g. 1.

Ex libris Ste-
phani Dobos Ju-
ris Patrii Hun-
garici Auditoris.

~~[illegible]~~

De prae adiam dios Bodnar f. 4.

6

ELEMENTA ARITHMETICÆ
NUMERICÆ & LITERALIS PRACTICÆ & THEORICÆ

In usum
Discentium proposita.
ET
ILLUSTRISSIMIS, PERILLUSTRIBUS, REVERENDIS, NOBILIBUS, ac ERUDITIS,
DOMINIS,
D. ACADEMICIS
à Physicis dicata,
Dum Hi
In Alma Episcopali Societatis JESU Universitate Cassoviensi.
PROMOTORE
REVERENDO PATRE
EMER. VAJKOVICS
è Societate JESU, AA. LL. & Philosophiæ Doctore, ac in Physicis Professore Ordinario.
Primâ AA. LL. & Philosophiæ Laureâ insignirentur.

Annô MDCCLIII. Mense Jun. Die

****

CASSOVIÆ,
Typis Academicis Societatis JESU.

ILLUSTRISSIMI,
PERLLUSTRES, REVERENDI,
NOBILES, ac ERUDITI
DOMINI,
D. ACADEMICI.

PAtronum ac Mecœnatem, quem Parentis inſtar habere poſſemus, nobis fortuna negavit: at FRATRES *in Vobis Domini* Academici *pro uno Patre complures benigne indulſit, Jura autem naturæ: ſecundum Parentes*, Germanorum *meminiſſe nos admonent.* Vobis *igitur Laureatos Vertices inclinamus*, Vobis *munuſculum iſthoc dedicamus, nihil dubitantes: illud a* Veſtra *humanitate vultu plane benigno ſuſcipiendum, præſertim ſi adverteritis: in eo deligendo* Veſtræ *potiſſimum utilitatis rationem nos habuiſſe, ut nimirum: ad Philoſophiæ arcana penitius perſcrutanda, his quaſi armis* Vos *expeditiores red-*

deremus, occurrunt ſiquidem in ea, non pauca, quæ ſine ſcientiæ ejus cognitione, quam libellus hic complectitur, operoſe admodum, aut nunquam condiſcuntur: Quis enim rapidam, concitatamque Cœli converſionem, noctium dierumque viciſſitudines, adeo implexos Solis curſus, quis Lunæ accretionem, diminutionemque, Stellarum & cæterorum Corporum tam mirabiles motus, quis (ut hoc quoque adjiciam) præſtantiſſime de rebus noturalibus hac præſertim ætate eruditiore conſcripta volumina mente comprehendet. Niſi probe eam calleat artem, quæ rationes conferre docet, & cuncta ad calculos revocare? Ad iſtud autem Vos *paginæ iſtæ nomini* Veſtræ *inſcriptæ, certa ac infallibili inſtituent ratione, & vel ideo commodo* Veſtro *non vulgari, quia & dillucide, & haud quaquam per longas (ut nonnulli fecere) ambages. Agite ergo, & munus iſtud, ceu veram amoris noſtri in* Vos *teſſeram admittite. Nos interim, ut* Vos *Reipublicæ tum Sacræ, tum profanæ DEUS optimus ſervet incolumes, ac idonea ejus membra novis ſemper & novis ſapientiæ acceſſionibus efficiat ex animo optamus*

Commodorum Veſtrorum

Studioſiſſimi

NEO-BACCALAUREI.

D. O. M. A.

Quod

Bonum, Felix, Faustum, Forunatumque sit,
Huic Almæ Episcop. Soc. JESU Universitati Cassoviensi.
Senatui Philosophico, Totiq; Reipub. Christianæ.

SUB

Admodum Reverendo, ac Doctissimo Patre

FRANC. XAVERIO HALWAX

è Soc. Jesu, AA. LL. & Philosoph.
Doctore, Sacræ Scripturæ Interprete
Ordinario, nec non Inclytæ Facultatis
Philosophicæ

DECANO SPECTABILI.

Perillustres, Reverendi, Nobiles ac tam virtute, quam eruditione conspicui AA. LL. & Philosophiæ

CANDIDATI.

In Aula Universitatis Anno M DCC LIII.
Mense Junio Die Hora 8va matutina
Prima AA. LL. & Philosophiæ Laurea
Condecorati sunt.

PROMOTORE

REVERENDO PATRE

EMER. VAJKOVICS

è Soc. Jesu, AA. LL. & Phil. Doctore, ejusdemque in Physicis Professore Ordinario.

NOMINA PROMOTORUM.

R. D. ALEXIUS BIMBÓ, Nob. Hung. Veſzpr, ex Com. eodem, Sem. Kisd. S. L. R. H. Alum. Diæc. Magno-Varadinenſis.
FRANCISCUS NAGY, Civis Hung. Gyöngyöſ. ex Com. Heveſienſi.
R. D. JOANNES BERCZIK, Nobilis Hung. Jáſzóv. ex Comit. Aba-Ujvar.
1. Sem. S. L. R. H. Alum. Diæc. Magno-Varadinenſis.
JOANNES MÉSZÁROS, Nob. Hung. Comarom. ex Comit. eodem.
JOSEPHUS IZDENCZI de Komlós, Nob. Hung. Tůlczienſis ex Com. Sároſſienſi. *Demonſtravit.*
JOSEPHUS RETHL, Civ. Hung. Caſſovien. ex Com. Aba Ujvarienſi.

R. D. JOANNES SIMON, Tranſylv. Cajantonienſis ex Com. Coloſ. Sem. Kisd. S. L. R. H. Græci Ritus Alumn. Diæc. Magno-Varad.
2. LADISLAUS SZENT-MARJAI de Erdőtelek, Nob. Hung. Perecſenienſis, ex Com. Kraſznenſi, e Conv. Nob.
MATHIAS SZENI, Libert. Hung. Tiſztenenſis, ex Com. Arvenſi.

EME-

EMERICUS BERCZIK, Nob. Hung. Caſſov. ex Com. Aba-Ujvarienſi.
GEORGIUS RAJNICSÁK, Nob. Hung. Trſztenen. ex Com. Arvenſi.
3. JOSEPHUS GALLOVICS, Nob. Hung. Szántovien. ex Com. Aba-Ujvar.
JOSEPHUS LINDAV, Civ. Hung. Homonnen. ex Com. Zempl.
MICHAEL FERENCZI, Perill. Hung. Pannenſis, ex Com. Barſienſi.

ADAMUS TRAJCSIK, Civ. Zolnenſis, ex Comit. Trenchin.
* FRANCISCUS TEGERI, Libert. Hung. Ekbelien. ex Còm. Nitrienſi.
4. MARTINUS PETRIK, Libert. Hung. Szent-Ivanyien. ex Com. Liptov.
NICOLAUS GROTTO, Libert. Hung. Tapolczen. ex Com. Szaladienſi.

MICHAEL GALL, Civ. Hung. Szomolnokien. ex Com. Scepuſienſi.
JOANNES ZAVACZKI, Civ. Hung. Bartfen. ez Com. Sároſſienſi.
MATTHÆUS SCHLOSSER, Libert. Hungar. Sóvarien. ex Com. Sároſſienſi.
THEODORUS HARSÁNYI, Nob. Hung. Munkácſien. ex Com. Bereghienſi.
STEPHANUS GOMBOS, Nob. Hung. Gombos-falvenſis, ex Com. Sároſſienſi, e Conv. Nob.
PAULUS ANDREÁNSZKI, Nob. Hung. Patakinen. ex Com. Zempl.

PAU-

PAULUS KORMOS, Nob. Hung. Balatonyien. ex Comit. Borſod.

* LADISLAUS TEREBESI, Nob. Hung. Ujlakien. ex Com. Zempl.

Extra Ordinem.

R. D. MARTINUS BODENLOS, Civis Hung. Metzenseŭff. ex Com. Aba-Ujvar. Sem. Kisd. S. L. R. H. Alum. Presbyter Diæc. Agrien. SS. Theol. in 2dum annum Auditor.

PROBLEMATA
IN ACTU DECISA.

I. Theoretica ne Phyſica, an Practica, ampliores adferat Reipubl. utilitates?

Statico-Pneumaticum.

II. Ope vacui Boyleani invenire: An metallo graviori ſit admixtum, aliquid alterius metalli levioris.

PRÆFATIO.

ETſi complures paſſim inveniantur commentarii de arithmetica tractantes, quia tamen aliqui tam fuſi ſunt, ut mole laborent ſua, alii contra tam breves, ut præter ordinarias quinque ſpecierum operationes, & aliquid de regula proportionum vix quidquam attingant, imò nec ſimplicium illarum operationum rationem reddant, ut adeo non immerito complures conquerantur ſe arithmeticam didiciſſe quidem, ſed iterum oblitos nihil amplius ſcire. Unde: ut huic malo occuramus, ſtatuimus operationes arithmeticas breviter quidem tradere, ſed tamen ſimul ſuas iis rationes & demonſtrationes adjungere, quibus convictus intellectus & ſcientiam adipiſcatur, & facilius ab oblivione ſemet tueatur. Poſt primas quinque ſpecies numericas, ſubjungimus quinque ſpecies literales, tum ad regulam proportionum, & quæ ex ea conſequuntur deſcendemus. Uſus porro calculi literalis in eo potiſſimum eximius eſt, quod per illum problemata arithmetica quæ per numeros non niſi operosè reſolvuntur; & breviſſimè & facillimè expediantur, & inſuper ad intelligendos libros mathematicos qui defacto ferè omnes admixtam habent algebram neceſſarius eſt. Ut autem ordinatè procedamus, definitiones nonnullas præmittimus, nè fortaſſe voces obſcuritatem generent. Sit igitur:

SECTIO I.

CAPUT I.

Definitiones.

1. QUantum dicitur, quid quid ex partibus componitur, velut: linea, ſpatium, exercitus.

2. Si partes componentes exiſtunt ſimul & conjunctæ, quantitas dicitur continua, ut linea, vel ſpatium. Si partes exiſtunt ſimul ſed disjunctæ dicitur diſcreta, ut exercitus. aut alius quiſcunque numerus, ſi una alteri ſuccedit dicitur, quantitas ſucceſſiva, ut tempus, motus.

3. Id, in quo non conſiderantur partes, dicitur unitas, quæ aſſumitur tanquam principium numerandi, & ad quod quaſcunque quantitates reducimus, tanquam communem earum menſuram, ſic tempus menſuramus per horas, lineas per unitates lineares, ſolida per ſolida. Porrò unitas illa nobis arbitraria eſt.

4. Aggregatum plurium unitatum propriè dicitur numerus.

5. Quan-

5. Quantitas, quæ in alia continetur dicitur pars, quæ continet, dicitur totum.

6. Pars quæ aliquoties repetita adæquat totum dicitur aliquota ut: 3 ad 9, si bis continetur est dimidia, si 3 aut 4 3ia aut 4ta. Vicissim quantitas relativè ad suas partes aliquotas considerata, dicitur 2plex, aut 3plex, aut in genere: multiplex.

7. Pars, quæ exactè non continetur in suo toto dicitur, aliquanta: ut 3 relatè ad 8.

8. Pars quæcunq; unitatis dicitur fractio.

9. Quantitates: quarum eadem unitas, mensura est, dicuntur homogenæ ut tres ulnæ, 4tuor ulnæ, quarum communis mensura est: unitas ulnaris.

10. Si verò quantitates referantur ad diversas unitates, dicuntur heterogenæ ut tres ulnæ, duo pedes, quarum primam mensurat: unitas ulnaris, secundam pedalis.

11. Numerus primus vocatur, cujus nullus numerus est pars aliquota, præter solam unitatem ut: 7. 5. 3.

12. Numerus compositus est: cujus præter unitatem alter aliquis numerus est pars aliquota: ut sex, cujus partes aliquotæ sunt 2 & 3.

13. Pars, quæ exactè continetur in duabus aut pluribus quantitatibus, dicitur pars aliquota, vel mensura communis.

14. Numeri inter se primi dicuntur, quos nullus numerus mensurat, seu quorum nulla pars aliquota communis est, præter unitatem ut 8, & 9.

15. Nu-

15. Numeri compositi sunt: quorum præter unitatem, aliquis numerus mensura communis aliquota est: ut 6 & 9. quos metitur 3.

