

277.796

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

277796

A
KAMATSZÁMOLÁS
REFORMTERVE.



IRTA.

KOSZTOLÁNYI ÁRPÁD
FŐGYMN. TANÁR.



SZABADKA,
BLESZITS VINCZE KÖNYVNYOMDÁJÁBÓL 1897.



OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

A KAMATSZÁMOLÁS REFORMTERVE.



IRTA :

KOSZTOLÁNYI ÁRPÁD

FŐGYMN. TANÁR.



SZABADKA,
BLESZITS VINCZE KÖNYVNYOMDÁJÁBÓL
1897.

OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

R
2

277796

ORSZ. SZÉCHENYI-KÖNYVTÁR
IV. Híradékművelő
185 547 2064- SZ.

R.
1965



Egy reformeszmét kívánok megpendíteni, mely ugyan az emberek nagy részének a régi szokásokhoz való merev ragaszkodása miatt a gyakorlati életben leendő elterjedésre — legalább a közel jövőben — nem számíthat, de mely dacára ennek, már érdekességénél fogva is megérdemli elméleti szempontból a megvitatást. A következőkben ugyanis törekvésem lesz kimutatni azt, hogy a pénzügyintézetek ama szokása, mely szerint a föl nem vett kamatokat *félévenként* esatolják a tőkéhez: a kamatos-kamatszámolás lényegének meg nem felelő eljárás: iparkodni fogok bebizonyítani azt, hogy csak a *folytonos* (pillanatonként való) tőkésítés az, mi a kamatos-kamatszámolás természetével egyedül egyeztethető össze s melynek szigorú, tudományos alapja van, a mivel az előbbi, gyakorlati eljárás nem dicsekedhetik.

Első sorban le fogom vezetni folytonos kamatesatolás esetén a tőke felnőtt értékének kiszámolására szolgáló alapképletet s mindjárt kijelölöm a módot is, melylyel ez a gyakorlati életbe átültethető lenne az adósok érdekeinek minden sérelme nélkül a kamatláb megfelelő csekély leszállításával. Ezután reá fogok mutatni ama gyarlóságokra, melyekkel a kamatos-kamatszámolásnak most használatban levő képletei járnak, minden oly esetben, midőn az idő nincs egész számmal kifejezve. Érinteni fogom azt a vizzásságot is, hogy a jelenleg divó kamatesatolási mód mellett ugyanazon tőke, percent és idő esetén is különböző nagy lehet a kamat; ebből kifolyólag szót emelek az egyszerű kamatszámolásnak a pénzügyintézeteknél való teljes eltörlése mellett, mert csakis így és a folytonos tőkésítés elfogadása által lehet megszüntetni amaz anomáliákat, melyek abból a következtelen eljárásból erednek, hogy ugyanazon tőke után manapság részben egyszerű, részben kama-

tos-kamat számíttatik. Záradékul a folytonos tőkésítést kiterjesztem az állandó időszakos betétekre és a járadékokra (amortizációs kölcsönökre) is, kimutatván itt is a tervbe vett ujitás előnyeit a most divó eljárás felett.

Szükségesnek tartom azonban e helyen megjegyezni, hogy e munkám keretébe mindenütt, csak az *utólagos* (decursiv) kamatozást vehettem föl s mellőzni voltam kénytelen az ugynevezett *előleges* (anticipativ) kamatozás tárgyalását (mit törlesztési kölcsönöknél több tekintélyes pénzintézet — köztük a magyar földhitelintézet is —) használ, mert ennek fölvétele és a reform szempontjából való taglalása által e munka jóval túllépné a terjedelmére nézve kitűzött határokat.

Hogy e képletek levezetéseit s az ezekből folyó számításokat a mennyiségtanban kevésbbé járatosakra — különösen középiskolai tanulókra s ezek között első sorban tanítványaimra — nézve is hozzá férhetőkké tegyem, csaknem mindenütt elemi mennyiségteni levezetéseket használtam. Csupán két esetben kellett az elemetáris matematikai ismereteket tágitanom; először is a természetes logaritmusok alapszámának (e -nek) hatványozásánál, mit azonban szintén elemi uton — indukció alapján — végeztem, mellőzve az algebrai analysis $f(u+v)=f(u) \cdot f(v)$ függvény-egyenletéből folyó nehezebb deduktív módszert; a második hely, hol az elemi mennyiségteni ismeretek határát túl kellett lépnem, az általam forgalomba hozott és *kritikus időnek* elnevezett időpont kiszámolása volt, melynek elérésére egy exponenciális függvény maximumát kellett meghatároznom, mit csak is differenciál-számolással végezhettem. Mivel azonban e levezetés a szóban forgó dolog lényegére nézve nem alapvető fontosságu, azért a felsőbb mennyiségtanban járatlan olvasó e részt bátran átugorhatja a nélkül, hogy az egész értekezés érthetősége ez által lényeges csorbát szenvedne; e rész szembezőkö feltüntetése végett nyomattam azt a többinél apróbb betűkkel.

I.

A kamatos-kamatszámolási feladványoknál vagy azt szokás föltételezni, hogy a kamatok *egész évenként* esatoltatnak a tőkéhez, vagy pedig az van megszabva, hogy a kamatesatolás, más szóval tőkésítés — a pénzintézetek módjára — *féléves* időközökben történjék. E kétféle kamatesatolási mód közül az utóbbi a kölcsönadóra nézve előnyösebb, mert ugyanazon tőke egyenlő percent és idő esetén nagyobb összegre szaporodik fel a pénzintézeteknél szokásos féléves tőkésítéssel, mint ha a kamatok csak minden év v

gén csatoltatnának a tőkéhez. Főként akkor igen szembeszökő a különbség, ha hosszabb időről van szó. Így például 1 frt tőke 5% mellett 100 év alatt egész évenként való kamatesatolással 131·50 frtra szaporodik fel, míg ugyanennek felnőtt értéke féléves tőkésítés mellett 139·56 frt, s eként az utóbbi többlete az előbbivel szemben a betevő előnyére 8·06 frt, vagyis több, mint az eredeti tőke nyolcszorosa. Természetesen még előnyösebb lenne a dolog a hitelezőre nézve, ha a kamatesatolás még félévnél is rövidebb időközökben történnék. Így negyedéves tőkésítéssel az előbbi tőke, percent és idő esetén 143·88 frt lenne a felszaporodott tőke, mely a féléves kamatesatolásnál felnőtt tőkével szemben 4·32 frt többletet mutat, mely kisebb ugyan, mint az előbbi különbség, de azért az 1 frt eredeti tőkét tekintve még mindig elég tekintélyes összeg. Tovább folytatva még a számolást $\frac{1}{8}$ éves (vagyis másfél hónap, pontként való) kamatesatolásra, végösszegül 146·12 frtot nyerünk, melynek többlete a legutóbbival szemben 2·24 frt vagyis megint kevesebb, mint az utolsó különbség volt. Ismételve még a számolást $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$ és $\frac{1}{512}$ éves időközökben való kamatesatolással, nyerjük az alábbi táblázatba foglalt értékeket, hová teljesség és áttekinthetőség végett a már felsorolt értékek és különbségek is fölvetettek:

| Tőkésítési időköz év- ben | 1 frt tőke felnőtt értéke 100 év alatt 5% mellett | Két szomszédos érték különbsége |
|---------------------------------|---|------------------------------------|
| 1 | 131·50 | |
| $\frac{1}{2}$ | 139·56 | 8·06 |
| $\frac{1}{4}$ | 143·88 | 4·32 |
| $\frac{1}{8}$ | 146·12 | 2·24 |
| $\frac{1}{16}$ | 147·26 | 1·14 |
| $\frac{1}{32}$ | 147·84 | 0·58 |
| $\frac{1}{64}$ | 148·12 | 0·28 |
| $\frac{1}{128}$ | 148·27 | 0·15 |
| $\frac{1}{256}$ | 148·34 | 0·07 |
| $\frac{1}{512}$ | 148·37 | 0·03 |

E táblázat*) világosan mutatja, hogy a tőke felszaporodott értéke a kamatesatolási időközök folytonos felezésével mindig nő ugyan, de fokozatosan esökkenő mértékben, mint erről a különbségek rovata tanuskodik.

Önkényt fölmerül tehát amaz érdekes kérdés: mi lenne a tőke felszaporodott értéke, ha a kamatesatolás végtelen kis időközökben — pillanatonként — történnék? Előre várható, hogy az előbbi példára vonatkozva ez esetben csak kevéssel fogunk többet kapni a táblázat utolsó rovatában levő számnál a növekvés szakadatlan esökkenése miatt.

Hogy e reánk nézve fontos problémát megoldhassuk, induljunk ki a most divó időszakos kamatesatolásnak

$$T_n = T_0 \cdot k^n$$

alapképletéből, hol T_n a tőkének n időegység alatt felnött értékét, T_0 az eredeti tőkét, k pedig a kamattényezőt jelenti, melynek értéke a percenttól és a tőkésítési időköztől függ; és pedig, ha a percentet p -vel jelöljük, egész éves tőkésítésnél $k = 1 + \frac{p}{100}$, vagy még (ugy most, mint ezentul) rövidség kedvéért $\frac{p}{100}$, vagyis a percent századrésze helyett q -t írva: $k = 1 + q$; ellenben féléves kamatesatolás esetén $k = 1 + \frac{q}{2}$ épígy negyedévesnél $k = 1 + \frac{q}{4}$ és így tovább; ugy hogy általában, ha a kamatesatolás az év minden $\frac{1}{x}$ -ed részének végén történik $k = 1 + \frac{q}{x}$; a mi végül n -et, k hatvány-kitevőjét illeti, ennek nagysága a kamatozási időtartammal és a tőkésítési időközzel változik, és pedig n helyett mindig az egész kamatozási időtartalomban foglalt tőkésítési időközök száma irandó, ugy hogy $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{x}$ -ed évenként való tőkésítés esetén n értéke is 2-szer, 3-szor \dots x -szer nagyobb lesz, mint egész éves kamatesatolásnál. Eként tehát az időszakos kamatkapcsolásnak ezen értelmezések alapján transformált képlete

$$T_n = T_0 \left(1 + \frac{q}{x} \right)^{nx}$$

*) Az ide vágó számolások végrehajtására 5 jegyű logaritmusokat egyáltalán nem használhatunk, mert ezek már az első értéket is a századrészekben hibásan adnák. Hét jegyű logaritmusok is legfeljebb $\frac{1}{128}$ évi tőkésítésig alkalmazhatók; a táblázat két utolsó adatának kiszámolására tehát vagy 10 jegyű logaritmusokat kell igénybe venniük, vagy ezek hiányában a rövidített szorzás 16, illetőleg 17-szer egymásután való alkalmazásával közvetlenül keresni az eredményt 4–5 tizedesre, melyek közül a 2 első okvetlen pontos lesz.

melynek segélyével számítottak ki $T_0 = 1$ esetre vonatkozólag az előbb közölt táblázatba foglalt értékek.

Hogy ebből a folytonos tőkésítés megfelelő képletét nyerjük csak x -et — az egy évben foglalt pillanatok számát — kell *végtelen nagynak* vennünk, s e föltétel szem előtt tartásával a zárójelben levő kéttagu mennyiséget a binomiális képlet alapján sorba fejtenünk, a mint ez itt következik:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q}{x}\right)^{nx} &= 1 + nx \frac{q}{x} + \frac{nx(nx-1)}{2} \left(\frac{q}{x}\right)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{q}{x}\right)^3 + \\ &= 1 + nq + \frac{nx(nx-1)}{2} \cdot \frac{q^2}{x^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{q^3}{x^3} + \dots \\ &= 1 + nq + \frac{1}{2} \cdot \frac{nx}{x} \cdot \frac{nx-1}{x} \cdot q^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{nx}{x} \cdot \frac{nx-1}{x} \cdot \frac{nx-2}{x} \cdot q^3 + \\ &= 1 + nq + \frac{1}{2} n \left(n - \frac{1}{x}\right) q^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot n \left(n - \frac{1}{x}\right) \left(n - \frac{2}{x}\right) q^3 + \dots \end{aligned}$$

Mivel azonban x a föltétel szerint *végtelen nagy*, mindazon törtek, melyek nevezője x és számlálójuk véges szám, zérussal lesznek egyenlők, és így:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q}{x}\right)^{nx} &= 1 + nq + \frac{1}{2} n^2 q^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} n^3 q^3 + \dots \\ &= 1 + nq + \frac{(nq)^2}{2!} + \frac{(nq)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

mely értéket az előbbi transformált alapegyenletbe írva:

$$T_n = T_0 \left[1 + nq + \frac{(nq)^2}{2!} + \frac{(nq)^3}{3!} + \dots \right].$$

E szerint folytonos tőkésítés esetén a tőke felszaporodott értékét egy végtelen sornak az eredeti tőkével való szorzata adja.

