A

KAMATSZÁMOLÁS

REFORMTERVE.

IRTA

KOSZTOLÁNYI ÁRPÁD

FŐGYMN. TANÁR.

SZABADKA,

BLESZITS VINCZE KÖNYVNYOMDÁJÁBÓL 1897.

A KAMATSZÁMOLÁS

REFORMTERVE.

IRTA:

KOSZTOLÁNYI ÁRPÁD
FŐGYMN. TANÁR.

SZABADKA,
BLESZITS VINCZE KÖNYVNYOMDÁJÁBÓL
1897.

Egy reformeszmét kivánok megpenditeni, mely ugyan az emberek nagy részének a régi szokásokhoz való merev ragaszkodása miatt a gyakorlati életben leendő elterjedésre — legalább a közel jövőben — nem számithat, de mely dacára ennek, már érdekességénél fogva is megérdemli elméleti szempontból a megvitatást. A következőkben ugyanis törekvésem lesz kimutatni azt, hogy a pénzintézetek ama szokása, mely szerint a föl nem vett kamatokat *félévenként* csatolják a tőkéhez: a kamatos-kamatszámolás lényegének meg nem felelő eljárás; iparkodni fogok bebizonyitani azt, hogy csak a *folytonos* (pillanatonként való) tőkésités az, mi a kamatos-kamatszámolás természetével egyedül egyeztethető össze s melynek szigoru, tudományos alapja van, a mivel az előbbi, gyakorlati eljárás nem dicsekedhetik.

Első sorban le fogom vezetni folytonos kamatcsatolás esetén a tőke felnőtt értékének kiszámolására szolgáló alapképletet s mindjárt kijelölöm a módot is, melylyel ez a gyakorlati életbe átültethető lenne az adósok érdekeinek minden sérelme nélkül a kamatláb megfelelő csekély leszállitásával. Ezután reá fogok mutatni ama gyarlóságokra, melyekkel a kamatos-kamatszámolásnak most használatban levő képletei járnak, minden oly esetben, midőn az idő nincs egész számmal kifejezve. Érinteni fogom azt a viszásságot is, hogy a jelenleg divó kamatcsatolási mód mellett ugyanazon tőke, percent és idő esetén is különböző nagy lehet a kamat; ebből kifolyólag szót emelek az egyszerű kamatszámolásnak a pénzintézeteknél való teljes eltörlése mellett, mert csakis igy és a folytonos tőkésités elfogadása által lehet megszüntetni amaz anomáliákat, melyek abból a következetlen eljárásból erednek, hogy ugyanazon tőke után manapság részben egyszerű, részben kamatos-kamat számittatik. Záradékul a folytonos tőkésitést kiterjesztem az állandó időszakos betétekre és a járadékokra (amortizációs kölcsönökre) is, kimutatván itt is a tervbe vett ujitás előnyeit a most divó eljárás felett.

Szükségesnek tartom azonban e helyen megjegyezni, hogy e munkám keretébe mindenütt, csak az *utólagos* (decursiv) kamatozást vehettem föl s mellőzni voltam kénytelen az ugynevezett *előleges* (anticipativ) kamatozás tárgyalását (mit törlesztési kölcsönöknél több tekintélyes pénzintézet — köztük a magyar földhitelintézet is —) használ, mert ennek fölvétele és a reform szempontjából való taglalása által e munka jóval túllépné a terjedelmére nézve kitüzött határokat.

Hogy e képletek levezetéseit s az ezekből folyó számitásokat a mennyiségtanban kevésbbé járatosakra — különösen középiskolai tanulókra s ezek között első sorban tanitványaimra — nézve is hozzá férhetőkké tegyem, csaknem mindenütt elemi mennyiségtani levezetéseket használtam. Csupán két esetben kellett az elementáris mathematikai ismereteket tágitanom; először is a természetes logarithmusok alapszámának (e-nek) hatványozásánál, mit azonban szintén elemi uton — indukció alapján — végeztem, mellőzve az algebrai analysis $f\ (u+v)=f\ (u).\ f\,(v)$ függvény-egyenletéből folyó nehezebb deduktiv módszert; a második hely, hol az elemi mennyiségtani ismeretek határát tul kellett lépnem, az általam forgalomba hozott és *kritikus időnek* elnevezett időpont kiszámolása volt, melynek elérésére egy exponenciális függvény maximumát kellett meghatároznom, mit csak is differenciál-számolással végezhettem. Mivel azonban e levezetés a szóban forgó dolog lényegére nézve nem alapvető fontosságu, azért a felsőbb mennyiségtanban járatlan olvasó e részt bátran átugorhatja a nélkül, hogy az egész értekezés érthetősége ez által lényeges csorbát szenvedne; e rész szembeszökő feltüntetése végett nyomattam azt a többinél apróbb betükkel.

I.

A kamatos-kamatszámolási feladványoknál vagy azt szokás föltételezni, hogy a kamatok *egész évenként* csatoltatnak a tőkéhez, vagy pedig az van megszabva, hogy a kamatcsatolás, más szóval tőkésités — a pénzintézetek módjára — *féléves* időközökben történjék. E kétféle kamatcsatolási mód közül az utóbbi a kölcsönadóra nézve előnyösebb, mert ugyanazon tőke egyenlő percent és idő esetén nagyobb összegre szaporodik fel a pénzintézeteknél szokásos féléves tőkésitéssel, mint ha a kamatok csak minden év v gén csatoltatnának a tőkéhez. Főként akkor igen szembeszökő e különbség, ha hosszabb időről van szó. Igy például 1 frt tőke 5% mellett 100 év alatt egész évenként való kamatcsatolással 131·50 frtra szaporodik fel, mig ugyanennek felnőtt értéke féléves tőkésités mellett 139·56 frt, s eként az utóbbi többlete az előbbivel szemben a betevő előnyére 8·06 frt, vagyis több, mint az eredeti tőke nyolcszorosa. Természetesen még előnyösebb lenne a dolog a hitelezőre nézve, ha a kamatcsatolás még félévnél is rövidebb időközökben történnék. Igy negyedéves tőkésitéssel az előbbi tőke, percent és idő esetén 143·88 frt lenne a felszaporodott tőke, mely a féléves kamatcsatolásnál felnőtt tőkével szemben 4·32 frt többletet mutat, mely kisebb ugyan, mint az előbbi különbség, de azért az 1 frt eredeti tőkét tekintve még mindig elég tekintélyes összeg. Tovább folytatva még a számolást $\frac{1}{8}$ éves (vagyis másfél hónaponként való) kamatcsatolásra, végösszegül 146·12 frtot nyerünk, melynek többlete a legutóbbival szemben 2·24 frt vagyis megint kevesebb, mint az utolsó különbség volt. Ismételve még a számolást $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$ és $\frac{1}{512}$ éves időközökben való kamatcsatolással, nyerjük az alábbi táblázatba foglalt értékeket, hová teljesség és áttekinthetőség végett a már felsorolt értékek és különbségek is fölvétettek:

Tőkésitési időköz években	1 frt tőke felnőtt értéke 100 év alatt 5% mellett	Két szomszédos érték különbsége
1	131·50	
		8·06
$\frac{1}{2}$	139·56	
		4·32
$\frac{1}{4}$	143·88	
		2·24
$\frac{1}{8}$	146·12	
		1·14
$\frac{1}{16}$	147·26	
		0·58
$\frac{1}{32}$	147·84	
		0·28
$\frac{1}{64}$	148·12	
		0·15
$\frac{1}{128}$	148·27	
		0·07
$\frac{1}{256}$	148·34	
		0·03
$\frac{1}{512}$	148·37	

E táblázat*) világosan mutatja, hogy a tőke felszaporodott értéke a kamatcsatolási időközök folytonos felezésével mindig nő ugyan, de fokozatosan csökkenő mértékben, mint erről a különbségek rovata tanuskodik.

Önkényt fölmerül tehát amaz érdekes kérdés: mi lenne a tőke felszaporodott értéke, ha a kamatcsatolás végtelen kis időközökben — pillanatonként — történnék? Előre várható, hogy az előbbi példára vonatkozva ez esetben csak kevéssel fogunk többet kapni a táblázat utolsó rovatában levő számnál a növekvés szakadatlan csökkenése miatt.

Hogy e reánk nézve fontos problémát megoldhassuk, induljunk ki a most divó időszakos kamatcsatolásnak

$$T_n = T_0 \; k^n$$

alapképletéből, hol T_n a tőkének n időegység alatt felnőtt értékét, T_0 az eredeti tőkét, k pedig a kamattényezőt jelenti, melynek értéke a percenttől és a tőkésitési időköztől függ; és pedig, ha a percentet p-vel jelöljük, egész éves tőkésitésnél $k = 1 + \frac{p}{100}$, vagy még (ugy most, mint ezentul) rövidség kedveért $\frac{p}{100}$, vagyis a percent századrésze helyett q-t irva: $k = 1 + q$; ellenben féléves kamatcsatolás esetén $k = 1 + \frac{q}{2}$ épigy negyedévesnél $k = 1 + \frac{q}{4}$ és igy tovább; ugy hogy általában, ha a kamatcsatolás az év minden $\frac{1}{x}$-ed részének végén történik $k = 1 + \frac{q}{x}$; a mi végűl n-et, k hatvány-kitevőjét illeti, ennek nagysága a kamatozási időtartammal és a tőkésitési időközzel változik, és pedig n helyett mindig az egész kamatozási időtartalomban foglalt tőkésitési időközök száma irandó, ugy hogy $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ . . . . $\frac{1}{x}$-ed évenként való tőkésités esetén n értéke is 2 szer, 3-szor . . . . x-szer nagyobb lesz, mint egész éves kamatcsatolásnál. Eként tehát az időszakos kamatkapcsolásnak ezen értelmezések alapján transformált képlete

$$T_n = T_0 \left(1 + \frac{q}{x}\right)^{nx},$$

---

*) Az ide vágó számolások végrehajtására 5 jegyü logarithmusokat egyáltalán nem használhatunk, mert ezek már az első értéket is a századrészekben hibásan adnák. Hét jegyü logarithmusok is legfeljebb $\frac{1}{128}$ évi tőkésitésig alkalmazhatók; a táblázat két utolsó adatának kiszámolására tehát vagy 10 jegyű logarithmusokat kell igénybe vennünk, vagy ezek hiányában a rövidített szorzás 16, illetőleg 17-szer egymásután való alkalmazásával közetlenül keresni az eredményt 4—5 tizedesre, melyek közül a 2 első okvetlen pontos lesz.

melynek segélyével számittattak ki $T_0 = 1$ esetre vonatkozólag az előbb közölt táblázatba foglalt értékek.

Hogy ebből a folytonos tőkésités megfelelő képletét nyerjük csak x-et — az egy évben foglalt pillanatok számát — kell *végtelen nagynak* vennünk, s e föltétel szem előtt tartásával a zárőjelben levő kéttagu mennyiséget a binomiális képlet alapján sorba fejtenünk, a mint ez itt következik:

$$\left(1+\frac{q}{x}\right)^{nx} = 1+nx\frac{q}{x}+\frac{nx(nx-1)}{2}\left(\frac{q}{x}\right)^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}\left(\frac{q}{x}\right)^3+$$

$$=1+nq+\frac{nx(nx-1)}{2}\cdot\frac{q^2}{x^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}\cdot\frac{q^3}{x^3}+\ldots.$$

$$=1+nq+\frac{1}{2}\cdot\frac{nx}{x}\cdot\frac{nx-1}{x}\cdot q^2+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{nx}{x}\cdot\frac{nx-1}{x}\cdot\frac{nx-2}{x}.q^3+$$

$$=1+nq+\frac{1}{2}n\left(n-\frac{1}{x}\right)q^2+\frac{1}{2.3}\cdot n\left(n-\frac{1}{x}\right)\left(n-\frac{2}{x}\right)q^3+..$$

Mivel azonban x a föltétel szerint *végtelen nagy*, mindazon törtek, melyek nevezője x és számlálójuk véges szám, zérussal lesznek egyenlők, és igy:

$$\left(1+\frac{q}{x}\right)^{nx} = 1+nq+\frac{1}{2}n^2q^2+\frac{1}{2.3}n^3q^3+\ldots\ldots.$$

$$=1+nq+\frac{(nq)^2}{2!}+\frac{(nq)^3}{3!}+\ldots\ldots,$$

mely értéket az előbbi transformált alapegyenletbe irva:

$$T_n = T_0\left[1+nq+\frac{(nq)^2}{2!}+\frac{(nq)^2}{3!}+\ldots\ldots\right].$$

E szerint folytonos tőkésités esetén a tőke felszaporodott értékét egy végtelen sornak az eredeti tőkével való szorzata adja.