16. Numerus par est: qui per duo dividi potest: ut 6. Impar, qui per duo dividi non potest: ut 7.

17. Quantitates, quarum relatio ad unitatem, exprimi potest numeris, dicuntur: rationales & commensurabiles, quæ verò solis lineis determinari possunt dicuntur: surdæ, irationales, & incommensurabiles.

18. Scientia quæ de quantitatibus numericis tractat, vocatur: arithmetica, à græca voce arithmos, quæ numerum significat, quæ si numeros tractat sub speciebus aliis vel literis, dicitur, speciosa universalis aut literalis.

19. Algorithmus: est methodus quantitates arithmeticas determinandi, Cujus 4. sunt officia: addere, subtrahere, multiplicare, dividere. Per additionem determinatur totum ex partibus constans. Per subtractionem determinatur differentia inter duas qualitates. Per multiplicationem determinatur productum aut factum quod fit ex aliqua quantitate aliquoties accepta. Divisio demùm ostendit quoties una quantitas in alia contineatur. Ac quantitas quæ dividitur, dicitur dividenda, per quam dividitur, dicitur divisor, & tandem numerus, quo indicatur quoties una quanti tas in alia contineatur: quotus vel quotiens.

20. Axio

20. Axioma eſt propoſitio per ſe nota, ut totum eſt majus ſua parte.

21. Theorema, eſt propoſitio doctrinalis.

22. Problema, eſt propoſitio practica, quæ reſolvi debet.

23. Lemma, eſt theorema ordinatum ad aliud demonſtrandum.

24. Corollarium, conſequitur tanquam illatio ex problemate vel theoremate.

25. Demonſtratio, eſt explicatio rationum, ex quibus certè & evidenter aliqua propoſitio deducitur.

De Primo Algorithmo Numerico.

I. Notæ, quibus in numerando utimur. Novem ſunt, eæque ab Arabibus acceptæ nimirùm:

1.	4.	7.
2.	5.	8.
3.	6.	9.

quibus ut decas exprimatur additur Zerus vel littera O, vel ut alii dicunt: nulla, eo quod nullâ notâ ex dictis 9 adſcribatur. Quia autem præter novenarium numerum, majores etiam numeri exprimendi ſunt, hinc præter dictum jam valorem notarum arithmericarum alius excogitatus eſt. Nimirùm dependenter à collocatione, ità ut nota ultima à dextris ſignificet unitates, 2do loco ſiniſtram versùs ſignificet decades, 3tio loco centenarios, 4to millenarios, 5to decem millenarios, 6to centum millenarios, 7mo mille millenarios, ſeu millionem, 8vo decem milliones, 9no centum milliones, 10mo mille milliones, 11. decem millia millionum, 12mo centum millia millionum, 13tio millionem millionum ſeu billionem, & ità porrò decimo nono loco trillionem, 25to quadrillionem.

II. Ex qua inſtitutione ſequitur methodus generalis numerandi, pro qua magìs facilitanda adverte: quantitatem numerandam in certa membra dividendam eſſe, ità ut poſt res notas à dextra incipiendo ponatur infernè virgula, ſeu comma, quod indicium eſt: quod poſt illud ſequantur millia, poſt alias tres notas, ſeu poſt ſex à dextris incipiendo ponatur ſupernè virgula, quod indicium eſt: poſt hanc virgulam ſupernè poſitam, ſequi milliones, iterùm poſt alias tres notas infernè comma ponitur, quod deſignat ſequi millia millionum, poſt alias iterùm tres, ſeu poſt duodecim ſupernè ponantur, 2 virgulæ, quæ denotabunt, quod notæ quæ conſequuntur ſignificent: billiones, & ità porrò poſt alias ſex pon untur 3 virgulæ, & plures deinceps. His jam explicatis ſit numeranda quantitas.

‴ ″ ′
5 3 6 4, 2 1 3 9 6 0, 0 4 3 2 4 3, 6 8 7

Quæ quantitas ſic enuntiatur: quinque trilliones, trecenta ſexaginta quatuor millia billionum, ducenti tredecim billiones, nongenta ta ſexaginta millia millionum, quadraginta tres milliones, ducenta quadraginta tria millia, ſexcenti octuaginta ſeptem. Unde qui tres notas exprimere novit, facilè quemcunque numerum exprimet, modò ad dictas interpunctiones advertat. Ità, ut dum ſequitur comma, dicat millia, ſi verò etiam ſequatur ſupernè virgula, addat millionum, vel ſi duæ ſint, dicat billionum, ſi verò non ſequatur coma tunc ſolùm ſupernas virgulas exprimet, ſi dantur; ſi non dentur; ſimpliciter enunciet, ut ſupra fecimus.

III. Axioma fundamentale additionis: Omne totum æquatur ſuis partibus ſimul ſumptis.

PROBLEMA PRIMUM.

Numeros addere.

IV. IN hoc algorithmo intelliguntur numeri homogenei. Nam in ſequenti nempe: literali etiam heterogenei addi, ſubtrahi, & multiplicari poſſunt.

Primò: Numeri addendi ſcribantur ea lege, ut unitates ſcribantur ſub unitatibus, decades ſub decadibus, & ità porrò. Deſcriptis jam hoc ordine omnibus numeris addendis, infernè ducatur linea, quæ ſummam totalem à partibus ſecernat.

V. *Secundò:* Addantur unitates unitatibus, & ſumma unitatum ſubſcribatur ſub unitatibus, quod ſi ex additione unitatum contingat decadem unam vel plures enaſci, reſervatis memoriâ decadibus, ſub unitatibus ſolæ unitates ſcribantur, ſi autem meræ decades emergant ſub unitatibus ſcribendus erit Zerus. Tum enatæ decades ex additione unitatum connumerentur cum decadibus, & ſumma ſcribatur ſub decadibus, quod ſi iterum ex additione decadum emergat decas una vel plures; reſervatis illis memoriâ ſolæ decades ſolitariæ ſcribantur ſub decadibus, & quia decades decadum ſunt centenarii, illæ cum centenariis connumerandæ erunt, & ità porrò. Res exemplô clariùs patebit. Sint exempli cauſa numeri: A, B, C, addendi.

VI.	A.	4 5 6 2.
	B.	4 6 3 4.
	C.	8 5 3 2.
	S.	1 7 7 2 8.

Cum in hoc exemplo unitates additæ unitatibus efficiunt 8, octo ſcribatur ſub unitatibus, & quia decades additæ ſunt 12, ſcriptis infra decades duabus, decas decadum adnumeretur centenariis, qui erunt 17 ſcriptis igitur infra centenarios 7, decas centenariorum ſeu millenarius adnumeratur millenariis, qui evadunt 17, ſubſcriptis itaque infra millenarios 7, decas decem millenariorum enata ſcribatur ad locum decem millenariorum nempe: quintum ſiniſtram versùs: erúntq; ſeptemdecim millia, ſeptingengenti viginti octo, adeoque summa quæsita.

SCHOLION.

PRoba additionis cum fieri debeat per subtractionem eam, trademus postquam subtractionem exposuerimus.

PROBLEMA SECUNDUM.

Numeros subtrahere.

VII. PRimò: Numerus subtrahendus scribatur sub numero à quo subtractio fieri debet, ea lege, ut unitates ponantur sub unitatibus, decades sub decadibus &c. tum subducatur linea ut residuum seu differentia secernarur à numeris datis.

VIII. Secundò: Auferantur unitates ab unitatibus, & residuum scribatur sub unitatibus infra lineam, si nihil remaneat sub unitatibus scribendus est Zerus, quod si nota inferior major esset superiore à qua subtrahi debet, augeatur superior decade & nota proximè vicina sinistram versùs notetur supernè punctulo, quod signum est eam unitate minutam esse utpote: quæ unitas assumpta fuit ut prior nota decade augeretur, deinde eodem modo subtrahantur decades à deeadibus &c. res exemplo clarior evadet. Sint igitur numeri: A, à quo subtractio facienda. B, qui subtrahendus est.

IX.

A.	4 5 6 8
B.	3 6 5 4
D	– 9 1 4.

Cum quatuor unitatibus ſubtractis ab 8, reſtent 4. illæ ſcribuntur ſub unitatibus, eodem modo ſubtractis 5 decadibus à 6, reſiduum eſt: unitas ſcribenda ſub decadibus, tum; cum ſex centuriæ ſubtrahi non poſſint à 5, unitas accipienda eſt mutuo à proxima præcedente nota 4. quæ cùm millenarium denotet, adeoq; decies centum, unde ſi decies centum quingentis adnumeretur, erunt 15 centuriæ adeoque 6 ſubtrahendo à 15 manent 9 ſcribendæ ſub centuriis, tandem 3 millenarii ſi ſubtrahantur à 3, quia nempe: ex quaternario jam unitas mutuo ſublata fuerat, manet nulla, proinde ſolùm lineola ducitur infra millenarios & non ponitur Zerus, eò quod Zerus ponatur ſolùm ad notam antecedentem in altiori gradu collocandam, cùm igitur hìc nulla nota præcedat, quam elevare deberet ſinè cauſa poneretur.

X. Ex quo apparet:quod reſiduum ex numero A, ſubtracto B, ſeu differentia numerorum, ſit D.

Demonſtratio per ſe nota apparet, cùm enim numerus: A nihil ſit aliud, quam 4 millenarii, 5 centenarii, 6 decades, & 8 unitates; ſubtractis ex hac ſumma unitatibus, decadibus, centenariis & millenariis numeri

meri B ſeu tota illius ſumma, manifeſtum eſt: quod remanet, eſſe veram differentiam horum numerorum, ſeu reſiduum ſummæ A poſt ſubtractam ſummam B, Q, E, D.

SCHOLION PRIMUM.

XI. EXamen, ſeu proba ſubtractionis fit per additionem, aut per iterratam ſubtractionem. Per additionem quidem, ſi differentia D, numeri §. 9. poſiti, addatur numero ſubtracto B, ſumma debet eſſe æqualis numero A. Eodem modo, ſi differentia D ſubtrahatur à numero A, differentia debet eſſe æqualis numero B.

Demonſtratio cum differentia D ſit exceſſus, quo numerus B ſuperatur ab A, clarum eſt: quod ſi numero B tantùm addatur, quantum B ſuperatur ab A, hos duos numeros æquales fore, quod erat primum.

Item cum differentia D ſit ille exceſſus, quo A excedit numerum B, evidens eſt: quod, ſi ex numero A tantũ reſecetur, quantùm A ſuperabat numerum B, illud reſiduum ex numero A, numero B æquari debere, quod erat alterum.

Corollarium Primum.

XII. EX quo ſequitur, quod, ſi differentiâ D additâ ad numerum B, ſumma minor ſit numero A, aut eadem differentia ſubtracta à numero A, reſiduum majus ſit, quam numerus B, differentiam D juſto minorem eſſe.

Corol-

Corollarium Secundum.

XIII. **V**Iciſſim ſi differentia D addita numero B, ſummam majorem efficiat numero A, aut eadem differentia D ſubtracta à numero A, reſiduum minus relinquat, quam ſit numerus B, differentiam D juſto majorem eſſe, & quidem tantò, quantò ſumma ex D & B collecta ſuperat numerum A, aut quantò poſt ſubtractionem D ab A reſiduum deficit à B.

SCHOLION SECUNDUM.

XIV. **J**Am ad probam additionis deſcendamus: ſint numeri ſuperius poſiti, aut alii quicunque, aut quotcunque: A B C, quorum ſumma ſit S examinanda, an operatio ritè peracta fuerit ſub

X.

A.	$^{2}6$	$^{2}9$	$^{1}4$	
B.	9	8	3	
C.	4	7	6	
S	2	1	5	3
D	o	o	o	o.

Initium ducitur ab unitatibus dicendo: 3 à 6 manent 3. 3 & 3 ſunt 6, & 4 ſunt 10. cùm hìc nulla unitas maneat, ſed ſola decas, planum eſt: ad locum unitatum ſcribendam eſſe nullam, & decas illa, quæ ex unitatibus nata eſt, notatur ſupernè ſuper 9, tum ſubtrahendo 5 decades à 7 manent 2, 2 & 8 ſunt

10, 10 & 9 ſunt 19, 19 & unitas, quæ remanſit ex additione unitatum ſunt 20, hìc cùm iterum nulla unitas decadum habeatur, manifeſtum eſt ad locum decadum ſcribendam eſſe nullam, & duæ decades, quæ ex additione enatæ ſunt ſupra 6 notandæ, tum unum à 4. manent 3. 3 & 9 ſunt 12, 12 & 6 ſunt 18, 18 & 2 ſunt 20 proinde nulla ſub centenariis ſcribenda, & binarius ſcribitur penes 6 ſiniſtram versùs, denique: 2 à 2 manet nulla, adeoque differentia D inter numeros A, B, C & ſummam S, ſunt meræ nullæ, proinde nulla, adeoque ſumma æqualis omnibus ſuis partibus, proinde operatio bona.