E convergens sor értékének kiszámolása könnyű feladat, ha $n=1$ év; így például $p=5\%$ esetén 6 tizedesre:

$$\begin{aligned} 1 + 0.05 + \frac{0.05^2}{2} + \frac{0.05^3}{2 \cdot 3} &= 1 + 0.05 + \frac{0.0025}{2} + \frac{0.000125}{6} \\ &= 1 + 0.05 + 0.00125 + 0.000021 = 1.051271, \end{aligned}$$

a mennyiben a következő $\frac{0.05^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{0.00000625}{24} = 0.00000026$ tag már nem bir befolyással a 6-ik tizedesre. Ezzel szemben a kamatté-nyező egész éves tőkésítésnél 1.05, vagyis csak kevéssel kisebb. Így 10,000 forint tőke esetén egész évenként való kamatcsatolással az 1 év alatt felszaporodott érték 10,500 forint, míg folytonos tőkésítés mellett 10,512.71 forint, vagyis 12.71 forinttal több.

Nem nagy nehézséggel jár a számolás akkor sem, ha $n=100$ év és a percent 1. Ez esetben ugyanis a végtelen sor:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

ez pedig a természetes logaritmusok alapszáma: $e = 2\cdot718,282$. Ezzel szemben egész éves kamatesatolás esetén a kamattényező 100-adik hatványa $2\cdot704,814$, mi 10,000 frt tőkét véve, 134·68 frt kamatdifferenciát mutat.

Erdekes megjegyezni, hogy ugyancsak $e=2\cdot718,282$ lesz a pénzegység felszaporodott értéke 1 év alatt 100 percentes uzsorakamat esetén is folytonos tőkésítés mellett, míg egész évenként esatolván a kamatokat a tőkéhez. megfelelő értékül csak 2 egészet nyerünk; e kellő különbsége $0\cdot718,282$, mi 10,000 frt eredeti tőkénél 7182·82 frt különbségnek felel meg, tehát sokkal nagyobb pénzösszegnek, mint az előbb. Ez eltérés oka az, hogy míg folytonos tőkésítésnél a végtelen sor tagjainak tanúsága szerint percent és idő egyenlő mértékben folynak be a tőke felszaporodott értékére, addig hosszabb időközökben való kamatesatolásnál az idő befolyása — mint hatványkitevőé — nagyobb a percenténél, mely az alapszám egyik tagja.

Fáradtságosabb lesz azonban a munka, ha $n = 100$ év esetén a percentet 1-nél nagyobbra, pl. 5% -ra vesszük. Mert míg az előbb e értékét 6 tizedesre a végtelen sor első 11 tagja már pontosan adta, addig 5% -nál 25 tagot kell 7 tizedesre kiszámolnunk és összeadnunk, hogy a pénzegység felszaporodott értéke gyanánt $148\cdot413,159$ -t nyerjünk, melylyel szemben az egész éves kamatesatolás $131\cdot501,258$ értéket mutat fel, miknek különbsége $16\cdot911,901$, s ez 10,000 frt eredeti tőke esetén $169,119\cdot01$ frt kamattöbbletet ad a pillanatonként való kamatesatolás javára. — Ha pedig az imént adott $148\cdot413,159$ -ből két tizedest tartunk meg, nyerjük a 3-ik lapon közölt tabella záradéka gyanánt 1 frt tőkének 100 év alatt 5% mellett felnőtt értékét folytonos tőkésítés esetén $148\cdot41$ frt értékben, mely az $\frac{1}{512}$ éves kamatesatolásnak megfelelő $148\cdot37$ frtnál csak 4 krrel több, s e többlet kiesiny értéke fényesen igazolja a nevezett táblázat interpretációjának záradékában tett következtetésünk helyességét.

Még hosszadalmasabb és fáradtságosabb ut áll előttünk, ha az idő 100 évnél kisebb; mert bár ilyenkor még 5% esetén is 6 tizedes nyerésére 25 tagnál kevesebbet kell kiszámolnunk, de az egyes tagok meghatározása most sokkal nehezebb lesz, mert ilyenkor az előbb szerepelt tagokhoz legtöbbször nehezen vagy épen nem egyszerűsíthető törtek hatványai is lépnek tényezők gyanánt.

Az összes nehézségek eloszlatására tehát oly formula birto-

kába kell jutnunk, mely az előbbi végtelen sort véges, zárt alakban adja. Ennek elérése végett e -nek, a természetes logaritmusok alapszámának hatványait kifejező sorokkal kell megismerkednünk, melyeket indukcio útján fogunk kifejteni.

A mi először a második hatványt illeti, lesz :

$$\begin{aligned} e^2 = e \cdot e &= (1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots)(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots) \\ &= (1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots)(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \\ &\quad + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{24} + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Hogy pedig az egymás alatt álló törteket összeadhatassuk, hozzuk őket közös nevezőkre ; vagyis :

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \\ &\quad + 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{6} + \frac{4}{24} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} + \frac{3}{6} + \frac{6}{24} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6} + \frac{4}{24} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{24} + \dots \\ &\quad + \dots \\ &= 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \dots = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots, \end{aligned}$$

mely értéket e sorával összehasonlítván, látjuk, hogy ez amattól csakis abban különbözik, hogy a törtek számlálói gyanánt az előbbi 1 helyett 2 nek, az új hatványkitevőnek oly hatványai szerepelnek, melyeknek kitevőit a természetes egész számok alkotják.

Tovább folytatva a számolást, e^3 -ra nézve nyerjük :

$$\begin{aligned} e^3 = e^2 e &= (1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \dots)(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots) \\ &= (1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots)(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots \\
 &\quad + 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{24} + \dots \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Vagy — mint az előbb — most is az egymás alatt álló törteknek közös nevezőt csinálva:

$$\begin{aligned}
 e^3 &= 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \dots \\
 &\quad + 1 + \frac{4}{2} + \frac{12}{6} + \frac{32}{24} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{2} + \frac{6}{6} + \frac{24}{24} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{6} + \frac{8}{24} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{24} + \dots \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

$$= 1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \dots = 1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \dots,$$

mely megint csak abban különbözik e eredeti sorától, hogy a törtek számlálóiban az egységet 3-nak, e kitevőjének oly hatványai helyettesítik, melyeknek kitevőit ismét 1-től kezdve a természetes egész számok teszik.

E két esetből már nagy valószínűséggel következtethetünk indukció alapján az általános szabályra, mely szerint m bármely tetszőleges egész számot jelentsen is:

$$e^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \dots$$

E valószínűség teljes bizonyossággá lesz, mihelyt sikerül kimutatnunk, hogy ha a törvény m hatványkitevőre érvényes, akkor $(m+1)$ -re is helyes marad. Ugyanis:

$$e^{m+1} = e^m e = \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \frac{m^4}{24} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \frac{m^4}{24} + \dots \\
 &\quad + 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \dots \\
 &\quad \quad + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4} + \dots \\
 &\quad \quad \quad + \frac{1}{6} + \frac{m}{6} + \dots \\
 &\quad \quad \quad \quad + \frac{1}{24} + \dots \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad + \dots
 \end{aligned}$$

S ha itt is — az előbbieik módjára — az egymás alá irt törteket közös nevezőre hozzuk :

$$\begin{aligned}
 e^{m+1} &= 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} + \frac{m^4}{24} + \dots \\
 &\quad + 1 + \frac{2m}{2} + \frac{3m^2}{6} + \frac{4m^3}{24} + \dots \\
 &\quad \quad + \frac{1}{2} + \frac{3m}{6} + \frac{6m^2}{24} + \dots \\
 &\quad \quad \quad + \frac{1}{6} + \frac{4m}{24} + \dots \\
 &\quad \quad \quad \quad + \frac{1}{24} + \dots \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad + \dots \\
 &= 1 + (m+1) + \frac{m^2+2m+1}{2} + \frac{m^3+3m^2+3m+1}{6} + \frac{m^4+4m^3+6m^2+4m+1}{24} + \dots \\
 &= 1 + \frac{m+1}{1} + \frac{(m+1)^2}{2!} + \frac{(m+1)^3}{3!} + \frac{(m+1)^4}{4!} + \dots
 \end{aligned}$$

Ebből látjuk, hogy ha a törvény m hatványkitevőre helyes, úgy $(m+1)$ -re is érvényes marad. De miután $m=3$ esetén érvényességét kimutattuk, következik, hogy helyes lesz akkor is, ha $m=3+1=4$, továbbá ha $m=4+1=5$ és így tovább, bármily egész számot jelentsen is m . Hogy pedig m tört értéke esetén sem változik meg a dolog, ezt az algebrai analysis egy függvényegyenlet taglalása által mutatja ki s ennek alapján általános érvényűnek fogadhatjuk el az

$$e^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \dots$$

egyenletet. Tekintsük most m -et két: n és q szám szorzatának, vagyis írjunk m helyett nq -t:

$$e^{nq} = 1 + \frac{nq}{1!} + \frac{(nq)^2}{2!} + \frac{(nq)^3}{3!} + \dots$$

Ez egyenlet jobb oldala azonban teljesen egyező a folytono

kamatesatolás (7-ik lapon fölirt) alapképletének végtelen sorával; ha tehát abba a végtelen sor értéke gyanánt e^{nq} kifejezést helyettesítjük, lesz a folytonos tőkésítés transformált, egyszerűbb alapegyenlete:

$$T_n = T_0 \cdot e^{nq} = T_0 (e^q)^n,$$

mit az időszakos kamatesatolásnak

$$T_n = T_0 \cdot k^n$$

alapegyenletével egybe vetve, láthatjuk, hogy folytonos tőkésítés esetén a kamattényezőt e^q képezi; vagyis *folytonos kamatesatolás esetén a kamattényező azon szám, melyet nyerünk, ha e -t, a természetes logaritmuskok alapszámát, a percent századrészával egyenlő hatványra emeljük; vagy más szavakkal. pillanatonként való tőkésítés mellett a kamattényező azon szám, melynek természetes logaritmusa a percent századrésze.*

Ha tehát a természetes logaritmuskok táblájával rendelkezünk, úgy a folytonos tőkésítés kamattényezőjének (melyet K -val fogunk jelölni) kiszámolása egyszerű logaritmusk visszakeresési munka.

A számolás mesterséges (Brigg-féle) logaritmuskokkal alig valamivel hosszabb. Ugyanis a

$$K = e^q$$

egyenletből

$$\log K = q. \log e = 0.434\ 2945\ q,$$

vagyis ez esetben q értékét az állandó 0.434 2945 számmal — a Brigg-féle logaritmuskok *modulusával* — kell előbb szoroznunk s az így nyert szorzat közönséges logaritmuskát visszakeresnünk, hogy eredményül a folytonos tőkésítés kamattényezőjét nyerjük.

II.

Az imént lehozott kényelmes képlet birtokában könnyű szerrel végezhetjük el az ellenőrző számolást a pénzegységnek 100 év alatt 5% mellett folytonos kamatesatolás esetén felnőtt értékére nézve, mit a 8-ik lapon — a végtelen sor 25 tagjának fáradságos kiszámolása és összegezése alapján — 148·413,159-nek irtunk fel; ha a számolásra legalább tizjegyű logaritmuskotáblát használunk, akkor ugyanezen értéket fogjuk hasonlithatlanul kevesebb munka árán nyerni. Ép ily könnyű módon kapjuk $T_0 = 1$, $n = 100$ év és $p = 6$ esetben folytonos tőkésítésre vonatkozólag 403·428,793 értéket, melylyel szemben az egész éves kamatesatolás megfelelő

értéke csak 339 302,084, mi 10,000 frt tőke esetén 641,267 09 frt kamatdifferenciának felel meg.*)

A folytonos tőkésítésnek legutóbb talált

$$T_n = T_0 e^{na}$$

alapképletét megfigyelve, általánosságban igazolva látjuk ama megjegyzés helyességét, mit a 8-ik lapon 100 év és 1%, valamint 1 év és 100% esetből kifolyólag tettünk, hogy t. i. a tőke felszaporodott értékének nagyságára a folytonos kamatesatolásnál idő és percent egyenlő mértékben birnak befolyással, míg ezzel ellentétben az időszakos tőkésítésnél az időnek — mint hatványkitevőnek — befolyása túlnyomó. Így például a pénzegységnek 6% mellett 3 év alatt felnőtt értéke egész éves tőkésítésnél 1 191,016, holott — időt és percentet megcsereélve — 3% mellett 6 év alatt már 1 194,052 vagyis 0 003,036 tal több; ez eltérő értékekkel szemben a folytonos tőkésítés mindkét esetben 1 197,217 eredményt ad.