E congvergens sor értékének kiszámolása könnyü feladat, ha $n=1$ év; igy például $p=5\%$ esetén 6 tizedesre:

$$1+0{\cdot}05+\frac{0{\cdot}05^2}{2}+\frac{0{\cdot}05^3}{2.3} = 1+0{\cdot}05+\frac{0{\cdot}0025}{2}+\frac{0{\cdot}000125}{6}$$

$$=1+0{\cdot}05+0{\cdot}00125+0{\cdot}000021 = 1{\cdot}051271,$$

a mennyiben a következő $\frac{0{\cdot}05^4}{2.3.4} = \frac{0{\cdot}00000625}{24} = 0{\cdot}00000026$ tag már nem bir befolyással a 6-ik tizedesre. Ezzel szemben a kamattényező egész éves tőkésitésnél 1·05, vagyis csak kevéssel kisebb. Igy 10,000 frt tőke esetén egész évenként való kamatcsatolással az 1 év alatt felszaporodott érték 10,500 frt, mig folytonos tőkésités mellett 10,512·71 frt, vagyis 12·71 frttal több

Nem nagy nehézséggel jár a számolás akkor sem, ha $n=100$ év és a percent 1. Ez esetben ugyanis a végtelen sor:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots\ldots.,$$

ez pedig a természetes logarithmusok alapszáma: $e = 2·718{,}282$. Ezzel szemben egész éves kamatcsatolás esetén a kamattényező 100-adik hatványa 2·704,814, mi 10,000 frt tőkét véve, 134·68 frt kamatdifferenciát mutat.

Érdekes megjegyezni, hogy ugyancsak $e = 2·718{,}282$ lesz a pénzegység felszaporodott értéke 1 év alatt 100 percentes uzsorakamat esetén is folytonos tőkésités mellett, mig egész évenként csatolván a kamatokat a tőkéhez. megfelelő értékül csak 2 egészet nyerünk; e kellő különbsége 0·718,282, mi 10,000 frt eredeti tőkénél 7182·82 frt különbségnek felel meg, tehát sokkal nagyobb pénzösszegnek, mint az előbb. Ez eltérés oka az, hogy mig folytonos tőkésitésnél a végtelen sor tagjainak tanusága szerint percent és idő egyenlő mértékben folynak be a tőke felszaporodott értékére, addig hosszabb időközökben való kamatcsatolásnál az idő befolyása — mint hatványkitevőé — nagyobb a percenténél, mely az alapszám egyik tagja.

Fáradságosabb lesz azonban a munka, ha $n = 100$ év esetén a percentet 1-nél nagyobbra, pl. $5\%_0$-ra veszszük. Mert mig az előbb e értékét 6 tizedesre a végtelen sor első 11 tagja már pontosan adta, addig $5\%_0$-nál 25 tagot kell 7 tizedesre kiszámolnunk és összeadnunk, hogy a pénzegység felszaporodott értéke gyanánt 148·413,159-t nyerjünk, melylyel szemben az egész éves kamatcsatolás 131·501,258 értéket mutat fel, miknek különbsége 16·911,901, s ez 10,000 frt eredeti tőke esetén 169,119·01 frt kamattöbbletet ad a pillanatonként való kamatcsatolás javára. — Ha pedig az imént adott 148·413,159-ből két tizedest tartunk meg, nyerjük a a 3-ik lapon közölt tabella záradéka gyanánt 1 frt tőkének 100 év alatt $5\%_0$ mellett felnőtt értékét folytonos tőkésités esetén 148·41 frt értékben, mely az $\frac{1}{512}$ éves kamatcsatolásnak megfelelő 148·37 frtnál csak 4 krral több, s e többlet kicsiny értéke fényesen igazolja a nevezett táblázat interpretációjának záradékában tett következtetésünk helyességét.

Még hosszadalmasabb és fáradságosabb ut áll előttünk, ha az idő 100 évnél kisebb; mert bár ilyenkor még $5\%_0$ esetén is 6 tizedes nyerésére 25 tagnál kevesebbet kell kiszámolnunk, de az egyes tagok meghatározása most sokkal nehezebb lesz, mert ilyenkor az előbb szerepelt tagokhoz legtöbbször nehezen vagy épen nem egyszerüsithető törtek hatványai is lépnek tényezők gyanánt.

Az összes nehézségek eloszlatására tehát oly formula birtokába kell jutnunk, mely az előbbi végtelen sort véges, zárt alakban adja. Ennek elérése végett e-nek, a természetes logarithmusok alapszámának hatványait kifejező sorokkal kell megismerkednünk, melyeket indukció utján fogunk kifejteni.

A mi először a második hatványt illeti, lesz:

$$e^2 = e.e = \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4.}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.}+\frac{1}{2.3.4.}+\ldots\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots\right)$$
$$\begin{aligned} = 1 + 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots \\ + 1 + 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \\ &\quad + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots \\ &\quad\quad + \frac{1}{24} + \ldots\ldots \\ &\quad\quad\quad + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Hogy pedig az egymás alatt álló törteket összeadhassuk, hozzuk őket közös nevezőkre; vagyis:

$$\begin{aligned} e^2 = 1 + 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots\ldots \\ + 1 &+ \frac{2}{2} + \frac{3}{6} + \frac{4}{24} + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{2} + \frac{3}{6} + \frac{6}{24} + \ldots\ldots \\ &\quad + \frac{1}{6} + \frac{4}{24} + \ldots\ldots \\ &\quad\quad + \frac{1}{24} + \ldots\ldots \\ &\quad\quad\quad + \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$= 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \ldots = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \ldots,$$

mely értéket e sorával összehasonlitván, látjuk, hogy ez amattól csakis abban különbözik, hogy a törtek számlálói gyanánt az előbbi 1 helyett 2 nek, az uj hatványkitevőnek oly hatványai szerepelnek, melyeknek kitevőit a természetes egész számok alkotják.

Tovább folytatva a számolást, e^3-ra nézve nyerjük:

$$e^3 = e^2 e = \left(1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\ldots\right)\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots\right)$$
$$= \left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\ldots\right)\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots\right)$$

$$= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots\dots$$
$$+ 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{2} + 1 + 1 + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{24} + \dots\dots$$
$$+ \dots\dots$$

Vagy — mint az előbb — most is az egymás alatt álló törteknek közös nevezőt csinálva:

$$e^3 = 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \dots\dots$$
$$+ 1 + \frac{4}{2} + \frac{12}{6} + \frac{32}{24} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{6}{6} + \frac{24}{24} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{6} + \frac{8}{24} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{24} + \dots\dots$$
$$+ \dots\dots$$

$$= 1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \dots = 1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \dots,$$

mely megint csak abban különbözik e eredeti sorától, hogy a törtek számlálóiban az egységet 3-nak, e kitevőjének oly hatványai helyettesitik, melyeknek kitevőit ismét 1-től kezdve a természetes egész számok teszik.

E két esetből már nagy valószinüséggel következtethetünk indukció alapján az általános szabályra, mely szerint m bármely tetszőleges egész számot jelentsen is:

$$e^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \dots$$

E valószinüség teljes bizonyossággá lesz, mihelyt sikerül kimutatnunk, hogy ha a törvény m hatványkitevőre érvényes, akkor $(m+1)$-re is helyes marad. Ugyanis:

$$e^{m+1} = e^m e = \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \frac{m^4}{24} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \frac{m^4}{24} + \ldots\ldots \\
&+ 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \ldots\ldots \\
&\qquad + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6} + \frac{m}{6} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{24} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

S ha itt is — az előbbiek módjára — az egymás alá irt törteket közös nevezőre hozzuk:

$$
\begin{aligned}
e^{m+1} &= 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \frac{m^4}{24} + \ldots\ldots \\
&+ 1 + \frac{2m}{2} + \frac{3m^2}{6} + \frac{4m^3}{24} + \ldots\ldots \\
&\qquad + \frac{1}{2} + \frac{3m}{6} + \frac{6m^2}{24} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6} + \frac{4m}{24} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{24} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$= 1 + (m+1) + \frac{m^2+2m+1}{2} + \frac{m^3+3m^2+3m+1}{6} + \frac{m^4+4m^3+6m^2+4m+1}{24} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)^2}{2!} + \frac{(m+1)^3}{3!} + \frac{(m+1)^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Ebből látjuk, hogy ha a törvény m hatványkitevőre helyes, úgy $(m+1)$-re is érvényes marad. De miután $m=3$ esetén érvényességét kimutattuk, következik, hogy helyes lesz akkor is, ha $m=3+1=4$, továbbá ha $m=4+1=5$ és igy tovább, bármily egész számot jelentsen is m. Hogy pedig m *tört* értéke esetén sem változik meg a dolog, ezt az algebrai analysis egy függvényegyenlet taglalása által mutatja ki s ennek alapján általános érvényűnek fogadhatjuk el az

$$e^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots$$

egyenletet. Tekintsük most m-et két: n és q szám szorzatának, vagyis irjunk m helyett nq-t:

$$e^{nq} = 1 + \frac{nq}{1!} + \frac{(nq)^2}{2!} + \frac{(nq)^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Ez egyenlet jobb oldala azonban teljesen egyező a folytono kamatcsatolás (7-ik lapon fölirt) alapképletének végtelen sorával; ha tehát abba a végtelen sor értéke gyanánt e^{nq} kifejezést helyettesitjük, lesz a folytonos tőkésités transformált, egyszerübb alapegyenlete:

$$T_n = T_0 \,.\, e^{nq} = T_0 \,(e^q)^n,$$

mit az időszakos kamatcsatolásnak

$$T_n = T_0 \,.\, k^n$$

alapegyenletével egybe vetve, láthatjuk, hogy folytonos tőkésités esetén a kamattényezőt e^q képezi; vagyis *folytonos kamatcsatolás esetén a kamattényező azon szám, melyet nyerünk, ha e-t, a természetes logarithmusok alapszámát, a percent századrészével egyenlő hatványra emeljük;* vagy más szavakkal. *pillanatonként való tőkésités mellett a kamattényező azon szám, melynek természetes logarithmusa a percent századrésze.*

Ha tehát a természetes logarithmusok táblájával rendelkezünk, úgy a folytonos tőkésités kamattényezőjének (melyet *K*-val fogunk jelölni) kiszámolása egyszerü logarithmus visszakeresési munka.

A számolás mesterséges (Brigg-féle) logarithmusokkal alig valamivel hosszabb. Ugyanis a

$$K = e^q$$

egyenletből

$$\log K = q.\ \log e = 0.434\ 2945\ q,$$

vagyis ez esetben q értékét az állandó 0.434 2945 számmal — a Brigg-féle logarithmusok *modulusával* — kell előbb szoroznunk s az igy nyert szorzat közönséges logarithmusát visszakeresnünk, hogy eredményül a folytonos tőkésités kamattényezőjét nyerjük.

II.

Az imént lehozott kényelmes képlet birtokában könnyü szerrel végezhetjük el az ellenőrző számolást a pénzegységnek 100 év alatt $5^0/_0$ mellett folytonos kamatcsatolás esetén felnőtt értékére nézve, mit a 8-ik lapon — a végtelen sor 25 tagjának fáradságos kiszámolása és összegezése alapján — 148·413,159-nek irtunk fel; ha a számolásra legalább tizjegyü logarithmustáblát használunk, akkor ugyanezen értéket fogjuk hasonlithatlanul kevesebb munka árán nyerni. Ép ily könnyü módon kapjuk $T_0 = 1$, $n = 100$ év és $p = 6$ esetben folytonos tőkésitésre vonatkozólag 403·428,793 értéket, melylyel szemben az egész éves kamatcsatolás megfelelő értéke csak 339·302,084, mi 10,000 frt tőke esetén 641,267·09 frt kamatdifferenciának felel meg.*)

A folytonos tőkésitésnek legutóbb talált

$$T_n = T_0 \, e^{nq}$$

alapképletét megfigyelve, általánosságban igazolva látjuk ama megjegyzés helyességét, mit a 8-ik lapon 100 év és 1%, valamint 1 év és 100% esetből kifolyólag tettünk, hogy t. i. a tőke felszaporodott értékének nagyságára a folytonos kamatcsatolásnál idő és percent egyenlő mértékben birnak befolyással, mig ezzel ellentétben az időszakos tőkésitésnél az időnek — mint hatványkitevőnek — befolyása túlnyomó. Igy például a pénzegységnek 6% mellett 3 év alatt felnőtt értéke egész éves tőkésitésnél 1·191,016, holott — időt és percentet megcserélve — 3% mellett 6 év alatt már 1·194,052 vagyis 0·003,036 tal több; ez eltérő értékekkel szemben a folytonos tőkésités mindkét esetben 1·197,217 eredményt ad.

