \sum_{j \in N \setminus S} x_j \leq v(N) - v(N \setminus S)$$

tetszőleges S koalícióra és x mag-elosztásra. ❑

Ezen állítás alapján a magot a koalíciók összkifizetéseinek felülről való korlátozásával is megadhatjuk. Tetszőleges $T \subseteq N$-re jelölje $b^v(T) = v(N) - v(N \setminus T)$ a T koalíció magbeli összkifizetésének (1) szerinti felső korlátját. Nyilvánvaló, hogy $b^v(N) = v(N)$ és $b^v(\varnothing) = 0$, tehát b^v is egy karakterisztikus függvény az N játékoshalmazon. Továbbá mivel igaz , hogy $b^{b^v}(S) = v(S)$ minden $S \subseteq N$ koalícióra, az (N, b^v) játékot az (N,v) játék duáljának hívjuk. Miután az $\mathcal{N}$ zárt a komplementerképzésre, az (N,v) játék magját ekvivalens módon leírhatjuk úgy is, mint a duáljának az antimagját, amit a rövidség kedvéért csak **duál-mag**nak hívunk:

$$\mathbf{C}(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, e^N \cdot x = b^v(N),\ \ \forall T \in \mathcal{N} : e^T \cdot x \leq b^v(T) \right\}. \tag{2}$$

A továbbiakban csak olyan játékokkal foglalkozunk, amelyekben a mag nem üres.

A mag kétféle jellemzéséből az $i \in N$ játékos bármelyik magbeli x_i kifizetésére azt kapjuk, hogy

$$v(i) \leq x_i \leq b^v(i) = v(N) - v(N \setminus i).$$

A mag tehát része egyrészt annak az $\mathbb{R}^N$-beli téglatestnek, amelynek az i-koordinátára eső vetülete a $[v(i), b^v(i)]$ intervallum, másrészt az $e^N \cdot x = v(N)$ hipersíknak.

A dolgozatban a játék kimenetelének meghatározására szolgáló olyan eljárásokat vizsgálunk, amelyek közös jellemzői, hogy

- a játékosok egy előre rögzített sorrendjét követve rekurzív módon határozzák meg a kifizetéseket;
- allokációt eredményeznek, azaz a generált x kifizetésvektorra teljesül az $e^N \cdot x = v(N)$ egyenlőség;
- amennyiben a generált allokáció magbeli, akkor egy extremális mag-elosztás.

E harmadik jellemző alapján vetődik fel a különböző játékos-sorrendekhez tartozó allokációk és a mag extremális pontjai közötti kapcsolatra vonatkozó következő két kérdés:

Q1: Mag-elosztást kapunk-e bármelyik játékos-sorrend esetén?
Q2: Megkapjuk-e mindegyik extremális mag-elosztást valamilyen játékos-sorrenddel?

Dolgozatunkban e két kérdésre keressük majd a választ elsősorban a (később definiált) hozzárendelési játékok osztályán a (szintén később definiált) leximin illetve leximax allokációs eljárásokra vonatkozóan. Kissé meglepő számunkra, de nincs tudomásunk arról, hogy pontosan ezeket az eljárásokat már tanulmányozták volna. Kuipers (1994) ugyan használt egy, a leximin allokációhoz hasonlóan megkonstruált kifizetés-vektort a korlátozott kooperációs játékok magjának nemürességére vonatkozó vizsgálataiban, de az ő eljárása nem feltétlenül ad egy allokációt (viszont amikor igen, akkor az eredmény ott is egy extremális mag-elosztás). Ugyanez mondható el Izquierdo et al. (2007) módszeréről, ami gyakorlatilag Kuipers (1994) eljárásának a hozzárendelési játékokra specializált változata. A leximax eljáráshoz (többé vagy kevésbé) hasonlóval viszont még nem találkoztunk.

Létezik ugyanakkor egy jól ismert allokációs módszer, a **marginális allokációs eljárás**, ami a fentebb megfogalmazott keretbe illik. Először is idézzünk fel néhány erre vonatkozó tényt. A játékosok egy **sorrend**jének nevezzük a $\sigma : \{1,2,..,n\} \to N$ bijektív leképezést. A v játékban a σ sorrendhez tartozó **marginális allokáció** a következőképpen definiált $m^\sigma(v) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektor:

$$\begin{aligned}
m^\sigma_{\sigma_1}(v) &= v(\sigma_1) - v(\emptyset);\\
m^\sigma_{\sigma_2}(v) &= v(\sigma_1\sigma_2) - v(\sigma_1);\\
\cdots &= \cdots\\
m^\sigma_{\sigma_{n-1}}(v) &= v(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}) - v(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-2});\\
m^\sigma_{\sigma_n}(v) &= v(N) - v(\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}).
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $k = 1,\ldots,n$-re teljesül a $\sum_{i=1}^k m^\sigma_{\sigma_i}(v) = v(\sigma_1\ldots\sigma_k)$ egyenlőség. Speciálisan, $\sum_{i=1}^n m^\sigma_{\sigma_i}(v) = v(N)$, azaz a generált $m^\sigma(v)$ valóban egy allokáció a v játékban. Az is rögtön adódik, hogy ha $m^\sigma(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $m^\sigma(v)$ a magnak csak egy extremális pontja lehet, hiszen az $m^\sigma(v)$ pontban aktív mag-feltételek rendszerének megoldása egyértelmű.

Fogalmazzuk meg formálisan is két kérdésünket, konkrétan a marginális allokációkra vonatkoztatva. Jelölje $\Theta(N)$ az N-beli játékosok $n!$ különböző sorrendjének és $\mathsf{Marg}(v) = \{m^\sigma(v) : \sigma \in \Theta(N)\}$ a marginális allokációknak a halmazát. A $\mathsf{Marg}(v)$ halmaz nyilván semmilyen v játékra nem üres, és persze tartalmazhat $n!$-nál kevesebb elemet is. Az allokációs eljárás harmadikként kiemelt jellemzőjét – nevezetesen, hogy $\mathsf{Marg}(v) \cap \mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$ – figyelembe véve, kérdéseink most a következők:

M1: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{Marg}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$?
M2: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{Marg}(v)$?

A következő példában szereplő kis méretű és „elég szabályos” játék mutatja, hogy csak elég „speciális” tulajdonságok esetén várhatunk e két kérdés bármelyikére is pozitív választ.

1. Példa. (Egyetlen marginális allokáció sem magbeli, azaz $\mathsf{Marg} \cap \mathsf{ext}\mathbf{C} = \varnothing$.)
Tekintsük a következő 3-szereplős, szimmetrikus játékot:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \leq 1 \\ 4 & \text{ha } |S| = 2 \\ 7 & \text{ha } |S| = 3. \end{cases}$$

A játék magja nem üres, hiszen például az $(1,3,3)$ egy (extremális) mag-elosztás. Ugyanakkor egyetlen σ sorrendhez tartozó m^σ sem magbeli, mivel bármelyik σ-ra $m^\sigma_{\sigma_1} + m^\sigma_{\sigma_3} = (0-0)+(7-4) < 4 = v(\sigma_1\sigma_3)$.

1. Megjegyzés. Ha az 1. Példában mutatott játékban az egyik (de csak az egyik) 2-szereplős koalíció értékét 4-ről 3-ra csökkentjük, akkor a módosított játékban a $3! = 6$ marginális allokációból 4 már magbeli, de 2 továbbra sem. Továbbá, a 3 extremális mag-elosztásból 2 már előáll marginális allokációként (a 4 magbeli marginális közül 2-2 ugyanazt a kifizetésvektort adja), de a harmadik továbbra sem. Tehát mindkét kérdésünkre továbbra is negatív a válasz, habár $\mathsf{Marg} \cap \mathsf{ext}\mathbf{C} \neq \varnothing$.

Az 1. Példában szereplő játékra (és az 1. Megjegyzésben módosított változatára is) a marginális allokációs eljárás negatív választ adott mindkét kérdésre. Shapley (1971) egyik klasszikus eredménye ugyanakkor éppen azt jelenti, hogy **konvex játékok** esetén – vagyis, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$ koalíciókra $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ teljesül – pozitív a válasz mind az M1, mind az M2 kérdésre. Sőt, amint azt Ichiishi (1981) megmutatta, ha mindegyik marginális allokáció magbeli, akkor a játék konvex, vagyis csak konvex játékokban lehet az M1 kérdésre pozitív a válasz. Mindezek alapján megállapítható, hogy a **marginális allokációkat tekintve**

- az M1 kérdésre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a játék konvex;
- ha az M1 kérdésre igenlő a válasz, akkor az M2 kérdésre is igenlő a válasz.

A következő példa mutatja, hogy egy nem konvex játék esetén lehet M2-re pozitív, de M1-re negatív a válasz.

2. Példa. (Előfordulhat, hogy $\mathrm{ext}\mathbf{C}(v) \subsetneq \mathsf{Marg}(v)$.)
Legyen $N = \{1,2,3\}$ és a koalíciók értékei

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	2	1	1	2

Ebben a játékban a mag egyelemű, $\mathbf{C}(v) = \{(1,1,0)\}$, míg a marginális allokációk halmaza $\mathsf{Marg}(v) = \{(1,1,0),(0,2,0),(0,1,1),(2,0,0),(1,0,1)\}$. Az egyetlen mag-elosztás két különböző játékos-sorrendhez tartozó marginális allokációként is előáll, de a további négy sorrendhez tartozó marginális allokációk magon kívüliek. Ugyanakkor az $(1,1,0) \in \mathsf{Marg}(v)$ vektor nem extremális pontja a $\mathsf{Marg}(v)$-beli vektorok konvex burkának, hiszen a $(0,2,0)$ és $(2,0,0)$ vektorok átlaga.

A marginális allokációkkal kapcsolatban megemlítjük még Weber (1988) eredményét, miszerint bármilyen játékban a mag részhalmaza a marginális allokációk konvex burkának.

2. Leximin allokációk

Adott (N,v) játékban nevezzük a játékosok σ sorrendjéhez tartozó **leximin allokáció**nak a következő iteratív eljárás által meghatározott $r^\sigma(v) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektort:

$$
\begin{aligned}
r^\sigma_{\sigma_1}(v) &= v(\sigma_1);\\
r^\sigma_{\sigma_2}(v) &= \max\left\{v(\sigma_2),\ v(\sigma_1\sigma_2) - r^\sigma_{\sigma_1}(v)\right\};\\
\cdots &= \cdots\\
r^\sigma_{\sigma_{n-1}}(v) &= \max_{Q\subseteq\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-2}\}}\left\{v(Q\cup\sigma_{n-1}) - \textstyle\sum_{j\in Q} r^\sigma_j(v)\right\};\\
r^\sigma_{\sigma_n}(v) &= v(N) - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} r^\sigma_{\sigma_j}(v).
\end{aligned}
$$

Nyilvánvaló, hogy $\sum_{i=1}^n r^\sigma_{\sigma_i}(v) = v(N)$, azaz a generált $r^\sigma(v)$ valóban egy allokáció a v játékban. Az is rögtön adódik, hogy tetszőleges $k = 1,\ldots,n-1$ esetén bármelyik $Q \subseteq \{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$ koalícióra $\sum_{j\in Q} r^\sigma_j(v) \geq v(Q)$, vagyis az adott sorrendben utolsó játékosét leszámítva az összes többi kifizetéssel teljesülnek a magban előírt alsó korlátok. Sőt, nyilvánvalóan $r^\sigma_{\sigma_k}(v)$ az a legalacsonyabb kifizetés, amire mindezen egyenlőtlenségek teljesülnek. Innen ered az allokáció elnevezése, azt az adott sorrend szerinti lexikografikusan minimális allokációt keressük, amelyik az utolsó játékost nem tartalmazó összes koalícióra teljesíti a mag egyenlőtlenségeket. Tehát mindegyik $1 \leq k \leq n-1$ indexre van olyan $Q_k \subseteq \{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$ koalíció, hogy $\sigma_k \in Q_k$ és $\sum_{j\in Q_k} r^\sigma_j(v) = v(Q_k)$. Ebből rögtön adódik, hogy az $r^\sigma(v)$ pontban aktív mag-feltételek rendszerének egyértelmű megoldása van, vagyis a leximin allokációkra is igaz, hogy ha $r^\sigma(v)$ magbeli, akkor $r^\sigma(v)$ a magnak csak egy extremális pontja lehet.

Konkretizáljuk két fő kérdésünket a leximin allokációkra vonatkoztatva. A v játékban jelölje $\mathsf{Lmin}(v) = \{r^\sigma(v) : \sigma \in \Theta(N)\}$ a leximin allokációk halmazát. Az $\mathsf{Lmin}(v)$ halmaz nyilván semmilyen v játékra nem üres, és persze tartalmazhat $n!$-nál kevesebb elemet is. Figyelembe véve, hogy $\mathsf{Lmin}(v) \cap \mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$, kérdéseink most a következők:

R1: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{Lmin}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$?
R2: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{Lmin}(v)$?

Könnyen ellenőrizhető, hogy – a marginális allokációkhoz hasonlóan most is – az 1. Példában szereplő játék mindkét kérdésre negatív választ ad, míg a 2. példabeli játéknál az első kérdésre negatív, de a másodikra pozitív a válasz. A hasonlóság oka egyszerű, mindkét esetben a marginális allokációk azonosak a leximin allokációkkal. Azt mondjuk, hogy egy v játék **szuperadditív**, ha tetszőleges $S \cap T = \varnothing$ koalíciókra $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$. Egyszerűen belátható, hogy

minden legfeljebb 3-szereplős szuperadditív játékban a marginális allokációk azonosak a leximin allokációkkal.

Az ilyen játékok leximin allokációira tehát ugyanazok a megállapítások érvényesek, mint amiket a marginális allokációkra (ott a játékosok számától függetlenül) tettünk.

Közismert, hogy a **konvex játékok** ekvivalens módon definiálhatók a következő tulajdonsággal is: tetszőleges $i \in N$ játékosra és $S \subseteq T \subseteq N \setminus i$ koalíciókra $v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$. Ezt használva könnyen belátható, hogy ha v egy konvex játék, akkor tetszőleges σ sorrend esetén $r^\sigma(v) = m^\sigma(v)$. Shapley (1971) fentebb már idézett eredményéből következik, hogy

tetszőleges v konvex játék esetén az R1 és az R2 kérdésre is pozitív a válasz.

De van-e a leximin allokációkra vonatkozó megfelelője Ichiishi (1981) eredményének? Másképpen fogalmazva, adhat-e R1-re igenlő választ egy nem konvex játék is? A következő példa mutatja, hogy igen, van olyan szuperadditív játék, amelyik R1-re igenlő, de R2-re tagadó választ ad.

3. Példa. (Az R1-re pozitív, de az R2-re negatív a válasz.)
Tekintsük a következő 4-szereplős szimmetrikus játékot:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \leq 1 \\ 3 & \text{ha } |S| = 2 \\ 5 & \text{ha } |S| = 3 \\ 10 & \text{ha } |S| = 4. \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy bármelyik σ sorrend esetén az első játékos 0-t, a következő két játékos 3-3-at, míg az utolsó 4-et kap kifizetésként, az $r^\sigma(v)$ tehát magbeli. Ugyanakkor, a magnak vannak egyéb extremális pontjai is, például az $(1,2,2,5)$ kifizetésvektor és permutált változatai, amelyek tehát a játékosok semmilyen sorrendjével sem állnak elő leximin allokációként. Erre a v játékra tehát $\mathsf{Lmin}(v) \subsetneq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$.

Megjegyezzük, hogy a 3. Példában szereplő játék **egzakt**, azaz tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra van olyan $x \in \mathbf{C}$ mag-elosztás, hogy $x(S) = v(S)$. Az világos, hogy egy egzakt játék bármelyik részjátékának is nem üres a magja. Rögtön adódik, hogy minden egzakt játék szuperadditív. Ugyanakkor közismert, hogy minden konvex játék egzakt, valamint, hogy minden legfeljebb 3-szereplős egzakt játék konvex.

A 3. példabeli játékban a leximin allokációk konvex burka szigorú részhalmaza a magnak, vagyis Weber (1988) fentebb idézett eredményének a leximin allokációkra vonatkozó megfelelője nem igaz, még az egzakt játékok osztályán sem. A 2. Példa mutatja, hogy a fordított irányú szigorú tartalmazás is előfordulhat, a mag is lehet szigorú részhalmaza a leximin allokációk konvex burkának. Mivel az ottani egy 3-szereplős, nem konvex, tehát nem is egzakt játék, felmerül a kérdés, hogy lehet-e ilyen (legalább) 4-szereplős egzakt játékot találni?

3. Leximax allokációk

Az előzőekben vizsgált leximin allokációkat alapvetően az jellemzi, hogy a magbeli kifizetésekre előírt alsó korlátokat egy éppen adott sorrend szerint figyelembe véve a játékosok kifizetéseit a „relatíve” legalacsonyabb szintre hozza. Ennek mintájára, de az optimalizálás irányát megfordítva, meghatározhatunk olyan allokációkat is, amelyek egy adott sorrend szerinti „relatíve” legmagasabb kifizetéseket adnak, persze a magbeli kifizetésekre adott felső korlátokat tekintetbe véve. Most tehát a v játék magjának alternatív, a b^v duál játék antimagjaként történő (2) alatti megadását használjuk.

Adott (N, v) játékban nevezzük a játékosok σ sorrendjéhez tartozó **leximax allokáció**nak a következő iteratív eljárás által meghatározott $s^\sigma(v) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektort:

$$\begin{aligned}
s^\sigma_{\sigma_1}(v) &= b^v(\sigma_1);\\
s^\sigma_{\sigma_2}(v) &= \min\left\{b^v(\sigma_2),\, b^v(\sigma_1\sigma_2) - s^\sigma_{\sigma_1}(v)\right\};\\
\cdots &= \cdots\\
s^\sigma_{\sigma_{n-1}}(v) &= \min_{Q\subseteq\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-2}\}}\left\{b^v(Q\cup\sigma_{n-1}) - \textstyle\sum_{j\in Q} s^\sigma_j(v)\right\};\\
s^\sigma_{\sigma_n}(v) &= b^v(N) - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} s^\sigma_{\sigma_j}(v).
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy $\sum_{i=1}^n s^\sigma_{\sigma_i}(v) = b^v(N) = v(N)$, azaz a generált $s^\sigma(v)$ valóban egy allokáció a v játékban. Az is rögtön adódik, hogy tetszőleges $k = 1, \ldots, n-1$ esetén bármelyik $Q \subseteq \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ koalícióra $\sum_{j\in Q} s^\sigma_j(v) \le b^v(Q)$, vagyis az adott sorrendben utolsó játékosét leszámítva az összes többi kifizetéssel teljesülnek a magban előírt felső korlátok. Sőt, nyilvánvalóan $s^\sigma_{\sigma_k}(v)$ az a legmagasabb kifizetés, amire mindezen egyenlőtlenségek teljesülnek. Innen ered az allokáció elnevezése, azt az adott sorrend szerinti lexikografikusan maximális allokációt keressük, amelyik az utolsó játékost nem tartalmazó összes koalícióra teljesíti a duál-mag egyenlőtlenségeket. Tehát mindegyik $1 \le k \le n-1$ indexre van olyan

$Q_k \subseteq \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ koalíció, hogy $\sigma_k \in Q_k$ és $\sum_{j \in Q_k} s_j^\sigma(v) = b^v(Q_k)$. Ebből rögtön adódik, hogy az $s^\sigma(v)$ pontban aktív duál-mag feltételek rendszerének egyértelmű megoldása van, vagyis a leximax allokációkra is igaz, hogy ha $s^\sigma(v)$ magbeli, akkor $s^\sigma(v)$ a magnak csak egy extremális pontja lehet.

Konkretizáljuk most két fő kérdésünket a leximax allokációkra. A v játékban jelölje $\mathsf{Lmax}(v) = \{s^\sigma(v) : \sigma \in \Theta(N)\}$ a leximax allokációk halmazát. Az $\mathsf{Lmax}(v)$ halmaz nyilván semmilyen v játékra nem üres, és persze tartalmazhat $n!$-nál kevesebb elemet is. Figyelembe véve, hogy $\mathsf{Lmax}(v) \cap \mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$, kérdéseink most a következők:

S1: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{Lmax}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$?
S2: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{Lmax}(v)$?

A marginális, illetve a leximin allokációktól eltérően, az 1. és a 2. Példában szereplő játékok most mindkét kérdésre pozitív választ adnak. Az eltérés oka, hogy a leximax allokációk már nem mindig azonosak a marginális allokációkkal. Érdekes ugyanakkor, hogy a legfeljebb 3-szereplős, nem üres maggal rendelkező, szuperadditív játékok osztályán mindkét kérdésre csak pozitív válasz adható.

2. Állítás. *Ha* $|N| \leq 3$, *v szuperadditív és* $\mathbf{C}(v) \neq \varnothing$, *akkor* $\mathsf{Lmax}(v) = \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$.

Bizonyítás (vázlat): A bizonyítás inkább hosszú, mint nehéz, ezért a pontos részletek végiggondolását az olvasóra hagyjuk.

Az 1-, illetve 2-szereplős játékokra az állítás triviális.

A 3-szereplős esetben mindkét irányú tartalmazás belátásakor alapvetően két esetet kell vizsgálni, attól függően, hogy egy adott σ sorrendben a második játékos kifizetését a $\min\left\{b^v(\sigma_2),\ b^v(\sigma_1\sigma_2) - s_{\sigma_1}^\sigma(v)\right\}$ kifejezésben szereplő melyik tag adja. Az első, illetve a harmadik játékos kifizetése egyértelmű. Bizonyos egyenlőtlenségek igazolásához szükség van arra a közismert tényre, hogy egy 3-szereplős szuperadditív v játék magja pontosan akkor nem üres, ha $\sum_{i \in N} v(N \setminus i) \leq 2v(N)$. ❑

A **konvex játékok** osztályán – a leximin allokációkhoz hasonlóan – most is mindkét kérdésre csak pozitív válasz adható. A konvex játékoknak a növekvő marginális hozzájárulásokkal történő ekvivalens definíciójából könnyen belátható, hogy ha v egy konvex játék, akkor tetszőleges σ sorrend esetén $s^\sigma(v) = m^{\sigma^*}(v)$, ahol σ^* jelöli a fordított σ sorrendet, azaz $\sigma_k^* = \sigma_{n+1-k}$ minden $k = 1, \dots, n$-re. Shapley (1971) eredményéből és korábbi megállapításainkból következik, hogy

tetszőleges v konvex játékra, $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) = \mathsf{Lmax}(v) = \mathsf{Lmin}(v) = \mathsf{Marg}(v)$.

De van-e a leximax allokációkra vonatkozó megfelelője Ichiishi (1981) eredményének? Figyelembe véve a 2. Állítást, az ellenkező irányból és egy kicsit általánosabban feltett kérdés az, hogy van-e olyan legalább 4-szereplős, szuperadditív játék, amelyik S1-re igenlő, de S2-re tagadó választ ad? Érdekes módon a 3. Példa itt is használható.

3. Példa (folyt.). (Az S1-re pozitív, de az S2-re negatív a válasz.)
A 4-szereplős szimmetrikus játék és a duálja:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \le 1 \\ 3 & \text{ha } |S| = 2 \\ 5 & \text{ha } |S| = 3 \\ 10 & \text{ha } |S| = 4, \end{cases} \qquad \text{és} \qquad b^v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| = 0 \\ 5 & \text{ha } |S| = 1 \\ 7 & \text{ha } |S| = 2 \\ 10 & \text{ha } |S| \ge 3. \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy bármelyik σ sorrend esetén a leximax eljárásban az első játékos 5-öt, a következő két játékos 2-2-t, míg az utolsó játékos 1-et kap kifizetésként, az $s^\sigma(v)$ tehát magbeli. Ugyanakkor, a magnak vannak egyéb extremális pontjai is, például a leximin allokációk, azaz a $(0,3,3,4)$ kifizetésvektor és permutált változatai. Ezek tehát a játékosok semmilyen sorrendjével sem állnak elő leximax allokációként. Erre a v játékra tehát $\mathsf{Lmax}(v) \subsetneq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$. Sőt, $\mathsf{Lmax}(v) \cap \mathsf{Lmin}(v) = \varnothing$, és ellenőrizhető, hogy $\mathsf{Lmax}(v) \cup \mathsf{Lmin}(v) = \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$.

Emlékeztetünk rá, hogy a 3. Példában szereplő játék egy egzakt játék. A leximax allokációk konvex burka szigorú részhalmaza a magnak, vagyis nem igaz Weber (1988) fentebb idézett eredményének a leximax allokációkra vonatkozó megfelelője, még az egzakt játékok osztályán sem. A 2. Állítás miatt most semmilyen 3-szereplős játék sem demonstrálhatja, hogy a fordított irányú szigorú tartalmazás is előfordulhat, vagyis a mag is lehet szigorú részhalmaza a leximax allokációk konvex burkának. Kérdés, hogy van-e ilyen (legalább) 4-szereplős szuperadditív (netán egzakt) játék?

4. Hozzárendelési játékok

Egy (N,w) játék akkor egy **hozzárendelési játék**, ha a játékosok halmazának van olyan $N = I \cup J$, $I \cap J = \varnothing$ partíciója és található egy olyan nemnegatív $A = [a_{ij}]_{i\in I, j\in J}$ mátrix, hogy minden $S \subseteq N$ koalícióra

$$w(S) = w_A(S) := \max_{\mu\in\Pi_{(S\cap I, S\cap J)}} \sum_{(i,j)\in\mu} a_{ij},$$

ahol $\Pi_{(P,Q)}$ jelöli két diszjunkt (nem feltétlenül azonos elemszámú) P és Q halmaz közötti hozzárendelések (párosítások) halmazát.

Kényelmes lesz azonosítani a játékosokat a hozzájuk tartozó sor- ill. oszlopindexekkel, és vesszővel ($'$) megkülönböztetni az oszlopjátékosokat az azonos sorszámú sorjátékosoktól. Tehát a j-edik sor- ill. oszlopjátékost egyszerűen j ill. j' fogja jelölni. Az $\{i, j'\}$ alakú koalíciókat **vegyespáros**oknak fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy (i) $w_A(S) = 0$, ha $S \subseteq I$ vagy $S \subseteq J$; és (ii) $w_A(\{i, j'\}) = a_{ij}$ minden i, j indexre. Könnyen belátható, hogy

tetszőleges $A \geq 0$ mátrix esetén a w_A hozzárendelési játék szuperadditív.

A tárgyalás egyszerűsítése érdekében a továbbiakban feltesszük, hogy **az alapmátrix négyzetes**. Ha szükséges, csupa 0 elemből álló sorok vagy oszlopok hozzávételével ezt mindig elérhetjük. Egy ilyen átalakítás ugyan az indukált hozzárendelési játéknak ún. nulla-játékosokkal történő bővítését jelenti, de közismert, hogy tetszőleges játékban egy nulla-játékos kifizetése minden mag-elosztásban nulla, vagyis az eredeti mag az esetleges bővítés utáni magnak egy vetülete. A magra vonatkozó vizsgálatainkban az általánosságot tehát nem korlátozza, ha csak négyzetes mátrixok által indukált hozzárendelési játékokra szorítkozunk.

További egységesítést eredményez, ha bővítjük a négyzetes alapmátrixot egy 0-s indexű csupa 0 elemből álló sorral és egy ugyanilyen oszloppal. Legyen $M_0 = \{0\} \cup M$ a **bővített mátrix** indexhalmaza, az új elemek pedig $a_{00} = a_{i0} = a_{0j} = 0$ minden $i, j \in M$-re. Ezáltal ugyan bővítjük az eredeti játékot egy fiktív sor-, illetve oszlopjátékossal, de nulla-játékosok lévén a magban konstans 0 a kifizetésük, kezelhetjük tehát az egyszemélyes koalíciókat is úgy, mint a másik oldali fiktív játékossal alkotott vegyespárosokat. Jelölje $I_0 = \{0\} \cup I$, illetve $J_0 = \{0'\} \cup J$ a bővített játékban a sor-, illetve az oszlopjátékosok halmazát.

Végezetül feltesszük, hogy a mátrixban **a főátló** egy **maximális értékű** párosítás, vagyis a nagykoalíció értékét a diagonális hozzárendelés adja, azaz $w_A(I_0 \cup J_0) = \sum_{i \in M_0} a_{ii}$. Mivel a sorokhoz és az oszlopokhoz tartozó játékosok különbözőek, felsorolásuk alkalmas megváltoztatásával ez mindig elérhető.

A hozzárendelési játékokat Shapley és Shubik (1972) vezették be a pénzbeli kompenzációkat megengedő kétoldalú párosítási piacok játékelméleti modellezésére. A magra vonatkozóan az alábbi főbb eredményeket bizonyították.

1. Tétel (Shapley és Shubik, 1972). *Legyen A egy tetszőleges nemnegatív mátrix és w_A az általa generált hozzárendelési játék. Ekkor*

1. *a w_A magja nem üres, sőt megegyezik a nagykoalíció értékét meghatározó lineáris programozási feladat duál-optimális megoldásainak halmazával, vagyis (a fentebb bevezetett standardizált formában, illetve jelölésekkel)*

$$\mathbf{C}(w_A) = \left\{ (u_i; v_j)_{i,j \in M_0} : \forall i \in M_0 : \ u_i + v_i = a_{ii} \text{ és } \forall i, j \in M_0 : \ u_i + v_j \geq a_{ij} \right\};$$

2. *$\mathbf{C}(w_A)$ háló-szerkezetű, azaz mag-elosztásokat kapunk, ha két mag-elosztás szerinti kifizetés helyett minden sor-/oszlopjátékos a kisebb/nagyobb kifizetést, vagy fordítva, a nagyobb/kisebb kifizetést kapja;*
3. *van két olyan mag-elosztás, ami a játékosok magbeli extrém kifizetéseiből áll: az egyikben mindegyik sorjátékos a magbeli kifizetéseinek a minimumát és mindegyik*

oszlopjátékos a magbeli kifizetéseinek a maximumát kapja (jelölje ezt $(\underline{u}, \overline{v})$), a másik extrém mag-elosztásban pedig fordítva (jelölje ezt $(\overline{u}, \underline{v})$).

Az 1. Tétel 1. pontja szerint egy hozzárendelési játék magjának meghatározásához nincs szükség az összes koalícióra, elegendő csak a vegyespáros, illetve az egyszemélyes koalíciókat (a konstans 0 kifizetésben részesülő másik oldali fiktív játékossal alkotott párokat) tekinteni. Ráadásul a szokásos, a nagykoalíció kifizetésére tett egyetlen egyenlőség helyett most az optimálisan egymáshoz rendelt mindegyik játékospár kifizetésére van egy egyenlőségünk. Ezek az egyenletek nyilvánvalóan lineárisan függetlenek, ebből adódik, hogy a $\mathbf{C}(w_A)$ dimenziója legfeljebb $|M|$, vagyis jóval kisebb, mint a mag dimenziója általában (azaz nem elfajult esetben $|N|-1$, ami itt $2|M|-1$ lenne). További hasznos tulajdonság, hogy a hozzárendelési játék magja leírható csak az egyik oldali kifizetéseket használva.

Nézzük, mit mondhatunk a hozzárendelési játékok osztályán a **marginális allokációk** és a mag extrém pontjainak kapcsolatáról. Hamers et al. (2002) bizonyították, hogy

tetszőleges hozzárendelési játék magjának mindegyik extremális pontja egy marginális allokáció, vagyis ezen a játékosztályon az M2 kérdésre igenlő a válasz.

Az M1 kérdésre persze csak akkor igenlő a válasz, ha a hozzárendelési játék konvex.

A konvex, illetve az egzakt hozzárendelési játékok egyébként jellemezhetők az őket generáló mátrixok tulajdonságaival is. Solymosi és Raghavan (2001) bizonyították, hogy (a fentebb bevezetett standardizáló feltevések mellett):

- *w_A akkor és csak akkor konvex, ha A diagonális, azaz $a_{ij} = 0$ minden $i \neq j$-re;*
- *w_A akkor és csak akkor egzakt, ha az A alapmátrix*
  - ◇ *egyrészt **diagonálisan domináns** (röviden D2-tulajdonságú), azaz mindegyik $k \in M$-re $a_{kk} \geq \max\{a_{ik}, a_{kj}\}$ teljesül minden $i, j \in M$-re (vagyis mindegyik diagonális elem maximális a sorában és az oszlopában is);*
  - ◇ *másrészt **duplán diagonálisan domináns** (röviden D3-tulajdonságú), azaz $a_{ij} + a_{kk} \geq a_{ik} + a_{kj}$ minden (nem feltétlenül különböző) $i, j, k \in M$-re.*

Vegyük észre, hogy a D3 tulajdonság csak akkor egy megszorítást jelentő „igazi” feltétel, ha mindhárom index különböző, hiszen a kívánt egyenlőtlenség $i = j$ esetén következik a főátló maximalitásából, míg $i = k$ vagy $j = k$ esetén automatikusan teljesül. Megjegyezzük, hogy az egzaktságot együttesen karakterizáló D2 és D3 tulajdonságok között nincs logikai kapcsolat, egyik sem következik a másikból.

4.1. Leximin allokációk

Nézzük meg, hogy milyen választ adhatunk a leximin allokációkra vonatkozó R1 és R2 kérdésekre, ha a hozzárendelési játékok osztályára szorítkozunk. A marginális allokációkra vonatkozó fentebb idézett eredmény (Hamers et al., 2002) miatt könnyű dolgunk van a második kérdéssel.

3. Állítás. *Tetszőleges w_A hozzárendelési játékban* $\mathsf{ext}\mathbf{C}(w_A) \subseteq \mathsf{Lmin}(w_A)$*, vagyis a hozzárendelési játékok osztályán az R2 kérdésre pozitív a válasz.*

Bizonyítás: A definíciókból könnyen adódik a következő általános érvényű észrevétel:

> *tetszőleges v játékban, ha egy σ sorrendre $m^\sigma(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $r^\sigma(v) = m^\sigma(v)$; vagyis ha egy marginális allokáció magbeli, akkor egybeesik az ugyanazon sorrendhez tartozó leximin allokációval.*

Ez alapján állításunk azonnal következik Hamers et al. (2002) fent idézett eredményéből, miszerint tetszőleges hozzárendelési játék magjának mindegyik extremális pontja egy marginális allokáció. ❑

A következő két példa mutatja, hogy a hozzárendelési játékok osztályán az R1 kérdésre csak akkor lehet igenlő válasz, ha a játék egzakt, vagyis az alapmátrixra teljesül a D2 és a D3 tulajdonság is.

4. Példa. (Az R1-re pozitív válaszhoz szükséges a D2-tulajdonság.)
Tegyük fel, hogy az A mátrix nem D2-tulajdonságú, mert van olyan $i \neq j$, hogy $a_{ji} > a_{jj}$. Bármilyen $\sigma = (i', i, j, j', \ldots)$ alakú sorrendre a leximin allokációs eljárásban a következő értékadásokra kerül sor: először $v_{i'}^\sigma = 0$, másodszor $u_i^\sigma = a_{ii}$, és mivel a_{ij} pozitív, harmadszor $u_j^\sigma = a_{ji}$. Mivel mindenképpen $v_{j'}^\sigma \geq 0$, így $u_j^\sigma + v_{j'}^\sigma \geq a_{ji} + 0 > a_{jj}$, vagyis sérül a diagonális párok kifizetéseitől a magban elvárt egyenlőség. (Szerepcserével ugyanez a gondolatmenet használható akkor, ha a_{jj} nem oszlopmaximum.) Tehát nem diagonálisan domináns alapmátrix esetén nem minden sorrend ad magbeli leximin allokációt.

Vegyük észre, hogy 2×2-es mátrixok esetén a D2-tulajdonság garantálja az R1 kérdésre az igenlő választ, mind a $4! = 24$ sorrend magbeli leximin allokációt eredményez. Megmutatjuk, hogy legalább 3×3-as mátrixoknál ehhez kell a D3-tulajdonság is.

5. Példa. (Az R1-re pozitív válaszhoz szükséges a D3-tulajdonság)
Tegyük fel, hogy az A alapmátrix legalább 3×3-as, rendelkezik a D2-tulajdonsággal, de nem D3-tulajdonságú, mert van olyan $i \neq j \neq k \neq i$, hogy $a_{ij} + a_{kk} < a_{ik} + a_{kj}$. Bármilyen $\sigma = (i, j', k, k', \ldots)$ alakú sorrendre a leximin allokációs eljárásban a következő értékadásokra kerül sor: először $u_i^\sigma = 0$, másodszor $v_{j'}^\sigma = a_{ij}$, és mivel a feltevés szerint $a_{kj} - a_{ij} > a_{kk} - a_{ik} \geq 0$, harmadszor $u_k^\sigma = a_{kj} - a_{ij}$. Mivel mindenképpen $v_{k'}^\sigma \geq a_{ik}$, így $u_k^\sigma + v_{k'}^\sigma \geq a_{kj} - a_{ij} + a_{ik} > a_{kk}$, vagyis a k, k' diagonális pár kifizetéseire nem teljesül a megfelelő mag-feltétel. Tehát nem duplán diagonálisan domináns alapmátrix esetén nem minden sorrend ad magbeli leximin allokációt.

Most megmutatjuk, hogy egy hozzárendelési játék egzaktsága (vagyis az alapmátrix D2- és D3-tulajdonsága) nem csak szükséges, de elegendő is ahhoz, hogy az R1 kérdésre igenlő legyen a válasz.[1]

4. Állítás. *Ha az A mátrix D2- és D3-tulajdonságú, akkor az indukált w_A hozzárendelési játékra* $\mathsf{Lmin}(w_A) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(w_A)$*; vagyis az egzakt hozzárendelési játékok osztályán az R1 kérdésre pozitív a válasz.*

Bizonyítás: Legyen σ a játékosok egy tetszőleges sorrendje, és jelölje (u^σ, v^σ) az indukált leximin allokációt.

Első lépésként megmutatjuk, hogy $u_k^\sigma + v_k^\sigma = a_{kk}$ minden $k \in M$-re. Az általánosság bármilyen korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az n' oszlopjátékos az utolsó a σ sorrendben. Legyen $i \in M$ egy tetszőleges $i \neq n$ index. Nyilván feltehetjük, hogy a σ-ban az i megelőzi az i'-t. Megmutatjuk, hogy erre a diagonális párra a mag-feltétel egyenlőségként teljesül.

Két eset van. Ha $u_i^\sigma = 0$, akkor a leximin allokációs eljárásban v_i^σ azt a legkisebb értéket kapja, amire teljesül a $v_i^\sigma \geq a_{ji} - u_j^\sigma$ egyenlőtlenség minden az i'-t a σ-ban megelőző j sorjátékossal, az i-t is beleértve. A D2-tulajdonság és a kifizetések nemnegativitása miatt $a_{ii} - 0 \geq a_{ji} - u_j^\sigma$ minden az i'-t megelőző j-re. Tehát $v_i^\sigma = a_{ii}$, vagyis ekkor tényleg $u_i^\sigma + v_i^\sigma = a_{ii}$.

Ha $u_i^\sigma > 0$ értéket kapott, akkor volt a σ sorrendben az i előtt egy olyan j' oszlopjátékos, hogy $u_i^\sigma = a_{ij} - v_j^\sigma$. Másrészt nyilván $u_k^\sigma \geq a_{kj} - v_j^\sigma$ minden az i'-t megelőző k sorjátékosra, a j-t is beleértve. A D3-tulajdonság miatt $a_{ii} - u_i^\sigma = a_{ii} - a_{ij} + v_j^\sigma \geq a_{ki} - a_{kj} + v_j^\sigma = a_{ki} - u_k^\sigma$, minden az i'-t megelőző k sorjátékosra. Tehát a leximin allokációs eljárásban v_i^σ pontosan az $a_{ii} - u_i^\sigma$ értéket kapja, vagyis az i, i' diagonális párra ekkor is egyenlőségként teljesül a mag-feltétel.

Ezzel beláttuk, hogy a σ sorrendben az utolsó játékost tartalmazó párt kivéve az összes diagonális párra teljesül az $u_i^\sigma + v_i^\sigma = a_{ii}$ egyenlőség. Mivel a nagykoalíció értéke a diagonális elemek összege, a σ-ban utolsó játékosra és diagonális párjára is teljesülnie kell ennek az egyenlőségnek, vagyis $u_n^\sigma + v_n^\sigma = a_{nn}$ is igaz.

Második lépésként emlékeztetünk, hogy a leximin allokáció definíció szerint teljesíti a mag-egyenlőtlenségeket az utolsó játékost nem tartalmazó összes koalícióra. Esetünkben tehát $u_i^\sigma + v_j^\sigma \geq a_{ij}$ minden $i \in I_0$ sorjátékosra (az $i = n$-t is beleértve) és minden $j \neq n$ oszlopjátékosra.

Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy a mag-egyenlőtlenségek teljesülnek az n' oszlopjátékost tartalmazó vegyespáros koalíciókra is. Megint két eset van. Ha $u_n^\sigma = 0$, akkor a D2-tulajdonság és a kifizetések nemnegativitása miatt $v_n^\sigma = a_{nn} - 0 \geq a_{kn} - u_k^\sigma$ minden $k \in I_0$ sorjátékosra. Ha $u_n^\sigma > 0$, akkor volt a σ sorrendben az n sorjátékos előtt egy olyan j' oszlopjátékos, hogy $u_n^\sigma = a_{nj} - v_j^\sigma$. Mivel $j \neq n$, fennállnak az $u_k^\sigma + v_j^\sigma \geq a_{kj}$ mag-egyenlőtlenségek minden $k \in I_0$ sorjátékosra. Ezt felhasználva a D3-tulajdonságból kapjuk,

[1] Ezért az észrevételért köszönet Bednay Dezsőnek.

hogy $v_n^\sigma = a_{nn} - u_n^\sigma = a_{nn} - a_{nj} + v_j^\sigma \geq a_{kn} - a_{kj} + v_j^\sigma \geq a_{kn} - u_k^\sigma - v_j^\sigma + v_j^\sigma = a_{kn} - u_k^\sigma$ mindegyik $k \in I_0$ sorjátékosra.

A σ sorrendhez tartozó (u^σ, v^σ) leximin allokáció tehát valóban magbeli. ❑

4.2. Leximax allokációk

Végezetül nézzük meg, milyen választ adhatunk a leximax allokációkra vonatkozó S1 és S2 kérdésekre, ha a hozzárendelési játékok osztályára szorítkozunk. Kezdjük ismét a második kérdéssel.

5. Állítás. *Tetszőleges w_A hozzárendelési játékban* $\mathrm{ext}\mathbf{C}(w_A) \subseteq \mathrm{Lmax}(w_A)$, *vagyis a hozzárendelési játékok osztályán az S2 kérdésre pozitív a válasz.*

Bizonyítás: Legelőször belátjuk a következő általános érvényű észrevételt:

tetszőleges v játékban, ha egy σ sorrendre $m^\sigma(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $s^{\sigma^*}(v) = m^\sigma(v)$, ahol σ^* jelöli a fordított σ sorrendet, azaz $\sigma_k^* = \sigma_{n+1-k}$ minden $k = 1,\ldots,n$-re; vagyis ha egy marginális allokáció magbeli, akkor egybeesik a fordított sorrendhez tartozó leximax allokációval.

Valóban, a leximax allokációs eljárás menetét követve, a $\sigma_1^* = \sigma_n$ játékos kifizetésére teljesül, hogy $s_{\sigma_1^*}^{\sigma^*}(v) = b^v(\sigma_1^*) = v(N) - v(N \setminus \sigma_n) = m_{\sigma_n}^\sigma(v)$. Tegyük fel, hogy a leximax és a marginális kifizetések egyenlőségét már beláttuk a σ^* szerinti első $j \geq 1$ játékosra, azaz bármilyen $k = 1,\ldots,j$ mellett a $\sigma_k^* = \sigma_{n+1-k}$ játékos kifizetésére teljesül, hogy $s_{\sigma_k^*}^{\sigma^*}(v) = m_{\sigma_{n+1-k}}^\sigma(v)$. Ezeket összeadva a marginális kifizetések teleszkópos jellegéből adódik, hogy fennáll a $\sum_{k=1}^j s_{\sigma_k^*}^{\sigma^*}(v) = b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^*)$ összefüggés is. Mivel $m^\sigma(v)$ magbeli, a $\sigma_{j+1}^* = \sigma_{n-j}$ játékos leximax kifizetésének meghatározásában szereplő tetszőleges $Q \subseteq \{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_j^*\}$ játékoshalmazra teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
b^v(Q \cup \sigma_{j+1}^*) - \sum_{k \in Q} s_k^{\sigma^*}(v) &= b^v(Q \cup \sigma_{n-j}) - \sum_{k \in Q} m_k^\sigma(v) \\
&\geq m_{\sigma_{n-j}}^\sigma(v) \\
&= v(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-j}) - v(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-j-1}) \\
&= b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^* \sigma_{j+1}^*) - b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^*) \\
&= b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^* \sigma_{j+1}^*) - \sum_{k=1}^{j} s_{\sigma_k^*}^{\sigma^*}(v).
\end{aligned}$$

Eszerint a minimumot a legbővebb $Q = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_j^*\}$ halmaz adja, tehát a $\sigma_{j+1}^* = \sigma_{n-j}$ játékos leximax kifizetésére is teljesül, hogy $s_{\sigma_{j+1}^*}^{\sigma^*}(v) = m_{\sigma_{n-j}}^{\sigma}(v)$. Ezzel induktív módon beláttuk, hogy $s^{\sigma^*}(v) = m^{\sigma}(v)$, amennyiben $m^{\sigma}(v)$ magbeli.

Ebből az észrevételből viszont állításunk azonnal következik, hiszen Hamers et al. (2002) fent idézett eredménye szerint tetszőleges hozzárendelési játék magjának mindegyik extremális pontja előáll, mint egy alkalmasan választott sorrendhez tartozó marginális allokáció, vagyis előáll, mint a fordított sorrendhez tartozó leximax allokáció. ❑

További vizsgálatokat igényel viszont a hozzárendelési játékok osztályára feltett S1 kérdés pontos megválaszolása.[2] Ehhez szükségesnek tűnik ugyanis a hozzárendelési játékok duáljának, pontosabban a duál magjának egy olyan jellegű „explicit” megadása, mint ami a magra ismert (lásd az 1. Tétel 1. pontját). Használhatónak véljük ugyanakkor Demange (1982), illetve Leonard (1983) egymástól függetlenül bizonyított eredményét, miszerint

tetszőleges w_A hozzárendelési játékban, a $k \in I \cup J$ játékos magbeli kifizetéseinek maximuma pontosan $b_k^{w_A} = w_A(I \cup J) - w_A(I \cup J \setminus k)$.

Tetszőleges σ sorrend esetén tehát a σ_1 játékos leximax kifizetése megegyezik ennek a játékosnak a magbeli maximális kifizetésével. Ugyancsak hasznosak lehetnek Núñez és Rafels eredményei a hozzárendelési játékok magjának, illetve alapmátrixának a különböző dekompozícióiról (lásd a (Núñez és Rafels, 2009) cikket és az ott található további hivatkozásokat).

Köszönetnyilvánítás:
A szerző kutatásait az OTKA K-72856 pályázat támogatta.

Hivatkozások

Demange, G. (1982). Strategyproofness in the assignment market game. *Mimeo*, Laboratoire d'Econométrie de l'École Politechnique, Paris.

Hamers, H., Klijn, F., Solymosi, T., Tijs, S., Villar, J. P. (2002). Assignment games satisfy the CoMa-property. *Games and Economic Behavior*, 38:231–239.

Ichiishi, T. (1981). Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. *Journal of Economic Theory*, 25:283–286.

Izquierdo, J. M., Núñez, M., Rafels, C. (2007). A simple procedure to obtain the extreme core allocations of an assignment market. *International Journal of Game Theory*, 36:17–26.

[2] Reményeim szerint jövőre egy, a fentiekhez hasonló „éles” eredménnyel köszönthetem az akkor 71 éves Forgó Ferencet.

Kuipers, J. (1994). Combinatorial methods in cooperative game theory. *Ph.D. Thesis*, University of Limburg, Maastricht, The Netherlands.

Leonard, H. B. (1983). Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions. *Journal of Political Economy,* 91:461–479.

Neumann, J. von, Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Núñez, M., Rafels, C. (2009). A glove-market partitioned matrix related to the assignment game. *Games and Economic Behavior*, 67:598–610.

Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:11–26.

Shapley, L. S., Shubik, M. (1972). The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, 1:111–130.

Solymosi, T., Raghavan, T. (2001). Assignment games with stable core. *International Journal of Game Theory*, 30:177–185.

Weber, R. J. (1988). Probabilistic values for games. In: Roth, A. E. (szerk.) *The Shapley Value*, Cambridge University Press, pp. 101–119.

Késleltetett információk hatása monopóliumi döntésekben

Szidarovszky Ferenc, Akio Matsumoto

Kivonat
A tanulmányban egy dinamikus monopólium modellt vizsgálunk gradiens dinamikával. Feltesszük, hogy a vállalatnak csak késleltetett információ áll rendelkezésére a marginális profitról. Ha a késleltetés mértékét adottnak tekintjük, akkor egy differencia-differenciál egyenletet kapunk. Amennyiben folytonosan elosztott késleltetést tekintünk, akkor egy Volterra típusú integro-differenciál egyenlet jellemzi a rendszer dinamikáját. Megvizsgáljuk mindkét késleltetési típus esetén a rendszerek aszimptotikus stabilitását. Az eredmények összehasonlítása két érdekes következtetést szolgáltat. Egyrészt látjuk, hogy a stabilitási tartomány csökken, ha a súlyfüggvény m paramétere növekszik, és $m \to \infty$ esetén konvergál az adott késleltetésű modell stabilitási tartományához. Másrészt egy érdekes kompenzációs kapcsolatot láthatunk a modell három paramétere között.

1. Bevezetés

A dinamikus gazdasági rendszerek vizsgálatának hatalmas irodalma van. A legtöbbször vizsgált modellcsoportot a monopóliumok és az oligopóliumok jelentik. Kezdetben az optimális stratégiák és az egyensúlyok jelentették a kutatások fő célját, azok létezésére és egyértelműségére számos feltétel adódott. Különféle modellváltozatok is megjelentek az irodalomban, beleértve a többtermékes eseteket, az alkalmazott tulajdonú vállalatok, illetve a lineáris és hiperbolikus árfüggvények esetét. A dinamikus kiterjesztéseket kezdetben csak lineáris modellek esetére vizsgálták, hiszen lokális stabilitás és globális stabilitás ekvivalens

Szidarovszky Ferenc
Pécsi Tudományegyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék, email: szidarka@gmail.com

Akio Matsumoto
Chuo University, Department of Economics, Japan, email: akiom@tamacc.chuo-u.ac.jp

egymással. Okuguchi (1976) könyve foglalja össze a kezdeti eredményeket. Ezek többtermékes általánosítását több konkrét alkalmazással Okuguchi és Szidarovszky (1999) monográfiájában találhatjuk meg. Az utóbbi két évtizedben a kutatás a nemlineáris dinamikák irányába tolódott el. Ezeknek az oligopol játékok esetére történő alkalmazását foglalja össze Bischi et al. (2010) kötete.

A korábbi modellek nem vették figyelembe azt a természetes körülményt, hogy az egyes időpontokban a döntések nem szimultán, hanem valamennyire késleltetett információkra épülnek. A vállalatok a piaci információkat általában valamilyen késleltetéssel kapják, az ezek alapján születendő döntések is időigényesek. A matematikai és közgazdasági irodalomban két, lényegében eltérő módszerrel modellezik a késleltetést. Ha a késleltetés mértéke adott rögzített érték, akkor differencia-differenciál egyenletek írják le a folyamatot. Ezek matematikai kezelését, valamint főbb tulajdonságait tárgyalja Bellman és Cooke (1956) monográfiája. Ha a késleltetés mértékét nem ismerjük pontosan, vagy az időben változik, akkor folytonosan elosztott késleltetésről beszélünk. A megfelelő matematikai modellek Volterra-típusú integro-differenciál egyenletek, ezek módszertanába Cushing (1977) könyve ad kitűnő bevezetést.

Dolgozatunkban egy olyan egyszerű dinamikus modellt vizsgálunk, amelyben egy monopólium helyzetű vállalat gradiens dinamikát követ, amikor a kibocsátásfüggvény deriváltja a marginális profittal arányos, és a marginális profit késleltetéssel terhelt. Megvizsgáljuk a rögzített és a folytonosan elosztott késleltetések esetét és a stabilitási kritériumok összehasonlítását is elvégezzük.

2. A dinamikus modellek

Tekintsünk egy vállalatot, amelyik egyetlen termékével egyedülálló a piacon. Jelölje X a kibocsátott termékmennyiséget, $P = A - BX$ az árfüggvényt és $C = c + dX$ a vállalat költségfüggvényét. Ekkor a vállalati profitot a

$$\varphi(X) = X(A - BX) - (c + dX) \tag{1}$$

függvény írja le. A marginális profit ennek a deriváltja:

$$\varphi'(X) = A - d - 2BX.$$

Folytonos időskálát feltételezve a gradiens dinamika az

$$\dot{X}(t) = K\big(A - d - 2BX(t)\big) \tag{2}$$

lineáris differenciálegyenlettel írható le.

Először tegyük fel , hogy az időkésleltetés a marginális profit értékében egy rögzített T érték. Ekkor a (2) egyenlet az

$$\dot{X}(t) = K\big(A - d - 2BX(t-T)\big) \tag{3}$$

dinamikává válik. Ennek leírására fel kell tennünk, hogy a kibocsátás-függvény értéke ismert a $[-T, 0]$ intervallumon.

Folytonosan elosztott késleltetés esetén a (3) egyenlet a következőképpen módosul:

$$\dot{X}(t) = K\Big(A - d - 2B\int_0^t w(t-s,T,m)X(s)ds\Big), \tag{4}$$

ahol a w magfüggvényt általában a gamma-eloszlás sűrűségfüggvényéhez hasonló alakban feltételezik:

$$w(t-s,T,m) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\exp\left(-\dfrac{t-s}{T}\right) & \text{ha } m = 0, \\ \dfrac{1}{m!}\left(\dfrac{m}{T}\right)^{m+1}\exp\left(-\dfrac{m(t-s)}{T}\right) & \text{ha } m \geq 1. \end{cases}$$

Itt $T > 0$ egy folytonos paraméter, m pedig egy nemnegatív egész szám.

A továbbiakban a (3) és (4) dinamikák aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk meg.

3. Az adott késleltetés esete

A (3) egyenlet homogén megfelelőjét a

$$Z = X - \frac{A-d}{2B}$$

új változó bevezetésével kapjuk:

$$\dot{Z}(t) = -\gamma Z(t-T), \tag{5}$$

ahol $\gamma = 2BK$. Keressük a megoldást az exponenciális $Z(t) = \exp(\lambda t)v$ alakban, amit a homogén egyenletbe helyettesítve kapjuk az (5) dinamika karakterisztikus egyenletét:

$$\lambda + \gamma\exp(-\lambda t) = 0. \tag{6}$$

Szorozzuk be mindkét oldalt T-vel és vezessük be a $\Delta = \gamma T$ változót. Ekkor az egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\Delta + A\exp(-\Delta) = 0, \tag{7}$$

ahol $A = \gamma T > 0$. Legyen $\Delta = \alpha + i\beta$ ennek egy komplex gyöke. Ekkor

$$\alpha + i\beta + A\exp(-\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = 0.$$

A valós és a képzetes rész szétválasztásával

$$\alpha + A\exp(-\alpha)\cos\beta = 0 \tag{8}$$

és

$$\beta - A\exp(-\alpha)\sin\beta = 0 \tag{9}$$

adódik. Tegyük fel először, hogy $\sin\beta = 0$. Ekkor $\beta = 0$, továbbá α kielégíti az

$$\alpha = -A\exp(-\alpha)$$

egyenletet. Az A értékétől függően vagy nincs megoldás, de ha van, az csak negatív lehet. Ha $\sin\beta \neq 0$, akkor (9)-ből

$$\exp(-\alpha) = \frac{\beta}{A\sin\beta}$$

adódik, amit (8)-ba helyettesítve az

$$\alpha + \beta\cot\beta = 0 \tag{10}$$

összefüggést kapjuk. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\beta > 0$, ugyanis, ha Δ megoldása a (7) egyenletnek, akkor annak komplex konjugáltja is megoldás. Így $\alpha < 0$, ha

$$\beta \in \left(n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

A (10) és (9) egyenletek alapján egy egyváltozós egyenlet adódik β értékére:

$$\frac{1}{A}\beta = \exp(\beta\cot\beta)\sin\beta. \tag{11}$$

Jelölje $f(\beta)$ a (11) jobboldalát. Nyilvánvalóan $f(\beta)$ a nullához tart, ha $\beta \to 0$. Hasonlóan, $n \geq 1$ esetén $f(\beta)$ ugyancsak a nullához tart, ha $\beta \to n\pi$ balról. Egyszerű számolással megmutatható, hogy a jobboldali határérték

$$\lim_{\beta \to n\pi + 0} f(\beta) = \begin{cases} \infty & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\infty & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

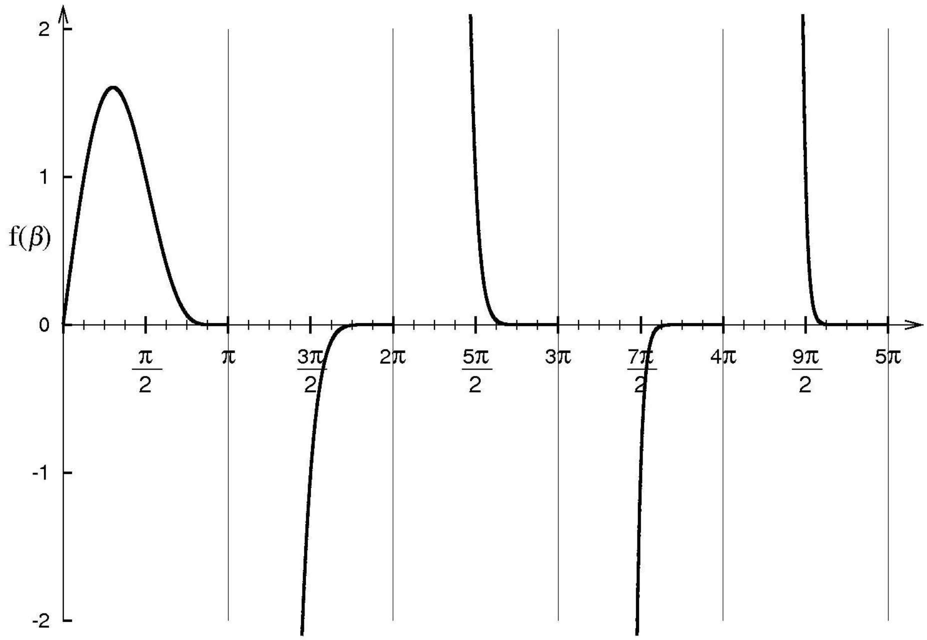
valamint

$$f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -1 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Deriválás után azt kapjuk, hogy

$$f'(\beta) = \frac{1}{\sin\beta}\exp(\beta\cot\beta)\,(\sin 2\beta - \beta)\,. \tag{12}$$

Vegyük észre, hogy a $(0,\pi/2)$ intervallumon található egy olyan egyértelműen meghatározott β^* érték, amelyre $\beta^* = \sin 2\beta^*$, valamint $\beta < \beta^*$ esetén $\sin 2\beta > \beta$, míg $\beta > \beta^*$ esetén $\sin 2\beta < \beta$. Ennek alapján $f'(\beta) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\beta \in (0,\beta^*)$ vagy ha $\beta \in \big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$, ahol $k = 1,2,\ldots$. Továbbá, $f'(\beta) < 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\beta \in (\beta^*,\pi)$, vagy ha $\beta \in \big(2k\pi,(2k+1)\pi\big)$, ahol $k = 1,2,\ldots$. Az $f(\beta)$ függvény görbéjét mutatja az 1. ábra.



1. ábra. Az $f(\beta)$ függvény képe.

A (11) egyenlet megoldásait az $f(\beta)$ görbe és az $(1/A)\beta$ egyenes végtelen sok metszéspontja szolgáltatja. Tegyük fel először, hogy $A > \pi/2$. Ekkor a legkisebb metszéspont a $(\pi/2,\pi)$ intervallumba esik. Ez egy pozitív α értéket ad, így a sajátérték valós része pozitív, tehát az (5) dinamikus rendszer instabil. Ha $A < \pi/2$, akkor a legkisebb metszéspont a $(0,\pi/2)$ intervallumba esik, a további metszéspontok pedig a $\big(2k\pi,(2k+1)\pi\big)$, $k = 1,2,\ldots$ intervallumokba, ahol a megfelelő α értékek mind negatívak. Ebben az esetben tehát a rendszer aszimptotikusan stabil.

A fentiek alapján adódik a következő tétel.

1. Tétel. *A* (3) *rendszer aszimptotikusan stabil, ha* $T\gamma < U$*; és instabil, ha* $T\gamma > U$*, ahol* $U = \pi/2 \approx 1,5708$.

4. A folytonosan elosztott késleltetés esete

A (4) egyenlet homogén megfelelője az előző esethez hasonlóan a következő:

$$\dot{Z}(t) = -\gamma \int_0^t w(t-s,T,m)Z(s)ds. \tag{13}$$

A karakterisztikus egyenletet ismét a $Z(t) = \exp(\lambda t)v$ exponenciális megoldás behelyettesítésével nyerjük:

$$\lambda \exp(\lambda t)v = -\gamma \int_0^t w(t-s,T,m)\exp(\lambda s)vds.$$

Bevezetve az $x = t - s$ integrálási változót és v-vel egyszerűsítve

$$\lambda \exp(\lambda t) = -\gamma \int_0^t w(t-s,T,m)\exp(\lambda(t-x))dx$$

adódik. Az $\exp(\lambda t)$ tényezővel egyszerűsítve és a $t \to \infty$ határátmenetet végrehajtva egyszerű számolással kapjuk a rendszer karakterisztikus egyenletét:

$$\lambda + \gamma\left(1 + \frac{\lambda T}{\bar{m}}\right)^{-(m+1)} = 0, \tag{14}$$

ahol

$$\bar{m} = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = 0, \\ m & \text{ha } m \geq 1. \end{cases}$$

Az $m = 0$ esetben a legnagyobb súlyt a legújabb t-beli információ kapja, majd időben visszafelé haladva a súly exponenciálisan csökken. Ekkor a (14) egyenlet

$$\lambda(1 + \lambda T) + \gamma = 0$$

alakú, azaz

$$\lambda^2 T + \lambda + \gamma = 0.$$

Mivel az összes együttható pozitív, a gyökök valós része negatív, így a rendszer mindig aszimptotikusan stabil.

Ha $m \geq 1$, akkor a t-beli információ zéró súllyal szerepel, a súly növekszik $t - T$-ig, majd csökken ezután. Tegyük fel, hogy $m = 1$. Ekkor a (14) egyenlet harmadfokúra írható át:

$$T^2\lambda^3 + 2T\lambda^2 + \lambda + \gamma = 0.$$

Mivel minden együttható pozitív, a Ruth-Hurwitz kritérium (Szidarovszky és Bahill, 1998) alapján a sajátértékek valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$2T > T^2\gamma,$$

azaz, ha $T\gamma < 2$.

Az $m = 2$ esetben a (14) egy negyedfokú egyenletté alakul:

$$\frac{1}{8}T^3\lambda^4 + \frac{3}{4}T^2\lambda^3 + \frac{3}{2}T\lambda^2 + \lambda + \gamma = 0.$$

Mivel minden együttható pozitív, ismét a Ruth-Hurwitz kritérium szolgáltatja a stabilitási feltételt, ami egyszerű számolás eredményeképpen: $T\gamma < 16/9 \approx 1,7778$.

Az $m = 3$ esetben egy ötödfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{1}{81}T^4\lambda^5 + \frac{4}{27}T^3\lambda^4 + \frac{2}{3}T^2\lambda^3 + \frac{4}{3}T\lambda^2 + \lambda + \gamma = 0.$$

Hasonlóan az előző esethez, ismét alkalmazhatjuk a Ruth-Hurwitz kritériumot és egyszerű, de hosszadalmas számolás után a $T\gamma < 120\sqrt{2} - 168 \approx 1,7056$ stabilitási feltételt kapjuk.

Ha az $m = 1,2,3$ esetre kapott feltételek nem szigorú egyenlőtlenségként teljesülnek, akkor legalább egy gyök valós része pozitív, így a rendszer instabil.

A fentiek alapján adódik a következő tétel.

2. Tétel. *Az $m = 1,2,3$ esetben a* (4) *rendszer aszimptotikusan stabil, ha $T\gamma < U_m$, és instabil, ha $T\gamma > U_m$, ahol $U_0 = \infty$, $U_1 = 2$, $U_2 = 16/9 \approx 1,7778$ $U_3 = 120\sqrt{2} - 168 \approx 1,7056$.*

5. Az eredmények összehasonlítása

Először vegyük észre, hogy az összes stabilitási feltétel $T\gamma < \bar{U}$ alakú, ahol $\bar{U}$ vagy U vagy U_m $(m = 1,2,3)$. Mivel $T\gamma = 2BKT$, azonnal adódik egy érdekes észrevétel. Bárhogyan választjuk meg a B, K és T paraméterek közül kettőnek az értékét, a rendszer mindig stabillá tehető, ha a harmadik értékét elegendően kicsinek választjuk. Az a tény, hogy a rendszer stabilitása csak a BKT szorzat értékétől függ, azt is mutatja, hogy e három paraméter egy speciális „érték-kompenzációs” kapcsolatban áll egymással. Ha bármelyikük értékét egy nagyobb faktorral megszorozva a rendszer instabillá válna, akkor a másik kettő szorzatát legalább ekkora faktorral elosztva a rendszer visszanyerné a stabilitását.

Vegyük észre továbbá, hogy

$$U < U_3 < U_2 < U_1 < U_0,$$

vagyis az m értékének növelésével a stabilitási tartomány csökken. Vizsgáljuk meg ezután az $m \to \infty$ határesetet. A (14) egyenletben az $m \to \infty$ határátmenetet elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\lambda+\gamma\left(1+\frac{\lambda T}{\bar{m}}\right)^{-(m+1)}\right\}=\lim_{m\to\infty}\left\{\lambda+\frac{\gamma}{(1+\lambda T/m)^m(1+\lambda T/m)}\right\}=$$

$$=\lambda+\gamma\exp(-\lambda T),$$

ami éppen a (6) egyenlet baloldala. Tehát az $m\to\infty$ határeset az adott késleltetésnek felel meg. Hasonló következtetést kaphatunk, ha észrevesszük, hogy a $w(t-s,T,m)$ függvény az m növelésével egyre „soványabb” lesz növekvő maximum értékkel, azaz az $m\to\infty$ határhelyzetben a T középpontú Dirac-delta függvénnyé változik. Ekkor pedig a (13) egyenlet jobboldalán szereplő integrál $Z(t-T)$ lesz, azaz a (13) egyenlet formálisan is a (6) egyenletté válik.

Hivatkozások

Bellman, R., Cooke, K. (1963). *Differential-difference Equations.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press.

Bischi, G. I., Chiarella, C., Kopel, M., Szidarovszky F. (2009). *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations.* Springer.

Cushing, J. (1977). *Integro-differential Equations and Delay Models in Population Dynamics.* Lecture Notes in Biomathematics. Springer.

Okuguchi, K. (1976). *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag.

Okuguchi, K., Szidarovszky F. (1999). *The Theory of Oligopoly with Multi-product Firms.* Springer.

Szidarovszky, F., Bahill, T. (1998). *Linear Systems Theory.* Systems Engineering Series. CRC Press.

A kompetitív piac közelítése sokszereplős Cournot-oligopóliumokkal

Tasnádi Attila

Kivonat
Mikroökonómia tankönyvekből és példatárakból ismert, hogy egy homogén termékű Cournot-oligopol piacon a termelők számának növelésével közelíthető a kompetitív piac. Az iskolapéldában lineáris keresleti görbét és állandó egységköltséget tételeznek fel. Az irodalomban több munka is foglalkozik az említett feltételek enyhítésével. Jelen dolgozatban egy új, egyszerű approximációs tételt igazolunk.
Az első szakaszban áttekintjük a Cournot-oligopol játék egyensúlyának egzisztenciájára és a kompetitív piac Cournot-oligopóliumokkal történő approximálhatóságára vonatkozó eredményeket. Az egyensúly létezésével kapcsolatos eredményeket felhasználjuk a második szakaszban található approximációs tételünkhöz, amit aztán összevetünk az irodalomban található approximációs tételekkel.

1. Irodalmi áttekintés

A kompetitív piacon a szereplők egyéni cselekedeteinek (feltevés szerint) nincsen áralakító hatása. Intuíciónk alapján a szereplők árbefolyásoló képessége igazából csak kellően sok szereplő esetén hanyagolható el. A kompetitív piac ilyen irányú megalapozása sokszereplős homogén termékű Cournot-oligopóliumok segítségével megvalósítható. Az iskolapéldában lineáris keresleti görbe és állandó egységköltség feltételezése mellett igazolható, hogy a Cournot-oligopolisták számának növelésével közelíthető a kompetitív piac. A konvergencia biztosításához szükséges feltételek enyhítésével több kutató is foglalkozott. A dolgozat tárgya egy az iskolapéldánál általánosabb, de mégis viszonylag egyszerű új approximációs tétel.

Tasnádi Attila
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: attila.tasnadi@uni-corvinus.hu

A Cournot-oligopóliumban a vállalatok egyszerre hozzák meg a mennyiségi döntéseiket, majd egy nem specifikált mechanizmuson keresztül határozódik meg a piactisztító ár. Ennek „kikiáltását” gyakran egy fiktív árverezőhöz kötik, illetve előszeretettel hivatkoznak Kreps és Scheinkman (1983) eredményére, amelyben egy kapacitáskiépítési (mennyiségi) szakaszt egy árjáték követ. Az idézett szerzők megmutatták, hogy az így értelmezett összetettebb modell egyensúlyában a vállalatok első időszakban kiépített kapacitásai megegyeznek az azonos költségfüggvényű Cournot-duopólium egyensúlyi termelésével, ezáltal a Cournot-modell egyfajta megalapozását adták.

Szidarovszky és Yakowitz (1977) igazolta, hogy konkáv keresleti görbe és konvex költségfüggvények mellett a Cournot-oligopóliumnak létezik egyértelmű megoldása. A konvergenciatételünk bizonyításában Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia és unicitási tételét fogjuk alkalmazni. Érdemes azonban néhány további nevezetes egzisztencia, illetve unicitási tételt is megemlíteni. A létezés szempontjából Bamon és Fraysee (1985), Novshek (1985a), Amir (1996), illetve Forgó (1996) feltételei enyhébbek, és többek között megszabadulnak a költségfüggvények konvexitásának erős feltevésétől. Példának okáért Amir (1996) a keresleti függvény szigorú monoton csökkenését és logkonkavitását, a költségfüggvények szigorú monoton növekedését és balról folytonosságát, továbbá a „módosított” profitfüggvények egy ponttól kezdődő negativitását követeli meg.[1] A feltételekhez a költségfüggvények konkavitását hozzávéve adódik az egyensúly egyértelműsége. Konkávból konvexbe váltó költségfüggvények esetén Forgó (1996) bizonyítja az egyensúly létezését. Egy friss munkában Ewerhart (2011) az eddigi legáltalánosabb egzisztenciatételt adja, amit az általánosság mellett elsősorban az a törekvés vezérelt, hogy csak keresleti és költségfüggvényre vonatkozó kikötés szerepeljen az egzisztenciatételben, így Amir (1996) „módosított” profitfüggvényre vonatkozó feltevését kiváltja a keresleti függvény úgynevezett α-bikonkavitása.[2]

A Cournot-oligopólium egyik jó tulajdonsága, hogy amennyiben a piac kínálati oldalát elegendően sok kisvállalat alkotja, akkor a Cournot-oligopólium egyensúlyi ára közel esik a kereslet és kínálat egyensúlyaként meghatározott kompetitív árhoz, azaz a Cournot-oligopolisták közel határköltségen termelnek. A Cournot-oligopóliumok ilyen jellegű viselkedését, különböző feltételekből kiindulva, többek között Frank (1965), Ruffin (1971), Novshek (1985b), valamint Campos és Padilla (1996) igazolták. A kérdéshez kapcsolódik a gyengébb kvázikompetitivitási tulajdonság teljesülése, ami csak annyit követel meg, hogy a vállalatok számának növekedésével csökkenjen a piaci ár. Ilyen irányú eredményeket ért el például Okuguchi (1973) és Amir (2000). Vives (1999) számos további, a sokszereplős Cournot-oligopóliumokra vonatkozó eredményt tárgyal.

[1] Léteznie kell olyan $\overline{Q}$ mennyiségnek, hogy $P(Q)Q - C_i(Q) < 0$ bármely $Q > \overline{Q}$-ra és bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$-re.

[2] Az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény α-bikonkáv, ha $[f(x)]^\alpha/\alpha$ az $x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$-nak konkáv függvénye. Megjegyzendő, hogy az $\alpha \to 0$ határátmenettel értelmezhető a 0-konkavitás is, ami a logkonkavitással ekvivalens.

2. Egy új approximációs tétel

Ebben a szakaszban egy könnyen igazolható új approximációs eredményt mutatunk be. A fő feltevéseink az inverz keresleti görbe monoton csökkenő és konváv volta, továbbá a költségfüggvények szigorú konvexitása, valamint a vállalati kínálati görbék elhanyagolhatóvá válása az összpiaci kínálathoz képest, ha a vállalatok száma a végtelenbe tart. Eredményünk abban tér el Frank (1965), valamint Campos és Padilla (1996) konvergenciatételeitől, hogy nem korlátozzuk az eltérő költségfüggvényű vállalatok számát. Novshek (1985b) nagyon általános konvergenciatétele nem érvényes fixköltségek hiányában és jóval bonyolultabb az itt közöltnél. Egyébként Campos és Padilla (1996) adott példát arra, hogy a szükséges feltételek hiányában Cournot-oligopóliumokkal nem feltétlenül közelíthető a kompetitív piac.

A $P:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ inverz keresleti görbéről feltesszük, hogy kielégíti az alábbi feltételeket:

1. Feltevés. *P szigorúan monoton csökkenő a $[0,a]$ intervallumon, azonosan nulla az (a,∞) intervallumon, kétszer differenciálható a $(0,a)$ intervallumon és konkáv a $[0,a]$ intervallumon.*

A P függőleges tengelymetszetét jelölje b, azaz $P(0)=b$.

