

# FÉLCSOPORTOK

NAGY ATTILA

2013.06.28

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezető</b>	<b>4</b>
<b>1. A félcsoport és csoport fogalma</b>	<b>6</b>
1.1. A művelet fogalma . . . . .	6
1.2. A félcsoport fogalma . . . . .	8
1.3. Általános asszociativitás és kommutativitás . . . . .	11
1.4. Félcsoport kitüntetett elemei . . . . .	13
1.5. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók . . . . .	15
1.6. Félcsoport részfélcsoportjai . . . . .	16
1.7. Félcsoport részcsoportjai . . . . .	21
<b>2. Félcsoport kongruenciái</b>	<b>24</b>
2.1. Binér relációk félcsoportja . . . . .	24
2.2. Ekvivalenciarelációk . . . . .	27
2.3. Félcsoport kongruenciarelációi, faktorfélcsoport . . . . .	28
2.4. Csoport-, illetve nullelemes csoport-kongruenciák . . . . .	32
<b>3. Félcsoport homomorfizmusai</b>	<b>39</b>
3.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek . . . . .	40
3.2. Szabad félcsoportok . . . . .	42
<b>4. Félcsoport ideáljai, a Green-relációk</b>	<b>45</b>
4.1. Minimális, 0-minimális ideálok . . . . .	46
4.2. 0-minimális bal oldali ideálok . . . . .	48
4.3. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoport . . . . .	51
4.4. Félcsoport főfaktorai . . . . .	53
4.5. A Green-féle $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{H}$ -, $\mathcal{D}$ -relációk . . . . .	56
<b>5. Félcsoportok ideálbővítése</b>	<b>65</b>
5.1. Ideálbővítés, parciális transzformációk . . . . .	65
5.2. Félcsoportok translációs burka . . . . .	68

5.3. Gyengén redukzív félcsoporthok . . . . .	71
<b>6. Reguláris félcsoporthok, inverz félcsoporthok</b>	<b>78</b>
6.1. Reguláris elem . . . . .	78
6.2. Neumann-féle inverz . . . . .	80
6.3. Reguláris félcsoporthok . . . . .	83
6.4. Inverz félcsoporthok . . . . .	86
<b>7. Jobb egyszerű és jobb 0-egyszerű félcsoporthok</b>	<b>92</b>
7.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok . . . . .	95
7.2. Idempotens elemet nem tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok . . . . .	99
7.3. Baer-Levi félcsoporthok . . . . .	102
<b>8. Egyszerű és 0-egyszerű félcsoporthok</b>	<b>106</b>
8.1. Egyszerű félcsoporthok . . . . .	106
8.2. Croisot-Teissier félcsoporthok . . . . .	106
8.3. 0-egyszerű félcsoporthok . . . . .	110
<b>9. Teljesen egyszerű és teljesen 0-egyszerű félcsoporthok</b>	<b>114</b>
9.1. A teljesen 0-egyszerű félcsoporthok jellemzései . . . . .	114
9.2. Rees-féle mátrixfélcsoporthok, a Rees-tétel . . . . .	124
9.3. Teljesen egyszerű félcsoporthok . . . . .	132
9.4. Brandt-félcsoporthok . . . . .	134
<b>10. Félcsoporthok félháló-felbontása</b>	<b>141</b>
10.1. Félcsoporthok legszűkebb félháló-kongruenciája . . . . .	141
10.2. Arkhimédeszi félcsoporthok félhálaja . . . . .	145
10.3. Félcsoporthok erős félhálaja . . . . .	157
10.4. Kötegek . . . . .	160
<b>11. Félcsoporthok szubdirekt szorzata</b>	<b>166</b>
11.1. Szubdirekt irreducibilis félcsoporthok . . . . .	169
11.2. Szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporthok . . . . .	174
<b>12. Permutálható félcsoporthok</b>	<b>182</b>
12.1. Permutálható félcsoporthok ideáljai . . . . .	183
12.2. Permutálható félcsoporthok epimorf képei . . . . .	185
12.3. Kommutatív permutálható félcsoporthok . . . . .	187
<b>13. Félcsoporthok beágyazása csoportokba</b>	<b>189</b>
13.1. Kommutatív félcsoporth beágyazása csoportba . . . . .	189
13.2. Egy elégséges feltétel . . . . .	192

13.3. Egyszerűsítéses félcsoporthányadoscsoporthja . . . . .	194
<b>14. Félcsoporthok beágyazása csoportok uniójába</b>	<b>198</b>
14.1. Kommutatív félcsoporthok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája .	199
14.2. Kommutatív gyengén szeparatív félcsoporthok . . . . .	202
<b>15. Félcsoporthalgebrák</b>	<b>205</b>
15.1. Véges dimenziós algebrák kitüntetett elemei . . . . .	205
15.2. Véges dimenziós algebra nilpotens ideáljai . . . . .	208
15.3. Féligegyszerű algebrák . . . . .	212
15.4. Félcsoporthalgebrák . . . . .	213
<b>16. Félcsoporthok mátrixreprezentációi</b>	<b>218</b>
16.1. Jobbreguláris reprezentáció . . . . .	218
16.2. Félcsoporthok direkt szorzatának jobbreguláris reprezentációja . . . . .	219
16.3. Félcsoporthok félhálójának jobbreguláris reprezentációja . . . . .	222
<b>17. Megoldások</b>	<b>227</b>
<b>Tárgymutató</b>	<b>239</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>242</b>

# Bevezető

Mivel szinte minden, a gyakorlatban fontos algebrai struktúra definíciójában szerepel a szóban forgó műveletre (műveletekre) vonatkozóan az asszociativitás követelménye, ezért elméleti szempontból hasznosak számunkra az olyan algebrai struktúrával kapcsolatos információk, amelyben egy művelet van értelmezve, s ez a művelet asszociatív. Az ilyen algebrai struktúrát félcsoporthnak nevezzük. A félcsoporthnak nem csak az algebrai struktúrák elméletében, hanem az alkalmazásokban is jut szerep. A számítógéptudományban közvetlenül is alkalmazható automataelméletben, a karakterisztikus félcsoporth révén, a félcsoporthelméleti eredmények felhasználást nyerhetnek. Itt utalunk a [9] könyvre és a [3], [4] elektronikus jegyzetekre.

A félcsoporthok elmélete lényegében a múlt század 40-es, 50-es éveiben vette kezdetét. Magyar matematikusok is szép eredményeket értek el ezen a területen. Az irodalomjegyzékben említésre kerül tőlük példaként néhány olyan munka ([12], [14], [17], [18], [20], [27], [30], [36], [37], [39]), amelyek témája kapcsolódik e jegyzet egyes fejezeteinek témáihoz.

A félcsoporth fogalma a csoport fogalmának, illetve a gyűrű fogalmának általánosítása. A csoport olyan félcsoporth, amelyen a tekintetbe vett művelet invertálható, a gyűrű pedig egy olyan multiplikatív félcsoporth, amely egy másik művelettel, az úgynevezett összeadással együtt bizonyos feltételeknek tesz eleget. Ez a tény a félcsoporthelmélet kialakulásának kezdetén determinálta a félcsoporthelméleti kutatások jellegét. Egyrészt jellemző volt, hogy a vizsgálatok középpontjában főleg olyan félcsoporthok álltak, amelyek sokban hasonlítottak a csoportokhoz, például abban, hogy minden elemnek van valamilyen értelemben vett inverze (reguláris félcsoporthok, inverz félcsoporthok). A kezdeti kutatásokat másrészt az is jellemezte, hogy a félcsoporthok vizsgálata során a gyűrűelmélet főbb eredményeit igyekeztek átfogalmazni a félcsoporthokra.

Az algebrai struktúrák vizsgálatában a kongruenciák központi szerepet játszanak. Ebből a szempontból lényeges különbség van a félcsoporthok és a fenti összehasonlításban szereplő csoportok, illetve gyűrűk között. Egyrészt azért, mert amíg a csoportok, illetve gyűrűk esetében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a kongruenciák és a csoportok normális részcsoporthjai, illetve a gyűrűk ideáljai között, addig a félcsoporthok esetében sokkal kedvezőtlenebb a helyzet. Ugyan egy félcsoporth bizonyos részstruktúrái, például az ideálok, vagy a reflexív unitér részfélcsoporthok meghatározzák az illető félcsoporth egy-egy

kongruenciáját, de a félcsoporthok esetében nincsenek olyan részstruktúrák, amelyek kölcsönösen egyértelmű módon determinálnák egy félcsoport kongruenciáit. Másrészt azért, mert a félcsoporthok esetén - ugyan két kongruencia infimuma (hasonlóan a csoportokhoz és a gyűrűkhöz) megegyezik a kongruenciák metszetével - két kongruencia szuprémuma általában nehezen kezelhető. Ugyan ismert, hogy egy félcsoport két kongruenciájának szuprémuma megegyezik a két kongruencia uniójának tranzitív lezártjával, azonban ennek az egyes vizsgálatokban való alkalmazása általában nehézkes. Vannak olyan kongruenciákkal kapcsolatos konstrukciók, amelyek hatásosan alkalmazhatóak a csoportok, illetve a gyűrűk vizsgálatakor, viszont a félcsoporthok elméletében nem működnek kellőképpen, az előzőekben részletezett okok miatt. A kongruenciákban megnyilvánuló különbözőség korlátot szabott a fentebb vázolt általánosítási törekvéseknek, s a félcsoportelmélet már kialakulásának korai szakaszában kiérlelte a saját módszereit. Olyan speciális konstrukciók jelentek meg a kutatásokban, illetve a már meglévők közül olyanok kerültek előtérbe, amelyek eredményesen használhatók a félcsoporthok vizsgálatában. Ilyenek például a félcsoporthok különböző típusú köteg-felbontásai, főleg a félháló-felbontás, illetve a félcsoporthoknak szubdirekt irreducibilis félcsoporthok szubdirekt szorzatára való felbontása. A jegyzetben külön fejezetet szentelünk mind a félháló-felbontásnak, mind a szubdirekt szorzatnak, ezen belül a szubdirekt irreducibilis félcsoporthoknak.

A 17 fejezetből álló jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a Matematika Alapszak keretén belül "Félcsoportelmélet" címmel tartott szabadon választható tárgyam előadásainak anyaga alapján készült. A jegyzet az [5], [6], [11], [20], [25] [38] könyvek jelöléseit, fogalmait használja, és egyes fejezeteinek eredményei is feldolgozásra kerültek. Beépítésre került a [7], [10], [16], [19], [21], [23], [28], [32], [33], [34], [39], [41] cikkekben publikált eredmények némelyike is.

Az 1. fejezetben a félcsoportelmélet legalapvetőbb fogalmaival, a 2. fejezetben a félcsoporthok kongruenciáival, a 3. fejezetben a félcsoporthok homomorfizmusaival, a 4. és 5. fejezetekben a félcsoporthok ideáljaival, illetve ideálbővítéseivel, a 6. fejezetben a reguláris félcsoporthokkal és az inverz félcsoporthokkal, a 7. és 8. fejezetekben a jobb (0-)egyszerű, illetve a (0-) egyszerű félcsoporthokkal, a 9. fejezetben a teljesen (0-) egyszerű félcsoporthokkal, a 10. fejezetben a félcsoporthok félháló-felbontásával, a 11. fejezetben a félcsoporthok szubdirekt szorzatával, illetve a szubdirekt irreducibilis félcsoporthokkal, a 12. fejezetben a permutálható félcsoporthokkal, a 13. és 14. fejezetekben félcsoporthoknak csoportokba, illetve csoportok uniójába való beágyazhatóságával, a 15. fejezetben a félcsoportalgebrákkal, a 16. fejezetben félcsoporthok jobbrekuláris mátrixreprezentációjával foglalkozunk. Az egyes fejezetek végén feladatok találhatók. A 17. fejezet ezek megoldásait tartalmazza.

A jegyzet lektorálását Szőke Magdolna végezte. Köszönetet mondok lelkiismeretes munkájáért. Értékes megjegyzéseivel, javaslataival nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy minden bizonyítási részlet érthető, a jegyzet könnyen olvasható legyen.

Nagy Attila

# 1. fejezet

## A félcsoport és csoport fogalma

### 1.1. A művelet fogalma

**1.1. Definíció** Legyen  $n$  tetszőleges pozitív egész szám, és legyenek  $A_1, \dots, A_n$  tetszőleges nem üres halmazok. Az  $A_1, \dots, A_n$  halmazok ebben a sorrendben képezett Descartes szorzatán az

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

halmazt értjük, azaz mindazon  $n$ -elemű sorozatok halmazát, amely sorozatok mindegyikében az  $i$ -dik elem az  $A_i$  halmaz valamely eleme.

**1.2. Definíció** Legyen  $A$  tetszőleges nem üres halmaz, és legyen  $n$  tetszőleges pozitív egész szám. Az  $n$ -szeres  $A \times \dots \times A$  Descartes szorzatnak az  $A$  halmazba való egyértelmű leképezését az  $A$  halmazon értelmezett  $n$ -változós műveletnek nevezzük.

**1.3. Definíció** Egy olyan (nem üres)  $A$  halmazt, amelyen értelmezve van legalább egy művelet, algebrai struktúrának nevezünk. Ennek jelölése:  $(A; \Omega)$ , ahol  $\Omega$  jelöli az  $A$  halmazon értelmezett műveletek halmazát. Az  $A$  halmazt az algebrai struktúra alaphalmazának is szokták nevezni.

Ebben a jegyzetben műveleten mindig kétváltozós műveletet fogunk érteni. Ha  $*$  jelöl egy  $A$  halmazon értelmezett (kétváltozós) műveletet, akkor az  $(a, b) \in A \times A$  elempár  $*$  szerinti képét  $*(a, b)$  helyett  $a * b$  módon jelöljük. Az  $a * a$  elemet jelölhetjük  $2a$ -val, de jelölhetjük  $a^2$ -tel is, annak mintájára, hogy a számoknál  $a + a$  helyett  $2a$ -t, illetve  $a \cdot a$  helyett  $a^2$ -t írunk. Az első esetben azt mondjuk, hogy additív írásmódot, a második esetben multiplikatív írásmódot használunk. Additív írásmód esetén a művelet jeleként a  $+$  jelet, multiplikatív írásmód esetén a művelet jeleként a  $\cdot$  jelet használjuk. Multiplikatív írásmód esetén (ha nem okoz félreértést) a művelet jelét elhagyjuk, s az  $a \cdot b$  kifejezés helyett egyszerűen  $ab$ -t írunk. Ebben a jegyzetben főleg multiplikatív írásmódot használunk.

**1.4. Megjegyzés** Ha nem okoz félreértést, vagy ha nincs szükség rá, akkor egy algebrai struktúrát csak az alaphalmazzal jelöljük. Ezek szerint,  $A$  jelölhet egy halmazt és egy algebrai struktúrát is.

**1.5. Megjegyzés** Egy műveletet táblázatos formában is megadhatunk. Például, egy  $A = \{a, b\}$  alaphalmaz esetén a következő táblázatban

	$a$	$b$
$a$	$b$	$b$
$b$	$b$	$a$

az  $a$ -sor  $b$ -oszlopának eleme az  $ab$  műveleti eredmény; jelen példánkban ez egyenlő  $b$ -vel. Egy, a fentieknek megfelelően konstruált táblázatot Cayley-féle művelettáblának nevezünk.

**1.6. Definíció** Azt mondjuk, hogy egy  $A$  halmazon értelmezett művelet asszociatív, ha tetszőleges  $a, b, c \in A$  elemek esetén fennáll az

$$a(bc) = (ab)c$$

egyenlőség. A műveletről azt mondjuk, hogy kommutatív, ha tetszőleges  $a, b \in A$  elemekre teljesül az

$$ab = ba$$

egyenlőség. Azt mondjuk, hogy a művelet invertálható (az  $A$  halmazon), ha tetszőleges  $(a, b) \in A \times A$  elempárhoz megadhatók  $A$ -nak olyan  $x$  és  $y$  elemei, amelyekre teljesülnek az

$$ax = b \quad \text{és} \quad ya = b$$

egyenlőségek.

**1.7. Megjegyzés** Ha egy legalább kételemű  $A$  halmazon azt a műveletet tekintjük, amely-nél tetszőleges  $(a, b) \in A \times A$  elempár esetén  $ab = b$  teljesül, akkor világos, hogy a művelet nem kommutatív. Az is világos, hogy a szóban forgó művelet nem invertálható, mert ugyan tetszőleges  $(a, b) \in A \times A$  elempár esetén az  $ax = b$  egyenlőség az  $A$  halmaz  $x = b$  elemére teljesül, de  $a \neq b$  esetén  $A$ -nak nincs olyan  $y$  eleme, amelyre  $ya = b$  teljesülne.

**1.8. Megjegyzés** Az egész számok halmazán az összeadás asszociatív, kommutatív és invertálható. A szorzás is asszociatív és kommutatív, viszont nem invertálható. A racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmazán a szorzás asszociatív és kommutatív, valamint a  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  halmazon invertálható.



## 1.2. A félcsoport fogalma

**1.9. Definíció** Egy egyműveletes algebrai struktúrát *gruppoidnak* nevezünk.

**1.10. Definíció** Egy  $S$  *gruppoidról* azt mondjuk, hogy *félcsoport*, ha az  $S$ -en értelmezett művelet asszociatív. Ha a művelet még kommutatív is, akkor az  $S$  *félcsoportot* kommutatív félcsoportnak nevezzük.

Mindenekelőtt ismertetünk két módszert, amelyek alkalmasak annak eldöntésére, hogy egy véges  $S$  *gruppoid* félcsoport-e vagy nem.

### 1. módszer:

Legyen  $(S; \cdot)$  véges *gruppoid*. Az  $S$  egy rögzített  $a$  eleme esetén definiáljuk az  $S$  elemei között a következő műveleteket:  $x \circ y = (x \cdot a) \cdot y$ , illetve  $x \diamond y = x \cdot (a \cdot y)$ . Világos, hogy az  $S$  összes  $x, y$  elemére az  $(x \cdot a) \cdot y = x \cdot (a \cdot y)$  egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a  $\circ$  és  $\diamond$  műveletek megegyeznek. Az  $x \circ y$  műveleti eredményeket beírhatjuk egy táblázatba, amely táblázat az  $S$ -en értelmezett eredeti művelet Cayley-féle művelettáblájából úgy kapható meg, hogy annak  $x$ -sorát ( $x \in S$ ) kicseréljük az  $xa$ -sorára. Hasonlóan, az  $x \diamond y$  műveleti eredményeket ugyancsak beírhatjuk egy táblázatba, amely táblázat az  $S$ -en értelmezett eredeti művelet Cayley-féle művelettáblájából úgy kapható meg, hogy annak  $y$ -oszlopát ( $y \in S$ ) kicseréljük az  $ay$ -oszlopára. Tehát  $(S; \cdot)$  akkor és csak akkor félcsoport, ha tetszőleges  $S$ -beli  $a$  elemhez az előzőekben felírt két táblázatban az azonos helyen álló elemek egymással rendre megegyeznek. Az asszociativitás teljesülésének most részletezett tesztelését *Light-féle asszociativitási tesztnek* nevezzük.

Tekintsük példaként a következő Cayley-féle művelettáblával definiált  $S = \{a, b\}$  *gruppoidot*:

$\cdot$	a	b
a	b	a
b	b	b

Az  $a$  elem által definiált  $\circ$  művelethez tartozó táblázat:

	a	b
b	b	b
b	b	b

Az  $a$  elem által definiált  $\diamond$  művelethez tartozó táblázat:

	a	b
a	b	a
b	b	b

Mivel ebben a két táblázatban már van eltérés, ezért a  $b$  elemhez tartozó táblázatokat már nem is kell összehasonlítani; az eredeti Cayley-táblázattal definiált  $\cdot$  művelet nem asszociatív.

## 2. módszer:

Legyen  $S$  véges,  $n$  elemű grupoid. Rögzítsük  $S$  elemeinek egy sorrendjét. Legyen ez például  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Legyen  $\mathbb{F}$  tetszőleges test. Jelölje  $0$ , illetve  $1$  az  $\mathbb{F}$  nullelemét, illetve egységelemét. Tetszőleges  $s \in S$  elemhez definiáljunk egy  $\mathbb{F}$  test feletti  $n \times n$ -típusú  $\mathbf{R}^{(s)}$  módon jelölt mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{R}^{(s)} = (r_{i,j}^{(s)}),$$

ahol

$$r_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } s_i s = s_j \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az így definiált mátrixot az  $S$  grupoid  $s$  eleméhez tartozó  $\mathbb{F}$  test feletti (az  $S$  elemeinek fenti sorrendje által meghatározott) jobb oldali mátrixának nevezzük.

Az  $S$  grupoid valamely  $s$  eleméhez tartozó jobb oldali mátrix duálisaként értelmezhetjük a bal oldali mátrixot is, azaz azt az  $\mathbb{F}$  feletti  $n \times n$ -típusú  $\mathbf{L}^{(s)} = (l_{i,j}^{(s)})$  mátrixot, melynek  $l_{i,j}^{(s)}$  elemeit a következőképpen értelmezzük:

$$l_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } s s_j = s_i \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Például, ha  $S$  a következő Cayley-táblázattal definiált grupoid:

$\cdot$	$s_1$	$s_2$
$s_1$	$s_2$	$s_2$
$s_2$	$s_2$	$s_1$

akkor az  $S$  elemeihez az  $\{s_1, s_2\}$  sorred szerint hozzárendelt jobb oldali, illetve bal oldali mátrixok a következők:

$$\mathbf{R}^{(s_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}^{(s_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^{(s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**1.11. Tétel** Egy véges  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  halmazon értelmezett művelet esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.

- (1) A művelet asszociatív az  $S$  halmazon.
- (2) Tetszőleges  $s_i, s_j \in S$  elemek esetén  $\mathbf{R}^{(s_i)} \mathbf{R}^{(s_j)} = \mathbf{R}^{(s_i s_j)}$ .

(3) Tetszőleges  $i, j \in S$  elemek esetén  $\mathbf{L}^{(s_i)}\mathbf{L}^{(s_j)} = \mathbf{L}^{(s_i s_j)}$ .

*Bizonyítás.* Jelölje  $e_{s_t}$  ( $1 \leq t \leq n$ ) azt az  $n$ -elemű sorozatot, amelyben a  $t$ -edik elem az  $\mathbb{F}$  test egységeleme, a többi eleme pedig az  $\mathbb{F}$  test nulleleme.

Legyenek  $s_i, s_j \in S$  tetszőleges elemek. Világos, hogy az  $\mathbf{R}^{(s_i)}\mathbf{R}^{(s_j)}$  mátrix  $k$ -dik sora

$$e_{(s_k s_i) s_j}.$$

Mivel az  $\mathbf{R}^{(s_i s_j)}$  mátrix  $k$ -dik sora

$$e_{s_k(s_i s_j)},$$

ezért

$$\mathbf{R}^{(s_i)}\mathbf{R}^{(s_j)} = \mathbf{R}^{(s_i s_j)}$$

akkor és csak akkor, ha

$$e_{(s_k s_i) s_j} = e_{s_k(s_i s_j)},$$

azaz, ha

$$(s_k s_i) s_j = s_k(s_i s_j)$$

minden  $k \in S$  elemre. Következésképpen az (1) és (2) feltételek egymással ekvivalensek.

Mivel az  $\mathbf{L}^{(s_i)}\mathbf{L}^{(s_j)}$  mátrix  $k$ -dik oszlopa

$$e_{s_i(s_j s_k)},$$

továbbá az  $\mathbf{L}^{(s_i s_j)}$  mátrix  $k$ -dik oszlopa

$$e_{(s_i s_j) s_k},$$

ezért

$$\mathbf{L}^{(s_i)}\mathbf{L}^{(s_j)} = \mathbf{L}^{(s_i s_j)}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e_{s_i(s_j s_k)} = e_{(s_i s_j) s_k},$$

azaz, ha

$$s_i(s_j s_k) = (s_i s_j) s_k$$

minden  $k \in S$  elem esetén. Így az (1) és (3) feltételek ekvivalensek.  $\square$

Az előző tétel lehetőséget ad egy kétváltozós művelet asszociativitásának tesztelésére: ahhoz, hogy egy véges  $S$  grupoid félcsoporth legyen, szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek az  $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(ab)}$  (illetve az  $\mathbf{L}^{(a)}\mathbf{L}^{(b)} = \mathbf{L}^{(ab)}$ ) egyenlőségek tetszőleges  $S$ -beli  $a$  és  $b$  elem esetén.

### 1.3. Általános asszociativitás és kommutativitás

**1.12. Tétel** *Legyen  $S$  egy félcsoporth. Akkor tetszőleges  $n \geq 3$  egész szám és  $S$  elemeiből képezett tetszőleges  $n$  elemű sorozat esetén az elemek adott sorrendben képezett szorzata nem függ attól, hogy a szorzatot milyen zárójelezés mellett számítjuk ki.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth. A tétel bizonyítását a szorzatban szereplő elemszámra ( $n$ -re) vonatkozó teljes indukcióval végezzük.  $n = 3$  esetén nincs mit bizonyítani, mert a tétel állítása ebben a speciális esetben az asszociativitás definíciója miatt igaz.

Legyen  $n \geq 4$  tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk minden  $n$ -nél kisebb tényezőszámra. Legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$  tetszőleges elemek. Megmutjuk, hogy az  $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$  elemek ebben a sorrendben vett, tetszőleges  $Z[a_1, a_2, \dots, a_n]$  zárójelezése szerinti szorzatára mindig igaz, hogy

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

Az világos, hogy a  $Z[a_1, a_2, \dots, a_n]$  szorzatban valamely  $i = 1, \dots, n-1$  indexre az  $a_i$  és az  $a_{i+1}$  elemek  $(a_i a_{i+1})$  formában szerepelnek. Ha ezt a szorzatot  $S$  egyetlen elemének tekintjük, akkor a  $Z[a_1, a_2, \dots, a_n]$  szorzat az  $S$  félcsoporth  $n-1$  elemének szorzataként tekinthető. Az indukciós feltételt használva, a következőket kapjuk. Az  $i = 1$  esetben nyilvánvalóan teljesül a

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

egyenlőség. Ha  $1 < i < n-1$ , akkor

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots (a_i a_{i+1})) \cdots) a_n;$$

mivel a jobb oldalon szereplő szorzat első tényezője  $n$ -nél kevesebb tényezőt tartalmaz, ezért az megegyezik az

$$((a_1 a_2) \cdots a_{n-2}) a_{n-1}$$

szorzattal, és így

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

Végül vizsgáljuk az  $i = n-1$  esetet. Ekkor

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-2}) (a_{n-1} a_n).$$

A jobb oldalon szereplő szorzat az  $S$  félcsoporth három elemének, az

$$x = ((a_1 a_2) \cdots) a_{n-2},$$

valamint az  $a_{n-1}$  és az  $a_n$  elemek

$$x(a_{n-1}a_n)$$

szorzata, ami az asszociativitás miatt megegyezik az

$$(xa_{n-1})a_n$$

szorzattal, és így

$$Z[a_1, \dots, a_n] = (((a_1a_2) \cdots) a_{n-1})a_n.$$

□

**1.13. Megjegyzés** Egy  $S$  félcsoport tetszőleges  $a$  eleme és tetszőleges  $n$  pozitív egész szám esetén értelmezve van az  $a^n$  hatvány, amely olyan  $n$ -tényezős szorzat, melynek minden tényezője  $a$ . Így

$$a^1 = a, \quad a^2 = aa, \quad a^3 = aa^2 = a^2a, \dots$$

Additív írásmód esetén értelemszerűen az  $na$  alakú  $n$ -tagú összegekről beszélhetünk; ekkor

$$1a = a, \quad 2a = a + a, \quad 3a = a + 2a = 2a + a, \dots$$

**1.14. Tétel** Legyen  $S$  tetszőleges kommutatív félcsoport. Akkor tetszőleges  $n \geq 2$  egész szám és  $S$  tetszőleges  $n$  számú eleme esetén az elemek szorzata nem függ az elemek sorrendjétől.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges kommutatív félcsoport. A bizonyítást az elemek számára ( $n$ -re) vonatkozó teljes indukcióval végezzük el.  $n = 2$  esetén nincs mit bizonyítani, mert a tétel állítása ebben a speciális esetben a kommutativitás definíciója miatt igaz.

Legyen  $n \geq 3$  tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden  $n$ -nél kisebb tényezőszámra. Legyenek  $a_1, \dots, a_n \in S$  tetszőleges elemek. Az előző tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2) \cdots) a_{n-1})a_n,$$

ahol  $\pi$  az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmaz tetszőleges permutációja.

Ha  $n = \pi(n)$ , akkor

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_n,$$

ahol a jobb oldali szorzat első tényezője (amely egy  $n - 1$  tényezős szorzat) az indukciós feltétel miatt megegyezik azzal a szorzattal, amelyben az elemek szigorúan növekvő indexszel követik egymást, s ezért

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2) \cdots) a_{n-1})a_n.$$

Ha  $j = \pi(n) \neq n$ , akkor

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots )a_{\pi(n-1)})a_j = a_j(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots )a_{\pi(n-1)}).$$

A jobb oldalon szereplő szorzatban a második tényező az indukciós feltétel miatt átírható úgy, hogy abban az első tényező indexe  $j + 1$  legyen (a többi tényező sorrendje tetszőleges). Az asszociativitás miatt az átalakított jobboldali szorzat egyenlő azzal a szorzattal, amelyben az első tényező  $a_j a_{j+1}$  (a többi tényező sorrendje tetszőleges). Az  $a_j a_{j+1}$  szorzatot  $S$  egyetlen elemének tekintve, az indukciós feltételt felhasználásával, innen már könnyen adódik az

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots )a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1 a_2) \cdots )a_{n-1})a_n$$

egyenlőség.

□

## 1.4. Félcsoport kitüntetett elemei

**1.15. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $f$  elemét az  $S$  bal oldali [jobb oldali] nullelemének nevezzük, ha minden  $S$ -beli  $a$  elem esetén  $fa = f$  [ $af = f$ ] teljesül. Egy  $S$  félcsoport valamely elemét az  $S$  nullelemének nevezzük, ha az illető elem az  $S$ -nek bal oldali és jobb oldali nulleleme.

Tetszőleges nem üres  $S$  halmaz esetén,  $S$ -en értelmezhetjük a következő műveletet: tetszőleges  $a, b \in S$  esetén legyen  $ab = a$  [ $ab = b$ ]. Világos, hogy ez a művelet asszociatív, azaz  $S$  erre a műveletre nézve félcsoport, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem.

**1.16. Definíció** Egy olyan félcsoportot, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem, balzéró [jobbzeró] félcsoportnak fogunk nevezni.

**1.17. Lemma** Minden félcsoportnak legfeljebb egy nulleleme lehet. Ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali nulleleme, akkor mindegyikből csak egy van, amelyek egybeesnek, s a félcsoport egyetlen nullelemét adják.

*Bizonyítás.* Ha  $e$ , illetve  $f$  egy félcsoport bal oldali, illetve jobb oldali nullelemei, akkor  $e = ef = f$ . Ez bizonyítja a lemma minden állítását. □

Tetszőleges  $S$  félcsoport esetén jelölje  $S^0$  azt a félcsoportot, amely megegyezik  $S$ -sel, ha  $S$ -nek van nulleleme és  $|S| > 1$ , ellenkező esetben viszont azt a félcsoportot, melyet  $S$ -ből úgy származtatunk, hogy az  $S$  halmazt kiegészítjük egy  $0 \notin S$  elemmel, s az  $S \cup \{0\}$  halmazon úgy értelmezünk egy műveletet, hogy a művelet eredménye az  $S$ -beli

elemek között legyen egyenlő az eredeti  $S$ -beli műveleti eredménnyel, viszont tetszőleges  $x \in S \cup \{0\}$  elem esetén  $x0$  és  $0x$  is legyen egyenlő a  $0$  elemmel. Világos, hogy  $S^0$  olyan félcsoporthoz, amelynek van nullelem. Az első esetben az eredeti,  $S$ -beli nullelem, a második esetben az  $S$ -hez adjungált elem.

Tetszőleges  $S$  nem üres halmaz tetszőleges  $a$  eleme esetén definiálhatunk  $S$ -en egy  $*$  műveletet a következőképpen: tetszőleges  $x, y \in S$  esetén legyen  $x * y = a$ . Világos, hogy  $(S, *)$  egy félcsoporthoz, amelyben  $a$  nullelem. Ebben a félcsoporthoz bármely két elem szorzata a nullelem. Egy ilyen félcsoporthoz *zéró félcsoporthoz* nevezünk.

**1.18. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthoz valamely  $e$  elemét a félcsoporthoz bal oldali egységelemének nevezzük, ha  $S$  minden  $s$  eleme esetén fennáll az  $es = s$  egyenlőség. Félcsoporthoz jobb oldali egységelemének fogalma a bal oldali egységelem fogalmának duálisa. Egy félcsoporthoz valamely elemét a félcsoporthoz egységelemének nevezünk, ha az bal oldali és egyben jobb oldali egységeleme a félcsoporthoz.

**1.19. Tétel** Minden félcsoporthoz legfeljebb egy egységeleme van. Továbbá, ha egy félcsoporthoz van jobb oldali és bal oldali egységeleme is, akkor azok egyenlőek,  $s$  az  $S$  félcsoporthoz egyetlen egységelemét adják.

*Bizonyítás.* Jelölje  $e$ , illetve  $f$  egy  $S$  félcsoporthoz bal oldali, illetve jobb oldali egységelemét. Akkor

$$e = ef = f.$$

Ez bizonyítja a tétel mindkét állítását. □

**1.20. Definíció** Egy egységelemes félcsoporthoz monoidnak is nevezünk.

**1.21. Megjegyzés** Minden  $S$  félcsoporthoz adjungálhatunk egy, az  $S$  által nem tartalmazott  $e$  elemet, és az  $S \cup e$  halmazon definiálhatunk egy  $\circ$  műveletet úgy, hogy legyen

$$e \circ s = s \circ e = s$$

tetszőleges  $s \in S \cup e$  esetén,  $s$  az  $S$ -beli műveletet változatlanul hagyjuk. Az világos, hogy ezzel egy olyan félcsoporthoz definiáltunk, amelyben  $e$  egységelem.

**Jelölés:** Tetszőleges  $S$  félcsoporthoz esetén jelölje  $S^1$  az  $S$  félcsoporthoz, ha  $S$ -ben van egységelem, egyébként pedig jelölje azt a félcsoporthoz, amelyet  $S$ -ből egy egységelem adjungálásával nyerünk az előző megjegyzésben szereplő módon.

**1.22. Definíció** Egy  $e$  egységelemes  $S$  félcsoporthoz valamely  $b$  elemét [ $c$  elemét] egy  $a \in S$  elem bal oldali [jobb oldali] inverzének nevezzük, ha  $ba = e$  [ $ac = e$ ] teljesül. Egy  $a^{-1} \in S$  elemről azt mondjuk, hogy az  $a \in S$  elem inverze, ha  $a^{-1}$  az  $a$  elem bal oldali és jobb oldali inverze is.

**1.23. Tétel** *Egységelemes félcsoporthban minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Továbbá, ha egy  $a$  elemnek van jobb oldali és bal oldali inverze is, akkor azok egyenlők, és az  $a$  elem egyetlen inverzét adják.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $a'$ , illetve  $a''$  egy egységelemes  $S$  félcsoporth valamely  $a$  elemének bal oldali, illetve jobb oldali inverzét. Akkor,  $e$ -vel jelölve az  $S$  egységelemét,

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a'')a'' = ea'' = a''$$

adódik. Ez bizonyítja a tétel mindkét állítását. □

## 1.5. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók

**1.24. Definíció** *Egy  $S$  félcsoporthot csoportnak nevezünk, ha van egységeleme, és minden elemének van inverze. Ha emellett még kommutatív is a művelet, akkor kommutatív csoportról beszélünk.*

**1.25. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporthon a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

- (1)  $S$  csoport;
- (2)  $S$ -nek van olyan  $e$  jobb oldali egységeleme, hogy  $S$  minden elemének van  $S$ -ben  $e$ -re vonatkozó jobb oldali inverze, azaz minden  $a \in S$  elemhez van olyan  $a^{-1} \in S$  elem, hogy  $aa^{-1} = e$ ;
- (3)  $S$ -nek van olyan  $f$  bal oldali egységeleme, hogy  $S$  minden elemének van  $S$ -ben  $f$ -re vonatkozó bal oldali inverze, azaz minden  $a \in S$  elemhez van olyan  $a^{-1} \in S$  elem, hogy  $a^{-1}a = f$ ;
- (4) Az  $S$ -en értelmezett művelet invertálható, azaz tetszőleges  $a, b \in S$  elemekhez vannak olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyekre  $ax = b$  és  $ya = b$  teljesül;
- (5) Minden  $a \in S$  elemre  $Sa = S$  és  $aS = S$ .

*Bizonyítás.* Az nyilvánvaló, hogy az (1) feltételből következik a (2) és a (3) feltétel. Mivel tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $x = a^{-1}b$  és  $y = ba^{-1}$  elemekre teljesülnek az  $ax = b$  és  $ya = b$  egyenlőségek, ezért az (1) feltételből következik a (4) feltétel is.

A következő lépésként megmutatjuk, hogy (2) maga után vonja (1)-et. Tegyük fel, hogy az  $S$  félcsoporthban van olyan  $e$  jobb oldali egységelem, hogy  $S$  minden elemének van jobb oldali inverze erre a jobb oldali egységelemre nézve. Legyen  $a$  tetszőleges  $S$ -beli elem. Jelölje  $a_0$  az  $a$ -nak,  $a_1$  az  $a_0$ -nak egy-egy jobb oldali inverzét az  $e$  jobb oldali egységelemre nézve, azaz

$$aa_0 = e = a_0a_1.$$



Akkor

$$a_0a = (a_0a)e = (a_0a)(a_0a_1) = a_0(aa_0)a_1 = a_0ea_1 = a_0a_1 = e,$$

tehát  $a_0$  bal oldali inverze  $a$ -nak  $e$ -re nézve. Így

$$ea = (aa_0)a = a(a_0a) = ae = a,$$

tehát  $e$  kétoldali egységeleme  $S$ -nek. Így (1) teljesül.

Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy a (3) feltételből következik az (1) feltétel.

Az eddigi eredményekből már az is következik, hogy az (1), a (2) és a (3) feltételek egymással ekvivalensek.

Mivel a (4) és (5) feltételek nyilvánvalóan ekvivalensek, elegendő már csak azt megmutatni, hogy a (4) feltételből következik az (2) feltétel. Ehhez tegyük fel, hogy tetszőleges  $a, b \in S$  elemekhez vannak olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyekre  $ax = b$  és  $ya = b$  teljesül. Legyen  $a \in S$  tetszőleges, rögzített elem. Akkor megadható olyan  $e$  elem, amelyre  $ae = a$  teljesül. Legyen  $b \in S$  tetszőleges elem. Akkor van olyan  $y \in S$  elem, hogy  $ya = b$ . Ezért

$$be = (ya)e = y(ae) = ya = b,$$

azaz  $e$  az  $S$  félcsoporth jobb oldali egységeleme. Mivel a művelet invertálható, tetszőleges  $a \in S$  elemhez megadható olyan  $a^{-1} \in S$  elem, hogy  $aa^{-1} = e$ . Tehát (2) teljesül.  $\square$

## 1.6. Félcsoport részfélcsoporthjai

**1.26. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely nem üres  $T$  részhalmazát az  $S$  félcsoporth részfélcsoporthjának nevezzük, ha  $T$  zárt az  $S$ -beli műveletre nézve, azaz  $ab \in T$  teljesül minden  $a, b \in T$  elem esetén.

**1.27. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely nem üres  $I$  részhalmazát bal oldali ideálnak (vagy balideálnak) nevezzük, ha minden  $s \in S$  és minden  $a \in I$  elem esetén  $sa \in I$ , azaz  $SI \subseteq I$ ; a jobb oldali ideál (vagy jobbideál) fogalma a bal oldali ideál fogalmának duálisa. Ha  $I$  jobbideálja és balideálja is egy  $S$  félcsoporthnak, akkor azt mondjuk, hogy  $I$  kétoldali ideálja (vagy ideálja)  $S$ -nek.

Az világos, hogy egy félcsoporth minden balideálja (jobbideálja, ideálja) részfélcsoporth. Az ideálok részletesebb vizsgálatával a 4. fejezet foglalkozik.

**1.28. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely nem üres  $G$  részhalmazát az  $S$  félcsoporth generátorrendszerének nevezzük, ha  $S$  tetszőleges  $s$  eleméhez megadható  $G$ -nek olyan  $g_1, \dots, g_n$  elemei, hogy  $s = g_1g_2 \cdots g_n$ . Ekkor az  $S = \langle G \rangle$  jelölést használjuk. Ha  $S$ -nek van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy  $S$  végesen generálható. Ha  $S$ -nek van egyetlen elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt

mondjuk, hogy  $S$  ciklikus félcsoporth.  $S$  egy nem üres  $A$  részhalmaza esetén az  $A$  elemeiből képezhető összes  $a_1 \cdots a_n$  ( $n \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A$ ) szorzat az  $S$  egy részfélcsoporthját alkotja, melyet az  $A$  által generált részfélcsoporthnak nevezünk és  $\langle A \rangle$ -val jelölünk. Tehát  $\langle A \rangle = \cup_{n=1}^{\infty} A^n$ . Az világos, hogy  $\langle A \rangle$  megegyezik az  $A$ -t tartalmazó részfélcsoporthok metszetével.

**1.29. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a$  eleme esetén  $\langle a \rangle$  izomorf vagy a pozitív egész számok additív félcsoporthjával, vagy pedig  $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$ , ahol  $i$  az  $a$  legkisebb pozitív egész szám, amelyhez van olyan  $i \neq j$ , hogy  $a^i = a^j$ ,  $m$  pedig az legkisebb pozitív egész szám, amelyre  $a^i = a^{i+m}$  teljesül; ekkor az is igaz, hogy  $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$  izomorf az egészek mod  $m$  additív csoporthjával,  $(\mathbb{Z}_m; +)$ -szal.

*Bizonyítás.* Legyen  $a$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges eleme. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset:  $a^i = a^j$  akkor és csak akkor teljesül valamely  $i$  és  $j$  pozitív egész számra, ha  $i = j$ . Ekkor a

$$\varphi : a^i \mapsto i$$

az  $\langle a \rangle$  ciklikus félcsoporthnak a pozitív egész számok additív félcsoporthjára való izomorfizmusa.

2. eset: Megadhatók olyan  $i \neq j$  pozitív egész számok, amelyekre  $a^i = a^j$  teljesül. Jelölje a továbbiakban  $i$  azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre  $a^i = a^j$  teljesül valamely  $j \neq i$  pozitív egészre. Jelölje továbbá  $m$  azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre  $a^i = a^{i+m}$ . Ekkor persze

$$a^{i+km} = a^{i+m} a^{(k-1)m} = a^i a^{(k-1)m} = a^{i+m} a^{(k-2)m} = a^i a^{(k-2)m} = \dots = a^i,$$

és ezért tetszőleges pozitív egész  $n$  esetén megadhatók olyan  $k$  és  $t$  nemnegatív egészek ( $t = 0, \dots, m-1$ ), amelyekre  $n = km + t$ , s ezért

$$a^{i+n} = a^{i+km+t} = a^{i+km} a^t = a^{i+t}.$$

Így

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$$

és  $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$  az  $S$  félcsoporth részfélcsoporthja. Jelölje  $j$  azt a  $0 \leq j \leq m-1$  egész számot, melyre  $i+j$  osztható  $m$ -mel. Mivel  $i, i+1, \dots, i+m-1$  egymást követő  $m$  pozitív egész szám, ezért egy és csak egy ilyen  $j$  szám létezik. Tetszőleges  $a^{i+t} \in K_a$  elemre

$$a^{i+j} a^{i+t} = a^{km} a^{i+t} = a^{i+km+t} = a^{i+t},$$

így  $a^{i+j}$  a  $K_a$  félcsoporth egységeleme. Legyen  $a^{i+t} \in K_a$  tetszőleges. Mivel  $0 \leq t \leq m-1$ , ezért megadható olyan  $0 \leq k \leq m-1$  egész szám, hogy  $i+t+i+k$  osztható  $m$ -mel. Így

$$a^{i+t} a^{i+k} = a^{i+j}.$$

Tehát  $a^{i+k}$  az  $a^{i+t}$  elem inverze, és így  $K_a$  részcsoportja az  $S$  félcsoportnak. Az elmondottakból az is következik, hogy

$$\varphi : a^{i+t} \mapsto [i+t]$$

izomorfizmusa  $K_a$ -nak  $(\mathbb{Z}_m; +)$ -ra, ahol  $[i+t]$  jelöli  $\mathbb{Z}_m$ -nek azt az elemét ( $\mathbb{Z}$  azon kongruencia-osztályát  $(\text{mod } m)$ ), amely tartalmazza az  $i+t$  számot.  $\square$

**1.30. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $a$  eleme által generált ciklikus részfélcsoport rendjét az  $a$  elem rendjének nevezzük és  $o(a)$ -val jelöljük. Egy véges rendű elemet periodikus elemnek is szoktunk nevezni.

**1.31. Megjegyzés** Ha  $a$  egy  $S$  félcsoport véges rendű eleme, akkor az előző tételben szereplő jelöléseket használva,  $i$ -t az  $a$  elem indexének, a  $m$ -et pedig az  $a$  elem periódusának nevezzük. Ezeket az elnevezéseket használva, azt kapjuk, hogy

$$o(a) + 1 = \text{index} + \text{periódus}.$$

**1.32. Definíció** Egy  $S$  félcsoportot periodikus félcsoportnak nevezünk, ha minden eleme periodikus.

**1.33. Tétel** Egy periodikus  $S$  félcsoport minden elemének valamely hatványa benne van  $S$  egy részcsoportjában.

*Bizonyítás.* Legyen  $a$  egy periodikus  $S$  félcsoport tetszőleges eleme. Az 1.29. Tétel szerint  $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$  izomorf az egészek mod  $m$  additív csoportjával. Ebből már következik a tétel állítása.  $\square$

William Burnside angol matematikus 1902-ben tette fel a következő kérdést: egy végesen generálható, véges rendű elemeket tartalmazó csoport szükségszerűen véges-e, vagy nem. Ennek félcsoportelméleti megfelelője: egy végesen generált periodikus félcsoport szükségszerűen véges-e, vagy nem. Erre a kérdésre 1984-ben adott választ A. Restivo és C. Reutenauer ([32]). Tőlük származik a lentebbi 1.36. Tétel.

**1.34. Definíció** Legyen  $n \geq 2$  tetszőleges egész szám. Azt mondjuk, hogy egy  $S$  félcsoport rendelkezik  $n$ -re vonatkozóan a permutációtulajdonsággal, ha az  $S$  félcsoport elemeinek tetszőleges  $n$ -elemű  $s_1, \dots, s_n$  sorozatához magadható olyan  $n$ -edfokú nem-identikus  $\sigma$  permutáció, hogy  $s_1 \cdots s_n = s_{\sigma(1)} \cdots s_{\sigma(n)}$ .

**1.35. Definíció** Azt mondjuk, hogy egy  $S$  félcsoport rendelkezik a permutációtulajdonsággal, ha rendelkezik valamely  $n \geq 2$  egész számra vonatkozóan a permutációtulajdonsággal.

**1.36. Tétel** (*Burnside probléma félcsoporthokra*) Egy végesen generált periodikus félcsoporth akkor és csak akkor véges, ha rendelkezik a permutációtulajdonsággal.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  véges félcsoporth. Ekkor  $S$  végesen generált és periodikus. Legyen

$$n = 1 + 2|S|,$$

így  $n \geq 3$ . Megmutatjuk, hogy  $S$  rendelkezik  $n$ -re vonatkozóan a permutációtulajdonsággal. Legyenek  $s_1, \dots, s_n \in S$  tetszőleges elemek. Tekintsük az  $S$  félcsoporth következő elemsorozatot:

$$s_1, s_1 s_2, s_1 s_2 s_3, \dots, s_1 s_2 \cdots s_n.$$

Az  $n$  definíciója miatt megadhatók olyan  $i, j, k$  egészek, amelyekre  $1 \leq i < j < k \leq n$  teljesül, és fennállnak a következő egyenlőségek:

$$s_1 \cdots s_i = s_1 \cdots s_j = s_1 \cdots s_k.$$

Legyen

$$u = s_1 \cdots s_i, \quad x = s_{i+1} \cdots s_j, \quad y = s_{j+1} \cdots s_k,$$

ezért

$$u = ux = uxy,$$

amiből

$$uyx = uxyx = ux = uxy$$

adódik. Így

$$s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots s_i s_{j+1} \cdots s_k s_{i+1} \cdots s_j,$$

amiből következik, hogy  $S$  rendelkezik a permutációtulajdonsággal.

Fordítva, legyen  $S$  olyan végesen generált periodikus félcsoporth, amely rendelkezik a permutációtulajdonsággal. Akkor megadható olyan  $n \geq 2$  egész szám, hogy az  $S$  félcsoporth rendelkezik az  $n$ -re vonatkozó permutációtulajdonsággal. Jelölje  $A$  az  $S$  félcsoporth egy véges generátorrendszerét. A 3.15. Tétel szerint létezik az  $\mathcal{F}_A$  szabad félcsoporthnak az  $S$  félcsoporthra való olyan  $\varphi$  homomorfizmusa, amely annak az

$$f : A \mapsto A \subseteq S$$

leképezésnek a kiterjesztése, amely  $A$  minden elemének önmagát felelteti meg. Az  $\mathcal{F}_A$  szabad félcsoporth elemeit szavaknak fogjuk nevezni, és egy  $w \in \mathcal{F}_A$  szó hosszát  $|w|$  fogja jelölni. Tekintsük az  $A$  halmaz egy teljes rendezését. Ennek segítségével értelmezzük az  $\mathcal{F}_A$  szabad félcsoporthon egy  $<$  (teljes) rendezést a következőképpen. Tetszőleges  $u, v \in \mathcal{F}_A$  szavak esetén  $u < v$  akkor és csak akkor, ha  $u$  hossza kisebb  $v$  hosszánál, vagy a két szó hossza megegyezik, de  $u$  megelőzi  $v$ -t az  $A$ -n tekintett teljes rendezés által meghatározott lexikografikus rendezés szerint. A [33]-ben található 4.2.7 Tétel szerint minden  $p \geq 2n$  egész számhoz megadható olyan  $N(p)$  pozitív egész szám, hogy minden legalább  $N(p)$  hosszúságú  $\mathcal{F}_A$ -beli  $w$  szóra a következő két feltétel valamelyike teljesül.

- (1) Léteznek olyan  $\mathcal{F}_A$ -beli  $u, v, x_1, \dots, x_n$  elemek (szavak), hogy  $w$  előáll  $w = ux_1 \cdots x_nv$  alakban mégpedig úgy, hogy tetszőleges  $n$ -edfokú  $\sigma \neq id$  permutáció esetén

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v < w.$$

- (2) Megadhatók olyan  $\mathcal{F}_A$ -beli  $u, v, x$  szavak, hogy  $w$  előáll

$$w = ux^pv$$

alakban, ahol az  $x$  szó hossza legfeljebb  $n - 1$ .

Mivel  $S$  periodikus és  $A$  véges, ezért megadható olyan  $p \geq 2n$  egész szám, hogy minden legfeljebb  $n$  hosszúságú  $w$  szó esetén az  $S$  félcsoportban

$$\varphi(w)^p = \varphi(w)^{p'}$$

teljesül valamely  $p' < p$  kitevőre. Megmutatjuk, hogy  $S$  minden  $s$  eleméhez van olyan  $N(p)$ -nél kisebb hosszúságú  $w$  szó, hogy  $s = \varphi(w)$ . Ez már bizonyítja, hogy az  $S$  félcsoport véges. Legyen tehát  $s$  tetszőleges  $S$ -beli elem. Legyen  $w$  az  $\mathcal{F}_A$  szabad félcsoport  $\varphi(s)^{-1}$  részhalmazának minimális eleme a fenti  $<$  rendezés szerint. Megmutatjuk, hogy  $w$  hossza kisebb  $N(p)$ -nél. Tegyük fel ennek ellenkezőjét. Ekkor  $w$ -re teljesül a fenti (1) és (2) feltétel valamelyike.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $w$ -re a fenti (1) feltétel teljesül. Akkor léteznek olyan  $\mathcal{F}_A$ -beli  $u, v, x_1, \dots, x_n$  szavak, hogy  $w$  előáll

$$w = ux_1 \cdots x_nv$$

alakban mégpedig úgy, hogy tetszőleges  $n$ -edfokú nem-identikus  $\sigma$  permutáció esetén

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v < w.$$

Válasszuk  $\sigma$ -t olyannak, amely a permutáció-tulajdonság miatt az  $x_1, \dots, x_n$  elemsorozathoz tartozik. Ekkor viszont

$$s = \varphi(w) = \varphi(ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}),$$

és így

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \in \varphi(s)^{-1}.$$

Az (1) feltétel miatti

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v < w$$

eredmény viszont ellentmond annak, hogy  $w$  a  $\varphi(s)^{-1}$  halmaz minimális eleme.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor  $w$ -re a (2) feltétel teljesül. Akkor megadhatók olyan  $\mathcal{F}_A$ -beli  $u, v, x$  szavak, hogy  $w$  előáll  $w = ux^pv$  alakban és az  $x$  szó hossza legfeljebb  $n - 1$ . Így

$$s = \varphi(w) = \varphi(ux^pv) = \varphi(u)\varphi(x^p)\varphi(v) = \varphi(u)\varphi(x^{p'})\varphi(v) = \varphi(ux^{p'}v),$$

amiből

$$ux^{p'}v \in \varphi(s)^{-1}$$

következik. Mivel  $p' < p$ , ezért az  $ux^{p'}v$  szó hossza kisebb a  $w$  szó hosszánál, ami ellentmond annak, hogy  $w$  a  $\varphi(s)^{-1}$  halmaz minimális eleme.

Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, szükségképpen teljesül, hogy a  $w$  szó hossza kisebb az  $N(p)$  pozitív egész számnál. A fenti megjegyzés figyelembevételével a tételt ezzel bebizonyítottuk.  $\square$

**1.37. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth  $e$  elemét idempotens elemnek nevezzük, ha  $e^2 = e$ , azaz  $o(e) = 1$ .

**1.38. Definíció** Ha egy  $S$  félcsoporth minden eleme idempotens, akkor az  $S$  félcsoporthot kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló.

**1.39. Megjegyzés** Tetszőleges  $S$  félcsoporth idempotens elemeinek  $E_S$  halmazán definiált  $e \leq f$  ( $e, f \in E_S$ ) akkor és csak akkor ha  $e = ef = fe$  reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz egy parciális rendezés. A továbbiakban, ha idempotens elemek közötti parciális rendezésről lesz szó, akkor mindig a most definiált  $\leq$  parciális rendezésre gondolunk.

## 1.7. Félcsoporth részcsoporthjai

**1.40. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth részcsoporthján értjük  $S$  olyan részfélcsoporthját, amely csoporth.

Ha  $e$  egy  $S$  félcsoporth idempotens eleme, akkor  $\{e\}$  részcsoporthja  $S$ -nek. Tehát  $S$  minden  $e$  idempotens eleméhez tartozik  $S$ -nek legalább egy részcsoporthja, amelynek  $e$  az egységelem. A következőkben egy félcsoporth adott  $e$  idempotens eleméhez (az előbb említett módon) tartozó részcsoporthjaival foglalkozunk.

**1.41. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $e$  idempotens eleme esetén

$$G_e = \{a \in S : a = ae = ea, aa' = a'a = e \text{ valamely } a' \in S \text{ elemre}\}$$

$S$ -nek olyan részcsoporthja, amely tartalmazza  $S$  mindazon részcsoporthjait, amelyekben  $e$  egységelem. Minden ilyen  $G_e$  maximális részcsoporthja  $S$ -nek (abban az értelemben, hogy nincs  $S$ -nek olyan részcsoporthja, amely valódi módon tartalmazná  $G_e$ -t). Továbbá  $S$  bármely két különböző maximális részcsoporthjának metszete üres.

*Bizonyítás.* Ha  $a, b \in G_e$ , akkor

$$e(ab) = (ab)e = ab$$

és

$$(ab)(b'a') = (b'a')(ab) = e.$$

Ezért  $G_e$  részfélcsoport. Az világos, hogy minden  $a \in G_e$  esetén az  $aa' = a'a = e$  feltételből  $(aa')e = aa'$  és  $e(a'a) = a'a$  következik, és így

$$a'aa' \in Se \cap eS.$$

Továbbá

$$(a'aa')a = (a'a)(a'a) = e^2 = e,$$

és

$$a(a'aa') = (aa')(aa') = e^2 = e.$$

Tehát

$$a'aa' \in G_e.$$

Az előzőekből világos az is, hogy  $a'aa'$  az  $a \in G_e$  elem  $G_e$ -beli inverze. Tehát  $G_e$  csoport. A definíció alapján világos, hogy  $G_e$  tartalmazza  $S$  mindazon részcsoportjait, amelyekben  $e$  az egységelem. Ha  $G_e \cap G_f \neq \emptyset$  valamely  $e, f \in E_S$  elemekre, akkor tetszőleges  $x \in G_e \cap G_f$  elem esetén  $e = xx'$  és  $f = x''x$  ( $x' \in G_e$ ,  $x'' \in G_f$ ), s ezért

$$e = xx' = (fx)x' = f(xx') = fe = (x''x)e = x''(xe) = x''x = f,$$

amiből

$$G_e = G_f$$

következik. Ezért

$$G_e \cap G_f = \emptyset, \quad \text{ha} \quad e \neq f.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

**1.42. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

- (1)  $S$  részcsoportjainak uniója.
- (2)  $S$  diszjunkt részcsoportjainak uniója.

*Bizonyítás.* Az 1.41. Tétel felhasználásával nyilvánvaló. □

## Feladatok

**1.1.** (Megoldás: 17.1.) Mutassuk meg, hogy az  $S = \{a, b\}$  halmaz az

	a	b
a	b	a
b	b	a

Cayley-táblázattal definiált műveletre nézve nem alkot félcsoportot, de az elemeihez tartozó jobb mátrixok félcsoportot alkotnak!

**1.2.** (Megoldás: 17.2.) Mutassuk meg, hogy valamely  $A$  és  $B$  halmazok  $A \times B$  descartes szorzata az  $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$  műveletre nézve olyan félcsoportot alkot, amelynek minden eleme idempotens.

**1.3.** (Megoldás: 17.3.) Mutassuk meg, hogy egy  $A$  grupoid esetén

$$S = \{a \in A : (\forall x, y \in A) a(xy) = (ax)y\}$$

az  $A$  egy részfélcsoportja.

**1.4.** (Megoldás: 17.4.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részfélcsoportja van.



## 2. fejezet

# Félcsoport kongruenciái

### 2.1. Binér relációk félcsoportja

**2.1. Definíció** Egy  $X \neq \emptyset$  halmazon értelmezett (binér) reláción az  $X \times X$  halmaz egy részhalmazát értjük. Az  $X$  halmaz összes binér relációinak halmazát  $\mathcal{B}_X$  jelöli. Az  $(x, x)$  ( $x \in X$ ) párok halmazát az  $X$  identikus relációjának nevezzük, és  $\iota_X$ -szel (vagy csak  $\iota$ -val) fogjuk jelölni. A teljes  $X \times X$  halmazt az  $X$  halmaz univerzális relációjának nevezzük, és  $\omega_X$ -szel (vagy csak  $\omega$ -val) fogjuk jelölni.

**2.2. Definíció** Az  $X$  halmaz tetszőleges  $\alpha$  és  $\beta$  relációi esetén azt mondjuk, hogy  $\alpha$  része  $\beta$ -nak (jel.:  $\alpha \subseteq \beta$ ), ha mint az  $X \times X$  halmaz részhalmazai között fenáll a megfelelő tartalmazás, azaz az  $(a, b) \in \alpha$  feltételből  $(a, b) \in \beta$  következik.

**2.3. Megjegyzés** Két reláció akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha mindegyik tartalmazza a másikat.

**2.4. Definíció** Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  egy  $X$  halmaz tetszőleges relációi. Jelölje  $\alpha \circ \beta$  a következő relációt:

$$\alpha \circ \beta = \{(a, b) \in X \times X : \text{van olyan } c \in X \text{ elem, hogy } (a, c) \in \alpha, (c, b) \in \beta\}.$$

Ezt a relációt az  $\alpha$  és  $\beta$  relációk kompozíciójának nevezzük.

**2.5. Tétel** Tetszőleges  $X$  halmazon értelmezett összes (binér) reláció  $\mathcal{B}_X$  halmaza a relációk kompozíciójára nézve félcsoportot alkot.

*Bizonyítás.* Legyenek  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}_X$  tetszőlegesek. Ha

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$$

valamely  $a, b \in X$  elemekre, akkor van olyan  $x \in X$  elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \circ \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor, alkalmas  $y \in X$  elemre,

$$(a, y) \in \alpha, \quad (y, x) \in \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor viszont

$$(a, y) \in \alpha \quad \text{és} \quad (y, b) \in \beta \circ \gamma$$

miatt

$$(a, b) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Így

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás is. Ezért

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

□

**2.6. Definíció** Tetszőleges  $\alpha \in \mathcal{B}_X$  reláció esetén legyen  $\alpha^{-1} = \{(a, b) \in X \times X : (b, a) \in \alpha\}$ .

**2.7. Lemma**  $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$  tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  esetén.

*Bizonyítás.* Legyen

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta)^{-1}.$$

Ekkor

$$(b, a) \in \alpha \circ \beta,$$

és ezért valamely  $x \in X$  elemre

$$(b, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, a) \in \beta.$$

Így

$$(a, x) \in \beta^{-1} \quad \text{és} \quad (x, b) \in \alpha^{-1},$$

tehát

$$(a, b) \in \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}.$$

Ebből

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} \subseteq \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

következik. Hasonlóan bizonyítható a fordított tartalmazás is.

□

**2.8. Megjegyzés** Tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  esetén  $\alpha \subseteq \beta$  maga után vonja  $\alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$  teljesülését.

**2.9. Definíció** Egy  $X$  halmazon értelmezett  $\alpha$  relációról azt mondjuk, hogy reflexív, ha  $\iota \subseteq \alpha$ ; szimmetrikus, ha  $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ ; tranzitív, ha  $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$ .

**2.10. Megjegyzés** Ha  $\alpha$  szimmetrikus reláció, akkor  $\alpha = \alpha^{-1}$ , mert az  $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$  tartalmazásból  $\alpha^{-1} \subseteq (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$  következik. Ha  $\beta$  reflexív és tranzitív, akkor  $\beta \circ \beta = \beta$ , mert az  $(a, b) \in \beta$  feltételből (a  $\beta$  reflexivitása miatti  $(b, b) \in \beta$  tartalmazást is használva)  $(a, b) \in \beta \circ \beta$  következik. Tehát a tranzitivitás miatti  $\beta \circ \beta \subseteq \beta$  tartalmazás mellett a  $\beta \subseteq \beta \circ \beta$  tartalmazás is teljesül. Azért  $\beta \circ \beta = \beta$ .

**2.11. Megjegyzés** Ha  $\varrho_0$  egy  $S$  félcsoponton értelmezett reláció, akkor

$$\varrho_1 = \varrho_0 \cup \iota$$

a  $\varrho_0$  relációt tartalmazó legszűkebb reflexív reláció,

$$\varrho_2 = \varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota$$

a  $\varrho_0$  relációt tartalmazó legszűkebb reflexív és szimmetrikus reláció.

**2.12. Lemma** Ha  $\alpha$  és  $\beta$  egy  $X$  halmazon értelmezett reflexív relációk, akkor  $\alpha \circ \beta$  is reflexív reláció  $X$ -en.

*Bizonyítás.* Ha  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  reflexív, akkor minden  $a \in X$  elem esetén

$$(a, a) \in \alpha \quad (a, a) \in \beta,$$

és ezért

$$(a, a) \in \alpha \circ \beta.$$

Tehát

$$\iota \subseteq \alpha \circ \beta,$$

azaz  $\alpha \circ \beta$  reflexív relációja  $X$ -nek. □

**2.13. Lemma** Tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  szimmetrikus relációk esetén  $\alpha \circ \beta$  akkor és csak akkor szimmetrikus, ha  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ .

*Bizonyítás.* Legyenek  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  szimmetrikus relációk.

Először tegyük fel, hogy

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. Akkor

$$\alpha \circ \beta = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = (\beta \circ \alpha)^{-1} = (\alpha \circ \beta)^{-1}$$

miatt  $\alpha \circ \beta$  szimmetrikus.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $\alpha \circ \beta$  szimmetrikus. Akkor

$$\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \beta)^{-1} = (\beta)^{-1} \circ (\alpha)^{-1} = \beta \circ \alpha.$$

□

## 2.2. Ekvivalenciarelációk

**2.14. Definíció** Az  $X$  halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük.

**2.15. Megjegyzés** Egy  $S$  félcsoporth  $\varrho$  relációja esetén a

$$\varrho^t = \varrho \cup (\varrho \circ \varrho) \cup (\varrho \circ \varrho \circ \varrho) \cup \dots$$

reláció a  $\varrho$  relációt tartalmazó legszűkebb tranzitív reláció. Az  $S$  valamely  $w$  és  $w'$  elemeire tehát

$$(w, w') \in \varrho^t$$

akkor és csak akkor teljesül, ha megadható  $S$  elemeinek olyan

$$w = w_0, w_1, \dots, w_n = w'$$

sorozata, hogy

$$(w_i, w_{i+1}) \in \varrho$$

teljesül minden  $i = 0, \dots, n-1$  indexre. Ez, illetve a 2.11. Megjegyzés alapján egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $\varrho_0$  relációja esetén

$$(\varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota)^t$$

a  $\varrho_0$  relációt tartalmazó legszűkebb ekvivalencia reláció.

**2.16. Tétel** Tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  ekvivalenciarelációk esetén  $\alpha \circ \beta$  akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ .

*Bizonyítás.* Legyenek  $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$  olyan ekvivalenciarelációk, amelyekre

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. A 2.12. Lemma és a 2.13. Lemma szerint  $\alpha \circ \beta$  reflexív és szimmetrikus. Mivel

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)^2 &= (\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \beta) \\ &= \alpha \circ (\beta \circ \alpha) \circ \beta = \alpha \circ (\alpha \circ \beta) \circ \beta \\ &= (\alpha \circ \alpha) \circ (\beta \circ \beta) = \alpha \circ \beta, \end{aligned}$$

ezért  $\alpha \circ \beta$  tranzitív is. Így  $\alpha \circ \beta$  ekvivalenciareláció.

Fordítva, ha  $\alpha \circ \beta$  ekvivalenciareláció, akkor a 2.13. Lemma szerint  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ .  $\square$

## 2.3. Félcsoport kongruenciarelációi, faktorfélcsoport

**2.17. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $\alpha$  relációjáról akkor mondjuk, hogy balról kompatibilis (az  $S$ -beli műveletre nézve), ha tetszőleges  $S$ -beli  $a, b, s$  elemek esetén az  $(a, b) \in \alpha$  feltételekből  $(sa, sb) \in \alpha$  következik. A jobbról való kompatibilitás fogalma a balról való kompatibilitás fogalmának duálisa.

**2.18. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoport balról [jobbról] kompatibilis relációinak halmaza a  $\mathcal{B}_S$  relációfélcsoport részfélcsoportja.

*Bizonyítás.* Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  egy  $S$  félcsoport tetszőleges balról kompatibilis relációi. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta$$

teljesül az  $S$  valamely  $a$  és  $b$  elemeire. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy van  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, hogy

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta.$$

Legyen  $s$  az  $S$  félcsoport tetszőleges eleme. Mivel  $\alpha$  és  $\beta$  az  $S$  balról kompatibilis relációi, ezért

$$(sa, sx) \in \alpha \quad \text{és} \quad (sx, sb) \in \beta,$$

amiből

$$(sa, sb) \in \alpha \circ \beta$$

következik. Ebből már adódik a tétel balról kompatibilis relációkra vonatkozó állítása. A jobbról kompatibilis relációkra vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható.  $\square$

**2.19. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $\sigma$  ekvivalenciarelációját balkongruenciának nevezzük, ha  $\sigma$  balról kompatibilis az  $S$ -beli műveletre nézve, azaz ha  $S$  tetszőleges  $a, b, s$  elemei esetén az  $(a, b) \in \sigma$  feltételből  $(sa, sb) \in \sigma$  következik. A jobbkongruencia fogalma a balkongruencia fogalmának duálisa.

**2.20. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $\alpha$  relációjáról akkor mondjuk, hogy kompatibilis (az  $S$ -beli műveletre nézve), ha tetszőleges  $S$ -beli  $a, b, c, d$  elemek esetén az  $(a, b) \in \alpha$  és  $(c, d) \in \alpha$  feltételekből  $(ac, bd) \in \alpha$  következik.

**2.21. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $\sigma$  ekvivalenciarelációját kongruenciarelációnak (röviden: kongruenciának) nevezzük, ha kompatibilis az  $S$ -beli műveletre nézve, azaz  $S$  tetszőleges  $a, b, c, d$  elemei esetén az  $(a, b) \in \sigma$ ,  $(c, d) \in \sigma$  feltételekből  $(ac, bd) \in \sigma$  következik.

**2.22. Tétel** Egy  $S$  félcsoport valamely ekvivalenciarelációja akkor és csak akkor kongruenciareláció, ha az balkongruencia és egyben jobbkongruencia.

*Bizonyítás.* Legyen  $\sigma$  egy  $S$  félcsoporth valamely ekvivalenciarelációja. Ha  $\sigma$  kongruencia és  $(a, b) \in \sigma$ ,  $(a, b \in S)$ , akkor tetszőleges  $S$ -beli  $c$  elem esetén (mivel  $(c, c) \in \sigma$ ) következik, hogy

$$(ca, cb) \in \sigma$$

és

$$(ac, bc) \in \sigma.$$

Fordítva, ha  $\sigma$  balkongruencia és jobbkongruencia, akkor tetszőleges  $S$ -beli  $a, b, c, d$  eleme esetén az  $(a, b) \in \sigma$ ,  $(c, d) \in \sigma$  feltételekből

$$(ac, bc) \in \sigma \quad \text{és} \quad (bc, bd) \in \sigma$$

következik. Mivel  $\sigma$  tranzitív, ezért

$$(ac, bd) \in \sigma.$$

□

**2.23. Megjegyzés** Ha  $\varrho_0$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges relációja, akkor a  $\varrho_0$ -t tartalmazó kongruenciák halmaza nem üres, mivel  $\omega$ , azaz az  $S$  univerzális relációja kongruencia és  $\varrho_0 \subseteq \omega$ . Mivel kongruenciák bármely rendszerének metszete is kongruencia, ezért létezik egy, a  $\varrho_0$ -t tartalmazó legszűkebb  $\varrho$  kongruencia; ez a  $\varrho_0$ -t tartalmazó összes  $S$ -beli kongruenciának a metszete. Könnyen ellenőrizhető, hogy az  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $b$  elemeire  $(a, b) \in \varrho$  akkor és csak akkor teljesül, ha megadható az  $S$  félcsoporth elemeinek olyan véges

$$a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$$

sorozata, hogy minden  $i = 1, \dots, n-1$  indexhez megadhatók olyan

$$u_i, v_i \in S \quad \text{és} \quad x_i, y_i \in S^1$$

elemek, hogy

$$c_i = x_i u_i y_i, \quad c_{i+1} = x_i v_i y_i, \quad \text{és} \quad (u_i, v_i) \in \varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota.$$

**2.24. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth kongruenciáinak halmaza akkor és csak akkor részfélcsoporthja a  $\mathcal{B}_S$  relációfélcsoporthnak, ha  $S$  tetszőleges  $\alpha$  és  $\beta$  kongruenciái esetén  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ .

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporth kongruenciáinak halmaza részfélcsoporthja a  $\mathcal{B}_S$  relációfélcsoporthnak. Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges kongruenciái. Ekkor persze  $\alpha$  is és  $\beta$  is egy-egy ekvivalenciarelációja az  $S$  félcsoporthnak. A feltétel miatt  $\alpha \circ \beta$  az  $S$  félcsoporth kongruenciája, s ezért ekvivalenciarelációja is. Így a 2.16. Tétel miatt  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ . Tehát az  $S$  félcsoporth bármely két kongruenciája egymással felcserélhető.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporth tetszőleges kongruenciái egymással felcserélhetőek. Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  az  $S$  tetszőleges kongruenciái, tehát ekvivalenciarelációk.

A 2.16. Tétel értelmében  $\alpha \circ \beta$  is ekvivalenciareláció. Mivel  $\alpha$  és  $\beta$  bal kompatibilis és jobb kompatibilis relációi  $S$ -nek, ezért a 2.18. Tétel miatt  $\alpha \circ \beta$  bal kompatibilis és jobb kompatibilis ekvivalenciarelációja  $S$ -nek, és így  $\alpha \circ \beta$  az  $S$  félcsoporth bal- és egyben jobbkongruenciája. A 2.22. Tétel miatt ebből már következik, hogy  $\alpha \circ \beta$  az  $S$  félcsoporth kongruenciája. Tehát az  $S$  félcsoporth binér relációinak félcsoporthján belül az  $S$  kongruenciáinak halmaza zárt a  $\circ$  műveletre nézve, azaz  $S$  kongruenciáinak halmaza az  $S$  relációfélcsoporthjának részfélcsoporthja.  $\square$

**2.25. Megjegyzés** Egy  $S$  félcsoporth kongruenciáinak  $\mathcal{L}(S)$  halmaza a relációk tartalmazására, mint parciális rendezésre nézve háló. Ebben a hálóban az identikus reláció a legkisebb elem, az univerzális reláció a legnagyobb elem.

**2.26. Tétel** Legyen  $\sigma$  egy  $S$  félcsoporth kongruenciarelációja. Ekkor a  $\sigma$ -osztályok  $S/\sigma$  faktorhalmaza a  $\sigma$ -osztályok  $[a]_\sigma[b]_\sigma = [ab]_\sigma$  módon definiált szorzására nézve félcsoporthot alkot.

*Bizonyítás.* A  $\sigma$  ekvivalenciareláció  $S$ -beli műveletre való kompatibilitása miatt  $[a]_\sigma[b]_\sigma = [ab]_\sigma$  művelet az  $S/\sigma$  faktorhalazon. Mivel tetszőleges  $a, b, c \in S$  elemek esetén

$$\begin{aligned} ([a]_\sigma[b]_\sigma)[c]_\sigma &= [ab]_\sigma[c]_\sigma \\ &= [(ab)c]_\sigma = [a(bc)]_\sigma = [a]_\sigma[bc]_\sigma \\ &= [a]_\sigma([b]_\sigma[c]_\sigma), \end{aligned}$$

ezért a művelet asszociatív, ami bizonyítja a tétel állítását.  $\square$

**2.27. Definíció** Az előző tételben szereplő félcsoporthot az  $S$  félcsoporth  $\sigma$  kongruencia szerinti faktorfélcsoporthjának nevezzük.

**2.28. Definíció** Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  egy  $S$  félcsoporth olyan kongruenciái, amelyekre  $\alpha \subseteq \beta$  teljesül. Jelölje  $\beta/\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth azon binér relációját, amely szerint két  $S/\alpha$ -beli  $[a]_\alpha$  és  $[b]_\alpha$  elemre

$$[a]_\alpha \beta/\alpha [b]_\alpha \Leftrightarrow a \beta b.$$

**2.29. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporth tetszőleges  $\alpha \subseteq \beta$  kongruenciái esetén  $\beta/\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth kongruenciarelációja.

*Bizonyítás.* Az világos, hogy  $\beta/\alpha$  ekvivalenciareláció. Legyenek  $[a]_\alpha$  és  $[b]_\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth olyan elemei, amelyekre

$$[a]_\alpha \beta/\alpha [b]_\alpha$$

teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy  $a \beta b$ . Legyen  $[s]_\alpha \in S/\alpha$  tetszőleges.

$$[s]_\alpha [a]_\alpha = [sa]_\alpha \beta/\alpha [sb]_\alpha = [s]_\alpha [b]_\alpha,$$

mert

$$sa \beta sb.$$

Tehát  $\beta/\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport bal oldali kongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy  $\beta/\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport jobb oldali kongruenciája. A 2.22. Tétel szerint  $\beta/\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport kongruenciája.  $\square$

**2.30. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoport tetszőleges  $\alpha$  kongruenciája esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport kongruenciái és az  $S$  félcsoport  $\alpha$ -t tartalmazó kongruenciái között. Ennél a megfeleltetésnél az  $S$  valamely  $\beta \supseteq \alpha$  kongruenciájának az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport  $\beta/\alpha$  kongruenciája felel meg.*

*Bizonyítás.* A 2.29. Tétel szerint

$$\phi: \beta \mapsto \beta/\alpha$$

az  $S$  félcsoport  $\alpha$  kongruenciáját tartalmazó kongruenciák halmazának az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport kongruenciáinak halmazába való egyértelmű leképezése. Megmutatjuk, hogy  $\phi$  szürjektív és injektív.

Legyen  $\beta^*$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport tetszőleges kongruenciája. Jelölje  $\beta$  az  $S$  félcsoporton a következőképpen értelmezett relációt: valamely  $a, b \in S$  elemek esetén

$$a \beta b \iff [a]_\alpha \beta^* [b]_\alpha.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\beta$  az  $S$  félcsoport egy kongruenciarelációja, valamint hogy

$$\phi(\beta) = \beta/\alpha = \beta^*.$$

Tehát  $\phi$  szürjektív.