XV. Demonſtratio: cum ſumma S. ſit totum, ſeu aggregatum omnium numerorum A, B, C. adeoque ablato toto debent auferri omnes partes, proinde debet remanere nulla, ſeu nihil. Q, E, D.

Y.

A.	$^{2}6$	$^{1}9$	$^{1}4$
B.	9	8	3
C.	4	7	6
S.	12	5	3
D.	9	0	0

Corollarium Primum.

XVI. Hinc ſequitur primò: ſi ſumma S: minor ſit per errorem, uti apparet ſub y, ubi ſubtractione facta remanſerunt

runt 900, clarum est: numeros A, B, C. simul sumptos superare summam S. proinde, si hæc differentia addatur ad summam S. prodibit vera summa datorum numerorum. A. B. C.

Z.

A.	1 6 1 9 1 4
B.	9 8 3
C.	4 7 6
S.	2 1 7 1
D.	9 8 2
	1 0 0 0
D.	1 8

CORΘLLARIUM SECUNDUM.

XVII. SI summa erronea S. subtrahi non possit à numeris A, B, C. ut est in Z. clarum est: eam majorem esse numeris A, B, C. adeoque subtrahatur denuò quod remansit ex numeris A, B, C. nempe: 982 ex residuo, quod remansit ex summa S, nempe: mille. Et dabit differentiam D, nempe: 18 quibus summa S. superat numeros A, B, C. si proinde hæc differentia D subtrahatur ex summa erronea dabit summam justam numerorum A. B. C-

SCHOLION TERTIUM.

XVIII. ALias probas additionis præter mitto, quæ aut hac operosiores sunt, aut fallibiles, ut est illa per abjectionem novenarii, uti clarum evadet abjicienti novenarios ex numeris X. Y. Z. in quibus

bus omnibus, etsi duabus erroneis operationibus: abjectis omnibus novenariis remanent 2.

SCHOLION QUARTUM.

ADditio, & subtractio heterogeneorũ intelligetur ex doctrina fractionum, de qua infra. Porrò ex hoc modo examinandi additionem nascitur Methodus additionem, & subtractionem simul, & semel perficiendi. Sit igitur

PROBLEMA TERTIUM.

Additionem, & Subtractionem simul perficere,

Resolutio.

XIX. SInt numeri quotcunque dati: A, B, C. à quibus alii quotcunque D, E, F, G. subtrahendi sint.

Primò: Scribantur numeri dati A, B, C ea lege, ut unitates sub unitatibus ponantur &c.

Secundò: Ductâ infra hos lineâ, scribantur sub illis eadem lege, numeri subtrahendi: D, E, F, G & subducatur linea, ut in figura

A.		$^{1}5$	$^{1}4$	$^{1}3$
B.		7	8	9
C.		8	6	4
D	1.	2	5	3
E.			8	9
F.		1	9	6
G.		3^{2}	5_{2}	4
D.		−3	0	4.

Tertiò: Initium fiat ab unitatibus ſubtrahendorum, quæ in unum collectæ faciunt 22, ubi cum duæ decades emerſerint, ſcribatur binarius ſub decadibus eorundem ſubtrahendorum, ex quorum claſſe enatæ ſunt.

Quartò: Binarius unitatum ſubtrahatur ab unitatibus à quibus ſubtractio fit, quibus ſubtractis, reliquíſque in unum collectis, remanent 14, ſcriptis itaque 4, ſub unitatibus infra lineam, una decas rejicitur, & notatur ad numerum decadum claſſis ſuperioris.

Quintò: Eodem modo additæ decades ſubtrahendorum, cùm faciant 29. rejectis duabus decadibus ad locum centenariorum, & 9 ſubtractis à decadibus numerorum A, B, C remanebunt 10, proinde ſcriptâ nullâ infrà decades, unitas rejicitur ad locum centenariorum numerorum A, B, C.

Sextò: Similiter cùm centenarii in ſubtrahendis inveniantur 8, his ſubtractis ex ſuperiore claſſe remanebunt 13, adeoque ſcriptis 3 infra centenarios, unitas rejicitur ad locum millenariorum in claſſe ſuperiore.

Septimò: Tandem unitate millenarii ſubtrahendorum ablata ab unitate numerorum A, B, C, remanet nulla, adeoque differentia ſeu reſiduum ex numeris A, B, C ſunt 304.

Demonſtratio per ſe nota videtur cum enim omnibus numeris D, E, F, G ſubtra-

ctis

ctis ex numeris A, B, C restent 304. Clarum est, hanc differentiam esse.

COROLLARIUM PRIMUM.

XX. SI subtractione facta, remaneat aliquid, evidens est: numeros superiores collectivè sumptos, majores esse inferioribus.

COROLLARIUM SECUNDUM.

XXI. SI subtractione facta, meræ nullæ remaneant, erit summa acceptorum æqualis summæ expositorum, seu numeri æquales.

COROLLARIUM TERTIUM.

XXII. SI summa expositorum subtrahi non possit à summa acceptorum, certum est: summam expositorum majorem esse summa acceptorum. Ad cujus differentiam inveniendam, operaberis, ut præscripsimus Corollario 2do §. 17.

PROBLEMA QUARTUM.

Numeros multiplicare.

XXIII. CUm multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio, clarum est: toties poni debere numerum multiplicandum, quot sunt unitates in multiplicatore. Adeoque si 3, sint multiplicanda per 2, 3 debent bis poni ut prodeat factum 6. Idem de quocunque alio numero intelligendum.

XXIV. Theorema porrò: sive 2 multiplicentur per 3, sive 3 per 2 idem factum prodire debet.

3
III
2 III

Demonstratio: nam resolvantur 3 in meras unitates eæque penes invicem per virgulas notentur. Tum subscribantur adhuc semel 3 dictæ unitates. Ut nimirùm bis ponantur. Clarum est: quod ubi sunt bis 3 unitates, ibi etiam sint 3. duæ unitates, adeoq; idem factum producant. Q. E. D. idem est de quibuscunque aliis numeris se invicem multiplicantibus. Unde numeri se multiplicantes, factores dicuntur. Quod illud productum ex mutua multiplicatione efficiant.

$$\begin{array}{rrrrrr} & A & 3 & 5 & 4 \\ & B & & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 2 & \\ \hline S.1 & 2 & 0 & 3 & 6. \end{array}$$

XXV. Sit jam numerus multiplicandus A. 3 notis constans. Multiplicans B. 2 notis constans. Primò: ducuntur unitates numeri B, in unitates numeri A. Dicendo: 4. 4 sunt: 16. & reservata mente unitate, 6 scribantur infra unitates.

Secundò: eadem nota ducta in decades numeri A faciet 20. quibus addita unitate mente reservata facit: 21. proinde unitate scripta infra decades manent 2.

Tandem eadem nota ducta in 3 facit: 12, & 2 sunt: 14. & cum jam nihil restet multiplitiplicandum, 14 expreſsè ſcribuntur, ut figura exhibet.

Tertiò: eodem modo altera nota numeri B ducatur in ſingulas notas numeri A, hac lege: ut dum ducitur in unitates facta ſcribantur ſub decadibus. Quia decas ducitur in unitates. Cum ducitur in decades facta ſcribantur ſub centenariis. Et ita porrò, ut videre eſt in appoſito exemplo.

Quartò: abſoluta omnium notarum multiplicatione, ſubductáque linea, facta addantur in unam ſummam totalem, ſubſcribendo unitates ſub unitatibus, decades ſub decadibus, &c.

XXVI. Demonſtratio operationis per ſe manifeſta eſt. Cùm toties numerus A, inveniatur in ſumma S. quod ſunt unitates in numero B.

SCHOLION.

XXVII. UNde ad probandam multiplicationem, an ritè peracta ſit, utimur diviſione. Dividendo nimirùm ſummam S. per numerum B, & in quoto prodire debet numerus A. Aut viciſſim dividendo per A. in quotiente prodibit B.

ABACUS PYTHAGORICUS
Pro adjumento Multiplicationis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

PROBLEMA QUINTUM.
Numeros dividere.

XXVIII. SIcut multiplicatio eſt iterata ejusdem numeri additio, ità diviſio eſt iterata ejusdem numeri ſubtractio. Unde toties ſubtrahi poteſt, aut continetur diviſor in dividendo, quoties unitas continetur in quoto. Sit jam numerus dividendus S. diviſor B. & quæratur quotus A.

```
      B  {      S.     }  A
     34  | 1 2 0 3 6   |  3 5 4.
         { 1 0 2       }
     ------------------------
         — 1 8 3
           1 7 0
         ---------
             1 3 6
             1 3 6
           -------
             0 0 0
```

Primò: Scribatur dividendus S. tanquam intra parenthesim, à cujus dextra, extra parenthesim servetur spatium pro scribendo quoto A. à sinistra ponatur divisor B.

Secundò: Initium divisionis fiat à notis maximi valoris, & cum hìc primæ duæ notæ, nempe: 12. minores sint divisore, accipiendæ sunt pro primo membro divisionis 3, nempe: 120. & quæritur quoties divisor B. seu: 34 inveniatur in 120, vel ut facilitetur operatio, quoties prima nota divisoris, nempe: 3 inveniatur in 12, & deprehendo eam inveniri 4, cum ter quatuor, sint 12, quia autem in hac hipothesi secunda nota, nempe: 4. in nulla, nec semel invenitur, hinc clarum est: quod 34 in 120 non inveniantur 4, proinde quotum unitate minuimus, & videmus, quod ter 3, sint: 9. adeoque pro nota 4, relinquantur 30. proinde securè pro prima nota quoti post lunulam scribuntur 3.

Tertiò: Per inventum hunc quotum 3,

multiplico diviſorem, dicendo: 3, 4 ſunt: 12. & ſcripto binario ſub nulla membri diviſi, unitatem mente retineo. Tum multiplicando per eundem quotum aliam notam diviſoris, nempe: 3 dicendo ter 3 ſunt: 9. & unitas ſunt: 10 & cum jam nihil multiplicandum reſtet, 10 ſcribuntur ſub 12. Ac ſubducta linea ſubtrahitur, hoc multiplum diviſoris à membro diviſo, ut habeatur differentia: 18. quæ ſcribitur infra lineam.

Quartò: Cùm hæc differentia minor eſſe debeat, quam diviſor, deponitur ex dividendo proxima nota, nempe: 3. & ſcribitur penes 8, ut habetur novum membrum dividendum, nempe: 183 quo habito, quæritur quoties diviſor: 34 in hoc inveniatur, & deprehenditur inveniri. 5. Proinde quinarius ſcribitur pro nota altera quoti: tum multiplicatur diviſor per eandem notam, 5. (ut priore paragrapho diximus:) & factum ſub membro diviſo ſcribitur, ac ſubtractione facta differentia: 13. ſcribitur ſub linea.

Quintò: Ad hanc differentiam adjungitur nota ultima dividendi, & efficitur membrum ultimum diviſionis. Peracta rursùm diviſione reperitur contineri diviſor in hoc membro: 4. Quæ eſt ultima nota quoti. Per quam multiplicatione facta diviſoris, & facto ſubſcripto ſub membro diviſo, deprehendetur illud eſſe æquale membro diviſo,

viso. Proinde post subtractionem remanet nihil, adeoque divisio peracta.

D. S. Q.

3 4. | 1 2 0 4 9. | 3 5 4 $\frac{13}{34}$

| 1 0 2 |

— 1 8 4

1 7 0

— 1 4 9

1 3 6

— 1 3.

Sextò: Si peracta divisione remaneat aliquid, ut in præsenti exemplo remanent 13, nec restat ulla nota in dividendo, quæ ad hoc residuum adjungi posset, illud residuum scribitur modicè altius, quam quotus, penes ipsum quotum, & interposita linea, subscribitur illi divisor; ut in exemplo apparet.