S e tekintetben a folytonos kamatesatolás az időszakosnál egyszerűbb és természetesebb. Ha ugyanis a kamatos-kamatszámolásnál a logaritmusokat mellőzni akarjuk, úgy a kamattényezők hatványait táblázatokba foglalva szoktuk összeállítani, s ekkor a tőke felszaporodott értékének nyerésére csak e táblázatokból kikeresett megfelelő számot kell az eredeti tőkével szoroznunk. Csak-hogy e táblázatok kiszámolása időszakos kamatesatolásnál igen fáradságos munka; hiszen minden egyes időszakra és percentre nézve külön-külön kell a pénzegység felnőtt értékeit kikeresnünk, egyetlen-egy párt sem találunk köztük, mely teljesen egyező volna. Nem így a folytonos tőkésítésnél! Itt az 1%-es 2 évi ép akkora, mint a 2%-es 1 évi; épígy az 1%-es 4 évi egyenlő a 2%-es 2 évivel vagy a 4%-es 1 évivel; hasonlóan az 1%-es 3 évit megtaláljuk a 3%-esnek 1 évi vagy a 1 5%-esnek 2 évi rovatában. Ha tehát az 1%-eseket már kiszámoltuk, ezek közül minden másodikat beiktathatjuk a 2%-esnek megfelelő rovatába, minden harmadiknak hasznát vehetjük a 3%-eseknél, minden negyediket al-

*) Ugy ezen, mint az 5%-nál említett 169,119.01 frtnyi óriási kamatdifferenciák frappans ellentétéül érdekes fölemlíteni, hogy rövid — néhány napi — időtartamra a folytonos tőkésítéssel való kamatos-kamatszámolás még nagyobb tőkéknél is ugyanazon felnőtt értéket adja, mint az egyszerű kamatszámítás. Így 10,000 frt tőkének 5% vagy 6% mellett 7 nap alatt felnőtt értékeit még a krajcároknak is egyezőknél találjuk mindkét számolási mód szerint 10,009 59, illetőleg 10,011 51 frt értékekben.

kalmazhatjuk a 4^o/_o-tel való számolásnál és így tovább, mi által a táblázatok összeállításának munkája tetemesen kevesebbre száll alá.

De még egy másik, nyomósabb ok is szól a pillanatonként való kamatesatolás mellett! A kamatos-kamatszámolás *lényegének* ugyanis legjobban megfelel a kamatkapcsolásnak e módja. Ha ugyanis a kamatos-kamatszámolás egyáltalában jogosult, úgy a legtermészetesebb és a kölcsönadóra nézve legigazságosabb eljárás az, ha az új kamatok *folytonosan* növelik a tőkét s mindjárt kamatoznak is. A pénzintézetek most divó félèves tőkésítési uzusának komoly, tudományos alapja nincsen, legfőlebb praktikus szempontok ajánlhatják azt, nevezetesen a számolás egyszerűsége. A kisebb pénzintézetek ugyanis a tőke felszaporodott értékének kiszámolására, sem a kamattényezők hatványainak tabelláit, sem logaritmus-könyvet nem használnak, hanem minden félév végén beírják a betéti könyvekbe a föl nem vett kamatokat „*tőkésített kamat*“ címen s eként a tőke felnőtt értékét a lehető legprimitívebb módon: az egyszerű kamatszámolás ismételt alkalmazásával határozzák meg. Ily kezdetleges eljárást a folytonos kamatesatolásnál használni nem lehet, jelölül annak, hogy a kamatos-kamatszámolás e módja az egyszerű kamatszámolástól teljesen független és így a kamatos-kamatszámolás lényegének egyedül megfelelő.

Főként azonban az igazolja a pillanatonként való kamatesatolás létjogosultságát, hogy ennek szigoruan tudományos alapja van, mely a *természetes* logaritmusok alapszámán nyugszik. E nevezetes, az egész matematikában vezérszerepet vivő számhoz az időszakos tőkésítéssel való kamatozásnak semmi köze sincs s így ez *természetes* alappal nem is bír.

Detalán azt vethetné ellen valaki, hogy a folytonos tőkésítés nagy terhet róna az adósokra, hiszen, mint láttuk — különösen hosszabb idő alatt — a tőke ily módon tetemesen többre szaporodnék föl, mint a jelenlegi félèves kamatesatolással, s eként nekik kamatok fejében nagyobb összegeket kellene fizetniök, mint manapság. E bajon azonban igen könnyű lenne segíteni a percentnek megfelelő leszállítása által. Az előbbieik alapján ugyanis igen könnyű kiszámítani azon p_1 percentet, mely mellett a tőke folytonos kamatesatolás esetén is ép annyira növekszik meg, mint p percent (és k kamattényező) mellett egész vagy félèves tőkésítés esetén ugyanazon idő alatt. E végből csak a kamattényezőket kell egyenlőkké

tennünk s az így keletkezett egyenletből, p_1 értékét kikeresnünk. Így az egész éves kamatesatolással való összehasonlításnál:

$$1 + q = e^{q_1},$$

honnan

$$\log (1+q) = q_1 \log e,$$

vagy $1+q$ helyett a szokásos k jelzést használva és $q_1 = \frac{p_1}{100}$ értéket helyettesítve:

$$\log k = \frac{p_1}{100} \log e,$$

miből

$$p_1 = \frac{100}{\log e} \log k;$$

s végül $\frac{100}{\log e}$ állandó értéket helyettesítve:

$$p_1 = 230\cdot258,510 \log k.$$

Ha pedig a fél éves kamatesatolás percentjével aequivalens percentet akarjuk kapni, akkor a megelőzők módjára

$$\left(1 + \frac{q}{2}\right)^2 = e^{q_1}$$

egyenletből:

$$2 \log \left(1 + \frac{q}{2}\right) = q_1 \log e,$$

és ismét $1 + \frac{q}{2}$ helyett k' -et, q_1 helyett pedig $\frac{p_1}{100}$ -at írva:

$$2 \log k' = \frac{p_1}{100} \log e,$$

miből:

$$p_1 = \frac{200}{\log e} \log k' = 460\cdot517,020 \log k'.$$

E formulák segítségével könnyű kiszámolni, hogy a takarékpénztárak által nálunk ez idő szerinti az u. n. állandó betétek után fizetni szokott 5%-nek, mennyi lenne a folytonos kamatesatolás aequivalens percentje az egész és fél éves tőkésítéssel szemben. Az egész évesnek megfelel 4·879,017, vagyis körülbelül 4·88%, a fél évesnek pedig 4·938,524 azaz körülbelül 4·94%. Ha tehát a pénzügyintézetek a mostani fél éves kamatesatolást elhagyva a folytonos tőkésítésre térnének át, úgy az 5%-es kamatlábat csak 0·06%-tel kellene leszállítaniok, hogy kamatok fejében való tulkiadásoktól meg legyenek kimélve, mi által azonban az egész kamatos-kamat-számolás szigorúan tudományos alapra lenne fektetve.

A percentnek e csekély leszállítása azonban csak addig egyenliti ki a fél éves és a folytonos kamatesatolás között a különbséget, míg ily kis percentről van szó. Már évi 10%-nél a folytonos tőkésítés aequivalens percentje a fél éves kamatesatolással szemben

9·758,033 vagyis körülbelül 9·76^o/_o, mi csaknem $\frac{1}{4}$ ^o/_o apadást mutat. Még nagyobb a esökkenés 100^o/_o uzsorapercentnél egész éves tőkésítéssel szemben, melynek aequivaleus percentje csak 69·31472 vagyis körülbelül 69¹/₃^o/_o, mi 30²/₃^o/_o esökkenést ad.

Az imént levezetett formulák segítségével vajmi könnyü megforditva a folytonos tőkésítés percentjének megfelelő aequivaleus percentet kiszámolni egész vagy fél éves kamatesatolás esetére. Ugyanis a legutóbbi két formulából :

$$\log k = \frac{\log e}{100} p_1 = 0\cdot004\ 3429\ p_1 \text{ és } \log k' = \frac{\log e}{200} p_1 = 0\cdot002\ 1715\ p_1$$

Néhány ezek alapján kiszámolt adatot az alábbi kis táblázat foglal magában 2 tizedesre :

| Folytonos | egész éves | fél éves |
|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| k a m a t e s a t o l á s. | | |
| 5 ^o / _o | 5·13 ^o / _o | 5·06 ^o / _o |
| 10 ^o / _o | 10·52 ^o / _o | 10·25 ^o / _o |
| 100 ^o / _o | 171·83 ^o / _o | 129·74 ^o / _o |

III.

Még egy elvitázhatlan nagy előnye van a folytonos tőkésítésnek az időszakos felett, s ez az, hogy míg amannak képletei az évek számát jelző n minden értékénél megtartják érvényességüket, addig az időszakos kamatesatolás alapegyenlete azonnal megszűnik helyes lenni, mihelyt n helyett akár valódi törtet, akár vegyes számot írunk, sőt az imént említett első esetben azon *absurd* eredményre vezet, hogy a tőke kamatos-kamattal *kevesebbre* szaporodik fel, mint egyszerű kamatozás esetén.

Igazoljuk ezt először a következő egyszerű példa kiszámolásával: 10,000 frt tőke 5^o/_o mellett egész éves kamatesatolás esetén fél év alatt 250 frt egyszerű kamatot hajt, tehát ezzel 10,250 frtra nő fel; ellenben az időszakos kamatos-kamatszámolás formulája szerint $T_n = T_0 k^n = 10,000 \sqrt[1\cdot05]{1\cdot05} = 10,000 \times 1\cdot024,695 = 10,246\cdot95$ frt lenne a felszaporodott érték mi az előbbinél 3·05 frttal *kevesebb*. — Ez absurd értékkel szemben a folytonos tőkési-

tés $T_n = T_0 e^{nq}$ formulája $T_n = 10,000 e^{1:40} = 10,253.15$ frtot ad vagyis az egyszerű kamatszámolás végeredményénél 3.15 frttal többet.

Hogy pedig nemcsak ez esetben, hanem bármely százalék és az év bármely törtrésze mellett is kevesebbet kapunk, ha a tőke felnőtt értékét az egyszerű kamatszámolás mellőzésével az időszakos kamatesatolás képletének segélyével számoljuk, ezt a binomiális tantétel alapján a következőleg bizonyíthatjuk be: T_0 pénzegység egyszerű kamatja $p\%$ mellett az év bármely x törtrészeire $\frac{T_0 p x}{100} = T_0 q x$, s így a tőkének ez egyszerű kamattal felnőtt értéke:

$$T'_x = T_0 + T_0 q x = T_0 (1 + q x).$$

Ugyanezen érték az időszakos kamatos-kamatszámolás alapképlete szerint:

$$T_x = T_0 (1 + q)^x,$$

mit a binomiális képlet segélyével sorba fejtve:

$$\begin{aligned} T_x &= T_0 \left[1 + xq + \frac{x(x-1)}{2} q^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} q^3 + \dots \right] \\ &= T_0 (1 + xq) + T_0 \left[\frac{x(x-1)}{2} q^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} q^3 + \dots \right] \\ &= T'_x + T_0 \left(a + a \frac{x-2}{3} q + b + b \frac{x-4}{5} q + c + c \frac{x-6}{7} q + \dots \right) \end{aligned}$$

ha t. i. az utolsó előtti sor szögletes zárójelében levő páratlan tagokat rövidség kedvéért, sorban a, b, c, \dots betűkkel jelöljük. Mivel pedig x valódi tört azért az a -val jelölt első tag az $(x-1)$ tényező révén *negatív*, a második azonban az $(x-2)$ új negatív tényező hozzá lépése folytán már *positív*; a harmadik tag (b) ismét negatív, mert ez a második, pozitív tagból az által keletkezik, hogy azt $\frac{x-3}{4} q$ tényezővel szorozzuk, melynek $(x-3)$ része negatív; a negyedik tag az $(x-4)$ új negatív tényező révén ismét pozitív lesz és így tovább; szóval a páratlan tagok mind negatív, a párosak pedig valamennyien pozitív előjelűek. De mindaddig míg q legfőlebb egy, azaz míg p legfőlebb 100, minden páros, pozitív tag kisebb, mint az előtte álló páratlan, negatív tag, hiszen minden páros, pozitív tag az által keletkezett az előtte álló páratlan, negatív tagból, hogy azt egy $\frac{x-m}{m+1}$ valódi törttel szoroztuk; e szerint két szomszédos tagpár összevonásának eredménye és így az egész soré is egy negatív S szám lesz, vagyis:

$$T_x = T'_x - S,$$

miből következik, hogy T_x 100% határig kisebb T'_x -nél.