S e tekintetben a folytonos kamatcsatolás az időszakosnál egyszerűbb és természetesebb. Ha ugyanis a kamatos-kamatszámolásnál a logarithmusokat mellőzni akarjuk, ugy a kamattényezők hatványait táblázatokba foglalva szoktuk összeállitani, s ekkor a tőke felszaporodott értékének nyerésére csak e táblázatokból kikeresett megfelelő számot kell az eredeti tőkével szoroznunk. Csakhogy e táblázatok kiszámolása időszakos kamatcsatolásnál igen fáradságos munka; hiszen minden egyes időszakra és percentre nézve külön-külön kell a pénzegység felnőtt értékeit kikeresnünk, egyetlen-egy párt sem találunk köztük, mely teljesen egyező volna. Nem igy a folytonos tőkésitésnél! Itt az 1%-es 2 évi ép akkora, mint a 2%-es 1 évi; épigy az 1%-es 4 évi egyenlő a 2%-es 2 évivel vagy a 4%-es 1 évivel; hasonlóan az 1%-es 3 évit megtaláljuk a 3%-esnek 1 évi vagy a 1·5%-esnek 2 évi rovatában. Ha tehát az 1%-eseket már kiszámoltuk, ezek közül minden másodikat beiktathatjuk a 2%-esnek megfelelő rovatába, minden harmadiknák hasznát vehetjük a 3%-eseknél, minden negyediket al-

---

*) Ugy ezen, mint az 5%-nál emlitett 169,119.01 frtnyi óriási kamat-differenciák frappans ellentéteül érdekes fölemliteni, hogy rövid — néhány napi — időtartamra a folytonos tőkésitéssel való kamatos-kamatszámolás még nagyobb tőkéknél is ugyanazon felnőtt értéket adja, mint az *egyszerü* kamatszámitás Igy 10,000 frt tőkének 5% vagy 6% mellett 7 nap alatt felnőtt értékeit még a krajcárokban is egyezőknek találjuk mindkét számolási mód szerint 10,009·59, illetőleg 10,011·51 frt értékekben.

kalmazhatjuk a 4%-tel való számolásnál és igy tovább, mi által a táblázatok összeállitásának munkája tetemesen kevesebbre száll alá.

De még egy másik, nyomósabb ok is szól a pillanatonként való kamatcsatolás mellett! A kamatos-kamatszámolás *lényegének* ugyanis legjobban megfelel a kamatkapcsolásnak e módja. Ha ugyanis a kamatos-kamatszámolás egyáltalában jogosult, ugy a legtermészetesebb és a kölcsönadóra nézve legigazságosabb eljárás az, ha az uj kamatok *folytonosan* növelik a tőkét s mindjárt kamatoznak is. A pénzintézetek most divó féléves tőkésitési uzusának komoly, tudományos alapja nincsen, legfőlebb praktikus szempontok ajánlhatják azt, nevezetesen a számolás egyszerüsége. A kisebb pénzintézetek ugyanis a tőke felszaporodott értékének kiszámolására, sem a kamattényezők hatványainak tabelláit, sem logarithmus-könyvet nem használnak, hanem minden félév végén beirják a betéti könyvekbe a föl nem vett kamatokat *„tőkésitett kamat“* cimen s eként a tőke felnőtt értékét a lehető legprimitivebb módon: az egyszerü kamatszámolás ismételt alkalmazásával határozzák meg. Ily kezdetleges eljárást a folytonos kamatcsatolásnál használni nem lehet, jeléül annak, hogy a kamatos-kamatszámolás e módja az egyszerü kamatszámolástól teljesen független és igy a kamatos-kamatszámolás lényegének egyedül megfelelő.

Főként azonban az igazolja a pillanatonként való kamatcsatolás létjogosultságát, hogy ennek szigoruan tudományos alapja van, mely a *természetes* logarithmusok alapszámán nyugszik. E nevezetes, az egész mathematikában vezérszerepet vivő számhoz az időszakos tőkésitéssel való kamatozásnak semmi köze sincs s igy ez *természetes* alappal nem is bir.

De talán azt vethetné ellen valaki, hogy a folytonos tőkésités nagy terhet róna az adósokra, hiszen, mint láttuk — különösen hosszabb idő alatt — a tőke ily módon tetemesen többre szaporodnék föl, mint a jelenlegi féléves kamatcsatolással, s eként nékik kamatok fejében nagyobb összegeket kellene fizetniök, mint manapság. E bajon azonban igen könnyü lenne segiteni a percentnek megfelelő leszállitása által. Az előbbiek alapján ugyanis igen könnyü kiszámitani azon p_1 percentet, mely mellett a tőke folytonos kamatcsatolás esetén is ép annyira növekszik meg, mint p percent (és k kamattényező) mellett egész vagy féléves tőkésités esetén ugyanazon idő alatt. E végből csak a kamattényezőket kell egyenlőkké tennünk s az igy keletkezett egyenletből, p_1 értékét kikeresnünk. Igy az *egész* éves kamatcsatolással való összehasonlitásnál:

$$1 + q = e^{q_1},$$

honnan

$$\log (1+q) = q_1 \log e,$$

vagy $1+q$ helyett a szokásos *k* jelzést használva és $q_1 = \frac{p_1}{100}$ értéket helyettesitve:

$$\log k = \frac{p_1}{100} \log e,$$

miből

$$p_1 = \frac{100}{\log e} \log k;$$

s végül $\frac{100}{\log e}$ állandó értéket helyettesitve:

$$p_1 = 230{\cdot}258{,}510 \log k.$$

Ha pedig a féléves kamatcsatolás percentjével aequivalens percentet akarjuk kapni, akkor a megelőzők módjára

$$(1 + \frac{q}{2})^2 = e^{q_1}$$

egyenletből:

$$2 \log (1 + \frac{q}{2}) = q_1 \log e,$$

és ismét $1+\frac{q}{2}$ helyett *k*'-et, q_1 helyett pedig $\frac{p_1}{100}$-at irva;

$$2 \log k' = \frac{p_1}{100} \log e,$$

miből:

$$p_1 = \frac{200}{\log e} \log k' = 460{\cdot}517{,}020 \log k'.$$

E formulák segélyével könnyü kiszámolni, hogy a takarékpénztárak által nálunk ez idő szerint az u. n. állandó betétek után fizetni szokott 5%-nek, mennyi lenne a folytonos kamatcsatolás aequivalens percentje az egész és féléves tőkésitéssel szemben. Az egész évesnek megfelel 4·879,017, vagyis körülbelül $4{\cdot}88\%$, a félévesnek pedig 4·938,524 azaz körülbelül $4{\cdot}94\%$. Ha tehát a pénzintézetek a mostani féléves kamatcsatolást elhagyva a folytonos tőkésitésre térnének át, ugy az 5%-es kamatlábat csak $0{\cdot}06\%$-tel kellene leszállitaniok, hogy kamatok fejében való tulkiadásoktól meg legyenek kimélve, mi által azonban az egész kamatos-kamatszámolás szigoruan tudományos alapra lenne fektetve.

A percentnek e csekély leszállitása azonban csak addig egyenlíti ki a féléves és a folytonos kamatcsatolás között a különbséget, mig ily kis percentről van szó. Már évi 10%-nél a folytonos tőkésités aequivalens percentje a féléves kamatcsatolással szemben

9·758,033 vagyis körülbelül 9·76%, mi csaknem $\frac{1}{4}$% apadást mutat. Még nagyobb a csökkenés 100% uzsorapercentnél egész éves tőkésitéssel szemben, melynek aequivalens percentje csak 69·31472 vagyis körülbelül $69^1/_3$%, mi $30^2/_3$% csökkenést ad.

Az imént levezetett formulák segélyével vajmi könnyü meg forditva a folytonos tőkésités percentjének megfelelő aequivalens percentet kiszámolni egész vagy féléves kamatcsatolás esetére. Ugyanis a legutóbbi két formulából:

$$\log k = \frac{\log e}{100} p_1 = 0{\cdot}004\,3429\, p_1 \quad \text{és} \log k' = \frac{\log e}{200} p_1 = 0{\cdot}002\,1715\, p_1$$

Néhány ezek alapján kiszámolt adatot az alábbi kis táblázat foglal magában 2 tizedesre:

Folytonos	egész éves	féléves
k a m a t c s a t o l á s.		
5%	5·13%	5·06%
10%	10·52%	10·25%
100%	171·83%	129·74%

III.

Még egy elvitázhatlan nagy előnye van a folytonos tőkésitésnek az időszakos felett, s ez az, hogy mig amannak képletei az évek számát jelző *n* minden értékénél megtartják érvényességüket, addig az időszakos kamatcsatolás alapegyenlete azonnal megszünik helyes lenni, mihelyt *n* helyett akár valódi törtet, akár vegyes számot irunk, sőt az imént emlitett első esetben azon *absurd* eredményre vezet, hogy a tőke kamatos-kamattal *kevesebbre* szaporodik fel, mint egyszerü kamatozás esetén.

Igazoljuk ezt először a következő egyszerü példa kiszámolásával: 10,000 frt tőke 5% mellett egész éves kamatcsatolás esetén fél év alatt 250 frt egyszerü kamatot hajt, tehát ezzel 10,250 frtra nő fel; ellenben az időszakos kamatos-kamatszámolás formulája szerint $T_n = T_0 k^n = 10{,}000 \sqrt{1{\cdot}05} = 10{,}000 \times 1{\cdot}024{,}695 = 10{,}246{\cdot}95$ frt lenne a felszaporodott érték mi az előbbinél 3·05 frttal *kevesebb.* — Ez absurd értékkel szemben a folytonos tőkésités $T_n = T_0 e^{nq}$ formulája $T_n = 10{,}000\ e^{1\cdot 40} = 10{,}253\cdot 15$ frtot ad vagyis az egyszerü kamatszámolás végeredményénél 3·15 frttal többet.

Hogy pedig nemcsak ez esetben, hanem bármely százalék és az év bármely törtrésze mellett is kevesebbet kapunk, ha a tőke felnőtt értékét az egyszerű kamatszámolás mellőzésével az időszakos kamatcsatolás képletének segélyével számoljuk, ezt a binomiális tantétel alapján a következőleg bizonyithatjuk be: T_0 pénzegység egyszerü kamatja $p\%$ mellett az év bármely *x* törtrészére $\frac{T_0 px}{100} = T_0\, qx$, s igy a tőkének ez egyszerü kamattal felnőtt értéke:

$$T'_x = T_0 + T_0\, qx = T_0\,(1+qx).$$

Ugyanezen érték az időszakos kamatos-kamatszámolás alapképlete szerint:

$$T_x = T_0\,(1+q)^x,$$

mit a binomiális képlet segélyével sorba fejtve:

$$T_x = T_0\left[1 + xq + \frac{x(x-1)}{2} q^2 + \frac{x(x-1)\,(x-2)}{2.3} q^3 + \ldots\ldots\right]$$

$$= T_0\,(1+xq) + T_0\left[\frac{x(x-1)}{2} q^2 + \frac{x(x-1)\,(x-2)}{2.3} q^3 + \ldots\ldots\right]$$

$$= T'_x + T_0\left(a + a\frac{x-2}{3} q + b + b\frac{x-4}{5} q + c + c\frac{x-6}{7} q + \ldots\ldots\right)$$

ha t. i. az utolsó előtti sor szögletes zárójelében levő páratlan tagokat rövidség kedvéért, sorban *a*, *b*, *c*..... betükkel jelöljük. Mivel pedig *x valódi* tört azért az *a*-val jelölt első tag az $(x-1)$ tényező révén *negativ*, a második azonban az $(x-2)$ uj negativ tényező hozzá lépése folytán már *positiv;* a harmadik tag (*b*) ismét negativ, mert ez a második, positiv tagból az által keletkezik, hogy azt $\frac{x-3}{4}$ q tényezővel szorozzuk, melynek $(x-3)$ része negativ; a negyedik tag az $(x-4)$ uj negativ tényező révén ismét positiv lesz és igy tovább; szóval a páratlan tagok mind negativ, a párosak pedig valamennyien positiv előjelüek. De mindaddig mig *q* legfölebb egy, azaz mig *p* legfölebb 100, minden páros, positiv tag kisebb, mint az előtte álló páratlan, negativ tag, hiszen minden páros, positiv tag az által keletkezett az előtte álló páratlan, negativ tagból, hogy azt egy $\frac{x-m}{m+1}$ *valódi* törttel szoroztuk; e szerint két szomszédos tagpár összevonásának eredménye és igy az egész soré is egy negativ *S* szám lesz, vagyis:

$$T_x = T'_x - S,$$

miből következik, hogy T_x 100% határig kisebb T'_x-nél.