D. S. Q.

3 4. | 1 3 6 3 3. | 4 0 0 $\frac{33}{34}$

| 1 3 6 |

— — — 3 3.

Septimò: Si denique absoluto membro aliquo divisionis, residuum nullum sit, aut etiam tam parvum, ut deposita proxima nota ex dividendo, divisor major sit, quam membrum illud, ex residuo, una, cum adjecta una nota, pro quoto, ſcribi debet nulla, & deponitur iterum nota ſequens ex dividendo, ac quæritur: quoties in illo membro ex reſiduo, & jam duabus notis depoſitis conſtante, inveniatur diviſor? Si & illud ſit minus diviſore, iterum ponitur pro quoto nulla: ut in præſenti caſu, & 33 relicta pro fractione penes quotum notantur.

SCHOLION.

XXIX. PRoba diviſionis ſit per multiplicationem, ſi nimirùm: quotus multiplicetur per diviſorem, & eidem multiplo addatur numerator fractionis, ſi quis fortè remanſit, debet prodire ſumma diviſa. Demonſtratio per ſe manifeſta apparet. Cùm diviſor toties contineatur in dividendo, quoties unitas in quoto.

CAPUT II.

De primo Algorithmo literali:

XXX. SIcut per notas Arabicas, ſeu: numeros uſuales exprimuntur quantitates determinatæ, ità per literas exprimuntur quantitates indeterminatæ.

Priuſquam autem hujusmodi Methodi explicentur, obſervandum eſt: quæſtionem quæ proponi poteſt, vel eſſe poſſibilem, vel impoſſibilem. Poſſibilis eſt: ſi quæratur v. g. dimidium de 6. Impoſſibilis erit: ſi quæratur dimidium de 6. quod ſit numerus par.

Porrò

Porrò quæſtioni poſſibili 3plex quantitas reſpondere poteſt. Nam vel ei reſpondet quantitas poſitiva, vel negativa, vel nulla. Ut ſi quæratur: quantum quis ſpatii confecerit versùs Orientem. Tria hìc occurrere poſſunt: vel enim fieri poteſt, ut ille versùs Orientem decem paſſus proceſſerit, & tunc erit quatitas, ſeu motus poſitivus in Orientem.

Secundò: Fieri poteſt, ut ille non tantum non proceſſerit versùs Orientem, ſed potius receſſerit versùs Occidentem, & tunc erit quantitas, ſeu: motus versùs Orientem negativus, vel denique *tertiò:* fieri poteſt, ut ille immotus manſerit, & tunc erit quantitas, vel motus nullus, ſeu: æqualis nihilo. His explicatis antequam ulterius deſcendamus, explicanda ſunt ſigna, quibus in calculo literali communiter uti ſolent.

XXXI. Quantitas poſitiva exprimitur ſigno † quod ennuntiatur per: plus, vel etiam eadem quantitas poſitiva in principio operationis ponitur ſinè ullo ſigno, ut: A † B.

Quantitatis negativæ ſignum eſt—.quod ennuntiatur: minus, ùt: A — B.

Signum æqualitatis eſt: = ùt: A = B.

Signum majoritatis eſt: > ùt: A > B.

Signum minoritatis eſt: < ùt: A < B.

Signum infiniti eſt: ∞ ùt: A ∞.

Signum multiplicationis eſt: ⋈ quod tamen nunc rarius adhibetur. Aliud ſignum multiplicationis eſt: interjectum punctum inter literas, aut numeros, qui per ſe multiplicari intelliguntur, ùt: a. b ſeu: a multiplicatum per B. vel denique quod uſitatiſſimum eſt: in literis. Ut componantur literæ, ùt: ab.

Signum diviſionis eſt: ſi duo puncta interjiciantur inter literas vel numeros ùt: A: B. hoc eſt: A diviſum per B vel etiam: ſi literæ ſcribantur, per modum fractionis, ùt:

$\frac{a}{b}$ a diviſum per b.

Axioma fundamentale.

XXXII. QUntitas poſitiva, cum quantitate negativa æquali, æquatur nihilo. Seu: o ſic: $4-4=o$, $a-a=o$ $b-b=o$.

PROBLEMA PRIMUM.

Literas addere.

XXXIII. PRimò: Scribantur quantitates una ſerie cum ſuis ſignis. Iis ſubſcribantur quantitates addendæ. Itidem cum ſuis ſignis.

Secundò: Literæ ejusdem ſpeciei, colligantur in unam ſummam, ſi ſigna habuerint æqualia, & ſcribantur infra lineam præfixo illis eodem ſigno, ſi verò habeant ſigna inæqualia, præfigatur ſignum majoris, reliquo, (ut ex axiomate conſtat) omiſſo. Res exemplo clarior evadet.

Lite-

Literæ a † 2 b – 3 c † d.
Addendæ 2 a – 2 b † 3 c.

Summa 3 a † d.

Item aliud exemplum.

Literæ 3 a – 3 b † 3 c.
Addendæ 2 a † 4 b – c – d.

Summa 5 a † b † 2 c – d.

PROBLEMA SECUNDUM.

Literas ſubtrahere.

XXXIV. PRimò: literis datis ſubſcribantur ſubtrahendæ literæ, uti in numeris fit.

Secundò: ante operationem mutentur ſigna, quæ literas ſubtrahendas afficiunt, ita, ut ubi fuit † ponatur –, & ubi fuit – ponatur †, atque hoc facto addantur ſubtrahendæ literæ cum mutatis ſic ſignis, literis datis, prodibitque differentia petita. Sit in exemplo.

Literæ datæ: a † 3 b – 4 c.
Subtrahendæ: d † 3 b † 3 c.
Mutatis ſignis – d – 3 b – 3 c.

Differentia: a – d – 7 c.

SCHOLION PRIMUM.

XXXV. NEc in eo quidquam periculi erroris eſt, quod ſignis mutatis fiat additio. Nam quod quantitas poſitiva, quæ ſubtrahitur negativa evadat, clarum eſt: cum tantum de quantitate alia, à qua ſubtrahitur, detrahi debeat; quod verò quantitas negativa evadat poſitiva. Inde eſt: quod quantitas poſitiva, conjuncta cum negativa reipſa tota ſubtrahi non debeat, ſed minus quantitate negativa, unde: quia per detractam totam poſitivam, plus juſto ſubtractum eſt, debet illud iterum addi. Quod fit quando quantitas negativa mutatur in poſitivam, ſic: ſi à 7 ſubtrahenda ſint: 5 – 2 clarum eſt: quod ſubtrahi reipſa debeant: 3, adeoque remanebunt: 4 quod idem fit in operatione algebraica, ſi mutatis ſignis –5 † 2 addam ad 7. ſumma erit 2 † 2 id eſt: 4.

SCHOLION SECUNDUM.

XXXVI. PRoba ſubtractionis fit per additionem, & additionis per ſubtractionem, uti: in numeris docuimus.

SCHOLION TERTIUM.

XXXVII. QUantitas literalis ſola dicitur mononomia. Si duæ literæ conjungantur, interpoſito ſigno † vel – dicitur: binomia. Si 3 trinomia, ùt: a † b –c vel a † b † c. Univerſaliter. Cùm plures literæ occurrunt interpoſitis ſic ſignis dicitur: polinomia.

PROBLEMA TERTIUM.

Literas multiplicare.

XXXVIII. ETſi multiplicatio literarum fiat ut in numeris, peculiaris tamen quædam difficultas hic occurrit

rit ex eo, quod literis cum multiplicandi, tum multiplicatoris: diverſa ſigna præfigi poſſint, nempe: jam poſitivum, jam negativum. Quæſtio proinde eſſe poteſt; quale ſignum facto præfigi debeat, ut operatio ritè fiat? pro quo adverte:

Primò: poſitivum per poſitivum dat: †
Secundò: poſitivum per negativum dat: —
Tertiò: negativum per poſitivum dat: —
Quartò: negativum per negativum dat: †
adeoque univerſim ſigna diverſa faciunt.
Semper — æqualia ſemper †

XXXIX. Sit jam multiplicandum: a † b per a † b ſubſcribatur multiplicator ſub multiplicando, & ſubducatur linea. Tum ducta una litera multiplicatoris in ſingulas notas, ſeu: literas multiplicandi, facta ſubſcribantur ſub linea, cum ſuis ſignis. Ut: a ductum in a facit: aa, ductum in b facit: ab ùt: in ſchemate propoſito.

Multiplicandus a † b.
Multiplicans: a † b.

Productum primum: aa † ab.
Productum ſecundum: ab † bb.

Summa totalis aa † 2 ab † bb.

Sit ſecundo: multiplicandum: a † b per a — b.

Multiplicandus: a † b.
Multiplicator: a — b.

Productum primum. a a † a b.

Pro-

Productum secundum. $- ab - bb.$

Factum totale: $aa - bb.$

Sit tertio: $a - b + c.$

Multiplicandum per $a - b - c.$

Multiplicandus. $a - b + c.$

Multiplicator. $a - b - c.$

Productum primum. $aa - ab + ac.$

Productum secundum. $- ab + bb. - bc$

Productum tertium. $- ac + bc - cc.$

Factum totale. $aa - 2ab + bb - cc.$

Sit denique: $ab + cd$ multiplicandum per $ab - cf.$

Productum primum. $aabb + abcd.$

Productum secundum. $- abcf - ccdf.$

Factum totale. $aabb + abcd - abcf - ccdf.$

XL. Illud hìc mirum videri poteſt, cur poſitivum multiplicatum per negativum aut viciſſim negativum per poſitivum, faciat ſemper negativum? Quod ùt explicetur, concipi poteſt negativum, tanquam aliquod debitum, unde debitor qua talis, habet minus nihilo. Siquidem: ſi quis teneatur v. g. 3, ad hoc, ut nihil habeat, debet prius aquirere tria, ut debitum expungat. Si proinde tale debitum, vel negativum repetatur aliquoties poſitivè, manifeſtum eſt: exurgere multiplum negativum, & talis debebit plus. Eodem modo, ſi ali quod poſitivum v. g. 3, dicantur deberi

v. g.

v. g. bis, clarum eſt: factum futurum negativum, proinde illum, habiturum -6. Cum debeat 6.

XLI. Jam quod negativum, multiplicatum per negativum, faciat poſitivum, præter id, quod duæ negationes faciant unam affirmationem, inde videtur confici poſſe: quod debitum v. g. 3, ſi negetur poſitivè, ſequitur quidem talem non debere 3, ſed inde non infertur illum habere 3. At ſi idem debitum 3, negetur negativè, clarum videtur: illum debere habere 3. Hæc pro iis, qui demonſtrationibus algebraicis inſveti, illarum vim non penetrant: quas tamen hìc ſubnecto. Prius tamen addo aliqua axiomata, quæ Capite 4. fuſius tradentur nempe:

Addendo æqualibus æqualia, ſubtrahendo ab æqualibus æqualia, & multiplicando æqualia per æqualia, manent æqualia. His ſtantibus ſit:

THEOREMA I.

Negativum multiplicatum per poſitivum, facit negativum.

XLII. DEmonſtratio cùm in quantitate $a - b$, vocemus $5 - 1$. Quantitas: a, ſit imminuta quantitate b, nominemus illam quantitatem ſic imminutam D. quæ in hoc caſu erit 4. Ergo $a - b = d$. id eſt, $5 - 1 = 4$. Et addendo æqualia æqualibus, nempe: b. Erit: $a = d + b$. id eſt, $5 =$

4 +

$4 + 1$. Multiplicentur jam hæc æqualia, per $c = 2$. Erit: $ac = dc + bc$. id eſt: $10 = 8 + 2$. Subtrahatur jam $bc = 2$, utrinque. Erit: $ac - bc = dc$. id eſt: $10 - 2 = 8$. hoc eſt: producto ex $a - b$ in idem c. Q. E. D.

COROLLARIUM.

XLIII. Cum factum $ac - bc$ ſit ortum ex $a - b$ ducto, in c, clarum eſt: quod ſi $ac - bc$ dividatur per c, quotus debeat eſſe $a - b$. proinde ſi negativum, dividatur per poſitivum, quotus ſit negativus.