A  $\phi$  injektivitásának vizsgálatához tegyük fel, hogy

$$\phi(\beta) = \phi(\gamma)$$

teljesül az  $S$  félcsoport valamely  $\alpha$ -t tartalmazó  $\beta$  és  $\gamma$  kongruenciáira. Tegyük fel, hogy

$$a \beta b$$

valamely  $a, b \in S$  elemekre. Akkor

$$[a]_\alpha \beta/\alpha [b]_\alpha,$$



és így a  $\phi(\beta) = \phi(\gamma)$  feltétel miatt

$$[a]_\alpha \gamma / \alpha [b]_\alpha,$$

és így

$$a \gamma b.$$

Tehát

$$\beta \subseteq \gamma.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\gamma \subseteq \beta.$$

Tehát

$$\beta = \gamma.$$

Következésképpen  $\phi$  injektív. □

## 2.4. Csoport-, illetve nullelemes csoport-kongruenciák

**2.31. Tétel** *Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth és  $H$  az  $S$  tetszőleges nem üres részhalmaza. Akkor a*

$$\mathcal{P}_H = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S) \ xay \in H \Leftrightarrow xby \in H\}$$

*reláció az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája; a*

$$W_H = \{c \in S : (\forall x, y \in S) \ xcy \notin H\}$$

*részhalmaz vagy üres vagy olyan ideálja  $S$ -nek, amely egy  $\mathcal{P}_H$ -osztály.*

*Bizonyítás.* Az világos, hogy  $\mathcal{P}_H$  ekvivalencia reláció. Mivel tetszőleges  $a, b, c, x, y \in S$  elemek esetén az

$$x(ca)y \in H, \quad \text{azaz} \quad (xc)ay \in H$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(xc)by \in H, \quad \text{azaz} \quad x(cb)y \in H,$$

ezért az

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H$$

feltételből

$$(ca, cb) \in \mathcal{P}_H$$

következik. Tehát  $\mathcal{P}_H$  az  $S$  félcsoporth egy bal oldali kongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy  $\mathcal{P}_H$  az  $S$  jobb oldali kongruenciája. Így a 2.22. Tétel szerint  $\mathcal{P}_H$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája.

Ha  $c \in W_H$  és  $s, x, y \in S$  tetszőleges elemek, akkor  $x(sc)y = (xs)cy \notin H$  és így  $sc \in W_H$ . Hasonlóan igazolható, hogy  $cs \in W_H$ . Tehát, ha  $W_H$  nem üres, akkor az  $S$  egy ideálja. Az világos, hogy (az utóbbi esetben)  $W_H$  egy  $\mathcal{P}_H$ -osztály. □

**2.32. Definíció** Az előző tételben definiált  $\mathcal{P}_H$  kongruenciát a  $S$  félcsoporth  $H$  részhalmaza által definiált főkongruenciának nevezzük.

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén  $S^1$  jelöli azt a félcsoporthot, amely megegyezik  $S$ -sel abban az esetben, ha  $S$ -ben van egységelem, egyébként pedig  $S$ -ből egy egységelem adjungálásával nyerhető.

**2.33. Tétel** Legyen  $H$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges nem üres részhalmaza. Akkor

$$\mathcal{P}_H^1 = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S^1) \ xay \in H \Leftrightarrow xby \in H\}$$

az  $S$  félcsoporth kongruenciája; a  $H$  részhalmaz  $\mathcal{P}_H^1$ -osztályok uniója; a

$$W_H^1 = \{c \in S : (\forall x, y \in S^1) \ xcy \notin H\}$$

részhalmaz vagy üres vagy olyan ideálja  $S$ -nek, amely egy  $\mathcal{P}_H^1$ -osztály.

*Bizonyítás.* Az világos, hogy  $\mathcal{P}_H^1$  ekvivalenciareláció. Legyenek  $a$  és  $b$  az  $S$  félcsoporth olyan elemei, amelyekre

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H^1$$

teljesül. Legyen  $s \in S$  tetszőleges elem. Akkor minden  $x, y \in S^1$  elemre

$$x(sa)y = (xs)ay \in H$$

akkor és csak akkor, ha

$$x(sb)y = (xs)by \in H.$$

Tehát

$$(sa, sb) \in \mathcal{P}_H^1,$$

és így  $\mathcal{P}_H^1$  balkongruencia. Hasonlóan igazolható, hogy  $\mathcal{P}_H^1$  jobbkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt  $\mathcal{P}_H^1$  az  $S$  félcsoporth kongruenciája.

Mivel tetszőleges  $h \in H$  és  $a \notin H$  elemek esetén

$$1h1 \in H \quad \text{és} \quad 1a1 \notin H,$$

ezért

$$(h, a) \notin \mathcal{P}_H^1.$$

Ebből már következik, hogy a  $H$  részhalmaz  $\mathcal{P}_H^1$ -osztályok uniója.

Legyen

$$c \in W_H^1$$

tetszőleges elem. Akkor az  $S$  félcsoporth tetszőleges  $s$  eleme esetén

$$sc \in W_H^1.$$

Ellenkező esetben léteznének olyan  $x, y \in S^1$  elemek, amelyekre

$$(xs)cy = x(sc)y \in H$$

teljesülne, amiből

$$c \notin W_H^1$$

következne. Mivel ez ellentmond a  $c \in W_H^1$  kiinduló feltételnek, ezért valóban

$$sc \in W_H^1.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$cs \in W_H^1.$$

Tehát ha  $W_H^1$  nem üres, akkor az  $S$  félcsoporth ideálja. A definíció alapján világos, hogy (az utóbbi esetben)  $W_H^1$  egy  $\mathcal{P}_H^1$ -osztály.  $\square$

**2.34. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth  $H$  részhalmazát bal unitér részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $a, ab \in H$  feltételből  $b \in H$  következik. A jobb unitér részhalmaz fogalma a bal unitér részhalmaz fogalmának duálisa. Egy részhalmazt unitér részhalmaznak nevezzük, ha az egyszerre bal unitér és jobb unitér részhalmaz.

**2.35. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges unitér  $H$  részfélcsoporthja esetén  $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1$ . Továbbá az is igaz, hogy  $W_H = W_H^1$ .

*Bizonyítás.* Az világos, hogy

$$\mathcal{P}_H^1 \subseteq \mathcal{P}_H$$

tetszőleges  $H \subseteq S$  részhalmaz esetén. A fordított tartalmazási reláció igazolásához tekintsünk két elemet,  $a$ -t és  $b$ -t az  $S$  félcsoporthból. Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \mathcal{P}_H$  valamely  $S$ -beli  $a$  és  $b$  elemek esetén. Legyenek  $u, v \in S^1$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$uav \in H.$$

Akkor tetszőleges  $h_1, h_2 \in H$  elemek esetén

$$(h_1u)a(vh_2) \in H,$$

mert  $H$  részfélcsoporth. Mivel  $h_1u, vh_2 \in S$ , ezért

$$(h_1u)b(vh_2) \in H.$$

Mivel  $H$  bal unitér, ezért a  $h_1, h_1ubvh_2 \in H$  tartalmazásokból

$$ubvh_2 \in H$$

következik. Mivel  $H$  jobb unitér, ezért az  $ubvh_2, h_2 \in H$  tartalmazásokból

$$ubv \in H$$

következik. Hasonlóan igazolható, hogy ha  $ubv \in H$ , akkor  $uav \in H$ . Következésképpen

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H^1.$$

Így

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1.$$

Az világos, hogy ha  $c \in W_H^1$  valamely  $c \in S$  elemre teljesül, akkor  $c \in W_H$ . Ha pedig  $d \in W_H$  teljesül valamely  $d \in S$  elemre, akkor  $d \in W_H^1$  is teljesül. Ugyanis, ha  $d$  nem lenne eleme  $W_H^1$ -nak, akkor léteznének olyan  $x, y \in S^1$  elemek, amelyekre  $xdy \in H$  teljesülne. Akkor viszont tetszőleges  $h_1, h_2 \in H$  elemek esetén  $(h_1x)d(yh_2) \in H$  teljesülne, mivel  $H$  részfélcsoport. Ez viszont azt jelentené, hogy  $d \notin W_H$ , mivel  $h_1x, yh_2 \in S$ . Ez pedig ellentmondás. Az előzőekből már következik, hogy  $W_H = W_H^1$ .  $\square$

**2.36. Definíció** Egy  $S$  félcsoport valamely  $H$  részhalmazát reflexív részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges  $a, b \in S$  esetén  $ab \in H$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $ba \in H$ .

**2.37. Definíció** Egy félcsoportot nullelemes csoportnak nevezzük, ha valamely  $G$  csoportból úgy származtatható, hogy  $G$ -hez egy nullelemet adjungálunk.

**2.38. Tétel** Ha  $H$  egy  $S$  félcsoport reflexív és unitér részfélcsoportja, akkor az  $S/\mathcal{P}_H$  faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport.

Fordítva, ha  $\sigma$  egy  $S$  félcsoport olyan kongruenciája, hogy az  $S/\sigma$  faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport, akkor megadható az  $S$  félcsoportnak olyan reflexív és unitér  $H$  részfélcsoportja, amelyre  $\sigma = \mathcal{P}_H$  teljesül.

*Bizonyítás.* Legyen  $H$  egy  $S$  félcsoport reflexív unitér részfélcsoportja. A 2.31. Tétel, illetve a 2.33. Tétel szerint  $\mathcal{P}_H$ , illetve  $\mathcal{P}_H^1$  az  $S$  félcsoport kongruenciái. Mivel a feltétel szerint  $H$  unitér, ezért

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1.$$

A 2.33. Tétel szerint  $W_H$  egy  $\mathcal{P}_H$ -osztály,  $H$  pedig osztályok uniója. Legyenek  $a, b \in H$  tetszőleges elemek. Megmutatjuk, hogy  $H$  egyetlen osztály. Tegyük fel, hogy  $xay \in H$  valamely  $x, y \in S$  elemekre. Mivel  $H$  reflexív, ezért

$$yxa \in H.$$

Mivel  $H$  unitér és  $a \in H$ , ezért

$$yx \in H.$$

Mivel  $H$  részfélcsoport és  $b \in H$ , ezért

$$yxb \in H,$$

amiből  $H$  reflexivitása miatt

$$xby \in H$$

következik. Hasonlóan igazolható, hogy az  $xby \in H$  feltételből  $xay \in H$  következik. Tehát

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H.$$

Következésképpen  $H$  egy  $\mathcal{P}_H$ -osztály.

Legyenek  $a, b \in S \setminus W_H$  tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan  $x, y, u, v \in S$  elemek, melyekre

$$xay, ubv \in H$$

teljesül. Mivel  $H$  reflexív, ezért

$$yxa, bvu \in H.$$

Mivel  $H$  részfélcsoport, ezért

$$yxabvu \in H,$$

amiből

$$ab \notin W_H$$

következik. Így  $S \setminus W_H$  félcsoport. Ha  $W_H$  nem üres, akkor az  $S/\mathcal{P}_H$  faktorfélcsoportban a  $W_H$ -nak megfelelő elem nullelem (mivel az  $S$  ideálja), s a faktorfélcsoport úgy áll elő, hogy annak egy részfélcsoportjához  $((S \setminus W_H)/\mathcal{P}_H$ -hoz) a  $W_H$ -nak megfelelő nullelem van adjungálva. Megmutatjuk, hogy  $(S \setminus W_H)/\mathcal{P}_H$  a faktorfélcsoport egy részcssoportja. Legyenek  $s, x, y \in S$  és  $h \in H$  tetszőleges elemek.  $H$  reflexivitása miatt

$$xshy \in H$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$yxsh \in H,$$

amely a  $H$  unitér volta miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$yxs \in H.$$

Ez utóbbi tartalmazás a  $H$  reflexivitása miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$xsy \in H.$$

Következésképpen  $H$  a faktorfélcsoport jobb oldali egységeleme. Hasonlóan igazolható, hogy bal oldali egységelem is. Legyen  $a \in S \setminus W_H$  tetszőleges elem. Akkor vannak olyan  $S$ -beli  $x$  és  $y$  elemek, hogy

$$xay \in H,$$

azaz

$$yxa \in H.$$

Mivel  $yx \notin W_H$ , ezért az  $yx$  elemet tartalmazó  $\mathcal{P}_H$ -osztály az  $a$  elemet tartalmazó  $\mathcal{P}_H$ -osztály bal oldali inverze. Ezzel beláttuk, hogy az  $S/\mathcal{P}_H$  faktorfélcsoport vagy csoport vagy nullemes csoport.

Megfordítva, legyen  $\alpha$  egy  $S$  félcsoport olyan kongruenciája, melyre az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport csoport vagy nullemes csoport. Jelölje  $H$  az  $S$  félcsoport azon  $\alpha$ -osztályát, amely a faktorfélcsoport egységeleme. Az világos, hogy  $H$  reflexív és unitér részfélcsoportja  $S$ -nek. Megmutatjuk, hogy  $\mathcal{P}_H = \alpha$ . Jelölje  $\varphi$  az  $S$  félcsoportnak az  $S/\alpha$  faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Az

$$a, b \in W_H$$

feltétel akkor és csak akkor teljesül, minden  $x, y \in S$  elem esetén

$$xay, xby \notin H,$$

azaz

$$\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) \neq e, \quad \varphi(x)\varphi(b)\varphi(y) \neq e,$$

ahol  $e$  jelöli az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport egységelemét. Ez utóbbi pedig azzal ekvivalens, hogy

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

ahol  $0$  jelöli az  $S/\alpha$  faktorfélcsoport nullemét. Tegyük fel a továbbiakban, hogy  $a, b \in S \setminus W_H$ . Ha

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H$$

akkor vannak olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyek esetén

$$\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = e = \varphi(x)\varphi(b)\varphi(y).$$

Ebből

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

adódik, azaz

$$(a, b) \in \alpha.$$

Fordítva, ha

$$(a, b) \in \alpha,$$

akkor minden  $x, y \in S$  elemre

$$(xay, xby) \in \alpha,$$

és ezért  $xay \in H$  akkor és csak akkor, ha  $xby \in H$ , mivel  $H$  egy  $\alpha$ -osztálya  $S$ -nek. Ezzel bebizonyítottuk, hogy  $\mathcal{P}_H = \alpha$ .  $\square$

## Feladatok

**2.1.** (Megoldás: 17.5.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén  $\sigma = \{(a, b) \in S \times S : (\exists n \in \mathbb{N}^+) ab^n = b^{n+1}, ba^n = a^{n+1}\}$  ekvivalenciareláció!

**2.2.** (Megoldás: 17.6.) Mutassuk meg, hogy tetszőlege jobb zéró [bal zéró] félcsoporth minden ekvivalenciarelációja kongruenciareláció!

**2.3.** (Megoldás: 17.7.) Mutassuk meg, hogy egy  $S$  jobb zéró [bal zéró] félcsoporthban minden  $\alpha$  és  $\beta$  kongruenciára akkor és csak akkor teljesül az  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  egyenlőség, ha  $|S| \leq 2$ .

**2.4.** (Megoldás: 17.8.) Mutassuk meg, hogy egy háromelemű félhálóban megadhatók olyan  $\alpha$  és  $\beta$  kongruenciák, amelyekre nem teljesül az  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  egyenlőség!

**2.5.** (Megoldás: 17.9.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az  $\varrho = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x \in S) xa = xb\}$  reláció kongruenciareláció!

## 3. fejezet

# Félcsoport homomorfizmusai

**3.1. Definíció** Egy  $S$  félcsoportnak egy  $T$  félcsoportba való  $\phi$  leképezését homomorfizmusnak nevezzük, ha  $S$  tetszőleges  $a$  és  $b$  elemei esetén  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  teljesül. Ha  $\phi$  homomorfizmus szürjektív, akkor azt is szoktuk mondani, hogy  $\phi$  epimorfizmus, és ekkor  $T$  az  $S$  félcsoport homomorf (vagy epimorf) képe. Ha  $\phi$  homomorfizmus injektív, akkor azt mondjuk, hogy  $\phi$  az  $S$  félcsoportnak a  $T$  félcsoportba való beágyazása. Ha  $\phi$  homomorfizmus bijektív (azaz szürjektív és injektív), akkor azt mondjuk, hogy  $\phi$  az  $S$  félcsoportnak a  $T$  félcsoportra való izomorfizmusa; ekkor  $\phi$  inverze  $T$ -nek  $S$ -re való izomorfizmusa, s ezért azt is mondjuk, hogy  $S$  és  $T$  egymással izomorfak. Egy félcsoport önmagába való homomorfizmusait a félcsoport endomorfizmusainak, önmagára való izomorfizmusait pedig a félcsoport automorfizmusainak nevezzük. Egy  $S$  félcsoport endomorfizmusai a leképezések kompozíciójára nézve monoidot (egységelemes félcsoportot) alkotnak, melyben az invertálható elemek az  $S$  automorfizmusai.

**3.2. Megjegyzés** Ha  $\sigma$  egy  $S$  félcsoport kongruenciarelációja, akkor a  $\varphi : s \mapsto [s]_\sigma$  ( $s \in S$ ) az  $S$  félcsoportnak az  $S/\sigma$  faktorfélcsoportra való homomorfizmusa. Ezt a homomorfizmust természetes (vagy kanonikus) homomorfizmusnak nevezzük.

**3.3. Lemma** Legyen  $\varphi$  egy  $S$  félcsoportnak valamely  $T$  félcsoportba való homomorfizmusa. Akkor  $\ker_\varphi = \{(a, b) \in S \times S : \varphi(a) = \varphi(b)\}$  az  $S$  félcsoport kongruenciája.

*Bizonyítás.* Az világos, hogy  $\ker_\varphi$  ekvivalenciareláció. Mivel tetszőleges  $a, b, s \in S$  elemekre az  $(a, b) \in \ker_\varphi$  feltételből

$$\varphi(sa) = \varphi(s)\varphi(a) = \varphi(s)\varphi(b) = \varphi(sb)$$

következik, ezért  $\ker_\varphi$  balkongruencia  $S$ -en. Hasonlóan bizonyítható, hogy  $\ker_\varphi$  jobbkongruencia  $S$ -en.  $\square$

**3.4. Definíció** Ha  $\varphi$  egy  $S$  félcsoportnak egy  $T$  félcsoportba való homomorfizmusa, akkor az  $S$  félcsoport  $\ker_\varphi$  kongruenciáját a  $\varphi$  homomorfizmus magjának nevezzük.



**3.5. Megjegyzés** Ha  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája és  $\varphi$   $S$ -nek az  $S/\sigma$  faktorfélcsoporthra való természetes homomorfizmusa, akkor  $\ker_\varphi = \sigma$

### 3.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek

**3.6. Tétel** (Homomorfizmustétel) Ha  $\varphi$  az  $S$  félcsoporthnak egy  $T$  félcsoporthra való (szűrjektív) homomorfizmusa, akkor  $T \cong S/\ker_\varphi$ .

*Bizonyítás.* Tetszőleges  $x \in T$  esetén legyen

$$\Phi(x) = [a]_{\ker_\varphi},$$

ahol  $a \in S$  olyan elem, amelyre  $x = \varphi(a)$  teljesül. Ha

$$\varphi(a) = x = \varphi(b)$$

teljesül valamely  $a, b \in S$  elemekre, akkor

$$[a]_{\ker_\varphi} = [b]_{\ker_\varphi},$$

amiből következik, hogy  $\Phi$  a  $T$  félcsoporthnak az  $S/\ker_\varphi$  faktorfélcsoporthba való jól definiált, egyértelmű leképezése. A  $\varphi$  szűrjektivitása azt biztosítja, hogy minden  $t \in T$  elemnek legyen képe. A  $\Phi$  azért szűrjektív, mert  $\varphi$  értelmezési tartománya  $S$ . A  $\Phi$  injektivitásának bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\Phi(\varphi(a)) = \Phi(\varphi(b))$$

valamely  $a, b \in S$  elemek esetén. Akkor

$$[a]_{\ker_\varphi} = [b]_{\ker_\varphi},$$

azaz

$$(a, b) \in \ker_\varphi,$$

és ezért

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Tehát  $\Phi$  valóban injektív. Mivel tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén

$$\Phi(\varphi(a)\varphi(b)) = \Phi(\varphi(ab)) = [ab]_{\ker_\varphi} = [a]_{\ker_\varphi}[b]_{\ker_\varphi} = \Phi(\varphi(a))\Phi(\varphi(b)),$$

ezért  $\Phi$  homomorfizmus. Tehát  $\Phi$  a  $T$  félcsoporthnak az  $S/\ker_\varphi$  faktorfélcsoporthra való izomorfizmusa.  $\square$

**3.7. Következmény** *Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén, ha  $\varphi_1 : S \mapsto T_1$  és  $\varphi_2 : S \mapsto T_2$  olyan szürjektív homomorfizmusok, melyekre  $\ker_{\varphi_1} = \ker_{\varphi_2}$  teljesül, akkor  $T_1 \cong T_2$ .*

*Bizonyítás.* Az állítás a homomorfizmustétel következménye, mert

$$T_1 \cong S/\ker_{\varphi_1} \cong S/\ker_{\varphi_2} \cong T_2. \quad \square$$

**3.8. Lemma** *Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth és  $H$  az  $S$ -nek egy részfélcsoporthja. Akkor  $S$  tetszőleges  $\sigma$  kongruenciája esetén*

$$[H]_{\sigma} = \{s \in S : (\exists h \in H) (s, h) \in \sigma\}$$

*az  $S$  félcsoporth részfélcsoporthja.*

*Bizonyítás.* Ha  $s_1, s_2 \in [H]_{\sigma}$ , akkor

$$(s_1, h_1), (s_2, h_2) \in \sigma$$

alkalmas  $h_1, h_2 \in H$  elemekkel. Mivel

$$h_1 h_2 \in H$$

és

$$(s_1 s_2, h_1 h_2) \in \sigma,$$

ezért  $[H]_{\sigma}$  részfélcsoporthja  $S$ -nek.  $\square$

Legyen  $\sigma$  egy  $S$  félcsoporth kongruenciája. Legyen  $X$  az  $S$  egy nem üres részhalmaza. Jelölje  $\sigma|_X$  a  $\sigma$ -nak  $X$ -re való leszűkítését, azaz  $\sigma|_X = \{(x, y) \in X \times X : (x, y) \in \sigma\}$ .

Ha  $X$   $\sigma$ -osztályok uniója, akkor  $\sigma|_X$  helyett  $\sigma$ -t is fogunk használni.

**3.9. Tétel (I. Izomorfizmustétel)** *Legyen  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges kongruenciája,  $H$  pedig tetszőleges részfélcsoporthja. Akkor  $[H]_{\sigma}/\sigma \cong H/(\sigma|_H)$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $\varphi$  a  $[H]_{\sigma}$  félcsoporthnak a  $[H]_{\sigma}/\sigma$  faktorfélcsoporthra való természetes homomorfizmusa. A  $[H]_{\sigma}$  definíciója miatt

$$\varphi([H]_{\sigma}) = \varphi(H),$$

és így  $\varphi$ -nek  $H$ -ra való leszűkítés  $H$ -nak  $\varphi([H]_{\sigma})$ -ra való homomorfizmusa, melynek magja  $\sigma|_H$ . Ezért  $[H]_{\sigma}/\sigma \cong H/(\sigma|_H)$ .  $\square$

**3.10. Tétel** (II. Izomorfizmustétel) Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges kongruenciái az  $\alpha \subseteq \beta$  feltétellel. Akkor

$$\beta/\alpha = \{([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in S/\alpha \times S/\alpha : (a, b) \in \beta\}$$

( $a, b \in S$ ) az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth kongruenciája, és  $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$ .

*Bizonyítás.* A 2.29. Tétel szerint  $\beta/\alpha$  az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth kongruenciája. Legyenek  $\varphi_1$ , illetve  $\varphi_2$  az  $S$ -nek  $S/\alpha$ -ra, illetve  $S/\alpha$ -nak  $(S/\alpha)(\beta/\alpha)$ -ra való természetes homomorfizmusai. Valamely  $a, b \in S$  elemekre

$$(a, b) \in \ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2} \Leftrightarrow ((a)\varphi_1)\varphi_2 = ((b)\varphi_1)\varphi_2 \Leftrightarrow ([a]_\alpha)\varphi_2 = ([b]_\alpha)\varphi_2;$$

az utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta/\alpha,$$

ami az  $(a, b) \in \beta$  teljesülését jelenti. Tehát  $\ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = \beta$ . A homomorfizmustétel miatt  $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$ .  $\square$

**3.11. Tétel** Legyen  $\alpha$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges kongruenciája. A  $\beta \mapsto \bar{\beta} = \beta/\alpha$  leképezés az  $S$  félcsoporth  $\alpha$ -t tartalmazó kongruenciáinak hálóját izomorf módon képezi le az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth kongruenciáinak hálójára.

*Bizonyítás.* Az  $S/\alpha$  faktorfélcsoporth tetszőleges  $\beta$  kongruenciája esetén jelölje  $\beta^*$  az  $S$  félcsoporth azon relációját, amelynél az  $S$  két eleme, mondjuk  $a$  és  $b$ , akkor és csak akkor állnak relációban, ha  $([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta$ . Könnyen igazolható, hogy  $\beta^*$  az  $S$  félcsoporth kongruenciája és  $\bar{\beta}^* = \beta$ . Mivel az  $S$  félcsoporth tetszőleges  $\tau \supseteq \alpha$  kongruenciája esetén  $(\bar{\tau})^* = \tau$ , ezért a  $\varrho \mapsto \bar{\varrho}$  és  $\tau \mapsto \tau^*$  leképezések egymás inverzei. Így  $\beta \mapsto \bar{\beta} = \beta/\alpha$  leképezés az  $S$  félcsoporth  $\alpha$ -t tartalmazó kongruenciáinak hálóját bijektív módon képezi az  $S/\alpha$  félcsoporth kongruenciáinak hálójára. Itt nem részletezzük, de könnyen igazolható, hogy a leképezés (háló-) homomorfizmus.  $\square$

## 3.2. Szabad félcsoporthok

Tetszőleges  $X \neq \emptyset$  halmaz esetén jelölje  $\mathcal{F}_X$  az  $X$  elemeiből képezhető összes véges sorozatok halmazát. Ezen az  $X$  halmazon értelmezzünk egy szorzásnak nevezett  $\cdot$  műveletet a következőképpen. Tetszőleges  $X$ -beli  $[x_1, \dots, x_m]$  és  $[y_1, \dots, y_n]$  sorozatok esetén legyen  $[x_1, \dots, x_m] \cdot [y_1, \dots, y_n] = [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$ .

**3.12. Tétel** Tetszőleges  $X \neq \emptyset$  halmaz esetén  $(\mathcal{F}_X; \cdot)$  félcsoporth.

*Bizonyítás.* Legyenek  $\omega_1 = [x_1, \dots, x_k]$ ,  $\omega_2 = [y_1, \dots, y_m]$ ,  $\omega_3 = [z_1, \dots, z_n]$  tetszőleges  $\mathcal{F}_X$ -beli sorozatok. Akkor

$$\begin{aligned} (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3 &= [x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m] \cdot \omega_3 = \\ &= [x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n] = \\ &= \omega_1 \cdot [y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n] = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3). \end{aligned} \quad \square$$

**3.13. Definíció** Az előzőekben definiált  $(\mathcal{F}_X; \cdot)$  félcsoporthat az  $X$  halmaz feletti szabad félcsoporthat nevezzük. Az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthat segítségével képezett  $\mathcal{F}_X^1$  monoidot (egységelemes félcsoporthat) az  $X$  halmaz feletti szabad monoidnak nevezzük; az  $\mathcal{F}_X$ -hez adjungált egységelemre az "üres szó" kifejezéssel szoktunk hivatkozni.

**3.14. Tétel** Azonosítva az  $X$  halmaz  $x$  elemét az egyelemű  $[x]$  sorozattal,  $X$  az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthat egy generátorrendszer.

*Bizonyítás.* Mivel tetszőleges  $\mathcal{F}_X$ -beli  $[x_1, \dots, x_m]$  sorozat esetén

$$[x_1, \dots, x_m] = [x_1] \cdot [x_2] \cdots [x_m],$$

ezért az állítás nyilvánvaló.  $\square$

Az előző tétel alapján az  $\mathcal{F}_X$ -beli tetszőleges  $[x_1, \dots, x_m]$  sorozatot  $x_1 \cdots x_m$  szorzat alakban is írhatjuk.

**3.15. Tétel** Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporthat és  $X \neq \emptyset$  tetszőleges halmaz. Akkor  $X$ -nek az  $S$ -be való tetszőleges egyértelmű  $\phi$  leképezéséhez megadható az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthatnak az  $S$  félcsoporthatba való olyan  $\phi^*$  homomorfizmusa, melynek  $X$ -re való leszűkítése egyenlő  $\phi$ -vel, azaz  $\phi(x) = \phi^*(x)$  teljesül minden  $x \in X$  elemre.

*Bizonyítás.* Valamely  $\phi : X \mapsto S$  leképezés esetén értelmezzünk egy

$$\phi^* : \mathcal{F}_X \mapsto S$$

leképezést a következőképpen. Tetszőleges  $x_1 \cdots x_m \in \mathcal{F}_X$  esetén legyen

$$\phi^*(x_1 \cdots x_m) = \phi(x_1) \cdots \phi(x_m).$$

Mivel tetszőleges

$$x_1 \cdots x_m; \quad y_1 \cdots y_n \in \mathcal{F}_X$$

elemek esetén

$$\begin{aligned} \phi^*((x_1 \cdots x_m) \cdot (y_1 \cdots y_n)) &= \phi^*(x_1 \cdots x_m \cdot y_1 \cdots y_n) = \\ &= \phi^*(x_1 \cdots x_m) \phi^*(y_1 \cdots y_n) \end{aligned}$$

teljesül, ezért  $\phi^*$  az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthatnak az  $S$  félcsoporthatba való homomorfizmusa. A  $\phi(x) = \phi^*(x)$  egyenlőségnek minden  $x \in X$  elemre való teljesülése nyilvánvaló.  $\square$

**3.16. Tétel** Minden  $S$  félcsoporthoz izomorf egy szabad félcsoporthoz valamely faktorfélcsoporthoz.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporthoz. Tekintsük az  $S$  halmaz feletti szabad félcsoporthoz. Jelölje  $\phi$  az  $S$  halmaz identikus leképezését. A 3.15. Tétel szerint megadható az  $\mathcal{F}_S$  szabad félcsoporthoz az  $S$  félcsoporthoz olyan  $\phi^*$  szürjektív homomorfizmusa, melynek  $S$ -re való leszűkítése  $\phi$ . Így a félcsoporthozokra érvényes homomorfizmus-tétel szerint az  $S$  félcsoporthoz izomorf az  $\mathcal{F}_X/\ker\phi^*$  faktorfélcsoporthoz.  $\square$

Az előzők alapján lehetőségünk van arra, hogy konstruáljunk olyan  $S$  félcsoporthoz, amelyet valamely  $X$  részhalmaza generál, és a generáló elemekre valamely  $v_i = w_i$  ( $i \in I$ ) azonosságok, másnéven definiáló relációk teljesülnek ( $v_i$  és  $w_i$  a generálóelemek valamely véges szorzatai). Tekintsük az  $X$  halmaz feletti  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthoz. A  $v_i$ , illetve  $w_i$  szorzatok egyértelműen meghatározzák  $\mathcal{F}_X$  egy-egy  $v'_i$ , illetve  $w'_i$  elemét. Például, ha  $v_i = x_1 x_2^3$  ( $x_1, x_2 \in X$ ), akkor  $v'_i$  az  $[x_1, x_2, x_2, x_2] \in \mathcal{F}_X$  elemét jelenti. Jelölje  $\varrho_0$  az  $\mathcal{F}_X$  félcsoporthoz azon binér relációját, amelyet a  $(v'_i, w'_i)$  ( $i \in I$ ) párok alkotnak. Jelölje  $\varrho$  az  $\mathcal{F}_X$  félcsoporthoz  $\varrho_0$  relációja által generált kongruenciáját. Jelölje  $\varphi$  az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthoz az  $\mathcal{F}_X/\alpha^*$  faktorfélcsoporthoz való természetes homomorfizmusát. Világos, hogy  $\varphi(X)$  az  $S$  félcsoporthoz generátorrendszere és  $\varphi(v_i) = \varphi(w_i)$  miatt  $S$ -ben a  $\varphi(X)$  generátorrendszer elemeire teljesülnek az előírt definiáló relációk.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt.

**3.17. Tétel** Legyen  $\varrho$  egy  $X$  halmaz feletti  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthoz valamely  $\varrho_0$  relációja által generált kongruencia. Legyen  $\varphi$  az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoporthoz az  $\mathcal{F}_X/\varrho$  faktorfélcsoporthoz való természetes homomorfizmusa. Legyen  $S$  egy félcsoporthoz és  $\phi$  az  $\mathcal{F}_X$ -nek  $S$ -be való olyan homomorfizmusa, amelyre  $\phi(u) = \phi(v)$  teljesül minden  $(u, v) \in \varrho_0$  párra. Akkor van az  $\mathcal{F}_X/\varrho$  faktorfélcsoporthoz az  $S$  félcsoporthoz olyan  $\theta$  homomorfizmusa, hogy tetszőleges  $w \in \mathcal{F}_X$  elem esetén  $\theta(\varphi(w)) = \phi(w)$  teljesül.

## Feladatok

**3.1.** (Megoldás: 17.10.) Mutassuk meg, hogy egy  $\mathcal{F}$  félcsoporthoz akkor és csak akkor egy  $X$  halmaz feletti szabad félcsoporthoz, ha tetszőleges  $S$  félcsoporthoz és  $X$ -nek  $S$ -be való tetszőleges  $f$  leképezéséhez megadható  $\mathcal{F}$ -nek  $S$ -be való olyan homomorfizmusa, melynek  $X$ -re való leszűkítése megegyezik  $f$ -fel.

**3.2.** (Megoldás: 17.11.) Mutassuk meg, hogy ha  $X$  és  $Y$  olyan halmazok, melyek között létezik egy bijektív leképezés, akkor az  $X$  és az  $Y$  feletti szabad félcsoporthozok egymással izomorfak.

## 4. fejezet

# Félcsoport ideáljai, a Green-relációk

Mint ahogy azt már az 1. Fejezetben definiáltuk (1.27. Definíció), egy  $S$  félcsoport valamely nem üres  $L$  részhalmazát bal oldali ideálnak nevezzük, ha minden  $s \in S$  és minden  $a \in L$  elem esetén  $sa \in L$ . Egy  $S$  félcsoport nem üres  $R$  részhalmazát jobb oldali ideálnak nevezzük, ha minden  $s \in S$  és  $a \in R$  esetén  $as \in R$ . Ha  $I$  jobb oldali és bal oldali ideálja is egy  $S$  félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy  $I$  kétoldali ideálja, vagy röviden ideálja  $S$ -nek.

**4.1. Definíció** Egy  $S$  félcsoport  $S$ -től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük. Egy félcsoportot egyszerűnek nevezünk, ha nincs valódi ideálja.

**4.2. Tétel** Egy  $S$  félcsoport akkor és csak akkor egyszerű, ha  $S = SaS$  teljesül minden  $a$  eleme esetén.

*Bizonyítás.* Az világos, hogy tetszőleges  $S$  félcsoport tetszőleges  $a$  eleme esetén  $SaS$  az  $S$  egy ideálja. Így, ha  $S$  egy egyszerű félcsoport, akkor tetszőleges  $a \in S$  elem esetén  $S = SaS$ .

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan félcsoport, amelyre tetszőleges  $a \in S$  esetén teljesül az  $S = SaS$  egyenlőség. Legyen  $I$  az  $S$  egy ideálja. Akkor tetszőleges  $a \in I$  elem esetén

$$S = SaS \subseteq I,$$

amiből

$$I = S$$

következik. Tehát  $S$ -nek nincs valódi ideálja, azaz  $S$  egyszerű félcsoport.  $\square$

**4.3. Megjegyzés** Egy legalább kételemű 0-elemes  $S$  félcsoport nem lehet egyszerű, mert  $\{0\}$  ideálja  $S$ -nek.

**4.4. Definíció** Egy 0-elemes  $S$  félcsoport  $\{0\}$ -tól és  $S$ -től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük.

**4.5. Megjegyzés** Ha egy 0-elemes  $S$  félcsoporthnak nincsenek valódi ideáljai, akkor  $S^2 = \{0\}$  vagy  $S^2 = S$ , mert  $S^2$  az  $S$  ideálja. Az első esetben  $S$ -nek minden, 0-át tartalmazó részhalmaza ideálja  $S$ -nek, ezért  $S$  legfeljebb kételemű félcsoporth.

**4.6. Definíció** Egy 0-elemes  $S$  félcsoporthot 0-egyszerűnek nevezünk, ha  $S^2 \neq \{0\}$  és  $S$ -nek nincsenek valódi (azaz  $\{0\}$ -tól és  $S$ -től különböző) ideáljai.

**4.7. Tétel** Egy 0-elemes  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor 0-egyszerű, ha minden  $0 \neq a \in S$  elem esetén  $SaS = S$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  0-egyszerű félcsoporth. Akkor  $S = S^2 \neq \{0\}$ . Legyen

$$B = \{b \in S : SbS = \{0\}\}.$$

Az világos, hogy  $B$  az  $S$  félcsoporth ideálja. Ha  $B \neq \{0\}$  teljesülne, akkor  $B$  megegyezne  $S$ -sel, amiből  $S^3 = \{0\}$  és így  $S^2 = \{0\}$  adódna, ami ellentmondás. Tehát  $B = \{0\}$ , azaz  $SaS = S$  minden  $0 \neq a \in S$  elemre.

Fordítva, legyen  $S$  olyan nullelemes félcsoporth, amelyben  $SaS = S$  teljesül minden  $0 \neq a \in S$  elemre. Akkor  $S^3 = S$ , amiből  $S^2 \neq \{0\}$  következik. Legyen  $A$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges nem-nulla ideálja. Akkor tetszőleges  $0 \neq a \in A$  esetén  $S = SaS \subseteq SAS \subseteq A$ , amiből  $A = S$  adódik. Tehát  $S$  0-egyszerű félcsoporth.  $\square$

**4.8. Megjegyzés** Ha egy egyszerű félcsoporthhoz egy nullelemet adjunk, akkor 0-egyszerű félcsoporthot kapunk. Ha egy 0-egyszerű félcsoporth olyan, hogy nem tartalmaz 0-tól különböző nullosztót, azaz a félcsoporth tetszőleges  $a, b$  elemei esetén  $ab = 0$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $a = 0$  vagy  $b = 0$ , akkor a 0-elem elhagyásával olyan félcsoporth keletkezik, amelyik egyszerű.

## 4.1. Minimális, 0-minimális ideálok

**4.9. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely  $M$  ideálját minimális ideálnak nevezzük, ha nem tartalmazza valódi módon  $S$  egyetlen ideálját sem.

**4.10. Megjegyzés** Ha  $A$  és  $B$  egy  $S$  félcsoporth ideáljai, akkor  $AB$  is ideálja  $S$ -nek és  $AB \subseteq A \cap B$ . Ebből következik, hogy minden félcsoporthnak legfeljebb egy minimális ideálja van. Ha egy félcsoporthnak van minimális ideálja, akkor azt a félcsoporth magjának nevezzük. Könnyen látható, hogy egy félcsoporthnak akkor és csak akkor van magja, ha összes ideáljának metszete nem üres.

**4.11. Tétel** Ha  $M$  egy  $S$  félcsoporth minimális ideálja, akkor  $M$  egyszerű félcsoporth.

*Bizonyítás.* Legyen  $M$  egy  $S$  félcsoporth minimális ideálja. Mivel  $M^2 \subseteq M$  és  $M^2$  az  $S$  ideálja, ezért  $M^2 = M$ . Legyen  $a \in M$  tetszőleges elem. Mivel  $S^1aS^1$  az  $S$  félcsoporth  $M$  által tartalmazott ideálja, ezért  $S^1aS^1 = M$ . Innen  $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$  következik. Ezért  $MaM = M$ . A 4.2. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy  $M$  egyszerű.  $\square$

**4.12. Következmény** *Ha egy félcsoporthnak van magja, akkor ez a mag egyszerű félcsoporth.*

*Bizonyítás.* A 4.11. Tétel alapján az állítás nyilvánvaló.  $\square$

**4.13. Megjegyzés** *Ha egy  $S$  félcsoporth tartalmaz egy 0-elemet, akkor az az  $S$  félcsoporth minden ideáljában benne van, s ezért  $S$ -nek egyetlen minimális ideálja a  $\{0\}$ .*

**4.14. Definíció** *Egy nullelemet tartalmazó  $S$  félcsoporth valamely  $M$  ideálját 0-minimális ideálnak nevezzük, ha  $M \neq \{0\}$  és 0 az egyetlen olyan ideálja  $S$ -nek, amelyet  $M$  valódi módon tartalmaz.*

**4.15. Tétel** *Ha  $M$  egy 0-minimális ideálja egy nullelemes  $S$  félcsoporthnak, akkor  $M^2 = \{0\}$  vagy  $M$  0-egyszerű részfélcsoporthja  $S$ -nek.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $M^2 \neq \{0\}$ . Akkor  $M^2 = M$ . Legyen  $a \in M$ ,  $a \neq 0$  tetszőleges elem. Mivel  $S^1aS^1$  az  $S$  félcsoporth  $M$  által tartalmazott, nullelemtől különböző ideálja, ezért  $S^1aS^1 = M$ . Innen  $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$  következik. Ezért  $MaM = M$ . A 4.7. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy  $M$  0-egyszerű.  $\square$

**4.16. Tétel** *Ha  $M$  egy nullelemes  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális ideálja, amelyre  $M^2 \neq \{0\}$  teljesül, akkor  $S$  minden  $\{0\} \neq L \subseteq M$  bal oldali ideálja esetén  $L^2 \neq \{0\}$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $L$  az  $S$  félcsoporth olyan nem-nulla bal oldali ideálja, amely a 0-minimális  $M$  ideálnak részhalmaza. Akkor  $LS$  az  $S$  félcsoporth olyan kétoldali ideálja, amelyre

$$LS \subseteq M$$

teljesül. Mivel  $M$  0-minimális ideálja  $S$ -nek, ezért

$$LS = \{0\} \quad \text{vagy} \quad LS = M.$$

Ha  $LS = \{0\}$ , akkor  $0 \in L$  miatt  $L$  kétoldali ideálja  $S$ -nek, s ezért az  $L \neq \{0\}$  feltétel miatt

$$L = M.$$

Így

$$M^2 = LM \subseteq LS = \{0\},$$



ami viszont ellentmond az  $M$ -re vonatkozó  $M^2 \neq \{0\}$  feltételnek. Ezért

$$LS = M.$$

Ekkor viszont

$$M = M^2 = LSLS \subseteq L^2S,$$

amiből már következik  $L^2 \neq \{0\}$ . □

## 4.2. 0-minimális bal oldali ideálok

**4.17. Definíció** Egy nullelemes  $S$  félcsoporth  $\{0\} \neq L$  bal oldali ideálját 0-minimális bal oldali ideálnak nevezzük, ha 0 az egyetlen olyan bal oldali ideálja  $S$ -nek, amelyet  $M$  valódi módon tartalmaz.

**4.18. Tétel** Ha  $L$  egy nullelemes  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyre  $L^2 \neq \{0\}$  teljesül, akkor fennáll az  $L = Sa$  egyenlőség tetszőleges  $0 \neq a \in L$  elemre.

*Bizonyítás.* Legyen  $L$  a 0-elemes  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyre  $L^2 \neq \{0\}$  teljesül. Legyen  $0 \neq a \in L$  tetszőleges elem. Az világos, hogy  $Sa$  az  $S$  olyan legalább kételemű bal oldali ideálja, amelyik az  $L$  egy részhalmaza. Megmutatjuk, hogy  $Sa \neq \{0\}$ . Tegyük fel, indirekt módon, hogy  $Sa = \{0\}$ . Legyen  $s \in S$  tetszőleges elem. Akkor

$$s\{0, a\} = \{0, sa\} = \{0\} \subseteq \{0, a\},$$

azaz  $\{0, a\}$  az  $S$  félcsoporth bal oldali ideálja. Ebből az  $a^2 = 0$  egyenlőség is adódik. Mivel  $a \neq 0$  és  $\{0, a\} \subseteq L$ , ezért az  $L$  bal oldali ideál 0-minimális volta miatt  $L = \{0, a\}$ . Ebből pedig  $L^2 = \{0\}$  következik, amely ellentmond az eredeti  $L^2 \neq \{0\}$  feltételnek. Tehát  $Sa \neq \{0\}$ . Ebből pedig  $Sa = L$  következik, mert  $L$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja. □

**4.19. Tétel** Ha  $L$  egy nullelemes  $S$  félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja, akkor tetszőleges  $s \in S$  elem esetén  $Ls = \{0\}$  vagy  $Ls$  az  $S$  egy 0-minimális bal oldali ideálja.

*Bizonyítás.* Legyen  $L$  a 0-elemes  $S$  félcsoporth tetszőleges 0-minimális bal oldali ideálja. Legyen  $s \in S$  tetszőleges elem. Tegyük fel, hogy  $Ls \neq \{0\}$ . Az világos, hogy  $Ls$  az  $S$  félcsoporth bal oldali ideálja. Megmutatjuk, hogy  $Ls$  az  $S$  0-minimális bal oldali ideálja is. Ehhez tekintsük  $S$ -nek olyan tetszőleges  $A$  bal oldali ideálját, amelyet az  $Ls$  bal oldali ideál tartalmaz. A bizonyítás akkor lesz kész, ha megmutatjuk, hogy  $A = \{0\}$  vagy  $A = Ls$ . Ehhez először is definiáljuk a következő halmazt:

$$B = \{b \in L : bs \in A\}.$$

A  $B$  definíciója miatt világos, hogy

$$Bs \subseteq A.$$

Legyen  $x$  az  $A$  tetszőleges eleme. Mivel  $A \subseteq Ls$ , ezért létezik olyan  $t \in L$  elem, hogy  $x = ts$ . Ezen utóbbi egyenlőségből viszont  $t \in B$  következik, tehát  $x \in Bs$ . Azt kaptuk tehát, hogy

$$A \subseteq Bs.$$

Ebből és a fenti  $Bs \subseteq A$  tartalmazásból

$$A = Bs$$

adódik. A következőkben megmutatjuk, hogy  $B$  az  $S$  félcsoporth bal oldali ideálja. Legyenek  $t \in S$  és  $b \in B$  tetszőleges elemek. Akkor

$$tbs \in tA \subseteq A.$$

Továbbá az is igaz, hogy

$$tb \in tL \subseteq L.$$

Tehát  $tb$  az  $L$  olyan eleme, amelyre  $tbs \in A$  teljesül, amiből a  $B$  definíciója miatt

$$tb \in B$$

következik. Tehát  $B$  az  $S$  bal oldali ideálja. Az  $L$  bal oldali ideál 0-minimalitása miatt  $B = \{0\}$  vagy  $B = L$ . Az első esetben

$$A = \{0\},$$

a második esetben

$$A = Ls$$

adódik. □

**4.20. Tétel** *Legyen  $M$  egy nullelemes  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális ideálja, amely tartalmazza  $S$ -nek egy 0-minimális bal oldali ideálját. Akkor  $M$  az  $S$  félcsoporth mindazon 0-minimális bal oldali ideáljainak uniója, amelyeket  $M$  részhalmazként tartalmaz.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $A$  az  $S$  félcsoporth  $M$  által tartalmazott összes 0-minimális bal oldali ideáljainak unióját. Azt kell bizonyítanunk, hogy  $A = M$ . Az világos, hogy  $A$  az  $S$  félcsoporth bal oldali ideálja. Megmutatjuk, hogy  $A$  az  $S$  félcsoporth jobb oldali ideálja is. Legyenek  $a \in A$  és  $s \in S$  tetszőleges elemek. Az  $A$  definíciója miatt van  $S$ -nek olyan, az  $M$  által tartalmazott 0-minimális  $L$  bal oldali ideálja, hogy  $a \in L$ . A 4.19. Tétel miatt  $Ls = \{0\}$  vagy  $Ls$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja. Az is igaz, hogy

$$Ls \subseteq MS \subseteq M.$$

Így

$$Ls \subseteq A.$$

Következésképpen

$$as \in A.$$

Tehát  $A$  valóban jobb oldali ideálja az  $S$  félcsoporthnak. Mivel a feltételek szerint  $M$  tartalmaz legalább egy 0-minimális bal oldali ideált, ezért

$$A \neq \{0\}.$$

Tehát  $A$  az  $S$  félcsoporth legalább kételemű,  $M$  által tartalmazott ideálja. Mivel  $M$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális ideálja, ezért

$$A = M.$$

□

**4.21. Tétel** *Legyen  $M$  egy nullelemes  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális ideálja, amelyre  $M^2 \neq \{0\}$  teljesül. Ha  $S$ -nek van olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyet  $M$  részhalmazként tartalmaz, akkor  $M$  minden bal oldali ideálja bal oldali ideálja  $S$ -nek is.*

*Bizonyítás.* Legyen  $M$  egy nullelemes  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális ideálja, amelyre  $M^2 \neq \{0\}$  teljesül. A 4.15. Tétel miatt  $M$  egy 0-egyszerű félcsoporth. Legyen  $a$  az  $M$  tetszőleges 0-tól különböző eleme. A 4.7. Tétel szerint

$$MaM \neq \{0\},$$

és így

$$Ma \neq \{0\}.$$

Tegyük fel hogy  $S$ -nek van olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyet  $M$  részhalmazként tartalmaz. A 4.20. Tétel szerint  $M$  előáll az  $S$  félcsoporth  $M$  által tartalmazott 0-minimális bal oldali ideáljainak uniójaként. Legyen  $L$  tetszőleges nem nulla bal oldali ideálja  $M$ -nek. Legyen  $a \in L \setminus \{0\}$  tetszőleges elem. Akkor az előzőek szerint van  $S$ -nek olyan 0-minimális  $L_0 \subseteq M$  bal oldali ideálja, melyre

$$a \in L_0 \setminus \{0\}$$

teljesül. Mivel  $Ma \neq \{0\}$ , ezért  $Ma = L$ , és így  $a \in Ma$ . Ez azt jelenti, hogy

$$L = \cup_{a \in L} Ma.$$

Így tetszőleges  $s \in S$  elem esetén  $sL \subseteq \cup_{a \in L} Ma = L$ . Tehát  $L$  az  $S$  félcsoporth bal oldali ideálja. □

### 4.3. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoporth

**4.22. Lemma** *Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth és  $A$  az  $S$  tetszőleges ideálja. Akkor*

$$\varrho_A = \{(a, b) \in S \times S : a = b \text{ vagy } a, b \in A\}$$

*az  $S$  félcsoporth kongruenciája.*

*Bizonyítás.* Az világos, hogy  $\varrho$  az  $S$  félcsoporth egy ekvivalenciarelációja. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek az  $(a, b) \in \varrho_A$  feltétellel. Akkor tetszőleges  $s \in S$  esetén  $as = bs$  vagy  $as, bs \in A$ . Hasonlóan,  $sa = sb$  vagy  $sa, sb \in A$ . Így  $\varrho_A$  az  $S$  félcsoporth egy jobb-, illetve balkongruenciája. A 2.22. Tétel szerint  $\varrho_A$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája.  $\square$

**4.23. Definíció** *A  $\varrho_A$  kongruenciát az  $S$  félcsoporth  $A$  ideálja szerinti Rees-féle kongruenciának nevezzük.  $A$  szerinte vett faktorfélcsoporthot az  $S$  félcsoporth  $A$  ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthjának nevezzük és  $S/A$ -val jelöljük.*

Megjegyezzük, hogy a 4.22. Lemmában definiált  $\varrho_A$  reláció az  $A = \emptyset$  esetben az  $S$  félcsoporth identikus relációja, s ekkor persze az  $S/\varrho_A$  faktorfélcsoporth izomorf  $S$ -sel. Ebben az esetben is az  $S/A$  jelölést fogjuk használni az  $S/\varrho_A$  helyett. A fentiek szerint tehát  $S/\emptyset$  olyan faktorfélcsoporthot jelöl, amely izomorf  $S$ -sel.

Egy  $(S; \cdot)$  félcsoporth  $A$  ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthjára úgy is tekinthetünk, mint egy olyan félcsoporthra, amelynek az elemeit úgy is megkaphatjuk, hogy az  $S \setminus A$  halmazhoz adjungálunk egy  $0 \notin S \setminus A$  elemet, s az így kapott halmazon a következőképpen definiáljuk a műveletet: Tetszőleges  $a, b \in (S \setminus A) \cup \{0\}$  elemekre

$$ab = \begin{cases} a \cdot b, & \text{ha } a, b, a \cdot b \in (S \setminus A) \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A továbbiakban, ha szükséges, egy  $S/A$  Rees-féle faktorfélcsoporthra az előzőeknek megfelelő formában fogunk hivatkozni. Ezt tesszük már a következő tételekben is.

**4.24. Tétel** *Legyen  $J$  egy ideálja,  $T$  pedig egy részfélcsoporthja egy  $S$  félcsoporthnak. Akkor  $J \cap T$  ideálja  $T$ -nek,  $J \cup T$  részfélcsoporthja  $S$ -nek, valamint*

$$(J \cup T)/J \cong T/(J \cap T).$$

*Bizonyítás.* Mivel

$$(J \cup T)^2 = J^2 \cup JT \cup TJ \cup T^2 \subseteq J \cup T,$$

ezért  $J \cup T$  részfélcsoporthja  $S$ -nek.

Legyenek  $t \in T$  és  $a \in J \cap T$  tetszőleges elemek. Akkor

$$ta, at \in T,$$

mivel  $T$  részfélcsoportha  $S$ -nek. Ugyanakkor

$$ta, at \in J,$$

mert  $a \in J$  és  $J$  ideálja  $S$ -nek. Tehát

$$ta, at \in J \cap T,$$

és így  $J \cap T$  ideálja  $T$ -nek. Ebből természetesen az is következik, hogy  $J$  ideálja  $J \cup T$ -nek. Így tekinthetjük a  $(J \cup T)/J$  és a  $T/(J \cap T)$  Rees faktorokat. Ezekre kapjuk, hogy

$$(J \cup T)/J = ((J \cup T) \setminus J) \cup 0 = (T \setminus J) \cup 0,$$

valamint

$$T/(J \cap T) = (T \setminus (J \cap T)) \cup 0' = (T \setminus J) \cup 0',$$

ahol  $0$ , illetve  $0'$  jelöli a faktorfélcsoporthok nullelemeit a fenti sorrendnek megfelelően.  $\square$

**4.25. Tétel** *Legyen  $J$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges ideálja. Jelölje  $\theta$  az  $S$  félcsoporthnak az  $S/J$  Rees-féle faktorfélcsoportha való természetes homomorfizmusát. Akkor az  $A \mapsto \theta(A) = A/J$  leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az  $S$  félcsoporth  $J$ -t tartalmazó  $A$  ideáljai és az  $S/J$  faktorfélcsoporth ideálja között, mégpedig úgy, hogy az  $S$  félcsoporth tetszőleges,  $J$ -t tartalmazó  $A$  ideálja esetén*

$$(S/J)/(A/J) \cong S/A.$$

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $S/J$  Rees-féle faktorfélcsoporthot  $(S \setminus J) \cup \{0\}$  formában. Akkor tetszőleges  $S$ -beli  $A \supseteq J$  ideál esetén  $\theta(A) = A/J = (A \setminus J) \cup \{0\}$ . Mivel  $\theta$  homomorfizmus, ezért  $\theta(A)$  ideálja  $S/J$ -nek. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha  $Q$  tetszőleges ideálja az  $S/J$  Rees-féle faktorfélcsoporthnak, akkor  $A = \theta^{-1}(Q)$  az  $S$  félcsoporth  $J = \theta^{-1}(0)$ -t tartalmazó ideálja, amelyre  $\theta(A) = Q$  teljesül. Így  $\theta$  szürjektív leképezése az  $S$  félcsoporth  $J$ -t tartalmazó ideáljainak halmazáról az  $S/J$  Rees-féle faktorfélcsoporth ideáljait tartalmazó halmazra. Megmutatjuk, hogy  $\theta$  injektív is. Először is, ha  $A$  és  $B$  az  $S$  félcsoporth  $J$ -t tartalmazó olyan ideáljai, amelyekre  $A \subset B$  teljesül, akkor

$$A \setminus J \subset B \setminus J.$$

Így, ha mindkét halmazhoz ugyanazt a  $0$ -elemet adjungáljuk, akkor az  $A/J$  Rees-féle faktorfélcsoporth a  $B/J$  Rees-féle faktorfélcsoporth valódi részfélcsoporthjaként tekinthető. Ebből pedig már következik, hogy ha az  $S$  félcsoporth valamely,  $J$ -t tartalmazó  $A$  és  $B$  ideáljaira  $\theta(A) = \theta(B)$ , azaz  $A/J = B/J$  teljesül, akkor  $A = B$ . Tehát  $\theta$  valóban injektív. Az  $S$  félcsoporth  $J$ -t tartalmazó tetszőleges  $A$  ideálja esetén  $(S/J)/(A/J) = ((S/J) \setminus (A/J)) \cup \{0\} = S \setminus A \cup \{0\} \cong S/A$ .  $\square$

**4.26. Következmény** Legyenek  $J$  és  $J'$  egy  $S$  félcsoporth olyan ideáljai, amelyekre  $J \subset J'$  teljesül. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy  $J$  maximális  $J'$ -ben (abban az értelemben, hogy nincs  $S$ -nek olyan  $K$  ideálja, amelyre  $J \subset K \subset J'$  teljesülne) az, hogy  $J'/J$  0-minimális ideálja az  $S/J$  Rees-féle faktorfélcsoporthnak. Ebben az esetben  $J'/J$  vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoporth.

*Bizonyítás.* A 4.25. Tételt szerint  $J$  maximális  $J'$ -ben akkor és csak akkor, ha az  $S/J$  Rees-féle faktorfélcsoporth  $J'/J$  nem tartalmazza  $S/J$  egyetlen ideálját sem valódi módon. Mivel  $S/J$  nullelemes és  $J \neq J'$ , ezért ezen utóbbi feltétel éppen azt jelenti, hogy  $J'/J$  az  $S/J$  faktorfélcsoporth 0-minimális ideálja. A 4.15. Tétel szerint ekkor  $J'/J$  vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoporth.  $\square$

**4.27. Következmény** Egy  $S$  félcsoporth valamely  $M$  ideálja akkor és csak akkor maximális (valódi) ideálja  $S$ -nek, ha az  $S/M$  Rees-féle faktorfélcsoporthnak nincs valódi nem  $\{0\}$  ideálja. Ebben az esetben  $S/M$  vagy 0-egyszerű, vagy egy kételemű zéró félcsoporth.

*Bizonyítás.* A 4.25. Tétel szerint kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a 0-elemes  $S/M$  Rees-féle faktorfélcsoporth ideáljai és az  $S$  félcsoporth  $M$ -et tartalmazó ideáljai között. Ennél a megfeleltetésnél  $S/M$  nulleleme az  $M$  ideálnak felel meg. Az  $M$  maximalitása miatt  $S/M$ -nek nincs a  $\{0\}$ -tól különböző ideálja. Ha  $(S/M)^2 \neq \{0\}$ , akkor az  $S/M$  félcsoporth 0-egyszerű. Ha  $(S/M)^2 = \{0\}$ , akkor  $S/M$  minden 0-t tartalmazó részhalmaza ideál, s így  $S/M$  egy kételemű zéró félcsoporth.  $\square$

## 4.4. Félcsoporth főfaktorai

**4.28. Definíció** Az  $S$  félcsoporth valamely nem üres  $A$  részhalmazát tartalmazó bal oldali ideálok metszetét az  $A$  által generált bal oldali ideálnak nevezzük. Ha  $A = \{a\}$ , akkor az  $a$  elem által generált fő balideálról beszélünk, amelyet  $L(a)$ -val jelölünk. Világos, hogy  $L(a) = a \cup Sa = S^1a$ . Ennek duálisa az  $a$  elem által generált fő jobbideál, amelyet  $R(a)$ -val jelölünk. Világos, hogy  $R(a) = a \cup aS = aS^1$ . Az  $a$  elem által generált főideált  $J(a)$ -val jelöljük. Nem nehéz belátni, hogy  $J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS = S^1aS^1$ .

**4.29. Megjegyzés** Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a$  eleme esetén, azon  $S$ -beli elemek, amelyek ugyanazt a főideált generálják, mint az  $a$  elem,  $J(a)$ -nak egy nem üres részhalmazát alkotják; ezt a részhalmazt  $J_a$ -val fogjuk jelölni. A  $J(a) \setminus J_a$  halmazt  $I(a)$ -val jelöljük.

**4.30. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporth bármely  $a$  eleme esetén  $I(a)$  vagy üres vagy az  $S$  félcsoporth ideálja.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $I(a)$  nem üres egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  eleme esetén. Legyenek  $s \in S$  és  $b \in I(a)$  tetszőleges elemek. Ha az  $bs \in J(a)$  szorzat nem lenne

$I(a)$ -ban, akkor  $bs \in J_a$  teljesülne, azaz fennálna a  $J(a) = J(bs)$  egyenlőség. Mivel  $J(bs) \subseteq J(b)$ , ezért a  $J(a) \subseteq J(b)$  tartalmazást kapnánk eredményül. Mivel  $b \in J(a)$ , ezért  $J(b) \subseteq J(a)$ . A két tartalmazásból  $J(a) = J(b)$  és így  $b \in J_a$  következik, ami ellentmond a  $b \in I(a) = J(a) \setminus J_a$  tartalmazásnak. Így  $bs \in I(a)$ . Hasonlóan igazolható, hogy  $sb \in I(a)$ , tehát  $I(a)$  ideálja  $S$ -nek.  $\square$

**4.31. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth főfaktorain a  $J(a)/I(a)$  faktorfélcsoportokat értjük ( $a \in S$ ).

**4.32. Tétel** Tetszőleges félcsoporth tetszőleges főfaktora vagy egyszerű félcsoporth, vagy 0-egyszerű félcsoporth, vagy zéró félcsoporth.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy félcsoporth és  $a \in S$  egy tetszőleges elem. Ha  $I(a) = \emptyset$ , akkor  $J(a)$  az  $S$  félcsoporth minimális ideálja. Akkor viszont a 4.11. Tétel miatt  $J(a) \cong J(a)/I(a)$  egyszerű félcsoporth. Vizsgáljuk tehát azt az esetet, amikor  $I(a) \neq \emptyset$ . Mivel  $I(a)$  maximális ideál  $J(a)$ -ban, ezért a 4.26. Következmény szerint a  $J(a)/I(a)$  Rees-féle faktorfélcsoporth vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoporth.  $\square$

**4.33. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot féligeegyszerű félcsoporthnak nevezünk, ha minden főfaktora vagy egyszerű, vagy 0-egyszerű.

**4.34. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth fősorozatán olyan ( $S$ -sel kezdődő és az üres halmazzal végződő)

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

véges sorozatot értünk, amelyben szereplő  $S_i$ -k ( $i = 1, \dots, m$ ) az  $S$  félcsoporth ideáljai, és tetszőleges  $i = 1, \dots, m$  index esetén nem adható meg  $S$ -nek olyan  $J$  ideálja, amelyre  $S_i \supset J \supset S_{i+1}$  teljesülne (azaz a sorozat nem finomítható). A fenti fősorozat faktorain az  $S_i/S_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) faktorfélcsoporthokat értjük (az  $S_m/S_{m+1}$  félcsoporth izomorf  $S_m$ -mel).

**4.35. Megjegyzés** (A 4.26. Következmény miatt), ha

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

egy  $S$  félcsoporth fősorozata, akkor tetszőleges  $i = 1, \dots, m-1$  index esetén az  $S_i/S_{i+1}$  félcsoporth vagy egy 0-egyszerű félcsoporth vagy egy zéró félcsoporth. Az  $S_m/S_{m+1}$  félcsoporth pedig egyszerű, mivel  $S_m$  egyszerű és  $S_m/S_{m+1} \cong S_m$ .

**4.36. Tétel** Legyen  $S$  olyan félcsoporth, amelynek van egy

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

*főszorozata. Akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik a főszorozat faktorai és az  $S$  félcsoporth főfaktorai között, mégpedig úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett félcsoporthok egymással izomorfak. Speciálisan, az  $S$  bármely két főszorozata egymással izomorf, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két főszorozat faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorok egymással izomorfak. Az  $S$  azon ideálja, amely a főszorozat utolsó nem üres eleme, az  $S$  félcsoporth magja.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a főszorozat tetszőleges  $i = 1, \dots, m$  indexhez tartozó  $S_i/S_{i+1}$  faktorát. Legyen  $a \in S_i/S_{i+1}$  tetszőleges. Az világos, hogy  $J(a) \cup S_{i+1}$  az  $S$  félcsoporth olyan ideálja, amelyre  $S_i \supseteq J(a) \cup S_{i+1} \supset S_{i+1}$  teljesül. Mivel  $S_i$  és  $S_{i+1}$  egy főszorozat egymás melletti elemei, ezért ebből a tartalmazásból

$$J(a) \cup S_{i+1} = S_i$$

következik.

Legyen  $b \in I(a)$  tetszőleges. Akkor

$$b \in S_{i+1}.$$

Ellenkező esetben azt kapnánk, hogy  $J(b) \cup S_{i+1} = S_i$ , amiből  $a \in J(b)$  következne, ellentmondva a  $b \in I(a)$  feltételnek. Így tehát minden  $b \in I(a)$  elemre  $b \in S_{i+1}$  teljesül, s ezért

$$I(a) \subseteq S_{i+1}.$$

Másrésztől viszont, ha  $c \in J(a) \cap S_{i+1}$ , akkor

$$J(c) \subseteq S_{i+1},$$

ezért

$$J(c) \neq J(a),$$

ami azt eredményezi, hogy

$$c \in I(a).$$

Ez, és közvetlenül az előzőekben bizonyított  $I(a) \subseteq S_{i+1}$  tartalmazás azt eredményezi, hogy

$$I(a) = J(a) \cap S_{i+1}.$$

A 4.24. Tétel szerint

$$J(a)/(J(a) \cap S_{i+1}) \cong (J(a) \cup S_{i+1})/S_{i+1}.$$

A bal oldali faktorfélcsoporth izomorf a  $J(a)/I(a)$  faktorfélcsoporthtal, a jobb oldali pedig az  $S_i/S_{i+1}$  faktorfélcsoporthtal. Tehát, a főszorozat  $S_i/S_{i+1}$  faktora izomorf a  $J(a)/I(a)$  főfaktorral.



Továbbá,

$$J_a = J(a) \setminus I(a) = (J(a) \cup S_{i+1}) \setminus (i(a) \cup S_{i+1}) = Si \setminus S_{i+1}.$$

Ezért, ha  $a' \in S_i \setminus S_{i+1}$ , akkor  $J(a') = J(a)$ . Tehát az  $S_i/S_{i+1}$ -hez tartozó  $J(a)/I(a)$  főfaktor nem függ attól, hogy az  $a$  elemet hogyan választjuk  $S_i \setminus S_{i+1}$ -ből. Mésrészt, ha  $a$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges eleme, akkor van olyan  $i \in \{1, \dots, m\}$  index, hogy  $a \in S_i \setminus S_{i+1}$ . Így az

$$S_i/S_{i+1} \mapsto J(a)/I(a)$$

kölcsönösen egyértelmű leképezése a fősorozat faktorai halmazának az  $S$  félcsoporth főfaktorai halmazára. Ebből az is következik, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két fősorozat faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorkok egymással izomorfak. Mivel a fősorozat utolsó nem üres eleme nem tartalmazza  $S$  egyetlen ideálját sem valódi módon, ezért ez az elem az  $S$  félcsoporth magja.  $\square$

## 4.5. A Green-féle $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{H}$ -, $\mathcal{D}$ -relációk

Tetszőleges  $S$  félcsoporthon definiáljuk a következő relációkat. Azt mondjuk, hogy  $S$  valamely  $a$  és  $b$  elemei  $\mathcal{L}$ -relációban [ $\mathcal{R}$ -relációban] állnak, ha az általuk generált fő balideálok [fő jobbideálok] megegyeznek, azaz,  $S^1a = S^1b$  [ $aS^1 = bS^1$ ]. Az világos, hogy  $\mathcal{L}$  az  $S$  félcsoporth egy jobbkongruenciája,  $\mathcal{R}$  pedig az  $S$  egy balkongruenciája. Az  $\mathcal{L}$  és  $\mathcal{R}$  relációk metszetét  $\mathcal{H}$ -val jelöljük.

**4.37. Lemma** *Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén  $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ .*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$  teljesül egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $b$  elemeire. Akkor  $(a, c) \in \mathcal{L}$  és  $(c, b) \in \mathcal{R}$  teljesül  $S$  valamely  $c$  elemére, azaz, megadhatók olyan  $u, v \in S^1$  elemek, hogy  $a = uc$  és  $b = cv$ . Legyen  $d = av = ucv = ub$ . Mivel  $\mathcal{L}$  jobb kongruencia, ezért  $(a, c) \in \mathcal{L}$ -ből  $(av, cv) \in \mathcal{L}$ , azaz,  $(d, b) \in \mathcal{L}$  következik. Mivel  $\mathcal{R}$  bal kongruencia, ezért  $(c, b) \in \mathcal{R}$ -ből  $(uc, ub) \in \mathcal{R}$ , azaz,  $(a, d) \in \mathcal{R}$  következik. Így  $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ . Tehát  $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ . A fordított tartalmazás hasonlóan bizonyítható.  $\square$

Az  $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$  ekvivalenciarelációt  $\mathcal{D}$ -vel fogjuk jelölni. Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a$  eleme esetén  $L_a$ ,  $R_a$ ,  $H_a$ , illetve  $D_a$  fogja jelölni az  $S$ -en értelmezett  $\mathcal{L}$ -,  $\mathcal{R}$ -,  $\mathcal{H}$ -, illetve  $\mathcal{D}$ -reláció azon osztályát, amely az  $a$  elemet tartalmazza.

**4.38. Tétel (Green-tétel)** *Legyenek  $a$  és  $b$  egy  $S$  félcsoporth  $\mathcal{R}$ -ekvivalens elemei úgy, hogy  $b = as$  és  $a = bs'$ . Akkor a  $\sigma : x \mapsto xs$  ( $x \in L_a$ ) az  $L_a$ -nak  $L_b$ -re,  $\sigma' : y \mapsto ys$ , ( $y \in L_b$ ) pedig  $L_b$ -nek  $L_a$ -ra való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés  $\mathcal{R}$ -osztály tartó, azaz  $(x, x\sigma) \in \mathcal{R}$  és  $(y, y\sigma') \in \mathcal{R}$  teljesül minden  $x \in L_a$  és  $y \in L_b$  elemre.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x \in L_a$  tetszőleges. Mivel  $\mathcal{L}$  jobb kongruencia  $S$ -en, ezért  $(x, a) \in \mathcal{L}$ -ből

$$(xs, b) \in \mathcal{L}$$

következik, és így

$$xs \in L_b.$$

Tehát  $\sigma$  az  $L_a$  részhalmazt az  $L_b$  részhalmazba képezi. Hasonlóan bizonyítható, hogy  $\sigma'$  az  $L_b$  részhalmazt az  $L_a$  részhalmazba képezi.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy  $\sigma\sigma'$  identikus leképezés  $L_a$ -n, tekintsünk egy tetszőleges  $x \in L_a$  elemet. Ehhez az elemhez megadható olyan  $t \in S^1$  elem, amely eleget tesz az

$$x = ta$$

egyenlőségnek. Ekkor viszont

$$(x)\sigma\sigma' = xss' = tass' = tbs' = ta = x,$$

azaz  $\sigma\sigma'$  identikus leképezés az  $L_a$  részhalmazon.

Hasonlóan igazolható, hogy  $\sigma'\sigma$  identikus leképezés az  $L_b$  részhalmazon. Így tehát  $\sigma$  az  $L_a$ -nak  $L_b$ -re,  $\sigma'$  pedig  $L_b$ -nek  $L_a$ -ra való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei.

Mivel tetszőleges  $x \in L_a$  elem esetén

$$(x)\sigma = xs$$

és (a fentiek szerint)

$$x = (x)\sigma s',$$

ezért

$$(x, (x)\sigma) \in \mathcal{R}.$$

Tehát  $\sigma$   $\mathcal{R}$ -osztály tartó. Hasonlóan igazolható, hogy  $\sigma'$  is  $\mathcal{R}$ -osztály tartó.  $\square$

**4.39. Tétel** *Legyenek  $a$  és  $c$  egy  $S$  félcsoport  $\mathcal{D}$ -ekvivalens elemei. Ha  $b$  az  $S$  olyan eleme, amelyre  $(a, b) \in \mathcal{R}$  és  $(b, c) \in \mathcal{L}$ , továbbá  $as = b$ ,  $bs' = a$ ,  $tb = c$ ,  $t'c = b$  ( $s, s', t, t' \in S^1$ ), akkor az  $x \mapsto txs$  ( $x \in H_a$ ) és  $z \mapsto t'zs'$  ( $z \in H_c$ ) leképezések  $H_a$  és  $H_c$  közötti olyan bijekciók, amelyek egymás inverzei. Ebből következően, az ugyanazon  $\mathcal{D}$ -osztályban lévő  $\mathcal{H}$ -osztályok számossága egymással megegyezik.*

*Bizonyítás.* A 4.38. Tétel duálisa szerint a  $\tau : y \mapsto ty$  ( $y \in R_b$ ) az  $R_b$ -nak  $R_c$ -re,  $\tau' : z \mapsto t'z$  ( $z \in R_c$ ) pedig  $R_c$ -nek  $R_b$ -re való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés  $\mathcal{L}$ -osztály tartó.

Legyenek  $\sigma$ , illetve  $\sigma'$  a Green-tételben szereplő leképezések, de itt  $\sigma$ -nak a  $H_a$ -ra, illetve  $\sigma'$ -nek  $H_b$ -re való leszűkítéseit tekintsük. Mivel az eredeti leképezések a Green-tétel

szerint  $\mathcal{R}$ -osztálytartók, ezért  $\sigma$  leszűkítése  $H_a$ -nak  $H_b$ -re, a  $\sigma'$  leszűkítése pedig  $H_b$ -nek  $H_a$ -ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Hasonlóan, legyenek  $\tau$ , illetve  $\tau'$  a bizonyítás előző részében szereplő leképezések, de azoknak is csak a  $H_b$ -re, illetve  $H_c$ -re való leszűkítéseit tekintjük. Mivel mindketten  $\mathcal{L}$ -osztálytartók a Green-tétel duálisa szerint, ezért  $\tau$  leszűkítése  $H_b$ -t  $H_c$ -re, a  $\tau'$  leszűkítése pedig  $H_c$ -t  $H_b$ -re képezi le kölcsönösen egyértelmű módon. Így  $\sigma\tau$  a  $H_a$ -nak  $H_c$ -re, a  $\tau'\sigma'$  pedig a  $H_c$ -nek  $H_a$ -ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amelyek ráadásul egymás inverzei. Ezzel igazoltuk a tétel állítását.  $\square$

**4.40. Tétel** *Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth. Ha  $L$  jelöli  $S$  egy tetszőleges  $\mathcal{L}$ -osztályát,  $R$  pedig egy tetszőleges  $\mathcal{R}$ -osztályát, akkor az  $LR$  szorzat minden eleme  $S$  egy  $\mathcal{D}$ -osztályában van.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $a, b, a', b'$  az  $S$  félcsoporth olyan elemei, melyekre  $a, a' \in L$  és  $b, b' \in R$  teljesül. Mivel  $\mathcal{L}$  jobb kongruencia, ezért

$$ab, a'b \in L.$$

Mivel  $\mathcal{R}$  bal kongruencia, ezért

$$a'b, a'b' \in R.$$

Következésképpen

$$ab \mathcal{L} a'b \mathcal{R} a'b',$$

azaz

$$ab \mathcal{D} a'b'.$$

Így az  $LR$  szorzat minden eleme egy  $\mathcal{D}$ -osztályban van.  $\square$

**4.41. Lemma** *Ha  $L$  egy 0-elemes  $S$  félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja, akkor  $L \setminus \{0\}$  egy  $\mathcal{L}$ -osztálya  $S$ -nek.*

*Bizonyítás.* Legyen  $a \in L \setminus \{0\}$  tetszőleges elem. Akkor vagy

$$Sa = L$$

vagy

$$Sa = \{0\}.$$

Ha  $Sa = L$  teljesül minden  $a \in L \setminus \{0\}$  elemre, akkor

$$S^1a = S^1b$$

teljesül minden  $a, b \in L \setminus \{0\}$  elemre, és így

$$L \setminus \{0\} \subseteq L_a.$$

Ha  $c \in L_a$ , akkor

$$c \in S^1a = L,$$

és így

$$L_a \subseteq L \setminus \{0\}.$$

Tehát

$$L \setminus \{0\} = L_a.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor  $Sa = \{0\}$  valamely  $a \in L \setminus \{0\}$  elemre. Akkor  $\{0, a\}$  az  $S$  félcsoporth  $L$  által tartalmazott nem-zéró bal oldali ideálja. Ezért

$$L = \{0, a\} = S^1a,$$

amiből következik, hogy  $S^1x = S^1a$  akkor és csak akkor teljesül valamely  $x \in S$  elemre, ha  $x = a$ . Tehát

$$L_a = \{a\} = L \setminus \{0\}. \quad \square$$

**4.42. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $e$  idempotens eleme jobb oldali egységeleme  $L_e$ -nek, bal oldali egységeleme  $R_e$ -nek és kétoldali egységeleme  $H_e$ -nek.

*Bizonyítás.* Ha  $a \in L_e$ , akkor  $a \in Se$  és így  $ae = a$ . Hasonlóan, ha  $a \in R_e$ , akkor  $ea = a$ . Mivel  $H_e = R_e \cap L_e$ , ezért  $ae = ea = a$  szükségképpen teljesül minden  $a \in H_e$  elemre az előzőek miatt.  $\square$

**4.43. Tétel** Tetszőleges félcsoporth minden  $\mathcal{H}$ -osztálya legfeljebb egy idempotens elemet tartalmaz.

*Bizonyítás.* A tétel állítása a 4.42. Tételt nyilvánvaló következménye.  $\square$

**4.44. Lemma** Legyen  $H$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $\mathcal{H}$ -osztálya. Ha valamely  $h \in H$  és  $s \in S$  elem esetén  $hs \in H$ , akkor  $Hs = H$ . Hasonlóan, ha  $sh \in H$ , akkor  $sH = H$ .