Az eredmény aszimptotikus természete miatt oligopol piacok sorozatát vesszük, amelynek az n-edik piacát n vállalat alkotja. Feltesszük, hogy a sorozat összes piacán a kereslet azonos. Az n-edik piacon az $i\in\{1,\ldots,n\}$ vállalat költségfüggvényét és kompetitív kínálati függvényét jelölje rendre c_i^n és s_i^n. Ezért az n-edik oligopol piac megadható a

$$\langle\{1,\ldots,n\},(c_1^n,\ldots,c_n^n),P\rangle$$

hármassal. Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát. A sorozatban szereplő mindegyik Cournot-oligopóliumnak, a következő feltétel miatt, létezik egy egyértelmű egyensúlya.

2. Feltevés. *A $c_i^n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ ($n\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$) költségfüggvények kétszer differenciálhatók, nincsenek fixköltségek, szigorúan monoton növekedők és szigorúan konvexek. Továbbá $(c_i^n)'(0)=\lim_{q\to0^+}(c_i^n)'(q)=mc_i^n(0)=0$ és $\lim_{q\to\infty}mc_i^n(q)=\infty$ bármely $n\in\mathbb{N}$-re és bármely $i\in\{1,\ldots,n\}$ vállalatra.*

A fixköltségek hiánya garantálja, hogy a piacon jelenlévő vállalat mindegyike aktív legyen. A 2. feltevésből az is következik, hogy az i vállalat kompetitív kínálata, a továbbiakban röviden kínálata, a p áron $s_i^n(p)=(mc_i^n)^{-1}(p)$, mert az $\arg\max_{q\geq0}pq-c_i^n(q)$ probléma egyértelműen megoldható bármely $p\geq0$ áron a 2. feltevés alapján. Jelölje $S_c^n=\sum_{i=1}^n s_i^n$ a vállalatok aggregált kompetitív kínálatát és annak inverzét $MC_c^n=(S_c^n)^{-1}$.

A *mennyiségi profilnak* nevezett $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)\in[0,a]^n$ vektor megadja az n vállalat mennyiségi döntését. Az n-edik mennyiségi játékot az $O_q^n=\left\langle\{1,\ldots,n\},[0,a]^n,(\pi_i^n)_{i=1}^n\right\rangle$ struktúra adja meg, ahol

$$\pi_i^n(\mathbf{q})=P(q_1+\ldots+q_n)\,q_i-c_i^n(q_i)$$

bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$ vállalatra. Ha O_q^n kielégíti az 1. és a 2. feltevéseket, akkor Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia tétele biztosítja, hogy az O_q^n oligopol játéknak egyértelműen létezik tiszta Nash-egyensúlya.

A konvergenciatételünkhöz szükségünk lesz még két további feltételre:

3. Feltevés. *Az $1,\ldots,n$ vállalatok összkínálata az $\left(O_q^n\right)_{n=1}^{\infty}$ oligopol piacok sorozatának minden egyes piacán azonos.*

A 3. feltevés miatt a vállalatok aggregált kompetitív kínálata $S_c = \sum_{i=1}^{n} s_i^n$ és az $MC_c = S_c^{-1}$ inverze független n-től.

4. Feltevés. *Létezik olyan c pozitív valós érték, hogy*

$$s_i^n(p) < \frac{c}{n} S_c(p)$$

teljesül bármely $p \in (0,b]$ árra, bármely $n \in \mathbb{N}$ pozitív egészre és bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$ vállalatra.

n növelésével a 3. és a 4. feltevés alapján az összes vállalat kompetitív kínálata tetszőlegesen kicsivé tehető a piaci összkínálathoz képest. Megjegyzendő, hogy ez utóbbi két feltevés az approximáció jellegére is rámutat. A feltételek alapján a kompetitív piacot egy egyre több nemcsak relatív értelemben, hanem egyben abszolút értelemben is kisebb súlyú vállalatból álló Cournot-piaccal közelítjük. Tehát eredményünk lényegében azt állítja majd, hogy egy minél több kisvállalatból álló Cournot-piac lényegében úgy viselkedik, mint az azonos kínálatú és keresletű kompetitív piac. Az általunk alkalmazott megközelítéssel élt például Novshek (1985b).

Végül jelölje p^c a piactisztító árat és a q^c az aggregált kompetitív kibocsátást, azaz

$$p^c = P(q^c) = MC_c(q^c).$$

Megmutatjuk, hogy az 1., a 2., a 3. és a 4. feltételeket kielégítő $\left(O_q^n\right)_{n=1}^{\infty}$ oligopol piacok sorozatához egyértelműen létező egyensúlyi árak sorozata a p^c piactisztító árhoz tart.

1. Állítás. *Elégítse ki az $O_q = \left(O_q^n\right)_{n=1}^{\infty}$ Cournot-oligopóliumok sorozata az 1., a 2., a 3. és a 4. feltételeket. Ekkor az O_q^n oligopóliumnak egyértelműen létezik tiszta Nash-egyensúlya bármely $n \in \mathbb{N}$-re, amelyet ha $(q_i^n)_{i=1}^n$ jelöl, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^n\right) = p^c \text{ és } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q_i^n = S_c(p^c),$$

azaz a mennyiségi játékok sorozatának egyensúlyai a kompetitív kimenetelhez tartanak.

Bizonyítás: A feltevéseink lehetővé teszik Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia és unicitási tételének alkalmazását tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, amely alapján biztosított a

$\mathbf{q}^n = (q_i^n)_{i=1}^n$ egyensúlyi mennyiségi profil létezése. Legyen $q_c^n = \sum_{i=1}^n q_i^n$ a vállalatok egyensúlyi össztermelése. A $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ sorozat korlátos volta miatt létezik konvergens részsorozata. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ már konvergens és a határértéke $\overline{q}_c$. A vállalatok $(q_i^n)_{i=1}^n$ egyensúlyi döntései szükségszerűen kielégítik a

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(\mathbf{q}^n) = P(q_c^n) + P'(q_c^n)\, q_i^n - mc_i^n(q_i^n) = 0 \tag{1}$$

elsőrendű feltételeket.

Ekkor $\lim_{n\to\infty} q_i^n = 0$, ahol az a_i^n ($i,n \in \mathbb{N}$ és $i \leq n$) kettős sorozatra $\lim_{n\to\infty} a_i^n = a$ teljesül, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : |a_i^n - a| < \varepsilon.$$

Az (1) feltételből és a 4. feltevésből

$$\begin{aligned} q_i^n &= s_i^n\left(P(q_c^n) + P'(q_c^n)\, q_i^n\right) < \\ &< \frac{c}{n} S_c\left(P(q_c^n) + P'(q_c^n)\, q_i^n\right) \leq \frac{c}{n} S_c(b) \end{aligned} \tag{2}$$

adódik bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$-re. Ezért $\lim_{n\to\infty} q_i^n = 0$.

Legyen $p^n = P(q_c^n)$ és jelölje $\overline{p}$ a $(p^n)_{n=1}^\infty$ sorozat határértékét. Nyilván $\overline{p} = P(\overline{q}_c)$ teljesül a P folytonossága és monotonitása miatt. Ezért határértékeket véve az (1) feltételben,

$$\overline{p} = \lim_{n\to\infty} mc_i^n(q_i^n) \tag{3}$$

adódik, figyelembe véve a P' korlátosságát. Vegyük észre, hogy (3) szerint

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall i \in \{1,\ldots,n\} : |mc_i^n(q_i^n) - \overline{p}| < \varepsilon. \tag{4}$$

Válasszuk a $\widehat{q}_i^n$ és $\widetilde{q}_i^n$ értékeket úgy, hogy $mc_i^n(\widehat{q}_i^n) = \overline{p} - \varepsilon$ és $mc_i^n(\widetilde{q}_i^n) = \overline{p} + \varepsilon$ legyen. A $\widehat{q}_i^n \leq q_i^n \leq \widetilde{q}_i^n$ egyenlőtlenségből $\widehat{q}_c^n \leq q_c^n \leq \widetilde{q}_c^n$ következik, ebből pedig $MC_c(\widehat{q}_c^n) \leq MC_c(q_c^n) \leq MC_c(\widetilde{q}_c^n)$ adódik. Mivel $MC_c(\widehat{q}_c^n) = \overline{p} - \varepsilon$ és $MC_c(\widetilde{q}_c^n) = \overline{p} + \varepsilon$, az MC_c folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\overline{p} = MC_c(\overline{q}_c). \tag{5}$$

Tehát $\overline{q}_c$ kielégíti a $P(q) = MC_c(q)$ egyenlőséget, aminek létezik egyértelmű megoldása az 1. és a 2. feltevések alapján. Ezért a $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ sorozatnak csak egyetlen torlódási pontja lehet (5) alapján, amiből $\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^n q_i^n\right) = p^c$ és $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n q_i^n = S_c(p^c)$ ($\overline{q}_c = q^c$ és $\overline{p} = p^c$) következik. ❑

Köszönetnyilvánítás:
A szerző kutatásait az OTKA K-101224 pályázat támogatta.

Hivatkozások

Amir, R. (1996). Cournot oligopoly and the theory of supermodular games. *Games and Economic Behavior*, 15: 132–148.

Amir, R., Lambson, V. (2000). On the effects of entry in Cournot markets. *Review of Economic Studies*, 67: 235–254.

Bamon, R., Fraysee, J. (1985). Existence of Cournot equilbrium in large markets. *Econometrica*, 53:587–597.

Campos, J., Padilla, A. (1996). On the limiting behavior of asymmetric Cournot oligopoly: a reconsideration. *CEMFI Working Paper Series*, No. 9607.

Ewerhart, C. (2011). Cournot oligopoly and concavo-concave demand. *University of Zürich, Department of Economics, Working Paper Series*, No. 16.

Forgó, F. (1996). Cournot-Nash equilibrium in concave oligopoly games. *Pure Mathematics and Applications*, 6: 161–169.

Frank, C. (1965) Entry in a Cournot market. *Review of Economic Studies*, 329: 245–250.

Kreps, D. M., Scheinkman, J. A. (1983). Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. *Bell Journal of Economics*, 14: 326–337.

Novshek, W. (1985a). On the existence of Cournot equilibrium. *Review of Economic Studies*, 52:85–98.

Novshek, W. (1985b). Perfectly competitive markets as the limits of Cournot markets. *Journal of Economic Theory*, 35:72–82.

Okuguchi, K. (1973). Quasi-competitiveness and Cournot oligopoly. *Review of Economic Studies*, 40: 145–148.

Ruffin, R. (1971). Cournot oligopoly and competitive behaviour. *Review of Economic Studies*, 3: 493–502.

Szidarovszky, F., Yakowitz, S. (1977). A new proof of the existence and uniqueness of the Cournot equilibrium. *International Economic Review*, 18:787–789.

Vives, X. (1999). *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. MIT Press, Cambridge, MA.

II. rész
Makroökonómia és optimalizálás

LP problémák megoldása az ABS módszerosztály segítségével

Abaffy József, Fodor Szabina, Zun-Quan Xia

Kivonat

A cikkben a lineáris programozás normál feladatának megoldásával foglalkozunk az ABS módszerosztályon belül Spedicato és szerzőtársai (1997), Xia (1995), Zhang és szerzőtársai (1995) cikkeinek alapján. Pontosan közöljük a szükséges algoritmusokat és tesztfeladaton mutatjuk be az eljárások helyességét.

A cikket a szerzők Forgó Ferenc professzor úrnak ajánlják 70. születésnapja alkalmából. Továbbá Abaffy József ezzel kívánja megköszönni Forgó Ferencnek több évtizedes barátságát.

1. Bevezetés

A lineáris programozás (LP) problémáit megoldó algoritmusoknak az ABS (Abaffy-Broyden-Spedicato) módszerosztályon (Abaffy, 1979; Abaffy és szerzőtársai, 1989) alapuló megvalósításával elsősorban kínai matematikusok foglalkoztak (Li-Wei és szerzőtársai, 1996; Spedicato és szerzőtársai, 1997; Xia, 1995; Zhang és szerzőtársai, 1995).

Ezekben a cikkekben a lineáris programozás alábbi standard formáját tárgyalják:

Abaffy József
Budapesti Corvinus Egyetem, Számítástudományi Tanszék, email: abaffy@uni-corvinus.hu

Fodor Szabina
Budapesti Corvinus Egyetem, Számítástudományi Tanszék, email: szabina.fodor@uni-corvinus.hu

Zun-Quan Xia
Dalian University, Department of Applied Mathematics, China, email: zqxiazhh@dlut.edu.cn

$$\begin{aligned} &\min_x \; c^T x \\ &\text{f. h. } \; Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ ismert vektorok, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ teljes rangú mátrix, $m \leq n$ és $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ az n dimenziós valós tér). Feltesszük továbbá, a következőket (Li-Wei és szerzőtársai, 1996):

$$\Omega = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \text{ korlátos, és } \Omega \text{ nem degenerált csúcspontú.}$$

Az említett cikkek szerzői feltételezték, hogy ismert egy megengedhető bázis A_B, ahol $B = (B_1, ..., B_m)$ az A mátrix azon oszlopindexeit tartalmazza, amelyek a bázis elemei. Ismertnek tesszük fel a bázis kialakítása során felépülő ABS-beli H projekciós mátrixot és az ehhez tartozó x lehetséges megoldást.

Ebben a cikkben a következő LP problémából indulunk ki:

$$\begin{aligned} &\min_x \; c^T x \\ &\text{f. h. } \; Ax \leq b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \\ &\qquad\quad b \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ ismert vektorok, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ teljes rangú mátrix és $x \in \mathbb{R}^n$.

A feltételi egyenlőtlenségeket az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ nemnegatív segédváltozókkal egyenlőségekké alakítjuk:

$$Ax + u = b, \quad \text{ahol } u = \{u_1, u_2, ..., u_m\}.$$

Előállítjuk a standard feladatunk kanonikus alakját és ezen a módosított feladaton megadunk egy ABS-alapú algoritmust (*kezdőbázist felépítő LP algoritmus*), aminek a segítségével felépítjük az (1) probléma egy kiinduló bázisát, megadjuk egy megengedhető megoldását, és kiszámítjuk a H projekciós mátrixot is. Ha a kezdőbázist felépítő LP algoritmussal kapott megoldás nem optimális, akkor a cikkünkben közölt *optimális megoldást kereső LP algoritmus* segítségével megtalálhatjuk az optimális megoldást.

Megjegyezzük, hogy a cikkünkben közölt algoritmusok leírása ilyen kompakt formában a fent említett cikkek egyikében sem található meg.

Vegyük észre továbbá, hogy a $b \geq 0$ feltétel nem szűkíti le a megoldható feladatok körét, mivel az egyenlőtlenséget -1-gyel végigszorozva, majd bevezetve az u nemnegatív segédváltozókat, a rendszerünket könnyen a kanonikus alakra hozhatjuk.

A következő fejezetben ismertetjük a (2) feladatot megoldó ABS módszerosztályon alapuló *kezdőbázist felépítő LP*, és az *optimális megoldást kereső LP* algoritmusokat. Külön fejezetben egy konkrét numerikus feladaton keresztül elemezzük az algoritmusok működését.

2. Az LP problémákat megoldó ABS algoritmusok

Az ABS módszerosztály, amelyet Abaffy 1979-ben publikált (Abaffy, 1979), az m egyenletet és n ismeretlent, ahol $m \leq n$, tartalmazó $Ax = b$ rendszer egy $\bar{x}$ megoldását határozza meg m iterációs lépésben. Az ABS algoritmus három paraméterválasztást tartalmaz. A H_1 kezdő mátrixot, továbbá minden iterációs lépésben egy-egy z_i és w_i vektort kell meghatározni. Ha a kezdő mátrixot az egységmátrixnak, a z_i és w_i vektorokat pedig egy alkalmas egységvektornak választjuk, azaz $H_1 = I$ és $z_i = w_i = e_k$, akkor az ABS implicit LX (Li-Wei és szerzőtársai, 1996) alosztályát kapjuk.

Az implicit LX algoritmus lehetőséget ad arra, hogy noha az A mátrix sorait sorban vesszük elő a H_i projekciós mátrix frissítésekor, a p_i projekciós vektort és a H_i projekciós mátrixban szereplő tetszőleges w_i paraméter vektort ettől függetlenül határozzuk meg (Abaffy és szerzőtársai, 1989) aszerint, hogy az A mátrixnak melyik oszlopa lép be a bázisba.

Az algoritmus ezen tulajdonsága szükséges az induló bázis keresése és a báziscsere lépések során is. Így az itt közölt mindkét algoritmusunk az implicit LX algoritmusra épül, speciális e_k választások mellett.

A (2) feladatban a *kezdőbázist felépítő LP* algoritmus során az e_k vektorok meghatározása igen egyszerű, mivel az $u_1, \ldots, u_m$ segédváltozókhoz tartozó egységvektorokat lehet választani. Az i-edik lépésben

$$e_k = e_{m+i}\,.$$

1. Algoritmus (Kezdőbázist felépítő LP).

(A1) Legyen $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor, $x_1 = 0$, $i = 1$, és $H_1 = I$, ahol $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ egységmátrix.

(B1) Számítsuk ki az alábbi mennyiségeket

$$\begin{aligned} s_i &= H_i a_i, \\ \rho_i &= a_i^T x_i - b_i. \end{aligned}$$

Ha $s_i \neq 0$, akkor menjünk a (C1)-re.
Ha $s_i = 0$ és $\rho_i = 0$, akkor legyen $x_{i+1} = x_i$, $H_{i+1} = H_i$ és ugorjunk az (F1)-re.

(C1) Számítsuk ki a projektor vektort

$$p_i = H_i^T e_{m+i},$$

ahol e_{m+i} az $m+i$-edik egységvektor.

(D1) Módosítsuk a megoldás x_i-t

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i,$$

ahol

$$\alpha_i = \frac{r_i}{a_i^T p_i}.$$

(E1) Aktualizáljuk a H_i mátrixot

$$H_{i+1} = H_i - \frac{s_i p_i^T}{p_i^T a_i}.$$

(F1) Ha $i = m$, akkor STOP, x_{m+1} a megoldás.
Ha $i \neq m$, akkor $i = i+1$ és lépjünk a (B1)-re.

1. Megjegyzés. Az algoritmus stabilitási feltételei, vagyis az $e_{m+1}^T s_i \neq 0$ és az $a_i^T p_i \neq 0$, triviálisan teljesülnek.

2. Megjegyzés. Az eredeti ABS algoritmus (B1) lépésében van egy $s_i = 0$ és $r_i \neq 0$ vizsgálat, ami az egyenletrendszer ellentmondásosságát jelentené. Ez a mi esetünkben nem fordulhat elő, mivel az induló rendszerünk triviális megoldása az $x^T = \left[0, ..., 0, b^T\right]$.

3. Megjegyzés. Az algoritmus során kapott H_i projekciós mátrix Hermite típusú, a struktúrája egyszerű esetben a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \\ * & \cdots & * & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

A mátrixban a lehetséges nem nulla elemeket $*$-gal jelöltük (Xia, 1995).

A projekciós mátrix szerkezetének lényeges tulajdonsága továbbá, hogy az üres sorok indexei adják az aktuális báziselemeket, a további sorok indexei pedig a nullteret határozzák meg.

A *kezdőbázist felépítő LP* algoritmus végrehajtása után az x_{m+1} változóban a (2) feladat egy megengedhető megoldását kapjuk meg, hiszen az $x^T = \left[0, ..., 0, b^T\right]$ vektort állítjuk elő, és vele párhuzamosan felépítjük a H_{m+1} mátrixot, ami az induló mátrixa az *optimális megoldást kereső LP* algoritmusnak.

Ha a megoldás nem optimális, akkor az optimum megtalálásához szükségünk van báziscserékre, azaz alkalmaznunk kell az *optimális megoldást kereső LP* algoritmust. Az algoritmus kialakításának gondolatmenete a következő. Egyrészt, az i-edik lépésben az összes megoldás felírható az alábbi kifejezéssel (Abaffy, 1979):

$$\bar{x} = x_{i+1} - H_{i+1}^T s, \quad \text{ahol } s \text{ egy tetszőleges } n \text{ dimenziós vektor.}$$

Másrészt, a fenti képlet átalakítható az alábbi formába:

$$\bar{x} = x - tH^T q,$$

ahol x az LP feladat egy megengedhető megoldása, t tetszőleges skalár, q tetszőleges n dimenziós vektor, $H = (h_1, \dots, h_n)^T$.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $N = \{1, ..., n\}$ és $B_i = \{k_1, ..., k_i\}$ azon indexek halmaza, amelyeket az i-edik lépésig választottunk, $N_i = N \backslash B_i$. Jelölje $(h_{N_j})_k$ a H projekciós mátrix N_j nulltér indexekhez tartozó oszlopvektorainak k-adik komponensét, valamint r_j^T a j-edik lépés után kapott redukált költségfüggvényt. Megmutatható, hogy a redukált költségvektor nem más, mint $r = H_{m+1}c$ (Spedicato és szerzőtársai, 1997). Legyen $I^- = \{k \in N \mid (h_{N_j})_k < 0\}$.

A t paramétert határozzuk meg a következő módon (Xia, 1995):

$$r_{N^*} = c^T h_{N^*} = c^T H^T e_{N^*} = \min \left\{ c^T H^T e_j \mid j \in N_i \right\} \tag{4}$$

$$t^* = \frac{-x_{B^*}}{e_{B^*}^T H^T e_{N^*}} = \min \left\{ \frac{-x_k}{e_k^T H^T e_{N^*}} \mid k \in I^- \right\} \tag{5}$$

A paraméterek meghatározásakor kihasználtuk az implicit LX, így a *kezdőbázist felépítő LP*, és az *optimális megoldást kereső LP* algoritmusok során keletkező projekciós mátrixok speciális felépítését (Xia, 1995). A fenti formulák meghatározzák, hogy az optimum keresése során a báziscserélő algoritmusban az A mátrixnak az N^*-dik oszlopa lép be a bázisba és a B^* indexű oszlopa lép ki.

Szükségünk van még arra, hogy a báziscsere után hogyan aktualizáljuk a megoldást (Li-Wei és szerzőtársai, 1996):

$$x_{i+1} = x_i - t^* H_m^T e_{N^*}. \tag{6}$$

Amennyiben az aktuális költségvektor tartalmaz még negatív komponenst, akkor a megengedhető megoldásunk még nem optimális (Gáspár, 1977), ezért újabb báziscserére van szükség. Ezt oldjuk meg az alábbi algoritmussal.

2. Algoritmus (Optimális megoldást kereső LP).

(A2) Legyen $x_1 \in \mathbb{R}^n$ egy lehetséges, de nem optimális megoldása a (2) feladatnak, H_1 a megengedhető megoldáshoz tartozó projekciós mátrix, $i = 1$.

(B2) Határozzuk meg a

$$p_i = H_i^T e_{N^*}$$

vektort, ahol e_{N^*} egy olyan egységvektor, amelyre a

$$c^T H^T e_{N^*} = \min \left\{ c^T H^T e_j \mid j \in N_i \right\}$$

kifejezés minimális.

(C2) Módosítsuk a megoldás x_i-t

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i,$$

ahol

$$\alpha_i = \frac{-x_{B^*}}{e_{B^*}^T H^T e_{N^*}} = \min\left\{ \frac{-x_k}{e_k^T H^T e_{N^*}} \;\middle|\; k \in I^- \right\}.$$

(D2) Aktualizáljuk a H_i mátrixot

$$H_{i+1} = H_i - \frac{(H_i e_{B^*} - e_{B^*}) e_{N^*}^T H_i}{e_{N^*}^T H e_{B^*}}.$$

(E2) Ha $c^T H_{i+1}^T > 0$, akkor STOP, az x_{i+1} az optimális megoldás.
Ha $c^T H_{i+1}^T$-nek van negatív eleme, akkor legyen $H_i = H_{i+1}$, $x_i = x_{i+1}$ és lépjünk a (B2)-re.

4. Megjegyzés. Az algoritmus stabil abban az értelemben, hogy a nevezőben levő skalárok nem válhatnak nullává. Ez az egységvektorok választásából, illetve az LP feladatra adott feltételekből következik (Xia, 1995).

5. Megjegyzés. Az algoritmus véges lépésben befejeződik, minthogy a redukált költségvektor függvény minden lépésben csökken az LP feltételei mellett (Xia, 1995).

6. Megjegyzés. Mindkét előbbi megjegyzésünk állításai következnek a Rózsa Pál könyvében (Rózsa, 1974) tárgyalt, az LP feladatokat Hermite típusú mátrixok segítségével megoldó algoritmusaiból, mivel a mi H_i mátrixunk is ilyen.

Jegyezzük meg, hogy általános típusú normál feladat esetén az optimális megoldás, ha létezik, akkor nem mindig egyértelmű. Ilyenkor a kezdőbázis kialakítása jóval nehezebb (Abaffy és szerzőtársai, megjelenés alatt).

7. Megjegyzés. Általános esetben előfordulhat, hogy a (4) alatti sorvektor pozitív elemei által meghatározott valamennyi $j_{l_1}, j_{l_2}, \ldots$ indexre minden i_ν mellett $e_{i_\nu}^T H e_{j_l} \geq 0$. Ebben az esetben a feladatnak nincs korlátos megoldása (Rózsa, 1974).

8. Megjegyzés. Általános esetben, ha az (5) alatti hányados több $i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots$ indexre veszi fel a minimumát, akkor a b vektor $i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots$-dik eleme 0, tehát a következő lépések során a $-x_{B^*}/(e_{B^*}^T H^T e_{N^*})$ mennyiség zérusnak adódik, ami azt eredményezi, hogy a transzformációval a célfüggvény értéke változatlan marad. Ekkor degenerációról beszélünk (Rózsa, 1974).

9. Megjegyzés. Az algoritmus felhasználja az alábbi tételt: ha az x megoldás optimális, akkor a redukált költségvektor csupa nemnegatív elemből áll (Spedicato és szerzőtársai, 1997).

10. Megjegyzés. Végül megjegyezzük, hogy az r_{N^*} meghatározásakor a minimum maximumra is cserélhető, hiszen többféle projekciós irány választása lehetséges.

3. Numerikus feladat

A fenti algoritmusokat a MATLAB R2008b (MATLAB) nyelven írtuk meg, szekvenciális módon. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a MATLAB program használatakor az algoritmusok párhuzamosítása igen egyszerű, és az ABS algoritmusok alkalmasak a párhuzamosításra, de erre ebben a cikkben nem térünk ki részletesen.

Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot (Gáspár, 1977):

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq & 10 \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 12 \\
x_1 & & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 14 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \\
7x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & z \to \max
\end{array}$$

Definiáljuk a normál feladatot a következő módon:

$$\begin{array}{rrcl}
\min\limits_{x} & c^T x & & \\
\text{f. h.} & Ax & = & b \\
& x & \geq & 0,
\end{array}$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Az u_1, u_2, u_3 nemnegatív segédváltozókat bevezetve, a feladatot a következő formába írhatjuk:

$$\begin{array}{rcrcrcrcccl}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & +u_1 & & & = 10 \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & +u_2 & & = 12 \\
x_1 & & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & & +u_3 & = 14 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , u_1 & , u_2 & , u_3 & \geq 0 \\
7x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & & & = z \to \max
\end{array}$$

Ebből kapjuk a következő standard feladatot:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \quad d^T = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egy lehetséges induló bázis $B = \{5, 6, 7\}$, ahol a B tartalmazza a bázisvektorok indexeit, az $N = \{1, 2, 3, 4\}$ pedig a nulltér vektorainak az indexeit.

A feladatot az *kezdőbázist felépítő LP* algoritmussal oldjuk meg 3 lépésben. Az e_k vektorok rendre az e_5, e_6, e_7 egységvektorok. Az algoritmus végrehajtása után eredményként a következőket kapjuk:

$$H_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ projekciós mátrix,}$$

illetve a megengedhető megoldás

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Jól látható, hogy a H_3 mátrixban a bázishoz tartozó sorok nullák, és a mátrix Hermite típusú.

Minthogy a

$$c^T H = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vektornak vannak negatív elemei, a kapott megengedhető megoldásunk még nem optimális, így szükséges az *optimális megoldást kereső LP* algoritmus használata.

Az algoritmus 4 lépés után megadja az optimális megoldást:

$$x = \begin{bmatrix} 6 \\ 2/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a célfüggvény értéke ekkor } -\frac{158}{3}.$$

a projekciós mátrix végső alakja pedig a következő:

$$H_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/18 & 3/18 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -21/18 & -3/18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 5/6 & -3/18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A H_7 mátrix alakja jól mutatja, hogy melyek a megoldásnál a bázisvektor indexei: a H_7 mátrix nullákat tartalmazó sorainak indexei $\{1,2,3\}$, míg a nulltér indexei $\{4,5,6,7\}$.

4. Következtetések

Az eddigi cikkekben a standard feladat megoldásának ABS-beli megvalósításával foglalkoztak és feltételezték az induló bázis létezését. Az ABS-beli projekciós mátrix és a hozzátartozó megengedhető megoldás kiszámítására normál feladat esetén a cikkben megadtuk a problémát megoldó implicit LX algoritmusra épülő *kezdőbázist felépítő LP* algoritmust. Ezután megadtuk a báziscserét végrehajtó (*optimális megoldást kereső LP*) algoritmust is. Az algoritmusok működését egy tesztfeladaton keresztül mutattuk be.

A projekciós H_{i+1} mátrixok Hermite típusúak. Ezekről kiváló magyar nyelvű leírást adott Rózsa Pál a könyvében (Rózsa, 1974), aki azt is megmutatta, hogy az LP feladat ilyen mátrixok felhasználásával megoldható. A kiindulás nem az ABS módszerosztálybeli H projekciós mátrix felépítése, de a báziscserék gondolata az esetünkben is megállja a helyét.

Hivatkozások

Abaffy J. (1979). A lineáris egyenletrendszerek általános megoldásának egy módszerosztálya. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 5:223–240.

Abaffy, J., Spedicato, E. (1989). *ABS Projections Algoritms: Mathematical Techniques for Linear and Nonlinear Algebraic Equations*. Ellis Horwood Ltd, Chichester, England.

Abaffy, J., Liang, X-J., Xia, Z-Q. A modified non-simplex active set method for the standard LP problem. *Pure Mathematics and Applications*. Megjelenés alatt.

Gáspár L. (1977). *Bevezetés az operációkutatásba I.–II.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Li-Wei, Z., Zhong-Hang, X. (1996). On the application of the implicit LX algoritm to the simplex method. *Quaderni del Dipartimento di Matematica, Statistica e Informatica e Applicazioni, University of Bergamo*, 10:1–11.

MATLAB – The Language Of Technical Computing, MathWorks. http://www.mathworks.com/products/matlab/index.html.

Rózsa P. (1974). *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Spedicato, E., Xia Z-Q., Zhang, L. (1997). The implicit LX method of the ABS class. *Optimization Methods and Software*, 8:99-110.

Xia, Z-Q. (1995). ABS formulation of some versions of the simplex method for linear programming. *Quaderni del Dipartimento di Matematica, Statistica e Informatica e Applicazioni, University of Bergamo*, 10.

Zhang, L., Xia, Z. H. (1995). Application of the implicit LX algoritm to the simplex method. *Quaderni del Dipartimento di Matematica, Statistica e Informatica e Applicazioni, University of Bergamo*, 9.

Nagyobb változatosság, több profit

A termékvariánsok számának növelése mint a profitmaximalizálás eszköze

Csekő Imre

Kivonat
A tanulmány azt a kérdést vizsgálja egy duopólium modellben, hogy egy termelőnek érdemes-e lényegében ugyanazt a terméket több formában, differenciáltan piacra dobnia. A modell ebben a csupasz formájában csak igen korlátozott mértékben épít a játékosok közti interakciókra, egy egyszerű szimultán döntési folyamatot ábrázol, azt is statikus környezetben. Az elemzés azt mutatja, hogy a keresleti paraméterek bizonyos értékei mellett még akkor is érdemes új, az eddigiektől eltérő tulajdonságú, differenciált termék piacra vitele, ha annak ára nem tér el a már korábban bevezetett terméktől, és így annál önmagában nem tekinthető nagyobb nyereséget biztosítónak. Az a tény, hogy egy vállalat több differenciált termékvariánst árusít, arra vezet, hogy a korábbi egyensúlyi helyzethez képest kedvezőbb pozícióba kerül, mint a versenytársa.

1. Bevezetés

Kissé rendhagyó módon a köszönetnyilvánítással kezdem. Teszem ezt azért, mert ez egyben a tanulmány témaválasztásának (egyáltalán nem megalapozott) indoklása is lesz.

Az 1970-es évek második felében Forgó Ferenc a két féléves Matematikai programozás nevű tárgyat tanította nekünk, tervgazdasági szakos diákoknak. Noha maga a tárgy – nehézsége és irdatlan nagy, megértendő, megtanulandó és (főleg) a vizsgán visszaadandó anyaga miatt – eleinte nem volt túl közkedvelt a hallgatóság körében, a Tanár Úr szakmai tudása, pedagógiai készsége, humorérzéke persze mindannyiunkat megfogott, népszerűsége vitán felül állt. A két félév során aztán lassanként hozzáedződtünk a feladatokhoz, ki jobban,

Csekő Imre
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék,
email: cseko@uni-corvinus.hu

ki kevésbé. Engem érdekelt ez a terület, egyre inkább beleástam magam, és meglehetősen nagy lelkesedéssel tanultam. Olyannyira, hogy amikor a következő félévben szakszemináriumra kellett jelentkeznem, Forgó Tanár Urat kértem meg, legyen a témavezetőm. A közösen választott téma kapcsolódott az ő kutatási területéhez, a nemkonvex programozáshoz: a globális programozás (sztochasztikus) módszereivel foglalkoztam, később ezekből írtam a szakdolgozatomat. Közben azonban egy kissé megfertőződtem a játékelmélettel is, ezt a tárgyat szintén ő tanította, igaz, ekkor már csak a szak töredékének.

Mindezek miatt úgy gondoltam, érdemes olyan kérdést választanom e rövid, tisztelgő írás témájául, ami kapcsolódik az említett területekhez. Találtam is egy roppant érdekes szavazáselméleti modellt, ami alapvetően játékelméleti probléma, és benne a (társadalmilag) optimális megoldás megkeresése egy nemlineáris, nemkonvex feladat megoldását igényli. Ez az úgynevezett *Állampolgár–Jelölt*-modell, amelynek eredeti változatát az Osborne és Slivinski (1966) cikkben találhatjuk. Itt az állampolgárokat, akik először arról döntenek, indulnak-e a választáson, majd az induló jelöltek ismeretében szavaznak, egy szakasz mentén ábrázoljuk, ahol a szakaszbeli elhelyezkedésük a politikai bal–jobb spektrumban elfoglalt helyüket reprezentálja. Ez a korábban általánosan elfogadott modellkeret lehetővé teszi, hogy a differenciált termékekre vonatkozó *Hotelling*-modellbeli eszközökkel vizsgáljuk a problémát. Az utóbbi évtizedekben azonban egyre több támadás éri ezt az egyszerű, egydimenziós felfogást, arra a nyilvánvaló tényre alapozva, hogy az emberek egyes politikai állásfoglalásai nem szoríthatók be egy dimenzióba.[1] Az *Osborne–Slivinski*-modellt többféleképpen általánosíthatjuk.[2] Én arra tettem kísérletet, hogy az állampolgárok helyzetét egy kétdimenziós téglában ábrázoljam, és e tégla fölött keressem a modell megoldásait: az egyensúlyokat és a társadalmilag optimális pontot. Sajnálatos módon azonban – remélem, csak a rendelkezésemre álló idő rövidsége, és nem az én alkalmatlanságom miatt – mindeddig nem sikerült igazi, általános megoldást találnom a problémára.

Ezért két lehetőségem maradt. Az egyik az, hogy precízen megfogalmazzam a modellt, a feltevéseket és a sejtéseimet, és megkérjem Tanár Urat, segítsen a bajba jutott diákján.[3] Aztán arra gondoltam, hogy a megoldást pillanatok alatt kirázza a kisujjából, és furcsán néz majd rám. Ezt inkább elkerülném, ezért a második lehetőséget választottam. Előkotortam és kicsit leporoltam korábbi munkáimból egy eddig nem publikált dolgozatot, amiben – bár csak elrejtve – szintén van (egyszerű) stratégiai interakció és (sajnos, konvex) optimalizálás, és ezt küldöm „Tanár Úrnak, szeretettel”.

Tisztelt Tanár Úr, Kedves Feri! Köszönöm mindazt, amit tanultam Tőled, azt, hogy a tanár–diák viszony kollegiális barátsággá alakult, és persze a finom borokat is!

---

[1] Kellemes szórakozásként érdemes ellátogatni a http://www.politicalcompass.org/ oldalra és kitölteni az ott található tesztet.

[2] Lásd például a Besley és Coate (1977) cikket.

[3] Ez a javaslat Temesi Józseftől származik, köszönet érte, nagy ötlet.

2. Az alapmodell

Ebben a tanulmányban a piaci verseny egy speciális formájával foglalkozunk. Azt a kérdést vizsgáljuk egy duopólium modellben, hogy érdemes-e lényegében ugyanazt a terméket több formában, differenciáltan piacra dobni. Nem az a kérdés foglalkoztat minket, hogy érdemes-e a saját termékünket megkülönböztetni a versenytársétól, ezt a problémát számtalan tanulmány taglalja. A termékdifferenciálás problémaköre alaposan és széleskörűen kikutatott terület.[4] A legtöbb modellben, legyen az horizontális vagy vertikális termékdifferenciálásos modell, a szereplők (oligopolisták[5] vagy monopolisztikus versenyben[6] részt vevő vállalatok) egy terméket termelnek, és a többiekkel versenyeznek a piacért. Mi arra koncentrálunk, hogy megéri-e saját magunknak „versenyt hirdetni".

Azzal az egyszerű esettel kezdünk, amikor a két szereplő (vállalat) egy-egy terméket visz a piacra. Ezek a termékek gyakorlatilag azonosnak tekinthetők: lényegében ugyanazt a szolgáltatást nyújtják, de egyben lehetővé teszik, hogy a fogyasztók válasszanak bizonyos karakterisztikák alapján.

A modell három szereplője a két vállalat – ezeket egy alsó indexszel különböztetjük meg a jelölésben – és egy reprezentatív fogyasztó, aki a modell keresleti oldalát jeleníti meg. A vállalatok termelését a q_i, $i = 1,2$ szimbólumokkal jelöljük. Feltesszük, hogy a termelés határköltsége zérus. Kezdetben a vállalatok teljesen szimmetrikus szerepet töltenek be, döntésüket szimultán módon hozzák meg, döntési változójuk a termékük p_i, $i = 1,2$ ára.

A fogyasztói keresletek jellemzése kissé hiányos: nem követjük végig azt az utat, hogy a preferenciák alapján vezetjük le a keresleti viselkedést, hanem posztuláljuk azt.[7] Ebben a modellben ugyan könnyen megtehetnénk, hogy nem így járunk el, így az alkalmazandó keresleti függvényeink egyszerűen adód(ná)nak a fogyasztó kvázilineáris hasznossági függvényéből:

$$\max_{q_1,q_2 \geqq 0} \left\{ U(q_1,q_2) = \alpha(q_1+q_2) - \frac{1}{2}\beta\left(q_1^2 + 2\theta q_1 q_2 + q_2^2\right) + m \right\}$$
$$\text{feltéve, hogy} \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 + m = I,$$

ahol $\alpha, \beta > 0, 0 < \theta < 1$ keresleti paraméterek és I a fogyasztó (kívülről adott) exogén jövedelme.

Ebből a feladatból levezethető inverz keresleti függvényeink:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha - \beta(q_1 + \theta q_2), \\ p_2 &= \alpha - \beta(\theta q_1 + q_2). \end{aligned}$$

---

[4] Csak néhány alapvető hozzájárulást említünk: klasszikus cikkeket (Hotelling, 1929; Spence, 1976) és összefoglaló jellegű munkákat (Gabszewicz és Thisse, 1992; Eaton és Lipsey, 1989).

[5] Például Vives (1985).

[6] A klasszikus példa Dixit és Stiglitz (1977).

[7] Az első ilyen típusú modellt Bowley (1924) cikkében találhatjuk.

Könnyen megmutatható, hogy ezekhez a

$$q_1 = a - b(p_1 - \theta p_2) = a - bp_1 + cp_2,$$
$$q_2 = a - b(-\theta p_1 + p_2) = a + cp_1 - bp_2$$

alakú keresleti függvények tartoznak, ahol az a, b és c paraméterek pozitívak és $c < b$. A c paraméter pozitivitása azt tükrözi, hogy a termékek helyettesítő jellegűek, a $c < b$ reláció pedig azt, hogy e helyettesítés nem tökéletes. A továbbiakban ezekkel a keresleti függvényekkel dolgozunk.

A vállalatok profitjukat maximalizálják:

$$\max_{p_i} p_i q_i = \max_{p_i} p_i \left(a - bp_i + cp_j\right), \; i = 1,2; \; j \neq i.$$

Ezeket a profitfüggvényeket a vállalatok saját áraiban deriválva, a deriváltakat zérussal egyenlővé téve, majd az egyenleteket átrendezve kapjuk a vállalatok reakció- vagy más szóval legjobbválasz-függvényeit.

$$p_i = \frac{a + cp_j}{2b}, \; i = 1,2; \; j \neq i.$$

A két egyenletből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a vállalatok optimális árait:

$$p_i = \frac{a}{2b - c}, \; i = 1,2, \tag{1}$$

illetve optimális termelését:

$$q_i = \frac{ab}{2b - c}, \; i = 1,2. \tag{2}$$

Ezek alapján a vállalati profitok:

$$\pi_i\left(p_1, p_2\right) = \frac{a^2 b}{(2b - c)^2}, \; i = 1,2. \tag{3}$$

Noha első pillantásra nem látszik, mégis megmutatható, hogy amennyiben a korábban bevezetett θ paraméter értéke nő, azaz a termékek egyre homogénebbek lesznek, a vállalati profitok csökkennek, ha pedig θ tart a zérushoz (a termékek egyre differenciáltabbakká válnak), akkor a vállalati profitok emelkednek. Ugyanis az eredeti inverz keresleti függvények paramétereivel a $\pi_i\left(p_1, p_2\right)$ függvények

$$\frac{\left(\frac{(1-\theta)\,\alpha}{\beta\left(1-\theta^2\right)}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta\left(1-\theta^2\right)}\right)}{\left((2-\theta)\left(\frac{1}{\beta\left(1-\theta^2\right)}\right)\right)^2}$$

alakúak lesznek, melyek θ szerinti deriváltja negatív. A vállalatok tehát abban érdekeltek, hogy minél differenciáltabb termékeket dobjanak piacra.

Nézzük meg mindezt az inverz keresleti függvényekre:

$$p_i = \frac{(1-\theta)\,\alpha}{2-\theta},\ i = 1,2, \tag{4}$$

$$q_i = \frac{(1-\theta)\,\alpha}{2-\theta},\ i = 1,2, \tag{5}$$

$$\pi_i\,(p_1,p_2) = \frac{(1-\theta)^2}{(2-\theta)^2}\alpha^2,\ i = 1,2. \tag{6}$$

Felmerül a kérdés, vajon nem növelhető-e tovább a vállalati profit, ha a vállalat a differenciáltságot azzal növeli, hogy új terméket dob a piacra? Ez a stratégia nyilván alapvetően megváltoztatja a feladat eddigi egyszerű szerkezetét azáltal, hogy a keresleti rendszerben megjelenik egy új termék, és ennek helyettesítési viszonyai befolyásolják a vállalati profitfüggvényeket.

A probléma kicsit hasonlít ahhoz a feladathoz, amikor a reprezentatív fogyasztó három vállalat által termelt termék iránt „érdeklődik”.

Anélkül, hogy részletesen belemennénk a keresleti függvények mögött meghúzódó hasznosságmaximalizálási feladatba, megadjuk erre az esetre is a fogyasztó inverz keresleti függvényeinek rendszerét:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \alpha - \beta\,(q_1 + \theta q_2 + \theta q_3)\,,\\
p_2 &= \alpha - \beta\,(\theta q_1 + q_2 + \theta q_3)\,,\\
p_3 &= \alpha - \beta\,(\theta q_1 + \theta q_2 + q_3)\,.
\end{aligned}$$

A továbbiakban egy, az irodalomban is gyakran alkalmazott egyszerűsítő feltevéssel élünk, nevezetesen feltesszük, hogy a helyettesítési viszonyok szimmetrikusak.[8] A hosszadalmas levezetéseket mellőzve közöljük az ebben az esetben kialakuló egyensúlyi árakat és mennyiségeket, most az eredeti inverz keresleti függvény paramétereinek függvényében:

$$p_i = \frac{1-\theta}{2}\alpha,\ i = 1,2,3, \tag{7}$$

$$q_i = \frac{(1-\theta)\,(1+\theta)}{2}\alpha,\ i = 1,2,3. \tag{8}$$

Ezek ismeretében a profitfüggvények:

$$\pi_i\,(p_1,p_2) = \frac{(1-\theta)^2\,(1+\theta)}{4}\alpha^2,\ i = 1,2,3. \tag{9}$$

[8] Ez a feltevés meglehetősen valószerűtlen, feloldása elvileg lehetséges, de a számításokat szükségtelenül bonyolulttá teszi, anélkül, hogy érdemben módosítana az eredményeinken.

Erről deriválás után könnyen belátható, hogy a θ paraméterben csökkenő, azaz itt is ugyanúgy mint az előző, két vállalatos esetben a differenciáltság növeli a vállalati profitot.

Ugyanakkor az is látható, hogy amennyiben a pótlólagos vállalat belép a piacra a posztulált helyettesítési tulajdonságú termékével, akkor a vállalati profitok csökkennek:

$$\frac{(1-\theta)^2}{(2-\theta)^2}\alpha^2 - \frac{(1-\theta)^2(1+\theta)}{4}\alpha^2 > 0,\ \forall\theta \in (0,1).$$

Ez a csökkenés két hatás eredményeképpen jön létre: egyrészt az árak csökkennek, ugyanakkor a vállalati output növekszik, de nem olyan mértékben, ami képes lenne ellensúlyozni az árcsökkenést.[9] Ebből a tényből arra következtethetnénk, hogy egy vállalatnak nem éri meg önmagában a kínálat differenciáltságát fokozni. Ez a gondolatmenet azonban nem biztos, hogy megállja a helyét, hiszen az ismertetett modellben a belépő versenyző mintegy ellene dolgozik a már bent lévőknek, ha azonban a vállalat egymaga növeli a differenciáltságot, akkor figyelembe veheti azt, hogy az új terméke ronthatja a már eddig is kínált termékének az árát. Pontosan e miatt a megfontolás miatt érdemes végiggondolnunk a problémát.

3. Az önkéntes differenciálás modellje

Alapgondolatunk a következő: Abból a helyzetből indulunk ki, amit az előző pont két szereplős modellje ír le. A piacon két vállalat kínál két egymástól esetleg különböző, de lényegében véve azonos terméket. A fogyasztó az ott specifikált keresleti függvények alapján vásárol a piacról. Feltesszük, hogy a szimultán árdöntés elvezetett a *Bertrand*-egyensúlyba. Ezt az egyensúlyt a (1) – (3) egyenletrendszer írja le. Feltesszük, hogy az első vállalat úgy dönt, hogy új terméket dob a piacra. Annak érdekében, hogy a jelöléseinkkel is könnyen követhetővé tegyük a gondolatmenetet, kicsit eltérünk az eddigiektől. Az új termékre egy „$*$” felső indexszel utalunk. A második vállalat termékére vonatkozó jelölések változatlanok.

Az előző modellben a reprezentatív fogyasztó keresleti rendszerét a következő egyenletrendszer írta le:

$$\begin{aligned} q_1 &= a(\theta) - b(\theta)(p_1 - \theta p_2) = a(\theta) - b(\theta)p_1 + c(\theta)p_2, \\ q_2 &= a(\theta) - b(\theta)(-\theta p_1 + p_2) = a(\theta) + c(\theta)p_1 - b(\theta)p_2, \end{aligned}$$

ahol $a(\theta)$ a θ paraméter csökkenő, $b(\theta)$ és $c(\theta)$ pedig növekvő függvénye volt. Ezen a ponton azonban vigyáznunk kell. Ha egy harmadik termék kerül a piacra (akár ugyanazzal a helyettesítési paraméterrel), akkor e keresleti függvények alakjai megváltoznak.

[9] Ebben a modellben nem csak a vállalati termelés változik, hanem az összkereslet is. Shubik és Levitan (1980) könyvében olyan keresleti rendszerre találhatunk példát, amiben az összkereslet nem változik az újonnan megjelenő termékvariánsok hatására.

Tekintsük akkor a modellnek azt az alakját, amiben ugyanazok a „keresleti viszonyok”. Ezeket először az inverz keresleti függvényekkel írjuk le:

$$\begin{aligned} p_1 &= a - b(q_1 + \theta q^* + \theta q_2), \\ p^* &= a - b(\theta q_1 + q^* + \theta q_2), \\ p_2 &= a - b(\theta q_1 + \theta q^* + q_2). \end{aligned}$$

Az ebből származtatott kereslet-függvények rendszere kicsit bonyolult:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(1-\theta)}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}\alpha - \frac{(1+\theta)}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p_1 + \frac{\theta}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p^* + \frac{\theta}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p_2, \\ q^* &= \frac{(1-\theta)}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}\alpha + \frac{\theta}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p_1 - \frac{(1+\theta)}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p^* + \frac{\theta}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p_2, \\ q_2 &= \frac{(1-\theta)}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}\alpha + \frac{\theta}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p_1 + \frac{\theta}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p^* - \frac{(1+\theta)}{\beta\,(1+\theta-2\theta^2)}p_2, \end{aligned}$$

egyszerűbb jelöléssel:

$$\begin{aligned} q_1 &= a - bp_1 + cp^* + cp_2, \\ q^* &= a + cp_1 - bp^* + cp_2, \\ q_2 &= a + cp_1 + cp^* - bp_2. \end{aligned}$$

Ezek után írjuk fel az első vállalat profitmaximalizálási feladatát:[10]

$$\max_{p_1, p^*} (a - bp_1 + cp^* + cp_2)\, p_1 + (a + cp_1 - bp^* + cp_2)\, p^*.$$

Az optimum szükséges feltételeit megkapjuk, ha ezt a függvényt a két változója szerint parciálisan deriváljuk, majd azokat zérussal egyenlővé tesszük:

$$\begin{aligned} a - 2bp_1 + 2cp_2 + cp_3 &= 0, \\ a + 2cp_1 - 2bp_2 + cp_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ezekből nyerjük az első vállalat reakciófüggvényeit:[11]

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}\frac{a + cp_2}{b - c}, \\ p^* &= \frac{1}{2}\frac{a + cp_2}{b - c}. \end{aligned}$$

---

[10] Egyelőre maradunk az egyszerűbb jelölésrendszernél, amikor szükségünk lesz rá, visszatérünk az eredeti keresleti paraméterekhez.

[11] Azért a többes szám, mert a feladat az első vállalat két változójában azok szimmetriája miatt „szétesik”.

A második vállalat reakciófüggvényét szintén a profitmaximalizálási feladatának elsőrendű feltételeiből származtatjuk:

$$\max_{p_2}\left(a+cp_1+cp^*-bp_2\right)p_2\,,$$

amiből

$$p_2=\frac{a+c(p_1+p^*)}{2b}\,.$$

Egyensúlyban a reakciófüggvények metszik egymást, mindenki a legjobb választ adja a másik stratégiájára. Ebből az egyensúlyi megoldás az árakban:

$$\begin{aligned} p_1=p^* &= \frac{1}{2}\left(2b+c\right)\frac{a}{2b^2-2cb-c^2}\,,\\ p_2 &= a\frac{b}{2b^2-2cb-c^2}\,. \end{aligned}$$

Mielőtt továbbmennénk, érdemes megvizsgálnunk az árak meghatározásában szereplő törtek nevezőjét, nehogy negatívvá váljanak. Szerencsére ez nem következhet be, hiszen

$$\begin{aligned} 2b^2-2cb-c^2 &= 2\left(\frac{(1+\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)^2-2\left(\frac{\theta}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)\left(\frac{(1+\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)-\\ &-\left(\frac{\theta}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)^2>0,\ \forall\theta\in(0,1)\,. \end{aligned}$$

Ehhez az árrendszerhez tartozó keresletek a következők:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}a\frac{2b^2-cb-c^2}{2b^2-2cb-c^2}\,,\\ q^* &= \frac{1}{2}a\frac{2b^2-cb-c^2}{2b^2-2cb-c^2}\,,\\ q_2 &= b^2\frac{a}{2b^2-2cb-c^2}\,. \end{aligned}$$

4. Az eredmények elemzése

4.1. Az új árak

Mielőtt végső következtetéseinket levonnánk, vizsgáljuk meg először azt a kérdést, hogy ez a piaci stratégia miképpen befolyásolta a piaci árakat. Tekintsük először az új terméket piacra dobó első vállalat által az eredeti termékére szabott árat:

$$p_1 = \frac{1}{2}(2b+c)\frac{a}{2b^2-2cb-c^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{(1+\theta)}{\beta(1+\theta-2\theta^2)}\right)+\left(\frac{\theta}{\beta(1+\theta-2\theta^2)}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\frac{(1-\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\alpha}{2\left(\frac{(1+\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)^2-2\left(\frac{\theta}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)\left(\frac{(1+\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)-\left(\frac{\theta}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)^2}.$$

Ezt egyszerűsítve:

$$p_1 = \frac{1}{2}(-1+\theta)\,\alpha\frac{3\theta+2}{\theta^2-2\theta-2}.$$

Az árváltozás ezek után a (4) egyenletből:

$$\Delta p_1 = \frac{1}{2}(-1+\theta)\,\alpha\frac{3\theta+2}{\theta^2-2\theta-2}-\frac{(1-\theta)\,\alpha}{2-\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}(-1+\theta)\,\alpha\frac{\theta^2}{(\theta^2-2\theta-2)(-2+\theta)} < 0,$$

hiszen a nevező mind a két tényezője és a számláló második tényezője szükségképpen negatív. Ez azt jelenti, hogy az újdonságot piacra dobó vállalat csökkenti az árat, és ennek megfelelően szabja meg az új termékvariáns árát is.

Nézzük most meg a másik vállalat egyensúlyi árát:

$$p_2 = a\frac{b}{2b^2-2cb-c^2} =$$

$$= \left(\frac{(1+\theta)}{\beta(1+\theta-2\theta^2)}\right)\frac{(1-\theta)}{\beta(1+\theta-2\theta^2)}\alpha\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\left(\frac{(1+\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)^2-2\left(\frac{\theta}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)\left(\frac{(1+\theta)}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)-\left(\frac{\theta}{\beta\left(1+\theta-2\theta^2\right)}\right)^2},$$

egyszerűsítve:

$$p_2 = (-1+\theta)\,\alpha\frac{1+\theta}{\theta^2-2\theta-2}.$$

Az árváltozás a (4) egyenletből:

$$\Delta p_2 = (-1+\theta)\,\alpha\frac{1+\theta}{\theta^2-2\theta-2}-\frac{(1-\theta)\,\alpha}{2-\theta} =$$

$$= \theta(-1+\theta)\frac{\alpha}{(-2+\theta)(\theta^2-2\theta-2)} < 0,$$

amiből jól látszik, hogy a második vállalat ára nagyobb mértékben csökken, hiszen

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \frac{1}{2}(-1+\theta)\,\alpha\frac{\theta}{\theta^2-2\theta-2} > 0.$$

4.2. Az új keresletek

Nézzük most meg a vállalatok keresletét!

Az első vállalatnál az árváltozások után

$$q_1 = \frac{1}{2}a\frac{2b^2-cb-c^2}{2b^2-2cb-c^2},$$

ez az érték természetesen egyenlő az újonnan bevezetett termék iránti kereslettel:

$$q^* = \frac{1}{2}a\frac{2b^2-cb-c^2}{2b^2-2cb-c^2}.$$

Az első vállalat összes kereslete tehát:

$$a\frac{2b^2-cb-c^2}{2b^2-2cb-c^2} = -\frac{1}{\beta}\alpha\frac{3\theta+2}{(\theta^2-2\theta-2)(2\theta+1)}.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan viszonylik ez az eredeti keresletéhez:

$$-\frac{1}{\beta}\alpha\frac{3\theta+2}{(\theta^2-2\theta-2)(2\theta+1)} - \frac{(1-\theta)\,\alpha}{2-\theta} =$$
$$= -\alpha\frac{-4\theta+3\theta^2-4+2\beta\theta^4-5\beta\theta^3-3\beta\theta^2+4\beta\theta+2\beta}{\beta(-2+\theta)(\theta^2-2\theta-2)(2\theta+1)}.$$

A nevező biztos pozitív, így a számláló előjele dönti el, hogy növekszik-e a vállalat kereslete. Miután $\alpha > 0$, ezért a β és a θ paraméterek viszonyán múlik ez az előjel.

(i) Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta+\varepsilon) = 1,$$

azaz a termékek majdnem tökéletesen homogének. Ekkor

$$-4+3-4+2\beta-5\beta-3\beta+4\beta+2\beta \approx -5,$$

azaz a kereslet növekszik.

(ii) A másik szélsőséges esetben, ha $\theta = 0$, azaz a tökéletes differenciáltság esetén, a számláló előjele a $-4+2\beta$ kifejezés nagyságán múlik. Ha $\beta > 2$, akkor a kereslet csökken, ellenkező esetben növekszik.

Fordítsuk figyelmünket a versenytárs keresletére:

$$q_2 = b^2 \frac{a}{2b^2 - 2cb - c^2} = -\frac{1}{\beta}\alpha \frac{(1+\theta)^2}{(\theta^2 - 2\theta - 2)(2\theta + 1)} > 0,$$

$$\begin{aligned}\Delta q_2 &= -\frac{1}{\beta}\alpha \frac{(1+\theta)^2}{(\theta^2 - 2\theta - 2)(2\theta + 1)} - \frac{(1-\theta)\alpha}{2-\theta} = \\ &= -\frac{-2 - 3\theta + \theta^3 + 2\beta\theta^4 - 5\beta\theta^3 - 3\beta\theta^2 + 4\beta\theta + 2\beta}{\beta} \cdot \\ &\qquad \cdot \frac{\alpha}{(-2+\theta)(\theta^2 - 2\theta - 2)(2\theta + 1)} .\end{aligned}$$

A nevező itt is szükségképpen pozitív, tehát megint a számláló előjele a döntő. Az előzőekhez hasonlóan:

(i) Ha $\lim_{\varepsilon \to 0}(\theta + \varepsilon) = 1$, akkor

$$-2 - 3\theta + \theta^3 + 2\beta\theta^4 - 5\beta\theta^3 - 3\beta\theta^2 + 4\beta\theta + 2\beta \approx -4,$$

azaz a kereslet növekszik.

(ii) Ha $\theta = 0$, a tökéletes differenciáltság esetén a számláló előjele a $-2 + 2\beta$ kifejezés nagyságán múlik. Ha $\beta > 1$, akkor a kereslet csökken, ellenkező esetben növekszik.

4.3. Az új profitok

Ezek után vizsgáljuk meg a vállalatok profitjait!

Az első vállalat nyeresége:

$$\begin{aligned}\pi_1(p_1, p^*, p_2) &= \left(\frac{1}{2}(-1+\theta)\alpha \frac{3\theta + 2}{\theta^2 - 2\theta - 2}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\alpha \frac{3\theta + 2}{(\theta^2 - 2\theta - 2)(2\theta + 1)}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{-1+\theta}{\beta}(3\theta + 2)^2 \frac{\alpha^2}{(\theta^2 - 2\theta - 2)^2(2\theta + 1)}.\end{aligned}$$

A profit változása:

$$\Delta\pi_1(p_1, p^*, p_2) = -\frac{1}{2}\frac{-1+\theta}{\beta}(3\theta + 2)^2 \frac{\alpha^2}{(\theta^2 - 2\theta - 2)^2(2\theta + 1)} - \frac{(1-\theta)^2}{(2-\theta)^2}\alpha^2 =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\alpha^2(-1+\theta)}{(\theta^2-2\theta-2)^2\beta(2\theta+1)(-2+\theta)^2}\cdot$$

$$\left(-8\theta^2-24\theta^3+9\theta^4+32\theta+16-18\beta\theta^5+6\beta\theta^4+40\beta\theta^3-24\beta\theta-8\beta+4\beta\theta^6\right).$$

Itt az első tényező biztosan pozitív, emiatt a második tényező előjele dönti el, érdemes-e új terméket vinni a piacra.

Tekintsük a szokásos eseteinket!

(i) Ha $\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta+\varepsilon)=1$, akkor

$$-8-24+9+32+16-18\beta+6\beta+40\beta-24\beta-8\beta+4\beta=25,$$

azaz a profitnövekmény pozitív.

(ii) Ha $\theta=0$, akkor a $16-8\beta$ kifejezés előjele a döntő. Ha $\beta<2$, akkor a profit növekszik.

Most vizsgáljuk meg a versenytárs profitját!

$$\pi_2(p_1,p^*,p_2)=\left((-1+\theta)\alpha\frac{1+\theta}{\theta^2-2\theta-2}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\alpha\frac{(1+\theta)^2}{(\theta^2-2\theta-2)(2\theta+1)}\right)=$$

$$=-(-1+\theta)\alpha^2\frac{(1+\theta)^3}{(\theta^2-2\theta-2)^2\beta(2\theta+1)},$$

a profitváltozás pedig

$$\Delta\pi_2(p_1,p^*,p_2)=-(-1+\theta)\alpha^2\frac{(1+\theta)^3}{(\theta^2-2\theta-2)^2\beta(2\theta+1)}-\frac{(1-\theta)^2}{(2-\theta)^2}\alpha^2=$$

$$=\frac{-\alpha^2(-1+\theta)}{(\theta^2-2\theta-2)^2\beta(2\theta+1)(-2+\theta)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(4+8\theta+\theta^2-5\theta^3-\theta^4+\theta^5-9\beta\theta^5+3\beta\theta^4+20\beta\theta^3-12\beta\theta-4\beta+2\beta\theta^6\right).$$

Az első tényező pozitív, ezért ismét a második tényező dönti el, szerencsés volt-e ez a vállalat. Tekintsük a szokásos eseteinket!

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta+\varepsilon)=1$. Ekkor

$$(4+8-5-1+1-9\beta+3\beta+20\beta-12\beta-4\beta+2\beta)=7,$$

tehát a második vállalat profitja is növekszik.

(ii) $\theta=0$. Ekkor a $4-4\beta$ kifejezés előjele számít. Ha $\beta<1$, akkor a versenytárs profitja is növekszik.

Végezetül azt nézzük meg, hogy az új termék bevezetése miként változtatja meg a nyereségarányokat a vállalatok között. Nézzük meg, melyik vállalat tett szert nagyobb profitnövekményre. Miután a kiinduló helyzetünkben egyenlő volt a profitjuk, elegendő azt kiszámítani, hogy melyiküké a nagyobb most, az új termék bevezetése után.

$$\pi_1(p_1,p^*,p_2)-\pi_2(p_1,p^*,p_2)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\frac{-1+\theta}{\beta}(3\theta+2)^2\frac{\alpha^2}{(\theta^2-2\theta-2)^2(2\theta+1)}\right)-$$

$$-\left((-(-1+\theta))\alpha^2\frac{(1+\theta)^3}{(\theta^2-2\theta-2)^2\beta(2\theta+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2\frac{-1+\theta}{\beta(\theta^2-2\theta-2)}>0,$$

azaz függetlenül a paraméterek nagyságától az iparági profitból az új terméket bevezető vállalat biztosan nagyobb részt hasít ki.

5. Összefoglalás

Ebben a szándékosan leegyszerűsített modellben, amiben csak felületesen specifikáltuk a fogyasztók haszonmaximalizálási problémáját és az abból adódó keresleti viszonyokat, csak a versenynek arra az aspektusára koncentráltunk, hogy érdemes-e önkéntes módon növelnünk a differenciált termékeink számát. A modell ebben a csupasz formájában csak igen korlátozott mértékben épít a játékosok közti interakciókra, egy egyszerű szimultán döntési folyamatot ábrázol, azt is statikus környezetben. Azt sem vizsgáltuk, hogy a második vállalat milyen stratégiai ellenakciókra vállalkozhat. Éppen ezért vizsgálatunk hatóköre nagyon korlátozott.

Az elemzésünk azt mutatta, hogy a keresleti paraméterek bizonyos értékei mellett még akkor is érdemes új, az eddigiektől eltérő tulajdonságú differenciált terméket a piacra dobni, ha annak ára nem tér el a már korábban bevezetett terméktől, így önmagában nem tekinthető annál nagyobb nyereséget biztosítónak. Ha egy vállalat több differenciált termékvariánst árusít, az ahhoz vezet, hogy a korábbi egyensúlyi helyzethez képest kedvezőbb pozícióba kerül, mint versenytársa. Sejtésünk szerint a modell sugalmazta eredmények bonyolultabb szituációkban is igazak maradnak.

Hivatkozások

Besley, T., Coate, S. (1977). An economic model of representative democracy. *The Quarterly Journal of Economics*, 112:85–114.

Bowley, A. (1924). *The Mathematical Groundwork of Economics*. Oxford University Press.

Dixit, A., Stiglitz, J. (1977). Monopolistic competition and optimum product diversity. *American Economic Review*, 67:297–308.

Eaton, B., Lipsey, R. (1989). Product differentiation. In: Schmalensee, R., Willig, R. (szerk.) *Handbook of Industrial Organization, Volume 1*, North-Holland, Amsterdam, pp. 723–768.

Gabszewicz, J., Thisse, J. (1992). Location. In: Aumann, R., Hart, S. (szerk.) *Handbook of Game Theory, Vol. 1*. North-Holland, Amsterdam, pp. 281–304.

Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *Economic Journal*, 39:41–57.

Osborne, M. J., Slivinski, A. (1966). A model of political competition with citizen-candidates. *The Quarterly Journal of Economics*, 111:65–96.

Shubik, M., Levitan, R. (1980). *Market Structures and Behavior*. Harvard University Press.

Spence, M. (1976). Product differentiation and welfare. *American Economic Review*, 66:407–414.

Vives, X. (1985). Efficiency of Bertrand and Cournot equilibria with product differentiation. *Journal of Economic Theory*, 36:166–175.

Általánosított gradiens rendszerek

Kánnai Zoltán, Szabó Imre, Tallos Péter

Kivonat
A cikkben megvizsgáljuk, hogy a klasszikus gradiens rendszerek stabilitási tulajdonságai miként öröklődnek nem differenciálható potenciálfüggvények esetén. Ezután olyan rendszerekre fogalmazunk meg stabilitási feltételt, amelyekben nem sima Ljapunov-függvény biztosítja a konvergenciát. Eredményeinket példákon is illusztráljuk.

1. Bevezetés

Legyen a továbbiakban X egy valós Hilbert-tér, és tekintsük az

$$x'(t) = -V'(x(t)), \tag{1}$$

differenciálegyenletet, ahol V az X téren értelmezett differenciálható potenciálfüggvény. Az ilyen típusú úgynevezett gradiens rendszerek klasszikusnak tekinthetők a mechanikában és a stabilitáselméletben (lásd például Hirsch és Smale (1974) cikkét). Például, ha a V valódi konvex függvénynek egy x_0 pontban minimuma van, akkor x_0 az (1) rendszer aszimptotikusan stabil egyensúlyi állapota. Továbbá, ha $\bar{x}$ valamely trajektória ω-határpontja, akkor $\bar{x}$ a rendszer egyensúlyi állapota, azaz $V'(\bar{x}) = 0$.

Számos alkalmazásban (különösen az optimumszámításban) találkozhatunk olyan rendszerekkel is, amelyekben a V potenciálfüggvény nem feltétlenül differenciálható, de kon-

Kánnai Zoltán
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: kannai@uni-corvinus.hu

Szabó Imre
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: szaboim@uni-corvinus.hu

Tallos Péter
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: tallos@uni-corvinus.hu

vex függvény. Első látásra talán meglepő módon, ilyen esetekben az általánosított gradiens rendszer örökli a klasszikus gradiens rendszerek stabilitási tulajdonságait (Kánnai és Tallos, 1998; Tallos és Kánnai, 2003). Az ilyen, nem sima rendszerek vizsgálatához emlékeztetünk a konvex függvények szubdifferenciáljának fogalmára.

Egy $p \in X^*$ lineáris funkcionált a V függvény x pontjához tartozó szubgradiensének nevezzük, ha minden $y \in X$ esetén

$$V(y) - V(x) \geq \langle p, y - x \rangle \ .$$

Az x ponthoz tartozó szubgradiensek halmazát a V függvény x-beli szubdifferenciáljának nevezzük, jelölése $\partial V(x)$.

A szubdifferenciál alapvető tulajdonságait illetően utalunk Aubin és Cellina (1984) monográfiájára.

2. Gradiens típusú tartalmazások

Legyen V egy X-en értelmezett alulról félig folytonos valódi konvex függvény és tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &\in -\partial V(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Cauchy-feladatot. Az alábbi tétel bizonyításának csak a vázlatát közöljük, a részleteket lásd Aubin és Cellina (1984) monográfiájában.

1. Tétel. *Tetszőleges* $x_0 \in \operatorname{dom} \partial V$ *esetén a (2) feladat egyértelműen megoldható a* $[0, \infty)$ *intervallumon.*

Bizonyítás:
Egyértelműség. Legyen x megoldása a (2) feladatnak, és y megoldása az

$$y'(t) \in -\partial V(y(t)), \qquad y(0) = y_0$$

feladatnak. A

$$\frac{d}{dt} \|x(t) - y(t)\|^2 = \langle x'(t) - y'(t), x(t) - y(t) \rangle \leq 0$$

monotonitást felhasználva és 0-tól t-ig integrálva kapjuk, hogy minden t esetén

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \,,$$

amiből következik az egyértelműség.

Egzisztencia. Tetszőleges $\lambda > 0$ esetén definiáljuk a következő függvényt:

$$V_\lambda(x) = \inf_{y\in X}\left(V(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2\right).$$

Ekkor V_λ egy olyan differenciálható konvex függvény, amelyre minden $x \in \operatorname{dom} V$ esetén $\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda(x) = V(x)$. (A V_λ függvény gradiensét a ∂V szubdifferenciál *Yosida-approximációjának* nevezzük.) Az

$$x_\lambda'(t) = -V_\lambda(x(t)), \qquad x_\lambda(0) = x_0$$

differenciálegyenlet megoldásai Cauchy-sorozatot alkotnak a $C(0,\infty,X)$ térben, továbbá a (2) feladat megoldásához tartanak, midőn $\lambda \to 0$. ❑

Megjegyezzük, hogy a (2) rendszer megoldásának deriváltja minimális normájú (a legkisebb lehetséges megoldás). Pontosabban, ha x megoldása a (2) feladatnak, akkor majdnem minden t-re

$$x'(t) = m(-\partial V(x(t))),$$

ahol m a halmaznak az origóhoz legközelebbi pontját jelöli, azaz $x'(t)$ az $-\partial V(x(t))$ halmazértékű leképezés minimális szelekciója. Ismert, hogy nem minden mérhető halmazértékű leképezés minimális szelekciója mérhető (lásd Aubin és Cellina (1984) monográfiáját).

2. Tétel. *V monoton fogyó a (2) rendszer trajektóriái mentén.*

Bizonyítás: Legyen x a rendszer egy trajektóriája. Ekkor a szubdifferenciál definíciója szerint

$$\begin{aligned} V(x(t)) - V(x(t+h)) &\le -\langle x'(t), x(t) - x(t+h)\rangle \\ V(x(t+h)) - V(x(t)) &\le -\langle x'(t+h), x(t+h) - x(t)\rangle . \end{aligned}$$

Mivel x' jobbról folytonos, ezért

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -\|x'(t)\|^2 .$$

❑

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy V felveszi a minimumát. Ekkor minden $x_0 \in \operatorname{dom}\partial V$ esetén a (2) rendszer megoldása gyengén konvergál a V minimumpontjához.*

Bizonyítás: A fenti egyenlőtlenséget integrálva kapjuk, hogy

$$V(x(t)) - V(x(s)) + \int_s^t \|x'(\tau)\|^2\, d\tau \le 0,$$

ezért $\lim_{t,s\to\infty}\int_s^t \|x'(\tau)\|^2\,d\tau \le \lim_{t,s\to\infty}(V(x(s))-V(x(t)))=0$. Emiatt a Cauchy-kritérium szerint

$$\int_0^\infty \|x'(\tau)\|^2\,d\tau < +\infty,$$

az integrál konvergens.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén legyen

$$A_\varepsilon = \{t > 0 : \|x'(t)\| < \varepsilon\},$$

ekkor $\mu(A_\varepsilon) = +\infty$. Ellenkező esetben a komplementuma végtelen mértékű volna, amiből

$$\int_0^\infty \|x'(\tau)\|^2\,d\tau \ge \varepsilon^2\mu(A_\varepsilon) = +\infty$$

következne, ez viszont lehetetlen.

Felhasználva, hogy x a (2) feladat egy megoldása, minden rögzített $t \in A_\varepsilon$ esetén

$$\begin{aligned}\inf_{s>0} V(x(s)) &\le V(x(t)) \le V(y) + \langle -x'(t), x(t)-y\rangle \\ &\le V(y) + \|x'(t)\|\cdot\|x(t)-y\| \le V(y) + \varepsilon\|x(t)-y\|\end{aligned}$$

minden $y \in X$ mellett. A limeszt $\varepsilon \to 0$ mellett véve kapjuk, hogy

$$\inf_{s>0} V(x(s)) = \inf_{y\in X} V(y).$$

Az x tetszőleges $t_n \to \infty$ melletti $\bar{x}$ limeszpontjára teljesül, hogy

$$V(\bar{x}) \le \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = \inf_{t\ge 0} V(x(t)) = \inf_{y\in X} V(y).$$

Másrészt $x(t_n)$ gyengén tart az aszimptotikus centrumhoz, ami szükségképpen a V minimumpontja. ❑

Megjegyezzük, hogy egy X-beli x_n sorozat aszimptotikus centrumát a következőképpen értelmezzük. Legyen egy tetszőlegesen választott $y \in X$ esetén

$$C(y) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Ekkor könnyen látható, hogy C nemnegatív, korlátos, lokálisan Lipschitz-folytonos és szigorúan konvex. Másrészről

$$\lim_{\|y\|\to\infty} C(y) = +\infty,$$

ezért C-nek egyértelmű minimumhelye létezik az X-ben. Jelölje ezt x_∞, amit az x_n sorozat aszimptotikus centrumának nevezünk.