Mivel pedig a gyakorlati életben — hála az uzsatörvénynek! — már 100% sem fordul elő, azért felesleges lenne a vizsgálódást még 100-nál nagyobb percentre is kiterjeszteni, s e megjegyzéssel általánosan igazoltnak mondhatjuk ki ama tételt, mely szerint a tőke felpaporodott értékeül az időszakos tőkésítés formulája a kamatesatolási időköznel kisebb időre mindig *kevesebb* — tehát hibás — értéket ad, mint az egyszerű kamatszámolás képlete. *)

Érdekes megvizsgálni azt is, hogy a kamatesatolási időköz mely törtrészére lesz a különbség legnagyobb, vagyis hogy az év mely x törtrésze esetén ad az időszakos kamatos kamatszámolás formulája *leghibásabb* értéket?

E kérdést felsőbb mennyiségtan segélyével a következő egyszerű uton oldhatjuk meg: a szóban forgó különbség

$$T'_x - T_x = T_0 (1+qx) - T_0 (1+q)^x,$$

vagy az egyenlet baloldalán levő különbséget rövidség kedvéért y -nal jelölve:

$$y = T_0 [1+qx - (1+q)^x].$$

Ezen függvény első differenciálhányadosa pedig — T_0 és q értékeit állandóknak véve —:

$$\frac{dy}{dx} = q - (1+q)^x \frac{\log (1+q)}{\log e};$$

vagy még itt $1+q$ helyett a szokásos k jelzést használva s q helyett ez alapon $k-1$ értéket írva s végül az egész differenciálhányadost zérussal egyenlővé téve;

$$0 = (k-1) - k^x \frac{\log k}{\log e}$$

Ebből pedig:

$$k^x \frac{\log k}{\log e} = k - 1$$

és még

$$k^x = \frac{(k-1) \log e}{\log k},$$

mely exponenciális egyenlet megoldása logaritmusok segélyével:

$$x \log k = \log (k-1) + \log \log e - \log \log k$$

s innen végre;

$$x = \frac{\log (k-1) + \log \log e - \log \log k}{\log k}.$$

*) Sajátságos, hogy e dolog egy matematikai lángésznek: Euler-nek kikerülte a figyelmét. A nevezett nagy matematikus ugyanis klaszikus szépségekben gazdag *Algebrá*-jának első részében az 558-ik szakaszban minden megszorítás nélkül érvényesnek mondja ki a kamatos-kamatszámolásnak, $T_n = T_0 k^n$ alapegyenletét azon esetre is, ha n bármilyen törtszám és a következő 559-ik pontban ki is számolja e formula segélyével 100,000 tallérnak 8 nap alatt 5% mellett egész éves kamatesatolási esetén felnőtt értékét, mit 100,107 tallérnak s így a kamatot 107 tallérnak találja, nem vevén észre, hogy a szóban forgó pénzösszeg egyszerű kamatja az adott idő és percent mellett 109.6 tallér vagyis 2.6 tallérral több a talált hibás értéknél.

Hogy pedig x ezen értéke valóban az y -nal jelölt különbségnek *maximumát* adja, mutatja a fentebbi első differenciál- hányadosból képezhető másodrendű differenciál- hányados, mely — tekintettel arra, hogy q és e állandók — *negatív*.

Ha ezen formula segítségével x értékét különböző percentek mellett kiszámoljuk, azt mindig $\frac{1}{2}$ -nél többnek fogjuk találni, de e többlet még igen nagy percent esetén is nagyon csekély. Így 100% -nél x értéke $0\cdot528,766$, míg a nálunk szokásos 5% -nél csak $0\cdot502,032$ úgy hogy csupán a gyakorlati életben előforduló esetekre reflektálva kimondhatjuk, hogy az időszakos kamatos-kamat számolás formulája a felszaporodott tőkére nézve azon esetben ad leghibásabb értéket, midőn a kamatozási idő a kamatesatolási időszaknak körülbelül felét teszi. Ezen időt a következőkben *kritikus idő*-nek fogom nevezni.

E jelentékeny hibaforrás hozza ama kényszerhelyzetbe az időszakos kamatos-kamat számolóját, hogy azon esetben, ha az *idő vegyes szám*, csakis az időegység adott egész számu többszöröseire számoljon kamatos-kamatot, az időegység hátralevő törtrészeire pedig csupán egyszerű kamatot keressen, mert ha ellenkezőleg járna el (vagyis ha az időt jelző teljes vegyes számra kamatos-kamatot venne), a tőke valóban felszaporodott értékénél megint *kevesebbet* kapna. Így például $10,000$ forint tőkének $2\frac{1}{2}$ év alatt 5% mellett felszaporodott értékeül egész éves kamatesatolás esetén $11,297\cdot26$ forintot nyerünk, ha az egész $2\frac{1}{2}$ évre kamatos-kamatot számolunk; míg ellenben — helyes eljárással — csak két egész évre keresve kamatos-kamatot, a hátra levő fél évre pedig egyszerű kamatot véve, eredményül $11,300\cdot62$ forintot nyerünk vagyis, az előbbi hibás értékkel szemben $3\cdot36$ forinttal többet. E gyarlósággal szemben a folytonos tőkésítés alapegyenlete sértetlenül megtartja érvényességét itt is, és a jelen esetben $2\frac{1}{2}$ évre közvetlenül alkalmazva eredményül $11,331\cdot48$ forintot ad.

E szerint az időszakos kamatos-kamat számolás eredeti $T_n = T_0 k^n$ alapegyenlete azon esetben, ha n egy egész m és egy x törtszám összege, vagyis ha $n = m + x$, a következő átalakuláson megy át: a tőke felszaporodott értéke m egész év alatt $T_0 k^m$, s ennek a hátra levő x törtrészre eső egyszerű kamatja $\frac{T_0 k^m p x}{100} = T_0 k^m q x$, tehát:

$$T_n = T_0 k^m + T_0 k^m q x = T_0 k^m (1 + q x) = T_0 k^m [1 + (k - 1) x].$$

Magától értetődik, hogy időszakos kamatesatolás esetén az eredeti tőke kiszámolására is az imént lehozott komplikáltabb képletet kell használnunk, mihelyt az idő vegyes szám, mert az eredeti egyszerűbb alakképlet segélyével számolt kezdet-tőkét — az előbbi okoskodásból kifolyólag — kelletténél nagyobbnek találunk. Így ha az iméut kiszámolt feladványt megfordítjuk és kérdezzük: hány frt tőke fog $2\frac{1}{2}$ év alatt egész éves kamatesatolás esetén 5% mellett 11,300·62 frtra nőni, ugy az eredeti alapegyenletből folyó $T_0 = \frac{T_n}{k^n}$ képlet 10.002·97 frtot, vagyis kelletténél 2·97 frttal többet ad, holott a transformált formulából következő $T_n = T_0 : k^m [1 + (k-1)x]$ pontosan megadja a 10,000 frtot. — Alig szükséges talán megjegyezni, hogy a folytonos tőkésítés alapegyenletéből származott $T_0 = \frac{T_n}{e^{nq}}$ egyenlet az eredeti tőkét is teljes pontossággal fogja szolgáltatni.

Még sokkal nehézkesebb — igazán toldott-foldott munka — időszakos kamatesatolás esetén az idő kiszámolása, mihelyt ez az eredeti formulából nem egész számnak adódik ki. Az előbbi fejtegetések alapján könnyű belátni, hogy az idő számára az eredeti formula segélyével nyert érték kelletténél nagyobb lenne. az átalakított képlet pedig a benne előforduló két ismeretlen (m és x) meghatározására egy magában nem használható. Ez okból az idő kiszámolását a következő hosszadalmas úton szokás végezni: ki-keressük annak értékét az eredeti $T_n = T_0 k^n$ alapegyenletből folyó: $n = \frac{\log T_n - \log T_0}{\log k}$ képlet segélyével, de az n számára nyert $m+x$ vegyes számból csak az m egészet tartjuk meg, a megbizhatlan x törtrészt pedig figyelmen kívül hagyjuk; a hiányzó törtrész helyes értékének kiszámolására keressük most, hogy mennyire nő fel az eredeti tőke m egész idő egység alatt a $T_m = T_0 k^m$ képlet segélyével s ezt T_n adott értékéből kivonva a nyert $T_n - T_m$ különbséget T_m pénzegységnyi tőke egyszerű kamatjának tekintjük s az ennek megfelelő időt az egyszerű kamatszámolás $x' = \frac{100 (T_n - T_m)}{p T_m}$ képlete segélyével határozzuk meg. Így például a legutóbbi feladványpárra reflektálva keressük, hogy hány év alatt fog 10,000 frt tőke 5% mellett egész éves kamatesatolás esetén 11,300·62 frtra felszaporodni? Az eredeti alapegyenletből folyó képlet az ismeretlen n számára 2·506 évet ad; elhagyva itt a megbizhatlan törtrészt, keressük ki 10,000 frt tőkének 2 egész év alatt felnőtt értékét, mit 11,025 frtnak fogunk, találni; vonjuk ezt

ki az adott 11,300.62 frtból, hogy különbségül 275.62 frtot találjunk, mit 11,025 frt tőke egyszerű kamatjának véve az idő hiányzó törtrésze $x = \frac{100 \times 275.62}{5 \times 11,025} = \frac{27,562}{55,125} = 0.5$ év, tehát az összes idő 2.5, és nem 2.506 év, mint az eredeti formulából első ízben hibásan találtuk. E két érték különbsége 0.006 év vagyis valamivel több 2 napnál, a mi gyakorlati szempontból a $2\frac{1}{2}$ évvel szemben elég csekély idő ugyan, de mégis teljesen elég arra, hogy az időszakos kamatos-kamatszámolás eredeti alapegyenletének matematikai pontosságán és megbízhatóságán jókora rést üssön. — Visszapillantva még a *kritikus időnél* előbb végzett maximum számolásra, záradékol kimondhatjuk még, hogy az eredeti alapformulából n számára nyert hibás érték akkor szorul legjobban a javításra, ha az idő számára az első számítással nyert érték törtrésze $\frac{1}{2}$ vagy ehhez közel eső szám s ez esetben az idő számára talált hibás és helyes érték különbsége a perccel lassan, de folytonosan nő így 100% esetén 31.4 napra rúg. — Alig szükséges különösen hangsúlyozni, hogy a folytonos tőkésítésnek $T_n = T_0 e^{nq}$ alapegyenletéből fojyó $n = \frac{\log T_n - \log T_0}{q \log e}$ képletet minden akadály nélkül, a legnagyobb könnyűséggel alkalmazhatjuk az idő teljesen pontos meghatározására.