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $hs \in H$  valamely  $h \in H$  és  $s \in S$  elemekre. Akkor

$$(hs, h) \in \mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R},$$

és ezért

$$H = H_h = H_{hs},$$

valamint

$$R_h = R_{hs}, \quad L_h = L_{hs}.$$

Mivel  $h \mathcal{R} hs$ , ezért a 4.38. Tétel miatt

$$x \mapsto xs$$

$L_h$ -nak  $L_{hs} = L_h$ -ra való kölcsönösen egyértelmű  $\mathcal{R}$ -osztály tartó leképezése. Ez utóbiból következik, hogy a vizsgált leképezés  $H$ -nak  $H$ -ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, s ezért

$$Hs = H.$$

A 4.38. Tétel duálisának felhasználásával hasonlóan bizonyítható, hogy ha  $sh \in H$ , akkor  $sH = H$ .  $\square$

**4.45. Tétel** *Ha egy  $S$  félcsoporth három eleme,  $a, b, ab$  az  $S$  ugyanazon  $\mathcal{H}$ -osztályában vannak, akkor ez a  $\mathcal{H}$ -osztály az  $S$  félcsoporth egy részcsoporthja. Speciálisan, az idempotens elemeket tartalmazó  $\mathcal{H}$ -osztályok mindegyike részcsoporthja  $S$ -nek.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $a$  és  $b$  egy  $S$  félcsoporth olyan elemei, amelyekre  $a, b, ab \in H$  teljesül, ahol  $H$  az  $S$  egy  $\mathcal{H}$ -osztályát jelöli. A 4.44. Lemma szerint  $Hb = H$ . Legyenek  $c, d \in H$  tetszőleges elemek. Akkor

$$cb \in Hb = H.$$

Mivel  $c, cb \in H$ , ezért a 4.44. Lemma szerint  $cH = H$ . Így  $cd \in H$ . Újból alkalmazva a 4.44. Lemmát, azt kapjuk, hogy  $Hd = H$ . Tehát  $H$  tetszőleges  $c$  és  $d$  elemei esetén

$$cH = Hd = H,$$

amiből az 1.25. Tétel szerint már következik, hogy  $H$  az  $S$  félcsoporth egy részcsoporthja.  $\square$

**4.46. Tétel** *Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a, b$  elemei esetén  $ab \in R_a \cap L_b$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $R_b \cap L_a$  tartalmaz egy idempotens elemet. Ha ez a helyzet, akkor  $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$ .*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $ab \in R_a \cap L_b$  teljesül valamely  $a, b \in S$  elemekre. Az  $ab \in R_a$  tartalmazásból az következik, hogy van  $S$ -nek olyan  $b'$  eleme, hogy

$$(ab)b' = a.$$

Ebből viszont a 4.38. Tétel szerint az adódik, hogy

$$\sigma : x \mapsto xb \ (x \in L_a)$$

$L_a$ -nak  $L_{ab}$ -re,

$$\sigma' : y \mapsto yb'$$

pedig  $L_{ab}$ -nek  $L_a$ -ra való olyan kölcsönösen egyértelmű  $\mathcal{R}$ -osztály tartó leképezései, amelyek egymás inverzei. A kiinduló feltétel miatt  $ab \in L_b$ , s ezért  $L_{ab} = L_b$ . Ebből viszont az következik, hogy  $\sigma'$  a  $b \in L_b$  elemet a  $bb' \in L_a$  elembe viszi. A  $\sigma'$  leképezés  $\mathcal{R}$ -osztály tartó tulajdonsága miatt az is igaz, hogy  $bb' \in R_b$ . Így

$$bb' \in R_b \cap L_a.$$

Ebből viszont

$$(bb')^2 = (bb')(bb') = ((bb')\sigma)\sigma' = (bb')(\sigma \circ \sigma') = (bb')id_{L_a} = bb'$$

adódik, azaz  $bb'$  az  $R_b \cap L_a$  egy idempotens eleme.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $R_b \cap L_a$  tartalmaz egy  $e$  idempotens elemet. A 4.42. Tétel szerint  $e$  az  $R_b$ -ben bal oldali egységelem, s ezért

$$eb = b.$$

Mivel  $e \mathcal{R} b$  (és  $eb = b$ ), ezért a 4.38. Tétel szerint

$$\sigma : x \mapsto xb \ (x \in L_e)$$

$L_e$ -nek  $L_b$ -re való  $\mathcal{R}$ -osztály tartó, kölcsönösen egyértelmű leképezése. Mivel  $a \in L_e$ , ezért

$$ab \in L_b.$$

Mivel  $\sigma$   $\mathcal{R}$ -osztály tartó, ezért

$$ab \in R_a.$$

Így

$$ab \in R_a \cap L_b.$$

Eddig tehát beláttuk, hogy egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a, b$  elemei esetén  $ab \in R_a \cap L_b$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $R_b \cap L_a$  tartalmaz egy idempotens elemet.

A bizonyítás teljessé tételéhez meg kell még mutatni, hogy ha  $R_b \cap L_a$  tartalmaz egy idempotens elemet, akkor az  $aH_b = H_ab = H_aH_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$  egyenlőségek teljesülnek.

Tegyük fel tehát, hogy valamely  $a, b \in S$  elemek esetén  $R_b \cap L_a$  tartalmaz egy  $e$  idempotens elemet. Legyenek  $x \in H_a$  és  $y \in H_b$  tetszőleges elemek. Akkor

$$e \in R_y \cap L_x,$$

amiből - a fenti két feltétel ekvivalenciáját is használva - következik, hogy

$$xy \in R_x \cap L_y = R_a \cap L_b.$$

Mivel  $x$ , illetve  $y$  tetszőleges  $H_a$ -, illetve  $H_b$ -beli elemek, ezért

$$H_aH_b \subseteq R_a \cap L_b.$$

Mivel  $L_e = L_a$  és  $L_b = L_{ab}$ , ezért

$$\sigma : x \mapsto xb \ (x \in L_a)$$

$L_a$ -nak  $L_{ab}$ -re való  $\mathcal{R}$ -osztály tartó leképezése, s ezért az is igaz, hogy  $\sigma H_a$ -t  $H_{ab}$ -re képezi le, s ezért  $H_a b = H_{ab}$ . Tehát

$$H_a b \subseteq H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{ab} = H_a b,$$

s ezért

$$H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b.$$

Hasonlóan igazolható, hogy  $a H_b = H_{ab}$ . Így valóban teljesülnek a tételben szereplő  $a H_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$  egyenlőségek.  $\square$

Legyen  $D$  egy félcsoport tetszőleges  $\mathcal{D}$ -osztálya. Jelöljön  $0$  egy olyan szimbólumot, amely nem eleme  $D$ -nek. Legyen  $T = D \cup \{0\}$ . A  $T$  halmazon definiáljunk egy  $*$  műveletet a következőképpen. Tetszőleges  $a, b \in D$  elemek esetén legyen

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{ha } ab \in R_a \cap L_b, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

továbbá legyen

$$a * 0 = 0 * a = 0 * 0 = 0.$$

**4.47. Lemma**  $(T; *)$  egy félcsoport.

*Bizonyítás.* A  $*$  művelet asszociativitásának igazolásához tekintsünk tetszőleges  $a, b, c \in T$  elemeket. Ha ezek közül mindkettő nulla, akkor

$$(a * b) * c = 0 = a * (b * c).$$

Tegyük fel, hogy valamelyikük nem nulla. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$a * (b * c) \neq 0.$$

Ekkor

$$b * c \neq 0,$$

ami a  $*$  művelet definíciója miatt a

$$b * c = bc \in R_b \cap L_c$$

teljesülését jelenti. Emiatt

$$R_{bc} = R_b \quad \text{és} \quad L_{bc} = L_c.$$

Mivel a

$$0 \neq a * (b * c) = a * (bc)$$

feltétel teljesül, ezért

$$a * (bc) = a(bc) \in R_a \cap L_{bc},$$

és így

$$R_{bc} \cap L_a$$

tartalmaz egy idempotens elemet. Mivel a fentiek szerint  $R_{bc} = R_b$ , ezért

$$R_b \cap L_a$$

tartalmaz egy idempotens elemet. A 4.46. Tétel miatt ez ekvivalens az

$$ab \in R_a \cap L_b$$

feltétellel. Ebből egyrészt

$$R_{ab} = R_a,$$

másrészt

$$a * b = ab \neq 0$$

adódik. Ha ezek mellett feltesszük, hogy

$$(ab) * c = (a * b) * c = 0,$$

akkor ebből a feltételből

$$a(bc) = (ab)c \notin R_{ab} \cap L_c = R_a \cap L_{bc}$$

adódik, amiből a 4.46. Tétel miatt az következik, hogy

$$R_{bc} \cap L_a$$

nem tartalmaz idempotens elemet. Ez ellentmondás, hiszen korábban éppen ennek az ellenkezőjét kaptuk. Így szükségképpen

$$(a * b) * c \neq 0.$$

Ekkor persze

$$(ab) * c \neq 0 \quad \text{és} \quad a * b \neq 0,$$

és ezért

$$a * (b * c) = a(bc) = (ab)c = (a * b) * c.$$

Nem részletezzük, de az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy ha

$$(a * b) * c \neq 0,$$

akkor

$$a * (b * c) \neq 0$$

és

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Ezzel beláttuk, hogy a  $*$  művelet asszociatív a  $T = D \cup \{0\}$  halmazon, azaz  $(T; *)$  félcsoport.  $\square$



## Feladatok

**4.1.** (Megoldás: 17.12.) Egy 0-elemes félcsoporthat nil félcsoporthat nevezünk, ha tetszőleges  $a$  eleméhez megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy  $a^n = 0$ . Mutassuk meg, hogy nincs 0-egyszerű nil félcsoporthat.

**4.2.** (Megoldás: 17.13.) Egy  $S$  félcsoporthat  $\mathcal{R}$ -kommutatívnat nevezünk, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $ab \in baS^1$  teljesül. Mutassuk meg, hogy egy  $S$  félcsoporthat akkor és csak akkor  $\mathcal{R}$ -kommutatív, ha  $S$  Green-féle  $\mathcal{R}$  ekvivalenciája kommutatív kongruencia!

## 5. fejezet

# Félcsoportok ideálbővítése

**5.1. Definíció** Legyen  $A$  tetszőleges,  $Q$  pedig nullelemes (de egyébként tetszőleges) félcsoport. Az  $S$  félcsoportot az  $A$  félcsoportnak a  $Q$  félcsoporttal képezett ideálbővítésének (röviden bővítésének) nevezzük, ha  $S$  tartalmaz olyan, az  $A$ -val izomorf  $B$  ideált, hogy az  $S/B$  Rees-féle faktorfélcsoport izomorf  $Q$ -val.

**5.2. Megjegyzés** Megjegyezzük, hogy a továbbiakban  $A$ -t mindig azonosítjuk  $B$ -vel. Feltehetjük, hogy  $A \cap Q = \emptyset$ . Ekkor  $S = A \cup Q^*$  formában is tekinthető, ahol  $Q^*$  jelöli a  $Q \setminus \{0\}$  halmazt. Tehát, ha arra a kérdésre akarunk választ kapni, hogy van-e olyan  $S$  félcsoport, amely egy  $A$  félcsoportnak egy nullelemes  $Q$  félcsoporttal való ideálbővítése, akkor azt is kérdezhetjük, hogy lehet-e az  $S = A \cup Q^*$  halmazon olyan  $\circ$  assziatív műveletet értelmezni, melynek  $A$ -ra való leszűkítése megegyezik az eredeti  $A$ -beli művelettel, továbbá  $A$  az  $(S, \circ)$  félcsoportnak olyan ideálja, hogy az  $S/A$  Rees-féle faktorfélcsoport izomorf  $Q$ -val.

## 5.1. Ideálbővítés, parciális transzformációk

**5.3. Definíció** Nem üres  $S$  halmaz esetén az  $S \times S$  halmaz valamely nem üres részhalmazának  $S$ -be való egyértelmű leképezését az  $S$  halmazon értelmezett parciális műveletnek nevezzük. Egy parciális művelettel ellátott halmazt parciális grupoidnak nevezünk.

**5.4. Definíció** Egy  $S$  parciális grupoidnak egy  $S'$  parciális grupoidba való  $\theta$  leképezését parciális homomorfizmusnak nevezzük, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az alábbiak teljesülnek: ha az  $ab$  szorzat értelmezve van  $S$ -ben, akkor a  $\theta(a)\theta(b)$  szorzat értelmezve van  $S'$ -ben és  $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$ .

**5.5. Tétel** Legyen  $(A; \cdot)$  tetszőleges,  $(Q; *)$  pedig nullelemes félcsoport. Legyen  $\theta$  a  $Q^* = Q \setminus \{0\}$  parciális félcsoportnak az  $A$  félcsoportba való parciális homomorfizmusa. Legyen

$S = A \cup (Q \setminus \{0\})$ . Az  $S$ -en értelmezzünk egy  $\circ$  műveletet a következőképpen: Tetszőleges  $a, b \in A$  és  $x, y \in Q$  elemek esetén legyen

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \theta(x)\theta(y), & \text{ha } x * y = 0 \text{ } Q\text{-ban;} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$a \circ x = a \cdot \theta(x); \quad (5.2)$$

$$x \circ a = \theta(x) \cdot a; \quad (5.3)$$

$$a \circ b = a \cdot b. \quad (5.4)$$

Akkor  $(S; \circ)$  félcsoporth, amely  $A$ -nak  $Q$ -val való bővítése. Ha  $A$  egységelemes félcsoporth, akkor  $A$ -nak  $Q$ -val való minden bővítése a fenti módon (azaz parciális homomorfizmusokkal) konstruálható.

*Bizonyítás.* A tétel állításának első részéhez tulajdonképpen csak azt kell bizonyítani, hogy a tételben definiált művelet asszociatív. Ez a bizonyítás technikai jellegű. Nyolc eset van, amelyeket  $AAA$ ,  $AAQ^*$ , ... módon fogunk jelölni attól függően, hogy a háromtényezős szorzatban szereplő elemek hol helyezkednek el. Például az  $AAQ^*$  esetről az első két tényező  $A$ -beli, a harmadik tényező pedig  $Q^*$ -beli elem. A következőkben jelöljenek  $a, b$  és  $c$  tetszőleges  $A$ -beli,  $x, y$  és  $z$  pedig tetszőleges  $Q^*$ -beli elemeket.

$AAA$  eset: Itt tulajdonképpen nincs is mit bizonyítanunk, mert az  $A$  belüli elemek közötti  $\circ$  művelet megegyezik az  $A$ -beli eredeti  $\cdot$  művelettel, amely viszont asszociatív.

$AAQ^*$  eset:

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ x &= (a \cdot b) \circ x = (a \cdot b) \cdot \theta(x) = a \cdot (b \cdot \theta(x)) = \\ &= a \cdot (b \circ x) = a \circ (b \circ x). \end{aligned}$$

Az  $AQ^*A$ ,  $Q^*AA$  és  $Q^*AQ^*$  esetek vizsgálata az  $AAQ^*$  esethez hasonló.

$AQ^*Q^*$  eset:

$$(a \circ x) \circ y = (a \cdot \theta(x)) \circ y = (a \cdot \theta(x)) \cdot \theta(y) = a \cdot (\theta(x)\theta(y)).$$

Ha  $x * y = 0$ , akkor

$$a \cdot (\theta(x)\theta(y)) = a \cdot (x \circ y) = a \circ (x \circ y).$$

Ha  $x * y \neq 0$ , akkor

$$a \cdot (\theta(x)\theta(y)) = a \cdot (\theta(xy)) = a \circ (x * y) = a \circ (x \circ y).$$

A  $Q^*Q^*A$  eset vizsgálata az előző esethez hasonló.

$Q^*Q^*Q^*$  eset: Ha  $x * y * z \neq 0$ , akkor

$$(x \circ y) \circ z = (x * y) * z = x * (y * z) = x \circ (y \circ z).$$

Ezért vizsgálhatjuk az  $x * y * z = 0$  esetet.

Ha  $x * y \neq 0$   $Q$ -ban, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (x * y) \circ z = (\theta(x * y) \cdot \theta(z)) = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z).$$

Ha  $x * y = 0$   $Q$ -ban, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (\theta(x)\theta(y)) \circ z = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z).$$

Ha  $y * z \neq 0$   $Q$ -ban, akkor

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y * z) = \theta(x) \cdot \theta(y * z) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z)).$$

Ha  $y * z = 0$   $Q$ -ban, akkor

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (\theta(y) \cdot \theta(z)) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z)).$$

A fenti négy eset eredményeinek figyelembevételével a  $\circ$  művelet asszociativitása a  $Q^*Q^*Q^*$  esetben is teljesül. Ezzel a tétel első állítását bebizonyítottuk.

A második rész bizonyításához tegyük fel, hogy  $(S; \circ)$  olyan félcsoporth, amely előáll egy egységelemes  $(A; \cdot)$  félcsoporthnak egy nullelemes  $(Q; *)$  félcsoporthtal való ideálbővítéseként. A korábbi megjegyzés szerint feltehetjük, hogy  $A$  az  $S$  félcsoporth egy ideálja, és tetszőleges  $a, b \in A$  elemek esetén  $a \cdot b = a \circ b$ . Megmutatjuk, hogy megadható a  $Q^*$  parciális félcsoporthnak az  $A$  félcsoporthba olyan  $\theta$  parciális homomorfizmusa, hogy tetszőleges  $a, b \in A$  és  $x, y \in Q$  elemek esetén a tételbeli

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \\ \theta(x) \cdot \theta(y), & \text{ha } x * y = 0, \end{cases}$$

$$a \circ x = a \cdot \theta(x); \quad x \circ a = \theta(x) \cdot a; \quad a \circ b = a \cdot b$$

egyenlőségek teljesülnek, azaz az  $S$ -en értelmezett  $\circ$  művelet a  $\theta$  parciális homomorfizmus által van meghatározva.

Legyen  $x \in Q \setminus \{0\}$  tetszőleges elem.  $e$ -vel jelölve  $A$  egységelemét,

$$x \circ e = e \circ (x \circ e) = (e \circ x) \circ e = e \circ x.$$

Legyen  $\theta$  a  $(Q \setminus \{0\}; *)$  parciális félcsoporthnak az  $A$  félcsoporthba való következő leképezése:

$$\theta : x \mapsto x \circ e.$$

Megmutatjuk, hogy  $\theta$  parciális homomorfizmus. Tegyük fel, hogy  $x$  és  $y$  a  $Q \setminus \{0\}$  olyan elemei, amelyekre  $x * y \neq 0$  teljesül. Akkor

$$x \circ y = x * y,$$

és ezért

$$\theta(x) \cdot \theta(y) = (x \circ e) \cdot (y \circ e) = (x \circ e) \circ (y \circ e) = x \circ (e \circ (y \circ e)) = x \circ (y \circ e) = (x * y) \circ e = \theta(x * y).$$

Ez éppen azt igazolja, hogy  $\theta$  a  $(Q \setminus \{0\}; *)$  parciális félcsoporthnak az  $A$  félcsoporthba való parciális homomorfizmusa.

A továbbiakban legyenek  $a, b \in A$  és  $x, y \in Q \setminus \{0\}$  tetszőleges elemek. Ha  $x * y \neq 0$ , akkor  $x \circ y \notin A$  teljesül  $S$ -ben, és így

$$x \circ y = x \circ y.$$

Ha  $x * y = 0$ , akkor  $x \circ b \in A$ . Így

$$x \circ y = (x \circ y) \circ e = x \circ (y \circ e) = x \circ (e \circ (y \circ e)) = (x \circ e) \circ (y \circ e) = \theta(x) \circ \theta(y) = \theta(x) \cdot \theta(y).$$

Továbbá, tetszőleges  $x \in Q^*$ -ra

$$a \circ x = (a \circ e) \circ x = a \circ (e \circ x) = a \circ \theta(x) = a \cdot \theta(x),$$

$$x \circ a = x \circ (e \circ a) = (x \circ e) \circ a = \theta(x) \circ a = \theta(x) \cdot a,$$

$$a \circ b = a \cdot b.$$

Ezzel azt is megmutattuk, hogy az  $S$  en értelmezett  $\circ$  művelet a

$$\theta : x \mapsto x \circ e$$

parciális homomorfizmus által van meghatározva. □

## 5.2. Félcsoporthok transzlációs burka

Egy  $X$  halmaz önmagába való egyértelmű leképezését az  $X$  halmaz egy *transzformációjának* nevezzük. Jelölje  $\mathcal{T}_X$  az  $X$  összes transzformációinak halmazát. A  $\mathcal{T}_X$  halmazon kétféleképpen is értelmezhetünk egy  $\circ$  műveletet. Ha  $\mathcal{T}_X$  elemeit úgy tekintjük, mint balról ható transzformációk, akkor tetszőleges  $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in \mathcal{T}_X$  transzformációk esetén legyen  $\alpha \circ \beta$  a  $\mathcal{T}_X$  azon eleme, amelyre tetszőleges  $x \in X$  elem esetén  $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$  teljesül. Viszont, ha  $\mathcal{T}_X$  elemeit úgy tekintjük, mint jobbról ható transzformációk, akkor tetszőleges  $(\cdot)\alpha, (\cdot)\beta \in \mathcal{T}_X$  transzformációk esetén legyen  $\alpha \circ \beta$  a  $\mathcal{T}_X$  azon eleme amelyre tetszőleges  $x \in X$  elem esetén  $(x)(\alpha \circ \beta) = ((x)\alpha)\beta$  teljesül. Mindkét esetben  $\mathcal{T}_X$  félcsoporthot alkot a megfelelő műveletre nézve; ezeket a félcsoporthokat az  $X$  halmaz feletti *teljes bal transzformációfélcsoporthnak*, illetve *teljes jobb transzformációfélcsoporthnak* nevezzük. A következőkben egy  $S$  félcsoporth speciális bal, illetve jobb transzformációival foglalkozunk.

**5.6. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth (balról ható)  $\lambda(\cdot)$  transzformációját bal translációnak nevezzük, ha  $S$  tetszőleges  $x, y$  elemei esetén  $\lambda(xy) = \lambda(x)y$ . Az  $S$  félcsoporth (jobbról ható)  $(\cdot)\varrho$  transzformációját jobb translációnak nevezzük, ha tetszőleges  $x, y \in S$  elemek esetén  $(xy)\varrho = x(y)\varrho$  teljesül. Azt mondjuk, hogy egy  $\lambda$  bal transláció és egy  $\varrho$  jobb transláció láncszemet alkotnak, ha  $S$  tetszőleges  $x, y$  elemei esetén  $x\lambda(y) = (x)\varrho y$  teljesül.

**5.7. Lemma** Egy  $S$  félcsoporth bal [jobb] translációinak  $\Lambda$   $[P]$  halmaza a  $\mathcal{T}_S$  bal [jobb] transzformációfélcsoport egy részfélcsoporthja.

*Bizonyítás.* A bal oldali esettel foglalkozunk. A jobb oldali eset hasonlóan igazolható. Ha  $x, y \in S$  és  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  tetszőlegesen, akkor

$$(\lambda_1\lambda_2)(xy) = \lambda_1(\lambda_2(xy)) = \lambda_1((\lambda_2(x))y) = \lambda_1(\lambda_2(x))y = ((\lambda_1\lambda_2)(x))y. \quad \square$$

Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a$  eleme esetén jelölje  $\lambda_a$   $[\varrho_a]$  az  $S$  félcsoporthnak azon transzformációját, amelyre tetszőleges  $s \in S$  elem esetén  $\lambda_a(s) = as$   $[(s)\varrho_a = sa]$  teljesül. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\lambda_a$   $[\varrho_a]$  az  $S$  félcsoporth bal [jobb] translációja.  $\lambda_a$ -t  $[\varrho_a$ -t] az  $S$  félcsoporth ( $a$  eleme által definiált) *belső bal [jobb] translációjának* nevezzük. Az  $x(ay) = (xa)y$  egyenlőség miatt  $\lambda_a$  és  $\varrho_a$  láncszemet alkotnak.

Jelölje  $\Lambda_0$ , illetve  $P_0$  egy  $S$  félcsoporth belső bal, illetve belső jobb translációinak halmazát.

**5.8. Lemma** Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az  $a \mapsto \lambda_a$ , illetve az  $a \mapsto \varrho_a$  megfeleltetések ( $a \in S$ ) az  $S$  félcsoporthnak  $\Lambda_0$ -ra, illetve  $P_0$ -ra való homomorfizmusai.

*Bizonyítás.* Mivel tetszőleges  $s, a, b \in S$  elemek esetén

$$\lambda_{ab}(s) = (ab)s = a(bs) = \lambda_a(\lambda_b(s)) = (\lambda_a\lambda_b)(s),$$

valamint

$$(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = ((s)\varrho_a)\varrho_b = (s)(\varrho_a\varrho_b),$$

ezért az állítás nyilvánvaló.  $\square$

**5.9. Definíció** Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az  $a \mapsto \lambda_a$ , illetve  $a \mapsto \varrho_a$  ( $a \in S$ ) homomorfizmust az  $S$  félcsoporth bal, illetve jobbrekuláris reprezentációjának nevezzük.

**5.10. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot bal [jobb] reduktnak nevezünk, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $xa = xb$   $[ax = bx]$  egyenlőségnek minden  $x \in S$  elemre való teljesüléséből  $a = b$  következik.

**5.11. Lemma** Egy  $S$  félcsoporth jobb [bal] reguláris reprezentációja akkor és csak akkor injektív (másképpen: hű), ha  $S$  bal [jobb] reduktn.

*Bizonyítás.*  $S$  jobbrekuláris reprezentációja injektív akkor és csak akkor, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén a  $\varrho_a = \varrho_b$  egyenlőségéből, azaz az  $xa = xb$  egyenlőségnek minden  $x \in S$  elemre való teljesüléséből  $a = b$  következik. Ez éppen azt jelenti, hogy  $S$  bal redukzív. A duális állítás hasonlóan adódik.  $\square$

**5.12. Lemma** *Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az  $S^1$  félcsoporth jobb, illetve bal reguláris reprezentációja injektív.*

*Bizonyítás.* Mivel  $S^1$  egységelemes félcsoporth, ezért  $S^1$  bal, illetve jobb redukzív. Így az 5.11. Lemma szerint  $S$  jobb, illetve bal reguláris reprezentációja injektív.  $\square$

**5.13. Definíció** *Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az  $S^1$  félcsoporth jobb, illetve bal reguláris reprezentációjának  $S$ -re való leszűkítését az  $S$  félcsoporth kiterjesztett jobb, illetve bal reguláris reprezentációjának nevezzük.*

**5.14. Lemma** *Tetszőleges  $S$  félcsoporth kiterjesztett jobb [bal] reguláris reprezentációja injektív.*

*Bizonyítás.* Az 5.12. Lemma szerint nyilvánvaló.  $\square$

**5.15. Tétel** *Minden félcsoporthot be lehet ágyazni egy teljes bal [jobb] transzformációfélcsoporthba.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth. Az világos, hogy  $S$  beágyazható az  $S^1$  félcsoporthba. Tekintsük az  $S^1$  félcsoporth feletti  $\mathcal{T}_{S^1}$  teljes bal transzformációfélcsoporthot. Az 5.7. Lemma szerint  $S^1$  bal translációi a  $\mathcal{T}_{S^1}$  teljes bal transzformációfélcsoporthon belül egy részfélcsoporthot alkotnak. Az 5.12. Lemma szerint  $S^1$ -et be lehet ágyazni ebbe a részfélcsoporthba. Így  $S$  beágyazható a  $\mathcal{T}_{S^1}$  teljes bal transzformációfélcsoporthba. A duális állítás hasonlóan igazolható.  $\square$

**5.16. Lemma** *Legyenek  $\lambda$  és  $\varrho$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges bal, illetve jobb translációi. Legyen  $a \in S$ . Akkor*

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}, \quad \text{és} \quad \varrho_a\varrho = \varrho_{(a)\varrho}.$$

*Ha  $\lambda$  és  $\varrho$  láncszemet alkotnak, akkor*

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{(a)\varrho} \quad \text{és} \quad \varrho\varrho_a = \varrho_{\lambda(a)}.$$

*Bizonyítás.* Minden  $x \in S$  esetén

$$(\lambda\lambda_a)(x) = \lambda(ax) = (\lambda(a))x = \lambda_{\lambda(a)}(x),$$

$$(x)\varrho_a\varrho = (xa)\varrho = x((a)\varrho) = (x)\varrho_{(a)\varrho}.$$

*Ha  $\lambda$  és  $\varrho$  láncszemet alkotnak, akkor*

$$(\lambda_a\lambda)(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a(\lambda(x)) = ((a)\varrho)x = \lambda_{(a)\varrho}(x),$$

$$(x)(\varrho\varrho_a) = ((x)\varrho)\varrho_a = ((x)\varrho)a = x(\lambda(a)) = (x)\varrho_{\lambda(a)}.$$

$\square$

**Jelölések:** Tetszőleges  $S$  félcsoporthoz esetén jelölje  $\Omega(S)$  az  $S$  azon  $\lambda$  bal transzlációiból, illetve  $\varrho$  jobb transzlációiból álló  $(\lambda, \varrho)$  párok halmazát, amelyek láncszemet alkotnak. Jelölje  $\Omega_0(S)$  a  $(\lambda_a, \varrho_a)$  párok halmazát.

**5.17. Lemma** *Tetszőleges  $S$  félcsoporthoz esetén  $\Omega(S)$  egységelemes félcsoporthoz alkot  $a$*

$$(\lambda_1, \varrho_1)(\lambda_2, \varrho_2) = (\lambda_1\lambda_2, \varrho_1\varrho_2)$$

*műveletre nézve. Ennek a félcsoporthoz  $\Omega_0(S)$  egy részfélcsoporthoz. Az*

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

*leképezés  $S$ -nek  $\Omega_0(S)$ -re való homomorfizmusa.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  tetszőleges bal transzlációk,  $\varrho_1$  és  $\varrho_2$  pedig tetszőleges jobb transzlációk. Az nyilvánvaló, hogy  $\lambda_1\lambda_2$  bal transzláció,  $\varrho_1\varrho_2$  pedig jobb transzláció. Legyenek  $x, y \in S$  tetszőlegesek. Akkor

$$x((\lambda_1\lambda_2)(y)) = x(\lambda_1(\lambda_2(y))) = ((x)\varrho_1)(\lambda_2(y)) = (((x)\varrho_1)\varrho_2)y = ((x)(\varrho_1\varrho_2))y.$$

Ezért  $\lambda_1\lambda_2$  és  $\varrho_1\varrho_2$  láncszemet alkotnak. Tehát  $\Omega(S)$  félcsoporthoz. Az világos, hogy az  $S$  félcsoporthoz  $id_S$  identikus leképezése bal-, illetve jobb transzláció, és  $(id_S(\cdot), (\cdot)id_S) \in \Omega(S)$ . Továbbá,  $(id_S(\cdot), (\cdot)id_S)$  az  $\Omega(S)$  egységeleme. Mivel

$$(\lambda_a, \varrho_a)(\lambda_b, \varrho_b) = (\lambda_{ab}, \varrho_{ab}),$$

ezért  $\Omega_0(S)$  részfélcsoporthoz  $\Omega(S)$ -nek. Az 5.8. Lemma szerint

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

az  $S$  félcsoporthoz az  $\Omega_0(S)$  félcsoporthoz való homomorfizmusa. □

Az  $\Omega(S)$  félcsoporthoz az  $S$  félcsoporthoz transzlációs burkának, az  $\Omega_0(S)$  részfélcsoporthoz az  $\Omega(S)$  félcsoporthoz belső részének nevezzük. Egy  $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$  bitranszlációt belső bitranszlációnak nevezünk, ha  $(\lambda, \varrho) \in \Omega_0(S)$ .

### 5.3. Gyengén redukált félcsoporthoz

**5.18. Definíció** *Egy  $S$  félcsoporthoz akkor mondjuk, hogy gyengén redukált, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $ax = bx$  és  $xa = xb$  minden  $x \in S$ -re való teljesüléséből  $a = b$  következik.*



**5.19. Lemma** Egy  $S$  félcsoport akkor és csak akkor gyengén redukzív, ha az

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

leképezés az  $S$  félcsoportnak az  $\Omega_0(S)$  félcsoporttra való izomorfizmusa.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  gyengén redukzív félcsoport. Tegyük fel, hogy

$$(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b)$$

valamely  $a, b \in S$  elemekre. akkor

$$\lambda_a = \lambda_b \quad \text{és} \quad \varrho_a = \varrho_b,$$

s ezért  $S$  minden  $x$  elemére

$$ax = bx \quad \text{és} \quad xa = xb$$

teljesül. Mivel  $S$  gyengén redukzív, ezért

$$a = b.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy az

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

homomorfizmus injektív. Ha  $a, b \in S$  olyan elemek, hogy  $S$  minden  $x$  elemére

$$ax = bx \quad \text{és} \quad xa = xb$$

teljesül, akkor

$$(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b),$$

s ezért

$$a = b.$$

Tehát  $S$  gyengén redukzív. □

**5.20. Tétel** Legyen  $S$  gyengén redukzív félcsoport. Azonosítsuk  $S$ -et az  $S$  transzlációs burkának belső részével, azaz az  $\Omega_0(S)$  félcsoporttal. Ekkor  $S$  ideálja az  $\Omega(S)$  félcsoportnak, továbbá minden  $a \in S$  és  $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$  esetén  $(\lambda, \varrho)a = \lambda(a)$  és  $a(\lambda, \varrho) = (a)\varrho$ .

*Bizonyítás.* Az 5.16. Lemmát használva,

$$(\lambda, \varrho)a = (\lambda, \varrho)(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda\lambda_a, \varrho\varrho_a) = (\lambda_{\lambda(a)}, \varrho_{\lambda(a)}) = \lambda(a)$$

és

$$a(\lambda, \varrho) = (\lambda_a, \varrho_a)(\lambda, \varrho) = (\lambda_a\lambda, \varrho_a\varrho) = (\lambda_{(a)\varrho}, \varrho_{(a)\varrho}) = (a)\varrho. \quad \square$$

**5.21. Tétel** Legyen  $(A; \cdot)$  egy gyengén redukzív félcsoporth és  $(Q; *)$  tetszőleges nullelemes félcsoporth. Legyen  $(S'; \circ)$  az  $\Omega(A)$  félcsoporthnak a  $Q$  félcsoporthtal képezett valamely ideálbővítése. Legyen  $S = A \cup (Q \setminus \{0\}) \subseteq S'$ .  $(S; \circ)$  akkor és csak akkor olyan részfélcsoporthja az  $(S'; \circ)$  félcsoporthnak, amely  $A$ -nak  $Q$ -val való bővítése, ha  $Q$  tetszőleges  $a * b = 0$  feltételt teljesítő  $a$  és  $b$  elemei esetén az  $a \circ b$  szorzat  $S$ -ben van.

Fordítva, ha  $A$ -nak van  $Q$ -val való  $(S; \diamond)$  ideálbővítése, akkor  $\Omega(A)$ -nak van  $Q$ -val olyan  $(S'; \circ)$  ideálbővítése, amelynek  $(S; \diamond)$  egy részfélcsoporthja.

*Bizonyítás.* Legyen  $(S'; \circ)$  az  $\Omega(A)$  félcsoporthnak a  $Q$  félcsoporthtal képezett valamely ideálbővítése. Mivel  $\Omega(A)$  egységelemes félcsoporth, ezért az 5.5. Tétel szerint a  $\circ$  művelet a  $Q^*$  parciális grupoidnak az  $\Omega(A)$  félcsoporthba való valamely  $\theta$  parciális homomorfizmusa által van meghatározva. Tetszőleges  $x \in Q^*$  elem esetén legyen

$$\theta(x) = (\lambda_x, \varrho_x).$$

Az 5.5. Tétel (5.3) feltétele szerint az  $\Omega(A)$  félcsoporth tetszőleges  $(\lambda, \varrho)$ , valamint  $Q^*$  tetszőleges  $x$  elemei esetén

$$(\lambda, \varrho) \circ x = (\lambda, \varrho)(\lambda_x, \varrho_x) = (\lambda\lambda_x, \varrho\varrho_x).$$

Ha ezt az eredmény alkalmazzuk az  $A$  félcsoporth tetszőleges  $a$  eleméhez tartozó  $(\lambda_a, \varrho_a)$  elemre, akkor (figyelembe véve, hogy  $A$ -t azonosíthatjuk  $\Omega_0(A)$ -val) azt kapjuk, hogy

$$a \circ x = (\lambda_a\lambda_x, \varrho_a\varrho_x) = (\lambda_{(a)\varrho_x}, \varrho_{(a)\varrho_x}) \in A,$$

alkalmazva az 5.16. Lemmát is. Így

$$A \circ Q^* \subseteq A.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$Q^* \circ A \subseteq A.$$

Ezért

$$A \circ S \subseteq A \quad \text{és} \quad S \circ A \subseteq A.$$

Ha  $S$  részfélcsoporthja  $S'$ -nek, akkor a fentiek alapján  $A$  ideálja  $S$ -nek és így  $S$  az  $A$ -nak  $Q$ -vel való ideálbővítése. Az előzőek szerint,  $S$  akkor és csak akkor részfélcsoporthja  $S'$ -nek ha  $Q^* \circ Q^* \subset S$ , ami ekvivalens azzal, hogy tetszőleges  $s, t \in Q^*$  elemek esetén  $s * t = 0$ -ból  $s \circ t \in S$  következik.

A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy az  $(S; \diamond)$  félcsoporth az  $A$  félcsoporthnak a  $Q$  félcsoporthtal képezett ideálbővítése. Feltehetjük, hogy  $S = A \cup Q^*$ . Tetszőleges  $x \in Q^*$  elem esetén tekintsük az  $A$  részfélcsoporthon a következőképpen értelmezett  $\lambda_x()$  és  $()\varrho_x$  leképezéseket:

$$\lambda_x : a \mapsto x \diamond a; \quad \varrho_x : a \mapsto a \diamond x.$$

Mivel  $A$  az  $(S; \diamond)$  félcsoporth ideálja, ezért  $\lambda_x()$  és  $()\varrho_x$  az  $A$  félcsoporth önmagába való leképezései (más szóval: transzformációi). Mivel tetszőleges  $a, b \in A$  elemek esetén

$$\lambda_x(a \cdot b) = \lambda_x(a \diamond b) = x \diamond (a \diamond b) = (x \diamond a) \diamond b = (\lambda_x(a)) \diamond b = \lambda_x(a) \cdot b,$$

ezért  $\lambda_x$  az  $A$  félcsoporthnak egy bal translációja. Hasonlóan igazolható, hogy  $\varrho_x$  az  $A$  félcsoporthnak egy jobb translációja. Mivel tetszőleges  $a, b \in A$  elemek esetén

$$a \cdot \lambda_x(b) = a \diamond \lambda_x(b) = a \diamond (x \diamond b) = (a \diamond x) \diamond b = ((a)\varrho_x) \diamond b = (a)\varrho_x \cdot b,$$

ezért a  $(\lambda_x, \varrho_x)$  rendezett pár láncszemet alkot, azaz

$$(\lambda_x, \varrho_x) \in \Omega(A).$$

Tekintsük a

$$\phi : x \mapsto (\lambda_x, \varrho_x) \in \Omega(A), \quad x \in Q^*$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy  $\phi$  a  $Q^*$  parciális félcsoporthnak az  $\Omega(A)$  translációs burokba való parciális homomorfizmusa. Ehhez tegyük fel, hogy  $x$  és  $y$  a  $Q^*$  parciális félcsoporth tetszőleges olyan elemei, amelyekre  $xy \neq 0$  teljesül. Mivel  $\Omega(A)$  félcsoporth, ezért benne a  $\phi(x)\phi(y)$  szorzat értelmezve van. Ezért csak azt kell megmutatni, hogy  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ . Az világos, hogy

$$\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y, \quad \text{és} \quad \varrho_{xy} = \varrho_x \varrho_y.$$

Ezért

$$\phi(xy) = (\lambda_{xy}, \varrho_{xy}) = (\lambda_x \lambda_y, \varrho_x \varrho_y) = (\lambda_x, \varrho_x)(\lambda_y, \varrho_y) = \phi(x)\phi(y).$$

Tehát

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

valóban teljesül. Ezzel beláttuk, hogy  $\phi$  a  $Q^*$  parciális félcsoporthnak az  $\Omega(A)$  translációs burokba való parciális homomorfizmusa.

Mivel az  $\Omega(A)$  translációs burok olyan félcsoporth, amelynek van egységeleme, ezért az 5.5. Tétel szerint a  $\phi$  parciális homomorfizmus meghatározza  $\Omega(A)$ -nak  $Q$ -val való valamely  $(S'; \circ)$  bővítését. Részletesebben: Tetszőleges  $a, b \in A$  és  $x, y \in Q^*$  elemek esetén legyen

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \phi(x)\phi(y), & \text{ha } x * y = 0 \text{ } Q\text{-ban,} \end{cases}$$

$$a \circ x = a \cdot \phi(x); \quad x \circ a = \phi(x) \cdot a; \quad a \circ b = a \cdot b.$$

Bizonyításunk teljessé tételéhez elegendő már csak azt megmutatni, hogy tetszőleges  $s, t \in S$  elemek esetén  $s \circ t = s \diamond t$ . Legyenek  $s$  és  $t$  tetszőleges  $S$ -beli elemek.

Ha  $s, t \in A$ , akkor  $s \circ t = st = s \diamond t$  nyilvánvalóan teljesül.

Ha  $s \in A$  és  $t \in Q^*$ , akkor

$$s \circ t = s \cdot \phi(t) = (s)\varrho_t,$$

felhasználva az 5.20. Tételt is. Mivel

$$(s)\varrho_t = s \diamond t,$$

ezért

$$s \circ t = s \diamond t.$$

Ha  $s \in Q^*$  és  $t \in A$ , akkor pedig (felhasználva az 5.20. Tételt is)

$$s \circ t = \phi(s) \circ t = \lambda_s(t) = s \diamond t.$$

Tekintsük végül azt az esetet, amikor  $s, t \in Q^*$ . Ha  $s * t \neq \{0\}$  a  $Q$  félcsoportban, akkor

$$s \diamond t = s * t = s \circ t.$$

Ha  $st = 0$  a  $Q$  félcsoportban, akkor

$$s \diamond t \in A,$$

s ezért minden  $a \in A$  elemre

$$(a)(\varrho_s \varrho_t) = ((a)\varrho_s)\varrho_t = (a \diamond s) \diamond t = a \diamond (s \diamond t) = (a)\varrho_{s \diamond t}.$$

Így

$$\varrho_s \varrho_t = \varrho_{s \diamond t}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\lambda_s \lambda_t = \lambda_{s \diamond t}.$$

Ezen eredmények, valamint az 5.5. Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s \circ t &= \phi(s)\phi(t) = (\lambda_s, \varrho_s)(\lambda_t, \varrho_t) = \\ &= (\lambda_s \lambda_t, \varrho_s \varrho_t) = (\lambda_{s \diamond t}, \varrho_{s \diamond t}) = s \diamond t. \end{aligned}$$

□

Az előző tétel azt a problémát, hogy gyengén redukív  $A$  félcsoportok esetén megtaláljuk  $S$  nek valamely nullelemes  $Q$  félcsoporttal képezett összes ideálbővítését, redukálja arra a problémára, hogy megtaláljuk a  $Q^* = Q \setminus \{0\}$  parciális gruppoidnak az  $A$  félcsoport  $\Omega(A)$  translációs burkába való összes olyan  $\phi$  parciális homomorfizmusát, amelyre teljesül, hogy tetszőleges  $s, t \in Q^*$  elem esetén az  $st = 0$  egyenlőségnek a  $Q$ -ban való teljesülése esetén a  $\phi(s)\phi(t)$  szorzat  $A$ -ban van (és nem csak  $\Omega(A)$ -ban).

**5.22. Definíció** Legyen  $A$  tetszőleges,  $Q$  pedig egy nullelemes félcsoporth. Legyen  $W$  a  $Q^* = Q \setminus \{0\}$  halmaz elemeiből alkotott azon  $(s, t)$  rendezett párok halmaza, amelyek esetén  $st = 0$  a  $Q$  félcsoporthban. A  $W$  halmaznak az  $A$  félcsoporthba való tetszőleges (egyértelmű) leképezését a  $Q$  félcsoporthnak az  $A$  félcsoporthba való elágazásának nevezzük. Ha  $\theta$  a  $Q^*$  parciális grupoidnak az  $A$  félcsoporthba való parciális homomorfizmusa és  $\phi$  a  $W$  halmaznak  $A$ -ba való olyan leképezése, amely tetszőleges  $(s, t) \in W$  elempárhoz a

$$\phi((s, t)) = \theta(s)\theta(t)$$

szorzatot rendeli, akkor  $\phi$ -t a  $Q$  félcsoporthnak az  $A$  félcsoporthba való, a  $\theta$  által indukált elágazásának nevezzük.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő eredményt.

**5.23. Tétel** Legyen  $A$  egy gyengén reduktív,  $Q$  pedig egy nullelemes félcsoporth. Legyen  $\phi$  a  $Q$  félcsoporthnak az  $A$  félcsoporthba való elágazása. Legyenek továbbá

$$s : \mapsto \lambda_s \quad \text{és} \quad s : \mapsto \varrho_s$$

a  $Q^*$ -nak az  $A$  félcsoporth bal, illetve jobb translációinak  $\Lambda$ , illetve  $P$  félcsoporthjába való olyan leképezései, amelyekre a következők teljesülnek (tetszőleges  $s, t \in Q^*$  és tetszőleges  $x, y \in A$  elemek esetén)

$$\lambda_s \lambda_t = \begin{cases} \lambda_{st}, & \text{ha } st \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \lambda_{\phi((s, t))}, & \text{ha } st = 0 \text{ } Q\text{-ban}, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\varrho_s \varrho_t = \begin{cases} \varrho_{st}, & \text{ha } st \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \varrho_{\phi((s, t))}, & \text{ha } st = 0 \text{ } Q\text{-ban}, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$x(\lambda_s(y)) = ((x)\varrho_s)y, \quad \text{azaz, } \lambda_s \text{ és } \varrho_s \text{ láncszemet alkotnak.} \quad (5.7)$$

Legyen  $S = A \cup Q^*$ , és definiáljunk egy  $\circ$  műveletet  $S$ -en a következőképpen: tetszőleges  $s, t \in Q^*$  és tetszőleges  $x, y \in A$  elemek esetén

$$s \circ t = \begin{cases} st, & \text{ha } st \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \phi((s, t)), & \text{ha } st = 0 \text{ } Q\text{-ban}; \end{cases} \quad (5.8)$$

$$s \circ x = \lambda_s(x); \quad (5.9)$$

$$x \circ s = (x)\varrho_s; \quad (5.10)$$

$$x \circ y = xy. \quad (5.11)$$

Akkor  $(S; \circ)$  az  $A$  félcsoporthnak a  $Q$  félcsoporthtal való ideálbővítése. Fordítva, az  $A$ -nak  $Q$ -val való tetszőleges ideálbővítése az előzőekben részletezett módon konstruálható.

## Feladatok

- 5.1.** (Megoldás: 17.14.) Mutassuk meg, hogy ha egy  $S$  félcsoporth tartalmaz bal oldali egységelemet, akkor  $S$  bal redukzív!
- 5.2.** (Megoldás: 17.15.) Mutassuk meg, hogy egy  $S$  félcsoporth esetén az 5.8. Tételben szereplő  $a \mapsto \varrho_a$  ( $a \in S$ ) homomorfizmus akkor és csak akkor injektív, ha  $S$  bal redukzív!
- 5.3.** (Megoldás: 17.16.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges balzéró (jobbzeró) félcsoporth translációs burka izomorf az összes önmagába való leképezéseinek félcsoporthjával!
- 5.4.** (Megoldás: 17.17.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $G$  csoport esetén a  $G$  translációs burka izomorf  $G$ -vel!
- 5.5.** (Megoldás: 17.18.) Mutassuk meg, hogy egy  $L$  balzéró és egy  $R$  jobbzeró félcsoporth  $L \times R$  direkt szorzata gyengén redukzív!

## 6. fejezet

# Reguláris félcsoporthok, inverz félcsoporthok

### 6.1. Reguláris elem

**6.1. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  elemét reguláris elemnek nevezzük, ha van az  $S$  félcsoporthnak olyan  $x$  eleme, hogy  $axa = a$  teljesül.

Egy félcsoporth minden idempotens eleme reguláris. Tehát, ha egy félcsoporth tartalmaz idempotens elemet, akkor tartalmaz reguláris elemet is. A következő lemmából adódik ennek az állításnak a megfordítása is.

**6.2. Lemma** Ha  $axa = a$  teljesül egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $x$  elemeire, akkor az  $S$  félcsoporth  $ax$  és  $xa$  elemei idempotens elemek.

*Bizonyítás.* Ha  $axa = a$  teljesül egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $x$  elemére, akkor

$$(ax)^2 = (ax)(ax) = (axa)x = ax$$

és

$$(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa.$$

□

### 6.3. Tétel

- (1) Ha  $a$  egy  $S$  félcsoporth reguláris eleme, akkor  $aS^1 = aS$  és  $S^1a = Sa$ .
- (2) Ha  $a$  és  $b$  egy  $S$  félcsoporth reguláris elemei, akkor  $a \mathcal{L} b$  [ $a \mathcal{R} b$ ] akkor és csak akkor teljesül, ha  $Sa = Sb$  [ $aS = bS$ ].

*Bizonyítás.* Legyen  $a$  egy  $S$  félcsoporth reguláris eleme. Akkor megadható olyan  $S$ -beli  $x$  elem, hogy

$$axa = a.$$

Így

$$aS^1 = \{a\} \cup aS = \{axa\} \cup aS \subseteq aS \subseteq aS^1,$$

s ezért  $aS^1 = aS$ . Hasonlóan igazolható, hogy  $S^1a = Sa$ . A (2) feltétel az  $\mathcal{L}$ -reláció, illetve az  $\mathcal{R}$ -reláció definíciója és a tétel (1) állítása miatt nyilvánvaló.  $\square$

**6.4. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az  $S$  félcsoporth  $a$  eleme által generált fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható, azaz megadhatók olyan  $e$  és  $f$  idempotens elemek, hogy  $S^1a = Se$  és  $aS^1 = fS$ .

*Bizonyítás.* Ha  $a$  reguláris elem, akkor a 6.3. Tétel miatt

$$aS^1 = aS \quad \text{és} \quad S^1a = Sa.$$

A reguláris elem definíciója alapján megadható olyan  $x \in S$  elem, amelyre

$$axa = a$$

teljesül. Legyen

$$e = xa.$$

A 6.2. Lemma szerint  $e$  idempotens eleme  $S$ -nek. Mivel

$$Sa = Saxa = Sae \subseteq Se = Sxa \subseteq Sa,$$

ezért

$$Sa = Se.$$

Hasonlóan igazolható, hogy az  $f = ax$  idempotens elemmel

$$aS = fS$$

teljesül.

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$S^1a = Se$$

teljesül az  $S$  félcsoporth valamely  $a$  eleme és valamely  $e$  idempotens eleme esetén. Akkor vannak  $S^1$ -nek olyan  $x$  és  $y$  elemei, hogy

$$a = xe \quad \text{és} \quad e = ya$$

teljesül. Ekkor

$$ae = xe^2 = xe = a$$

és így

$$a = ae = aya,$$

azaz  $a$  reguláris elem (ha  $y = 1$ , akkor  $a$  idempotens elem és ezért  $a = aaa$ ).  $\square$



## 6.2. Neumann-féle inverz

**6.5. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth  $a$  és  $b$  elemeiről azt mondjuk, hogy egymás (Neumann-féle) inverzei, ha együtt teljesítik az  $aba = a$  és  $bab = b$  feltételek mindegyikét. Ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy  $a$   $b$  elem az  $a$  elem (Neumann-féle) inverze (és hasonlóan, az  $a$  elem  $b$  elem (Neumann-féle) inverze).

Ha  $a$  és  $b$  egymás inverzei, akkor a 6.2. Tétel szerint  $ab$  és  $ba$  idempotens elemek. Adott  $a \in S$  elem esetén jelölje  $V(a)$  az  $a$  összes ( $S$ -beli) inverzének halmazát, azaz

$$V(a) = \{b \in S : aba = a, bab = b\}.$$

**6.6. Lemma** Ha  $a$  egy  $S$  félcsoporth reguláris eleme, akkor  $a$ -nak van  $S$ -ben legalább egy inverze.

*Bizonyítás.* Ha  $a$  reguláris eleme egy  $S$  félcsoporthnak, akkor van  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, hogy

$$axa = a.$$

Legyen

$$b = xax.$$

Akkor

$$aba = a(xax)a = (axa)(xa) = axa = a$$

és

$$bab = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = b. \quad \square$$

**6.7. Lemma** Ha  $e, f, ef, fe$  egy  $S$  félcsoporth idempotens elemei, akkor  $ef$  és  $fe$  egymás inverzei.

*Bizonyítás.* Legyenek  $e$  és  $f$  egy  $S$  félcsoporth olyan idempotens elemei, amelyek esetén  $ef$  és  $fe$  is idempotens elemek. Akkor

$$(ef)(fe)(ef) = ef^2e^2f = efef = (ef)^2 = ef.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$(fe)(ef)(fe) = fe. \quad \square$$

**6.8. Tétel** Legyen  $D$  egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $\mathcal{D}$ -osztálya.

- (1) Ha  $D$  tartalmaz egy reguláris elemet, akkor  $D$  minden eleme reguláris (ekkor  $D$ -t reguláris  $\mathcal{D}$ -osztálynak nevezzük).

- (2) Ha  $D$  reguláris, akkor minden olyan  $\mathcal{L}$ -osztály és  $\mathcal{R}$ -osztály, amely benne van  $D$ -ben, tartalmaz egy idempotens elemet.

*Bizonyítás.* A 6.4. Tétel szerint egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az  $R_a [L_a]$  osztály tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Ebből viszont már következik, hogy ha egy  $\mathcal{R}$ -osztály [ $\mathcal{L}$ -osztály] tartalmaz egy idempotens elemet, akkor az osztály minden eleme reguláris. Tehát, ha egy  $D$  osztály tartalmaz egy  $a$  reguláris elemet, akkor  $R_a$  minden eleme reguláris. Mivel a  $D$  által tartalmazott  $\mathcal{L}$ -osztályok mindegyikének  $R_a$ -val vett metszete nem üres, ezért a  $D$ -ben lévő  $\mathcal{L}$ -osztályok mindegyike tartalmaz egy reguláris elemet, s így minden ilyen  $\mathcal{L}$ -osztálynak minden eleme (az előzőek szerint) reguláris. Mivel  $D$  előáll  $\mathcal{L}$ -osztályok uniójaként, ezért  $D$  minden eleme reguláris.

A (2) állítás a 6.4. Tétel következménye.  $\square$

**6.9. Megjegyzés** A 6.8. Tétel (1) állítása szerint, ha egy  $\mathcal{D}$ -osztály nem reguláris, akkor nem tartalmazhat idempotens elemet (mivel egy idempotens elem szükségképpen reguláris). Így, ha a 4.47. Lemmában vizsgált  $(T; *)$  félcsoporth olyan  $\mathcal{D}$ -osztály által van definiálva, amely nem reguláris, akkor (a 4.46. Tétel szerint) a  $(T; *)$  félcsoporth bármely két elemének szorzata egyenlő a nullelemmel, azaz  $(T; *)$  egy zéró félcsoporth. Ezért a  $(T; *)$  félcsoporth igazából akkor érdekes számunkra, ha reguláris  $\mathcal{D}$ -osztály segítségével van definiálva. Ezt láthatjuk majd a 9. fejezetben szereplő 9.23., 9.24. és 9.25. tételekben.

**6.10. Tétel** Ha  $a$  és  $a'$  egy  $S$  félcsoporth olyan elemei, amelyek egymás inverzei, akkor az  $e = aa'$  és  $f = a'a$  idempotens elemekre  $e \in R_a \cap L_{a'}$  és  $f \in R_{a'} \cap L_a$  teljesülnek. Továbbá  $a', e, f \in D_a$ .

*Bizonyítás.* Az világos, hogy

$$ea = af = a$$

és

$$a'e = fa' = a'.$$

Ebből már következik

$$e \in R_a \cap L_{a'} \subseteq D_a$$

és

$$f \in R_{a'} \cap L_a \subseteq D_a,$$

figyelembe véve az  $e$  és  $f$  elemek definícióját is. Ekkor

$$e \in D_a \cap L_{a'}$$

miatt

$$L_{a'} \cap D_a \neq \emptyset,$$

amiből

$$a' \in L_{a'} \subseteq D_a$$

következik. Tehát

$$a', e, f \in D_a.$$

□

**6.11. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a$  reguláris eleme esetén az alábbiak teljesülnek.*

- (1) *Az  $a$  elem minden inverze  $D_a$ -ban van.*
- (2) *Egy  $b$  elemhez tartozó  $\mathcal{H}$ -osztály akkor és csak akkor tartalmazza az  $a$  elem valamely inverzét, ha az  $R_a \cap L_b$  és  $R_b \cap L_a$   $\mathcal{H}$ -osztályok mindegyike tartalmaz egy idempotens elemet.*
- (3) *Nincs  $S$ -nek olyan  $\mathcal{H}$ -osztálya, amely az  $a$ -nak egynél több inverzét tartalmazná.*

*Bizonyítás.* Az (1) állítás a 6.10. Tétel következménye. Ahhoz, hogy megmutassuk (2) teljesülését, tegyük fel először, hogy  $H_b$  tartalmazza az  $a$  elem egy  $a'$  inverzét. A 6.10. Lemma szerint az  $R_a \cap L_b (= R_a \cap L_{a'})$   $\mathcal{H}$ -osztály tartalmazza az  $aa'$  idempotens elemet, az  $R_b \cap L_a (= R_{a'} \cap L_a)$   $\mathcal{H}$ -osztályok pedig az  $a'a$  idempotens elemet. Fordítva, legyen  $e$  egy idempotens eleme  $R_a \cap L_b$ -nek,  $f$  pedig egy idempotens eleme  $R_b \cap L_a$ -nak. Mivel  $a \mathcal{R} e$  és  $a \mathcal{L} f$ , ezért a 4.42. Tétel miatt

$$ea = a = af.$$

Továbbá, a 6.3. Tétel miatt

$$e = ax, \quad f = ya$$

valamely  $x, y \in S$  elemekre. Legyen

$$a' = fxe.$$

Akkor

$$\begin{aligned} fa' &= a'e = a', \\ aa' &= afxe = axe = e^2 = e, \\ a'a &= fa'a = yaa'a = yea = ya = f. \end{aligned}$$

Mivel

$$aa'a = ea = a \quad \text{és} \quad a'aa' = a'e = a',$$

ezért  $a'$  és  $a$  egymás inverzei. Az

$$fa' = a' \quad \text{és} \quad a'a = f$$

egyenlőségekből

$$a' \mathcal{R} f$$

következik. Az

$$a'e = a' \quad \text{és} \quad aa' = e$$

egyenlőségekből pedig

$$a' \mathcal{L} e$$

adódik. Így

$$a' \in R_f \cap L_e = R_b \cap L_b = H_b.$$

A (3)-as feltétel igazolásához tekintsünk olyan  $\mathcal{H}$ -ekvivalens  $b$  és  $c$  elemeket az  $S$  félcsoporthból, melyek egy  $a$  elem inverzei. A 6.10. Lemma szerint az  $ab$  idempotens elem  $R_a \cap L_b$ -ban, az  $ac$  idempotens elem pedig  $R_a \cap L_c$ -ben van. Azonban  $L_b = L_c$ , és így

$$ab = ac$$

a 4.43. Tétel szerint. Az  $R_a = R_c$  feltételből hasonló okok miatt következik, hogy

$$ba = ca.$$

Így

$$b = bab = cab = cac = c.$$

□

## 6.3. Reguláris félcsoporthok

**6.12. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot reguláris félcsoporthnak nevezünk, ha  $S$  minden eleme reguláris.

**6.13. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporthon az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.

- (1)  $S$  reguláris félcsoporth.
- (2)  $S$  minden  $\mathcal{L}$ -osztálya tartalmaz legalább egy idempotens elemet.
- (3)  $S$  minden  $\mathcal{R}$ -osztálya tartalmaz legalább egy idempotens elemet.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  reguláris félcsoporth. Jelölje  $L$  az  $S$  valamely  $\mathcal{L}$ -osztályát. Legyen  $a \in L$  tetszőleges elem. Mivel a 6.4. Tétel szerint van  $S$ -nek olyan  $e$  idempotens eleme, amelyre

$$Sa = Se$$

teljesül, ezért

$$e \in L.$$

Tehát (1)-ből következik (2). Hasonlóan igazolható, hogy (1)-ből következik (3).

Tegyük fel, hogy (2) teljesül egy  $S$  félcsoportha. Ez azt jelenti, hogy tetszőlege  $a \in S$  elem  $\mathcal{L}$ -relációban van  $S$  valamely  $e$  idempotens elemével, azaz

$$S^1 a = Se.$$

Más szavakkal: az  $a$  elem által generált fő bal oldali ideál az  $e$  idempotens elemmel generálható. A 6.4. Tétel miatt ebből már következik, hogy  $a$  az  $S$  félcsoport reguláris eleme. Tehát (2)-ből következik (1). Hasonlóan igazolható, hogy (3)-ból következik (1). Ezzel pedig bizonyítást nyert, hogy a tételben szereplő három feltétel egymással ekvivalens.  $\square$

**6.14. Tétel** *Egy  $S$  félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha  $R \cap L = RL$  teljesül az  $S$  tetszőleges jobb oldali  $R$  és tetszőleges bal oldali  $L$  ideáljaira.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $R$  és  $L$  egy  $S$  félcsoport tetszőleges jobb oldali, illetve bal oldali ideáljai. Akkor

$$RL \subseteq R \cap L.$$

Tegyük fel, hogy  $S$  reguláris. Akkor tetszőleges  $a \in R \cap L$  elem esetén

$$a = axa = a(xa) \in RL$$

teljesül az  $S$  félcsoport alkalmas  $x$  elemével. Így

$$R \cap L \subseteq RL.$$

Ennek, és a fenti tartalmazásnak eredményeként

$$R \cap L = RL.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan félcsoport, amelyben

$$R \cap L = RL$$

teljesül tetszőleges jobb oldali  $R$ , illetve tetszőleges bal oldali  $L$  ideálokra. Legyen

$$a \in S$$

tetszőleges elem. Akkor

$$R(a) \cap L(a) = R(a)L(a),$$

ahol  $R(a)$ , illetve  $L(a)$  jelölik az  $S$  félcsoport  $a$  által generált jobb oldali, illetve bal oldali ideálját. Mivel

$$a \in R(a) \cap L(a),$$

ezért

$$a \in R(a)L(a) = aS^1S^1a \subseteq aS^1a,$$

azaz van olyan  $x \in S^1$  elem, hogy

$$a = axa.$$

Tehát  $a$  az  $S$  félcsoporth reguláris eleme (abban az esetben, amikor  $x$  az  $S^1$  egységele-  
me, akkor  $a$  idempotens elem, s így szükségképpen reguláris). Mivel  $a$  az  $S$  félcsoporth  
tetszőleges eleme volt, ezért  $S$  reguláris félcsoporth.  $\square$

**6.15. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha  
megadható olyan  $S$ -beli  $x$  elem, amelyre  $axa = a$  és  $ax = xa$  teljesül. Egy  $S$  félcsoporthot  
teljesen reguláris félcsoporthnak nevezünk, ha  $S$  minden eleme teljesen reguláris.

**6.16. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor teljesen reguláris, ha  $S$  előáll részcsoporthjainak  
uniójaként.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan félcsoporth, amely előáll  $G_i$  ( $i \in I$ ) részcsoporthjainak úniója-  
ként. Legyen  $a \in S$  tetszőleges elem. Akkor  $a \in G_j$  valamely  $j \in I$  index esetén. Mivel  
 $G_i$  csoporth, ezért az  $a$  elem  $G_i$ -beli  $x$  inverzére

$$axa = a, \quad ax = xa$$

teljesül, azaz  $a$  az  $S$  félcsoporth teljesen reguláris eleme. Mivel  $a$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges  
eleme, ezért  $S$  teljesen reguláris félcsoporth.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  egy teljesen reguláris félcsoporth. Legyen  $a \in S$  tetszőleges  
elem. Mivel  $a$  teljesen reguláris, ezért van  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, hogy

$$axa = a, \quad \text{és} \quad ax = xa.$$

A 6.2. Lemma szerint

$$e = ax = xa$$

az  $S$  félcsoporth idempotens eleme. Mivel  $ae = ea = a$  és  $ax = xa = e$ , ezért az 1.41. Tétel  
szerint

$$G_e = \{s \in S : s = se = es, \quad \text{és} \quad (\exists s' \in S) \quad ss' = s's = e\}$$

$S$ -nek olyan részcsoporthja, amely tartalmazza  $S$  mindazon részcsoporthjait, amelyekben  $e$   
egységelem. Az világos, hogy

$$a \in G_e.$$

Ebből már következik, hogy  $S$  előáll részcsoporthjainak uniójaként.  $\square$

**6.17. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  elemét bal [jobb] egyszerűsíthetőnek nevezzük, ha minden  $x, y \in S$  elem esetén az  $ax = ay$  [ $xa = ya$ ] feltételből  $x = y$  következik. Ha egy félcsoporth minden eleme bal [jobb] egyszerűsíthető, akkor a félcsoporthot bal [jobb] egyszerűsítéses félcsoporthnak nevezzük. Ha egy félcsoporth bal egyszerűsítéses is és jobb egyszerűsítéses is, akkor egyszerűsítéses félcsoporthnak nevezzük.

**6.18. Tétel** Minden egyszerűsítéses, reguláris félcsoporth szükségképpen csoport.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egyszerűsítéses, reguláris félcsoporth. Akkor tetszőleges  $a \in S$  elemhez van olyan  $x \in S$  elem, hogy  $axa = a$  teljesül. Így tetszőleges  $b \in S$  elem esetén  $axab = ab$ , amiből a bal egyszerűsíthetőség miatt  $xab = b$  adódik. Ekkor viszont  $bxab = b^2$ , amiből a jobb egyszerűsíthetőség miatt  $bx a = b$  adódik. Tehát  $xa$  az  $S$  félcsoporth egységeleme. Tehát minden  $a \in S$  elem esetén van olyan  $x \in S$  elem, hogy  $xa$  az  $S$  egységeleme. Az  $x$  elem tehát az  $a$  elem bal oldali inverze. Ebből már következik, hogy  $S$  csoport.  $\square$

## 6.4. Inverz félcsoporthok

**6.19. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot inverz félcsoporthnak nevezünk, ha minden elemének van egy és csak egy inverze.

**6.20. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:

- (1)  $S$  reguláris félcsoporth, amelynek idempotens elemei egymással felcserélhetőek.
- (2)  $S$  minden fő jobb ideálja és minden fő bal ideálja egyetlen idempotens elemmel generálható.
- (3)  $S$  inverz félcsoporth.

*Bizonyítás.* (1)-ből következik (2): Legyen  $S$  olyan reguláris félcsoporth, melynek idempotens elemei egymással felcserélhetőek. A 6.4. Tétel miatt  $S$  minden fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható. Tegyük fel, hogy  $Se = Sf$  teljesül valamilyen  $S$ -beli  $e$  és  $f$  idempotens elemekre. Akkor megadhatók olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyekre

$$e = xf, \quad f = ye$$

teljesül. Az első egyenlőségéből

$$ef = (xf)f = xf^2 = xf = e,$$

a második egyenlőségéből pedig

$$fe = (ye)e = ye^2 = ye = f$$

adódik. Ezek az egyenlőségek az  $e$  és  $f$  elemek egymással való felcserélhetősége miatt az

$$e = ef = fe = f$$

teljesülését eredményezik. Így  $S$  minden fő bal oldali ideálja egyetlen idempotenssel generálható. Hasonló módon bizonyítható, hogy  $S$  minden fő jobb oldali ideálja egyetlen idempotenssel generálható. Így (1)-ből következik (2).

(2)-ből következik (3): Legyen  $S$  olyan félcsoport, amely teljesíti a (2) feltételt. A 6.4. Tétel miatt  $S$  reguláris félcsoport. Legyen  $a \in S$  tetszőleges elem. A 6.6. Lemma szerint  $A$ -nak van legalább egy  $b$  inverze. Tegyük fel, hogy valamely  $S$ -beli  $c$  elem is inverze  $a$ -nak. Akkor

$$\begin{aligned} aba &= a, & bab &= b, \\ aca &= a, & cac &= c. \end{aligned}$$

A 6.4. Tétel bizonyítását is figyelembe véve, ezekből könnyen adódik, hogy

$$Sba = Sa = Sca$$

és

$$abS = aS = acS.$$

A (2) feltétel miatt

$$ba = ca$$

és

$$ab = ac,$$

mivel a 6.2. Lemma szerint  $ba, ca, ab, ac$  idempotens elemek. A  $ba$  és  $ca$  szorzatok ugyanazt a fő bal oldali ideált ( $Sa$ -t), az  $ab$  és  $ac$  szorzatok pedig ugyanazt a fő jobb oldali ideált ( $aS$ -et) generálják. Ebből pedig

$$b = bab = bac = cac = c$$

következik, azaz az  $a$  elemnek pontosan egy inverze van. Következésképpen  $S$  inverz félcsoport.

(3)-ból következik (1): Legyen  $S$  egy inverz félcsoport. Mivel egy inverz félcsoport reguláris, ezért csak azt kell megmutatni, hogy  $S$  bármely két idempotens eleme felcserélhető. Legyenek  $e$  és  $f$  az  $S$  félcsoport tetszőleges idempotens elemei. Először megmutatjuk, hogy ha  $e$  és  $f$  idempotens elemei  $S$ -nek, akkor  $ef$  is idempotens elem. Legyen  $a$  egy inverze  $ef$ -nek. Akkor

$$(ef)a(ef) = ef$$

és

$$a(ef)a = a.$$



Legyen

$$b = ae.$$

Akkor

$$(ef)b(ef) = (ef)a(eef) = (ef)a(ef) = ef$$

és

$$b(ef)b = (ae)(ef)(ae) = (ae fa)e = ae = b.$$

Ezért  $b$  inverze  $ef$ -nek. Ekkor viszont

$$ae = a,$$

mivel  $ef$ -nek csak egy inverze lehet. Hasonlóan igazolható, hogy

$$fa = a.$$

Ezért

$$a^2 = (ae)(fa) = a(ef)a = a,$$

azaz  $a$  idempotens elem. Mivel idempotens elem önmagának inverze, ezért

$$a = ef,$$

azaz  $ef$  idempotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy  $fe$  is idempotens eleme. Ekkor viszont a 6.7. Lemma miatt  $fe$  az  $ef$  inverze. Mivel  $ef$  idempotens, ezért  $ef$  önmagának is inverze, amiből  $ef = fe$  következik. Tehát  $S$  olyan reguláris félcsoporth, melynek idempotensei egymással felcserélhetőek.  $\square$

**6.21. Következmény** *Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor inverz félcsoporth, ha  $S$  minden  $\mathcal{L}$ -osztálya és minden  $\mathcal{R}$ -osztálya tartalmaz egy és csak egy idempotens elemet.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  inverz félcsoporth. Akkor  $S$  teljesíti a 6.20. Tétel (3) feltételét. Ebből viszont következik a (2) feltétel, ami annyit jelent, hogy  $S$  minden  $\mathcal{L}$ -osztálya és minden  $\mathcal{R}$ -osztálya pontosan egy idempotens elemet tartalmaz.

Fordítva, ha  $S$  olyan félcsoporth, amelyben minden  $\mathcal{L}$ -osztály és minden  $\mathcal{R}$ -osztály pontosan egy idempotens elemet tartalmaz, akkor  $S$  minden fő bal oldali ideálja és minden fő jobb oldali ideálja pontosan egy idempotenssel generálható, azaz  $S$  teljesíti a 6.20. Tétel (2) feltételét. Ebből a feltételből következik (3) feltétel, s ezért  $S$  inverz félcsoporth.  $\square$

**6.22. Lemma** *Ha  $e$  és  $f$  egy inverz  $S$  félcsoporth idempotens elemei, akkor  $Se \cap Sf = Sef (= Sfe)$ .*

*Bizonyítás.* Ha  $a \in Se \cap Sf$ , akkor

$$ae = af = a,$$

és így

$$aef = af = a,$$

ami miatt

$$a \in Sef.$$

Tehát

$$Se \cap Sf \subseteq Sef.$$

Fordítva, ha  $a \in Sef = Sfe$ , akkor

$$aef = afe = a,$$

ami miatt

$$ae = af = a,$$

azaz

$$a \in Se \cap Sf.$$

Tehát

$$Sef \subseteq Se \cap Sf.$$

Következésképpen,

$$Se \cap Sf = Sef.$$

□

**6.23. Definíció** Egy  $X$  halmaz  $(\cdot)\alpha$  kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációján  $X$  egy  $Y$  részhalmazának egy  $Y' = (X)\alpha$  részhalmazra való bijekcióját értjük. Az  $\alpha$  inverzét a szokásos módon értelmezzük, és  $\alpha^{-1}$ -gyel jelöljük, azaz  $(y')\alpha^{-1} = y$  akkor és csak akkor, ha  $(y)\alpha = y'$  ( $y \in Y$ ,  $y' \in Y'$ ).

Jelölje  $\mathcal{I}_X$  az  $X$  összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak halmazát, beleértve az  $X$  üres részhalmazának önmagára való leképezését, amelyet 0-val jelölünk és üres transzformációnak nevezünk. A  $\mathcal{I}_X$  halmazon definiálunk egy műveletet a következőképpen. Legyenek  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_X$  tetszőleges transzformációk. Legyen  $Y$  az  $\alpha$ ,  $Z$  pedig a  $\beta$  értelmezési tartománya. Ha  $(Y)\alpha \cap Z = \emptyset$ , akkor legyen  $\alpha\beta = 0$ . Ha  $(Y)\alpha \cap Z \neq \emptyset$ , akkor legyen  $\alpha\beta$   $\mathcal{I}_X$ -nek az az eleme, amelynek értelmezési tartománya  $((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$  és minden  $v \in ((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$  esetén legyen  $(v)\alpha\beta = ((v)\alpha)\beta$ .

**6.24. Lemma** Tetszőleges  $X$  halmaz esetén  $\mathcal{I}_X$  inverz félcsoporthot alkot a fent definiált műveletre nézve.

*Bizonyítás.* Az asszociativitás teljesülése nyilvánvaló, ezért  $\mathcal{I}_X$  félcsoporth. Mivel minden  $\alpha \in \mathcal{I}_X$  esetén  $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$  (és  $\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$ ), ezért  $\mathcal{I}_X$  reguláris félcsoporth. Legyen  $\alpha$  tetszőleges idempotens eleme  $\mathcal{I}_X$ -nek. Legyen  $Y$  az  $\alpha$  értelmezési tartománya. Mivel  $\alpha^2$  értelmezési tartománya  $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1}$ , ezért  $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1} = Y$ , amiből  $Y \cap Y\alpha = Y\alpha$ , s ebből pedig  $Y\alpha \subseteq Y$  következik. Legyen  $a \in Y\alpha$  tetszőleges elem. Akkor  $a = b\alpha$  ( $b \in Y$ ), s ezért  $a\alpha = b\alpha\alpha = b\alpha = a$ , azaz  $\alpha$  identikusan hat  $Y\alpha$ -n. Ebből az is következik, hogy  $Y = Y\alpha$ , mivel  $\alpha$  bijektív. Tehát  $\mathcal{I}_X$  valamely eleme akkor és csak akkor idempotens elem, ha identikusan hat  $X$  valamely részhalmazán. Ezért az idempotens elemek egymással felcserélhetőek. Ebből viszont a 6.20. Tétel miatt  $\mathcal{I}_X$  inverz félcsoporth.  $\square$

**6.25. Definíció** *A  $\mathcal{I}_X$  félcsoporthot az  $X$  halmaz feletti szimmetrikus inverz félcsoporthnak nevezzük.*

A csoportelméletben jól ismert az a tétel, hogy minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal. Ennek a tételnek az inverz félcsoporthokra való általánosítása a következő tétel.

**6.26. Tétel** *Minden  $S$  inverz félcsoporth izomorf az  $S$  feletti szimmetrikus inverz félcsoporth egy részfélcsoporthjával.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  inverz félcsoporth. Minden  $a \in S$  elemhez rendeljük hozzá  $Sa^{-1} = Saa^{-1}$ -nek  $Sa = Sa^{-1}a$ -ra való  $\varrho_a : x \mapsto xa$  leképezését. Nyilvánvaló, hogy  $\varrho_{a^{-1}}$   $Sa$ -t képezi le  $Sa^{-1}$ -re. Legyenek  $x \in Sa^{-1}$  és  $y \in Sa$  tetszőleges elemek. Akkor  $xaa^{-1} = x$  és  $ya^{-1}a = y$ . Ezért

$$(x)\varrho_a\varrho_{a^{-1}} = xaa^{-1} = x$$

és

$$(y)\varrho_{a^{-1}}\varrho_a = ya^{-1}a = y,$$

amiből következik, hogy  $\varrho_a$  és  $\varrho_{a^{-1}}$  egymás inverzei  $\mathcal{I}_S$ -ben, azaz  $\varrho_a^{-1} = \varrho_{a^{-1}}$ . Megmutatjuk, hogy az  $a \mapsto \varrho_a$  megfeleltetés izomorfizmus. Először belátjuk, hogy a megfeleltetés injektív. Tegyük fel, hogy  $\varrho_a = \varrho_b$ , ( $a, b \in S$ ). Akkor  $Saa^{-1} = Sbb^{-1}$ , s ezért  $aa^{-1} = bb^{-1}$ , mivel idempotensek. Ha  $x \in Saa^{-1}$ , akkor  $xa = (x)\varrho_a = (x)\varrho_b = xb$ . Mivel  $a^{-1} \in Saa^{-1}$ , ezért  $a^{-1}a = a^{-1}b$ . Ekkor viszont

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Végül megmutatjuk, hogy a megfeleltetés művelettartó, azaz  $\varrho_a\varrho_b = \varrho_{ab}$ . A  $\varrho_{ab}$  értelmezési tartománya  $S(ab)(ab)^{-1}$ . A  $\varrho_a\varrho_b$  értelmezési tartománya  $(Saa^{-1} \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}}$ . Alkalmazva a 6.22. Lemmát,

$$Saa^{-1} \cap Sbb^{-1} = Saa^{-1}bb^{-1} = Sabb^{-1}.$$

Így

$$(Saa^{-1} \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}} = (Sabb^{-1})a^{-1} = Sabb^{-1}a^{-1} = S(ab)(ab)^{-1}.$$

Tehát  $\varrho_{ab}$  és  $\varrho_a\varrho_b$  értelmezési tartománya megegyezik. Mivel minden  $s \in S$  elemre

$$(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = (s)(\varrho_a\varrho_b),$$

ezért

$$\varrho_{ab} = \varrho_a\varrho_b.$$

□

## Feladatok

**6.1.** (Megoldás: 17.19.) Mutassuk meg, hogy inverz félcsoporth tetszőleges  $a$  és  $b$  elemei esetén  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ , ahol  $(\cdot)^{-1}$  jelöli egy  $S$ -beli elem (Neumann-féle) inverzét.