Belátható, hogy x_∞ az x_n sorozat gyenge limeszpontjainak zárt konvex burkában fekszik, továbbá, ha a sorozat gyengén konvergens, akkor az aszimptotikus centrum megegyezik a gyenge limesszel.

3. Nem sima Ljapunov-függvények

Az előző szakasz eredménye általánosítható gradiens rendszerekről Ljapunov-függvénnyel rendelkező stabil irányítási rendszerekre, abban az értelemben, hogy a Ljapunov-függvény a (nem mindig létező) potenciálfüggvény általánosításaként fogható föl. Az általánosításhoz a 3. Tételnek az alábbi tétellel való helyettesítése vezet, amelyben nem követeljük meg a (2) inklúzió fennállását. Egy másik megközelítést illetően lásd Bacciotti és Ceragioli (2003).

4. Tétel. *Ha x és $V \circ x$ a t pontban differenciálható függvények, akkor*

$$\left\{(V\circ x)'(t)\right\} = \langle \partial V(x(t)), x'(t)\rangle \doteq \left\{\langle p, x'(t)\rangle \;:\; p \in \partial V(x(t))\right\}.$$

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(x(t)+h\cdot x'(t)) - V(x(t+h))}{h} = 0.$$

Valóban, létezik olyan $r:\mathbb{R}\to X$ a 0-ban kisrendű függvény, amelyre

$$x(t+h) = x(t) + h\cdot x'(t) + r(h),$$

ahonnan

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{x(t)+h\cdot x'(t) - x(t+h)}{h}\right\| = 0.$$

Ugyanakkor $x(t)$ egy alkalmas környezetében V Lipschitz-folytonos egy $L \geq 0$ Lipschitz-konstanssal, így tényleg

$$\left|\frac{V(x(t)+h\cdot x'(t)) - V(x(t+h))}{h}\right| \leq L\cdot\left\|\frac{x(t)+h\cdot x'(t) - x(t+h)}{h}\right\| \to 0,$$

midőn $h \to 0$. Másrészt minden $p \in \partial V(x(t))$ és $h \in \mathbb{R}$ esetén

$$\langle p, h\cdot x'(t)\rangle \leq V(x(t)+h\cdot x'(t)) - V(x(t)),$$

így minden elég kicsi $h > 0$ esetén

$$\begin{aligned}\langle p, x'(t)\rangle &\le \frac{V(x(t)+h\cdot x'(t))-V(x(t+h))}{h}\\ &= \frac{V(x(t+h)-V(x(t))}{h}+\frac{V(x(t)+h\cdot x'(t))-V(x(t+h))}{h}\\ &\to (V\circ x)'(t)+0\,,\end{aligned}$$

hacsak $h \to 0+$. Hasonlóan $h < 0$ esetén

$$\langle p, x'(t)\rangle \ge \frac{V(x(t)+h\cdot x'(t))-V(x(t+h))}{h} \to (V\circ x)'(t)+0\,,$$

midőn $h \to 0-$. Ezeket összevetve azt kapjuk, hogy

$$\langle p, x'(t)\rangle = (V\circ x)'(t)$$

minden $p \in \partial V(x(t))$ mellett, tehát

$$\langle \partial V(x(t)), x'(t)\rangle \subseteq \{(V\circ x)'(t)\}\,.$$

Ugyanakkor a baloldal nem üres, ami igazolja az állításunkat. ❑

Tekintsük ezután az

$$x'(t) \in F(x(t)) \tag{3}$$

differenciáltartalmazást, ahol $F : X \to \mathscr{P}(X)\setminus\{\emptyset\}$.

5. Tétel. *Ha egy $U \subset X$ halmazon*

$$\langle \partial V(x), F(x)\rangle \le 0\,, \tag{4}$$

(azaz minden $p \in \partial V(x)$ és $q \in f(x)$ esetén $\langle p, q\rangle \le 0$), akkor a (3) inklúzió U-ban fekvő trajektóriái mentén V monoton fogyó.

Bizonyítás: Legyen x egy olyan megoldása (3)-nak, amelyre minden $t \ge 0$ esetén $x(t) \in U$. Ekkor x és $V\circ x$ is abszolút folytonos. Tehát m.m. $t \ge 0$ pontban x is, $V\circ x$ is differenciálható. Így az előbbi tétel értelmében m.m. $t \ge 0$ pontban

$$\big\{(V\circ x)'(t)\big\} = \langle \partial V(x(t)), x'(t)\rangle \subset \langle \partial V(x(t)), F(x(t))\rangle \le 0\,,$$

azaz $(V\circ x)'(t) \le 0$, ezért

$$V(x(t)) - V(x(s)) = \int_s^t (V\circ x)'$$

alapján $V\circ x$ valóban monoton fogyó. ❑

Most pedig következzék egy a nem sima rendszerek stabilitására vonatkozó elégséges feltétel.

6. Tétel. *Legyen $x_0 \in X$ a V potenciálfüggvény egy zérushelye, továbbá $0 \in F(x_0)$, és tegyük fel, hogy az x_0 egy $\varepsilon_0 > 0$ sugarú környezetében fennáll a (4) feltétel. Ha minden $\varepsilon > 0$ mellett*

$$\inf_{\|x-x_0\|=\varepsilon} V(x) > 0\,,$$

akkor x_0 a (3) rendszer egy stabil egyensúlyi állapota.

Bizonyítás: Legyen $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ tetszőleges. Ekkor a feltételünk szerint van olyan $0 < \delta < \varepsilon$ szám, amelyre

$$\|x - x_0\| \le \delta \quad \text{esetén} \quad V(x) < \inf_{\|y-x_0\|=\varepsilon} V(y)\,.$$

Ha most x olyan megoldása a (3) rendszernek amelyre $\|x(0) - x_0\| \le \delta$, akkor minden $t \ge 0$ esetén

$$V(x(t)) \le V(x(0)) < \inf_{\|y-x_0\|=\varepsilon} V(y)\,,$$

hiszen $V \circ x$ monoton fogyó. Emiatt végig $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$, ami az állításunkat igazolja. ❑

1. Példa. Tekintsük az alábbi szintézis-rendszert:

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sgn} y \\ y' = -\operatorname{sgn} x \end{cases}.$$

Ekkor a $V(x,y) = |x| + |y|$ nem sima Ljapunov-függvénnyel, az egész síkon

$$\left\langle \partial V(x,y), \begin{bmatrix} \operatorname{sgn} y \\ -\operatorname{sgn} x \end{bmatrix} \right\rangle \equiv 0\,,$$

tehát $(x_0, y_0) = (0,0)$ egy stabil egyensúlyi állapot.

2. Példa. Tekintsük az alábbi nem sima rendszert

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \operatorname{sgn} x \end{cases}.$$

Ekkor a $(0,0)$ pont körül a $V(x,y) = x^2 + y^2$ egy sima Ljapunov-függvény, de a jobboldal nem folytonos, így a klasszikus eredmények nem alkalmazhatóak. A fenti eljárás azonban igen:

$$\left\langle \partial V(x,y), \begin{bmatrix} y \\ -x - \operatorname{sgn} x \end{bmatrix} \right\rangle = -|y| \le 0\,,$$

tehát $(x_0, y_0) = (0,0)$ a rendszer egy stabil egyensúlyi állapota.

Hivatkozások

Aubin, J., Cellina, A. (1984). *Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory*. Springer-Verlag, New York.

Bacciotti, A., Ceragioli, F. (2003). Nonsmooth optimal regulation and discontinuous stabilization. *Abstract and Applied Analysis*, 20:1159–1195.

Hirsch, M., Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Volume 3. Academic Press, New York.

Kánnai, Z., Tallos, P. (1998). Potential type inclusions. *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, 2:215–222.

Tallos, P., Kánnai, Z. (2003). Viable solutions to nonautonomous inclusions without convexity. *Central European Journal of Operations Research*, 11(1):47–55.

Gondolatok egy egyszeri, nagymértékű, de csak meghatározott körre kiterjedő adócsökkentés várható hatásairól

Szabó-Bakos Eszter

Kivonat
A tanulmányban egy reál-rigiditások széles körét tartalmazó dinamikus általános egyensúlyi modell segítségével vizsgáljuk a magasabb jövedelmi kategóriába tartozó gazdasági szereplők által realizált adócsökkenés hatásával kapcsolatos, szinte „rutinszerűen" hangoztatott álláspontok helyességét. A modell alapján az adókulcs egyszeri, nagymértékű csökkentése valóban az adóbevétel csökkenéséhez, illetve rövid távú GDP növekedéshez vezet, de nem erősíthető meg az az állítás, miszerint (i) önmagában ez az esemény szélesíti a társadalmi csoportok közötti különbségeket; (ii) a lépés hatására csak azok járnak jól, akiket a beavatkozás közvetlenül is érint; illetve (iii) az adókulcs csökkentése a „szegényebb rétegek" felé tolhatja a közteherviselés terhét.

1. Bevezetés, motiváció

Az állammal kapcsolatos elvárásunk az, hogy a lehető legtöbb súrlódást eliminálja a rendszerből, így nem meglepő, hogy gazdasági zavarok esetén határozott – és igen hangos – igény merül fel a gazdaságpolitikai beavatkozásra. A gazdaságpolitika két területe: a monetáris, és fiskális politika előtt álló feladat azonban nem képvisel azonos „nehézségi fokozatot". Míg a monetáris politika célja – elsődlegesen az árstabilitás biztosítása – viszonylag egyértelmű, az eszközök köre korlátos, és a monetáris politika hatásmechanizmusával kapcsolatos kutatások is tartalmaznak immár konszenzusosnak tekinthető következtetéseket, addig a fiskális politika területén ezek a jellemvonások ilyen tisztán nem azonosíthatók. A fiskális politika célja nem jól meghatározott, az eszközkészlet igen kiterjedt, és egy adott

Szabó-Bakos Eszter
Budapesti Corvinus Egyetem, Makroökonómia Tanszék, email: eszter.szabo@uni-corvinus.hu

eszköz felhasználása esetén a hatás várható iránya, nagysága, valamint időbeli alakulása sem annyira egyértelmű.[1]

A nyilvánvaló visszacsatolások hiánya, a hatás nagysága, valamint időbeli ütemezése körüli zavarok azt eredményezik, hogy akkor, ha egy gazdasági visszaesés esetén felmerül a költségek fiskális eszközökkel való enyhítése iránti igény, nincs olyan egyértelmű eszköz, amelyről biztosan állíthatnánk, hogy rövid távon hatásosan bevethető az aggregált kereslet további csökkenésének megakadályozása, és a gazdasági növekedés megindítása érdekében. A számos országspecifikus elem miatt még a „nemzetközi empirikus megfigyelések” sem sokat segítenek a rutinok kialakításában. Ami bevált az egyik országban, nem biztos, hogy eredményhez vezet egy másikban is.

A fentiek alapján nem meglepő az a vita, amely a „fizessenek-e a magasabb jövedelmű gazdasági szereplők több adót válság idején” kérdéskörrel kapcsolatban bontakozott ki az Egyesült Államokban, vagy ami a magyar egykulcsos jövedelemadó irányába tett lépések megítélését kíséri. Elméletileg a két probléma nem annyira különbözik egymástól. Az amerikai kérdésre adott „nem” mellett kardoskodók nagyjából ugyanolyan érveket hoznak fel álláspontjuk igazolására, mint amelyek magyarázhatják az egykulcsos jövedelemadó-rendszer (sarkítva: alacsonyabb adókulcs egy magasabb jövedelmi kategóriában) előnyeit. A magasabb jövedelemkategóriába tartozó gazdasági szereplőkre kivetett többletadó költséget okoz, mert:

(i) negatívan befolyásolhatja ezen gazdasági szereplők megtakarítását, erősítheti a hitelpiaci súrlódásokat, csökkentheti a beruházást, a tőkeállomány növekedését, így a GDP növekedési ütemét; valamint
(ii) csökkenti ezen gazdasági szereplők munkakínálatát, ami közvetlenül is hozzájárulhat a GDP növekedési ütemének visszaeséséhez.

Ezen költségek elkerülésének igénye – de főként a növekedési célok – indokolhatják a magasabb jövedelem-kategóriába tartozó gazdasági szereplők adókulcsának csökkentését is (a kvázi egykulcsos adót). A magasabb adókulcs mellett kiállók érvrendszerében az igazságosabb teherviselés felé való elmozdulás kívánatos volta, és a társadalmi rétegek közti szakadék csökkentésének igénye mellett az a gondolat is megjelenik, miszerint recesszió esetén a megnövekedett kormányzati kiadásokat valamiből finanszírozni kell, és miután a már amúgy is jelentős adósság további növelése nem kívánatos, olyan bevételi forrásra van szükség, amely a lehető legkisebb költséget okozza. Márpedig a magasabb jövedelemkategóriába tartozó gazdasági szereplőket nyilván kevésbé érinti jövedelmük egy részének elvonása, mint az alacsonyabb jövedelmi kategória tagjait.

[1] E bizonytalanságra kiváló példa lehet a kiadási multiplikátorokkal kapcsolatos igen kiterjedt elméleti, és empirikus irodalom által mutatott kép. Az elmúlt időszakban publikált néhány tanulmány (például Ilzetzki et al. (2010), ahol a szerzők az országspecifikus elemekre hívják fel a figyelmet, vagy Auerbach és Gorodnichenko (2011), ahol a multiplikátor prociklikusságát igazolják, esetleg Drautzburg és Uhlig (2011), ahol a szerzők hangsúlyozzák, hogy a rövid és hosszú távú multiplikátor-értékek jelentős mértékben eltérhetnek egymástól, és igen érzékenyen reagálnak a modell rugalmassági, és nominális-rigiditás fokát meghatározó paramétereire) elég hatásosan szemlélteti az egyértelmű álláspontok hiányát.

A fenti állítások helyességét kívánjuk egy gondolatkísérlet és számpélda segítésével ellenőrizni. Öt olyan kérdést vizsgálunk, amelyek egy egyszeri, nagymértékű, de csak bizonyos jövedelmi kategóriát képviselő társadalmi rétegre kiterjedő adócsökkentéssel kapcsolatosan felmerülhet:

(i) elképzelhető-e, hogy az adókulcs csökkentésének hatására legalább rövid távon növekszik az állami adóbevételek értéke;
(ii) igaz-e az, hogy az adócsökkentés hatására csak azok járnak jól, akiket az adócsökkentés közvetlenül érint;
(iii) igaz-e az, hogy az adócsökkentés szélesíti a társadalmi csoportok közötti különbséget;
(iv) lehet-e az adó csökkentésével magasabb növekedésre ösztönözni a gazdaságot, valamint
(v) igaz-e, hogy az adókulcs csökkentése a „szegényebb rétegek” felé torzítja a közteherviselés terhét?

A kérdések megválaszolására alkalmazott modellt Coenen et al. (2007) és Coenen et al. (2010) munkái inspirálták, de az alapstruktúrában némi változtatást azért eszközöltünk. Egyrészt egy előre látható permanens változás rövid, illetve hosszú távú hatásaira vagyunk kíváncsiak, így az általunk felvázolt rendszer nem lesz sztochasztikus. A nominális rigiditás ugyan lelassítaná az árak időbeli változását, és erőteljesebb, valamint perzisztensebb mennyiségi alkalmazkodásra késztetné a rendszert, de e változások közül nekünk csak a perzisztenciára lesz szükségünk, amit alkalmazkodási költségekkel illesztünk be a modellbe, így a nominális rigiditást, és a hozzá szükséges piaci szerkezeteket mellőzzük. Az adókulcsok módosítása helyettesítésekre ösztönzi a gazdasági szereplőt, így hangsúlyossá válik, hogy e helyettesítések milyen költségekkel járnak. A „szokásos” reál-rigiditásokon kívül még egy extra-rigiditást is a modellbe illesztünk. Scharle et al. (2010) dolgozata alapján azt gondoljuk, hogy az adóteher csökkentésének a magasabb jövedelmi kategóriákba tartozó gazdasági szereplők munkakínálatára gyakorolt hatása csekély, így e fogyasztói csoport munkakínálati döntését erőteljes alkalmazkodási költséggel terheljük.

A tanulmány felépítése a következő: a 2. fejezetben bemutatjuk a modellt, a 3. fejezetben ismertetjük a számítások eredményeit, végül a 4. fejezetben összefoglaljuk az eredményeket és vázoljuk a továbblépési irányokat.

2. A modell

A gazdaságot fogyasztók, vállalatok és az állam alkotja. Az államnak kizárólag fiskális politikai funkciót tulajdonítunk. Feltételezzük, hogy kiadásait alapvetően jövedelemtől függő adókból kívánja finanszírozni, de ha ez a forrás nem fedezi az adott periódusbeli költségeit, akkor eladósodhat. A fogyasztói szektoron belül két típusú gazdasági szereplőt különböztetünk meg: a hosszú távra tervező fogyasztót, illetve a rövidebb távra tervező fogyasztót. A két réteg közti fő különbséget a vagyoneszközök piacához, valamint a tőkepiachoz való hozzájutás képessége adja. Míg a hosszú távra tervező fogyasztó a vagyoneszközök piacán és a tőkepiacon olyan műveleteket hajthat végre, amelyek lehetővé teszik számára a fogyasztási kiadások intertemporális allokálását, addig a rövid távra tervező fogyasztónak nem áll rendelkezésére olyan eszköz, amelynek segítségével az egyes periódusok jövedelmeit időben átcsoportosíthatná. A reprezentatív vállalat tökéletesen versenyző piacon értékesíti termékeit, amelyeket tőke és munkaerő felhasználásával hoz létre.

Miután a modell segítségével azt vizsgáljuk, hogy egy nagy mértékű, a felső jövedelmi kategóriát érintő adókulcs-csökkentéssel növelhető-e rövid távon az adóbevétel, igaz-e az, hogy az adócsökkentés hatására csak azok járnak jól, akiket az adócsökkentés közvetlenül érint, igaz-e az, hogy az adócsökkentés szélesíti a társadalmi csoportok közötti különbséget, lehet-e az adó csökkentésével magasabb növekedésre ösztönözni a gazdaságot, valamint igaz-e, hogy az adókulcs csökkentése a „szegényebb rétegek” felé torzítja a közteherviselés terhét, ezért a modellbe számos reál-rigiditást illesztünk. A fogyasztóknak költséget okoz majd a munkakínálat, a beruházási szint változtatása, valamint az előző periódusbeli fogyasztási szinttől való elmozdulás.

A feltett kérdések két állandósult állapot közötti átmenet vizsgálatát igénylik, így a modell determinisztikus.

2.1. *Fogyasztói szektor*

A gazdaság fogyasztóinak számát egységnyire normáljuk, s feltételezzük, hogy a fogyasztói rétegen belül ω hosszú távra tervező fogyasztó és $1-\omega$ rövidebb távra tervező fogyasztó hoz döntéseket. A reprezentatív hosszú távra tervező fogyasztó saját döntési változóinak azon pályáját kívánja meghatározni, amelyik a megfelelő korlátok időbeli sorozata mellett maximalizálja a következő formában megadott életpálya-hasznosságot:

$$U_H = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(\frac{X_{t,H}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \Psi_H \frac{L_{t,H}^{1+\eta}}{1+\eta} \right) \tag{1}$$

ahol $L_{t,H}$ a hosszú távra tervező fogyasztó t-edik periódusbeli munkakínálata, $\beta > 0$, a türelmességi paraméter, $\sigma, \eta, \Psi_H > 0$, az ízlésvilágot jellemző paraméterek, és $X_{t,H} \equiv C_{t,H} - b_H C_{t-1,H}$ azt mutatja, hogy a fogyasztó hasznossága csak akkor növekszik, ha az adott periódusban képes az előző időszaki fogyasztás legalább b_H százalékának megfelelő fogyasztási cikket (C_H) vásárolni.

A fogyasztó abból szerez magának jövedelmet, hogy a rendelkezésére álló termelési tényezőket $(L_{t,H}, K_{t,H})$ megfelelő kompenzáció (bér és bérleti díj $-w_{t,H}, r_t^K$) mellett felkínálja a vállalatnak, megkapja a vállalat profitjának arányos hányadát $\left(\mathit{profit}_{t,H}\right)$ és korábban felhalmozott vagyona után is szert tesz bizonyos jövedelemre $((1+r_t)B_t)$. E forrásokat fogyasztásra, beruházásra $(I_{t,H})$, vagyoneszközei bővítésére $(B_{t+1,H})$, valamint adófizetési kötelezettsége teljesítésére fordítja. Feltételezzük továbbá, hogy a munkakínálat módosítása a fogyasztó számára költséget okoz, amely költség akkor is fennáll, ha a munkakínálat csökken (bizonytalanság, egzisztencia-csökkenés), és akkor is, ha a munkakínálat az előző periódushoz képest növekszik (állásváltoztatással, új munkakörrel kapcsolatos kényelmetlenség, bizonytalanság). A $\kappa/2\,(L_{t,H}/L_{t-1,H}-1)^2\,L_{t,H}$ formában felírt alkalmazkodási költségnek így meg kell jelennie a fogyasztó költségvetési korlátjának kiadási oldalán.

A t-edik periódusbeli költségvetési korlát a fentieknek megfelelően a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}(1-\tau_H)\,w_{t,H}L_{t,H}+(1-\tau_K)\,r_t^K K_{t,H}+\mathit{profit}_t+(1+r_t)\,B_t &=\\ =(1+\tau_C)\,C_{t,H}+I_t+B_{t+1}+\frac{\kappa}{2}\left(\frac{L_{t,H}}{L_{t-1,H}}-1\right)^2 L_{t,H}\end{aligned} \tag{2}$$

ahol τ_H, τ_K, és τ_C a munkajövedelemre, a tőkejövedelemre, és a fogyasztásra kivetett adó kulcsát jelölő exogén változók.

A gazdaság tőketényezői a hosszú távra tervező fogyasztó birtokában vannak, így azok pótlásáról, valamint bővítéséről neki kell gondoskodnia. A beruházás is alkalmazkodási költséggel terhelt, ha a gazdasági szereplő az előző periódusbeli szinthez képest módosítani akarja a beruházást, az számára többletterhet okoz. A tőketényező időbeli változására vonatkozó szabály ennek megfelelően

$$I_t\left(1-\frac{\kappa_3}{2}\left(\frac{I_{t,H}}{I_{t-1,H}}-1\right)^2\right)=K_{t+1,H}-(1-\delta)\,K_{t,H} \tag{3}$$

ahol $\delta > 0$ az amortizációs ráta, $\kappa_3 > 0$ pedig az alkalmazkodás sebességét szabályozó paraméter.

A hosszú távra tervező fogyasztó célja, hogy adott árak és exogén változók mellett meghatározza a fogyasztás, a munkakínálat, a tőkekínálat, a beruházás, és a vagyonfelhalmozás azon pályáját, amely a (2) és (3) korlátok, valamint a fogyasztói szokásokat jellemző definíció $X_{t,H} \equiv C_{t,H} - bC_{t-1,H}$, időbeli sorozata mellett biztosítja (1) maximumát.

A gazdasági szereplő problémájának megoldásaként a következő magatartási egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned}\Psi_H L_{t,H}^{\eta}\lambda_t^{-1} &= \frac{1}{1+r_{t+1}}\left(\frac{L_{t+1,H}}{L_{t,H}}\right)^2\kappa\left(\frac{L_{t+1,H}}{L_{t,H}}-1\right)+\\ &+\left((1-\tau_H)\,w_{t,H}-\frac{\kappa}{2}\left(\frac{L_{t,H}}{L_{t-1,H}}-1\right)^2-\frac{L_{t,H}}{L_{t-1,H}}\kappa\left(\frac{L_{t,H}}{L_{t-1,H}}-1\right)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

$$\lambda_t = \beta\lambda_{t+1}\,(1+r_{t+1}) \tag{5}$$

$$q_t = \frac{1}{1+r_{t+1}}\left((1-\tau_K)\, r^K_{t+1} + q_{t+1}\frac{(1-\delta)}{\beta}\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} q_{t+1}\kappa_3\left(\frac{I_{t+1,H}}{I_{t,H}}-1\right)\left(\frac{I_{t+1,H}}{I_{t,H}}\right)^2\frac{1}{1+r_{t+1}} =& \\ = 1 - q_t\left(1-\frac{\kappa_3}{2}\left(\frac{I_{t,H}}{I_{t-1,H}}-1\right)^2 - \kappa_3\left(\frac{I_{t,H}}{I_{t-1,H}}-1\right)\frac{I_{t,H}}{I_{t-1,H}}\right)& \end{aligned} \tag{7}$$

$$0 = -\beta X^{-\sigma}_{t+1,H} b_H - \lambda_t\,(1+\tau_C) + X^{-\sigma}_{t,H} \tag{8}$$

$$X_{t,H} = C_{t,H} - b_H C_{t-1,H} \tag{9}$$

valamint a (2) és (3) korlátok. A nyolc egyenlet időbeli sorozata megadja a $C_{t,H}$, $L_{t,H}$, $K_{t+1,H}$, $I_{t,H}$, B_{t+1}, $X_{t,H}$ változók és a két multiplikátor q_t, λ_t pályáját.

A reprezentatív rövidebb távra tervező fogyasztó problémája a hosszú távra tervező fogyasztó problémájától a vagyoneszközök piacához és a tőkepiachoz való hozzáférésben különbözik. A gazdasági szereplő nem halmozhat fel vagyont és nincs tőketényezője sem, így a t-edik periódusbeli költségvetési korlátja az

$$(1-\tau_R)\, w_{t,R} L_{t,R} + TR_{t,R} = (1+\tau_C)\, C_{t,R} + \frac{\kappa_2}{2}\left(\frac{L_{t,R}}{L_{t-1,R}}-1\right)^2 L_{t,R} \tag{10}$$

egyenlet segítségével adható meg. A költségvetési korlát felírásából láthatóan nem zárjuk ki annak lehetőségét, hogy a fogyasztó transzferjuttatásokat is realizálhasson.

A rövidebb távra tervező gazdasági szereplő adott árak és exogén változók mellett azon fogyasztási és munkakínálati pályák meghatározásában érdekelt, amelyek a (10) alakban felírt költségvetési korlátok időbeli sorozata mellett maximalizálják a következő célfüggvényt:

$$U_R = \sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}\left(\frac{X^{1-\sigma}_{t,R}}{1-\sigma} - \Psi_R\frac{L^{1+\eta}_{t,R}}{1+\eta}\right),$$

ahol

$$X_{t,R} \equiv C_{t,R} - b_R C_{t-1,R}\,. \tag{11}$$

A fogyasztó problémájának megoldásából adódó magatartási egyenletek

$$\begin{aligned} \Psi_R L^{\eta}_{t,R} = \beta\vartheta_{t+1}\kappa_2\left(\frac{L_{t+1,R}}{L_{t,R}}-1\right)\left(\frac{L_{t+1,R}}{L_{t,R}}\right)^2 +& \\ +\vartheta_t\left((1-\tau_R)\, w_{t,R} - \frac{\kappa_2}{2}\left(\frac{L_{t,R}}{L_{t-1,R}}-1\right)^2 - \kappa_2\left(\frac{L_{t,R}}{L_{t-1,R}}-1\right)\frac{L_{t,R}}{L_{t-1,R}}\right)& \end{aligned} \tag{12}$$

$$-\beta X_{t+1,R}^{-\sigma} b_R - \vartheta_t (1+\tau_C) + X_{t,R}^{-\sigma} = 0 \tag{13}$$

$$(1-\tau_R)\, w_{t,R} L_{t,R} + TR_{t,R} = (1+\tau_C)\, C_{t,R} + \frac{\kappa_2}{2}\left(\frac{L_{t,R}}{L_{t-1,R}} - 1\right)^2 L_{t,R}\,. \tag{14}$$

E három egyenlet időbeli sorozata az $X_{t,R} \equiv C_{t,R} - b_R C_{t-1,R}$ definícióval kiegészülve meghatározza a $C_{t,R}, L_{t,R}, X_{t,R}$ változók, és a ϑ_t multiplikátor pályáját.

2.2. *Vállalati szektor*

A reprezentatív vállalat tökéletesen versenyző piacon próbálja értékesíteni termékeit, amelyet az

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_{t,HO}^{1-\alpha-\gamma} L_{t,RO}^{\gamma} \tag{15}$$

alakban felírható technológiával állít elő tökéletesen versenyző munka-, illetve tőkepiacon beszerzett termelési tényezők segítségével. Célja, hogy adott árak és exogén változók mellett meghatározza azokat a termelési tényező-, valamint output szinteket, amelyek a (15) feltétel mellett a maximális profitot biztosítják. A probléma megoldásához tartózó elsőrendű feltételek:

$$w_{t,H} = (1-\alpha-\gamma)\,\frac{Y_t}{L_{t,HO}} \tag{16}$$

$$w_{t,R} = \gamma \frac{Y_t}{L_{t,RO}} \tag{17}$$

$$r_t^K = \alpha \frac{Y_t}{K_t}\,. \tag{18}$$

E három egyenlet a (15)-tel kiegészülve adja azokat a magatartási egyenleteket, amelyek alapján a reprezentatív vállalat kijelölheti a számára optimális $L_{t,HO}$, $L_{t,RO}$, K_t és Y_t értékeket.

2.3. *Állam*

Az állam minden periódusban G_t nagyságú, exogén módon megadott keresletet támaszt a termékek és szolgáltatások iránt, illetve lehetősége van arra is, hogy $TR_{t,R}$ nagyságú transzferrel támogassa a rövidebb távra tervező háztartásokat. Kiadásait elsősorban adóbevételekből finanszírozza, a munkajövedelmet τ_H, illetve τ_R mértékű adóval terheli attól függően, hogy az adóalap a relatíve magas jövedelemmel rendelkező hosszú távra tervező fogyasztónál, vagy az alacsonyabb jövedelmi kategóriába sorolt rövidebb távra tervező fogyasztónál keletkezett, a tőkéből származó bevételek τ_K hányada áramlik a költségvetésbe, végül a fogyasztási kiadásokat τ_C kulccsal adóztatja. Bevételei bővítése érdekében az állam kölcsönt is felvehet (D_{t+1}), az előző periódusban felvett kölcsönök után azonban kamatot kell fizetnie.

A fentieknek megfelelően az állam t-edik periódusbeli költségvetési korlátja a következő alakot ölti:

$$G_t + TR_{t,H} + (1+r_t)\,D_t = \tau_H w_{t,H}\,\omega L_{t,H} + \tau_R w_{t,r}\,(1-\omega)\,L_{t,R} + \tau_K r_t^K\,\omega K_{t,H} + \\ + \tau_C\,\omega C_{t,H} + \tau_C\,(1-\omega)\,C_{t,R} + D_{t+1}\ . \tag{19}$$

2.4. *Piaci egyensúlyi feltételek*

A modellben a tranzakciók négy piacon zajlanak. Az árupiacon akkor alakul ki az egyensúly, amikor a vállalat által megtermelt termékek teljes mértékben felhasználásra kerülnek. Feltételezésünk szerint a termékek iránt a két fogyasztói típus támaszt fogyasztási keresletet, a hosszú távra tervező fogyasztók a tőkeállomány bővítésére, és pótlására is felhasználják, mindkét szektor fedezhet belőle alkalmazkodási költséget, s végül az állami kiadások is a termékek iránti keresletként jelennek meg a modellben. Az egyensúlyi feltétel a t-edik periódusban az

$$Y_t = \omega C_{t,H} + (1-\omega)\,C_{t,R} + \omega I_{t,H} + \omega\frac{\kappa}{2}\left(\frac{L_{t,H}}{L_{t-1,H}} - 1\right)^2 L_{t,H} + \\ + (1-\omega)\,\frac{\kappa_2}{2}\left(\frac{L_{t,R}}{L_{t-1,R}} - 1\right)^2 L_{t,R} + G_t \tag{20}$$

alakban adható meg.

A termelési tényezők piacán is egyensúly van, azaz olyan árak fognak kialakulni, amelyek mellett a vállalat pontosan annyi termelési tényezőt kíván felhasználni, amennyit a teljes fogyasztói szektor fel kíván ajánlani. Formálisan

$$L_{t,HO} = \omega L_{t,H} \tag{21}$$

$$L_{t,RO} = (1-\omega)\,L_{t,R} \tag{22}$$

$$K_t = \omega K_{t,H}\ . \tag{23}$$

Végül a vagyoneszközök piacán is egyensúlynak kell lennie, azaz az állam által felkínált adósságnak meg kell egyeznie a megtakarítani képes fogyasztók teljes megtakarításával

$$D_{t+1} = \omega B_{t+1}\ . \tag{24}$$

2.5. A modell formálisan

A modellt formálisan a (4) – (9), (3), (11) – (14), (15) – (18), (19), (20) – (24) egyenletek alkotják, amelyek segítségével meghatározható a következő 21 változó pályája: Y_t, $C_{t,H}$, $C_{t,R}$, $L_{t,H}$, $L_{t,R}$, $L_{t,HO}$, $L_{t,RO}$, $w_{t,H}$, $w_{t,R}$, $K_{t+1,H}$, K_t, r_t^K, $I_{t,H}$, B_{t+1}, D_{t+1}, $X_{t,H}$, $X_{t,R}$, q_t, λ_t, ϑ_t és $1+r_{t+1}$.

2.6. Kalibrálás

A modell paramétereit három csoportba osztjuk. Az első kategóriába kerülő paramétereket az „irodalomban szokásos" (lásd például Schmitt-Grohe és Martin (2007); Baksa et al. (2010)) szinten tartjuk, a második kategóriába azokat a paramétereket soroljuk, amelyek bizonyos endogén változók megfelelő állandósult állapotbeli szintjét biztosítják (érdemes észrevenni, hogy állandósult állapotban nincs igazodási költség), és végül a harmadik csoportba kerülnek az alkalmazkodás sebességét befolyásoló paraméterek, valamint a fogyasztói típusok részarányát rögzítő paraméter, azok a tényezők, amelyeket a későbbiekben az eredmények robosztusságát vizsgálva változtatni kívánunk.

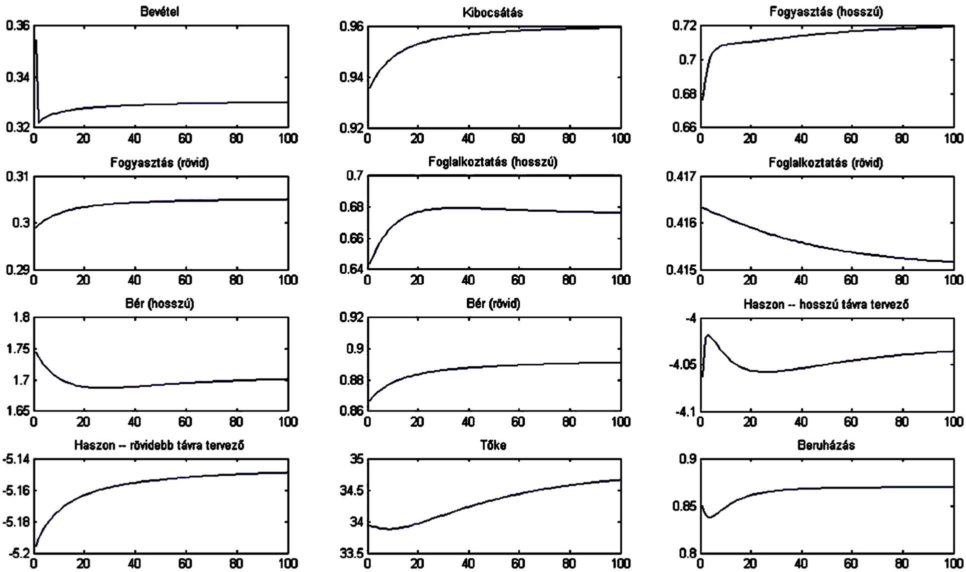
1. kategória		2. kategória		3. kategória	
paraméter	érték	paraméter	érték	paraméter	érték
β	$0,98$	α	0,4	κ	120
δ	$0,025$	γ	0,3	κ_2	8
σ	$1,5$	Ψ_H	3	κ_3	4,8
η	$0,76$	Ψ_R	8	ω	0,3
				b_H	0,45
				b_R	0,25

1. táblázat. Paraméterek értékadása

Az exogén fiskális politikai változókat úgy határoztuk meg, hogy az egyrészt „reális" legyen – az egyes bérkategóriák adóterhe, vagy a kormányzati kiadások GDP-hez viszonyított aránya megfigyelhető változó –, másrészt az adott exogén változók mellett a gazdaság állandósult állapotban szinten tudja tartani a GDP-hez viszonyított 80 százalékos adósságát. A feltételeknek megfelelő adókulcs, és kiadási szerkezet a modellben $\tau_H = 0,4$, $\tau_R = 0,2$, $\tau_C = 0,2$, $\tau_K = 0,1$, valamint $G_t = 0,268$ (ismét érdemes hangsúlyozni, hogy a tanulmány ebben az állapotban csupán egy „számításokkal megerősített gondolatkísérlet").

3. Eredmények

Első lépésként azt vizsgáljuk meg, mi történik az állami bevétellel, a gazdaság kibocsátásával, illetve a rövid, valamint a hosszabb távra tervező fogyasztó fogyasztásával, munkakínálatával, valamint reálbérével, ha az állam egyszeri, nagy mértékű adócsökkentést hajt végre, és a magasabb bérkategóriában mozgó fogyasztónál az eddigi 40 százalékos átlagos adókulcsot 30 százalékra csökkenti. Az eredményeket az 1. ábra mutatja.



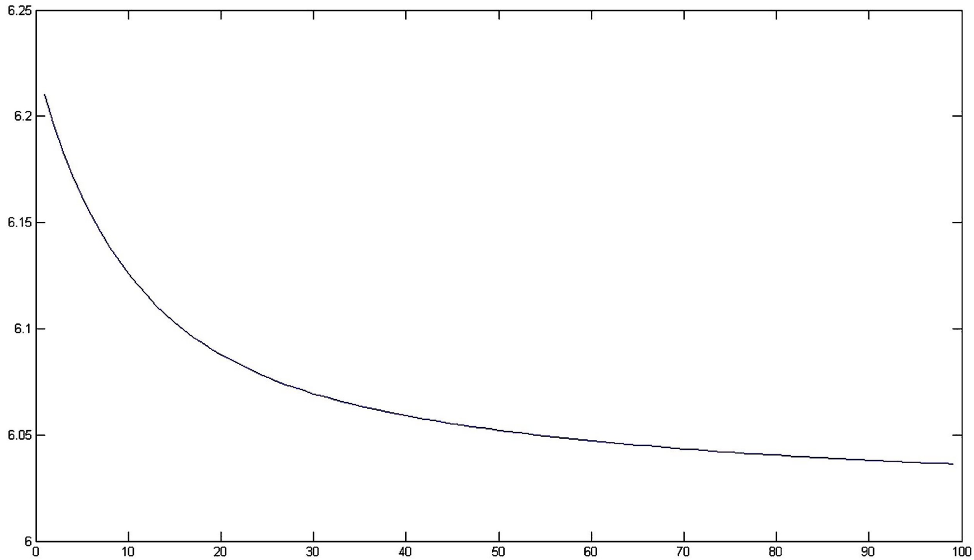
1. ábra. A hosszú távra tervező fogyasztó adókulcsának $\tau_H = 0,4$-ről $\tau_H = 0,3$-ra való csökkentésének hatása az endogén változókra.

Az adókulcs csökkentése növeli a hosszú távra tervező fogyasztó munkából származó jövedelmét, s ez a szabadidő és a fogyasztás relatív határhasznának változása miatt magasabb munkakínálat elérésére ösztönözi a gazdasági szereplőt. A munkapiac tökéletesen versenyző, így az előbbi változás egyrészt arra készteti a vállalati szektort, hogy alacsonyabb bért fizessen a hosszú távra tervező fogyasztónak, másrészt arra, hogy a relatíve drágábbá vált rövidebb távra tervező fogyasztót a másik típusú munkaerővel helyettesítse. A jövedelem-növekedés mindkét csoport számára lehetővé tette a fogyasztás növelését. A kereslet emelkedésének köszönhetően a gazdaság kibocsátása is növekedett. Az ábrából ez ugyan nem olvasható le, de a számítások alapján már az első periódusban lehet némi GDP emelkedésre számítani (bár ennek mértéke elenyésző, 0,23 százalék), az új állandósult állapotbeli jövedelem pedig 2,62 százalékkal lesz magasabb, mint az eredeti egyensúlyi állapot jövedelmi szintje. Az alkalmazkodási költségek miatt a beruházás szintje kezdetben csökken, és csak hosszabb alkalmazkodási periódus után éri el az új állandósult állapotbeli értéket.

Érdemes még megjegyezni, hogy mind a hosszú távra tervező fogyasztót, mind a rövidebb távra tervező fogyasztót pozitívan érinti az adókulcs csökkentése. A rövidebb távra tervező gazdasági szereplőnél e következmény egyértelmű, a számára hasznos két tényező – a fogyasztás és a szabadidő – időben folyamatosan növekszik, míg a hosszú távra tervező gazdasági szereplő esetében a jelentős költségek miatt elhúzódó munkapiaci alkalmazkodás a hasznosság alakulásában dominánssá teszi a fogyasztás változásának hatását.

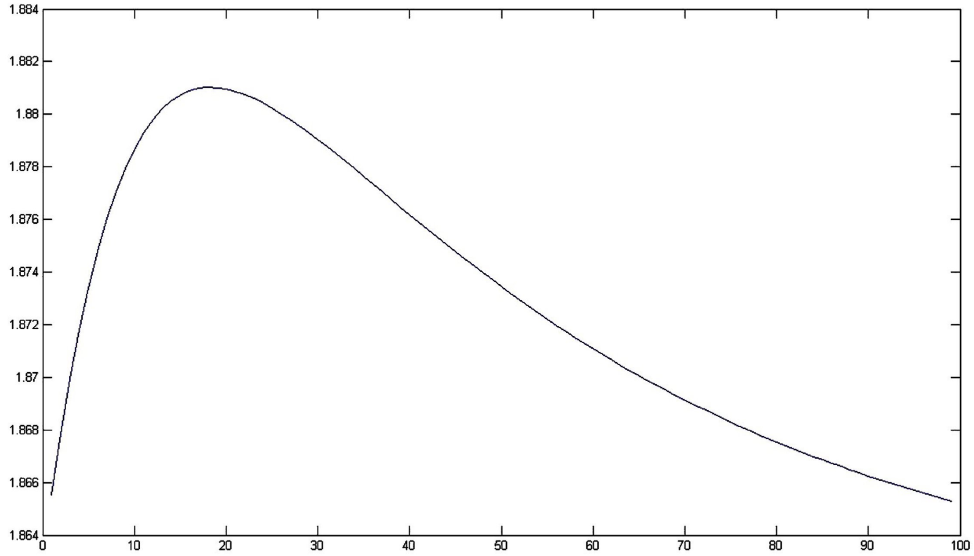
Az állami adóbevétel értéke azonban csökken. Miután a kiadások értékét exogén változónak tekintettük, ez azt is jelenti, hogy az állam az átmeneti pálya mentén folyamatosan növeli a hosszú távra tervező fogyasztóval szemben fennálló adósságának állományát. Az egyszeri, nagy mértékű adókulcs-csökkentés tehát önmagában nem csökkenti az állam adósság-állományát.

A hosszú távra tervező fogyasztó, és a rövidebb távra tervező gazdasági szereplő állami kiadások finanszírozásához való hozzájárulásának időbeli alakulásáról ad képet a 2. ábra.



2. ábra. A hosszú-, illetve a rövidebb távra tervező fogyasztói csoport állami kiadások finanszírozásához való hozzájárulásának egymáshoz viszonyított aránya.

A magasabb jövedelmi kategóriát képviselő fogyasztói réteg munkából származó jövedelmére kivetett adókulcs csökkentése tehát valóban a „szegényebb rétegek” felé torzítja a közteherviselés terhét, de ebből a teherből az átlagos hosszú távra tervező fogyasztó még mindig az átlagos rövidebb távra tervező fogyasztó hozzájárulásának kicsivel több, mint hatszorosát viseli. Némileg árnyaltabb a kép, ha a gazdasági szereplők költségvetési hozzájárulásának mértékét az adott gazdasági szereplő jövedelmével korrigáljuk (lásd 3. ábra).



3. ábra. A hosszú-, és a rövidebb távra tervező fogyasztói csoport átlagos tagjának közösségi kiadások finanszírozásában vállalt szerepe egymáshoz viszonyítva, és az adott gazdasági szereplő jövedelmével korrigálva.

A hosszú távra tervező fogyasztó jövedelmének nagyobb hányadát fordítja közkiadások finanszírozására, mint a másik gazdasági szereplő, és e teher rövid távon annak ellenére növekszik, hogy a hosszú távra tervező fogyasztó jövedelemadó-kulcsát jelentős mértékben csökkentettük.

A fenti számítások alapján az adott feltételek mellett nem erősíthető meg az az állítás, hogy az adókulcs-csökkentés kizárólag annak a társadalmi csoportnak okoz hasznot, amelylyel közvetlen kapcsolatban van. Nem erősíthető meg az az állítás sem, hogy az alkalmazott gazdaságpolitikai lépés növeli a két társadalmi szektor közti – bérben mért – különbséget. Az adócsökkentés nem növeli az adóbevételeket, viszont rövid távon pozitívan módosítja a GDP növekedési ütemét (bár ez a növekedés a pálya mentén alacsony szintű, és az is megállapítható, hogy az adócsökkentés önmagában nem elegendő a tartós növekedés biztosításához). Abszolút értékben növekedett a rövidebb távra tervező gazdasági szereplők költségvetési kiadásokhoz való hozzájárulásának relatív terhe, de a jövedelemmel korrigálva már kiderül, hogy a hosszú távra tervező gazdasági szereplő a jövedelmének nagyobb hányadát fordítja a közösségi kiadások finanszírozására.

4. Összegzés

Jelen tanulmány egy „számpéldával megerősített gondolatkísérlet”, ahol egy dinamikus általános egyensúlyi modellen keresztül azt a kérdést vizsgáltuk, hogy vajon igaznak bizonyulnak-e az egykulcsos jövedelemadó felé való elmozdulással kapcsolatos rutinszerűen hangoztatott állítások, miszerint:

(i) a társadalom egy jól meghatározott hányadát érintő adókulcs csökkentésének hatására csökken az állami adóbevételek értéke;
(ii) az adócsökkentés hatására csak azok járnak jól, akiket az adócsökkentés közvetlenül érint;
(iii) az adócsökkentés szélesíti a társadalmi csoportok közötti különbséget;
(iv) az adó csökkentésével magasabb növekedésre lehet ösztönözni a gazdaságot; valamint
(v) az adókulcs csökkentése a „szegényebb rétegek” felé torzítja a közteherviselés terhét.

Az elvégzett számításokból kiderült, hogy a hosszú távra tervező – azaz a vagyoneszközök piacán és a tőkepiacon aktív tranzakciókat bonyolító – fogyasztó munkajövedelmét terhelő adó mértékének csökkentése valóban – és minden elképzelhető reál-rigiditási fok mellett – csökkenti az adóbevételek értékét, de ideiglenesen képes némi GDP növekedést indukálni. Ez utóbbi hatás azonban nem tartós, azaz az adócsökkentés önmagában egy gazdaság növekedési ütemének módosítására nem alkalmas. Eredményeink alapján nem erősíthető meg az az állítás, miszerint az adócsökkentés szélesíti a társadalmi csoportok közötti különbséget – a gazdaságpolitikai beavatkozás közvetlen kedvezményezettjének reálbére a másik csoport reálbéréhez képest nem növekedett –, sem az az állítás, miszerint az adócsökkentés hatására csak azok járnak jól, akiket a lépés közvetlenül érint – a magasabb jövedelem miatti kereslet-növekedés a vállalati szektort a rövidebb távra tervező fogyasztó munkája iránti erőteljesebb keresletre, és magasabb bér kifizetésére ösztönzi. Abszolút értékben valóban azt tapasztaltuk, hogy a magasabb jövedelemmel rendelkező átlagos gazdasági szereplő hozzájárulása a közösségi kiadásokhoz az alacsonyabb bérszintet elérő átlagos fogyasztóhoz képest csökken, de az abszolút értékeket a teljes jövedelem alakulásával korrigálva már nem állítható, hogy az adókulcs csökkentése a „szegényebb rétegek” felé torzítja a közteherviselés terhét.

A fenti tanulmány mindaddig gondolatkísérlet marad, amíg a kalibrálás a tanulmányban alkalmazott javarészt ad-hoc elven alapul, illetve a konkrét gazdaságpolitikai lépés eredményeinek utólagos megítélését árnyaló események a modellbe nem kerülnek.

Hivatkozások

Auerbach, A. J., Gorodnichenko, Y. (2011). Fiscal multipliers in recession and expansion. *NBER Working Paper Series*, WP No 17447.

Baksa D., Békesi L., Jakab Z., Soós G. D. (2010). Személyi jövedelemadó változás értékelése egy többszereplős DSGE-modell keretben. *Költségvetési Tanács Titkársága, műhelytanulmány*.

Coenen, G., Erceg, C., Freedman, C., Furceri, D., Kumhof, M., Lalonde, R., Laxton, D., Lindé, J., Mourougane, A., Muir, D., Mursula, S., de Resende, C., Roberts, J., Roeger, W., Snudden, S., Trabandt, M., Veld, J. (2010). Effects of fiscal stimulus in structural models. *IMF Working Paper Series*, WP No 1073.

Coenen, G., McAdam, P., Straub, R. (2007). Tax reform and labour-market performance in the euro area – a simulation-based analysis using the new area-wide model. *ECB Working Paper Series*, WP No 747.

Drautzburg, T., Uhlig, H. (2011). Fiscal stimulus and distortionary taxation. *NBER Working Paper Series*, WP No 17111.

Ilzetzki, E., Mendoza, E. G., Végh, C. A. (2010). How big (small?) are fiscal multipliers? *NBER Working Paper Series*, WP No 16479.

Scharle Á., Benczúr P., Kátay G., Váradi B. (2010). Hogyan növelhető az adórendszer hatékonysága? *MNB Műhelytanulmányok*, No 88.

Schmitt-Grohe, S., Martin, U. (2007). Optimal inflation stabilization in a medium-scale macroeconomic model. In: Schmidt-Hebbel, K., Mishkin, R. (szerk.) *Monetary Policy Under Inflation Targeting*, Central Bank of Chile, Santiago, Chile, pp. 125–186.

A hatékonyság növekedéséből eredő haszon megosztásának mértéke

Vörös József

Kivonat
Látszólag ésszerűnek tűnik, hogy egy véges időhorizont elején intenzív fejlesztéseket végezzünk, hiszen az időszak eleji fejlesztések haszna ekkor tovább hasznosítható. Ebből következően a fejlesztési tevékenységek dinamikájának időben csökkenőnek kellene lenni. Analízisünk először meghatározza azokat a feltételeket, amelyek esetén egyáltalán beszélhetünk pozitív szintű fejlesztési aktivitásról, majd ezek fennállása esetén azt vizsgáljuk, hogy a fejlesztési erőfeszítések okán bekövetkezett hatékonyságnövelésből eredő haszonnak mi legyen a sorsa. Arra a következtetésre jutunk, hogy a termelési hatékonyságból eredő hasznot lineáris keresleti függvény esetén fele-fele arányban meg kell osztani a termelő és a fogyasztó között. Exponenciális keresleti függvény esetén viszont a termelési költségek megtakarításából eredő hasznot a fogyasztóknak teljes mértékben át kell engedni.

1. Bevezetés

Bár nem új keletű, mégis a folyamatos tökéletesítés és fejlesztés a mai üzleti világban továbbra is meghatározó tényezőnek tűnik. Nem is olyan régen, amikor Watanabe urat, a Toyota Motor Corporation elnökét arról kérdezték, hogy a Toyota útnak mi a lényege, a folyamatos tökéletesítés elvét a Toyota termelési rendszer két pillére közül az egyik legfontosabbnak tartotta (Watanabe, 2007). A Toyota termelési rendszer elveinek alkalmazása számos iparágat forradalmasított a légiközlekedéstől az étteremláncokig, továbbá az autógyártó iparban is olyan cégek alkalmazzák az eljárást, mint a Porsche vagy a VW (Fear és Knoop, 2007).

Vörös József
Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar, email: voros@ktk.pte.hu

A folyamatfejlesztés modellezése nem újkeletű, viszont ma is népszerű kutatási terület. Különösen Fine (1986) úttörő kezdeményezése nyomán, vagy ha a kezdeti folytatást követjük Dorroh et al. (1994) munkái nyomán, akik olyan modellt fejlesztettek ki, amellyel meg lehetett határozni az erőforrások mértékét, amit a tudás akvizíciójára kell fordítani. Chand et al. (1996) olyan dinamikus, irányításelmélethez tartozó modellt mutattak be, amellyel a folyamatos fejlesztés hatását lehetett vizsgálni. Azt vizsgálták, hogy profitmaximálás céljából a kapacitások milyen hányadát kell termelésre, illetve fejlesztésre fordítani. Ők már bevezették a termelékenységi tudás fogalmát, ami fejlesztési tevékenységek végzése árán növelhető. Li és Rajagopalan (1998) tanulmánya a minőségbiztosítási tevékenység intenzitását is vizsgálta, és mind a termelékenységi, mind a minőségi tudás növelhető volt fejlesztési tevékenységek végzése által. E tanulmányok mindegyike hangsúlyozta a korai fejlesztések jelentőségét. Ezt az a hit táplálja, hogy ebben az esetben a korai fejlesztések hatása sokáig él, következésképpen a fejlesztési tevékenységek dinamikája az idő szerint csökkenő mintát kell eredményezzen. Bár e tanulmánynak nem célja a dinamika vizsgálata, érdekességként jegyezzük meg, hogy a tanulmány végén bemutatott numerikus példa éppen ennek az ellenkezőjét bizonyítja. Meg kell jegyezni, hogy már Carrillo és Gaimon (2000) azonosított olyan eseteket, amikor a feltevés nem igazolódik, azonban modelljükben eléggé kivételes feltevéssel éltek. Azt állították ugyanis, hogy új technológia alkalmazása esetén a termelékenységi tudás átmenetileg csökkenhet. Később, ugyancsak Carrillo és Gaimon (2004), definiálnak két modellt is, amelyekben a teljesítmények függnek a folyamatfejlesztés intenzitásától.

Érdemes megjegyezni, hogy az összes fent megnevezett modell irányításelméleti eszközöket használ, vagyis olyan modelleket tárgyalnak a tanulmányok, ahol a döntési változók az idő folytonos függvényei. A módszer ugyan attraktív, de kezelési nehézsége szinte maga után vonta azt, hogy a szerzők éppen nem tudják kihasználni a dinamikus modellek igen nagy előnyét. Nevezetesen azt, hogy abban a paraméterek is az idő függvényei. Ennek elmulasztása pedig számos gazdasági összefüggés felismerését nehezíti meg.

Így vizsgálatunk eszköze egy olyan modell létrehozása, amely az időhorizontot periódusokra osztja. A folyamatfejlesztés területén nem sok ilyen típusú modell ismert. Nemrégiben Bernstein és Kök (2009) definiáltak egy hasonló modellt, amelyben a fejlesztési tevékenységek központi szerepet játszanak. Többek között megmutatják, hogy Stackelberg-féle versenyt feltételezve, bizonyos feltételek mellett egyensúlyi állapot mindig létezik. Egy algoritmust is közreadnak, amely lineáris keresleti és fejlesztési költségfüggvény esetén megadja a termelékenységi tudásba történő beruházás mértékét. Vörös (2011) megmutatja, hogy ha a keresleti függvény paraméterei az időtől függetlenek, akkor ezek a fejlesztési aktivitások mindig zérus szinten állnak, legfeljebb az első periódus kivételével.

Jelen tanulmány célja annak vizsgálata, hogy ha a vállalatnál folyamatfejlesztés történik, és ennek eredményeként a termelési hatékonyság növekszik, akkor mi legyen az ebből eredő haszon sorsa? Mielőtt a hasznon osztozni lehetne, meg kell állapítani, hogy a folyamat fejlődésének mik a feltételei, melyek azok a körülmények, amelyek a folyamatok fejlesztésére ösztönzik a döntéshozókat? A következő fejezet egy általános modellt fogalmaz meg, a 3. fejezet a kifejlesztett általános modellt specifikálja arra az esetre, amikor a keresleti függvény lineáris, a fajlagos változó költség függvény pedig hiperbolikus. A 4. fejezet az exponenciális keresleti függvény melletti hatásokat vizsgálja, a fajlagos termelési költségfüggvényre pedig csak enyhe megszorításokat tesz. Az 5. fejezet összefoglalja az eredményeket és javaslatokat tesz néhány továbbfejlesztési lehetőségre.

2. Többperiódusos fejlesztési modellek létrehozása

E fejezetben egy nagyon általános modellt fogalmazunk meg, a későbbiekben pedig ezen általános modell egyes függvényeit specifikáljuk annak érdekében, hogy lássuk betöltött szerepüket. A modell megfogalmazásához elsőként azt tételezzük fel, hogy vállalkozásunk olyan szolgáltatást/terméket nyújt, ami a piacon egyedi vonásokkal rendelkezik, és e tulajdonság nem másolható, helyettesíthető, vagy imitálható könnyen. A termék teljesítményét a fogyasztók elismerik, és vásárlási szokásaikkal ezt bizonyítják. A termék egyedi jellege monopolisztikus viselkedést enged meg, ezért feltételezhetjük, hogy a termék keresletének volumene a t-edik periódusban egy $D^t(p_t)$ típusú függvénnyel leírható, ahol p_t az ár nagysága a t-edik periódusban. Ennek nyomán a tervezési időszakot T periódusra osztjuk fel, és $t = 1,2,\ldots,T$. A termékenkénti változó költséget a $c(q_t)$ kifejezés jelöli a t-edik periódusban, ahol q_t a felhalmozódott termelékenységi tudást méri a t-edik periódusban. A felhalmozott termelékenységi tudás minden periódusban növelhető az erre irányuló aktivitások intenzitásának függvényében. Modern termelési rendszerekben megfigyelhető, hogy a munkahelyen eltöltött idő általában két komponensből áll, az egyik rész a tényleges termelésre fordítódik, a másik részben pedig a folyamatok tökéletesítésére koncentrálnak (lásd például a fent említett Toyota termelési rendszert). A termelési folyamatok tökéletesítésére koncentráló aktivitás nagyságát a t-edik periódusban az y_t változó fogja mérni, amelynek költségét a t-edik periódusban az $f(y_t)$ függvény jelöli. Azt is feltételezzük, hogy a tervezési időszak végén, a T-edik periódus után, a felhalmozott termelékenységi tudást el lehet adni, vagy az új termékcsalád termelésében hasznosítani lehet. A termelékenységi tudás egy egységét P áron lehet eladni. Megjegyezzük, hogy Li és Rajagopalan (1998) az elsők között voltak, akik modelljükben már felhasználták a felgyülemlett termelékenységi tudás eladásának lehetőségét.

Az alapmodellt tehát az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$\max_{p_t,y_t} \sum_{t=1}^{T} \left[(p_t - c(q_t)) D^t(p_t) - f(y_t) \right] \delta^t + [P q_T] \delta^T \tag{1a}$$

Feltéve, hogy valamennyi t-re

$$q_t = q_{t-1} + a y_t \tag{1b}$$

$$p_t, y_t \geq 0. \tag{1c}$$

ahol:

T = a periódusok száma,
t = a periódus indexe, $t \in [1, T]$,
p_t = egységnyi termék eladási ára a t-edik periódusban, döntési változó,
q_t = a felhalmozódott termelékenységi tudás mértéke a t-edik periódusban, függő változó, ahol az örökölt termelékenységi tudást a q_0 mutatja,
y_t = a folyamatfejlesztési erőfeszítések mértéke a t-edik periódusban, döntési változó,
$f(y_t)$ = a folyamatfejlesztési tevékenységek költsége a t-edik periódusban,
$c(q_t)$ = a fajlagos változó költségfüggvény a t-edik periódusban,
$D^t(p)$= a kereslet volumene a t-edik periódusban, amikor az eladási ár p. Megjegyezzük, a termelés volumene és a kereslet nagysága egybeesik.
P = egységnyi termelékenységi tudás eladási ára a tervhorizont végén, input paraméter (gyakran nevezik a pénzügyi irodalomban megmentett értéknek),
δ = $1/(1+r)$, ahol r a diszkont ráta, és
a = pozitív paraméter.

Az (1) modell azt az egyszerű tényt foglalja össze, hogy a periódusonkénti bruttó profit a termékenkénti bruttó profit (az eladási ár és a fajlagos változó termelési költség különbsége) és az eladott mennyiség szorzata. Ezt csökkenti a fejlesztésekre (beruházásokra) fordított összeg. A periódusonként megtermelt tiszta jövedelmet jelenértékre diszkontáljuk, és e jövedelemhez rakódik a tervhorizont végén eladott felgyülemlett tudás utáni hozam diszkontált jelenértéke. A feltételrendszer azt fogalmazza meg, hogy egy adott periódusban rendelkezésre álló termelékenységi tudás az előző periódusból örökölt szintből és a fejlesztés révén nyert emelkedésből tevődik össze. Ez az összefüggés lineáris és a tevékenység függvényében növekvő. Az utóbbi feltevéssel a legtöbb irodalmi forrás egyetért, azonban Carrillo és Gaimon (2000) arról értekeznek, hogy új technológia alkalmazása esetén átmenetileg ez az összefüggés csökkenő viszonyú is lehet. Vagyis ideiglenesen a növekvő fejlesztési erőfeszítések csökkenthetik a termelékenységi tudást.

3. A termelési hatékonyság növekedéséből származó haszon megosztásának mértéke lineáris keresleti függvény esetén

Elsőként egy olyan esetet vizsgálunk, amely az (1) alatt kifejlesztett modellnek speciális esete. A keresleti függvényről azt tételezzük fel, hogy az leírható a $D^t(p_t) = \alpha - \gamma p_t$ formában, vagyis a keresleti függvény paraméterei az időtől függetlenek. E feltevéssel ki akarjuk szűrni a konjunkturális hatásokat, amik befolyásolhatják a megfogalmazott feladat tisztán látását. Az itt megfogalmazott problémának egy további kiterjesztése lehet, amikor a keresleti függvény paraméterei az időtől is függnek, és azt vizsgáljuk, hogy a konjunkturális hatások miként befolyásolják a hatékonyságból eredő jövedelem felosztását a termelő és fogyasztó között. Viszont, ha a keresleti függvény formája $D^t(p_t) = \alpha - \gamma p_t$, akkor technikailag elegendő egy $D^t(p_t) = \alpha - p_t$ formával foglalkozni, hiszen ha a γ paraméterrel, ami nyilvánvalóan nem lehet zéró, elosztjuk a célfüggvényt, semmivel nem korlátozzuk eredményeink általánosságát. Megjegyezzük, hogy Bernstein és Kök (2009) már alkalmaztak dinamikus modelljükben hasonló típusú keresleti függvényt, továbbá feltételezték, hogy az (1) modellben a fajlagos termelési költségek a $c(q_t) = c_0(q_t)^{-\beta}$ (ahol c_0 és β pozitív paraméterek) típusú függvénnyel meghatározhatók. Az eredmények összehasonlíthatósága miatt célszerű tehát nekünk is ezt alkalmazni. Viszont a Bernstein és Kök (2009) modellben használt fejlesztési (beruházási) költségfüggvénynél általánosabb formát alkalmazunk. Bernstein és Kök (2009) modelljükben azt tételezték fel, hogy $f(y_t) = ky_t$, $k > 0$, ahol k egy konstans paraméter. E költségfüggvényt azért zárjuk ki az analízisből, mert Vörös (2011) explicit megoldást adott a problémára, és ebből az derül ki, hogy a fejlesztési aktivitások legfeljebb az első periódusban lesznek zérustól különbözők, és minden más periódusban zérus szinten maradnak. Ebből viszont az következik, hogy hatékonyságjavulás csak legfeljebb az első periódusban lehet, ezért a hatékonyság javulásából származó haszon felosztásáról nincs sok értelme beszélni. Modellünkben a fejlesztéshez kapcsolódó költségek meghatározását leíró $f(y_t)$ függvényről azt tételezzük fel, hogy az y_t-ben szigorúan növekvő és konvex. Vagyis $f_{y_t} > 0$ és $f_{y_t y_t} > 0$, ahol az alsó index a változó szerinti parciális deriváltat jelenti. Ugyancsak feltételezzük, hogy $a = 1$, ami ismét csak technikai egyszerűsítés.

Ezek alapján az alábbi modellt fogalmazhatjuk meg:

$$\max_{p_t, y_t} \quad \sum_{t=1}^{T} \left[\left(p_t - c_0(q_t)^{-\beta} \right) (\alpha - p_t) - f(y_t) \right] \delta^t + [P q_T] \delta^T \tag{2a}$$

feltéve, hogy

$$q_t = q_{t-1} + y_t, \quad \text{és} \tag{2b}$$

$$p_t, y_t \geq 0 \quad \text{minden } t\text{-re.} \tag{2c}$$

(2b)-ből kiindulva, azt írhatjuk, hogy

$$q_t = q_0 + \sum_{i=1}^{t} y_i.$$

Ezt a célfüggvénybe helyettesítve, a következő szükséges feltételeket írhatjuk fel:

$$\frac{\partial L}{\partial p_t} = (\alpha - p_t) - \left(p_t - c_0 (q_t)^{-\beta} \right) \leq 0, \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_t} = \beta c_0 \sum_{j=t}^{T} \delta^j (q_j)^{-\beta - 1} (\alpha - p_j) - f_{y_t} \delta^t + P\delta^T \leq 0, \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3b}$$

$$p_t \frac{\partial L}{\partial p_t} = 0, \qquad y_t \frac{\partial L}{\partial y_t} = 0, \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{3c}$$

A $\alpha > c_0 (q_0)^{-\beta}$ feltétel teljesülése elégséges ahhoz, hogy legyen pozitív termelési szint (kereslet), hiszen ekkor létezik olyan árszint, amelyre a kereslet pozitív. Ebből (3a) és (3c) alapján viszont következik, hogy a

$$p_t = \frac{\alpha + c_0 (q_t)^{-\beta}}{2}, \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{4a}$$

egyenlőség teljesülni fog. A (3b)-ből pedig az következik, hogy

$$\beta c_0 \sum_{j=t}^{T} \delta^{j-t} (q_j)^{-\beta-1} (\alpha - p_j) \leq f_{y_t} - P\delta^{T-t}, \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{4b}$$

A (4b) egyenlőtlenség azt is kifejezi, hogy az egyik periódusban elvégzett fejlesztés költségei később is megtérülhetnek, és a megmentett érték csökkenti a megtérülés feladatát.

A (4b) egyenlet bal oldala a t-edik periódusban bekövetkező egységnyi fejlesztési aktivitás növekedéséből származó diszkontált kumulatív marginális megtakarítást fejezi ki. Jobb oldala pedig a marginális költségnövekményt, lecsökkentve a keletkező diszkontált megmentett értéknövekménnyel. Amennyiben y_t pozitív értéket vesz fel egy periódusban, akkor (4b)-nek egyenlőség formájában kell teljesülnie. Ennek az egyenlőségnek akkor lesz megoldása, ha a jobb oldalnak kellően alacsony értékei vannak. Például, ha megfelelően magas a megmentett érték fajlagos nagysága, és/vagy az f_{y_t} függvénynek megfelelően alacsony értékei vannak. Ilyen függvény lehet például az $f(y_t) = y_t^2$, amire a (4b) egyenlőtlenségnek mindig van megoldása egyenlőség formájában.

Ebből az eszmefuttatásból feltehető tehát, hogy léteznek esetek, amikor minden periódusban az y_t változók értéke pozitív. Ebből következően $q_{t+1} > q_t$, és ez alapján a (4a)-ban használt kifejezésre pedig a $(q_{t+1})^{-\beta} < (q_t)^{-\beta}$ összefüggés következik. Vagyis a $(t+1)$-edik periódusban olcsóbb egy terméket megtermelni, mint a t-edikben. A kérdés az, kié legyen a haszon? Ennek megválaszolásához tekintsük a (4a) összefüggést, amely a t-edik periódusra:

$$p_t = \frac{\alpha + c_0 (q_t)^{-\beta}}{2} \tag{5a}$$

a $(t+1)$-ik periódusra pedig

$$p_{t+1} = \frac{\alpha + c_0 (q_{t+1})^{-\beta}}{2}. \tag{5b}$$

Vonjuk ki most a két kifejezést egymásból:

$$p_t - p_{t+1} = \frac{c_0 \left[(q_t)^{-\beta} - (q_{t+1})^{-\beta} \right]}{2}. \tag{6}$$

Mivel $(q_{t+1})^{-\beta} < (q_t)^{-\beta}$, ezért a (6) egyenlet bal oldala is pozitív. Ez azt jelenti, hogy a $(t+1)$-dik periódusban az ár alacsonyabb lesz, mint az előtte levő periódusban. Másként megfogalmazva, a termelőnek az a racionális magatartása, ha a hatékonyság növekedéséből eredő haszonból enged át a fogyasztónak árcsökkentés révén. Ennek mértékét pedig a jobb oldal mutatja, eszerint éppen a megtakarítás felét engedi át. A következő tulajdonságot rögzíthetjük tehát:

1. Állítás. *Lineáris keresleti függvény esetén, amennyiben a termelő a folyamat fejlesztése révén hatékonyságnövelést ér el, részéről racionális magatartás az, ha az árát a hatékonyságnövekedésből eredő haszon felével csökkenti.*

Könnyen belátható, hogy a fenti megállapítás nem csak az esetünkben használt speciális változóköltség függvényre igaz. Az állítás érvényes minden, a termelékenységi tudásban monoton csökkenő fajlagos termelési változóköltségre.

4. A termelési hatékonyság növekedéséből származó haszon megosztásának mértéke exponenciális keresleti függvény esetén

A szükséges feltételeket az (1) modell kapcsán fogalmazzuk meg, majd felhasználjuk azt a specifikumot, hogy a keresleti függvény exponenciális. (Megjegyezzük, hogy az exponenciális keresleti függvény haasználata igen népszerű a kutatásokban, mostani alkalmazása mégis az eredmény szempontjából lesz igazán érdekes). Az (1b)-ből, feltéve, hogy $a = 1$ és $q_t = q_0 + \sum_{i=1}^{t} y_i$, majd ezt a célfüggvénybe helyettesítve, az alábbit kapjuk:

$$L = \sum_{t=1}^{T} \left[\left(p_t - c^t \left(y_1, y_2, \ldots, y_t \right) \right) D^t \left(p_t \right) - f \left(y_t \right) \right] \delta^t + \left[P \left(q_0 + \sum_{i=1}^{T} y_i \right) \right] \delta^T. \tag{7}$$

Feltételezve a döntési változók pozitivitását, a szükséges feltételeket az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$\frac{\partial L}{\partial p_t} = D^t + \left(p_t - c^t \right) D^t_{p_t} = 0, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_t} = \sum_{j=t}^{T} \left(-D^j c^j_{y_t} \right) \delta^j - f_{y_t} \delta^t + P \delta^T = 0, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{8b}$$

Legyen most a keresleti függvényünk formája valamennyi periódusban

$$D^t \left(p_t \right) = \exp(-k p_t), \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{9a}$$

ahol k egy pozitív konstans. (Eredményeinket nem befolyásolná, ha a jobb oldali exponenciális kifejezésben egy konstans is szorzó is szerepelne.) Ebből következően

$$D_{p_t} = -k \exp(-k p_t), \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{9b}$$

Ez esetben viszont a (8a) feltételünk formája a következő lesz:

$$\exp(-kp_t) - k\left(p_t - c^t\right)\exp(-kp_t) = 0, \qquad t = 1,\ldots,T, \tag{10}$$

amiből az következik, hogy

$$p_t - c\left(q_t\right) = \frac{1}{k}, \qquad t = 1,\ldots,T. \tag{11a}$$

Ez azt jelenti, hogy a (11a) egyenletnek mindig van megoldása, amit a (8b)-be helyettesíthetünk. Átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$f_{y_t} = \sum_{j=t}^{T}\left(-D^j c^j_{y_t}\right)\delta^{j-t} + P\delta^{T-t}, \qquad t = 1,2,\ldots,T. \tag{11b}$$

A (11b) jobb oldala mindig pozitív, hiszen feltételezhetjük, hogy a fajlagos termelési költségek csökkennek a termelékenységi tudás növekedése eredményeként (azaz $c^j_{y_t} < 0$), továbbá a keresleti szint is pozitív. Vegyük ugyancsak figyelembe, hogy

$$c^t_{y_j} = \frac{\partial c^t}{\partial y_j} = \frac{\partial c}{\partial q_t}\frac{\partial q_t}{\partial y_j} = a\frac{\partial c}{\partial q_t} = ac_{q_t} \quad \text{minden } j \leq t\text{- re.}$$

A fajlagos termési költségfüggvényről, $c(q_t)$-ről feltételezhetjük, hogy nem csak csökkenő q-ban, hanem konvex is. Ebből az irodalomban általánosan elfogadott feltételből viszont az következik, hogy a (11b) jobb oldala zérushoz konvergál, amikor y_t a végtelenhez tart. A keresleti függvénynek ugyanis van felső korlátja, a $c^t_{y_j}$ viszont a zérushoz tart. Tekintettel arra, hogy a beruházási költségfüggvény, f, szigorúan növekvő és konvex, a (11b) bal oldala növekvő lesz y_t-ben. Következésképen kijelenthetjük, hogy a (11) egyenletrendszernek lesznek pozitív y_t értékei, amennyiben az f_{y_t}-nek léteznek megfelelően kis értékei.

Tételezzük fel, hogy a (11) egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyben két egymás utáni periódusban a fejlesztési aktivitások értéke pozitív, azaz írhatjuk, hogy $q_{t+1} > q_t$. A (11a) feltételt $(t+1)$-re is felírva azt kapjuk, hogy:

$$p_{t+1} - c(q_{t+1}) = \frac{1}{k},$$

amiből az következik, hogy

$$p_t - p_{t+1} = c\left(q_t\right) - c\left(q_{t+1}\right). \tag{12}$$

Ebből a következő összefüggés adódik.

2. Állítás. *Exponenciális keresleti függvény esetén, a termelési hatékonyság növekedéséből eredő hasznot teljes egészében át kell engedni a fogyasztónak. Az árat pontosan annyival kell csökkenteni, amennyivel a termelési költségek csökkennek.*

A (12) egyenlet jobb oldalán a termelékenységi tudás növekedéséből eredő megtakarítás áll. Ezt árcsökkentésen keresztül át kell engedni a fogyasztóknak.