THEOREMA II.

Negativum multiplicatum per negativum, facit poſitivum.

XLIV. Cum quantitas $a - b$ ſit quantitas a, imminuta quantitate b, ponatur ergo quantitas hæc ſic imminuta, eſſe $= d$, igitur $a - b = d$. & addendo utrobique æqualibus b, erit: $a = d + b$. quod ſi jam hæc æqualia, multiplicentur per aliquam quantitatem negativam $- c$. erit: $-ac = -dc - bc$. his æqualibus addendo utrobique bc. erit: $-ac + bc = -dc$. quod ipſum factum eſt. Si multiplicetur $a - b$ per $- c$. adeoque quantitas negativa, multiplicata per negativam, dat factum poſitivum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

XLV. Cum igitur $-ac + bc$, ſit factum ex $a - b$, in $- c$: clarum eſt: quod

quod

quod ſi hæc quantitas iterum dividatur, per $-c$, debeat in quoto prodire, $a-b$. adeoque: Si per quantitatem negativam, dividatur negativa, quotus debeat eſſe poſitivus. Si verò per negativam dividatur poſitiva, quotus ſit negativus, proinde ſigna æqualia in diviſore, & dividendo, dant: †. inæqualia dant: –.

SCHOLION.

XLVI. PRoba multiplicationis fit per diviſionem, & viciſſim.

PROBLEMA QUARTUM.

Literas dividere.

XLVII. QUantitatem mononomiam ſimplicem, per mononomiam diverſæ literæ dividere.

Sit a dividendum per 6. hìc tantùm ſignis utimur, ùt $a:b$ vel $\frac{a}{b}$

XLVIII. Totum diviſionis literariæ artificium conſiſtit in eo; quod ſicut per multiplicationem literæ componuntur, ità per diviſionem ſeparentur. Unde ſi in dividendo inveniatur illa litera, quæ eſt in diviſore, illa quaſi deleta, pro quoto ponitur altera litera, quæ priori fuerat conjuncta. Sic: ſi per: a, dividendum ſit a † 2 ab. porrò dividendus ſcribitur, uti docuimus de numeris, & operatio fit ſicut in numeris. Sit igitur:

$$a \left\{ \begin{array}{l} a + 2ab \\ a - 2ab \end{array} \right\} 1 + 2b$$

$$0$$

XLIX. A in a reperitur ſemel, proinde pro quoto ſcribo unitatem, & multiplicando per hunc quotum, diviſorem a, fit iterùm a. quo ſubtracto ab: a, manet nulla. iterùm per a dividendo 2 ab, quotus erit: plus 2 b, & multiplicando per hunc quotum, diviſorem fit 2 ab. quibus ſubtractis à zz ab, manet nulla.

L. *Exemplum ſecundum.*

Diviſor	dividendus	Quotus
a + b	aa — bb	a — b

A in aa quotus - - -	+ a
a ductum in a + b fit	aa + ab.
Subtrahendo fit	0 — ab.
deponitur - - -	— bb.
a in — ab quotus - - -	— b.
— b ductum in a + b fit	— ab — bb.
hoc ſubtracto manet	0 0.

SCHOLION.

LI. SI quantitas aliqua non ſit exactè diviſibilis, ſed remaneat aliquid, tunc illud eſt ſcribendum poſt quotum, per modum fractionis, uti diximus § 47.

CAPUT III.

De potentiis, seu dignitatibus arithmeticis & earum radicibus.

LII. DOctrinam hanc præmittendam censuimus doctrinæ, de proportionibus; eò quod fieri possit, ut petatur à nobis inter duos numeros medius proportionalis: qui cùm inveniri non possit, sinè extractione radicis quadratæ, necessariò videtur præmittenda doctrina de potentiis.

LIII. Potentiæ igitur in eo consistunt, quod quæcunque quantitas numerica, si consideretur sinè respectu, quòd sit multiplicata, vel multiplicanda: dicitur potentia nulla. Si verò intelligatur multiplicata per unitatem, vel multiplicanda per semetipsam, dicitur: prima potentia, sive radix, aut latus.

LIV. Quod si jam quiscunque numerus, multiplicetur per semetipsum, v. g. 2 per 2, factum quod inde enascitur, vocatur quadratum; seu 2da potentia. Si hoc factum, seu 4, iterum multiplicetur per 2, factum 8, erit 3 potentia, seu cubus. Si cubus denuò multiplicetur per 2 factum vocatur 4 potentia. Et ità porrò, quinta, & sexta. &c. ex quo sequitur quod hæc radix, si comparetur cum 2da potentia, erit radix 2da, seu quadrata. Si cum tertia potentia, erit radix tertia, seu cubica. Si cum quarta, erit quarta. Quærere igitur radicem 2dam, numeri 4, idem eſt, ac quærere, quis ſit ille numerus, qui per ſemetipſum multiplicatus, faciat 4. Idem eſt, de aliis quibuscunque radicibus.

Cnrollarium Primum.

LV. Ex his ſequitur, non cujuscunque numeri exhiberi poſſe radicem petitam. Sic licèt v. g. numeri 8, poſſit aſſignari tertia, vel cubica radix, nempe 2. non poteſt tamen dari in numeris, radix 2da. Quia nullus numerus, per ſemetipſum multiplicatus, producit 8. Imò dantur multi numeri, quorum nulla radix, numeris exprimi poteſt, talis eſt v.g. 12.15 &c.

Corollarium Secundum.

LVI. Sequitur 2do præter duo radicum genera, nempe rationalium, quæ nempe numeris exhiberi poſſunt, ut radix 2da, 4, quæ eſt 2. Et irrationalium, quæ nimirùm numeris exhiberi non poſſunt, poſſunt tamen lineis, ut eſt radix 2da 12. Dari etiam radices imaginarias, vel impoſſibiles, quæ nullo modo exhiberi poſſunt, utpote cùm ſint impoſſibiles. Talis eſt v. g. radix 2da, numeri – 4, vel – 8. Nam vel talis quantitas, quæ eſſet radix, eſſet poſitiva, vel negativa. Poſitiva eſſe non poteſt, quia poſitivum multiplicatum per poſitivum, producit quantitatem poſitivam. Eodem modo, cùm negativum

tivum multiplicatum per negativum, faciat positivum, utì ostendimus § 41, & 44. Quantitas negativa -4, -8, ex nulla radice in se ducta produci potest.

Corollarium Tertium.

LVII. Ex quo sequitur ulterius, quod licèt quantitatis negativæ radix 2da, sit imaginaria, & impossibilis. Non sit tamen impossibilis, ejusdem quantitatis negativæ, radix 3, vel cubica. Cùm enim v. g. -2, multiplicatum per -2, faciat $+4$. Clarum est: quod si hoc productum rursùm multiplicetur per radicem -2, prodeat factum -8. utì ostendimus § 40, & 42. Ex quo generalis Regula hæc nascitur, quantitatum negativarum, potentiarum numero parium, v. g. 2dæ, 4tæ, 6tæ, radices sunt imaginariæ. Imparium verò ùt: 3tiæ, 5tæ, 7mæ, radices sunt veræ. Licèt negativæ.

Harum tamen imaginariarum, insignes sunt usus. Nam præterquam, quod in Arithmetica demonstrent impossibilitatem Problematum, in Geometria demonstrant flexus, & curvaturas curvorum.

SCHOLION I.

LVIII. Cum radices multorum numerorum exhiberi non possint, adhiberi solent signa, quibus exprimantur radices signũ tale est: $\surd$. ut verò sciatur quota radix

 intel-

intelligatur, ponuntur ſuper hoc ſignum numeri, ejus potentiæ, cujus radicem deſignat. Sic: ut intelligatur radix 2dæ potentiæ, vel quadrata, ponitur ſuper ſignum radicale, $\sqrt[2]{}$ vel etiam nullum ſignum. Si tertiæ potentiæ, $\sqrt[3]{}$ ſi quartæ, $\sqrt[4]{}$. Qui numeri exponentes vocantur. v. g. $\sqrt[2]{12}$. $\sqrt[3]{8}$. &c eodẽ modo exprimuntur potentiæ. v. g. 3^2, vel a^2, intelligitur quadratum. 2^3, vel a^3, cubus. &c.

SCHOLION II.

LIX. UT autem extractio radicum melius procedat, habenda eſt ad manum tabula potentiarum, ut vocant digitorum; nimirùm numerorum naturalium, uſque ad 9. Quam proinde hìc apponimus.

TABULA
Poteſtatum digitorum in numeris.

1a.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2a.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3a.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4a.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

PROBLEMA PRIMUM.

Radicem quadratam extrahere ex dato quadrato.

LX. ANtequam ad reſolutionem hujus problematis in numeris accedamus,

mus, considerabimus partes, aut membra, ex quibus quadratum aliquot binomium componitur. Quod ut clariùs evadat, elevabimus binomium ad 2dam potentiam. Si igitur a † b, multiplicetur per a † b, prodibit quadratum. aa † 2ab † bb. Cujus tria sunt elementa, nempe: aa quadratum primæ literæ, deinde 2ab, productum ex duplo primæ literæ, in 2dam. Et tandem bb, quadratum 2dæ literæ.

LXI. Ex his eruitur methodus extrahendi √ quadratam, ex quocunque binomio, trinomio, aut alio polinomio. Sit enim quadratum binomium. XX † 2 Xy † yy.

Quoniam XX est quadratum primæ literæ, cujus radix est, X adeoque scripto pro prima nota radicis, X, & ex X, facto quadrato XX, eóque subtracto ab XX, manet residuum 2X y † yy. Unde cum 2 X y sit factum ex 2 X, in y, accipitur duplum radìcis inventæ pro divisore, nempe: per 2 X dividitur. 2 Xy † yy ubi deprehenditur quotus esse y, quo quoto ducto in 2 X, prodit factum: 2 X y, quod subscribitur sub 2 Xy. Et insuper ducto y, in se ipsum, fit yy, quod scribitur infra yy. Tandem subtractione facta manet o ut in schemate.

	Quadratum.	RadiX.
	XX † 2 Xy † yy	X † y.
Quotus	- - - - - - - -	X.
Quadratum	de X $\frac{XX}{o}$	

 Divi-

Divisor duplum X 2 X.
Quotus - - - - - y.
Factum ex 2 X in y - - 2 X y.
Quadratum y - - - - y y.

Subtractione facta manet o o.

Eodem modo fit quadratum trimonium.

Quadratum XX † 2Xy † yy † 2 Xz † 2 y z † zz |
Quotus primus - - - - - X.
Quadratum de X - XX.
Subtracto hoc quadrato tollitur XX.
Divisor 2 X.
Quotus - - - - - - - y.
Factum ex 2 X in y fit 2 X y.
Quadratum y - - y y summa 2 X y † yy.
Subtractione facta manent 2 X z † 2 y z † zz.
Divisor 2 X † 2 y.
Quotus, seu tertia radicis litera: - - z.
Factum ex z, in 2 X † 2 y, - 2 X z † 2 y z.
& tandem quadratum z - - zz.
Quibus subtractis manet: - o.

COROLLARIUM.

LXII. EX his apparet, differentiam inter divisionem ordinariam, & extractionem radicis, in eo esse. *Primò* quod ibi divisor detur, hìc inveniri debeat. *Secundò* cum in extractione primæ notæ radicalis, nullus adhuc divisor dabatur, hinc solum quadratum primæ notæ, subtrahitur, à dato quadrato. *Tertiò* denique quod cum pro invenienda nota 2da, habeatur jam divisor, præter multiplum divisoris,

per

per inventam notam radicis, debeat etiam ſubtrahi à quadrato dato, quadratum notæ radicis, neo-inventæ. Et tandem quod, pro ulteriore diviſore, inveniendo, debeat accipi duplum; utriuſque notæ radicis, aut quot quot ſunt jam inventæ. Si ſit quadratum polinomium.

Aplicatio Regulæ ad extrahendas radices in numeris.

LXIII. OBſervandum hìc 1mò: quod quadratum maximæ radicis mononomiæ, nempe: 9. conſtet duabus notis, nempe: 81. adeoque ſi detur quadratum aliquod, quod pluribus notis conſtat, quam duabus, illius radix eſt major, quam mononomia. Si conſtet pluribus quam quatuor, radix major eſt quam binomia, & ità porrò.