**6.2.** (Megoldás: 17.20.) Mutassuk meg, hogy egy kommutatív reguláris félcsoporth részcsoporthok úniója.

**6.3.** (Megoldás: 17.21.) Mutassuk meg, hogy egyetlen idempotens elemet tartalmazó reguláris félcsoporth szükségképpen csoport.

## 7. fejezet

# Jobb egyszerű és jobb 0-egyszerű félcsoporthok

**7.1. Definíció** Egy  $S$  félcsoporth  $S$ -től különböző jobb oldali [bal oldali] ideáljait valódi jobb oldali [bal oldali] ideáloknak nevezzük. Egy félcsoporthot jobb [bal] egyszerűnek nevezünk, ha nincs valódi jobb [bal] oldali ideálja.

**7.2. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor jobb [bal] egyszerű, ha  $aS = S$  ( $Sa = S$ ) teljesül minden  $a \in S$  eleme esetén.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  jobb egyszerű félcsoporth. Tetszőleges  $a \in S$  elem esetén,  $aS$  az  $S$  egy jobb oldali ideálja, s ezért

$$aS = S.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy minden  $a \in S$  elem esetén  $aS = S$ . Legyen  $R$  tetszőleges jobb oldali ideálja  $S$ -nek. Akkor tetszőleges  $a \in R$  elem esetén

$$S = aS \subseteq RS \subseteq R,$$

azaz az  $R \subseteq S$  tartalmazás miatt

$$R = S$$

következik. Tehát  $S$  jobb egyszerű. □

**7.3. Tétel** Egy félcsoporth akkor és csak akkor csoport, ha jobb egyszerű és bal egyszerű.

*Bizonyítás.* A 7.2. Tétel és az 1.25. Tétel felhasználásával a tétel állítása nyilvánvaló. □

**7.4. Tétel** Minden kommutatív egyszerű félcsoporth csoport.

*Bizonyítás.* Ha  $S$  kommutatív egyszerű félcsoporth, akkor bal egyszerű is és jobb egyszerű is, s ezért a 7.3. Tétel miatt  $S$  egy csoport. □

**7.5. Megjegyzés** Ha egy  $S$  félcsoporthnak van  $0$  nulleleme, akkor  $\{0\}$  az  $S$  bal oldali és jobb oldali ideálja; az  $S$ -től és  $\{0\}$ -tól különböző bal-, illetve jobb oldali ideálokat valódi bal-, illetve jobb oldali ideáloknak nevezzük. Ha  $S$ -ben nincs valódi bal-, illetve valódi jobb oldali ideál, akkor  $S$ -nek nincs valódi ideálja, s ezért a 4.5. Megjegyzés szerint  $S^2 = S$  vagy  $S^2 = \{0\}$ . Ezen utóbbi esetben  $S$ -nek legfeljebb két eleme van.

**7.6. Definíció** Egy nullelemes  $S$  félcsoporthot jobb 0-egyszerűnek [bal 0-egyszerűnek] nevezünk, ha  $S^2 \neq \{0\}$  és  $S$ -nek nincs valódi jobb [bal] oldali ideája.

**7.7. Tétel** Legyen  $S$  egy nullelemes félcsoporth.  $S$  jobb 0-egyszerű [bal 0-egyszerű] akkor és csak akkor, ha  $S - \{0\}$  jobb egyszerű [bal egyszerű] félcsoporth.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges nullelemes félcsoporth. Tegyük fel, hogy  $S$  jobb 0-egyszerű. Tegyük fel, hogy  $a$  és  $b$  az  $S$  félcsoporth olyan nem nulla elemei, amelyekre  $ab = 0$  teljesül. Akkor

$$Z_a = \{x \in S : ax = 0\}$$

az  $S$  félcsoporth  $b$ -t tartalmazó jobb oldali ideálja, amely egyenlő  $S$ -sel az  $S$  félcsoporth jobb 0-egyszerűsége miatt. Ekkor viszont  $aS = \{0\}$ , amiből következik, hogy

$$Z = \{x \in S : xS = \{0\}\}$$

az  $S$  félcsoporth  $a$ -t tartalmazó jobb oldali ideálja. Mivel  $S$  jobb 0-egyszerű, ezért

$$Z = S.$$

Ez viszont azt eredményezi, hogy

$$S^2 = \{0\},$$

ami ellentmondás. Tehát  $S$ -ben a nemnulla elemek egy részfélcsoporthot alkotnak. Legyen  $B$  tetszőleges jobb oldali ideálja  $S - \{0\}$ -nak. Akkor

$$\{0\} \neq B \cup \{0\}$$

jobb oldali ideálja  $S$ -nek, és így

$$B \cup \{0\} = S.$$

Ebből

$$B = S - \{0\}$$

adódik. Tehát  $S - \{0\}$  jobb egyszerű félcsoporth.

Fordítva, legyen  $S - \{0\}$  jobb egyszerű félcsoporth. Akkor

$$(S - \{0\})^2 = S - \{0\}.$$

Így

$$S^2 \neq \{0\}.$$

Legyen  $B$  tetszőleges nemnulla jobb oldali ideálja  $S$ -nek. Az világos, hogy  $0 \in B$ . Mivel  $B - \{0\}$  jobb oldali ideálja az  $S - \{0\}$  félcsoporthnak, ezért

$$B - \{0\} = S - \{0\}$$

az  $S - \{0\}$  félcsoporth jobb egyszerűsége miatt. Így

$$B = S.$$

Tehát  $S$  jobb 0-egyszerű. Ezzel a tételt bebizonyítottuk a jobb oldali esetre. A bal oldali eset bizonyítása hasonlóan végezhető el.  $\square$

**7.8. Megjegyzés** Az előző tétel alapján a jobb 0-egyszerű, illetve a bal 0-egyszerű félcsoporthokat megkaphatjuk, ha a jobb egyszerű, illetve a bal egyszerű félcsoporthokhoz null-elemet adjungálunk.

**7.9. Tétel** Egy 0-elemes  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor bal [jobb] 0-egyszerű, ha tetszőleges  $a \in S \setminus \{0\}$  elem esetén  $Sa = S$  [ $aS = S$ ].

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy 0-elemes félcsoporth. A 7.7. Tétel szerint  $S$  bal 0-egyszerű akkor és csak akkor, ha  $G = S \setminus \{0\}$  bal egyszerű félcsoporth. Ezért ha  $S$  bal 0-egyszerű, akkor tetszőleges  $a \in G$  elem esetén

$$Sa = (\{0\} \cup G)a = \{0\} \cup Ga = \{0\} \cup G = S,$$

felhasználva a 7.2. Tételt is. Fordítva, ha minden  $a \in S \setminus \{0\}$  elem esetén  $Sa = S$ , akkor tetszőleges  $L \neq \{0\}$  bal oldali ideál tetszőleges  $a \neq 0$  elemére

$$S = Sa \subseteq L$$

adódik, s ezért azt kapjuk, hogy

$$L = S,$$

amiből már következik, hogy  $S$  bal 0-egyszerű.  $\square$

**7.10. Tétel** Tetszőleges 0-elemes  $S$  félcsoporthon a következő feltételek egymással ekvivalensek.

- (1)  $S$  jobb 0-egyszerű és bal 0-egyszerű;
- (2)  $G = S - \{0\}$  csoport, és így  $S$  a  $G$  csoportból egy nullelem adjungálásával áll elő.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy 0-elemes félcsoporth. Tegyük fel, hogy  $S$  jobb 0-egyszerű és bal 0-egyszerű. Akkor a 7.7. Tétel miatt  $G = S \setminus \{0\}$  bal egyszerű és jobb egyszerű félcsoporth. A 7.3. Tétel miatt  $G$  egy csoport.

Fordítva, ha  $S \setminus \{0\}$  csoport, akkor minden  $a \in G$  elem esetén

$$aS = a(\{0\} \cup G) = \{0\} \cup G = S.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$Sa = S.$$

A 7.9. Tétel miatt  $S$  jobb- és bal 0-egyszerű. □

## 7.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok

**7.11. Lemma** *Jobb egyszerű félcsoporth minden idempotens eleme bal oldali egységelem.*

*Bizonyítás.* Legyen  $e$  egy jobb egyszerű  $S$  félcsoporth tetszőleges idempotens eleme. Mivel  $S$  jobb egyszerű, ezért tetszőleges  $a \in S$  elemhez megadható  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, melyre

$$ex = a$$

teljesül. Így,

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

minden  $a \in S$  elemre. Tehát  $e$  bal oldali egységeleme  $S$ -nek. □

A következőkben azokkal a jobb egyszerű félcsoporthokkal foglalkozunk, amelyek tartalmaznak legalább egy idempotens elemet (ilyenek például a véges jobb egyszerű félcsoporthok).

**7.12. Lemma** *Ha  $S$  olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet, akkor  $S$  bal egyszerűsíthető.*

*Bizonyítás.* Jelöljön  $S$  egy olyan jobb egyszerű félcsoporthot, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyenek  $a, b, c \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ca = cb.$$

Legyen  $f \in E_S$  tetszőleges idempotens elem. A 7.11. Tétel szerint  $f$  az  $S$  bal oldali egységeleme. Mivel  $S$  jobb egyszerű, ezért van  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, hogy

$$cx = f.$$



Legyen

$$e = xc.$$

Akkor

$$e^2 = xcxc = xfc = xc = e,$$

azaz

$$e \in E_S,$$

felhasználva azt is, hogy  $f$  az  $S$  bal oldali egységeleme. Így

$$a = ea = xca = xcb = eb = b.$$

Tehát  $S$  bal egyszerűsítéses. □

**7.13. Lemma** *Legyen  $S$  jobb egyszerű félcsoporth,  $e \in S$  tetszőleges idempotens elem. Akkor  $Se$  csoport.*

*Bizonyítás.* Legyen  $e$  egy jobb egyszerű  $S$  félcsoporth tetszőleges idempotens eleme. A 7.11. Tétel miatt  $e$  bal oldali egységeleme  $S$ -nek. Így az  $Se$  részfélcsoporthnak  $e$  bal oldali egységeleme. Mivel minden  $a \in Se$  elem  $a = se$  alakban írható valamely  $s \in S$  elemmel, ezért

$$ae = (se)e = se^2 = se = a,$$

azaz  $e$  az  $Se$  részfélcsoporthban jobb oldali egységelem is. Tehát  $Se$  egységelemes félcsoporth (benne  $e$  az egységelem). Legyen

$$a \in Se$$

tetszőleges elem. Mivel  $S$  jobb egyszerű, ezért van olyan  $x \in S$  elem, hogy

$$ax = e.$$

Ebből

$$a(xe) = (ax)e = e^2 = e$$

adódik. Tehát  $xe \in Se$  az  $a \in Se$  elem jobb oldali inverze. Ebből már következik az 1.25. Tétel szerint, hogy  $Se$  az  $S$  félcsoporth részcsoportja. □

**7.14. Definíció** *Egy  $S$  félcsoporthot jobbcsoporthnak nevezünk, ha jobb egyszerű és bal egyszerűsítéses.*

**7.15. Lemma** *Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor jobbcsoporth, ha az  $ax = b$  egyenletnek van egy és csak egy megoldása  $S$ -ben minden  $(a, b) \in S \times S$  elempár esetén.*

*Bizonyítás.* A Lemma állítása a jobbcsoport definíciójának, illetve a 7.2. Tételnek közvetlen következménye.  $\square$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden csoport jobbcsoport, illetve minden jobbzerő félcsoporthoz is jobbcsoport.

**7.16. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporthoz a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

- (1)  $S$  jobbcsoport.
- (2)  $S$  jobb egyszerű, és tartalmaz legalább egy idempotens elemet.
- (3)  $S$  egy csoportnak és egy jobbzerő félcsoporthoz a direkt szorzata.

*Bizonyítás.* (1)-ből következik (2): Minden jobbcsoport jobb egyszerű definíció szerint, ezért csak azt kell megmutatni, hogy minden jobbcsoport tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyen  $a$  egy  $S$  jobbcsoport tetszőleges eleme.  $S$  jobb egyszerűsége miatt van olyan  $e \in S$  elem, hogy

$$ae = a,$$

és így

$$ae^2 = ae,$$

amiből

$$e^2 = e$$

következik  $S$  bal egyszerűsíthetősége miatt. Tehát  $e$  az  $S$  félcsoporthoz idempotens eleme.

(2)-ből következik (3): Legyen  $S$  olyan tetszőleges jobb egyszerű félcsoporthoz, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A 7.11. Lemma szerint  $S$  minden idempotens eleme az  $S$  bal oldali egységeleme. A 7.12. Lemma szerint  $S$  bal egyszerűsítéses. A 7.13. Lemma szerint minden  $S$ -beli  $e$  idempotens elem esetén  $Se$  az  $S$  részcsoporthoz.

A bizonyítás további részében legyen  $e$  az  $S$  egy rögzített idempotens eleme. Jelölje  $G$  az  $Se$  részcsoporthoz. Mivel  $E_S$  minden eleme az  $S$  bal oldali egységeleme, ezért  $E_S$  az  $S$  jobbzerő részfélcsoporthoz. Meg fogjuk mutatni, hogy a  $G$  csoportnak az  $E_S$  jobbzerő félcsoporthoz képezett  $G \times E_S$  direkt szorzata izomorf  $S$ -sel. Pontosabban, megmutatjuk, hogy

$$\Phi : (g, f) \mapsto gf$$

a  $G \times E_S$  direkt szorzatnak  $S$ -re való izomorfizmusa. Mivel

$$\begin{aligned} \Phi((g_1, f_1)(g_2, f_2)) &= \Phi((g_1g_2, f_1f_2)) = \Phi((g_1g_2, f_2)) = \\ &= (g_1g_2)f_2 = g_1f_1g_2f_2 = \Phi((g_1, f_1))\Phi((g_2, f_2)), \end{aligned}$$

ezért  $\Phi$  a  $G \times E_S$  direkt szorzatnak az  $S$  félcsoporthba való homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy

$$\Phi((g_1, f_1)) = \Phi((g_2, f_2)),$$

azaz

$$g_1 f_1 = g_2 f_2.$$

Akkor

$$g_1 = g_1 e = g_1 f_1 e = g_2 f_2 e = g_2 e = g_2$$

és így

$$g_2 f_2 = g_1 f_1 = g_2 f_1.$$

Mivel  $S$  bal egyszerűsítéssel, ezért

$$f_2 = f_1.$$

Tehát

$$(g_1, f_1) = (g_2, f_2),$$

és ezért  $\Phi$  injektív. Már csak azt kell megmutatni, hogy  $\Phi$  szürjektív. Legyen  $a \in S$  tetszőleges elem. Akkor  $ax = a$  valamely  $x \in S$ -re, amiből  $ax^2 = ax$ , ebből pedig  $x^2 = x$  következik (ez utóbbi az  $S$  bal egyszerűsíthetősége miatt). Így  $x \in E_S$ , és

$$\Phi((ae, x)) = aex = ax = a.$$

Tehát  $\Phi$  szürjektív. Így  $S \cong G \times E_S$ .

(3)-ból következik (1): A bizonyítás triviális, mivel egy csoport és egy jobbzerő félcsoporth jobbcsoporth, ezért azok direkt szorzata is jobbcsoporth.  $\square$

**7.17. Tétel** *Egy félcsoporth akkor és csak akkor jobbcsoporth, ha olyan diszjunkt részcsoportjainak uniója, melyek egységelemei a félcsoporth jobbzerő részfélcsoporthját alkotják.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  jobbcsoporth. Akkor a 7.11. Tétel miatt  $S$  minden idempotens eleme bal oldali egységelem, s ezért  $S$  idempotenseinek  $E_S$  halmaza az  $S$  félcsoporth egy jobbzerő részfélcsoporthját alkotja. Legyenek  $a \in S$  és  $e \in E_S$  tetszőleges elemek. Mivel  $S$  jobb egyszerű, ezért megadható olyan  $x \in S$  elem, amelyre  $ax = e$  teljesül. Ebből  $axa = ea = a$  adódik, mivel  $e$  bal oldali egységeleme  $S$ -nek. Megszorozva ezen utóbbi egyenlőséget  $x$ -szel balról, azt kapjuk, hogy  $(xa)^2 = xa$ , azaz,  $f = xa \in E_S$ . Így  $a = axa = af \in Sf$ . Mivel  $Sf$  részcsoportja  $S$ -nek (lásd a 7.13. Tételt), ezért azt kaptuk eredményként, hogy  $S$  minden eleme benne van  $S$  egy részcsoportjában. Így  $S$  diszjunkt részcsoportok uniója, s a részcsoportok egységelemei (azaz az  $S$  idempotens elemei) az  $S$  egy jobbzerő részfélcsoporthot alkotják.

Fordítva, legyen  $S$  olyan félcsoporth, amely olyan diszjunkt részcsoportjainak uniója, amelyek egységelemei az  $S$  félcsoporth jobbzerő részfélcsoporthját alkotják. A felbontásban szereplő részcsoportok az  $S$  maximális részcsoportjai. A 7.16. Tétel szerint elegendő

azt megmutatni, hogy  $S$  jobb egyszerű. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan  $S$ -beli  $e$  és  $f$  idempotens elemek, hogy

$$a \in G_e \quad \text{és} \quad b \in G_f,$$

ahol  $G_e$  és  $G_f$  jelölik  $S$  azon maximális részcsoporthait, amelyek egységelemei az  $e$ , illetve az  $f$  idempotens elemek. Jelöljük

$$a^{-1} \in G_e, \quad b^{-1} \in G_f$$

az  $a$ , illetve  $b$  elemek inverzeit ( $G_e$ -ben, illetve  $G_f$ -ben). Akkor

$$aa^{-1}b = eb = e(fb) = (ef)b = fb = b,$$

és így

$$b \in aS.$$

Mivel  $b$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges eleme, ezért

$$Sa = S.$$

Tehát  $S$  minden  $a$  eleme esetén  $Sa = S$ , amiből a 7.2. Tétel miatt az következik, hogy  $S$  jobb egyszerű.  $\square$

**7.18. Tétel** *Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerűsítéses jobb egyszerű félcsoporth csoport.*

*Bizonyítás.* Ha egy jobb egyszerű  $S$  félcsoporth tartalmaz egy idempotens elemet, akkor a 7.16. Tétel miatt  $S$  egy  $e$  egységelemű  $G$  csoportnak és egy  $R$  jobbzéró félcsoporthnak a direkt szorzata. Mivel  $(e, b)(e, a) = (e, c)(e, a)$  tetszőleges  $a, b, c \in R$  elemekre, ezért, ha  $S$  jobb egyszerűsítéses is, akkor  $b = c$  teljesül (minden  $b, c \in R$  elemre). Így  $|R| = 1$ , s ezért  $S$  izomorf a  $G$  csoporttal.  $\square$

## 7.2. Idempotens elemet nem tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok

**7.19. Tétel** *Ha  $S$  egy olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor  $S$  minden  $\mathcal{L}$ -osztálya egy elemet tartalmaz.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $a$  és  $b$  egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoporth olyan elemei, amelyek esetén

$$S^1a = S^1b.$$

Akkor megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, hogy

$$a = xb \quad \text{és} \quad b = ya.$$

Tegyük fel, hogy  $a \neq b$ . Akkor az  $x, y \neq 1$ , és így  $xy \in S$ . Ekkor viszont

$$a = xya,$$

ahol  $xy \in S$ . Mivel  $S$  jobbegyszerű, ezért

$$aS = S,$$

s így van olyan  $u \in S$  elem, hogy

$$xy = au.$$

Ebből és az előbbi egyenlőségből

$$a = aua,$$

amiből pedig

$$(au)^2 = xyau = au$$

következik. Tehát  $au$  az  $S$  félcsoporth idempotens eleme, ellentmondva az  $S$ -re vonatkozó feltételnek. Így  $a = b$ . Következésképpen  $S$  minden  $\mathcal{L}$ -osztálya egy elemet tartalmaz.  $\square$

**7.20. Tétel** *Ha  $S$  egy olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor  $S$  minden  $a$  és  $b$  eleme esetén az  $ax = b$  egyenletnek  $S$ -ben végtelen sok megoldása van.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Jelölje  $M_a \subseteq S$  az  $ax = b$  egyenlet megoldásainak (nemüres) halmazát. Mivel  $bS = S$  is teljesül, ezért megadható olyan  $y \in S$  elem, hogy

$$by = a.$$

Tekintsük a

$$\varphi : x \mapsto xyx$$

leképezést ( $x \in M_a$ ). Az  $ax = b$  és  $by = a$  egyenlőségekből

$$axy = a,$$

ezen utóbbi egyenlőségből pedig

$$a\varphi(x) = a(xyx) = ax = b$$

adódik. Tehát

$$\varphi(M_a) \subseteq M_a.$$

Az világos, hogy  $\varphi$ -nek nincs fixpontja  $M_a$ -ben. Ugyanis, ha valamely  $x \in M_a$  elem esetén fennállna az  $xyx = x$  egyenlőség, akkor  $xy$  az  $S$  félcsoporth idempotens eleme lenne, ami nem lehet az  $S$ -re vonatkozó feltételek miatt. Tetszőleges  $x \in M_a$  elemmel képezzük az  $M$  elemeiből álló

$$\varphi^{(0)}(x) = x, \varphi^{(1)}(x) = \varphi(x), \dots, \varphi^{(n+1)}(x) = \varphi(\varphi^{(n)}(x)), \dots \quad (7.1)$$

sorozatot. Az világos, hogy

$$\varphi^{(m)}(x) \in xSx$$

minden  $m$  pozitív egész számra. Tegyük fel, hogy

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(m)}(x)$$

valamely  $n > m$  nemnegatív egész számra. Akkor

$$\varphi^{(m)}(x) = \varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n-m)}(\varphi^{(m)}(x)) \in \varphi^{(m)}(x)S\varphi^{(m)}(x),$$

amiből azt kapjuk, hogy  $(\varphi^{(m)}(x))s$  az  $S$  félcsoporth idempotens eleme valamely  $s \in S$  elemmel. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy  $S$ -nek nincs idempotens eleme. Tehát a (7.1) sorozat elemei az  $M_a$  halmaz páronként különböző elemei. Az  $M_a$  halmaz tehát végtelen sok elemet tartalmaz.  $\square$

**7.21. Tétel** *Ha  $S$  egy olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor  $S$  minden eleme az  $S$  végtelen sok különböző fő balideáljának eleme.*

*Bizonyítás.* Legyen  $b$  egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoporth tetszőleges eleme. Rögzített  $a \in S$  elem esetén jelölje  $M_a$  az  $ax = b$  egyenlet összes  $S$ -beli megoldásainak halmazát. Az előző tétel miatt  $M_a$  végtelen sok elemet tartalmaz. Ha  $u$  és  $v$  az  $M_a$  különböző elemei, akkor

$$b = au \in Su$$

és

$$b = av \in Sv,$$

valamint a 7.19. Tétel szerint  $Su \neq Sv$ . Így  $b$  végtelen sok különböző fő balideál eleme.  $\square$

**7.22. Tétel** *Ha  $S$  egy olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor  $S$  minden  $x$  eleme esetén  $Sx$  is idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoporth.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x \in S$  tetszőleges. Az világos, hogy  $Sx$  olyan részfélcsoporthja  $S$ -nek, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyen  $a \in Sx$  tetszőleges eleme. Mivel  $S$  jobbegyszerű, ezért

$$aS = S.$$

Így

$$a(Sx) = (aS)x = Sx.$$

Tehát a 7.2. Tétel szerint  $Sx$  jobb egyszerű.  $\square$

A továbbiakban azokkal az idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoporthal foglalkozunk, amelyek jobb egyszerűsítések. Példa ilyen félcsoportha az ún. Baer-Levi félcsoport.

### 7.3. Baer-Levi félcsoporthok

**7.23. Definíció** Jelöljenek  $p \geq q$  tetszőleges végtelen számosságokat. Egy  $S$  félcsoporthot  $(p, q)$ -típusú Baer-Levi félcsoporthnak nevezünk, ha megadható olyan  $p$  számosságú  $A$  halmaz, hogy  $S$  az  $A$  halmaz önmagába való mindazon injektív  $\eta$  leképezéseinek félcsoporthja (a leképezések kompozíciójára nézve), amelyek esetén az  $A \setminus A\eta$  halmaz számossága  $q$ .

**7.24. Tétel** Tetszőleges  $p \geq q$  számosságok esetén létezik  $(p, q)$ -típusú Baer-Levi félcsoport.

*Bizonyítás.* Legyen  $A$  egy  $p$  számosságú halmaz. Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  az  $A$  önmagába való olyan injektív leképezései, amelyekre az  $A \setminus A\xi$  és  $A \setminus A\eta$  halmazok számossága  $q$ . A tétel bizonyításához meg kell mutatni, hogy az  $A \setminus A\xi\eta$  halmaz számossága is  $q$ . Mivel  $\eta$  injektív, ezért  $A \setminus A\xi$ -t injektív módon képezi le  $A\eta \setminus A\xi\eta$ -ra, és így  $|A \setminus A\xi| = |A\eta \setminus A\xi\eta|$ . Mivel

$$A \setminus A\xi\eta = (A \setminus A\eta) \cup (A\eta \setminus A\xi\eta),$$

és a jobb oldalon álló két diszjunkt halmaz mindegyikének a végtelen  $q$  a számossága, ezért az  $A \setminus A\xi\eta$  halmaz számossága is  $q$ .  $\square$

**7.25. Tétel** Minden Baer-Levi félcsoport idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítési és jobb egyszerű.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy  $(p, q)$ -típusú Baer-Levi félcsoport, azaz egy  $p$  számosságú  $A$  halmaz önmagába való mindazon injektív  $\eta$  leképezéseinek félcsoporthja, amelyek esetén az  $A \setminus A\eta$  halmaz számossága  $q$ . Tetszőleges  $\eta \in S$  leképezésre

$$|A \setminus A\eta| = |A\eta \setminus A\eta^2|.$$

A  $q$  jelentése miatt

$$\eta^2 \neq \eta.$$

Így az  $S$  félcsoporthnak nincs idempotens eleme.

A következőkben megmutatjuk, hogy  $S$  jobb egyszerű. Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  tetszőleges  $S$ -beli elemek. Jelölje  $\gamma$  az  $A$  halmaz önmagába való olyan leképezését, amely tetszőleges  $x \in A$  elem esetén az  $x\alpha$  elemhez az  $x\beta$  elemet rendeli, az  $A \setminus A\alpha$  halmaz elemein pedig a következőképpen hat: mivel  $|A \setminus A\alpha| = |A \setminus A\beta| = q$ , ezért van az  $A \setminus A\alpha$  halmaznak az  $A \setminus A\beta$  halmazba olyan  $\delta$  injektív leképezése, amely esetén az  $(A \setminus A\beta) \setminus ((A \setminus A\alpha)\delta)$

halmaz számossága  $q$ ; tetszőleges  $y \in A \setminus A\alpha$  elem esetén legyen  $y\gamma = y\delta$ . Világos, hogy  $\gamma$  az  $S$  egy eleme és

$$\alpha\gamma = \beta.$$

Így

$$\alpha S = S$$

tetszőleges  $\alpha \in S$  elem esetén. A 7.2. Tétel szerint  $S$  jobb egyszerű félcsoporth.

Már csak azt kell megmutatni, hogy  $S$  jobb egyszerűsítéses. Tegyük fel, hogy

$$\alpha\beta = \gamma\beta$$

teljesül az  $S$  félcsoporth valamely  $\alpha, \beta, \gamma$  elemeire. legyen  $x$  az  $A$  halmaz tetszőleges eleme. Akkor

$$x\alpha\beta = x\gamma\beta.$$

Mivel  $\beta$  injektív, ezért

$$x\alpha = x\gamma,$$

amiből már következik, hogy

$$\alpha = \gamma.$$

□

**7.26. Lemma** *Legyen  $S$  egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoporth. Akkor tetszőleges  $x, y \in S$  esetén  $xy \neq y$ .*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy

$$xy = y$$

teljesül valamely  $x, y \in S$  elemekre. Mivel  $S$  jobb egyszerű, ezért

$$yS = S,$$

és ezért van olyan  $z \in S$  elem, hogy

$$yz = x.$$

Ebből viszont

$$x^2 = x(yz) = (xy)z = yz = x$$

következik, azaz  $x$  az  $S$  félcsoporth idempotens eleme. Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy  $S$  nem tartalmaz idempotens elemet. Tehát igaz a lemma állítása. □

**7.27. Lemma** *Legyen  $S$  egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoporth. Akkor tetszőleges  $x \in S$  elem esetén  $|S \setminus Sx| = |S|$ .*



*Bizonyítás.* Mivel minden véges félcsoporth tartalmaz legalább egy idempotens elemet, ezért a feltétel miatt  $S$  szükségképpen végtelen számosságú. Legyen  $s \in S$  tetszőleges elem. Legyen  $\phi$  az  $S$  félcsoporth önmagába való azon leképezése, amely tetszőleges  $x \in S$  elemhez hozzárendel egyet azon  $x' \in S$  elemek közül, amelyekre  $xx' = s$  teljesül. Mivel  $S$  jobb egyszerű, ezért  $xS = S$ , s emiatt van legalább egy olyan  $x' \in S$  elem, ami az  $xx' = s$  feltételnek eleget tesz. Ha

$$\phi(x) = \phi(y),$$

akkor

$$x\phi(x) = s = y\phi(y) = y\phi(x),$$

amiből az  $S$  félcsoporth jobb egyszerűsíthetősége miatt

$$x = y$$

következik. Tehát a  $\phi$  leképezés injektív. Így

$$|S| = |\phi(S)|.$$

Megmutatjuk, hogy  $\phi(S) \cap Ss = \emptyset$ . Tegyük fel, indirekt módon, hogy van  $S$ -nek olyan  $z$  eleme, amely benne van a  $\phi(S) \cap Ss$  halmazban. Akkor

$$z = \phi(x) = ys$$

valamely  $x, y \in S$  elemekre. Ekkor viszont

$$s = x\phi(x) = xys,$$

ami ellentmond a 7.26. Lemmának. Így valóban igaz, hogy

$$\phi(S) \cap Ss = \emptyset,$$

és ezért

$$\phi(S) \subseteq S \setminus Ss.$$

Emiatt viszont

$$|S| = |\phi(S)| \leq |S \setminus Ss| \leq |S|,$$

azaz

$$|S \setminus Ss| = |S|$$

adódik. □

**7.28. Tétel** *Legyen  $S$  idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéssel, jobb egyszerű félcsoporth. Akkor  $S$ -et be lehet ágyazni egy  $(p, p)$ -típusú Baer-Levi félcsoporthba, ahol  $p = |S|$ .*

*Bizonyítás.* Az 5.14. Lemma szerint az  $S$  félcsoporth kiterjesztett jobbrekuláris reprezentációja, azaz az egységelemes  $S^1$  félcsoporth reguláris reprezentációjának  $S$ -re való leszűkítése az  $S$  félcsoporth egy hű reprezentációja. Ennél a reprezentációnál az  $S$  tetszőleges  $s$  eleméhez az  $S^1$  félcsoporth  $s$  eleméhez tartozó  $\varrho_s$  belső jobb transzlációja van hozzárendelve, azaz  $S^1$ -nek a

$$\varrho_s : \begin{cases} 1 \mapsto s \\ x \mapsto xs, \ x \in S \end{cases}$$

módon definiált önmagába való leképezése. Erre a leképezésre

$$|S^1 \setminus (S^1)\varrho_s| = |S^1 \setminus (s \cup Ss)| = |S \setminus Ss|$$

teljesül, mivel  $|S|$  végtelen. Így, használva a 7.27. Lemmát is, azt kapjuk, hogy

$$|S^1| = |S| = |S \setminus Ss| = |S^1 \setminus (S^1)\varrho_s|.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy  $\varrho_s$  eleme annak a  $(p, p)$ -típusú Baer-Levi félcsoporthnak ( $p = |S|$ ), amely  $S^1$  önmagába való leképezéseiből áll.  $\square$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt (lásd a [6] könyv Theorem 8.8. tételét).

**7.29. Tétel** *Egy  $S$  félcsoporthot akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéssel, jobb egyszerű félcsoporthba, ha  $S$  idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéssel félcsoporth.*

## Feladatok

**7.1.** (Megoldás: 17.22.) Mutassuk meg, hogy bal egyszerű félcsoporth minden jobb unitér részfélcsoporthja bal egyszerű!

**7.2.** (Megoldás: 17.23.) Mutassuk meg, hogy ha  $N$  unitér,  $H$  pedig reflexív unitér részfélcsoporthja egy  $S$  bal egyszerű félcsoporthnak, akkor  $N \cap H \neq \emptyset$ .

**7.3.** (Megoldás: 17.24.) Mutassuk meg, hogy ha  $H$  és  $N$  egy  $S$  bal egyszerű félcsoporth olyan reflexív, unitér részfélcsoporthjai, melyeknek nincs nemtriviális csoport-homomorf képük, akkor  $N = H$ .

## 8. fejezet

# Egyszerű és 0-egyszerű félcsoporthok

Az egyszerű, illetve 0-egyszerű félcsoporth fogalmakat korábban már definiáltuk (4.1. Definíció, 4.6. Definíció). Ebben a fejezetben részletes vizsgálataikkal foglalkozunk.

### 8.1. Egyszerű félcsoporthok

**8.1. Tétel** *Ha egy  $S$  félcsoporth előáll minimális jobb oldali ideáljainak uniójaként, akkor  $S$  egyszerű félcsoporth.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporth előáll  $R_i$  ( $i \in I$ ) minimális jobb ideáljainak uniójaként. Legyenek  $x \in S$  és  $y \in R_i$  tetszőleges elemek ( $i \in I$ ). Akkor  $yxS$  az  $S$  olyan jobb oldali ideálja, amelyik benne van az  $R_i$  minimális jobb oldali ideálban. Ezért

$$yxS = R_i.$$

Ezért

$$S = \cup_{i \in I} R_i = \cup_{y \in S} yxS = SxS.$$

A 4.2. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy  $S$  egyszerű félcsoporth. □

A következő részben az egyszerű félcsoporthok egy speciális típusával foglalkozunk.

### 8.2. Croisot-Teissier félcsoporthok

Legyenek  $p$  és  $q$  olyan végtelen számosságok, amelyekre  $p \geq q$  teljesül. Legyen  $A$  olyan halmaz, melynek számossága nagyobb vagy egyenlő mint  $p$ . Legyen  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i : i \in I\}$  az  $A$  halmazon értelmezett páronként különböző olyan ekvivalenciarelációk halmaza, amelyek szerint vett  $A/\mathcal{E}_i$  faktorhalmazok mindegyike  $p$  számosságú. Az  $A$  halmaz egy  $B$  részhalmazáról azt mondjuk, hogy  $\mathcal{E}$  által jól szeparált, ha  $B$  számossága  $p$  és minden

egyes  $\mathcal{E}_i$ -nek a  $B$ -re való  $\mathcal{E}_i \cap (B \times B)$  leszűkítése a  $B$  identikus relációja, azaz  $B$  minden  $\mathcal{E}_i$ -osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz. Minden  $i \in I$  indexre jelölje  $T_i$  az  $A$ -nak önmagába való mindazon  $(\cdot)\eta_i$  leképezéseinek halmazát, amelyekre a következők teljesülnek:

1.  $\eta_i \circ \eta_i^{-1} = \mathcal{E}_i$ ;
2.  $A$ -nak valamely,  $\mathcal{E}$  által jól szeparált  $B$  részhalmaza esetén
  - (a)  $A\eta_i \subseteq B$  és
  - (b)  $|B \setminus A\eta_i| = q$ .

Megjegyezzük, hogy ha  $A$ -nak van  $\mathcal{E}$  által jól szeparált részhalmaza, akkor a  $T_i$  halmaz egyetlen  $i \in I$  indexre sem üres.

A következőkben egy ilyen esetre vonatkozó példát ismertetünk. Legyen  $I$  tetszőleges nem üres halmaz. Jelöljön  $E$  egy végtelen  $p$  számosságú halmazt. Jelölje  $A$  az  $E$  halmaznak önmagával képezett  $|I|$ -szeres descartes szorzatát, azaz  $A$  mindazon kiválasztási függvények halmaza, amelyek minden  $I$ -beli  $i$  indexhez egy  $E$ -beli elemet rendelnek. Tetszőleges  $j \in I$  index esetén legyen  $\mathcal{E}_j$  az  $A$  halmaz következő ekvivalenciarelációja: valamely  $a, b \in A$  elem akkor és csak akkor álljon relációban, ha  $a(j) = b(j)$ . Az világos, hogy

$$|A/\mathcal{E}_j| = |E| = p.$$

Az is igaz, hogy az  $A$  halmaz mindazon  $b$  elemeinek  $B$  halmaza, amelyekre

$$b(i) = b(j)$$

teljesül minden  $i, j \in I$  indexre, az  $A$ -nak egy, az  $\mathcal{E}$  által jól szeparált részhalmaza.

Ha az  $A$  halmaz tartalmaz  $\mathcal{E}$  által jól szeparált részhalmazt, akkor a fent definiált leképezések  $\cup_{i \in I} T_i$  halmazát  $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ -val fogjuk jelölni.

**8.2. Lemma**  *$CT(A, \mathcal{E}, p, q)$  olyan idempotens elem nélküli félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a  $T_i$  részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.*

*Bizonyítás.* Annak bizonyításához, hogy  $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$  olyan félcsoport, amelyben a  $T_i$  részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges  $i, j \in I$  indexek és tetszőleges  $\xi \in T_i, \eta \in T_j$  elemek esetén  $\xi\eta \in T_i$ . Legyenek tehát  $i, j \in I$  és  $\xi \in T_i, \eta \in T_j$  tetszőlegesek. Akkor

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i, \quad \eta \circ \eta^{-1} = \mathcal{E}_j,$$

továbbá megadható  $A$ -nak két olyan,  $\mathcal{E}$  által jól szeparált  $X$  és  $Y$  részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = q$$

teljesülnek. Ezen feltételekből egyrészt

$$(\xi\eta) \circ (\xi\eta)^{-1} = \xi \circ \eta \circ \eta^{-1} \circ \xi^{-1} = \xi \circ \mathcal{E}_j \circ \xi^{-1} = \xi \circ \iota_X \circ \xi^{-1} = \xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i$$

következik. Legyen

$$Z = X\eta.$$

Akkor

$$|Z| = |X| = p,$$

mert  $X$  jól szeparált  $\mathcal{E}$  által, s ezért  $\eta$ -nak  $X$ -re való leszűkítése bijektív. Mivel

$$Z \subseteq A\eta \subseteq Y,$$

azaz  $Z$  benne van egy  $\mathcal{E}$  által jól szeparált részhalmazban, valamint  $|Z| = p$ , ezért  $Z$  jól szeparált  $\mathcal{E}$  által. Az

$$A\xi \subseteq X$$

tartalmazás miatt

$$A\xi\eta \subseteq X\eta = Z.$$

Az  $\eta$ -nak  $X$ -re való leszűkítése bijekció, ezért

$$q = |X \setminus A\xi| = |(X \setminus A\xi)\eta| = |X\eta \setminus A\xi\eta| = |Z \setminus A\xi\eta|.$$

A fentiek együtt azt eredményezik, hogy

$$\xi\eta \in T_i.$$

Ezzel megmutattuk, hogy  $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$  olyan félcsoporthoz alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a  $T_i$  részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy a  $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$  félcsoporthoz van olyan  $\xi$  eleme, amelyre  $\xi^2 = \xi$  teljesül. Jelölje  $X$  az  $A$  halmaz egy olyan,  $\mathcal{E}$  által jól szeparált részhalmazát, amelyre  $A\xi \subseteq X$  és  $|X \setminus A\xi| = q$  áll fenn. Mivel  $\xi$ -nek  $X$ -re való leszűkítése bijekció (a jólszeparálhatóság miatt), ezért

$$|X\xi \setminus A\xi^2| = q.$$

Mivel

$$X\xi \subseteq A\xi,$$

ezért viszont a  $\xi^2 = \xi$  feltétel miatt

$$X\xi \setminus A\xi^2 = \emptyset,$$

□

ami ellentmond az előző eredménynek, mivel  $q$  végtelen számosságot jelöl.

**8.3. Definíció** A  $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$  félcsoporthat Croisot-Teissier-féle félcsoporthat nevezzük.

**8.4. Lemma** Egy  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  félcsoporthatban a  $T_i$  részhalmaz minden  $i \in I$  index esetén minimális jobbideál.

*Bizonyítás.* Legyen  $T_i$  ( $i \in I$ ) egy  $S = CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  Croisot-Teissier-féle félcsoporthat definiáló részhalmazok egyike.  $T_i$  a 8.2. Tétel szerint az  $S$  félcsoporthat egy ideálja. Legyenek  $\xi, \eta \in T_i$  tetszőleges elemek. Akkor megadható  $A$ -nak két olyan,  $\mathcal{E}$  által jól szeparált  $X$  és  $Y$  részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = p$$

teljesülnek. Definiáljuk  $A$ -nak önmagába való  $\zeta$  leképezését a következőképpen. Először  $\zeta$ -nak  $A\xi$ -n való hatását értelmezzük. Tetszőleges  $x \in A$  esetén rendelje  $\zeta$  az  $x\xi$  elemhez az  $x\eta$  elemet. Mivel

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i = \eta \circ \eta^{-1},$$

ezért  $\zeta$  jól definiált, egyértékű leképezés. Valójában  $\zeta$  az  $A\xi$  halmaznak az  $A\eta$  halmazra való bijekciója. Mivel  $X$  jól szeparált  $\mathcal{E}$  által és mert  $A\xi \subseteq X$ , ezért minden  $x \in A$  elem esetén  $X$  az  $x\xi$  osztályából nem tartalmaz más elemet. Ennek az osztálynak minden eleméhez rendelje  $\zeta$  az  $x\eta$  elemet. Jelölje  $C$  azon  $\mathcal{E}_i$  osztályok halmazát, amelyeknek  $A\xi$ -vel vett metszete az üres halmaz. Mivel

$$|A/\mathcal{E}_i| = p,$$

ezért

$$|C| \leq p.$$

Mivel  $q$  végtelen és

$$|Y \setminus A\eta| = q,$$

ezért megadható  $C$ -nek  $Y \setminus A\eta$ -ba egy olyan  $\delta$  bijekciója, amelyre

$$|(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p$$

teljesül. Válasszunk egy ilyen  $\delta$ -t, és definiáljuk  $\zeta$ -t a  $C$  halmazhoz tartozó  $\mathcal{E}_i$  osztályokon a következőképpen: adott  $C$ -hez tartozó  $\mathcal{E}_i$  osztály minden eleméhez  $\zeta$  rendelje hozzá az  $Y \setminus A\eta$  halmaz azon elemét, amelyet  $\delta$  az  $\mathcal{E}_i$  osztályhoz rendelt. Az világos, hogy

$$\zeta \circ \zeta^{-1} = \mathcal{E}_i,$$

$$A\zeta \subseteq Y$$

és

$$|Y \setminus A\zeta| = |(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p.$$

Mindezek miatt

$$\zeta \in S = CT(A, \mathcal{E}, p, p).$$

Továbbá az is nyilvánvaló, hogy

$$\xi\zeta = \eta.$$

Az előzőek alapján tehát minden  $\xi \in T_i$  elem esetén

$$\xi S = T_i.$$

Ebből viszont már adódik, hogy  $T_i$  minimális jobbideálja  $S$ -nek.  $\square$

**8.5. Tétel** Minden Croisot-Teissier-féle  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  félcsoporth idempotens elem nélküli egyszerű félcsoporth, amely  $T_i$  ( $i \in I$ ) minimális jobbideáljainak uniója.

*Bizonyítás.* Legyen  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  tetszőleges Croisot-Teissier-féle félcsoporth. A 8.2. Lemma szerint a  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  félcsoporth nem tartalmaz idempotens elemet. A 8.4. Lemma szerint a  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  félcsoporthot definiáló  $T_i$  ( $i \in I$ ) részhalmazok a  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  félcsoporth minimális jobb oldali ideáljai. Mivel  $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$  ezen jobb oldali ideálok uniója, ezért a 8.1. Lemma szerint  $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$  egyszerű félcsoporth.  $\square$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő két tételt (lásd a [6] könyv Theorem 8.18. és Theorem 8.19. tételeit).

**8.6. Tétel** Minden olyan idempotens elem nélküli egyszerű félcsoporthot, amely tartalmaz legalább egy minimális jobb ideált, be lehet ágyazni egy Croisot-Teissier-féle félcsoporthba.

**8.7. Tétel** Egy  $S$  félcsoporthot akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoporthba, ha  $S$  nem tartalmaz idempotens elemet, és tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $ax = bx$  egyenlőségnek valamely  $x \in S$  elemre való teljesüléséből az következik, hogy  $ay = by$  minden  $y \in S$  elemre.

### 8.3. 0-egyszerű félcsoporthok

**8.8. Lemma** Legyen  $S$  olyan 0-egyszerű félcsoporth, amely tartalmaz egy 0-minimális bal oldali ideált és egy 0-minimális jobb oldali ideált. Akkor  $S$  bármely  $L$  0-minimális balideáljához tartozik legalább egy olyan  $R$  0-minimális jobbideál, amelyre  $LR \neq \{0\}$  teljesül.

*Bizonyítás.* Legyen  $L$  a 0-egyszerű  $S$  félcsoporth tetszőleges balideálja. Mivel  $LS$  az  $S$  kétoldali ideálja, ezért

$$LS = \{0\} \quad \text{vagy} \quad LS = S.$$

Ha  $LS = \{0\}$ , akkor  $L^2 = \{0\}$ . Mivel ez ellentmond a 4.16. Lemmának, ezért  $LS = S$ . Így  $Lc \neq \{0\}$  valamely  $c \in S$  elemre. A 4.20. Lemma duálisa szerint  $S$  0-minimális jobbideálok uniója. Így  $c \in R$  az  $S$  valamely  $R$  0-minimális jobbideáljára. Így  $LR \neq \{0\}$ .  $\square$

**8.9. Lemma** *Legyen  $S$  egy 0-egyszerű félcsoporth. Akkor  $S$  tetszőleges  $L$  0-minimális bal oldali ideálja és tetszőleges  $a \in L \setminus \{0\}$  elem esetén  $Sa = L$ .*

*Bizonyítás.* Mivel  $Sa$  az  $S$  félcsoporth  $L$  által tartalmazott bal oldali ideálja, ezért

$$Sa = \{0\} \quad \text{vagy} \quad Sa = L.$$

Mivel  $S$  0-egyszerű, ezért az  $a \neq 0$  feltétel miatt

$$SaS = S,$$

felhasználva a 4.7. Tételt is. Emiatt az  $Sa = \{0\}$  egyenlőség nem teljesülhet, ellenkező esetben ugyanis azt kapnánk, hogy  $S = \{0\}$ , ami ellentmondana annak a feltételnek, hogy  $S$  0-egyszerű. Így csak az

$$Sa = L$$

egyenlőség teljesülhet, mint ahogy azt állítottuk.  $\square$

**8.10. Definíció** *Egy  $S$  félcsoporth valamely  $e \neq 0$  idempotens elemét primitív idempotens elemnek nevezzük, ha tetszőleges  $f$  idempotens elem esetén az  $f \leq e$  (1.39. Megjegyzés) feltételből  $f = 0$  vagy  $f = e$  következik.*

**8.11. Lemma** *Legyen  $S$  egy 0-egyszerű félcsoporth. Legyenek  $L$ , illetve  $R$  az  $S$  félcsoporth olyan 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideáljai, amelyekre  $LR \neq \{0\}$  teljesül. Akkor érvényesek a következők:*

- (1)  $LR = S$ ;
- (2)  $RL$  olyan félcsoporth, amely egy csoportból nullelem adjungálásával származtatható (azaz: nullelemes csoport);
- (3)  $RL = R \cap L$ ;
- (4)  $R = eS$ ,  $L = Se$ ,  $RL = eSe$ , ahol  $e$  jelöli az  $RL \setminus \{0\}$  csoport egységelemét;
- (5) Az  $RL \setminus \{0\}$  csoport  $e$  egységeleme az  $S$  egy primitív idempotens eleme.



*Bizonyítás.* (1) : Mivel  $LR$  a 0-egyszerű  $S$  félcsoporth nem-zéró ideálja, ezért

$$LR = S.$$

(2) : Mivel

$$S = S^2 = LRLR,$$

ezért

$$RL \neq \{0\}.$$

Legyen

$$a \in RL \setminus \{0\}$$

tetszőleges elem. Akkor

$$a \in R \setminus \{0\}.$$

A 8.9. Lemma duálisa miatt

$$aS = R.$$

Mivel

$$S = LR = LaS,$$

ezért

$$La \neq \{0\}.$$

Így  $La$  az  $S$  félcsoporth  $L$  által is tartalmazott nem-zéró bal oldali ideálja. Ebből

$$La = L$$

következik, mert  $L$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja. Következésképpen

$$RLa = RL.$$

A 7.2. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy  $RL$  bal 0-egyszerű félcsoporth. A 7.7. Tétel miatt  $RL \setminus \{0\}$  egy bal egyszerű félcsoporth, és  $RL$  ebből a 0-elem adjungálásával áll elő. Hasonlóan igazolható, hogy  $RL$  jobb nullegyszerű félcsoporth és  $RL \setminus \{0\}$  jobb egyszerű félcsoporth. Mivel egy jobb egyszerű és egyben bal egyszerű félcsoporth csoport, ezért az előzőekből már adódik, hogy  $RL \setminus \{0\}$  az  $S$  egy részcsoporthja; ebből  $RL$  a 0-elem adjungálásával származtatható.

(3) : Mivel  $RL \subseteq R \cap L$  nyilvánvalóan teljesül, csak az  $R \cap L \subseteq RL$  tartalmazást mutatjuk meg. Jelölje  $e$  az  $RL \setminus \{0\}$  csoport egységelemét. A 4.41. Lemma, illetve annak duálisa szerint  $(R \setminus \{0\}) \cap (R \setminus \{0\})$  az  $S$ -félcsoporth egy  $\mathcal{H}$ -osztálya. Ez tartalmazza az  $e$  idempotens elemet, s ezért a 4.45. Tétel szerint ez a  $\mathcal{H}$ -osztály szükségképpen részcsoporthja  $S$ -nek. Így  $R \cap L$  egy nullelemes csoport. Ha  $a \in R \cap L$ , akkor  $a = ae \in RL$ , mivel  $a \in R$  and  $e \in L$ . Tehát

$$R \cap L \subseteq RL.$$

(4) : Mivel  $e \in L \setminus \{0\}$ , ezért a 8.9. Lemma miatt

$$Se = L.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$eS = R.$$

Így

$$RL = eSSe = eSe.$$

(5) : Tegyük fel, hogy  $f$  az  $S$  olyan idempotens eleme, melyre

$$f \leq e$$

teljesül. Akkor

$$f \in eSe.$$

Mivel (4) szerint

$$eSe = RL$$

$RL$  pedig (2) miatt nullelemes csoport, melynek  $e$  az egységeleme, ezért  $f = 0$  vagy  $f = e$ , hiszen nullelemes csoportban csak két idempotens van, a nullelem és az egységelem. Tehát  $e$  primitív idempotens.  $\square$

## Feladatok

**8.1.** (Megoldás: 17.25.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoporth akkor és csak akkor kommutatív és 0-egyszerű, ha egy kommutatív csoportból származtatható egy nullelem adjungálásával.

**8.2.** (Megoldás: 17.26.) Mutassuk meg, hogy nincs 0-egyszerű nil félcsoporth.

## 9. fejezet

# Teljesen egyszerű és teljesen 0-egyszerű félcsoporthok

Az előző fejezet második részében vizsgált Croisot-Teissier-féle félcsoporthok speciális idempotens elem nélküli egyszerű félcsoporthok. Ebben a fejezetben speciális idempotens elemet tartalmazó egyszerű, illetve 0-egyszerű félcsoporthokat vizsgálunk.

**9.1. Definíció** Egy legalább kételemű egyszerű  $S$  félcsoporthot [illetve egy 0-egyszerű  $S$  félcsoporthot] teljesen egyszerűnek [teljesen 0-egyszerűnek] nevezünk, ha tartalmaz egy primitív idempotens elemet. Az egyelemű félcsoporthot teljesen egyszerűnek tekintjük.

### 9.1. A teljesen 0-egyszerű félcsoporthok jellemzései

**9.2. Lemma** Legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth. Akkor  $S$  tetszőleges  $e$  primitív idempotens eleme esetén  $L = Se$ , illetve  $R = eS$  az  $S$  félcsoporth egy-egy olyan 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideálja, amelyekre teljesül, hogy  $RL$  az  $S$  olyan részcsoportja, melynek egységeleme  $e$ .

*Bizonyítás.* A bizonyítás során csak azt fogjuk részletesen igazolni, hogy  $R = eS$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális jobb oldali ideálja, mert ehhez hasonlóan igazolható, hogy  $L = Se$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja. Először is megjegyezzük, hogy mivel

$$e = e^2 \in eS = R,$$

ezért

$$R \neq \{0\}.$$

Legyen  $A$  az  $S$  félcsoporth olyan nem-null jobb oldali ideálja, amelyet az  $R$  részhalmazként tartalmaz. Jelölje  $a$  az  $A$  egy tetszőleges elemét. Mivel

$$a \in eS,$$

ezért

$$ea = a.$$

Mivel az  $S$  félcsoporth 0-egyszerű és  $a \neq 0$ , ezért

$$SaS = S$$

a 4.7. Tétel szerint, s ezért megadhatók olyan  $x', y' \in S$  elemek, hogy

$$x'ay' = e.$$

Bevezetve az

$$x = ex'e \quad \text{és} \quad y = y'e$$

jelöléseket, fennállnak a következő egyenlőségek:

$$xay = e, \quad ex = xe = x, \quad ye = y.$$

Legyen

$$f = ayx.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f^2 &= ay(xay)x = aye x = ayx = f, \\ ef &= (ea)yx = ayx = f, \\ fe &= ay(xe) = ayx = f. \end{aligned}$$

Tehát  $f$  az  $S$  félcsoporth olyan idempotens eleme, amelyre

$$f \leq e$$

teljesül. Mivel

$$e = e^2 = x(ayx)ay = x f a y,$$

ezért

$$f \neq 0,$$

amiből

$$e = f$$

következik, hiszen  $e$  az  $S$  félcsoporth primitív idempotens eleme a feltétel szerint. Így viszont

$$e = ayx \in aS,$$

amiből

$$R = eS \subseteq aS^2 \subseteq A$$

következik. Ezért

$$A = R.$$

Tehát  $R$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális jobb oldali ideálja.

Mivel  $e \neq 0$  és az  $S$  félcsoporth 0-egyszerű, ezért

$$LR = SeeS = SeS = S \neq \{0\},$$

amiből a 8.11. Lemma szerint az következik, hogy  $RL \setminus \{0\}$  az  $S$  egy részcsoportja. Mivel

$$0 \neq e \in eSe = eS^2e = eSSe = RL,$$

ezért  $e$  az  $RL$  egységeleme. □

**9.3. Tétel** *Egy 0-egyszerű félcsoporth akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha tartalmaz legalább egy 0-minimális bal oldali ideált és legalább egy 0-minimális jobb oldali ideált.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth. Akkor  $S$  tartalmaz legalább egy  $e$  primitív idempotens elemet. A 9.2. Lemma szerint  $L = Se$  az  $S$  félcsoporth 0-minimális bal ideálja,  $R = eS$  pedig az  $S$  egy 0-minimális jobb oldali ideálja.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan 0-egyszerű félcsoporth, amely tartalmaz egy 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideált. Legyen  $L$  tetszőleges 0-minimális bal oldali ideálja  $S$ -nek. A 8.8. Lemma miatt van olyan  $R$  0-minimális jobbideál  $S$ -ben, amelyre

$$LR \neq \{0\}$$

teljesül. A 8.11. Lemma (5) feltétele miatt  $S$  tartalmaz egy primitív idempotens elemet, s emiatt  $S$  teljesen 0-egyszerű. □

**9.4. Következmény** *Minden teljesen 0-egyszerű félcsoporth előáll 0-minimális bal [jobb] oldali ideáljainak uniójaként.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  teljesen 0-egyszerű félcsoporth. Az előző tétel miatt  $S$  tartalmaz 0-minimális bal oldali és 0-minimális jobb oldali ideált. A 4.20. Tétel miatt  $S$ , mint önmaga 0-minimális ideálja előáll 0-minimális bal oldali (hasonlóan, 0-minimális jobb oldali) ideáljainak uniójaként. □

**9.5. Definíció** *Egy nullelemes  $S$  félcsoporthot 0-biegszerűnek nevezünk, ha tetszőleges nullától különböző  $a$  és  $b$  elemei esetén  $(a, b) \in \mathcal{D}$ .*

**9.6. Tétel** *Minden teljesen 0-egyszerű félcsoporth 0-biegszerű és reguláris.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges nem-zéró elemek. Meg fogjuk mutatni, hogy  $a \mathcal{D} b$ . A 9.4. Következmény szerint  $a$  benne van  $S$  valamelyik  $L$  0-minimális bal oldali ideáljában,  $b$  pedig az  $S$  valamelyik  $R$  0-minimális jobb oldali ideáljában. A 8.9. Lemma szerint

$$L = Sa \quad \text{és} \quad R = bS.$$

A 4.41. Lemma, illetve annak duálisa szerint,

$$L_a = L \setminus \{0\} \quad \text{és} \quad R_b = R \setminus \{0\}.$$

A 4.7. Tétel szerint

$$SaS = S = SbS.$$

Így

$$S = S^2 = SbSSaS \subseteq S(bSa)S,$$

és ezért

$$bSa \neq \{0\}.$$

Mivel  $a \in L$  és  $b \in R$ , ezért

$$bSa \subseteq R \cap L,$$

amiből következik, hogy

$$bSa \setminus \{0\} \subseteq R_b \cap L_a,$$

és ezért

$$a \mathcal{D} b.$$

Tehát az  $S$  félcsoporth 0-biegszerű.

Mivel  $S$  teljesen 0-egyszerű, ezért  $S \setminus \{0\}$  tartalmaz egy idempotens elemet. Mivel  $S \setminus \{0\}$  az  $S$  egy  $\mathcal{D}$ -osztálya, és mert egy idempotens elem reguláris, ezért a 6.8. Tétel szerint  $S \setminus \{0\}$  minden eleme reguláris. Mivel a 0-elem reguláris, ezért  $S$  reguláris félcsoporth.  $\square$

**9.7. Tétel** *Legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth.*

- (1) *Ha  $a \in S$  és  $a^2 \neq 0$ , akkor  $a^2 \in H_a$  és  $H_a$  csoport.*
- (2) *Ha  $a, b \in S$  és  $ab \neq 0$ , akkor  $ab \in R_a \cap L_b$ .*
- (3) *Ha  $a, b \in S$ , akkor  $H_a H_b = 0$  vagy  $H_a H_b = R_a \cap L_b$ ; akármelyik eset is áll fenn, mindig igaz, hogy  $H_a H_b = H_{ab}$ .*

*Bizonyítás.* (1) Legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth és  $a \in S$  tetszőleges az  $a^2 \neq 0$  feltétellel. A 9.4. Következmény szerint van  $S$ -nek olyan 0-minimális  $L$  bal oldali ideálja, hogy

$$a \in L.$$

Ekkor persze

$$0 \neq a^2 \in L$$

is teljesül. A 4.41. Tétel szerint  $L \setminus \{0\}$  egy  $\mathcal{L}$ -osztálya  $S$ -nek. Mivel  $a^2 \neq 0$ , és ezért  $a \neq 0$ , valamint  $a, a^2 \in L \setminus \{0\}$ , ezért

$$a \mathcal{L} a^2.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$a \mathcal{R} a^2.$$

Következésképpen

$$a \mathcal{H} a^2,$$

amiből a 4.45. Tétel miatt már következik, hogy  $H_a$  csoport.

(2) Tekintsük  $S$  két olyan  $a$  és  $b$  elemét, amelyekre

$$ab \neq 0$$

teljesül. A 9.6. Tétel miatt

$$a \mathcal{D} b,$$

és ezért

$$R_b \cap L_a \neq \emptyset.$$

Legyen

$$c \in R_b \cap L_a$$

tetszőleges elem. Akkor

$$c^2 \in L_a R_b.$$

A 4.40. Tétel szerint  $L_a R_b$  benne van az  $S$  valamely  $\mathcal{D}$ -osztályában. Mivel a 9.6. Tétel szerint  $S$  0-bisimple, ezért  $S$ -nek két  $\mathcal{D}$ -osztálya van; ezek  $\{0\}$  és  $S \setminus \{0\}$ . Mivel a feltétel szerint  $ab \neq 0$ , ezért csak

$$L_a R_b \subseteq S \setminus \{0\}$$

tartalmazás lehetséges. Így

$$c^2 \neq 0.$$

Jelen tétel (1) állítása miatt  $H_c = R_b \cap L_a$  csoport. A 4.46. Tétel miatt

$$ab \in R_a \cap L_b.$$

(3) Legyenek  $a$  és  $b$  tetszőleges  $S$ -beli elemek. Ha

$$ab = 0,$$

akkor

$$H_a H_b \subseteq L_a R_b = \{0\},$$

mivel a 4.40. Tétel szerint  $L_a R_b$  benne van az  $S$  valamely  $\mathcal{D}$ -osztályában, de  $S$ -nek csak két  $\mathcal{D}$ -osztálya van,  $\{0\}$  és  $S \setminus \{0\}$ . Ebből viszont már következik, hogy

$$H_a H_b = \{0\} = H_0 = H_{ab}.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor

$$ab \neq 0.$$

Jelen tétel (2) állítása szerint

$$ab \in R_a \cap L_b,$$

és emiatt (felhasználva a 4.46. Tételt is)

$$H_a H_b = R_a \cap L_b = H_{ab}.$$

□

**9.8. Definíció** Egy monoidot (jelölje  $e$  az egységelemet) biciklikus félcsoporthnak nevezzünk, ha megadható olyan  $\{a, b\}$  kételemű részhalmaza  $S$ -nek, amely generálja  $S$ -et az egyetlen  $ab = e$  generáló reláció mellett. Jelölése:  $C(a, b)$ .

Egy  $C(a, b)$  biciklikus félcsoporth minden eleme egyértelműen írható  $b^m a^n$  alakban ( $m$  és  $n$  nemnegatív egészek).

**9.9. Tétel** Legyenek  $e, a, b$  egy  $S$  félcsoporth olyan elemei, amelyekre  $ae = ea = a$ ,  $be = eb = b$ ,  $ab = e$ ,  $ba \neq e$  teljesülnek. Akkor az  $S$  félcsoporth  $\langle a, b \rangle$  részfélcsoporthjának minden eleme egyértelműen kifejezhető  $b^m a^n$  ( $m$  és  $n$  nemnegatív egészek) alakban; így  $\langle a, b \rangle$  biciklikus félcsoporth.

*Bizonyítás.* Az világos, hogy az  $a$  és  $b$  elem által generált  $\langle a, b \rangle$  részfélcsoporth az  $S$  egy olyan részmonoidja, melynek  $e$  az egységeleme. Az  $ab = e$  feltétel miatt  $\langle a, b \rangle$  minden eleme kifejezhető  $b^m a^n$  alakban, ahol  $m$  és  $n$  tetszőleges nem-negatív egész számok (megjegyezzük, hogy  $a^0 = b^0 = e$ ). Már csak azt kell megmutatni, hogy az ilyen alakban való előállítás egyértelmű. Ehhez először megmutatjuk, hogy az  $a$  és  $b$  elemek rendje szükségképpen végtelen. Tegyük fel, indirekt módon, hogy  $a$  véges rendű. Akkor megadhatók olyan  $h$  és  $k$  pozitív egész számok, hogy

$$a^{h+k} = a^h.$$



Jobbról szorozva ezt az egyenlőséget  $b^h$ -nal, az  $ab = e$  feltétel miatt

$$a^k = e$$

adódik. Ekkor viszont

$$b = eb = a^k b = a^{k-1} ab = a^{k-1} e = a^{k-1}$$

és így

$$ba = a^k = e,$$

amely ellentmond a  $ba \neq e$  feltételnek. Hasonlóan igazolható, hogy  $b$  rendje végtelen.

A bizonyítás következő lépéseként megmutatjuk, hogy az  $a^h = b^k$  egyenlőségnek valamely  $h$  és  $k$  nem-negatív egészekre való teljesüléséből  $h = k = 0$  következik. Tegyük fel, hogy

$$a^h = b^k$$

valamely  $h$  és  $k$  nem-negatív egészekre. Akkor

$$a^{h+k} = a^k b^k = e.$$

A bizonyítás előző része miatt  $h + k = 0$ , amiből már nyilvánvaló módon következik

$$h = 0, \quad k = 0.$$

Speciális esetként előbb megmutatjuk, hogy  $e$  egyértelműen áll elő  $b^m a^n$  formában, azaz a  $b^h a^k = e$  ( $h$  és  $k$  nemnegatív egészek) egyenlőségéből  $h = 0$  és  $k = 0$  következik. Tegyük fel tehát, hogy

$$e = b^h a^k$$

teljesül valamely  $h$  és  $k$  nemnegatív egészekkel. Ha  $k = 0$ , akkor  $h = 0$ . Megmutatjuk, hogy a  $k > 0$  nem teljesülhet. Ugyanis, ha  $k > 0$ , akkor

$$b = eb = b^h a^k b = b^h a^{k-1},$$

amiből az  $a$  elemmel történő jobbról való szorzás után

$$ba = b^h a^k = e$$

adódik, ami ellentmond a  $ba \neq e$  feltételnek.

A bizonyítás utolsó lépéseként tegyük fel, hogy

$$b^m a^n = b^i a^j$$

teljesül valamely  $m, n, i, j$  nemnegatív egészekkel. Tegyük fel, hogy  $i \neq m$ . Az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $i < m$ . Ha megszorozzuk a fenti egyenlőséget balról  $a^i$ -vel,

$$b^{m-i} a^n = a^j$$

adódik. Ha  $j \geq n$ , akkor ezen utóbbi egyenlőségnek  $b^n$ -nel jobbról való szorzása után

$$b^{m-i} = a^{j-n}$$

adódik, ami az előzőek miatt nem lehetséges, hiszen a  $b$  elem kitevője,  $m-i$  pozitív egész, amiről az előző (speciális) bizonyítási részben mutattuk meg, hogy nem lehetséges. Így  $j$  és  $n$  között csak a  $j < n$  nagyságrendi viszony lehetséges. Viszont ez is ellentmondáshoz vezet, hiszen ha a fenti  $b^{m-i}a^n = a^j$  egyenlőséget jobbról megszorozzuk a  $b^j$  hatvánnyal, akkor

$$b^{m-i}a^{n-j} = e$$

adódik, ami nem lehetséges a fentiek miatt, mert  $m-i > 0$ . Ezzel a bizonyítást elvégeztük.  $\square$

**9.10. Tétel** *Ha  $e$  egy 0-egyszerű, de nem teljesen 0-egyszerű  $S$  félcsoportnak valamely nem-zéró idempotens eleme, akkor  $S$  tartalmaz olyan biciklikus részfélcsoportot, amelynek  $e$  az egységeleme.*

*Bizonyítás.* Mivel  $S$  nem teljesen 0-egyszerű, ezért az  $e$  idempotens elem nem primitív. Így van  $S$ -nek olyan nem-zéró  $f$  idempotens eleme, amelyre  $f < e$  teljesül. Ezért

$$ef = fe = f$$

és

$$e \neq f.$$

Mivel  $f \neq 0$  és  $S$  0-egyszerű, ezért

$$SfS = S,$$

és ezért megadhatók olyan  $x, y \in S$  elemek, hogy

$$xfy = e.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$u = exf, \quad v = fye.$$

Akkor

$$eu = uf = u, \quad fv = ve = v, \quad uv = e.$$

Legyen

$$g = vu.$$

Akkor

$$g^2 = vuvu = veu = vu = g,$$

$$fg = fvu = vu = g,$$

$$gf = vuf = vu = g.$$

Így  $g$  az  $S$  félcsoporth olyan idempotens eleme, amelyre

$$g \leq f$$

teljesül. Mivel  $f < e$ , ezért

$$g < e.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az  $S$  félcsoporthnak van két olyan eleme,  $u$  és  $v$ , amelyekre

$$uv = e$$

és

$$vu \neq e,$$

továbbá

$$ue = u = eu, \quad ve = v = ev$$

teljesülnek. Akkor viszont a 9.9. Tétel szerint  $\langle u, v \rangle$  az  $S$  félcsoporth olyan biciklikus részfélcsoporthja, amelynek  $e$  az egységeleme.  $\square$

**9.11. Következmény** *Ha  $e$  egy egyszerű, de nem teljesen egyszerű  $S$  félcsoporthnak valamely idempotens eleme, akkor  $S$  tartalmaz olyan biciklikus részfélcsoporthot, amelynek  $e$  az egységeleme.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy olyan egyszerű félcsoporth, amely nem teljesen egyszerű. Mivel az egyelemű félcsoporthot is teljesen egyszerűnek tekintjük definíció szerint, ezért  $|S| \geq 2$ . Az  $S$  egyszerűsége miatt ebből az is következik, hogy  $S$  nem tartalmaz nullelemet. Legyen  $e$  az  $S$  egy idempotens eleme. Az világos, hogy az  $S^0$  félcsoporth 0-egyszerű, de nem teljesen 0-egyszerű. Továbbá,  $e$  az  $S^0$  félcsoporth nem nulla idempotens eleme. A 9.10. Tétel szerint  $S^0$ -nak van olyan  $\langle u, v \rangle$  biciklikus részfélcsoporthja, amelynek  $e$  az egységeleme. Az  $uv = e \neq 0$  feltétel miatt  $u, v \in S$ . Így  $\langle u, v \rangle \subseteq S$ .  $\square$

**9.12. Tétel** *Egy 0-egyszerű  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha minden elemének valamely hatványa benne van  $S$  valamely részcsoportjában.*

*Bizonyítás.* Ha  $S$  teljesen 0-egyszerű félcsoporth, akkor a 9.7. Tétel szerint  $S$  minden eleme benne van  $S$  egy részcsoportjában. Ugyanis, ha  $a$  az  $S$  tetszőleges eleme, akkor vagy  $a^2 = 0$  vagy pedig  $H_a$  az  $S$  egy részcsoportja. Mivel  $\{0\}$  egyelemű részcsoportja  $S$ -nek, ezért az  $a^2 = 0$  esetben is igaz, hogy  $a$  valamelyik hatványa  $a^2$  benne van  $S$  valamelyik részcsoportjában.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan 0-egyszerű félcsoporth, amelyben bármely elem valamelyik hatványa benne van  $S$  egy részcsoportjában. Először megmutatjuk, hogy  $S$ -nek van nem-nilpotens eleme. Legyen  $0 \neq a \in S$  tetszőleges elem. Akkor a 4.7. Tétel szerint

$$a \in SaS,$$

és így

$$a = xay$$

valamely  $x, y \in S$  elemekkel. Ekkor viszont

$$a = x^n ay^n$$

is teljesül tetszőleges  $n$  pozitív egész számra. Mivel  $a \neq 0$ , ezért pl.  $x^n \neq 0$  minden  $n$  pozitív egész számra, és így  $x$  nem nilpotens elem. A feltétel szerint  $x$  valamely hatványa benne van  $S$  egy részcsoportjában; ennek a részcsoportnak az egységeleme nem egyenlő az  $S$  nullelemével. Akkor viszont  $S$ -nek van nem-zéró  $e$  idempotens eleme. Ha  $S$  nem lenne teljesen 0-egyszerű, akkor a 9.10. Tétel szerint  $S$  tartalmazna egy  $\langle u, v \rangle$  biciklikus részfélcsoporthot  $e$  egységelemmel ( $uv = e$ ,  $vu \neq e$ ). Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet. A feltétel szerint van olyan  $n$  pozitív egész szám, amelyre  $u^n$  benne van  $S$  valamely részcsoportjában. Jelölje  $f$  ennek a részcsoportnak az egységelemét, valamint  $x$  a  $p^n$  elem inverzét ebben a részcsoportban. Mivel

$$u^n v^n = e,$$

ezért

$$fe = fu^n v^n = u^n v^n = e.$$

Mivel

$$xu^n = f,$$

ezért

$$fe = xu^n e = xu^n = f.$$

A két egyenlőségből

$$e = f$$

adódik, és így

$$v^n = ev^n = fv^n = xv^n v^n = xe = xf = x.$$

Akkor viszont

$$v^n u^n = xu^n = f = e,$$

ami viszont ellentmond annak, hogy a  $\langle u, v \rangle$  biciklikus részfélcsoporth. □

**9.13. Következmény** Minden periodikus 0-egyszerű félcsoporth teljesen 0-egyszerű.

*Bizonyítás.* Az 1.33. Tétel szerint periodikus  $S$  félcsoporth minden elemének valamely hatványa benne van  $S$  egy részcsoporthjában. Így a tétel állítása következik a 9.12. Tételből.  $\square$

**9.14. Tétel** Minden véges 0-egyszerű félcsoporth teljesen 0-egyszerű.

*Bizonyítás.* Mivel minden véges félcsoporth periodikus, az állítás a 9.13. Tétel miatt nyilvánvaló.  $\square$

## 9.2. Rees-féle mátrixfélcsoporthok, a Rees-tétel

Legyen  $G$  egy csoport. Jelölje  $G^0$  (a korábbiaknak megfelelően) azt a félcsoporthot, amelyet a  $G$  csoportból úgy származtatunk, hogy ahhoz egy nullelemet adjunk. Legyen  $X$  egy tetszőleges nem üres halmaz, és legyen  $i \mapsto a_i$   $X$ -nek  $G^0$ -ba való leképezése. Ha  $a_i = 0$  minden  $i \in X$  indexre, akkor a  $\sum_{i \in X} a_i$  összeget definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő a 0 elemmel. Ha  $a_j \neq 0$  valamely  $j \in X$  indexre, de az összes többi  $i \in X$  indexre  $a_i = 0$ , akkor a  $\sum_{i \in X} a_i$  összeget szintén definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő az  $a_j$  elemmel. Ha  $a_j \neq 0$  és  $a_k \neq 0$  teljesül valamely  $j \neq k$  indexekre, akkor a  $\sum_{i \in X} a_i$  összeget nem definiáljuk.

Legyenek  $I$  és  $\Lambda$  tetszőleges nem üres halmazok. A  $G^0$  feletti  $I \times \Lambda$  típusú mátrixot Rees-mátrixnak nevezzük, ha legfeljebb egy olyan eleme van, amely nem egyenlő a 0 elemmel. Ha ez az elem a  $G$  csoport  $a$  eleme, amely a mátrixban az  $i$ -dik sorban, illetve a  $j$ -dik oszlopban áll (azaz az  $(i, j)$  rendezett párhoz van hozzárendelve), akkor a mátrixot  $(a)_{ij}$  módon is fogjuk jelölni. A  $(0)_{ij}$  kifejezést is fogjuk használni; ez tetszőleges  $i \in I$  és  $j \in \Lambda$  index esetén azt az  $I \times \Lambda$ -típusú Rees-mátrixot fogja jelölni, amelynek minden eleme a 0 elemmel egyenlő, azaz az  $I \times \Lambda$  típusú nullmátrixról van szó.

Legyen  $P = (p_{\lambda i})$  egy  $G^0$  feletti tetszőleges  $\Lambda \times I$  típusú mátrix (vagyis nem feltétlenül egy Rees-mátrix). A továbbiakban ezt a mátrixot szendvicsmátrixnak fogjuk nevezni. Ha  $(a)_{ij}$  és  $(b)_{rt}$  tetszőleges  $I \times \Lambda$ -típusú Rees-mátrixok, akkor a fenti végtelen összeg definíciója és a mátrixok szokásos szorzásának definíciója alapján értelmezve van az  $(a)_{ij}P(b)_{rt}$  mátrixszorzat. Könnyen belátható, hogy ez a szorzat megegyezik az  $(ap_{jr}b)_{it}$  Rees-mátrixszal.

**9.15. Lemma** Egy  $G^0$  nullelemes csoport feletti tetszőleges  $I \times \Lambda$  típusú Rees-mátrixok tetszőleges rögzített  $\Lambda \times I$ -típusú  $P$  szendvicsmátrix esetén egy  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  módon jelölt félcsoporthot alkotnak az  $(a)_{ij} \circ (b)_{rt} = (a)_{ij}P(b)_{rt} = (ap_{jr}b)_{it}$  módon definiált műveletre nézve.