1. Példa. Legyen a keresleti függvény formája $D_t = 8\exp(-p_t)$ a tervhorizont mindkét periódusára, azaz $t = 1,2$. Továbbá legyen $c(q_t) = 2/\sqrt{q_t}$, $r = 0.2$ és $a = 1$ újra. A fejlesztési költségfüggvény legyen $f(y_t) = y_t^2$ és legyen $P = 9.4$, $q_0 = 0$, $(T = 2)$. Ekkor $p_t = 1 + 2/\sqrt{q_t}$ kell legyen az ár az egyes periódusokra. A (11b) összefüggést felhasználva $t = T$-re

$$2y_2 = \frac{8\exp\left(-\left(1+2/\sqrt{y_1+y_2}\right)\right)}{\sqrt{(y_1+y_2)^3}} + 9.4, \tag{13}$$

míg $t = 1$-re:

$$2y_1 = \frac{8\exp\left(-\left(1+2/\sqrt{y_1}\right)\right)}{\sqrt{y_1^3}} + \frac{8\exp\left(-\left(1+2/\sqrt{y_1+y_2}\right)\right)}{\sqrt{(y_1+y_2)^3}}\frac{1}{1,2} + \frac{9,4}{1,2}. \tag{14}$$

Miután a (14) mindkét oldalát megszoroztuk $1,2$-vel, helyettesítsük be a (13) jobb oldalát (14)-be. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$y_2 = 1,2y_1 - \frac{4,8\exp\left(-\left(1+2/\sqrt{y_1}\right)\right)}{\sqrt{y_1^3}}. \tag{15}$$

Az $y_1 = 4$, $y_2 = 4,72$ értékpár megoldása a (13) és (15) egyenletekből álló rendszernek. A fejlesztési aktivitások mindkét periódusban pozitív szinten állnak, aminek az lesz az eredménye, hogy a termelékenységi tudás mindkét periódusban nő. Látható, hogy az ár a termelékenységi tudás csökkenő függvénye, ami pontosan annyival fog csökkenni, amennyivel csökkennek a termelési költségek.

5. Következtetések

A tanulmányban megvizsgáltuk, hogyan kell a termelési hatékonyság növekedéséből eredő haszonnal gazdálkodni. E célból egy nagyon általános modellt fogalmaztunk meg, melynek lényegi eleme, hogy a termelékenységi tudás fejleszthető. Később ezt specifikáltuk a különböző kiterjesztések irányába.

Először lineáris keresleti függvényt vizsgáltunk egy olyan fajlagos változó költség függvény mellett, amelyben a fajlagos termelési költség hiperbolikusan függ a termelékenységi tudás szintjétől. Megmutattuk, hogy a szükséges feltételek elégségesek is, és ha a fejlesztési költségeket leíró (szigorúan növekvő és konvex) függvény deriváltjának vannak alacsony értékei, akkor létezhetnek olyan periódusok, melyekben a fejlesztési aktivitások pozitív szinten lesznek. A pozitív fejlesztési szintek növelik a termelékenységi tudást, ennek következménye a fajlagos termelési költségek csökkenése. Azt találtuk, hogy lineáris keresleti függvény mellett a termelő racionális magatartása az, ha a termelési hatékonyság növekedéséből eredő hasznot megfelezi a fogyasztókkal. Egyszerűen a fajlagos termelési költség csökkenésének felével kell mérsékelni az eladási árat.

Ezután exponenciális keresleti függvény és jóval általánosabb fajlagos termelési költségfüggvény esetében is bizonyítottuk, hogy létezhetnek periódusok, amikor a fejlesztési aktivitások pozitív szinten lesznek. Ennek következménye ismét a termelékenységi tudás növekedése, ami a fajlagos termelési költségeket csökkenti. Érdekesség, hogy ez esetben az ebből származó hasznot teljes egészében át kell engedni a fogyasztóknak: az eladási árat annyival kell lejjebb vinni, amennyivel a fajlagos termelési költségek csökkennek.

Az analízis és a problémafelvetés további kutatások felé nyithat utat, például más típusú keresleti függvények vizsgálatával. Ide nem csak a különböző függvénytípusokat lehet sorolni, hiszen – a tiszta hatások kiszűrése céljából – a keresleti függvények paraméterei időfüggetlenek voltak. A dinamikát visszacsempészve vizsgálni lehet a konjunkturális hatásokat. A termék minőségének figyelembevétele szintén egy kiterjesztési irányt jelenthet.

Hivatkozások

Bernstein, F., Kök, A. G. (2009). Dynamic cost reduction through process improvement in assembly networks. *Management Science*, 55(4):552–567.

Carrillo, J. E., Gaimon, C. (2000). Improving manufacturing performance through process change and knowledge creation. *Management Science*, 46(2):265–288.

Carrillo, J. E., Gaimon, C. (2004). Managing knowledge-based resource capabilities under uncertainty. *Management Science*, 50(11):1504–1518.

Chand, S., Moskowitz, H., Novak, A., Rekhi, I., Sorger, G. (1996). Capacity allocation for dynamic process improvement with quality and demand considerations. *Operations Research*, 44(6):964–975.

Dorroh, J. R., Gulledge, T. R., Womer, N. K. (1994). Investment in knowledge: A generalization of learning by experience. *Management Science*, 40(8):947–958.

Fear, J., Knoop, C. I. (2007). Dr. Ing. h.c. F. Porsche AG: True to Brand. *Harvard Business School*, 9-706-018.

Fine, C. H. (1986). Quality improvement and learning in productive systems. *Management Science*, 32(10):1301–1315.

Li, G., Rajagopalan, S. (1998). Process improvement, quality, and learning effects. *Management Science*, 44(11-Part-1):1517–1532.

Vörös, J. (2011). Multiperiod models for analyzing the dynamics of process improvement activities. Benyújtva.

Watanabe, K. (2007). Lessons from Toyota's long drive. *Harvard Business Review*, July-August:74–84.

Reducibilis Leontief-gazdaságok elemzése: kanonikus versus standard dekompozíció

Zalai Ernő

Kivonat
A klasszikus felfogás szerint a tőkés gazdaságban bér- és a profitráta nagysága szabályozza a nemzeti jövedelem elosztását, és hosszú távú egyensúlyi értékük meghatározza a termékek egyensúlyi árát, a termelési árakat. Egy Leontief-gazdaságban, ahol nincs sem ikertermelés, sem technológia választék, a ráfordítási együtthatók A mátrixa négyzetes és termelési árak fogalma jól meghatározott. A termelési árak fogalmát Sraffa, illetve Neumann modellje alapján általánosítani lehet ikertermelés és technológiai választék esetére is. Sraffa a ricardói árak elemzésekor feltette, hogy egyaránt vannak bázis- és luxustermékek, ahol az előbbiek termelése nélkülözhetetlen bármely termék előállításához. Ezt a fogalmat általánosítva értelmezhetjük a marxi termelési árak esetén a létfenntartó és luxustermékeket, ahol az utóbbi termékek már valóban csak luxusfogyasztás tárgyát képezhetik. Luxustermékek esetén egy gazdaság dekomponálható, és az egyensúlyi profitráta és a termelési árak függnek attól, hogy termelnek-e luxustermékeket is, azok mely csoportjait, és milyen viszony van az egyes részgazdaságok profit- illetve növekedési potenciálja között. Dolgozatunkban a négyzetes mátrixok Gantmacher-féle kanonikus dekompozíciójából kiindulva bevezetjük a standard dekompozíció fogalmát, aminek alapján a luxustermékek egyszerűen beoszthatók olyan algazdaságokba, amelyek meghatározzák mind a termelési árak mellett lehetséges profitrátákat, mind a gazdaság eltérő növekedési ütemmel rendelkező stacionárius állapotait. Az új elemzési eszköz alapján új megvilágításba helyezhető Sraffa ún. standard árun nyugvó elemzése és a Marx–Neumann-féle modell alternatív megoldásainak Morishima és Bromek által adott jellemzése is.

Zalai Ernő
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék,
email: erno.zalai@uni-corvinus.hu

1. Bevezetés

Széleskörű munkamegosztásra épülő, kifejlett és kiterjedt árutermelő gazdaságokban a termelő ágak közvetlen és/vagy közvetett kapcsolatban állnak egymással. Egy Leontief-gazdaságban, ahol nincs sem ikertermelés, sem technológia választék, a ráfordítási együtthatók **A** mátrixa négyzetes. Ilyenkor, mint ismert, az **A** mátrix különböző hatványai, pontosabban azok adott (i, j) pozícióban lévő elemei egyértelműen jelzik a j-edik ágazatnak az i-edik termékei felé közvetlenül vagy más ágazatokon keresztül közvetve megjelenő ráfordítási igényét (pozitív), vagy hiányát (nulla).[1] Az ágazatok közötti ráfordítási kapcsolatok azonban nem mindig teljes körűek, és nem mindig kölcsönösek két adott ágazat között. Létezhetnek úgynevezett *független ágazatcsoportok*, olyan ágazatok, amelyek termeléséhez nincs szükség a többi ágazat termékeire. Ilyenkor az **A** mátrix dekomponálható, más szóval reducibilis.

Ilyenkor létezhet olyan független ágazatcsoport, amelynek termékeire (szolgáltatásaira) – közvetlenül vagy közvetve – minden termék előállításához szükség van. Ebbe olyan alapvető ágazatok tartoznak, amelyek nélkül a gazdaság nem működhet.[2] Ezek kibocsását Sraffa (1960) *bázistermékeknek* nevezte. Már Ricardo is felfigyelt arra, hogy az ilyen alapvető termékek (kéttermékes elemzésében a gabona) döntő szerepet játszanak az egyensúlyi profitráta meghatározásában. Nevezetesen, az egyensúlyi profitráta csak ezek termelésének ráfordítási viszonyaitól függ, a többi, Sraffa által *luxustermékeknek* nevezett javak ráfordítási viszonyai nem befolyásolják ennek nagyságát.

A klasszikus közgazdászok felfogása szerint a bér- és a profitráta nagysága a megtermelt új termék, a nemzeti jövedelem munkások és tőkések közötti elosztását szabályozza, társadalmi osztozkodás eredményeként alakulnak ki, és bizonyos határok között változhatnak. Sraffa a termelési árak ricardói meghatározását alapul véve és általánosítva azt elemezte, hogyan befolyásolja a bér- és a profitráta változása az egyes termékek egyensúlyi (termelési) árát: melyeké nő, s melyeké csökken, ha valamelyik javára megváltozik az elosztási viszony. Az árváltozások irányának meghatározása, vagyis annak eldöntése, mely termék ára nőtt vagy csökkent a változások eredményeképpen, általában függ a választott *ármércétől*, a viszonyítási alaptól. Ezt Ricardo is tudta és hangsúlyozta, ezért élete végéig kereste az ideális ármérce-jószágot, azt a *standardot*, amely biztos viszonyítási alapot nyújt a fenti kérdés eldöntéséhez. Egy olyan termék lehetne ilyen *standard áru*, amelynek árbevétele és anyagköltsége egymással arányosan változik, vagyis a bér- és a profitráta megváltozása, változatlan árszint mellett, a termelésében keletkező hozzáadott érték nagyságát nem, csak annak elosztását érinti.

[1] Hivatkozás hiányában a kevésbé ismert fogalmakat és állításokat az olvasó megtalálja Zalai (2012) könyvében.

[2] A gazdaság elméleti modelljeiben – legalábbis első megközelítésben – rendszerint külkereskedelem tekintetében zárt gazdaságokat vizsgálunk. Itt is ebből a feltevésből indulunk ki.

Ilyen egyedi terméket általában nehéz találni, de Ricardo kéttermékes modelljében ilyennek bizonyult a gabona, a bázistermék. Sraffa ennek fogalmát általánosította a standard áru kategóriájával, amelyet egy olyan *összetett* (kompozit) *árukosárként* (**s**) definiált, amely termelése esetén a kibocsátás és az anyagráfordítás termékösszetétele megegyezik egymással. Egy Leontief-gazdaságban tehát a standard árukosár nem más, mint az **A** ráfordítási együttható mátrix egy nemnegatív jobb oldali sajátvektora: $\lambda\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s}$. (A λ sajátérték reciprokát Sraffa nyomán *standard tényezőnek* fogjuk nevezni.) Ha a standard árukosár arányaiban egyértelműen meghatározott, akkor betölti a Ricardo által keresett ideális ármérce-jószág szerepét. Reducibilis gazdaságban azonban a standard árukosár arányaiban nem mindig egyértelműen meghatározott, s ilyenkor egyáltalán nem mindegy, melyiket választjuk ármércének. Az, hogy mikor választhatjuk egyáltalán valamelyiket ármércének, a profitráta nagyságától is függ. Dolgozatunkban ezt fogjuk többek között közelebbről megvizsgálni a reducibilis **A** mátrix általunk bevezetett *standard dekompozíciója* segítségével. Az **A** mátrix ilyen felbontása esetén a főátlóban olyan négyzetes blokkok lesznek, amelyek domináns sajátértékeinek reciprokai a lehetséges standard tényezők. (Ezért nevezzük standard dekompozíciónak.) Az így nyert standard tényezők és a hozzájuk tartozó standard árukosarak segítségével kimerítően elemezhetjük és jellemezhetjük mind a ricardói, mind a marxi termelési árak alakulását, valamint a bér- és a profitráta közt fennálló átváltási lehetőségeket. Megmutatjuk, hogy a lehetséges profitráták tartományát intervallumokba, a luxustermékeket pedig ezekhez tartozó különböző rendű osztályokba oszthatjuk be, annak megfelelően, hogy pozitív mennyiségben termelhetők-e az adott profitráta mellett kialakuló egyensúlyi árak esetén.

Túl a termelési árak klasszikus elemzésén, az úgynevezett Neumann–Leontief-modell lehetséges egyensúlyi megoldásait is megvizsgáljuk a standard dekompozíció alapján. A Neumann-modell azon egyszerű esetéről van szó, amelyben nincs sem ikertermelés, sem technológiai választék, azaz Leontief-technológiára épül, és a ráfordítási együtthatók tartalmazzák a foglalkoztatott munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztást (teljes körű ráfordítások). A standard dekompozíció alapján kimerítően jellemezhetjük ennek a modellnek a lehetséges megoldásait is. A stacionárius egyensúlyi árak részben a termelési árak klasszikus fogalmát általánosítják, de egyúttal leszűkítik lehetséges értelmezésüket azáltal, hogy a modellben nincs luxusfogyasztás. Ennek a modellnek az elemzése mindazonáltal meg fogja világítani a Morishima (1971), illetve Bromek (1974a) által a Neumann-modell alternatív megoldásainak jellemzésére bevezetett dekompozíciós eljárások természetét, és a kapott modell korlátozott közgazdasági jelentőségét.

Az áttérés a teljes körű ráfordítások együttható mátrixára nem problémamentes. Egyrészt a bázistermékek szerepét átveszik az úgynevezett *létfenntartó termékek*, amelyek tartalmazzák a Sraffa-féle bázistermékeket, ha egyáltalán vannak ilyenek, de jellemzően a termékek szélesebb körét ölelik fel. Már emiatt is megváltozhat a ráfordítási együttható mátrix szerkezete. Másrészt a teljes körű ráfordítások esetén a mátrix szerkezete és így standard dekompozíciója általában függ a fogyasztás szintjétől. Meg fogjuk mutatni, hogy a kétféle ráfordítási együttható mátrixszal értelmezett (a valódi és a kvázi) Neumann–Leontief-modell lehetséges egyensúlyi tényezői egyaránt a Sraffa-féle standard tényezők közül kerülhetnek ki.

A reducibilis négyzetes mátrixok standard dekompozíciója a Gantmacher (1967) által bevezetett kanonikus dekompozícióra épül, az abból nyert kanonikus blokkok célszerű rendezésén és alkalmas csoportokba összevonásán nyugszik. A standard dekompozíciós séma kidolgozásához az ötletet Kurz és Salvadori (1995) könyvéből merítettük, akik hasonló felbontás alapján osztályozták a luxustermékeket Sraffa modelljében. Dolgozatunk terjedelmi korlátai nem teszik lehetővé az elemzések részletes ismertetését, ezeket az érdeklődő olvasó megtalálja Zalai (2012) könyvében.

2. A kanonikus dekompozíció és a szükséges alapfogalmak

A négyzetes mátrixok *kanonikus dekompozíciója* Gantmacher (1967) nevéhez fűződik. Könnyen belátható, hogy a reducibilis (dekomponálható) négyzetes mátrixok, szükség esetén soraik és oszlopaik azonos átrendezésével, olyan trianguláris alakra hozhatók, amelynek főátlójában irreducibilis $\mathbf{A}_{jj}$ négyzetes mátrixok szerepelnek. Az egyetlen elemből álló elsőrendű mátrixot akkor is irreducibilisnek tekintjük, ha az 0. Tetszés szerint választhatunk a felső vagy alsó trianguláris alak között. Mi felső háromszög alakot fogunk használni, amelyben $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$, valahányszor $j < k$.

Ennek megfelelően az ágazatok, illetve a termékek indexeit az $I_1, I_2, \ldots I_s$ (összesen tehát s) részhalmazokba rendezve az alábbi felbontáshoz jutunk:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{jj} & \cdots & \mathbf{A}_{js} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{ss} \end{pmatrix}.$$

Egyszerű indukciós úton beláthatjuk, hogy egy reducibilis mátrix mindig átrendezhető ilyen alakba. Mindenekelőtt meg kell keresnünk a legszűkebb független ágazatcsoportot, ez lesz az I_1 indexhalmaz, amely együttható mátrixának, $\mathbf{A}_{11}$-nek irreducibilisnek kell lennie. Ha ugyanis reducibilis volna, akkor lenne benne további, nála szűkebb független ágazatcsoport. Miután ezt megtaláltuk, elhagyjuk a mátrixból az I_1 indexhalmaz elemeihez tartozó sorokat és oszlopokat. Ha a maradékként kapott mátrix irreducibilis, akkor készen vagyunk, ez lesz a felbontás második ágazatblokkja. Ellenkező esetben a fennmaradó résszel megismételjük az előbbi folyamatot. Megkeressük ennek legszűkebb független ágazatcsoportját, amelynek indexei megadják az I_2 indexhalmazt, a hozzájuk tartozó saját ráfordítási együtthatók az $\mathbf{A}_{22}$ mátrixot, az I_2-ben levő termékek I_1-re vonatkozó együtthatói az $\mathbf{A}_{12}$ mátrixot. Az eljárást addig folytatjuk, míg végül egy irreducibilis mátrix marad. Világos, hogy véges sok termék esetén véges sok lépés után eljutunk ehhez. Ez lesz az $\mathbf{A}_{ss}$ mátrix.

A fenti úton kapott felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix ***kanonikus dekompozíciójának***, ennek megfelelően az I_j indexhalmazokat ***kanonikus blokkoknak***, a főátlóban levő $\mathbf{A}_{jj}$ mátrixot a j-edik blokk ***saját ráfordítási együttható mátrixának*** nevezzük, amelynek domináns sajátértékét λ_j-vel jelöljük, tehát $\lambda_j = \lambda\left(\mathbf{A}_{jj}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Megjegyzés:
Az olyan egymást követő ágazatokat, amelyek kölcsönösen függetlenek egymástól és a saját termékeikre sincs szükségük, összevonhatjuk egy közös blokkba. Az így képzett blokk saját ráfordítási együtthatóinak mátrixa nulla lesz ($\mathbf{A}_{jj} = \mathbf{0}$). Ez a lehetőség a *kanonikus dekompozíció* alábbi, *alternatív meghatározását* kínálja: az $\mathbf{A}$ mátrix olyan négyzetes, trianguláris felbontása, amelynek főátlójában csak irreducibilis $\mathbf{A}_{jj}$ vagy $\mathbf{0}$ mátrixok szerepelnek.

Létezhetnek egymástól *kölcsönösen független* I_j és I_k ágazatcsoportok is, amelyek esetén $\mathbf{A}_{jk} = \mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$, azaz kölcsönösen nincs szükségük egymás termékeire. Az ilyen blokkok tetszőleges sorrendben elhelyezhetők a kanonikus dekompozícióban. A későbbiek szempontjából fontos lesz az alábbi megállapodás: ilyen esetben mindig azt a blokkot tesszük *előbbre*, amelyik saját ráfordítási együttható mátrixának domináns *sajátértéke kisebb*.

Regulárisnak nevezzük a ***kanonikus dekompozíciót***, ha az egymástól *kölcsönösen független* ágazatcsoportok közül a kisebb domináns sajátértékű blokk mindig megelőzi a nagyobbal rendelkezőt.

Szükségünk lesz az alábbi fogalmakra is.

1. Definíció. *A termelési rendszerek legfontosabb jellemzői:*

i) *Az* $\mathbf{A}$ *ráfordítási együttható mátrixszal jellemzett termelési rendszer akkor képes önmagát* α *szinten újratermelni, ha létezik olyan* $\alpha > 0$ *és* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, *amelyek esetén* $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$.[3]

ii) *Az* $\mathbf{A}$ *ráfordítási együttható mátrixszal jellemzett termelési rendszer növekedési potenciálja az a legnagyobb egyöntetű (arányos) növekedési ütem, amelyet egyidőszakos termelési periódus esetén el lehet érni, ha a termékeknek nincs külső felhasználása:*

$$\rho^0 = \max\left\{\rho : \exists\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geqq (1+\rho)\,\mathbf{A}\mathbf{x}\right\}.$$

A definíció tehát olyan, többnyire hipotetikus, zárt termelési rendszert feltételez, amelyben minden kibocsátási többletet a következő időszaki ráfordítások, így a

[3] Az azonos méretű vektorok és mátrixok közötti nagyságrendi relációkra a következő jelöléseket használjuk: $\geqq$ nagyobb egyenlő, $\geq$ nagyobb egyenlő, de legalább egy elemében nagyobb. Ennek megfelelően $\mathbf{a} \geqq \mathbf{0}$ nemnegativitást, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ *féligpozitivitást* jelent. Helyenként „legalább féligpozitív” megjelöléssel hangsúlyozzuk, hogy akár minden eleme pozitív lehet.

termelési szint növelésére lehetne fordítani. A növekedési potenciált kifejezhetjük a növekedési tényezővel is, ahol $\alpha^0 = 1+\rho^0$.

iii) *A növekedési potenciál nagysága megegyezik termelési rendszer profitpotenciáljával, amit akkor érhetne el, ha a felhasznált termékeken kívül nem lenne más (külső) ráfordítás, azaz*

$$\pi^0 = \max\{\pi : \exists\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \leqq (1+\pi)\,\mathbf{pA}\}.$$

A profitpotenciált is kifejezhetjük tényezős alakban: $\beta^0 = (1+\pi^0)$.

iv) *A fentiekhez hasonlóan értelmezzük,* $\mathbf{A}$ *helyébe* $\mathbf{A}_{jj}$*-t helyettesítve, egy négyzetesen felbontott ráfordítási együttható mátrix j-edik blokkjának saját növekedési, illetve profitpotenciálját.*

v) *A profitpotenciál mellett gyakran használjuk a garantált profitráta fogalmát is, amely alatt a legalább féligpozitív árak mellett lehetséges legkisebb egyensúlyi profitrátát értjük, azaz*

$$\pi^* = \min\{\pi : \exists\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \leqq (1+\pi)\mathbf{pA}\}.$$

Ez képezi a pozitív bérráta és árak mellett lehetséges profitráták felső határát.

vi) *Az* I_1 *indexcsoportba sorolt termékek minden termék (újra)termeléséhez nélkülözhetetlenek (szükségesek), ha* $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$*, valahányszor* $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{Ax}$*,* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$*,* $\alpha > 0$*, ahol* $\mathbf{x}_1$ *az* $\mathbf{x}$ *vektor* I_1 *indexhalmazhoz tartozó részvektora.*

vii) *Egyidőszakos tőkemegtérülés esetén, amikor a felhasznált és a tőkeként megelőlegezett termelési eszközök nagysága egyenlő, a termelési árak ricardói és marxi meghatározása az alábbi képletekkel adható meg:*

$$\mathbf{p} = (1+\pi)\mathbf{pA} + w_r l, \ \ \textit{illetve} \ \ \mathbf{p} = (1+\pi)\,(\mathbf{pA} + w_m l),$$

ahol $\mathbf{p}$ *az árak,* l *a fajlagos munkaráfordítások vektora,* w *és* π *a bér- és a profitráta. Látjuk, hogy* $w_r = (1+\pi)w_m$*, ezért mindkét meghatározás ugyanazon árarányokat eredményezi. Közgazdasági szempontból az a különbség közöttük, hogy Ricardo (és az őt követő Sraffa) feltevése szerint a munkások, Marx feltevése szerint a tőkések előlegezik meg a munkabéreket.*

A termelési árak $\pi = 0$ *határesetben kapott értékét munkaérték-arányos áraknak, a* $w = 0$ *esetben kapott* $\mathbf{p} = (1+\pi)\mathbf{pA}$ *meghatározást kielégítő pozitív* π *és legalább féligpozitív* $\mathbf{p}$ *párokat tőkeérték-arányos árrendszernek nevezzük.*[4]

Megjegyzés:

Pontosabb lenne a *növekedési* potenciál kifejezés helyett ***önmegújító potenciált*** használni,

---

[4] Az így kapott árak az első esetben a halmozott munkaráfordításokkal, $\mathbf{l}(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$-vel, a másodikban a halmozott tőkelekötéssel, a $\mathbf{pB}(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ tőkeértékekkel (éves tőkemegtérülés esetén $\mathbf{B} = \mathbf{A}$) arányosak, erre utalnak az elnevezések.

növekedésről ugyanis csak akkor beszélhetünk, ha $\rho > 0$ $(\alpha > 1)$. Többnyire mégis a kifejezőbb növekedési potenciál fogalom használata mellett maradunk, már csak azért is, mert implicite vagy explicite mindig feltesszük, hogy a vizsgált gazdaságok ráfordítási együttható mátrixa produktív, így a növekedési, illetve profitpotenciál pozitív. Időnként azonban a rövidebb *önmegújító* potenciált fogjuk használni a *közös növekedési, illetve profitpotenciál* fogalom helyett.

A *Sraffa-féle mátrix* fogalmát a kanonikus dekompozíció alapján a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

> Az $\mathbf{A}$ reducibilis ráfordítási együttható mátrixot akkor nevezzük ***Sraffa-féle mátrixnak***, ha kanonikus dekompozíciójában az I_1 halmazban levő javak minden termék újratermeléséhez nélkülözhetetlenek, azaz *bázistermékek.*

1. Tétel (A Sraffa-féle mátrixok és a bázistermékek jellemzése a kanonikus alakkal). *A kanonikus alakba rendezett* $\mathbf{A}$ *ráfordítási együttható mátrix esetén az* I_1 *halmazba tartozó javak akkor és csak akkor bázistermékek, ha* $\mathbf{A}_{11}$ *irreducibilis és* $\mathbf{A}_{11} \neq \mathbf{0}$,[5] *továbbá a főátló bármely más* $\mathbf{A}_{jj}$ *blokkja felett elhelyezkedő* $\mathbf{A}_{1j}, \mathbf{A}_{2j}, \ldots, \mathbf{A}_{j-1,j}$ $(j > 1)$ *mátrixok közül legalább egyben található pozitív elem, azaz*

$$\mathbf{1A}_{1j} + \mathbf{1A}_{2j} + \ldots \mathbf{1A}_{j-1,j} \geq \mathbf{0} \quad (j > 1). \tag{1}$$

Bizonyítás:
Szükségesség: Ha $\mathbf{A}_{11}$ reducibilis mátrix, vagy elsőrendű nullmátrix esetén nulla lenne, akkor már az I_1 indexhalmazba eső termékek termeléséhez sem lenne szükség minden I_1-beli termékre. Ha pedig valamely $j > 1$ esetén nem teljesülne az (1) feltétel, akkor a j-edik blokk termékeinek előállításához nem lenne szükség más ágazatcsoportbeli termékekre, így bázistermékekre sem.

Elégségesség: $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilis, vagy elsőrendű nullmátrix esetén pozitív, ebből következően az I_1 indexhalmazba eső termékek mindegyikének termeléséhez szükség van minden I_1-beli termékre. A (1) feltételből pedig az $\mathbf{A}_{jj}$ mátrix irreducibilis volta miatt

$$\left(\mathbf{1A}_{1j} + \mathbf{1A}_{2j} + \cdots + \mathbf{1A}_{j-1,j}\right)\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{jj}\right)^{-1} > \mathbf{0}$$

következik, ami azt jelzi, hogy a j-edik ágazatcsoport termékeinek termeléséhez legalább egy őt megelőző – mondjuk az l-edik $(l < j)$ – ágazatcsoport termékére szükség van. Ugyanígy beláthatjuk, hogy az l-edik ágazatcsoport termékeinek termeléséhez szükség van legalább egy őt megelőző ágazatcsoport termékére. Mivel j véges, és minden lépésben legalább eggyel csökken az index, így előbb-utóbb eljutunk az első blokkhoz. E lépések sorozatá-

[5] Erre azért van szükség, mert $\mathbf{A}_{11}$ elvben egyelemű, éspedig nulla is lehetne a kanonikus dekompozícióban. Ha $\mathbf{A}_{11}$ rendje nem 1, akkor irreducibilis voltából már következik, hogy $\mathbf{A}_{11} \neq \mathbf{0}$.

val tehát igazolhatjuk, hogy az I_j ágazatblokkban levő termékek előállításához közvetlenül vagy közvetve szükség van az I_1 indexhalmazban található minden termékre.

❑

A továbbiakban $\mathbf{A}$-val fogjuk jelölni a ráfordítási együttható mátrixot, ha az csak az elhasznált termelési eszközök pótlási igényeit tartalmazza. A *teljes körű ráfordítási együtthatók mátrixát*, amely a termelési eszközök pótlási igényein túl tartalmazza a munkaerő újratermeléséhez szükséges javak ráfordításait is, az $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} + \varphi_s \mathbf{s}^c \circ \mathbf{l})$, illetve, ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy függ a fogyasztás φ_s szintjétől, az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ mátrixszal fogjuk jelölni, ahol $\mathbf{s}^c$ az egy munkaórára jutó (szükséges) fogyasztás, $\mathbf{l}$ a fajlagos munkaerő-igények vektora, míg $\circ$ a diadikus szorzat jele. A bemutatásra kerülő elemzések így egyaránt felhasználhatók lesznek a termelési árak ricardói és marxi meghatározásának elemzésében. Ha a munkaerő nélkülözhetetlen, akkor azok javak, amelyek minden termék újratermeléséhez nélkülözhetetlenek, az $\check{\mathbf{A}}$ mátrix esetén megegyeznek azokkal a termékekkel, amelyek nélkülözhetetlenek a munkaerő újratermeléséhez. Ezért az ilyen termékeket *létfenntartó termékeknek* nevezzük. Ezek tehát olyanok, mint az $\mathbf{A}$ mátrix esetén a bázistermékek, de az utóbbiak létezése nem szükséges ahhoz, hogy legyenek létfenntartó termékek. Ennek ellenére feltesszük, hogy léteznek bázistermékek, amelyek természetesen mindig létfenntartó termékek is, de az utóbbiak köre jellemzően jóval szélesebb. Egyszerűen igazolhatjuk az alábbi állításokat.

2. Tétel. *Bázis- ($\mathbf{A}$ mátrix), illetve létfenntartó ($\check{\mathbf{A}}$ mátrix) termékek létezése esetén:*

i) *az $\mathbf{A}$ ráfordítási együtthatókkal jellemzett termelési rendszer, illetve $\check{\mathbf{A}}$ teljes körű ráfordítási együtthatókkal adott gazdaság akkor és csak akkor képes magát α* szinten újratermelni*, ha a bázis-, illetve a létfenntartó termékek alrendszere is képes rá az adott $\alpha > 0$ mellett;*

ii) *a ráfordítási együttható mátrixok, azaz a teljes rendszer* növekedési potenciálja *(α^0, illetve ρ^0) megegyezik a bázis-, illetve létfenntartó termékek alrendszerének növekedési potenciáljával (α_1, illetve ρ_1);*

iii) *ha $\lambda_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11}) = \lambda(\mathbf{A})$, azaz $\lambda_j \leqq \lambda_1$, akkor a $\pi^* = \pi^0$, azaz a garantált profitráta megegyezik a profitpotenciállal.*

Bizonyítás:
Nézzük az $\mathbf{A}$ mátrix esetét. Az állítások igazolásához bontsuk fel az $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőtlenségeket az $\mathbf{A}$ mátrix kanonikus formája alapján:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 &\geqq \alpha(\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{A}_{1s}\mathbf{x}_s),\\
(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{22})\mathbf{x}_2 &\geqq \alpha(\mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{A}_{2s}\mathbf{x}_s),\\
&\vdots\\
(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{ss})\mathbf{x}_s &\geqq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ad i) *Szükségesség:* A fenti felbontás alapján egyszerűen belátható, hogy az $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségek teljesülése esetén $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ szükségképpen, mivel bázistermékekre mindig szükség van, ha egyáltalán van termelés. Ebből következik, hogy a bázistermékek alrendszere képes magát α szinten újratermelni.

Elégségesség: Ha pozitív α mellett található olyan $\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}$ vektor, amely esetén $(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$ (ami miatt $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ szükségképpen), akkor az $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ vektor szükségképpen eleget tesz az $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ feltételeknek, amit igazolni kellett.

ad ii) A második állítás az első egyenes következménye.

ad iii) A garantált profitráta a $\mathbf{p} = (1+\pi)\mathbf{p}\mathbf{A}$ képlettel meghatározott, úgynevezett *tőkeérték-arányos árrendszerek* profitrátái közül a legkisebb. A meghatározásból adódóan $(1+\pi)$ csak az $\mathbf{A}$ mátrix olyan sajátértékének reciproka lehet, amelyhez tartozik bal oldali nemnegatív sajátvektor. A domináns sajátérték ilyen, tehát π^0 lehetséges, éspedig a lehetséges tőkeérték-arányos árrendszerek legkisebb profitrátája.

❑

3. A ráfordítási együttható mátrixok standard dekompozíciója

Ha vannak luxustermékek, és a bázistermékek blokkjának domináns sajátértéke kisebb, mint a luxustermékek blokkjáé, akkor érdemes az $\mathbf{A}$ mátrix *reguláris* kanonikus dekompozícióját átrendezni, nevezetesen, az egyes ágazatblokkokat tágabb, immár nem feltétlenül irreducibilis ágazatcsoportokba összevonni. Ez lehetővé teszi mind a termelési árak és a standard rendszer, mind a stacionárius egyensúlyi állapotok teljesebb körű jellemzését. Az átalakítást a következő úton végezzük el.

Vegyük a kanonikus alakba rendezett $\mathbf{A}$ mátrix blokkjai domináns sajátértékeinek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sorozatát. Tegyük fel, hogy az n_1-edik indexig rendre azt tapasztaljuk, hogy $\lambda_j \leqq \lambda_1$ (vagyis $\alpha_j \geqq \alpha_1$), de $\lambda_{n_1+1} > \lambda_1$ ($\alpha_{n_1+1} < \alpha_1$). Másképpen fogalmazva: a luxustermékek $2 \leqq j \leqq n_1$ indexű blokkjainak legalább akkora az önmegújító potenciálja, mint a bázistermékeké, de a következő blokké már kisebb. Ahogy erre a lehetőségre már a Sraffa-féle standard áru elemzésekor utaltunk, az utóbbiakat, azaz a $2 \leqq j \leqq n_1$ indexű blokkokat összevonhatjuk a bázistermékek blokkjával, mivel minden olyan profitráta mellett lesznek pozitív termelési áraik, amelyek esetén a bázistermékeké pozitív, és növekedési potenciáljuk nem korlátozza a bázistermékek egyébként elérhető növekedési ütemét.

Az így képzett blokkot fogjuk ***első osztályú*** termékeknek nevezni, és ezen az úton tovább haladva ***magasabb osztályú*** termékeket is értelmezhetünk a következő módon. Állítsuk sorba a reguláris kanonikus dekompozíció alapján kapott irreducibilis $\mathbf{A}_{jj}$ ráfordítási együttható mátrixok domináns sajátértékeit és a termékek indexhalmazait az alábbi csoportosításban:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_1}; \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2}; \lambda_{n_2+1}, \ldots; \lambda_m, \ldots, \lambda_s,$$

illetve

$$I_1, I_2, \ldots, I_{n_1}; I_{n_1+1}, \ldots, I_{n_2}; I_{n_2+1}, \ldots; I_m, \ldots, I_s.$$

A pontosvesszők mindig olyan helyeket jeleznek, ahol a sorban következő sajátérték nagyobb, mint az őt megelőző szakasz első sajátértéke: $\lambda_{n_1+1} > \lambda_1$, $\lambda_{n_2+1} > \lambda_{n_1+1}$ és így tovább. Ebből következően azt is jelzi, hogy az előző szakaszban nem akadt az elsőnél nagyobb sajátérték, vagyis $\lambda_j \leqq \lambda_1$ minden $2 \leqq j < n_1$, $\lambda_j \leqq \lambda_{n_1+1}$ minden $n_1 + 1 \leqq j < n_2$, esetén és így tovább. Tegyük fel, hogy a fenti módon összesen m csoportba tudtuk sorolni a kanonikus blokkokat. Az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris kanonikus dekompozícióját ennek megfelelően átrendezhetjük az alábbi alakba:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^0 & \mathbf{A}_{12}^0 & \ldots & \mathbf{A}_{1m}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^0 & \ldots & \mathbf{A}_{2m}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_{mm}^0 \end{pmatrix}$$

A reguláris kanonikus dekompozícióból a fenti módon képzett felbontást ***standard dekompozíciónak*** nevezzük, az egyes blokkokba tartozó termékek indexhalmazait $I_1^0, I_2^0, \ldots, I_m^0$ szimbólumokkal jelöljük, ahol I_1^0 az $I_1, I_2, \ldots, I_{n_1}$ halmazok, I_2^0 az I_{n_1+1}, $\ldots, I_{n_2}$ halmazok unióját jelöli. A felbontás I_k^0 indexhalmazait, illetve $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együttható mátrixait ***standard blokkoknak***, a k-adik blokkba tartozó javakat ***k-ad osztályú*** termékeknek fogjuk nevezni.

Könnyen belátható, hogy $m \geqq 2$ szükségképpen, valahányszor vannak luxustermékek, és a bázistermékekhez tartozó blokk domináns sajátértéke kisebb, mint a luxustermékek együtteséé, amit a továbbiakban fel is teszünk.

A felbontás elnevezése Sraffa standard rendszeren nyugvó elemzésére utal. Ebből már sejthető, hogy valamilyen módon a standard blokkokhoz lehet kötni a lehetséges standard arányokat, amit meg is fogunk mutatni. Kurz és Salvadori (1995) a termelési eszközök ráfordításait tartalmazó $\mathbf{A}$ együttható mátrix fentihez hasonló, bázis-, illetve különböző *rendekbe* sorolt luxustermékek szerinti felbontását alkalmazták. Náluk az I_1^0 indexhalmazban található luxustermékek képezik a luxustermékek *első rendjét*, az $I_2^0, I_3^0, \ldots, I_m^0$ blokkok pedig a luxustermékek *második, harmadik* stb. *rendjét*.

A standard dekompozícióban egyrészt egy blokkban szerepeltetjük a bázistermékeket és az elsőrendű luxustermékeket, másrészt a Kurz és Salvadori által egységesen kezelt magasabb rendű (nálunk osztályú) luxustermékeket tovább fogjuk bontani *elsődleges* és *másodlagos* termékekre, attól függően, hogy az adott blokk által meghatározott standard rendszerben termelhetik-e őket. Majd látni fogjuk, hogy ez a felbontás sok szempontból megegyezik az első osztály bázis- (elsődleges) és elsőrendű luxus- (másodlagos) termékek szerinti felosztásával, és annak számos matematikai tulajdonságával rendelkezik.

Morishima (1971) és Bromek (1974a) az általános LTM-technológián alapuló Neumann-modell termékeit és tevékenységeit különböző *osztályokba* sorolták a lehetséges egyensúlyi megoldások alapján (innen kölcsönöztük az osztály megnevezést), és ennek alapján bontották fel a modell ($\mathbf{K}$, $\check{\mathbf{R}}$) kibocsátási és ráfordítási együttható mátrixait, ahol $\check{\mathbf{R}}$ a teljes körű ráfordítási együtthatók mátrixa.[6] A mátrixok felbontására kidolgozott eljárásuk a kanonikus dekompozíció logikáján alapult. Először meghatározták a maximális növekedési ütemű megoldást, s ennek alapján, valamelyest eltérő csoportosítást alkalmazva, kiválasztották a termékek és tevékenységek első osztályba sorolandó részét. Ezek sorait és oszlopait eliminálva folytatták az eljárást a mátrixok fennmaradó részével, így azonosítva a magasabb osztályú termékeket és tevékenységeket. Az input-output modell esetén nem kell előállítani az egyensúlyi megoldásokat. A termékek ilyen célú előrendezésének feladatát maga a kanonikus dekompozíció látja el. Ennek ismeretében a termékeket (és a hozzájuk tartozó eljárásokat) a kanonikus blokkok sajátértékei alapján már egyértelműen standard osztályokba sorolhatjuk. A Leontief-technológián alapuló *Neumann-modellben* ezek fogják megadni a lehetséges egyensúlyi megoldásokat.

4. A standard dekompozíció tulajdonságai

A fent jelzett kapcsolatok pontosabb leírásához és jellemzéshez mindenekelőtt felsoroljuk a standard dekompozíció könnyen igazolható, a definícióból következő fontos tulajdonságait.

1. Megállapítás (A standard dekompozíció jellemzői).

i) I_1^0 sohasem üres, és tartalmazza a bázistermékeket (de tartalmazhat luxustermékeket is);

ii) $0 < \lambda(\mathbf{A}_{11}^0) < \lambda(\mathbf{A}_{22}^0) < \ldots < \lambda(\mathbf{A}_{mm}^0) = \lambda(\mathbf{A})$, ahol $\lambda(\mathbf{A}) < 1$, ha az $\mathbf{A}$ mátrix produktív;

iii) ha $\mathbf{A}_{kk}^0$ reducibilis, akkor létezik irreducibilis blokkokból álló kanonikus dekompozíciója;

iv) az $\mathbf{A}_{kk}^0$ kanonikus dekompozíciójában a főátlóban szereplő $\mathbf{A}_{jj}^k$ mátrixok domináns sajátértékei között a $\lambda_j^k \leqq \lambda_1^k$ nagyságrendi reláció fog teljesülni minden j esetén;

v) mivel *reguláris* kanonikus dekompozícióból indultunk ki, ezért egyetlen I_k^0 standard blokk $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együttható mátrixában sem szerepelhet olyan független

[6] Az I-O technológia kibocsátási együttható mátrixa egységmátrix, így eleve kanonikus dekompozícióban adott.

alblokk, amelynek domináns sajátértéke kisebb, mint $\lambda_k = \lambda_1^k$. (Az $\mathbf{A}$ mátrix kanonikus dekompozíciójában ugyanis ezeknek – a korábbi megállapodás értelmében – előbb kell szerepelniük.) Ha tehát az $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együttható mátrix *reducibilis*, akkor csak a következő két eset valamelyike lehetséges:

a) $\mathbf{A}_{kk}^0$ kanonikus dekompozíciójában csak olyan, egymástól kölcsönösen független blokkok szerepelnek, amelyeknek egyaránt λ_k a domináns sajátértéke, vagyis ugyanakkora az önmegújító potenciálja ($\mathbf{A}_{kk}^0$ blokkdiagonális mátrix);

b) az $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrixnak létezik olyan

$$\mathbf{A}_{kk}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^k & \mathbf{A}_{12}^k \\ 0 & \mathbf{A}_{22}^k \end{pmatrix}$$

felbontása, amelynek az I_1^k blokkja egymástól kölcsönösen független, azonosan λ_k domináns sajátértékű blokkokból tevődik össze (*elsődleges k*-ad osztályú termékek), az I_2^k blokkja pedig olyan (*másodlagos*) termékekből, amelyek termeléséhez szükség van *elsődleges k*-ad osztályú termékre. Másképpen fogalmazva: ha az $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrix kanonikus dekompozíciója főátlójában vannak olyan alblokkok, amelyek domináns sajátértéke λ_k-val egyenlő, két eset lehetséges. Az adott blokk termékei az első és a többi elsődleges termék blokkjától független, szintén elsődleges termékek vagy olyan másodlagos termékek, amelyek előállításához feltétlenül szükség van valamelyik elsődleges blokk termékére.[7]

Az utolsó a standard dekompozíció legfontosabb, kritikus sajátossága. Emiatt a főátlóban szereplő $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrixok, ha dekomponálhatók, minden igazán fontos tulajdonságukban meg fognak egyezni a *Sraffa-típusú* mátrixokkal, így azok általánosításának tekinthetők.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező ráfordítási együttható mátrixokat ***kvázi Sraffa-típusú mátrixoknak*** nevezzük, amelyek általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$, a másodlagos termékektől független ($\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}$) ***elsődleges termékek*** I_1 blokkjának ráfordítási együttható mátrixa ($\mathbf{A}_{11}$) irreducibilis, vagy irreducibilis blokkokból álló diagonális mátrix, és minden ***másodlagos termék*** (I_2 blokk) termeléséhez szükség van elsődleges termékre, azaz $\mathbf{A}_{12} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \neq \mathbf{0}$.

7 Morishima az elsődleges termékeket „igazi” (true) k-ad osztályú, a másodlagosakat „félig” (semi) k-ad osztályú termékeknek nevezte.

2. Megállapítás (A standard osztályokat alkotó Sraffa- és a kvázi Sraffa-mátrixok közös tulajdonságai).

Legyen $\mathbf{A}$ egy olyan valódi, vagy kvázi Sraffa-típusú ráfordítási együttható mátrix, amelyben a luxus-, illetve a másodlagos termékek profitpotenciálja nem kisebb, mint a bázis-, illetve az elsődleges termékeké, azaz $\lambda^0 = \lambda_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11}) \geqq \lambda(\mathbf{A}_{22}) = \lambda_2 > 0$.

i) a másodlagos termékek termeléséhez mindig szükség van elsődleges termékekre;

ii) ha az I_2 blokkba tartozó termékek növekedési potenciálja nem kisebb az I_1 blokkénál, akkor a $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sajátérték-egyenlet megoldása csak $\lambda = \lambda_1$ és $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0})$ lehet;

iii) ezek között van olyan is, amelyben $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$;

iv) a $\lambda\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{A}$ egyenletet kielégítő nemnegatív $\mathbf{p}$ sajátvektorban $\mathbf{p}_1$ csak akkor lehet legalább féligpozitív ($\mathbf{0}$-tól különböző), ebből adódóan $\lambda = \lambda_1$, ha $\lambda_2 < \lambda_1$, vagy az I_2 blokkon belül létezik olyan, a többitől független alblokk, amelynek domináns sajátértéke kisebb, mint λ_1;

v) a $\lambda_1\mathbf{p} \leqq \mathbf{p}\mathbf{A}$ egyenlőtlenséget kielégítő nemnegatív $\mathbf{p}$ vektorok között mindig van olyan, amelyben $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$.

A kvázi Sraffa-típusú mátrixokban, vagyis az elsőnél magasabb osztályú standard blokkokban, nincsenek ugyan bázistermékek, de az *elsődleges termékek* sok tekintetben betöltik a *bázistermékek* szerepét, a *másodlagos termékek* pedig az *elsőrendű luxustermékekét*. Ha pedig $\mathbf{A}$ helyén az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ teljes körű ráfordítási együttható mátrix szerepel, akkor az elsődleges termékek olyanok lesznek, mint a létfenntartó termékek. Egyedül az elsődleges termékek ráfordítási együtthatói határozzák meg a növekedési ütemet és a profitrátát, valamint egyensúlyban csak elsődleges termékeket termelhetnek.

Mindezen megállapítások helyességét, illetve a kvázi Sraffa-mátrixok további fontos tulajdonságait a következő tételben igazoljuk. A beágyazott dekompozíciók miatt az alkalmazott jelölések bonyolultabbá válnak. A részletek közötti eligazodásban, a jelölések és így az érvelések követésében segíthet az olvasónak, ha a tétel megfogalmazása és bizonyítása előtt áttekinti a részletesen, osztályokra és azon belül elsődleges és másodlagos termékek szerint (amelyek nem mindig léteznek) felbontott $\mathbf{A}$ mátrixot, illetve $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ vektorokat. Ezt láthatjuk a 1. táblázatban. Az osztályok szerinti felbontást az alsó indexek, az osztályokon belüli további, elsődleges (bázis) és másodlagos (luxus) termékek szerinti felbontást az e (b) és az m (l) felső indexek jelölik.

A táblázat egyes blokkjai összevonhatók, például

$$\mathbf{A}_{kk}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{kk}^{11} & \mathbf{A}_{kk}^{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{kk}^{22} \end{pmatrix}.$$

				I_1^0		I_2^0		$\cdots$	I_k^0		$\cdots$
				I_1^b	I_1^l	I_2^e	I_2^m	$\cdots$	I_k^e	I_k^m	
				$\mathbf{x_1}$		$\mathbf{x_1}$		$\cdots$	$\mathbf{x_k}$		
				$\mathbf{x_1}^1$	$\mathbf{x_1}^2$	$\mathbf{x_2}^1$	$\mathbf{x_2}^2$	$\cdots$	$\mathbf{x_k}^1$	$\mathbf{x_k}^2$	
I_1^0	I_1^b	$\mathbf{p}_1$	$\mathbf{p_1^1}$	$\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{11}^{12}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{12}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{12}$	$\cdots$
	I_1^l		$\mathbf{p}_1^2$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{11}^{22}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{21}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{22}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{21}$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{22}$	$\cdots$
I_2^0	I_2^e	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_2^1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{22}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{22}^{12}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{12}$	$\cdots$
	I_2^m		$\mathbf{p}_2^2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{22}^{22}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{21}$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{22}$	$\cdots$
$\cdots$				$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
I_k^0	I_k^e	$\mathbf{p}_k$	$\mathbf{p}_k^1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{kk}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{kk}^{12}$	$\cdots$
	I_k^m		$\mathbf{p}_k^2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{kk}^{22}$	$\cdots$
$\cdots$				$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

1. táblázat. A termékindexek, az ár- és a termelésiszint-vektorok, valamint az $\check{\mathbf{A}}$ mátrix standard osztályok, illetve elsődleges és másodlagos termékek szerinti felbontása (részlet)

3. Tétel (A kvázi Sraffa-típusú mátrixok tulajdonságai). *Legyen $\lambda^0 = \lambda(\mathbf{A}) > 0$ az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértéke, és $\lambda^0 = \lambda_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11})$, valahányszor $\mathbf{A}$ reducibilis, ahol $\mathbf{A}_{11}$ az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris kanonikus dekompozíciójában az első blokk.*

A) Tekintsük az $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ és $\lambda\mathbf{x} \geqq \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőtlenség-rendszer lehetséges megoldásait.

i) A fenti egyenlőtlenség-rendszernek egyedül $\lambda = \lambda^0$ mellett van megoldása, az egyenlőtlenség $\lambda^0\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőségként teljesülhet csupán, és így $\mathbf{x}$ csak a domináns sajátértékhez tartozó jobb oldali sajátvektor lehet.

ii) Esetünkben csak a domináns sajátértékhez tartozhat nemnegatív jobb oldali sajátvektor, ezért

$$\lambda^0 = \min\{\lambda : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \lambda\mathbf{x} \geqq \mathbf{A}\mathbf{x}\},$$

vagyis

$$\rho^0 = \max\{\rho : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \geqq (1+\rho)\mathbf{A}\mathbf{x}\},$$

ami azt jelenti, hogy $\rho^0 = 1/\lambda^0 - 1$ a legnagyobb egyöntetű növekedési ütem.

iii) Ha vannak másodlagos termékek is, akkor $\mathbf{x}$ elsődleges és a másodlagos termékek szerinti $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)$ felbontásában $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ és $\lambda^0\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1$ szükségképpen.

iv) A λ^0-hoz tartozó $\mathbf{x}$ *sajátvektorok között van olyan* maximális tartójú,[8] *amelyben minden elsődleges termék kibocsátása pozitív, vagyis* $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

B) Tekintsük a $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ *és* $\lambda\mathbf{p} \leqq \mathbf{pA}$ *egyenlőtlenség-rendszer lehetséges megoldásait.*

i) A fenti egyenlőtlenség-rendszer λ-ban maximális megoldása λ^0, vagyis

$$\lambda^0 = \max\{\lambda : \exists\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \lambda\mathbf{p} \leqq \mathbf{pA}\}.$$

Ebből adódóan

$$\pi^0 = \min\{\pi : \exists\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \leqq (1+\pi)\mathbf{pA}\},$$

azaz $\pi^0 = 1/\lambda^0 - 1$ a legkisebb (garantált) profitráta, amely esetén létezik a $\mathbf{p} \leqq (1+\pi)\mathbf{pA}$ *feltételt kielégítő, legalább féligpozitív árvektor.*

ii) Ha $\mathbf{A}$ *irreducibilis, akkor a* $\mathbf{p}^0 \geq \mathbf{0}$, $\lambda^0\mathbf{p}^0 \leqq \mathbf{p}^0\mathbf{A}$ *feltételek szükségképpen a tőkeérték-arányos árakat meghatározó* $\lambda^0\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{A}$ *egyenlőség formájában teljesülnek, ahol* $\mathbf{p}^0$ *a* λ^0 *domináns sajátértékhez tartozó pozitív bal oldali sajátvektor. A* λ^0 *domináns sajátértékhez akkor is található pozitív* $\mathbf{p}$ *bal oldali sajátvektor, ha csak elsődleges termékek vannak.*

iii) Ha vannak másodlagos termékek, a λ^0 *domináns sajátértékhez akkor és csak akkor található* $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ *sajátvektor, ha* $\lambda_2 < \lambda_1 = \lambda^0$.

iv) Ha vannak másodlagos termékek, akkor a $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \lambda\mathbf{p} = \boldsymbol{Ap}$ *sajátérték-egyenletet kielégítő* $\mathbf{p}$ *sajátvektorban* $\mathbf{p}_1$ *csak akkor lehet legalább féligpozitív, és ebből adódóan* $\lambda = \lambda_1 = \lambda^0$, *ha az alábbiak valamelyike teljesül:*

a) $\lambda_2 < \lambda_1$, *és minden másodlagos termék előállításához szükség van elsődleges termékre;*

b) az I_2 *blokkon belül van olyan, a többi másodlagos terméktől független alblokk, amelynek a domináns sajátértéke kisebb, mint* λ_1.

Ellenkező esetben csak a $\lambda = \lambda_2$ *és* $\mathbf{p} = (\mathbf{0}, \mathbf{p}_2)$, $\mathbf{p}_2 \geq \mathbf{0}$ *tőkeérték-arányos árak léteznek.*

v) Az egyensúlyi árak $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, $\lambda^0\mathbf{p} \leqq \mathbf{pA}$ *feltételeinek viszont akkor is mindig van olyan megoldása, amelyben* $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$, *így* $\lambda^0\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{11}$ *szükségképpen, ha vannak másodlagos termékek.*

vi) Egyidőszakos tőkemegtérülés esetén a ricardói, illetve a marxi termelési árak léteznek és pozitívak minden $\pi < \pi^0 = 1/\lambda^0 - 1$ esetén feltéve, hogy a munkaerő nélkülözhetetlen).

[8] Az n elemű nemnegatív $\mathbf{a}$ vektor *tartója* azon i indexek halmaza, $S(\mathbf{a})$, amelyek esetén $a_i > 0$.

C) Tekintsük most a stacionárius egyensúly komplementaritási megkötésekkel kiegészített

$$\text{(EP)} \quad \mathbf{x} \geqq \alpha \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \textit{és} \quad \text{(ED)} \quad \mathbf{p} \leqq \alpha \mathbf{p}\mathbf{A}$$

feltételeit.

i) Az $\alpha^0 = 1/\lambda^0$ skalár az egyetlen stacionárius egyensúlyi tényező.

ii) Ha csak elsődleges termékek vannak, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix λ^0 domináns sajátértékéhez tartozó, maximális tartójú $\mathbf{x}$, $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ jobb és bal oldali sajátvektorok α^0-lal együtt egyenlőség formájában elégítik ki a stacionárius egyensúly (EP) *és* (ED) *feltételeit, ugyanúgy, mint a stacionárius Leontief-modellben.*

iii) Ha vannak másodlagos termékek is, akkor az $\mathbf{A}_{11}$ mátrix λ^0 domináns sajátértékéhez tartozó maximális tartójú $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ jobb és bal oldali sajátvektorokból képezhetünk α^0-lal társítható, az (EP) *és* (ED) *feltételeket kielégítő $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0})$ tevékenységszint- és $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ árvektort, ahol $\mathbf{p}_2$ értéke nem egyértelműen meghatározott. A termékmérlegek és az elsődleges termékek árainak egyensúlyi feltételei egy ilyen megoldásban mind egyenlőségek formájában teljesülnek. $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ mindig lehetséges megoldás, de $\mathbf{p}_2$ félig-, illetve teljesen pozitív vektor is lehet. Ha $\lambda_2 < \lambda_1$, és minden másodlagos termék előállításához szükség van elsődleges termékre, akkor a másodlagos termékek árai mind pozitívak is lehetnek, és az árak egyensúlyi feltételei egyenlőségekként teljesülhetnek.*

Bizonyítás:

ad A) Ha $\mathbf{A}$ *irreducibilis*, akkor $\mathbf{x}$ szükségképpen pozitív, ezért $\lambda'\mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x}$ minden $\lambda' > \lambda$ esetén, így – a Perron–Frobenius-tételek értelmében – $\lambda = \lambda^0$. Ugyanezen tételek értelmében a $\lambda\mathbf{x} \geq \mathbf{A}\mathbf{x}$ féligegyenlőtlenségből $\lambda > \lambda^0$ következne, ami ellentmondana annak, hogy λ^0 az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértéke.

Ha $\mathbf{A}$ *reducibilis*, akkor két eset lehetséges: a) csak elsődleges termékek vannak, b) vannak másodlagos termékek is.

a) Vegyük az $\mathbf{A}$ mátrix kanonikus dekompozícióját. Feltevésünk szerint $\lambda_j = \lambda_1 = \lambda^0$ minden $j > 1$ esetén, és $\lambda\mathbf{x}_j \geqq \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j$, ahol $\mathbf{A}_{jj}$ irreducibilis. Ezért az előző lépésben bizonyítottak értelmében $\lambda = \lambda^0$, és $\lambda\mathbf{x}_j = \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j$ szükségképpen, valahányszor $\mathbf{x}_j > \mathbf{0}$, és legalább egy j esetén ilyennek kell lennie, mivel $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Ha pedig $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$, akkor eleve csak egyenlőség formájában teljesülhet az egyenlőtlenség.

b) Bontsuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot és a $\lambda\mathbf{x} \geqq \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőtlenséget az elsődleges és másodlagos termékek szerint:

$$\lambda\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2,$$
$$\lambda\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2.$$

$\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$ szükségképpen, ha $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$, mivel a másodlagos termékek előállításához szükség van elsődleges termékre: ha $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilis, akkor mindegyikre, ha $\mathbf{A}_{11}$ reducibilis, akkor valamelyik, mondjuk a j-edik blokk termékeire. Ez azt jelentené, hogy az adott elsődleges termékekből a saját felhasználáson felül többletet kellene előállítani, vagyis a $\lambda\mathbf{x}_j \geq \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j$ féligegyenlőtlenségnek kellene teljesülnie, amiből ismét a feltevésünknek ellentmondó $\lambda > \lambda^0$ reláció következne. $\mathbf{x}_2$ tehát csak $\mathbf{0}$ lehet, és az első feltételcsoport a $\lambda\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1$ egyenlőtlenségre redukálódik. Ha $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilis, akkor az *i)* pontban igazoltak miatt egyenlőségként kell teljesülnie. Ha $\mathbf{A}_{11}$ reducibilis, ugyanez igaz lesz az olyan alblokkjaira, amelyek esetén $\mathbf{x}_j > \mathbf{0}$. Ha pedig $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$, akkor a blokkra vonatkozó feltétel eleve egyenlőségre redukálódik.

A maximális tartójú megoldás létezésére konstruktív igazolást adunk. Az elsődleges termékek $\mathbf{A}_{jj}$ ráfordítási együttható mátrixai mind irreducibilisek, és λ^0 a domináns sajátértékük. Ezért mindegyikükhöz tartozik pozitív $\mathbf{x}_j$ sajátvektor. A másodlagos termékekhez pedig rendeljünk nullvektorokat. Ezeket egy vektorba rendezve kapjuk az állításban jelzett maximális tartójú sajátvektort.

ad B) Az *v)*-ben megfogalmazott állítások a Perron–Frobenius-tételek *iv)* pontjának az egyenes következményei.

A *vi)* állítást a következőképpen láthatjuk be. A λ^0 domináns sajátértékhez tartozik pozitív jobb oldali sajátvektor, legyen ez $\mathbf{x}^0$. $\mathbf{x}^0$-ra tehát teljesül a $\lambda^0\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}^0$ sajátérték-egyenlőség. Ennek mindkét oldalát az áregyenlőtlenségnek eleget tevő $\mathbf{p}^0$ vektorral balról beszorozva kapjuk: $\lambda^0\mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{A}\mathbf{x}^0$, amelynek értéke pozitív lesz, mivel feltevés szerint mind $\mathbf{p}^0$, mind $\mathbf{x}^0$ pozitív vektor. Az áregyenlőtlenség mindkét oldalát az $\mathbf{x}^0$ vektorral jobbról beszorozva pedig a $\lambda^0\mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 \leqq \mathbf{p}^0\mathbf{A}\mathbf{x}^0$ egyenlőtlenség adódik, ami előbbi megállapításunk folytán egyenlőség formájában teljesül. A $\lambda^0\mathbf{p}^0 \leqq \mathbf{p}^0\mathbf{A}$ egyenlőtlenségek pozitív súlyozott összegeként pedig csak akkor kaphatunk egyenlőséget, ha a feltételek mindegyike eleve egyenlőség formájában teljesült. A fenti igazolást a $\lambda_j\mathbf{p}_j \leqq \mathbf{p}_j\mathbf{A}_{jj}$ egyenlőtlenségekre megismételve ugyanerre az eredményre jutunk, ha csak elsődleges termékek vannak, azaz $\mathbf{A}$ blokkdiagonális mátrix.

A *vii)* állítás igazolásához nézzük a $\mathbf{p}_2$ vektor meghatározását:

$$\lambda^0\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}.$$

Ha $\mathbf{p}_1$ pozitív, akkor $\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}$ szintén pozitív, mivel minden a másodlagos termékhez szükség van valamely elsődleges termékre. Ha $\lambda_2 < \lambda_1 = \lambda^0$, akkor a $(\lambda^0\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22})$ mátrixnak létezik nemnegatív inverze, és így a $\mathbf{p}_2$ értékét meghatározhatjuk a $\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}(\lambda^0\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22})^{-1}$ képlettel, ami szükségképpen pozitív vektor. Ha pedig feltesszük, hogy $\mathbf{p}_2$ pozitív, akkor a pozitív $\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}$ vektort $\mathbf{p}_2$ meghatározásából elhagyva a $\lambda^0\mathbf{p}_2 > \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből következik, hogy $\lambda_2 < \lambda^0 = \lambda_1$.

A *viii)* állítást hasonló utat követve bizonyíthatjuk, kihasználva azt, hogy az alblokkok együttható mátrixai irreducibilisek, és I_2 minden alblokkja esetén van legalább egy olyan független alblokk I_1-ben, amelynek a termékeire az előbbibe tartozók előállításához szükség van. Ezek alapján az állítás igazolását az olvasóra hagyjuk.

A *ix)* állítás egyszerűen belátható. Írjuk fel az árakat meghatározó egyenlőtlenségeket elsődleges és másodlagos termékek szerinti felbontásban:

$$\lambda^0\mathbf{p}_1 \leqq \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{11},$$
$$\lambda^0\mathbf{p}_2 \leqq \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}.$$

A *vi)* állításból következően az elsődleges termékek blokkjához mindig található olyan $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ megoldás, amely esetén a feltételeknek szükségképpen egyenlőségek formájában kell teljesülniük. Nem kell mást tennünk, mint kiegészítenünk ezeket a $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ vektorral.

A *x)* állítás igazolásához nézzük például a marxi termelési árak képletét, és rendezzük $\mathbf{p}$-re:

$$\mathbf{p} = (1+\pi)wl\,[\mathbf{E} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}.$$

(A ricardói árak meghatározása esetén w előtt nem szerepel az $[1+\pi]$ szorzó). A Perron–Frobenius-tételekből tudjuk, hogy az $[\mathbf{E} - (1+\pi)\mathbf{A}]$ mátrixnak akkor és csak akkor létezik nemnegatív (diagonálisában pozitív) inverze, ha $(1+\pi) < 1/\lambda(\mathbf{A}) = 1/\lambda^0$, ami igazolja állításunkat. Elvben, mint láttuk, létezhetnek nagyobb profitrátával rendelkező tőkeérték-arányos árrendszerek is. Ezekben az elsődleges termékek ára csak nulla lehet.

ad C) Az *i)* pontban igazoltuk, hogy az (EP) feltételnek egyedül $\lambda = \lambda^0 = 1/\alpha^0$ mellett van megoldása, a feltétel szükségképpen egyenlőség formájában teljesül, továbbá az $\mathbf{x}$ vektor elsődleges és másodlagos termékek szerinti felbontásában csupán $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ lehet. A *iv)* és *ix)* pontokban pedig igazoltuk olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ vektorok létezését, amelyekből képezhetünk α^0-lal társítható $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0})$ egyensúlyi tevékenységszinteket és $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ árakat, valamint azt is igazoltuk, hogy ezek esetében az (EP) és az (ED) egyenlőtlenségek elsődleges termékekre vonatkozó feltételei szükségképpen egyenlőségek formájában teljesülnek. Az egyensúlyi árakra vonatkozó megállapítások helyessége közvetlenül adódik a *viii)* és *ix)* állításokból.

❑

Megjegyzés:

Egy Sraffa-típusú ráfordítási együttható mátrix első osztályú (I_1^0) blokkjának $\mathbf{A}_{11}^0$ ráfordítási együttható mátrixa nemcsak kvázi, hanem valódi Sraffa-típusú mátrix lesz, és az elsődleges termékek maguk a bázistermékek. Az elsőrendű luxustermékek a másodlagos termékek megfelelői lesznek.

A következőkben bemutatjuk, hogyan használhatjuk fel a standard dekompozíciót a termelési árak Sraffa-féle elemzésében, illetve a Neumann-modell Leontief-technológiát feltételező változatának vizsgálatára. Az utóbbi kapcsolatot teremt az úgynevezett Marx–Neumann-modell többszörös megoldásainak meghatározására kidolgozott dekompozíciós eljárás és a standard dekompozíció között. Terjedelmi korlátok miatt mindkét kérdést csak vázlatosan mutatjuk be.

5. A standard dekompozíció felhasználása a termelési árak elemzésére

Sraffa az $\mathbf{s} = (1+\pi)\mathbf{A}\mathbf{s}$ egyenlőséggel definiált $\mathbf{s}$ standard árukosarat ideális ármércejószágnak tekintette a bevezetőben említett okok miatt. A profitráta és a reálbér összefüggésére Sraffa a standard árukosarakat felhasználva az

$$1 = \frac{\pi}{\pi_s} + w_s = \frac{\pi}{\pi_s} + (1+\pi)w_m$$

összefüggést vezette le, ahol π_s valamelyik standard arány. Ez voltaképpen megegyezik azzal, hogy az árak szintjét az adott standard arányhoz tartozó standard árukosárral, pontosabban a $\mathbf{p}\mathbf{s} = 1$ egyenlőséggel rögzítjük.

Ám, mint jeleztük, nem mindegy, melyik standard arányt és árukosarat választjuk ki, ha több is létezik. A bér-profit átváltási görbe ugyanis ettől függően eltérően alakul. Az igazolt megállapítások alapján nem szorul különösebb bizonyításra, hogy a lehetséges Sraffa-féle standard arányok a λ_k $(k = 1, 2, \dots, m)$ domináns sajátértékekből képzett $\pi_k = 1/\lambda_k - 1$ skalárok lesznek. A k-adik arányhoz tartozó $\mathbf{s}^k$ standard árukosár $\mathbf{s}^k = (\mathbf{s}_1^k, \mathbf{s}_2^k, \dots, \mathbf{s}_k, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ formában adható meg, ahol az $\mathbf{s}_1^k, \mathbf{s}_2^k, \dots, \mathbf{s}_k$ összetevőket az

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{E} - (1+\pi_k)\mathbf{A}_{11}^0\right]\mathbf{s}_1^k &= (1+\pi_k)(\mathbf{A}_{12}^0\mathbf{s}_2^k + \mathbf{A}_{13}^0\mathbf{s}_3^k + \dots + \mathbf{A}_{1k}^0\mathbf{s}_k), \\
\left[\mathbf{E} - (1+\pi_k)\mathbf{A}_{22}^0\right]\mathbf{s}_2^k &= (1+\pi_k)(\mathbf{A}_{23}^0\mathbf{s}_3^k + \dots + \mathbf{A}_{2k}^0\mathbf{s}_k), \\
&\vdots \\
\left[\mathbf{E} - (1+\pi_k)\mathbf{A}_{kk}^0\right]\mathbf{s}_k &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

egyenletrendszer rekurzív megoldása szolgáltatja. Az így meghatározott $\mathbf{s}^k$ vektor és π_k mellett nyilván teljesülni fog a standard rendszer által kielégítendő $\mathbf{s}^k = (1+\pi_k)\mathbf{A}\mathbf{s}^k$ egyenlőség.

A π_k standard arányok a profitráta olyan felső határértékei lesznek, hogy tetszőleges pozitív bérráta mellett a k-adik blokkal bezárólag minden terméknek létezni fog pozitív termelési ára. Egyszerűen megmutatható ugyanis, például a termelési árak marxi meghatározása esetén, hogy a

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1\left[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}_{11}^0\right] &= (1+\pi)wl_1,\\
\mathbf{p}_2\left[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}_{22}^0\right] &= (1+\pi)(\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}^0+wl_2),\\
&\ \ \vdots\\
\mathbf{p}_k\left[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}_{kk}^0\right] &= (1+\pi)\left(\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{1k}^0+\cdots+\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1k}^0+wl_k\right)
\end{aligned}$$

egyenletrendszernek mindaddig létezik pozitív megoldása tetszőleges pozitív w mellett, amíg π a $(-1,\pi_k)$ nyílt intervallumba esik.

Rögzítsük a w névleges bérráta értékét egységnyi szinten. Könnyen belátható, hogy π értékével együtt nőni fognak az árak és így csökkenni fog a reálbér. Ahogy a $\pi=0$ szintről elindulva növeljük a profitrátát, amint π átlép egy-egy π_l $(l=m,m-1,\dots,2)$ kritikus értéket, az adott l-edik osztály termékei kiesnek azon termékek közül, amelyek termelési ára π_l vagy nála nagyobb profitráta mellett pozitív lehet. Fordított irányban haladva, egy alacsony bérrátából kiindulva, ugyanezt tapasztaljuk: a reálbérrel együtt nőnek a termelés költségei, ezáltal csökken a profitráta, ami egyre több luxustermék termelését teszi jövedelmezővé.

Az egyensúlyi reálbér- és profitráta közti kapcsolatot (átváltási lehetőséget) és az egyensúlyban alkalmazható eljárások fokozatos szűkülését az 1. ábrán szemléltetjük. Alapul vett példánkban négy lehetséges standard blokk, azaz standard rendszer van. Az első diagramon a bér és az árak szintjét Sraffa nyomán a $w_m=(1-\pi/\pi_s)/(1+\pi)$ összefüggéssel határoztuk meg, ahol π_s az ármércének választott standard árukosárhoz tartozó arány. A második diagramon a reálbér szintjét a fogyasztás φ_s szintjével mértük. Az alternatív átváltási görbék azt jelzik, milyen tartományban és hogyan változhat egymás rovására a profitráta és a reálbér, attól függően, mely standard osztályokba tartozó termékeket termelik pozitív árak és azonos profitráta mellett. Megjegyezzük, hogy az ábrán szereplő görbék „kiegyenesednének”, ha a termelési árak marxi meghatározása helyett a ricardóit alkalmaznánk; például az első diagramon ábrázolt bér-profit összefüggés a $w_s=1-\pi/\pi_s$ lineáris alakot öltené.

6. A stacionárius egyensúlyi megoldások elemzése a Neumann–Leontief-modellben

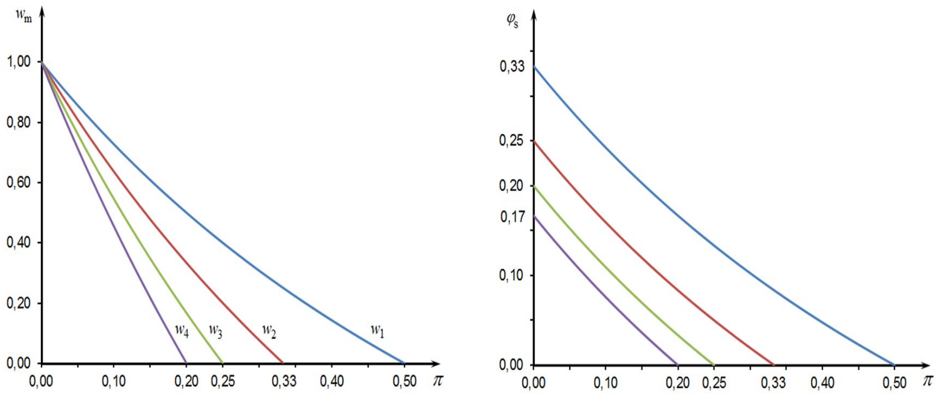
Egyidőszakos termelési periódus és tőkemegtérülés esetén az egyensúly *ex ante* szellemben adott feltételeit az alábbi formában írtuk fel:

$$\alpha>0,\quad \mathbf{x},\mathbf{p}\geqq\mathbf{0},\quad \mathbf{1x}=\mathbf{p1}=1,$$

$$\mathbf{x}\geqq\alpha\check{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \tag{MNL-P}$$

$$\mathbf{p}\leqq\alpha\mathbf{p}\check{\mathbf{A}}, \tag{MNL-D}$$

$$\mathbf{px}>0. \tag{KMT}$$



1. ábra. A profitráta és a reálbér, illetve fogyasztási szint közötti összefüggés

A kapott modellt, a matematikai formák hasonlósága okán, *Marx–Neumann–Leontief-modellnek* nevezzük. Ezek ugyanis egy olyan sajátos Neumann-modell egyensúlyi feltételei, amelyben a technológia Leontief-féle input-output modellel adott. Neumann hasonló felépítésű modelljében a technológia $\mathbf{K}$ kibocsátási és $\check{\mathbf{R}}$ ráfordítási együttható mátrixokkal definiált, ahol $\check{\mathbf{R}}$ – az $\check{\mathbf{A}}$ mátrixhoz hasonlóan – a szükséges fogyasztást is tartalmazza. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix csak a termelési eszközök ráfordítási együtthatóit tartalmazza, a modellt *kvázi Neumann–Leontief-modellnek* nevezzük. Ilyenre emlékeztet Sraffának a fent bemutatott standard rendszeren alapuló elemzése, ami lehetővé teszi, hogy a termelési árak Sraffa-féle *ex post* elemzését összekapcsoljuk a stacionárius növekedés *ex ante* szemléletű NL-modelljével.