Mivel pedig a gyakorlati életben — hála az uzsatörvénynek! — már 100% sem fordul elő, azért felesleges lenne a vizsgálódást még 100-nál nagyobb percentre is kiterjeszteni, s e megjegyzéssol általánosan igazoltnak mondhatjuk ki ama tételt, mely szerint a tőke felszaporodott értékeül az időszakos tőkésités formulája a kamatcsatolási időköznél kisebb időre mindig *kevesebb* — tehát hibás — értéket ad, mint az egyszerü kamatszámolás képlete.*)

Érdekes megvizsgálni azt is, hogy a kamatcsatolási időköz mely törtrészére lesz a különbség legnagyobb, vagyis hogy az év mely x törtrésze esetén ad az időszakos kamatos kamatszámolás formulája *leghibásabb* értéket?

E kérdést felsőbb mennyiségtan segélyével a következő egyszerü uton oldhatjuk meg: a szóban forgó különbség

$$T'_x - T_x = T_0 (1+qx) - T_0 (1+q)^x,$$

vagy az egyenlet baloldalán levő különbséget rövidség kedveért y-nal jelölve:

$$y = T_0 [1+qx - (1+q)^x].$$

Ezen függvény első differenciálhányadosa pedig — T_0 és q értékeit állandóknak véve — :

$$\frac{dy}{dx} = q - (1+q)^x \frac{\log (1+q)}{\log e};$$

vagy még itt $1+q$ helyett a szokásos k jelzést használva s q helyett ez alapon $k-1$ értéket irva s végül az egész differenciálhányadost zérussal egyenlövé téve;

$$o = (k-1) - k^x \frac{\log k}{\log e}$$

Ebből pedig:

$$k^x \frac{\log k}{\log e} = k - 1$$

és még

$$k^x = \frac{(k-1) \log e}{\log k},$$

mely exponenciális egyenlet megoldása logarithmusok segélyével:

$$x \log k = \log (k-1) + \log \log e - \log \log k$$

s innen végre;

$$x = \frac{\log (k-1) + \log \log e - \log \log k.}{\log k.}$$

---

*) Sajátságos, hogy e dolog egy mathematikai lángésznek: *Euler*-nek kikerülte a figyelmét. A nevezett nagy mathematikus ugyanis klaszikus szépségekben gazdag *Algebrá*-jának első részében az 558-ik szakaszban minden megszoritás nélkül érvényesnek mondja ki a kamatos-kamatszámolásnak, $T_n = T_0 k^n$ alapegyenletét azon esetre is, ha n bármilyen törtszám és a következő 559-ik pontban ki is számolja e formula segélyével 100,000 tallérnak 8 nap alatt 5% mellett egész éves kamatcsatolás esetén felnőtt értékét, mit 100,107 tallérnak s igy a kamatot 107 tallérnak találja, nem vevén észre, hogy a szóban forgó pénzösszeg egyszerü kamatja az adott idő és percent mellett 109·6 tallér vagyis 2·6 tallérral több a talált hibás értéknél.

Hogy pedig x ezen értéke valóban az y-nal jelölt különbségnek *maximumát* adja, mutatja a fentebbi első differenciál- hányadosból képezhető másodrendü differenciál- hányados, mely — tekintettel arra, hogy q és e állandók — *negativ.*

Ha ezen formula segélyével x értékét különböző percentek mellett kiszámoljuk, azt mindig $^1/_2$-nél többnek fogjuk találni, de e többlet még igen nagy percent esetén is nagyon csekély. Igy 100%-nél x értéke 0·528,766, mig a nálunk szokásos 5%-nél csak 0·502,032 ugy hogy csupán a gyakorlati életben előforduló esetekre reflektálva kimondhatjuk, hogy az időszakos kamatos-kamatszámolás formulája a felszaporodott tőkére nézve azon esetben ad leghibásabb értéket, midőn a kamatozási idő a kamatcsatolási időszaknak körülbelül felét teszi. Ezen időt a következőkben ***kritikus idő*****nek** fogom nevezni.

E jelentékeny hibaforrás hozza ama kényszerhelyzetbe az időszakos kamatos-kamat számolóját, hogy azon esetben, ha az *idő vegyes szám*, csakis az időegység adott egész számu többszöröseire számoljon kamatos-kamatot, az időegység hátralevő törtrészére pedig csupán egyszerü kamatot keressen, mert ha ellenkezőleg járna el (vagyis ha az időt jelző teljes vegyes számra kamatos-kamatot venne), a tőke valóban felszaporodott értékénél megint *kevesebbet* kapna. Igy például 10,000 frt tőkének $2^1/_2$ év alatt 5% mellett felszaporodott értékeül egész éves kamatcsatolás esetén 11,297·26 frtot nyerünk, ha az egész $2^1/_2$ évre kamatos-kamatot számolunk; mig ellenben — helyes eljárással — csak két egész évre keresve kamatos-kamatot, a hátra levő fél évre pedig egyszerü kamatot véve, eredményül 11,300·62 frtot nyerünk vagyis, az előbbi hibás értékkel szemben 3·36 frttal többet. E gyarlósággal szemben a folytonos tőkésités alapegyenlete sértetlenül megtartja érvényességét itt is, és a jelen esetben $2^1/_2$ évre közvetlenül alkalmazva eredményül 11,331·48 frtot ad.

E szerint az időszakos kamatos-kamatszámolás eredeti $T_n = T_0 k^n$ alapegyenlete azon esetben, ha n egy egész m és egy x törtszám összege, vagyis ha $n = m + x$, a következő átalakuláson megy át: a tőke felszaporodott értéke m egész év alatt $T_0 k^m$, s ennek a hátra levő x törtrészre eső egyszerü kamatja $\frac{T_0 k^m px}{100} = T_0 k^m qx$, tehát:

$$T_n = T_0 k^m + T_0 k^m qx = T_0 k^m (1+qx) = T_0 k^m [1+(k-1)x].$$

Magától értetődik, hogy időszakos kamatcsatolás esetén az eredeti tőke kiszámolására is az imént lehozott komplikáltabb képletet kell használnunk, mihelyt az idő vegyes szám, mert az eredeti egyszerübb alapképlet segélyével számolt kezdet-tőkét — az előbbi okoskodásból kifolyólag — kelleténél nagyobbnak találnók. Igy ha az iméut kiszámolt feladványt megforditjuk és kérdezzük: hány frt tőke fog $2^1/_2$ év alatt egész éves kamatcsatolás esetén $5^0/_0$ mellett 11,300·62 frtra nőni, ugy az eredeti alapegyenletből folyó $T_0 = \frac{T_n}{k^n}$ képlet 10.002·97 frtot, vagyis kelleténél 2·97 frttal többet ad, holott a transformált formulából következő $T_n = T_0 : k^m [1 + (k-1)x]$ pontosan megadja a 10,000 frtot. — Alig szükséges talán megjegyezni, hogy a folytonos tőkésités alapegyenletéből származott $T_0 = \frac{T_n}{e^{nq}}$ egyenlet az eredeti tőkét is teljes pontossággal fogja szolgáltatni.

Még sokkal nehézkesebb — igazán toldott-foldott munka — időszakos kamatcsatolás esetén az idő kiszámolása, mihelyt ez az eredeti formulából nem egész számnak adódik ki. Az előbbi fejtegetések alapján könnyü belátni, hogy az idő számára az eredeti formula segélyével nyert érték kelleténél nagyobb lenne. az átalakitott képlet pedig a benne előforduló két ismeretlen (m és x) meghatározására egy magában nem használható. Ez okból az idő kiszámolását a következő hosszadalmas úton szokás végezni: kikeressük annak értékét az eredeti $T_n = T_0\, k^n$ alapegyenletből folyó: $n = \frac{\log T_n - \log T_0}{\log k}$ képlet segélyével, de az n számára nyert $m+x$ vegyes számból csak az m egészet tartjuk meg, a megbizhatlan x törtrészt pedig figyelmen kivül hagyjuk; a hiányzó törtrész helyes értékének kiszámolására keressük most, hogy mennyire nő fel az eredeti tőke m egész idő egység alatt a $T_m = T_0\, k^m$ képlet segélyével s ezt T_n adott értékéből kivonva a nyert $T_n - T_m$ különbséget T_m pénzegységnyi tőke egyszerü kamatjának tekintjük s az ennek megfelelő időt az egyszerü kamatszámolás $x' = \frac{100\,(T_n - T_m)}{p\, T_m}$ képlete segélyével határozzuk meg. Igy például a legutóbbi feladványpárra reflektálva keressük, hogy hány év alatt fog 10,000 frt tőke $5^0/_0$ mellett egész éves kamatcsatolás esetén 11,300·62 frtra felszaporodni? Az eredeti alapegyenletből folyó képlet az ismeretlen n számára 2·506 évet ad; elhagyva itt a megbizhatlan törtrészt, keressük ki 10,000 frt tőkének 2 egész év alatt felnőtt értékét, mit 11,025 frtnak fogunk, találni; vonjuk ezt ki az adott 11,300·62 frtból, hogy különbségül 275·62 frtot találjunk, mit 11,025 frt tőke egyszerű kamatjának véve az idő hiányzó törtrésze $x = \frac{100 \times 275.62}{5 \times 11,025} = \frac{27.562}{55,125} = 0·5$ év, tehát az összes idő 2·5, és nem 2·506 év, mint az eredeti formulából első izben hibásan találtuk. E két érték különbsége 0 006 év vagyis valamivel több 2 napnál, a mi gyakorlati szempontból a $2^1/_2$ évvel szemben elég csekély idő ugyan, de mégis teljesen elég arra, hogy az időszakos kamatos-kamatszámolás eredeti alapegyenletének mathematikai pontosságán és megbizhatóságán jókora rést üssön. — Visszapillantva még a *kritikus időnél* előbb végzett maximum számolásra, záradékul kimondhatjuk még, hogy az eredeti alapformulából *n* számára nyert hibás érték akkor szorul legjobban a javitásra, ha az idő számára az első számitással nyert érték törtrésze $^1/_2$ vagy ehhez közel eső szám s ez esetben az idő számára talált hibás és helyes érték különbsége a percenttal lassan, de folytonosan nő igy 100% esetén 31·4 napra rúg. — Alig szükséges különösen hangsulyozni, hogy a folytonos tőkésitésnek $T_n = T_0 e^{nq}$ alapegyenletéből foiyó $n = \frac{\log T_n - \log T_0}{q \log e}$ képletet minden akadály nélkül, a legnagyobb könnyüséggel alkalmazhatjuk az idő teljesen pontos meghatározására.