*Bizonyítás.* A lemma előtti megjegyzés alapján nyilvánvaló.  $\square$

**9.16. Definíció** Az előző lemmában szereplő  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  félcsoporthot (a  $G^0$  nullelemes csoport feletti  $I \times \Lambda$ -típusú,  $P$  szendvicsmátrixú) Rees-féle mátrixfélcsoporthnak nevezzük.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt ([5]):

**9.17. Tétel** *Ugyanazon  $G$  csoport feletti,  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  és  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$  Rees-féle mátrixfélcsoportok izomorfak, ha létezik  $I$ -nek  $G$ -be egy  $i \mapsto u_i$ , valamint  $\Lambda$ -nak  $G$ -be egy  $\lambda \mapsto v_\lambda$  leképezése úgy, hogy  $p'_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$  minden  $i \in I$  és  $\lambda \in \Lambda$  indexre teljesül, ahol  $P = (p_{\lambda i})$  és  $P' = (p'_{\lambda i})$ .*

**9.18. Definíció** *Egy  $P$  szendvicsmátrixot regulárisnak nevezünk, ha minden sorában és minden oszlopában van legalább egy nem nulla elem.*

**9.19. Tétel** *Egy  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha a  $P$  szendvicsmátrix reguláris.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  egy  $G^0$  0-elemes csoport feletti  $P = (p_{\lambda i})$  szendvicsmátrixú Rees-féle mátrixfélcsoport. Legyenek  $a, b \in G$ ;  $i, j \in I$ ;  $\lambda, \mu \in \Lambda$  tetszőleges elemek. Akkor

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (ap_{\lambda j}bp_{\mu i}a)_{i\lambda}.$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor egyenlő az  $(a)_{i\lambda}$  elemmel, ha

$$p_{\lambda j}bp_{\mu i} = a^{-1}.$$

Adott  $(a)_{i\lambda}$  elemhez akkor és csak akkor létezik ilyen  $(b)_{j\mu}$  elem, ha  $p_{\lambda j} \neq 0$  és  $p_{\mu i} \neq 0$  teljesül valamely  $j \in I$  és  $\mu \in \Lambda$  indexekre; ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha a  $P$  szendvicsmátrix  $\lambda$ -adik sora és  $i$ -dik oszlopa is tartalmaz egy-egy  $G$ -beli (nem-nulla) elemet. Ebből már következik a tétel állítása.  $\square$

**9.20. Definíció** *Ha egy  $G^0$  feletti  $\Lambda \times I$ -típusú reguláris  $P = (p_{\lambda i})$  szendvicsmátrix esetén megadható olyan  $\lambda_0 \in \Lambda$  és  $i_0 \in I$  index, hogy minden  $i \in I$  és minden  $\lambda \in \Lambda$  esetén a  $p_{\lambda i_0}$  és  $p_{\lambda_0 i}$  elemek mindegyike vagy nulla vagy megegyezik a  $G$  csoport egységelemével, akkor azt mondjuk, hogy a  $P$  szendvicsmátrix normált.*

**9.21. Lemma** *Minden reguláris  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoport izomorf egy olyan  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$  mátrixfélcsoporttal, amelyben szereplő  $P'$  szendvicsmátrix normált.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  egy Rees-féle mátrixfélcsoport. A 9.17. Tételben szereplő jelöléseket használva, legyen  $u_i$  ( $i \in I$ ) a  $p_{\lambda_0 i} \in G$  elem inverze, ha  $p_{\lambda_0 i} \neq 0$ , egyébként pedig legyen  $u_i = e$  ( $e$  a  $G$  egységeleme); legyen továbbá  $v_\lambda = e$  minden  $\lambda \in \Lambda$  indexre. Legyen  $Q = (q_{\lambda i})$  az a  $G^0$  feletti  $\Lambda \times I$ -típusú mátrix, melyben  $q_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$ . Ebben a mátrixban  $q_{\lambda_0 i} = p_{\lambda_0 i} (p_{\lambda_0 i})^{-1} = e$  vagy  $q_{\lambda_0 i} = 0$ , az  $u_i$ -től függően. A 9.17. Tétel szerint  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  és  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$  egymással izomorfak. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazzuk  $Q$ -ra, valamely rögzített  $i_0 \in I$  indexre, kapunk egy olyan  $G^0$  feletti  $\Lambda \times I$ -típusú  $P'$  mátrixot, amely normált, valamint  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$  és  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$  egymással izomorfak. Ebből már következik a lemma állítása.  $\square$

**9.22. Tétel** Legyen  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  egy Rees-féle mátrixfélcsoporth. Akkor a következő feltételek egymással ekvivalensek.

- (1)  $S$  0-egyszerű.
- (2)  $S$  reguláris.
- (3)  $S$  teljesen 0-egyszerű.

*Bizonyítás.* Legyen  $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  egy Rees-féle mátrixfélcsoporth. Tegyük fel, hogy  $S$  nem reguláris. Akkor a 9.19. Tétel szerint a  $P$  szendvicsmátrixnak van olyan sora vagy oszlopa, amelyben minden elem a nulla. Tegyük fel, hogy az  $i$ -dik oszlopra igaz az, hogy abban minden elem nulla. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$R_i^0 = \{(a)_{i\lambda} : a \in G, \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$$

az  $S$  félcsoporth nem-zéró nilpotens ideálja. Az az eset, amikor a  $P$  szendvicsmátrix  $\lambda$ -adik sora csupa nulla, hasonlóan kezelhető. Ebből az következik, hogy  $S$  nem 0-egyszerű. Tehát (1) implikálja (2)-t.

Tegyük fel, hogy  $S$  reguláris. Legyenek  $(a)_{i\lambda}$  és  $(b)_{j\mu}$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges elemei, ahol  $a \neq 0$ . A 9.19. Tétel szerint a  $P$  szendvicsmátrix  $i$ -dik oszlopában, illetve  $\lambda$ -dik sorában vannak olyan elemek, pl.  $p_{\mu i}$  és  $p_{\lambda v}$  elemek, amelyek nem egyenlők a nullelemmel. Legyen

$$c = b(p_{\mu i} a p_{\lambda v})^{-1}.$$

Jelölje  $e$  a  $G$  csoport egységelemét. Akkor

$$(c)_{j\mu} (a)_{i\lambda} (e)_{v\mu} = (b)_{j\mu},$$

és így

$$S(a)_{ij} S = S.$$

A 4.7. Tétel alapján ebből az következik, hogy  $S$  0-egyszerű félcsoporth. Tehát a (2) feltételből következik az (1) feltétel. Ez a bizonyítás előző részével együtt azt eredményezi, hogy az (1) és (2) feltételek egymással ekvivalensek.

A (3) feltételből következik az (1) és így a (2) feltétel. Elegendő már csak azt megmutatni, hogy a (2) feltételből következik a (3) feltétel. Tegyük fel tehát, hogy  $S$  reguláris. Könnyen belátható, hogy  $S$  nem-zéró idempotens elemei pontosan az

$$\epsilon_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$$

mátrixok. Mivel  $P$  reguláris, ezért  $S$ -nek van nem-zéró idempotens eleme. Legyenek  $\epsilon_{i\lambda}$  és  $\epsilon_{j\mu}$  az  $S$  olyan nem-zéró idempotens elemei, amelyekre

$$\epsilon_{i\lambda} \epsilon_{j\mu} = \epsilon_{j\mu} \epsilon_{i\lambda} = \epsilon_{j\mu}$$

teljesül. Akkor

$$(p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1})_{i\mu} = (p_{\mu j}^{-1} p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1})_{j\lambda} = (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu},$$

amiből

$$i = j \quad \text{és} \quad \lambda = \mu$$

és így

$$e_{i\lambda} = e_{j\mu}$$

következik. Következésképpen  $S$  minden nem-zéró idempotens eleme primitív. Tehát  $S$  teljesen 0-egyszerű. Így a (3) feltétel teljesül.  $\square$

A következőkben megmutatjuk, hogyan lehet Rees-féle félcsoporthat konstruálni egy  $S$  félcsoporth olyan  $\mathcal{D}$ -osztálya segítségével, amely osztálynak minden eleme reguláris.

Legyen  $D$  egy  $S$  félcsoporth reguláris  $\mathcal{D}$ -osztálya. Jelölje

$$\{R_i : i \in I\}$$

és

$$\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

az  $S$  félcsoporth  $D$  által tartalmazott  $\mathcal{R}$ -osztályainak, illetve  $\mathcal{L}$ -osztályainak halmazát. A  $D$  által tartalmazott  $\mathcal{H}$ -osztályok halmaza

$$\{H_{i\lambda} : i \in I, \lambda \in \Lambda\},$$

ahol

$$H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda.$$

A 6.8. Tétel szerint  $D$  tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Jelöljön  $e$  egy  $D$ -beli idempotens elemet. Jelölje  $H_{11}$  az  $e$ -t tartalmazó  $\mathcal{H}$ -osztályt, valamint  $R_1$ , illetve  $L_1$  az  $R_e$ , illetve  $L_e$  osztályokat; ezzel persze feltettük, hogy 1 az  $I$ -nek és a  $\Lambda$ -nek is eleme, de ez nem fog problémát okozni a továbbiakban. A 9.7. Tétel szerint  $H_{11}$  részcsoporthja  $S$ -nek.

Tetszőleges  $i \in I$ , illetve tetszőleges  $\lambda \in \Lambda$  indexekhez válasszunk ki egy

$$r_i \in H_{i1},$$

illetve egy

$$q_\lambda \in H_{1\lambda}$$

elemet. Ezek segítségével definiáljunk a  $H_{11}^0$  nullelemes csoport feletti  $\Lambda \times I$ -típusú  $P = (p_{\lambda i})$  mátrixot a következőképpen:

$$p_{\lambda i} = \begin{cases} q_\lambda r_i, & \text{ha } q_\lambda r_i \in H_{11}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$



Ennek a mátrixnak a segítségével képezzük az  $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfél-csoportot. A 4.46. Tétel szerint  $q_\lambda r_i \in H_{11}$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $H_{i\lambda}$  tartalmaz egy idempotens elemet. A 6.8. Tétel szerint tetszőleges  $\lambda \in \Lambda$  index esetén  $L_\lambda$  tartalmaz egy idempotens elemet. Ez az idempotens elem benne van valamelyik  $R_i$  osztályban, és így benne van a  $H_{i\lambda}$  osztályban. Az előbb említettek miatt ez azt jelenti, hogy a  $P$  mátrix  $\lambda$ -adik sorában tetszőleges  $\lambda$  esetén mindig van legalább egy nem nulla elem. Hasonló igaz az oszlopokra is. Tehát a  $P$  mátrix reguláris. A 9.19. Tétel szerint az  $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfél-csoport reguláris, s ezért a 9.22. Tétel miatt  $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$  teljesen 0-egyszerű.

Az előzőekben definiált  $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \lambda; P)$  Rees-féle mátrixfél-csoport konstrukciójában szereplő  $H_{11}$  részcsoporthoz és az  $r_i \in H_{i1}$ , illetve  $q_\lambda \in H_{1\lambda}$  elemek másképp való választásával más-más Rees-féle mátrixfél-csoportot kapunk. Megmutatható viszont, hogy ezek egymással izomorfak. Valójában azt fogjuk megmutatni, hogy mindegyikük izomorf a  $D$  osztály által a 4.47. Lemma előtt definiált  $(T; *)$  fél-csoporttal.

**9.23. Tétel** *Legyen  $D$  egy  $S$  fél-csoport reguláris  $\mathcal{D}$ -osztálya,  $H_{11}$  a  $D$  egy részcsoporthoz és  $r_i \in H_{i1}$ , illetve  $q_\lambda \in H_{1\lambda}$  tetszőleges elemek. Akkor  $D$  minden eleme egyértelműen kifejezhető  $r_i a q_j$  ( $a \in H_{11}$ ) alakban. Továbbá*

$$\phi((a)_{i\lambda}) = \begin{cases} r_i a q_\lambda, & \text{ha } a \neq 0, \\ 0, & \text{ha } a = 0 \end{cases}$$

az  $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \lambda; P)$  Rees-féle mátrixfél-csoportnak a  $D$  osztály segítségével definiált 4.47. Lemmában szereplő  $(T; *)$  fél-csoportra való izomorfizmusa.

*Bizonyítás.* Legyen  $\lambda \in \Lambda$  tetszőleges. A 6.8. Tétel szerint a  $D$  által tartalmazott  $\mathcal{R}$ -osztályok, illetve  $\mathcal{L}$ -osztályok mindegyike tartalmaz idempotens elemet, ezért  $L_\lambda$ -ban is van idempotens elem; jelölje  $e_\lambda$  ezek egyikét. Legyen  $k \in I$  az az index, amelyre

$$e_\lambda \in R_k$$

teljesül. Ekkor

$$e_\lambda \in H_{k\lambda}.$$

Legyen  $b$  a  $H_{k1} = R_k \cap L_1$   $\mathcal{H}$ -osztály tetszőleges eleme. A 6.11. Tétel (2) állítása szerint ez a  $\mathcal{H}$ -osztály akkor és csak akkor tartalmazza a  $H_{1\lambda} = R_1 \cap L_\lambda$  korábban már kiválasztott  $q_\lambda$  elem valamely inverzét, ha  $R_{q_\lambda} \cap L_b = R_1 \cap L_1 = H_{11}$  és  $R_b \cap L_{q_\lambda} = R_k \cap L_\lambda = H_{k\lambda}$  mindegyike tartalmaz idempotens elemet. Mivel  $H_{11}$  részcsoporthoz és az  $e_\lambda$  idempotens elem a  $H_{k\lambda}$  egy eleme, ezért  $H_{k1} = R_k \cap L_1$  tartalmazza  $q_\lambda$  egy inverzét, mégpedig a 6.11. Tétel (3) állítása szerint pontosan egy inverzét. Jelölje  $q'_\lambda$  ezt az inverzet, e pedig a  $H_{11}$  csoport egységelemét. A 4.42. Tétel szerint  $e$  bal oldali egységeleme az  $R_e = R_1 = R_{q_\lambda}$  osztálynak és így

$$e q_\lambda = q_\lambda.$$

Mivel  $H_{k\lambda} = R_k \cap L_\lambda = R_{q'_\lambda} \cap L_{q_\lambda}$  tartalmazza az  $e_\lambda$  idempotens elemet, ezért a 4.46. Tétel szerint

$$q_\lambda q'_\lambda \in R_{q_\lambda} \cap L_{q'_\lambda} = R_1 \cap L_1 = H_{11},$$

és így

$$q_\lambda q'_\lambda = e,$$

mert  $q_\lambda q'_\lambda$  idempotens eleme az  $e$  egységelemes  $H_{11}$  csoportnak (csoportnak viszont pontosan egy idempotens eleme van). Legyen  $s = q_\lambda$  és  $s' = q'_\lambda$ . Akkor  $es = q_\lambda$  és  $q_\lambda s' = e$ , mivel  $eq_\lambda = q_\lambda$  és  $q_\lambda q'_\lambda = e$ . A 4.38. Tétel szerint az

$$x \mapsto xq_\lambda \ (x \in L_1) \quad \text{és} \quad y \mapsto yq'_\lambda \ (y \in L_\lambda)$$

$L_1$ -nek  $L_\lambda$ -ra, illetve  $L_\lambda$ -nak  $L_1$ -re való olyan kölcsönösen egyértelmű,  $\mathcal{R}$ -osztály tartó leképezései, amelyek egymás inverzei.

Az előzőekhez hasonlóan, minden  $i \in I$  indexhez van a korábban már kiválasztott  $r_i \in H_{i1} = R_i \cap L_1$  elemnek  $R_1$ -ben van olyan  $r'_i$  inverze, hogy az

$$x \mapsto r_i x \ (x \in R_1) \quad \text{és} \quad y \mapsto r'_i y \ (y \in R_i)$$

leképezések  $\mathcal{L}$ -osztály tartó, kölcsönösen egyértelmű leképezések, amelyek egymás inverzei. A 4.39. Tétel szerint

$$x \mapsto r_i x q_\lambda \ (x \in H_{11}) \quad \text{és} \quad y \mapsto r'_i y q'_\lambda \ (y \in H_{i\lambda})$$

minden  $i \in I$  és  $\lambda \in \Lambda$  indexre  $H_{11}$ -nek  $H_{i\lambda}$ -ra, illetve  $H_{i\lambda}$ -nak  $H_{11}$ -re való olyan kölcsönösen egyértelmű leképezései, amelyek egymás inverzei. Mivel minden  $D$ -beli elem pontosan egy  $H_{i\lambda}$  osztálynak eleme, ezért a tételben definiált  $\phi$  leképezés  $\mathcal{M}^0$ -nak  $T$ -re való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Ebből pedig már következik, hogy  $D$  minden eleme előáll a tételben megfogalmazott szorzatalakban egyértelműen.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy  $\phi$  művelettartó. Legyenek  $a, b \in H_{11}$ ,  $i, j \in I$  és  $\lambda, \mu \in \Lambda$  tetszőleges elemek. Mivel

$$\phi((a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}) = \phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu})$$

és

$$\phi((a)_{i\lambda}) * \phi((b)_{j\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu),$$

ezért azt kell megmutatni, hogy

$$\phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu).$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$p_{\lambda j} = 0.$$

Ekkor

$$\phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu}) = \phi(0) = 0.$$

Tehát elegendő azt megmutatni, hogy

$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = 0$$

a  $(T; *)$  félcsoporthban. Mivel  $p_{\lambda j} = 0$ , ezért a  $P$  szendvicsmátrix definíciója alapján

$$q_\lambda r_j \notin H_{11},$$

és ezért a [4.46. Tétel](#) szerint  $H_{j\lambda}$  nem tartalmaz idempotens elemet. Mivel

$$r_i a q_\lambda \in H_{i\lambda} \quad \text{és} \quad r_j b q_\mu \in H_{j\mu},$$

ezért a [4.46. Tétel](#) miatt

$$r_i a q_\lambda r_j b q_\mu \notin H_{i\mu},$$

és ezért a  $T$ -n értelmezett  $*$  művelet definíciója szerint

$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = 0$$

$(T; *)$  félcsoporthban.

A bizonyítás hátralévő részében vizsgáljuk a

$$p_{\lambda j} \neq 0$$

esetet. Ekkor

$$q_\lambda r_j \in H_{11},$$

és ezért a [4.46. Tétel](#) szerint  $H_{j\lambda}$  tartalmaz idempotens elemet. Mivel

$$r_i a q_\lambda \in H_{i\lambda} \quad \text{és} \quad r_j b q_\mu \in H_{j\mu},$$

Ezért a [4.46. Tétel](#) miatt

$$r_i a q_\lambda r_j b q_\mu \in H_{i\mu},$$

és ezért a  $T$ -n értelmezett  $*$  művelet definíciója szerint

$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = (r_i a q_\lambda)(r_j b q_\mu) = (r_i a p_{\lambda j} b q_\mu) = \phi((a p_{\lambda j} b)).$$

Tehát mindkét esetben

$$\phi((a p_{\lambda j} b)_{i\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu).$$

□

A következőkben a teljesen 0-egyszerű félcsoporthokat jellemezzük a Ress-féle mátrix-félcsoporthok segítségével.

Először bebizonyítjuk a következő tételt:

**9.24. Tétel** Legyen  $S$  teljesen 0-egyszerű félcsoporth, és jelölje  $D$  az  $S$  félcsoporth 0-elemt nem tartalmazó (egyetlen)  $\mathcal{D}$ -osztályát. Akkor ezen  $\mathcal{D}$ -osztállyal megszerkesztett, közvetlenül a 4.47. Lemma előtt definiált  $(T; *)$  félcsoporth izomorf az  $S$  félcsoporthtal.

*Bizonyítás.* A 9.6. Tétel miatt az  $S$  félcsoporth 0-biegyszerű, azaz  $S$ -nek két  $\mathcal{D}$ -osztálya van:  $\{0\}$  és  $D = S \setminus \{0\}$ . Így tulajdonképpen az  $S$  alaphalmaz azonosítható a  $T = D \cup \{0\}$  halmazzal. Már csak azt kellene belátni, hogy tetszőleges  $a, b \in S = T$  elemek esetén  $ab = a * b$ . Legyenek  $a, b \in S = T$  tetszőleges elemek. Ha

$$ab \neq 0,$$

akkor a 9.7. Tétel szerint

$$ab \in R_a \cap L_b,$$

és így a  $*$  művelet definíciója alapján

$$ab = a * b.$$

Ha

$$ab = 0,$$

akkor viszont

$$ab \notin R_a \cap R_b,$$

és ezért a  $*$  művelet definíciója alapján

$$a * b = 0 = ab.$$

Tehát az  $S = T$  halmazon az  $S$ -beli eredeti művelet megegyezik a  $*$  művelettel.  $\square$

Ezek után megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a fejezet főtételeét.

**9.25. Tétel (Rees-tétel)** Egy félcsoporth akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha izomorf egy nullelemes csoporth feletti reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporthtal.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan félcsoporth, amely izomorf egy  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporthtal. Akkor a 9.22. Tétel szerint  $S$  teljesen 0-egyszerű.

Fordítva, legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth. A 9.6. Tétel szerint  $S$  egy 0-biegyszerű félcsoporth, és így

$$S = D \cup \{0\},$$

ahol  $D$  az  $S$  félcsoporth  $\mathcal{D}$ -osztálya. Mivel  $S$  teljesen 0-egyszerű, ezért  $D$  tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Mivel egy idempotens elem reguláris, ezért a 6.8. Tétel miatt  $D$  minden eleme reguláris. Így megkonstruálhatunk  $D$  segítségével egy, az előzőekben tekintett  $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoporthot és a vele izomorf  $(T; *)$  félcsoporthot. A 9.24. Tétel szerint az  $S$  félcsoporth izomorf a  $(T; *)$  félcsoporthtal. Így  $S$  izomorf az  $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoporthtal.  $\square$

**9.26. Megjegyzés** A Rees-féle mátrixfélcsoporthoz van egy másik fajta megközelítése. Egy  $G^0$  nullelemes csoport, valamint  $I$  és  $\Lambda$  nem üres halmazok  $G^0 \times I \times \Lambda$  Descartes-szorzatán értelmezzünk egy  $*$  műveletet a következőképpen. Képezzünk a  $G^0$  elemeiből egy  $\Lambda \times I$  típusú  $P = (p_{\lambda i})$  mátrixot, majd ennek felhasználásával tetszőleges  $(g; i, \lambda)$  és  $(h; j, \mu)$  elemhármassal esetén legyen

$$(g; i, \lambda) * (h; j, \mu) = (gp_{j\lambda}h; i, \mu).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a  $*$  művelet asszociatív. Az  $S = (G^0 \times I \times \Lambda; *)$  félcsoporthoz a  $(0, i, \lambda)$  alakú elemek egy ideált alkotnak; az  $S$  félcsoporthoz ezen ideál szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthoz izomorf az  $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoporthoz.

### 9.3. Teljesen egyszerű félcsoporthoz

A 4.8. Megjegyzés szerint, ha egy teljesen egyszerű félcsoporthoz egy nullelemet adjunk, akkor egy teljesen nulleges egyszerű félcsoporthoz kapunk. Továbbá, ha egy teljesen nulleges egyszerű félcsoporthoz nincs nullától különböző nullosztó, akkor a 0-elem elhagyásával egy teljesen egyszerű félcsoporthoz keletkezik. Egy  $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoporthoz akkor és csak akkor nincs nullától különböző nullosztó, ha a  $P$  szendvicsmátrix egyetlen eleme sem nulla. Ha ez a helyzet, akkor az  $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$  félcsoporthoz a nullelem elhagyásával keletkezett félcsoporthoz izomorf egy olyan  $\mathcal{M} = (G; I, \Lambda; P)$  módon jelölt félcsoporthoz, amelynek alaphalmaza a  $G \times I \times \Lambda$  halmaz, a művelet pedig a következőképpen van értelmezve:

$$(g; i, \lambda)(h; j, \mu) = (gp_{j\lambda}h; i, \mu).$$

**9.27. Definíció** Egy  $G$  csoport elemeiből képezett  $\Lambda \times I$  típusú  $P$  mátrixszal megkonstruált  $\mathcal{M} = (G; I, \Lambda; P)$  félcsoporthoz a  $G$  csoport feletti,  $P$  szendvicsmátrixú,  $I \times \Lambda$ -típusú Rees-féle mátrixfélcsoporthoz nevezzük.

Az előző megjegyzés, valamint a Rees-tétel alapján kimondható a következő tétel.

**9.28. Tétel** Egy félcsoporthoz akkor és csak akkor teljesen egyszerű, ha izomorf egy csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporthoz.

**9.29. Tétel** Minden teljesen egyszerű félcsoporthoz gyengén redukálható.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  teljesen egyszerű félcsoporthoz. Akkor a 9.28. Tétel szerint  $S$  izomorf egy  $G$  csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporthoz. Jelölje  $(a, i, \lambda); (b, j, \mu)$  az  $S$  két tetszőleges elemét. Tegyük fel, hogy

$$(a, i, \lambda)(x, t, \tau) = (b, j, \mu)(x, t, \tau)$$

és

$$(x, t, \tau)(a, i, \lambda) = (x, t, \tau)(b, j, \mu)$$

teljesül az  $S$  félcsoporth minden  $(x, t, \tau)$  elemére. Ekkor

$$(ap_{\lambda t}x, i, \tau) = (bp_{\mu t}x, j, \tau)$$

és

$$(xp_{\tau i}a, t, \lambda) = (xp_{\tau j}b, t, \mu),$$

amiből

$$i = j, \quad \lambda = \mu$$

valamint

$$ap_{\mu t}x = ap_{\lambda t}x = bp_{\mu t}x$$

következik. Mivel  $a, b, x$  és  $p_{\mu t}$  a  $G$  csoport elemei, ezért az utolsó egyenlőségből

$$a = b$$

következik. Tehát

$$(a, i, \lambda) = (b, j, \mu).$$

Következésképpen  $S$  gyengén redukzív. □

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

**9.30. Tétel** *Legyen  $S = \mathcal{M}(G; I, J; P)$  egy  $P = (p_{j,i})$  szendvicismátrixú  $G$  csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporth (azaz,  $S$  egy teljesen egyszerű félcsoporth). Jelölje  $\mathcal{T}_I$ , illetve  $\mathcal{T}_J$  az  $I$  (balról ható), illetve  $J$  (jobbról ható) összes transzformációinak félcsoporthját. Akkor*

$$\Omega(S) = \{(k, a, h) \in \mathcal{T}_I \times G \times \mathcal{T}_J : (\forall i \in I, j \in J) p_{j,k(i)}ap_{(j_0)h,i} = p_{j,k(i_0)}ap_{(j)h,i}\}.$$

Az  $\Omega(S)$  tetszőleges  $(k, a, h)$  és  $(f, b, g)$  elemeinek szorzata a következő:

$$(k, a, h)(f, b, g) = (k \circ f, ap_{(j_0)h,f(i_0)}b, h \circ g).$$

Egy  $(k, a, h) \in \Omega(S)$  elem akkor és csak akkor belső bitranszláció, ha  $k$  and  $h$  konstans transzformációk. Azonosítva  $S$ -et  $\Omega(S)$  belső részével, tetszőleges  $(k, a, h) \in \Omega(S)$  és  $(g; i, j) \in S$  elemek esetén

$$(k, a, h)(g; i, j) = (ap_{k(j_0),i}g; k(i), j),$$

$$(g; i, j)(k, a, h) = (gp_{j,(i_0)h}a; i, (j)h).$$

## 9.4. Brandt-félcsoportok

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk (5.3. Definíció), egy nem üres  $A$  halmaz esetén az  $A \times A$  halmaz valamely nem üres részhalmazának  $A$ -ba való egyértelmű leképezését az  $A$  halmazon értelmezett parciális műveletnek nevezzük. Egy parciális művelettel ellátott halmazt parciális grupoidnak nevezünk.

**9.31. Definíció** *Brandt-grupoidon olyan  $B$  parciális grupoidot értünk, amelyre teljesülnek az alábbiak:*

(B1) *Ha  $ab = c$  ( $a, b, c \in B$ ) akkor a három elem bármelyike egyértelműen meg van határozva a másik kettő által.*

(B2)  *$B$  tetszőleges  $a, b, c$  elemeire teljesülnek az alábbiak:*

- (1) *Ha  $ab$  és  $bc$  definiálva vannak, akkor  $(ab)c$  és  $a(bc)$  is definiálva vannak, és  $(ab)c = a(bc)$ .*
- (2) *Ha  $ab$  és  $(ab)c$  definiálva vannak, akkor  $bc$  és  $a(bc)$  is definiálva vannak, és  $(ab)c = a(bc)$ .*
- (3) *Ha  $bc$  és  $a(bc)$  definiálva vannak, akkor  $ab$  és  $(ab)c$  is definiálva vannak, és  $(ab)c = a(bc)$ .*

(B3)  *$B$  tetszőleges  $a$  eleméhez egyértelműen léteznek olyan  $B$ -beli  $e, f$  és  $a'$  elemek, amelyekre  $ea = af = a$  és  $a'a = f$  teljesülnek.*

(B4) *Ha  $e$  és  $f$   $B$ -nek olyan elemei, amelyekre  $e^2 = e$ , illetve  $f^2 = f$  teljesül, akkor létezik olyan  $B$ -beli  $a$  elem, hogy  $ea = af = a$ .*

**9.32. Lemma** *Legyen  $B$  egy parciális grupoid. Jelöljön  $0$  egy olyan szimbólumot, amely nem reprezentál egyetlen  $B$ -beli elemet sem. Az  $S = B^0 = B \cup \{0\}$  halmazon definiáljunk egy  $\circ$  műveletet a következőképpen ( $a, b \in B$ ):*

$$a \circ b = \begin{cases} ab, & \text{ha } ab \text{ definiálva van } B\text{-ben,} \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

továbbá

$$a \circ 0 = 0 \circ a = 0 \circ 0 = 0.$$

$S = B^0$  akkor és csak akkor alkot félcsoportot a  $\circ$  műveletre nézve, ha  $B$  teljesíti a 9.31. Definíció (B2)(2) és (B2)(3) feltételeit.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy  $B$  parciális grupoid teljesíti a 9.31. Definíció (B2)(2) és (B2)(3) feltételeit. Legyenek

$$a, b, c \in B^0$$

tetszőleges elemek. Ha ezen elemek valamelyike egyenlő a 0 elemmel, akkor

$$a \circ (b \circ c) = 0 = (a \circ b) \circ c.$$

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy

$$a, b, c \in B.$$

Ha

$$a \circ (b \circ c) \neq 0,$$

akkor

$$b \circ c \neq 0,$$

amiből a  $\circ$  művelet definíciója miatt következik, hogy a  $bc$  és  $a(bc)$  szorzatok definiálva vannak  $B$ -ben és

$$bc = b \circ c,$$

valamint

$$a(bc) = a \circ (b \circ c).$$

A 9.31. Definíció (B2)(3) feltétele szerint  $B$ -ben definiálva vannak az  $ab$  és  $(ab)c$  szorzatok, és

$$(ab)c = a(bc).$$

A  $\circ$  művelet definíciója alapján

$$ab = a \circ b$$

és

$$(ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Így

$$a \circ (b \circ c) = a(bc) = (ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Hasonlóan igazolható az

$$a \circ (b \circ c) = a(bc) = (ab)c = (a \circ b) \circ c$$

egyenlőség teljesülése az  $(a \circ b) \circ c \neq 0$  esetben. Még az  $a \circ (b \circ c) = 0$  és  $(a \circ b) \circ c = 0$  eset tárgyalása van hátra, de ekkor az

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, hiszen mindkét oldali kifejezés egyenlő a 0 elemmel.



Fordítva, tegyük fel, hogy  $S = B^0$  félcsoporth a tételben definiált  $\circ$  műveletre nézve. Legyenek  $a, b, c \in B$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy a  $bc$  és  $a(bc)$  szorzatok definiálva voltak az  $B$ -n értelmezett eredeti parciális művelet szerint. Akkor

$$b \circ c = bc$$

és

$$a \circ (b \circ c) = a(bc).$$

A  $\circ$  művelet asszociativitása miatt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Ebből viszont az következik, hogy

$$(a \circ b) \circ c \neq 0,$$

és persze az is, hogy

$$a \circ b \neq 0.$$

A  $\circ$  művelet definíciója alapján ez azt jelenti, hogy  $ab$  és  $(ab)c$  szorzatok értelmezve vannak  $B$ -ben és

$$ab = a \circ b,$$

$$(ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

A  $\circ$  művelet asszociativitása miatt

$$(ab)c = a(bc)$$

is következik. Tehát a (B2)(3) feltétel teljesül. Hasonlóan igazolható a (B2)(2) feltétel  $B$ -ben való teljesülése.  $\square$

**9.33. Definíció** Egy  $B$  Brandt-gruppoidból az előző lemma szerint származtatott  $S = B^0$  félcsoporthot Brandt-félcsoporthnak nevezzük. Egy kicsit részletesebben: Brandt-félcsoporthon egy olyan 0-elemes  $S$  félcsoporthot értünk, amely teljesíti a következő feltételek mindegyikét:

(A1) Ha  $a, b$  és  $c$  az  $S$  olyan elemei, amelyekre  $ac = bc \neq 0$  vagy  $ca = cb \neq 0$  teljesül, akkor  $a = b$ .

(A2) Ha  $a, b$  és  $c$  az  $S$  olyan elemei, amelyekre  $ab \neq 0$  és  $bc \neq 0$  teljesülnek, akkor  $abc \neq 0$  is teljesül.

(A3) Az  $S$  tetszőleges  $a \neq 0$  eleméhez létezik egy és csak egy olyan  $e \in S$  elem, melyre  $ea = a$  teljesül, egy és csak egy olyan  $f \in S$  elem, amelyre  $af = a$  teljesül, valamint egy és csak egy olyan  $a' \in S$  elem, amelyre  $a'a = f$  teljesül ( $e$ -t az  $a$  bal oldali egységelemének,  $f$ -et az  $a$  jobb oldali egységelemének,  $a'$ -t pedig az  $a$  inverzének is szokták nevezni).

(A4) Ha  $e$  és  $f$  a nullelemtől különböző idempotens elemek, akkor  $eSf \neq \{0\}$ .

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióban szereplő feltételek nem függetlenek. Bebizonyítható, hogy az (A1) és (A2) feltételek az (A3) feltételből következnek. Így érvényes a következő tétel.

**9.34. Tétel** A 9.33. Definícióban szereplő (A1) és (A2) feltételek az (A3) feltétel következményei, így egy 0-elemes  $S$  félcsoport akkor és csak akkor Brandt félcsoport, ha teljesíti a 9.33. Definícióban szereplő (A3) és (A4) feltételeket.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy 0-elemes  $S$  félcsoport teljesíti az (A3) feltételt. Ahhoz, hogy megmutassuk az (A1) és (A2) feltételek teljesülését, először néhány előkészítő részeredményt bizonyítunk. Legyen  $a \in S$  tetszőleges elem. Jelölje  $e$  az  $a$  bal oldali egységelemét,  $f$  pedig az  $a$  jobb oldali egységelemét. Jelölje  $a'$  az  $a$  inverzét. Ekkor  $ea = a$ ,  $af = a$  és  $a'a = f$ . Megmutajuk, hogy a következő egyenlőségek is teljesülnek:

$$e^2 = e, \quad f^2 = f, \quad fa' = a'e = a', \quad aa' = e. \quad (9.1)$$

Mivel az  $ea = a$  feltételből

$$e^2a = e(ea) = ea = a$$

következik, ezért

$$e^2 = e, \quad (9.2)$$

mert az  $a$  bal oldali egységeleme egyértelműen meghatározott. Hasonlóan igazolható, hogy

$$f^2 = f. \quad (9.3)$$

Mivel

$$a = af = a(a'a) = (aa')a,$$

ezért

$$aa' = e, \quad (9.4)$$

ugyancsak az  $a$  bal oldali egységelemének egyértelmű létezése miatt. Az

$$(a'e)a = a'(ea) = a'a = f$$

teljesüléséből

$$a'e = a' \quad (9.5)$$

adódik az  $a$  elem inverzének egyértelmű létezése miatt. Ez azt jelenti, hogy  $e$  az  $a'$  elem jobb oldali egységeleme. Hasonlóan igazolható, hogy

$$fa' = a', \quad (9.6)$$

és így  $f$  az  $a'$  elem bal oldali egységeleme. Mivel (a fentiek szerint)  $aa' = e$ , ezért  $a$  az  $a'$  elem inverze, azaz

$$(a')' = a. \quad (9.7)$$

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy  $S$  tetszőleges  $e$  és  $f$  idempotens elemei esetén az  $ef \neq 0$  feltételből  $e = f$  következik. Legyen tehát  $e$  és  $f$  az  $S$  két idempotens eleme. Tegyük fel, hogy

$$ef \neq 0.$$

Legyen

$$a = ef.$$

Akkor  $ea = a$  és  $af = a$ . Legyen  $a'$  az  $a$  elem inverze, azaz az  $S$  azon egyértelműen meghatározott eleme, amelyre  $a'a = f$  teljesül. A (9.4) és a (9.6) eredmények miatt

$$e = aa' = (ef)a' = e(fa') = ea',$$

amiből

$$a' = e$$

következik, hiszen az  $e$  elemnek önmaga az egyértelműen meghatározott jobb oldali egységeleme, itt viszont azt kaptuk eredményül, hogy  $a'$  is jobb oldali inverze  $e$ -nek. Ekkor viszont (felhasználva (9.7)-t is)

$$a = (a')' = e' = e$$

következik. Mivel

$$ee = e = a = ef,$$

ezért

$$e = f.$$

Az eddigi eredmények felhasználásával a következőkben bebizonyítjuk, hogy valamely  $a, b \in S$  elemek esetén  $ab \neq 0$  akkor és csak akkor teljesül, ha az  $a$  elem jobb oldali egységeleme megegyzik a  $b$  elem bal oldali egységelemével. Tekintsünk tehát két  $S$ -beli  $a$  és  $b$  elemet. Jelölje  $f$  az  $a$  jobb oldali egységelemét,  $e$  pedig a  $b$  bal oldali egységelemét. Tegyük fel, hogy

$$ab \neq 0.$$

(A 9.2) és (9.3) egyenlőségek miatt

$$e^2 = e, \quad f^2 = f.$$

Mivel

$$0 \neq ab = (af)(eb) = a(fe)b,$$

ezért

$$fe \neq 0.$$

A bizonyítás előző részének eredményét használva,

$$e = f.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$e = f.$$

Akkor

$$f = f^2 = fe = (a'a)(bb') = a'(ab)b',$$

és így

$$ab \neq 0.$$

A bizonyítás következő részében most már megmutatjuk, hogy teljesül az (A1) feltétel. Ehhez tegyük fel, hogy

$$ac = bc \neq 0$$

valamely  $a, b, c \in S$  elemekre. Az előzőek miatt a  $c$  elem  $e$  bal oldali egységeleme megegyezik az  $a$  és  $b$  elemek jobb oldali egységelemével. Ha  $c'$  jelöli a  $c$  elem inverzét, akkor

$$cc' = e,$$

és így

$$a = ae = a(cc') = (ac)c' = (bc)c' = b(cc') = be = b.$$

Hasonlóan igazolható, hogy a  $ca = cb \neq 0$  feltételből  $a = b$  következik.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy az (A2) feltétel is teljesül. Legyenek  $a, b, c \in S$  olyan elemek, amelyek esetén

$$ab \neq 0 \quad \text{és} \quad bc \neq 0.$$

Ekkor (az előzőeknek megfelelően) az  $a$  elem jobb oldali egységeleme megegyezik a  $b$  elem bal oldali egységelemével, ami jól láthatóan az  $bc$  szorzatnak is bal oldali egységeleme. Így

$$a(bc) \neq 0.$$

□

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt (lásd az [5] könyv Theorem 3.9 tételét).

**9.35. Tétel** *Egy 0-elemes  $S$  félcsoponton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

- (1)  $S$  egy Brandt félcsoport.
- (2)  $S$  egy teljesen 0-egyszerű inverz félcsoport.
- (3)  $S$  izomorf egy olyan reguláris  $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, I; E)$  Rees-féle mátrixfélcsoporttal, amely az  $I \times I$  típusú  $E$  egységmátrixszal van definiálva.

## Feladatok

**9.1.** (Megoldás: 17.27.) Mutassuk meg, hogy egy  $L$  balzéró félcsoporth és egy  $R$  jobbzeró félcsoporth  $L \times R$  direkt szorzata teljesen egyszerű!

**9.2.** (Megoldás: 17.28.) Mutassuk meg, hogy két félcsoporth direkt szorzata akkor és csak akkor teljesen egyszerű, ha mindkét félcsoporth teljesen egyszerű!

**9.3.** (Megoldás: 17.29.) Mutassuk meg, hogy egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth minden 0-tól különböző idempotens eleme primitív!

## 10. fejezet

# Félcsoportok félháló-felbontása

**10.1. Definíció** Legyen  $\mathcal{C}$  félcsoportok egy osztálya. Egy  $S$  félcsoport valamely  $\sigma$  kongruenciáját  $\mathcal{C}$ -kongruenciának nevezzük, ha az  $S/\sigma$  faktorfélcsoport benne van  $\mathcal{C}$ -ben; az ehhez tartozó partíciót az  $S$  félcsoport  $\mathcal{C}$ -felbontásának nevezzük. Ha  $\sigma$  a legszűkebb  $\mathcal{C}$ -kongruencia (ha létezik ilyen), akkor a hozzá tartozó partíciót  $S$  legbővebb  $\mathcal{C}$ -felbontásának nevezzük, s az  $S/\sigma$  faktorfélcsoportról azt mondjuk, hogy az  $S$  legbővebb  $\mathcal{C}$ -homomorf képe.

**10.2. Megjegyzés** Az világos, hogy ha  $\mathcal{V}$  félcsoportoknak tetszőleges varietása, akkor az  $S$ -en értelmezett  $\mathcal{V}$ -kongruenciák metszete is  $\mathcal{V}$ -kongruencia, s így létezik  $S$ -nek legszűkebb  $\mathcal{V}$ -kongruenciája, azaz legbővebb  $\mathcal{V}$ -felbontása. Megemlítjük, hogy félcsoportok egy  $\mathcal{V}$  osztályát varietásnak nevezzük, ha megadható azonosságoknak olyan  $\mathcal{I}$  családja, hogy  $\mathcal{V}$  mindazon félcsoportokból áll, amelyek teljesítik az  $\mathcal{I}$ -ben lévő azonosságok mindegyikét.

### 10.1. Félcsoportok legszűkebb félháló-kongruenciája

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk (1.38. Definíció), ha egy  $S$  félcsoport minden eleme idempotens, akkor az  $S$  félcsoportot kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló. Mivel tetszőleges félcsoportban igaz, hogy akármennyi félháló-kongruencia metszete is félháló-kongruencia, ezért minden félcsoportnak létezik legszűkebb félháló-kongruenciája. Ebben a fejezetben megkonstruáljuk tetszőleges félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciáját.

**10.3. Definíció** Egy félcsoportot félháló-felbonthatatlannak nevezünk, ha az univerzális relációja az egyetlen félháló-kongruenciája.

A következőkben megmutatjuk, hogy minden félcsoport felbontható félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálójára.

Legyen  $S$  egy félcsoporth. Jelölje  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth azon binér relációját, amely szerint az  $S$  félcsoporth  $a$  és  $b$  elemeire  $(a, b) \in \sigma$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $a$  osztja a  $b$  elem valamelyik hatványát, azaz megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, illetve megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, amelyekre

$$xay = b^m$$

teljesül. Az világos, hogy  $\sigma$  reflexív reláció. Jelölje  $\varrho$  a  $\sigma$  reláció tranzitív lezártját, azaz az  $S$  félcsoporth azon relációját, amely szerint az  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $b$  elemére az  $(a, b) \in \varrho$  feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha megadható az  $S$  elemeinek olyan

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$$

sorozata, amelyben szereplő  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) elemek mindegyikére teljesül, hogy

$$(a_i, a_{i+1}) \in \sigma.$$

**10.4. Lemma** *Egy  $S$  félcsoporth tetszőleges  $a$  és  $b$  elemei, valamint akármilyen  $m$  pozitív egész szám esetén  $a^m b^m \varrho ab \varrho ba$ .*

*Bizonyítás.* A bizonyítást az  $m$ -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Legyen  $S$  félcsoporth,  $a$  és  $b$  pedig tetszőleges  $S$ -beli elemek. Mivel

$$\sigma \subseteq \varrho$$

és

$$(x^2, x) \in \sigma$$

minden  $x \in S$  elemre, ezért (a  $\sigma$  definíciója miatt)

$$ab \sigma baba = (ba)^2 \sigma ba.$$

Tehát az állítás igaz  $m = 1$ -re:

$$ab \varrho ba. \tag{10.1}$$

Tegyük fel, hogy  $m > 1$  és az állítás igaz minden  $m$ -nél kisebb kitevőre. Akkor az indukciós feltétel és az előzőekben nyert (10.1) eredmény felhasználásával adódik, hogy tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén

$$\begin{aligned} a^m b^m &= a(a^{m-1} b^m) \varrho (a^{m-1} b^m) a \sigma (a^{m-1} b^m)^2 \sigma (a^{m-1} b^m) = \\ &= (a^{m-1} b^{m-1}) b \varrho b(a^{m-1} b^{m-1}) \sigma (a^{m-1} b^{m-1})^2 \sigma (a^{m-1} b^{m-1}) \varrho ab \varrho ba. \end{aligned}$$

Tehát

$$a^m b^m \varrho ab \varrho ba. \quad \square$$

**10.5. Lemma** Ha  $(a, b) \in \sigma$  teljesül egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $b$  elemei esetén, akkor tetszőleges  $c \in S$  elemre  $(ca, cb) \in \varrho$  és  $(ac, bc) \in \varrho$ .

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \sigma$  teljesül egy  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $b$  elemei esetén. Akkor léteznek olyan  $S^1$ -beli  $x$  és  $y$  elemek, valamint megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, hogy

$$xay = b^m.$$

Legyen  $c \in S$  tetszőleges elem. Akkor a 10.4. Lemma szerint

$$ca \sigma (ayc)^2 \sigma ayc \sigma (c^m xay)^2 \sigma c^m xay = c^m b^m \varrho cb.$$

Ebből már adódik

$$(ca, cb) \in \varrho.$$

Így

$$ac \varrho ca \varrho cb \varrho bc. \quad \square$$

Legyen  $\lambda$  az  $S$  félcsoporth azon relációja, amely szerint az  $S$  félcsoporth  $a$  és  $b$  elemeire  $(a, b) \in \lambda$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $(a, b) \in \varrho$  és  $(b, a) \in \varrho$ .

**10.6. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén a  $\lambda$  reláció az  $S$  félcsoporth legszűkebb félhálókongruenciája. A  $\lambda$ -osztályok félháló-felbonthatatlan félcsoporthok.

*Bizonyítás.* Az világos, hogy  $\lambda$  az  $S$  félcsoporth egy ekvivalenciarelációja. Mivel  $\varrho$  a  $\sigma$  tranzitív lezártja, ezért a 10.5. Lemma szerint  $\varrho$  balról kompatibilis és jobbról kompatibilis az  $S$ -beli műveletre nézve. Így  $\lambda$  is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Következésképpen  $\lambda$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája (használva a 2.22. Tételt is). Mivel

$$(x, x^2) \in \sigma \quad \text{és} \quad (x^2, x) \in \sigma$$

tetszőleges  $x \in S$  elem esetén, ezért  $\lambda$  köteg-kongruencia, azaz

$$(x, x^2) \in \lambda$$

minden  $x \in S$  elem esetén. A 10.4. Lemma alapján viszont világos, hogy  $\lambda$  kommutatív kongruencia. Tehát  $\lambda$  az  $S$  félcsoporth félháló-kongruenciája.

Legyen  $\xi$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges félháló-kongruenciája. Legyen  $Y = S/\xi$ . Defináljunk az  $S$  félcsoporthon egy  $<_\xi$  relációt a következőképpen:  $x <_\xi y$  akkor és csak akkor, ha  $x \in S_\alpha$ ,  $y \in S_\beta$  ( $\alpha, \beta \in Y$ ) és  $\alpha \leq \beta$  (azaz,  $\alpha\beta = \beta$ ). Az így definiált  $<_\xi$  relációra teljesül, hogy

$$(x, y) \in \xi \quad \longleftrightarrow \quad x <_\xi y \text{ és } y <_\xi x.$$



Megjegyezzük azt is, hogy az  $(x, y) \in \sigma$  feltétel maga után vonja  $x <_\xi y$  teljesülését. Így az  $(a, b) \in \varrho$  feltételből  $a <_\xi b$  következik. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \lambda$$

teljesül az  $S$  félcsoporth valamely  $a$  és  $b$  elemeire. Akkor

$$a <_\xi b \quad \text{és} \quad b <_\xi a,$$

amiből

$$(a, b) \in \xi$$

következik. Tehát

$$\lambda \subseteq \xi.$$

Ez éppen azt bizonyítja, hogy  $\lambda$  az  $S$  félcsoporth legszűkebb félháló-kongruenciája.

Legyen  $S_\alpha$  az  $S$  félcsoporth egy  $\lambda$ -osztálya. Mivel  $S/\lambda$  elemei idempotensek, ezért  $S_\alpha$  félcsoporth. Megmutatjuk, hogy  $S_\alpha$  félháló-felbonthatatlan. Legyenek  $a, b \in S_\alpha$  tetszőleges elemek. Mivel  $(a, b) \in \lambda$ , ezért van az  $S$  elemeinek olyan

$$a = a_0, \dots, a_k = b = b_0, \dots, b_t = a$$

sorozata, amelyben minden elem (az utolsót nem számítva) osztja a következő valamely hatványát, azaz

$$x_{i-1}a_{i-1}y_{i-1} = a_i^{m_i} \quad (i = 1, \dots, k)$$

és

$$z_{j-1}b_{j-1}u_{j-1} = b_j^{n_j} \quad (j = 1, \dots, t)$$

teljesül alkalmas  $m_i, n_j \geq 1$  pozitív egész számokra és  $x_i, y_i, z_j, u_j \in S$  elemekre. Így

$$a_0 <_\lambda \dots <_\lambda a_k <_\lambda b_1 <_\lambda \dots <_\lambda b_t,$$

amiből

$$a \lambda b \lambda a_i \lambda b_j$$

következik minden  $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, t$  indexre. Ez azt jelenti, hogy a fenti sorozatban szereplő  $a_i$  és  $b_j$  elemek mindegyike benne van  $S_\alpha$ -ban. Az

$$x_{i-1}a_{i-1}y_{i-1} = a_i^{m_i}$$

egyenlőségből

$$(a_i x_{i-1}) a_{i-1} (y_{i-1} a_i) = a_i^{m_i+2}$$

következik. Megjegyezzük, hogy mivel

$$a_i <_\lambda a_i x_{i-1} <_\lambda a_i^{m_i+2},$$

ezért

$$a_i x_{i-1}, y_{i-1} a_i \in S_\alpha.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$b_j y_{j-1}, u_{j-1} b_j \in S_\alpha.$$

Jelölje  $\sigma_\alpha$ ,  $\varrho_\alpha$ , illetve  $\lambda_\alpha$  az  $S_\alpha$  félcsoporthon definiált  $\sigma$ ,  $\varrho$ , illetve  $\lambda$  relációkat. Az előzőekből következően

$$a_{i-1} \sigma_\alpha a_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

és

$$b_{j-1} \sigma_\alpha b_j \quad (j = 1, \dots, t).$$

Így

$$a \varrho_\alpha b, \quad b \varrho_\alpha a.$$

Következésképpen

$$a \lambda_\alpha b.$$

Tehát  $\lambda_\alpha$  az  $S_\alpha$  félcsoporth univerzális relációja. Mivel  $\lambda_\alpha$  az  $S_\alpha$  félcsoporth legszűkebb félháló-kongruenciája, ezért  $S_\alpha$ -nak csak egyetlen félháló-kongruenciája van, az univerzális reláció. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy  $S_\alpha$  félháló-felbonthatatlan.  $\square$

**10.7. Következmény** Minden félcsoporth felbontható félháló-felbonthatatlan félcsoporthok félhálójára.

*Bizonyítás.* A 10.6. Tétel alapján nyilvánvaló.  $\square$

**10.8. Következmény** Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor félháló-felbonthatatlan, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén megadható  $S$  elemeinek egy olyan

$$a = a_0, \dots, a_n = b$$

sorozata, amely esetén az  $a_{i-1}$  elem osztja az  $a_i$  elem valamelyik hatványát ( $i = 1, \dots, n$ ).

*Bizonyítás.* Az állítás a 10.6. Tétel következménye.  $\square$

## 10.2. Arkhimédieszi félcsoporthok félhálója

**10.9. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot arkhimédieszi félcsoporthnak nevezünk, ha bármely két elemét véve, mindegyik osztója a másik egy alkalmas hatványának.

**10.10. Lemma** Minden arkhimédieszi félcsoporth félháló-felbonthatatlan.

*Bizonyítás.* A 10.8. Következmény szerint nyilvánvaló.  $\square$

**10.11. Következmény** Minden egyszerű félcsoporthaló-felbonthatatlan.

*Bizonyítás.* Mivel a 4.2. Tétel szerint egy félcsoporth akkor és csak akkor egyszerű, ha tetszőleges  $a$  eleme esetén  $SaS = S$ , ezért minden egyszerű félcsoporth arkhimédieszi. Így a 10.10. Lemma miatt igaz az állítás.  $\square$

**10.12. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot bal (jobb) Putcha-félcsoporthnak nevezünk, ha minden  $x, y \in S$  elem esetén az  $y \in xS^1$  ( $y \in S^1x$ ) feltételből  $y^m \in x^2S^1$  ( $y^m \in S^1x^2$ ) következik valamely  $m$  pozitív egész számmal.

Egy  $S$  félcsoporthot Putcha-félcsoporthnak nevezünk, ha minden  $x, y \in S$  elem esetén az  $y \in S^1xS^1$  feltételből  $y^m \in S^1x^2S^1$  következik valamely  $m$  pozitív egész számmal.

**10.13. Lemma**  $S$  akkor és csak akkor bal (jobb) Putcha-félcsoporth, ha tetszőleges  $x, y \in S$  elemekhez és tetszőleges  $n$  pozitív egész számhoz megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, amelyre  $(xy)^m \in x^nS^1$  ( $(xy)^m \in S^1y^n$ ) teljesül.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy bal Putcha-félcsoporth. Mivel  $xy \in xS^1$ , ezért megadható olyan  $t$  pozitív egész szám, amelyre

$$(xy)^t \in x^2S^1$$

teljesül. Ebből viszont az következik, hogy minden  $k$  pozitív egész számhoz van olyan  $p$  pozitív egész szám, hogy

$$(xy)^p \in x^{2^k}S^1.$$

Legyen  $n$  tetszőleges pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy

$$2^k \geq n.$$

Akkor

$$(xy)^m \in x^nS^1 \subseteq x^{2^k}S^1$$

teljesül valamely  $m$  pozitív egész számra.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporth teljesíti azt a feltételt, hogy tetszőleges  $x, y \in S$  elemekhez és tetszőleges  $n$  pozitív egész számhoz megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, amelyre

$$(xy)^m \in x^nS^1$$

teljesül. Tegyük fel, hogy

$$y \in xS^1$$

valamely  $x, y \in S$  elemekre. Ekkor

$$y^2 = xu,$$

ahol  $u$  az  $S$  valamely eleme. Ha alkalmazzuk az  $S$ -re vonatkozó feltételünket  $n = 2$  esetre, akkor megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, amelyre

$$y^{2m} = (xu)^m \in x^2S^1.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy  $S$  bal Putcha-félcsoport. A jobb Putcha-félcsoportokkal kapcsolatos állítás bizonyítása a bal oldali esethez hasonló.  $\square$

**10.14. Lemma** *Minden bal (jobb) Putcha-félcsoport egyben egy Putcha-félcsoport.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy bal Putcha-félcsoport. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek a

$$b \in S^1 a S^1$$

feltétellel, azaz

$$b = xay$$

valamely  $x, y \in S^1$  elemekkel. Feltehetjük, hogy az  $x$  és  $y$  elemek valamelyike  $S$ -ben van, mert  $a = b$ -re az állítás igaz. Akkor viszont a 10.13. Lemma szerint megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, hogy

$$(a(yx))^m \in a^2 S^1.$$

Ebből viszont

$$b^{m+1} = (xay)^{m+1} = x(ayx)^m ay \in S^1 a^2 S^1$$

adódik. Tehát  $S$  Putcha-félcsoport. A jobb oldali eset bizonyítása a bal oldali esethez hasonlóan bizonyítható.  $\square$

**10.15. Tétel** *Egy  $S$  félcsoport akkor és csak akkor bontható fel arkhimédeszi félcsoportok félhálójára, ha  $S$  Putcha-félcsoport. Ebben az esetben a félháló-felbontásnak megfelelő legszűkebb félháló-kongruencia a következő:*

$$\eta = \{(a, b) \in S \times S : (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) a^m \in SbS, b^n \in SaS\}.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy Putcha-félcsoport. Legyen  $\eta$  a tételbeli reláció. Világos, hogy  $\eta$  az  $S$  reflexív és szimmetrikus relációja. (Megjegyezzük, hogy  $\eta$  tetszőleges  $S$  félcsoport esetén reflexív és szimmetrikus.) Megmutajuk, hogy  $\eta$  tranzitív is  $S$ -en. Legyenek  $a, b, c \in S$  tetszőleges elemek az

$$(a, b) \in \eta$$

és

$$(b, c) \in \eta$$

feltétellel. Ez azt jelenti, hogy

$$a^m \in SbS, \quad b^n \in SaS$$

és

$$b^t \in ScS, \quad c^k \in SbS$$

teljesül valamely  $m, n, t, k$  pozitív egész számokkal. Mivel  $S$  Putcha-félcsoport, ezért pinden  $r$  pozitív egész számhoz megadható olyan  $u$  pozitív egész szám, amelyre

$$c^u \in Sb^{2^r}S$$

teljesül. Tegyük fel, hogy

$$2^r \geq n.$$

Akkor

$$c^u \in Sb^{2^r}S \subseteq SaS.$$

Hasonlóan,

$$a^v \in ScS$$

valamely  $v$  pozitív egész számmal. Következésképpen  $\eta$  tranzitív.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy  $\eta$  kongruencia  $S$ -en, Tekintsünk olyan  $S$ -beli  $a$  és  $b$  elemeket, amelyekre

$$(a, b) \in \eta$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan  $m, n$  pozitív egész számok és olyan  $x, y, u, v \in S$  elemek, amelyekre

$$a^m = ubv, \quad b^n = xay.$$

Legyen  $s \in S$  tetszőleges. Jelöljön  $k$  olyan pozitív egész számot, amelyre

$$2^k \geq m$$

teljesül. Mivel  $S$  Putcha-félcsoport, és mivel  $sa \in S^1aS^1$ , ezért megadható olyan  $t$  pozitív egész szám, hogy

$$(sa)^t \in Sa^{2^k}S.$$

Így léteznek olyan  $e, f \in S$  elemek, hogy

$$(sa)^t = ea^{2^k}f = ea^ma^{2^k-m}f = eubva^{2^k-m}f.$$

Ebből viszont

$$(sa)^{t+1} = eu(bva^{2^k-m}fs)a \in Sbva^{2^k-m}fsS$$

adódik. Mivel  $S$  Putcha-félcsoport, ezért megadható olyan  $p$  pozitív egész szám, amelyre

$$(sa)^p \in S(bva^{2^k-m}fs)^2S \subseteq SsbS$$

teljesül. Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$(sb)^q \in SsaS$$

valamely  $q$  pozitív egész számmal. Így

$$(sa, sb) \in \eta.$$

Tehát  $\eta$  az  $S$  félcsoporth balkongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy  $\eta$  az  $S$  félcsoporth jobbkongruenciája. Következésképpen  $\eta$  az  $S$  félcsoporth kongruenciája. Mivel

$$(a, a^2) \in \eta$$

és

$$(bc, cb) \in \eta$$

teljesül tetszőleges  $a, b, c \in S$  elemekre, ezért az  $Y = S/\eta$  faktor félcsoporth félháló. Így az  $S$  félcsoporth az  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Z$ )  $\eta$ -osztályok félhálója. Megmutatjuk, hogy az  $S$  félcsoporth  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Z$ ) részfélcsoporthjai arkhimédeszi félcsoporthok. Legyen  $S_\alpha$  tetszőleges  $\eta$ -osztály. Akkor tetszőleges  $a, b \in S_\alpha$  elemekhez megadhatók olyan  $m, n$  pozitív egész számok, valamint olyan  $x, y, u, v \in S$  elemek, hogy

$$xay = b^m, \quad ubv = a^n.$$

Tegyük fel, hogy

$$x \in S_\gamma, \quad y \in S_\delta.$$

Akkor

$$\alpha = \alpha\gamma\delta \in Y,$$

azaz

$$S_\alpha = S_{\alpha\gamma\delta}.$$

Mivel

$$(xayx)a(yxay) = b^{3m}$$

és

$$xayx, yxay \in S_{\alpha\gamma\delta} = S_\alpha,$$

ezért

$$b^{3m} \in S_\alpha a S_\alpha.$$

Hasonlóan,

$$a^{3n} \in S_\alpha b S_\alpha.$$

Így  $S_\alpha$  arkhimédeszi félcsoporth.

Megmutatjuk, hogy  $\eta$  az  $S$  félcsoporth legszűkebb félháló-kongruenciája. Legyen  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth tetszőleges félháló-kongruenciája. Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \eta$  valamely  $a, b \in S$  elemekre, azaz  $xay = b^i$  és  $ubv = a^j$  teljesül valamely  $x, y, u, v \in S$  elemekre és valamely  $i, j$  pozitív egész számokkal. Akkor

$$a \sigma a^j = ubv \sigma ub^{i+1}v = xaybv \sigma xaubvy =$$

$$xa^{j+1}y \sigma xay = b^i \sigma b.$$

Ezért

$$\eta \subseteq \sigma.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporthoz  $Y$  félhálójában  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) arkhimédeszi félcsoporthoz tartoznak. Tegyük fel, hogy

$$b \in S^1 a S^1$$

valamely  $a, b \in S$  elemekre. Akkor

$$xay = b^3$$

valamely  $x, y \in S$  elemekkel. Világos, hogy  $xay = b^3$  és  $xa^2y$  ugyanabban az  $S_\alpha$  osztályban vannak. Mivel  $S_\alpha$  arkhimédeszi félcsoporthoz tartozik, ezért megadható olyan  $k$  pozitív egész szám, amelyre

$$b^{3k} \in S_\alpha xa^2y S_\alpha \subseteq S a^2 S$$

teljesül. Ez viszont annyit jelent, hogy az  $S$  félcsoporthoz Putcha-félcsoporthoz tartozik.  $\square$

**10.16. Következmény** Legyen  $S$  olyan félcsoporthoz, amely előáll  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) arkhimédeszi félcsoporthoz tartozó  $Y$  félhálójaként. Akkor  $S$  tetszőleges  $G$  részcsoporthoz van olyan  $\alpha \in Y$  elem, hogy  $G \subseteq S_\alpha$ .

*Bizonyítás.* Mivel a  $G$  elemei az  $S$  félcsoporthoz ugyanazon  $\eta$ -osztályához tartoznak, ezért az állítás nyilvánvaló.  $\square$

**10.17. Következmény** Minden bal (jobb) Putcha-félcsoporthoz felbontható arkhimédeszi félcsoporthoz félhálójára.

*Bizonyítás.* A 10.14. Lemma és a 10.15. Tétel szerint nyilvánvaló.  $\square$

**10.18. Következmény** Minden kommutatív félcsoporthoz előáll kommutatív arkhimédeszi félcsoporthoz félhálójaként.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  kommutatív félcsoporthoz. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$b \in S^1 a S^1.$$

Akkor megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, melyekre

$$b = xay$$

teljesül. Mivel  $S$  kommutatív, ezért

$$b^2 = (xay)^2 = x^2 a^2 y^2,$$

amiből

$$b^2 \in S^1 a^2 S^1$$

következik. Tehát  $S$  Putcha-félcsoporthoz tartozik. A 10.15. Tétel szerint  $S$  kommutatív arkhimédeszi félcsoporthoz félhálójára.  $\square$

**10.19. Definíció** Egy 0-elemes  $S$  félcsoporthat nil félcsoporthat nevezünk, ha minden  $a$  eleméhez megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, amelyre  $a^n = 0$  teljesül. Egy  $S$  félcsoporthat nilpotens félcsoporthat nevezünk, ha  $S^n = \{0\}$  teljesül valamely  $n$  pozitív egész számra.

Minden nilpotens félcsoport nil, de a fordított állítás általában nem igaz. Érvényes viszont a következő.

**10.20. Lemma** Minden véges nil félcsoport nilpotens.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  véges nil félcsoport. Az  $S$  végeessége miatt megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy  $S$  jobb oldali ideáljainak bármely szigorúan csökkenő lánc nem hosszabb  $n$ -nél. Legyenek

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in S$$

tetszőleges elemek. Az

$$a_1 S^1 \supseteq a_1 a_2 S^1 \supseteq \dots \supseteq a_1 \dots a_n S^1 \supseteq a_1 \dots a_n a_{n+1} S^1$$

lác hossza  $n + 1$ , ezért

$$a_1 \dots a_k S^1 = a_1 \dots a_k a_{k+1} S^1$$

valamely  $1 \leq k \leq n$  egész számra. Így megadható olyan  $x \in S$  elem, amelyre

$$a_1 \dots a_k = a_1 \dots a_k a_{k+1} x$$

teljesül. Ebből

$$a_1 \dots a_k = a_1 \dots a_k (a_{k+1} x)^t$$

következik minden  $t$  pozitív egész számra. Mivel  $S$  nil félcsoport, ezért

$$(a_{k+1} x)^m = 0$$

valamely  $m$  pozitív egész számra, amiből

$$a_1 \dots a_k = 0,$$

és így

$$a_1 \dots a_n = 0$$

adódik. Tehát

$$S^n = \{0\},$$

azaz,  $S$  nilpotens félcsoport. □



Világos, hogy minden nil félcsoporth arkhimédieszi. A nil félcsoporthok fontos szerepet játszanak az idempotens elemet tartalmazó arkhimédieszi félcsoporthok szerkezetének leírásában. Ezt mutatja a következő struktúratétel.

**10.21. Tétel** *Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor idempotens elemes arkhimédieszi félcsoporth, ha idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoporthnak nil félcsoporthtal való ideálbővítése.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan arkhimédieszi félcsoporth, amely tartalmaz egy  $e$  idempotens elemet. Az világos, hogy  $K = SeS$  az  $S$  egy ideálja. Mivel  $S$  arkhimédieszi, ezért  $S$  minden ideálja tartalmazza  $S$  összes idempotens elemét. Érvényes ez  $K$ -ra is. Legyen  $A$  az  $S$  tetszőleges ideálja. Tetszőleges  $a \in A$  elem esetén

$$e \in S^1 a S^1 \subseteq A$$

(mert  $S^1 a S^1$  és  $A$  az  $S$  ideáljai), amiből

$$K \subseteq A$$

következik. Tehát  $K$  az  $S$  félcsoporth magja. Így  $K$  az  $S$  egy minimális ideálja, s ezért  $K$  egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoporth. Az világos, hogy  $S$  a  $K$ -nak az  $S/K$  Rees-féle faktorfélcsoporthtal való ideálbővítése. Mivel  $S$  arkhimédieszi félcsoporth, ezért az  $S/K$  Rees-féle faktorfélcsoporth nil félcsoporth.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporth egy idempotens elemes, egyszerű  $K$  félcsoporthnak egy  $Q$  nil félcsoporthtal való ideálbővítése. Feltelhetjük, hogy  $S = K \cup Q^*$ , ahol  $Q^* = Q \setminus \{0\}$ . Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Mivel  $Q$  nil félcsoporth, ezért megadhatók olyan  $n$  és  $m$  pozitív egész számok, amelyekre

$$a^n, b^m \in K.$$

$K$  egyszerű félcsoporth, ezért

$$a^n \in K b^n K \subseteq S^1 b S^1,$$

azaz  $b$  osztja az  $a$  elem  $n$ -edik hatványát. Hasonlóan,

$$b^m \in S^1 a S^1,$$

Azaz  $a$  osztja a  $b$  elem  $m$ -edik hatványát. Tehát  $S$  arkhimédieszi félcsoporth. □

**10.22. Tétel** *Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor olyan kommutatív arkhimédieszi félcsoporth, amely tartalmaz idempotens elemet, ha előáll egy kommutatív csoporthnak egy kommutatív nil félcsoporthtal való ideálbővítéseként.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan kommutatív arkhimédeszi félcsoporth, amely tartalmaz egy idempotens elemet. A 10.21. Tétel szerint  $S$  egy egyszerű  $K$  félcsoporthnak egy  $N$  nil félcsoporthtal való ideálbővítése. Mivel a kommutatív egyszerű félcsoporth mindegyike csoport (7.4. Tétel), ezért  $K$  egy kommutatív csoport. Mivel  $N$  az  $S$  epimorf képe, ezért  $N$  kommutatív. Tehát  $S$  a  $K$  kommutatív csoportnak az  $N$  kommutatív nil félcsoporthtal való ideálbővítése.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan félcsoporth, amely előáll egy kommutatív  $K$  csoportnak egy kommutatív  $N$  nil félcsoporthtal való ideálbővítéseként. A 10.21. Tétel miatt  $S$  idempotens elemet tartalmazó arkhimédeszi félcsoporth. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Ha  $ab \notin K$  (azaz  $ab \neq 0$  az  $N$ -ben;  $0$  az  $N$  nulleleme), akkor  $ab = ba \neq 0$   $N$ -ben, és így  $ab = ba \notin K$  az  $S$  félcsoporthban. Ha  $ab \in K$ , (azaz  $ab = 0$  az  $N$ -ben), akkor  $ba = 0$  az  $N$ -ben és így  $ba \in K$  az  $S$ -ben, amiből

$$ab = (ab)e = a(be) = a(e(be)) = (ae)(be) = (be)(ae) = b(e(ae)) = b(ae) = (ba)e = ba$$

következik. Tehát

$$ab = ba$$

mindkét esetben. Következésképpen  $S$  kommutatív félcsoporth. □

**10.23. Tétel** *Idempotens elem nélküli kommutatív arkhimédeszi félcsoporthok mindegyikének van nemtriviális csoport-epimorf képe.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy idempotens elem nélküli kommutatív, arkhimédeszi félcsoporth. Legyen  $a \in S$  tetszőleges. Legyen továbbá

$$H_a = \{x \in S : (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) xa^m = a^n\}.$$

Világos, hogy  $a^t \in H_a$  minden pozitív egész  $t$  kitevőre. Egyszerűen igazolható, hogy  $H_a$  reflexív és unitér részfélcsoporthja  $S$ -nek. Mivel  $S$  arkhimédeszi, ezért tetszőleges  $b \in S$  elem esetén van olyan  $x \in S$  elem, hogy  $xb$  megegyezik az  $a$  valamely hatványával, s ezért  $xb \in H_a$ . Ha  $S$  valamely  $a$  elemére  $H_a \neq S$ , akkor az  $S$  félcsoporth  $\mathcal{P}_{H_a}$  főkongruencia szerinti faktorcsoporth nem triviális. Ha  $H_a = S$  volna minden  $S$ -beli  $a$  elemre, akkor  $a \in H_{a^2}$  és így

$$a(a^2)^m = (a^2)^n$$

teljesülne valamely pozitív egész  $n$  és  $m$  kitevőkre. Mivel a bal oldali kitevő páratlan a jobb oldali páros, ezért az  $a$  elem periodikus elem lenne, s ezért  $S$  tartalmazna egy idempotens elemet az 1.29. Tétel szerint. Ez viszont nem lehetséges az  $S$ -re tett feltétel szerint. □

**10.24. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporthra az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

- (1)  $S$  egy egyszerű bal és jobb Putcha-félcsoporth.

(2)  $S$  egy teljesen egyszerű félcsoporth.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy egyszerű bal és jobb Putcha-félcsoporth. Legyen  $x \in S$  tetszőleges elem és  $n \geq 3$  tetszőleges egész szám. Megmutatjuk, hogy  $x^n$  az  $S$  félcsoporth egy reguláris eleme. Mivel  $S$  egyszerű félcsoporth, ezért

$$x^{n-2} \in Sx^nS$$

és ezért megadhatók olyan  $u, v \in S$  elemek, amelyekre

$$x^n = xux^nvx$$

teljesül. Az  $xu$  elemmel balról, a  $vx$  elemmel jobbról szorozgatva ezt az egyenlőséget azt kapjuk, hogy tetszőleges  $m$  pozitív egész szám esetén

$$x^n = (xu)^m x^n (vx)^m.$$

A 10.13. Lemma szerint megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, amelyre

$$(xu)^m \in x^n S$$

és

$$(vx)^m \in Sx^n$$

teljesül. Így

$$x^n \in x^n S x^n,$$

azaz  $x^n$  az  $S$  félcsoporth egy reguláris eleme. A 6.2. Lemma szerint ekkor viszont az  $S$  félcsoporth tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Ezek után megmutatjuk, hogy az  $S$  félcsoporth teljesen egyszerű. Tegyük fel, indirekt módon, hogy  $S$  nem teljesen egyszerű. Akkor a 9.11. Következmény szerint  $S$  tartalmaz egy

$$C = \langle p, q; pq = e \rangle$$

biciklikus félcsoporthot (itt az  $e$  idempotens elem a  $C$  egységeleme). Az világos, hogy

$$qp \in S^1 p.$$

Mivel  $S$  jobb Putcha-félcsoporth, ezért

$$qp = (qp)^m = xp^2$$

valamely  $x \in S^1$  és alkalmas  $m$  pozitív egész számmal. Így

$$xe = xp^2 q^2 = qp q^2 = q^2 \in C,$$

valamint

$$xep^2 = xp^2,$$

és ezért

$$qp = xp^2 = xep^2 = q^2p^2.$$

Ez viszont ellentmondás, mert  $C$  elemeit egyértelműen lehet előállítani  $q^u p^v$  alakban. Tehát  $S$  valóban teljesen egyszerű.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  egy teljesen egyszerű félcsoporth. Akkor a 9.28. Tétel szerint  $S$  izomorf egy  $P$  szendvicsmátrixú,  $G$  csoport feletti Rees-féle  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G; I, J; P)$  mátrixfélcsoporthal. Azonosítsuk  $S$ -et  $\mathcal{M}$ -mel. Legyenek  $(a; i, j)$ ,  $(b; k, n) \in S$  tetszőleges elemek. Akkor

$$(a; i, j)(b; k, n) = (a; i, j)^2((p_{j,i}ap_{j,i})^{-1}p_{j,k}b; i, n) \in (a; i, j)^2S,$$

amiből adódik, hogy  $S$  egy bal Putcha-félcsoporth. Hasonlóan igazolható, hogy  $S$  jobb Putcha-félcsoporth.  $\square$

**10.25. Definíció** Egy  $A$  félcsoporthnak valamely  $Q$  nullelemes félcsoporthtal való  $S$  bővítéséről akkor mondjuk, hogy retrakt bővítés, ha (azonosítva  $A$ -t  $S$  azon ideáljával, amely szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthja izomorf  $Q$ -val) megadható  $S$ -nek  $A$ -ra olyan homomorfizmus, amely  $A$  elemeit fixen hagyja.

**10.26. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporthon a következő feltételek egymással ekvivalensek.

- (1)  $S$  idempotens elemet tartalmazó, arkhimédieszi bal és jobb Putcha-félcsoporth,
- (2)  $S$  egy teljesen egyszerű félcsoporthnak egy nil félcsoporthtal való retrakt bővítése.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy olyan arkhimédieszi bal és jobb Putcha-félcsoporth, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A 10.24. Tétel szerint  $S$  egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű  $K$  félcsoporthnak az  $N = S/K$  nil félcsoporthtal való ideál-bővítése. Az világos, hogy egy bal és jobb Putcha-félcsoporth tetszőleges ideálja is bal és jobb Putcha-félcsoporth. Így  $K$  is jobb és bal Putcha-félcsoporth. Ebből viszont a 10.24. Tétel szerint az következik, hogy  $K$  teljesen egyszerű, s ezért a 9.28. Tétel miatt izomorf egy  $\mathcal{M}(I; G, J; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoporthal. Mivel  $K$  gyengén reduktív a 9.29. Tétel miatt, ezért az 5.20. Tétel szerint  $K$  az  $\Omega(K)$  translációs burok egy ideálja. A 9.30. Tétel szerint

$$\Omega(K) = \{(k, a, h) \in \mathcal{T}_I \times G \times \mathcal{T}_J : (\forall i \in I, j \in J) \ p_{j,k(i)}ap_{(j_0)h,i} = p_{j,k(i_0)}ap_{(j)h,i}\}.$$

Az  $\Omega(K)$  translációs burok két elemének  $(k, a, h)$ -nak és  $(f, b, g)$ -nek a szorzata

$$(k, a, h)(f, b, g) = (k \circ f, ap_{(j_0)h,f(i_0)}b, h \circ g).$$

Továbbá, ha  $(g; i, j) \in K$  és  $(k, a, h) \in \Omega(K)$  tetszőleges elemek, akkor

$$(k, a, h)(g; i, j) = (ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j) \in K$$

és

$$(g; i, j)(k, a, h) = (gp_{j,k(i_0)}a; i, (j)h) \in K.$$

Egy  $(k, a, h) \in \Omega(K)$  bitranszláció akkor és csak akkor belső bitranszláció, ha  $k$  és  $h$  konstans transzformációk. Az 5.21. Tétel szerint  $\Omega(K)$ -nak van olyan  $N = S/K$ -val való  $(S', +)$  ideálbővítése, amelynek  $S$  egy részfélcsoportja. Jelölje  $e$  az  $\Omega(K)$  egységelemét. Akkor

$$\phi : x \mapsto x + e$$

$S'$ -nek  $\Omega(K)$ -ra való retrakt homomorfizmusa. Az  $S'$  félcsoporton érvényes művelet  $\phi$  által meg van határozva: Ha  $x, y \in N^* = N - \{0\}$  és  $s, t \in \Omega(K)$ , akkor  $x + t = \phi(x)t$ ,  $t + x = t\phi(x)$ ,  $s + t = st$ ; ha  $xy \neq 0$   $N$ -ben, akkor  $x + y = xy$ , ha  $xy = 0$   $N$ -ben akkor viszont  $x + y = \phi(x)\phi(y)$ . Megmutatjuk, hogy  $\phi$ -nek  $S$ -re való leszűkítése  $S$ -nek  $K$ -ra való retrakt homomorfizmusa. Elegendő azt megmutatni, hogy minden  $s \in N^*$  esetén  $\phi(s) \in K$ , azaz  $\phi(s)$  a  $K$  egy belső bitranszlációja. Legyen  $s$  az  $N^*$  egy tetszőleges eleme, és legyen

$$\phi(s) = (k, a, h) \in \Omega(K).$$

Mivel  $N$  nil félcsoport, ezért

$$s^n \in K$$

valamely  $n$  pozitív egész számmal. Így

$$(k, a, h)^n = (k_0, b, h_0).$$

Legyen

$$(g; i, j) \in K$$

tetszőleges elem. Mivel  $S$  egy bal Putcha-félcsoport, ezért a 10.13. Lemma szerint megadható olyan  $m$  pozitív egész szám és olyan  $x \in S$  elem, hogy

$$(s(g; i, j))^m = s^n x.$$

Legyen

$$\phi(x) = (k_x, b_x, h_x) \in \Omega(K).$$

Akkor

$$\begin{aligned} & ((ap_{(j_0)h,i}gp_{j,k(i)})^{m-1}ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j) = (ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j)^m \\ & = ((k, a, h)(g; i, j))^m = (\phi(s)(g; i, j))^m = (s(g; i, j))^m = \phi((s(g; i, j))^m) = \\ & \phi(s^n x) = (k, a, h)^n \phi(x) = (k_0, b, h_0)(k_x, b_x, h_x) = (k_0, bp_{h_0,k_x(i_0)}b_x, (h_0)h_x). \end{aligned}$$

Ebből

$$k(i) = k_0$$

adódik minden  $i \in I$  indexre, azaz  $k$  konstans transzformáció. Az  $S$ -re vonatkozó jobb Putcha feltétel felhasználásával, hasonlóan bizonyítható, hogy  $h$  is konstans transzformáció. Így

$$\phi(s) \in K.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy (1)-ből következik (2).