A stacionárius növekedési modellben az egyensúlyi árak követelménye $\mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{p} \leqq \alpha\mathbf{p}\check{\mathbf{A}}$ formát ölti. Tehát nem várjuk el minden termék árának pozitivitását, és azt sem, hogy termelésük azonos profitrátát eredményezzen. Ugyanakkor, mintegy ezt a lazítást ellensúlyozandó, a komplementaritási előírásokkal összekötjük egymással az egyensúlyi árak és tevékenységek meghatározását. Ez biztosítja, hogy az egyensúlyi megoldásban pozitív értéket kapó változókhoz tartozó feltételek egyenlőségek formájában fognak teljesülni, ugyanúgy, mint az *ex post* szemléletű Leontief-modellekben.

A kvázi NL-modell nem más, mint az MNL-modell φ_s= 0 esetben kapott határértéke, amikor az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ együttható mátrixból $\mathbf{A}$ lesz. A létfenntartó termékek nem feltétlenül lesznek mind bázistermékek, ezért az $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ mátrix reducibilissá válhat, ahogy a szükséges fogyasztás szintje nullává válik. Ilyen esetben a létfenntartó termékek által meghatározott eddigi első, irreducibilis kanonikus blokk (I_1^1) felbomlik. Vagyis e termékcsoport tekintetében az $\mathbf{A}$ és az $\check{\mathbf{A}}$ kanonikus dekompozíciójának szerkezete eltérhet egymástól. Mivel a többi termékcsoport változatlan marad, ezért ez csak annyit jelent, hogy $\alpha(\varphi_s)$-nek a $\varphi_s = 0$ esetén elért felső határa mellett a kvázi NL-modellnek lehetnek ennél nagyobb egyensúlyi tényezővel rendelkező megoldásai is. Az MNL-modell olyan megoldásai, amelyekben luxustermékeket termelnek, mindig megoldásai lesznek a kvázi NL-modellnek is. Azok a luxustermékek ugyanis, amelyek az $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ mátrixban φ_s valamely értéke mellett magasabb rendűek, az $\mathbf{A}$ mátrix standard dekompozíciójában is magasabb rendűek lesznek.

4. Tétel (Az MNL stacionárius modell megoldásainak jellemzői). *Az MNL modellben:*

i) *Legyen $\alpha_k = 1/\lambda_k$, $\mathbf{x}_k$ az $\mathbf{A}_{kk}^0$ ($\check{\mathbf{A}}_{11}^0$, ha $k = 1$) mátrix domináns sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektor. Az $\mathbf{x}_k$ vektorhoz mindig található olyan $\mathbf{p}_k \geq \mathbf{0}$ árvektor, amellyel együtt kielégítik a stacionárius állapot $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együtthatókkal felírt feltételeit, nevezetesen,*

$$\begin{aligned} \alpha_k > 0, \quad \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{1x}_k = \mathbf{p}_k\mathbf{1} = 1, \\ \mathbf{x}_k \geqq \alpha_k \mathbf{A}_{kk}^0 \mathbf{x}_k, \\ \mathbf{p}_k \leqq \alpha_k \mathbf{p}_k \mathbf{A}_{kk}^0, \\ \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0. \end{aligned}$$

ii) *A k-adik standard blokk (α_k,$\mathbf{x}_k$,$\mathbf{p}_k$) egyensúlyi megoldása mindig kiegészíthető olyan*

$$\mathbf{x}^k = (\mathbf{x}_1^k, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}^k, \mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})^T, \ \mathbf{p}^k = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}^k, \ldots, \mathbf{p}_m^k)$$

teljes méretű vektorokká, hogy a kapott $\mathbf{x}^k$ és $\mathbf{p}^k$ vektorok α_k-val együtt az $\check{\mathbf{A}}$ ráfordítási együttható mátrixszal adott modell megoldásai lesznek. Ezekben a vektorokban, mint a felírásukban jeleztük, $\mathbf{x}_l^k = \mathbf{0}$, ha $l > k$, és $\mathbf{x}_l^k \geqq \mathbf{0}$ egyébként, de $\mathbf{x}_1^k > \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}_l^k \geq \mathbf{0}$, ha az l-edik ($l < k$) blokk valamely termékére szükség van az $\mathbf{x}_k$-ban pozitív szinten termelt termékek előállításához. Ugyanakkor $\mathbf{p}_l^k = \mathbf{0}$, ha $l < k$, és $\mathbf{p}_l^k \geqq \mathbf{0}$ minden $l > k$ esetén.

iii) *Legyen az (α, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$) együttes az $\check{\mathbf{A}}$ ráfordítási együttható mátrixszal adott modell olyan megoldása, amelyben $\mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}_l^k = \mathbf{0}$ minden $l > k$ esetén. Ekkor*

a) *α szükségképpen egyenlő α_k-val, az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ egyensúlyi vektorok k-adik standard blokkhoz tartozó összetevői, $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{p}_k$, valamint α_k az $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrixszal adott NL-modell, $k = 1$ esetén az $\check{\mathbf{A}}_{11}^0$ mátrixszal adott MNL-modell megoldása lesz.*

b) *$k > 1$ esetén mindazon termékek ára nulla lesz, amelyekre az $\mathbf{x}_k$-ban pozitív kibocsátással rendelkező termékek előállításához közvetlenül vagy közvetve szükség van.*

Bizonyítás:

ad i) Mindenekelőtt vegyük figyelembe, hogy a 3. Tétel értelmében az $\mathbf{x}_k$ vektorban csak elsődleges termékekhez tartozó elemek lehetnek pozitívak, de akár azok mindegyike is. Ugyanennek a tételnek a *ix)* pontjában pedig azt igazoltuk, hogy mindig létezik olyan, az egyensúlyi árrendszer feltételeit kielégítő árvektor, amelyben bármely, vagy akár az összes elsődleges termékek ára pozitív. Ezért az $\mathbf{x}_k$ sajátvektorhoz található olyan $\mathbf{p}_k \geq \mathbf{0}$ vektor, amely kielégíti a $\mathbf{p}_k \leqq \alpha_k \mathbf{p}_k \mathbf{A}^0_{kk}$ feltételeket és $\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0$, amit igazolnunk kellett.

ad ii) Konstruktív bizonyítást adunk. Megmutatjuk, hogyan szerkeszthető meg a tételben jelzett tulajdonságú $\mathbf{x}^k$ vektor. Helyettesítsünk α helyébe α_k-t az (MNL-P) egyenlőtlenség-rendszerben. Az $(\mathbf{E} - \alpha_k \check{\mathbf{A}}^0_{ll})$ mátrixoknak minden $l < k$ esetén ($k = 1$ esetben természetesen nincs ilyen l) létezik nemnegatív inverze, mivel $\alpha_l > \alpha_k$. Ezért $\mathbf{x}_k$ ismeretében a k-adik feltételtől visszafelé indulva minden $l < k$ esetén meghatározhatjuk az egyensúlyi feltételt akár egyenlőség, akár határozott egyenlőtlenség formájában kielégítő $\mathbf{x}^k_l \geqq \mathbf{0}$ vektorokat. Mivel pedig $\alpha_l < \alpha_k$ minden $l > k$ esetén ($k = m$ esetén természetesen nincs ilyen l), ezért ezeket a termékeket nem lehet α_k szinten újratermelni.

Nézzük most a $\mathbf{p}^k$ árakat meghatározó (MNL-D) feltételeket. $k = 1$ esetén a létfenntartó (bázis-) termékek ára mind pozitív, és ha vannak első osztályú elsődleges termékek, azok között is lehetnek olyanok, amelyek ára szintén pozitív lehet. $k > 1$ esetén, mivel a k-adik osztály profitpotenciálja kisebb a létfenntartó termékekénél, és az elsődleges termékek ára legalább részben pozitív, a létfenntartó (bázis-) termékek ára csak nulla lehet. Fokozatos levezetéssel megmutatható (lásd fent), hogy ebből következően minden $l < k$ osztály termékeinek az ára szintén csak nulla lehet (ezek feleslegben is előállíthatók, tehát szabad javak). $l > k$ esetén a $\mathbf{p}_l$ árak helyébe nulla vektorokat tehetünk, a feltételek ugyanis teljesülni fognak, hiszen ezeket a termékeket úgysem termelik. Az így képzett $\mathbf{x}^k$ és $\mathbf{p}^k$ vektorok tehát kielégítik az (MNL-P) és (MNL-D) feltételeket. Mivel pedig $\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0$, ami részét képezi a $\mathbf{p}^k \mathbf{x}^k$ skaláris szorzatnak, így utóbbi értéke pozitív lesz. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbf{x}^k$ és $\mathbf{p}^k$ az α_k tényezővel együtt kielégíti a stacionárius állapot feltételeit.

ad iii) Mindenekelőtt vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{x}^k_l = \mathbf{0}$ minden $l > k$ esetén. Ezért a k-adik osztály esetén az egyensúlyi feltétel $\mathbf{x}_k \geqq \alpha \mathbf{A}^0_{kk}$ alakra redukálódik, ahol feltevésünk szerint $\mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}$. A 3. tétel értelmében az $\mathbf{x}_k$ vektorban csak elsődleges termékekhez tartozó elemek lehetnek pozitívak, és egyenlőtlenség csak az $\alpha = \alpha_k$ esetén állhat fenn. Így az előző pontban bizonyítottak következtében $\mathbf{p}_l = \mathbf{0}$ minden $l < k$ esetén. A $\mathbf{px} > 0$ egyensúlyi feltétel tehát csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0$. Ez pedig éppen az állításunkat igazolja, az $(\alpha_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k)$ együttes valóban kielégíti az egyensúly feltételeit az $\mathbf{A}^0_{kk}$ ráfordítási együttható mátrix esetén.

❑

A fentiek alapján a lehetséges egyensúlyi megoldásokat a következő formákban jeleníthetjük meg:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > \cdots > \alpha_m$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^2 \\ \mathbf{x}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^k \\ \mathbf{x}_2^k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^k \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^m \\ \mathbf{x}_2^m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{m-1}^m \\ \mathbf{x}_m^m \end{pmatrix}
$$

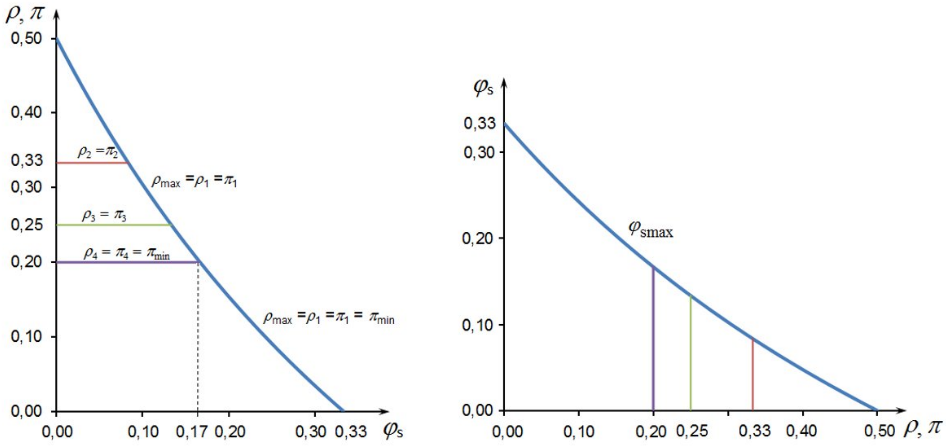
$$
\begin{aligned}
(\alpha_m): \qquad & \mathbf{p}^1 = \left(\mathbf{p}_1{}^1, \ldots, \mathbf{p}_k^1, \ldots, \mathbf{p}_{m-1}^1, \mathbf{p}_m^1\right), \\
& \vdots \\
(\alpha_k): \qquad & \mathbf{p}^k = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_k^k, \ldots, \mathbf{p}_{m-1}^k, \mathbf{p}_m^k\right), \\
& \vdots \\
(\alpha_{m-1}): \qquad & \mathbf{p}^{m-1} = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_{m-1}^{m-1}, \mathbf{p}_m^{m-1}\right), \\
(\alpha_m): \qquad & \mathbf{p}^m = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{p}_m^m\right),
\end{aligned}
$$

Az MNL-modell adott $\varphi_s > 0$ mellett lehetséges egyensúlyi tényezői közül a legnagyobb,

$$
\alpha(\varphi_s) = \max\left\{\alpha : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{1x} = 1, \mathbf{x} \geqq \alpha\left(\mathbf{A} + \varphi_s \mathbf{s}^c \circ \mathbf{l}\right)\mathbf{x}\right\}
$$

az $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ mátrix domináns sajátértékének reciproka. Induljunk el φ_s nullához közeli pozitív értékétől. Ahogy φ_s nő, $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ domináns sajátértéke előbb eléri $\mathbf{A}_{22}^0$ mátrixét, így az I_2^0 blokk termékei elsőrendű luxustermékekké válnak. Ezek bekerülnek az új I_1^0 blokkba, s helyükbe a korábbi I_3^0 blokkba tartozó termékek lépnek elő másodrendű luxustermékekké. Ettől kezdve tehát eggyel csökken a lehetséges egyensúlyi tényezők és megoldások száma. Tovább haladva, ahogy φ_s nő, a luxustermékek egymást követő blokkjai fokozatosan elsőrendűvé válnak, s egyre csökken az alternatív megoldások száma. Amikor φ_s eléri azt az értéket, amely esetén $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ domináns sajátértéke megegyezik az utolsó, $\mathbf{A}_{mm}^0$ blokkéval, már minden luxustermék elsőrendűvé válik, s ettől kezdve már egyértelműen meghatározott az egyensúlyi tényező. A φ_s növekedését követő változások, mindaddig, míg értéke pozitív, nem érintik az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ mátrix kanonikus dekompozícióját. A standard dekompozíciója azonban fokozatosan változik, egyre kevesebb osztályból fog állni, végül egyetlen osztályra szűkül.

A 2. ábrán szemléltetjük a $\rho = \pi$ egyensúlyi növekedési ütem, illetve profitráta és a φ_s fogyasztási szint között fennálló kölcsönös összefüggést. Az első diagramon a reálbért is képviselő φ_s fogyasztási szintet tekintjük exogén adottságnak, hasonlóan az MNL-modellhez.



2. ábra. Az MLN-modell egyensúlyi profit-, illetve növekedési rátái és a reálbér, illetve fogyasztási szint közötti összefüggés

Az alapul vett példában, mint látjuk, φ_s-nek a $[0; 0,17)$ intervallumba eső értékei mellett legalább két, eltérő α tényezőjű egyensúlyi megoldás létezik. Az egyik a növekedési tényező maximuma,

$$\alpha_{\text{max}} = \max\left\{\alpha : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{1x} = 1,\, \mathbf{x} \geqq \alpha \check{\mathbf{A}}_{11}(\varphi_s)\mathbf{x}\right\},$$

a másik pedig profittényező minimuma által meghatározott:

$$\beta_{\text{min}} = \min\left\{\beta : \exists\, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{p1} = 1,\, \mathbf{p} \leqq \beta \mathbf{p}\check{\mathbf{A}}_{11}(\varphi_s)\right\}.$$

A fenti intervallum egyes részeiben e kettő közé eső további megoldások is léteznek. α_{max} értéke a φ_s fogyasztási szinttel együtt változik, a többi állandó. Az $[0,17; 0,5]$ intervallumba eső φ_s értékek esetén viszont már csak egy megoldás van, itt $\alpha_{\text{max}} = \beta_{\text{min}}$.

A második diagramon az α egyensúlyi tényezőt, pontosabban az abból kapott $\rho = \pi = 1 - \alpha$ profit-, illetve növekedési rátát tekintettük külső adottságnak (mondjuk, a termelés bővülése a népesség növekedési üteméhez igazodik). A két diagram ugyanazt a viszonyt ábrázolja, azonban van köztük egy lényeges különbség. A másodikon, a luxustermék-blokkok sajátértékei által meghatározott szinguláris pontokat kivéve, a hozzárendelés egyértékű, azaz függvényről van szó. Ha csupán a φ_s maximumát adó megoldásokat, vagyis a

$$\varphi_{\text{smax}} = \max\left\{\varphi : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{1x} = 1,\, \mathbf{x} \geqq \alpha \check{\mathbf{A}}_{11}(\varphi_s)\mathbf{x}\right\},$$

feladat megoldásait (ahol α változó paraméter) ábrázolnánk, akkor ez a hozzárendelés minden lehetséges φ_s érték esetén egyértelmű lenne, tehát függvényt határozna meg.

Az optimális növekedés neoklasszikus modelljében Bruno (1969) megmutatta, hogy a hicksi „tényezőár" (bér-profit), illetve az „optimális transzformációs" (fogyasztás-felhalmozás) frontvonalak egymással duális viszonyban állnak és egybeesnek. A szükséges fogyasztást explicit formában megjelenítő Neumann-modell esetén Morishima (1971) $\alpha_{\max}$, illetve $\beta_{\min}$ meghatározásával kapott függvényeket javasolta a felhalmozás-fogyasztás, illetve a bér-profit átváltási frontvonalaknak tekinteni. Ezek meghatározása is egyfajta duális viszonyt tükröz, de – mint látjuk – nem esnek egybe. Morishima értelmezése azonban nem fogadható el, mert megmutatható, hogy a szükséges fogyasztás által meghatározott bérek csak a legnagyobb növekedési ütem esetén lehetnek pozitívak. Ezért Bromek (1974b), Morishimával szemben, a φ_{smax} meghatározásával adott függvényt és annak inverzét javasolta a *fogyasztás-felhalmozás* és *bér-profit frontvonalak* megfelelőinek tekinteni a Marx–Neumann-modell esetén (erről bővebben lásd Zalai (2011) tanulmányát).

Köszönetnyilvánítás:
Ezúton is szeretném megköszönni Móczár Józsefnek a dolgozat első változatához fűzött hasznos észrevételeit. Egyúttal az olvasó figyelmébe ajánljuk Móczár (1980) kapcsolódó tanulmányát. Ugyancsak köszönettel tartozom Csató Lászlónak mind hasznos észrevételeiért, mind a kézirat szerkesztésében nyújtott segítségéért.

Hivatkozások

Bromek, T. (1974a). Equilibrium levels in decomposable von Neumann models. In: *Łoś–Łoś (1974)*, 35–46.

Bromek, T. (1974b). Consumption-investment frontier in decomposable von Neumann models. In: *Łoś– Łoś (1974)*, 47–57.

Bruno, M. (1969). Fundamental duality relations in the pure theory of capital and growth. *Review of Economic Studies*, 1:39–53.

Gantmacher, F. R. (1967). *Theory of Matrices*. Science, Moscow, USSR.

Kurz, H. D., Salvadori, N. (1995). *Theory of Production. A Long-Period Analysis*. Cambridge University Press, New York.

Łoś, J., Łoś, M. W. (szerk.) (1974). *Mathematical Models in Economics*. North-Holland, Amsterdam, New York.

Móczár J. (1980). A Neumann-gazdaság egyensúlyi állapotainak meghatározása. *Egyetemi Szemle*, 2:41–56.

Morishima, M. (1971). Consumption-investment frontier, wage-profit frontier and the von Neumann growth equilibrium. In: Bruckmann, G., Weber, W. (szerk.) *Contributions to the von Neumann Growth Model, Supplement to Zeitschrift für Nationalökonomie*, Springer, New York, Vienna, 1:31–38.

Neumann J. (1965). *Válogatott előadások és tanulmányok*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by Means of Commodities*. Cambridge University Press, Cambridge. (Magyarul: Áruk termelése áruk révén. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1975.)

Zalai E. (2011). Az egyensúlyi ráták unicitása és a bérráta pozitivitása a Neumann-modell általánosításaiban. *Közgazdasági Szemle*, 1:20–40.

Zalai E. (2012). *Matematikai közgazdaságtan II. Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések.* Akadémia Kiadó, Budapest, 2012. Megjelenés alatt.

III. rész
Alkalmazások

Pénzügyi hálózatok modellezése Jackson és Watts (2002) nyomán

Balog Dóra, Bátyi Tamás László, Csóka Péter, Pintér Miklós

Kivonat
A hálózatok társadalmi és gazdasági jelentősége vitathatatlan, alkalmazásai pedig szerteágazóak. A kutatási együttműködések hálózata is fontos, négyünk ezen cikkbeli együttműködésének itt csak két okát szeretnénk kiemelni. Egyrészt idén 10 éves Jackson és Watts (2002) cikke, amely a hálózatok evolúcióját a sztochasztikusan stabil hálózatokkal jelzi előre. Másrészt most lesz 70 éves Forgó Ferenc Tanár Úr, akinek a tiszteletére úgy gondoltuk, hogy összefoglalunk öt, általunk fontosnak tartott, az említett cikkhez kapcsolódó pénzügyi alkalmazást és néhány új modellváltozatot. Összefoglaló jellegű cikkünk célja a magyar olvasók kíváncsiságának felkeltése és néhány lehetséges kutatási irány felvázolása.

1. Bevezetés

A hálózatok társadalmi és gazdasági jelentősége vitathatatlan, alkalmazásai pedig szerteágazóak. Hálózatok jelennek meg információcserében (meghívás egy összejövetelre, álláslehetőségek, fogyasztási cikkek, innovációk stb.), szervezeten belüli alkudozásban, javak és

Balog Dóra
Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék,
email: dora.balog@uni-corvinus.hu

Bátyi Tamás László
Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék,
email: batyi.tamaslaszlo@gmail.com

Csóka Péter
Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék,
email: peter.csoka@uni-corvinus.hu

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: miklos.pinter@uni-corvinus.hu

szolgáltatások kereskedése közben (kereskedelmi hálózatok és szövetségek, társadalmi kapcsolatok, házasság, felvételi problémák, stb.) is. Mivel számítanak a hálózati kapcsolatok, fontos megértenünk, hogy mitől függ az, hogy várhatóan milyen hálózatok jönnek létre.

A Jackson és Watts (2002) cikk Jackson és Wolinsky (1996) dinamikus és sztochasztikus változata. Mindkét cikk központi fogalma a párosan stabilitás. Egy hálózat akkor párosan stabil, ha tetszőleges él esetén egyik érintett játékos sem jár jól az él törlésével, vagy tetszőleges két játékos esetén ha őket nem köti össze él, akkor legalább az egyikőjüknek káros az új él felvétele. A fejlesztő út szomszédos gráfok olyan sorozata, ahol az egyik gráfról a szomszédos gráfra lépés a változást jelentő éllel összekötött játékosok egyéni érdekeinek következménye. Érdemes megvizsgálni, hogy hová vezetnek a fejlesztő utak, melyek a stabil hálózatok. Jackson és Wolinsky (1996) belátják, hogy bizonyos feltételek esetén ebben a hálózati modellben a hatékonyság és a stabilitás egymással szemben álló, egymásnak ellentmondó fogalmak. Jackson és Watts (2002) azt vizsgálják, amikor nem csak fejlesztő utak mentén történhet változás, hanem valamilyen pozitív valószínűséggel bekövetkező hibák következményeként is. A szerzők belátják, hogy modellükben mindig van sztochasztikusan stabil egyensúly.

1.1. További modellváltozatok

Vegyük észre, hogy a párosan stabilitás rövidlátást feltételez a játékosokról: csak egy él törlését vagy hozzáadását fontolja meg két játékos, nem számolnak a további következményekkel. Ez a viselkedés racionális lehet nagy hálózatokban, ahol nem sok információval rendelkeznek a játékosok, vagy ha a jövőt kis súllyal veszik figyelembe. Az említett két cikk további feltevése, hogy a játékosok élformálási költségei azonosak, és nem lehet transzferekkel segíteni a kedvezőbb hálózatok kialakulását. Azóta ezeket a feltevéseket megpróbálták feloldani, ahogy azt az alábbi cikkek mutatják.

Dutta et al. (2005) egy olyan dinamikus hálózatalakulási modellt vizsgálnak, amelyben az egyének előrelátóak (farsighted), és úgy döntenek, hogy a lehető legjobb legyen a lépésükből következő kifizetéseik jelenértéke. Belátják, hogy két feltétel esetén van olyan egyensúly, amelyben tetszőleges kezdeti gráfból elérhető a teljes gráf. A két feltétel az élmonotonitás (link monotonicity) és a növekvő hozadékú élformálás (increasing returns to link creation).

Herings et al. (2009) az előrelátást másképpen definiálják. Szerintük a hálózatok egy G halmaza előrelátóan stabil (farsightedly stable), ha

(i) bármilyen előrelátó páros eltérés tetszőleges G-beli hálózattól egy G-n kívüli hálózatra meghiúsul, mert végül rosszabbul, vagy azonosan járnak a felek;

(ii) ha tetszőleges G-n kívüli hálózatból van előrelátó fejlesztő út, amely G-beli hálózatba visz; és

(iii) nincs G-nek olyan szigorú részhalmaza, amely (i)-et és (ii)-t is teljesíti. A szerzők belátják, hogy az előrelátóan stabil hálózatok halmaza nem üres, és ha létezik Pareto domináns hálózat, akkor az az egyedüli eleme.

Jackson és van den Nouweland (2005) olyan hálózatokkal foglalkoznak, amelyek a játékosok tetszőleges koalíciójának linkváltoztatásával szemben stabilak. Ezeket erősen stabil hálózatoknak (strongly stable networks) hívják. A szerzők szerint az erősen stabil hálózatok a párosan stabil hálózatok értelmes finomításai.

Természetesen a játékosok élformálási költségei is eltérőek lehetnek. Galeotti et al. (2006) olyan hálózatokat vizsgálnak, ahol nemcsak az élköltségek, hanem a játékosok értékelőfüggvényei is eltérőek. Arra az eredményre jutnak, hogy a centralitás és az egyének közötti átlagos legrövidebb utak hossza robosztusan leírja az ilyenkor keletkező egyensúlyi hálózatokat.

Bloch és Jackson (2007) a bilaterális transzferek hatását elemzik, amikor két játékos olyan megállapodást köthet, amelyben az egyik fél kompenzálja a másikat, ha létrehozzák (vagy nem hozzák létre) a közös élt. Arra jutnak, hogy ebben a modellben is megmarad a hatékonyság és a stabilitás ellentéte. Az ellentét oka az, hogy csak bilaterális megállapodásokat lehet kötni, és csak közös élre. A cikk rávilágít, hogy a pozitív externáliák akkor és csak akkor oldhatók fel, ha nem csak közös élt lehet támogatni, a negatív externáliák pedig csak akkor oldhatók fel, ha a megállapodások a hálózatok struktúrájához köthetők.

A modelleket kísérletekkel (experiments) is vizsgálják, amelyekben többnyire hallgatóknak kell döntéseket hozniuk elkülönített számítógépek előtt, 10-15 dolláros várható órabér mellett (a konkrét érték attól függ, hogy milyen jó döntéseket hoznak). Például Charness és Jackson (2007) az erősen stabil hálózatoknál megjelenő csoportos (szavazásos) döntést vizsgálják a „szarvasvadászat” játékban, de a módszer tetszőleges szavazásos döntéssel operáló csoportok (például vállalatok vagy egyetemek) közötti döntések vizsgálatára is használható. A kísérlet adatait sikerül egy új megoldás koncepcióval, a robusztus-hiedelem egyensúllyal (robust-belief equilibrium) megmagyarázniuk. Corbae és Duffy (2008) egy olyan kísérletet terveztek, amelyben a szereplők kereskedelmi hálózatokat alakítanak egyedi kockázat és fertőzési lehetőség esetén. Érdemes az eredményeket összehasonlítani az általunk bemutatott pénzügyi témájú cikkek eredményeivel.

1.2. Pénzügyi alkalmazások

Tanulmányunkban kiválasztottuk az öt jelenleg ismert, a Jackson és Watts (2002) cikkhez leginkább kapcsolódó vagy aktuális pénzügyi alkalmazást.

Cikkünk felépítése a következő. Az alapfogalmak bemutatása után olyan alkalmazásokat vizsgálunk, mint az összefonódó pénzügyi rendszerek (Zawadowski, 2011), a rendszerkockázat (Allen et al., 2010), egyensúlyozás diverzifikáció és fertőzés között (Elliott et al., 2011), kockázatmegosztás hálózatokban (Bramoullé és Kranton, 2007) és a világ tőzsdéinek rangsorolása (Cetorelli és Peristiani, 2009). Az utolsó fejezetben további modellváltozatokat tárgyalunk.

2. Alapfogalmak

Ebben a részben ismertetjük a későbbiek során bemutatott hálózati alkalmazások mögött megbúvó modelleket, illetve azok matematikai felépítését. A következőkben, külön említés nélkül, a (Jackson és Wolinsky, 1996) és (Jackson és Watts, 2002) cikkek jelöléseit használjuk és eredményeit ismertetjük.

$G = (V,E)$ egy *gráf*, ahol V a *csúcsok*, E az *élek* halmaza. A teljes gráf egy olyan gráf, ahol tetszőleges két csúcs között van él. Legyenek a csúcsok a játékosok, azaz V a játékosok halmaza, és legyen $G^V = \{G = (V,E),\ E \subseteq \{ij : i, j \in V\}\}$ a V csúcsokkal (játékosokkal) rendelkező gráfok (hálózatok) halmaza. Legyen $G = (V,E) \in G^V$ és $i, j \in V$, ekkor $G+ij$ a $(V,E \cup \{ij\})$, azaz a $G+ij$ gráfot úgy kapjuk a G gráfból, hogy hozzávesszük G éleihez az ij élt. Hasonlóan, $G-ij$ a $(V,E \setminus \{ij\})$ gráf, azaz a $G-ij$ gráfot úgy kapjuk a G gráfból, hogy elvesszük G éleiből az ij élt. A G és G' *gráfok szomszédosak*, ha létezik ij él, hogy $G = G'+ij$ vagy $G = G'-ij$.

Legyen $G = (V,E)$ egy gráf, ekkor az i-ből a j csúcsba vezető *út* olyan $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ csúcsok rendezett halmaza, hogy $v_1 = i$, $v_n = j$ és $v_k v_{k+1} \in E$, $k = 1,2,\ldots,n-1$. Az i és j *csúcsok szomszédosak*, ha $ij \in E$; *kapcsolódóak*, ha van i és j között út.

Legyen $G = (V,E)$ egy gráf, a $G' = (V',E')$, $E' = \{ij \in E : i, j \in V'\}$ részgráf *komponens*, ha tetszőleges $i, j \in V'$ csúcsok között vezet E'-beli út, és tetszőleges $i \in V'$, $j \in V \setminus V'$ csúcsok nem kapcsolódóak.

A $v : \Gamma^V \to \mathbb{R}$ függvény egy *értékelőfüggvény*, ahol $\Gamma^V = \{G' : G'$ részgráfja a V csúcsokkal rendelkező teljes gráfnak$\}$, és $v(G)$ a $G \in \Gamma^V$ gráf értéke.

2.1. Statikus elemzés

Ebben az alfejezetben a hálózatok alapvető tulajdonságait tárgyaljuk.

1. Definíció. *Legyen v egy értékelőfüggvény. Ekkor a $G \in \Gamma^V$ hálózat* erősen v-hatékony*, ha tetszőleges $G' \in \Gamma^V$: $v(G) \geq v(G')$.*

Tehát egy G gráf erősen v-hatékony, ha G a v értékfüggvény abszolút maximuma.

2. Definíció. *Legyen $\mathscr{G}^V$ a hálózatok Γ^V osztályán értelmezett értékfüggvények halmaza. Ekkor a $\psi : \Gamma^V \times \mathscr{G}^V \to \mathbb{R}^V$ függvényt* megoldás*nak nevezzük.*

A megoldás tehát egy olyan függvény, amely tetszőleges hálózat és értékelés esetén megadja a játékosok kifizetését.

3. Definíció. *Legyen* $v \in \mathscr{G}^V$ *egy értékfüggvény, és* ψ*, a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a* $G = (V,E) \in G^V$ *gráf* párosan (ψ, v)-stabil*, ha tetszőleges* $i, j \in V$ *játékosokra:*

$$ij \in E \Longrightarrow \psi_i(G,v) \geq \psi_i(G-ij,v) \text{ és } \psi_j(G,v) \geq \psi_j(G-ij,v) \ , \tag{1}$$

és

$$ij \notin E \Longrightarrow (\psi_i(G,v) < \psi_i(G+ij,v) \Longrightarrow \psi_j(G,v) > \psi_j(G+ij,v)) \ . \tag{2}$$

Azt mondjuk, hogy a G' *gráf* (ψ, v)*-jobb, mint a* G *gráf, ha vannak olyan* $i, j \in V$ *játékosok, hogy* $G' = G - ij$ *és az* (1) *feltétel nem áll, vagy, ha* $G' = G + ij$ *és a* (2) *feltétel nem teljesül.*

Tehát egy hálózat akkor párosan stabil, ha tetszőleges él esetén egyik érintett játékos sem jár jól az él törlésével, vagy tetszőleges két játékos esetén ha őket nem köti össze él, akkor legalább az egyikőjüknek káros az új él felvétele.

4. Definíció. *Legyen adott a* $\pi : V \to V$ *permutáció, a* $G = (V,E)$ *gráf és a* $v \in \mathscr{G}^V$ *értékfüggvény. Ekkor* $G^\pi = (V, E^\pi)$ *egy olyan gráf, ahol* $E^\pi = \{ij : i = \pi(k),\ j = \pi(l),\ kl \in E\}$*, továbbá legyen a* v^π *értékfüggvény a következőképpen definiált:* $v^\pi(G^\pi) = v(G)$*.*

Tehát a $G^\pi = (V, E^\pi)$ gráf a $G = (V,E)$ gráf csúcsainak π permutációval történő átnevezése után kapott gráf.

5. Definíció. ψ*, a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás* anonim*, ha tetszőleges* $G \in G^V$ *hálózatra,* $v \in \mathscr{G}^V$ *értékfüggvényre,* π *permutációra:* $\psi_{\pi(i)}(G^\pi, v^\pi) = \psi_i(G,v)$*.*

Magyarán szólva egy megoldás anonim, ha tetszőleges értékfüggvényt alkalmazva tetszőleges hálózatra a játékosok kifizetése nem függ az indexüktől (nevüktől).

6. Definíció. ψ*, a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás* kiegyensúlyozott*, ha*

$$\sum_{i \in V} \psi_i(G,v) = v(G),$$

$G \in G^V$ *és* $v \in \mathscr{G}^V$.

Egy megoldás tehát akkor kiegyensúlyozott, ha tetszőleges hálózat és értékfüggvény esetén a játékosok kifizetéseinek összege pontosan a hálózat adott értékfüggvény szerinti értéke. Tehát egy kiegyensúlyozott megoldás a játékosok között szétosztja a hálózat értékét.

7. Definíció. *A* $v \in \mathscr{G}^V$ *értékfüggvény* komponens additív*, ha tetszőleges* $G \in \mathscr{G}^V$ *hálózatra:* $v(G) = \sum_{G' \in C(G)} v(G')$*, ahol* $C(G)$ *a* G *komponenseinek osztálya.*

Tehát egy értékfüggvény komponens additív, ha tetszőleges hálózat értéke a hálózat komponensei értékének az összege. A komponens additivitás egy lehetséges értelmezése, hogy egy hálózat komponensei között nincs szinergia, azok uniójának értéke pusztán értékeik összege.

8. Definíció. *ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás* komponensenként kiegyensúlyozott, *ha tetszőleges $G \in G^V$ gráfra, $G' \in C(G)$ komponensre, és $v \in \mathscr{G}^V$ komponens additív értékfüggvényre: $\sum_{i \in N^{G'}} \psi_i(G,v) = v(G')$.*

Egy megoldás tehát akkor komponensenként kiegyensúlyozott, ha kiegyensúlyozott, és tetszőleges komponensére megszorítva is kiegyensúlyozott.

A következő eredmény a hálózatokra vonatkozó egyik legfontosabb eredményt fogalmazza meg: a hatékonyság és a stabilitás egymással szemben álló, egymásnak ellentmondó fogalmak.

1. Tétel (Jackson és Wolinsky, 1996). *Ha $|V| \geq 3$, akkor nincs olyan ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás, amely anonim, komponensenként kiegyensúlyozott és olyan, hogy tetszőleges $v \in \mathscr{G}^V$ értékfüggvényre van erősen v-hatékony párosan (ψ, v)-stabil hálózat.*

2.2. *Hálózatok kialakulása*

Ebben az alfejezetben a hálózatok kialakulásának, formálódásának kérdésével foglalkozunk.

9. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a hálózatok egy $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ rendezett halmaza (ψ, v)-*fejlesztő út*, ha G_k és G_{k+1} gráfok szomszédos gráfok, $k = 1, 2, \dots, n-1$, és*

1. *$G_{k+1} = G_k - ij$ teljesül valamely ij élre úgy, hogy $\psi_i(G_k - ij, v) > \psi_i(G_k, v)$, vagy*
2. *$G_{k+1} = G_k + ij$ teljesül valamely ij élre úgy, hogy $\psi_i(G_k + ij, v) > \psi_i(G_k, v)$ és $\psi_j(G_k + ij, v) > \psi_j(G_k, v)$.*

Legyen $IP_{(\psi,v)}(G) = \{G' \in G^V : \text{van } (\psi,v)\text{-fejlesztő út } G'\text{-ből } G\text{-be}\}$, $G \in G^V$.

Tehát egy fejlesztő út szomszédos gráfok olyan sorozata, ahol az egyik gráfról a szomszédos gráfra lépés a változást jelentő éllel összekötött játékosok egyéni érdekeinek következménye. Vegyük észre, hogy egy él (kapcsolat) törléséhez tetszőleges érintett játékos egyedül is elegendő, míg egy új él (kapcsolat) létesítéshez mindkét érintett fél beleegyezése szükséges.

10. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a hálózatok egy $C \subseteq G^V$ halmaza (ψ, v)-kör, ha tetszőleges $G, G' \in C$ gráf között van (ψ, v)-fejlesztő út.*

Egy (ψ, v)-kör maximális, ha nem valódi részhalmaza egy másik (ψ, v)-körnek, illetve, egy (ψ, v)-kör zárt, ha nem vezet ki belőle (ψ, v)-fejlesztő út.

Magyarán szólva a kör a hálózatok egy olyan halmaza, ahol tetszőleges hálózatból tetszőleges hálózatba el lehet jutni fejlesztő úton keresztül. Egy kör maximális, ha nem része más körnek, illetve, zárt, ha nem vezet ki belőle fejlesztő út. Világos, hogy minden zárt kör maximális.

A következő segédtétel a modellünk végességének egyik közvetlen következményét fogalmazza meg.

1. Segédtétel. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor, van legalább egy párosan (ψ, v)-stabil hálózat vagy legalább egy zárt (ψ, v)-kör.*

2.3. A sztochasztikus modell

A sztochasztikus hálózat-kialakulási modellekben nem determinisztikusan történik meg a hálózat kialakulása, formálódása, tehát nem csak az előző alfejezetben ismertetett fejlesztő utak mentén történhet változás, hanem valamilyen pozitív valószínűséggel megtörténhet, hogy olyan él alakul ki, amely nem érdeke egyik játékosnak sem, vagy olyan él marad meg, amely nem jó valamelyiküknek.

Az ilyen hibák teszik azt lehetővé, hogy a hálózat-alakulás ne ragadjon be egy lokális optimumba, hanem abból továbblendülve, esetleg eljusson az abszolút optimumig. Ebben az esetben azonban, szemben a determinisztikus modellel, fontos lehet, hogy melyik éleket vizsgáljuk. Ezért feltesszük, hogy az éleket egy olyan eloszlás szerint választjuk, ahol minden él pozitív valószínűséggel szerepel. Feltesszük továbbá, hogy az él sorsa az érintett játékosok döntésétől függ, de csak $\varepsilon > 0$ hibával, azaz bármi is az érintett játékosok döntése, az ε valószínűséggel nem történik meg.

A fentiek következménye, hogy a sztochasztikus modellben valójában egy Markov-láncunk van, ahol az egyes állapotok az egyes hálózatok, a nem szomszédos gráfok között az átmenetvalószínűség nulla, míg szomszédos hálózatok között az átmenetvalószínűség függ attól (is), hogy a változás egybeesik-e az érintettek egyéni érdekével, vagy ellentétes azzal.

1. Példa. Legyen $V = \{1,2,3\}$ a játékosok halmaza $v(\emptyset) = 0$, minden más G' hálózat esetében legyen $v(G') = 1$, a ψ megoldás pedig legyen az egalitáriánus szétosztás, azaz mindenki egyenlően részesedik a hálózat értékéből, és minden élt ugyanazzal a valószínűséggel vizsgálunk. Ekkor az átmenetvalószínűségek mátrixa (sorállapotból oszlopállapotot mutatva) a következő:

állapotok	$\emptyset$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{12,13\}$	$\{12,23\}$	$\{13,23\}$	$\{12,13,23\}$
$\emptyset$	3ε	$1/3-\varepsilon$	$1/3-\varepsilon$	$1/3-\varepsilon$	0	0	0	0
$\{12\}$	ε	$1-3\varepsilon$	0	0	ε	ε	0	0
$\{13\}$	ε	0	$1-3\varepsilon$	0	ε	0	ε	0
$\{23\}$	ε	0	0	$1-3\varepsilon$	0	ε	ε	0
$\{12,13\}$	0	$1/2-\varepsilon$	$1/2-\varepsilon$	0	ε	0	0	ε
$\{12,23\}$	0	$1/2-\varepsilon$	0	$1/2-\varepsilon$	0	2ε	0	ε
$\{13,23\}$	0	0	$1/2-\varepsilon$	$1/2-\varepsilon$	0	0	ε	ε
$\{12,13,23\}$	0	0	0	0	ε	ε	ε	$1-3\varepsilon$

A modell speciális tulajdonságai biztosítják, hogy a megfelelő Markov-láncoknak egyetlen stacionárius állapotuk (eloszlásuk) van. Az ε-nal nullához tartva a stacionárius eloszlások konvergálnak, a határértékük az ún. stacionárius határeloszlás.

11. Definíció. *Legyen $v \in \mathcal{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ a $G^V \times \mathcal{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a $G \in G^V$ gráf* sztochasztikusan stabil*, ha G pozitív valószínűséggel szerepel a stacionárius határeloszlásban.*

A sztochasztikusan stabil hálózatok tehát azok, amelyeket a stacionárius határeloszlás pozitív valószínűséggel látogat meg.

12. Definíció. *Legyen $v \in \mathcal{G}^V$ egy értékfüggvény, ψ a $G^V \times \mathcal{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás, és $P = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ hálózatok olyan rendezett halmaza, hogy G_k és G_{k+1} gráfok szomszédosak, $k = 1,2,\ldots,n-1$. Ekkor a P* út ellenállása *a következő: $R(P) = \sum_1^{n-1} I(G_k, G_{k+1})$, ahol*

$$I(G_k, G_{k+1}) = \begin{cases} 0, & \textit{ha } G_k \in IP(G_{k+1}) \\ 1 & \textit{különben} \end{cases} .$$

Továbbá, legyen $R(G', G) = \min_{P\ (\psi,v)\text{-fejlesztő út } G'\text{-ből } G\text{-be}} R(P)$, és legyen $R(G,G) = 0$.

Magyarán szólva egy út ellenállása a rajta lévő nem fejlesztő lépések összege. Minél nagyobb az ellenállás, annál több nem fejlesztő lépés kell az út bejárásához. Természetes módon tudunk definiálni a hálózatok között távolságot az ellenállás segítségével ($R(\cdot,\cdot)$), amely két hálózat ellenállással kifejezett távolságát adja meg.

13. Definíció. *Legyen $G \in G^V$ egy hálózat. Ekkor a G-*fa *egy olyan irányított gráf, ahol a csúcsok a G^V elemei (hálózatok), és minden $G' \in G^V \setminus \{G\}$ hálózathoz egyértelműen létezik egy G'-ből G-be vezető irányított út. Legyen továbbá $T(G)$ a G-fák osztálya.*

A G-fák és $T(G)$ segítségével „összegyűjthetjük” az összes G-be vezető utat.

14. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás és $G \in G^V$ tetszőleges hálózat. Ekkor a G* hálózat ellenállása *a következő: $R(G) = \min_{T \in T(G)} \sum_{G'G'' \in T} R(G', G'')$, ahol $G'G'' \in T$ azt jelenti, hogy a T G-fában benne van a $G'G''$ irányított él.*

Tehát egy hálózat ellenállása a minimális összellenállású G-fa összellenállása.

Mielőtt kimondjuk ennek a résznek a fő eredményét, két segédtételt mutatunk be.

2. Segédtétel. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás és $G, G' \in G^V$ két tetszőleges hálózat. Ha $G' \in IP_{(\psi,v)}(G)$ és $G \notin IP_{(\psi,v)}(G')$, akkor $R(G) \leq R(G')$, ha ráadásul G párosan (ψ, v)-stabil vagy eleme egy zárt (ψ, v)-körnek, akkor $R(G) < R(G')$. Tehát ha G sztochasztikusan stabil, akkor vagy párosan (ψ, v)-stabil, vagy eleme egy zárt (ψ, v)-körnek. Továbbá, ha egy zárt (ψ, v)-körnek egy eleme sztochasztikusan stabil, akkor minden hálózat az adott zárt (ψ, v)-körben sztochasztikusan stabil.*

A fenti segédtétel azt mondja, hogy ha a G hálózat „jobb”, mint a G' hálózat, azaz G'-ből vezet fejlesztő út G-be, de G-ből nem vezet fejlesztő út G'-be, akkor a G hálózat ellenállása nem lehet nagyobb, mint a G' hálózat ellenállása. Ráadásul ha G-nél nincs „jobb” hálózat, akkor a reláció szigorú.

A második segédtételhez szükségünk van egy új fogalomra, a korlátozott G-fa fogalmára.

15. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás, és $G \in G^V$ tetszőleges hálózat. A (ψ, v)*-korlátozott G-fa *egy olyan irányított gráf, ahol a csúcsok a G hálózat, a páros (ψ, v)-stabil hálózatok és a zárt (ψ, v)-körök elemei, és minden nem G csúcsból egyetlen irányított út vezet G-be. Jelölje $RT_{(\psi,v)}(G)$ a (ψ, v)-korlátozott G-fák halmazát.*

A korlátozott G-fa egy olyan G-fa, amiből a „nem fontos” csúcsokat (hálózatokat) kihagytuk, és csak a „fontosakra” korlátozzuk a figyelmünket.

3. Segédtétel. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás, és $G \in G^V$ tetszőleges hálózat. Ekkor $R(G) = \min_{T \in RT_{(\psi,v)}(G)} \sum_{G'G'' \in T} R(G', G'')$.*

A fenti segédtétel azt mondja, hogy egy G hálózat ellenállásának számításakor elég a korlátozott G-fákra koncentrálnunk.

Befejezésül, kimondjuk ennek a résznek a fő eredményét. A tétel összekapcsolja a sztochasztikus stabilitás és az ellenállás fogalmát.

2. Tétel (Jackson és Watts, 2002). *Egy $G \in G^V$ hálózat pontosan akkor sztochasztikus stabil, ha $R(G) \leq R(G')$, $G' \in G^V$.*

3. Alkalmazások

Az alábbiakban öt olyan cikket mutatunk be, amelyek a közgazdaságtan egy speciális területén, a pénzügyekben alkalmazzák a hálózatelméletet.

3.1. Összefonódó pénzügyi rendszerek

Hálózatelméleti modellezést alkalmaz Zawadowski (2011) annak vizsgálatára, hogy a bankok milyen módon fedezik partnerkockázatukat, valamint ezen döntésük hogyan hat a rendszer stabilitására.

A cikk egy három időszakos játékelméleti modellt állít fel, amelyben n piac és n bankár szerepel egy körön elhelyezkedve. Az i-edik bankár létrehozhat egy bankot az i-edik piacon, ahol a bankok a $t = 0$ periódusban befektethetnek egy reáleszközbe, amely a $t = 2$-ben egy kockázatos kifizetést biztosít a számukra. A játékosok (bankárok) típusa a saját, valamint a körön velük szomszédos bank hozamát is befolyásolja. Minden egyes banknak lehetősége van a befektetés $t = 1$-ben történő likvidálására, a sikeres befektetésért járónál alacsonyabb hozamért. A bankok a modellben a beruházást két módon finanszírozhatják, hosszú (2 periódus), vagy rövid (1 periódus) lejáratú hitellel. Ez utóbbit a $t = 1$ időpontban tovább kell görgetni, így ilyen esetben van lehetőség a befektetés időközi likvidálására.

A modellben a bizonytalanság három tényezőből fakad. Az első, hogy mint már említésre került, a befektetések hozama függ a bank és a szomszédos bank típusától, valamint a projekt sikerétől. A projekt sikeréhez szükséges, hogy az adott bankot tulajdonló bankár mindkét periódusban végezzen legalább egységnyi munkát (ennek értéke 0 vagy 1 lehet), azonban, hogy ezt megtette-e, az más játékosok számára nem ismert. Továbbá a játék során adott és mindenki számára ismert p valószínűséggel vagy jó vagy rossz világállapot következik be. Előbbi esetben minden projekt, ahol a bankár elvégezte a megfelelő mértékű munkát, sikeres lesz, míg utóbbi esetben egyetlen projekt ennek ellenére is elbukik.

A bankok kockázatuk kezelésére vásárolhatnak biztosítást a kifizetésüket befolyásoló szomszédos partnerbankjaik csődje esetére, vagy ennek alternatívájaként OTC ügyleteket köthetnek, ezáltal fedezve a kockázatot. Az ügylet megkötésének feltétele, hogy mindkét fél részt kívánjon venni abban. A hálózati struktúra kialakulásához, azaz a játék egyensúlyának definiálásához tehát Jackson és Wolinsky (1996) modelljét, az ott bevezetett párosan stabilitás (3. definíció) fogalmat használja a cikk.

A szerző a cikkben megmutatja, hogy csődbiztosítás vásárlása egy társadalmilag optimális kimenet lenne, ugyanakkor egyensúlyban a bankok inkább az OTC piacon történő, megfelelő tőkekövetelmények nélküli fedezést, valamint a rövid távú finanszírozást választják. A játék egyensúlya tehát társadalmilag nem hatékony és pozitív valószínűséget enged a rendszer összeomlásának. A szerző ezen eredménye összhangban áll azzal a ténnyel, hogy a nagy és megbízhatónak vélt piaci szereplők nem igényelnek jelentősebb letéteket egymástól OTC ügyleteik fedezeteként.

A cikk egy numerikus példát, valamint az eredmények lehetséges okait, továbbá az elmúlt évek válságához való kapcsolatát követőena modell szabályozói oldal számára lényeges következtetéseit mutatja be. A szerző megmutatja, hogy egy társadalmilag optimális egyensúly elérhető, például az OTC ügyletek megfelelő megadóztatásával, vagy ezen ügyletek klíringelésének központosításával.

3.2. A rendszerkockázat vizsgálata pénzintézetek hálózatán

Allen et al. (2010) egy Zawadowski (2011) által használthoz hasonló modellen vizsgálja azt a válság kapcsán meglehetősen fontossá vált kérdést, vajon a bankok törekvése portfólióik diverzifikálására és így kockázataik csökkentésére hogyan befolyásolja a rendszerkockázatot, azaz annak valószínűségét, hogy egy a rendszerre ható negatív esemény, vagy fertőzési folyamat következtében számos intézmény csődbe jut. A CDS-ek és egyéb hitelderivatívák segítségével a bankok diverzifikálni tudták portfóliójukat, ugyanakkor elterjedésük nyomán az egyes bankok portfóliói egyre inkább hasonlóvá váltak. Így annak a valószínűsége is megnőtt, hogy egy adott intézmény csődje esetén a többi is bajba kerül, aminek pedig különösen nagy a jelentősége egy olyan környezetben, ahol a bankok eszközei jellemzően hosszú, míg forrásaik rövid lejáratúak, ugyanis egyetlen bankkal kapcsolatos rossz hír érkezése forrásaik kivonására ösztönözheti a befektetőket a többi bankból is. A szerzők ezt az elméletet támasztják alá két leegyszerűsített modell segítségével.

A modellek a hálózatok Jackson és Wolinsky (1996) által definiált párosan stabil (3. definíció) tulajdonságára épülnek. Felépítésük a következő: a pénzintézetek eszközeiket projektek finanszírozására használják. Alaphelyzetben minden pénzintézet csak egy projektet finanszíroz, azonban kockázataik diverzifikálása érdekében a pénzintézetek „elcserélik" egymással projektjeik meghatározott részét, így portfóliójukban végül többféle befektetés szerepel. Mivel feltevés szerint az egyes befektetések hozamai függetlenek, ez csökkenti a kockázatot. A pénzintézetek hálózata tehát a projektek cseréje révén alakul ki. Ugyanakkor a projektek cseréjének c „due diligence" költsége van, mivel a bankok csak saját projektjeiket ismerik, a többi projekt megismerése költséges. A rendszerben mindössze hat bank szerepel, $i = 1, 2...6$. A bankok forrásait a kontinuum számosságú, elhanyagolható méretű befektető biztosítja, két perióduson keresztül ($t = 0, 1, 2$). Hasonlóan Zawadowski (2011) modelljéhez, a finanszírozás itt is hosszú, illetve rövid távú is lehet, ez jelenti a különbséget a cikkben alkalmazott két modell között. Az elsőben a bankok forrásai hosszú távúak, azaz a befektetők két periódusra fektetik be pénzüket, a másodikban viszont a finanszírozás rövid távú, csak egy periódusra biztosított, a bankoknak a $t = 1$ időpontban meg kell újítaniuk forrásaikat.

Az egyszerűbb, hosszú távú modellben tehát a finanszírozásról a $t = 0$ időpontban döntenek a befektetők, és befektetésük két periódussal később, a $t = 2$ időpontban jár le. Az egyes befektetések két periódus alatti hozamát a $\theta_i = \{R_H, R_L\}$ valószínűségi változó írja le, ahol mindkét hozam $p = 1 - p = 1/2$ valószínűséggel realizálódik. A befektetők minimális hozamelvárása rögzített, r_f, és csak abban az esetben fektetik be pénzüket, ha várható hozamuk eléri ezt az elvárt szintet. A bankok ezt csak abban az esetben tudják kifizetni, amennyiben a befektetés magas hozamot (R_H) generál. Ekkor a bank nyeresége $R_H - r$, ahol r a befektetőknek ígért hozam, $r \geq r_f$. Egyébként a bank csődbe megy, a befektető az R_L hozam α százalékát kapja, $(1 - \alpha)R_L$ pedig a csőd költsége.

A bankok, kockázatuk csökkentése érdekében elcserélik egymás között befektetéseik bizonyos hányadát. A csere mindig kölcsönös, azaz a hálózatot leíró gráf irányítatlan. Azt, hogy az egyes bankok hány kapcsolatot létesítenek, a hálózat egyensúlyi voltából vezetik le a szerzők, melyet a Jackson és Wolinsky (1996) által definiált párosan stabil (3. definíció) fogalommal definiálnak. A cikkben a c „due diligence” költség úgy kerül meghatározásra, hogy egyensúlyban minden bank pontosan két kapcsolat létesítsen. Ilyen feltételek mellett kétféle hálózat alakulhat ki: egy kör, amely mind a hat bankot tartalmazza, vagy két kör, melyek egyaránt három-három bankból állnak. A modellben az utóbbi lesz a klasztereződött, előbbi pedig a nem klasztereződött hálózat.

A szerzők a rendszer „jóléte” alatt a bankok várható profitjának és a befektetők várható hozamának az összegét tekintik, és megmutatják, hogy a hosszú távú modellben (tehát amikor a befektetők két periódusra fektetik be pénzüket) a jólét a két lehetséges hálózatban megegyezik. Mivel minden egyes bank portfóliójában három befektetés szerepel, és feltevés szerint egy bank csak abban az esetben megy csődbe, ha minden, a portfóliójában található befektetés az alacsonyabb R_L hozamot hozza, a két hálózat kockázati szempontból sem különbözik.

A hosszú távú modell vizsgálata után a szerzők megvizsgálják a rendszerkockázat és a jólét alakulását rövid távú finanszírozás esetén is. Ekkor a bankok továbbra is két periódusra ruháznak be, a befektetők azonban a $t = 1$ időpontban döntenek arról, hogy megújítják-e befektetéseiket. Döntésüket egy a $t = 1$ időpontban megismert valószínűségi változó („hír”), $S = \{G, B\}$ alapján hozzák meg, ahol G azt jelzi, hogy minden bank szolvens lesz a második periódus végén, B pedig azt, hogy legalább egy bank csődbe megy, azt azonban nem tudni, hogy melyik lesz, illetve melyek lesznek ezek. A befektetők $t = 1$-ben eldöntik, hogy felveszik-e az addigi hozamot, vagy meghosszabbítják a befektetést egy évvel. Ha a bankok nem tudják forrásaikat megújítani, a $t = 1$ időpontban felszámolásra kerülnek, melynek eredményeként a befektetők megkapják a számukra ígért hozamot, a bankoknak viszont nem marad semmi. Amennyiben a bankoknak sikerül forrásaikat megújítani, a második periódus végén – az első modellhez hasonlóan – vagy csődbe mennek, vagy kifizetik befektetőiknek az ígért hozamot, a befektetésekből származó többlet pedig a profitjuk.

A rövid távú modellben azonban már számítani fog, hogy a két lehetséges hálózattípus közül melyik alakul ki. Ennek oka a következő: az S valószínűségi változó eloszlása, így a források megújításának valószínűsége a két hálózatban eltérő. Mivel a magas és az alacsony hozam bekövetkezési valószínűsége az egyes projekteknél egyaránt $1/2$, a klasztereződött hálózatban B, vagyis annak valószínűsége, hogy legalább egy bank csődbe megy $15/64$. Ugyanakkor ez a valószínűség a nem klaszteres hálózatban jóval magasabb, $25/64$. Ez meglehetősen egyszerűen levezethető, aminek az oka az, hogy az első hálózatban a két körön belül a bankok egyszerre mennek csődbe vagy maradnak szolvensek, hiszen a körön belül minden banknak megegyezik a portfóliója. A második hálózatban azonban a portfóliók minden egyes bank esetén különbözőek, így itt az is lehetséges, hogy csak egy vagy két bank lesz inszolvens. Ugyanakkor, a modell speciális feltevései miatt pont ebben a hálózatban lesz nagyobb a rossz jel, B, így a források meg nem újításának a valószínűsége. A szerzők tehát arra mutatnak rá, hogy amennyiben a források megújítása nem biztosított – ahogyan ez a valóságban is jellemző –, a rendszerkockázat nagyban függ a hálózat struktúrájától. A klasztereződés a modell feltevései mellett csökkenti a rendszerkockázatot, jóléti hatása azonban már nem egyértelmű. Ezt vizsgálva a szerzők azt találják, hogy az a csőd költségétől, vagyis az α együttható nagyságától függ, és létezik olyan tartomány is, ahol a klasztereződött, és olyan is, ahol a nem klasztereződött hálózatban nagyobb a jólét, valamint olyan eset is előfordul, ahol a kettő megegyezik.

A cikkben bemutatott modellek speciális feltételek mellett mutatják be, hogy a pénzügyi intézmények hálózatának struktúrája hogyan hat a teljes rendszer kockázatára. Bár a modellek valóban meglehetősen leegyszerűsítettek, és a rövid távú modellben az S jel interpretációja sem kézenfekvő, úgy gondoljuk, a cikk hozzájárulása jelentős az elméleti és az empirikus irodalom összekapcsolásához.

3.3. Pénzügyi hálózatok: egyensúlyozás diverzifikáció és fertőzés között

Elliott et al. (2011) folyamatban lévő munkatanulmánya az előző fejezethez hasonló kérdéseket vizsgál. Minél inkább diverzifikálnak (egymást tulajdonolják) a bankok, annál nagyobb az esélye a bedőlések továbbterjedésének, a fertőzésnek. Modelljükben alaposan megvizsgálják annak a következményét, hogy a bankok értéke nem folytonosan változik. Ha eszközeinek értéke egy bizonyos szint alá esik, akkor ugyanis bedől a bank, ami további hatással lehet a többi bankra. Modelljük a következő.

Tegyük fel, hogy van n bank, az i-edik bank értékét jelölje x_i. A bankok különböző pénzügyi eszközökbe ($z_k, k \in \{1,\dots,K\}$) és egymás részvényeibe fektethetnek. Az i-edik bank a k-adik eszköz $D_{ik} \leq 1$ részét, a j-edik banknak pedig a C_{ij} részét birtokolja (akár azok részvényein, hitelein vagy CDS-ein keresztül).

Ha az i-edik bank értéke egy $\underline{x}_i$ küszöb alá esik, akkor az csődbe megy és β_i csődköltséget szenved el. Az i-edik bank értéke tehát így írható le:

$$x_i = \sum_{j \neq i} C_{ij} x_j - \sum_{j \neq i} C_{ji} x_i + \sum_k D_{ik} z_k - \beta_i \cdot 1_{x_i \leq \underline{x}_i}, \tag{3}$$

ahol β_i a nem folytonos csődköltség, amely akkor jelentkezik, ha az i-edik bank értéke $\underline{x}_i$ alá esik.

A (3) egyenlet mátrix formában így írható fel:

$$x = (C - \hat{C})x - (I - \hat{C})x + Dz - \beta(x), \tag{4}$$

ahol C $n \times n$-es mátrix, $\hat{C}$ az átlójában a C_{ii} elemeket tartalmazza (egyébként nullát), D pedig $n \times K$-s mátrix, elemei a D_{ik} arányok, és a $\beta(x)$ vektor i-edik eleme $\beta_i \cdot 1_{x_i \leq \underline{x}_i}$. Ekkor (4) megoldása:

$$x = (2I - C)^{-1}(Dz - \beta(x)). \tag{5}$$

Mivel (5) egy fixpont-feltétel, ezért több megoldása is lehet. Előfordulhat, hogy az egyik megoldásban az i-edik bank csődbe megy, a másikban pedig nem, mégis konzisztensek a bankok értékei. Ez a többszörös egyensúly arra hívja fel a figyelmet, hogy fontosak a befektetők várakozásai és lehetségesek a bankrohamok.

Elliott et al. (2011) megjegyzik, hogy az (5)-beli csődkorlátokat egy olyan hálózati mérőszám ragadja meg, amely kapcsolódik a sajátérték centralitáshoz (eigenvector centrality). Az is kijön a modelljükből, hogy ha a bankok nagyobb arányban birtokolják egymást, akkor nő a kockázatmegosztás, kivéve amikor a csődkorlátokba ütköznek. Egy példán bemutatják, hogy ha a fertőzések veszélyét is figyelembe vesszük, akkor a hatékony birtoklási arány kisebb, vagyis átváltás van a diverzifikáció és a fertőzés között.

3.4. Kockázatmegosztás hálózatokban

Bramoullé és Kranton (2007) a kockázatmegosztás-fertőzés párosból az elsőre koncentrálnak. A szociológiai kiindulópontú cikk alanyai olyan háztartások, amelyek elfelezik a jövőbeli, bizonytalan együttes jövedelmüket, így informális biztosítást nyújtanak egymásnak. Jellemzően a fejlődő országok falvainak rokoni-baráti kapcsolatait vizsgálják ilyen módszerekkel, de elképzelhető, hogy ez a modell használható olyan helyzetben is, amikor több biztosító együttesen biztosít egy nagyobb vállalatot.

A szociológiai példánál maradva a szerzők felteszik, hogy nincsenek formális biztosítások, és egyszerre csak két fél tud olyan informális megállapodást kötni, hogy az alapján elfelezzék a jövőbeli, bizonytalan együttes jövedelmüket. A megállapodásokat a felek automatikusan betartják (mert például házasság jött létre a két háztartás között), de azok költségesek (például az esküvő explicit és implicit költségei). Modelljük a következő.

Az egyének halmazát jelöljük V-vel, a köztük lévő éleket E-vel. A társadalomban $v = |V|$ egyén van, akik kockázatkerülőek és bizonytalan a jövőbeli jövedelmük. Az i-edik egyén jövedelmét az y_i valószínűségi változó írja le, a jövedelmek függetlenek és azonos eloszlásúak, $\bar{y}$ várható értékkel és σ^2 varianciával. Tekintsük az egyének egy $G = (V, E)$ hálózatát. Ahogy már említettük, két egyén csak akkor adhat egymásnak pénzt, ha előzőleg megállapodtak, vagyis van köztük él. Az él létrehozásának költsége fejenként $c > 0$. Az alapmodellben a megállapodott felek egyenlően osztoznak jövedelmükön, és a páros megállapodások ellenére annyiszor osztozkodnak, amíg a keletkezett $G = (V, E)$ gráf adott komponensében mindenkinek azonos nem lesz a jövedelme. Ha egy komponensben s egyén van összekötve, akkor egyéni várható hasznosság függvényük $u(s)$, ahol a szerzők felteszik, hogy minden s-re

$$u(s+1) > u(s) \text{ és } u(s+2) - u(s+1) < u(s+1) - u(s), \tag{6}$$

vagyis minél többen osztoznak a bizonytalan jövedelem kockázatán, annál nagyobb lesz az egy főre jutó hasznosság, de a létszámnövekedésből eredő határhaszon szigorúan csökkenő.

Jelölje $s_i(G)$, $i = 1, \ldots, k$, a G gráf i-edik komponensének nagyságát (csúcsainak számát), g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, v$ pedig legyen 1, ha i és j között van él (megállapodás), egyébként legyen nulla. Ekkor a komponens additív (7. definíció) értékelőfüggvény a következő:

$$v(G) = \sum_{i=1}^{k} s_i(G) u(s_i(G)) - c \sum_{i=1}^{v} (\sum_{j=1}^{v} g_{ij}), \tag{7}$$

vagyis a felek az összes várható hasznosságon és a mindenki által fizetett c költségen osztozkodnak. A komponensen belüli egyenlő osztozkodás miatt a $\psi : \Gamma^V \times \mathscr{G}^V \to \mathbb{R}^V$ megoldás az i-edik egyénnek a következőt adja:

$$\psi_i = u(s_l(G)) - c \sum_{j=1}^{v} g_{ij}, \tag{8}$$

ahol az i-edik egyén az l-edik komponensben van és megkapja a várható hasznosságát, valamint kifizeti a belőle kifutó élek költségét.

A párosan stabil (3. definíció) gráfok definiálása után a szerzők belátják, hogy (Ibid., Proposition 3) ha van párosan stabil gráf, akkor annak minden komponense a lehető legkevesebb éllel kapcsolódik ($s_i(G) - 1$). Ugyanakkor megjegyzik, hogy előfordulhatnak olyan $c_1 > c_2 > c_3$ költségek, amelyeknél c_1 és c_3 esetén van párosan stabil gráf, c_2 esetén viszont nincs. A költségek csökkentésének ugyanis kettős hatása van. Egyrészt, olcsóbb egy periférikus egyénnel (akinek még nincs éle) élt kialakítani, ami növeli a legnagyobb komponens nagyságát. Másrészt, két komponens között is olcsóbb kapcsolatot létesíteni, ami csökkenti a kisebb komponens(ek) maximális nagyságát. Végül a statikus elemzést azzal zárják, hogy rámutatnak a stabilitás és a hatékonyság közötti szokásos ellentétre (az 1. tétel szellemében).

Bramoullé és Kranton (2007) a dinamikus modellben a fejlesztő út (9. definíció) és a kör (10. definíció) definiálása után belátja, hogy (Ibid., Proposition 5) ha van a modellben párosan stabil hálózat, akkor nincsenek zárt körök, valamint (Ibid., Proposition 6) ha nincs párosan stabil hálózat, akkor van egy egyértelmű C kör, a lehető legkevesebb éllel összekötve. A sztochasztikus modellt a szerzők nem vizsgálják, ehelyett két másik modellváltozatot vizsgálnak. Az egyikben az egyének kompenzálhatóak az élek létrehozása miatt

(Bloch és Jackson (2007) szellemében), a másikban az élköltséget jövedelemnek tekintik az egyének.

További kutatási irányként megemlítik, hogy ha a páros kockázatelosztás nem végtelenszer történik meg, akkor nem lesz egyenletes a komponenseken belüli jövedelemelosztás, így számít, hogy ki hol foglal helyet a hálózatban. Az is bonyolíthatja a helyzetet, ha valamennyi jövedelem elfogyasztható, mielőtt az egyének segítenek egymásnak. Ezekben az esetekben már azt várják a szerzők, hogy (a biztonság kedvéért) a minimálisnál több él is lesz egy párosan stabil hálózatban.

3.5. A világ tőzsdéinek rangsorolása hálózatelméleti keretek között

Cetorelli és Peristiani (2009) a társadalmi hálózatok vizsgálatának módszertanát alkalmazzák arra, hogy elemezzék a világ egyes tőzsdéinek fontosságát, és a nemzetközi pénzügyi hálózatban betöltött szerepét. Bár a szerzők nem használnak szofisztikáltabb modelleket, a cikk jól példázza, hogy miként alkalmazható a társadalmi hálózatok elemzésének eszközrendszere a pénzügyekben. Közismert, hogy az Amerikai Egyesült Államokban működő tőzsdék a világ tőkepiacainak központját jelentik. Ugyanakkor a közelmúltban egyre többet hallani az amerikai tőzsdék jelentőségének csökkenéséről, például az európai egységes piac létrejöttének, vagy a kínai gazdaság liberalizálásának köszönhetően. A szerzők a cikkben 45 tőzsdét vetnek össze a társadalmi hálózatok elemzésének eszközeivel. A vizsgálat a kibocsátott IPO-k volumene, vagyis az első nyilvános részvénykibocsátások során bevont tőke nagysága alapján történik, 1990 és 2006 közötti adatok felhasználásával.

A cikk három, a társadalmi hálózatok elemzésében jól ismert mérőszám alapján veti össze a különböző országokban működő tőzsdéket. Az első a fok centralitás („degree centrality”), melyet a befok („in-degree”) és a kifok („out-degree”) mértékekkel mérnek a szerzők, ahol az előbbi az adott tőzsdén külföldi vállalatok által kibocsátott IPO-k volumenét, utóbbi pedig azokét jelenti, amelyeket az adott országban működő vállalatok külföldi tőzsdékre vittek. A hálózatot mátrix formában felírva jelölje az $N \times N$-es mátrix x_{ij} cellája az i országban bejegyzett vállalatok j ország tőzsdéjén kibocsátott IPO-inak a volumenét. Ekkor a befok mutató egyszerűen $P_d^{in}(n_i) = \sum_{j \neq i} x_{ji}$, a kifok pedig $P_d^{out}(n_i) = \sum_{i \neq j} x_{ij}$, ahol i-vel a hálózat csomópontjait, azaz az egyes tőzsdéket jelöljük. A köztesség index („betweenness index”) a tőzsdék közvetítő szerepének fontosságát vizsgálja. A fenti mátrixreprezentáció mellett azt számszerűsíti, hogy bármely két n_j és n_k tőzsde közötti összes lehetséges útvonal (IPO áramlás), mekkora m_{jk} hányada halad át a vizsgált n_i tőzsdén, $m_{jk}(n_i)$. Ezt összegezve minden j-re és k-ra, megkapjuk n_i köztesség indexét: $P_b(n_i) = \sum_j \sum_k m_{jk}(n_i)/m_{jk}$. Az utolsó és talán legfontosabb vizsgált mutató a presztízs index („prestige index”), amely a tőzsdéket azok hálózatban betöltött szerepe, fontossága alapján rangsorolja. Egy adott tőzsdének annál magasabb a presztízs indexe, minél több ország vállalatai választják azt IPO kibocsátásuk helyszínéül, illetve minél magasabb presztízs indexszel rendelkező országokból érkeznek ezek a vállalatok. A presztízs indexeket így egy N egyenletből álló és N ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldása adja.

A szerzők azt találják, hogy bár az egyszerű aggregált volumeneket számszerűsítő befok és kifok mutatók alapján az Egyesült Államok tőzsdéinek vezető szerepe valóban megkérdőjelezhetővé vált 2006-ra (a befok mutató alapján a német és hongkongi tőzsde is megelőzte), a hálózat struktúráját jobban megragadó köztesség és presztízs indexek alapján az USA tőzsdéinek vezető szerepe továbbra is megkérdőjelezhetetlen.

Köszönetnyilvánítás:
Csóka Péter köszöni a TÁMOP/4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0005 projekt és a Befektetések és Vállalati Pénzügyi Tanszék Alapítványa támogatását.
Pintér Miklós kutatásait az OTKA K-101224 pályázat és az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

Allen, F., Babus, A., Carletti, E. (2010). Financial Connections and Systemic Risk. *Working Paper*, http://www.nber.org/papers/w16177.pdf.

Bloch, F., Jackson, M. O. (2007). The formation of networks with transfers among players. *Journal of Economic Theory*, 133(1):83–110.

Bramoullé, Y., Kranton, R. (2007). Risk-sharing networks. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 64(3-4):275–294.

Cetorelli, N., Peristiani, S. (2009). Prestigious stock exchanges: a network analysis of international financial centers. *Working Paper*, http://www.newyorkfed.org/research/staff_ reports/sr384.pdf.

Charness, G., Jackson, M. (2007). Group play in games and the role of consent in network formation. *Journal of Economic Theory*, 136(1):417–445.

Corbae, D., Duffy, J. (2008). Experiments with network formation. *Games and Economic Behavior*, 64(1):81–120.

Dutta, B., Ghosal, S., Ray, D. (2005). Farsighted network formation. *Journal of Economic Theory*, 122(2):143–164.

Elliott, M., Golub, B., Jackson, M. (2011). Financial networks: A tradeoff between diversification and contagions. *Working Paper*, http://ces.univ-paris1.fr/CTN17/pdf/CTN17-papers/Elliott.pdf.

Galeotti, A., Goyal, S., Kamphorst, J. (2006). Network formation with heterogeneous players. *Games and Economic Behavior*, 54(2):353–372.

Herings, P., Mauleon, A., Vannetelbosch, V. (2009). Farsightedly stable networks. *Games and Economic Behavior*, 67(2):526–541.

Jackson, M., van den Nouweland, A. (2005). Strongly stable networks. *Games and Economic Behavior*, 51(2):420–444.