LXIV. Obſervandum 2dò: quod quadratum datum dividi debeat in ſua membra, à dextris incipiendo, & pro quolibet membro duas notas aſſignando, ultimum tandem membrum ſiniſtram versùs, poteſt unica nota conſtare. Si ſint notæ numero impares.

LXV. Obſervandum 3tiò: quod poſt ſubtractum quadratum primæ notæ radicalis. Poſtquam ad reſiduum, ſi quod eſt, deponitur proximum membrum, duabus notis conſtans, non debeat hoc totum membrum dividi, per duplum radicis inventæ, ſed ultima nota, dextram versùs, reſecari debeat. Eò quod ab hoc membro, non ſolùm multiplum diviſoris, ſubtrahi debeat. Sed etiam quadratum notæ radicalis, inveniendæ. Quod ſi depoſitis duabus notis, & ultima reſciſſa, diviſor major ſit, membro dividendo, ſignum eſt, pro ſecunda nota radicali, debere poni o. Et tunc aliæ duæ notæ adjunguntur, ad membrum dividendum. His jam præmiſſis, rem aggredimur, præmiſſa Regula Algebraica. Nempe quadrato literali, ut quid agendum ſit ſciatur. Sit igitur Regula aa † 2 ab † bb.

LXVI. Quadratum numericum in membra 4. diviſum: - - 49, 80, 12, 49.
Quadratum latens
in primo membro eſt - 49.
Ejus radix ex (§ 59.) - - - 7.
Quadrato ſubtracto reſtat - oo.
Deponitur 2dum membrum - 8, o.
Diviſor duplum quoti - 14.
Quotus - - - - - o.
Membro priori additum 3tium - 8o1, 2.
Diviſor duplum quoti - 14o.
Quotus ſeu 3tia nota radicalis - - 5.
Multiplum diviſoris per 5. - 7oo.
Quadratum novi quoti - - - 25.

Subtractione facta reſtat - 987.
Addito ultimo membro fit - - 9874,9.
Ultima nota reſecta - - 9874,9.
Duplum quoti totius 141o.

Quo-

Quotus - - - -	7.
Multiplum divisoris - -	9870.
Quadratum novi quoti - -	49.
Subtractione facta restat	00000.

Adeoque radix quadrata numeri popositi est - - - 7057.

LXVII. Quod si post ultimum membrum depositum, facta subtractione, remaneat aliquid. Signum est, talem numerum, non esse quadratum. Proinde non posse perfectam radicem quadratam exhiberi. Sed tunc utendum est approximatione, ut nimirùm illi residuo, adjungantur duæ nullæ, tum operatio procedit ut ante. Hac solùm differentia, quod ille quotus, designabit decimas partes unitatis. Si adhuc duæ addantur nullæ, quotus designabit centesimas, post alias duas, millesimas. Et ità porrò. Et tunc certus sum, me à vera radice, non aberrare una millesima. Sit in exemplo.

LXVIII. Extrahenda radix ex -	14.
Quadratum latens est 9, cujus radix - -	3.
Quadratum 9 subtractum à 14 restant	5.
residuo additæ duæ nullæ - -	500.
Duplum radicis seu divisor - -	6.
Quotus seu radicis decimalis nota -	$\frac{7}{10}$
Multiplum divisoris - - - -	42.
Quadratum quoti seu notæ radicalis -	49.

Sub-

Subtractione facta restat - -	31.
Huic residuo adjunctæ duæ nullæ dant	310,0
Duplum quoti seu utriusq; notæ radicis	74.
Quotus - - - - -	$\frac{4}{100}$
Multiplum divisoris - - -	296.
Quadratum quoti - -	16.
Subtractione facta restant -	124.
Huic residuo additæ duæ nullæ faciũt	1240,0
Duplum quoti totius & divisor	748.
Quotus - - - -	$\frac{1}{1000}$
Multiplum divisoris per quotum -	748.
Quadratum quoti - -	- - 1.
Subtractione facta restat -	49 19.

Est igitur radix de 14. prope vera nempe

$$3\,\frac{7}{10}\,\frac{4}{100}\,\frac{1}{1000} \text{ seu } 3\,\frac{741}{1000}$$

adeoque non aberrat à vera una millesima.

PROBLEMA SECUNDUM.

Extrahere Radicem cubicam.

LXIX. Fiat ex binomio v. g. a † b quadratum, nempe: aa † 2 ab † bb tum hoc quadratum multiplicetur iterum per a † b. Et fiet cubus aaa † 3 aab † 3 abb † bbb ex quo constat, imò: ex quibus elementis componatur omnis quantitas cubica. Adeoque quomodo resolvi debeat. Nimirùm

rùm diviſo in ſua membra numero, ex quo extrahenda eſt radix cubica, in primo membro latere aaa, ſeu cubum, notæ primæ. Qui facilè invenitur, ex tabula § 59. poſita, una cum ſua radice.

LXX. 2dò: quod numerus cubicus in ſua membra ſic dividendus ſit. Ut ſingulo membro, à dextra incipiendo, tres notæ aſſignentur. Eò quod maxima nota mononomia, nempe: 9, cubum ſuum extendat, ad 3 notas. Nempe: 729. Ex quo etiam ulterius ſequitur, quod ſi propoſitus numerus cubicus, plures notas habeat, quam tres, ejus radicem non eſſe mononomiam.

LXXI. 3tiò: quod inventa, prima nota radicis cubicæ, ut inveniatur diviſor, pro invenienda 2da, debeat dicta prima nota per ſeipſam multiplicari, ſeu debeat ex illa fieri quadratum. Tum hoc quadratum debeat per tria multiplicari, ut fiat triplum quadratum radicis jam inventæ.

LXXII. 4tò denique: cùm præter multiplum diviſoris, per notam inveniendam; debeat etiam ſubtrahi triplum radicis jam inventæ, in quadratum notæ inveniendæ. Et inſuper cubus notæ inveniendæ. Ex membro dividendo reſecari debeant duæ notæ. Ut diximus de una in quadratæ radicis extractione § 65. res exemplo illuſtratur poſita ante oculos regula: $a^3 \dagger 3\,a^2\,b \dagger 3\,ab^2 \dagger b^3$

LXXIII.

LXXIII. Sit cubus datus in membra divisus - - - 12,812,904.

A³ seu cubus latens in
primo membro - - 8.
Cujus radix a ex §59. est - - 2.
Cubus subtractus
relinquit - - - 4.
Depositum sequens membrum
resectis ultimis 2 notis - - 48,12.
Divisor per §71 - - 12.
Quotus seu altera nota radicis - - 3.
Multiplum divisoris per 3, - - 36.
Triplum notæ prioris in quadratum recens inventæ notæ 3. - - 54.
Cubus notæ inventæ 3 - - 27.
Subtractione facta restat - 645.
Residuo huic adjunctum ultimum membrum - - - 6459,04.
Divisor triplum quadratum radicis inventæ - - 1587.
Quotus seu ultima nota radicis - - 4.
Multiplum divisoris per 4 - - 6348.
Triplum quoti in
quadratum radicis inventæ ducti 1104.
Cubus quoti - - - - 64.
Quorum subtractione facta restat 000000.
Est igitur radix cubica numeri suprapositi - - - 234.

Quod si aliquid remaneat facta ultima subtractione utendum est aproximatione uti de extractione radicis quadratæ diximus

mus § 68. hac ſola differentia. Quod in extractione radicis cubicæ, debeant reſiduo adjungi tres ooo.

SCHOLION PRIMUM.

LXXIV. EAdem facilitate extrahetur radix 4tæ, aut 5tæ potentiæ. Modo binomium a†b elevetur ad quartam, aut 5tam potentiam. Clarè enim apparebit, quomodo in operatione procedendum ſit. Utì apparuit in extractione radicis cubicæ.

SCHOLION SECUNDUM.

LXXV. PRoba an ritè facta fuerit operatio, in eo conſiſtit. Et quidem in radice quadrata, ſi hæc per ſeipſam multiplicetur, & reſiduum ſi quod remanſit, poſt ultimam ſubtractionem, addatur debet prodire numerus, ex quo radix extracta eſt. In cubo ſi radix per ſeipſam multiplicetur, & productum denuò per radicem multiplieetur, ac producto addatur, ſi quid remanſit. Debet prodire numerus ex quo radix cubica extracta eſt.

CAPUT IV.

De Analyſi Arithmetica.

Definitiones.

LXXVI. PRima: Analyſis Arithmetica eſt ſcientia reſolvendi omnia Problemata Arithmetica per æquationem.

2da:

2da: Æquatio dicitur comparatio, duarũ quantitatũ æqualium, ut si sit $a = b$. Omnis ergo æquatio duabus partibus constat, una quæ comparatur, altera cui comparatur.

3tia: Si partes, vel elementa quantitatis ignotæ, sint unius dimensionis, id est non sint quadratæ, vel cubicæ, dicitur æquatio Simplex. Si sint plurium dimensionum, dicitur Composita. Hinc secundùm numerum dimensionum distinguuntur Problemata.

AXIOMATA.

LXXVII. PRimò: Si æqualibus addantur æqualia manent æqualia.

2. Si ab æqualibus auferantur æqualia manent æqualia.

3. Si æqualia multiplicentur per æqualia manent æqualia.

4. Si æqualia dividantur per æqualia manent æqualia.

5. Æqualium potestates similes sunt æquales.

6. Æqualium radices similes sunt æquales.

7. Quæ sunt æqualia uni tertio sunt æqualia inter se.

8. Si loco æqualis substituatur æquale manet æquale.

9. Si inæqualibus addantur æqualia manent inæqualia.

10. Si

10. Si ab inæqualibus auferantur æqualia manent inæqualia.

11. Si inæqualia multiplicentur, vel dividantur per æqualia manent inæqualia.

REGULÆ GENERALES ANALYSIS.

LXXVIII. PRimò: Quantitates ignotæ, seu quæsitæ, exprimuntur ultimis alphabeti literis. X, y, z. Quantitates notæ, per numeros, vel per primas literas alphabeti. A, b, c. Quæritur exempli gratiâ: hæreditas trium filiorum. Quorum medio, legavit Pater, duplum tantum, quantum senissimo. Et minimo tantum, quantum utrique simul, & adhuc tres aureos. Summa verò, quam reliquit, fuit 63 aureorum.

LXXIX. 2dò: Exprimatur Problema, secundùm conditiones, quibus proponitur. Vocetur ergo hæreditas senissimi X, erit medii 2 X. minimi verò 3 X † 3. proinde juxta conditionem Problematis erit: X † 2X † 3X † 3 = 63.

LXXX. 3tiò: Inveniendus est ergo valor literæ X. Pro quo inveniendo, in eo elaborandum est, ut litera ignota X, sola ex una parte æquationis remaneat. Ex altera verò parte, sint omnes termini noti. Quod ut fiat, termini ignoti ejusdem speciei reducantur, ad unum terminum, & ad eandem partem. Si in utraque parte fuerint.

rint. Sic in noſtro exemplo $X + 2X + 3X + 3 = 63$ erit: $6X + 3 = 63$.

LXXXI. 4tò: Termini noti ſeparentur ab ignotis, & quidem ſi fuerint conjuncti per additiouem, ſeparentur per ſubtractionem, & viciſſim. Ut in noſtro caſu $6X + 3 = 63$ ſubtrahendo ab utraque parte 3, erit $6X = 60$.

LXXXII. 5tò: Si terminis ignotis, adjuncti ſint noti per multiplicationem. Sepaɹandi ſunt per diviſionem, & viciſſim. Ut in allato exemplò, cùm X ſit multiplicatum per 6, divido utramque partem æqationis per 6. Erit $\frac{6X}{6} = \frac{60}{6}$ & dividendo totum per 6 erit $X = 10$. Inventus eſt igitur valor literæ $X = 10$ adeoque medius aquiſivit duplum, ſeu 20. Minimus tantum quantum uterque ſimul, & adhuc 3. ſeu 33 quorum ſumma facit: 63, nempe: ſummam à Patre relictam.

LXXXIII. 6tò: Si quantitas ignota, ſit elevata, ad aliquam poteſtatem, extrahenda erit, ex utraque parte radix, ejus poteſtatis, ad quam elevata eſt quantitas ignota. Ut ſi dicatur $XX = 4$ extracta undiq; radice fiet $X = 2$. Et ab oppoſito, ſi quantitati ignotæ, præfixum fuerit ſignum radicale, v.g. $\sqrt{X} = 3$. Elevanda eſt, utraq; pars, ad illam potentiam, quam denotat ſignum $\sqrt{}$. Ut in hoc caſu $X = 9$.