Utoljára hagytuk az időszakos kamatszámolás *percentjének* kikeresését azon esetben, ha az idő vegyes szám, mert ez a számolás valamennyi között a legfárasztóbb, sőt — ha *pontos* értéket akarunk nyerni — a legtöbb esetben *algebrai úton végre sem hajtható*. Ennek kimutatására kísértsük meg kikeresni az átalakított $T_n = T_0 k^m [1 + (k-1)x]$ képletből a percentet magában foglaló k kamattényezőt. Elvégezve a beszorzásokat és T_0 -ot a baloldalra osztónak átvive, nyerjük a

$$\frac{T_n}{T_0} = (1-x) k^m + x k^{m+1}$$

egyenletet, mely azonban az ismeretlen k számára $(m+1)$ -ed fokú vegyes egyenlet, melyből k pontos értékét algebrai úton csakis akkor tudjuk meghatározni, ha m legfőlebb 3 időegység, midőn a nyert negyedfokú vegyes egyenlet még algebrai úton megoldható. Amint azonban az időt jelző vegyes számban az egész rész 3 időegységnél nagyobb, a fenti egyenlet negyedfokánál magasabb lesz. s így ennek algebrai úton való megoldása — mint *Abel* bebizonyította — lehetetlen. Nincs tehát más segítség, mint a fáradtságos közelítő módszerek — a regula falsi, a Newton-féle stb. — által keresni a legtöbb esetben k értékét, ha ebből a percentet pontosan

akarjuk kapni. Mert az eredeti $T_n = T_0 \cdot k^n$ alapegyenletből folyó $\log k = \frac{\log T_n - \log T_0}{n}$ formula k , és így p számára is hibás, és pedig a kelleténél nagyobb értéket ad, mint erről meggyőződhetünk, ha az előbb már 3 ízben kiszámolt feladatot a következőleg formulázzuk: hány percent mellett fog 10,000 frt tőke $2\frac{1}{2}$ év alatt egész éves kamatcsatolás esetén 11,300.62 frtra felszaporodni — és e feladványt a legutóbbi formula segítségével megoldjuk. Az eredmény 5.012% , mely érték a pontos 5% -tól kevéssé differál ugyan, de mégis a matematikai pontosságnak hijával van és nagyobb pénzüsszegeknél, hosszabb idő alatt tetemes kauatdiffenciákat okozhat. Az előbbieik alapján minden további bizonyítgatás nélkül világos, hogy az eltérés a hibásan talált és az igazi percent között magával a percenttel nő, mint ezt a következő egyszerű példa mutatja: hány percent mellett nő 100 frt tőke $5\frac{1}{2}$ év alatt egész éves kamat csatolás esetén 48,000 frtra? Az eredeti alapegyenletből folyó $\log k = \frac{\log T_n - \log T_0}{n}$ formula k számára $2.021,53$ értéket ad, miből $p = 102.153\%$ következik. Hogy azonban ezen érték hibás, igen egyszerűen konstatálhatjuk itt abból, hogy az adott tőke 5 év alatt 100% vagyis $k = 2$ esetben felnövekszik $1000 \times 2^5 = 1000 \times 32 = 32,000$ frtra, melynek még a további félévre eső egyszerű kamatja 16,000 frt, és így a tőke felszaporodott értéke 48,000 frt; vagyis a percent nem 102.153% , hanem csak 100% , tehát a talált hibás értéknél 2.153% -kal kevesebb. — Záradékul itt is röviden fölemlítjük még, hogy a *kvitikus idő* a percent számításakor is ép úgy érezteti a maga befolyását, mint az előbbi esetekben, s hogy folytonos tőkésítésnél az összes nehézségek elesnek, vagyis az eredeti alapegyenletből eredő $p = \frac{100 (\log T_n - \log T_0)}{n \log e}$ formula mindig teljes pontosan szolgáltatja a percent értékét.

Összefoglalva e szakaszban tárgyalt dolgokat, kimondhatjuk, hogy az időszakos kamatos-kamatszámításnak közönségesen használt eredeti, egyszerű formulái igen sokszor alaposan kompromittálják az algebrai képletek általános érvényességét, az átalakított formulák pedig idő és percent keresésekor csak ügygyel-bajjal, néha hosszas vesződség árán adhatnak oly pontos értékeket, minőket a folytonos tőkésítés egyszerű formulái minden esetben a legnagyobb könnyűséggel szolgáltatnak.

IV.

De még ezzel sem végeztünk a most divó kamatos-kamat-számolás mizériáival! Az imént részletesen kifejtett hiányok legfőlebb a matematikust boszantják, de a gyakorlati életre kihatással nem igen vannak. Van azonban az időszakos kamatesatolási módnak még egy más abnormis furcasága is, mely már a szó szoros értelmében a praktikus embernek is a zsebébe vág, s ez ama viszässág, hogy *manapság valamely pénzüntézetben elhelyezett két, egyenlő nagy tőke ugyanazon idő és százalék mellett is különböző nagy kamatot hajthat, a mennyiben a kamat nagyságára nemcsak a kamatozási időtartamnak, hanem azon körülménynek is befolyása van, hogy a polgári év mely szakában történt a tőke betevése és kivevése.*

Nézzük először a dolgot oly rövid kamatozási időtartam mellett, hogy a tőke betevésének és kivevésének időpontjai közé csak egy kamatesatolási nap essék s kezdjük a tárgyalást a következő egyszerű speciális esettel: tegyük be 120,000 frtot egy közönséges (nem szökő) év ápril 1-én s vegyük ki ugyanezen év szeptember 29-én; kérdés, hogy 6% mellett féléves kamatesatolás esetén mennyi kamatot kapunk? Ha a pénzüntézetek módjára a betevés és kivevés napjaira kamatot nem számítunk, úgy a tőke összesen $29+31+30+31+31+28=180$ napig kamatozott, mely időre az egyszerű kamat (az évet bevett szokás szerint 360 naposnak véve) 3600 frt lenne. Ugy de a betevés és kivevés időpontjai közé esik a kamatesatolási napok egyike (július 1), és így a kamat két részből fog állani, az első részlet július 1-ig vagyis 90 napra 1800 frt, a második részlet pedig a hátralevő 90 napra $120,000+1,800=121,800$ frt után 1827 frt, tehát az összes kamat 3627 frt, mi 27 frttal több, mint egyszerű kamatszámolással volna. Nézzük most: mint változnak meg a viszonyok, ha a fenti tőkét május 31-ikén tesszük be és november 28-án vesszük ki? A kamatozási időtartam $30+31+31+30+31+27=180$ nap, vagyis ép annyi, mint előbb volt; már most az eredeti tőke első részlet-kamatja június 30 napjára 600 frt, s az ezzel 120,600 frttá felnöött tőkéé pedig a hátralevő 150 napra 3015 frt, tehát az összes kamat 3615 frt, mi az előbbi 3627 frttal szemben 12 frt csökkenést mutat. Ép így lenne a dolog, ha a betevés január 31-én és a kivevés július 31-én történnék, midőn a tőke ismét $28+31+30+31+30+30=180$ napig kamatoznék és pedig az eredeti tőke első kamatrészlete július 1-ig vagyis 150 napra 3000 frt, s az ezzel 123,000 frttá felnöött tőke második kamatrészlete a hátralevő 30

napra 615 frt vagyis az összes kamat ismét 3615 frt. mi az elsővel szemben újból az előbbi 12 frt kamatesökkenést adja.

Ez egyszerű példa két dolgot enged velünk sejtetni; az egyik az, hogy állandó kamatozási időtartam mellett ugyanazon tőke, percent, idő és kamatesatolási mód esetén akkor lesz legmagasabb a kamat, ha a kamatesatolási nap a betevés és kivevés közt elmuló idő közepére esik: a másik — most még ingatag alapon álló — következtetés pedig az, hogy a kamat végösszege nem változik meg, ha a kamatesatolási nap előtt és után elmuló időket egymással föleseréljük.

Mindkét sejtelmet az algebrai tárgyalás van hivatva a teljes bizonyosság fokára emelni; ezt pedig pusztán elemi mennyiség-tani ismeretek felhasználásával a következő egyszerű módon végezhetjük:

Tegyük be T pénzegységnyi tőkét valamely pénzintézetbe, mely ott összesen i ideig (az év részeiben kifejezve) kamatozik $p\%$ mellett. Legyen a betét napjától számítva x idő múlva (szintén az év részeiben kifejezve) a kamatesatolási nap (január 1 vagy július 1); úgy a tőke első részletkamatja a kamatesatolási napig $\frac{Tpx}{100} = Tqx$, mit a tőkéhez adva: $T + Tqx = T(1+qx)$ lesz a kamatesatolási napig felszaporodott tőke, melynek a még hátralevő $i-x$ időre eső kamatja $\frac{T(1+qx)p(i-x)}{100} = T(1+qx)q(i-x)$. s így az összes kamat:

$$Tqx + Tq(1+qx)(i-x) = Tq[x + (1+qx)(i-x)].$$

Mivel pedig itt Tq állandó, azért e függvény maximuma vagy minimuma csak is a zárójelbe foglalt tényezőtől függ. Ez pedig a szorzások és összevonások fokozatos végrehajtása után ily alakot ölt:

$$x + i + iqx - x - qx^2 = -qx^2 + iqx + i,$$

mely másodfokú függvénynek maximuma van, mert x^2 oefficiense negatív; e maximum pedig akkor áll elő, midőn

$$x = \frac{-iq}{-2q} = \frac{i}{2},$$

mi által az előbbi gyanítások elseje a teljes bizonyosság fokára emelkedett.

A mi másodikat illeti, írjunk az előbbi $-qx^2 + iqx + i$ másodfokú függvényben x helyett $(i-x)$ -et, lesz:

$$\begin{aligned} -q(i-x)^2 + iq(i-x) + i &= -q(i^2 - 2ix + x^2) + i^2q - iqx + i \\ &= -qi^2 + 2iqx - qx^2 + qi^2 - iqx + i = -qx^2 + iqx + i, \end{aligned}$$

mi által — mint láthatjuk — a függvény értéke nem változott, s így az előbbi példából levont második következtetésünket is feltétlenül biztosnak mondhatjuk.

Lényegében azonos marad a dolog akkor is, ha *hosszabb* kamatozási időtartam esetén a betevés és kivevés időpontjai közé nem egy, hanem több — mondjuk n — kamatesatolási nap esik.

Ismét jelöljük x -szel a kamatozási időtartam kezdetétől az *első* tőkésítési napig lefolyt időt, továbbá ennek és az *utolsó* kamatcsatolási naptól a kamatozási időtartam végeig elmúlt időnek összegét i vel, úgy hogy az utolsó tőkésítési nap és a kamatozási időtartam vége közé eső idő $i-x$ legyen. Már most az első kamatcsatolási napig a tőke *egyszerű* kamatot hoz s ezzel felnő $T(1+qx)$ értékre, mint ezt már előbb is találtuk; ennek a további n időegységen át *kamatos-kamattal* felszaporodott értéke: $Tk^n(1+qx)$ lesz, melynek ismét egyszerű kamatja a még hátralevő $i-x$ időre: $Tk^n(1+qx)q(i-x)$ s eként a véglegesen felnőtt érték:

$$Tk^n(1+qx) + Tk^n(1+qx)q(i-x) = Tk^n[1+qx+q(1+qx)(i-x)]$$

Mivel pedig itt Tk^n állandó, azért az egész függvény maximuma vagy minimuma felett megint csak a szögletes zárójelben levő tényező dönt. Ez pedig a szorzások és összevonások successiv végrehajtásával a következő alakokat ölti:

$$\begin{aligned} 1+qx+(q+q^2x)(i-x) &= 1+qx+qi+q^2ix - qx - q^2x^2 \\ &= -q^2x^2+q^2ix+qi+1, \end{aligned}$$

mely másodfoku függvénynek $-x^2$ negatív előjelének tanúsága szerint — ismét maximuma van, mely akkor áll elő, midőn

$$x = \frac{-iq^2}{-2q^2} = \frac{i}{2},$$

vagyis megint azon esetben, ha a kamatos-kamatszámolás kérésére be nem illeszthető i időből ép annyi mulik el a számolás kezdőpontjától az első kamatesatolási napig, mint a mennyi eltelik az utolsó tőkésítési időponttól az egész kamatozási időtartam végeig.

Ha még a legutóbbi $-q^2x^2+q^2ix+qi+1$ függvénybe x helyett $(i-x)$ -et írunk, nyerjük:

$$\begin{aligned} &-q^2(i-x)^2 + q^2i(i-x) + qi + 1 \\ &= -q^2(i^2 - 2ix + x^2) + q^2i^2 - q^2ix + qi + 1 \\ &= -q^2i^2 + 2q^2ix - q^2x^2 + q^2i^2 - q^2ix + qi + 1 \\ &= -q^2x^2 + q^2ix + qi + 1, \end{aligned}$$

tehát a függvény értéke ép úgy nem változott, mint midőn ugyan-ezen helyettesítést az előbbi analog, egyszerűbb függvényben végeztük.