Jackson, M., Watts, A. (2002). The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 106(2):265–295.

Jackson, M., Wolinsky, A. (1996). A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1):44–74.

Zawadowski, A. (2011). Entangled financial systems. *Boston University School of Management Research Paper*, No. 2011-2.

Elfogadható inkonzisztenciájú páros összehasonlítás mátrixokkal kapcsolatos konvexitási tulajdonságok és azok alkalmazásai

Bozóki Sándor, Fülöp János, Poesz Attila

Kivonat

A páros összehasonlítás mátrixokat három és fél évtizede ismerik és alkalmazzák a döntéshozók preferenciájának számszerűsítésére, jellemzően a többszempontú döntéshozatalban. A gyakorlati problémákban a döntéshozó által kitöltött mátrixban előfordulhatnak kisebb-nagyobb ellentmondások, ezek jelenlétét és súlyosságát különböző módon definiált inkonzisztencia indexek mérik. A dolgozatban az inkonzisztencia indexek egy általános osztályára vonatkozó kérdést vizsgálunk: adott inkonzisztencia index és elfogadási szint esetén mi a döntéshozó által megadott mátrixban azon elemek minimális száma, amelyek (és reciprokaik) megváltoztatásával a mátrix elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető. Megmutatjuk, hogy a kérdés megválaszolása egy nemlineáris vegyes-diszkrét optimalizálási feladat megoldására vezet. Két ismert inkonzisztencia indexet részletesebben is megvizsgálunk és egy számpéldán keresztül bemutatjuk a javasolt módszer működését. Az eljárás minden olyan döntéstámogató rendszerben alkalmazható, amely páros összehasonlításokra épül és lehetővé teszi a döntéshozóval való interakciót.

Bozóki Sándor
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport és Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, email: bozoki@sztaki.hu

Fülöp János
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport, email: fulop@sztaki.hu

Poesz Attila
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: attila.poesz@uni-corvinus.hu

1. Bevezetés

A többszempontú döntési feladat célja véges sok alternatíva véges sok szempont szerinti rangsorolása, esetenként elegendő az összességében legjobb alternatíva kiválasztása. A megoldás során szükség van a szempontok fontosságának számszerűsítésére (*súlyozására*) és az alternatívák pontozására (*értékelésére*) minden egyes szempont szerint. Csoportos döntési szituációkban felmerülhet még a döntéshozókhoz rendelt *szavazóerők megadása* is. A páros összehasonlítás mátrixok (Saaty, 1980) alkalmazhatók mind a három lépésben, miután a döntéshozókat az alábbi típusú kérdésekkel szembesítjük: „Két szempontot összehasonlítva melyik a fontosabb és az hányszor fontosabb? Egy adott szempont szerint összehasonlítva két alternatívát melyik a jobb és az hányszor jobb? Egy adott szempont szerinti pontozásban hányszor akkora súllyal vegyük figyelembe az egyik döntéshozó véleményét, mint a másikét?”

A páros összehasonlítás mátrix fogalma jelen kötet egy másik cikkében (Temesi et al., 2012) is központi helyet foglal el.

Az $n \times n$ méretű valós A mátrix *páros összehasonlítás mátrix*, ha pozitív és reciprok, azaz

$$a_{ij} > 0, \tag{1}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \tag{2}$$

minden $i, j = 1, \ldots, n$ esetén. Az A páros összehasonlítás mátrix *konzisztens*, ha teljesíti az

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik} \tag{3}$$

tranzitivitási tulajdonságot minden $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ esetén. A nem konzisztens mátrixokat inkonzisztensnek nevezzük.

Egy A $n \times n$-es pozitív mátrix esetén legyen $\bar{A} = \log A$ az az $n \times n$-es mátrix, amelynek elemeire

$$\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

teljesül. Ekkor az A páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor konzisztens, ha

$$\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = 0, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

A (4) homogén lineáris egyenletrendszernek eleget tevő $\bar{A}$ mátrixok nyilván egy lineáris alteret alkotnak $\mathbb{R}^{n \times n}$-ben.

Jelölje $\mathscr{P}_n$ az $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmazát és $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{P}_n$ a konzisztens mátrixok halmazát. Mivel a logaritmizált térben a (2) reciprocitási feltételnek az

$$\bar{a}_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

feltétel felel meg, $\log \mathscr{P}_n = \{\log A \mid A \in \mathscr{P}_n\}$ az $n \times n$ méretű ferdén szimmetrikus mátrixok halmazával azonos, amely $\mathbb{R}^{n\times n}$ egy $n(n-1)/2$ dimenziós lineáris alterét alkotja. A $\log \mathscr{C}_n = \{\log A \mid A \in \mathscr{C}_n\}$ halmaz a (4)-nek eleget tevő mátrixok halmaza, amelyről megmutatható, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$ egy $n-1$ dimenziós lineáris altere (Chu, 1998). Nyilván $\log \mathscr{C}_n \subset \log \mathscr{P}_n$.

A valós élet döntési feladatainál a páros összehasonlítás mátrixok ritkán konzisztensek. A döntési folyamat eredménye szempontjából sem mindegy azonban, hogy a döntéshozók által megadott összehasonlítások milyen mértékben állnak összhangban, vagy éppen ellentmondásban egymással. Szükség van tehát olyan mutatóra, amellyel a páros összehasonlítás mátrix esetleges következetlenségeit, inkonzisztenciáját mérni lehet.

Egy $\phi_n : \mathscr{P}_n \to \mathbb{R}$ függvényt inkonzisztencia indexnek nevezünk, ha $\phi_n(A) = 0$ minden konzisztens és $\phi_n(A) > 0$ minden inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix esetén. A gyakorlatban használt inkonzisztencia indexek folytonosak, így a $\phi_n(A) > 0$ érték többé-kevésbé azt is jelzi, hogy az inkonzisztens mátrix mennyire tér el egy konzisztenstől.

Mivel gyakorlati páros összehasonlítás mátrixok esetén a konzisztencia nehezen biztosítható, bizonyos szintű inkonzisztenciát általában még elfogadnak a döntéshozók. Ez a gyakorlatban úgy működik, hogy adott ϕ_n inkonzisztencia indexhez választanak egy $\alpha_n \geq 0$ elfogadási szintet, és egy $A \in \mathscr{P}_n$ mátrixot csak akkor tartanak meg további felhasználás céljára, ha $\phi_n(A) \leq \alpha_n$ teljesül, különben elvetik azt, vagy újból elvégeztetik a páros összehasonlításokat. A mátrix kitöltéséhez szükséges összes páros összehasonlítás újbóli elvégzése gyakran időigényes feladat. Ezért egy előírt elfogadási szint feletti inkonzisztenciájú mátrix teljes elvetése előtt érdemes megvizsgálni, hogy van-e esély kevesebb számú páros összehasonlítás újbóli elvégzésével elfogadható inkonzisztenciájúvá tenni a mátrixot.

A dolgozatban megmutatjuk, hogy adott $A \in \mathscr{P}_n$, ϕ_n inkonzisztencia index és α_n elfogadási szint esetén annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi az A mátrix azon elemeinek a minimális száma, amelyek (és reciprokaik) megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető a páros összehasonlítás mátrix, egy nemlineáris vegyes-diszkrét, pontosabban vegyes 0-1-es optimalizálási feladat megoldásával elérhető, amennyiben egy egyszerű korlátossági feltétellel élünk. Ha kiderül, hogy viszonylag kevés elem megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető a mátrix, akkor nem zárható ki, hogy a többé-kevésbé konzisztens módon értékelő ennél a néhány elemnél kevésbé volt figyelmes, esetleg adatrögzítési hiba történt. Érdemes tehát újra kiértékelni ezeket az elemeket. Ha az értékelő ragaszkodik a korábbi értékekhez vagy az új értékekkel sem érjük el az elfogadható inkonzisztencia szintjét, akkor ez a megközelítés nem járt sikerrel, az összes páros összehasonlítást újból el kell végezni. Ha azonban a kritikus elemek felülvizsgálata után kapott mátrix már elfogadható inkonzisztenciájú, akkor ezzel folytathatjuk a döntési eljárást.

A fenti vizsgálatokkal kapcsolatban megoldandó nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatoknál előnyös, ha a bináris változók relaxálásával kapott nemlineáris programozási feladatok konvex optimalizálási feladatok. Ebben az esetben ugyanis számos hatékony módszer és szoftver áll rendelkezésünkre, míg nemkonvexitás esetén módszertani és implementációs nehézségek is adódhatnak. Mivel $\log \mathscr{C}_n$ lineáris altér, ezért $\mathscr{C}_n$ egy nemkonvex sokaság $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben. Ebből rögtön sejthetjük, hogy a fenti konvexitási kérdéseket érdemesebb a logaritmizált térben vizsgálni. Jelen dolgozat fő eredményeként megmutatjuk, hogy az irodalomból ismert két alapvető inkonzisztencia index, a (Bozóki és Rapcsák, 2008) dolgozatban kiemelten vizsgált Saaty-féle *CR* (Saaty, 1980) és Koczkodaj-féle *CM* (Duszak és Koczkodaj, 1994; Koczkodaj, 1993) inkonzisztencia mérőszámok esetén a már említett nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok a logaritmizált térben is megfogalmazhatóak, és ott már teljesül rájuk a megfelelő konvexitási tulajdonság. Megmutatjuk, hogy a logaritmizált térben *CR* konvex függvény, *CM* pedig kvázikonvex, de egy további szigorúan monoton egyváltozós függvény segítségével konvex függvénnyé alakítható.

A 2. fejezetben a megoldandó optimalizálási feladatokat mutatjuk be általános alakban. A Saaty *CR* inkonzisztencia mérőszámával kapcsolatos kérdéseket a 3. fejezetben tárgyaljuk. A 4. fejezetben Koczkodaj *CM* inkonzisztencia indexe képezi hasonló vizsgálat tárgyát.Végül Egy az 5. fejezetben numerikus példát mutatunk be.

2. A megoldandó optimalizálási feladatok általános alakban

Adott ϕ_n inkonzisztencia index és α_n elfogadási szint esetén jelölje

$$\mathscr{A}_n(\phi_n,\alpha_n)=\{A\in\mathscr{P}_n \mid \phi_n(A)\le\alpha_n\} \tag{5}$$

azon $n\times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmazát, amelyek ϕ_n szerinti inkonzisztencia értéke nem haladja meg az α_n elfogadási szintet. Legyen $A,\hat{A}\in\mathscr{P}_n$ és jelölje

$$d(A,\hat{A})=|\{(i,j):1\le i<j\le n, a_{ij}\ne\hat{a}_{ij}\}| \tag{6}$$

azon elemek számát a felső háromszög pozíciókban, ahol a két mátrix eltér egymástól. Nyilván ugyanennyi az eltérő elemek száma az alsó háromszög pozíciókban is.

Tekintsünk egy $A\in\mathscr{P}_n$ páros összehasonlítás mátrixot, amelyre $\phi_n(A)>\alpha_n$ teljesül, azaz nem elfogadható. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni a felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozíciókban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix már elfogadható legyen. Matematikai alakban ez a

$$\begin{aligned} &\min\ d(A,\hat{A}) \\ &\text{f.h. } \hat{A}\in\mathscr{A}_n(\phi_n,\alpha_n) \end{aligned} \tag{7}$$

optimalizálási feladat megoldását jelenti, ahol $\hat{A}$ a változó.

Feltehetjük azt a kérdést is, hogy mi az a minimális inkonzisztencia szint, amit az $A\in\mathscr{P}_n$ mátrix legfeljebb K számú elemének (és azok reciprokainak) megváltoztatásával elérhetünk.

Ez a feladat matematikai alakban

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h.}\ \ d(A,\hat{A}) \le K, \\ &\qquad \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n, \alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

ahol α és $\hat{A}$ a változók.

A (7) és (8) feladatokat a logaritmizált térben is megfogalmazhatjuk. Nyilván

$$\log \mathscr{A}_n(\phi_n, \alpha_n) = \{X \in \log \mathscr{P}_n \mid \phi_n(\exp X) \le \alpha_n\}, \tag{9}$$

ezért a (7) feladat a

$$\begin{aligned} &\min\ d(\log A, X) \\ &\text{f.h.}\ \ X \in \log \mathscr{P}_n, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha_n \end{aligned} \tag{10}$$

feladattal ekvivalens, ahol X a változó, a d eltérésfüggvény pedig (6) szerint van értelmezve ferdén szimmetrikus mátrixok esetén is. A (10) első feltétele azt jelenti, hogy X a ferdén szimmetrikus mátrixok alteréből van, a második pedig egy nemlineáris egyenlőtlenségi feltétel. A dolgozatban megmutatjuk, hogy ez egy konvex feltétel a Saaty-féle *CR* (Saaty, 1980) és a Koczkodaj-féle *CM* (Duszak és Koczkodaj, 1994; Koczkodaj, 1993) inkonzisztencia indexek esetén.

A (8) feladat ekvivalens alakját is hasonló módon kaphatjuk:

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h.}\ \ d(\log A, X) \le K, \\ &\qquad X \in \log \mathscr{P}_n, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha, \end{aligned} \tag{11}$$

ahol α és X a változók.

Az optimalizálási feladatokban nehezen kezelhető d eltérésfüggvényt kiválthatjuk az egészértékű modellezésben jól ismert „Big-M" technika alkalmazásával. Ehhez feltételezni kell, hogy ismert egy $M \ge 1$ felső korlát az $A \in \mathscr{P}_n$ és a (7), illetve (8) feladatok optimális megoldásaként szóba jöhető $\hat{A} \in \mathscr{P}_n$ mátrixok elemeire vonatkozóan, azaz

$$1/M \le a_{ij} \le M,\ 1/M \le \hat{a}_{ij} \le M, \qquad i,j = 1,\dots,n. \tag{12}$$

Egy ilyen M felső korlátot kaphatunk akkor, ha a konkrét ϕ_n ismeretében meg tudunk határozni egy korlátos tartományt, amely biztosan tartalmazza a (7), illetve (8) feladat legalább egy optimális megoldását. De ha elméleti M korlátot nem is tudunk könnyen meghatározni, konkrét páros összehasonlítási feladatoknál általában természetesen adódik egy ésszerű M korlát a lehetséges páros összehasonlítási mátrixok elemeire vonatkozóan.

A (12) feltételt az

$$A, \hat{A} \in [1/M, M]^{n\times n} \tag{13}$$

mátrixalakban is felírhatjuk, és a (13) $\hat{A}$-ra vonatkozó korlátozását a (7), illetve a (8) feladathoz csatolva a

$$\begin{aligned} &\min\ d(A,\hat{A}) \\ &\text{f.h. } \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n, \alpha_n) \cap [1/M, M]^{n\times n}, \end{aligned} \tag{14}$$

illetve a

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h. } d(A,\hat{A}) \le K, \\ &\qquad \hat{A} \in \mathscr{A}_n(\phi_n, \alpha) \cap [1/M, M]^{n\times n} \end{aligned} \tag{15}$$

feladatot kapjuk.

Bevezetve az $\bar{M} = \log M$ jelölést, a logaritmizált térben a (14), illetve a (15) feladat ekvivalens alakja a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\min\ d(\log A, X) \\ &\text{f.h. } X \in \log \mathscr{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha_n, \end{aligned} \tag{16}$$

illetve

$$\begin{aligned} &\min\ \alpha \\ &\text{f.h. } d(\log A, X) \le K, \\ &\qquad X \in \log \mathscr{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}, \\ &\qquad \phi_n(\exp X) \le \alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

A (16) és (17) feladatra már közvetlenül alkalmazhatjuk a „Big-M" technikát. Legyen $\bar{A} = \log A$, és vezessük be az $y_{ij} \in \{0,1\},\ 1 \le i < j \le n$, bináris változókat. Felhasználva, hogy $\bar{A} \in [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}$, a (16) feladat az alábbi ekvivalens, vegyes 0-1 programozási alakban is megfogalmazható:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \\ \text{f.h.} & \phi_n(\exp X) \le \alpha_n, & \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M} y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \tag{18}$$

A (18) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n\times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix ϕ_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet. Az optimális megoldás $y_{ij} = 1$ értékei kijelölik a módosítandó elemeket, az $\exp x_{ij}$ értékek pedig egy módosítási lehetőséget mutatnak be, de azt a megfelelő páros összehasonlításokat esetleg újból elvégzőknek egyáltalán nem kell figyelembe venniük.

A (18) feladatnak a bináris változók szerint több optimális megoldása lehet, és ezeket külön-külön is érdemes lehet megvizsgálni. Az optimalizáló szoftverek azonban általában csak egy optimális megoldást szolgáltatnak, így a bináris változók szerinti összes optimális megoldás előállításáról saját magunknak kell gondoskodni.

Legyen L^* a (18) feladat optimumértéke, y^*_{ij}, $1 \le i < j \le n$, egy optimális megoldása és $I^*_0 = \{(i,j) \mid y^*_{ij} = 0, 1 \le i < j \le n\}$. A

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} = L^* \tag{19}$$

feltétel (18)-hoz való csatolásával azt biztosítjuk, hogy a továbbiakban csak a (18) optimális megoldásai lehetnek a (18)-(19) megengedett megoldásai. A

$$\sum_{(i,j)\in I^*_0} y_{ij} \ge 1 \tag{20}$$

feltétel csatolásával pedig a már megtalált optimális megoldást zárjuk ki a további keresésből. Amennyiben az derül ki, hogy a (18)-(19)-(20) feladatnak nincs megengedett megoldása, az azt jelenti, hogy megtaláltuk a (18) összes optimális megoldását. Különben pedig az új optimális megoldáshoz is készítünk egy a (20)-hoz hasonló kizáró feltételt, csatoljuk azt is a (20)-hoz, és újból megoldjuk a (18)-(19)-(20) feladatot. Nyilván véges számú iteráció után előáll a (18) feladat bináris változók szerinti összes optimális megoldása.

A (17) feladat a (18)-hoz hasonlóan írható át ekvivalens alakra:

$$\begin{array}{lll} \min & \alpha & \\ \text{f.h.} & \phi_n(\exp X) \le \alpha, & \\ & \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K, & \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M} y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \tag{21}$$

Azonnal látható, hogy ha $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye, a (18) és a (21) feladatok relaxáltjai konvex optimalizálási feladatok, így a (18), illetve a (21) is egy vegyes 0-1-es konvex programozási feladat.

3. A Saaty-féle *CR* index

A Saaty (1980) által javasolt inkonzisztencia mérőszám azon alapszik, hogy a páros összehasonlítás maximális sajátértéke ($\lambda_{\max}$) legalább akkora, mint a mátrix dimenziója (n), továbbá pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha a mátrix konzisztens. Azon intuíciót, hogy minél messzebb van a maximális sajátérték a mátrix méretétől, annál inkonzisztensebbnek tekinthetjük a mátrixot, az alábbi módon lehet formalizálni:

$$CI_n = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1},$$

tehát CI_n egy pozitív lineáris transzformáltja $\lambda_{\max}$-nak, és az említett $\lambda_{\max} \geq n$ egyenlőtlenség miatt $CI_n \geq 0$. A CI_n értékét azonban önmagában nem tudjuk kezelni, hiszen nincs mihez viszonyítani, nem lehet megmondani, hogy mely érték számít nagynak és melyik kicsinek. Az inkonzisztencia mérésének eredeti célja szerint ez annak felel meg, hogy mikor lehet elfogadhatatlannak vagy elfogadhatónak tekinteni a mátrixot. Saaty – azóta számos alkalommal kritizált – javaslata szerint generáljunk véletlenszerűen $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixokat, amelyeknek az elemeit az $1/9, 1/8, 1/7, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots, 8, 9$, arányskáláról választjuk egyenlő valószínűséggel és ezen véletlen mátrixok CI_n értékeinek átlagos értékét jelöljük RI_n-nel. Egy konkrét, döntéshozó által kitöltött páros összehasonlítás mátrix CR inkonzisztenciája a $CR_n = CI_n/RI_n$ aránnyal definiált és az elfogadhatóság feltételeként a 10%-os szabályként ismert $CR_n \leq 0.1$ egyenlőtlenség adható. A 10%-os szabállyal kapcsolatos kritikák egy részére válaszol a (Vargas, 1982) cikk, illetve a kisebb méretű mátrixokra vonatkozó módosítás (Saaty, 1994). Megjegyezzük, hogy az inkonzisztencia mérésére számos további javaslat adható (Brunelli és Fedrizzi, 2011), de az elfogadhatósági küszöbérték megadásával a legtöbb módszer még adós.

Mivel CR_n és CI_n között egyenes arányossági összefüggés van, mindkettő használható inkonzisztencia indexként. Mivel a klasszikus 10 %-os elfogadási szint a CR_n mutatóra vonatkozik, a CR_n-t használjuk a 2. fejezetben általánosan tárgyalt ϕ_n inkonzisztencia index speciális eseteként.

Egy $X \in \log \mathscr{P}_n$ esetén jelölje $\lambda_{\max}(\exp X)$ az $A = \exp X$ mátrix maximális sajátértékét. Ekkor

$$\phi_n(\exp X) = \frac{\lambda_{\max}(\exp X) - n}{RI_n(n-1)}. \tag{22}$$

A (22) összefüggésből látszik, hogy $\phi_n(\exp X)$ pontosan akkor konvex függvénye az X mátrix elemeinek, ha $\lambda_{\max}(\exp X)$ is az, ez utóbbi tulajdonság pedig bizonyítást nyert a (Bozóki et al., 2010) dolgozatban. Nevezetesen, $\lambda_{\max}(\exp X)$ nemcsak a ferdén szimmetrikus mátrixok alterén konvex, hanem az $n \times n$-es mátrixok halmaza felett is.

A fentiek alapján bizonyítottuk, hogy (22) esetén a (18), illetve a (21) egy vegyes 0-1-es konvex optimalizálási feladat. Numerikus szempontból nehézséget okoz azonban, hogy

$\phi_n(\exp X)$ nem adható meg explicit alakban, mivel a $\lambda_{\max}$ értékek maguk is iterációs módszerrel számítódnak (Saaty, 1980). Ez a tény megnehezíti a standard megoldó szoftverek alkalmazását. Megmutatjuk azonban, hogy a $\lambda_{\max}$ érték előáll egy konvex optimalizálási feladat optimumaként, ezért a beágyazott optimalizálási feladat összevonható a beágyazó feladattal.

A Frobenius-tétel egy speciális esetét fogjuk alkalmazni (Saaty, 1980; Sekitani és Yamaki, 1999):

1. Tétel. *Legyen A egy $n \times n$-es irreducibilis nemnegatív mátrix, $\lambda_{\max}(A)$ pedig az A legnagyobb sajátértéke. Ekkor*

$$\max_{\mathbf{w}>\mathbf{0}} \min_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}{w_i} = \lambda_{\max}(A) = \min_{\mathbf{w}>\mathbf{0}} \max_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j}{w_i}. \tag{23}$$

Mivel a páros összehasonlítási mátrixok pozitívak, az 1. Tétel közvetlenül alkalmazható rájuk.

Az $\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, i, j = 1, \dots, n$, mellé bevezetve a $z_i = \log w_i, i = 1, \dots, n$, jelöléseket is, a (23) alatti jobb oldali egyenlőséget a

$$\lambda_{\max}(A) = \min_{\mathbf{z}} \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \exp(\bar{a}_{ij} + z_j - z_i) \tag{24}$$

alakra írhatjuk át. A (24) jobb oldalán szereplő konvex exponenciális függvények összegei és azok maximuma szintén konvex, $\lambda_{\max}$ tehát egy konvex optimalizálási feladat optimumaként áll elõ. A (24) összefüggést abban a formában is megfogalmazhatjuk, hogy $\lambda_{\max}(A)$ optimumértéke a

$$\min \lambda \quad \text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{n} \exp(\bar{a}_{ij} + z_j - z_i) \le \lambda, \qquad i = 1, \dots, n \tag{25}$$

konvex optimalizálási feladatnak, ahol λ és z_i, $i = 1, \dots, n$, a változók.

Legyen α_n adott elfogadási szint a $\phi_n = CR_n$ inkonzisztencia index esetén. Ekkor a (18) feladatban szereplő

$$\phi_n(\exp X) \le \alpha_n \tag{26}$$

feltétel a (22) alapján $\lambda_{\max}(\exp X)$ segítségével is kifejezhető:

$$\lambda_{\max}(\exp X) \le n + RI_n(n-1)\alpha_n. \tag{27}$$

Legyen $\alpha_n^* = n + RI_n(n-1)\alpha_n$. Ekkor (24) alapján, az $\bar{a}_{ij}$ helyébe most x_{ij}-t írva, (27) a

$$\sum_{j=1}^{n} \exp(x_{ij} + z_j - z_i) \le \alpha_n^*, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{28}$$

feltételrendszerrel ekvivalens.

A (18) feladatba a (26) feltétel helyett a (28) összefüggést írva, a következő konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \\ \text{f.h.} & \sum_{j=1}^{n} \exp(x_{ij} + z_j - z_i) \le \alpha_n^*, & i = 1, \ldots, n, \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M} y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \tag{29}$$

2. Tétel. *A (29) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CR_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet, ahol $\alpha_n = (\alpha_n^* - n)/(RI_n(n-1))$.*

A (21) feladatot is specializálhatjuk a $\phi_n = CR_n$ inkonzisztencia index esetére. A (22) összefüggés alapján ϕ_n minimalizálása ekvivalens $\lambda_{\max}$ minimalizálásával. A $\lambda_{\max}$-ra vonatkozó (25) feladatot is figyelembe véve tekintsük az alábbi konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatot:

$$\begin{array}{lll} \min & \lambda & \\ \text{f.h.} & \sum_{j=1}^{n} \exp(x_{ij} + z_j - z_i) \le \lambda, & i = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K, & \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M} y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \tag{30}$$

3. Tétel. *Jelölje λ^* a (30) optimumértékét, és legyen $\alpha^* = (\lambda^* - n)/(RI_n(n-1))$. Ekkor α^* a CR_n inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítási mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

4. A Koczkodaj-féle *CM* index

A Koczkodaj által bevezetett (Koczkodaj, 1993; Duszak és Koczkodaj, 1994) inkonzisztencia index a 3×3-as részmátrixokra, triádokra épül. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}$$

3×3-as páros összehasonlítás mátrix esetén legyen

$$CM(a,b,c) = \min\left\{ \frac{1}{a}\left|a - \frac{b}{c}\right|, \frac{1}{b}|b - ac|, \frac{1}{c}\left|c - \frac{b}{a}\right| \right\}.$$

Az index $n > 3$ esetén kiterjeszthető tetszőleges A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixra:

$$CM(A) = \max\left\{CM(a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}) \mid 1 \leq i < j < k \leq n\right\}. \tag{31}$$

A Saaty-féle CR_n indextől eltérően itt nem jelennek meg n-től függő paraméterek a konstrukcióban, ezért itt eltekintünk a CM_n alak használatától. Könnyen látható, hogy CM inkonzisztencia index, mivel tetszőleges $A \in \mathscr{P}_n$ esetén $CM(A) \geq 0$, és $CM(A) = 0$ pontosan akkor, ha A konzisztens.

Egy általános (a,b,c) triád esetén legyen

$$T(a,b,c) = \max\left\{\frac{ac}{b}, \frac{b}{ac}\right\}. \tag{32}$$

Megmutatható (Bozóki és Rapcsák, 2008), hogy a CM index és T között függvényszerű kapcsolat áll fenn:

$$CM(a,b,c) = 1 - \frac{1}{T(a,b,c)}, \quad T(a,b,c) = \frac{1}{1 - CM(a,b,c)}. \tag{33}$$

Mivel $T(a,b,c) \geq 1$, ezért $0 \leq CM(a,b,c) < 1$, így $0 \leq CM(A) < 1$.

Jelölje $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ az (a,b,c) triád logaritmizált értékeit, és legyen

$$\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \max\left\{\bar{a} + \bar{c} - \bar{b},\ -(\bar{a} + \bar{c} - \bar{b})\right\}.$$

Ekkor

$$T(a,b,c) = \exp(\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})) \tag{34}$$

$$CM(a,b,c) = 1 - \frac{1}{\exp(\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}))}. \tag{35}$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy CM már triádok esetén sem konvex függvénye a logaritmizált mátrixértékeknek, ezért a $\phi_n = CM$ konzisztencia index választás esetén a (18) és a

(21) feladatban megjelenő $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek nem konvex függvénye. Megmutatjuk azonban, hogy a $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő egyváltozós

$$f(t) = \frac{1}{1-t} \tag{36}$$

függvény alkalmazásával az $f(\phi_n(\exp X)) = f(CM(\exp X))$ az X mátrix elemeinek már konvex függvénye. Ekkor a (18) feladat

$$\phi_n(\exp X) \le \alpha_n$$

feltételét kicserélhetjük az

$$f(\phi_n(\exp X)) \le f(\alpha_n)$$

konvex feltételre. A (21) feladatban szereplő $\phi_n(\exp X)$ mátrixfüggvény helyett írhatunk közvetlenül $f(\phi_n(\exp X))$-et, és a módosított feladat α^* optimumértékével számolt $f^{-1}(\alpha^*)$ érték lesz az eredeti (21) feladat optimumértéke.

Terjesszük ki a (32) által definiált T mutatót tetszőleges A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixra:

$$T(A) = \max\left\{T(a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}) |\ 1 \le i < j < k \le n\right\}. \tag{37}$$

Mivel (33) alapján triádok esetén szigorúan monoton növekvő függvénykapcsolat van CM és T között, ezért

$$CM(A) = 1 - \frac{1}{T(A)} = f^{-1}(T(A)),\ \ T(A) = \frac{1}{1 - CM(A)} = f(CM(A)), \tag{38}$$

ahol f a (36)-ben definiált függvény.

A T mutatót a logaritmizált térben kifejezve azt kapjuk, hogy

$$T(\exp X) = \max\left\{\max\left\{\exp(x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}), \exp(-x_{ij} - x_{jk} - x_{ki})\right\} \mid 1 \le i < j < k \le n\right\}. \tag{39}$$

Mivel a (39) jobb oldalán konvex függvények maximumát képezzük, $T(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye. Tehát a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia index választás esetén $f(\phi_n(\exp X))$ már konvex függvény, és a fent elmondottak szerint módosított (18) és (21) feladatok már konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok.

Bár $CM(\exp X)$ nem konvex, de kvázikonvex. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy $CM(\exp X)$ alsó szinthalmazai konvexek. Legyen $\beta \in [0, 1)$ tetszőlegesen választott lehetséges értéke $CM(\exp X)$-nek. Mivel f szigorúan monoton növekvő, ezért

$$\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid CM(\exp X) \le \beta\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(CM(\exp X)) \le f(\beta)\}.$$

Viszont $T(\exp X) = f(CM(\exp X))$ konvexitása miatt a fenti szinthalmazok konvexek, ez pedig $CM(\exp X)$ kvázikonvexitását jelenti.

4. Tétel. *$CM(\exp X)$ kvázikonvex az $n \times n$-es mátrixok halmazán, $T(\exp X) = f(CM(\exp X))$ pedig konvex, ahol f a (36) szerint van értelmezve.*

A következőkben megmutatjuk, hogy a (18) és (21) feladatok még egyszerűbb módon is megoldhatók, nevezetesen megfelelő lineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok segítségével. Kihasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő voltát, (39) az alábbi formában is felírható:

$$T(\exp X) = \exp\left(\max\left\{\max\{x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}, -x_{ij} - x_{jk} - x_{ik}\} \mid 1 \le i < j < k \le n\right\}\right). \quad (40)$$

A (40) azt is jelenti, hogy $CM(A)$ meghatározható az $\bar{A} = \log A$ mátrix elemeivel képzett lineáris kifejezések maximumának meghatározásával, valamint az exponenciális és az f függvény egyszeri alkalmazásával.

5. Tétel (Bozóki et al., 2011). *Egy $n \times n$-es A páros összehasonlítás mátrix Koczkodaj-féle CM inkonzisztenciája a következő egyváltozós lineáris programozási feladat optimális megoldásából számítható:*

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ \text{f.h.} & \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} \le z, & 1 \le i < j < k \le n, \\ & -(\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki}) \le z, & 1 \le i < j < k \le n. \end{array} \quad (41)$$

Legyen z_{opt} a (41) egy optimális megoldása. Ekkor $CM(A) = 1 - 1/\exp(z_{opt})$.

A következőkben jelölje $\alpha_n = CM^*$ a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia indexhez tartozó elfogadási szintet és legyen

$$z^* = \log\left(\frac{1}{1 - CM^*}\right). \quad (42)$$

Tekintsük a következő lineáris kevert 0-1 programozási feladatot:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \\ \text{f.h.} & x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \le z^*, & 1 \le i < j < k \le n, \\ & -(x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}) \le z^*, & 1 \le i < j < k \le n, \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n, \\ & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\ & -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n. \end{array} \quad (43)$$

Az eddig tárgyaltak alapján közvetlenül adódnak a következő állítások.

6. Tétel. *A (43) feladat optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CM inkonzisztenciája ne haladja meg a CM^* elfogadási szintet.*

A (43) feladat némi átalakításával az alábbi lineáris kevert 0-1 programozási feladatot írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z & \\
\text{f.h.} & x_{ij}+x_{jk}+x_{ki} \leq z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
& -(x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}) \leq z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
& \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} y_{ij} \leq K, & \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \leq i < j \leq n.
\end{array}
\tag{44}
$$

7. Tétel. *Jelölje z_{opt} a (44) optimumértékét. Ekkor $1 - 1/\exp(z_{opt})$ a CM inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső háromszög (és nyilván az alsó háromszög) pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

5. Egy numerikus példa

A javasolt módszert egy Saaty (1980) könyvéből származó klasszikus numerikus példán is bemutatjuk, mégpedig a Saaty-féle *CR* inkonzisztencia mérőszám esetére. Az 1. táblázat hat nagyváros Philadelphiától való távolságának páros összehasonlítási értékeit tartalmazza. Például az értékelő úgy ítélte meg, hogy London ötször nagyobb távolságra fekszik Philadelphiától, mint Chicago.

	Kairó	Tokió	Chicago	San Francisco	London	Montreal
Kairó	1	1/3	8	3	3	7
Tokió	3	1	9	3	3	9
Chicago	1/8	1/9	1	1/6	1/5	2
San Francisco	1/3	1/3	6	1	1/3	6
London	1/3	1/3	5	3	1	6
Montreal	1/7	1/9	1/2	1/6	1/6	1

1. táblázat. Philadelphiától mért távolságok páronkénti összehasonlítása

Jelölje A az 1. táblázat páros összehasonlítás mátrixát. Ekkor $\lambda_{\max}(A) = 6,4536$, és mivel $RI_6 = 1,24$, így $CR(A) = 0,0732$. Miután $CR(A)$ értéke jóval a Saaty-féle 10%-os küszöb alatt van, az A mátrixot elfogadható inkonzisztenciájúnak tekinthetjük.

Jelölje $A^{(1)}$ azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy felcseréljük az A mátrix $a_{1,2}$ és $a_{2,1}$ elemeit. Ez egy gyakori tévesztés páros összehasonlítás mátrixok kitöltésénél. Az $A^{(1)}$ mátrixra azt kapjuk, hogy $CR(A^{(1)}) = 0,0811$. Tehát az adatrögzítési hiba következtében ugyan emelkedett $A^{(1)}$ inkonzisztencia szintje, de még a 10%-os elfogadási szint alatt van. Ebben az esetben tehát a javasolt módszertan nem tudja detektálni a hibát, az $A^{(1)}$ mátrixot elfogadja.

Nézzük meg most azt az esetet, amikor nem az $a_{1,2}$ és $a_{2,1}$, hanem az $a_{1,3}$ és $a_{3,1}$ elemek cserélődnek fel véletlenül az A mátrixban. Jelölje $A^{(2)}$ az így kapott mátrixot. Ekkor $CR(A^{(2)}) = 0,5800$, amely jóval a 10%-os elfogadási szint felett van, és durva inkonzisztenciára utal. A megfelelő (29) megoldásaként azt kapjuk, hogy az $A^{(2)}$ mátrix inkonzisztenciája egy elem (és a reciproka) megváltoztatásával a kritikus 10% alá hozható. Ez az elem éppen az elrontott $a_{1,3}$ pozícióban van, és megmutatható, hogy a (29) feladatnak ez az egyetlen optimális megoldása van a bináris változók szerint. Tehát a javasolt módszer felderítette az egy pozíciónál történő javítás egyetlen lehetséges helyét, ami éppen a véletlenül rossz helyre írt kiértékelés pozíciója.

Az előző példánál jelentős inkonzisztencia emelkedést okozott a mátrix elrontása, ezért nem meglepő, hogy a módszer az egyértelmű (vissza)javítás lehetőségét kínálta fel. Kisebb inkonzisztencia emelkedésnél azonban már nem ilyen egyértelmű a helyzet.

Tegyük fel, hogy az A mátrix $a_{1,3}$ eleme most 2-re változik az előző példa 1/8 értéke helyett. Ez az eredeti 8 értékhez képest kisebb eltérés, a módosított és $A^{(3)}$-mal jelölt mátrix mátrix inkonzisztenciája is kevésbé nőtt meg: $CR(A^{(3)}) = 0,1078$. Az $A^{(3)}$ inkonzisztenciája alig haladja meg a kritikus 10%-os szintet, ezért várható, hogy egy elem módosításával is 10% alá hozható az inkonzisztencia, de az is, hogy erre több pozíció is kínálkozik. Valóban, a megfelelő (29) feladat optimumértéke 1, és a (19) és (20) csatolása utáni újrafuttatásokkal kideríthető, hogy a (29) feladatnak a bináris változók szerint 6 optimális megoldása van. Nevezetesen, az $A^{(3)}$ mátrix inkonzisztenciája 10% alá nyomható az $a_{1,3}$ mellett az $a_{1,4}$, $a_{1,5}$, $a_{2,6}$, $a_{3,4}$ és $a_{4,5}$ elemek külön-külön történő módosításával is. Jobb esetben az értékelő rögtön észreveszi, hogy az $a_{1,3}$ pozícióban elírás történt. Ha nem, akkor esetleg mind a 6 pozíció értékelését újra kell gondolnia, de ezek száma még mindig kisebb a felső háromszögben levő 15 elemnél.

Köszönetnyilvánítás:

A szerzők köszönetet mondanak Csató Lászlónak a kézirat gondos átolvasásáért és az értékes javaslatokért.

A kutatás az OTKA K-77420 pályázat támogatásával készült.

Hivatkozások

Bozóki, S., Fülöp, J., Koczkodaj, W. (2011). An LP-based consistency-driven supervision for incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 54:789–793.

Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1):318–333.

Bozóki, S., Rapcsák, T. (2008). On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices. *Journal of Global Optimization*, 42(2):157–175.

Brunelli, M., Fedrizzi, M. (2011). Characterizing properties for inconsistency indices in the AHP. In: *Proceedings of the 11th International Symposium on the AHP*, Sorrento, Naples, Italy.

Chu, M. (1998). On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 272(1):155–168.

Duszak, Z., Koczkodaj, W. (1994). Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons. *Information Processing Letters*, 52(5):273–276.

Koczkodaj, W. (1993). A new definition of consistency of pairwise comparisons. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(7):79–84.

Saaty, T. (1980). *Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.

Saaty, T. (1994). *Fundamentals of Decision Making*. RWS Publications, Pittsburgh.

Sekitani, K., Yamaki, N. (1999). A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42(2):219–232.

Temesi J., Csató L., Bozóki S. (2012). Mai és régi idők tenisze – A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In: Solymosi T., Temesi J. (szerk.) *Egyensúly és optimum, Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, Aula Kiadó, Budapest.

Vargas, L. (1982). Reciprocal matrices with random coefficients. *Mathematical Modelling*, 3(1):69–81.

Longevity – avagy együtt öregszünk

Kovács Erzsébet

Kivonat
A XX. században két egymással ellentétes demográfiai folyamat tanúi lehettünk: a második világháborút követő születési csúcs után a fejlett országokban a születések számának erőteljes csökkenése következett be. Ezzel együtt jelentősen emelkedik a születéskor várható élettartam. A hosszabb élet a társadalom számára kihívást jelent, mert a nyugdíjban levő népesség száma és aránya növekedik. Ez felveti az idősödéshez kötődő állami – nyugdíjcélú – kiadások korlátok között tartását, esetleges csökkentését hazánkban is. A társadalom tagjainak nagy kockázatközössége a folyó finanszírozású nyugdíj révén kiküszöböli a befektetési kockázatot, de nem tudja kiküszöbölni a hosszabbodó várható élettartamból eredő járadéktöbblet iránti igényt. A nyugdíjrendszert is érintő szerkezeti reformok kívánatosak, mert ezek révén a nagymértékű költségvetési hiány is csökkenthető lenne.

1. Bevezetés

Az aktuárius képzés 1994-es egyetemi beindítása idején Forgó Ferenc volt tanszékvezetőnk és az Intézet igazgatója. Támogatásának és értő segítségének is köszönhető, hogy a kezdetben egyetlen választható tárgyból, majd mellékszakirányból mostanra egy erős mesterszak nőtt ki. Ezért születésnapjára készülve természetes volt számomra, hogy az aktuáriusi témakörhöz kötődő témát dolgozzak fel. Feritől sokat tanultam, hiszen kezdetben tanárom, majd főnököm és kollégám volt. De a matematikai témák mellett angol nyelvi ügyekben is sokszor támaszkodtam a tudására. Ezért megemlítem, hogy az angol szó – longevity – milyen szépen fejezi ki a vizsgált jelenséget. Magyarul csak körülírjuk, amikor

Kovács Erzsébet
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu

hosszabbodó várható élettartamról beszélünk. De ilyen különbség van a tartalmilag azonos Life Table és a halandósági tábla esetében is.

2. Az idősödő népesség mint társadalmi jelenség

Évtizedek óta megfigyelhető a fejlett országokban a születések számának csökkenése mellett a születéskor várható élettartam emelkedése. E jelenségek együttes hatását az „idősödő népesség” problémájaként elemzik a társadalomtudósok. Az elnevezés – és a hozzá kapcsolódó negatív felhang – vitatott, mert más szakértők a XX. század legnagyobb vívmányának tekintik az élettartam meghosszabbodását, és azt emelik ki, hogy a fizikai és szellemi egészségben töltött évek száma jelentősen nőtt, ezért fiatalodó társadalomban élünk. Abban azonban egyetértés van, hogy a hosszabb élet a társadalom számára kihívást jelent, mert a nyugdíjban levő népesség száma és aránya növekedik. További költségeket jelent az egészségügyi ellátás iránti igény emelkedése is. A problémák együttes kezelésére fogalmazták meg 1985-ben a „4 pillér” stratégiát.[1] Az állami nyugdíjat tekintették az első pillérnek, a magánnyugdíjpénztárakból származik a második pillér, és az egyének önkéntes nyugdíjcélú megtakarításaiból képződik a harmadik pillér. Új elemként határozták meg a negyedik pillért, azt a kiegészítő jövedelmet, ami a nyugdíjkort elérő, de továbbra is dolgozó emberek bére képez. Azóta az OECD tagországok mindegyikében lezajlott valamiféle nyugdíjreform, melynek eredményeként többpilléres nyugdíjrendszerre tértek át.

Az ezredfordulót követő években már számos elemzés, tanulmány jelent meg, amelyben a szerzők – többek között Poterba (2001) – felhívták a figyelmet a II. világháború után született nagy létszámú korosztály, az ún. baby boom generáció közelgő nyugdíjba vonulásával együtt járó pénzpiaci hatásokra, a felhalmozott értékpapírok nyugdíjra váltásából eredő túlkínálatra, és az állami nyugdíj- és egészségügyi ellátások erőteljes megnövekedésére. Azt számos közgazdász tudta és hangoztatta az elmúlt 1-2 évtizedben, hogy az országok kockázati besorolása, a pénzügyi piacok mozgása nem független az adott országra jellemző demográfiai folyamatoktól.

Az első elemzések után teltek-múltak az évek, de kevés előrevivő döntés, netán eredmény született ezen a lassan változtatható területen. A Standard & Poor’s egyik 2006-ban megjelent elemzése szerint az időskori és egészségügyi ellátás reformja nélkül a világ fejlett 32 tagállama közül 29 spekulatív besorolásba fog átkerülni 2050-re. Ezt a megállapítást 2006.07.28-án olvashattuk a portfolio.hu Öregszünk... fájdalmasan öregszünk... című írásában.

[1] 1985 októberében a Genova Association által szervezett konferencián fogalmazódott meg „The 4 Pillars Strategy” elnevezéssel a jóléti állam átalakításának szükségessége. A szövetség műhelytanulmányok megjelentetésével, konferenciák szervezésével aktuáriusok, társadalombiztosítási, befektetési és munkaügyi szakemberek véleménycseréjét segíti elő.

A cikk úgy folytatódik, hogy Magyarország – mint a vizsgált mintában az egyik egyébként is leggyengébb fiskális bázissal rendelkező ország – 2020-ra kaphat spekulatív minősítést. Az S&P elemzői szerint a 2050-ig számított fedezetlen nyugdíjadósság hazánkban a második legnagyobb az elemzés tárgyát képező fejlett államok között, de a minket megelőző Japán legalább azzal indokolhatja a helyzetét, hogy náluk a legmagasabb a várható élettartam a világon.

2006 óta megint eltelt öt év, de micsoda öt év? Közben 2008-ben jelentős pénzügyi válság következett be, ami gazdasági visszaeséssel járt szerte Amerikában, Európában és a fejlett világ számos más államában is. A leminősítések 2011-ben bekövetkeztek, nem is kellett megvárnunk a demográfiai folyamatok lassú, de biztos kiteljesedését.

3. Az idősödéshez kötődő állami kiadások

A demográfiai folyamatok, a társadalom demográfiai szerkezetének változásához köthető állami kiadásokat az alábbi négy csoportra bontva vizsgálhatjuk:

- nyugdíjellátások;
- egészségügyi ellátások;
- időskori gondozás;
- munkanélküliségi ellátás.

Fentiek közül a legjelentősebb tételt hazánkban a nyugdíjkiadások jelentik, a csoportra fordított teljes állami kiadások több mint 50%-ával, ami a folyamatok változatlansága mellett tovább nő.

A Nyugdíj és Időskor Kerekasztal 2010-ben Jelentés címmel adta közre azokat a nyugdíjparadigma változatokat, és a hozzájuk tartozó – 2007-2009 között készített – elemzéseket és számításokat, amelyek valamilyen mértékben megoldást kínálhattak volna a nyugdíjellátások mértékének korlátozására. A Jelentés szerzői bemutatták mind a döntési változatokat, mind az egyes paradigmák által előnyben részesített célokat. Ugyanakkor hangsúlyozták, hogy ez nem döntéselőkészítő munka, és egyik paradigmáról sem mondható el, hogy megoldaná minden problémánkat. Az is egyértelműnek tűnt, hogy nyugdíjrendszert konszenzusos döntéssel, de további halogatás nélkül meg kell változtatni. A Jelentés nem foglalkozott sem a tőkésített pillér előnyeivel, hátrányaival, sem a fenntartásának kérdéseivel.

A szakmai bemutatót követően országgyűlési választások zajlottak, kormányváltás történt, így a politikai figyelem elterelődött a Jelentés higgadt sorairól. A választások után napvilágra került az új kormány cselekvési tervét felsoroló 29 pont. A bennfentesek tudni vélték, hogy a hiányzó 30. pont lett volna a nyugdíjreform.

A nyugdíj-szakemberek aggódva figyelték, hogy miért nem történik érdemi lépés, miért fordult el látványosan a kormány a korábban kívánatosnak tartott névleges egyéni számlás nyugdíjrendszertől.

2010 nyarán a költségvetési hiány túlzott mértéke kapott óriási figyelmet. Ezek a hírek lassan, de egyre erősebben összekapcsolódtak azzal, hogy a magánpénztári tagok befizetései hiányoznak a társadalombiztosítási nyugdíjkasszából, és az általuk felhalmozott vagyonból csökkenthető a hiány. 2010. október 13-án nyíltan kimondásra is került az, hogy a tagdíjbefizetések 14 hónapra az államhoz kerülnek. Majd néhány nappal/héttel később az eltérítés helyett a magánnyugdíjpénztárakból az állami nyugdíjrendszerbe való visszalépés megnyitása és bátorítása került előtérbe.[2] A magánnyugdíjpénztári tagságukat fenntartani kívánóknak kellett nyilatkozniuk 2011. január 31-ig. A nem nyilatkozó 97%-nyi többség automatikusan átkerült az állami nyugdíjrendszerbe. A reálhozamok kifizetése és a vagyonátadás folyamata 2011 első felében zajlott.

Teltek a hónapok, és nem tudtunk meg semmit arról, hogy milyen változásokat készít elő a kormányzat, milyen paradigma mentén alakul át a társadalombiztosítási nyugdíjrendszer. 2011 december közepén került a téma újra terítékre, és 2012. március 31-ig ismét megnyílt a visszalépés lehetősége.

Ez a lépéssorozat azonban nem ad választ a fejezet induló kérdésére, az idősödéshez kötődő állami kiadások korlátok között tartása, esetleges csökkentése továbbra sem biztosított.

4. A taglétszámok alakulása

Érdemes figyelni, hogy mi történik 2012-ben a 15 éve, egy 1997-es törvényben megalkotott rendszerrel. A tömeges visszalépés nyomán egyéni döntések pecsételik meg a pénztárak sorsát, vagy kitartanak azok, akik egy éve tagságuk fenntartása mellett nyilatkoztak. Néhány pénztár már összeolvadt , de ez egészen addig folytatódhat, amíg csak egyetlen pénztár marad (vagy alakul a régiekből). A szektor végleges felszámolása is bekövetkezhet, hiszen a működés feltételei alig biztosítottak.

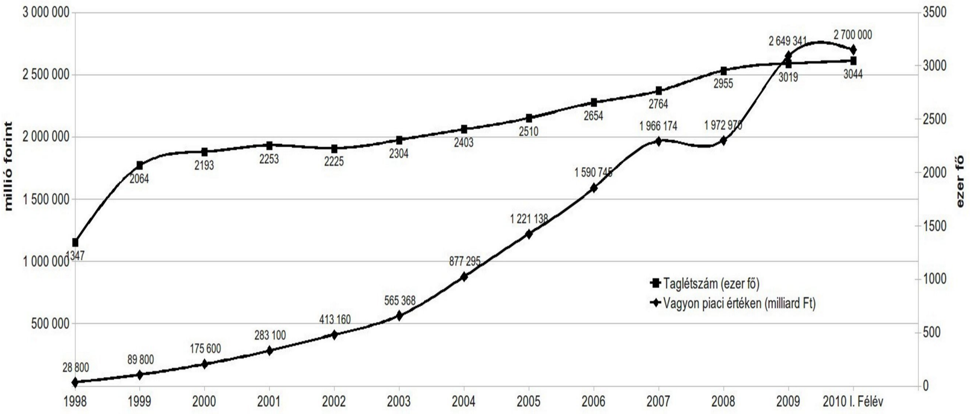
A tanulmány írásának idején még nem lehet tudni, hogy ez a harmadik visszalépési lehetőség mit hoz magával, kik és hogyan fognak dönteni. De érdemes áttekinteni az eddigi két nagy menetet, mi is történt 2009 végén és 2011 elején.

A jelenlegi kormány 2010-es kezdeményezése előtt, 2009 végén is volt már visszalépési lehetőség. Ezt az előző kormány nyitotta meg, és főleg azokat bátorította egyéni döntésük megváltoztatására, akik 1952 előtt születtek és közel voltak a nyugdíjkorhatárhoz. A hátteret akkor a 2008-ban kezdődött pénzügyi válság, a kedvezőtlenül alakuló hozamok, a nyugdíjvagyon zsugorodása jelentette. Bár számos érv elhangzott, a visszalépések száma elmaradt a várt, racionálisan indokolható mértéktől, és a visszalépők korösszetétele is szóródott, nem tömörült az 57 éves, vagy annál idősebbek körében.

A következő ábrákon áttekintjük, hogy az indulástól kezdve hogyan nőtt a magánnyugdíjpénztárak taglétszáma és vagyona, majd bemutatjuk, hogy a visszalépések milyen változásokat okoztak.

[2] Ennek a tanulmánynak nem célja a 2010 őszi események részletes dokumentálása.

A magánpénztári rendszer az 1998-as indulást követően dinamikusan bővült, akár a tagok számát, akár a kezelt vagyont tekintjük (1. ábra). Az idősebbek önkéntesen és a szabályok változása miatt évről-évre hullámzó létszámban csatlakoztak. A pályakezdők számára hol kötelező, hol önkéntes volt a belépés, de az érdemi lendületet nem az ő csatlakozásuk adta. 2009 végére az 1998 óta belépők száma elérte a 3 millió főt. Az összlétszámon belül a fiatalon belépő pályakezdők aránya 39%.

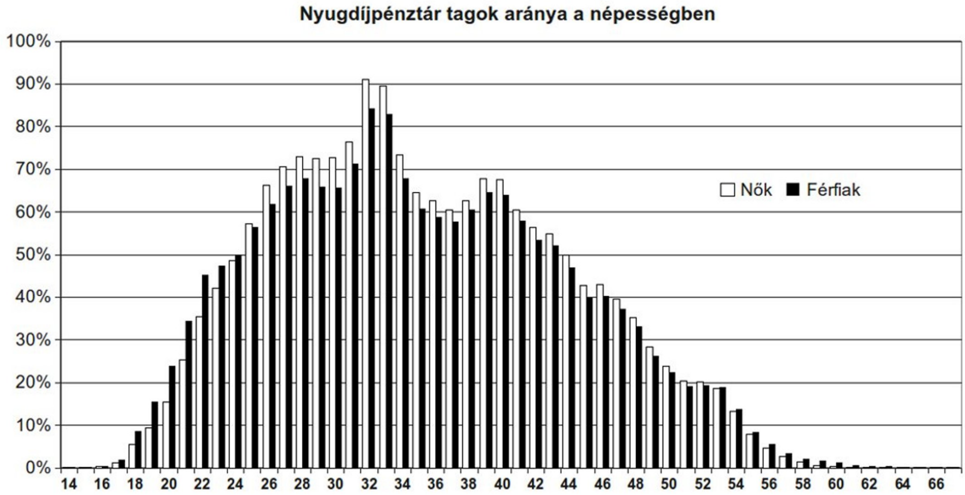


Forrás: PSZÁF

1. ábra. Magánnyugdíjpénztári taglétszám és vagyonnövekedés idősora

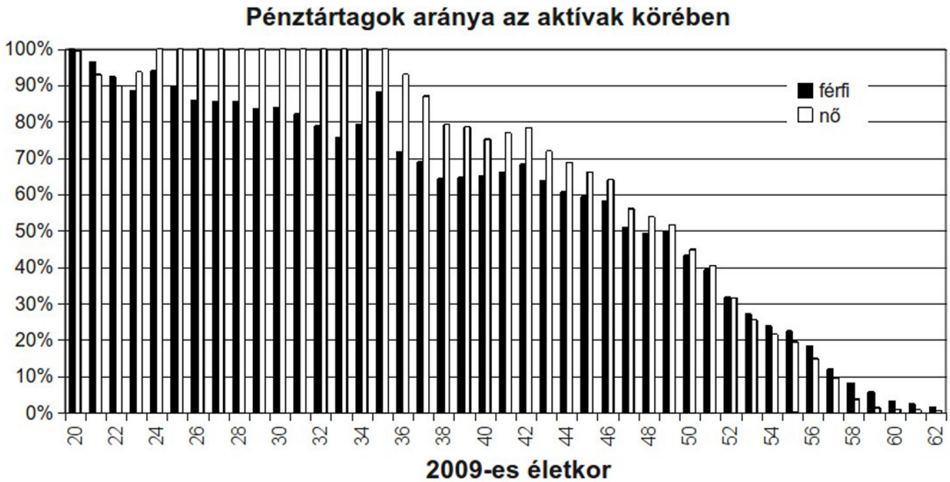
A magánnyugdíjpénztárak átlagos tagja 2009-ben 35 éves volt. E felett az életkor felett jelentősen csökkent a pénztártagok létszáma és aránya a saját korosztályon belül. A pénztártagok nemenkénti aránya a népességben a nők javára billent a legtöbb életkorban a 2. ábrán. A 3. ábrán pedig az aktívakhoz viszonyítva látjuk a pénztártagok arányát, és csak a nők érik el a 100%-os tagságot.

A 3. ábrán a nők között több életkorban eléri az arány a 100%-ot. Érdemes figyelni arra a különbségre, amit a harmincas korosztályokban látunk a 2. és a 3. ábrán. A férfiak aránya – a középső korosztályokban – messze alacsonyabb, mint a nőké. Vajon hol van a 26-30 éves fiatal férfiak mintegy 15%-a? Ők biztosan pályakezdők voltak az elmúlt 11 évben. A 34 éves férfiak 25%-a hiányzik, pedig ők is csak 23 évesek voltak az indulás évében, 1998-ban. Ennek oka az lehet, hogy a szürke és a fekete gazdaságban inkább a férfiak vesznek részt, a nők nagyobb arányú legális foglalkoztatása egyértelműen növeli a járulékfizetők, az aktívak közötti arányukat.



Forrás: Saját számítás, PSZÁF és KSH adatok, 2009.

2. ábra. A pénztártagok nemenkénti aránya a népességben



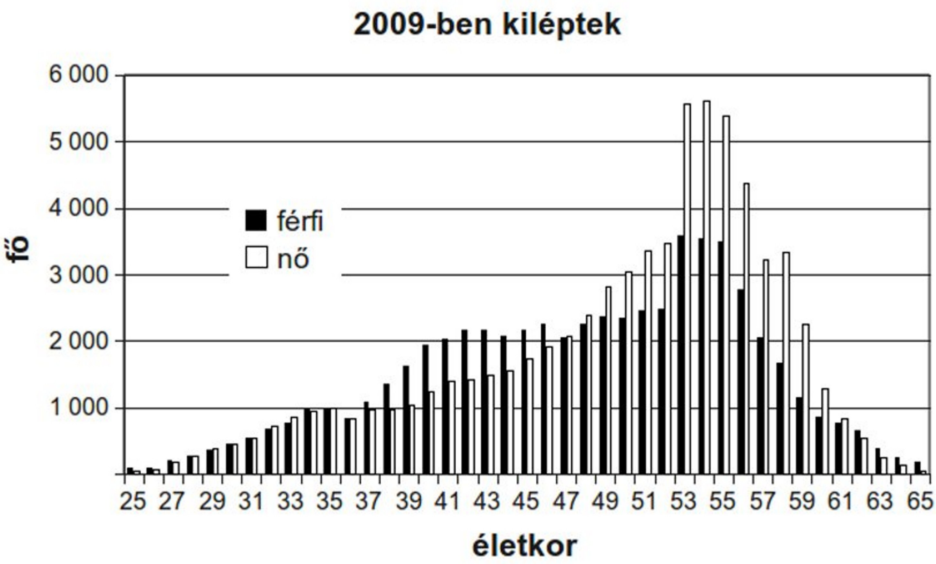
Forrás: Hablicsek László projekciói, PSZÁF pénztári adatok és saját számítások

3. ábra. A pénztári tagok aránya[3] az aktívak körében

[3] A 3. ábrán a 100%-ot elérő arány az előrejelzés pontatlansága miatt adódhat, mivel a 2009-es tényleges pénztári taglétszámot a 2007-ben előre vetített aktívakhoz viszonyítva mutatjuk be.

5. Önkéntes visszalépések 2009-ben

A 2008-as pénzügyi válság és az épp akkor bevezetett választható portfóliók nyomán eső hozamok hatására 2009-ben a társadalombiztosításba való visszalépést ajánlották a szakemberek az 57 évesnél idősebb pénztártagoknak.[4] A 4. ábra mutatja azok életkori megoszlását, akik akkor a visszalépés mellett döntöttek. A visszalépők összlétszáma elmaradt a várt 150 ezer főtől, a kilépettek többsége 53-55 éves nő volt.



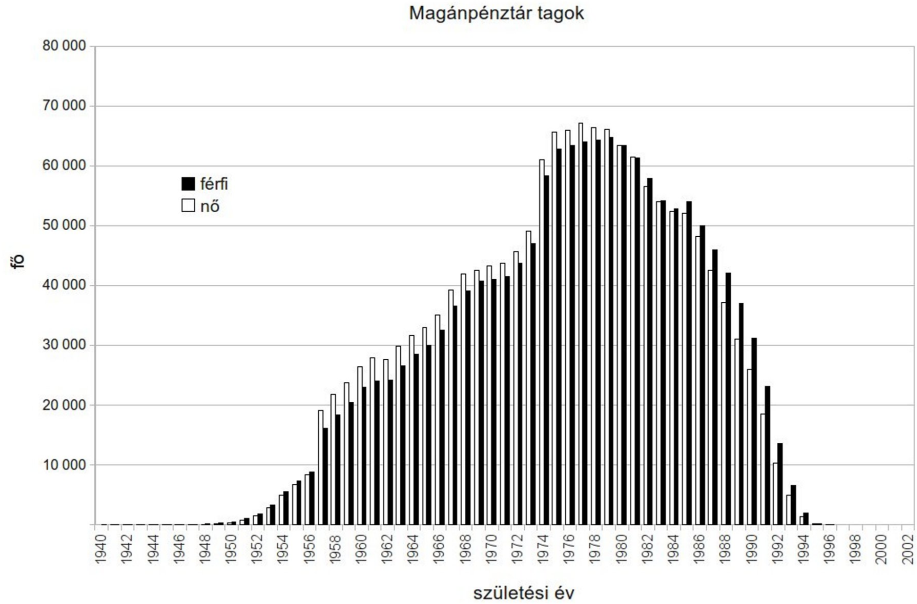
Forrás: Saját számítás PSZÁF adatokból

4. ábra. Önkéntes visszalépők életkori megoszlása

Az 5. ábrán a 2009-es év végére megmaradó tagok születési év és nem szerinti megoszlása látható. A visszalépések után is magasabb a tagok között a nők létszáma az 1982 előtt születettek között.

---

[4] A választható portfóliós rendszert 2007-ben vezették be , és a 20-ból 10 pénztár elindította. A 2008-as válság miatt ezen pénztárak tagjai rosszul jártak a magasabb részvényhányaddal.



Forrás: PSZÁF adatokból saját számítás

5. ábra. A magánpénztári tagok létszáma 2009. december 31-én

6. A tagsági viszonyt 2011-ben is fenntartók

Ahogy a cím már jelzi, itt nem a második hullámban visszalépőkről lesz szó, hanem elsősorban azokat mutatom be, akik úgy nyilatkoztak, hogy tagok maradnak. Az 1. táblázat a lakóhely szerinti létszámokat és megoszlásukat tartalmazza. A 3%-ot alig meghaladó országos arányt összevetve a tagsági viszonyt fenntartók lakóhely szerinti bontásával, nagyon eltérő képet látunk. E mögött nemcsak az húzódik meg, hogy a fővárosban „könnyebb” volt elmenni a hivatalba és nyilatkozatot tenni.

A tagok közül a férfiak nyilatkoztak nagyobb arányban, ami meglepő a korábbi kisebb tagi részarányt tekintve. Ha azonban a jövedelemarányos befizetés miatt felhalmozott nagyobb magánpénztári vagyonra gondolunk, akkor már érthető a 2. táblázatban látható eltérés.

A tipikus maradó budapesti férfi, aki átlagosan 37 éves. A születési év szerinti megoszlást a 6. ábra tükrözi, és minden korcsoportban több a férfi. A pénztárakban az 1976-80-as évjáratok képviseltették magukat legnagyobb arányban (20,8%) , és döntően ők maradtak tagok (a maradók 24,7%-a).

2011. január	nyilatkozó	ny. arány	tag volt	tag arány	maradás
Budapest	35 553	36%	491 764	15,8%	7,2%
megyeszékhelyek	10 020	10%	314 534	10,1%	3,2%
egyéb városok	25 590	26%	1 052 522	33,8%	2,4%
községek	25 485	26%	1 247 991	40,0%	2,0%
külföld vagy nem azonosítható	774	1%	11 389	0,4%	6,8%
Összesen	97 422	100%	3 118 200	100,0%	3,12%

Forrás: PSZÁF adatok

1. táblázat. Létszámok és maradási arány

	Eredeti fő	Eredeti nemek aránya	Nyilatkozó fő	Nyilatkozó nemek aránya	Nyilatkozó arány
Férfi	1 541 865	49,4%	57 150	58,7%	3,71%
Nő	1 576 335	50,6%	40 272	41,3%	2,55%
Összesen	**3 118 200**		**97 422**		**3,12%**

2. táblázat. Nemenkénti maradási arányok

A tagsági viszonyt fenntartók közel 100 ezres tábora létszámánál jóval nagyobb arányú vagyont tartott meg a magánpénztári számlán.[5] A 3,12 százaléknyi tag 233 milliárd forintja a teljes vagyon 7,3%-át jelenti. Ez a vagyon a továbbiakban csak önkéntes alapon gyarapítható, mert 2012-től nyugdíjjárulék csak a társadalombiztosításhoz utalható.

Ismét megnyitották a visszalépést, a 100 ezer nyilatkozót visszavárják a nyugdíjvagyonával együtt a társadalombiztosítás keretei közé. Teljes nyugdíjat nem kaphatnak, hisz a pénztári tagdíj fizetése alatt csak 75%-os járulékot fizettek a társadalombiztosítási kasszába, de ez a csökkentett nyugdíj is jóval kedvezőbben hangzik, mint az, amit 2011 elején hallottak: kiszerződik a társadalombiztosításból az, aki nem lép vissza.

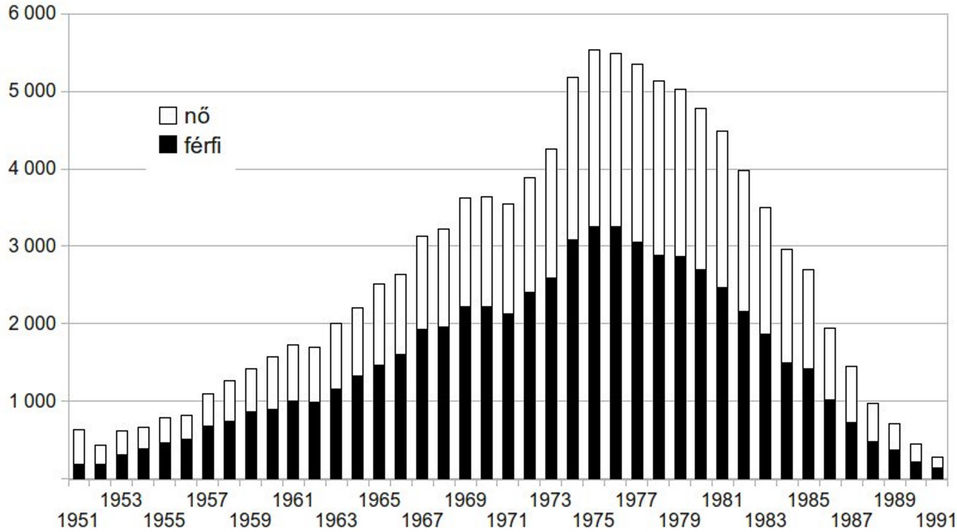
Az állam tehát a járulék befizetéséért cserébe visszafogadja őket, és nyugdíjat is fognak kapni, ha elérik a korhatárt. Együtt öregszenek a teljes magyar népességgel, csak azt nem tudják előre, hogy mennyi nyugdíjra számíthatnak.

Tegyük fel a kérdést, indokolt-e visszalépniük ebben a második körben? Nincsenek irigylésre méltó helyzetben, két bizonytalan között kell választaniuk.

A magánszámlán halmozódó befizetéseket a pénzpiaci hullámzások, a befektetési kockázat veszélyezteti, tehát ott sem lehet előre hosszú távon biztos nyugdíjat kalkulálni.

A társadalom tagjainak kockázatközössége a folyó finanszírozás révén kezeli ezt a kockázatot, de nem tudja kiküszöbölni a hosszabbodó várható élettartamból eredő járadéktöbblet iránti igényt. A közeljövőben várható a nagy létszámú Ratkó-generáció nyugdíjba vonulása

[5] 2011 során 17 fiatal lépett be új tagként valamelyik magánnyugdíjpénztárba (Világgazdaság, 2011.12.08.).



Forrás: www.onyf.hu és saját számítás

6. ábra. A tagsági viszonyt fenntartók születési évek szerint

is. Mivel a gazdasági aktivitás alacsony, a jövedelmek alacsonyak és alig emelkednek, a nyugdíjkassza csak akkor tartható egyensúlyban, ha a kifizetések nem haladják meg a járulékbevételeket. Ezért nincs esély arra, hogy reálértékben emelkedő nyugdíjat tételezzünk fel. Az összes állami ráfordítás szinten tartása az egyének számára csökkenő járandóságot jelent. Ezt érdemes figyelembe venni, amikor arról döntünk, hogy 100%-os állami nyugdíjat remélünk, vagy a 75%-os nyugdíjat egészítjük ki saját (önkéntes) befizetéseink révén.

Hivatkozások

Holtzer P. (szerk.) (2010). Jelentés a nyugdíj és időskor kerekasztal tevékenységéről. Budapest.

Kovács E. (2003). Az idősödő népesség és a befektetési környezet Európában. *Demográfia*, 46(1):73–94.

Kovács E. (2010). A nyugdíjreform demográfiai korlátai. *Hitelintézeti szemle*, 9(2):128–149.

Májer I. and Kovács E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai szemle*, 89(7-8):790–812.

Poterba, J. (2001). Demographic structure and asset returns. *The Review of Economics and Statistics*, 83(4):565–584.

Néhány szó a magánnyugdíjpénztárak értékeléséről

Matits Ágnes

Kivonat

A pénztári témát a kötelező nyugdíjrendszer elemét képező pénztárakra gondoltam szűkíteni. Részben terjedelmi okokból, de részben azért is, mert aktuálisabb kérdést jelentenek, mint az önkéntes pénztárak. Bár ma már csak egyfajta történelmi visszatekintésről beszélhetünk, hiszen egy gyakorlatilag véglegesen lezárt időszakot tekintünk át. De talán így is szolgálhat némi tanulságul. A cikk a szerző hasonló témában készült, nem publikált tanulmányának kivonatolásával készült.[1]

1. A nyugdíjpénztári piac legfontosabb jellemzői

Nyugdíjpénztárak alapítására és működésére Magyarországon 1993 óta van lehetőség. Elsőként az úgynevezett *önkéntes kölcsönös nyugdíjbiztosító pénztárak* alakulhattak meg. A következő lépést 1998-tól a kötelező nyugdíjrendszeren belül létrehozott *magánnyugdíjpénztárak* jelentették.

Ez az átalakítás egy új iparág kialakulását jelentette. Összesen mintegy 60 magánnyugdíjpénztár, illetve több, mint 250 önkéntes nyugdíjpénztár alakult, de ezeknek csak kisebb része tudott megkapaszkodni a piacon: 2010-re mindössze 18 kötelező és 60 önkéntes nyugdíjpénztár üzemelt. A pénztártagok száma viszont a kötelező szektorban meghaladta a 3 milliót, és az önkéntes szektor is több, mint 1,5 millió tagot számlált. A pénztári vagyon együttesen közel 4 ezer milliárd forintra rúgott.

Számos vád érte a pénztárakat drága működésük miatt. Az üzemeltetési költségeket azonban több oldalról kell vizsgálni. A magánnyugdíjpénztári szektor teljes üzemeltetési

Matits Ágnes
Budapesti Corvinus Egyetem, email: matits@t-online.hu

[1] Matits, Á. (2011). A magánnyugdíjpénztárak tevékenységének értékelése. *Kézirat, KEHI*.

költsége 2010-ben az átlagos pénztári vagyon 1,19 százaléka volt, ami már kedvezőnek tekinthető, hiszen ez az érték 5 évvel korábban még 2% felett volt, sőt, az első években még a vagyon 5%-át is elérte (lásd az 1. táblázat adatait).

	2000	2005	2010
A tárgyévi vagyon átlagos piaci értéke (Md Ft)	133	1061	2876
Elszámolt költségek összesen (Md Ft)			
Működtetési költségek	5.4	12.6	16.8
Vagyonkezeléssel összefüggő költségek	1.6	9.3	17.5
Összes üzemeltetési költség	7.0	21.9	34.3
Az elszámolt költség a pénztári vagyon éves átlagos piaci értékének százalékában			
Működtetési költségek	4.1%	1.2%	0.6%
Vagyonkezeléssel összefüggő költségek	1.2%	0.9%	0.6%
Összes üzemeltetési költség	5.2%	2.1%	1.19%
Az összes üzemeltetési költség a tárgyévi tagdíjbefizetések százalékában			
	8.8%	9.0%	12.3%
Ebből működtetési költségek	6.8%	5.2%	6.0%
Egy főre jutó költségek (ezer Ft/fő/év)			
Működtetési költségek	2.462	5.031	5.394
Vagyonkezeléssel összefüggő költségek	711	3.704	5.619
Összes üzemeltetési költség	3.174	8.735	11.013
Euro/hó/fő			3.5

1. táblázat. A magánnyugdíjpénztári szektor átlagos költségszintje

Láthatjuk, hogy az évek során a szektor üzemeltetéssel kapcsolatos költségeinek mértéke az elvárásoknak megfelelően folyamatosan csökkent, s valószínűleg további csökkenést is el lehetett volna érni, hiszen a költségszint még semmiképpen sem tekinthető optimálisnak. Az üzemeltetési költségek csökkenését azonban részben a szabályozási megszorításoknak kell tulajdonítanunk.[2] A vagyonkezeléssel összefüggő ráfordítások csökkenését semmiképpen sem tekinthetjük elfogadhatónak. A vizsgált időszakban ugyanis a vagyon több, mint 20-szorosára nőtt, miközben a vagyonkezelési költségszint mindössze a felére csökkent. A 2010-ben mért átlagosan 0,6% vagyonkezeléssel összefüggő költségszintet valójában magasnak kell minősíteni. Ugyanakkor a rendszer védelmében el lehet mondani, hogy a ma-

[2] A költségszint szabályozással történő korlátozására csak az elmúlt 5-6 évben került sor. A befizetésekből levonható megengedett arány 4,5%, míg a vagyonkezeléssel összefüggő díjak korlátja a kezelt vagyon 0,8%-a.

gyar magánnyugdíjpénztárak vagyona még messze kevesebb a nyugat-európai, vagy más, jobban kiforrott magánnyugdíj-rendszerrel rendelkező országok átlagos méretétől. Következésképpen, nem is nagyon lenne szabad az üzemeltetési költségek szintjét közvetlenül összehasonlítani.