Mivel egy teljesen egyszerű félcsoporth arkhimédieszi jobb és bal Putcha-félcsoporth, ezért könnyen ellenőrizhető, hogy (2)-ből következik (1).  $\square$

### 10.3. Félcsoporthok erős félhálójá

**10.27. Definíció** Legyen  $Y$  egy félháló, és legyenek  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) tetszőleges félcsoporthok úgy, hogy  $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$  minden  $\alpha \neq \beta$  ( $\alpha, \beta \in Y$ ) esetén. Tegyük fel, hogy minden  $\alpha \geq \beta$  ( $\alpha, \beta \in Y$ ) esetén van olyan  $(\cdot)\phi_{\alpha,\beta}$  homomorf leképezése  $S_\alpha$ -nak  $S_\beta$ -ba, hogy az alábbiak teljesülnek

$$(1) \quad \phi_{\alpha,\alpha} = id_{S_\alpha}, \quad (\alpha \in Y),$$

$$(2) \quad \phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma} \quad \text{minden } \alpha \geq \beta \geq \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in Y) \text{ esetén.}$$

Az  $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  halmazon definiáljunk egy  $*$  műveletet a következőképpen. Ha  $a \in S_\alpha$  és  $b \in S_\beta$ , akkor legyen

$$a * b = (a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\phi_{\beta,\alpha\beta},$$

ahol a jobb oldalon  $(a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}$  és  $(b)\phi_{\beta,\alpha\beta}$  között az  $S_{\alpha\beta}$  félcsoporthbeli műveletet kell tekinteni. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $S$  erre a műveletre nézve félcsoporthot alkot, és  $S$  az  $S_\alpha$  félcsoporthok  $Y$  félhálójá. Ezt a félcsoporthot az  $S_\alpha$  félcsoporthok erős félhálójának nevezzük és  $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$ -val jelöljük. A  $\{\phi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \geq \beta}$  leképezés-családot az  $S$ -en értelmezett műveletet meghatározó homomorfizmusok tranzitív rendszerének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy  $\alpha > \beta$  esetén  $S_\alpha \cup S_\beta$  retrakt bővítése  $S_\beta$ -nak.

Egy  $S$  félcsoporthot Clifford-félcsoporthnak nevezünk, ha  $S$  reguláris és idempotensei  $S$  minden elemével felcserélhetőek. A 6.20. Tétel szerint minden Clifford-félcsoporth inverz félcsoporth. A következő tétel a Clifford-félcsoporthok szerkezetéről is fontos információt ad.

**10.28. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoporth esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:

$$(1) \quad S \text{ részcsoportok félhálójá.}$$

(2)  $S$  részcsoportok erős félhálójára.

(3)  $S$  Clifford-félcsoport.

*Bizonyítás.* Világos, hogy az (1) és (2) feltételek ekvivalenciájához elegendő csak azt bizonyítani, hogy (1)-ből következik (2). Legyen az  $S$  félcsoport a  $G_\alpha$  részcsoportok  $Y$  félhálójára ( $\alpha \in Y$ ). Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  tetszőleges  $Y$ -beli elemek az  $\alpha \geq \beta$  feltétellel. Ha  $e_\beta$  jelöli  $G_\beta$  egységelemét, akkor

$$\varphi_{\alpha,\beta} : a \mapsto ae_\beta \quad (a \in G_\alpha)$$

a  $G_\alpha$  részcsoportnak a  $G_\beta$  részcsoportba való leképezése. Mivel tetszőleges  $a, b \in G_\alpha$  esetén

$$(ab)\varphi_{\alpha,\beta} = (ab)e_\beta = a(be_\beta) = a(e_\beta be_\beta) = (ae_\beta)(be_\beta) = (a)\varphi_{\alpha,\beta}(b)\varphi_{\alpha,\beta},$$

ezért  $\varphi_{\alpha,\beta}$  homomorfizmus. Az világos, hogy

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = id_{G_\alpha}$$

minden  $\alpha \in Y$ -ra. Legyenek  $\alpha, \beta, \gamma \in Y$  tetszőleges elemek úgy, hogy  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ . Akkor

$$e_\beta e_\gamma = (e_\beta)\varphi_{\beta,\gamma}$$

miatt  $e_\beta e_\gamma$  a  $G_\gamma$  egységeleme, azaz

$$e_\beta e_\gamma = e_\gamma.$$

Ezért tetszőleges  $a \in G_\alpha$  esetén

$$(a)\varphi_{\alpha,\gamma} = ae_\gamma = ae_\beta e_\gamma = (a)\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\beta,\gamma}.$$

Továbbá, tetszőleges  $\alpha, \beta \in Y$  és tetszőleges  $a \in G_\alpha, b \in G_\beta$  esetén

$$ab = (ab)e_{\alpha\beta} = (ae_{\alpha\beta})(be_{\alpha\beta}) = (a)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\varphi_{\beta,\alpha\beta}.$$

Ezért  $S$  a  $G_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) részcsoportok erős félhálójára.

A következőkben megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy az  $S$  félcsoport  $G_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) csoportok erős félhálójára. Az világos, hogy  $S$  minden eleme reguláris. Az  $S$  idempotens elemei a  $G_\alpha$  csoportok egységelemei. Ha  $e_\alpha \in G_\alpha$  idempotens elem  $b_\alpha (\in G_\beta)$  pedig tetszőleges elem  $S$ -ben, akkor

$$\begin{aligned} e_\alpha b_\beta &= (e_\alpha)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = \\ &= (b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = ((b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta})e_{\alpha\beta} = (b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta}(e_\alpha)\phi_{\alpha,\alpha\beta} = b_\beta e_\alpha. \end{aligned}$$

Tehát  $S$  Clifford-félcsoport. A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy (3)-ból következik (1). Legyen  $S$  egy Clifford-félcsoport. Akkor (definíció szerint)  $S$  reguláris és  $S$  idempotensei felcserélhetőek  $S$  bármelyik elemével. Legyen  $a \in S$  tetszőleges elem. Mivel  $S$  reguláris, ezért van  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, amelyre  $axa = a$  teljesül. A 6.2. Lemma szerint  $ax$  és  $xa$  idempotens elemek. Így ezek az elemek az  $S$  tetszőleges elemével felcserélhetőek, azaz benne vannak az  $S$  félcsoport  $Z(S)$  centrumában. Emiatt

$$xa = xaxa = x(ax)a = (ax)xa = ax(xa) = a(xa)x = axax = ax.$$

Így az  $S$  félcsoport teljesen reguláris (lásd a 6.15. Definíciót). A 6.16. Tétel szerint  $S$  előáll csoportok úniójaként. Az 1.42. Tétel szerint  $S$  előáll diszjunkt  $G_i$  ( $i \in I$ ) részcsoporthoz úniójaként. Megmutatjuk, hogy  $S$  a  $G_i$  ( $i \in I$ ) csoportok félhálójára. Jelölje  $e_i$ , illetve  $e_j$  a  $G_i$ , illetve  $G_j$  ( $i, j \in I$ ) részcsoporthoz egységelemét. Mivel  $e_i, e_j \in Z(S)$ , ezért

$$e_i e_j = e_j e_i.$$

Továbbá,

$$(e_i e_j)^2 = e_i^2 e_j^2 = e_i e_j,$$

azaz van olyan  $G_k$  ( $k \in I$ ) részcsoporthoz, hogy  $e_i e_j = e_j e_i$  a  $G_k$  egységeleme. Jelölje ezt az egységelemet  $e_k$ . Ha  $a \in G_i$  és  $b \in G_j$  tetszőleges elemek, akkor ( $e_i, e_j \in Z(S)$  miatt)

$$(ab)e_k = (ab)(e_i e_j) = (ae_i)(be_j) = ab$$

és (az előzőhöz hasonlóan)

$$e_k(ab) = ab, (ba)e_k = ba, e_k(ba) = ba.$$

Tehát

$$ab, ba \in e_k S \cap S e_k = e_k S e_k.$$

Így

$$G_i G_j, G_j G_i \subseteq e_k S e_k.$$

Jelölje  $a^{-1}$ , illetve  $b^{-1}$  az  $a \in G_i$ , illetve  $b \in G_j$  elem  $G_i$ , illetve  $G_j$  csoportbeli inverzét. Az előzőek szerint

$$b^{-1} a^{-1}, a^{-1} b^{-1} \in e_k S e_k.$$

Igy

$$(ab)(b^{-1} a^{-1}) = a e_j a^{-1} = e_j (a a^{-1}) = e_i e_j = e_k$$

és (az előzőhöz hasonlóan)

$$(b^{-1} a^{-1})(ab) = e_k, (ba)(a^{-1} b^{-1}) = e_k, (a^{-1} b^{-1})(ba) = e_k.$$



Az 1.41. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy

$$ab, ba \in G_{e_k},$$

ahol  $G_{e_k}$  jelöli az  $S$  félcsoporth azon maximális részcsoporthját, amelyben  $e_k$  az egységelem. Az világos, hogy

$$G_{e_k} = G_k.$$

Igy

$$ab, ba \in G_k.$$

Következésképpen

$$G_i G_j, G_j G_i \subseteq G_k.$$

Ebből már következik, hogy az  $S$  félcsoporth a  $G_i$  ( $i \in I$ ) részcsoporthok félhálója. □

## 10.4. Kötegek

Az előzőekben már definiáltuk a köteg fogalmát (1.38. Definíció). A kötegek vizsgálatában fontos szerepet játszanak a derékszögű kötegek. Lássuk ezek egyik definícióját!

**10.29. Definíció** *Legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges nem üres halmazok. Az  $A \times B$  Descartes-szorzon definiáljunk egy műveletet a következőképpen: Ha  $(a_1, b_1)$  és  $(a_2, b_2)$  tetszőleges  $A \times B$ -beli elemek, akkor legyen  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel egy asszociatív műveletet definiáltunk  $A \times B$ -n. Az így definiált félcsoporthot derékszögű kötegnek nevezzük.*

A következő tétel a derékszögű kötegek jellemzésével foglalkozik. Szerepet játszik benne a félcsoporthok (külső) direkt szorzata. Valamely  $A$  és  $B$  félcsoporthok (külső) direkt szorzatán értjük azt a félcsoporthot, melynek alaphalmaza az  $A \times B$  Descartes-szorzat, és tetszőleges  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$  elempárok esetén  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ .

**10.30. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporthon a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

- (1)  $S$  derékszögű köteg;
- (2)  $S$  sehol sem kommutatív (minden  $a, b \in S$  esetén  $ab = ba$ -ból  $a = b$  következik);
- (3)  $S$  köteg és teljesíti az  $aba = a$  azonosságot;
- (4)  $S$  köteg és teljesíti az  $abc = ac$  azonosságot;
- (5)  $S$  egy balzéró és egy jobbzeró félcsoporth (külső) direkt szorzata.

*Bizonyítás.* Az nyilvánvaló, hogy (1)-ből következik (2). Megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3): Legyen  $S$  sehol sem kommutatív félcsoport. Tetszőleges  $a \in S$  elem esetén  $a$  és  $a^2$  egymással felcserélhetők, ezért  $a = a^2$ , azaz  $S$  köteg. Mivel tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén

$$a(aba) = aba = (aba)a,$$

ezért

$$a = aba.$$

Így  $S$  teljesíti (3)-at.

Most belátjuk, hogy (3)-ból következik (4): Legyenek  $a, b, c \in S$  tetszőleges elemek. Akkor

$$abc = (aca)(bc) = a(cabc) = ac.$$

Tehát  $S$  teljesíti (4)-et.

Megmutatjuk, hogy (4)-ből következik (5): Tegyük fel, hogy  $S$  teljesíti (4)-t. Legyen  $a \in S$  tetszőleges elem. Legyen  $L = Sa$  és  $R = aS$ . Akkor  $sata = sa$  és  $asat = at$  ( $s, t \in S$ ) miatt  $L$  egy balzéró,  $R$  pedig egy jobbzéró félcsoport. Megmutatjuk, hogy  $S \cong L \times R$ . Az  $(sa, at) \in L \times R$  elemmel legyen  $\phi((sa, at)) = sat$ . Mivel minden  $s \in S$  elemre  $s = sas$ , ezért  $\phi$  szürjektív. Megmutatjuk, hogy  $\phi$  injektív. Tegyük fel, hogy  $\phi((sa, at)) = \phi((ua, av))$  valamely  $s, t, u, v \in S$  elemekre. Akkor  $sat = uav$  és így

$$sa = sata = uava = ua,$$

valamint

$$at = asat = auav = av.$$

Tehát

$$(sa, at) = (ua, av),$$

amely azt eredményezi, hogy  $\phi$  injektív. Mivel

$$\phi((sa, at)(ua, av)) = \phi((sa, av)) = sav$$

és

$$\phi((sa, at))\phi((ua, av)) = (sat)(uav) = sav,$$

ezért  $\phi$  homomorfizmus. Tehát  $\phi$  egy izomorf leképezése az  $L \times R$  direkt szorzatnak az  $S$ -re. Már csak annak igazolása van hátra, hogy (5)-ből következik (1). De ez a derékszögű köteg definíciója alapján nyilvánvaló.  $\square$

**10.31. Tétel** *Tetszőleges  $S$  köteg esetén*

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : a = aba \text{ és } b = bab\}$$

*az  $S$  legszűkebb félháló-kongruenciája.*

*Bizonyítás.* Az nyilvánvaló, hogy  $\sigma$  reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy  $\sigma$  tranzitív. Tegyük fel, hogy  $a\sigma b$  és  $b\sigma c$  teljesül az  $S$  köteg valamely  $a, b, c$  elemeire. Akkor

$$a = aba = a(bcb)a = ab(cba)(cba) = a(bcb)a(cba) = (aba)(cba) = acba$$

és, hasonlóan,

$$a = abca.$$

Ezekből viszont

$$a = (acba)(abca) = (ac)(bab)(ca) = a(cbc)a = aca$$

adódik. Hasonló módon bizonyítható, hogy

$$c = cac.$$

Így  $a\sigma c$ . Tehát  $\sigma$  tranzitív.

Megmutatjuk, hogy  $\sigma$  jobbkongruencia. Legyenek  $a, b, c \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy  $a\sigma b$ . Akkor

$$(ac)(abc)(ac) = (ac)(abc)(abac) = a(cab)(cab)(ac) = a(cab)(ac)$$

$$= (ac)(abac) = (ac)(ac) = ac,$$

$$(abc)(ac)(abc) = (ab)(ca)(ca)(bc) = (ab)(ca)(bc) = (abc)(abc) = abc.$$

Így  $ac\sigma abc$ . Továbbá,

$$(bc)(abc)(bc) = (bc)(abc) = (babc)(abc) = b(abc)(abc) = (bab)c = bc,$$

és

$$(abc)(bc)(abc) = (abc)(abc) = abc.$$

Így  $bc\sigma abc$ . Mivel  $\sigma$  tranzitív, ezért  $ac\sigma bc$ . Tehát  $\sigma$  jobbkongruencia. Hasonlóan bizonyítható, hogy  $\sigma$  balkongruencia. Ezért  $\sigma$  kongruencia. Mivel

$$ab = (ab)(ba)(ab)$$

és

$$ba = (ba)(ab)(ba),$$

ezért  $ab\sigma ba$ . Így  $S/\sigma$  kommutatív köteg, azaz félháló.

Legyen  $\tau$  az  $S$  köteg tetszőleges félháló-kongruenciája. Akkor az  $a\sigma b$  feltételt teljesítő  $a, b \in S$  elemekre

$$a = aba\tau bab = b$$

következik. Tehát  $\sigma \subseteq \tau$ , azaz  $\sigma$  az  $S$  köteg legszűkebb félháló-kongruenciája.  $\square$

**10.32. Következmény** Minden köteg derékszögű kötegek félhálója.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges köteg. A 10.31. Tétel szerint

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : a = aba \text{ és } b = bab\}$$

az  $S$  legszűkebb félháló-kongruenciája. Ha  $A$  az  $S$  egy  $\sigma$ -osztálya, akkor bármely  $a, b \in A$  esetén  $(a, b) \in \sigma$  miatt  $a = aba$ . Tehát  $A$ -ban teljesül a 10.30. Tétel (3)-as feltételében szereplő azonosságot, s ezért  $A$  derékszögű köteg. Tehát az  $S$  köteg derékszögű kötegek félhálója.  $\square$

**10.33. Tétel** Legyen  $Y$  félháló. Tetszőleges  $\gamma \in Y$  elem esetén legyenek  $L_\gamma$  és  $R_\gamma$  tetszőleges nem üres halmazok úgy, hogy  $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$ , ha  $\delta \neq \gamma$ . Legyen  $S_\gamma = L_\gamma \times R_\gamma$ . Minden  $\gamma \geq \delta$  esetén legyenek adottak valamely  $\alpha_{\delta, \gamma} : S_\gamma \rightarrow \mathcal{T}(L_\delta)$  és  $\beta_{\gamma, \delta} : S_\gamma \rightarrow \mathcal{T}(R_\delta)$  függvények. Jelölje  $\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}$ , illetve  $\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}$  az  $(i, \mu) \in S_\gamma$  elemhez az  $\alpha_{\delta, \gamma}$ , illetve  $\beta_{\gamma, \delta}$  által rendelt  $\mathcal{T}(L_\delta)$ -beli, illetve  $\mathcal{T}(R_\delta)$ -beli elemet.

Tegyük fel, hogy minden  $\gamma, \delta \in Y$  és minden  $(i, \mu) \in S_\gamma$ ,  $(j, \nu) \in S_\delta$  elemekre teljesülnek a következők.

- (1)  $[\alpha_{\gamma, \gamma}^{(i, \mu)}] = i$ ,  $[\beta_{\gamma, \gamma}^{(i, \mu)}] = \mu$ ,
- (2)  $[\alpha_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)} \alpha_{\gamma, \delta}^{(j, \nu)}] = k$ ,  $[\beta_{\gamma, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\delta, \gamma}^{(j, \nu)}] = \xi$  valamely  $(k, \xi) \in S_{\gamma\delta}$  elemre,
- (3) a (2) jelöléseit használva, minden  $\epsilon < \gamma\delta$  esetén  $\alpha_{\epsilon, \gamma\delta}^{(k, \xi)} = \alpha_{\epsilon, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\epsilon, \delta}^{(j, \nu)} \beta_{\gamma\delta, \epsilon}^{(k, \xi)} = \beta_{\gamma, \epsilon}^{(i, \mu)} \beta_{\delta, \epsilon}^{(j, \nu)}$ .

Legyen  $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ . A fenti jelöléseket használva, definiáljunk egy  $*$  műveletet  $S$ -en a következőképpen  $(i, \mu) * (j, \nu) = (k, \xi)$ . Akkor  $(S, *)$  köteg. Fordítva, minden köteget így lehet konstruálni.

*Bizonyítás.* Annak bizonyítása, hogy  $(S, *)$  köteg, technikai jellegű. Ahhoz, hogy minden köteget a tételben részletezett módon lehet konstruálni, tekintsünk egy tetszőleges  $S$  köteget. A 10.32. Következmény szerint  $S$  előáll  $S_\gamma$  derékszögű kötegek  $Y$  félhálójaként. A 10.30. Tétel miatt minden  $\gamma \in Y$  esetén vannak olyan  $L_\gamma$  balzéró és  $R_\gamma$  jobbzeró félcsoporthok, hogy  $S_\gamma \cong L_\gamma \times R_\gamma$ .  $S_\gamma$ -t azonosítani fogjuk  $L_\gamma \times R_\gamma$ -val, és  $S$ -et  $S = \cup_{\gamma \in Y} (L_\gamma \times R_\gamma)$  formában tekintjük. Természetesen feltehetjük, hogy  $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$ , ha  $\gamma \neq \delta$ .

Legyenek  $\gamma$  és  $\delta$  tetszőleges  $Y$ -beli elemek úgy, hogy  $\gamma \geq \delta$ . Legyen  $(i, \mu) \in S_\gamma$  tetszőleges. Ha  $(j, \nu) \in S_\delta$ , akkor  $(i, \mu)(j, \nu) = (k, \xi) \in S_\delta$ , és így

$$(k, \xi) = (i, \mu)(j, \nu)[(i, \mu)(j, \nu)](j, \nu) = (k, \xi)(j, \nu) = (k, \nu),$$

és ezért  $\xi = \nu$ . Ha  $(j, \sigma) \in S_\delta$ , akkor

$$(i, \mu)(j, \sigma) = (i, \mu)[(j, \nu)(j, \sigma)] = [(i, \mu)(j, \nu)](j, \sigma) = (k, \nu)(j, \sigma) = (k, \sigma)$$

amely azt mutatja, hogy  $k$  nem függ a  $\nu$ -tól. Így definiálhatunk egy  $\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}$  függvényt  $L_\delta$ -n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(i, \mu)(j, \nu) = (\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)} j, \nu) \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, (j, \nu) \in S_\delta, \gamma \geq \delta).$$

Ennek duálisaként, definiálhatunk egy  $\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}$  függvényt  $R_\delta$ -n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(j, \nu)(i, \mu) = (j, \nu \beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}) \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, (j, \nu) \in S_\delta, \gamma \geq \delta).$$

Ez lehetővé teszi, hogy definiáljuk a következő függvényeket.

$$\alpha_{\delta, \gamma} : (i, \mu) \mapsto \alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}, \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, \gamma \geq \delta)$$

$$\beta_{\gamma, \delta} : (i, \mu) \mapsto \beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}, \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, \gamma \geq \delta).$$

(1) közvetlenül következik  $\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}$  és  $\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}$  definíciójából. Legyen  $(i, \mu) \in S_\gamma$  és  $(j, \nu) \in S_\delta$ . Akkor  $(i, \mu)(j, \nu) = (k, \xi)$  valamely  $(k, \xi) \in S_{\gamma\delta}$ -ra. Legyen  $\epsilon \leq \gamma\delta$  és legyen  $(l, \eta) \in S_\epsilon$ . Akkor

$$(\alpha_{\epsilon, \gamma\delta}^{(k, \xi)} l, \eta) = (k, \xi)(l, \eta) = (i, \mu)(j, \nu)(l, \eta) = (\alpha_{\epsilon, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\epsilon, \delta}^{(j, \nu)} l, \eta)$$

és így

$$\alpha_{\epsilon, \gamma\delta}^{(k, \xi)} = \alpha_{\epsilon, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\epsilon, \delta}^{(j, \nu)}.$$

Ebből következik a (2) formula; az  $\epsilon = \gamma\delta$  választás mellett pedig az (1) formula. Ugyanebből adódik (3) első képlete, ha feltesszük, hogy  $\epsilon < \gamma\delta$ . A (2) és (3) második képlete az első képletek duálisai. A (2)-ből és  $(k, \xi)$  definíciójából adódik, hogy  $(i, \mu)(j, \nu) = (i, \mu) * (j, \nu)$ . Ezzel a tételt bebizonyítottuk.  $\square$

## Feladatok

**10.1.** (Megoldás: 17.30.) Egy  $S$  félcsoporth valamely  $F$  részfélcsoporthját filternek nevezzük, ha  $S$  tetszőleges  $a, b$  elemei esetén  $ab \in F$ -ből  $a, b \in F$  következik. Legyen  $J$  egy  $S$  félcsoporth filtereinek valamely nem üres részhalmaza. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma_J = \{(a, b) \in S \times S : (\forall F \in J) \ a, b \in F \text{ vagy } a, b \notin F\}$$

az  $S$  félcsoporth egy félháló-kongruenciája.

**10.2.** (Megoldás: 17.31.) Mutassuk meg, hogy egy  $S$  félcsoporth tetszőleges félháló-kongruenciája az előző feladatban szereplő módon konstruálható!

**10.3.** (Megoldás: 17.32.) A 10.8. Következmény felhasználása nélkül mutassuk meg, hogy minden arkhimédeszi félcsoporth félháló-felbonthatatlan.

**10.4.** (Megoldás: 17.33.) Egy  $S$  félcsoporthot gyengén kommutatív félcsoporthnak nevezünk, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemekhez megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek és olyan  $n$  pozitív egész szám, amelyekre  $(ab)^n = xa = by$  teljesül. Mutassuk meg, hogy gyengén kommutatív  $S$  félcsoporth előáll arkhimédeszi félcsoporthok félhálójaként!

**10.5.** (Megoldás: 17.34.) Mutassuk meg, hogy egy gyengén kommutatív félcsoporth arkhimédeszi komponensei gyengén kommutatívak!

# 11. fejezet

## Félcsoportok szubdirekt szorzata

**11.1. Definíció** Akkor mondjuk, hogy egy  $S$  félcsoport az  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoportok szubdirekt szorzata, ha az  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoportok direkt szorzatának van olyan  $S$ -sel izomorf  $T$  részfélcsoportja, hogy a direkt szorzat  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoportokra való projekcióinak  $T$ -re való leszűkítése szürjektív.

**11.2. Tétel** Legyen  $S$  tetszőleges félcsoport. Ha  $\alpha_i$  ( $i \in I$ ) az  $S$  félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre  $\cap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$  teljesül, akkor  $S$  az  $S/\alpha_i$  ( $i \in I$ ) faktorfélcsoportok szubdirekt szorzata. Fordítva, ha  $S$  az  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoportok szubdirekt szorzata, akkor megadhatók  $S$ -nek olyan  $\alpha_i$  ( $i \in I$ ) kongruenciái, amelyekre  $\cap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$ , valamint  $S_i \cong S/\alpha_i$  ( $i \in I$ ) teljesül.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges félcsoport, valamint  $\alpha_i$  ( $i \in I$ ) az  $S$  félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre  $\cap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$  teljesül. Jelölje  $S_i$  ( $i \in I$ ) az  $S/\alpha_i$  faktorfélcsoportot. Képezzük a  $\prod_{i \in I} S_i$  direkt szorzatot. Jelölje  $\varphi$   $S$ -nek a direkt szorzatba való következő leképezését: tetszőleges  $s \in S$  elem esetén legyen  $\varphi(s)$  a direkt szorzat azon eleme, amely tetszőleges  $i \in I$  indexhez az  $S_i = S/\alpha_i$  félcsoport azon elemét, azaz  $S$  azon  $\alpha_i$  szerinti osztályát rendeli, amely az  $s$  elemet tartalmazza. Képletszerűen:

$$(\varphi(s))(i) = [s]_{\alpha_i}.$$

Az világos, hogy  $\varphi$  egyértelmű leképezés. Mivel tetszőleges  $s, t \in S$  esetén

$$(\varphi(st))(i) = [st]_{\alpha_i} = [s]_{\alpha_i}[t]_{\alpha_i} = (\varphi(s))(i)(\varphi(t))(i) = ((\varphi(s)(\varphi(t)))(i),$$

ezért  $\varphi$  az  $S$  félcsoportnak a direkt szorzatba való homomorf leképezése. A következőkben megmutatjuk, hogy  $\varphi$  injektív. Tegyük fel, hogy

$$\varphi(s) = \varphi(t)$$

valamely  $s, t \in S$  elemekre. Akkor minden  $i \in I$  indexre

$$(\varphi(s))(i) = (\varphi(t))(i),$$

azaz

$$[s]_{\alpha_i} = [t]_{\alpha_i}$$

teljesül, amiből az adódik, hogy

$$(s, t) \in \cap_{i \in I} \alpha_i.$$

Mivel  $\cap_{i \in I} \alpha_i = id_S$ , ezért

$$s = t.$$

Tehát  $\varphi$  valóban injektív. Jelölje  $S^*$  az  $S$  félcsoporth  $\varphi$  szerinti képét. Legyen  $i \in I$  tetszőleges index. Tekintsük az  $S_i = S/\alpha_i$  félcsoporth  $[s]_{\alpha_i}$  elemét. A  $\varphi(s) \in S^*$  elemnek a  $\pi_i$  projekció szerinti képe  $(\varphi(s))(i) = [s]_{\alpha_i}$ . Így a  $\pi_i$  projekciónak az  $S^*$  félcsoporthra való leszűkítése szürjektív. Következésképpen  $S^*$  és így  $S$  az  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoporthok szubdirekt szorzata.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoporth előáll bizonyos  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoporthok szubdirekt szorzataként. Akkor van az  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoporthok direkt szorzatának olyan  $S^*$  részfélcsoporthja, hogy  $S$  izomorf  $S^*$ -gal és a  $\pi_i$  ( $i \in I$ ) projekcióknak  $S^*$ -ra való leszűkítései szürjektívek minden  $i \in I$  index esetén. Azonosítsuk  $S$ -et  $S^*$ -gal, s jelölje  $\alpha_i$  ( $i \in I$ ) a  $\pi_i$  homomorfizmus  $S$ -re való leszűkítésének magját. Tegyük fel, hogy

$$(s, t) \in \cap_{i \in I} \alpha_i.$$

Akkor minden  $\pi_i$  ( $i \in I$ ) esetén

$$\pi_i(s) = \pi_i(t)$$

teljesül, amiből az  $s = t$  egyenlőség következik. Tehát  $\cap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$ .  $\square$

**11.3. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot szubdirekt irreducibilis félcsoporthnak nevezünk, ha  $S$  bárhogy is áll elő  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoporthok szubdirekt szorzataként, van legalább egy olyan  $j \in I$  index, melyhez tartozó projekcióhomomorfizmus  $S$ -et izomorf módon képezi  $S_j$ -re.

**11.4. Tétel** Egy  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha kongruenciáinak tetszőleges  $\alpha_i$ ,  $i \in I$  családja esetén  $\cap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$  akkor és csak akkor teljesül, ha van legalább egy  $j \in I$  index, hogy  $\alpha_j = \iota_S$ .

*Bizonyítás.* A 11.2. Tétel alapján nyilvánvaló.  $\square$

A szubdirekt irreducibilis félcsoporthok szerepét mutatja a következő tétel:

**11.5. Tétel (Birkhoff-tétel)** Minden félcsoporth felbontható szubdirekt irreducibilis félcsoporthok szubdirekt szorzatára.



*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges félcsoporth. Ha  $S$  egyelemű, akkor a tétel állítása nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy  $|S| \geq 2$ . Az  $S$  félcsoporth tetszőleges, egymástól különböző  $a$  és  $b$  elemei esetén jelölje  $P_{a,b}$  az  $S$  félcsoporth mindazon  $\Phi$  kongruenciáinak halmazát, amelyre  $(a,b) \notin \Phi$  teljesül.  $P_{a,b} \neq \emptyset$ , mert  $\iota_S \in P_{a,b}$ . A  $P_{a,b}$  halmaz a relációk tartalmazására nézve részben rendezett. Legyen

$$\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \dots \subseteq \alpha_n \subseteq \dots$$

$P_{a,b}$ -beli kongruenciák egy monoton növekedő sorozata. Az világos, hogy

$$\cup_{i=1}^n \alpha_i \in P_{a,b}.$$

Tehát  $P_{a,b}$  minden részláncának van  $P_{a,b}$ -ben felső korlátja. A Zorn-Lemma miatt  $P_{a,b}$ -ben van maximális elem. Jelöljön  $\psi(a,b)$  egy maximális elemet.

Következő lépésként megmutatjuk, hogy az  $S/\psi(a,b)$  faktorfélcsoporthok minden  $(a,b) \in S \times S$   $a \neq b$  elempár esetén szubdirekt irreducibilisek. Legyenek  $\alpha_i/\psi(a,b)$  ( $i \in I$ ) az  $S/\psi(a,b)$  faktorfélcsoporth olyan kongruenciái, amelyekre

$$\cap_{i \in I} (\alpha_i/\psi(a,b)) = \iota_{S/\psi(a,b)}$$

teljesül. A 2.30. Tétel szerint  $S$ -ben

$$\cap_{i \in I} \alpha_i = \psi(a,b).$$

Mivel  $\psi(a,b)$  maximális  $S$  azon  $\alpha$  kongruenciái között, melyekre  $(a,b) \notin \alpha$  teljesül, ezért van olyan  $j \in I$  index, hogy

$$\alpha_j = \psi(a,b),$$

azaz

$$\alpha_j/\psi(a,b) = \iota_{S/\psi(a,b)}.$$

A 11.4. Tétel miatt ez éppen azt jelenti, hogy az  $S/\psi(a,b)$  faktorfélcsoporth szubdirekt irreducibilis.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy az  $S$  félcsoporth előáll az  $S/\psi(a,b)$  ( $a,b \in S, a \neq b$ ) faktorfélcsoporthok szubdirekt szorzataként. A 11.2. Tétel miatt elegendő megmutatni, hogy

$$\cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b) = id_S.$$

Legyenek  $x, y \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$x \neq y.$$

Akkor

$$(x,y) \notin \psi(x,y),$$

amiből

$$(x,y) \notin \cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b)$$

következik. Tehát

$$\cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b) = id_S. \quad \square$$

## 11.1. Szubdirekt irreducibilis félcsoporthok

**11.6. Tétel** *Tetszőleges  $S$  félcsoporthra a következő három feltétel egymással ekvivalens.*

- (1)  $S$  szubdirekt irreducibilis.
- (2)  $S^1$  szubdirekt irreducibilis.
- (3)  $S^0$  szubdirekt irreducibilis.

*Bizonyítás.* Mivel az egyelemű és kételemű félcsoporthok szubdirekt irreducibilisek, feltehetjük, hogy  $|S| \geq 2$ . Feltehetjük továbbá azt is, hogy  $S^1 \neq S$  és  $S^0 \neq S$ . Először is megjegyezzük, hogy ha  $\alpha$  egy  $S^1$  félcsoporth olyan kongruenciája, melynek  $S$ -re való leszűkítésére  $\alpha^* = \iota_S$  teljesül, akkor  $\alpha = \iota_{S^1}$ . Ugyanis, ha  $a \in S$ -re  $(a, 1) \in \alpha$  teljesül, akkor minden  $b \in S$  elem esetén  $(ab, b) \in \alpha$  és  $(ba, b) \in \alpha$ , amiből  $ab = ba = b$  következik, hiszen  $ab, ba \in S$ , és  $b \in S$   $\alpha$ -osztálya csak  $b$ -t tartalmazza. Azt kaptuk, hogy  $a$  az  $S$  félcsoporth egységeleme, s ezért  $S = S^1$ , ami ellentmond az  $S \neq S^1$  feltételnek.

(1)-ből következik (2): Tegyük fel, hogy  $S$  szubdirekt irreducibilis félcsoporth. Legyen  $\alpha_i$  ( $i \in I$ ) az  $S^1$  kongruenciáinak olyan családja, melyre

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_{S^1}$$

teljesül. Jelölje  $\alpha_i^*$  az  $\alpha_i$  ( $i \in I$ ) kongruencia  $S$ -re való leszűkítését. Akkor

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i^* = \iota_S.$$

Mivel az  $S$  félcsoporth szubdirekt irreducibilis, ezért valamely  $j \in I$  indexre

$$\alpha_j^* = id_S.$$

Az előzőekben tett megjegyzés szerint ebből

$$\alpha_j = id_{S^1}$$

következik. A 11.4. Tétel szerint  $S^1$  szubdirekt irreducibilis.

(2)-ből következik (1): Legyen  $S^1$  szubdirekt irreducibilis. Legyen  $\alpha_i^*$  ( $i \in I$ ) az  $S$  félcsoporth kongruenciáinak olyan családja, amelyre

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i^* = \iota_S$$

teljesül. Tetszőleges  $i \in I$  indexre jelölje  $\alpha_i$  az  $S^1$  félcsoporth azon ekvivalenciarelációját, amely szerint az  $S^1$  félcsoporth egységeleme önállóan alkot egy osztályt, az  $S$  elemeinek  $\alpha_i$ -osztálya megegyezik az  $S$ -beli  $\alpha_i^*$ -osztályával. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\alpha_i$  kongruencia az  $S^1$  félcsoporthon és

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_{S^1}.$$

Mivel  $S^1$  szubdirekt irreducibilis, ezért

$$\alpha_j = \iota_{S^1}$$

valamely  $j \in I$  indexre, amiből

$$\alpha_j^* = \iota_S$$

következik. Így  $S$  szubdirekt irreducibilis, azaz (1) teljesül.

Az (1) és (3) feltételek ekvivalenciája az előzőekhez hasonlóan bizonyítható a következők figyelembevételével: Ha  $\alpha$  egy  $S^0$  félcsoporthoz olyan kongruenciája, melynek  $S$ -re való  $\alpha^*$  leszűkítésére  $\alpha^* = \iota_S$  teljesül, akkor  $\alpha = \iota_{S^0}$ . Ugyanis, ha  $(a, 0) \in \alpha$ , teljesül valamely  $a \in S$  elemre, akkor minden  $b \in S$  elemre  $(ab, 0) \in \alpha$  és  $(ba, 0) \in \alpha$ , amiből  $ab, ba \in S$  miatt  $ab = ba = a$  következik, azaz  $a$  az  $S$  nulleleme, s ezért  $S = S^0$ , ami ellentmond az  $S \neq S^0$  feltételnek. Ebből a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy az (1) és (3) feltételek egymással ekvivalensek.  $\square$

**11.7. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthoz szívén (ha létezik) az  $S$  azon legalább kételemű ideálját értjük, amelyet az  $S$  minden legalább kételemű ideálja részhalmazként tartalmaz. Egy kételemű szívet primitív szívnek nevezünk.

Ha  $K$  egy  $S$  félcsoporthoz szíve, akkor  $K^2 (\subseteq K)$  ideálja  $S$ -nek, és így  $K^2 = K$  vagy  $K^2 = \{0\}$ . Az első esetben azt mondjuk, hogy  $K$  globálisan idempotens, a második esetben pedig azt, hogy  $K$  nilpotens.

**11.8. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthoz valamely  $c$  elemét diszjunktív elemnek nevezzük, ha a

$$\mathcal{P}_{\{c\}}^1 = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S^1) \ xay = c \text{ akkor és csak akkor, ha } \ xby = c\}$$

kongruencia egyenlő az  $S$  félcsoporthoz identikus relációjával.

**11.9. Tétel** Ha egy nullelemes  $S$  félcsoporthoz van nem-nulla diszjunktív eleme, akkor  $S$ -nek van szíve, valamint az is igaz, hogy  $S$  összes diszjunktív eleme benne van ebben a szívben.

*Bizonyítás.* Legyen  $k$  egy  $S$  félcsoporthoz nem-nulla diszjunktív eleme. Mivel

$$r(k) = \{s \in S : (\forall x, y \in S^1) \ xsy \neq k\}$$

egy  $\mathcal{P}_{\{k\}}^1$ -osztály és egyben egy ideálja is  $S$ -nek, ezért

$$r(k) = \{0\},$$

mivel  $\mathcal{P}_{\{k\}}^1 = \iota_S$ . Legyen  $I$  az  $S$  olyan ideálja, amely tartalmaz a nullelemtől különböző elemet. Mivel  $r(k) = \{0\}$ , ezért az  $I$  tetszőleges  $a \neq 0$  eleme esetén mindig megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, hogy

$$xay = k.$$

Így

$$k \in I.$$

Mivel a nullelemtől különböző  $k$  diszjunktív elem benne van minden nem-nulla ideálban, ezért  $S$ -nek van  $K$  szíve. Az előzőekből az is következik, hogy  $S$  összes diszjunktív eleme benne van  $K$ -ban.  $\square$

**11.10. Tétel** Minden legalább kételemű szubdirekt irreducibilis  $S$  félcsoporthoz van legalább két diszjunktív eleme.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  szubdirekt irreducibilis félcsoporthoz. Minden  $c \in S$  elemhez tekintsük a 2.33. Tételben definiált  $\mathcal{P}_{\{c\}}^1$  kongruenciát. A 2.33. Tétel szerint  $\{c\}$  egy  $\mathcal{P}_{\{c\}}^1$ -osztály. Így

$$\cap_{c \in S} \mathcal{P}_{\{c\}}^1 = \iota_S.$$

Mivel  $S$  szubdirekt irreducibilis, ezért a 11.4. Tétel miatt van olyan  $d_1 \in S$  elem, amelyre  $\mathcal{P}_{\{d_1\}}^1 = \iota_S$  teljesül, azaz  $d_1$  az  $S$  félcsoporthoz diszjunktív eleme. Az is világos, hogy

$$\cap_{(c \in S \setminus \{d_1\})} \mathcal{P}_{\{c\}}^1 = \iota_S.$$

Ugyancsak az  $S$  félcsoporthoz szubdirekt irreducibilitását használva, azt kapjuk, hogy van olyan  $d_2 (\neq d_1)$  eleme  $S$ -nek, amelyre  $\mathcal{P}_{\{d_2\}}^1 = \iota_S$  teljesül, azaz  $d_2$  az  $S$  félcsoporthoz  $d_1$ -től különböző diszjunktív eleme.  $\square$

Az előző tétel miatt, ha egy szubdirekt irreducibilis félcsoporthoz primitív a szíve, akkor szükségképpen diszjunktív a nulleleme. Nem bizonyítjuk, de érvényes ennek az állításnak a megfordítása is, azaz igaz a következő tétel:

**11.11. Tétel** Egy primitív szívű félcsoporthoz akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha a nulleleme diszjunktív.

**11.12. Definíció** Egy nullelemes  $S$  félcsoporthoz  $A_S$  annullátorán értjük  $S$  mindazon  $x$  elemienek összességét, melyekre  $xS = Sx = \{0\}$  teljesül.

**11.13. Tétel** Egy nemtriviális annullátorú félcsoporthoz akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy nemtriviális  $A_S$  annullátorú félcsoporthoz. Akkor  $S$ -nek van legalább két eleme. Ha  $S$  szubdirekt irreducibilis, akkor a 11.10. Tétel szerint  $S$ -nek van legalább két diszjunktív eleme, így van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$ -nek van a nullelemtől különböző  $k$  diszjunktív eleme. Akkor a 11.9. Tétel szerint  $S$ -nek van  $K$  szíve, amely tartalmazza  $S$  összes diszjunktív elemét. Legyen  $g \in A_S \setminus \{0\}$  tetszőleges. Akkor tetszőleges  $u \in S$  elem esetén

$$ug = gu = 0.$$

Így

$$g \in r(k) \cup \{k\}.$$

Mivel  $r(k) = \{0\}$ , ezért  $g = k$ , így  $A_S = \{0, k\} = K$ , amiből az következik, hogy a  $K$  szív primitív. Megmutatjuk, hogy  $0$  az  $S$  diszjunktív eleme. Legyenek  $e \neq f$  az  $S$  teszőleges elemei. Mivel  $k$  diszjunktív, ezért

$$(e, f) \notin \mathcal{P}_{\{k\}}^1.$$

Így megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, amelyekre

$$xey = k, \quad xfy \neq k$$

teljesül. Ha

$$xfy = 0,$$

akkor

$$(e, f) \notin \mathcal{P}_{\{0\}}^1.$$

Ha pedig

$$xfy \neq 0,$$

akkor megadhatók olyan  $u, v \in S^1$  elemek, hogy

$$uxfyv = k,$$

mivel  $r(k) = \{0\}$ . Mivel  $xfy \neq k$ , ezért  $u$  és  $v$  egyike benne van  $S$ -ben. Mivel  $k \in A_S$ , ezért

$$ukv = 0.$$

Így

$$uxeyv = ukv = 0.$$

Tehát megint

$$(e, f) \notin \mathcal{P}_{\{0\}}^1.$$

Ebből már következik, hogy

$$\mathcal{P}_{\{0\}}^1 = \iota_S.$$

Tehát  $0$  diszjunktív elem. A 11.11. Tétel miatt  $S$  szubdirekt irreducibilis.  $\square$

**11.14. Definíció** Egy olyan  $S$  félcsoportot, amelynek magja az  $S$  egy részcsoportja, homocsoportnak nevezünk.

**11.15. Tétel** Egy nullelem nélküli szubdirekt irreducibilis homocsoport szükségképpen csoport.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy nullelem nélküli homocsoport. Jelölje  $G$  az  $S$  magját  $e$  pedig a  $G$  részcsoporth egységelemét. Mivel  $S$  nem nullelemes, ezért  $|G| \geq 2$ . Jelölje  $\varphi$  az  $S$  félcsoporthnak a  $G$  csoportra való következő leképezését: tetszőleges  $s \in S$  elem esetén legyen

$$\varphi(s) = es.$$

Mivel  $G$  az  $S$  félcsoporth ideálja, ezért  $\varphi$  az  $S$  félcsoporthnak a  $G$  részcsoporthba való leképezése. Mivel

$$eg = g$$

minden  $g \in G$  elemre, ezért  $\varphi$  az  $S$  félcsoporthnak a  $G$  részcsoporthra való leképezése. Legyenek  $s, t \in S$  tetszőleges elemek. Akkor

$$\varphi(st) = e(st) = (es)t = ((es)e)t = (es)(et) = \varphi(s)\varphi(t),$$

felhasználva azt is, hogy  $es \in G$  és  $e$  a  $G$  egységeleme. Tehát  $\varphi$  az  $S$  félcsoporthnak a  $G$  részcsoporthra való homomorfizmusa. Jelölje  $\alpha$  ennek a homomorfizmusnak a magját, azaz

$$\alpha = \{(a, b) \in S \times S : ea = eb\}.$$

A 3.3. Lemma szerint  $\alpha$  az  $S$  félcsoporth kongruenciarelációja. Jelölje  $\beta$  a  $G$  ideál szerinti Rees-féle kongruenciát. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \cap \beta$$

valamilyen  $a, b \in S$  elemekre. Mivel

$$(a, b) \in \beta,$$

ezért

$$a = b \quad \text{vagy} \quad a, b \in G.$$

Mivel

$$(a, b) \in \alpha,$$

azaz

$$ea = eb,$$

ezért az  $a, b \in G$  esetben is

$$a = ea = eb = b$$

adódik. Tehát

$$\alpha \cap \beta = \iota_S.$$

Ha  $S$  szubdirekt irreducibilis, akkor  $\alpha = \iota_S$ , ugyanis a  $|G| \geq 2$  feltétel miatt  $\beta = \iota_S$  nem lehetséges. Mivel tetszőleges  $s \in S$  elem esetén

$$e(es) = es,$$

azaz

$$(s, es) \in \alpha,$$

ezért

$$s = es \in G.$$

Így  $S \subseteq G$ , azaz  $S = G$ . □

## 11.2. Szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporthok

Adott  $p$  prímszám esetén jelölje  $\mathbf{Z}_{p^\infty}$  az összes  $n$  pozitív egész kitevőre tekintett  $p^n$ -edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportját. Egy csoportot *kváziciklikus  $p$ -csoport*nak nevezünk, ha izomorf a  $\mathbf{Z}_{p^\infty}$  csoporttal.

**11.16. Tétel** *Egy kommutatív csoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha izomorf egy kváziciklikus  $p$ -csoport ( $p$  egy prímszám) valamely részcsoporthjával.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy kommutatív szubdirekt irreducibilis csoport. Akkor  $S$ -nek van egy  $A$  legszűkebb, nem csak az  $e$  egységelemet tartalmazó részcsoporthja. Ezért  $A$  egy  $p$  prímrendű ciklikus csoport. Legyen  $e \neq s \in S$  tetszőleges.  $A$  része az  $s$  elem által generált  $[s]$  ciklikus részcsoporthnak. Így  $[s]$  nem lehet végtelen (mert végtelen ciklikus részcsoporth minden részcsoporthja végtelen ciklikus részcsoporth). Ezért  $s$  rendje osztható  $p$ -vel, és így  $[s]$  tartalmaz  $p$ -edrendű elemet. Ha  $[s]$  rendje  $p^\alpha r$ , ahol  $p$  nem osztja  $r$ -et, akkor

$$[s] = [s^{p^\alpha}] \times [s^r].$$

Mivel  $A \not\subseteq [s^r]$ , ezért  $[s^r] = \{e\}$ . Így  $s$  rendje  $p$  valamely pozitív kitevőjű hatványa. Tehát  $S$  egy  $p$ -csoport. Mivel  $S$  szubdirekt felbonthatatlan, ezért direkt felbonthatatlan is. Jól ismert csoportelméleti eredmény, hogy egy direkt felbonthatatlan  $p$ -csoport izomorf a kváziciklikus  $p$ -csoport egy részcsoporthjával. Mivel a fordított állítás nyilvánvaló, ezért a tételt bebizonyítottuk. □

**11.17. Tétel** *Egy félcsoporth akkor és csak akkor globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporth, ha izomorf  $G$ -vel vagy  $G^0$ -lal vagy  $F$ -fel, ahol  $G$  egy kváziciklikus  $p$ -csoport ( $p$  prímszám) valamely legalább kételemű részcsoporthjával izomorf,  $F$  pedig egy kételemű félháló.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis félcsoporth. Jelölje  $K$  az  $S$  szívét. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor  $S$  nem tartalmaz null-elemet. Akkor  $K$  egyszerű, és így a 7.4. Tétel szerint  $K$  egy csoport, azaz  $S$  nullelem

nélküli homocsoport. A 11.15. Tétel szerint  $S$  egy csoport. Ebből pedig a 11.16. Tétel felhasználásával adódik, hogy  $S$  izomorf egy kváziciklikus  $p$ -csoport ( $p$  egy prímszám) valamely legalább kételemű részcsoporthal.

A következőkben tegyük fel, hogy  $S$ -nek van egy  $0$  nulleleme. Megmutatjuk, hogy  $S$ -ben a nem-nulla elemek egy részfélcsoportot alkotnak. Tegyük fel, indirekt módon, hogy

$$ab = 0$$

valamely  $a, b \in S$  nem nulla elemekre. Világos, hogy

$$A = \{b \in S : ab = 0\}$$

az  $S$ -nek egy nem-nulla ideálja. Így az  $S$  félcsoport  $K$  szíve ennek az  $A$  ideálnak részhalmaza. Akkor viszont

$$aK = \{0\}.$$

Legyen

$$B = \{a \in S : aK = \{0\}\}.$$

Világos, hogy  $B$  az  $S$  egy nemnulla ideálja, és így

$$K \subseteq B,$$

amiből

$$K^2 = \{0\}$$

következik. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy  $K$  globálisan idempotens. Ezért

$$S = G \cup \{0\},$$

ahol  $G$  az  $S$  félcsoport egy részfélcsoportja. Mivel a feltétel szerint  $S$  szubdirekt irreducibilis, ezért a 11.6. Tétel miatt  $G$  szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoport.

Ha  $G$ -nek van egy  $0^*$ -gal jelölt nulleleme, akkor

$$\{0, 0^*\}$$

az  $S$  félcsoport egy ideálja, amely egyben az  $S$  szíve. Tehát  $S$  olyan szubdirekt irreducibilis félcsoport, melynek szíve primitív. A 11.11. Tétel miatt az  $S$  nulleleme diszjunktív, azaz

$$\mathcal{P}_{\{0\}}^1 = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S^1) \, xay = 0 \Leftrightarrow xby = 0\} = \iota_S.$$

Mivel  $G$  részfélcsoport és  $S = G \cup \{0\}$ , ezért tetszőleges  $a \in G$  elem esetén  $xay = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = 0$  vagy  $y = 0$ . Ha a két eset közül bármelyik is teljesül, akkor tetszőleges  $b \in G$  elem esetén  $xby = 0$ . Tehát valamely  $x, y \in S^1$  elemekre vagy  $xGy \cap \{0\} = \emptyset$  vagy  $xGy = \{0\}$ . Így tetszőleges  $a, b \in G$  esetén

$$(a, b) \in \mathcal{P}_{\{0\}}^1,$$



amiből a  $\mathcal{P}_{\{0\}}^1 = \iota_S$  egyenlőség miatt  $a = b$  következik. Tehát  $|G| = 1$ . Következésképpen  $S$  egy kételemű félháló.

Ha  $G$ -nek nincs nulleleme, akkor  $G$  egy globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis (kommutatív) félcsoporth, s így a bizonyítás előző része miatt  $G$  egy legalább kételemű részcsoporthja egy kváziciklikus  $p$ -csoporthnak ( $p$  egy prímszám). Az  $S$  félcsoporth pedig ebből származtatható egy nullelem adjungálásával, azaz  $S = G^0$ .

Az világos, hogy a tételben szereplő félcsoporthok globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporthok. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.  $\square$

**11.18. Tétel** *Egy nemtriviális annullátorú kommutatív félcsoporth akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.*

*Bizonyítás.* A 11.13. Tétel szerint triviális, mert az idézett tétel tetszőleges nemtriviális annullátorú  $S$  félcsoporthra érvényes.  $\square$

**11.19. Tétel** *Egy legalább kételemű  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor triviális annullátorú, nilpotens szívű szubdirekt irreducibilis félcsoporth, ha tartalmaz egy egységelemet, egy nem-nulla diszjunktív elemet, valamint egy nullától különböző nullosztót úgy, hogy a nem-nullosztók halmaza  $S$ -nek egy szubdirekt irreducibilis részcsoporthja.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan legalább kételemű szubdirekt irreducibilis félcsoporth, melynek  $K$  szíve nilpotens, és az annullátora triviális. A 11.10. Tétel szerint  $S$ -nek van legalább két diszjunktív eleme, s ezek mindegyike benne van  $K$ -ban. Így a nem-nulla diszjunktív elem nullosztó. Legyen

$$F = \{f \in S; Kf = \{0\}\}.$$

Mivel  $K^2 = \{0\}$ , ezért

$$K \subseteq F.$$

Az világos, hogy  $F$  az  $S$  egy ideálja. Mivel  $S$  annullátora csak  $S$  nullelemét tartalmazza, ezért  $K$  nem annullátora  $S$ -nek, és így

$$F \neq S.$$

Vezessük be a következő jelöléseket.

$$G = S - F, \quad K_0 = K - \{0\}, \quad F_0 = F - K.$$

Ekkor

$$\{\{0\}, K_0, F_0, G\}$$

az  $S$  félcsoporth olyan diszjunkt részhalmazai, melyek úniója  $S$  ( $F_0$  lehet üres is). Ha  $g \in G$ , akkor

$$gK \neq \{0\},$$

azaz

$$gK = K,$$

mert  $gK$  ideálja  $S$ -nek. Világos, hogy  $I = \{s \in S; gs = 0\}$  ideálja  $S$ -nek.  $K$ -t nem tartalmazza  $I$ , ezért

$$I = \{0\},$$

azaz  $g$  nem nullosztó. Mivel az  $F$  elemei nullosztók, ezért  $G$  az  $S$  nem-nullosztóinak halmaza. Mivel  $S$  szíve legalább két elemet tartalmaz, ezért minden  $k \in K_0$  elemre

$$K = Sk = Gk \cup \{0\}$$

teljesül, azaz van olyan  $e \in S$  elem, hogy

$$ek = k.$$

Legyen

$$J = \{s \in S; es = s\}.$$

Látható, hogy  $J$  az  $S$  félcsoporth legalább két elemet tartalmazó ideálja. Így

$$K \subseteq J.$$

Ezért

$$ek = k$$

minden  $k \in K$  elemre. Akkor viszont

$$e^n k = k$$

minden pozitív egész  $n$ -re és minden  $k \in K$  elemre. Legyen

$$\alpha = \{(a, b) \in S \times S; e^n a = e^m b \text{ valamely } n, m \text{ pozitív egész számokra}\}.$$

Világos, hogy  $\alpha$  az  $S$  félcsoporth olyan kongruenciája, amelyre  $\alpha|K = \iota_K$  teljesül. Akkor

$$\alpha \cap \rho_K = \iota_S,$$

ahol  $\rho_K$  jelöli az  $S$  félcsoporth  $K$  szerinti Rees-féle kongruenciáját. Mivel  $S$  szubdirekt irreducibilis és  $\rho_K \neq \iota_S$ , ezért

$$\alpha = id_S.$$

Mivel  $(es, s) \in \alpha$  minden  $s \in S$  elemre, ezért

$$es = s$$

minden  $s \in S$  elemre, azaz  $e$  az  $S$  félcsoporth egységeleme.

Legyenek  $g \in G$  és  $k \in K_0$  tetszőleges elemek. Akkor

$$Ggk = K_0,$$

és így van olyan  $g_1 \in G$  elem, melyre

$$g_1 g k = k$$

teljesül. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy  $g_1 g$  az  $S$  félcsoporth egységeleme. Így  $g_1$  a  $g$  elem inverze. Tehát  $G$  az  $S$  félcsoporth egy részcsoporthja.

Tegyük fel, hogy

$$g_1 k = g_2 k$$

teljesül valamely  $g_1, g_2 \in G$  és  $k \in K_0$  elemekre. Akkor

$$k = g_1^{-1} g_2 k,$$

és így  $g_1^{-1} g_2$  az  $S$  félcsoporth egységeleme, azaz

$$g_1 = g_2.$$

Mivel  $Gk = K_0$ , ezért ezen eredményből az következik, hogy a  $G$  és  $K_0$  halmazok számossága megegyezik. Legyen  $\eta$  a  $G$  csoport valamely  $H$  részcsoporthja által meghatározott kongruenciája. Vezessük be a következő jelölést:

$$\eta^* = \{(a, b) \in S \times S; a \in bH\}.$$

Nem nehéz belátni, hogy  $\eta^*$  az  $S$  félcsoporth olyan kongruenciája, melynek  $G$ -re való leszűkítése  $\eta$ . Jelölje  $\eta_i$ ,  $i \in I$  a  $G$  egy olyan kongruencia-családját, melyre

$$\cap_{i \in I} \eta_i = id_G$$

teljesül. Jelölje  $\eta_i^*$  ( $i \in I$ ) az  $S$  azon kongruenciáját, melyet  $\eta_i$  segítségével az előző módon definiálunk. Ha  $k_1, k_2 \in K_0$ , akkor

$$k_1 = g k_2$$

valamely  $g \in G$  elemmel. Ezért  $(k_1, k_2) \in \eta_i^*$  pontosan azt jelenti, hogy  $k_1 \in k_2 H_i$  vagy, hogy van olyan  $g_i \in H_i$  elem, melyre  $k_1 = k_2 g_i$  teljesül, azaz  $k_2 g = k_2 g_i$ , azaz (a fentiek miatt)  $g = g_i$ , ami azza ekvivalens, hogy  $g \in H_i$ . Így  $(k_1, k_2) \in \cap_{i \in I} \eta_i^*$  akkor és csak akkor, ha  $g \in \cap_{i \in I} H_i$ , amely akkor és csak akkor teljesül, ha  $g = e$ , azaz ha  $k_1 = k_2$ . Tehát

$$\rho_K \cap (\cap_{i \in I} \eta_i^*) = \iota_S.$$

Mivel  $S$  szubdirekt irreducibilis, ezért van olyan  $i \in I$  index, hogy

$$\eta_i^* = id_S$$

és így  $\eta_i = id_G$ . Tehát  $G$  egy szubdirekt irreducibilis csoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan egységelemes kommutatív félcsoport, melynek triviális az annullátora, tartalmaz egy nem-nulla diszjunktív elemet és egy nem-nulla nullosztót, továbbá az is teljesül, hogy a nem nullosztók  $G$  halmaza  $S$  egy szubdirekt irreducibilis részcsoportha. Megmutatjuk, hogy  $S$  szubdirekt irreducibilis félcsoport. Először is megjegyezzük, hogy az  $S$  egységeleme benne van  $G$ -ben, és így megegyezik a  $G$  egységelemével. Legyen  $k_0$  az  $S$  egy nem-nulla diszjunktív eleme. A 11.9. Tétel szerint  $S$ -nek van  $K$  szíve. Ha  $f$  egy nullelemtől különböző nullosztó, akkor  $ff_1 = 0$  valamely  $f_1 \neq 0$  elemmel. Minden  $k \in K$ -hoz megadhatók olyan  $x, y \in S$  elemek, hogy

$$xf_1y = k.$$

Így

$$fk = xff_1y = 0,$$

ami annyit jelent, hogy  $k$  annullálja az  $F = S - G$  halmazt. Így

$$FK = \{0\}.$$

Ha  $G$ -nek csak egy eleme van, akkor  $S = F^1$  és  $F$  olyan félcsoport, melynek annullátora legalább két elemű, továbbá tartalmaz egy nem-nulla diszjunktív elemet. A 11.19. Tétel szerint  $F$  szubdirekt irreducibilis. A 11.6. Tétel miatt ekkor  $S = F^1$  is szubdirekt irreducibilis.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy  $G$ -nek egynél több eleme van. Mivel  $G$  szubdirekt irreducibilis, ezért van  $G$ -nek egy legszűkebb, nem csak az egységelemet tartalmazó  $H$  részcsoportha. Jelölje  $\eta$  az  $S$  egy tetszőleges nem-identikus kongruenciáját. A tekintett  $k_0$  diszjunktív elemet tartalmazó  $\eta$ -osztály legalább kételemű. Ugyanis, ha egyelemű lenne, akkor  $S$  tetszőleges olyan egymástól különböző  $a$  és  $b$  elemei esetén, amelyekre

$$(a, b) \in \eta$$

teljesül, az következne, hogy

$$(xay, xby) \in \eta$$

minden  $x, y \in S^1$  esetén, amiből pedig az adódna, hogy  $xay = k_0$  akkor és csak akkor, ha  $xby = k_0$ . Ez viszont ellentmond annak, hogy  $k_0$  diszjunktív elem. Így tehát létezik olyan  $S$ -beli  $s \neq k_0$  elem, amelyre

$$(s, k_0) \in \eta$$

teljesül. Ha  $s \notin K$ , akkor az  $s$  elem által generált  $SsS$  ideál (valódi módon) tartalmazza  $K$ -t, s ezért

$$xsy = k_0$$

valamely  $x, y \in S$  elemekre, amiből

$$(xk_0y, k_0) \in \eta$$

következik. Ha  $xy \in G$ , akkor

$$s = (xy)^{-1}k_0 \in K,$$

ami ellentmond az  $s \notin K$  feltételnek. Így

$$xy \notin G.$$

Mivel  $S \setminus G = F$  és  $FK = \{0\}$ , ezért

$$xk_0y = 0.$$

Így

$$(k_0, 0) \in \eta$$

és

$$(hk_0, 0) \in \eta$$

minden  $h \in H$  elemre. Tehát

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Ha  $s \in K_0$ , akkor

$$s = g_0k_0$$

valamely  $g_0 \in G$  elemre, mert  $K = Sk_0 = Gk_0 \cup \{0\}$ . Ebben az esetben a  $G$  csoport mindazon  $g$  elemeinek halmaza, melyekre  $(gk_0, k_0) \in \eta$  teljesül a  $G$  egy nem-identikus részcsoportját alkotja (ez a részcsoport tartalmazza a  $g_0 \neq e$  elemet). Így  $H$  benne van ebben a részcsoportban és ezért

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Tehát mindkét esetben azt kaptuk, hogy

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Jelölje  $\eta_0$  az  $S$  összes nem-identikus kongruenciáinak metszetét. Az

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta_0$$

és

$$|Hk_0| \geq 2$$

miatt  $\eta_0 \neq \iota_S$ . Így  $S$  szubdirekt irreducibilis. □

## Feladatok

**11.1.** (Megoldás: **17.35.**) Mutassuk meg, hogy az alábbi Cayley-táblával definiált fél-csoport szubdirekt irreducibilis!

	$e$	$f$	$k_1$	$k_2$	$0$
$e$	$e$	$e$	$k_1$	$k_1$	$0$
$f$	$f$	$f$	$k_2$	$k_2$	$0$
$k_1$	$k_1$	$k_1$	$0$	$0$	$0$
$k_2$	$k_2$	$k_2$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$

Mely elemek alkotják a félcsoporth szívét?

**11.2.** (Megoldás: **17.36.**) Mutassuk meg, hogy az alábbi Cayley-táblával definiált fél-csoport szubdirekt irreducibilis!

	$e$	$a$	$u$	$v$	$0$
$e$	$e$	$a$	$0$	$0$	$0$
$a$	$a$	$e$	$0$	$0$	$0$
$u$	$u$	$v$	$0$	$0$	$0$
$v$	$v$	$u$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$

Mely elemek alkotják a félcsoporth szívét?

## 12. fejezet

# Permutálható félcsoporthok

**12.1. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot permutálható félcsoporthnak nevezünk, ha kongruenciái egymással felcserélhetőek, azaz az  $S$  félcsoporth tetszőleges  $\alpha$  és  $\beta$  kongruenciái esetén  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ .

**12.2. Tétel** Minden csoport permutálható félcsoporth.

*Bizonyítás.* Legyenek  $\alpha$  és  $\beta$  egy  $G$  csoport tetszőleges kongruenciái. Akkor léteznek (egyértelműen) a  $G$  csoportnak olyan  $N$ , illetve  $M$  normális részcsoportjai, amelyek az  $\alpha$ , illetve a  $\beta$  kongruenciákat meghatározzák (pl.  $\alpha$  esetén  $(a, b) \in \alpha$  akkor és csak akkor, ha  $ab^{-1} \in N$ ). Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta$$

teljesül valamely  $a, b \in G$  elemekre. Akkor van olyan  $x \in G$  elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta,$$

azaz

$$ax^{-1} \in N \quad \text{és} \quad xb^{-1} \in M.$$

Ebből viszont

$$ab^{-1} \in NM = MN$$

adódik, ami miatt megadhatók olyan  $m \in M$  és  $n \in N$  elemek, amelyekre

$$ab^{-1} = mn$$

teljesül. Ekkor viszont

$$a(nb)^{-1} = ab^{-1}n^{-1} = m \in M$$

miatt

$$(a, nb) \in \beta.$$

Mivel

$$(nb)b^{-1} = n \in N,$$

ezért

$$(nb, b) \in \alpha.$$

Következésképpen

$$(a, b) \in \beta \circ \alpha.$$

Tehát

$$\alpha \circ \beta \subseteq \beta \circ \alpha.$$

A fordított tartalmazás hasonlóan igazolható. Így

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

□

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt:

**12.3. Tétel** *Egy  $\mathcal{M}(G; I, J; P)$  Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha  $|I| \leq 2$  és  $|J| \leq 2$ .*

## 12.1. Permutálható félcsoportok ideáljai

**12.4. Tétel** *Ha  $I$  tetszőleges ideálja,  $\alpha$  pedig tetszőleges kongruenciája egy permutálható  $S$  félcsoportnak, akkor  $I$  benne van  $S$  valamely  $\alpha$ -osztályában vagy pedig  $\alpha$ -osztályok uniója.*

*Bizonyítás.* Legyen  $I$  tetszőleges ideálja,  $\alpha$  pedig tetszőleges kongruenciája egy permutálható  $S$  félcsoportnak. Ha  $I$  nem része egyetlen  $\alpha$  osztálynak sem, és nem áll elő  $\alpha$ -osztályok uniójaként sem, akkor megadhatók olyan  $a, b \in S$  elemek, amelyekre

$$(a, b) \notin \alpha, \quad [a]_\alpha \cap I \neq \emptyset, \quad a \notin I, \quad b \in I$$

teljesül. Akkor tetszőleges

$$x \in [a]_\alpha \cap I$$

elem esetén

$$(a, x) \in \alpha \quad (x, b) \in \varrho_I$$

teljesül, ahol  $\varrho_I$  jelöli az  $S$  félcsoport  $I$  ideálja szerinti Rees-féle kongruenciát. Így

$$(a, b) \in \alpha \circ \varrho_I = \varrho_I \circ \alpha,$$

azaz megadható  $S$ -nek olyan  $y$  eleme, hogy

$$(a, y) \in \varrho_I \quad (y, b) \in \alpha.$$



Mivel  $a \notin I$ , ezért

$$y = a,$$

és így

$$(a, b) \in \alpha,$$

ami ellentmondás. □

**12.5. Tétel** *Permutálható félcsoporth ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $I$  és  $J$  egy permutálható  $S$  félcsoporth tetszőleges ideáljait. A 12.4. Tétel szerint  $I$  benne van valamelyik  $\varrho_J$ -osztályban vagy  $\varrho_J$ -osztályok úniója. Mivel

$$I \cap J \neq \emptyset,$$

ezért az első esetben  $I \subseteq J$ , a második esetben pedig  $J \subseteq I$ . □

**12.6. Tétel** *Nil félcsoporth akkor és csak akkor permutálható, ha ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  nil félcsoporth. Ha  $S$  permutálható, akkor a 12.5. Tétel szerint az  $S$  ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyen  $\alpha$  az  $S$  tetszőleges kongruenciája. Megmutatjuk, hogy ez mindig egy ideál szerinti Rees-féle kongruencia. Ha  $\alpha$  az identikus reláció, akkor  $\alpha$  úgy tekinthető, mint az  $S$  nulleleme által definiált Rees-féle kongruencia. Tegyük fel a továbbiakban, hogy  $\alpha \neq \iota_S$ . Legyenek  $a$  és  $b$  olyan elemek, amelyek nem egyenlők egymással és

$$(a, b) \in \alpha.$$

Tekintsük az általuk generált főideálokat. Mivel a feltétel szerint  $S$  ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, ezért e két ideál valamelyike tartalmazza a másikat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1.$$

Akkor megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, hogy

$$a = xby,$$

és így

$$(b, xby) \in \alpha.$$

Ebből viszont

$$(b, x^n b y^n) \in \alpha$$

következik minden  $n$  pozitív egész számra. Mivel  $a \neq b$ , ezért  $x$  és  $y$  valamelyike eleme  $S$ -nek, amiből következik, hogy  $x$  vagy  $y$  valamelyik hatványa egyenlő nullával. Ebből viszont

$$(b, 0) \in \alpha,$$

és így

$$(a, 0) \in \alpha$$

következik. Azt kaptuk, hogy ha egy  $\alpha$ -osztály nem egyelemű, akkor az a 0-át tartalmazó  $\alpha$ -osztály. Mivel a 0-val  $\alpha$ -relációban álló elemek halmaza  $S$ -nek egy  $I$  ideálja,  $\alpha$  az  $I$  ideál szerinti Rees-féle kongruencia. Mivel  $S$ -nek csak Rees-féle kongruenciái vannak, ezért az  $S$  kongruenciái láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Ebből már következik, hogy  $S$  permutálható félcsoport.  $\square$

## 12.2. Permutálható félcsoportok epimorf képei

**12.7. Tétel** *Permutálható félcsoport tetszőleges epimorf képe is permutálható.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\varphi$  egy permutálható  $S$  félcsoportnak valamely  $T$  félcsoportra való homomorfizmusa. Jelölje  $\sigma$  a  $\varphi$  homomorfizmus magját. A homomorfizmustétel miatt

$$T \cong S/\sigma.$$

Legyenek  $\alpha' = \alpha/\sigma$  és  $\beta' = \beta/\sigma$  a  $T$  félcsoport tetszőleges kongruenciái. Tegyük fel, hogy

$$([a]_\sigma, [b]_\sigma) \in \alpha' \circ \beta'$$

valamely  $a, b \in S$  elemekre. Akkor van olyan  $x \in S$  elem, hogy

$$([a]_\sigma, [x]_\sigma) \in \alpha' \quad \text{és} \quad ([x]_\sigma, [b]_\sigma) \in \beta'.$$

Ekkor

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta,$$

azaz

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha,$$

és ezért van olyan  $y \in S$  elem, hogy

$$(a, y) \in \beta \quad \text{és} \quad (y, b) \in \alpha.$$

Ekkor viszont

$$([a]_\sigma, [y]_\sigma) \in \beta' \quad \text{és} \quad ([y]_\sigma, [b]_\sigma) \in \alpha',$$

amiből

$$([a]_\sigma, [b]_\sigma) \in \beta' \circ \alpha'$$

következik. Így

$$\alpha' \circ \beta' \subseteq \beta' \circ \alpha'.$$

Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás. Így

$$\alpha' \circ \beta' = \beta' \circ \alpha'. \quad \square$$

**12.8. Tétel** *Ha  $S$  olyan permutálható félcsoporth, amely tartalmaz egy valódi ideált, akkor  $S$ -nek nincs nemtriviális csoport-epimorf képe.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan permutálható félcsoporth, amelyben van egy valódi (azaz az  $S$ -től különböző)  $I$  ideál. Legyen  $\sigma$  az  $S$  olyan kongruenciája, amely szerinti faktorfélcsoporth csoport. Jelölje  $\varphi$  az  $S$  félcsoporthnak az  $S/\sigma$  csoportra való természetes homomorfizmusát. A 12.4. Tétel szerint  $I$  benne van valamely  $\sigma$ -osztályban vagy pedig  $\sigma$ -osztályok uniója. Az első esetben az  $I$ -t tartalmazó  $\sigma$ -osztály  $\varphi$  szerinti képe az  $S/\sigma$  csoport nulleleme. Ez nem lehetséges, mivel egy legalább kételemű csoportnak nincs nulleleme. A második esetben az  $I$   $\varphi$ -szerinti képe az  $S/\sigma$  csoport egy valódi ideálja, ami szintén ellentmondás, hiszen nemtriviális csoportnak nincs valódi ideálja.  $\square$

**12.9. Tétel** *Legyen  $I$  egy  $S$  félcsoporth ideálja,  $\varphi$  pedig  $I$ -nek egy  $G$  csoportra való homomorfizmusa. Akkor megadható  $S$ -nek  $G$ -re olyan  $\phi$  homomorfizmusa, melynek  $I$ -re való leszűkítése megegyezik  $\varphi$ -vel.*

*Bizonyítás.* Legyen  $I$  egy  $S$  félcsoporth olyan ideálja, amelynek van egy  $G$  csoportra való  $\varphi$  homomorfizmusa. Jelölje  $\sigma$  ennek az epimorfizmusnak a magját. A 2.38. Tétel szerint van  $I$ -nek olyan  $H$  reflexív unitér részfélcsoporthja, hogy  $\sigma = P_H$ , ahol  $P_H$  jelöli az  $I$  félcsoporth  $H$  szerinti, a 2.32. Definícióban értelmezett főkongruenciáját. Legyen  $\alpha$  az  $S$  félcsoporth következő relációja: Tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $(a, b) \in \alpha$  pontosan akkor, ha minden  $x, y \in I$  elem esetén az  $xay \in H$  tartalmazás akkor és csak akkor teljesül, ha teljesül az  $xbx \in H$  tartalmazás. Nem nehéz belátni, hogy  $\alpha$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája és  $\alpha|I = P_H$ . Mivel tetszőleges  $a \in S$  és  $h \in H$  elemre  $(ha, a) \in \alpha$  és mert  $ha \in I$ , ezért  $S/\alpha \cong G$ . Ebből már következik a tétel állítása.  $\square$

**12.10. Tétel** *Ha egy permutálható  $S$  félcsoporthnak  $I$  egy valódi ideálja, akkor sem  $S$ -nek, sem  $I$ -nek nincs nemtriviális csoport-epimorf képe.*

*Bizonyítás.* A 12.8. Tétel és a 12.9. Tétel szerint nyilvánvaló.  $\square$

**12.11. Tétel** *Egy  $S$  félháló akkor és csak akkor permutálható, ha  $|S| \leq 2$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  permutálható félháló. Emlékeztetünk arra, hogy az " $e \leq f$  ( $e, f \in S$ ) akkor és csak akkor, ha  $ef = e$ " reláció parciális részbenrendezés  $S$ -en. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges  $e \in S$  elem esetén  $\{x; x \leq e\}$  az  $S$  ideálja. A 12.5. Tétel szerint  $S$  ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, így ez a parciális rendezés jólrendezés  $S$ -en, azaz  $S$  bármely  $a$  és  $b$  eleme esetén a következők valamelyike teljesül:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$ . Tegyük fel, hogy  $|S| \geq 3$ . Legyenek  $a > b > c$  az  $S$  tetszőleges elemei. Akkor az

$$X = \{x \in S : x \geq a\}, \quad Y = \{y \in S : a > y > c\}, \quad Z = \{z \in S : c \geq z\}$$

részhalmozok az  $S$  egy osztályozását adják. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ehhez tartozó  $\sigma$  ekvivalenciareláció az  $S$  félháló egy kongruenciája. Az  $S/\sigma$  félháló egy háromelemű félháló, amely a 12.7. Tétel szerint permutálható. Az viszont könnyen igazolható, hogy a háromelemű félhálók nem permutálhatóak. Ez ellentmondás. Tehát  $|S| \leq 2$ .  $\square$

**12.12. Tétel** Minden permutálható félcsoporthoz vagy félháló-felbonthatatlan, vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoporthoz félhálójaként.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  permutálható félcsoporthoz. A 10.7. Következmény szerint  $S$  előáll félháló-felbonthatatlan félcsoporthoz  $Y$  félhálójaként. Mivel  $Y$  az  $S$  félcsoporthoz epimorf képe, ezért  $Y$  is permutálható a 12.7. Tétel szerint. A 12.11. Tétel felhasználásával adódik, hogy  $|Y| \leq 2$ , ami annyit jelent, hogy  $S$  vagy félháló-felbonthatatlan (amikor  $|Y| = 1$ ) vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoporthoz félhálójaként (ha  $|Y| = 2$ ).  $\square$

**12.13. Tétel** Ha egy permutálható  $S$  félcsoporthoz két félháló-felbonthatatlan  $S_1$  és  $S_0$  rész-félcsoporthozainak félhálóját mégpedig úgy, hogy  $S_0 S_1 \subseteq S_0$ , akkor  $S_1$  egyszerű félcsoporthoz.