S ezek alapján bátran kimondhatjuk, hogy *mindazon kamatszámolási feladványok, melyekben a kamatesatolási mód megjeölésén kívül csak a tőke, percent és a kamatozási időtartam van adva, de a kamatozás kezdetének naptári dátuma nincs megjelölve, hiányosan vannak fogalmazva és így szabatos megoldásra nem is tarthatnak igényt.* Ilyen például a következő is; 10,000 frt tőke évi 6% mellett fél-

éves kamatesatolás esetén 3 félév alatt mennyire nő fel kamatos-kamattal? Ha mind a 3 félévre kamatos-kamatot keresünk, eredményül 10,927·27 frtot kapunk. mi azonban csak akkor helyes, ha hallgatagon feltételezzük, hogy a tőke elhelyezése a kamatesatolási napok (január 1 vagy július 1) egyikén történt. De már hibásnak kell nyilvánítanunk az eredményt, mihelyt a betevés ideje az év bármely más napjára, pl. február 1-ére esik, midőn a számolás eként alakul: az eredeti 10,000 frt tőke *egyszerű* kamatja február 1-től július 1-ig vagyis 5 hóra 250 frt, a melylyel 10,250 frttá felnőtt tőke 2 félévig, vagyis a következő év jul. 1-ig kamatos-kamatot hoz s ezzel 10,874·23 frttá szaporodik; végül ennek a még hátralevő (július hóra eső) 1 havi egyszerű kamatja 54·37 frt. s így a végleg felnőtt tőke 10,928·60 frt, mi az előbbivel szemben 1·33 frt többletet ad; e többlet fokozatosan mindaddig nő, míg a betét napját ápr. 1-re (vagy okt. 1-re) nem tesszük, mint erről az alábbi kis táblázat beszámol, melynek értékei mindarról számokban adnak felvilágosítást, miket az előbb algebrai uton megvizsgáltunk.

| A betevés folyó évi | A kivevés követk. évi | 10,000 frt tőke fel- nőtt értéke 6%-tel, fél éves kamatesato- lás mellett | Többlet az elsővel szemben |
|------------------------|--------------------------|--|----------------------------------|
| n a p j a | | | |
| jan. 1. | jul. 1. | 10,927·27 | 0·00 |
| febr. 1. | aug. 1. | 10,928·60 | 1·33 |
| márc. 1. | szept. 1. | 10,929·39 | 2·12 |
| ápr. 1. | okt. 1. | 10,929·66 | 2·39 |
| máj. 1. | nov. 1. | 10,929·39 | 2·12 |
| jun. 1. | dec. 1. | 10,928·60 | 1·33 |

Annak okát, hogy miért nagyobb a tőke felnőtt értéke az utolsó 5 esetben, mint az elsőnél, megtaláljuk ama körülményben, hogy míg az elsőnél a betevés és kivevés időpontjai közé csak 2, addig a többinél 3 kamatesatolási nap esett.

Még csak azt tartozunk indokolni, hogy miért szövegeztük az előbbieken adott számolási feladványokat mi is oly pongyolán, mint az általános szokás: a tőke elhelyezési idejének elhallgatásával? Tettük ezt egyszerűen azért, mert nem akartunk a hagyományos rövid — de inkorrekt — szövegezéssel mindaddig szakítani, míg ennek okát a fentebbieken nem adtuk. Előbbi feladványaink tehát mind úgy értelmezendők, hogy a tőke elhelyezése mindig a kamatesatolási napok egyikén történt.

Már most kérdezzük: *igazságos*- és mindenek felett *logikus*-e, hogy a kamat nagysága ne csak a kamatozási időtartamtól, hanem ama puszta *véletlentől* is függjön, hogy az év mely szakában történik a tőke elhelyezése és kivevése? Indokolt dolog-e, hogy az kapjon aránylag legtöbb kamatot, ki a kamatesatolási nap után ép annyi nappal vette ki tőkét, mint ahány nappal azt a kamatesatolási nap előtt elhelyezte? Lehetetlen, hogy e kérdésekre minden gondolkozó fő határozott *nem* mel ne feleljen és ez illogikus dolog megszüntetését kívánatosnak ne mondja. *A baj orvoslására pedig csak egyetlen-egy mód van: úgy az egyszerű, mint az időszakos kamatos-kamatszámolás teljes eltörlése s mind kettő helyett a folytonos tőkésítéssel való kamatos-kamatszámolás életbe léptetése még a legrövidebb időre szóló kölcsönöknél is.*

És e radikális reformtól nincs miért idegenkedni! A kamatos-kamatszámolás ugyanis egyáltalában vagy jogosult, vagy nem; ha nem, úgy el kell azt törölni végkép és helyette még a leghosszabb lejáratú kölcsönöknél is az egyszerű kamatszámolást kell életbe léptetni; ha pedig megvan a kamatos-kamatszámolásnak a maga létjogosultsága, úgy a lényegének egyedül megfelelő folytonos tőkésítéssel kell azt alkalmazni, az egyszerű kamatszámolás teljes mellőzésével. Tisztán *mathematikai szempontból* mindkét szélsőség egyaránt elfogadható, mert mindkét eljárás egyaránt egyszerű és logikus, sem egyiknek, sem másiknak eredeti, egyszerű egyenletei semmi körülmények közt nem vezetnek helytelen vagy pláne absurd értékekhez. A matematikusnak csak az ellen kell tiltakozó szavát fölemelnie, hogy — a manapság divó módon — ugyanazon tőke után részben egyszerű, részben kamatos-kamat ne számíttassék, mert e két heterogén elemnek szerencsétlen egyesítése teremti azon anomáliákat, melyek tárgyalásával az imént foglalkoztunk. Mivel azonban *gyakorlati szempontból* véve a dolgot, a hitelműveletek mai fejlettségi fokán alig lehetséges a kamatos-kamatszámolás kiküszöbölése, azért a bajok alapos orvoslása csakis a másik módon történhetik: az egyszerű kamatszámolás egyeduralmának felállítása által.

V.

Térjünk át most annak megbeszélésére: vannak-e és miféle előnyei a folytonos kamatesatolásnak a most divó időszakos felett a komplikáltabb hitelműveleteknél: az időszakos betétek, járadékok és amortizációs kölcsönök számításánál?

Ami első sorban az állandó időszakos betéteket illeti, ezek felszaporodott értékének kiszámítására ugy az algebrai tankönyvek, mint nagyobb hitelügyi munkák is egy-egy geometriai haladvány összege gyanánt a következő két képletet adják.

$$S_u = A \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ és } S_e = A k \frac{k^n - 1}{k - 1},$$

melyek elseje akkor használandó a betétek felnőtt értékének (S -nek) kiszámítására, ha n időegységen át minden időegység *végén* teszünk A pénzegységet valamely pénzintézetbe; a második pedig akkor nyer alkalmazást, ha a betétek minden időegység *elején* történnek. — Az időszakos kamatesatolás eme képleteiből a folytonos tőkésítés megfelelő képleteit egyszerűen az által nyerjük, ha azokba a k kamattényező helyett a folytonos tőkésítésnek e^q tényezőjét írjuk, mi által nyerjük e két analog formulát:

$$S_u = A \frac{e^{qn} - 1}{e^q - 1} \text{ az utólagos betéteknél és}$$

$$S_e = A e^q \frac{e^{qn} - 1}{e^q - 1} \text{ az előlegeseknél.}$$

E két képlet az előbbieknél komplikáltabb, a velök való számolás — főként a nevező konstrukciója miatt — nehezkesebb, úgy hogy — legalább az első tekintetre — a folytonos tőkésítés itt hátrányban látszik lenni az időszakos felett. E hátrány azonban csak látszólagos. Az időszakos kamatesatolásnak fent közölt formulái ugyanis csak addig használhatók a kitűzött feladat pontos megoldására, míg a befizetések időpontjai a kamatesatolási napokkal összeesnek (pl. egész éves — jan. 1-én történő — betéteknél és egész éves kamatesatolásnál vagy fél éves — jan. 1-én és jul. 1-én való — befizetések esetén, ha a tőkésítés is fél évenként történik), de azonnal elvesztik érvényességüket, mihelyt a jelzett két időpont nem vág össze (pl. egész éves betéteknél fél éves kamatesatolás mellett, vagy fordítva fél éves befizetések és egész éves tőkésítés esetén). Pedig manapság különösen ez utóbbi esettel analog befizetések igen sokszor szerepelnek; így igen gyakran fordulnak elő életbiztosításoknál fél éves kamatesatolás mellett negyed éves vagy havonként való befizetések, sőt betegsegélyző

egyesületeknél, a népbankok törzsbetéteinél és hitelszövetkezeteknél féléves tőkésítés mellett heti befizetéseket is találunk.

Nézzük tehát: mily átalakításoknak kell az időszakos tőkésítés fent közölt egyszerű formuláit alávetnünk, hogy azok a praktikus életben előforduló összes esetek kiszámolására alkalmasak legyenek. Mint az előbbiekből látható, két főesetet kell itt megkülönböztetnünk, u. m. *először*, ha a befizetési időközök *nagyobbak* a tőkésítéseiknél, és *másodszor*, ha a betétek időközei *kisebbek*, mint a kamatesatolásiak.

Az *első főeset* általánosított formuláját *előzetes* betétekre vonatkozólag a következően vezethetjük le: legyenek, a befizetési időközök minden egyes A pénzegységet tevő betétre nézve r -szer nagyobbak a kamatesatolási időközöknél és keressük ez állandó időszakos betéteknek n időegység (kamatesatolási időköz) alatt felszaporodott értékét, midőn összesen $\frac{n}{r}$ -szer helyezünk el betéteket. Mivel minden egyes időegységben r szer történik kamatesatolás, azért a legutoljára betett A pénzegység felnőtt értéke Ak^r , az utolsó előtti betété $Ak^r k^r = Ak^{2r}$ lesz és így tovább, míg a legelőször befizetett A pénzegység $A(k^r)^{n:r} = Ak^n$ összegre szaporodik fel. Tehát az összes felnőtt érték:

$$S_e = Ak^r + Ak^{2r} + \dots + Ak^n = A[k^r + (k^r)^2 + \dots + (k^r)^{n:r}]$$

Itt azonban a zárójelben oly mértani haladvány áll, melynek, úgy első tagja, mint hányadosa k^r és tagjainak száma $\frac{n}{r}$ s eként összege:

$$S_e = Ak^r \frac{k^n - 1}{k^r - 1},$$

mi az eredeti — nem általános — formulától csak abban különbözik, hogy itt úgy A szorzójaként, mint a nevezőben k helyett k^r szerepel. E formula $r=1$ esetén az eredeti, egyszerűbb képletbe megy át, mi a levezetés helyességét mutatja.

E képletből könnyen levezethetjük az *első főesetre* nézve az *utólagos* betétek általánosított formuláját, ha a legutóbb nyert képletben n helyett $(n-r)$ -et írunk s ha az így nyert értékhez még A -t (mint legutolsó, *nem* kamatozó betétet) hozzáadjuk. Lesz tehát

$$S_u = Ak^r \frac{k^{n-r} - 1}{k^r - 1} + A = \frac{Ak^{r+n-r} - Ak^r + Ak^r - A}{k^r - 1} = A \frac{k^n - 1}{k^r - 1},$$

mely általános képlet az eredeti, szűk körre szorítottól csakis a nevezőben különbözik, a mennyiben itt k^r fordul elő az eredeti formula k -ja helyett*).

) E legutolsó formulával némileg egyező található C. Spitz *Allgemeine Arithmetik* című munkájában (2-ik kiadás, I. kötet, 208. §); az eltérés az imént

Térjünk át most a *második* főesetben az *előzetes* betétek kép-
letének tágitására! Legyenek a befizetési időközök m -szer kisebbek
a tőkésítési időközöknél; ekkor minden egyes időegységben m -szer
befizetett A pénzegység, tehát összesen mA pénzegység az illető idő-
egység végeig csak egyszerű kamatot hajt, s csak a hátra levő
időegységeken át hoz kamatos kamatot.