LXXXIV.

LXXXIV. 7mò: Si plures dentur literæ ignotæ, si fieri potest, ad unam reducendæ. Quod fieri potest, per substitutionem, æqualis pro æquali, ut si dicatur $X + y = 6$, Et $2X = y$.

Substituendo in prima æquatione $2X$, loco y erit $3X = 6$ adeoque $X = 2$. Et $y = 4$.

LXXXV. Atque his generales quidem Analysis regulæ, in resolvendis Problematis traditæ sunt. Usus tamen illarum, peculiarem quandam peritam requirit. Quæ non nisi frequentiore exercitatione, in resolutione Problematum, aquiritur. Pro qua, sugeremus nonnulla, ubi prius regulas proportionum, & fractionum scientiam, tradiderimus. Illud tamen peculiariter notandum censemus. Ut quid quid in una æquationis parte, factum fuerit, sive subtrahatur aliquid, sive addatur, itidem ex altera æquationis parte fiat. Præmisimus autem has regulas, scientiæ proportionum, quod hac qualicunque notitia, ad demonstrandas proportionum regulas uti velimus.

SECTIO II

De ratione, & proportione, tum Arithmetica tum Geometrica.

CAPUT I.

Definitiones.

LXXXVI. PRima: Cum quantitatem aliquam, cum altera comparamus,

 mus,

mus, dicimus nos conſiderare, unius, ad alteram relationem, vel rationem.

2da: Hujusmodi autem relationes, vel rationes poſſunt eſſe variæ. Sic ſi conſideremus inter duas quantitates præcisè differentiam, ſeu quantum una exceditur, ab alia: tunc dicitur Comparatio Arithmetica. Ut ſi comparemus 2 & 5, conſiderando quantum 2, excedantur à 5.

3tia: Sed ſi comparemus, quoties una quantitas contineatur ab alia, aut quoties alteram contineat; dicitur ratio, ſeu Comparatio Geometrica. Ut ſi conſideretur quoties 8, contineat 4, aut quoties 4 contineatur in 8.

4ta: Omnis itaque ratio, importat duos terminos. Primus ſeu qui comparatur, dicitur Antecedens. 2dus ſeu cui comparatur, dicitur Conſequens.

5ta: Atque ex his oritur proportio, quæ in duabus rationibus æqualibus conſiſtit. Et quidem quia 2 & 5 eodem modo differunt, ſicut 6 & 9. Hinc quantitates 2, 5, 6, 9. dicuntur arithmeticè Proportionales. Quia nimirùm eadem eſt differentia, inter 2 & 5, quæ eſt inter 6 & 9, nempe 3. Cùm ubique Antecedens, à ſuo Conſequēte deficiat ternario. Exprimimus hanc proportionem in numeris: 2, 5 ⊏ 6, 9. in literis a, b ⊏ c, d. ſi igitur differentia dicatur X,

&b

& b majus ſit quam a, poterit loco b ſubſtitui a † X ſicut loco 5. 2 † 3.

6ta: Eodem modo, ſi quoties una quantitas continet alteram, aut continetur in illa; toties tertia aliqua quantitas, contineat 4tam, aut contineatur in illa, dicuntur Proportionales geometricè: hinc quia 4 toties continetur in 8, quoties 3 in 6, quantitates 4 : 8 3 : 6. dicuntur geometricè Proportionales. Exprimitur hæc Proportio 4 : 8 = 3 : 6.

7ma: Porrò quotus ille, ex diviſione, ſive antecedentis per conſequens, ſive conſequentis, per antecedens, emergens, vocatur exponens rationis. Seu is exprimatur numeris integris, ſeu fractis.

8va: Exceſſus verò, quo ſe quantitates excedunt, in proportione Arithmetica, vocatur Differentia.

9na: Si omnes termini Proportionis, ſive Arithmeticæ, ſive Geometricæ, fuerint diverſi, dicitur Proportio diſcreta. Si verò unus terminus bis repetatur; dicitur Proportio continua. ut 8 : 4 = 4 : 2. vel Arithmetica 2, 5 = 5, 8.

10ma: Termini Homologi ſunt, antecedentes rationum, utì & conſequentes.

11ma: Si antecedens contineat exactè ſuum conſequentem aliquoties, ità ut exponens rationis ſit numerus integer, ſinè fractione: tunc dicitur eſſe in ratione multipla. In ſpecie ſi contineat bis, in ratione dupla, & ità deinceps. Si verò contineatur antecedens in conſequente bis, aut ter, dicitur in ratione ſubdupla, aut ſubtripla.

12ma: Si entecedens contineat ſuum conſequens ſemel, & præterea unam illius aliquotam: dicitur ratio ſuper particularis. Et in ſpecie ſi exponens ſit $1\frac{1}{2}$, dicitur ſeſqui altera, ut 6: 4 ſi contineat ſemel & unam tertiam ut 8: 6 cujus exponens eſt $1\frac{1}{3}$ dicitur ſeſquitertia.

13tia: Si antecdens contineat ſuum conſequens ſemel, & præterea plures illius partes aliquotas: dicitur ſuperpartiens. In ſpecie ſi exponens ſit $1\frac{2}{3}$ ut contingit in 5: 3. dicitur ſuperbipartiens tertias ſi exponens ſit $1\frac{3}{4}$ dicitur ſupertripartiens, quartas ut 7: 4.

14ta: Ex his fiunt aliæ compoſitæ. Ut multiplex ſuperpartiens, ut ſi ſit exponens $3\frac{2}{5}$ dicitur tripla ſuperbipartiens quintas qualis eſt 17: 5.

Si ratio ſit minoritatis, ſeu ſi antecedens minus ſit ſuo conſequente, proinde exponens purè fractus. Ut ſi quæratur ratio, 3 ad 5. Manent eædem denominationes, interpoſita ſolùm particula ſub. Ut in hoc

caſu

casu 3 : 5 dicitur subsuperbipartiens tertias. Et ità de reliquis.

15. Si exponens rationis sit unitas, sine ulla fractione adjecta. Dicitur ratio æqualitatis ùt 2 : 2.

16. Duæ quantitates æquales, multiplicatæ per eandem tertiam, dicuntur æquè multiplices.

AXIOMATA.

LXXXVII. PRimò: Duæ rationes æquales habent exponentes æquales.

2. Duæ quantitates æquales, dicunt eandem rationem ad unam tertiam.

3. Quantitates, quæ dicunt eandem rationem, ad unam tertiam, æquales sunt.

4. Duarum quantitatum illa major est, quæ dicit majorem rationem, ad unam tertiam.

5. Duæ rationes habentes eandem rationem, ad unam tertiam, dicunt quoque eandem rationem, inter se.

6. Duarum rationum illa major est quæ habet majorem exponentem.

CAPUT II.

De proportione Arithmetica.

LXXXVIII. CUm in Arithmetica ordinaria factores confundantur in summam, adeoque subducantur oculis, ii numeri, qui primo dati sunt: sive pro additione, ſive pro multiplicatione, aut ſubtractione. Proinde demonſtrationes non tam evidenter apparent. Hinc pro demonſtrationibus, utemur expreſſionibus algebraicis. Quod ad claritatem multum conducet. Nec in eo quidquam mutabitur. Siquidem perinde eſt, ſive dicam v. g. 5, ſive 3 † 2, aut 4 † 1. Eodem modo ſive dicam 3, ſive 5 — 2, idem dico. Et denique ſive factores per invicem multiplicem, ſive eos per invicem multiplicatos, à me intelligi notem. Ut ſi dicam bis tria ſunt 6 idem facio ac ſi dicerem à me intelligi 2 per 3 multiplicata, interpoſito inter hos duos numeros ſigno multiplicationis per § 31. nempe: 2. 3. His prænotatis ſit.

Theorema Fundamentale.

LXXXIX. Si ſint quatuor quantitates arithmeticè proportionales, dico ſummam extremorum, eſſe æqualem ſummæ mediorum.

Sint quantitates dictæ 2, 5 ∺ 6, 9.

Reſolvantur conſequentes, utpotè majores in ſuos antecedentes, cum addita differentia. Et fiet 2, 2 † 3 ∺ 6, 6 † 3. Quo poſito evidenter apparet, quod ſumma extremorum, debeat eſſe æqualis ſummæ mediorum. Cùm utrobique occurrant, iidem omninò numeri addendi. Nempe: 2 † 3 † 6 adeoque eadem ſumma. Q E D.

Uni-

Univerſaliter.

XC. Sit $a, b = c, d$ & differentia quæcunque generaliter vocetur X. Erit $b = a \dagger X$ & $c = d \dagger X$ per definitionem 5 numero 86. adeoque æquales, pro æqualibus ſubſtituendo: erit $a, a \dagger X = c, c \dagger X$.

Erit ſumma extremorum $a \dagger c \dagger X$.
Summæ mediorum - $a \dagger c \dagger X$ æqualis.

SCHOLION.

XCI. SI antecedentes majores ſint, conſequentibus, reſolvantur antecedentes in conſequentes, adjecta differentia, & idem prodibit.

Corollarium Primum.

XCII. SI termini ſint, in proportione arithmetica continua: ſumma extremorum, eſt dupla medii. Erit enim $a, b = b, c$ per definitionem 9 § 86.

Adeoque $a \dagger c = 2b$.

Quod manifeſtè apparebit, facta juxta § 90. ſubſtitutione. Quam hìc peragimus propter Corallurium ſequens.

Sint igitur $a, b = b, c$.
Erit etiam $a, a \dagger X = b, b \dagger X$.
Sed $b = a \dagger X$.
Ergo ſubſtituendo æquale, pro b, erit $a, a \dagger X = a \dagger X, a \dagger 2X$.
Ubi ſumma extremorum, $2a \dagger 2X$.
Mediorum - - $2a \dagger 2X$.
Sunt adeò continuæ proportionales. $a, a \dagger X, a \dagger 2X, a \dagger 3X$.

Nempe per continuam differentiæ additionem.

In numeris idẽ apparet probanti per §. 89.

CorollaRium Secundum.

XCIII. Cum progressio Arithmetica continua procedat, in crescentibus, per continuam additionem differentiæ: & in decrescentibus, per continuam subtractionem, ejusdem differentiæ. Ut ex priore numero apparet: Sequitur primò. Si sint quotcunq; quantitates, in proportione arithmetica continua; quod sum̃a extremorum, sit æqualis sum̃æ, secundi & penultimi. Item tertii & antepenultimi. Et ità porrò, summis terminorum, æqualiter ab extremis distantium. Ut manifestè apparet si modò ponatur progressio continua. Quæ sit a, a+X, a† 2X, a† 3X, a† 4X, a†5 X, a† 6X quorum sum̃a extremorum est 2 a † 6 X.

Secuudi & penultimi - - 2 a † 6 X.

Tertii & antepenultimi - 2 a † 6 X.

Duplũ medii cùm sit numerus impar 2 a† 6X.

Corollarium Tertium.

XCIV. Sequitur 2dò: Quod dato termino primo, ultimo atque numero terminorum, proportionis arithmeticæ, facilè inveniri possit summa omnium terminorum. Si nimirùm summa primi & ultimi, multiplicetur per dimidium, numerum terminorum. Sic si quis quærat, juxta exemplum § superiore datum. Septem decuriones

nes adhibiti ſunt, pro reo puniendo.Ità ut primus inflixerit unum ictum, ſecundus duos, tertius tres & ità porrò, ut ſeptimus ſeptem. Quæritur quot ictus reus aquiſiverit.

Addendo, primum & ultimum, nempe: 1 & 7 ſunt 8. Hæc multiplicando per dimidium terminorum. Nempe $3\frac{1}{2}$

facit - 28.

ſeu numerum ictuum quos reus aquiſivit. Idem eſt de quocunque alio numero terminorum, aut differentia.

PROBLEMA PRIMUM.

XCV. DAtis tribus terminis invenire quartum arithmeticè proportionalem. Sint termini 3. 5. 7. quæſitus X. erit ergo 3, 5 = 7, X.