Nehezen magyarázható azonban, hogy a vizsgált időszakban nem csökkentek, hanem növekedtek az egy főre jutó működési költségek. A szektor fajlagos működési költsége a 2000-es 2469 forint/fő/év szint helyett 2010-ben 5394 forint/fő/év volt. Ez valamenynyire magyarázható a pénztárakat terhelő adminisztrációs kötelezettségek növekedésével, de részben annak lehet a következménye, hogy a pénztárak háttérszervezetei induláskor támogatták az üzemeltetést, s gyakran nem a ténylegesen felmerült költségek kerültek elszámolásra.[3] 2010-re viszont már alig található direkt támogatás a pénztári szektoron belül. Vagyis azt feltétezhetjük, hogy a jelenlegi költségszint tekinthető valósnak, s nem tényleges növekedésről van szó, sokkal inkább a korábbi időszakokban rejtve maradt költségek megjelenéséről.

A szektor költségeinek elemzésekor azt sem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy a teljes üzemeltetési költségre kapott havi 3,5 euró önmagában nem mondható túl magasnak. Jól tudjuk, hogy esetenként egy banki folyószámlavezetés, vagy egy értékpapírszámla-vezetés költsége is magasabb ennél, miközben a nyugdíjpénztárak tevékenysége jóval összetettebb.

Az egyes pénztárak költségszintje között meglehetősen nagy különbségek voltak. A legalacsonyabb költséggel működő pénztárakban az összes költség (a működéssel és vagyonkezeléssel összefüggő költségek összesen, 2010-ben) nem érte el a pénztári vagyonérték 0,6 százalékát, míg a drágább pénztárakban meghaladta a vagyonérték 1,5 százalékát is. Pedig az általuk végzett tevékenység lényegében azonos.

A nyugdíjpénztárak hatékonyságát ugyanakkor elsősorban nem a költségek, hanem a befektetési teljesítmények befolyásolják.[4] Ezért a pénztárszektor sajátosságainak elemzésekor alapvető kérdés a tényleges pénztári hozamok minősítése.

A befektetési teljesítmények értékelésekor az alapvető kérdés, hogy az elért hozamok garantálták-e a felhalmozott vagyon értékének megőrzését. Elvárható, hogy a nyugdíjpénztárak befektetéseiken legalább az inflációnak megfelelő nettó hozamokat érjenek el. Az eredmények ismeretében megállapítható, hogy hosszú távon a befektetések nettó átlaghozama alig néhány esetben maradt el az átlagos infláció mértékétől. Az egyes pénztárak hosszú távú teljesítményei között azonban meglehetősen nagy különbségek voltak: a legjobb portfólióban évente átlagosan 9% volt a hozam, míg a legrosszabban mindössze 4%. Ennek következtében a pénztárválasztás komoly különbségeket eredményezett a tagok egyéni számláin rendelkezésre álló összegekben.

[3] Ennek a támogatásnak főképp piacszerzési célja volt, de esetenként szükségszerű is volt, mivel a kezdeti időszakban a pénztárak nem voltak képesek önmaguk finanszírozására.

[4] A pénztárak indulásakor néhány pénztár azzal érvelt, hogy az adott pénztárban a befizetésekből levont hányad mennyivel alacsonyabb, mint más pénztárakban. Azt viszont nemigen mutatták be, hogy a várható nyugdíjak szempontjából a befizetésből történő levonások mértéke nagyságrendekkel kisebb jelentőségű, mint a befektetési hozam.

A pénztárak költségszintje, vagy éppen a befektetési hozamok önmagukban is érdekesek, de a tagokat valójában az érdekli, hogy az általuk befizetett pénzösszegekhez viszonyítva egy adott pillanatban mennyi pénz van a számlájukon. Ezért érdemes a pénztárak teljesítményét egy olyan mutatóval jellemezni, amely azt méri, hogy az összes *befizetés*hez képest a számlán lévő pénzösszeg évente hány százalékos hozamnak felel meg. Ezt a mérőszámot *befizetés megtérülési mutató*nak (röviden *BMM*) fogjuk nevezni. Megfelelő hatékonyságról csak akkor beszélhetünk, ha a befizetések reálhozamai pozitívak.

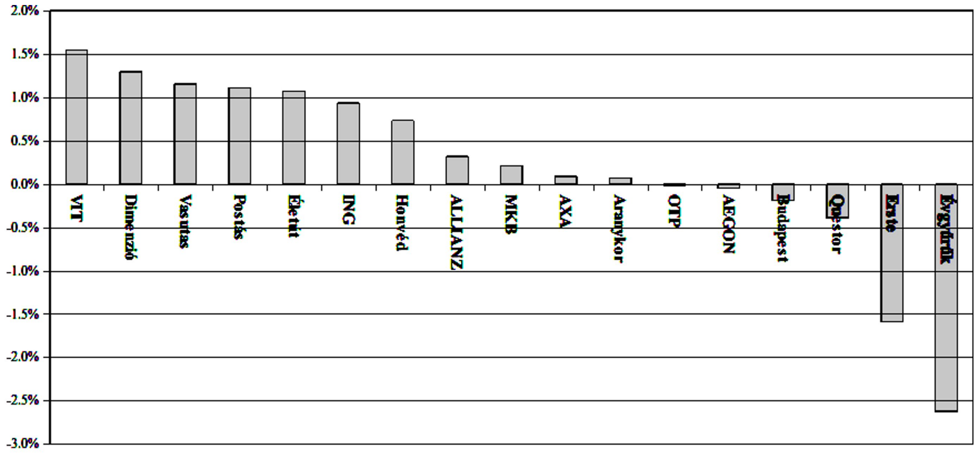
A vizsgált időszakban a magánnyugdíjpénztári szektor éves átlagos befizetés megtérülési rátája

$$\text{BMM}_{2001-2010} = 5,06\% \,.$$

Az időszakra számított infláció mértéke 4,83%, azaz a BMM reálértéke 0,23%.[5]

A BMM zérus körüli reálértéke pontosan kifejezi azt a tényt, hogy a befizetések megtérülése éppen az inflációs hozammal egyezik meg.[6]

Korábban már említettük, hogy a pénztárak között mind költséghatékonyság, mind pedig a befektetési teljesítmények vonatkozásában igen nagy különbözőségek mutathatók ki. Ezért nem meglepő, hogy az egyedi BMM mutatók között is vannak különbségek. Ebből viszont az következik, hogy az egyének szempontjából egyáltalán nem volt mindegy, melyik pénztárban voltak tagok az elmúlt 13 évben. (Az 1. ábrán csökkenő sorrendben mutatjuk be a 2001 és 2010 közötti 10 éves időtartamra számított pénztárszintű BMM mutatók reálértékeit.)



1. ábra. A befizetés megtérülési mutatók (BMM) értéke a magánnyugdíjpénztárakban, 2001-2010

[5] $1,0506/1,0423 - 1 = 0,0023$.

[6] Ez éppen csak a minimális követelményeknek megfelelő reálhozam.

Az egyes pénztárak befizetés megtérülési mutatói közötti különbségek nem elhanyagolhatók. Láthatjuk, hogy 5 pénztárban (VIT, DIMENZIÓ, VASUTAS, Postás, Életút) 1% feletti a BMM mutató reálértéke, de ezek a tagok mindössze 2%-át képviselik. A tagok többsége (66%) ahhoz a 7 pénztárhoz tartozott, ahol a BMM mutató reálértéke pozitív, de 1% alatti. Ezt a befizetés megtérülést ugyan elvileg elfogadhatónak tekinthetjük, de a TB nyugdíjak helyettesítése szempontjából ez az eredmény már gyenge. Végül az is látható, hogy a tagok egyharmada olyan pénztárban volt tag, ahol a befizetések megtérülése nem érte el az inflációs szintet, és volt két olyan pénztár is (ERSTE, Évgyűrűk), ahol a befizetések megtérülése kifejezetten rossz volt.

2. A magánnyugdíjpénztári rendszer létjogosultsága

A magyar nyugdíjreform szakmailag több ponton a kezdetektől fogva kifogásolható volt. A kötelező rendszer garanciális elemeinek eltörlése, a teljes piaci kockázatnak a tagokra történő áthárítása, a napi politikai érdekből történő változtatások (például a 13. havi nyugdíj bevezetése vagy a járulékkulcsok ötletszerű módosításai), de ugyanígy a szolgáltatási-, a tartalékolási-, vagy a tagi érdekképviseleti rendszer kialakítása hibás döntéseken alapult.[7]

Talán a legnagyobb ellentmondás az volt, hogy az új rendszer bevezetésével a fejlett társadalmakban leginkább védett „szerzett nyugdíjjog" sérült. Mivel az új vegyes rendszer a csatlakozók részére az I. pillérből csak a megszerzett jogosultság 75%-át ígérte azokra az évekre is, amikor még minden járulékukat a TB rendszerbe fizették, egy ilyen jogsérelem következett be. Ugyan jogilag elvileg védhetővé tette a választott megoldást, hogy az érintett tagok „önkéntesen" csatlakoztak a rendszerhez, de a tagok jelentős részének nem volt esélye döntése következményeinek felmérésére.

A döntéshozók elfeledkeztek arról, hogy egy új rendszer bevezetésekor az átmenet tervezése legalább olyan fontos, mint az új rendszer felállítása maga. Az 1998-as reform esetén az átmenet biztosan nem volt megfelelően átgondolva, hiszen a törvény mindenkinek lehetővé tette az önkéntes belépést (csak a pályakezdőknek volt kötelező). Pedig egyszerű számolással is bizonyítható lett volna, hogy 28-30 éves életkor felett, másképpen fogalmazva 10 év munkaviszony után eleve nem lett volna szabad senkit sem beengedni az új, vegyes rendszerbe. Még nagyon jó pénztári hozamok (4% infláció feletti átlaghozam) feltételezése mellett is csak 27 év magánnyugdíjpénztári tagság után lehetett volna esély arra, hogy 40 év szolgálati idő után valaki ugyanolyan mértékű nyugdíjat kapjon a vegyes rendszerből, mint a 100%-os TB nyugdíj. Alacsonyabb (+2% reálhozam) feltételezésével ez a minimálisan szükséges felhalmozási idő 32 év. Ennyi ideje pedig – az akkor ismert nyugdíj-

[7] 1998 óta a munkáltatói és munkavállalói járulékok hét alkalommal változtak. Ebben az időszakban a befizetendő összes járulék mértéke 26% és 33,5% között változott, miközben semmit sem változott a törvény szerinti (2012 utáni) nyugdíjígéret. Ez mindenképpen azt okozta, hogy a befizetett járulékok és a kifizetendő nyugdíjak kapcsolata meglehetősen laza maradt.

korhatárt (62 év) figyelembevéve – csak annak volt, aki 1998-ban legfeljebb 30 éves volt.[8] Amennyiben akkor és ott az a döntés született volna, hogy például 30 éves kor alatt lehet csak belépni (ahogyan ezt a például a lengyelek kimondták), akkor az a bizonyos sokat emlegetett, a magánnyugdíjpénztárak léte által generált államháztartási hiány is másképp alakulhatott volna. Sőt, ha a politika meghallotta volna a költségvetési következményekre vonatkozó aggodalmakat, akkor akár eleve csak a pályakezdőknek kellett volna megengedni (vagy akár kötelezővé tenni) a belépést.[9] Ebben az esetben az így keletkező TB forráshiány már eleve könnyebben lett volna kezelhető. Talán még az is igaz, hogy így esetleg semmiféle pótlólagos hitelfelvételre nem lett volna emiatt szükség, ha ebben az időszakban még a gazdaság is képes lett volna a kilencvenes évek végén elképzelt növekedésre. És akkor nem is biztos, hogy 2010-ben a magánnyugdíjpénztárak megszüntetéséről kellett volna dönteni.

A valóság azonban másképp alakult. A II. pillérbe történő tagdíjbefizetések, azaz a TB rendszerből hiányzó bevételek miatt az elmúlt években a TB-nek *évente* a GDP 1 százalékát meghaladó hiánya keletkezett és ez a hiány 2040-ig sem csökkent volna a GDP 1 százaléka alá. Csak 2050 után lett volna várható, hogy a vegyes rendszer bevezetése miatt csökkenő TB kötelezettségek kiegyenlítik a járulékhiányt. De azt is tudnunk kell, hogy önmagában a II. pillér megszüntetése nem oldja meg a TB finanszírozási problémáit. Ha a kötelező rendszerből származó nyugdíjakat teljes egészében az első pillérből fizetik és feltesszük, hogy a nyugdíjak mértéke eléri azt a szintet, amit a most megszüntetendő vegyes rendszer ígért volna, akkor a TB éves hiánya a század közepére már elérhetné a GDP 4-5%-át is. Feltéve (de nem megengedve), hogy a nyugdíjjárulékok a jelenlegi magas szinten maradnak, és a ma ismert foglalkoztatottsági trendekkel dolgozunk, akkor valószínűsíthető, hogy a TB várható bevételei tartósan és egyre növekvő mértékben el fognak maradni a nyugdíjkiadások mértékétől.

A magánnyugdjpénztárak felszámolását tehát csak a TB rövid- (s talán közép-) távú pénzügyi egyensúlyának fenntartásával, valamint az államadósság növekedési ütemének lassításával lehet indokolni. Az, hogy hosszú távon ez mit eredményez, az mindenekelőtt attól függ, hogy az I. pillérből milyen nyugdíjak várhatók. A megvalósult nyugdíjreform azonban erről a fontos kérdésről még semmit sem mondott. Vagyis az egyén jövője, azaz nyugdíjvárományai szempontjából még aligha tudjuk megmondani, hogy jobb lett volna-e, ha megmaradnak a magánnyugdíjpénztárak, hiszen a válasz erősen függene a befektetések jövőbeli teljesítményeitől is.

Ez utóbbi felvetésre adhat némi támpontot az, ha megpróbáljuk minősíteni a magánnyugdíjpénztárak múltbeli teljesítményét. Ehhez a minősítéshez azt kell vizsgálni, hogy mennyi nyugdíjra számíthatott volna ebben az időszakban az, aki csak a TB-be fizetett, illetve, hogy

[8] Valójában ez is a már korábban említett múltbeli jogvesztés következménye, hiszen aki 40 év munkaviszonyt követően úgy ment volna nyugdíjba, hogy csak ennél jóval rövidebb magánnyugdíjpénztári tagsági idővel rendelkezett, annak sok olyan éve volt, amelyre vonatkozóan a magánnyugdíjpénztárból remélhető nyugdíjaknak kellett volna kompenzálniuk az arra az időszakra jutó TB nyugdíjak 25%-át is.

[9] Talán ezen a ponton hibáztatható a nemzetközi pénzügyi világ, hiszen számukra az ennél sokkal gyorsabb nyugdíjprivatizáció volt a kedvezőbb megoldás.

ennek a 25%-a több, vagy kevesebb tőkét igényelt volna-e, mint amennyi a magánnyugdíjpénztárakban rendelkezésére állt. Vagyis azok, akik pénztári tagok voltak, össze tudtak volna-e gyűjteni annyi tőkét az egyéni számlájukon, ami az elveszített TB jogosultságuk pótlásához elegendő járadékhoz szükséges lett volna. Most ennek a kérdésnek a megválaszolására teszünk kísérletet.

A magánnyugdíjpénztári tagok döntő többsége 2012 után éri el a nyugdíjkorhatárt. Az 1998-ban életbe lépett nyugdíjreform ugyan tartalmazott egy TB törvényt is, amely kimondta, 2012 után új nyugdíjképlet kerül bevezetésre, de ez a törvény nagyon sok tekintetben hiányos volt, amit annak idején nemigen kifogásolt senki, hiszen volt még 15 év a hatályba lépésig. Csakhogy az elmúlt 13 év nem volt elegendő ennek a törvénynek a pontosítására, így még ma is, alig egy évvel a hatályba lépés előtt, azt kell mondani, hogy nincsenek meg olyan fontos részletszabályok, amelyek alapján pontosan becsülni lehetne, hogy valaki a hatályos szabályozás szerint mekkora nyugdíjra számíthat az első pillérből.[10] Az alapképlet a következő: átlagkereset $\times$ elismert szolgálati évek száma $\times$ nyugdíjszorzó.[11] Ez ugyan elég egyértelmű, de számos ponton kérdéses, hogyan is fogják számítani. Vagyis pontos számításokra ugyan nincs lehetőség, de mégis érdemes közelítő számításokat végezni.

Tegyük fel, hogy valaki 1998 óta átlagkeresettel rendelkezett. Meghatározható, hogy mekkora TB jogosultságot szerezhetett volna az 1998-2010 közötti időszak alatt:[12]

A valorizált bruttó átlagbér[13]	193 090 forint/ hó
Elismert szolgálati idő	13 év
Nyugdíjszorzó	0,0165
A megszerzett TB-nyugdíj jogosultság	$193\,090 \cdot 13 \cdot 0,0165 = 41\,418$ forint /hó
A II. pillér miatt elveszített jogosultság	$41\,418 \cdot 25\% = 10\,794$ forint/ hó

A magánnyugdíjpénztáraktól azt várnánk el, hogy ezalatt a 13 év alatt az átlagkereset után tagdíjat fizető magánnyugdíjpénztári tagok egyéni számláin legalább annyi pénz legyen, mint amennyi az elveszített havi 10 794 forint életjáradék fedezeteként szükséges lenne.

A fedezeti szükséglet meghatározásához figyelembe kell venni azt, hogy a tagok csak a nyugdíjkorhatár elérésekor válnak jogosulttá a TB nyugdíjra. De addigra a most számolt nyugdíjkövetelés is indexált értéken jelenne meg. Ugyanígy a ma rendelkezésre álló ma-

[10] Valójában az sem nyilvánvaló, hogy 2013-tól tényleg hatályba lép ez a ma ismert törvény, de annak eldöntésére, hogy valakinek érdemes volt-e belépnie a magánnyugdíj rendszerbe, mégiscsak ez lehetett volna az egyetlen használható támpont.

[11] A nyugdíjszorzó a magánnyugdíjpénztárból nyugdíjba lépők esetén 1,22%, míg a többiek esetében 1,65%.

[12] Feltesszük, hogy a nyugdíjkor eléréséig rendelkezett volna a minimális szolgálati idővel, vagyis ténylegesen jogosulttá vált volna a TB nyugdíjra.

[13] A 2010-re közzétett valorizációs kulcsokkal számolva.

gánnyugdíjpénztári tőke a nyugdíjkor eléréséig hozammal növekedne. Tegyük fel, hogy a nyugdíjkövetelések értéke a nyugdíjkorig az inflációval növekedne, továbbá, hogy a 2010-ben rendelkezésre álló tőke a nyugdíjkorig legalább az inflációval növekedne. Így közvetlenül összehasonlíthatjuk a magánnyugdíjpénztári tagság miatt elveszített TB jogosultság mai értékének a 65 éves korra (az addigra egységesnek tekintett nyugdíjkorhatárra) számolt fedezeti szükségletét a 2010-ben rendelkezésre álló egyéni számla fedezetekkel.

Havi 10 794 Ft életjáradék 65 éves korra becsült fedezeti szükséglete:[14] 2,11 millió Ft.

Első közelítésben akkor fogadható el a magánnyugdíjpénztárak teljesítménye a vizsgált időszakban, ha az átlagkereset után 13 évig tagdíjat fizető tagok egyéni számláin legalább 2,11 millió forint van.

A számításokhoz figyelembe vettük, hogy az átlagkereset után az egyes években mekkora járulékot kellett a magánnyugdíjpénztárba befizetni,[15] a befizetéseket egységesen 5% költséggel terhelve vettük figyelembe, majd minden pénztárban (portfóliónként) a hivatalosan közzétett nettó hozamrátákkal növelve határoztuk meg a számított egyéni számlaegyenlegeket.

Az eredmények a következők:

- A 13 év alatt mindvégig létező 18 pénztár összesen 52 portfóliójából összesen 11 olyan portfólió van, (az összes portfólió 21%-a) ahol az átlagkereset után 13 évig tagdíjat fizető tagok számított egyéni számla egyenlege nem érte el az elvárt szintet.
- Van 14 olyan portfólió is, ahol a számított egyéni számlaegyenlegek több, mint 10%-kal meghaladták az elvárt szintet. Ezek döntő többsége a versenyeztetett vagyonkezelőkkel dolgozó pénztárakhoz tartozott.
- Az összes portfólió közel feléről (52%) azt mondhatjuk, hogy az egyéni számlák számított egyenlege kicsit nagyobb (0 és 10% közötti az eltérés), mint az a szint, amelyet az elveszített TB nyugdíj fedezete alapján elvárhatnánk.
- Az átlagkereset után tagdíjat fizető tagok számított számlaegyenlegeinek összegét az összes pénztári portfólióban a 2. táblázat mutatja be.

Összességében azt mondhatjuk, hogy az eltérések nem túl jelentősek. A tagok döntő többségénél a hatályos törvények szerinti nyugdíjvárományok nem különböznek lényegesen attól, mintha a magánnyugdíjpénztárban maradtak volna. Viszont a kockázati szintek lényegesen megváltoztak.

[14] A 2007-es KSH halandóság, férfi és női értékek egyszerű átlagaként, n=65, i=3%, index: az infláció figyelembevételével havi egy forint életjáradék fedezeti szükséglete: 195,191338.

[15] 1998-2002 : 6%; 2003 : 7%; 2004 -2009 : 8%; 2010 : 6,7%.

Az elmúlt időszak piaci történései arról győzhettek meg bennünket, hogy a magánkezelésű tőkefedezeti nyugdíjrendszerek az egyének számára a közösségi nyugdíjrendszereknél lényegesen nagyobb kockázatot rejtenek. Ez már önmagában is indokolhatja a magánnyugdíjpénztári rendszer megszüntetését. Azt azonban nemigen állíthatjuk, hogy ettől a döntéstől az érdekeltek nyugdíjvárományai jelentősen növekedtek volna.

3. Zárszó

Ilyen terjedelemben csak nagyon keveset lehet a magánnyugdíjpénztárakról elmondani. De a felvetett két gondolat – mindkettő valamiféle módszertani vonatkozásban – talán mégis szolgál némi tanulságul:

a) A pénztárak komplex hatékonyságának a befizetések idősorai alapján történő mérése a tagok részére jobban értelmezhető, mint a gyakorlatban nyakukba zúdított számtalan különböző hozammutató.
b) A magánnyugdíjpénztárak valódi teljesítményét az alapján lehetne reálisan megítélni, hogy létükkel a tagok nyugdíjvárományai kedvezőbbek, vagy éppen kedvezőtlenebbek lettek volna. De nem feledhetjük, hogy ennek megítélésére a mostani helyzetben a visszalépőknek nem volt esélyük, mivel valójában nemigen tudjuk megmondani, mekkora nyugdíjakat várhatunk a jövőben a TB rendszertől.

Portfólió	Egyéni számla becsült egyenlege	Ebből			Becsült reálhozam kifizetés (ezer Ft)	Kifizetés a számlaegyenleg arányában	Az egyéni számla mértéke a TB kompenzációhoz szükséges mértékhez képest
		befizetések halmozott értéke	Be-fektetések hozamából jóváírt összeg	Ebből: Inflációs hozam feletti rész			
Dimenzió1	2619	1546	1073	522	522	20%	124%
Honvéd1	2545	1546	998	447	447	18%	121%
Dimenzió2	2514	1546	967	416	416	17%	119%
Életút1	2509	1546	963	412	412	16%	119%
VIT3	2508	1546	962	411	411	16%	119%
Postás3	2479	1546	933	382	382	15%	118%
Életút2	2478	1546	932	381	381	15%	118%
Questor3	2462	1546	915	364	364	15%	117%
Vasutas3	2460	1546	913	362	362	15%	117%
VIT2	2436	1546	890	339	339	14%	116%
Honvéd2	2434	1546	888	337	337	14%	116%
AXA1	2414	1546	867	316	316	13%	115%
Életút3	2411	1546	865	314	314	13%	114%
Évgyűrűk1	2392	1546	845	294	294	12%	114%
VIT1	2389	1546	843	292	292	12%	113%
Dimenzió3	2387	1546	840	289	289	12%	113%
Erste1	2378	1546	832	281	281	12%	113%
Vasutas2	2371	1546	825	274	274	12%	113%
Allianz3	2362	1546	815	264	264	11%	112%
OTP2	2355	1546	809	258	258	11%	112%
OTP1	2350	1546	804	253	253	11%	112%
ING3	2350	1546	804	253	253	11%	112%
Vasutas1	2349	1546	803	252	252	11%	112%
Aranykor1	2346	1546	800	249	249	11%	111%
MKB2	2309	1546	763	212	212	9%	110%
Aranykor2	2307	1546	761	210	210	9%	110%
ING2	2297	1546	751	200	200	9%	109%
Postás2	2296	1546	749	198	198	9%	109%
AEGON3	2294	1546	748	197	197	9%	109%
Aranykor3	2288	1546	742	191	191	8%	109%
Honvéd3	2286	1546	740	189	189	8%	109%
MKB3	2273	1546	726	175	175	8%	108%
Budapest3	2247	1546	701	150	150	7%	107%
MKB1	2243	1546	696	145	145	6%	106%
Erste2	2238	1546	691	140	140	6%	106%
ING1	2232	1546	685	134	134	6%	106%
Allianz2	2224	1546	678	127	127	6%	106%
OTP3	2216	1546	670	119	119	5%	105%
AEGON2	2214	1546	668	117	117	5%	105%
AXA2	2214	1546	667	116	116	5%	105%
Postás1	2201	1546	655	104	104	5%	104%
Budapest2	2169	1546	623	72	72	3%	103%
Questor2	2153	1546	607	56	56	3%	102%
Questor1	2123	1546	577	26	26	1%	101%
Évgyűrűk2	2118	1546	572	21	21	1%	101%
AEGON1	2088	1546	542	-9	0	0%	99%
Allianz1	2042	1546	496	-55	0	0%	97%
AXA3	2073	1546	526	-25	0	0%	98%
Budapest1	2015	1546	469	-82	0	0%	96%
Erste3	2081	1546	534	-17	0	0%	99%
Évgyűrűk3	1805	1546	259	-292	0	0%	86%
Inflációs hozammal számított számlaegyenleg	2097	1546	551	0			
TB kompenzációhoz ELVÁRT egyenleg	2107						

2. táblázat. Az 1998 óta átlagkereset után fizető pénztártagok számított számlaegyenlegei 2010 végén

Adómorál, adórendszer és a mediánszavazó

Simonovits András

Kivonat
Ebben a tanulmányban egy olyan adómodellt vizsgálunk, ahol az egykulcsos adót egyenletesen osztják szét a dolgozók között. Az adócsalás nem az adókulcstól, hanem az adómoráltól függ, a munkakínálat viszont az adókulcs csökkenő függvénye. Fő eredményünk: a politikaelméletből ismert mediánszavazó optimális adókulcsa növekvő függvénye az adómorálnak.

Forgó Ferencet, a magyar játékelméleszek doyenjét négy évtizede ismerem, tisztelem és szeretem. Ezzel a Simonovits (2011) alapján készült játékelméleti vonatkozású cikkel köszöntöm 70. születésnapján.

1. Bevezetés

A játékelmélet politikai gazdaságtani alkalmazásának sarokköve a mediánszavazó elmélete, amely adózás esetén a következőt állítja (Mas-Colell és szerzőtársai, 1995). Tegyük fel, hogy két párt verseng páratlan számú szavazó kegyeiért. A szavazás kérdése: mekkora legyen az adókulcs? Mindegyik szavazó hasznosságfüggvénye először nő, majd csökken az adókulcscsal. *Mediánszavazónak* nevezzük azt a szavazót, akinek az optimuma ugyanannyinál nagyobb, mint kisebb. Ekkor mindkét párt olyan adókulcsot javasol, amelyet a mediánszavazó választana.

Persze, ilyenkor a szavazók másodrendű szempontok alapján szavaznak a pártokra, de ezzel nem foglalkozunk. Ez az elmélet gyakran, de nem mindig érvényes. Az elméletet ebben a cikkben a versengő pártok által közösen javasolt szja (személyi jövedelemadó) kulcs meghatározására alkalmazzuk.

Simonovits András
MTA, Közgazdaságtudományi Intézet; BME Matematikai Intézet; CEU Economics Department,
email: simonov@econ.core.hu

A demokratikus társadalmakban bevezetett szja–jövedelem-függvény alakja mindig élénk vita tárgya. Egyszerűség kedvéért itt feltesszük, hogy az szja csak a jövedelmek újraelosztására szolgál, arányos, és a beszedett adókat a választók között egyenlően osztják szét. Ez természetesen a valóság nagyfokú leegyszerűsítése, de első közelítésként elfogadhatónak tűnik (Romer, 1975).

A tanulmányban figyelembe vesszük, hogy minél nagyobb az adókulcs, annál kisebb a munkakínálat – korlátot állítva az újraelosztásnak. De emellett megengedjük azt is, hogy adott kulcs mellett különböző országokban különböző szja-rendszert szavazzanak meg a választók és különböző mértékben vallják be jövedelmeiket (vö. Ausztriát és Olaszországot).

E különbség egyik lehetséges magyarázata az *adómorál* közti különbség, ahol adómorálon az adófizetési hajlandóságot értjük (Frey–Weck-Hannemann, 1984). Az egyszerűség kedvéért csak az *egzogén* adómorállal foglalkozunk, azaz feltesszük, hogy ez a paraméterérték kívülről adott. (Az endogén adómorál viszont függ az ismerősök egyén által megfigyelt adóbevallásától.)

Az elmondottakat a legegyszerűbben úgy lehet modellezni, hogy az egyén hasznosságát három részhasznosság összegének feltételezzük: a fogyasztásé lineáris, a munkakínálaté és a kereseteltitkolásé kvadratikus függvény, pozitív, negatív és negatív előjellel (Doerrenberg és szerzőtársai, 2012). Emiatt az optimális munkakínálat az adókulcs lineárisan csökkenő függvénye, az optimális kereseteltitkolás foka pedig az adómorál reciproka.

Azt állítjuk, hogy a mediánválasztó által preferált és a pártok által javasolt *adókulcs annál nagyobb, minél jobb az adómorál*. Emellett nagyobb keresetkülönbségek szintén nagyobb adókulcsot indokolnak, itt a keresetkülönbséget az átlag- és a mediánkereset különbségével mérjük.

A fő gondolatmenet lényege egyszerű: adott adókulcs esetén minél jobb az adómorál, annál több adót fizetnek be a dolgozók, és ezért annál kevésbé érvényesül az adóemelés munkavisszaszorító hatása. Azonban pontos modellre van szükségünk, hogy ezt az intuitív eredményt szabatossá tegyük.

Megemlítjük, hogy az adómorál és az adókulcs közti szoros kapcsolat nemcsak akkor érvényes, ha a mediánszavazó optimumát fogadja el a társadalom. Igaz marad akkor is, ha egy jóindulatú diktátor *csonkolt* társadalmi jóléti függvényt maximalizál, azaz csak a legszegényebb jövedelemcsoportok átlagos jólétét maximalizálja (Simonovits, 2011).

A tanulmány hátralévő része három pontból áll: a 2. fejezet a modellt körvonalazza, a 3. fejezet számpéldákon keresztül szemlélteti az elmondottakat. A függelék ismerteti a mediánszavazó modelljét.

2. A modell

A Doerrenberg és szerzőtársai (2012) cikket követve legyen a szavazók (vagy típusaik) száma $I > 1$, indexeik $i = 1, \ldots, I$. Az i-edik típus munkakínálata l_i, $0 < l_i \leq 1$, kereseti rátája $w_i > 0$, keresete $l_i w_i$. A kormányzat lineáris adórendszert működtet, τ adókulccsal, $0 \leq \tau \leq 1$, és a befolyó adókból mindenkinek azonos alapjövedelmet fizet: $\beta \geq 0$. Az i-edik dolgozó $e_i \geq 0$ keresetet eltitkol, azaz τe_i adót lecsal.

A ténylegesen befizetett adó $\tau(l_i w_i - e_i) - \beta = \tau y_i - \beta$, ahol $y_i = l_i w_i - e_i$ az adózó kereset. Definíció szerint a fogyasztás $c_i = (1-\tau) l_i w_i + \tau e_i + \beta$. Vegyük észre, hogy egykulcsos rendszerünk is progresszív a következő értelemben: a $t_i = (\tau y_i - \beta)/y_i$ nettó adó/adózó kereset hányadosa nő az utóbbi függvényében.

A bevezetésben már elmondtuk, hogy nagyon egyszerű hasznosságfüggvényt feltételezünk. A fogyasztás hasznossága $2c_i$, a munkavállalásé $-\alpha w_i l_i^2$, (ahol $\alpha > 0$ a munkaáldozat együtthatója) és az adócsalásé $-\mu(\tau w_i)(e_i/w_i)^2$, (ahol $\mu > 0$ az adómorál együtthatója, röviden maga az adómorál.) Látni fogjuk, hogy a hasznosságfüggvényben szereplő w_i és τw_i együtthatók megfelelő normák, segítségükkel az optimális döntések ésszerűek lesznek.

Az eddigiek szerint az i-edik típus hasznosságfüggvénye

$$U_i = 2c_i - \alpha w_i l_i^2 - \mu \tau w_i^{-1} e_i^2.$$

Behelyettesítve a fogyasztási képletet a hasznossági képletbe:

$$u_i(l_i, e_i) = 2 l_i w_i (1-\tau) + 2 e_i \tau + 2\beta - \alpha w_i l_i^2 - \mu \tau w_i^{-1} e_i^2.$$

Mivel a dolgozó nem ismeri a többiek döntését, saját hasznossága maximalizálásakor figyelmen kívül hagyja az alapjövedelmet, tehát egy redukált hasznosságfüggvényt maximalizál: $u_i(l_i, e_i) - 2\beta$. Egyszerű számolással adódik az optimális l_i munkakínálat és e_i keresetelttitkolás:

$$l_i^* = \alpha^{-1}(1-\tau) \quad \text{és} \quad e_i^* = \mu^{-1} w_i.$$

Érdemes kiemelni e döntések egyszerű jelentését: l_i^* arányos $1-\tau$-val, ahol az arányossági együttható az α munkaáldozati együttható reciproka; e_i^* egyenlő a potenciális kereset és az adómorál hányadosával. *Fehérgazdaságról* beszélünk, ha $e_i^* = 0$, azaz $\mu = \infty$.

Feltesszük, hogy a munkakínálat 0 és 1 között van, azaz $\alpha \geq 1$, határesetben: $\alpha = 1$. Zavaró, hogy e_i^* független az $l_i^* w_i$ tényleges keresettől. Ésszerű feltenni, hogy az eltitkolt kereset legfeljebb akkora, mint a tényleges kereset: $\mu^{-1} \leq \alpha^{-1}(1-\tau)$, azaz $\tau \leq 1 - \alpha/\mu$, tehát $\alpha \leq \mu$.

Az egyéni vonatkozásról a társadalmi vonatkozásra térve, feltesszük, hogy minden típus súlya azonos, azaz $1/I$. Ekkor az átlagkereset-ráta (amelyet 1-re normálunk)

$$W = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} w_i = 1.$$

Bevezetjük még az átlagos munkakínálatot, az átlagos keresetet és kereseteltitkolást:

$$L = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} l_i, \quad Z = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} l_i w_i \quad \text{és} \quad E = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} e_i.$$

Optimumban $L^* = (1-\tau)\alpha^{-1} = Z^*$ és $E^* = \mu^{-1}$. Felírhatjuk az optimális döntések eredőjeként adódó alapjövedelmet:

$$\beta^* = \tau(Z^* - E^*) = \tau[\alpha^{-1}(1-\tau) - \mu^{-1}].$$

Visszahelyettesítve, az i-edik típus indirekt hasznosságfüggvénye

$$u_i^* = w_i[\alpha^{-1}(1-\tau)^2 + \mu^{-1}\tau] + \tau[\alpha^{-1}(1-\tau) - \mu^{-1}].$$

Vegyük észre, hogy ha a kereseti rátákat növekvő sorrendben indexeljük, $w_1 < w_2 < \ldots < w_{I-1} < w_I$, akkor az indirekt hasznosságfüggvények is növekvő sorozatot alkotnak: $u_1^* < u_2^* < \ldots < w_{I-1}^* < w_I^*$. Szükségünk lesz még két fogalomra: a mediándolgozóra és a keresetek kritikus értékére. Ha a típusok száma páratlan: $I = 2M-1$, akkor a *mediándolgozó* indexe M. A kereset *kritikus értéke* $\alpha < \mu$ miatt

$$0 < \bar{w} = \frac{2(1-\alpha/\mu)}{2-\alpha/\mu} \leq 1.$$

Megfelelően nagy adómorálra $w_M < \bar{w}$.

Most már kimondhatjuk fő eredményünket:

1. Tétel. *Legyen a mediándolgozó kereseti rátája kisebb, mint a kritikus érték:*

$$w_M < \bar{w}.$$

Ekkor a mediánszavazó optimális adókulcsa pozitív és képletben

$$\tau_M(\alpha,\mu) = \frac{2(1-\alpha/\mu) - (2-\alpha/\mu)w_M}{2(2-w_M)} = \frac{2(1-w_M) - (2-w_M)\alpha/\mu}{2(2-w_M)}.$$

Megjegyzések:

1. A képletből valóban következik, hogy minél jobb az adómorál, annál nagyobb a választott adókulcs.
2. Általában a mediánkereset kisebb, mint az átlagkereset. Meltzer–Richard (1981) fogalmazta meg elsők közt, hogy minél nagyobb a kereseti egyenlőtlenség, annál nagyobb a választott adókulcs. Modellünkben célszerű az átlag- és a mediánkereset $1 - w_M$ különbségével mérni a keresetegyenlőtlenséget, így visszaadja a Meltzer–Richard-tételt.

Bizonyítás: Tekintsük a mediándolgozó indirekt hasznosságfüggvényét:

$$u_M^*(\tau) = w_M[\alpha^{-1}(1-\tau)^2 + \mu^{-1}\tau] + 2\tau[\alpha^{-1}(1-\tau) - \mu^{-1}].$$

Deriválva $u_M^*(\tau)$-t és nullává téve, adódik $\tau_M(\alpha,\mu)$. Mivel $u_M^{*\prime}(\tau)$ pozitívból negatívba fordul a stacionárius pontban, $\tau_M(\alpha,\mu)$ lokális (és globális) maximum. $w_M < \bar{w}$ ekvivalens $\tau_M(\alpha,\mu) > 0$. $\tau_M(\alpha,\mu)$ kvalitatív viselkedése nyilvánvaló. ❑

3. Szemléltetés

A szemléltetéshez maximális munkaáldozattal számolunk: $\alpha = 1$. Keresetrátaként az USA stilizált adatait választjuk, öt *kvintilissal* (jövedelemötöddel: $I = 5$), lásd az 1. táblázat 1. oszlopát. Az adócsalás mértéke egyszerűen adódik az adómorál reciprokaként (2. oszlop). Számunkra a befizetett transzfer különös jelentőségű: $T_i^* = \tau(w_i l_i^* - e_i^*) - \beta^*$ (3. oszlop). A legszegényebb ötöd potenciális keresetének több mint negyedét, az átlag 5,5 százalékát kapja, a leggazdagabb ötöd viszont potenciális keresetének kerek 4 százalékát fizeti be, az átlag 11 százalékát. Emellett felírjuk a fogyasztás értékét: látható, hogy a szegényebb ötöd fogyasztása még némileg nő a potenciális keresetéhez képest $(0,233 > 0,2)$, de a második ötödnél az adózás miatti visszatartott munkakínálat elviszi a transzfert $(0,399 \approx 0,4)$. A mediánötöd minimális transzfert fizet, de érdekes módon anyagilag veszít az adómentes esethez képest; igaz, kevesebbet kell dolgoznia. Az igazi vesztes a legmagasabb ötöd: potenciális keresetének majdnem 15 százalékát elveszti. Természetesen ezek a számok csak szemléltetésül szolgálnak és óvatossággal kezelendők.

Kereseti ráta w_i	Eltitkolt kereset e_i^*	Befizetett transzfer T_i^*	Fogyasztás c_i^*
0,2	0,050	$-0,055$	0,233
0,4	0,100	$-0,041$	0,399
0,7	0,175	$-0,020$	0,646
1,1	0,275	$0,007$	0,977
2,6	0,650	$0,109$	2,216

Megjegyzés: $\mu = 4$, $\tau_M(1,4) = 0,106$ és $L^* = 0,894$.

1. táblázat. Egyéni optimumok

Az adómorált változtatva csak a mediándolgozó optimális adókulcsára, az általa kapott előjeles transzferre, és a fogyasztásra összpontosítunk. Az adómorál 4-ről 20-ra, majd végtelenre való emelkedésével az optimális adókulcs 0,106-ról 0,206-ra, majd 0,231-re emelkedik. A mediánszavazó által kapott transzfer lassan nő: az átlagos potenciális kereset 2 százalékáról 4,6 százalékra és 5,3 százalékra. A fogyasztás is lassan csökken: 65-ről 60, majd tovább 59 százalékra. Vegyük észre, hogy két hatás keresztezi egymást: az adómorál javulása emeli a mediánszavazó optimális adókulcsát, ami viszont mérsékli a mediánszavazó munkakínálatát. Ez utóbbi erősebb, mint az újraelosztási hatás, ezért csökken a mediánfogyasztás.

Adómorál μ	Adókulcs $\tau_M(\alpha,\mu)$	Befizetett transzfer T_M	Mediánfogyasztás c_M
4	0,106	$-0,020$	0,646
6	0,147	$-0,030$	0,627
8	0,168	$-0,036$	0,618
10	0,181	$-0,039$	0,612
14	0,195	$-0,043$	0,606
20	0,206	$-0,046$	0,602
…			…
∞	0,231	$-0,053$	0,592

2. táblázat. Az adómorál hatása a mediánszavazóra

Függelék: A mediánszavazó modellje

Itt röviden körvonalazom a mediánszavazó modelljét (Hirsleifer, 2005; Simonovits, 2003). Condorcet már a XVIII. században felismerte, hogy az egyszerű többségi szavazás általában nem *tranzitív*. Ezt a felismerést általánosítva, Arrow 1951-ben bebizonyította, hogy az egyéni döntések alapján *általában* lehetetlen konzisztens demokratikus választásokat tartani. Szerencsére *speciális* esetekben az egyszerű többségi szavazás megfelelő. Ilyen szerencsés eset az egycsúcsú preferenciák esete.

Tegyük fel, hogy a szavazók legkedveltebb értékeit egy τ skalár képviseli: például mekkora legyen az idei szja-kulcs. Tegyük fel, hogy minden választónak van egy közvetett hasznosságfüggvénye, $u(\tau, w)$, amely a τ adókulcs függvényében megmondja, hogy mekkora a w jellemzőjű egyén maximális haszna. Megfelelő korlátossági és simasági feltételek esetén minden szavazónak létezik egyetlen egy optimális adókulcsa: jele $\tau(w)$, $0 \le \tau(w) \le 1$.

*Egycsúcsú preferenciák*ról beszélünk, ha teljesül a következő feltétel: az egyéni optimumnál kisebb adókulcsoknál a közvetett hasznosságfüggvény nő, és a nagyobbnál csökken. $G(\cdot)$-vel jelölve a szavazók jellemzőjének folytonos és növekvő eloszlásfüggvényét, belátható, hogy a mediánszavazó választása egyensúlyi. Pontosabban: legyen w_M az a jellemző, amely két egyenlő részre vágja a népességet: $G(w_M) = 1/2$.

A többségi szavazás azt jelenti, hogy bármely két τ_1 és τ_2 lehetőség közül a társadalom azt választja, amelyik a szavazásnál többséget kap. Képletben: τ_1 legyőzi τ_2-t, ha $\mathbf{P}(\{w|u(\tau_1,w) \geq u(\tau_2,w)\}) > 1/2$, ahol $\mathbf{P}(A)$ az A halmaz valószínűségét jelöli.

Egy fontos eredmény az alábbi tétel.

A.1. Tétel (Black (1948)). *Egycsúcsú preferenciák esetén a w_M jellemzőjű mediánszavazó $\tau(w_M)$ döntése egyensúlyi.*

Bizonyítás (vázlat): Tegyük fel, hogy a $u(\tau,w)$ függvény mindkét változójában növekvő függvény a $[0,\ 1] \times [w_L, w_H]$ téglalapon. Belátjuk, hogy ekkor τ_M legyőzi τ-t. Ha $\tau_M > \tau$, akkor a $w > w_M$ jellemzőjűek az egycsúcsúság miatt előnybe részesítik τ_M-t τ-vel szemben, s ez többség. Hasonlóan érvelhetünk $\tau_M < \tau$ esetén. ❑

A demokratikus szavazások eredményeit vizsgáló matematikai elemzések Hotelling (1929)-re nyúlnak vissza. A példánál maradva, két párt verseng a szavazók kegyeiért: a baloldal (L) nagyobb, a jobboldal (R) kisebb adókulcsot javasol: $0 \leq \tau_\mathrm{R} \leq \tau_\mathrm{l}$. A $\tilde{\tau}$ (preferenciájú) szavazó arra a pártra szavaz, amelynek javaslata számára jobb. Ezért a $\tilde{\tau}$ szavazó akkor és csak akkor szavaz balra, ha $u(\tilde{\tau},\tau_\mathrm{l}) > u(\tilde{\tau},\tau_\mathrm{R})$. Adott $(\tau_\mathrm{l},\tau_\mathrm{R})$ javaslatpár esetén a jobboldal a szavazatok $p_\mathrm{R} = G((\tau_\mathrm{l}+\tau_\mathrm{R})/2)$ hányadát kapja. Akkor győz a jobboldal, ha a szavazatok többségét elnyeri, azaz $p_\mathrm{R} > 1/2$. (A folytonosság miatt elvben érdektelen az egyenlőség esete, bár a 2000. évi amerikai elnökválasztás rámutatott az idealizálás korlátjaira.)

Kérdés: mit javasoljanak az elvtelen szavazatmaximalizáló pártok? A válasz a Nash-egyensúly fogalmán alapul. Két játékos esetén a *Nash-egyensúly* egy olyan döntéspárt jelent, amelytől ha bármelyik játékos egyoldalúan eltér, akkor rosszul jár.

A.2. Tétel (Hotelling-tétel, 1929). *Egyensúlyban mindkét párt a középen álló, mediánszavazó értékét javasolja:*

$$\tau_\mathrm{l}^* = \tau_\mathrm{R}^* = G^{-1}(1/2),$$

ahol $G^{-1}(p)$ a G eloszlásfüggvény inverze.

Megjegyzések:

1. Eredményünk paradox: egyensúlyban a két versengő párt ugyanazt ajánlja. Ez részben igaz: a fejlett kétpárti demokráciákban sokszor minimális a két politikai erő közötti különbség, lényegében másodrendű dolgok döntenek.

2. Persze a tétel így túl egyszerű: sem a politikában általában, sem a adópolitikában sajátosan nem igaz, hogy a szavazók csak önös érdekeiket követik. Még ha igaz lenne is a feltevés, akkor sem lehetne az egyéni érdekeket egyetlen skalárral kifejezni.

Bizonyítás (vázlat): Indirekt bizonyítunk. Ha $\tau_{\mathrm{I}}^* > \tau_{\mathrm{R}}^*$ teljesülne, akkor a baloldal a adókulcs elegendően kicsiny csökkentési ígéretével új szavazatokhoz jutna, anélkül hogy régieket veszítene, tehát eredetileg nem volt egyensúly. Ha fennállna az egyenlőség, de a mediánszavazó értékénél nagyobb (vagy kisebb) érték esetén, akkor a baloldal a jobboldallal helyet cserélve (vagy fordítva) ismét csak javíthatna a helyzetén, s ez ellentmond az egyensúlynak. ❑

Köszönetnyilvánítás:
A szerző ezúton köszöni az OTKA K-81483 pályázat támogatását.

Hivatkozások

Black, D. (1948). On the rationale of group decision-making. *The Journal of Political Economy*, 56(1):23–34.

Doerrenberg, P., Duncan, D., Fuest, C., Peichl, A. (2012). Nice guys finish last: Are people with higher tax morale taxed more heavily? *IZA Discussion Paper*, (6275).

Frey, B. S., Weck-Hanneman, H. (1984). The hidden economy as an 'unobserved' variable. *European Economic Review*, 26(1-2):33–53.

Hirshleifer, J., Glazer, A., Hirshlifer, D. (2005). *Mikroökonómia – Árelmélet alkalmazása*. Osiris, Budapest.

Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *The Economic Journal*, 39(153):41–57.

Mas-Colell, A., Whinston, M., Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.

Meltzer, A., Richard, S. (1981). A rational theory of the size of government. *The Journal of Political Economy*, 89(5):914–927.

Romer, T. (1975). Individual welfare, majority voting, and the properties of a linear income tax. *Journal of Public Economics*, 4(2):163–185.

Simonovits A. (2003). Öregedő népesség, mediánszavazó és a jóléti állam mérete. *Közgazdasági Szemle*, 50:835–854.

Simonovits, A. (2011). Higher tax morale implies a higher optimal income tax rate. *Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, IEHAS Discussion Papers* 1137.

Mai és régi idők tenisze

A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása

Temesi József, Csató László, Bozóki Sándor

Kivonat

A többtényezős döntési módszertan egyik fontos eszköze a páros összehasonlítás. Preferenciasorrendek meghatározására, adott tényező szerinti értékelések számszerűsítésére egyaránt felhasználják a páros összehasonlításokból kapott mátrixokat. Tanulmányunk egy viszonylag új kutatási területtel, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok alkalmazásával foglalkozik. Az elmúlt 40 év egymás elleni eredményei alapján profi teniszjátékosok rangsorait adjuk meg. Mivel a játékosok közül nem mindenki játszott mindenkivel, ezért – különböző feltételek mellett – az eredmények nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokhoz vezetnek. Számításaink nem csak jól értelmezhető rangsorok létrehozására vonatkoznak, hanem a mátrixok bizonyos tulajdonságainak a rangsorokra gyakorolt hatását is megvizsgáljuk.

1. Bevezetés

Forgó Ferenc a játékelmélet művelése mellett egyes játékokat a gyakorlatban is szívesen űz. Ezek között kiemelkedő helyet foglal el a sakk és a tenisz. Mivel e cikk legidősebb

---

Temesi József
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: jozsef.temesi@uni-corvinus.hu

Csató László
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: laszlo.csato@uni-corvinus.hu

Bozóki Sándor
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport és Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, email: bozoki@sztaki.hu

szerzőjének alkalma volt Ferivel egy teniszcsapatban játszani – ez leggyakrabban még az 1980-as években történt –, így testközeli megfigyelésekre volt lehetősége Feri stratégiáinak és kifizetéseinek elemzésében. Ha eltekintünk a tudományos modellezési technikák alkalmazásától, akkor a legkézenfekvőbb, ám triviális megfigyelési eredmény az volt, hogy Feri nem szeret veszíteni (Ki szeret?). Amikor ez mégis bekövetkezett, már átvezetne bennünket a magatartáselméleti kutatások ingoványosabb talajára. Feri szerva-röpte játékstratégiája mellett a legjobban az emlékeztetett McEnroe és más nagy játékosok stílusára, amilyen kérlelhetetlenséggel saját hibáit megítélte. Akik jól ismerik szelíd, iróniára hajló habitusát, bizonyára nem hiszik el a régmúlt idők tanújának, ha azt állítja, hogy időnként nem csak a labda repült, hanem az ütő is...

Ahogyan teltek az évek, a tenisz szeretete és gyakorlása – legtöbbször családi körben – megmaradt, viszont kiegészült a nagy versenyek televíziós közvetítéseinek megtekintésével és elemzésével. Ma is jókat beszélgetünk arról, hogy a modern kori teniszgladiátorok közül ki a legjobb, és vajon felvennék-e a versenyt a korábbi hősökkel? Ez a gondolat vezetett el bennünket ahhoz, hogy egy olyan teniszversenyt hirdessünk meg, ahol a régi és új csillagok megmérkőzhetnek egymással. No persze nem a teniszpályán (bár sokan még most is játszanak korosztályos versenyeken vagy bemutató mérkőzéseken), hanem a számítógép virtuális valóságában, a modellezés eszközeivel.

Az elmúlt 40 év nagy férfi teniszezői közül 34 játékost választottunk ki, köztük mindenkit, aki 1974. július 29-e óta az ATP világranglistáját vezette – ők 23-an vannak. Ám a szokásos egyenes kieséses fordulók helyett az általunk rendezett „torna” végeredménye az egymás elleni eredmények alapján alakult ki. Így a 34 játékos sorrendjének meghatározásához felhasználható volt a páros összehasonlítások módszertana. A „rangsorolás” érdekességét az adja, hogy vannak olyan játékosok, akik az 1980-as vagy az 1990-es években befejezték aktív pályafutásukat, így biztosan nem találkozhattak a pályán a 2000-es évek csillagaival. Emellett akár egy időben aktív játékosoknál is előfordulhatott, hogy nincs egymás elleni eredményük. Ezért a páros összehasonlítás mátrixok egy speciális osztályával, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokkal kellett a feladatot megoldani, s ez – a játék izgalmán túlmenően – egy új módszertan érdekes alkalmazásának is ígérkezett.

A tanulmány első részében a páros összehasonlítás mátrixok tulajdonságaival foglalkozunk olyan mértékben, amennyire a továbbiakban szükséges, majd a teniszezők életpályájára és egymás elleni eredményeire vonatkozó részleteket mutatjuk be. A konkrét számításokhoz szükséges adatok ismertetése után a különböző feltevéseken alapuló modellvariánsok eredményeit közöljük. Az egyes „rangsorok” elemzésekor a módszertani tanulságok mellett igyekszünk a tenisz sajátos viszonyait és a játékosokra vonatkozó többletinformációt is figyelembe venni.

Reméljük, hogy Forgó Feri kedvencei az általa elvárt módon szerepelnek majd ebben a történelmi versengésben – ha mégsem, akkor majd közösen megvitatjuk, mi az, amit még javíthatunk a modelleken.

2. Páros összehasonlítás mátrixok

A páros összehasonlítás mátrixok talán legismertebb alkalmazási területe a többszempontú döntési modellezés, ahol az egyes szempontok fontosságának számszerű meghatározására vagy az alternatívák adott szempont szerinti értékelésére használhatók. A dolgozatban az utóbbi esettel foglalkozunk, hiszen teniszezők rangsorát szeretnénk felállítani. A páros összehasonlítás mátrix egy négyzetes mátrix, amelynek (i, j)-edik eleme megmutatja, hogy az i-edik játékos hányszor jobb az j-edik játékosnál:

1. Definíció. *(Páros összehasonlítás mátrix) Jelölje $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ a pozitív valós elemekből álló $n \times n$-es mátrixok osztályát. Az*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

mátrixot páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük, ha minden $i, j = 1, \dots, n$ indexre teljesül, hogy

$$a_{ii} = 1, \qquad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}. \tag{1}$$

(1) alapján az önmagával való összehasonlítás eredménye mindig 1, továbbá ha az i-edik játékos a_{ij}-szer jobb, mint a j-edik, akkor a j-edik szükségképpen $1/a_{ij}$-szer jobb, mint az i-edik. Az (1)-ből adódóan n játékos esetén $n(n-1)/2$ összehasonlítás alapján a mátrix minden eleme felírható.

2. Definíció. *(Konzisztens páros összehasonlítás mátrix) Ha egy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ mátrixra* (1)*-en túl még $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ is teljesül minden $i, j, k = 1, \dots, n$ indexre (tranzitivitás), akkor konzisztens páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük. Az* (1) *feltételt igen, de a tranzitivitást nem teljesítő mátrixot inkonzisztens mátrixnak nevezzük.*

A feladat: a játékosok páronkénti összehasonlításának ($\mathbf{A}$ mátrix) ismeretében egy olyan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ súlyvektor meghatározása, amire $w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, valamint $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, és amelynek a komponenseiből képzett w_i/w_j arányok *jól tükrözik* a mátrixban szereplő a_{ij} értékeket minden $i, j = 1, 2, \dots, n$ indexpárra (miután csak a súlyok arányai számítanak, a súlyvektort valamilyen módon normalizálni kell, általában összegüket 1-nek választjuk). A dőlt betűvel szedett cél matematikailag sokféle, egymással nem feltétlenül ekvivalens módon fogalmazható meg. Az Analytic Hierarchy Process (AHP) módszertanban a mátrix maximális sajátértékéhez (λ_{max}) tartozó jobboldali sajátvektor komponensei adják a súlyokat (Eigenvector Method, *EM* módszer; Saaty (1980)). Matematikai szempontból legalább ennyire természetesnek tűnik olyan távolságminimalizáló módszereket használni, amelyekben a döntéshozó által megadott páros összehasonlítás mátrixot egy súlyvektor által generált konzisztens mátrixszal közelítjük és célfüggvényként a két mátrix távolságát írjuk fel, például a logaritmikus legkisebb négyzetek értelemben (*LLSM*; Crawford és Williams (1980, 1985); De Graan (1980)):

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\log a_{ij} - \log \left(\frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2 \tag{2}$$

$$w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{3}$$

Ha a döntéshozó eleve konzisztens mátrixot ad meg, akkor mindegyik súlyozási módszer vissza is adja ezt eredményül, míg inkonzisztens esetben az egyes módszerek egymástól kisebb-nagyobb mértékben eltérő súlyvektorokat eredményeznek. A számos további célfüggvény felírását és összehasonlítását (lásd Bozóki (2006), 4.1. fejezet) oly módon foglalhatjuk össze, hogy nincs olyan súlyozási módszer, amely minden tekintetben jobb lenne a többinél. Az *LLSM* módszer egyik előnye, hogy az optimális megoldás könnyen számolható a páros összehasonlítás mátrix sorelemeinek mértani közepeiből (Crawford és Williams, 1985).

A súlyvektorból a koordináták nagyság szerinti sorrendje alapján azonnal adódik a játékosok rangsora.

2.1. *A páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciája*

Az előző fejezetben az inkonzisztenciát a konzisztencia hiányával definiáltuk, de az inkonzisztencia szintjére még nem adtunk mérőszámot. Az mindenesetre érezhető, hogy az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok nem egyformán inkonzisztensek, hiszen az elsőben „épphogy csak” nem teljesül a konzisztencia $2 \times 3 = 5$ egyenlete, míg a másodikban sokkal nagyobb az eltérés az egyenlet két oldala között. Ráadásul a második esetben a körbeverés jelensége is megjelenik.

Az AHP módszertanban Saaty úgy definiálta egy páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját (*CR*), hogy maximális sajátértékének egy pozitív lineáris transzformáltját vette és a mátrixot elfogadhatónak tekintette, ha ennek értéke $0,1$ alatt van, ami a szakirodalomban a 10%-os szabályként vált ismertté (Saaty, 1980).

Az inkonzisztencia mérésére számos további ötlet ismert, az irodalomban legalább tízféle megközelítést említenek (Brunelli és Fedrizzi, 2011). A dolgozatban a körhármasokkal – triádokkal – fogunk foglalkozni (Kéri, 2011; Kindler és Papp, 1977). Ezek esetében eltekintünk a preferenciák intenzitásától, csak azok irányát (a közömbösséget kifejező 1-hez viszonyított nagyságát) vizsgáljuk. E tekintetben elsősorban az intranzitív triádok, a fenti példában a jobb oldalihoz hasonló „következetlen" hármasok aránya lesz érdekes.

2.2. *Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok*

Számos oka lehet annak, hogy egy páros összehasonlítás mátrix néhány eleme hiányzik. Ha a döntéshozó idejét és figyelmét csak szűkre szabott korlátok között tudjuk igénybe venni, akkor könnyen előfordulhat, hogy nincs lehetőség az összes szempontpár vagy alternatívapár közötti arány lekérdezésére. A teniszjátékosok esetében pedig természetszerűleg jelennek meg a hiányzó elemek, hiszen nem tudunk közvetlenül összehasonlítani két olyan játékost, akik sohasem játszottak egymás ellen.

A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix csak annyiban különbözik a (teljesen kitöltött) páros összehasonlítás mátrixtól, hogy néhány eleme ismeretlen. A következő felírásban a hiányzó elemek helyére $*$-ot teszünk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & * & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & * \\ * & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & * & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A fenti objektum még nem egy matematikai fogalom, hiszen minden lineáris algebrai definíció, művelet és állítás olyan mátrixokra van értelmezve, amelyeknek az összes eleme adott. A problémát könnyen áthidalhatjuk, ha a főátló fölötti hiányzó elemeket az $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}_+$ változókkal helyettesítjük, a nekik megfelelő főátló alattiakat pedig a reciprokaikkal: $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_d$. A mátrixban tehát összesen $2d$ hiányzó, illetve mostantól változóval jelölt elem lesz.

Jelölje

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_1 & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & x_d \\ 1/x_1 & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/x_d & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d_+$. A fentieknek megfelelően az (5) alakot nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixnak hívjuk. Ez tekinthető egy mátrixosztálynak, amelynek bármely realizációja (az $x_1, x_2, \ldots, x_d$ változók mindegyikének valamilyen pozitív értéket adunk) egy-egy páros összehasonlítás mátrixot eredményez.

A továbbiakban a *páros összehasonlítás mátrix* fogalmát a teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra használjuk, míg a *nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix* fogalmát a fentebb definiált nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixra. A nyelvi logika ellenére a páros összehasonlítás mátrix fogalma nem bővebb, mint a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix fogalma (a „nem teljesen kitöltött" jelző tehát most nem szűkítést jelent.) A két halmaz közötti tartalmazás csak a fenti realizációs formában értelmezhető, ekkor viszont éppen a nem teljesen kitöltött mátrixok fogalma a bővebb.

Mind döntéselméleti, mind alkalmazási szempontból az alábbi kérdések tűnnek fontosnak és izgalmasnak:

- Hogyan számítsuk ki a súlyvektort?
- Hogyan számítsuk ki az inkonzisztenciát?

Természetesen adódik még az a kérdés is, hogy milyen értékek beírásával lehet valamilyen szempontból optimálisan kitölteni a mátrixot. Ezt önmagában nem tartjuk elsődleges fontosságúnak, bár megjegyezzük, hogy a későbbiekben tárgyalt algoritmusok mintegy melléktermékeként ez is megoldódik és bizonyos információk kiolvashatók az eredményekből.

2.3. Gráf reprezentáció

Amikor a döntéshozót arra kérjük, hogy páronként hasonlítsa össze n szempont fontosságát, akkor minden egyes összehasonlítás során egyfajta reláció, viszony megállapítása történik. Minden egyes reláció egy arányszám formájában jelenik meg, jelesül a két szempont fontosságának hányadosaként vagy legalábbis annak becsléseként. Két, még össze nem hasonlított szempont között tehát nincs semmilyen közvetlen reláció. Közvetett persze lehet, ha a további szempontokkal való összehasonlításokat is figyelembe vesszük. A fentiek alapján természetesen adódik a gráfokkal való kapcsolat.

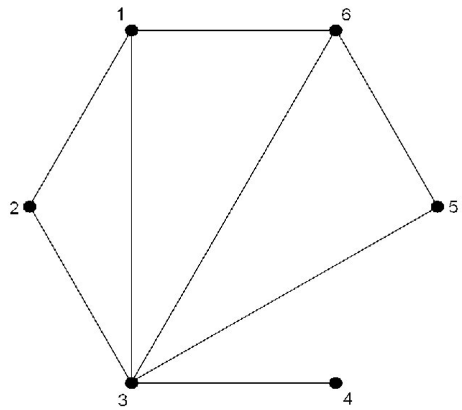
Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix. Ehhez egy gráfot definiálunk az alábbiak szerint:

- $G := (V, E)$, ahol
- $V := \{1, 2, \ldots, n\}$, minden csúcs egy-egy összehasonlítandó elemnek (például teniszjátékosnak) felel meg;
- $E := \{e(i, j) \,|\, a_{ij}$ (és a_{ji}) adott és $i \neq j\}$, az irányítatlan élek a mátrix ismert elemeit képviselik;

- Ha hiányzó elem van a mátrixban, akkor a neki megfelelő él nincs behúzva a gráfban. G egy irányítatlan gráf.

1. Példa. Legyen $\mathbf{C}$ egy 6×6-os nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix, a hozzátartozó G gráfot az 1. ábra mutatja.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & * & * & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & * & * & * \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ * & * & a_{43} & 1 & * & * \\ * & * & a_{53} & * & 1 & a_{56} \\ a_{61} & * & a_{63} & * & a_{65} & 1 \end{pmatrix}.$$



1. ábra. A $\mathbf{C}$ mátrixhoz tartozó G irányítatlan gráf

2.4. Súlyok számítása nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetén

A Saaty-féle *CR* inkonzisztencia mérőszám és a maximális sajátérték között közvetlen kapcsolat van: egymás pozitív lineáris transzformáltjai. Minél nagyobb a mátrix maximális sajátértéke, annál magasabb a *CR* inkonzisztencia szintje.

A fentiekből kiindulva egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz azokat a kitöltő elemeket fogjuk megkeresni, amelyekkel teljessé téve a mátrixot a maximális sajátértéke minimális lesz. Formálisan:

$$\min_{\mathbf{x}>\mathbf{0}} \lambda_{max}(\mathbf{A}(\mathbf{x})). \tag{6}$$

Belátható, hogy az *EM* módszernek megfelelő (6) optimalizálási feladat megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó G gráf összefüggő (Bozóki et al., 2010).

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének a nem teljesen kitöltött esetre vonatkozó kiterjesztése természetes módon a következő: a (2) célfüggvényben csak azokhoz az (i, j) indexpárokhoz tartozó tagokat vesszük figyelembe, amelyekre a_{ij} adott:

$$\min \sum_{e(i,j)\,\in\,E} \left[\log a_{ij} - \log\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right]^2 \tag{7}$$

$$w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{8}$$

Az előző esethez hasonlóan megmutatható, hogy a nem teljesen kitöltött mátrixokra felírt (7)-(8) *LLSM* feladat megoldása pontosan akkor egyértelmű és egy lineáris egyenletrendszerből explicit módon számítható, ha a G gráf összefüggő (Bozóki et al., 2010).

3. A tenisz világranglisták vezető játékosainak összehasonlítása: az adatrendszer

Napjainkban a tenisz világszerte az egyik legnépszerűbb sport. Nagy egyéniségeit a televízió révén százmilliók láthatják akár élő közvetítésekben is, népszerűségük óriási. A legnagyobb versenyek (Grand Slam, ATP 100-as tornák, Davis Kupa) nézettsége reklámértékét tekintve a sportágak között az elsők közé emelte. Ennek okait, történetét itt nem tudjuk feltárni; kihasználjuk viszont azt a számunkra nagyon fontos következményét, hogy a versenyekről, eredményekről, a játékosok pályafutásáról rengeteg szabadon elérhető információ áll rendelkezésre. Az adatokat többféle szemléletben közölték, táblázatok tömege mutatja be ezeket, ennek ellenére (vagy éppen ezért?) feldolgozásuk egyáltalán nem egyszerű.

A férfi és női hivatásos teniszezők világszövetségei honlapjaikon sokféle statisztikai feldolgozást közölnek. Ezek egy része a teniszezők egyéni életútjára vonatkozik: hány mecscset játszott, milyen győzelem-vereség aránya volt az egyes években, mennyi pénzt keresett a különböző hivatalos tornákon, melyek voltak a ranglista helyezései. Számunkra az egymás elleni eredmények adatbázisa volt különösen fontos, ahogyan arra hamarosan részletesen is kitérünk. Végül a honlapok nyilvántartják az aktuális világranglistákat, míg archív oldalaikon a régi ranglisták és eredmények is elérhetők.

Tanulmányunkban a férfi világranglisták élversenyzőivel foglalkozunk. A női teniszezőkre vonatkozóan az adatok szintén összegyűjthetők és a számítások analóg módon elvégezhetők, ám terjedelmi keretek ezt nem tették lehetővé (ráadásul Feri is szívesebben követi a férfi tornák mérkőzéseit). A vizsgált játékosok között ugyan többen vannak, akik párosban is kiemelkedő eredményeket értek el, ám itt csak az egyéni mérkőzésekre koncentrálunk.

Célunk az, hogy a jelen és a múlt nagy játékosait egymással összevessük. Használhatnánk erre a világranglistákat, de szemléletünk eltér attól, ahogyan ezek a listák összeállnak. Míg néhány sportágban az egyéni ranglisták megpróbálják az egymás elleni eredményeket értékelni (például a sakkban), vagy az egyes versenyeken elért eredményeket valamilyen módon aggregálni (egyes atlétikai számok, vívás), addig a tenisz ranglisták készítői a versenyek eredményeit jelentőségük szerinti pontszámokkal látják el, s így alakítják ki a helyezéseket. A különböző tornák fontosságát a pénzdíjak mérik. Az elért pontszámban egyáltalán nem játszik szerepet a legyőzött ellenfél kiléte, ez csak indirekt módon, a számításba vett versenyek nevezési és kiemelési rendszerében jelenik meg. A tenisz ranglista-készítés speciális szabályaira nem térünk ki, mivel ezeket nem használjuk (illetve csak a szóba jöhető játékosok körének meghatározására).

Logikusnak látszik a játékosok egy zárt körének értékelésére az egymás elleni eredmények felhasználása. Ugyanakkor egyáltalán nem magától értetődő, hogy olyan sportágakban, ahol két játékos sokszor találkozott egymással, és hol az egyik, hol a másik kerekedett felül, az egyes eredmények közül melyeket választjuk ki, illetve hogyan súlyozzuk azokat. A világhálón elérhető adatbázisok mind a 34 játékosunk esetében lehetővé tették az összes egymás elleni „hivatalos” eredmény figyelembevételét, amit meg is tettünk, mégpedig a versenyek megkülönböztetése nélkül. Valószínűleg nem nagyon tévedünk ugyanis, ha azt gondoljuk, hogy a pályán egy játékos legjobb tudását bevetve mindig le akarja győzni ellenfelét, és nem a pénzdíj vagy egyéb körülmények motiválják. Ha például két játékos valamelyik nagy versenyen játszott egymással, az ugyanolyan módon került be az adataink közé, mint amikor egy Challenger tornán vagy a Davis Kupa csapatmérkőzésein találkoztak. Az egymás elleni mérkőzések eredménye és az egyéb adatok forrása minden esetben a FEDEX ATP Head 2 Head Statistics játékos-összehasonlító oldal.

Nem mindegy az sem, mit tekintünk eredménynek. Ha az egyik játékos egy 2 vagy 3 nyert játszmáig menő mérkőzésen legyőzte a másikat, azt a javára írt egy pontnak tekinthetjük, míg a másik játékos nem kap pontot. Így bármely két játékosra meg tudunk állapítani egy győzelem/vereség arányt. Számításainkban ez lesz az egyik numerikus adat. Ez a hányados mindenképpen mond valamit a két játékos erőviszonyáról: ha 1 közelében van, akkor az erőviszonyok kiegyenlítettek, ha valamelyik fél javára magas az érték, akkor őt sokkal jobbnak tekinthetjük a másiknál. Ennél árnyaltabb megközelítést jelent az, ha a két játékos egymás elleni játszmaarányát tekintjük értékmérőnek. Ezzel általában az az eset is kivédhető, ha az egyik játékos soha nem nyert egy másik ellen, s így a hányados nem lenne értelmezhető.

Elemzéseink a páros összehasonlítás mátrixokból számított súlyvektorokra és az ezek alapján felállított sorrendekre épülnek. Feltevésünk szerint a játékosok egymás elleni eredményeinek aránya egyben kettőjük páros összehasonlítása a fenti értelemben. Háromféle mátrixot állítottunk elő. Az első típusú mátrixnak ($PC1$) azok az elemei kapnak értéket (vagyis azok lesznek a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix ismert elemei), ahol a két játékos legalább egy mérkőzést játszott egymással. Mivel több esetben mindössze néhány, olykor csak egy-két mérkőzés van a két játékos között, ezek eredménye az arányszemléletben erősen torzíthatja az erőviszonyokat, akárhogyan is igyekszünk a nullával való osztást elkerülni. Itt azt a megoldást választottuk, hogy az ilyen „végtelenül erősebb, mint a másik” esetben egy korrigált értéket írtunk be. Ennél jobb lehet az a megoldás – bár adatvesztést és némi torzítást okoz –, ahol csak azokat a párokat vettük figyelembe, amelyekben a játékosok legalább ötször mérkőztek egymással. Ez a második típusú mérkőzésarányt tartalmazó mátrix ($PC2$). Harmadik típusú mátrixunkban ($PC3$) a játszmaarányok képviselik a páronkénti összehasonlításokat.