Utoljára hagytuk az időszakos kamatszámolás *percentjének* kikeresését azon esetben, ha az idő vegyes szám, mert ez a számolás valamennyi között a legfárasztóbb, sőt — ha *pontos* értéket akarunk nyerni — a legtöbb esetben *algebrai úton végre sem hajtható*. Ennek kimutatására kisértsük meg kikeresni az átalakitott $T_n = T_0 k^m [1 + (k-1) x]$ képletből a percentet magában foglaló *k* kamattényezőt. Elvégezve a beszorzásokat és T_0 -ot a baloldalra osztónak átvive, nyerjük a

$$\frac{T_n}{T_0} = (1-x) k^m + x k^{m+1}$$

egyenletet, mely azonban az ismeretlen *k* számára (m+1)-ed fokú vegyes egyenlet, melyből *k* pontos értékét algebrai úton csakis akkor tudjuk meghatározni, ha *m* legfőlebb 3 időegység, midőn a nyert negyedfokú vegyes egyenlet még algebrai úton megoldható. Amint azonban az időt jelző vegyes számban az egész rész 3 időegységnél nagyobb, a fenti egyenlet negyedfokánál magasabb lesz. s igy ennek algebrai úton való megoldása — mint *Abel* bebizonyitotta — lehetetlen. Nincs tehát más segitség, mint a fáradságos közelitő módszerek — a regula falsi, a Newton-féle stb. — által keresni a legtöbb esetben *k* értékét, ha ebből a percentet pontosan akarjuk kapni. Mert az eredeti $T_n = T_0\, k^n$ alapegyenletből folyó $\log k = \frac{\log T_n - \log T_0}{n}$ formula k, és igy p számára is hibás, és pedig a kelleténél nagyobb értéket ad, mint erről meggyőződhetünk, ha az előbb már 3 izben kiszámolt feladatot a következőleg formulázzuk: hány percent mellett fog 10,000 frt tőke $2^1/_2$ év alatt egész éves kamatcsatolás esetén 11,300·62 frtra felszaporodni — és e feladványt a legutóbbi formula segélyével megoldjuk. Az eredmény 5·012%, mely érték a pontos 5%-től kevéssé differál ugyan, de mégis a mathematikai pontosságnak hijával van és nagyobb pénzösszegeknél, hosszabb idő alatt tetemes kamatdiffenciákat okozhat. Az előbbiek alapján minden további bizonyitgatás nélkül világos, hogy az eltérés a hibásan talált és az igazi percent között magával a percenttel nő, mint ezt a következő egyszerü példa mutatja: hány percent mellett nő 100 frt tőke $5^1/_2$ év alatt egész éves kamat csatolás esetén 48,000 frtra? Az eredeti alapegyenletből folyó $\log k = \frac{\log T_n - \log T_0}{n}$ formula k számára 2·021,53 értéket ad, miből p = 102·153% következik. Hogy azonban ezen érték hibás. igen egyszerüen konstatálhatjuk itt abból, hogy az adott tőke 5 év alatt 100% vagyis k = 2 esetben felnövekszik $1000 \times 2^5 = 1000 \times 32 = 32{,}000$ frtra, melynek még a további félévre eső egyszerü kamatja 16,000 frt, és igy a tőke felszaporodott értéke 48,000 frt; vagyis a percent nem 102·153%, hanem csak 100%, tehát a talált hibás értéknél 2·153%-kal kevesebb. — Záradékul itt is röviden fölemlitjük még, hogy a *kritikus idő* a percent számitásakor is ép úgy érezteti a maga befolyását, mint az előbbi esetekben, s hogy folytonos tőkésitésnél az összes nehézségek elesnek, vagyis az eredeti alapegyenletből eredő $p = \frac{100\,(\log T_n - \log T_0)}{n \log e}$ formula mindig teljes pontosan szolgáltatja a percent értékét.

Összefoglalva e szakaszban tárgyalt dolgokat, kimondhatjuk, hogy az időszakos kamatos-kamatszámitásnak közönségesen használt eredeti, egyszerü formulái igen sokszor alaposan kompromittálják az algebrai képletek általános érvényességét, az átalakitott formulák pedig idő és percent keresésekor csak ügygyel-bajjal, néha hosszas vesződség árán adhatnak oly pontos értékeket, minőket a folytonos tőkésités egyszerü formulái minden esetben a legnagyobb könnyüséggel szolgáltatnak.

IV.

De még ezzel sem végeztünk a most divó kamatos-kamatszámolás mizériáival! Az imént részletesen kifejtett hiányok legfölebb a mathematikust boszantják, de a gyakorlati életre kihatással nem igen vannak. Van azonban az időszakos kamatcsatolási módnak még egy más abnormis furcsasága is, mely már a szó szoros értelmében a praktikus embernek is a zsebébe vág, s ez ama viszásság, hogy *manapság valamely pénzintézetben elhelyezett két, egyenlő nagy tőke ugyanazon idő és százalék mellett is különböző nagy kamatot hajthat, a mennyiben a kamat nagyságára nemcsak a kamatozási időtartamnak, hanem azon körülménynek is befolyása van, hogy a polgávi év mely szakában történt a tőke betevése és kivevése.*

Nézzük először a dolgot oly *rövid* kamatozási időtartam mellett, hogy a tőke betevésének és kivevésének időpontjai közé csak egy kamatcsatolási nap essék s kezdjük a tárgyalást a következő egyszerü speciális esettel: tegyünk be 120,000 frtot egy közönséges (nem szökő) év ápril 1-én s vegyük ki ugyanezen év szeptember 29-én; kérdés, hogy 6% mellett féléves kamatcsatolás esetén mennyi kamatot kapunk? Ha a pénzintézetek módjára a betevés és kivevés napjaira kamatot nem számitunk, ugy a tőke összesen 29+31+30+31+31+28=180 napig kamatozott, mely időre az egyszerü kamat (az évet bevett szokás szerint 360 naposnak véve) 3600 frt lenne. Ugy de a betevés és kivevés időpontjai közé esik a kamatcsatolási napok egyike (julius 1), és igy a kamat két részből fog állani, az első részlet julius 1-ig vagyis 90 napra 1800 frt, a második részlet pedig a hátralevő 90 napra 120,000+1,800=121,800 frt után 1827 frt, tehát az összes kamat 3627 frt, mi 27 frttal több, mint egyszerü kamatszámolással volna. Nézzük most: mint változnak meg a viszonyok, ha a fenti tőkét május 31-ikén teszszük be és november 28-án veszszük ki? A kamatozási időtartam 30+31+31+30+31+27=180 nap, vagyis ép annyi, mint előbb volt; már most az eredeti tőke első részletkamatja junius 30 napjára 600 frt, s az ezzel 120,600 frttá felnőtt tőkéé pedig a hátralevő 150 napra 3015 frt, tehát az összes kamat 3615 frt, mi az előbbi 3627 frttal szemben 12 frt csökkenést mutat. Ép igy lenne a dolog, ha a betevés január 31-én és a kivevés julius 31-én történnék, midőn a tőke ismét 28+31+30+31+30+30=180 napig kamatoznék és pedig az eredeti tőke első kamatrészlete julius 1-ig vagyis 150 napra 3000 frt, s az ezzel 123,000 frttá felnőtt tőke második kamatrészlete a hátralevő 30 napra 615 frt vagyis az összes kamat ismét 3615 frt. mi az elsővel szemben ujból az előbbi 12 frt kamatcsökkenést adja.

Ez egyszerü példa két dolgot enged velünk sejtetni; az egyik az, hogy állandó kamatozási időtartam mellett ugyanazon tőke, percent, idő és kamatcsatolási mód esetén akkor lesz legmagasabb a kamat, ha a kamatcsatolási nap a betevés és kivevés közt elmuló idő közepére esik: a másik — most még ingatag alapon álló — következtetés pedig az, hogy a kamat végösszege nem változik meg, ha a kamatcsatolási nap előtt és után elmuló időket egymással fölcseréljük.

Mindkét sejtelmet az algebrai tárgyalás van hivatva a teljes bizonyosság fokára emelni; ezt pedig pusztán elemi mennyiségtani ismeretek felhasználásával a következő egyszerü módon végezhetjük:

Tegyünk be T pénzegységnyi tőkét valamely pénzintézetbe, mely ott összesen i ideig (az év részeiben kifejezve) kamatozik $p\%$ mellett. Legyen a betét napjától számitva x idő mulva (szintén az év részeiben kifejezve) a kamatcsatolási nap (január 1 vagy julius 1); úgy a tőke első részletkamatja a kamatcsatolási napig $\frac{\text{Tpx}}{100} = \text{Tqx}$, mit a tőkéhez adva: $\text{T} + \text{Tq x} = \text{T (1+qx)}$ lesz a kamatcsatolási napig felszaporodott tőke, melynek a még hátralevő $i—x$ időre eső kamatja $\frac{\text{T (1+qx) p (i—x)}}{100} = \text{T (1+qx) q}$ (i—x). s igy az összes kamat:

$$\text{Tq x} + \text{Tq(1+qx) (i—x)} = \text{Tq [x+ (1+qx) (i—x)]}.$$

Mivel pedig itt Tq állandó, azért e függvény maximuma vagy minimuma csak is a zárójelbe foglalt tényezőtől függ. Ez pedig a szorzások és összevonások fokozatos végrehajtása után ily alakot ölt:

$$\text{x} + \text{i} + \text{iqx} — \text{x} — \text{qx}^2 = — \text{qx}^2 + \text{iqx} + \text{i},$$

mely másodfokú függvénynek maximuma van, mert x^2 coëfficiense negativ; e maximum pedig akkor áll elő, midőn

$$\text{x} = \frac{— \text{iq}}{— 2\text{q}} = \frac{\text{i}}{2},$$

mi által az előbbi gyanitások elseje a teljes bizonyosság fokára emelkedett.

A mi másodikat illeti, irjunk az előbbi $— \text{qx}^2 + \text{iqx} + \text{i}$ másodfokú függvényben x helyett (i—x)-et, lesz:

$$— \text{q (i—x)}^2 + \text{iq (i—x)} + \text{i} = — \text{q (i}^2 — 2\text{ ix} + \text{x}^2) + \text{i}^2\text{ q—iqx} + \text{i}$$
$$= — \text{qi}^2 + 2\text{ iqx} — \text{qx}^2 + \text{qi}^2 — \text{iqx} + \text{i} = — \text{qx}^2 + \text{iqx} + \text{i},$$

mi által — mint láthatjuk — a függvény értéke nem változott, s igy az előbbi példából levont második következtetésünket is feltétlenül biztosnak mondhatjuk.

Lényegében azonos marad a dolog akkor is, ha *hosszabb* kamatozási időtartam esetén a betevés és kivevés időpontjai közé nem egy, hanem több — mondjuk n — kamatcsatolási nap esik.

Ismét jelöljük x-szel a kamatozási időtartam kezdetétől az *első* tőkésitési napig lefolyt időt, továbbá ennek és az *utolsó* kamatcsatolási naptól a kamatozási időtartam végeig elmult időnek összegét i vel, úgy hogy az utolsó tőkésitési nap és a kamatozási időtartam vége közé eső idő i—x legyen. Már most az első kamatcsatolási napig a tőke *egyszerü* kamatot hoz s ezzel felnő T (1+qx) értékre, mint ezt már előbb is találtuk; ennek a további *n* időegységen át *kamatos kamattal* felszaporodott értéke: $Tk^n(1+qx)$ lesz, melynek ismét egyszerü kamatja a még hátralevő i—x időre: $Tk^n(1+qx)\,q\,(i-x)$ s eként a véglegesen felnőtt érték:

$$Tk^n(1+qx)+Tk^n(1+qx)\,q\,(i-x)=Tk^n\,[1+qx+q\,(1+qx)(i-x)]$$

Mivel pedig itt Tk^n állandó, azért az egész függvény maximuma vagy minimuma felett megint csak a szögletes zárójelben levő tényező dönt. Ez pedig a szorzások és összevonások succesiv végrehajtásával a következő alakokat ölti:

$$1+qx+(q+q^2x)(i-x)=1+qx+qi+q^2ix-qx-q^2x^2$$
$$=-q^2x^2+q^2ix+qi+1,$$

mely másodfoku függvénynek — x^2 negativ előjelének tanusága szerint — ismét maximuma van, mely akkor áll elő, midőn

$$x=\frac{-iq^2}{-2q^2}=\frac{i}{2},$$

vagyis megint azon esetben, ha a kamatos-kamatszámolás keresése be nem illeszthető i időből ép annyi mulik el a számolás kezdőpontjától az első kamatcsatolási napig, mint a mennyi eltelik az utolsó tőkésitési időponttól az egész kamatozási időtartam végeig.

Ha még a legutóbbi $-q^2x^2+q^2ix+qi+1$ függvénybe x helyett (i—x)-et irunk, nyerjük:

$$-q^2(i-x)^2+q^2i(i-x)+qi+1$$
$$=-q^2(i^2-2ix+x^2)+q^2i^2-q^2ix+qi+1$$
$$=-q^2i^2+2q^2ix-q^2x^2+q^2i^2-q^2ix+qi+1$$
$$=-q^2x^2+q^2ix+qi+1,$$

tehát a függvény értéke ép ugy nem változott, mint midőn ugyanezen helyettesitést az előbbi analog, egyszerübb függvényben végeztük.