A legutoljára befizetett A betét csak az időegység $\frac{1}{m}$ -ed részén
át hoz egyszerű kamatot, és így felszaporodott értéke $A + \frac{Aq}{m}$ lesz;
az utolsó előtti betét már az idő egység $\frac{2}{m}$ -ed részén át kamatoz-
ván, egyszerű kamatjával $A + \frac{2Aq}{m}$ értékre növekszik és így to-
vább; végül az időegység elején betett A pénzegység az egész
időegységben kamatozik, tehát felnő $A + Aq = A + \frac{m A q}{m}$ értékre.
E szerint az időegységben m -szer befizetett A pénzegység felsza-
porodott értéke:

$A + \frac{Aq}{m} + A + \frac{2Aq}{m} + \dots + A + \frac{mAq}{m} = mA + \frac{Aq}{m}(1+2+\dots+m)$;
s ha itt a zárójelben levő arithmetikai haladvány összegét kike-
ressük, lesz a legutolsó időegységben befizetett $m A$ pénzegység
felszaporodott értéke:

$$mA + \frac{Aq}{m}(1+m)\frac{m}{2} = mA + \frac{Aq(1+m)}{2},$$

lehozott az ott közölt formula között *külsőleg* csak abban áll, hogy Spitz a ka-
mattényezőt nem k -val, hanem a régi, nehézkes módon $10 p$ -vel, a betétet pe-
dig A helyett r -rel jelöli s viszont a mi formulánkban szereplő r hatványkitevő
helyett m -et használ. E külső, lényegtelen különbségeken kívül van azonban
lényeges eltérés a két levezetés alapföltételeiben s ebből kifolyólag a formula al-
kalmazásában is. Míg ugyanis mi azt tételeztük fel, hogy a befizetési időközök
 r -szer nagyobbak legyenek a kamatesatolásiaknál, addig Spitz alapföltétele az,
hogy n éven át minden m -edik év végén történjenek a befizetések. („ n
Jahre lang, jedesmal am Ende von m Jahren“) E két föltétel pedig, bár
látszólag nagyon hasonló, de még sem azonos. Szerintünk ugyanis r -nek ok-
vetlenül egész számnak kell lenni, míg Spitz szerint megeshetik az, hogy n nem
osztható maradék nélkül m -mel. Ez esetre a megoldás a Spitz-féle alapföltételnek
megfelelően könnyű szerrel aként történik, hogy $\frac{n}{m}$ hányados egész részére a
fenti formula szerint S értékét kiszámolván a hátra levő tört részre a már talált
 S felszaporodott értékét keressük a kamatos-kamatszámolás alapképlete szerint.
Míg ellenben, ha a mi értelmezésünk szerint r nem egész szám, akkor — mint
később behatóbban kifejtjük — mi csak egy egészen új, a mostaninál sokkal
komplikáltabb formulával tudnánk célt érni. Hogy ennek dacára is megtartjuk a
mi felfogásunkat, tesszük ezt egyrészt, azért, hogy a mindjárt tárgyalandó máso-
dik főesettel azonos jelöléseket használjunk, s másrészt azon okból is, mert amaz
esetnek, midőn r nem egész szám, semmi gyakorlati jelentősége sincsen.

s ha még ide q helyett $k-1$ értéket írunk és fokozatosan transformálunk:

$$m A + \frac{A (k-1) (1+m)}{2} = A \frac{2m+k-1+m k-m}{2} = A \frac{m+k-1+m k}{2} \\ = A \frac{k(m+1) + (m-1)}{2}$$

Már most ha a befizetések n időegységen át folynak, úgy a legutolsó időegységben befizetett betétek csak egyszerű kamatot hajtanak, a legelső időegységben befizettek pedig $n-1$ időegységen át kamatos-kamatot is hoznak ép úgy, mint ha n időegységen át minden időegység *végén* tennénk be ugyanannyi tőkét. De ez esetre az időszakos betétek eredeti formulája:

$$S_n = A \frac{k^n - 1}{k - 1},$$

s ha ide A helyett az imént talált értéket írjuk, lesz az általánosított képlet *előzetes* betétekre:

$$S_e = A \frac{k(m+1) + (m-1)}{2} \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

mely $m=1$ esetben az előzetes betétek $S_e = A k \frac{k^n - 1}{k - 1}$ eredeti képletébe megy át, mi a lehozás helyességét igazolja.

A mi már most a *második főesetben* az *utólagos* betétek általánosított formuláját illeti, ennek lehozása a megelőzőhöz hasonlóan következőképen történik:

Az utolsó időegységben legutoljára betett A pénzegység kamatot nem hoz; az ez előtt befizetett A betét az időegység $\frac{1}{m}$ -ed részén át hajt egyszerű kamatot s ezzel $A + \frac{A q}{m}$ értékre nő; a még ezt megelőző betét $\frac{2}{m}$ ed időegységen át $A + \frac{2 A q}{m}$ értékre szaporodik és így tovább; végül az első időtörtrész *végén* betett A pénzegység $\frac{m-1}{m}$ -ed időegység alatt $A + A q \frac{m-1}{m}$ értéket ér el. Tehát az utolsó időegységben m -szer betett A pénzegység felnőtt értéke:

$$A + A + \frac{A q}{m} + A + \frac{2 A q}{m} + \dots + A + \frac{(m-1) A q}{m} \\ = m A + \frac{A q}{m} [1+2+\dots+(m-1)];$$

s itt ismét a szögletes zárójelben arithmetikai haladvány van, melynek összegét helyettesítve:

$$m A + \frac{A q}{m} (1+m-1) \frac{m-1}{2} = m A + A q \frac{m-1}{2};$$

s ha még ide $q=k-1$ értéket írjuk, lesz fokozatos transformálás után

$$m A + A \frac{(k-1)(m-1)}{2} = A \frac{2m+mk-m-k+1}{2} = A \frac{m+mk-k+1}{2} \\ = A \frac{k(m-1) + (m+1)}{2},$$

mint a legutolsó időegységben betett mA pénzegységnek egyszerű kamattal felnőtt értéke.

Helyettesítve az utólagos betétek eredeti formulájába A helyett imént talált értékét, lesz az általánosított formula *utólagos* betétekre:

$$S_u = A \frac{k(m-1) + (m+1)}{2} \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1},$$

mely $m = 1$ esetben ismét átmegy az eredeti alakba a levezetés helyességének igazolásaul. *)

Ha most, az időszakos tőkésítésnek az időszakos betétekre vonatkozó 4 általánosított formuláját a folytonos kamatesatolás ide vágó eredeti formulájával összehasonlítjuk, az első tekintetre láthatjunk, hogy az utóbbiak még a számolás technikai nehézségeit illetőleg sincsenek hátrányban az előbbiektől felett. Alig szükséges talán fölemlíteni, hogy a folytonos tőkésítés eredeti képletei semmi általánosításra nem szorulnak, hiszen itt a kamatesatolás pillanatonként történvén, a betétek időpontjai minden körülmények között összeesnek a kamatesatolási időpontokkal; ha tehát a folytonos tőkésítés képleteinek alkalmazásánál időegységül a betétek időközzeit választjuk és q értékét ennek megfelelően szabjuk meg, úgy az eredeti formulákat a legnagyobb kényelemmel használhatjuk fel *minden képzelhető eset* megoldására, mit az időszakos kamatesatolásnak imént általánosított képleteiről nem mondhatunk. Először is azért nem, mert ezek az általánosított képletek is csak addig érvényesek, míg a levezetések alaptétele szerint r , illetőleg m egész szám; ellenkező esetben ezek is felmondják a szolgálatot; így például az utolsó két képlet jól használható 4 havonként történő befizetéseknél és egész éves kamatesatolásnál, de már hasznavehetetlen lesz, ha a 4 havi befizetések fél évenként tőkésítettnek; ép így 5, 7—11 havonként tett befizetéseknél is eszerben hagynak bennünket általánosított formuláink akár egész, akár fél éves tőkésítés esetén. De másodszor azért sem mondhatjuk őket teljesen általános érvényűeknek, mert levezetésüknél hallgatagon föltételeztük, hogy az első betét befi-

*) E leguóbb lehozott két képletet — bár nagy gyakorlati jelentőségük van — sem algebrai tankönyvekben, sem nagyobb, kereskedelmi szakmunkákban nem sikerült megtalálnom. Így például a német könyvek közül *Spitz*-nek fent említett munkája — mely egyébként a kamatos-kamatszámolást igen részletesen tárgyalja — említést sem tesz e második főesetről. Ép ily hasztalan kerestem e formulákat a magyar nyelven megjelent legterjedelmesebb hitelügyi szakmunkában: Weninger *Politikai Számtan*-ában is, úgy hogy tudomásom szerint e képletek most jelennek meg először a nyilvánosság előtt.

zetési időpontja kamatesatolási napra esik; ha e lényeges föltétel nincs meg, úgy — még r , illetőleg m egész számu értékének esetén is — mint hasznavehetetleneket dobhatjuk félre ezeket is az eredeti formulákkal együtt, melyek levezetésénél is, hallgatagon bár, de ott lappang ez a conditio, sine qua non. Igaz ugyan, hogy az algebra elég hatalmas fegyverekkel rendelkezik arra, hogy még az ilyféle szövevényes esetek nehézségeit is legyőzve *teljes általánosságu* formulákat szolgáltatasson, de ezek aztán ugyancsak komplikáltak lennének az időszakos tőkésítés eredeti, egyszerű képleteivel szemben. Nem akarunk e helyen ezeknek hosszadalmas és fárasztó levezetésével foglalkozni, már csak azért sem, mert ezeknek *gyakorlati* hasznuk absolute nincsen, a mennyiben az időszakos betétekkel kapcsolatos hitelműveleti számolásoknál csak is oly esetek fordulnak elő, melyek megoldására a mi *részben* általánosított formuláink teljesen elégségesek. E helyett inkább bemutatjuk az ezek segélyével végzett néhány számolás eredményét párhuzamban a folytonos (pillanatonként való) tőkésítés megfelelő eredményeivel az alábbi táblázat két utolsó rovatában, melyek 1000 pénzegységnek, mint állandó időszakos betétnek felszaporodott értékét adják a tabella első rovatai által megszabott föltételek mellett:

| Főeset | % | Kamatozási időtartam | A betétek időközzei | Tőkésítési időköz | 1000 pénzegységnyi betét felnőtt értéke, ha a betevések az időszakok | |
|--------|---|----------------------|---------------------|-------------------|--|-----------|
| | | | | | elején | végén |
| | | | | | történnek. | |
| I. | 6 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{12}$ | 4313·15 | 4185·99 |
| | " | " | " | pillanat. | 4313·96 | 4186·46 |
| | 4 | 3 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 3250·29 | 3123·46 |
| | " | " | " | pillanat. | 3251·59 | 3124·09 |
| II. | 5 | 3 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 3314·13 | 3154·44 |
| | " | " | " | pillanat. | 3318·26 | 3156·43 |
| | 4 | 3 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 6430·50 | 6305·63 |
| | " | " | " | pillanat. | 6438·79 | 6311·29 |
| II. | 4 | 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 8366·86 | 8284·43 |
| | " | " | " | pillanat. | 8370·40 | 8287·11 |
| | 6 | 5 | $\frac{1}{3}$ | 1 | 17,587·73 | 17,249·51 |
| | " | " | " | pillanat. | 17,668·45 | 17,318·59 |

E táblázatra vonatkozólag szükségesnek tartom még fölem-
litni azon okot, melynél fogva az időszakos és folytonos tőkésítés
végeredményei között levő érték-differenciák aránylag kiesinyek
(a legnagyobb 80.72 pénzegység). Ezt abban kell keresnünk, hogy
a kamatozási időtartamot mindenütt kiesinyre — legfőlebb 5
évre — vettem, hogy az új formulákra vonatkozó ellenőrző szá-
molásokat könnyű szerrel végezhessem. Magától értetődik, hogy
nagyobb időtartam és betét esetén az érték-differenciák is teteme-
sebb eltéréseket mutatnának.

Ezek után az utólagos járadékkal és az amortizációs kölcsö-
nökkel könnyen végezhetünk. Az utólagos járadék jelen- vagy
készértékének és egyuttal amortizációs kölcsönöknél utólagos tör-
lesztések esetén az adósságnak kiszámolására általánosan a követ-
kező formula van jelenleg forgalomban:

$$T = \frac{A}{k^n} \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1},$$

hol T jelenti az A járadék jelen- vagy készértékét (illetőleg az
 A törlesztő összegnek, megfelelő adósságot), k és n pedig megtartják
eddig használt jelentésüket. — Ebből a folytonos tőkésítés meg-
felelő képletét megint az által nyerjük, ha ebbe k helyett, mindenütt
 e^q értéket irunk; vagyis

$$T = \frac{A}{e^q} \cdot \frac{e^{qn} - 1}{e^q - 1}$$

lesz a folytonos tőkésítésnek a jelzett cél elérésére szolgáló kép-
lete. Ez utóbbi formula (eltekintve ama főkérdéstől, hogy mennyi-
vel jobban megfelel a dolog lényegének a folytonos tőkésítés az
időszakosoknál), ismét azzal a nagy előnnyel bír az előbbi felett,
hogy míg ez utóbbi minden esetben, addig az első csak addig
használható, míg a járadék vagy a törlesztések esedékességi idő-
pontjai összeesnek a kamatesatolási időpontokkal, ellenkező eset-
ben pedig az időszakos betéteknek megfelelő átalakításra szorul.