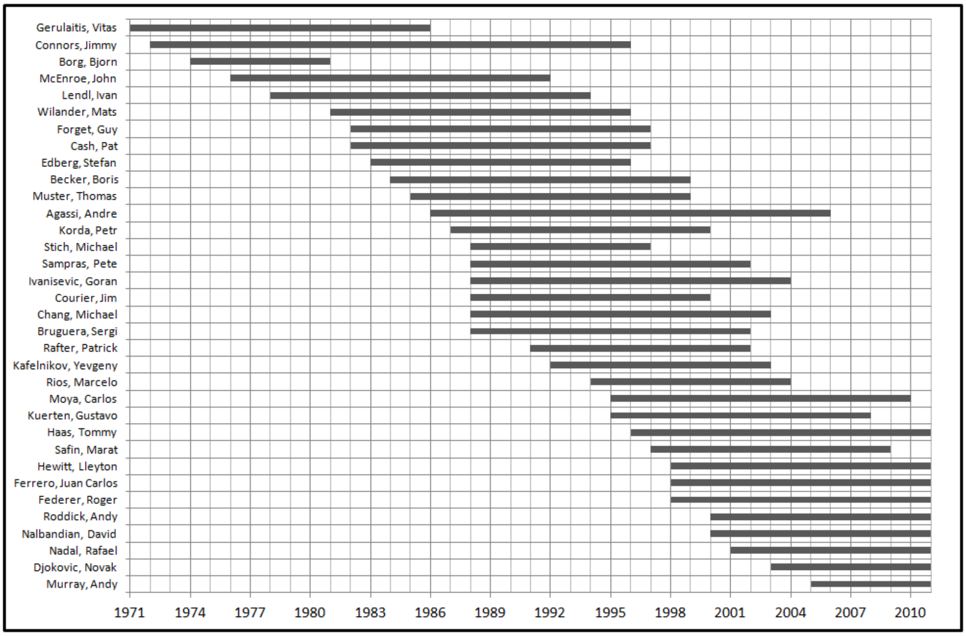
Ez a szemlélet jól kezeli azt, hogy ebben az egyéni sportban is váltakozó szerencsével folyhat a két játékos közötti küzdelem. Azonban ezek a találkozók nem egyetlen rövid időszakban zajlottak le, hanem a sportolók teljes játékos pályafutása alatt. Egy-egy győzelmet vagy vereséget a hozzáértő másként kezelhet, ha két olyan játékos találkozott egymással, akiknek a pályafutásuk kezdete és csúcsa más-más időszakra esett. Ha egyikük még fiatal, kezdő hivatásos, míg a másik pályája csúcsán van, akkor az eredmény nem feltétlenül számítható be azzal azonos módon, mint amikor ugyanez a két játékos ereje teljében találkozott. Ezzel a kérdéssel – részben módszertani nehézségek miatt – nem foglalkozunk. Tapasztalataink szerint egyébként fiatal játékosok néha már pályájuk elején is nagy eredményekre voltak képesek (például Becker, Nadal), így nem igazán tudnánk egy meggyőző súlyozási módszert érvényesíteni.[1]

Az elemzések során mégis érdemes lehet követni az egyes játékosok aktív pályafutásának idejét, és figyelni arra, mikor találkozhattak egymással. A 2. ábra mutatja játékosaink aktív pályafutásának időszakait. Jól láthatóan vannak, akik hamar visszavonultak (például Borg 8 év professzionális karrier után), míg másoknál rendkívül hosszú aktív hivatásos időszakok is előfordulnak (Agassi: 21 év, Connors: 25 év). Megemlítendő, hogy az ATP honlap szerint jelenleg még 8 játékos aktív versenyző: Djokovic, Federer, Ferrero, Haas, Murray, Nadal, Nalbandian, Roddick (Muster késői „visszatérését” a profik közé nem számítjuk ide). Az ő egymás elleni eredményeik később még módosíthatnak a rangsorokon; e tekintetben elsősorban a két fiatal versenyző, Djokovic és Murray előretörése várható a többiek rovására. Az adatbázisban a 2011 végéig lejátszott hivatalos mérkőzések szerepelnek.[2]

A 2. ábra rávilágít arra, hogy vannak olyan játékosok, akik aktív pályafutásuk során soha nem találkozhattak egymással! Ha tehát a páros összehasonlítás mátrixok módszertanát akarjuk alkalmazni, akkor mátrixaink nem lesznek teljesen kitöltöttek. Az előző fejezetben megmutattuk, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok módszertani kezelése akkor megoldott, ha a mátrix ismert elemeit reprezentáló gráf összefüggő. Teniszezőink esetében ez akkor teljesül, ha nincsenek olyan izolált időszakok, amikor bizonyos

[1] Ebben az is szerepet játszhat, hogy egy fiatal játékos minden bizonnyal nagyobb motivációval lép pályára az aktuális sztárok ellen, mint fordítva, hiszen számukra ez jelentheti „életük meccsét”.

[2] Az egyetlen kivétel ez alól a 12. táblázat teljes pályafutásra vonatkozó adatállománya. Ezek összegyűjtése 2011. október-november folyamán történt, és utólag nehezen lehetne 2011 végéig frissíteni. Mindenesetre ez egyáltalán nem befolyásolja számítási eredményeinket.



2. ábra. A professzionális teniszkarrier időtartama az elemzésbe bevont játékosoknál

játékosok kizárólag egymással játszottak. A diagramon az is látható, kik azok, akik leginkább kapcsolatot teremtenek az egyes időszakok között. Az 1980-as, illetve a 2000-es évek játékosai közül például Agassi vagy Kuerten viszonylag sokakkal játszhatott, de Lendl is a 20. század végi tenisz egyik ilyen összekötő egyéniségének tekinthető.

Itt érkeztünk el arra a pontra, ahol módszertanunk legizgalmasabb és egyben legvitathatóbb eleme jelenik meg: együtt kezeljük, együtt rangsoroljuk azokat, akik játszottak egymással (akár egyetlen meccset), azokkal, akik aktív pályafutásuk során a pályán egyszer sem álltak egymással szemben. Az együttes rangsorolás lehetőségét a feltételünket teljesítő nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixnak az a tulajdonsága adja, hogy indirekt módon az egymás ellen nem játszó versenyzők is összehasonlításra kerülnek.

Mielőtt azonban az eredményeket bemutatnánk és elemeznénk, ki kell térnünk néhány technikai részletre. Szenteljünk még néhány szót a játékosoknak. Mivel a mátrixainkban szereplő mérkőzések egymás elleniek, ezért érdekes kérdés lehet, vajon egy-egy játékos teljes karrierjének ezek a meccsek mekkora részét fedik le. Rendelkezésre áll olyan statisztika, ahonnan kigyűjthetők a szükséges adatok és összeállítható a függelékben közölt 12. táblázat, mely szerint a versenyzők többségénél az általunk kiválasztott játékosokkal történt összecsapások az összes mérkőzéshez viszonyítva 15 és 20% között mozognak (FEDEX ATP Head 2 Head Statistics). A legkisebb (nagyjából 10%-os) ez az arány Borg, Gerulaitis és Connors esetében. A másik végletet Edberg, Sampras és Becker (23% körül) képviselik. Talán meglepő, hogy az éljátékosok világa ennyire „belterjes”: az éljátékosok mérkőzéseik legnagyobb részét – a nevezési rendszerek és a fizető nézők, valamint a televízióadások követelményeinek megfelelően – egymás ellen játsszák.

Számításaink alapját, mint arról már szó volt, három mátrix képezte. Ezek közül a $PC1$ mátrixban szereplő arányok alapadatait – az egymás elleni eredményeket – a függelék 14. a. és 14. b. táblázataiban láthatjuk. Ennek egy cellájában a sor szerinti játékos oszlop szerinti játékos elleni győztes mérkőzéseinek száma szerepel, zárójelben kettejük összes egymás elleni találkozójával. Agassi például 10 alkalommal nyert Becker ellen, Becker pedig 4-szer Agassi ellen. Így a $PC1$ mátrixban $10/4$ és $4/10$ lesz a páros összehasonlítás mátrix megfelelő két eleme (A $PC3$ mátrix hasonlóképpen épül fel a játszmaarányokból). Üres cellák, ismeretlen elemek jelzik azt, ha a két játékos nem mérkőzött egymással. A $PC1$ mátrix az elméletileg lehetséges 561 páros összehasonlításból 322-t tartalmaz (57,4%). Ennek kitöltöttségét azzal is jellemezhetjük, hogy a 34×34-es méretű mátrixban mennyi az ismert elem. Ekkor a mátrix reciprok tulajdonságából adódó nem nulla értékeket és a főátlóban szereplő egyeseket is számításba vesszük, így a $PC1$ mátrix kitöltöttsége 58,7% (pontosabban $678/1156 \approx 58,65\%$).

A $PC1$ és $PC3$ mátrixokban a győzelmi és a játszmaarányok iránya általában azonos. Egyes esetekben a döntetlen arány a játszmáknál sem változik (például Hewitt-Nalbandian $3/3$, illetve $10/10$), többnyire azonban – bár csekély mértékben – a játszmaarány „eldönti”, ki volt jobb (például Borg-McEnroe $7/7$ és $23/21$). Akadnak megforduló irányok is, a 322-ből összesen 8 esetben. Talán a legérdekesebb az Edberd-Wilander párosítás, ahol a mérkőzésarány $9/11$, míg a játszmaarány $29/24$. Számításainkat a győzelmi és a játszmaarányokra is elvégezzük és mindkét megoldást elemezni fogjuk.

Azokban az esetekben, amikor az egyik játékos egyáltalán nem nyert mérkőzést (vagy játszmát), egy azonos – relatíve nagy – számérték alkalmazása nyilvánvalóan erős torzítást vitt volna a rendszerbe. A *mérkőzésarányokat tartalmazó mátrixoknál* a korrekcióra kétféle megoldást alkalmaztunk:

a) 5 mérkőzésenként változtattuk az arányt; az első öt esetben $(1:0, 2:0, \dots, 5:0)$ a beírt hányados 5, majd a következő öt esetben $(6:0, \dots, 10:0)$ 10, és így tovább: ez a $PC1$;

b) $1:0$ esetében 3, $2:0$ esetében 4, $3:0$-nál 5 volt az arány, a továbbiakban is úgy folytatva, hogy a győzelmek számához kettőt adtunk hozzá: ez a $PC4$.

A $PC2$ mátrix úgy állt elő, hogy a $PC1$ mátrixból (a 14. a. és 14. b. táblázatok adatai közül) kihagytuk azokat, ahol a mérkőzések száma két játékos között kevesebb, mint 5. Ezzel a módosítással egy olyan variánst kívántunk létrehozni, ahol a fenti korrekciót csak kevés elemre kell alkalmazni. Mivel a 322 párosításból 134 esetben volt a mérkőzésszám 5-nél kisebb, ezért a $PC2$ mátrix kitöltöttsége az összes lehetséges egymás elleni mérkőzéshez viszonyítva 33,5%. A $PC5$ mátrix a $PC2$ adataiból a *b)* korrekció révén keletkezik.

A *játszmaarányokat tartalmazó mátrixnál* – mivel kevesebb korrigálandó eset volt – úgy kerültük el ezt a problémát, hogy az ilyen eredményeket kihagytuk. Így a $PC3$ mátrix 279 elemet tartalmazott (a lehetséges páros összehasonlítások 49,7%-a). Végeztünk egy olyan számítást is, ahol a $PC3$ mátrixnál a *b)* korrekciót alkalmaztuk, így állt elő a $PC6$ mátrix (ennek kitöltöttsége azonos a $PC1$-ével, azaz 57,4%).

4. Súlyvektorok előállítása a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokból

A három alapmátrix mindegyikére kiszámítottuk a súlyvektorokat a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével ($LLSM$) és a Saaty-féle sajátérték módszerrel (EM) is. A $PC1$ és $PC2$ mátrix elemeinél a szükséges korrekciót az *a)* variáns szerint végeztük el. Az egyes mátrixokhoz és módszerekhez tartozó súlyvektorokat a függelék 13. táblázatában $LLSM1$, $LLSM2$ és $LLSM3$, illetve $EM1$, $EM2$ és $EM3$ jelöli.

Elvégeztük a számításokat a *b)* korrekciós módszer szerint előállított $PC1$ és $PC2$ mátrixokra is, terjedelmi okokból azonban az $LLSM4$, $LLSM5$ futtatások vektorait nem közöljük, ahogyan azt a számítást sem, amelyben a $PC3$ mátrixra a *b)* korrekciót alkalmaztuk az elemek kihagyása helyett ($LLSM6$). Ugyanez érvényes a 4, 5, 6 indexű EM rangsorokra is. Elegendő megjegyezni, hogy ezekből a vektorokból gyakorlatilag az előző eredményekből származó rangsorokkal azonos sorrendeket kaptunk. Ennek igazolását a későbbiekben a 3. a. és a 3. b. táblázatok elemzésénél fogjuk látni.

Mivel a korrekciók az eredeti és a korrigált hányadosokat vegyesen tartalmazó mátrixokat eredményeznek, úgy gondoltuk, szükség lehet egy olyan transzformációra, amelyik minden elemre érvényes, és a mérkőzések eredményhányadosainak azt a tulajdonságát is kezeli, hogy egyes esetekben kevés, más esetekben viszonylag sok az egymás elleni mérkőzések száma – hiszen több lejátszott mérkőzés esetén „biztosabbnak” tekinthető a páros összehasonlítás eredménye. Új páros összehasonlítás mátrixokat képeztünk, ahol az eddigi hányadosok helyébe ezek hatványait írtuk be az *egymás elleni mérkőzésszám / maximális mérkőzésszám* kitevővel.[3]

Az új mátrixokra a $WPC1$, $WPC2$ és $WPC3$ jelöléseket vezetjük be, a hozzájuk tartozó $LLSM$ és EM számítások eredményeit a megfelelő indexű $WLLSM$ és WEM vektorokat adják. Ezek alapján azt találtuk, hogy gyakorlatilag eltűnik a különbség (az a kicsi is, amit eddig láttunk) az *a)* és a *b)* korrekciós módszerrel kapott eredmények között, aminek igazo-

[3] Például az Agassi-Becker $10/4 = 2,5$ érték helyébe $(10/4)^{14/36} \approx 1,43$ lép, ahol a kitevő nevezőjében szereplő 36 a Lendl-McEnroe párosításból kapott maximális mérkőzésszám. Ez a módosítás nyilvánvalóan nem változtat a páros összehasonlítás mátrix főátlójában szereplő egyeseken, viszont „összébb húzza” a végső súlyok tartományát.

lására ismét a rangkorrelációs együtthatókat fogjuk felhasználni.[4] Így a 13. táblázathoz hasonlóan elegendő a $WLLSM1$, $WLLSM2$ és $WLLSM3$ futtatásokat, illetve a $WEM1$, $WEM2$ és $WEM3$ futtatások súlyvektorait elemezni, melyek közlését ezúttal mellőzzük. Viszont az $LLSM$ és EM módszerrel kapott súlyvektorokat jól jellemezhetjük maximális és minimális értékeikkel, illetve ezek arányával, ahogy azt az 1. a. és 1. b. táblázatok mutatják. (A súlyvektorok elemeinek összegét minden esetben 1-re normalizáltuk.)

	$LLSM1$	$LLSM2$	$LLSM3$	$WLLSM1$	$WLLSM2$	$WLLSM3$
Max	0,0827	0,0776	0,0682	0,0409	0,0422	0,0373
Min	0,0079	0,0076	0,0130	0,0205	0,0163	0,0234
Arány	10,4605	10,1819	5,2374	1,9894	2,5917	1,5908

1. a. táblázat. A súlyvektorok maximális és minimális értékei ($LLSM$)

	$EM1$	$EM2$	$EM3$	$WEM1$	$WEM2$	$WEM3$
Max	0,0658	0,0737	0,0626	0,0411	0,0436	0,0372
Min	0,0072	0,0083	0,0128	0,0206	0,0165	0,0235
Arány	9,1647	8,8339	4,8706	1,9948	2,6388	1,5843

1. b. táblázat. A súlyvektorok maximális és minimális értékei (EM)

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével és a sajátérték módszerrel számított súlyvektoroknak nem csak a maximális és minimális értékei, valamint ezek arányai hasonlók egymáshoz a megfelelő korrekciós, illetve transzformációs pároknál, hanem lényegében minden elemük, illetve a belőlük kapott rangsorok is. A következőkben ezeket fogjuk elemezni.

[4] Ez a tény nem igazán meglepő, tekintve, hogy a korrigálandó eredmények esetén az egyik játékos egyáltalán nem nyert mérkőzést a másik ellen, vagyis várhatóan kevés mérkőzést játszottak egymás ellen. Ekkor a páros összehasonlítás mátrix megfelelő helyére kerülő elem közel van 1-hez, azaz kevésbé befolyásolja a végső súlyokat, mint a nagyobb kitevővel rendelkező valódi „párharcok”. Természetesen ez alól is vannak kivételek, legfeltűnőbb a Borg-Gerulaitis 16 : 0-ás mérkőzésarány.

5. Négy évtized együtt: a mi tenisz világranglistánk

A súlyvektorok adatai alapján összeállíthatók a különböző mátrixokhoz és becslési módszerekhez tartozó rangsorok. A 2. a. táblázat a legkisebb négyzetek módszerével előállított rangsorok közül az összes adat *a)* korrekciójával és a mérkőzésszámokkal transzformált értékekkel történt futtatásokból származókat mutatja be. A 2. b. táblázatban ugyanezen mátrixokra a sajátérték módszerrel kapott rangsorok vannak.

5.1. Az adatkorrekcióból adódó eltérések

Mielőtt az egyéb rangsor-eltérésekre térnénk rá, zárjuk le az adatkorrekció már előzetesen említett hatásának vizsgálatát, amihez a 3. a és a 3. b. táblázatok rangkorrelációs adatait használjuk fel. A Spearman-féle rangkorrelációs együttható -1 és $+1$ közötti értékeket vesz fel, -1 a rangsorok tökéletes különbözőségét, $+1$ pedig a teljes egyezőséget mutatja. A táblázatban a módszereket jelölő rövidítések mögött az 1, 2 értékek az *a)* korrekciót, a 4, 5 és 6 értékek a *b)* korrekciót jelentik. (A 3 jelű számításoknál nem alkalmaztunk korrekciót, hanem elhagytuk a gondot okozó adatokat).

A megfelelő indexpárokat tartalmazó számításokból nyert rangsorok (1-4; 2-5) rangkorrelációs együtthatói alátámasztják azt, hogy **a korrekció módjának a rangsorokra nincs hatása**. Az $LLSM1$ és $LLSM4$ számításokból kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatója 0,9893, az $LLSM2$ és az $LLSM5$ esetében az együttható értéke 0,9988. Hasonló a helyzet az $EM1-EM4$ és az $EM2-EM5$ párok között (az együttható értéke 0,9774, illetve 0,9969).

Ezeket a mutatókat a transzformált adatokkal történt számításoknál is meghatároztuk. A $WLLSM1$ és $WLLSM4$ közötti rangkorrelációs együttható 0,9997, a $WLLSM2-WLLSM5$ pedig 0,9979. Hasonlóképpen a $WEM1$ és $WEM4$ közötti rangkorreláció értéke 0,9985, míg a $WEM2$ és $WEM5$ rangsorok esetén 0,9969. Ez természetesen a konstrukcióból adódóan várható volt.

A továbbiakban tehát eltekinthetünk a korrekció esetleges befolyásoló szerepétől, **az elemzésekből kihagyhatjuk a 4, 5 és 6 indexű futtatásokat**. A következők alfejezetekben kizárólag az elemszámok különbözőségéből és az adattranszformációból adódó eltéréseket fogjuk vizsgálni.

5.2. Az elhagyott mérkőzésekre visszavezethető eltérések

A 2. a. táblázatban azt látjuk, hogy az 57%-os és a 33%-os kitöltöttségű mátrixokat felhasználó $LLSM1$ és $LLSM2$ rangsor több helyen erősen különbözik. A két rangsorhoz tartozó rangkorrelációs együttható 0,8564. Az $EM1$ és $EM2$ rangsorokhoz tartozó együttható

	$LLSM1$	$LLSM2$	$LLSM3$	$WLLSM1$	$WLLSM2$	$WLLSM3$
Borg, Bjorn	2	4	3	1	3	1
Federer, Roger	3	2	2	2	1	3
Nadal, Rafael	1	1	1	3	2	2
Sampras, Pete	6	8	5	4	4	4
Becker, Boris	5	6	6	5	5	6
Lendl, Ivan	12	10	10	6	9	5
Agassi, Andre	7	7	8	7	8	7
Murray, Andy	4	5	7	8	6	11
Hewitt, Lleyton	11	9	9	9	10	9
Kuerten, Gustavo	18	12	15	10	12	10
Djokovic, Novak	9	3	4	11	7	8
McEnroe, John	22	14	21	12	15	12
Safin, Marat	8	18	16	13	14	17
Kafelnikov, Yevgeny	10	16	13	14	16	15
Wilander, Mats	17	15	12	15	24	23
Edberg, Stefan	14	19	18	16	22	18
Ferrero, Juan Carlos	16	17	11	17	13	14
Courier, Jim	20	20	17	18	18	13
Ivanisevic, Goran	29	23	23	19	21	21
Stich, Michael	15	26	19	20	25	20
Nalbandian, David	26	13	24	21	11	19
Moya, Carlos	21	22	20	22	20	16
Rios, Marcelo	28	28	27	23	26	22
Roddick, Andy	13	11	14	24	17	24
Rafter, Patrick	19	32	22	25	33	25
Haas, Tommy	25	21	31	26	19	27
Muster, Thomas	30	27	30	27	27	26
Chang, Michael	23	25	25	28	23	28
Bruguera, Sergi	24	30	28	29	30	31
Connors, Jimmy	31	24	29	30	28	29
Korda, Petr	27	29	26	31	29	30
Cash, Pat	32	31	32	32	32	32
Forget, Guy	33	33	34	33	31	33
Gerulaitis, Vitas	34	34	33	34	34	34

2. a. táblázat. $LLSM$ rangsorok (a $WLLSM1$ oszlopot használva referenciaként)

	$EM1$	$EM2$	$EM3$	$WEM1$	$WEM2$	$WEM3$
Borg, Bjorn	3	3	3	1	3	1
Federer, Roger	2	1	2	2	1	2
Nadal, Rafael	1	2	1	3	2	3
Sampras, Pete	6	8	4	4	4	4
Becker, Boris	4	5	6	5	5	5
Lendl, Ivan	10	9	11	6	9	6
Agassi, Andre	5	7	5	7	8	7
Murray, Andy	7	6	7	8	6	11
Hewitt, Lleyton	12	10	9	9	10	9
Kuerten, Gustavo	18	12	14	10	12	10
Djokovic, Novak	17	4	8	11	7	8
Kafelnikov, Yevgeny	11	13	12	12	16	14
McEnroe, John	29	15	22	13	15	12
Safin, Marat	8	18	21	14	13	17
Edberg, Stefan	13	14	18	15	19	18
Wilander, Mats	20	16	13	16	25	24
Courier, Jim	19	20	17	17	17	13
Ferrero, Juan Carlos	21	19	16	18	14	15
Ivanisevic, Goran	28	21	23	19	20	21
Stich, Michael	14	27	20	20	24	19
Nalbandian, David	30	17	28	21	11	20
Moya, Carlos	24	23	19	22	22	16
Rios, Marcelo	27	29	27	23	27	22
Muster, Thomas	26	22	24	24	26	26
Roddick, Andy	15	11	15	25	18	23
Rafter, Patrick	9	32	10	26	33	25
Chang, Michael	22	25	25	27	23	28
Haas, Tommy	25	24	31	28	21	29
Bruguera, Sergi	16	30	29	29	30	31
Connors, Jimmy	31	26	30	30	28	27
Korda, Petr	23	28	26	31	29	30
Cash, Pat	33	31	32	32	32	32
Forget, Guy	32	33	34	33	31	33
Gerulaitis, Vitas	34	34	33	34	34	34

2. b. táblázat. EM rangsorok (a $WEM1$ oszlopot használva referenciaként)

	$LLSM2$	$LLSM3$	$LLSM4$	$LLSM5$	$LLSM6$
$LLSM1$	0,8564	0,9487	0,9893	0,8622	0,9856
$LLSM2$		0,9120	0,8970	0,9988	0,8588
$LLSM3$			0,9627	0,9144	0,9389
$LLSM4$				0,9016	0,9887
$LLSM5$					0,8662

3. a. táblázat. Rangkorrelációs együtthatók az *LLSM* számításoknál

	$EM2$	$EM3$	$EM4$	$EM5$	$EM6$
$EM1$	0,7314	0,8836	0,9774	0,7357	0,9786
$EM2$		0,8591	0,8182	0,9969	0,7601
$EM3$			0,9325	0,8659	0,9031
$EM4$				0,8246	0,9737
$EM5$					0,7681

3. b. táblázat. Rangkorrelációs együtthatók az *EM* számításoknál

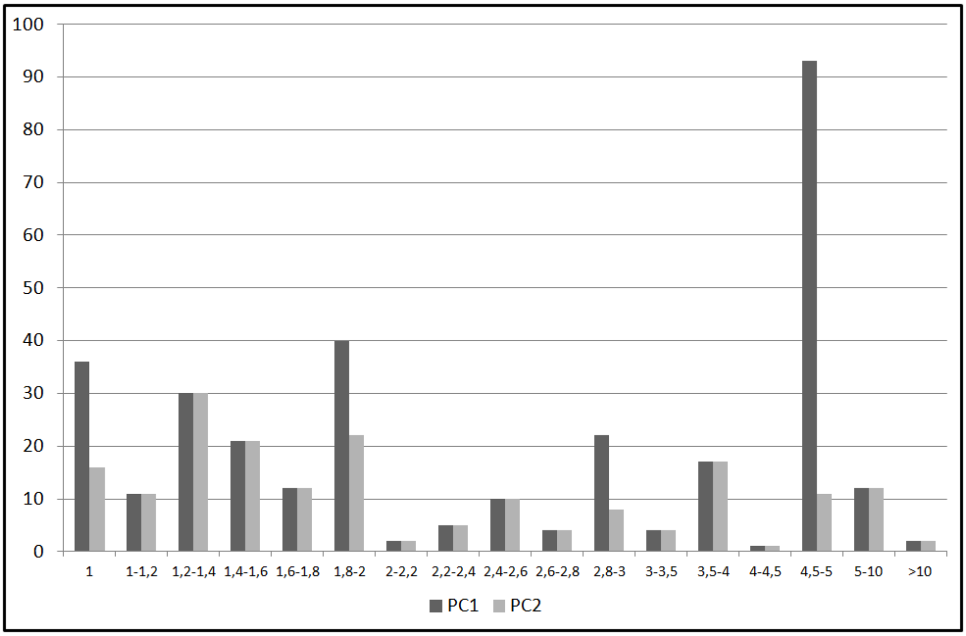
érték még kisebb: 0,7314 (az adatokat a 3. a és a 3. b. táblázatokból vettük). A $PC1$ mátrix 134 olyan mérkőzésben különbözik a $PC2$ mátrixtól, ahol a kevés mérkőzésszámból adódó eredmények az elemek nagyságrendi eloszlását jelentős mértékben befolyásolják. Feltevésünk az, hogy nem a kitöltöttségi arány változása, hanem a kihagyott elemek specialitásai okozzák a különbséget. Ezt kétféleképpen is ellenőrizhetjük:

- megnézzük, milyen az elemek, illetve a fokszámok eloszlása a $PC1$ és a $PC2$ mátrixokban, illetve a hozzájuk tartozó gráfokban;
- az összes adatot tartalmazó adatmátrixból véletlenszerűen elhagyunk annyi adatot, hogy továbbra is minden játékos szerepeljen, a mátrixot reprezentáló gráf összefüggő maradjon és az összes lehetséges összehasonlításhoz viszonyított kitöltési arány csökkenjen.

A 3. ábra az elemek eloszlását mutatja a 322 elemet tartalmazó $PC1$ és a 188 elemet tartalmazó $PC2$ mátrixokra vonatkozóan. Eszerint a $PC1$-ben jelentős az 5-ös érték nagysága, hiszen az $1:0$, $2:0$, stb. eredmények 5 vagy ennél alacsonyabb mérkőzésszámnál 5-ös hányadosnak feleltek meg, és a $PC2$-ben elhagyott, de a $PC1$-ben szereplő 188 mérkőzés között sok ilyen eredmény van. Ezenkívül kevés eltérést látunk. Valószínűleg nem az egyetlen kiugró érték felelős a rangsorbeli változásokért.

A 4. ábra a fokszámok eloszlását mutatja. Itt már jelentős eltéréseket látunk: a $PC1$ mátrixban a kapcsolatot mérő fokszám a magasabb értékek felé ferde eloszlású, a $PC2$ az alacsonyabb fokszám-tartományokban jóval kiegyenlítettebb képet mutat.

A mátrixelemek véletlenszerű kihagyásához a $PC1$ mátrixot használtuk fel. A 322 ismert elemből úgy vettünk 50%-os mintát ($R1$), hogy a mátrix gráfja összefüggő maradjon és



3. ábra. A $PC1$ és $PC2$ mátrixok elemeinek eloszlása

minden sorban legalább az eredeti elemek számának 40%-a szerepeljen (például Hewitt összesen 20 játékos ellen játszott, melyek közül legalább 8 elleni eredményének meg kellett maradnia). Egy másik véletlen mintának ennek komplementerét ($R2$) tekintettük.[5]

Az $R1$ és $R2$ mintákból számított rangsorokat összehasonlítottuk az eredeti $PC1$ mátrixból kapottal. A 4. táblázat az *LLSM* és *WLLSM* eredményeket tartalmazza.

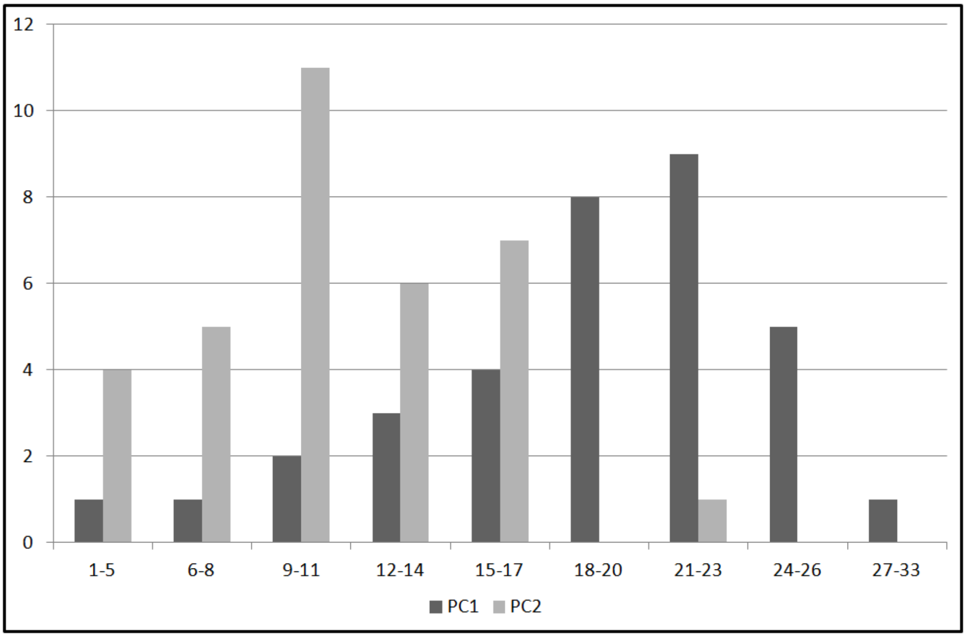
Ezek között jelentős különbségeket találunk, a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével az eredeti adatokból számolt és az $R1$ mátrixból kapott rangsorpárok kivételével. A rangkorrelációs együtthatók (5. táblázat) megerősítik ezt. A különbségek arra utalnak, hogy a bevett-kihagyott eredmények – a súlyvektorok változásán keresztül – néhány esetben jelentős hatást gyakorolnak a rangsorokra.[6] Általában a fele adatot tartalmazó mátrixokkal számolva a rangkorreláció 0,8, sőt 0,7 alatti, bár a nagyobb információtartalmú $R1$ és a $PC1$ rangsorok (egyetlen) magasabb korrelációs együtthatója éppen arról tanúskodik, nem mindegy, hogyan képezzük a mátrixot.

[5] Tehát az $R1$ és $R2$ mátrixok ismert elemeinek uniója éppen az eredeti – szintén nem teljesen kitöltött – páros összehasonlítás mátrixot adja. Ennek fényében arra számíthatunk, hogy az egyik minta alapján jól szereplő játékosok a másikban hátrébb kerülnek, és fordítva. Vegyük észre, hogy $R2$-nél már nem biztosított a 40%-os küszöb teljesülése, vagyis $R1$ „megbízhatóbbnak” tekinthető.

[6] Például Borg már említett rendkívül kedvező – magas értékkel megjelenített – Gerulaitis elleni eredménye nincs benne az $R1$-ben, így visszaesésének ez lehet az egyik oka.

	LLSM			WLLSM		
	*PC*1	*R*1	*R*2	*PC*1	*R*1	*R*2
Agassi, Andre	7	9	5	7	8	5
Becker, Boris	5	5	9	5	5	6
Borg, Bjorn	2	7	2	1	2	1
Bruguera, Sergi	24	26	22	29	26	21
Cash, Pat	32	30	33	32	31	32
Chang, Michael	23	21	27	28	24	25
Connors, Jimmy	31	31	23	30	30	20
Courier, Jim	20	16	20	18	32	14
Djokovic, Novak	9	13	10	11	17	7
Edberg, Stefan	14	11	25	16	22	18
Federer, Roger	3	2	3	2	4	2
Ferrero, Juan Carlos	16	23	7	17	20	13
Forget, Guy	33	34	32	33	33	31
Gerulaitis, Vitas	34	33	34	34	34	34
Haas, Tommy	25	24	31	26	19	28
Hewitt, Lleyton	11	10	16	9	12	11
Ivanisevic, Goran	29	28	24	19	16	22
Kafelnikov, Yevgeny	10	8	17	14	13	19
Korda, Petr	27	19	30	31	29	30
Kuerten, Gustavo	18	14	15	10	10	12
Lendl, Ivan	12	15	12	6	6	9
McEnroe, John	22	25	21	12	11	24
Moya, Carlos	21	22	18	22	25	17
Murray, Andy	4	3	4	8	7	10
Muster, Thomas	30	29	26	27	28	23
Nadal, Rafael	1	1	1	3	1	3
Nalbandian, David	26	32	14	21	27	16
Rafter, Patrick	19	17	19	25	18	29
Rios, Marcelo	28	27	28	23	14	27
Roddick, Andy	13	4	29	24	9	33
Safin, Marat	8	12	6	13	21	8
Sampras, Pete	6	6	8	4	3	4
Stich, Michael	15	18	13	20	15	26
Wilander, Mats	17	20	11	15	23	15

4. táblázat. A véletlen kiválasztással kapott $R1$ és $R2$ mátrixokból származó rangsorok összehasonlítása a $PC1$-ből számítottakkal



4. ábra. A $PC1$ és $PC2$ mátrixokhoz tartozó gráfok fokszámainak eloszlása

	$LLSM\_R1$	$LLSM\_R2$	$WLLSM\_PC1$	$WLLSM\_R1$	$WLLSM\_R2$
$LLSM\_PC1$	0,9392	0,8570	0,8934	0,8176	0,8102
$LLSM\_R1$		0,6761	0,7901	0,7876	0,6611
$LLSM\_R2$			0,8683	0,6785	0,9080
$WLLSM\_PC1$				0,8561	0,8964
$WLLSM\_R1$					0,6309

5. táblázat. Az $PC1$, $R1$ és $R2$ mátrixokból kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatói

Nem tekinthetünk el attól a hatástól sem, ami az alacsony (és a véletlen mintában még tovább csökkenő) – a mátrix gráfjának összefüggőségét jellemző, fokszámokra vonatkozóan az $R1$ és $R2$ mátrixoknál érvényesül.[7]

Tehát több tényező egyszerre befolyásolja a véletlen kiválasztással kapható rangsorokat, és nem nyilvánvaló, hogy ezek közül melyik a domináns. Mivel a fentiek alapján nem tudunk egyértelmű választ adni rá, ezért **egyelőre nyitva hagyjuk a $PC1$ vagy a $PC2$ mátrixokból származó rangsorok közül történő választás kérdését**.

[7] Ez Borgnál eleve a legkisebb, mindössze 5 volt, ami a véletlen mátrixokban 2-re, illetve 3-ra módosult.

5.3. Rangsorok a mérkőzésarány és a játszmaarány alapján

A $PC1-PC2$ és $PC3$ típusú mátrixok korrigált, illetve a mérkőzésszám alapján transzformált adataival történő számítások elemzésekor mind a legkisebb négyzetek, mind a sajátérték módszer esetében (például $LLSM1-LLSM2$ vs. $LLSM3$, $EM1-EM2$ vs. $EM3$) figyelembe kell vennünk azt, hogy a mérkőzésarányokkal operáló két változatnál jelentős különbségeket figyeltünk meg az elhagyott/megmaradt mérkőzések szerint. A kérdés tehát az, hogy a játszmaarányokat felhasználó eredmények a kettő közül valamelyikkel jobban korrelálnak-e, esetleg egy markáns, önálló rangsort képeznek.

Az elemzéshez szükséges adatokat a 3. a. táblázatból vesszük. Az együtthatók értékei alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a $PC1$ és $PC3$ mátrixokból kapott rangsorok lényegesen közelebb vannak egymáshoz, mint a $PC2$ és $PC3$ mátrixokból kapott rangsorok. A páronkénti rangkorrelációs együtthatók az alábbiak szerint alakulnak:

- $LLSM1$ és $LLSM3$: 0,9487;
- $LLSM4$ és $LLSM6$: 0,9887;
- $LLSM2$ és $LLSM3$: 0,9120;
- $LLSM5$ és $LLSM6$: 0,8662.

Az EM mátrixoknál a 3. b. táblázat adatai ugyanezt a tendenciát mutatják.

Ez „ránézésre” is látszik. Például a 2. a. táblázat $LLSM1$ és $LLSM3$ oszlopaiban 6 olyan játékost találunk, akik helyezése a két rangsorban legalább 5-tel különbözik (például Djokovic és Wilander), a legnagyobb eltérés 8 (Safin). Az $LLSM1$ és $LLSM3$ oszlopokat tekintve 7 játékosnál van 5-nél nagyobb helyezésbeli különbség, a legnagyobb értékek 11 (Nalbandian) és 10 (Haas és Rafter).

A 3. a. táblázat nem tartalmazza a $WLLSM$-mel való kapcsolatokat, de elvégeztük a számításokat és hasonló eredményeket kaptunk; például a $WLLSM1$ és a $WLLSM3$ rangsorok rangkorrelációs együtthatója 0,9704, míg a $WLLSM2$ és $WLLSM3$ rangsorok közötti együttható értéke 0,9312.

Az összes mérkőzést tartalmazó mérkőzésarányokból felépített mátrixból ($PC1$) és a játszmaarányokból felépített mátrixból kapott ($PC3$) két rangsor jobban egyezik, mintha a mérkőzésarányokat tartalmazó mátrixból elhagyjuk a kevés mérkőzést tartalmazó párosításokat ($PC2$) és ezt hasonlítjuk össze a játszmaarányokat tartalmazó mátrixszal ($PC3$).

A játszmaarányokat azért vettük be az elemzésbe, hogy kiegyenlítettebb képet adjanak az egymás elleni küzdelmekről, erőviszonyokról. Az ezekkel dolgozó számításunkban minden megnyert játszma egyforma jelentőségű (és az arányt tekinthetjük úgy, mintha egyetlen „monstre” mérkőzést játszott volna egymással a két játékos, például egy már említett esetben Sampras Stichet 14 : 12-re győzte volna le). Így más képet ad a játékerőről, mint a mérkőzésarány alkalmazása, ahol az is tükröződik, hogy a nyertes játékos a mérkőzést végül lezáró játszmában mennyire tudott annak megnyerésére összpontosítani (a Sampras-Stich párosításban a 4 : 5 azt mutatja, hogy Sampras 4-szer, Stich pedig 5-ször tudott mérkőzést eldöntő játszmát nyerni – ezek „számítanak”, a többi 17 játszma csak ezeket „készítette elő”.)

A játszmaarány tehát a fenti okok miatt alkalmas lehet arra, hogy eldöntse a $PC1$ és $PC2$ közötti választás kérdését. Mivel a mérkőzésarányt felhasználó két módszer közül a játszmaarányt használó verziókkal a $PC2$ mátrixok esetében rosszabb az egyezés, ezért **a** $PC1$ **mátrix adataira épülő számításokat választjuk**.

5.4. Az eredeti és transzformált adatokból kapott rangsorok eltérései

Tekintsük az $LLSM$ és $WLLSM$, valamint az EM és WEM futtatásokból kapott rangsorok közötti rangkorrelációs együtthatókat. Itt is csak az *a)* típusú korrekciós mátrixokból származó rangsorokat felhasználva kapjuk a 6. táblázatot.

	$LLSM1$	$LLSM2$	$LLSM3$
$WLLSM1$	0,8934	0,9077	0,9282
$WLLSM2$	0,8448	0,9618	0,8839
$WLLSM3$	0,8552	0,8952	0,9129

	$EM1$	$EM2$	$EM3$
$WEM1$	0,7937	0,9221	0,8927
$WEM2$	0,7109	0,9481	0,8023
$WEM3$	0,7522	0,9001	0,8827

6. táblázat. Az eredeti és a transzformált adatokból származtatott rangsorok rangkorrelációs együtthatói

A $PC1$ és $PC3$ mátrixok eredeti és transzformált adataiból kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatója relatíve alacsony: 0,8934, illetve 0,9129 az $LLSM$, és 0,7937, illetve 0,8827 az EM esetében. Mivel a rangkorreláció alacsony, **az eddigi szempontoktól különböző, új szempont vagy új információ bevonása szükséges ahhoz, hogy eldöntsük, melyik rangsort tekintjük érvényesnek**. Ez az új információ a későbbiekben a tenisszel foglalkozó szakember véleménye lesz.

Az $LLSM2$ és $WLLSM2$ aránylag magas rangkorrelációja (0,9618) technikai jellegű és várakozásainknak megfelel: ha az adatmátrixból éppen azokat az adatokat vesszük ki nagy számban, ahol kevés volt a mérkőzésszám, akkor a mérkőzésszámra épülő transzformáció hatásának mérsékeltnek kell lennie (ugyanez igaz az EM módszerrel kapott rangsorokra is).

5.5. A különböző becslési módszerekkel kapott rangsorok eltérései

Végül azt is meg kell vizsgálnunk, hogy a két becslési módszer (az $LLSM$ és az EM) szerinti eredmények mennyire hasonlóak. A 7. táblázat rangkorrelációs mutatói ezt a célt szolgálják. Ezek alapján kimondható, hogy **a becslési módszer megválasztásának a rangsorokra nincs jelentős hatása**.

$LLSM - EM$			$WLLSM - WEM$		
$PC1$	$PC2$	$PC3$	$PC1$	$PC2$	$PC3$
0,9386	0,9832	0,9569	0,9960	0,9960	0,9972

7. táblázat. Eltérő becslési módszerekkel kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatói

5.6. *Néhány észrevétel a konkrét rangsorok kapcsán*

Minden rangsornál a legizgalmasabb kérdés az, vajon kiket találunk az élen. A 2. a. és a 2. b. táblázatokban – az $LLSM2$ kivételével a maradék 11 esetben – az első három helyen Borg, Nadal és Federer áll. Borg az adatok szerint minden vizsgált játékos ellen nemnegatív, Nadal pedig pozitív mérleggel rendelkezik, tehát az, hogy valamelyikük foglalja el az első helyet, nem meglepő. Egyikük a múlt, másikuk a jelen évszázadot képviseli, így egymással soha nem játszottak. Nadal és Federer között a szakértő hajlamos lenne az egymás elleni mérkőzések alapján „dönteni” és Nadalt előbbre helyezni.

Figyelemre méltó, hogy táblázatunkban az általában az első 9 játékos (a három említetten kívül Agassi, Becker, Hewitt, Lendl, Murray, és Sampras) pozíciója viszonylag stabil, többnyire egy-két helyet mozog. Ebben a névsorban talán Hewitt a meglepetés. Az utolsó 10-12 is szinte változatlan(Chang, Bruguera, Haas, Korda, Rios, Muster, Connors, Cash, Forget és Gerulaitis), bár itt a különböző típusú rangsorokban már nagyobbak a kilengések. Közülük meglepő (ám stabil) Connors helyezése. A középmezőnyben esetleg Wilandert vagy Edberget várnánk előbbre.

A mérkőzésszám transzformációval készült W típusú rangsorok néhány esetben jelentősebb változással járnak. Ezek a rangsorok előkelőbb helyre teszik McEnroe-t, Lendlt vagy Samprast, hátrébb sorolják Wilandert vagy Raftert és főleg Roddickot. Ezek a mozgások szakértői-teniszkedvelői szemmel „megalapozottnak” tűnhetnek.

5.7. *Szakértői vélemény bevonása az elemzésbe*

Eddigi elemzéseinkből az alábbi összefoglaló következtetéseket tudjuk levonni.

Mivel a 0 nevezőjű arányokat kezelő különböző típusú korrekcióknak és a becslési módszernek a rangsorokra nem volt jelentős hatása, ezért elegendő az egyik korrekciós eljárást és becslési módszert kiválasztani. **Tekintsük a minden újabb ötödik nyertes mérkőzésenként módosuló korrekciót** (a leírásban az *a)* változat) **és a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerét.**

Mivel a kevesebb és a több mérkőzés eredményét tartalmazó mátrixok rangsorait vizsgálva azt találtuk, hogy azok több helyen eltérnek egymástól, ezért meg kell találnunk a közülük történő választás alapját. Erre a célra a játszmaarányokból készült rangsorokat használjuk: azt választjuk, ahol a játszmaarányokból és a mérkőzésarányokból számított rangsorok jobban egyeznek (ezzel az erőviszonyok kiegyenlítettségének szempontját megjelenítve), vagyis **az összes adatot tartalmazó futtatásokat. Ezekből pedig nem a játszma-, hanem a mérkőzésarányokat tartalmazó változatot** (itt viszont a mérkőzések megnyerésének lényeges sportszempontját kiemelve).

Végül döntenünk kell abban, hogy az összes adatot tartalmazó mérkőzésarányokból az *a)* korrekcióval elkészített adatmátrixoknál **érvényesítsük-e a mérkőzésszámok különbözőségének hatását kiegyenlítő transzformációt?** Mivel a kétféle módon számított rangsor eltér egymástól, ezért a közöttük történő választást külső információ bevonásával tehetjük meg. Itt figyelembe vesszük azokat a szakértői észrevételeket, amelyeket a fentiekben mutattunk be.

Így végül – ha egyetlen rangsor mellett kell letenni a voksot – mind módszertani, mind szakértői oldalról **az** $LLSM1$ **és a** $WLLSM1$ **közötti választást javasoljuk**. Mivel ezek nem azonosak (rangkorrelációs együtthatójuk is csak 0,9 körüli), mindenkinek lehetősége van szíve szerint választani és így lehet az első Nadal vagy Borg, míg Murray vagy Lendl kerülhet előbbre vagy hátrébb (hogy csak az első 12-ről szóljunk). Saját „szakértői" szempontjaink alapján a $WLLSM1$ **rangsort jelöljük meg „végső rangsornak".**

Ez alapján a Top 10: Borg, Federer, Nadal, Sampras, Becker, Lendl, Agassi, Murray, Hewitt, Kuerten.

6. Érzékenységvizsgálat

A sokféle lehetséges érzékenységvizsgálat közül azt választottuk, hogy miként hat a rangsorra, ha kiveszünk játékosokat. Ez egyben azt az izgalmas kérdést is magában rejti, vajon történnek-e rangsorváltások és milyen mértékben?

Kézenfekvőnek tűnt az a szűkítés, hogy a 34 játékosból csak azokat tartsuk meg, akik ebben az időszakban ATP világranglista-vezetők voltak. Ennek a kritériumnak nem felel meg Bruguera, Cash, Chang, Forget, Gerulaitis, Haas, Ivanisevic, Korda, Murray, Nalbandian és Stich – összesen 11 játékos.

A 23 ranglistavezető egymás elleni eredményei alapján kiszámoltuk a $PC1$ mátrix *a)* és *b)* korrekciós adataival és transzformált adataival, valamint a $PC3$ mátrix eredeti és transzformált adataival a logaritmikus legkisebb négyzetek módszeréhez tartozó rangsorokat. A 8. táblázatban ezek mellett feltüntettük ugyanezen játékosoknak a 34-es rangsorból származtatott, de 23-ra „szűkített” sorrendjeit is. A 9. táblázat az *LLSM* vs. *WLLSM* rangkorrelációkat tartalmazza.

	$LLSM1$		$LLSM3$		$WLLSM1$		$WLLSM3$	
	23	34 / 23	23	34 / 23	23	34 / 23	23	34 / 23
Federer, Roger	2	3	2	2	1	2	2	3
Nadal, Rafael	1	1	1	1	2	3	1	2
Sampras, Pete	3	5	3	5	3	4	3	4
Borg, Bjorn	4	2	7	3	4	1	4	1
Lendl, Ivan	9	11	10	9	5	6	5	5
Becker, Boris	5	4	6	6	6	5	6	6
Agassi, Andre	8	6	9	7	7	7	7	7
Hewitt, Lleyton	7	10	4	8	8	8	8	9
Kuerten, Gustavo	15	16	16	14	9	9	10	10
Djokovic, Novak	10	8	5	4	10	10	9	8
Safin, Marat	11	7	15	15	11	12	13	16
Ferrero, Juan Carlos	14	14	13	10	12	16	12	13
McEnroe, John	18	20	19	19	13	11	11	11
Rafter, Patrick	13	17	12	20	14	21	14	21
Rios, Marcelo	21	21	21	21	15	19	15	18
Wilander, Mats	17	15	11	11	16	14	19	19
Kafelnikov, Yevgeny	16	9	17	12	17	13	20	14
Roddick, Andy	6	12	8	13	18	20	17	20
Edberg, Stefan	12	13	14	17	19	15	18	17
Moya, Carlos	20	19	18	18	20	18	16	15
Courier, Jim	19	18	20	16	21	17	21	12
Muster, Thomas	22	22	23	23	22	22	22	22
Connors, Jimmy	23	23	22	22	23	23	23	23

8. táblázat. A 23 ATP világranglista-vezető rangsorai (23: csak a 23 játékos egymás elleni mérkőzései; 34 / 23: a teljes 34-es rangsor 23-ra szűkítése; a $WLLSM1(23)$ rangsort használva referenciaként)

A 2. a. és 2. b., illetve a 3. a. és a 3. b. táblázatok megfelelő elemeivel összhangban lévő eredményeket kaptunk. A rangsorok tehát a technikai jellemzőkre vonatkozóan (korrekció, transzformáció, becslési módszer) önmagukban koherens módon azonos következtetésekre vezettek a játékosok egy részhalmazára vonatkozóan, maguk a rangsorok viszont nem egyeznek meg. Már első ránézésre is jelentős eltérések látszanak. Ha újra a $WLLSM1$ rangsort tekintjük a 8. táblázatban, akkor most a Top 10: Federer, Nadal, Sampras, Borg, Lendl, Becker, Agassi, Hewitt, Kuerten, Djokovic.

	$LLSM3$	W$LLSM1$	W$LLSM3$
$LLSM1$	0,9417	0,8409	0,8340
$LLSM3$		0,8123	0,8063
W$LLSM1$			0,9763

9. táblázat. A 23 játékosra vonatkozó *LLSM* és *WLLSM* rangsorok rangkorrelációs együtthatói

Az első 10 játékos változatlan, de többségük helyezése módosult, a legjelentősebb változás Borg esetén következett be. Általánosságban elmondható, hogy például Borg, Agassi, Djokovic és Kafelnikov rosszabb, míg Federer, Nadal, Sampras, Hewitt, Rafter és Roddick jobb helyezést ért el az „elitkörrel” szembeni eredmények alapján. A két rangsor közötti kapcsolat mégis erősnek mondható, első benyomásunkat megerősítik a 10. táblázat rangkorrelációs együtthatói is.

$LLSM1(23-34/23)$	$LLSM3(23-34/23)$	$WLLSM1(23-34/23)$	$WLLSM3(23-34/23)$
0,9209	0,9042	0,9209	0,8962

10. táblázat. A 23 és a 34 / 23 rangsorok rangkorrelációs együtthatói (23: csak a 23 játékos egymás elleni mérkőzései; 34 / 23: a teljes 34-es rangsor 23-ra szűkítése)

Mi lehet az oka a jelentős rangsorváltozásnak? Mivel a teljesen kitöltött inkonzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetében nem érvényesül az Arrow-féle irreleváns alternatíváktól való függetlenség elve, ezt itt sem várhatjuk el, hiszen adatmátrixainkban voltak intranzitív triádok. A 10. táblázatban rögzítettük ezek számát a 34, illetve a 23 játékost tartalmazó *PC* mátrixokra. Kéri (2011) részletesen foglalkozik az ilyen triádok jellemzőivel, azonosítva mind a 7 lehetséges esetet, melyek közül 3 nem tranzitív. A mi nem teljesen kitöltött mátrixainkban a triádok száma az összes lehetséges triádhoz képest viszonylag alacsony, 7,47 és 26,93% között mozgott. Érdemes megfigyelni, hogy ez a hányad gyakorlatilag azonos volt a 23 és a 34 játékost szerepeltető változatokban, a minimális értékek a $PC2$ mátrixhoz, a maximálisak a $PC1$ és $PC3$ mátrixokhoz tartoztak.

Az intranzitív triádok aránya – amit egyfajta inkonzisztencia mérőszámként foghatunk fel –, a $PC1$ mátrixnál a legnagyobb: 27,4%, ám a $PC2$ és $PC3$ esetében sem sokkal kisebb, 20% körül van. Ugyanezek az értékek az $R1$ és $R2$ mátrixokban 23,8%, illetve 27,2%.[8]

[8] Megjegyzendő, hogy a triádok vizsgálata azért elterjedt, mert egy teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó irányított gráfban bármilyen hosszúságú kör létezése automatikusan magával vonja legalább egy intranzitív triád létezését Kindler és Papp (1977) – gondoljunk arra, hogy egy 4 hosszúságú körben miként húzható be az „átló”. Ez azonban nem teljesen kitöltött esetben nem igaz, hiszen ott lehetnek

	*PC*1	*PC*2	*PC*3	*PC*1	*PC*2	*PC*3
Mátrix mérete	34	34	34	23	23	23
Maximális triádszám	5984	5984	5984	1771	1771	1771
Összes triád	1600	457	1133	477	131	399
Arány	26,7%	7,6%	18,9%	26,9%	7,4%	22,5%
Tranzitív triád	1177	365	908	352	104	313
Intranzitív triád	423	92	225	125	27	86
Tranzitívak aránya	73,6%	79,9%	80,1%	73,8%	79,4%	78,4%

11. táblázat. Triádok jellemzői a 34 és 23 játékost tartalmazó változatokban

A sportnyelven körbeverésnek hívott jelenség egyébként jól ismert a teniszkedvelők előtt is, ezért a valós helyzetekben nem lepi meg őket egy-egy váratlan, az eddigi erősorrendet nem tükröző eredmény. Ha a 34 játékost 23-ra csökkentjük, akkor a kimaradók és a bentmaradtak közötti körbeverések minden bizonnyal befolyásolják a végső rangsort. Általában is igaz, hogy a nem konzisztens mátrixok rangsorainak részmátrixaiból képzett rangsorok eltérhetnek egymástól. Ennek a jelenségnek az egzakt vizsgálata azonban további kutatásokat igényel.

7. A kutatás folytatása

Kutatásunk több kérdést vet fel, mint amennyit megválaszol. Az első eredmények arra ösztönöznek bennünket, hogy több irányban is folytassuk vizsgálatainkat, ezáltal mélyebben megismerve a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok természetét, illetve összevetve jellemzőiket a teljesen kitöltött esettel.

Különösen érdekes lehet az adatmátrixok kitöltöttségének és az ismert elemek struktúrájának elemzése. Az elemek konkrét értéke, illetve eloszlása és a fokszám változása közül vajon melyek hatnak az eredményre? A vizsgálathoz az ebben a tanulmányban elemzett példához hasonló – esetleg elemeiben egyszerűbben kezelhető – sporteredményekre (vagy egyéb területről vett hiányos páros összehasonlításokra) támaszkodhatunk, de véletlen módon generált mátrixok segítségével is megpróbálhatunk sejtéseket, esetleg állításokat megfogalmazni.

A nem teljesen kitöltött mátrixok inkonzisztenciájának elemzése szintén új kutatási irányt jelenthet.

hiányzó elemek is. Ennek ellenére az intranzitív triádokat tekinthetjük úgy, mint amelyek „leginkább” sértik a konzisztenciát, lévén ez a legegyszerűbb módja a körkörös preferenciarendezésnek, a körbeveréseknek.

Köszönetnyilvánítás:
A kutatás az OTKA K-77420 pályázat támogatásával készült.

Hivatkozások

Bozóki S. (2006). *Súlyozás páros összehasonlítással és értékelés hasznossági függvényekkel a többszempontú döntési feladatokban*. PhD értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem.

Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1):318–333.

Brunelli, M., Fedrizzi, M. (2011). Characterizing properties for inconsistency indices in the AHP. In *Proceedings of the 11th International Symposium on the Analytic Hierarchy Process (ISAHP)*. Sorrento (Naples), Italy.

Crawford, G., Williams, C. (1980). Analysis of subjective judgment matrices. Rand Corporation Technical report, Office of the Secretary of Defense, USA. R-2572-AF.

Crawford, G., Williams, C. (1985). A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405.

De Graan, J. (1980). Extensions of the multiple criteria analysis method of TL Saaty. In *EURO IV Conference*, Cambridge, UK.

FEDEX ATP Head 2 Head. Downloadable at:
http://www.atpworldtour.com/Players/Player-Landing.aspx.

Kéri, G. (2011). On qualitatively consistent, transitive and contradictory judgment matrices emerging from multiattribute decision procedures. *Central European Journal of Operations Research*, 19(2):215–224.

Kindler J., Papp., O. (1977). *Komplex rendszerek vizsgálata – Összemérési módszerek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Saaty, T. (1980). *Analytic hierarchy process*. McGraw-Hill, New York.

Függelék

Játékos	Teljes pályafutás alatt			Adatbázisban			Elemzett arány		
	+	−	∑	+	−	∑	+	−	∑
Agassi, Andre	870	274	1144	147	102	249	16,90%	37,23%	21,77%
Becker, Boris	713	214	927	133	78	211	18,65%	36,45%	22,76%
Borg, Bjorn	608	127	735	45	17	62	7,40%	13,39%	8,44%
Bruguera, Sergi	447	271	718	43	62	105	9,62%	22,88%	14,62%
Cash, Pat	242	149	391	19	33	52	7,85%	22,15%	13,30%
Chang, Michael	662	312	974	81	98	179	12,24%	31,41%	18,38%
Connors, Jimmy	1242	277	1519	68	90	158	5,48%	32,49%	10,40%
Courier, Jim	506	237	743	69	77	146	13,64%	32,49%	19,65%
Djokovic, Novak	394	111	505	45	48	93	11,42%	43,24%	18,42%
Edberg, Stefan	806	270	1076	123	123	246	15,26%	45,56%	22,86%
Federer, Roger	807	186	993	127	71	198	15,74%	38,17%	19,94%
Ferrero, Juan Carlos	474	250	724	42	56	98	8,86%	22,40%	13,54%
Forget, Guy	380	291	671	33	70	103	8,68%	24,05%	15,35%
Gerulaitis, Vitas	510	221	731	12	52	64	2,35%	23,53%	8,76%
Haas, Tommy	469	267	736	45	67	112	9,59%	25,09%	15,22%
Hewitt, Lleyton	551	204	755	74	70	144	13,43%	34,31%	19,07%
Ivanisevic, Goran	599	333	932	79	98	177	13,19%	29,43%	18,99%
Kafelnikov, Yevgeny	609	306	915	79	68	147	12,97%	22,22%	16,07%
Korda, Petr	410	248	658	50	70	120	12,20%	28,23%	18,24%
Kuerten, Gustavo	358	195	553	48	35	83	13,41%	17,95%	15,01%
Lendl, Ivan	1071	239	1310	124	88	212	11,58%	36,82%	16,18%
McEnroe, John	875	198	1073	82	80	162	9,37%	40,40%	15,10%
Moya, Carlos	575	319	894	58	76	134	10,09%	23,82%	14,99%
Murray, Andy	323	107	430	37	32	69	11,46%	29,91%	16,05%
Muster, Thomas	622	274	896	52	68	120	8,36%	24,82%	13,39%
Nadal, Rafael	541	116	657	83	40	123	15,34%	34,48%	18,72%
Nalbandian, David	356	170	526	30	47	77	8,43%	27,65%	14,64%
Rafter, Patrick	358	191	549	40	55	95	11,17%	28,80%	17,30%
Rios, Marcelo	391	192	583	34	49	83	8,70%	25,52%	14,24%
Roddick, Andy	589	197	786	50	61	111	8,49%	30,96%	14,12%
Safin, Marat	422	267	689	51	55	106	12,09%	20,60%	15,38%
Sampras, Pete	762	222	984	147	77	224	19,29%	34,68%	22,76%
Stich, Michael	385	176	561	61	59	120	15,84%	33,52%	21,39%
Wilander, Mats	571	222	793	51	51	102	8,93%	22,97%	12,86%

12. táblázat. Az elemzett mérkőzések jelentősége a játékosok pályafutása során
(+ Győzelem; − Vereség; ∑ Összesen)

	LLSM1	LLSM2	LLSM3	EM1	EM2	EM3
Agassi, Andre	0,0420	0,0390	0,0383	0,0449	0,0446	0,0402
Becker, Boris	0,0451	0,0496	0,0406	0,0464	0,0532	0,0397
Borg, Bjorn	0,0646	0,0611	0,0460	0,0530	0,0606	0,0425
Bruguera, Sergi	0,0195	0,0140	0,0197	0,0272	0,0146	0,0201
Cash, Pat	0,0114	0,0135	0,0155	0,0110	0,0130	0,0150
Chang, Michael	0,0204	0,0170	0,0209	0,0239	0,0179	0,0230
Connors, Jimmy	0,0146	0,0184	0,0195	0,0151	0,0178	0,0184
Courier, Jim	0,0241	0,0212	0,0285	0,0262	0,0219	0,0292
Djokovic, Novak	0,0349	0,0663	0,0412	0,0272	0,0577	0,0369
Edberg, Stefan	0,0295	0,0229	0,0275	0,0325	0,0264	0,0283
Federer, Roger	0,0543	0,0746	0,0509	0,0546	0,0737	0,0496
Ferrero, Juan Carlos	0,0261	0,0244	0,0311	0,0247	0,0226	0,0293
Forget, Guy	0,0090	0,0101	0,0130	0,0110	0,0104	0,0128
Gerulaitis, Vitas	0,0079	0,0076	0,0138	0,0072	0,0083	0,0132
Haas, Tommy	0,0189	0,0190	0,0174	0,0220	0,0182	0,0172
Hewitt, Lleyton	0,0326	0,0346	0,0360	0,0331	0,0356	0,0361
Ivanisevic, Goran	0,0172	0,0188	0,0240	0,0187	0,0196	0,0239
Kafelnikov, Yevgeny	0,0332	0,0244	0,0300	0,0338	0,0285	0,0310
Korda, Petr	0,0180	0,0140	0,0209	0,0236	0,0174	0,0219
Kuerten, Gustavo	0,0260	0,0295	0,0293	0,0267	0,0289	0,0305
Lendl, Ivan	0,0325	0,0333	0,0333	0,0340	0,0362	0,0331
McEnroe, John	0,0206	0,0266	0,0256	0,0186	0,0262	0,0242
Moya, Carlos	0,0212	0,0188	0,0261	0,0228	0,0188	0,0280
Murray, Andy	0,0502	0,0573	0,0399	0,0397	0,0510	0,0370
Muster, Thomas	0,0165	0,0165	0,0192	0,0207	0,0190	0,0236
Nadal, Rafael	0,0827	0,0776	0,0682	0,0658	0,0699	0,0626
Nalbandian, David	0,0185	0,0269	0,0214	0,0169	0,0245	0,0208
Rafter, Patrick	0,0259	0,0125	0,0251	0,0355	0,0122	0,0342
Rios, Marcelo	0,0178	0,0162	0,0204	0,0205	0,0151	0,0215
Roddick, Andy	0,0323	0,0327	0,0295	0,0291	0,0319	0,0301
Safin, Marat	0,0349	0,0243	0,0286	0,0372	0,0230	0,0268
Sampras, Pete	0,0429	0,0353	0,0406	0,0406	0,0386	0,0411
Stich, Michael	0,0287	0,0169	0,0270	0,0306	0,0175	0,0274
Wilander, Mats	0,0260	0,0252	0,0309	0,0254	0,0253	0,0307

13. táblázat. Az *LLSM* és *EM* módszerrel előállított súlyvektorok

	Gerulaitis	Connors	Borg	McEnroe	Lendl	Wilander	Cash	Forget	Edberg	Becker	Muster	Agassi	Korda	Bruguera	Chang	Courier	Ivanisevic
Gerulaitis		4 (20)	0 (16)	3 (14)	3 (6)	1 (4)	1 (2)			0 (2)							
Connors	16 (20)		8 (23)	14 (34)	13 (34)	0 (5)	4 (6)	4 (5)	6 (12)	0 (6)		0 (2)	1 (1)	1 (2)	0 (1)	0 (3)	
Borg	16 (16)	15 (23)		7 (14)	6 (8)	1 (1)											
McEnroe	11 (14)	20 (34)	7 (14)		15 (36)	7 (13)	3 (4)	2 (4)	7 (13)	2 (10)		2 (4)	0 (1)		4 (5)	1 (3)	2 (6)
Lendl	3 (6)	21 (34)	2 (8)	21 (36)		15 (22)	5 (8)	4 (5)	13 (27)	11 (21)	4 (5)	6 (8)	1 (5)	1 (2)	5 (7)	4 (4)	5 (6)
Wilander	3 (4)	5 (5)	0 (1)	6 (13)	7 (22)		4 (9)	5 (6)	11 (20)	3 (10)	2 (2)	2 (7)					1 (1)
Cash	1 (2)	2 (6)		1 (4)	3 (8)	5 (9)		1 (1)	2 (10)	1 (4)	2 (3)	0 (1)	0 (1)	0 (1)	1 (2)		
Forget		1 (5)		2 (4)	1 (5)	1 (6)	0 (1)		6 (13)	3 (13)	5 (8)	0 (3)	2 (2)	0 (1)	0 (3)	1 (8)	3 (10)
Edberg		6 (12)		6 (13)	14 (27)	9 (20)	8 (10)	7 (13)		10 (35)	10 (10)	3 (9)	4 (9)	6 (9)	12 (21)	4 (10)	9 (19)
Becker	2 (2)	6 (6)		8 (10)	10 (21)	7 (10)	3 (4)	10 (13)	25 (35)		2 (3)	4 (14)	6 (6)	2 (4)	5 (6)	6 (7)	10 (19)
Muster					1 (5)	0 (2)	1 (3)	3 (8)	0 (10)	1 (3)		4 (9)	3 (5)	12 (15)	6 (9)	5 (12)	3 (6)
Agassi		2 (2)		2 (4)	2 (8)	5 (7)	1 (1)	3 (3)	6 (9)	10 (14)	5 (9)		7 (8)	7 (9)	15 (22)	5 (12)	4 (7)
Korda		0 (1)		1 (1)	4 (5)		1 (1)	0 (2)	5 (9)	0 (6)	2 (5)	1 (8)		3 (9)	3 (9)	1 (4)	4 (11)
Bruguera		1 (2)			1 (2)		1 (1)	1 (1)	3 (9)	2 (4)	3 (15)	2 (9)	6 (9)		3 (8)	2 (7)	4 (9)
Chang		1 (1)		1 (5)	2 (7)		1 (2)	3 (3)	9 (21)	1 (6)	3 (9)	7 (22)	6 (9)	5 (8)		12 (24)	6 (11)
Courier		3 (3)		2 (3)	0 (4)			7 (8)	6 (10)	1 (7)	7 (12)	7 (12)	3 (4)	5 (7)	12 (24)		8 (11)
Ivanisevic				4 (6)	1 (6)	0 (1)		7 (10)	10 (19)	9 (19)	3 (6)	3 (7)	7 (11)	5 (9)	5 (11)	3 (11)	
Sampras		2 (2)		3 (3)	5 (8)	2 (3)		5 (9)	8 (14)	12 (19)	9 (11)	20 (34)	12 (17)	2 (5)	12 (20)	16 (20)	12 (18)
Stich		3 (4)		1 (2)	1 (7)	1 (1)		3 (6)	10 (16)	4 (12)	3 (5)	0 (6)	4 (12)	4 (6)	3 (6)	7 (12)	5 (7)
Rafter					1 (1)	1 (3)		1 (1)	0 (3)	1 (3)	3 (3)	5 (15)	2 (5)	2 (8)	4 (11)	3 (3)	2 (4)
Kafelnikov						1 (2)	1 (1)	4 (5)	2 (3)	2 (6)	1 (5)	4 (12)	7 (9)	4 (6)	4 (4)	5 (6)	5 (15)
Rios								2 (2)	0 (1)	2 (5)	1 (4)	2 (3)	4 (8)	2 (3)	1 (7)	3 (3)	1 (1)
Kuerten											3 (3)	4 (11)	0 (1)	3 (3)	3 (5)	0 (1)	6 (8)
Moya									0 (1)	2 (4)	4 (8)	1 (4)	1 (2)	2 (2)	5 (5)	1 (3)	3 (4)
Haas								1 (1)			0 (2)	4 (10)	0 (2)	1 (1)	0 (2)	2 (2)	
Safin										1 (1)	1 (1)	3 (6)	1 (1)		2 (3)	1 (2)	1 (2)
Federer												8 (11)		0 (1)	4 (5)		2 (2)
Ferrero												3 (5)		2 (2)	0 (1)		1 (1)
Hewitt										0 (1)		4 (8)		0 (1)	2 (2)		3 (3)
Nalbandian												0 (1)				0 (1)	
Roddick												1 (6)			2 (2)		0 (1)
Nadal												2 (2)					2 (2)
Djokovic																	
Murray																	

14. a. táblázat. Egymás elleni eredmények; sorokban a győzelmek száma (összes egymás elleni mérkőzés száma) I.

	Sampras	Stich	Rafter	Kafelnikov	Rios	Kuerten	Moya	Haas	Safin	Federer	Ferrero	Hewitt	Nalbandian	Roddick	Nadal	Djokovic	Murray
Gerulaitis																	
Connors	0 (2)	1 (4)															
Borg																	
McEnroe	0 (3)	1 (2)															
Lendl	3 (8)	6 (7)	0 (1)														
Wilander	1 (3)	0 (1)	2 (3)	1 (2)													
Cash				0 (1)													
Forget	4 (9)	3 (6)	0 (1)	1 (5)	0 (2)			0 (1)									
Edberg	6 (14)	6 (16)	3 (3)	1 (3)	1 (1)		1 (1)										
Becker	7 (19)	8 (12)	2 (3)	4 (6)	3 (5)		2 (4)		0 (1)			1 (1)					
Muster	2 (11)	2 (5)	0 (3)	4 (5)	3 (4)	0 (3)	4 (8)	2 (2)	0 (1)								
Agassi	14 (34)	6 (6)	10 (15)	8 (12)	1 (3)	7 (11)	3 (4)	6 (10)	3 (6)	3 (11)	2 (5)	4 (8)	1 (1)	5 (6)	0 (2)		
Korda	5 (17)	8 (12)	3 (5)	2 (9)	4 (8)	1 (1)	1 (2)	2 (2)	0 (1)								
Bruguera	3 (5)	2 (6)	6 (8)	2 (6)	1 (3)	0 (3)	0 (2)	0 (1)		1 (1)	0 (2)	1 (1)					
Chang	8 (20)	3 (6)	7 (11)	0 (4)	6 (7)	2 (5)	0 (5)	2 (2)	1 (3)	1 (5)	1 (1)	0 (2)		0 (2)			
Courier	4 (20)	5 (12)	0 (3)	1 (6)	0 (3)	1 (1)	2 (3)	0 (2)	1 (2)				1 (1)				
Ivanisevic	6 (18)	2 (7)	2 (4)	10 (15)	0 (1)	2 (8)	1 (4)		1 (2)	0 (2)	0 (1)	0 (3)		1 (1)	0 (2)		
Sampras		4 (9)	12 (16)	11 (13)	2 (2)	2 (3)	3 (4)	5 (8)	3 (7)	0 (1)		4 (9)		1 (3)			
Stich	5 (9)		2 (2)	3 (11)	1 (1)			1 (1)									
Rafter	4 (16)	0 (2)		2 (5)	2 (3)	4 (8)	1 (4)	1 (1)	1 (1)	3 (3)	1 (3)	1 (4)					
Kafelnikov	2 (13)	8 (11)	3 (5)		6 (8)	5 (12)	3 (6)	5 (7)	2 (4)	4 (6)	2 (3)	1 (8)	2 (2)				
Rios	0 (2)	0 (1)	1 (3)	2 (8)		2 (4)	5 (7)	4 (7)	1 (4)	0 (2)	1 (4)	2 (5)		0 (2)			
Kuerten	1 (3)		4 (8)	7 (12)	2 (4)		4 (7)	5 (6)	4 (7)	2 (3)	2 (5)	1 (4)	0 (1)	1 (2)			
Moya	1 (4)		3 (4)	3 (6)	2 (7)	3 (7)		5 (11)	4 (7)	0 (7)	6 (14)	5 (12)	3 (7)	1 (5)	2 (8)	2 (4)	0 (2)
Haas	3 (8)	0 (1)	0 (1)	2 (7)	3 (7)	1 (6)	6 (11)		5 (7)	2 (12)	2 (5)	4 (10)	3 (3)	7 (13)	0 (4)	2 (4)	1 (3)
Safin	4 (7)		0 (1)	2 (4)	3 (4)	3 (7)	3 (7)	2 (7)		2 (12)	6 (12)	7 (14)	6 (9)	3 (7)	0 (2)	2 (2)	1 (1)
Federer	1 (1)		0 (3)	2 (6)	2 (2)	1 (3)	7 (7)	10 (12)	10 (12)		9 (12)	18 (26)	11 (19)	21 (23)	9 (26)	14 (24)	6 (14)
Ferrero			2 (3)	1 (3)	3 (4)	3 (5)	8 (14)	3 (5)	6 (12)	3 (12)		4 (10)	3 (7)	0 (5)	2 (9)	1 (2)	0 (3)
Hewitt	5 (9)		3 (4)	7 (8)	3 (5)	3 (4)	7 (12)	6 (10)	7 (14)	8 (26)	6 (10)		3 (6)	6 (13)	4 (10)	1 (5)	0 (1)
Nalbandian				0 (2)		1 (1)	4 (7)	0 (3)	3 (9)	8 (19)	4 (7)	3 (6)		2 (6)	2 (5)	1 (5)	2 (6)
Roddick	2 (3)				2 (2)	1 (2)	4 (5)	6 (13)	4 (7)	2 (23)	5 (5)	7 (13)	4 (6)		3 (10)	5 (8)	3 (11)
Nadal							6 (8)	4 (4)	2 (2)	17 (26)	7 (9)	6 (10)	3 (5)	7 (10)		16 (29)	13 (18)
Djokovic							2 (4)	2 (4)	0 (2)	10 (24)	1 (2)	4 (5)	4 (5)	3 (8)	13 (29)		6 (10)
Murray							2 (2)	2 (3)	0 (1)	8 (14)	3 (3)	1 (1)	4 (6)	8 (11)	5 (18)	4 (10)	

14. b. táblázat. Egymás elleni eredmények; sorokban a győzelmek száma (összes egymás elleni mérkőzés száma) II.

FORGÓ FERENC a Budapesti Corvinus Egyetem tudóstanára, az egyetem Operációkutatás tanszékének volt vezetője, a magyar operációkutatás jelentős alakja 70 éves. Kollégái, tanítványai ebből az alkalomból köszöntik őt ezzel a tanulmánykötettel, amelynek címe nem csak a Forgó Ferenc által művelt tudományterületeket idézi, hanem egyéniségének fontos vonásait is hordozza. A 28 szerző által jegyzett tanulmányok a játékelmélet, a makroökonómiai modellezés, a matematikai programozás alkalmazásai és a döntéselmélet területeit érintik, ezek mindegyikében valamilyen módon kapcsolatot találva Forgó Ferenc munkásságával.

A1209

9 789633 390184