S ezek alapján bátran kimondhatjuk, hogy *mindazon kamatszámolási feladványok, melyekben a kamatcsatolási mód megjelölésén kivül csak a tőke, percent és a kamatozási időtartam van adva, de a kamatozás kezdetének naptári dátuma nincs megjelölve, hiányosan vannak fogalmazva és igy szabatos megoldásra nem is tarthatnak igényt.* Ilyen például a következő is; 10,000 frt tőke évi 6% mellett féléves kamatcsatolás esetén 3 félév alatt mennyire nő fel kamatos-kamattal? Ha mind a 3 félévre kamatos-kamatot keresünk, eredményül 10,927·27 frtot kapunk. mi azonban csak akkor helyes, ha hallgatagon feltételezzük, hogy a tőke elhelyezése a kamatcsatolási napok (január 1 vagy julius 1) egyikén történt. De már hibásuak kell nyilvánitanunk az eredményt, mihelyt a betevés ideje az év bármely más napjára, pl. február 1-ére esik, midőn a számolás eként alakul: az eredeti 10,000 frt tőke *egyszerü* kamatja február 1-től julius 1-ig vagyis 5 hóra 250 frt, a melylyel 10,250 frttá felnőtt tőke 2 félévig, vagyis a következő év jul. 1-ig kamatos-kamatot hoz s ezzel 10,874·23 frttá szaporodik; végül ennek a még hátralevő (julius hóra eső) 1 havi egyszerü kamatja 54·37 frt. s igy a végleg felnőtt tőke 10,928·60 frt, mi az előbbivel szemben 1·33 frt többletet ad; e többlet fokozatosan mindaddig nő, mig a betét napját ápr. 1-re (vagy okt. 1-re) nem tesszük, mint erről az alábbi kis táblázat beszámol, melynek értékei mindarról számokban adnak felvilágositást, miket az előbb algebrai uton megvizsgáltunk.

A betevés folyó évi	A kivevés követk. évi	10,000 frt tőke felnőtt értéke 6%-tel, féléves kamatcsatolás mellett	Többlet az elsővel szemben
n a p j a			
jan. 1.	jul. 1.	10,927·27	0·00
febr. 1.	aug. 1.	10,928·60	1·33
márc. 1.	szept. 1.	10,929·39	2·12
ápr. 1.	okt. 1.	10,929·66	2·39
máj. 1.	nov. 1.	10,929·39	2·12
jun. 1.	dec. 1.	10,928·60	1·33

Annak okát, hogy miért nagyobb a tőke felnőtt értéke az utolsó 5 esetben, mint az elsőnél, megtaláljuk ama körülményben, hogy mig az elsőnél a betevés és kivevés időpontjai közé csak 2, addig a többinél 3 kamatcsatolási nap esett.

Még csak azt tartozunk indokolni, hogy miért szövegeztük az előbbiekben adott számolási feladványokat mi is oly pongyolán, mint az általános szokás: a tőke elhelyezési idejének elhallgatásával? Tettük ezt egyszerüen azért, mert nem akartunk a hagyományos rövid — de inkorrekt — szövegezéssel mindaddig szakitani, mig ennek okát a fentebbiekben nem adtuk. Előbbi feladványaink tehát mind ugy értelmezendők, hogy a tőke elhelyezése mindig a kamatcsatolási napok egyikén történt.

Már most kérdezzük: *igazságos-* és mindenek felett *logikus*-e, hogy a kamat nagysága ne csak a kamatozási időtartamtól, hanem ama puszta *véletlentől* is függjön, hogy az év mely szakában történik a tőke elhelyezése és kivevése? Indokolt dolog-e, hogy az kapjon aránylag legtöbb kamatot, ki a kamatcsatolási nap után ép annyi nappal vette ki tőkéjét, mint ahány nappal azt a kamatcsatolási nap előtt elhelyezte? Lehetetlen, hogy e kérdésekre minden gondolkozó fő határozott *nem*mel ne feleljen és ez illogikus dolog megszüntetését kivánatosnak ne mondja. *A baj orvoslására pedig csak egyetlen-egy mód van: ugy az egyszerü, mint az időszakos kamatos-kamatszámolás teljes eltörlése s mind kettő helyett a folytonos tőkésitéssel való kamatos-kamatszámolás életbe léptetése még a legrövidebb időre szóló kölcsönöknél is.*

És e radikális reformtól nincs miért idegenkedni! A kamatos-kamatszámolás ugyanis egyáltalában vagy jogosult, vagy nem; ha nem, ugy el kell azt törülni végkép és helyette még a leghosszabb lejáratú kölcsönöknél is az egyszerü kamatszámolást kell életbe léptetni; ha pedig megvan a kamatos-kamatszámolásnak a maga létjogosultsága, úgy a lényegének egyedül megfelelő folytonos tőkésitéssel kell azt alkalmazni, az egyszerü kamatszámolás teljes mellőzésével. Tisztán *mathematikai szempontból* mindkét szélsőség egyaránt elfogadható, mert mindkét eljárás egyaránt egyszerü és logikus, sem egyiknek, sem másiknak eredeti, egyszerü egyenletei semmi körülmények közt nem vezetnek helytelen vagy pláne absurd értékekhez. A mathematikusnak csak az ellen kell tiltakozó szavát fölemelnie, hogy — a manapság divó módon — ugyanazon tőke után részben egyszerü, részben kamatos-kamat ne számittassék, mert e két heterogén elemnek szerencsétlen egyesitése teremti azon anomáliákat, melyek tárgyalásával az imént foglalkoztunk. Mivel azonban *gyakorlati szempontból* véve a dolgot, a hitelmüveletek mai fejlettségi fokán alig lehetséges a kamatos-kamatszámolás kiküszöbölése, azért a bajok alapos orvoslása csakis a másik módon történhetik: az egyszerü kamatszámolás egyeduralmának felállitása által.

V.

Térjünk át most annak megbeszélésére: vannak-e és miféle előnyei a folytonos kamatcsatolásnak a most divó időszakos felett a komplikáltabb hitelműveleteknél: az időszakos betétek, járadékok és amortizációs kölcsönök számitásánál?

Ami első sorban az állandó időszakos betéteket illeti, ezek felszaporodott értékének kiszámitására ugy az algebrai tankönyvek, mint nagyobb hitelügyi munkák is is egy-egy geometriai haladvány összege gyanánt a következő két képletet adják.

$$S_u = A\,\frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ és } S_e = A\,k\,\frac{k^n - 1}{k - 1},$$

melyek elseje akkor használandó a betétek felnőtt értékének (S-nek) kiszámitására, ha n időegységen át minden időegység *végén* teszünk A pénzegységet valamely pénzintézetbe; a második pedig akkor nyer alkalmazást, ha a betétek minden időegység *elején* történnek. — Az időszakos kamatcsatolás eme képleteiből a folytonos tőkésités megfelelő képleteit egyszerűen az által nyerjük, ha azokba a k kamattényező helyett a folytonos tőkésitésnek e^q tényezőjét irjuk, mi által nyerjük e két analog formulát:

$$S_u = A\,\frac{e^{qn} - 1}{e^q - 1} \text{ az utólagos betéteknél és}$$

$$S_e = A\,e^q\,\frac{e^{qn} - 1}{e^q - 1} \text{ az előlegeseknél.}$$

E két képlet az előbbieknél komplikáltabb, a velök való számolás — főként a nevező konstrukciója miatt — nehézkesebb, úgy hogy — legalább az első tekintetre — a folytonos tőkésités itt hátrányban látszik lenni az időszakos felett. E hátrány azonban csak látszólagos. Az időszakos kamatcsatolásnak fent közölt formulái ugyanis csak addig használhatók a kitüzött feladat pontos megoldására, mig a befizetések időpontjai a kamatcsatolási napokkal összeesnek (pl. egész éves — jan. 1-én történő — betéteknél és egész éves kamatcsatolásnál vagy féléves — jan. 1-én és jul. 1-én való — befizetések esetén, ha a tőkésités is félévenként történik), de azonnal elvesztik érvényességüket, mihelyt a jelzett két időpont nem vág össze (pl. egész éves betéteknél féléves kamatcsatolás mellett, vagy forditva féléves befizetések és egész éves tőkésités esetén). Pedig manapság különösen ez utóbbi esettel analog befizetések igen sokszor szerepelnek; igy igen gyakran fordulnak elő életbiztositásoknál féléves kamatcsatolás mellett negyedéves vagy havonként való befizetések, sőt betegsegélyző egyesületeknél, a népbankok törzsbetéteinél és hitelszövetkezeteknél féléves tőkésités mellett heti befizetéseket is találunk.

Nézzük tehát: mily átalakitásoknak kell az időszakos tőkésités fent közölt egyszerü formuláit alávetnünk, hogy azok a praktikus életben előforduló összes esetek kiszámolására alkalmasak legyenek. Mint az előbbiekből látható, két főesetet kell itt megkülönböztetnünk, u. m. *először*, ha a befizetési időközök *nagyobbak* a tőkésitéseiknél, és *másodszor*, ha a betétek időközei *kisebbek*, mint a kamatcsatolásiak.

Az *első főeset* általánositott formuláját *előzetes* betétekre vonatkozólag a következően vezethetjük le: legyenek, a befizetési időközök minden egyes A pénzegységet tevő betétre nézve r-szer nagyobbak a kamatcsatolási időközöknél és keressük ez állandó időszakos betéteknek n időegység (kamatcsatolási időköz) alatt felszaporodott értékét, midőn összesen $\frac{n}{r}$-szer helyezünk el betéteket. Mivel minden egyes időegységben r szer történik kamatcsatolás, azért a legutoljára betett A pénzegység felnőtt értéke Ak^r, az utolsó előtti betété $Ak^r k^r = Ak^{2r}$ lesz és igy tovább, mig a legelőször befizetett A pénzegység $A(k^r)^{n:r} = Ak^n$ összegre szaporodik fel. Tehát az összes felnőtt érték:

$$S_e = Ak^r + Ak^{2r} + \ldots + Ak^n = A[k^r + (k^r)^2 + \ldots + (k^r)^{n:r}]$$

Itt azonban a zárójelben oly mértani haladvány áll, melynek, úgy első tagja, mint hányadosa k^r és tagjainak száma $\frac{n}{r}$ s eként összege:

$$S_e = Ak^r \frac{k^n - 1}{k^r - 1},$$

mi az eredeti — nem általános — formulától csak abban különbözik, hogy itt úgy A szorzójaként, mint a nevezőben k helyett k^r szerepel. E formula $r=1$ esetén az eredeti, egyszerübb képletbe megy át, mi a levezetés helyességét mutatja.

E képletből könnyen levezethetjük az *első főesetre* nézve az *utólagos* betétek általánositott formuláját, ha a legutóbb nyert képletben n helyett $(n-r)$-et irunk s ha az igy nyert értékhez még A-t (mint legutolsó, *nem* kamatozó betétet) hozzáadjuk. Lesz tehát

$$S_u = A k^r \frac{k^{n-r} - 1}{k^r - 1} + A = \frac{A k^{r+n-r} - Ak^r + A k^r - A}{k^r - 1} = A \frac{k^n - 1}{k^r - 1},$$

mely általános képlet az eredeti, szűk körre szoritottól csakis a nevezőben különbözik, a mennyiben itt k^r fordul elő az eredeti formula k-ja helyett*).

*) E legutolsó formulával némileg egyező található C. Spitz *Allgemeine Arithmetik* cimű munkájában (2-ik kiadás, I. kötet, 208. §); az eltérés az imént

Térjünk át most a *második* főesetben az *előzetes* betétek képletének tágitására! Legyenek a befizetési időközök m-szer kisebbek a tőkésitési időköznél; ekkor minden egyes időegységben m-szer befizetett A pénzegység, tehát összesen mA pénzegység az illető időegység végeig csak egyszerü kamatot hajt, s csak a hátra levő időegységeken át hoz kamatos kamatot.