Az előbbieket alapján könnyen lehozhatjuk az általánosított
képleteket, ha T tőke n idő alatt felnőtt értékét egyenlővé tesz-
szük a negatívnak vett A utólagos betétnek ugyanezen idő alatt
felnőtt általánosított értékeivel. Ezen egyenletekből nyerjük a
következő két képletet:

$$T = \frac{A}{k^r} \cdot \frac{k^n - 1}{k^r - 1}$$

arra az esetre, ha a járadék vagy a törlesztések esedékességi
időszakai r -szer *nagyobbak* a kamatesatolási időközöknél; és

$$T = \frac{A}{kn} \cdot \frac{k(m-1) + (m+1)}{2} \cdot \frac{kn - 1}{k - 1}$$

képletet azon esetre, midőn a járadék vagy törlesztések időszakai *m-szer kisebbek* a tőkésítési időköznel. *)

Meg kell azonban itt is jegyeznünk, hogy ezen általánosított képletek alkalmazási köre is csak *r*, illetőleg *m* egész számú értékeire terjed ki s itt is még ama további megszorítással, hogy az egész számolás kiinduló pontjának kamatesatolási napnak kell lenni ép úgy, mint az időszakos betétek analog formuláinál. A teljes általánosítás itt is igen komplikált végeredményekre vezetne, melyek lehozását nyugodt lélekkel mellőzhetjük, mert azok semmi gyakorlati jelentőséggel nem bírnak, de különben is valamennyi feleslegessé válnék, ha a folytonos tőkésítés életbe léptetésének szép ideáját meg lehetne valósítani. Ép így elhagyhatjuk a folytonos kamatesatolás alkalmazását ama különben érdekes esetekre, melyeket *Spitz* előbb már többször említett könyvének 211, 213—219. §§-aiban tárgyal, melyekben majd bizonyos számú évek múltán esedékes járadékokról, majd ismét olyanokról van szó, melyek nagysága időszakonként arithmetikai vagy geometriai haladvány tagjainak módjára nőnek vagy fogynak, majd ismét az van föltételezve, hogy adósság és visszafizetések után különböző percentek számíttatnak; mert bármily érdekesek is e problémák tisztán matematikai szempontból, gyakorlati jelentőségük alig van nekik, s részletes tárgyalásuk tullépne az ezen értekezés terjedelmére kiszabott határokat. Megelégszünk tehát ezek helyett két, rövid lejáratu kölesön törlesztési táblázatainak közlésével, melyek *elsője* amaz esetre vonatkozik, midőn a törlesztések időköze *nagyobb* a kamatesatolási időszaknál, a *második* pedig az *ellenkező* esetet mutatja be, s hozzájuk csatoljuk összehasonlítás céljából a folytonos tőkésítés megfelelő értékeit.

*) E legutóbbi két formula elsejéhez részben hasonlót találunk *Spitz* előbb már említett munkájának 212. §-ában az időszakos betéteknél már tárgyalt jelölési és értelmezési különbségnek megfelelő eltéréssel; az imént közölt második képlet nyomára, azonban ismét nem sikerült mindeddig akadnom.

a)

| 100,000 pénzegységnyi adósság 6% mellett 5 év alatt törlesztendő utólagos évi részletekben | | | | | | | |
|--|---------|------------|-----------|--------------------|---------|------------|-----------|
| f é l é v e s | | | | f o l y t o n o s | | | |
| k a m a t c s a t o l á s s a l | | | | | | | |
| annuitás 23,797.79 | | | | annuitás 23,858.37 | | | |
| Év | Kamat | Törlesztés | Adósság | Év | Kamat | Törlesztés | Adósság |
| 1 | 6090.00 | 17,707.79 | 82,292.21 | 1 | 6183.6 | 17,674.74 | 82,325.29 |
| 2 | 5011.60 | 18,786.19 | 63,506.02 | 2 | 5090.73 | 18,767.64 | 63,557.65 |
| 3 | 3867.52 | 19,930.27 | 43,575.75 | 3 | 3930.18 | 19,928.19 | 43,629.46 |
| 4 | 2653.76 | 21,144.2 | 22,431.72 | 4 | 2697.90 | 21,160.47 | 22,468.99 |
| 5 | 1366.09 | 22,431.70 | 0.02 | 5 | 1389.40 | 22,468.97 | 0.02 |

hol az utolsó év végén fennmaradt 0.02 pénzegységnyi adósság a számolási rövidítések alkalmazásából eredt hibának tudható be,

b)

| 2 év=4 félév alatt 6% mellett 1000 pénzegységnyi utólagos 2 havi részletekben törlesztendő | | | | | | | |
|---|--------|-----------|----------|---------------------------------|-------------|--------------|-----------|
| 11,262.81 pénzegységnyi adósság | | | | 11,251.49 pénzegységnyi adósság | | | |
| f é l é v e s | | | | f o l y t o n o s | | | |
| k a m a t c s a t o l á s s a l | | | | | | | |
| Félév | Kamat | Törleszt. | Adósság | Félév | Kamat | Törleszt. | Adósság |
| 1 | | | 8,570.69 | 1 | 112.08 | 886.92 | 10,364.59 |
| | | | | | 104.16 | 895.85 | 9,468.73 |
| | | | | | 95.16 | 904.84 | 8,563.89 |
| | 337.88 | 2,692.12 | | | össz 312.40 | össz 2687.60 | |
| 2 | | | 5,797.81 | 2 | 86.07 | 913.93 | 7,649.96 |
| | | | | | 76.88 | 923.12 | 6,726.84 |
| | | | | | 67.60 | 932.40 | 5,794.44 |
| | 257.12 | 2,772.88 | | | össz 230.55 | össz 2769.45 | |
| 3 | | | 2,941.74 | 3 | 58.23 | 941.77 | 4,852.67 |
| | | | | | 48.77 | 951.23 | 3,901.44 |
| | | | | | 39.21 | 960.79 | 2,940.65 |
| | 173.93 | 2,856.07 | | | össz 146.21 | össz 2853.79 | |
| 4 | | | —0.01 | 4 | 29.55 | 970.45 | 1,970.20 |
| | | | | | 19.80 | 980.20 | 990.00 |
| | | | | | 9.95 | 990.05 | —0.05 |
| | 88.25 | 2,941.72 | | | össz 59.30 | össz 2940.70 | |

E tabella az előbbinél kissé részletesebb magyarázatot kíván. Mint látható tolytonos tőkésítés esetén félévenként 3-szor történik a törlesztések levonása, míg féléves kamatesatolás esetén csak egyszer (a félév végén). E két különböző eljárást a tőkésítési mód lényegében mutatkozó eltérés teszi szükségessé; mivel ugyanis folytonos kamatesatolásnál a törlesztések időpontjai okvetlenül összesnek a tőkésítések időpontjaival, azért a törlesztő összegek rögtön levonandók a fenmaradt adósságból. Nem így az időszakos tőkésítésnél! Itt ugyanis a féléves időköz első 2 hónapja után visszafizetett 1000 pénzegység után a kamatesatolási napig hátralevő 4 óra csak egyszerű kamat számítandó, mi 20 pénzegységet tesz; a 4 óra múlva visszafizetett második 1000 pénzegységnek a hátralevő 2 óra szintén csak egyszerű kamatja veendő, mi 10 pénzegységgel egyenlő; végre a félév végén visszafizetett harmadik 1000 pénzegység kamat nélkül hozandó számításba; így tehát az egész félév alatt, 3 egyenlő részletben visszafizetett 3000 pénzegység úgy tekintendő, mint ha minden félév végén 3030 pénzegység *egyszerre* fizettnék vissza. — Mindkét számításnál az utolsó rovatban túlfizetés mutatkozik, és pedig féléves kamatesatolásnál 0.01, folytonosnál pedig 0.05 pénzegység. Hogy ez utóbbi nagyobb a megelőzőnél, ennek okát abban találjuk, hogy folytonos tőkésítésnél 12-szer kellett kamatot, számolnunk és adósság levonást végeznünk, míg az időszakosnál csak 4-szer; mivel pedig mindkét esetben korlátolt pontosságú számvetést alkalmaztunk, természetes, hogy a túlfizetés is, mint hiba, nagyobb a második, mint az első esetben.

* * *

Ezekben kívántam a kamatszámolás reformtervét főbb vonalokban kifejteni. Meg vagyok győződve, hogy e munkámnak minden figyelmes, elfogulatlan és szakavatott olvasója velem együtt szükségesnek fogja vallani ezen — reményilem helyes alapokra fektetett — reformterv megvalósítását, s a most divó, vizásságokkal telt kamatos-kamatszámolás eltörlését. Csakhogy ez — mint már a bevezető sorokban is röviden említém — még soká igen soká a „*pium desiderium*“-ok sorába fog tartozni. Hiszen a világ a matematikai reformokkal szemben még most, a XX század küszöbén is nagyon konzervatív! Gondoljunk csak el, hogy mily nehezen tudott utat törni a tízes számrendszerre fektetett modern mértékrendszer, s hogy az időszámolásnak nagynevű tudósok által annyiszor sürgetett reformja még mindig késik! A napnak órákra, per-

cekre és másodpercekre való felosztásában manapság is sajnosan nélkülözzük a többi mértékeinket domináló tízes beosztást; az évnek hónapokra s ezeknek napokra való felosztásában is sok furesaság boszantja a gondolkozó embert; így február az évnek most is a legsatnyább (rendesen 28 napos) hónapja, holott vajmi könnyen lehetne ezt is két más, 31 napos hónap rovására 30 napossá tenni; az sines semmivel sem indokolva, hogy szökő években a szökő nap épen februárba, az év *második* hónapjába essék, holott ennek — mint korrekciónak — természetszerűleg vagy az első vagy utolsó hónapnál volna a helye; de magának az utolsó 4 hónapnak elnevezése is anachronizmus: az év 9-ik hónapját *szeptembernek*, hívjuk, mi 7-ik hónapot jelent; október vagyis 8-ik hó néven ismerjük, a 10-iket; égyigy kettővel kevesebbet jelző latin elnevezéseket, használunk az év két utolsó havának megjelölésére is. — És bár e vizátságok általánosan ismeretesek, azok megszüntetése mégsem mondható általános óhajtnak. A világ manapság is oly közönyösen, sőt idegenkedve fogadná az imént érintett kisebbszerű naptár-reformokat, mint Julius Caesar vagy XIII. Gergely pápa korában a radikális naptár-javításokat.

Hát még mily mozgalmat — valóságos forradalmat — okozna az, ha a pénzintézetek közmegállapodással a folytonos tőkésítéssel való kamatszámolást akarnák életbe léptetni! A laikus publikum bizonyára zsebbeli érdekeit látná veszélyeztetve e reform által, pedig még akkor is ok nélkül, ha a kamatlábnak a II. szakaszban említett leszállítása elmaradna. Mert a mennyivel több kamatot szednének a pénzintézetek a reform életbe léptetése után adósaiktól, azon arányban fizetnének ők is többet a náluk elhelyezett betétek után, s így a közönség ép oly alaptalanul zúgolódnék a vélt igazságtalanság ellen, mint a mily oktanul reklamálták a londoni munkások „három hónapjukat“ Chesterfield lordtól 1752-ben, midőn Angliában az újév napját március 25-ikéről január 1-ére tették át. Különben a kamatszámolás kifejtett reformjának megvalósítása még azért sem sikerülhetne egy könnyen, mert ez nem indulhatna ki egyetlen, tekintélyes központból (mint a korszakalkotó naptárjavításoknál volt), hanem csak a legelőkelőbb pénzintézeteknek, vajmi nehezen létre hozható közmegállapodása adhatná meg az impulzust e szép idea megtestesítésére, melynek általános elterjedése csak a törvényhozó faktorok hozzájárulása után volna lehetséges.

Mindent összefoglalva tehát, alig van kilátás arra, hogy a kamatszámolásnak kifejtett reformtervét a gyakorlati élet elfogadja

— legalább a közel jövőben nincs! Hogy ennek dacára is e munkámat közre bocsátottam, tettem ezt azért, mert — véleményem szerint — az elméleti vizsgálódásokkal foglalkozónak kötelessége a szaktudománya körében bárhol észlelt hiányokra és hibákra rámutatni, az ezek javítására vezető eszközöket kijelölni, és ezek alapján a tökély eszményképét kitűzni, tekintet nélkül arra, hogy ezt a praktikus élet elfogadja-e, s ha igen — mikor teszi azt? Ha ezt a célt sikerült elérnem, úgy elmondhatom, hogy e munkát nem hiába irtam meg, s ha még szaktársaim kifejtett elveimet osztani fogják úgy azt is szerénytelenség nélkül bevallhatom, hogy e lapokat nem tettem sikertelenül közzé.



OSZK



OSZK

Országos Széchényi Könyvtár

1975 APR 23