*Bizonyítás.* Legyen  $I$  tetszőleges ideálja  $S_1$ -nek. Akkor  $I \cup S_0$  ideálja  $S$ -nek. Jelölje  $\lambda$  az  $S$  félcsoporthoz legszűkebb félhálókongruenciáját; ennek osztályai  $S_1$  és  $S_0$ . Mivel az  $I \cup S_0$  ideál belemetsz mindkét  $\lambda$ -osztályba, ezért a 12.4. Tétel miatt  $I \cup S_0 = S$ , és így  $I = S_1$ . Tehát  $S_1$  egyszerű félcsoporthoz.  $\square$

## 12.3. Kommutatív permutálható félcsoporthozok

**12.14. Tétel** Egy kommutatív arkhimédeszi félcsoporthoz akkor és csak akkor permutálható, ha izomorf vagy egy csoporttal, vagy egy olyan kommutatív nil félcsoporthoztal, amelyben az oszthatóság teljes rendezés.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy permutálható kommutatív, arkhimédeszi félcsoporthoz. Ha  $S$  egyszerű, akkor a 7.4. Tétel szerint  $S$  egy csoport. Ha nem egyszerű, akkor a 12.8. Tétel szerint nincs nemtriviális csoport-epimorf képe. Akkor viszont  $S$  tartalmaz egy idempotens elemet a 10.23. Tétel miatt. A 10.22. Tétel szerint  $S$  előáll egy kommutatív  $G$

csoportnak egy  $N$  kommutatív nil félcsoporthal való ideálbővítéseként. A 12.8. Tétel miatt  $|G| = 1$  és így  $S$  izomorf  $N$ -nel. A 12.6. Tétel miatt  $S$  ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, s ezért  $S$ -ben az oszthatóság teljes rendezés. A 12.2. Tétel és a 12.6. Tétel miatt a tételben felsorolt félcsoporthok permutálhatóak.  $\square$

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt (lásd a [10] cikk Theorem 13. tételét):

**12.15. Tétel** *Egy kommutatív nem-arkhimédieszi félcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha előáll egy  $G$  csoport és egy olyan  $N$  nil félcsoport félhálójaként, amely  $G$  csoporthatás szerinti orbitjai olyan kommutatív nil félcsoportot alkotnak, melyben az oszthatóság teljes rendezés.*

## Feladatok

**12.1.** (Megoldás: 17.37.) Mutassuk meg, hogy egy háromelemű félháló nem permutálható.

**12.2.** (Megoldás: 17.38.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport ideáljai akkor és csak akkor alkotnak láncot a tartalmazásra nézve, ha főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve ([39]).

## 13. fejezet

# Félcsoportok beágyazása csoportokba

A fejezet első tételében félcsoportoknak csoportokba való beágyazhatóságára adunk szükséges feltételt.

**13.1. Tétel** *Ha egy  $S$  félcsoport beágyazható egy csoportba, akkor  $S$  egyszerűsítéssel félcsoport.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoport beágyazható egy  $G$  csoportba. Akkor van  $G$ -nek olyan  $T$  részfélcsoportja, amely az  $S$  félcsoporttal izomorf. Elegendő azt megmutatni, hogy  $T$  egyszerűsítéssel. Legyenek  $a, b, x \in T$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$xa = xb.$$

Mivel  $G$  csoport, ezért létezik az  $x \in T \subseteq G$  elemnek inverze  $G$ -ben, azaz létezik olyan

$$x^{-1} \in G$$

elem, hogy

$$x^{-1}x = e,$$

ahol  $e$  jelöli a  $G$  csoport egységelemét. Így

$$a = ea = (x^{-1}x)a = x^{-1}(xa) = x^{-1}(xb) = (x^{-1}x)b = eb = b.$$

Tehát  $T$  bal egyszerűsítéssel. Hasonlóan igazolható, hogy  $T$  jobb egyszerűsítéssel is.  $\square$

### 13.1. Kommutatív félcsoport beágyazása csoportba

Kommutatív félcsoportok esetén az "egyszerűsítéssel" fogalom nem csak szükséges, hanem elégséges feltétel is csoportokba való beágyazhatósághoz, azaz igaz a következő tétel:

**13.2. Tétel** Egy kommutatív  $S$  félcsoporth akkor és csak akkor ágyazható be egy csoportba, ha az  $S$  félcsoporth egyszerűsítéses.

*Bizonyítás.* A 13.1. Tétel miatt elég csak azt megmutatni, hogy minden kommutatív egyszerűsítéses félcsoporth beágyazható egy csoportba. Legyen tehát  $S$  tetszőleges kommutatív, egyszerűsítéses félcsoporth. Az  $S \times S$  Descartes-szorozaton definiáljunk egy  $\alpha$  relációt a következőképpen:

$$(a, b) \alpha (c, d) \text{ akkor és csak akkor, ha } ad = cb.$$

Megmutatjuk, hogy  $\alpha$  ekvivalenciareláció. Az világos, hogy  $\alpha$  reflexív és szimmetrikus. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \alpha (c, d) \text{ és } (c, d) \alpha (e, f)$$

valamely  $a, b, c, d, e, f \in S$  elemekre. Akkor

$$ad = cb \text{ és } cf = ed,$$

amiből

$$(af)c = a(cf) = a(ed) = (ad)e = (cb)e = (eb)c$$

adódik, felhasználva néhányszor, hogy  $S$  kommutatív félcsoporth. Mivel  $S$  egyszerűsítéses, ezért az utóbbi egyenlőségből

$$af = eb$$

következik, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(a, b) \alpha (e, f).$$

Tehát  $\alpha$  ekvivalenciareláció az  $S \times S$  halmazon. Megmutatjuk, hogy  $\alpha$  az  $S \times S$  kommutatív félcsoporth kongruenciája. Legyenek  $a, b, c, d, x, z \in S$  tetszőleges elemek az

$$(a, b) \alpha (c, d)$$

feltétellel. Akkor

$$ad = cb,$$

amiből

$$xazd = xczb$$

következik. Ezen utóbbi egyenlőség ekvivalens az

$$(x, z)(a, b) = (xa, zb) \alpha (xc, zd) = (x, z)(c, d)$$

feltétellel. Tehát  $\alpha$  balkongruencia, és így kongruencia az  $S \times S$  kommutatív félcsoporthon. Az  $S$  félcsoporth kommutativitása miatt

$$(a, a) \alpha (b, b)$$

tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén. Továbbá, ha

$$(a, b) \alpha (c, c)$$

valamely  $a, b, c \in S$  elemekre teljesül, akkor

$$ac = cb,$$

amiből  $S$  kommutativitása és egyszerűsítésessége miatt

$$a = b$$

adódik. Tehát az  $S \times S$  direkt szorzat összes  $(a, a)$  alakú elemeinek  $E$  halmaza egy  $\alpha$ -osztály. Mivel tetszőleges  $a, b, c \in S$  elemek esetén

$$(a, a)(b, c) = (ab, ac) \alpha (b, c),$$

valamint

$$(b, c)(a, a) = (ba, ca) \alpha (b, c),$$

ezért az  $E$  osztály az  $(S \times S)/\alpha$  faktorfélcsoporth egységeleme. Mivel tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $(a, b)(b, a)$  és  $(b, a)(a, b)$  szorzatok benne van az  $E$  osztályban, ezért a  $(b, a)$  elemet tartalmazó  $\alpha$ -osztály az  $(a, b)$  elemet tartalmazó  $\alpha$ -osztály inverze. Tehát az  $(S \times S)/\alpha$  faktorfélcsoporth csoport.

Tekintsük az  $S$  félcsoporthnak az  $(S \times S)/\alpha$  faktorcsoporthba való azon  $\phi$  leképezését, amely az  $S$  félcsoporth  $a$  eleméhez az  $(a^2, a)$  osztályát rendeli. Ha

$$\phi(a) = \phi(b),$$

akkor

$$(a^2, a) \alpha (b^2, b),$$

amiből

$$a^2b = b^2a,$$

azaz

$$a = b$$

következik. Tehát  $\phi$  injektív. Mivel tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $\phi(ab)$  az  $((ab)^2, ab)$  elemet tartalmazó osztály,  $\phi(a)\phi(b)$  pedig  $(a^2, a)$  és a  $(b^2, b)$  elemeket tartalmazó osztályok szorzata; ezen utóbbi osztályok szorzata az  $((ab)^2, ab)$  elemet tartalmazó osztály, felhasználva, hogy  $a^2b^2 = (ab)^2$ . Így  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ . Tehát  $\phi$  homomorfizmus. Következésképpen  $\phi$  az  $S$  félcsoporthnak az  $(S \times S)/\alpha$  csoportba való beágyazása.  $\square$



## 13.2. Egy elégséges feltétel

**13.3. Definíció** Egy  $S$  félcsoporthot jobb reverzibilis félcsoporthnak nevezünk, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ .

**13.4. Tétel** Minden jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoporthot be lehet ágyazni egy csoportba.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoporth. Jelölje  $\mathcal{I}_S$  az  $S$  összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak félcsoporthját, azaz az  $S$  szimmetrikus inverz félcsoporthját (6.25. Definíció). Tetszőleges  $\alpha \in \mathcal{I}_S$  elem esetén jelölje  $D(\alpha)$  és  $R(\alpha)$  az  $\alpha$  leképezés értelmezési tartományát, illetve értékkészletét (azaz a képhalmazát).

Tetszőleges  $a \in S$  elem esetén tekintsük az  $S$  félcsoporth  $a$  eleméhez tartozó  $\varrho_a$  belső jobb translációját;  $D(\varrho_a) = S$ ,  $R(\varrho_a) = Sa$ , és tetszőleges  $x \in S$  elemre  $(x)\varrho_a = xa$ . Mivel  $S$  bal egyszerűsítéses, ezért  $\varrho_a \in \mathcal{I}_S$ . Ugyanezen ok miatt  $S$  bal redukzív, és ezért az 5.11. Lemma szerint  $\phi : a \mapsto \varrho_a$  ( $a \in S$ ) az  $S$  félcsoporthnak az  $\mathcal{I}_S$  félcsoporthba való izomorfizmusa. Egy  $\varrho_a$  leképezés ( $a \in S$ ) inverze az a  $\varrho_a^{-1} \in \mathcal{I}_S$  parciális transzformáció, melyre  $D(\varrho_a^{-1}) = Sa$ ,  $R(\varrho_a^{-1}) = S$ , és tetszőleges  $x \in S$  elem esetén  $(xa)\varrho_a^{-1} = x$ .

Jelölje  $H$  a  $\mathcal{I}_S$  félcsoporth  $(S)\phi = \{\varrho_a : a \in S\}$  részfélcsoporthja által generált inverz részfélcsoporthját. Ennek az inverz félcsoporthnak minden eleme véges sok  $\varrho_a$ , illetve  $\varrho_b^{-1}$  ( $a, b \in S$ ) alakú leképezés szorzata. Mivel mindkét típusú leképezés értelmezési tartománya és értékkészlete az  $S$  félcsoporth egy-egy bal oldali ideálja, ezért az  $S$  félcsoporthra vonatkozó jobb reverzibilitás miatt szorzatuk nem lehet az üres leképezés, s ezért  $H$  nem tartalmazza az üres leképezést, azaz az  $\mathcal{I}_S$  nullelemét.

Vezessük be a következő jelölést: tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_S$  leképezések esetén jelentse

$$\alpha \subseteq \beta$$

azt a feltételt, hogy

$$\begin{aligned} D(\alpha) &\subseteq D(\beta) \\ (x)\alpha &= (x)\beta \quad (\forall x \in D(\alpha)). \end{aligned}$$

A  $H$  halmazon definiálunk egy  $\sim$  relációt a következőképpen:

$$\alpha \sim \beta, (\alpha, \beta \in H) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \gamma \in H) \quad \gamma \subseteq \alpha, \gamma \subseteq \beta.$$

Megmutatjuk, hogy  $\sim$  kongruenciareláció a  $H$  félcsoporthon. Az világos, hogy  $\sim$  reflexív és szimmetrikus. A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy

$$\alpha \sim \beta \sim \gamma$$

teljesül valamely  $\alpha, \beta, \gamma \in H$  leképezésekre. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan  $\delta_1, \delta_2 \in H$  leképezések, hogy

$$\delta_1 \subseteq \alpha, \delta_1 \subseteq \beta, \delta_2 \subseteq \beta, \delta_2 \subseteq \gamma.$$

Ekkor

$$D(\delta_1) \subseteq D(\alpha) \cap D(\beta), D(\delta_2) \subseteq D(\beta) \cap D(\gamma).$$

Legyen

$$\delta = \delta_2 \delta_1^{-1} \delta_1.$$

Akkor

$$D(\delta) \subseteq D(\delta_2).$$

Ezért, ha

$$x \in D(\delta),$$

akkor

$$(x)\delta = (((x)\delta_2)\delta_1^{-1})\delta_1 = (x)\delta_1 = (x)\beta = (x)\delta_2.$$

Így

$$\delta \subseteq \delta_1 \subseteq \alpha \text{ és } \delta \subseteq \delta_2 \subseteq \gamma.$$

Tehát

$$\alpha \sim \gamma.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy  $\sim$  a  $H$  félcsoporth kongruenciarelációja. Tegyük fel, hogy

$$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$$

valamely  $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in H$  elemekre. Akkor vannak olyan  $H$ -beli  $\gamma$  és  $\delta$  elemek, amelyekre

$$\gamma \subseteq \alpha, \gamma \subseteq \alpha', \delta \subseteq \beta, \delta \subseteq \beta'$$

teljesül. Ebből

$$\gamma\delta \subseteq \alpha\beta \text{ és } \gamma\delta \subseteq \alpha'\beta'$$

következik. Így

$$\alpha\beta \sim \alpha'\beta'.$$

Tehát  $\sim$  a  $H$  félcsoporth egy kongruenciája.

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy a

$$G = H / \sim$$

faktorfélcsoporth csoport. Ehhez elegendő megmutatni, hogy adott  $\alpha, \beta \in H$  elemekhez léteznek olyan  $\xi, \eta \in H$  elemek, hogy  $\alpha\xi \sim \eta\alpha \sim \beta$  teljesül. Világos, hogy

$$\xi = \alpha^{-1}\beta \text{ és } \eta = \beta\alpha^{-1}$$

alkalmas elemek, hiszen

$$\alpha\alpha^{-1}\beta \subseteq \beta \text{ és } \beta\alpha\alpha^{-1} \subseteq \beta.$$

Mivel  $H$  nem tartalmazza az üres leképezést, ezért a  $G$  csoport nem egyelemű.

Jelölje  $(\cdot)\psi$  a  $H$  félcsoporthnak a  $G$  csoportra való természetes homomorfizmusát. Megmutatjuk, hogy  $\psi$ -nek  $(S)\phi$ -re való leszűkítése injektív. Tegyük fel tehát, hogy

$$(\varrho_a)\psi = (\varrho_b)\psi$$

valamely  $a, b \in S$  elemekre. Akkor  $\varrho_a \sim \varrho_b$ , és így van olyan  $\gamma \in H$  elem, hogy

$$\gamma \subseteq \varrho_a \quad \gamma \subseteq \varrho_b.$$

Mivel  $H$  nem tartalmazza az üres leképezést, ezért  $D(\gamma) \neq \emptyset$ . Legyen

$$x \in D(\gamma)$$

tetszőleges elem. Akkor

$$xa = xb,$$

amiből

$$a = b$$

és így  $\varrho_a = \varrho_b$  következik.

Mivel  $\phi$  izomorf módon képezi le  $S$ -et  $(S)\phi$ -re, ezért a  $\psi$ -re éppen most bizonyítottak miatt  $(\cdot)(\phi \circ \psi)$  az  $S$  félcsoporthnak a  $G$  csoportba való beágyazása.  $\square$

### 13.3. Egyszerűsítéses félcsoport hányadoscsoportja

**13.5. Definíció** Egy  $G$  csoportról azt mondjuk, hogy egy egyszerűsítéses  $S$  félcsoport bal hányadoscsoportja, ha  $G$  részfélcsoportként tartalmaz  $S$ -et, és  $G$  minden  $g$  eleme felírható  $g = a^{-1}b$  alakban valamely  $a, b \in S$  elemekkel.

**13.6. Tétel** Egy egyszerűsítéses  $S$  félcsoportnak akkor és csak akkor van bal hányadoscsoportja, ha  $S$  jobb reverzibilis.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan egyszerűsítéses félcsoport, melynek van  $G$  bal hányadoscsoportja. Akkor  $G$  minden eleme felírható  $a^{-1}b$  alakban valamely  $a, b \in \varphi(S)$  elemekkel. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Akkor vannak olyan  $x, y \in S$  elemek, hogy

$$ab^{-1} = x^{-1}y.$$

Ebből

$$xa = yb$$

adódik, s ezért

$$Sa \cap Sb \neq \emptyset.$$

Tehát  $S$  jobb reverzibilis félcsoporth.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  jobb egyszerűsítéses és jobb reverzibilis félcsoporth. A 13.4. Tétel szerint feltehetjük, hogy van olyan  $G$  csoport, amelynek  $S$  részfélcsoporthja. Legyen

$$G' = \{a^{-1}b : a, b \in S'\}.$$

Megmutatjuk, hogy  $G'$  a  $G$  csoport egy részcsoportja, amiből már következik, hogy  $G'$  az  $S$  félcsoporth bal hányadoscsoportja. Ha

$$a^{-1}b \in G',$$

akkor

$$(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in G'.$$

Tehát  $G'$  zárt az inverzképzésre nézve. Legyenek

$$a^{-1}b, c^{-1}d \in G'$$

tetszőleges elemek. Mivel  $S'$  jobb reverzibilis, ezért vannak olyan  $x, y \in S'$  elemek, amelyekre

$$xb = yc$$

teljesül. Akkor viszont  $G$ -ben

$$bc^{-1} = x^{-1}y,$$

és így

$$a^{-1}bc^{-1}d = a^{-1}x^{-1}yd = (xa)^{-1}(yd) \in G'.$$

Tehát  $G'$  zárt a  $G$ -beli műveletre nézve. Tehát  $G'$  a  $G$  egy részcsoportja.  $\square$

**13.7. Tétel** *Jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoporth bármely két  $(G_1; \cdot)$  és  $(G_2; \circ)$  bal hányadoscsoportjai esetén létezik  $G_1$ -nek  $G_2$ -re olyan izomorfizmusa, amely  $S$  elemeit fixen hagyja.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $(G_1; \cdot)$  és  $(G_2; \circ)$  egy egyszerűsítéses, jobb reverzibilis  $S$  félcsoporth bal hányadoscsoportjai. Legyen

$$\phi(a^{-1} \cdot b) = a^{-1} \circ b.$$

Megmutatjuk, hogy  $\phi$  a  $G_1$ -nek  $G_2$ -re való izomorfizmusa. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy  $\phi$  injektív. Tegyük fel, hogy

$$\phi(a^{-1} \cdot b) = \phi(c^{-1} \cdot d)$$

valamely  $a, b, c, d \in S$  elemekre. Akkor

$$a^{-1} \circ b = c^{-1} \circ d,$$

amiből

$$b = a \circ c^{-1} \circ d$$

adódik. Mivel  $S$  jobb reverzibilis, ezért vannak olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyekre

$$xa = yc$$

és így

$$a \circ c^{-1} = x^{-1} \circ y,$$

és ezért

$$b = x^{-1} \circ y \circ d.$$

Ebből pedig

$$b \circ d^{-1} = x^{-1} \circ y,$$

azaz

$$xb = yd$$

adódik. Ez viszont  $G_1$ -ben a

$$b \cdot d^{-1} = x^{-1} \cdot y,$$

azaz a

$$b = x^{-1} \cdot y \cdot d$$

egyenlőséget eredményezi. A fenti  $xa = yc$  egyenlőségből

$$x^{-1} \cdot y = a \cdot c^{-1}$$

adódik, s ezért

$$b = a \cdot c^{-1} \cdot d.$$

Így

$$a^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot d.$$

Tehát  $\phi$  injektív.

Legyenek

$$a^{-1} \cdot b, c^{-1} \cdot d \in G_1$$

tetszőleges elemek. Mivel  $S$  jobb reverzibilis, ezért megadhatók olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyekre

$$xb = yc,$$

és így

$$b \cdot c^{-1} = x^{-1} \cdot y \text{ és } b \circ c^{-1} = x^{-1} \circ y$$

teljesül. Ennek alapján

$$(a^{-1} \cdot b) \cdot (c^{-1} \cdot d) = (xa)^{-1} \cdot (yd) \text{ és } (a^{-1} \circ b) \circ (c^{-1} \circ d) = (xa)^{-1} \circ (yd).$$

Tehát

$$\phi((a^{-1} \cdot b) \cdot (c^{-1} \cdot d)) = \phi((xa)^{-1} \cdot (yd)) = (xa)^{-1} \circ (yd),$$

és

$$\begin{aligned} \phi(a^{-1} \cdot b) \circ \phi(c^{-1} \cdot d) &= (a^{-1} \circ b) \circ (c^{-1} \circ d) = a^{-1} \circ (b \circ c^{-1}) \circ d = \\ &= a^{-1} \circ (x^{-1} \circ y) \circ d = (xa)^{-1} \circ (yd). \end{aligned}$$

Tehát  $\phi$  homomorfizmus. Következésképpen  $\phi$  a  $G_1$  csoportnak a  $G_2$  csoportra való izomorf leképezése. Az világos, hogy  $\phi$  az  $S$  elemeit fixen hagyja.  $\square$

## Feladatok

**13.1.** (Megoldás: 17.39.) Mutassuk meg, hogy egy gyengén kommutatív félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be csoportba, ha egyszerűsítéses.

**13.2.** (Megoldás: 17.40.) Mutassuk meg, hogy ha egy  $S$  félcsoport beágyazható egy periodikus csoportba, akkor  $S$  is periodikus csoport!

## 14. fejezet

# Félcsoportok beágyazása csoportok uniójába

**14.1. Definíció** Egy  $S$  félcsoportról azt mondjuk, hogy bal [jobb] szeparatív, ha az  $ab = a^2$  és  $ba = b^2$  [  $ab = b^2$  és  $ba = a^2$  ] feltételekből  $a = b$  következik minden  $a, b \in S$  elemre. Egy olyan félcsoportot, amely bal szeparatív és egyben jobb szeparatív is, szeparatív félcsoportnak nevezünk. Egy  $S$  félcsoportot gyengén szeparatív félcsoportnak nevezünk, ha  $a^2 = ab = b^2$  az  $a = b$  teljesülését eredményezi tetszőleges  $a, b \in S$  elemekre.

Világos, hogy minden bal [jobb, gyengén] egyszerűsítéssel félcsoport bal [jobb, gyengén] szeparatív. A gyengén szeparatív félcsoportok fontosságára utal a következő tétel.

**14.2. Tétel** Ha egy  $S$  félcsoport beágyazható egy olyan félcsoportba, amely csoportok uniója, akkor  $S$  gyengén szeparatív.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoportot be lehet ágyazni egy  $H$  félcsoportba, amely részcsoportjainak uniója. Azonosítsuk  $S$ -et  $H$  azon részfélcsoportjával, amellyel az  $S$  izomorf. A 1.42. Tétel szerint  $H$  diszjunkt részcsoportok uniója. Legyenek  $a, b \in S \subseteq H$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a^2 = ab = b^2.$$

Ekkor  $a$  és  $b$  a  $H$  félcsoport ugyanazon részcsoportjának elemei. Beszorozva balról a fenti egyenlőség bal oldali részét az  $a$  elem szóban forgó részcsoportbeli inverzával, azt kapjuk, hogy

$$a = b.$$

Tehát  $S$  gyengén szeparatív. □

A következő részben megmutatjuk, hogy kommutatív félcsoporthok esetén a csoportok uniójaként előálló félcsoporthba való beágyazhatóságnak nem csak szükséges, hanem elégsége feltétele is a gyengén szeparativitás. Ehhez viszont néhány előkészítő eredményre van szükségünk. Ezért először ezeket tárgyaljuk.

A 10.18. Következmény szerint minden kommutatív félcsoporth előáll kommutatív arkhimédeszi félcsoporthok félhálójaként. A következőkben a gyengén szeparatív kommutatív félcsoporthokat fogjuk jellemezni az ezen félháló-felbontásban szereplő arkhimédeszi komponensek segítségével. Mindenekelőtt bebizonyítunk egy tételt, amely megmutatja, hogyan konstruálhatjuk meg a kommutatív félcsoporthok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciáját.

## 14.1. Kommutatív félcsoporthok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája

**14.3. Tétel** *Tetszőleges kommutatív  $S$  félcsoporth esetén*

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : (\exists n, m \in \mathbb{N}^+) ab^m = b^{m+1}, ba^n = a^{n+1}\}$$

*az  $S$  félcsoporth legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  tetszőleges kommutatív félcsoporth. Az világos, hogy  $\sigma$  reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy  $\sigma$  tranzitív is. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy ha

$$ab^m = b^{m+1}, ba^n = a^{n+1}$$

teljesül valamely  $a, b \in S$  elemre és  $m, n$  pozitív egészre, akkor mindig van olyan  $t$  pozitív egész szám (pl.  $t = \max\{m, n\}$ ), hogy

$$ab^t = b^{t+1}, ba^t = a^{t+1}.$$

Legyenek  $a, b, c \in S$  tetszőleges elemek az

$$a \sigma b, \text{ és } b \sigma c$$

feltétellel. Akkor léteznek olyan  $n$  és  $m$  pozitív egész számok, melyekre

$$ab^n = b^{n+1}, ba^n = a^{n+1}$$

és

$$bc^m = c^{m+1}, cb^m = b^{m+1}.$$

Legyen

$$k = (n+1)(m+1) - 1 = n(m+1) + m.$$



Akkor

$$\begin{aligned} ac^k &= ac^{n(m+1)}c^m = a(bc^m)^nc^m = ab^nc^{m(n+1)} = \\ &= b^{n+1}c^{m(n+1)} = (bc^m)^{n+1} = c^{(m+1)(n+1)} = c^{k+1}. \end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$ca^k = a^{k+1}.$$

Így

$$a \sigma c.$$

A következő lépésként megmutatjuk, hogy  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája. Mivel  $S$  kommutatív félcsoporth, ezért elegendő azt megmutatni, hogy  $\sigma$  az  $S$  egy jobbkongruenciája. Legyenek  $a, b, c \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a \sigma b.$$

Akkor

$$ab^n = b^{n+1}, \quad ba^n = a^{n+1}$$

valamely  $n$  pozitív egész számra. Akkor

$$(ac)(bc)^n = ab^nc^{n+1} = b^{n+1}c^{n+1} = (bc)^{n+1}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$(bc)(ac)^n = (ac)^{n+1}.$$

Következésképpen

$$ac \sigma bc.$$

Tehát  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth egy jobbkongruenciája. Megmutatjuk, hogy  $\sigma$  gyengén szeparatív kongruencia. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a^2 \sigma ab \sigma b^2.$$

Ekkor léteznek olyan  $m$  és  $n$  pozitív egész számok, melyekre

$$(ab)(a^2)^m = (a^2)^{m+1} \text{ és } (ab)(b^2)^n = (b^2)^{n+1}.$$

Akkor viszont

$$ba^{2m+1} = a^{2m+2} \text{ és } ab^{2n+1} = b^{2n+2}.$$

Így

$$a \sigma b.$$

Tehát  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth egy gyengén szeparatív kongruenciája.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy  $\sigma$  az  $S$  legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája. Ehhez tekintsük  $S$  egy tetszőleges gyengén szeparatív  $\varrho$  kongruenciáját. Tegyük fel, hogy

$$a \sigma b$$

teljesül az  $S$  valamely  $a$  és  $b$  elemeire. Meg fogjuk mutatni, hogy  $a \varrho b$ . Az  $a$  és  $b$  elemekre tett feltétel szerint megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy

$$ab^n = b^{n+1}, \quad ba^n = a^{n+1}.$$

Ekkor persze

$$ab^n \varrho b^{n+1} \text{ és } ba^n \varrho a^{n+1}.$$

Ha  $n = 1$ , akkor

$$a^2 \varrho ab \varrho b^2,$$

amiből a  $\varrho$  kongruencia gyengén szeparatív tulajdonsága miatt

$$a \varrho b$$

következik. Tehát feltehetjük, hogy  $n \geq 2$ . Akkor ( $n = 2$  esetén az  $ab^{n-2} = ab^0$  szorzatot  $a$ -nak tekintve)

$$\begin{aligned} (ab^{n-1})^2 &= (ab^{n-2})(ab^n) \varrho (ab^{n-2})b^{n+1} = (ab^{n-1}b^n = \\ &= (ab^n)b^{n-1} \varrho b^{n+1}b^{n-1} = (b^n)^2. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenlőségekből, az  $x = ab^{n-1}$  és  $y = b^n$  jelöléseket bevezetve, a következő adódik:

$$x^2 \varrho xy \varrho y^2.$$

Mivel  $\varrho$  gyengén szeparatív kongruencia, ezért

$$a \varrho b,$$

azaz

$$ab^{n-1} \varrho b^n.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$ba^{n-1} \varrho a^n.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az

$$ab^n \varrho b^{n+1} \text{ és } ba^n \varrho a^{n+1}$$

feltételből következik az

$$ab^{n-1} \varrho b^n \text{ és } ba^{n-1} \varrho a^n$$

eredmény. A gondolatmenetet tovább folytatva, végül is azt kapjuk, hogy

$$a^2 \varrho ab \varrho b^2,$$

amiből a  $\varrho$  kongruencia gyengén szeparatív tulajdonsába miatt

$$a \varrho b$$

következik. Tehát

$$\sigma \subseteq \varrho,$$

azaz  $\sigma$  az  $S$  félcsoporth legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája.  $\square$

**14.4. Következmény** *Ha  $a$  és  $b$  egy kommutatív, gyengén szeparatív  $S$  félcsoporth két olyan eleme, amelyekre  $ab^m = b^{m+1}$  és  $ba^n = a^{n+1}$  teljesül valamely  $m$  és  $n$  pozitív egész számokkal, akkor  $a = b$ .*

*Bizonyítás.* Mivel egy kommutatív gyengén szeparatív  $S$  félcsoporth esetén az  $\iota_S$  identikus reláció szeparatív, ezért  $\sigma \subseteq \iota_S$  az előző tétel miatt. Ebből már következik az állítás.  $\square$

## 14.2. Kommutatív gyengén szeparatív félcsoporthok

**14.5. Tétel** *Egy kommutatív félcsoporth akkor és csak akkor gyengén szeparatív, ha arkhimédeszi komponensei egyszerűsítesek.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $S_i$  ( $i \in I$ ) egy kommutatív  $S$  félcsoporth arkhimédeszi komponensei.

Tegyük fel, hogy  $S$  gyengén szeparatív. Akkor az  $S_i$  ( $i \in I$ ) félcsoporthok mindegyike gyengén szeparatív. Legyenek  $a, b, x \in S_i$  ( $i \in I$ ) tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ax = bx.$$

Mivel  $S_i$  arkhimédeszi félcsoporth, ezért léteznek olyan  $u, v \in S$  elemek, hogy

$$xu = a^m \text{ és } xv = b^n$$

teljesül valamely  $m$  és  $n$  pozitív egész számokra. Akkor

$$a^{m+1} = axu = bxu = ba^m$$

és

$$b^{n+1} = bxv = axv = ab^n.$$

A 14.3. Tétel szerint

$$a \sigma b.$$

Mivel  $S_i$  gyengén szeparatív, ezért a 14.4. Következmény szerint  $a = b$ . Tehát  $S_i$  egyszerűsítéses félcsoporthoz tartozik.

Fordítva, tegyük fel, hogy az  $S_i$  ( $i \in I$ ) arkhimédeszi komponensek egyszerűsítésesek. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek az

$$a^2 = ab = b^2$$

feltétellel. Ha  $a \in S_i$  és  $b \in S_j$ , akkor  $a^2 = b^2$  és  $a^2 \in S_i$ , valamint  $b^2 \in S_j$  miatt  $i = j$  és  $a, b \in S_i$ . Mivel  $S_i$  egyszerűsítéses, ezért az  $a^2 = ab = b^2$  feltételből  $a = b$  következik. Tehát  $S$  gyengén szeparatív.  $\square$

Ezek után rátérhetünk a fejezet fő tételére:

**14.6. Tétel** *Egy kommutatív  $S$  félcsoporthoz akkor és csak akkor ágyazható be olyan félcsoporthoz, amely részcsoportjainak uniója, ha  $S$  gyengén szeparatív.*

*Bizonyítás.* Ha egy  $S$  kommutatív félcsoporthoz beágyazható egy olyan félcsoporthoz, amely részcsoportjainak uniója, akkor a 14.2. Tétel szerint  $S$  gyengén szeparatív.

Fordítva, legyen  $S$  olyan kommutatív félcsoporthoz, amely gyengén szeparatív. A 10.18. Következmény szerint  $S$  előáll  $S_i$  ( $i \in I$ ) arkhimédeszi félcsoporthozok  $Y$  félhálójaként. A 14.5. Tétel szerint minden egyes  $S_i$  félcsoporthoz egyszerűsítéses. Mivel az  $S_i$  félcsoporthozok kommutatívak, ezért a bal oldali ideáljaik mindegyike kétoldali ideál. Mivel egy félcsoporthozban tetszőleges két ideál metszete soha nem üres, ezért az  $S_i$  félcsoporthozok jobb reverzibilisek. Így a 13.6. Tétel szerint minden egyes  $S_i$  félcsoporthoznak van  $G_i$  hányados csoportja ( $G_i$  minden eleme kifejezhető  $ab^{-1}$  alakban valamely  $a, b \in S_i$  elem segítségével;  $ab^{-1} = cd^{-1}$  akkor és csak akkor, ha  $ad = bc$ ). Mivel az  $S_i$  félcsoporthozok páronként diszjunktak, feltehetjük, hogy a  $G_i$  csoportok is ilyenek. Legyen

$$T = \cup_{i \in I} G_i.$$

A  $T$  halmazon definiálunk egy  $\circ$  műveletet a következőképpen: Legyenek  $a \in G_i$  és  $b \in G_j$  ( $i, j \in I$ ) tetszőleges  $T$ -beli elemek. Akkor

$$a = a_1 a_2^{-1} \text{ és } b = b_1 b_2^{-1}$$

valamely  $a_1, a_2 \in S_i$  és  $b_1, b_2 \in S_j$  elemekkel. Legyen

$$a \circ b = (a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1}.$$

Az világos, hogy  $a \circ b \in G_{ij}$ . Megmutatjuk, hogy ha  $a = a_3 a_4^{-1}$  és  $b = b_3 b_4^{-1}$ , akkor  $(a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1} = (a_3 b_3)(a_4 b_4)^{-1}$ , és így az  $a \circ b$  szorzat független az  $a$ , illetve  $b$  elem  $S_i$ , illetve  $S_j$  elemeinek segítségével való előállításától. Valóban, ha  $a$ -ra és  $b$ -re az

$$a = a_3 a_4^{-1} \text{ és } b = b_3 b_4^{-1}$$

előállítás is érvényes, akkor

$$a_1a_4 = a_2a_3 \text{ és } b_1b_4 = b_3b_3,$$

ezért

$$(a_1b_1)(a_4b_4) = (a_2b_2)(a_3b_3)$$

teljesül  $S_{ij}$ -ben. Ekkor viszont

$$(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1} = (a_3b_3)(a_4b_4)^{-1}$$

valóban teljesül  $G_{ij}$ -ben.

A következőkben megmutatjuk, hogy a  $\circ$  művelet asszociatív. Legyenek

$$a = a_1a_2^{-1} \in G_i, \quad b = b_1b_2^{-1} \in G_j, \quad c = c_1c_2^{-1} \in G_k$$

tetszőleges elemek  $(i, j, k \in I)$ . Akkor

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= ((a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}) \circ (c_1c_2^{-1}) = ((a_1b_1)c_1)((a_2b_2)c_2)^{-1} = \\ &= (a_1(b_1c_1))(a_2(b_2c_2))^{-1} = (a_1a_2^{-1}) \circ ((b_1c_1)(b_2c_2)^{-1}) = a \circ (b \circ c). \end{aligned}$$

Így  $T$  olyan félcsoporth, amely a  $G_i$  ( $i \in I$ ) csoportok uniója, és az is igaz, hogy  $T$  részhalmazként tartalmazza  $S$ -et. Már csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $a \circ b$  megegyezik az  $a$  és  $b$  elemek  $S$  félcsoporthbeli  $ab$  szorzatával. Legyenek tehát  $a \in S_i$  és  $b \in S_j$  ( $i, j \in I$ ) tetszőleges elemek. Mivel

$$a = a^2a^{-1} \text{ és } b = b^2b^{-1},$$

ezért  $G_{ij}$ -ben

$$a \circ b = (a^2b^2)(ab)^{-1} = (ab)^2(ab)^{-1} = ab. \quad \square$$

## Feladatok

**14.1.** (Megoldás: 17.41.) Mutassuk meg, hogy minden gyengén szeparatív félcsoporth gyengén redukzív!

**14.2.** (Megoldás: 17.42.) Egy  $S$  félcsoporthot gyengén egyszerűsítésesnek nevezünk, ha tetszőleges  $a, b, c \in S$  elemek esetén az  $ac = bc$  és  $ca = cb$  feltételek együttes teljesüléséből  $a = b$  következik. Mutassuk meg, hogy ha egy gyengén kommutatív  $S$  félcsoporth arkhimédieszi komponensei gyengén egyszerűsítésesek, akkor  $S$  gyengén szeparatív!

## 15. fejezet

# Félcsoportalgebrák

A fejezet első három szakaszában összefoglaljuk a test feletti asszociatív algebrákkal kapcsolatos azon legfontosabb fogalmakat, illetve eredményeket, amelyek a negyedik szakaszban felhasználásra kerülnek a félcsoportalgebrák vizsgálata során.

### 15.1. Véges dimenziós algebrák kitüntetett elemei

**15.1. Definíció** Egy  $\mathbb{F}$  test feletti algebrán olyan  $\mathcal{A} = (A; +, \cdot)$  gyűrűt értünk, amely esetén  $(A; +)$  vektortér  $\mathbb{F}$  felett és tetszőleges  $a, b \in A$  és tetszőleges  $\alpha \in \mathbb{F}$  esetén

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$$

teljesül. Az algebra dimenzióján az algebrának, mint  $\mathbb{F}$  feletti vektortérnek a dimenzióját értjük.

Ebben a jegyzetben mindvégig véges dimenziós algebrákkal fogunk foglalkozni.

**15.2. Definíció** Egy  $\mathcal{A}$  algebra részalgebráján  $\mathcal{A}$ -nak olyan részhalmazát értjük, amely  $\mathcal{A}$ -nak, mint vektortérnek altere, s egyben részgyűrűje  $\mathcal{A}$ -nak, mint gyűrűnek.

Mivel egy vektortér tetszőleges  $B \supset C$  alterei esetén  $\dim B > \dim C$ , ezért ha egy  $\mathcal{A}$  algebra dimenziója  $n \in \mathbb{N}^+$ , akkor  $\mathcal{A}$  részalgebráinak nincs  $n + 1$ -nél hosszabb szigorúan csökkenő lánc.

**15.3. Definíció** Egy  $\mathcal{A}$  algebra ideálján  $\mathcal{A}$ -nak olyan részalgebráját értjük, amely ideálja  $\mathcal{A}$ -nak, mint gyűrűnek.

**15.4. Definíció** Egy  $\mathcal{A}$  algebra  $a$  elemét nilpotens elemnek nevezzük, ha megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, amelyre  $a^n = 0$  teljesül. Az  $a \in \mathcal{A}$  elemet valódi nilpotens elemnek nevezzük, ha minden  $x \in \mathcal{A}$  elem esetén  $xa$  nilpotens elem (ekkor  $ax$  is nilpotens, mert  $(xa)^n = 0$ -ból  $(ax)^{n+1} = a(xa)^n x = 0$  következik).

**15.5. Definíció** Egy algebra  $a$  elemét idempotens elemnek nevezzük, ha  $a^2 = a$ .

**15.6. Tétel** Minden olyan véges dimenziós algebrában, amely tartalmaz legalább egy nem nilpotens elemet, van legalább egy nullától különböző idempotens elem.

*Bizonyítás.* Legyen  $a$  egy  $\mathbb{F}$  test feletti véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra nem nilpotens eleme. Legyen  $n \geq 1$  az  $\mathcal{A}$  dimenziója. Akkor az  $a, a^2, \dots, a^{n+1}$  elemrendszer lineárisan független  $\mathbb{F}$  felett, azaz megadhatók olyan  $\mathbb{F}$ -beli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  elemek, amelyek között van legalább egy elem, amely nem az  $\mathbb{F}$  nulleleme, továbbá teljesül az

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$$

egyenlőség.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $\alpha_1 \neq 0$ . Akkor a fenti egyenlőség

$$\alpha_1 a + ca = 0$$

alakban írható, ahol

$$c = \alpha_2 a + \dots + \alpha_{n+1} a^n.$$

Mivel  $a \neq 0$  és  $\alpha_1 \neq 0$ , ezért

$$c \neq 0.$$

A fenti  $\alpha_1 a + ca = 0$  egyenlőségből

$$a = \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right)a$$

adódik. Ezen utóbbi egyenlőségből

$$a^k = \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right)a^k$$

következik minden  $k$  pozitív egész számra. Így

$$\begin{aligned} \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right)^2 &= -\frac{1}{\alpha_1} \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right) (\alpha_2 a + \dots + \alpha_{n+1} a^n) = \\ &= -\frac{1}{\alpha_1} (\alpha_2 a + \dots + \alpha_{n+1} a^n) = -\frac{c}{\alpha_1}, \end{aligned}$$

azaz  $-c/\alpha_1$  az  $\mathcal{A}$  algebra nullelemtől különböző idempotens eleme.

A következőkben vizsgáljuk azt az esetet, amikor  $\alpha_1 = 0$ . Jelölje  $m_0$  azt a legkisebb indexet, amelyre  $\alpha_{m_0} \neq 0$ , továbbá jelölje  $m_0 + h \leq n + 1$  azt a legnagyobbat azon  $j \leq n + 1$  index közül, amelyre  $\alpha_j \neq 0$ . Tehát a fenti

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$$

egyenlőség tényleges alakja

$$\alpha_{m_0}a^{m_0} + \cdots + \alpha_{m_0+h}a^{m_0+h} = 0,$$

amely legfeljebb  $h + 1$  nem nulla tagot tartalmaz. Szorozzuk be ezt az egyenlőséget rendre  $a$ -val,  $a^2$ -tel, és így tovább,  $a^{(m_0-1)h}$ -val. Így, az eredeti mellett,  $(m_0 - 1)h$  új egyenlőség is teljesül. Ezen új és a kiinduló egyenletekben az  $a$  elem legkisebb hatványa  $m_0$ , a legnagyobb hatványa pedig  $m_0 + h + (m_0 - 1)h = m_0(h + 1)$ . Jelöljük az  $a^{m_0}$  hatványt  $b$ -vel. Akkor a vizsgált egyenletekben  $b$  legkisebb hatványa 1 (ez a kiinduló egyenlet első tagja), legnagyobb hatványa pedig  $h + 1$  (ez az új egyenletek közül az utolsó egyenlet utolsó tagja). Az egyenletekben az  $a$  elemnek legfeljebb  $m_0h + 1$  számú különböző hatványa szerepel; ezek közül legfeljebb  $h + 1$  olyan van, ahol a kitevő az  $m_0$  pozitív egész számszorosa (ezek a  $b$  elem különböző pozitív egész kitevős hatványai), és legfeljebb  $(m_0 - 1)h$  olyan, ahol a kitevő nem osztható  $m_0$ -al. Mivel ezen utóbbi hatványok száma nem nagyobb az egyenletek számánál, ezért ezek kifejezhetők a  $b$  pozitív egész kitevős hatványaival, és így a kiinduló egyenlet

$$\alpha_{m_0}b + \cdots + \alpha_rb^r = 0$$

alakra hozható, amelyben  $\alpha_{m_0} \neq 0$  és még legalább egy másik együttható sem egyenlő a nullával. Mivel a  $b$  elem nem nilpotens, ezért a bizonyítás első részét a  $b$  elemre alkalmazva (az ottani  $a$  helyett) adódik, hogy az  $\mathcal{A}$  algebrának van nem nulla idempotens eleme.  $\square$

**15.7. Tétel** *Legyen  $\mathcal{A}$  olyan véges dimenziós algebra, amelynek nem minden eleme nilpotens. Akkor  $\mathcal{A}$  tetszőleges nem valódi a nilpotens eleméhez van olyan  $0 \neq e \in \mathcal{A}$  idempotens elem és olyan  $x \in \mathcal{A}$  elem, hogy  $ax = e$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $a \in \mathcal{A}$  tetszőleges nem valódi nilpotens elem. Akkor  $a\mathcal{A}$  az  $\mathcal{A}$  algebra egy részalgebrája. Ha ez nem tartalmaz idempotens elemet, akkor a 15.6. Tétel miatt minden eleme nilpotens. Ez viszont azt jelenti, hogy  $a$  valódi nilpotens elem, ami ellentmond a feltételnek. Így  $a\mathcal{A}$  tartalmaz legalább egy nullától különböző  $e$  idempotens elemet, s ezért  $ax = e$  teljesül valamely  $x \in \mathcal{A}$  elemre.  $\square$

**15.8. Tétel** *Egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra összes valódi nilpotens elemeinek halmaza az  $\mathcal{A}$  algebrának egy ideálja.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{A}$  egy  $\mathbb{F}$  test feletti véges dimenziós algebra. Először megmutatjuk, hogy ha  $a$  az  $\mathcal{A}$  algebra valódi nilpotens eleme, akkor tetszőleges  $\alpha \in \mathbb{F}$  elem esetén  $\alpha a$  is valódi nilpotens elem. Legyen  $a \in \mathcal{A}$  tetszőleges valódi nilpotens elem. Akkor minden  $s \in \mathcal{A}$  és minden  $\alpha \in \mathbb{F}$  esetén megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy

$$0 = ((\alpha s)a)^n = (s(\alpha a))^n,$$



amiből már következik, hogy  $aa$  valódi nilpotens elem.

Az előzőekből az is következik, hogy valamely  $a$  valódi nilpotens elem ellentettje, azaz  $-a$  is valódi, hiszen  $-a = (-1)a$ . Itt  $-1$  jelöli az  $\mathbb{F}$  test egységelemének ellentettjét.

A következőkben megmutatjuk, hogy ha  $a$  az  $\mathcal{A}$  algebra valódi nilpotens eleme, akkor tetszőleges  $s \in \mathcal{A}$  elem esetén  $sa$  és  $as$  is valódi nilpotens elemek. Ha  $a$  valódi nilpotens elem, akkor tetszőleges  $x, s \in \mathcal{A}$  elemek esetén megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy

$$0 = ((xs)a)^n = (x(sa))^n.$$

Tehát  $sa$  valódi nilpotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy  $as$  is valódi nilpotens elem.

Már csak annak bizonyítása van hátra, hogy az  $\mathcal{A}$  algebra valódi nilpotens elemeinek összege is valódi nilpotens. Legyenek  $a$  és  $b$  az  $\mathcal{A}$  algebra valódi nilpotens elemei. Tegyük fel, indirekt módon, hogy  $a + b$  nem valódi nilpotens elem. Akkor a 15.7. Tétel miatt van  $\mathcal{A}$ -nak olyan  $e \neq 0$  idempotens eleme, hogy valamely  $x \in \mathcal{A}$  elemre

$$(a + b)x = ax + bx = e.$$

A fentiek miatt  $ax$  és  $bx$  valódi nilpotens elemek. Így  $eaxe$  és  $ebxe$  nilpotens elemek. Ha  $n$  jelöli  $eaxe$  nilpotenciájának fokát, akkor

$$0 = (eaxe)^n = (e - ebxe)^n = e - cbxe,$$

azaz

$$e = cbxe$$

teljesül valamely  $c \in \mathcal{A}$  elemmel. Ez viszont ellentmondás, mert  $cbxe$  valódi nilpotens elem,  $e$  pedig egy nem nulla idempotens elem. Tehát két valódi nilpotens elem összege is szükségképpen valódi nilpotens elem. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.  $\square$

Egy  $\mathcal{A}$  algebra valamely  $\mathcal{B}$  ideálja esetén a  $\mathcal{B}$  elemeiből képezhető összes  $k$ -tényezős szorzatok ( $k$  egy pozitív egész szám) halmaza által generált altér az  $\mathcal{A}$  algebra ideálja. Ezt az ideált a  $\mathcal{B}$  ideál  $k$ -dik hatványának nevezzük (és  $\mathcal{B}^k$  módon jelöljük).

## 15.2. Véges dimenziós algebra nilpotens ideáljai

**15.9. Definíció** Egy  $\mathcal{A}$  algebra  $\mathcal{B}$  ideálját nil ideálnak nevezzük, ha minden eleme nilpotens. Egy  $\mathcal{B}$  ideált nilpotens ideálnak nevezünk, ha megadható olyan  $k$  pozitív egész szám, amelyre  $\mathcal{B}^k = \{0\}$  teljesül, azaz a  $\mathcal{B}$  elemiből képezhető összes  $k$ -tényezős szorzat egyenlő az  $\mathcal{A}$  nullelemével.

Az nyilvánvaló, hogy egy algebra minden nilpotens ideálja nil. Az állítás megfordítása általában nem igaz. Véges dimenziójú algebrák esetén más a helyzet. Érvényes a következő tétel.

**15.10. Tétel** Véges dimenziós algebra minden nil ideálja nilpotens.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{B}$  egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra egy ideálja. Legyen a  $\mathcal{B}$  dimenziója  $n$ . Legyenek  $b_1, \dots, b_{n+2} \in \mathcal{B}$  tetszőleges elemek. Az világos, hogy

$$b_1\mathcal{B}, b_1b_2\mathcal{B}, \dots, b_1b_2 \cdots b_{n+1}\mathcal{B}, b_1b_2 \cdots b_{n+1}b_{n+2}\mathcal{B}$$

a  $\mathcal{B}$  ideál olyan részalgebrái, amelyekre

$$b_1\mathcal{B} \supseteq b_1b_2\mathcal{B} \supseteq \cdots \supseteq b_1b_2 \cdots b_{n+1}\mathcal{B} \supseteq b_1b_2 \cdots b_{n+1}b_{n+2}\mathcal{B}$$

teljesül. Mivel ennek a láncnak a hossza  $n + 2$ , ezért ez a lánc nem lehet szigorúan monoton csökkenő, azaz van olyan  $k \in \{1, \dots, n + 1\}$  index, hogy

$$b_1 \cdots b_k \mathcal{B} = b_1 \cdots b_k b_{k+1} \mathcal{B}.$$

Mivel

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} \in b_1 \cdots b_k \mathcal{B},$$

ezért

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} \in b_1 \cdots b_k b_{k+1} \mathcal{B},$$

és ezért van olyan  $x \in \mathcal{B}$  elem, amelyre

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} = b_1 \cdots b_k b_{k+1} x$$

teljesül. Ebből az egyenlőségből

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} = b_1 \cdots b_k b_{k+1} x^t$$

adódik minden pozitív egész  $t$  kitevőre. Mivel  $\mathcal{B}$  nil ideál, ezért  $x^m = 0$  valamely pozitív egész  $m$  kitevőre. Ebből pedig

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} = 0$$

következik. Mivel  $k + 1 \leq n + 2$ , ezért

$$b_1 \cdots b_k \cdots b_{n+2} = 0,$$

és így

$$\mathcal{B}^{n+2} = \{0\}.$$

□

**15.11. Megjegyzés** Mivel egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra minden  $\mathcal{B}$  részalgebrája is véges dimenziós algebra és  $\mathcal{B}$  ideálja önmagának, ezért ha  $\mathcal{B}$  minden eleme nilpotens, akkor  $\mathcal{B}$  nilpotens, azaz megadható olyan  $k$  pozitív egész szám, hogy  $\mathcal{B}$  elemiből képezett  $k$ -tényezős szorzatok mindegyike egyenlő a nullelemmel.

**15.12. Megjegyzés** Az világos, hogy egy algebra valódi nilpotens elemeinek mindegyike nilpotens. A 15.8. Tétel szerint egy véges dimenziós algebra összes valódi nilpotens elemei ideált alkotnak. Így ebben az ideálban minden elem nilpotens. Következésképpen ez az ideál nilpotens ideál.

Egy  $\mathcal{A}$  algebrát nilpotens algebrának nevezünk, ha  $\mathcal{A}^k = \{0\}$  valamely  $k$  pozitív egész számra. Véges dimenziójú algebra esetén ez azzal ekvivalens (lásd a 15.10. Tételt), hogy minden eleme nilpotens.

**15.13. Tétel** Véges dimenziós nilpotens algebra minden epimorf képe is nilpotens.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{A}$  egy véges dimenziós nilpotens algebra és  $\varphi$  az  $\mathcal{A}$ -nak egy  $\mathcal{T}$  algebrára való homomorfizmusa. Legyen  $\varphi(x) \in \mathcal{T}$  ( $x \in \mathcal{A}$ ) tetszőleges elem. Akkor van olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy

$$(\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = \varphi(0_A) = 0_T,$$

ahol  $0_A$  és  $0_T$  jelöli az  $\mathcal{A}$ , illetve a  $\mathcal{T}$  algebra nullelemét. Így  $\mathcal{T}$  minden eleme nilpotens. Mivel  $\mathcal{T}$  is véges dimenziós algebra, ezért a 15.10. Tétel miatt  $\mathcal{T}$  nilpotens.  $\square$

**15.14. Tétel** Ha egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebrának  $\mathcal{B}$  olyan nilpotens ideálja, hogy az  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  faktoralgebra nilpotens, akkor  $\mathcal{A}$  is nilpotens.

*Bizonyítás.* Jelölje  $\varphi$  az  $\mathcal{A}$  algebrának az  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  faktoralgebrára való természetes homomorfizmusát. Legyen  $a \in \mathcal{A}$  tetszőleges elem. Akkor van olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy

$$(\varphi(a))^n = 0_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$a^n \in \mathcal{B},$$

és ezért

$$(a^n)^k = 0_A$$

valamely pozitív egész  $k$  kitevőre. Tehát  $\mathcal{A}$  minden eleme nilpotens. A 15.10. Tétel miatt  $\mathcal{A}$  nilpotens algebra.  $\square$

**15.15. Tétel** Véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra összes nilpotens ideáljainak  $\mathcal{U}$  összege szintén nilpotens;  $\mathcal{U}$  tartalmazza  $\mathcal{A}$  összes nilpotens bal oldali ideálját és összes nilpotens jobb oldali ideálját is.

*Bizonyítás.* Legyenek  $\mathcal{B}$  és  $\mathcal{C}$  egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra nilpotens ideáljai. Akkor

$$(\mathcal{B} + \mathcal{C})/\mathcal{B} \cong \mathcal{C}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}).$$

A 15.14. Tétel miatt  $\mathcal{B} + \mathcal{C}$  nilpotens ideál. Tehát  $\mathcal{A}$ -ban véges sok nilpotens ideál összege is nilpotens.

Legyen  $a \in \mathcal{U}$  tetszőleges. Akkor megadhatók olyan  $\mathcal{A}$ -beli  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  nilpotens ideálok, hogy

$$a = a_1 + \dots + a_k$$

valamely  $a_i \in \mathcal{A}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) elemekre. Mivel az  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  nilpotens ideálok összege nilpotens, ezért az  $a \in \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_k$  elem is nilpotens. Tehát  $\mathcal{U}$  minden eleme nilpotens.

A 15.10. Tétel miatt  $\mathcal{U}$  nilpotens ideál.

Legyen  $\mathcal{R}$  az  $\mathcal{A}$  algebra egy nilpotens jobb oldali ideálja. Akkor  $\mathcal{R} + \mathcal{AR}$  az  $\mathcal{A}$  algebra egy ideálja. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$(\mathcal{R} + \mathcal{AR})^n \subseteq \mathcal{R}^n + \mathcal{AR}^n$$

teljesül tetszőleges  $n$  pozitív egész szám esetén. Mivel  $\mathcal{R}$  nilpotens, ezért az előző tartalmazásból következik, hogy  $\mathcal{R} + \mathcal{AR}$  is nilpotens. Mivel

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} + \mathcal{AR},$$

ezért  $\mathcal{R}$  minden eleme nilpotens, és így a 15.11. Megjegyzés szerint  $\mathcal{R}$  nilpotens, azaz  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$ . Hasonlóan igazolható, hogy  $\mathcal{U}$  tartalmazza az  $\mathcal{A}$  algebra összes nilpotens bal oldali ideálját is.  $\square$

**15.16. Definíció** Egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra összes nilpotens ideáljának összegét az algebra nilradikáljának nevezzük, és  $\mathcal{R}$ -rel jelöljük.

**15.17. Tétel** Véges dimenziós algebra nilradikálja megegyezik a valódi nilpotens elemek halmazával.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{R}$  egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra nilradikálja. Jelölje  $\mathcal{V}$  az  $\mathcal{A}$  valódi nilpotens elemeinek halmazát. A 15.12. Megjegyzés miatt

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}.$$

Ha  $r \in \mathcal{R}$  és  $a \in \mathcal{A}$ , akkor  $ar \in \mathcal{R}$  és így  $\mathcal{R}$  nilpotens volta miatt  $ar$  nilpotens elem, ami miatt  $a$  valódi nilpotens elem, s ezért  $a \in \mathcal{V}$ . Tehát

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}.$$

Következésképpen

$$\mathcal{R} = \mathcal{V}. \quad \square$$

## 15.3. Féligegyszerű algebrák

**15.18. Definíció** Egy  $\mathcal{A}$  algebrát féligegyszerű algebrának nevezünk, ha nilradikálja triviális, azaz  $\mathcal{R} = \{0\}$ .

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbiakat:

**15.19. Tétel** (Wedderburn 1. tétele) Egy véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha előáll véges sok olyan  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) kétoldali ideáljának

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$$

direkt összegeként, amelyek mindegyike egyszerű algebra (azaz nincs valódi ideáljuk). A direkt felbontásban szereplő ideálok az  $\mathcal{A}$  algebra által egyértelműen meg vannak határozva.

A 15.19. Tételben szereplő felbontásban előforduló  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ideálokat az  $\mathcal{A}$  algebra egyszerű komponenseinek nevezzük. Ezek számát  $Cl(\mathcal{A})$ -val jelöljük és az  $\mathcal{A}$  algebra osztályszámának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a 15.19. Tételben szereplő  $\mathcal{A}$  algebra bármely nem-nulla  $\mathcal{B}$  ideálja esetén megadhatók az

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$$

felbontásban szereplő ideálok közül olyanok, amelyek úniója a  $\mathcal{B}$  ideál.

**15.20. Tétel** Legyen

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \dots \supset \mathcal{B}_m \supset \mathcal{B}_{m+1} = \{0\}$$

egy  $\mathbb{F}$  test feletti véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra relatív ideálsorozata (azaz  $\mathcal{B}_{i+1}$  ideálja  $\mathcal{B}_i$ -nek ( $i = 1, \dots, m$ )). Az  $\mathcal{A}$  algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a  $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) faktoralgebrák mindegyike féligegyszerű. Ebben az esetben

$$Cl(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n Cl(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i+1}).$$

**15.21. Tétel** (Wedderburn 2. tétele) Egy  $\mathbb{F}$  test feletti véges dimenziós  $\mathcal{A}$  algebra akkor és csak akkor egyszerű, ha izomorf egy  $\mathbb{F}$  test feletti divízióalgebra (olyan algebra, amely ferdetest) elemeiből képezett  $n \times n$ -típusú mátrixok teljes mátrixgyűrűjével, ahol  $n$  egy pozitív egész szám. Az  $n$  egyértelműen, a divízióalgebra pedig izomorfia erejéig egyértelműen van meghatározva az  $\mathcal{A}$  algebra által.

## 15.4. Félcsoportalgebrák

**15.22. Definíció** Legyen  $S$  egy félcsoport,  $\mathbb{F}$  pedig egy test. Az  $S$  félcsoport  $\mathbb{F}$  feletti algebráján egy olyan  $\mathbb{F}$  feletti  $\mathcal{A}$  algebrát értünk, amely tartalmaz egy olyan  $\bar{S}$  részhalmazt, amely bázisa  $\mathcal{A}$ -nak, mint vektortérnek, és egyben az  $\mathcal{A}$  algebra multiplikatív félcsoportjának egy olyan részfélcsoportja, amely izomorf  $S$ -sel.

**15.23. Tétel** Tetszőleges  $S$  félcsoport és tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén létezik  $S$ -nek  $\mathbb{F}$  feletti algebrája.

*Bizonyítás.* Tetszőleges  $S$  félcsoport és tetszőleges  $\mathbb{F}$  esetén jelölje  $\mathbb{F}[S]$  az  $S$  félcsoportnak az  $\mathbb{F}$  testbe való összes olyan

$$a : s \mapsto a(s)$$

leképezéseinek halmazát, amelyek esetén az  $S$  mindazon  $s$  elemeinek halmaza, amelyekre  $a(s) \neq 0$  teljesül, véges vagy üres. Nem nehéz ellenőrizni, hogy  $\mathbb{F}[S]$  kommutatív csoportot alkot az

$$a + b : s \mapsto a(s) + b(s)$$

műveletre nézve. Továbbá  $\mathbb{F}[S]$  vektortér  $\mathbb{F}$  felett, ha egy  $\alpha \in \mathbb{F}$  skalárral való szorzást az alábbi módon értelmezzük:

$$(\alpha a) : s \mapsto \alpha a(s).$$

Definiáljunk az  $\mathbb{F}[S]$  halmazon egy szorzást a következőképpen: valamely  $a, b \in \mathbb{F}[S]$  elemek szorzata legyen az a  $c \in \mathbb{F}[S]$  elem, amelyre

$$c(s) = \sum_{xy=s} a(x)b(y)$$

teljesül tetszőleges  $s \in S$  elem esetén. Nem nehéz belátni, hogy ezzel a művelettel  $\mathbb{F}[S]$  egy  $\mathbb{F}$  feletti algebra.

Tetszőleges  $s \in S$  elem esetén jelölje  $\bar{s}(t)$  az  $\mathbb{F}[S]$  következő elemét:

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = s \\ 0, & \text{ha } t \neq s. \end{cases}$$

Itt 1, illetve 0 az  $\mathbb{F}$  test egységelemét, illetve nullelemét jelöli. Nem nehéz belátni, hogy ezen  $\bar{s}(t)$  leképezések  $\bar{S}$  halmaza az  $\mathbb{F}[S]$  algebra multiplikatív félcsoportjának olyan részfélcsoportja, amely izomorf az  $S$  félcsoporttal ( $s \mapsto \bar{s}$  egy izomorfizmus). Továbbá,  $\bar{S}$  az  $\mathbb{F}[S]$  egy bázisa.  $\square$

Ha  $a \in \mathbb{F}[S]$  tetszőleges, és  $s_1, \dots, s_k$  az  $S$  mindazon elemeinek halmaza, amelyekre  $a(s_i) \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ), akkor

$$a = \alpha_1 \bar{s}_1 + \dots + \alpha_k \bar{s}_k, \quad (15.1)$$

ahol  $\alpha_i = a(s_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

Ha az  $\bar{S}$  elemeit azonosítjuk az  $S$  elemeivel, akkor a (15.1) egyenlőség a következő alakban is írható:

$$a = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k.$$

Véges  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  félcsoporth esetén  $\mathbb{F}[S]$  tetszőleges  $a$  eleme

$$a = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$$

alakban írható, mert azoknak a tagoknak az együtthatói, amelyek ténylegesen nem szerepelnek az összegben választhatók 0-nak. Így ha  $a = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$  és  $b = \beta_1 s_1 + \dots + \beta_n s_n$  az  $\mathbb{F}[S]$  tetszőleges elemei, valamint  $\xi \in \mathbb{F}$ , akkor

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) s_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) s_n,$$

$$\xi a = (\xi \alpha_1) s_1 + \dots + (\xi \alpha_n) s_n,$$

$$ab = \gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_n s_n,$$

ahol  $\gamma_k = 0$ , ha  $s_k \notin S^2$ , egyébként pedig

$$\gamma_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n; s_i s_j = s_k} \alpha_i \beta_j.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt (lásd az [5] könyv 5.2 alfejezetében található Maschke's Theorem néven szereplő tételt).

**15.24. Tétel** (Maschke-tétel) *Legyen  $G$  egy véges csoport,  $\mathbb{F}$  pedig egy tetszőleges test. Az  $\mathbb{F}[G]$  algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az  $\mathbb{F}$  test karakterisztikája nem osztja a  $G$  csoport rendjét.*

**15.25. Definíció** *Legyen  $S$  egy 0-elemes félcsoporth,  $\mathbb{F}$  pedig egy test. Jelölje  $\mathbb{F}_0[S]$  azt az  $\mathbb{F}$  feletti algebrát, melynek van olyan  $B$  bázisa, amelyre  $B \cup \{0\}$  az  $\mathbb{F}_0[S]$  algebra multiplikatív félcsoporthjának az  $S$  félcsoporthtal izomorf részfélcsoporthja.*

Az világos, hogy egy 0-elemes  $S$  félcsoporth esetén  $\mathbb{F}[0]$  az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra egy ideálja. Továbbá az is igaz, hogy  $\mathbb{F}_0[S] \cong \mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0]$ . Az  $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0]$  faktoralgebrában  $B = \{s + \mathbb{F}[0] : s \in S \setminus 0\}$  egy bázis.

**15.26. Megjegyzés** Ha egy  $S$  félcsoporthoz adjungálunk egy nullelemet (függetlenül attól, hogy  $S$ -ben van-e nullelem vagy nincs), akkor az így keletkezett  $S \cup \{0\}$  félcsoporthoz  $\mathbb{F}_0[S \cup \{0\}] \cong \mathbb{F}[S]$  teljesül.

**15.27. Tétel** Bármely  $S$  félcsoporthoz tetszőleges  $T$  ideálja esetén  $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T] \cong \mathbb{F}_0[S/T]$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $T$  az  $S$  félcsoporthoz tetszőleges ideálja. Az világos, hogy  $\mathbb{F}[T]$  ideálja  $\mathbb{F}[S]$ -nek. Ha  $s, t \in S \setminus T$  és  $s \neq t$ , akkor

$$(s + \mathbb{F}[T]) \cap (t + \mathbb{F}[T]) = \emptyset.$$

Ellenkező esetben  $s - t$  az  $\mathbb{F}[T]$ -nek lenne eleme, ami  $s, t \in S \setminus T$  miatt nem lehetséges, hiszen  $\mathbb{F}[T]$  elemei a  $T$  elemeiből  $\mathbb{F}$ -beli együtthatókkal képezett formális összegek. Legyen

$$B = \{s + \mathbb{F}[T] : s \in S \setminus T\}.$$

Világos, hogy  $B \cup \mathbb{F}[T]$  az  $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T]$  algebra multiplikatív félcsoporthjának az  $S/T$  faktorfélcsoporthal izomorf részfélcsoporthja. Az is igaz, hogy  $B$  az  $\mathbb{F}[S]$  algebra bázisa. Így  $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T] \cong \mathbb{F}_0[S/T]$ .  $\square$

**15.28. Tétel** Véges 0-elemes  $S$  félcsoporthoz esetén az  $\mathbb{F}[S]$  algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az  $\mathbb{F}_0[S]$  algebra féligegyszerű.

*Bizonyítás.* Jelölje  $0$  az  $S$  nullelemét. Legyen  $\mathbb{F}$  tetszőleges test. A 15.24. Tétel miatt  $\mathbb{F}[0]$  féligegyszerű. A 15.27. Tétel szerint

$$\mathbb{F}_0[S] \cong \mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0].$$

Mivel

$$\mathbb{F}[S] \supseteq \mathbb{F}[0]$$

az  $\mathbb{F}[S]$  algebra egy relatív ideálsorozata, ezért a 15.20. Tétel szerint  $\mathbb{F}[S]$  akkor és csak akkor féligegyszerű, ha  $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0] \cong \mathbb{F}_0[S]$  féligegyszerű.  $\square$

Egy véges  $S$  félcsoporthoz mindig tartalmaz

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

fősorozatot (lásd a 4.34. Definíciót). A 4.36. Tétel szerint  $S$  bármely két fősorozata egymással izomorf.

**15.29. Tétel** Egy véges  $S$  félcsoporthoz esetén az  $\mathbb{F}[S]$  algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az  $S$  félcsoporthoz tetszőleges

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

fősorozatához tartozó  $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) algebrák mindegyike féligegyszerű (megjegyezzük, hogy  $S_n/\emptyset \cong S_n$ ).



*Bizonyítás.* Legyen

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

egy véges  $S$  félcsoporth fősorozata. Megállapodva abban, hogy  $\mathbb{F}[\emptyset]$  jelölje az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra  $\{0\}$  ideálját, az

$$\mathbb{F}[S] = \mathbb{F}[S_1] \supset \mathbb{F}[S_2] \supset \cdots \supset \mathbb{F}[S_n] \supset \mathbb{F}[S_{n+1}] = \{0\}$$

sorozat az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra ideáljainak egy sorozata. A 15.27. Tétel szerint

$$\mathbb{F}[S_i]/\mathbb{F}[S_{i+1}] \cong \mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]; \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Ugyanakkor

$$\mathbb{F}[S_n]/\mathbb{F}[S_{n+1}] = \mathbb{F}[S_n] \cong \mathbb{F}_0[S_n] = \mathbb{F}_0[S_n/S_{n+1}].$$

A 15.20. Tétel szerint  $\mathbb{F}[S]$  akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a fenti  $\mathbb{F}[S_i]/\mathbb{F}[S_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) faktorok mindegyike féligegyszerű. Így, a 15.28. Tételt is használva,  $\mathbb{F}[S]$  akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az  $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$  algebrák mindegyike féligegyszerű.  $\square$

A 4.33. Definíció szerint egy  $S$  félcsoporthot féligegyszerű félcsoporthnak nevezünk, ha főfaktorai (azaz a fősorozatainak faktorai) egyszerűek vagy 0-egyszerűek.

**15.30. Tétel** *Ha egy véges  $S$  félcsoporth esetén az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra féligegyszerű, akkor az  $S$  félcsoporth féligegyszerű.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  olyan félcsoporth, amely esetén  $\mathbb{F}[S]$  féligegyszerű algebra. Legyen

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

az  $S$  egy fősorozata. A 15.29. Tétel szerint az  $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$  algebrák mindegyike féligegyszerű. A 15.28. Tétel szerint az  $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$  algebrák mindegyike féligegyszerű. Ebből már következik, hogy az  $S_i/S_{i+1}$  faktorfélcsoporthban nem lehet bármely két elem szorzata nulla, mert ha az lenne, akkor az  $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$  algebrában is bármely két elem szorzata a nulla lenne, ami viszont ellentmondana annak a ténynek, hogy az  $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$  algebra féligegyszerű.  $\square$

A fejezet végén bizonyítás nélkül megemlítünk speciális félcsoporthok félcsoporthalgebrájával kapcsolatos néhány tételt (lásd az [5] könyv Theorem 5.21., Corollary 5.24., Corollary 5.25. és Theorem 5.26. eredményeit).

**15.31. Tétel** *Legyen  $S$  egy véges kommutatív félcsoporth,  $\mathbb{F}$  pedig egy test. Az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha  $S$  előáll olyan csoportok uniójaként, melyek rendje nem osztható az  $\mathbb{F}$  test karakterisztikájával.*

**15.32. Tétel** *Ha egy véges egyszerű  $S$  félcsoporth valamely  $\mathbb{F}$  test feletti  $\mathbb{F}[S]$  algebrája féligegyszerű, akkor  $S$  csoport.*

**15.33. Tétel** *Ha egy véges  $S$  félcsoporth valamely  $\mathbb{F}$  test feletti  $\mathbb{F}[S]$  algebrája féligegyszerű, akkor  $S$  magja (azaz  $S$  összes ideáljának metszete) az  $S$  részcsoporthja.*

**15.34. Tétel** *Egy véges inverz  $S$  félcsoporth valamely  $\mathbb{F}$  test feletti  $\mathbb{F}[S]$  algebrája akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az  $\mathbb{F}$  test karakterisztikája 0 vagy olyan prímszám, amely nem osztja  $S$  egyetlen részcsoporthjának rendjét sem.*

## Feladatok

**15.1.** (Megoldás: 17.43.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $G$  véges, kommutatív  $p$ -csoport ( $p$  prímszám) és tetszőleges  $p$ -karakterisztikájú  $\mathbb{F}$  test esetén az  $\mathbb{F}[G]$  csoportalgebra minden bal oldali nullosztója nilpotens.

**15.2.** (Megoldás: 17.44.) Mutassuk meg, hogy ha  $G$  egy véges  $p$ -csoport ( $p$  prímszám) és  $\mathbb{F}$  egy  $p$ -karakterisztikájú test, akkor tetszőleges  $g \in G$  elem esetén  $e - g$  az  $\mathbb{F}[G]$  csoportalgebra nilpotens eleme, ahol  $e$  a  $G$  csoport egységeleme!

## 16. fejezet

# Félcsoportok mátrixrepresentációi

Ebben a fejezetben egy speciális mátrixrepresentációval, véges félcsoportok jobbrekuláris representációjával kapcsolatos mátrixrepresentációval foglalkozunk.

### 16.1. Jobbrekuláris representáció

Legyen  $S$  egy véges félcsoport,  $\mathbb{F}$  pedig egy test. Az  $S \times S$  halmaznak az  $\mathbb{F}$  testbe való egyértelmű  $\mathbf{A}$  leképezéseit  $\mathbb{F}$  test feletti  $S$ -mátrixoknak nevezzük. Ha rögzítjük egy  $n$ -elemű  $S$  félcsoport elemeinek egy

$$\{s_1, \dots, s_n\}$$

sorrendjét, akkor minden  $S$ -mátrix felírható a szokásos "táblázatos" formában: egy  $\mathbf{A}$  mátrixhoz tartozó  $n \times n$ -es táblázat  $i$ -dik sorának  $j$ -dik eleme megegyezik az  $\mathbb{F}$  test  $\mathbf{A}(s_i, s_j)$  elemével. A bizonyítások egyszerűbbé tétele végett a vizsgált  $S$  félcsoportához tartozó  $S$ -mátrixokat a félcsoport valamely rögzített sorrendjéhez tartozó, az előzőekben részletezett táblázatos formában fogjuk tekinteni.

Jelölje  $1$ , illetve  $0$  egy  $\mathbb{F}$  test egységelemét, illetve nullelemét. Egy véges  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  félcsoport tetszőleges  $s$  eleméhez tekintünk a következő  $S$ -mátrixot:

$$\mathbf{R}^{(s)} = [r_{i,j}^{(s)}]_{n \times n},$$

ahol

$$r_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} e & \text{ha } s_i s = s_j, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezt a mátrixot az  $S$  elemhez tartozó  $\mathbb{F}$  test feletti jobb mátrixnak nevezzük (lásd az 1. Fejezetet). Az 1.11. Tétel szerint

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}} : s \mapsto \mathbf{R}^{(s)}$$

az  $S$  félcsoporth  $\mathbb{F}$  test feletti  $n$ -edfokú reprezentációja. Ez lényegében az  $S$  félcsoporth jobbrekuláris reprezentációja. Ez a reprezentáció akkor és csak akkor hű (azaz injektív), ha  $S$  bal redukzív, azaz tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén az  $xa = xb$  feltételnek minden  $x \in S$  elemre való teljesüléséből  $a = b$  következik.

Tetszőleges  $n$ -elemű véges  $S$  félcsoporth és tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén jelölje  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$  az  $\mathbb{F}$  test feletti  $n \times n$  típusú mátrixok  $M_n(\mathbb{F})$  teljes mátrixalgebrájának az  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)$  által generált részalgebráját.

## 16.2. Félcsoporthok direkt szorzatának jobbrekuláris reprezentációja

**16.1. Tétel** *Tetszőleges véges bal redukzív  $S_1$  és  $S_2$  félcsoporthok, valamint tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén*

$$\dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))]\dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))] = \dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))].$$

*Bizonyítás.* Legyenek  $S_1 = \{a_i : i = 1, \dots, |S_1|\}$  és  $S_2 = \{b_j : j = 1, \dots, |S_2|\}$  tetszőleges véges bal redukzív félcsoporthok,  $\mathbb{F}$  pedig tetszőleges test. Tekintsük az  $S_1$  és  $S_2$  félcsoporthok jobbrekuláris reprezentációit. Jelölje  $\mathbf{A}^{(a_i)}$  és  $\mathbf{B}^{(b_j)}$  az  $a_i \in S_1$  és  $b_j \in S_2$  elemek  $\mathbb{F}$  feletti (a fenti sorrendhez tartozó) jobb mátrixait. Tekintsük az  $S_1 \times S_2$  félcsoporth eleminek következő elrendezését:

$$S_1 \times S_2 = \{(a_1, b_1); \dots; (a_1, b_{|S_2|}); \dots; (a_{|S_1|}, b_1); \dots; (a_{|S_1|}, b_{|S_2|})\}.$$

Nem nehéz észrevenni, hogy egy  $(a_i, b_j) \in S_1 \times S_2$  elemhez (az előbb részletezett sorrend szerint) tartozó  $\mathbb{F}$  feletti  $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$  jobb mátrix olyan  $\mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)}$  ( $k, t \in \{1, \dots, |S_1|\}$ ) mátrixok blokkmátrixa, amelyekre

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)} = a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)}$$

teljesül, ahol  $a_{k,t}^{(a_i)}$  ( $k, t = 1, \dots, |S_1|$ ) jelöli az  $\mathbf{A}^{(a_i)}$  mátrix  $k$ -dik sorának  $t$ -dik elemét. Mivel  $S_1$  és  $S_2$  bal redukzív félcsoporthok, ezért  $S_1 \times S_2$  is bal redukzív. Így annak jobbrekuláris reprezentációja hű. Tegyük fel, hogy  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) = m$  és  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) = n$ . Jelölje  $\mathcal{B}_1$  és  $\mathcal{B}_2$  az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$ , illetve a  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$  részalgebrák egy-egy bázisát. Tegyük fel, hogy  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{A}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{A}^{(a_m)}\}$  és  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{B}^{(b_n)}\}$ . Megmutatjuk, hogy a  $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) mátrixok az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$  részalgebrának egy bázisát alkotják.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a  $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) mátrixok lineárisan függetlenek  $\mathbb{F}$  felett, tegyük fel, hogy

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} = \mathbf{0}_{mn \times mn}$$

valamely  $\gamma_{j,i} \in \mathbb{F}$  skalárokkal. Akkor tetszőleges  $k, t \in \{1, \dots, |S_1|\}$  indexekre

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} \mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)} = \mathbf{0}_{n \times n},$$

azaz

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{n \times n}$$

adódik. Ekkor viszont

$$\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)}) \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{n \times n},$$

amiből tetszőleges  $j = 1, \dots, n$  (and every  $k, t = 1, \dots, |S_1|$ ) index esetén

$$\sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)} = 0,$$

mert a  $\mathbf{B}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{B}^{(b_n)}$  mátrixok lineárisan függetlenek  $\mathbb{F}$  felett. Mivel a  $\gamma_{j,i}$  együtthatók nem függnek  $k$ -től és  $t$ -től, ezért

$$\sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} \mathbf{A}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m \times m}$$

adódik minden  $j = 1, \dots, n$  indexre. Mivel a  $\mathbf{A}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{A}^{(a_m)}$  mátrixok lineárisan függetlenek  $\mathbb{F}$  felett, ezért  $\gamma_{j,i} = 0$  minden  $j = 1, \dots, n$  és  $i = 1, \dots, m$  indexre.