A legutoljára befizetett A betét csak az időegység $\frac{1}{m}$-ed részén át hoz egyszerü kamatot, és igy felszaporodott értéke $A + \frac{A\,q}{m}$ lesz; az utolsó előtti betét már az idő egység $\frac{2}{m}$-ed részén át kamatozván, egyszerü kamatjával $A + \frac{2\,A\,q}{m}$ értékre növekszik és igy tovább; végül az időegység elején betett A pénzegység az egész időegységben kamatozik, tehát felnő $A + A\,q = A + \frac{m\,A\,q}{m}$ értékre. E szerint az időegységben m-szer befizetett A pénzegység felszaporodott értéke:

$$A + \frac{A\,q}{m} + A + \frac{2\,A\,q}{m} + \ldots\ldots + A + \frac{m\,A\,q}{m} = m\,A + \frac{Aq}{m}(1+2+\ldots+m);$$

s ha itt a zárójelben levő arithmetikai haladvány összegét kikeressük, lesz a legutolsó időegységben befizetett m A pénzegység felszaporodott értéke:

$$m\,A + \frac{A\,q}{m}(1+m)\frac{m}{2} = m\,A + \frac{A\,q\,(1+m)}{2},$$

---

lehozott az ott közölt formula között *külsőleg* csak abban áll, hogy Spitz a kamattényezőt nem k-val, hanem a régi, nehézkes módon $1{\cdot}0\;p$-vel, a betétet pedig A helyett r-rel jelöli s viszont a mi formulánkban szereplő r hatványkitevő helyett m-et használ. E külső, lényegtelen különbségeken kivül van azonban *lényeges* eltérés a két levezetés alapföltételeiben s ebből kifolyólag a formula alkalmazásában is. Mig ugyanis mi azt tételeztük fel, hogy a befizetési időközök r-szer nagyobbak legyenek a kamatcsatolásiaknál, addig Spitz alapföltétele az, hogy n éven át minden m-edik év végén történjenek a befizetések. („ . . . . . n Jahre lang, jedesmal am Ende von m Jahren . . . . .“) E két föltétel pedig, bár látszólag nagyon hasonló, de még sem azonos. Szerintünk ugyanis r-nek okvetlenül egész számnak kell lenni, mig Spitz szerint megeshetik az, hogy n nem osztható maradék nélkül m-mel. Ez esetre a megoldás a Spitz-féle alapföltételnek megfelelően könnyű szerrel aként történik, hogy $\frac{n}{m}$ hányados egész részére a fenti formula szerint S értékét kiszámolván a hátra levő tört részre a már talált S felszaporodott értékét keressük a kamatos-kamatszámolás alapképlete szerint. Mig ellenben, ha a mi értelmezésünk szerint r nem egész szám, akkor — mint később behatóbban kifejtjük — mi csak egy egészen új, a mostaninál sokkal komplikáltabb formulával tudnánk célt érni. Hogy ennek dacára is megtartjuk a mi felfogásunkat, tesszük ezt egyrészt azért, hogy a mindjárt tárgyalandó második főesettel azonos jelöléseket használjunk, s másrészt azon okból is, mert amaz esetnek, midőn r nem egész szám, semmi gyakorlati jelentősége sincsen.

s ha még ide q helyett k—1 értéket irunk és fokozatosan transformálunk:

$$\mathrm{m\,A} + \frac{\mathrm{A\,(k-1)\,(1+m)}}{2} = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{2\,m+k-1+m\,k-m}}{2} = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{m+k-1+m\,k}}{2}$$

$$= \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{k\,(m+1)+(m-1)}}{2}$$

Már most ha a befizetések *n* időegységen át folynak, ugy a legutolsó időegységben befizetett betétek csak egyszerü kamatot hajtanak, a legelső időegységben befizettek pedig *n—1* időegységen át kamatos-kamatot is hoznak ép ugy, mint ha *n* időegységen át minden időegység *végén* tennénk be ugyanannyi tőkét. De ez esetre az időszakos betétek eredeti formulája:

$$\mathrm{S_u} = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{k^n-1}}{\mathrm{k-1}},$$

s ha ide *A* helyett az imént talált értéket irjuk, lesz az általánositott képlet *előzetes* betétekre:

$$\mathrm{S_e} = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{k\,(m+1)+(m-1)}}{2}\cdot\frac{\mathrm{k^n-1}}{\mathrm{k-1}}$$

mely $m=1$ esetben az előzetes betétek $\mathrm{S_e} = \mathrm{A\,k}\,\frac{\mathrm{k^n-1}}{\mathrm{k-1}}$ eredeti képletébe megy át, mi a lehozás helyességét igazolja.

A mi már most a *második főesetben* az *utólagos* betétek általánositott formuláját illeti, ennek lehozása a megelőzőhöz hasonlóan következőképen történik:

Az utolsó időegységben legutoljára betett *A* pénzegység kamatot nem hoz; az ez előtt befizetett *A* betét az időegység $\frac{1}{\mathrm{m}}$-ed részén át hajt egyszerü kamatot s ezzel $\mathrm{A} + \frac{\mathrm{A\,q}}{\mathrm{m}}$ értékre nő; a még ezt megelőző betét $\frac{2}{\mathrm{m}}$ ed időegységen át $\mathrm{A} + \frac{\mathrm{2\,A\,q}}{\mathrm{m}}$ értékre szaporodik és igy tovább; végül az első időtörtrész *végén* betett *A* pénzegység $\frac{\mathrm{m-1}}{\mathrm{m}}$-ed időegység alatt $\mathrm{A} + \mathrm{A\,q}\frac{\mathrm{m-1}}{\mathrm{m}}$ értéket ér el. Tehát az utolsó időegységben *m*-szer betett *A* pénzegység felnőtt értéke:

$$\mathrm{A} + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{A\,q}}{\mathrm{m}} + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{2A\,q}}{\mathrm{m}} + \ldots + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{(m-1)\,A\,q}}{\mathrm{m}}$$

$$= \mathrm{m\,A} + \frac{\mathrm{A\,q}}{\mathrm{m}}\,[1+2+\ldots+(\mathrm{m}-1)];$$

s itt ismét a szögletes zárójelben arithmetikai haladvány van, melynek összegét helyettesitve:

$$\mathrm{m\,A} + \frac{\mathrm{A\,q}}{\mathrm{m}}\,(1+\mathrm{m}-1)\,\frac{\mathrm{m-1}}{2} = \mathrm{m\,A} + \mathrm{A\,q}\frac{\mathrm{m-1}}{2};$$

s ha még ide q=k—1 értéket irjuk, lesz fokozatos transformálás után

$$\mathrm{m\,A} + \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{(k-1)\,(m-1)}}{2} = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{2\,m+mk-m-k+1}}{2} = \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{m+mk-k+1}}{2}$$

$$= \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{k\,(m-1)+(m+1)}}{2},$$

mint a legutolsó időegységben betett mA pénzegységnek egyszerü kamattal felnőtt értéke.

Helyettesitve az utólagos betétek eredeti formulájába A helyett imént talált értékét, lesz az általánositott formula *utólagos* betétekre:

$$S_u = A\frac{k(m-1)+(m+1)}{2} \cdot \frac{k^n-1}{k-1},$$

mely $m = 1$ esetben ismét átmegy az eredeti alakba a levezetés helyességének igazolásaul.*)

Ha most, az időszakos tőkésitésnek az időszakos betétekre vonatkozó 4 általánositott formuláját a folytonos kamatcsatolás ide vágó eredeti formulájával összehasonlitjuk, az első tekintetre láthatjuk, hogy az utóbbiak még a számolás technikai nehézségeit illetőleg sincsenek hátrányban az előbbiek felett. Alig szükséges talán fölemliteni, hogy a folytonos tőkésités eredeti képletei semmi általánositásra nem szorulnak, hiszen itt a kamatcsatolás pillanatonként történvén, a betétek időpentjai minden körülmények között összeesnek a kamatcsatolási időpontokkal; ha tehát a folytonos tőkésités képleteinek alkalmazásánál időegységül a betétek időközeit választjuk és q értékét ennek megfelelően szabjuk meg, úgy az eredeti formulákat a legnagyobb kényelemmel használhatjuk fel *minden képzelhető eset* megoldására, mit az időszakos kamatcsatolásnak imént általánositott képleteiről nem mondhatunk. Először is azért nem, mert ezek az általánositott képletek is csak addig érvényesek, mig a levezetések alapföltétele szerint r, illetőleg m egész szám; ellenkező esetben ezek is felmondják a szolgálatot; igy például az utolsó két képlet jól használható 4 havonként történő befizetéseknél és egész éves kamatcsatolásnál, de már hasznavehetetlen lesz, ha a 4 havi befizetések félévenként tőkésittetnek; ép igy 5, 7—11 havonként tett befizetéseknél is cserben hagynak bennünket általánositott formuláink akár egész, akár féléves tőkésités esetén. De másodszor azért sem mondhatjuk őket teljesen általános érvényűeknek, mert levezetésüknél hallgatagon föltételeztük, hogy az első betét befi-

*) E legutóbb lehozott két képletet — bár nagy gyakorlati jelentőségük van — sem algebrai tankönyvekben, sem nagyobb, kereskedelmi szakmunkákban nem sikerült megtalálnom. Igy például a német könyvek közül *Spitz*-nek fent emlitett munkája — mely egyébként a kamatos-kamatszámolást igen részletesen tárgyalja — emlitést sem tesz e második főesetről. Ép ily hasztalan kerestem e formulákat a magyar nyelven megjelent legterjedelmesebb hiteliigyi szakmunkában: Weninger *Politikai Számtan*-ában is, úgy hogy tudomásom szerint e képletek most jelennek meg először a nyilvánosság előtt.

zetési időpontja kamatcsatolási napra esik; ha e lényeges föltétel nincs meg, úgy — még r, illetőleg m egész számu értékének esetén is — mint hasznavehetetleneket dobhatjuk félre ezeket is az eredeti formulákkal együtt, melyek levezetésénél is, hallgatagon bár, de ott lappang ez a conditio, sine qua non. Igaz ugyan, hogy az algebra elég hatalmas fegyverekkel rendelkezik arra, hogy még az ilyféle szövevényes esetek nehézségeit is legyőzve ***teljes általánosságú*** formulákat szolgáltasson, de ezek aztán ugyancsak komplikáltak lennének az időszakos tőkésités eredeti, egyszerű képleteivel szemben. Nem akarunk e helyen ezeknek hosszadalmas és fárasztó levezetésével foglalkozni, már csak azért sem, mert ezeknek *gyakorlati* hasznuk absolute nincsen, a mennyiben az időszakos betétekkel kapcsolatos hitelműveleti számolásoknál csak is oly esetek fordulnak elő, melyek megoldására a mi *részben* általánositott formuláink teljesen elégségesek. E helyett inkább bemutatjuk az ezek segélyével végzett néhány számolás eredményét párhuzamban a folytonos (pillanatonként való) tőkésités megfelelő eredményeivel az alábbi táblázat két utolsó rovatában, melyek 1000 pénzegységnek, mint állandó időszakos betétnek felszaporodott értékét adják a tabella első rovatai által megszabott föltételek mellett:

Főeset	%	Kamatozási időtartam	A betétek időközei	Tőkésitési időköz	1000 pénzegységnyi betét felnőtt értéke, ha a betevések az időszakok elején	végén
		években.			történnek.	
I.	6	2	1/2	1/12	4313·15	4185·99
	„	„	„	pillanat.	4313·96	4186·46
	4	3	1	1/4	3250·29	3123·46
	„	„	„	pillanat.	3251·59	3124·09
	5	3	1	1/2	3314·13	3154·44
	„	„	„	pillanat.	3318·26	3156·43
II.	4	3	1/2	1	6430·50	6305·63
	„	„	„	pillanat.	6438·79	6311·29
	4	2	1/4	1/2	8366·86	8284·43
	„	„	„	pillanat.	8370·40	8287·11
	6	5	1/3	1	17,587·73	17,249·51
	„	„	„	pillanat.	17,668·45	17,318·59

E táblázatra vonatkozólag szükségesnek tartom még fölemlitni azon okot, melynél fogva az időszakos és folytonos tőkésités végeredményei között levő érték-differenciák aránylag kicsinyek (a legnagyobb 80·72 pénzegység). Ezt abban kell keresnünk, hogy a kamatozási időtartamot mindenütt kicsinyre — legfölebb 5 évre — vettem, hogy az új formulákra vonatkozó ellenőrző számolásokat könnyü szerrel végezhessem. Magától értetődik, hogy nagyobb időtartam és betét esetén az érték-differenciák is tetemesebb eltéréseket mutatnának.