A következőkben megmutatjuk, hogy a  $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) mátrixok generálják az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$  részalgebrát. Legyen  $(x, y) \in S_1 \times S_2$  tetszőleges elem. Mivel  $\mathcal{B}_2$  bázisa az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$  részalgebrának, ezért megadhatók olyan  $\beta_j \in F$  ( $j = 1, \dots, n$ ) skalárok, amelyekre

$$\mathbf{B}^{(y)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{B}^{(b_j)}$$

teljesül. Ekkor viszont tetszőleges  $k, t \in \{1, \dots, |S_1|\}$  indexek esetén

$$a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(y)} = \sum_{j=1}^n \beta_j a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(b_j)}.$$

Mivel  $\mathcal{B}_1$  bázisa az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$  részalgebrának, ezért magadhatók olyan  $\alpha_i \in F$  ( $i = 1, \dots, m$ ) skalárok, melyekre

$$\mathbf{A}^{(x)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{A}^{(a_i)},$$

azaz,

$$a_{k,t}^{(x)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{k,t}^{(a_i)}$$

teljesül tetszőleges  $k, t = 1, \dots, |S_1|$  esetén. Így

$$a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(y)} = \sum_{j=1}^n \beta_j (\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{k,t}^{(a_i)}) \mathbf{B}^{(b_j)} =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \alpha_i) (a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)}),$$

amiből

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(x,y)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \alpha_i) \mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)}$$

következik tetszőleges  $k, t = 1, \dots, |S_1|$  indexekre. Mivel az  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) és  $\beta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) együtthatók nem függnak  $k$ -tól és  $t$ -tól, ezért

$$\mathbf{C}^{(x,y)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \alpha_i) \mathbf{C}^{(a_i, b_j)}. \quad \square$$

**16.2. Tétel** Legyen  $\mathbb{F}$  egy test és legyenek  $S_1, S_2$  tetszőleges véges bal redukzív félcsoportok. Akkor

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) \cong_{\text{Alg}} \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2)),$$

ahol  $\otimes$  a tenzori szorzás,  $\cong_{\text{Alg}}$  pedig az algebra-izomorfizmus jele.

*Bizonyítás.* A 16.1. Tétel jelöléseit használjuk. Tekintsük az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$  és  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$  vektorterek

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$$

tenzori szorzatát.

Az

$$\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

tenzorok egy bázisát alkotják a  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$  tenzori szorzatnak, melyek között a szorzás a következőképpen van értelmezve:

$$(\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})(\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)}) = (\mathbf{A}^{(a_i a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j b_t)}).$$

A 16.1. Tétel szerint

$$\{\mathbf{C}^{(a_i, b_j)} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

bázisa az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$  algebrának. Közzük a szorzás:

$$\mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \mathbf{C}^{(a_k, b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i a_k, b_j b_t)}.$$

Mivel

$$\dim(\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))) = \dim(\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2)))$$

a 16.1. Tétel miatt, ezért a

$$\phi : (\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)}) \mapsto \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

leképezés az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$  vektortérnek az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$  vektortérre való izomorfizmusa. Mivel

$$\begin{aligned} \phi((\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})(\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)})) &= \phi((\mathbf{A}^{(a_i a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j b_t)})) = \\ &= \mathbf{C}^{(a_i a_k, b_j b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i, b_j)(a_k, b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \mathbf{C}^{(a_k, b_t)} = \\ &= \phi((\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})) \phi((\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)})), \end{aligned}$$

ezért  $\phi$  az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$  tenzori szorzatnak az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$  algebrára való algebra-izomorfizmusa.  $\square$

## 16.3. Félcsoportok félhálójának jobbregruláris reprezentációja

**16.3. Tétel** *Legyen  $S$  olyan véges félcsoport, amely valamely bal redukzív  $A$  és  $B$  félcsoportok félhálója. Akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$

*Bizonyítás.* Világos, hogy  $A$  és  $B$  valamelyike ideálja  $S$ -nek. Tegyük fel, hogy  $A$  teljesíti ezt a feltételt. Ha  $c, d \in S$  olyan elemei  $S$ -nek, amelyekre  $xc = xd$  teljesül minden  $x \in S$  elemre, akkor  $c^2 = cd$  és  $dc = d^2$ . Mivel  $S$  az  $A$  és  $B$  félhálója, ezért  $cd$  és  $dc$  mindketten vagy  $A$ -ban, vagy mindketten  $B$ -ben vannak. Így  $c$  és  $d$  mindketten vagy  $A$ -ban vagy  $B$ -ben vannak. Mivel  $A$  és  $B$  bal redukzív, ezért  $c = d$ . Tehát  $S$  bal redukzív, és így az  $S$  jobbregruláris reprezentációja hű. Legyen  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  és  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Legyen  $\mathbf{A}^{(a_i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), illetve  $\mathbf{B}^{(b_j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) az  $a_i \in A$ , illetve a  $b_j \in B$  elemhez (a fenti sorrend szerint) tartozó jobb mátrix.

Tekintsük az  $S$  elemeinek következő sorrendjét:

$$S = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}.$$

Az  $S$  félcsoport  $s$  elemeihez (ezen rögzített sorrend szerint) tartozó  $\mathbf{C}^{(s)}$  jobb mátrixok olyan

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(s)} \quad (k, t \in \{1, 2\})$$

blokkok  $2 \times 2$ -típusú mátrixai, amely blokkokra a következők teljesülnek: a  $\mathbf{C}_{1,1}^{(s)}$  blokk  $n \times n$ -típusú, a  $\mathbf{C}_{2,2}^{(s)}$  blokk  $m \times m$ -típusú, továbbá tetszőleges  $a_i \in A$  elem esetén  $\mathbf{C}_{1,1}^{(a_i)} = \mathbf{A}^{(a_i)}$ ,  $\mathbf{C}_{2,2}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m \times m}$ , tetszőleges  $b_j \in B$  esetén pedig  $\mathbf{C}_{2,2}^{(b_j)} = \mathbf{B}^{(b_j)}$ . Tegyük fel, hogy

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) = k \quad \text{és} \quad \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = t.$$

Legyen  $\mathbf{A}^{(a_i)}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) illetve  $\mathbf{B}^{(b_j)}$  ( $j = 1, \dots, t$ ) egy-egy bázisa az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A))$ , illetve  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B))$  algebrának. Megmutatjuk, hogy a  $\mathbf{C}^{(a_i)}$  és  $\mathbf{C}^{(b_j)}$  ( $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, t$ ) mátrixok együtt egy lineárisan független rendszert alkotnak. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)} + \sum_{j=1}^t \beta_j \mathbf{C}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{(n+m) \times (n+m)}.$$

Akkor

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}_{2,2}^{(a_i)} + \sum_{j=1}^t \beta_j \mathbf{C}_{2,2}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{m \times m},$$

és így

$$\sum_{j=1}^t \beta_j \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{m \times m},$$

mert  $\mathbf{C}_{2,2}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m \times m}$  és  $\mathbf{C}_{2,2}^{(b_j)} = \mathbf{B}^{(b_j)}$  minden  $a_i \in A$  és  $b_j \in B$  elem esetén. Mivel a  $\mathbf{B}^{(b_j)}$  ( $j = 1, \dots, t$ ) mátrixok lineárisan függetlenek, ezért  $\beta_j = 0$  minden  $j = 1, \dots, t$  indexre. Így

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{(n+m) \times (n+m)},$$

amiből

$$\mathbf{0}_{n \times n} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}_{1,1}^{(a_i)} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{A}^{(a_i)}$$

következik. Mivel az  $\mathbf{A}^{(a_i)}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) mátrixok lineárisan függetlenek, ezért  $\alpha_i = 0$  minden  $i = 1, \dots, k$  indexre. Tehát a

$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_t)}$$

mátrixok lineárisan függetlenek. Így

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)). \quad \square$$

**16.4. Tétel** Legyen  $S$  olyan véges félcsoporth, amely előáll valamely bal redukzív  $A$  és  $B$  félcsoporthok erős félhálójaként úgy, hogy  $AB \subseteq A$ . Ha  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = |B|$  akkor

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$

*Bizonyítás.* A 16.3. Tétel jelöléseit használjuk. Mivel  $S$  az  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  and  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  félcsoporthok félhálója, és mert  $A$  ideálja  $S$ -nek, ezért megadható  $B$ -nek  $A$ -ba olyan  $\varphi$  homomorfizmusa, hogy  $b_j a_i = (b_j) \varphi a_i$  teljesül minden  $b_j \in B$  és  $a_i \in A$  elemre. Ez a homomorfizmus indukálja az  $\{1, \dots, m\}$  halmaznak az  $\{1, \dots, n\}$  halmazba való következő  $\varphi^*$  leképezését:  $\varphi^*(j) = i$  akkor és csak akkor, ha  $(b_j) \varphi = a_i$ . Ebből következik, hogy a  $\mathbf{C}_{1,2}^{(a_i)}$  mátrix  $j$ -dik sora ( $j = 1, \dots, m$ ) megegyezik az  $\mathbf{A}^{(a_i)}$  mátrix  $(\varphi^*(j))$ -dik sorával tetszőleges  $a_i \in A$  elem esetén. Így, ha egy  $\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{A}^{(a_i)}$  lineáris kombináció egyenlő egy  $\mathbf{A}^{(a)}$  ( $a \in A$ ) mátrixszal, akkor  $\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{C}_{2,1}^{(a_i)}$  egyenlő a  $\mathbf{C}_{2,1}^{(a)}$  mátrixszal. Mivel  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = |B| = m$ , ezért a 16.3. Tétel bizonyítása szerint a

$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_m)}$$

mátrixok lineárisan függetlenek. Megmutatjuk, hogy generálják is az  $\mathbb{F}_{(n+m) \times (n+m)}$  algebra  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$  részalgebráját. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy minden  $\mathbf{C}^{(a_j)}$  ( $j = k+1, \dots, n$ ) mátrix előáll az  $\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_m)}$  mátrixok lineáris kombinációjaként. Legyen  $\mathbf{C}^{(a)}$ ,  $a \in \{a_{j+1}, \dots, a_n\}$  tetszőleges mátrix. Akkor

$$\mathbf{A}^{(a)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{A}^{(a_i)}$$



valamely  $\beta_i \in \mathbb{F}$  skalárokkal. A fentiek szerint ebből az egyenlőségből

$$\mathbf{C}_{2,1}^{(a)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{C}_{2,1}^{(a_i)}$$

következik, és így

$$\mathbf{C}^{(a)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{C}^{(a_i)}.$$

Tehát a

$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_m)}$$

mátrixok az  $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$  részalgebra egy bázisát alkotják. Következésképpen

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)). \quad \square$$

**16.5. Tétel** *Ha egy véges  $S$  félcsoport valamely bal redukzív  $S_{\alpha}$  ( $\alpha \in Y$ ) félcsoportok  $Y$  félhálójára, akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_{\alpha})).$$

*Bizonyítás.* Az állítást az  $n = |Y|$ -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Az  $n = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló. Az  $n = 2$  eset a 16.3. Tételből adódik. Tegyük fel a továbbiakban, hogy  $n \geq 3$ . Tegyük fel azt is, hogy az állítás igaz minden  $n$ -nél kisebb számosságú  $Y$  félháló esetén. A továbbiakban tekintsünk egy olyan esetet, amelyben szereplő  $Y$  félhálóra  $|Y| = n$  teljesül. Legyen  $S$  olyan véges félcsoport, amely bal redukzív  $S_{\alpha}$ ,  $\alpha \in Y$  félcsoportok  $Y$  félhálójára. Mivel  $Y$  félháló és  $|Y| \geq 3$ , ezért megadhatók olyan  $\alpha, \beta \in Y$  elemek, amelyekre

$$\alpha\beta \neq \beta$$

teljesül. Jelölje  $I_{\beta}$  az  $Y$  félháló  $\beta$  eleme által generált ideálját. Világos, hogy

$$I_{\beta} = \{\xi \in Y : \xi\beta = \xi\}.$$

Mivel

$$\beta, \alpha\beta \in I_{\beta},$$

ezért az  $\alpha\beta \neq \beta$  feltételből

$$|I_{\beta}| \geq 2$$

következik.

Először tekintsük azt az esetet, amikor  $I_{\beta} \neq Y$ . Ekkor  $|Y \setminus I_{\beta}| \leq n - 2$ . Mivel  $I_{\beta}$  részfélcsoportja  $Y$ -nak, ezért az  $S$  félcsoport  $S_{\xi}$  ( $\xi \in I_{\beta}$ ) részfélcsoportjainak  $A_{\beta}$ -val jelölt

uniója az  $S$  félcsoporth egy részfélcsoporthja. Mivel  $I_\beta \subset Y$ , ezért (az indukciós feltétel miatt)

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) \geq \sum_{\xi \in I_\beta} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\xi)).$$

Mivel  $I_\beta$  ideálja  $Y$ -nak, ezért az  $S$  félcsoporth az  $S_\eta$  ( $\eta \in Y \setminus I_\beta$ ) részfélcsoporthok és az  $A_\beta$  részfélcsoporth félhálójája. Mivel  $|Y \setminus I_\beta| + 1 \leq n - 1$ , ezért (az indukciós feltételt is használva)

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) + \sum_{\eta \in Y \setminus I_\beta} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\eta)).$$

Ez és a fenti

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) \geq \sum_{\xi \in I_\beta} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\xi))$$

egyenlőtlenség együttesen a

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha))$$

egyenlőtlenséget eredményezik.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $I_\beta = Y$ . Ebben az esetben  $\beta$  az  $Y$  egységeleme, és így  $\xi\eta \neq \beta$  minden  $\beta \notin \{\xi, \eta\}$  elemekre. Valóban, ha lennének olyan  $\xi, \eta \in Y$  elemek, amelyekre  $\xi \neq \beta$ ,  $\eta \neq \beta$  és  $\eta\xi = \beta$  teljesülne, akkor minden  $\alpha \in Y$  elem esetén azt kapnánk, hogy  $\alpha\eta\xi = \alpha\beta = \alpha$ , amiből  $\alpha\xi = \alpha$  következne. Ez azt jelentené, hogy  $\xi$  az  $Y$  egységeleme, amely nem lehetséges amiatt, mert  $\beta$  is az  $Y$  egységelem és  $\xi \neq \beta$ . Így  $X = Y \setminus \{\beta\}$  az  $Y$  egy részfélhálójája. Jelölje  $S^*$  az  $S$  félcsoporth azon részfélcsoporthját, amely az  $S_\tau$ ,  $\tau \in X$  részfélcsoporthok  $X$  félhálójája. Akkor  $S$  az  $S^*$  és  $S_\beta$  részfélcsoporthok félhálójája, s ezért a **16.3. Tétel** miatt

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^*)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\beta)).$$

Mivel  $|X| = |Y| - 1$ , ezért (az indukciós feltételt is használva)

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^*)) \geq \sum_{\tau \in X} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\tau)).$$

Következésképpen

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)).$$

□

**16.6. Tétel** *Legyen  $S$  olyan véges félcsoporth, amely valamely bal redukzív  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) félcsoporthok  $Y$  félhálójája. Ha minden  $\alpha \in Y$  index esetén  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)) = |S_\alpha|$ , akkor  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$ .*

*Bizonyítás.* A 16.5. Tétel felhasználásával

$$\sum_{\alpha \in Y} |S_\alpha| = |S| \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)) = \sum_{\alpha \in Y} |S_\alpha|$$

adódik, és így  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$ .  $\square$

**16.7. Tétel** *Ha egy véges  $S$  félcsoporth  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) monoidok  $Y$  félhálójá, akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|.$$

*Bizonyítás.* Az világos, hogy minden  $M$  monoid bal redukzív, és  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(M)) = |M|$ . Így az állítás a 16.6. Tétel következménye.  $\square$

**16.8. Tétel** *Ha  $S$  véges Clifford félcsoporth, akkor tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|.$$

*Bizonyítás.* A 10.28. Tétel szerint egy félcsoporth akkor és csak akkor Clifford félcsoporth, ha csoportok félhálójá. Így az állítás a 16.7. Tétel következménye.  $\square$

**16.9. Tétel** *Ha  $S$  véges félháló, akkor tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén  $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$ .*

*Bizonyítás.* Mivel egy félháló egyelemű félcsoporthok félhálójá, ezért az állítás a 16.7. Tétel következménye.  $\square$

## Feladatok

**16.1.** (Megoldás: 17.45.) Mutassuk meg, hogy véges  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  félcsoporth és tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{R}^{(s_i)} = \mathbf{0}$  akkor és csak akkor teljesül valamely  $\alpha_i \in \mathbb{F}$  skalárok esetén, ha  $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$  az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra jobb annullátorának eleme.

**16.2.** (Megoldás: 17.46.) Tetszőleges véges,  $n$ -elemű  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  félcsoporth és tetszőleges  $\mathbb{F}$  test esetén jelölje  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$  az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebrának az  $M_n(\mathbb{F})$  teljes mátrixalgebrába való következő reprezentációját:  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n) = \alpha_1 \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(s_1) + \dots + \alpha_n \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(s_n)$ . Mutassuk meg, hogy  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$  magja ( $\text{Ker} \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^* = \{a \in \mathbb{F}[S] : \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*(a) = \mathbf{0}\}$ ) megegyezik az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra jobb oldali annullátorával!

# 17. fejezet

## Megoldások

### Az 1. fejezet feladatainak megoldásai

**17.1.** (az 1.1. feladat megoldása) Világos, hogy

$$\mathbf{R}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és  $(\mathbf{R}^{(a)})^2 = \mathbf{R}^{(a)}$ ,  $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)}$ ,  $\mathbf{R}^{(b)}\mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)}$ ,  $(\mathbf{R}^{(b)})^2 = \mathbf{R}^{(b)}$ . Tehát  $S_F^R$  félcsoportot alkot a mátrixok szorzására nézve. Ugyanakkor  $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)} \neq \mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(ab)}$ . Így  $S$  nem félcsoport a vizsgált műveletre nézve (pl.  $(ba)b = b^2 = a \neq b = ba = b(ab)$ ).

**17.2.** (az 1.2. feladat megoldása) Tetszőleges  $a_1, a_2, a_3 \in A$  és  $b_1, b_2, b_3 \in B$  elemek esetén  $((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) = (a_1, b_2) * (a_3, b_3) = (a_1, b_3) = (a_1, b_1) * (a_2, b_3) = (a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3))$ . Tehát a művelet asszociatív. Továbbá, tetszőleges  $(a, b) \in A \times B$  esetén  $(a, b)^2 = (a, b) * (a, b) = (a, b)$ , és így az  $((A \times B); *)$  félcsoport minden eleme idempotens.

**17.3.** (az 1.3. feladat megoldása) Tetszőleges  $a, b \in S$  és tetszőleges  $x, y \in A$  elemek esetén  $(ab)(xy) = a(b(xy)) = a((bx)y) = (a(bx))y = ((ab)x)y$ . Tehát  $S$  zárt az  $A$ -beli műveletre nézve. Mivel tetszőleges  $a, b, c \in S$  esetén  $a(bc) = (ab)c$ , ezért  $S$  az  $A$  grupoid egy részfélcsoportja.

**17.4.** (az 1.4. feladat megoldása) Az világos, hogy véges félcsoportnak véges sok részfélcsoportja van. Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan félcsoport, amelynek véges sok részfélcsoportja van. Az  $S$  tetszőleges eleme által generált ciklikus részfélcsoport nem lehet végtelen, mert végtelen ciklikus részfélcsoportnak végtelen sok részfélcsoportja van, amelyek az  $S$ -nek is részfélcsoportjai. Mivel  $S$  minden eleme benne van az általa generált részfélcsoportban, ezért  $S$  előáll véges ciklikus részfélcsoportok úniójaként. Mivel a feltétel miatt a ciklikus részcsoportok száma véges, ezért  $S$  előáll véges sok véges ciklikus részfélcsoport úniójaként. Ebből már következik, hogy  $S$  véges sok elemet tartalmaz.

## A 2. fejezet feladatainak megoldásai

**17.5.** (a 2.1. feladat megoldása) Az világos, hogy  $\sigma$  reflexív és szimmetrikus. A  $\sigma$  tranzitivitásának igazolásához tegyük fel, hogy valamely  $a, b, c \in S$  elemekre teljesülnek az  $(a, b) \in \sigma$  és  $(b, c) \in \sigma$  feltételek. Akkor  $ab^n = b^{n+1}$ ,  $ba^n = a^{n+1}$ ,  $bc^n = c^{n+1}$  és  $cb^n = b^{n+1}$  teljesül valamely  $n$  pozitív egész számra. Így  $a^{2n} = a^{n+1}a^{n-1} = ba^na^{n-1} = ba^{2n-1} = \dots = b^na^n$ . Hasonlóan adódik, hogy  $c^{2n} = b^nc^n$ . Így  $ac^{2n} = ab^nc^n = b^{n+1}c^n = bb^nc^n = bc^{2n} = bc^nc^n = c^{n+1}c^n = c^{2n+1}$ . Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy  $ca^{2n} = a^{2n+1}$ . Tehát  $(a, c) \in \sigma$ . Így  $\sigma$  tranzitív. Következésképpen  $\sigma$  ekvivalencia reláció.

**17.6.** (a 2.2. feladat megoldása) Legyen  $S$  tetszőleges jobbzéró félcsoporth! Legyen  $\alpha$  az  $S$  halmazon értelmezett tetszőleges ekvivalenciareláció! Ha  $(a, b) \in \alpha$  valamely  $a, b \in S$  elemekre, akkor tetszőleges  $s \in S$  elem esetén  $as = s = bs$ , és ezért  $(as, bs) \in \alpha$ . Tehát  $\alpha$  jobb kongruencia. Továbbá,  $sa = a \alpha b = sb$ , amiből következik, hogy  $\alpha$  bal kongruencia. A 2.22. Tétel szerint  $\alpha$  az  $S$  egy kongruenciarelációja. Balzéró félcsoporthok esetén a megoldás hasonló.

**17.7.** (a 2.3. feladat megoldása) Legyen  $S$  olyan jobbzéró félcsoporth, amelyben bármely két kongruencia felcserélhető egymással. A 2.1. Feladat szerint  $S$  minden ekvivalenciarelációja kongruenciareláció, ezért  $S$  bármely két ekvivalenciarelációja felcserélhető egymással. Tegyük fel, hogy  $|S| > 2$ . Legyenek  $a, b, c \in S$  páronként különböző elemek. Jelölje  $\alpha_{a,b}$  az  $S$  azon ekvivalenciarelációját, melynek osztályai az  $S$  kételemű  $\{a, b\}$  részhalmaza, valamint ezen részhalmaz komplementerében lévő elemek mint egyelemű részhalmazok. Jelölje  $\alpha_{b,c}$  a kételemű  $\{b, c\}$  részhalmazzal az előzőek mintájára definiált ekvivalenciarelációt. Mivel  $(a, b) \in \alpha_{a,b}$  és  $(b, c) \in \alpha_{b,c}$ , ezért  $(a, c) \in \alpha_{a,b} \circ \alpha_{b,c}$ . Mivel a feltétel szerint  $\alpha_{a,b} \circ \alpha_{b,c} = \alpha_{b,c} \circ \alpha_{a,b}$ , ezért  $(a, c) \in \alpha_{b,c} \circ \alpha_{a,b}$ , azaz létezik olyan  $x \in S$  elem, hogy  $(a, x) \in \alpha_{b,c}$  és  $(x, c) \in \alpha_{a,b}$ . Mivel  $a \notin \{b, c\}$ , ezért  $a = x$  és így  $(a, c) \in \alpha_{a,b}$ , amiből  $c \in \{a, b\}$  következik, ami viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy  $a, b, c$  az  $S$  félcsoporth páronként különböző elemei. Tehát szükségképpen  $|S| \leq 2$ . A fordított állítás igazolása igen egyszerű. A megoldás hasonló abban az esetben, amikor  $S$  balzéró félcsoporth.

**17.8.** (a 2.4. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy háromelemű félháló. Mivel  $S$  véges, ezért  $S$ -nek van 0 nulleleme (ez az  $S$  három elemének szorzata). Jelöljük a másik két elemet  $a$ -val, illetve  $b$ -vel. Ha  $ab = 0$ , akkor  $I = \{0, a\}$  és  $J = \{0, b\}$  ideálok. Legyen  $\alpha$  az  $S$  azon ekvivalenciarelációja, melynek osztályai  $I = \{0, a\}$  és  $\{b\}$ , továbbá jelölje  $\beta$  az  $S$  azon ekvivalenciarelációja, melynek osztályai  $J = \{0, b\}$  és  $\{a\}$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\alpha$  és  $\beta$  az  $S$  kongruenciarelációi. Mivel  $(a, 0) \in \alpha$  és  $(0, b) \in \beta$ , ezért  $(a, b) \in \alpha \circ \beta$ . Ha  $\alpha \circ \beta$  egyenlő lenne a  $\beta \circ \alpha$  relációval, akkor  $(a, b) \in \beta \circ \alpha$  teljesülne, azaz lenne  $S$ -nek olyan  $y$  eleme, hogy  $(a, y) \in \beta$  és  $(y, b) \in \alpha$  teljesülne. Az első feltételből  $y = a$  adódna, ami miatt  $(a, b) \in \alpha$  teljesülne, ami viszont nem lehetséges. Tehát  $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$ . Ha

$ab = ba \neq 0$ , akkor  $ab = ba = a$  vagy  $ab = ba = b$ . Vizsgálhatjuk csak az egyik (pl.  $ab = ba = a$ ) esetet. Jelölje  $\gamma$  azt az ekvivalenciarelációt, melynek osztályai  $\{a, b\}$  és  $\{0\}$ . Legyen  $\alpha$  az előzőekben definiált ekvivalenciareláció. Nem nehéz belátni, hogy  $\alpha$  és  $\gamma$  az  $S$  kongruenciarelációi. Mivel  $(0, a) \in \alpha$  és  $(a, b) \in \gamma$ , ezért  $(0, b) \in \alpha \circ \gamma$ . Ha  $(0, b)$  benne lenne a  $\gamma \circ \alpha$  relációban, akkor lenne  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, hogy  $(0, x) \in \gamma$  és  $(x, b) \in \alpha$  teljesülne. Ebből  $x = 0$ , illetve  $(0, b) \in \alpha$  következne, ami ellentmondás. Tehát  $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$ .

**17.9.** (a 2.5. feladat megoldása) Az világos, hogy a  $\varrho$  reláció ekvivalenciareláció. Megmutatjuk, hogy  $\varrho$  az  $S$  félcsoport jobbkongruenciája, illetve balkongruenciája. Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \varrho$  valamely  $a, b \in S$  elemekre, azaz  $xa = xb$  minden  $x \in S$  elemre teljesül. Legyen  $c \in S$  tetszőleges elem. Akkor  $xac = xbc$ , azaz  $(ac, bc) \in \varrho$ . Tehát  $\varrho$  jobbkongruencia. Mivel  $x(ca) = (xc)a = (xc)b = x(cb)$ , ezért  $(ca, cb) \in \varrho$ . Tehát  $\varrho$  balkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt  $\varrho$  az  $S$  félcsoport kongruenciája.

### A 3. fejezet feladatainak megoldásai

**17.10.** (a 3.1. feladat megoldása) Legyen  $\mathcal{F}_X$  egy  $X$  halmaz feletti szabad félcsoport. A 3.15. Tétel szerint tetszőleges  $S$  félcsoport és tetszőleges  $f : X \mapsto S$  leképezéshez megadható az  $\mathcal{F}_X$  szabad félcsoportnak az  $S$  félcsoportba való olyan homomorfizmusa, amelyre  $\varphi(x) = f(x)$  teljesül tetszőleges  $x \in X$  esetén.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $F$  olyan félcsoport, melynek van olyan  $X$  részhalmaza, amely generálja  $F$ -et és minden  $S$  félcsoport esetén  $X$ -nek  $S$ -be való tetszőleges  $f$  leképezése kiterjeszthető  $F$ -nek  $S$ -be való  $\varphi$  homomorfizmusává. Válasszuk  $S$ -et és  $f$ -et speciális módon; legyen  $S = \mathcal{F}_X$  és  $f = id_X$ , azaz  $X$ -nek  $S = \mathcal{F}_X$ -be való azon leképezése, amely  $X$  minden elemének ( $S$ -beli) önmagát felelteti meg. A feltétel szerint van  $F$ -nek  $\mathcal{F}_X$ -be olyan  $\varphi$  homomorfizmusa, amely  $X$  minden eleméhez önmagát rendeli. Legyenek  $x_1, \dots, x_n \in X$  tetszőleges elemek. Legyen  $x_1 \cdots x_n \in \mathcal{F}_X$  tetszőleges elem. Mivel az  $F$ -beli  $x_1 \cdots x_n$  szorzathoz  $\varphi$  az  $\mathcal{F}_X$  félcsoport  $\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = x_1 \cdots x_n$  elemét rendeli, ezért  $\varphi$  szürjektív. Ha  $\varphi(x_1 \cdots x_n) = \varphi(y_1 \cdots y_m)$  valamely  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$  esetén, akkor (mivel  $\varphi$  homomorfizmus és  $X$  elemein az identikus)  $\mathcal{F}_X$ -ben  $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ , amiből  $n = m$  és  $x_i = y_i$  következik minden  $i = 1, \dots, n$  indexre. Tehát  $F$ -ben  $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ . Így  $\varphi$  injektív. Következésképpen  $F$  izomorf  $\mathcal{F}_X$ -szel.

**17.11.** (a 3.2. feladat megoldása) Legyenek  $X$  és  $Y$  olyan halmazok, amelyekhez létezik egy  $f : X \mapsto Y$  bijektív leképezés. Tekintsük az  $\mathcal{F}_X$  és  $\mathcal{F}_Y$  szabad félcsoportokat. a 3.1. Feladat szerint megadható olyan  $\varphi : \mathcal{F}_X \mapsto \mathcal{F}_Y$  homomorfizmus, amely az  $f$  kiterjesztése. Legyen  $y_1 \cdots y_n \in \mathcal{F}_Y$  tetszőleges elem. Mivel az  $\mathcal{F}_X$  félcsoport  $f^{-1}(y_1) \cdots f^{-1}(y_n)$  eleméhez  $\varphi$  az  $\mathcal{F}_Y$  félcsoport  $\varphi(f^{-1}(y_1)) \cdots \varphi(f^{-1}(y_n)) = f(f^{-1}(y_1)) \cdots f(f^{-1}(y_n)) = y_1 \cdots y_n$  elemét rendeli, ezért  $\varphi$  szürjektív. Ha  $\varphi(x_1 \cdots x_n)$  egyenlő  $\varphi(x'_1 \cdots x'_m)$ -mel valamely  $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m \in X$  esetén, akkor  $\mathcal{F}_Y$ -ban

$f(x_1) \cdots f(x_n) = f(x'_1) \cdots f(x'_m)$ , amiből  $n = m$  és  $f(x_i) = f(x'_i)$  következik minden  $i = 1, \dots, n$  indexre. Mivel  $f$  bijektív, ezért  $x_i = x'_i$  minden  $i = 1, \dots, n$  indexre. Tehát  $F$ -ben  $x_1 \cdots x_n = x'_1 \cdots x'_m$ . Így  $\varphi$  injektív. Tehát az  $\mathcal{F}_X$  és  $\mathcal{F}_Y$  szabad félcsoporthok izomorfak.

## A 4. fejezet feladatainak megoldásai

**17.12.** (a 4.1. feladat megoldása) Indirekt módon, tegyük fel, hogy van olyan  $S$  nil félcsoporth, amely 0-egyszerű. Akkor  $S^2 \neq \{0\}$  (ekkor  $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ) és  $S$  nek csak két ideálja van:  $S$  és  $\{0\}$ . Legyenek  $a, b \in S \setminus \{0\}$  tetszőleges elemek az  $a \neq b$  feltétellel. A 4.7. Tétel szerint  $SaS = S = SbS$ . Így megadhatók olyan  $x, y, u, v \in S$  elemek, hogy  $a = xby$  és  $b = uav$ . Ekkor  $a = xuavy$ , amiből  $a = (xu)^n a (vy)^n$  következik tetszőleges pozitív egész  $n$ -re. Mivel  $a \neq b$ , ezért  $xu \in S$  vagy  $vy \in S$ . Így  $(xu)^m = 0$  vagy  $(vy)^k = 0$  valamely pozitív egész  $m$ , illetve  $k$  számokra. Így  $a = 0$ , amiből  $b = 0$  is következik. Tehát  $S \setminus \{0\}$  csak egy elemet tartalmazhat. Ha  $a$  jelöli ezt az elemet, akkor  $a^2 = 0$ , mivel  $S$  nil félcsoporth. Ekkor viszont  $S^2 \setminus \{0\}$ , ami ellentmondás. Tehát nem fordulhat elő, hogy egy nil félcsoporth 0-egyszerű lenne.

**17.13.** (a 4.2. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy  $\mathcal{R}$ -kommutatív félcsoporth. Az  $S$  félcsoporth Green-féle  $\mathcal{R}$  ekvivalenciája bal oldali kongruencia. Először megmutatjuk, hogy jobbkongruencia is. Legyenek  $a, b, s \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \mathcal{R}$ . Akkor megadhatók olyan  $x, y \in S^1$  elemek, hogy  $a = bx$  és  $b = ay$ . Ha  $a = b$ , akkor  $as = bs$  és így  $(as, bs) \in \mathcal{R}$ . Ha  $a \neq b$ , akkor  $x, y \in S$ . Mivel az  $S$  félcsoporth  $\mathcal{R}$ -kommutatív, ezért  $as = bxs \in bsxS^1$  és  $bs = ays \in asyS^1$ . Tehát  $(as, bs) \in \mathcal{R}$ . Így  $\mathcal{R}$  jobb oldali kongruencia. A 2.22. Tétel miatt  $\mathcal{R}$  az  $S$  félcsoporth kongruenciája. Mivel tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $ab \in baS^1$  és  $ba \in abS^1$ , ezért  $(ab, ba) \in \mathcal{R}$ . Tehát  $\mathcal{R}$  az  $S$  félcsoporth kommutatív kongruenciája.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  olyan félcsoporth, amelyen a Green-féle  $\mathcal{R}$  ekvivalencia kommutatív kongruencia. Akkor tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén  $(ab, ba) \in \mathcal{R}$ , azaz  $abS^1 = baS^1$ , amiből következik, hogy  $ab \in baS^1$ .

## Az 5. fejezet feladatainak megoldásai

**17.14.** (az 5.1. feladat megoldása) Legyen  $S$  olyan félcsoporth, melynek van bal oldali egységeleme. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy  $xa = xb$  teljesül minden  $x \in S$  elemre. Ha  $x$  helyébe az  $S$  egy bal oldali egységelemét írjuk, kapjuk az  $a = b$  egyenlőséget.

**17.15.** (az 5.2. feladat megoldása) Egy  $S$  félcsoporth esetén az  $a \mapsto \varrho_a$  ( $a \in S$ ) leképezés akkor és csak akkor injektív, ha tetszőleges  $a, b \in S$  elemek esetén a  $\varrho_a = \varrho_b$  feltételből,

azaz az  $(x)\varrho_a = (x)\varrho_b$  egyenlőségnek minden  $x \in S$  elemre való teljesüléséből  $a = b$  következik. Mivel az  $(x)\varrho_a = (x)\varrho_b$  egyenlőség az  $xa = xb$  egyenlőséget jelenti, ezért már következik a feladat állítása.

**17.16.** (az 5.3. feladat megoldása) Csak a balzérol esetet vizsgáljuk. Legyen  $L$  tetszőleges balzérol félcsoporth. Ha  $\lambda$  az  $L$  tetszőleges önmagába való leképezése, akkor tetszőleges  $a, b \in L$  elemek esetén  $\lambda(ab) = \lambda(a) = (\lambda(a))b$ . Tehát  $\lambda$  az  $L$  egy bal translációja, azaz  $L$  minden önmagába való leképezése bal transláció. Legyen  $\varrho$  az  $L$  tetszőleges jobb translációja. Akkor tetszőleges  $a, b \in L$  elemek esetén  $a = a((b)\varrho) = (ab)\varrho = (a)\varrho$ . Tehát  $L$ -nek csak egyetlen jobb translációja van; ez az  $L$  identikus leképezése. Ha  $\lambda$  az  $L$  tetszőleges önmagába való leképezése, és  $\iota$  jelöli  $L$  identikus leképezését, akkor tetszőleges  $a, b \in L$  esetén  $a(\lambda(b)) = a = ab = ((a)\iota)b$ . Tehát  $(\lambda, \iota)$  láncszemet alkotnak. Az  $L$  translációs burka  $(\Omega(S))$  az összes olyan  $(\lambda, \iota)$  párból áll, ahol  $\lambda$  az  $L$  tetszőleges önmagába való leképezése. A  $(\lambda, \iota) \mapsto \lambda$  leképezés  $\Omega(L)$ -nek az  $L$  összes önmagába való leképezéseinek félcsoporthjára való izomorfizmus.

**17.17.** (az 5.4. feladat megoldása) Legyen  $G$  tetszőleges csoport. Jelölje  $(\lambda, \varrho)$  a  $G$  translációs burkának egy elemét. Jelölje  $e$  a  $G$  egységelemét. Akkor  $\lambda(e) = e(\lambda(e)) = ((e)\varrho)e = (e)\varrho$ . Legyen  $g \in G$  tetszőleges elem. Akkor  $\lambda(g) = \lambda(eg) = \lambda(e)g$  és  $(g)\varrho = (ge)\varrho = g((e)\varrho)$ . Tehát  $\lambda$ , illetve  $\varrho$  a  $G$  ugyanazon eleméhez tartozó belső bal-, illetve jobb translációi. Így  $\Omega(G)$  izomorf  $\Omega_0(G)$ -vel. Mivel  $G$  gyengén redukál, ezért  $G$  izomorf  $\Omega_0(G)$ -vel. Következésképpen  $G$  translációs burka,  $\Omega(G)$  izomorf  $G$ -vel.

**17.18.** (az 5.5. feladat megoldása) Legyenek  $(a, b)$  és  $(c, d)$  tetszőleges  $L \times R$ -beli elemek. Tegyük fel, hogy minden  $(x, y) \in L \times R$  elemre  $(a, b)(x, y) = (c, d)(x, y)$  és  $(x, y)(a, b) = (x, y)(c, d)$ . Akkor  $(a, y) = (ax, by) = (a, b)(x, y) = (c, d)(x, y) = (cx, dy) = (c, y)$ , és így  $a = c$ . Továbbá,  $(x, b) = (xa, yb) = (x, y)(a, b) = (x, y)(c, d) = (xc, yd) = (x, d)$ , és így  $b = d$ . Következésképpen  $(a, b) = (c, d)$ .

## A 6. fejezet feladatainak megoldásai

**17.19.** (a 6.1. feladat megoldása) Legyen  $x \in S$  az  $a \in S$  elem,  $y \in S$  pedig a  $b \in S$  elem inverze. Akkor  $axa = a$ ,  $xax = x$ ,  $byb = b$  és  $yby = y$ . A 6.2. Tétel szerint  $ax$ ,  $xa$ ,  $by$ ,  $yb$  idempotens elemek, így egymással felcserélhetők a 6.20. Tétel szerint. Ekkor  $ab(yx)ab = a(by)(xa)b = a(xa)(by)b = (axa)(byb) = ab$  és  $(yx)(ab)(yx) = y(xa)(by)x = y(by)(xa)x = (yby)(xax) = yx$ . Tehát  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

**17.20.** (a 6.2. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy kommutatív reguláris félcsoporth. Akkor  $S$  teljesen reguláris, és ezért a 6.16. Tétel szerint  $S$  kommutatív csoportok únioja.



**17.21.** (a 6.3. feladat megoldása) Legyen  $a$  egy  $S$  reguláris félcsoporth tetszőleges eleme. Akkor van olyan  $x \in S$  elem, amelyre

$$axa = a$$

teljesül. A 6.2. Lemma szerint  $ax$  és  $xa$  idempotens elemek. Ha  $S$ -nek csak egyetlen idempotens eleme van, akkor

$$ax = xa,$$

és ezért az  $a$  elem teljesen reguláris. Így  $S$  teljesen reguláris félcsoporth. A 6.16. Tétel szerint  $S$  csoportok uniója. Mivel  $S$  csak egyetlen idempotens elemet tartalmaz, ezért  $S$  csoport.

## A 7. fejezet feladatainak megoldásai

**17.22.** (a 7.1. feladat megoldása) Legyen  $U$  egy bal egyszerű  $S$  félcsoporth jobb unitér részfélcsoporthja. Legyenek  $a, b \in U$  tetszőleges elemek. Mivel  $S$  bal egyszerű, ezért a 7.2. Tétel duálisa szerint van  $S$ -nek olyan  $x$  eleme, amelyre  $xa = b$  teljesül. Mivel  $U$  jobb unitér, ezért  $a, xa \in U$  az  $x \in U$  tartalmazást eredményezi. Tehát  $Ua = U$  tetszőleges  $a \in U$  esetén. Ez a 7.2. Tétel szerint éppen azt jelenti, hogy  $U$  bal egyszerű.

**17.23.** (a 7.2. feladat megoldása) Legyen  $b \in N$  tetszőleges elem. A 7.1. Feladat szerint  $N$  bal egyszerű. Így van olyan  $x \in N$  elem, melyre  $b = xb$  teljesül. Tekintsük a  $H$  által definiált  $\mathcal{P}_H$  főkongruenciát (2.32. Definíció). A 2.38. Tétel szerint (figyelembe véve, hogy  $S$ -nek önmagától különböző ideálja)  $\mathcal{P}_H$  az  $S$  félcsoporth csoport-kongruenciája;  $H$  ennek egyetlen osztálya, mégpedig a faktorcsoporth egységeleme. Ezért tetszőleges  $h \in H$  elem esetén  $(b, hb) \in \mathcal{P}_H$ . Így  $(xb, hb) \in \mathcal{P}_H$ . Mivel  $\mathcal{P}_H$  csoport-kongruencia, ezért  $(x, h) \in \mathcal{P}_H$ . Mivel  $h \in H$  és  $H$  egyetlen  $\text{cal}P_H$ -osztály, ezért  $x \in H$ , amiből  $x \in N$  miatt  $N \cap H \neq \emptyset$  következik.

**17.24.** (a 7.3. feladat megoldása) A 7.2. Feladat szerint  $N \cap H \neq \emptyset$ . Könnyen igazolható, hogy  $N \cap H$  reflexív unitér részfélcsoporthja  $S$ -nek, így  $N$ -nek is és  $H$ -nak is. Mivel az  $N$  félcsoporth  $N \cap H$  reflexív, unitér részfélcsoporthja szerinti főkongruencia csoportkongruencia, ezért az  $N$ -re vonatkozó feltétel miatt  $N \cap H = N$ . Hasonlóan adódik, hogy  $N \cap H = H$ . Tehát  $N = H$ .

## A 8. fejezet feladatainak megoldásai

**17.25.** (a 8.1. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy kommutatív, 0-egyszerű félcsoporth. Tegyük fel, hogy  $ab = 0$  teljesül valamely  $S$ -beli  $a \neq 0$  és  $b \neq 0$  elemekre. Mivel  $A = \{x \in S : xb = 0\}$  ideálja  $S$ -nek és  $a \in A$ , ezért az  $S$  félcsoporth 0-egyszerűsége

miatt  $A = S$ . Így  $Ab = \{0\}$ . Legyen  $B = \{y \in S : ay = \{0\}\}$ . Világos, hogy  $B$  az  $S$  egy ideálja, és  $b \in B$ . Ezért  $B = S$ , amiből  $S^2 = \{0\}$  következik. Ez viszont ellentmond az  $S$  félcsoporth 0-egyszerűségének (ugyanis  $S^2 \neq \{0\}$ ). Tehát  $G = S - \{0\}$  az  $S$  félcsoporth részfélcsoporthja. Ha  $I$  ideálja  $G$ -nek, akkor  $I \cup \{0\} \neq \{0\}$  ideálja  $S$ -nek, amiből  $I \cup \{0\} = S$  következik. Ebből pedig  $I = G$  adódik. Tehát  $G$  egy kommutatív egyszerű félcsoporth, ami miatt  $G$  egy csoport. Így  $S = G^0$ . Az világos, hogy kommutatív  $G$  csoport esetén  $G^0$  egy kommutatív 0-egyszerű félcsoporth.

**17.26.** (a 8.2. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy 0-egyszerű nil félcsoporth. Akkor  $|S| \geq 2$ . Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek az  $a \neq 0$  és  $b \neq 0$  feltétellel. Akkor  $SaS = S$  és  $SbS = S$  a 4.7. Tétel szerint. Így megadhatók olyan  $x, y, u, v \in S$  elemek, hogy  $a = xby$  és  $b = uav$ . Ebből  $a = xuavy$  adódik. Mivel  $S$  nil félcsoporth, ezért van olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy  $a = (xu)^n a (vy)^n = 0a0 = 0$ . Tehát  $a = b$ . Következésképpen  $S = a \cup \{0\}$ . Mivel  $S$  nil félcsoporth, szükségképpen  $a^2 = 0$ , és így  $S^2 = \{0\}$ , ami ellentmondás.

## A 9. fejezet feladatainak megoldásai

**17.27.** (a 10.1. feladat megoldása) Legyen  $L$  egy balzéró,  $R$  pedig egy jobbzeró félcsoporth. Ha  $|L| = |R| = 1$ , akkor  $S = L \times R$  egyelemű, s ezért teljesen egyszerű. Tegyük fel, hogy  $|S| \geq 2$ . Legyen  $I$  az  $S$  egy ideálja. Legyen  $(a, b) \in I$  tetszőleges elem. Akkor tetszőleges  $(x, y) \in S$  elemre  $(x, y) = (xax, yby) = (x, y)(a, b)(x, y) \in I$ , amiből következik, hogy  $S = L \times R$  egyszerű félcsoporth. Az világos, hogy  $S$  minden eleme idempotens. Legyen  $(e, f) \in S$  tetszőleges elem. Ha valamely  $(a, b) \in S$  elemre  $(a, b) \leq (e, f)$ , azaz  $(a, b) = (a, b)(e, f) = (e, f)(a, b)$ , akkor  $(a, b) = (a, f) = (e, b)$ , amiből  $(a = e$  és  $b = f$ , azaz  $(a, b) = (e, f)$  adódik. Tehát  $S$  minden eleme primitív idempotens. Így  $S = L \times L$  teljesen egyszerű.

**17.28.** (a 9.2. feladat megoldása) Legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges félcsoporthok. Legyen  $S = A \times B$ . Tegyük fel, hogy  $A$  és  $B$  teljesen egyszerű félcsoporthok. Feltehetjük, hogy  $|A| > 1$  és  $|B| > 1$ . Legyen  $(a, b) \in S$  tetszőleges elem. Mivel  $A$  és  $B$  egyszerű, ezért  $AaA = A$  és  $BbB = B$ . Így  $(A \times B)(a, b)(A \times B) = AaA \times BbB = A \times B$ . Tehát  $A \times B$  egyszerű félcsoporth. Legyenek  $e \in A$  és  $f \in B$  primitív idempotens elemek. Akkor tetszőleges  $(a, b) \in A \times B$  idempotens elem esetén az  $(a, b) \leq (e, f)$  feltételből, azaz az  $(a, b) = (a, b)(e, f) = (e, f)(a, b)$  feltételből  $(a, b) = (ae, bf) = (ea, fb)$ , amiből pedig  $a = ae = ea$  és  $b = bf = fb$  következik. Mivel  $e$  és  $f$  primitív idempotensei  $A$ -nak, illetve  $B$ -nek, ezért  $a = e$  és  $b = f$ , azaz  $(a, b) = (e, f)$ . Tehát  $(e, f)$  az  $S = A \times B$  direkt szorzat primitív idempotens eleme. Tehát  $S$  teljesen egyszerű félcsoporth.

Fordítva, tegyük fel, hogy  $S = A \times B$  teljesen egyszerű. Feltehetjük, hogy  $|A| > 1$  és  $|B| > 1$ . Ha  $I_A$  az  $A$  félcsoporth egy ideálja, akkor  $I_A \times B$  az  $A \times B$  félcsoporth ideálja, és így megegyezik  $A \times B$ -vel, amiből  $I_A = A$  következik. Tehát  $A$  egyszerű félcsoporth. Hasonlóan igazolható, hogy  $B$  is egyszerű. Legyen  $(e, f)$  az  $A \times B$  egy primitív idempotens

eleme. Akkor  $e$  az  $A$  idempotens eleme. Ha  $a = ae = ea$  teljesül valamely  $A$ -beli  $a$  idempotens elemre, akkor  $(a, f) = (a, f)(e, f) = (e, f)(a, f)$ , amiből  $(a, f) = (e, f)$ , azaz  $a = e$  következik. tehát  $e$  az  $A$  primitív idempotens eleme. Hasonlóan igazolható, hogy  $f$  a  $B$  primitív idempotens eleme. Tehát  $A$  és  $B$  teljesen egyszerű félcsoporthok.

**17.29.** (a 9.3. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth. A 9.25. Tétel szerint  $S$  izomorf egy reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporthal. Legyen  $(a)_{ij}$  tetszőleges nem nulla idempotens elem. Legyen  $(b)_{kt}$  egy tetszőleges nem nulla idempotens elem a  $(b)_{kt} \leq (a)_{ij}$  feltétellel. Akkor  $(b)_{kt} = (b)_{kt}(a)_{ij} = (a)_{ij}(b)_{kt}$ , amiből  $(b)_{kt} = (bp_{ti}a)_{kj} = (ap_{jk}b)_{it}$  következik. Így  $k = i$ ,  $t = j$  és  $b = bp_{ti}a = ap_{jk}b$  következik. Mivel  $(b)_{kt} \neq 0$ , ezért  $b = p_{tk}^{-1}$ , és így a  $b = bp_{ti}a$  egyenlőségből  $b = p_{tk}^{-1}p_{ti}a = p_{ti}^{-1}p_{ti}a = a$  adódik. Így  $(a)_{ij} = (b)_{kt}$ . Tehát  $(a)_{ij}$  primitív idempotens. Következésképpen  $S$  minden nem nulla idempotens eleme primitív.

## A 10. fejezet feladatainak megoldásai

**17.30.** (a 10.1. feladat megoldása) Az nyilvánvaló, hogy  $\sigma_J$  az  $S$  félcsoporth ekvivalenciarelációja. Legyenek  $a, b, s \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \sigma_J$ . Ha  $a, b \in F$  valamely  $F$  filterre, akkor  $sa, sb \in F$  vagy  $sa, sb \notin F$  attól függően, hogy  $s \in F$ , vagy  $s \notin F$ . Ha  $a, b \notin F$ , akkor tetszőleges  $s \in S$  esetén  $sa, sb \notin F$ , mert  $F$  komplementere prím ideál. Tehát  $\sigma_J$  bal oldali kongruencia. Hasonlóan adódik, hogy  $\sigma_J$  jobb oldali kongruencia. Tehát  $\sigma_J$  az  $S$  félcsoporth egy kongruenciája. Mivel minden  $F$  filterre és minden  $a \in S$  elemre  $a^2 \in F$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $a \in F$ , ezért  $(a, a^2) \in \sigma_J$  minden  $a \in S$  elemre. Tehát az  $S/\sigma_J$  faktorfélcsoporth egy köteg. Tegyük fel, hogy  $ab \in F$  teljesül  $S$  valamely  $F$  filtere és valamely  $a, b$  elemei esetén. Akkor  $a \in F$  és  $b \in F$ , de ekkor  $ba \in F$ . Ezért  $(ab, ba) \in \sigma_J$ , s ezért az  $S/\sigma_J$  faktorfélcsoporth egy félháló.

**17.31.** (a 10.2. feladat megoldása) Legyen  $\sigma$  egy félháló-kongruenciája egy  $S$  félcsoporthnak. Jelöljük az  $S/\sigma$  félhálót  $Y$ -nal, és a  $\sigma$ -osztályokat  $S_\alpha$ -val ( $\alpha \in Y$ ). Adott  $\alpha \in Y$  elem esetén legyen  $F_\alpha = \cup_{\beta \geq \alpha, \beta \in Y} S_\beta$ . Ha  $\beta \geq \alpha$  és  $\delta \geq \alpha$ , azaz  $\beta\alpha = \alpha$  és  $\delta\alpha = \alpha$ , akkor  $\beta\delta\alpha = \alpha$ , és ezért  $\beta\delta \geq \alpha$ . Ebből az adódik, hogy  $F_\alpha$  részfélcsoporthja  $S$ -nek. Ha  $\beta\delta \geq \alpha$ , azaz  $\beta\delta\alpha = \alpha$ , akkor  $\beta\alpha = \alpha$  and  $\delta\alpha = \alpha$ , és így  $\beta \geq \alpha$  és  $\delta \geq \alpha$ . Ez viszont azt jelenti, hogy  $F_\alpha$  filter. Legyen  $J$  az  $F_\alpha$  filterek halmaza. Megmutatjuk, hogy  $\sigma = \sigma_J$ . Ha  $(a, b) \in \sigma$ , akkor  $a, b \in F_\alpha$  vagy  $a, b \notin F_\alpha$  minden  $\alpha \in Y$ -ra. Ezért  $(a, b) \in \sigma_J$ . Tehát  $\sigma \subseteq \sigma_J$ . Tegyük fel, hogy  $(a, b) \in \sigma_J$ . Jelölje  $\xi$  és  $\eta$  az  $Y$  azon elemeit, amelyekre  $a \in S_\xi$  és  $b \in S_\eta$  teljesül. Mivel  $a \in F_\xi$ , ezért  $b \in F_\xi$ , amiből  $\eta \geq \xi$  következik. Mivel  $b \in F_\eta$ , ezért  $a \in F_\eta$ , amiből  $\xi \geq \eta$  következik. Ezért  $\xi = \eta$ , azaz  $(a, b) \in \sigma$ . Tehát  $\sigma_J \subseteq \sigma$ . Következésképpen  $\sigma = \sigma_J$ .

**17.32.** (a 10.3. feladat megoldása) Legyenek  $a$  és  $b$  egy  $S$  arkhimédieszi félcsoporth tetszőleges elemei. Akkor  $a^n = xby$  és  $b^m = uav$  teljesül valamely pozitív egész  $n$  és  $m$

számra, valamint  $S$  valamely  $x, y, u, v$  elemeire. Legyen  $\tau$  tetszőleges félháló-kongruencia  $S$ -en. Akkor

$$\begin{aligned} a \tau a^n &= xby \tau xb^{m+1}y \tau xb^m yb = xuavyb \tau(xby)(uav) = \\ &= a^n(uav) \tau ua^{n+1}v \tau uav = b^m \tau b. \end{aligned}$$

Tehát  $\tau$  az  $S$  félcsoporth univerzális relációja. Így  $S$  félháló-felbonthatatlan.

**17.33.** (a 10.4. feladat megoldása) Legyen  $S$  gyengén kommutatív félcsoporth. A 10.15. Tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy  $S$  Putcha-félcsoporth. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy  $a$  osztja  $b$ -t, azaz  $xay = b$  teljesül valamely  $x, y \in S^1$  elemekre. Akkor  $(bx)a(yb) = b^3$ . Mivel  $bx, a, yb \in S$ , ezért megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, valamint olyan  $u, v \in S$  elemek, amelyekre  $v(bx)a = ((bx)a(yb))^m = a(yb)u$ . Ebből  $b^{6m} = ((bx)a(yb))^{2m} = v(bx)aa(yb)u$  adódik. Tehát  $a^2$  osztja a  $b$  elem  $6m$ -edik hatványát.

**17.34.** (a 10.5. feladat megoldása) Legyen  $S$  gyengén kommutatív félcsoporth. Az előző feladat szerint  $S$  előáll  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) arkhimédieszi félcsoporthok  $Y$  félhálójaként. Legyen  $\alpha \in Y$  tetszőleges. Akkor tetszőleges  $a, b \in S_\alpha$  elemekhez megadható olyan  $m$  pozitív egész szám, valamint olyan  $x, y \in S$  elemek, amelyekre  $xa = (ab)^m = by$  teljesül. Ha  $x \in S_\xi$  és  $y \in S_\eta$ , akkor az  $\alpha\xi = \alpha$  és  $\eta\alpha = \alpha$ , azaz  $S_\alpha S_\xi \subseteq S_\alpha$  és  $S_\eta S_\alpha \subseteq S_\alpha$ . Így  $(ab)x, y(ab) \in S_\alpha$  és  $((ab)x)a = (ab)^{m+1} = b(y(ab))$ . Tehát  $S_\alpha$  gyengén kommutatív.

## A 11. fejezet feladatainak megoldásai

**17.35.** (a 11.1. feladat megoldása) A félcsoporth szíve:  $K = \{0, k_1, k_2\}$ .

**17.36.** (a 11.2. feladat megoldása) A félcsoporth szíve:  $K = \{0, u, v\}$ .

## A 12. fejezet feladatainak megoldásai

**17.37.** (a 12.1. feladat megoldása) Legyen  $S$  egy háromelemű félháló. Akkor  $S$ -nek van nulleleme (a három elem szorzata). Jelölje a nullelemet  $0$ , a másik két elemet pedig  $a$  és  $b$ . Tegyük fel, hogy  $S$  permutálható. Ha  $ab = 0$ , akkor  $I = \{0, a\}$  és  $J = \{0, b\}$  az  $S$  ideáljai. A 12.5. Tétel szerint permutálható félcsoporth ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, így  $ab \neq 0$ . Vizsgáljuk az  $ab = a$  esetet. Akkor  $I = \{0, a\}$  az  $S$  ideálja. Legyen  $\alpha$  az  $S$  félháló azon ekvivalenciája, melynek osztályai  $\{a, b\}$  és  $0$ . Világos, hogy  $\alpha$  az  $S$  félháló kongruenciája is. A 12.4. Tétel szerint  $I$ -nek benne kellene lenni valamely  $\alpha$ -osztályban, vagy elő kellene állni  $\alpha$ -osztályok uniójaként. Itt viszont egyik sem teljesül. Tehát az  $ab = a$  feltétel is ellentmondáshoz vezet. Hasonló a helyzet az  $a = b$  feltétel esetén is. Így  $S$  nem lehet permutálható.

**17.38.** (a 12.2. feladat megoldása) Elegendő azt megmutatni, hogy ha a főideálok láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, akkor az ideálok is láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyen tehát  $S$  olyan félcsoport, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyenek  $A$  és  $B$  az  $S$  tetszőleges ideáljai. Tegyük fel, hogy  $A \not\subseteq B$  és  $B \not\subseteq A$ . Akkor vannak olyan  $a \in A$  és  $b \in B$  elemek, hogy  $a \notin B$  és  $b \notin A$ . A feltétel szerint  $J(a) \subseteq J(b)$  vagy  $J(b) \subseteq J(a)$ . Az első esetben  $J(b) \subseteq B$  miatt  $a \in B$ , ami ellentmondás. Hasonló okok miatt a második feltétel is ellentmondásra vezet. Így  $S$  tetszőleges  $A$  és  $B$  ideáljai esetén az  $A \subseteq B$  vagy  $B \subseteq A$  feltételek egyikének kell teljesülni. Tehát  $S$  ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

## A 13. fejezet feladatainak megoldásai

**17.39.** (a 13.1. feladat megoldása) A 13.1. Tétel szerint, ahhoz, hogy egy  $S$  félcsoport beágyazható legyen egy csoportba, szükségképpen  $S$ -nek egyszerűsítésesnek kell lennie. Fordítva, tegyük fel, hogy  $S$  gyengén kommutatív, egyszerűsítéses félcsoport. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Mivel  $S$  gyengén kommutatív, ezért van olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy

$$(ab)^n \in Sa.$$

Mivel

$$(ab)^n \in Sb$$

nyilvánvalóan teljesül, ezért

$$Sa \cap Sb \neq \emptyset.$$

Tehát  $S$  jobbreverzibilis. A 13.4. Tétel szerint minden jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoport beágyazható egy csoportba.

**17.40.** (a 13.2. feladat megoldása) Tegyük fel, hogy egy  $S$  félcsoport beágyazható egy periodikus  $G$  csoportba. Feltehetjük, hogy  $S \subseteq G$ . Legyen  $s \in S$  tetszőleges elem. Mivel  $G$  periodikus, ezért megadható olyan  $n$  pozitív egész szám, hogy  $e = s^n \in S$ . Ebből már következik a feladat állítása.

## A 14. fejezet feladatainak megoldásai

**17.41.** (a 14.1. feladat megoldása) Legyen  $S$  gyengén szeparatív félcsoport. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy  $ax = bx$  és  $xa = xb$  teljesül minden  $x \in S$  elemre. Akkor az első egyenlőségből az  $x = b$  választással  $ab = b^2$ , a második egyenlőségből az  $x = a$  választással  $a^2 = ab$  adódik. Tehát  $a^2 = ab = b^2$ . Mivel  $S$  gyengén szeparatív, ezért ezen utóbbi egyenlőségből  $a = b$  következik. Tehát  $S$  gyengén reduktív.

**17.42.** (a *14.2. feladat megoldása*) Legyen  $S$  gyengén kommutatív félcsoporth. Akkor  $S$  előáll gyengén kommutatív arkhimédieszi  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) félcsoporthok félhálójaként. Tegyük fel, hogy ezek mindegyike gyengén egyszerűsíteses. Legyenek  $a, b \in S$  tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy  $a^2 = ab = b^2$ . Akkor van olyan  $\alpha \in Y$  elem, hogy  $a, b \in S_\alpha$ . Az

$$a^2 = ab = b^2$$

feltételből

$$(ba)(ba) = b(ab)a = b^3a = b^2(ba) = (ab)(ba)$$

és

$$(ba)(ba) = b(ab)a = ba^3 = (ba)a^2 = (ba)(ab)$$

következik. Mivel  $ab, ba \in S_\alpha$  és  $S_\alpha$  gyengén egyszerűsíteses, ezért

$$ab = ba.$$

Így

$$a^2 = ab = ba = b^2.$$

Mivel  $S_\alpha$  gyengén egyszerűsíteses, ezért  $a = b$ . Tehát  $S$  gyengén szeparatív.

## A 15. fejezet feladatainak megoldásai

**17.43.** (a *15.1. feladat megoldása*) A véges  $p$ -csoportok szükségképpen  $p$ -hatvány rendűek. Jelölje  $q = p^n$  a  $G$  rendjét. Legyen  $a \in \mathbb{F}[G]$  tetszőleges elem. Akkor  $g = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_q g_q$  valamely  $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{F}$  skalárokkal. Ha  $a$  bal oldali nullosztó, akkor van olyan  $0 \neq b \in \mathbb{F}[G]$  elem, hogy  $0 = ab$ , amiből  $a^q b = 0$  következik. Mivel az  $\mathbb{F}[G]$  csoportalgebra kommutatív, ezért érvényes benne a binomiális tétel, és így (figyelembe véve, hogy  $\mathbb{F}$  karakterisztikája  $p$ )  $a^q = (\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_q g_q)^q = \alpha_1^q g_1^q + \dots + \alpha_q^q g_q^q = \alpha_1^q e + \dots + \alpha_q^q e = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)e$ , ahol  $e$  jelöli a  $G$  csoport egységelemét. Így  $0 = a^q b = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)eb = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)b$ , amiből  $b \neq 0$  miatt  $(\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q) = 0$  következik. Így  $a^q = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)e = 0e = 0$ . Tehát  $a$  nilpotens elem.

**17.44.** (a *15.2. feladat megoldása*) Legyen a  $G$  rendje  $p^k$ . Mivel  $e$  felcserélhető  $g$ -vel és  $\mathbb{F}$  karakterisztikája  $p$ , ezért a binomiális tétel alkalmazásával  $(e - g)^{p^k} = e - g^{p^k} = e - e = 0$ .

## A 16. fejezet feladatainak megoldásai

**17.45.** (a *16.1. feladat megoldása*) Jelölje  $(\mathbb{F})^n$  az  $\mathbb{F}$  test elemiből képezett  $n$ -elemű sorozatok vektortérét. Jól ismert tény, hogy megadható az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra  $\{s_1, \dots, s_n\}$  bázisának segítségével az  $\mathbb{F}[S]$  vektortérnek az  $(\mathbb{F})^n$  vektortérre való  $\varphi$  izomorfizmusa.

Egy  $a \in \mathbb{F}[S]$  elem  $\varphi(a)$  képét az  $a$  elem  $\{s_1, \dots, s_n\}$  bázisra vonatkozó koordinátás alakjának nevezzük. Jelölje  $\underline{e}_i$  az  $s_i \in S \subseteq \mathbb{F}[S]$  elem koordinátás alakját, azaz azt az  $n$ -elemű sorozatot, melynek  $i$ -dik eleme az  $\mathbb{F}$  egységeleme, a többi pedig az  $\mathbb{F}$  nulleleme. Jelölje  $k * i$  azt a  $t \in \{1, \dots, n\}$  indexet, amelyre  $s_k s_i = s_t$  teljesül. Világos, hogy az  $\mathbf{R}^{(s_i)}$  mátrix  $k$ -dik sora egyenlő  $\underline{e}_{k*i} \in (\mathbb{F})^n$  vektorral, és így  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{R}^{(s_i)} = \mathbf{0}$  akkor és csak akkor teljesül, ha minden  $k = 1, \dots, n$  indexre  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_{k*i} = \underline{0}$  teljesül, ahol  $\underline{0}$  az  $(\mathbb{F})^n$  nullvektorát jelöli. Ezen utóbbi egyenlőség akkor és csak akkor teljesül  $(\mathbb{F})^n$ -ben minden  $k = 1, \dots, n$  indexre, ha  $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_k s_i = 0$ , azaz  $s_k(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i) = 0$  teljesül az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebrában minden  $k = 1, \dots, n$  indexre. Ez pedig éppen azzal ekvivalens, hogy  $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$  az  $\mathbb{F}[S]$  félcsoporthalgebra jobb annullátorának eleme.

**17.46.** (a [16.2. feladat megoldása](#))  $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \in \mathbb{F}[S]$  akkor és csak akkor van benne az  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$  magjában, ha  $\alpha_1 \mathbf{R}^{(s_1)} + \dots + \alpha_n \mathbf{R}^{(s_n)} = \mathbf{0}$ . Az előző feladat szerint ez akkor és csak akkor teljesül, ha  $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$  benne van  $\mathbb{F}[S]$  jobb oldali annullátorában.



# Tárgymutató

- 0-egyszerű félcsoporth, 46
- $\mathcal{D}$ -reláció, 56
- $\mathcal{H}$ -reláció, 56
- $\mathcal{L}$ -reláció, 56
- $\mathcal{R}$ -reláció, 56
- additív írásmód, 6
- algebra, 205
- algebra dimenziója, 205
- algebra ideálja, 205
- algebra idempotens eleme, 206
- algebra nil ideálja, 208
- algebra nilpotens eleme, 205
- algebra nilpotens ideálja, 208
- algebra nilradikálja, 211
- algebra relatív ideálsorozata, 212
- algebra valódi nilpotens eleme, 205
- algebrai struktúra, 6
- algebrai struktúra alaphalmaza, 6
- annullátor, 171
- arkhimédeszi félcsoporth, 145
- asszociatív művelet, 7
- automorfizmus, 39
- Baer-Levi félcsoporth, 102
- bal 0-egyszerű félcsoporth, 93
- bal egyszerű félcsoporth, 92
- bal egyszerűsítéses félcsoporth, 86
- bal hányadoscsoporth, 194
- bal oldali egységelem, 14
- bal oldali ideál; balideál, 16
- bal oldali inverz, 14
- bal oldali nullelem, 13
- bal Putcha-félcsoporth, 146
- bal redukzív félcsoporth, 69
- bal szeparatív félcsoporth, 198
- bal transláció, 69
- balkongruencia, 28
- balzéró [jobbzéró] félcsoporth, 13
- beágyazás, 39
- belső bal transláció, 69
- belső jobb transláció, 69
- biciklikus félcsoporth, 119
- binér reláció, 24
- Brandt-félcsoporth, 136
- Brandt-gruppoid, 134
- Cayley-féle művelettábla, 7
- ciklikus félcsoporth, 17
- Clifford-félcsoporth, 157
- Croisot-Teissier-féle félcsoporth, 109
- csoporth, 15
- derékszögű köteg, 160
- direkt szorzat, 160
- diszjunktív elem, 170
- divízióalgebra, 212
- egységelem, 14
- egyszerű algebra, 212
- egyszerű félcsoporth, 45
- egyszerűsítéses félcsoporth, 86
- ekvivalenciareláció, 27
- elágazás, 76
- elem indexe, 18
- elem periódusa, 18
- elem rendje, 18
- endomorfizmus, 39



epimorfizmus, 39  
 félcsoporth, 8  
 félcsoporth szíve, 170  
 félcsoporth test feletti algebrája, 213  
 félcsoporthalgebra, 213  
 félcsoporthok erős félhálójaja, 157  
 félcsoporthok szubdirekt szorzata, 166  
 félháló, 21  
 félháló-felbonthatatlan félcsoporth, 141  
 féligegyszerű algebra, 212  
 féligegyszerű algebra osztályszáma, 212  
 fő balideál, 53  
 fő jobbideál, 53  
 faktorfélcsoporth, 30  
 generátorrendszer, 16  
 globálisan idempotens szív, 170  
 Green-relációk, 56  
 gruppoid, 8  
 gyengén egyszerűsítéses félcsoporth, 204  
 gyengén kommutatív félcsoporth, 165  
 gyengén redukzív félcsoporth, 71  
 gyengén szeparatív félcsoporth, 198  
 halmazok Descartes szorzata, 6  
 homocsoport, 172  
 homomorfizmus, 39  
 homomorfizmus magja, 39  
 homomorfizmusok tranzitív rendszere, 157  
 ideál, 16  
 ideálbővítés, 65  
 idempotens elem, 21  
 invertálható művelet, 7  
 inverz, 14  
 inverz félcsoporth, 86  
 izomorfizmus, 39  
 jobb 0-egyszerű félcsoporth, 93  
 jobb egyszerű félcsoporth, 92  
 jobb egyszerűsítéses félcsoporth, 86  
 jobb oldali egységelem, 14  
 jobb oldali ideál; jobbideál, 16  
 jobb oldali inverz, 14  
 jobb oldali nullelem, 13  
 jobb Putcha-félcsoporth, 146  
 jobb redukzív félcsoporth, 69  
 jobb reverzibilis félcsoporth, 192  
 jobb szeparatív félcsoporth, 198  
 jobb transláció, 69  
 jobbcsoport, 96  
 jobbkongruencia, 28  
 jobbreguláris reprezentáció, 69  
 kölcsönösen egyértelmű parciális transzformáció, 89  
 köteg, 21  
 kétoldali ideál; ideál, 16  
 kanonikus homomorfizmus, 39  
 kiterjesztett jobb [bal] reguláris reprezentáció, 70  
 kommutatív csoport, 15  
 kommutatív félcsoporth, 8  
 kommutatív művelet, 7  
 kongruencia, 28  
 kongruenciareláció, 28  
 kváziciklikus  $p$ -csoport, 174  
 Light-féle asszociativitási teszt, 8  
 művelet, 6  
 monoid, 14  
 multiplikatív írásmód, 6  
 Neumann-féle inverz, 80  
 nil félcsoporth, 151  
 nilpotens algebra, 210  
 nilpotens elem, 205  
 nilpotens félcsoporth, 151  
 nilpotens szív, 170  
 nilradikál, 211  
 permutálható félcsoporth, 182

Putcha-félcsoport, 146

részalgebra, 205

részfélcsoport, 16

Rees mátrix, 124

Rees-féle faktorfélcsoport, 51

Rees-féle kongruencia, 51

Rees-féle mátrixfélcsoport, 124

reflexív reláció, 26

reguláris elem, 78

reguláris félcsoport, 83

relációk kompozíciója, 24

szabad félcsoport, 43

szeparatív félcsoport, 198

szimmetrikus inverz félcsoport, 90

szimmetrikus reláció, 26

szubdirekt irreducibilis félcsoport, 167

teljes bal transzformációfélcsoport, 68

teljes jobb transzformációfélcsoport, 68

teljesen 0-egyszerű félcsoport, 114

teljesen egyszerű félcsoport, 114

teljesen reguláris elem, 85

teljesen reguláris félcsoport, 85

természetes homomorfizmus, 39

transzformáció, 68

transzlációs burok, 71

transzitiv reláció, 26

valódi ideálok, 92

valódi nilpotens elem, 205

zéró félcsoport, 14

# Irodalomjegyzék

- [1] Almeida, J., S. Margolis, B. Steinberg, M. Volkov, *Representation Theory of Finite Semigroups*, Transaction of The American Mathematical Society, Vol. 361, No. 3, 2009, 1429 - 1461
- [2] Auinger, K. and Szendrei, M.B., *Reesmatrix semigroups and the regular semidirect product*. J. Aust. Math. Soc. 79(2005), no. 1, 39–60.
- [3] Babcsányi, I., *Automaták, Nyelvek, Kódok*, BME, Matematika Intézet, Algebra Tanszék, 2007, elektronikus jegyzet, [www.math.bme.hu/babcs/](http://www.math.bme.hu/babcs/)
- [4] Babcsányi, I., *Algebrai Automataelmélet*, BME, TTK, Matematika Intézet, 2011, elektronikus jegyzet, <http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/18.pdf> (ISBN: 978-963-279-461-7)
- [5] Clifford, A.H. & G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups I.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961
- [6] Clifford, A.H. & G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups II.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967
- [7] Clifford, A.H. and M. Petrich, *Some classes of completely regular semigroups*, J. Algebra, 46(1977), 462-480
- [8] Fuchs, L., *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997
- [9] Gécseg, F. & I. Peák, *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972
- [10] Hamilton, H., *Permutability of congruences on commutative semigroups*, Semigroup Forum, 10(1975), 55-66
- [11] Howie, J.M., *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London/New York/San Francisco, 1976

- [12] Jürgensen, H., Miglioniri, F., Szép, J., *Semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991
- [13] Kurosh, A.G., *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952
- [14] Lajos, S., *Generalized ideals in semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged), 22(1961), 217-222
- [15] Ljapin, E. S., *Semigroups*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1963
- [16] Marcus, A., *Retract extensions of completely simple semigroups by nil semigroups*, Mathematica, Tom. 34(57), No. 1, 1992, 37-41
- [17] Márki, L., *On locally regular Rees matrix semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 37 (1975), 95–102.
- [18] Megyesi, L., Pollák Gy., *Über die Struktur der Hauptidealhalbgruppen. I.* Acta Sci. Math. (Szeged) 29(1968) 261–270
- [19] Nagy, A., *The least separative congruence on a weakly commutative semigroup*, Czech. Math. J., 32(1982), 630-632
- [20] Nagy, A., *Special Classes of Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001
- [21] Nagy, A., *On faithful representations of finite semigroups  $S$  of degree  $|S|$  over the fields*, International Journal of Algebra, Vol. 7, 2013, no. 3, 115 - 129
- [22] Okniński, J., *Semigroup Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
- [23] Peirce, B., *Linear Associative Algebra*, American Journal of Mathematics, Vol. 4. No. 1(1881), 97-229
- [24] Petrich, M., *Introductions to semigroups*, Merrill Books, Columbus, Ohio, (1973)
- [25] Petrich, M., *Lectures in Semigroups*, Akademie-Verlag-Berlin, 1977
- [26] Petrich, M., *Inverse semigroups*, John Wiley and Sons, 1984
- [27] Pollák, Gy., *Construction of bisimple inverse semigroups from right cancellative semigroups*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), no. 2, 421–426.
- [28] Pondělíček, B., *On weakly commutative semigroups*, Czech. Math. J., 25(1975), 20-23

- [29] Putcha, M. S., *Semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 6(1973), 12-34
- [30] Rédei, L., *The theory of finitely generated commutative semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956
- [31] Rees, D., *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 36(1940), 387-400
- [32] Restivo, A & C. Reutenauer, *On the Burnside problem for semigroups*, J. Algebra, 89(1984), 102-104
- [33] Rowen, L.H., *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York; London, 1980
- [34] Schein, B.M., *Homomorphism and subdirect decompositions of semigroups*, Pacific Journal of Mathematics, 17(1966), 529-547
- [35] Schein, B. M., *Commutative semigroups where congruences form a chain*, Semigroup Forum, 17(1969), 523-527
- [36] Steinfeld, O., *On a generalization of completely 0-simple semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 28(1967) 135–145
- [37] Szendrei, M.B., *On an extension of semigroups*. Acta Sci. Math. (Szeged) 39(1977), no. 3-4, 367–389.
- [38] Szász, F.A., *Radicals of Rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981
- [39] Szász, G., *Eine Charakteristik der primidealhalbgruppen*, Publicationes Mathematicae, Tom. 17. Fasc. 1-4(1970), 9-213
- [40] Tamura T., *Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain*, Bull. Soc. Math. France, 97(1969), 369-380
- [41] Tamura T., *Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 4(1972), 255 - 261