Ezek után az utólagos járadékkal és az amortizációs kölcsönökkel könnyen végezhetünk. Az utólagas járadék jelen- vagy készértékének és egyuttal amortizációs kölcsönöknél utólagos törlesztések esetén az adósságnak kiszámolására általánosan a következő formula van jelenleg forgalomban:

$$T = \frac{A}{k^n} \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1},$$

hol T jelenti az A járadék jelen- vagy készértékét (illetőleg az A törlesztő összegnek megfelelő adósságot), k és n pedig megtartják eddig használt jelentésüket. — Ebből a folytonos tőkésités megfelelő képletét megint az által nyerjük. ha ebbe k helyett, mindenütt e^q értéket irunk; vagyis

$$T = \frac{A}{e^q} \cdot \frac{e^{qn} - 1}{e^q - 1}$$

lesz a folytonos tőkésitésnek a jelzett cél elérésére szolgáló képlete. Ez utóbbi formula (eltekintve ama főkérdéstől, hogy mennyivel jobban megfelel a dolog lényegének a folytonos tőkésités az időszakosoknál), ismét azzal a nagy előnynyel bir az előbbi felett, hogy mig ez utóbbi minden esetben, addig az első csak addig használható, mig a járadék vagy a törlesztések esedékességi időpontjai összeesnek a kamatcsatolási időpontokkal, ellenkező esetben pedig az időszakos betéteknek megfelelő átalakitásra szorul.

Az előbbiek alapján könnyen lehozhatjuk az általánositott képleteket, ha T tőke n idő alatt felnőtt értékét egyenlővé teszszük a negativnak vett A utólagos betétnek ugyanezen idő alatt felnőtt általánositott értékeivel. Ezen egyenletekből nyerjük a következő két képletet:

$$T = \frac{A}{k^r} \cdot \frac{k^n - 1}{k^r - 1}$$

arra az esetre, ha a járadék vagy a törlesztések esedékességi időszakai *r*-szer *nagyobbak* a kamatcsatolási időközöknél; és

$$T = \frac{A}{k^n} \cdot \frac{k(m-1)+(m+1)}{2} \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$$

képletet azon esetre, midőn a járadék vagy törlesztések időszakai *m*-szer *kisebbek* a tőkésitési időköznél.*)

Meg kell azonban itt is jegyeznünk, hogy ezen általánositott képletek alkalmazási köre is csak *r*, illetőleg *m* egész számu értékeire terjed ki s itt is még ama további megszoritással, hogy az egész számolás kiinduló pontjának kamatcsatolási napnak kell lenni ép ugy, mint az időszakos betétek analog formuláinál. A teljes általánositás itt is igen komplikált végeredményekre vezetne, melyek lehozását nyugodt lélekkel mellőzhetjük, mert azok semmi gyakorlati jelentőséggel nem birnak, de különben is valamennyi feleslegessé válnék, ha a folytonos tőkésités életbe léptetésének szép ideáját meg lehetne valósitani. Ép igy elhagyhatjuk a folytonos kamatcsatolás alkalmazását ama különben érdekes esetekre, melyeket *Spitz* előbb már többször emlitett könyvének 211, 213—219. §§-aiban tárgyal, melyekben majd bizonyos számu évek multán esedékes járadékokról, majd ismét olyanokról van szó, melyek nagysága időszakonként arithmetikai vagy geometriai haladvány tagjainak módjára nőnek vagy fogynak, majd ismét az van föltételezve, hogy adósság és visszafizetések után különböző percentek számittatnak; mert bármily érdekesek is e problémák tisztán mathematikai szempontból, gyakorlati jelentőségük alig van nékik, s részletes tárgyalásuk tullépné az ezen értekezés terjedelmére kiszabott határokat. Megelégszünk tehát ezek helyett két, rövid lejáratu kölcsön törlesztési táblázatainak közlésével, melyek *elseje* amaz esetre vonatkozik, midőn a törlesztések időköze *nagyobb* a kamatcsatolási időszaknál, a *második* pedig az *ellenkező* esetet mutatja be, s hozzájuk csatoljuk összehasonlitás céljából a folytonos tőkésités megfelelő értékeit.

---

*) E legutóbbi két formula elsejéhez részben hasonlót találunk *Spitz* előbb már emlitett munkájának 212. §-ában az időszakos betéteknél már tárgyalt jelölési és értelmezési különbségnek megfelelő eltéréssel; az imént közölt második képlet nyomára azonban ismét nem sikerült mindeddig akadnom.

a)

100,000 pénzegységnyi adósság 6% mellett 5 év alatt törlesztendő utólagos évi részletekben							
féléves				folytonos			
kamatcsatolással							
annuitás 23,797·79				annuitás 23,858·37			
Év	Kamat	Törlesztés	Adósság	Év	Kamat	Törlesztés	Adósság
1	6090·00	17,707·79	82,292·21	1	6183·6	17,674·71	82,325·29
2	5011·60	18,786·19	63,506·02	2	5090·73	18,767·64	63,557·65
3	3867·52	19,930·27	43,575·75	3	3930·18	19,928·19	43,629·46
4	2653·76	21,144·02	22,431·72	4	2697·90	21,160·47	22,468·99
5	1366·09	22,431·70	0·02	5	1389·40	22,468·97	0·02

hol az utolsó év végén fenmaradt 0·02 pénzegységnyi adósság a számolási röviditések alkalmazásából eredt hibának tudható be,

b)

2 év = 4 félév alatt 6% mellett 1000 pénzegységnyi utólagos 2 havi részletekben törlesztendő							
11,262·81 pénzegységnyi adósság				11,251·49 pénzegységnyi adósság			
féléves				folytonos			
kamatcsatolással							
Félév	Kamat	Törleszt.	Adósság	Félév	Kamat	Törleszt.	Adósság
1			8,570·69	1	113·08	886·92	10,364·59
					104·16	895·85	9,468·73
					95·16	904·84	8,563·89
	337·88	2,692·12			össz 312·40	ösz 2687·60	
2			5,797·81	2	86·07	913·93	7,649·96
					76·88	923·12	6,726·84
					67·60	932·40	5,794·44
	257·12	2,772·88			össz 230·55	ösz 2769·45	
3			2,941·74	3	58·23	941·77	4,852·67
					48·77	951·23	3,901·44
					39·21	960·79	2,940·65
	173·93	2,856·07			össz 146·21	ösz 2853·79	
4			—0·01	4	29·55	970·45	1,970·20
					19·80	980·20	990·00
					9·95	990·05	—0·05
	88·25	2,941·72			össz 59·30	ösz 2940·70	

E tabella az előbbinél kissé részletesebb magyarázatot kiván. Mint látható folytonos tőkésités esetén félévenként 3 szor történik a törlesztések levonása, mig féléves kamatcsatolás esetén csak egyszer (a félév végén). E két különböző eljárást a tőkésitési mód lényegében mutatkozó eltérés teszi szükségessé; mivel ugyanis folytonos kamatcsatolásnál a törlesztések időpontjai okvetlenül összesnek a tőkésitések időpontjaival, azért a törlesztő összegek rögtön levonandók a fenmaradt adósságból. Nem igy az időszakos tőkésitésnél! Itt ugyanis a féléves időköz első 2 hónapja után visszafizetett 1000 pénzegység után a kamatcsatolási napig hátralevő 4 hóra csak egyszerü kamat számitandó, mi 20 pénzegységet tesz; a 4 hó mulva viszafizetett második 1000 pénzegységnek a hátralevő 2 hóra szintén csak egyszerü kamatja veendő, mi 10 pénzegységgel egyenlő; végre a félév végén visszafizetett harmadik 1000 pénzegység kamat nélkül hozandó számitásba; igy tehát az egész félév alatt, 3 egyenlő részletben visszafizetett 3000 pénzegység úgy tekintendő, mint ha minden félév végén 3030 pénzegység *egyszerre* fizettnék vissza. — Mindkét számitásnál az utolsó rovatban túlfizetés mutatkozik, és pedig féléves kamatcsatolásnál 0·01, folytonosnál pedig 0·05 pénzegység. Hogy ez utóbbi nagyobb a megelőzőnél, ennek okát abban találjuk, hogy folytonos tőkésítésnél 12-szer kellett kamatot számolnunk és adósság levonást végeznünk, mig az időszakosnál csak 4-szer; mivel pedig mindkét esetben korlátolt pontosságú számvetést alkalmaztunk, természetes, hogy a túlfizetés is, mint hiba, nagyobb a második, mint az első esetben.

*
* *

Ezekben kivántam a kamatszámolás reformtervét főbb vonalokban kifejteni. Meg vagyok győződve, hogy e munkámnak minden figyelmes, elfogulatlan és szakavatott olvasója velem együtt szükségesnek fogja vallani ezen — reménylem helyes alapokra fektetett — reformterv megvalósitását, s a most divó, viszásságokkal telt kamatos-kamatszámolás eltörlését. Csakhogy ez — mint már a bevezető sorokban is röviden emlitém — még soká igen soká a *„pium desiderium“*-ok sorába fog tartozni. Hiszen a világ a mathematikai reformokkal szemben még most, a XX század küszöbén is nagyon konzervativ! Gondoljnk csak el, hogy mily nehezen tudott utat törni a tizes számrendszerre fektetett modern mértékrendszer, s hogy az időszámolásnak nagynevü tudosok által annyiszor sürgetett reformja még mindig késik! A napnak órákra, percekre és másodpercekre való felosztásában manapság is sajnosan nélkülözzük a többi mértékeinket domináló tizes beosztást; az évnek hónapokra s ezeknek napokra való felosztásában is sok furcsaság boszantja a gondolkozó embert; igy február az évnek most is a legsatnyább (rendesen 28 napos) hónapja, holott vajmi könnyen lehetne ezt is két más, 31 napos hónap rovására 30 napossá tenni; az sincs semmivel sem indokolva, hogy szökő évek ben a szökő nap épen februárba, az év *második* hónapjába essék, holott ennek — mint korrekciónak — természetszerüleg vagy az első vagy utolsó hónapnál volna a helye; de magának az utolsó 4 hónapnak elnevezése is anachronizmus: az év 9-ik hónapját *szeptembernek*, hivjuk, mi 7-ik hónapot jelent; október vagyis 8-ik hó néven ismerjük, a 10-iket; égyigy kettővel kevesebbet jelző latin elnevezéseket, használunk az év két utolsó havának megjelölésére is. — És bár e viszásságok általánosan ismeretesek, azok megszüntetése mégsem mondható általános óhajtásnak. A világ manapság is oly közönyösen, sőt idegenkedve fogadná az imént érintett kisebbszerü naptár-reformokat, mint Julius Caesar vagy XIII. Gergely pápa korában a radikális naptár-javitásokat.

Hát még mily mozgalmat — valóságos forradalmat — okozna az, ha a pénzintézetek közmegállapodással a folytonos tőkésitéssel való kamatszámolást akarnák életbe léptetni! A laikus publikum bizonyára zsebbeli érdekeit látná veszélyeztetve e reform által, pedig még akkor is ok nélkül, ha a kamatlábnak a II. szakaszban emlitett leszállitása elmaradna. Mert a mennyivel több kamatot szednének a pénzintézetek a reform életbe léptetése után adósaiktól, azon arányban fizetnének ők is többet a náluk elhelyezett betétek után, s igy a közönség ép oly alaptalanul zúgolódnék a vélt igazságtalanság ellen, mint a mily oktalanul reklamálták a londoni munkások „három hónapjukat“ Chesterfield lordtól 1752-ben, midőn Angliában az újév napját március 25-ikéről január 1-ére tették át. Különben a kamatszámolás kifejtett reformjának megvalósitása még azért sem sikerülhetne egy könnyen, mert ez nem indulhatna ki egyetlen, tekintélyes központból (mint a korszakalkotó naptárjavitásoknál volt), hanem csak a legelőkelőbb pénzintézeteknek, vajmi nehezen létre hozható közmegállapodása adhatná meg az impulzust e szép idea megtestesitésére, melynek általános elterjedése csak a törvényhozó faktorok hozzájárulása után volna lehetséges.

Mindent összefoglalva tehát, alig van kilátás arra, hogy a kamatszámolásnak kifejtett reformtervét a gyakorlati élet elfogadja

— legalább a közel jövőben nincs! Hogy ennek dacára is e munkámat közre bocsátottam, tettem ezt azért, mert — véleményem szerint — az elméleti vizsgálódásokkal foglalkozónak kötelessége a szaktudománya körében bárhol észlelt hiányokra és hibákra rámutatni, az ezek javitására vezető eszközöket kijelölni, és ezek alapján a tökély eszményképét kitüzni, tekintet nélkül arra, hogy ezt a praktikus élet elfogadja-e, s ha igen — mikor teszi azt? Ha ezt a célt sikerült elérnem, úgy elmondhatom, hogy e munkát nem hiába irtam meg. s ha még szaktársaim kifejtett elveimet osztani fogják úgy azt is szerénytelenség nélkül bevallhatom, hogy e lapokat nem tettem sikertelenül közzé.