Proinde ſummæ mediorum & extremorum æquales

adeoque 3 † X = 5 † 7 ſeu 12.

& ſubtrahendo 3 utrobique erit X = 5 † 4 = 9.

Univerſaliter.

Sint datæ quantitates a b c quæſita X.

ergo - - a, b = c, X.

proinde - - a † X = b † c.

adeoque erit - - X = b † c − a.

PROBLEMA SECUNDUM.

XCVI. DAtis duabus quantitatibus, invenire tertiam arithmeticè proportionalem. Sint

Sint dati numeri 3, 5. tertius quæſitus X.
erit ergo $3, 5 = 5, X$.
proinde $3 + X = 10$.
& ſubtrahendo 3. $X = 7$.

Univerſaliter.

Sint datæ a, b quæſita X.
ergo - - $a, b = b, X$.
proinde $a + X = 2b$.
& ſubtrahendo a erit $X = 2b - a$.

PROBLEMA TERTIUM.

XCVII. DAtis duabus quantitatibus, invenire mediam arithmeticè proportionalem.

Sint quantitates datæ 3 & 7. quæſita X.
erit ergo - - $3, X = X, 7$.
proinde - - $2X = 10$.
& dividendo per duo $X = 5$.

Univerſaliter.

Sint quantitates datæ a & b quæſita X.
erit - - - $a, X = X, b$.
ergo - - - $a + b = 2X$.
& dividendo per 2. $\frac{a + b}{2} = X$.

PROBLEMA QUARTUM.

XCVIII. DAto termino primo, v. g. 2. Ultimo 20. Et numero terminorum 7. Invenire differentiam. Cùm termini in progreſſione arithmetica creſcant, per continuam additionem differentiæ, ad terminum primum. Per § 93. clarum eſt terminum ultimum, tot habere differen-

ferentias, quot ſunt termini minus uno. Eo quod prima differentia addatur ſecundo, tertio duæ, quarto tres, & ità porrò
erit ergo terminus ultimut 2, & 6 differentiæ. Dicatur differentia X.
proinde $2 \dagger 6X = 20$ ſeu ultimo termino
ſubtrahendo 2 erit $6X = 18$.
& dividendo per 6, erit $X = 3$.

Univerſaliter.

Sit primus $= a$ ultimus $= u$ numerus terminorum $= n$ differentia quæſita $= X$.
erit $a \dagger (n-1). X = u$ hoc eſt $a \dagger nX - X = u$.
& ſubtrahendo a - - $nX - X = u - a$
ac dividendo per $n - 1$ erit $X = \frac{u-a}{n-1}$

PROBLEMA QUINTUM.

XCIX. DAto termino ultimo 23. Primo 2. Et differentia 3.
Invenire numerũ terminorũ. vocetur hic X
erit terminus ultimus $2 \dagger (X-1). 3$ hoc eſt
$2 \dagger 3X - 3 = 23$ ſeu U
& ſubtrahendo ubique 2 - - erit $3X - 3 = 21$
addendo 3 erit $3X = 24$.
dividendo per 3 erit $X = 8$ ſeu numerus terminorum eſt 8.

Univerſaliter.

Si terminus primus $= a$. Ultimus U. Differentia $= d$. Numerus terminorũ quæſitus X.
erit $a \dagger (X-1). d = u$ hoc eſt $a \dagger dx - d = u$.
adeoque $X = \frac{u \dagger d - a}{d}$

PRO.

PROBLEMA SEXTUM.

C. DAto termino primo, v.g. 2. Et differentia 3. Invenire terminum, v.g. 20, progressionis. Sit ille X.

erit ergo per § 98. $X = 2 + (19) . 3 = 57 + 2 = 59$.

eadem methodo, quilibet alter invenitur.

PROBLEMA SEPTIMUM.

CI. DAta differentia 3. Numero terminorum 8. Et ultimo termino 23. Invenire terminum primum. Sit ille X.

erit ergo terminus ultimus per numerum 98 $= X + (8 - 1) . 3$ seu $X + 21$.

Sed terminus ultimus ex hypotesi $= 23$.

Subtrahendo 21 erit - - $X = 2$ seu primus terminus. *Universaliter.*

Sit differentia d. Numerus terminorum N. Ultimus U. quæsitus X.

erit $u = X + (n - 1) . d = X + nd - d$.

ergo $u + d - nd = X$.

PROBLEMA OCTAVUM.

CII. DAto termino primo 2. Numero terminorum 8. Et summa 100. Invenire differentiam. Hæc vocetur X.

Quoniam per § 98. terminus ùltimus est. $2 + 7X$ cui addito prlmo. Erit $(2 + 2 + 7 X) . 4 = 100$ per numerum 94.

ergo $8 + 8 + 28 X = 100$.

subtrahendo 16 - - $28 X = 84$.

& dividendo per 28 – erit $X = \frac{84}{28} = 3$

Uni-

Universaliter.

Sit terminus primus a. Numerus terminorum n. Summa S. Differentia quæsita X.

Erit tetminus ultimus $a + (n - 1) . X$ seu $a + nX - X$.

Cui addendo primum, seu a. Erit $2a + nX - X$. Quo multiplicato per mediũ, n seu $\frac{n}{2}$

erit $\frac{2an}{2} + \frac{nnX}{2} \frac{-nX}{2} = S$ seu summæ.

Et multiplicando per 2 erit $2an + nnX - nX = 2S$.

Subtrahendo 2 an. erit $nnX - nX = 2S - 2an$.

Dividendo per $nn - n$ erit $X = \frac{2S - 2an}{nn - n}$.

In hoc casu $2S = 200. - 2an$ seu $32 = 168$ divisum per $nn - n$ seu $64 - 8 = 56 = 3$.

CAPUT II.

De Proportione Geometrica.

CIII. SIcut in Proportione Arithmetica, usi sumus expressionibus Algebraicis, ad indicandas differentias; ità hìc utemur Signis, locò ipsarum multiplicationum, aut divisionum. Nam idem est, sive dicam 8. sive 4. 2. aut etiam, sive dicam 4, sive 8: 2. cùm hæc idem omninò significent. Hæ temen expressiones, ad claritatem multum conducent. Recolendæ hìc sunt, definitiones, §86. traditæ. Præsertim 6. & 7.

Theo-

Theorema primum fundamentale.

CIV. SI ſint quatuor quantitates proportionales, factum extremorum, æquatur facto mediorum. Sint quantitates 8 : 4. = 6 : 3
reſolvantur antecedentes, in ſuos conſequentes; cum indicata multiplicatione, per exponentem rationis.
erit in hoc caſu 4. 2:4 = 3.2: 3
factum extremorum erit 4. 2. 3 ſeu 24.
factum mediorum - - 4. 3. 2 ſeu 24
adeoque æqualia. Cum iidem omninò numeri, per invicem multiplicandi comparеant Q E D.

Univerſaliter.

Sit a: b = c: d cum hæ quantitates ſint proportionales, habebunt exponentes æquales. Et ſuppoſito, quod antecedentes, majores ſint ſuis conſequentibus. Cùm conſequentes ſint diviſores, & exponens rationis, ſit quotus. Clarum eſt quod ſi hi diviſores, multiplicentur per quotum, evadant æquales diviſis. Proinde ſuis antecedentibus. Adeoque illorum loco ſubſtitui poſſunt. Subſtituendo igitur loco a, mb. Utpote cum m, ſupponatur eſſe quotus, & b diviſor, & loco c, md clarum eſt quod exurgat hæc proportio priori æqualis mb: b = md: d
& factum extremorum = mbd ſeu ad
factum mediorum = bmd ſeu bc

adeo-

adeoque æquale cùm ſint iidem omninò factores Q E D.

Si conſequentes ſint majores; reſolvantur conſequentes, in antecedentes: indicata multiplicatione, per exponentem.

Corollarium.

CV. SI termini ſunt in proportione continua, factum extremorum, æquatur quadrato medii. Cum in hoc caſu, 2dus terminus bis repetatur.

Sit enim $a : b = b : c$
erit etiam $ac = bb$
aut in numeris $8 : 4 : = 4\ 2$
erit factum extremorum $8.2 = 16$
factum ſeu quadratum medii $4.4 = 16.$

SCHOLION.

CVI. HOc theorema, fundamentum eſt, Regulæ aureæ, aut trium. Datis ſcilicet tribus terminis, inveniendi quartum, aut datis duobus inveniendi, tertium continue proportionalem. Aut deniq; datis duobus, inveniendi medium proportionalem.

Vocata porrò eſt Regula aurea. Ob ingentem ejus uſum, tum in ſcientiis ſublimioribus, tum in omni vitæ Civilis commercio.

Dentur igitur tres quantitates, 3, 6, 9. Et invenienda ſit quarta. Ad quam, eandem rationem dicat, 9. quam 3 : 6

vocetur illa X

erit ergo - - $3:6=9:X.$

& per numerum 104 - - $3X=54$

& dividendo per 3 - erit $X=\frac{54}{3}=18$

Universaliter.

Sint datæ quantitates - a. b. c

erit ergo - - $a:b=c:X$

proinde - - $aX=bc$

& dividendo per a - - $X=\frac{bc}{a}$

Seu multiplicatur 2da, per tertiam, & dividitur per primam.

CVII. Eodem modo datis duabus quantitatibus invenitur tertia continue proportionalis. Si nimirùm 2da quantitas bis ponatur, & per ſeipſam multiplicetur, ac factum dividatur, per primam quantitatem: quotus dabit, tertiam continue proportionalem.

Sit enim - - - $3:6=6:X.$

Erit - - - $3X=36.$

& divid. per 3 - $X=12.$

Universaliter.

Sit - - - $a:b=b:X.$

erit - - $aX=bb.$

& divid. per a - $X=\frac{bb}{a}$

CVIII. Datis denique duabus quantitatibus invenitur media proportionalis; ſi datæ duæ quantitates ponantur pro extremis,

mis, & quæsita ignota, sub nomine X, in medio bis repetatur. Sint enim quantitates 2 & 8.

Erit ergo $2 : X = X : 8$
proinde $XX = 16$
& extrahendo radicem $X = 4$.

Universaliter.

Sit $a : X = X : b$
erit $XX = ab$.
ergo $X = \sqrt{ab}$.

Ubi adverte, quod cùm non possit cujuslibet numeri, radix quadrata exhiberi, ut diximus (§ 55.) Nec posse in numeris, quarumcunque quantitatum inveniri mediam proportionalem. Sed tantùm illarum, quarum factum extremarum est quadratum.

Theorema secundum fundamentale.

CIX. SI sint quatuor quantitates, quarum factum extremarum, sit æquale facto mediarum. Dico illas geometricè proportionales.

Sint illæ quantitates 2, 3, 4, 6
erit necessario - - $2 : 3 = 4 : 6$
vel - - $2 : 4 = 3 : 6$.

Si neges, tribus datis 2, 3, 4 vel 2, 4, 3 quæratur 4ta proportionalis per § 107 quæ dicatur X.

erit ergo $2 : 3 = 4 : X$
vel - $2 : 4 = 3 : X$.

in utraque æquatione factũ mediorũ est 12
Extremorum - - - 2X

 ergo

ergo - - $2X = 12$
dividendo per 2 - - $X = 6$
ſunt igitur quantitates 2, 3, 4, 6. Proportionales.

Univerſaliter.

Sint 4 quantitates a, b, c, d. quarum factum extremarum ad ſit æquale facto mediarum bc dico has eſſe geometricè proportionales.

Si neges? datis tribus a, b, c. inveniatur 4 proportionalis per § 107. quæ dicatur X.

Erit ergo $a : b = c : X$
& per num: 104. $aX = bc$
Sed ex hypoteſi $ad = bc$
ergo per Axioma 7. §. 77. $aX = ad$
& divid. per a - - $X = d$
eſt igitur etiam - $a : b = c : d$.

Corollarium Primum.

CX. FActores igitur, duorum productorum æqualium, v. g. $ad = cb$ ſemper poſſunt reſolvi in proportionem, itâ tamen, ut ſicut eſt unus factor v. g. a. ad factorem alterius facti, v. g. b itè reciprocè alterius facti ſecundus factor c. eſt ad reſiduum factorem, primi facti d. nempe: $a : b = c : d$.

Unde quæcunque æquatio in proportionem reſolvi poteſt. Sicut proportio in æquationem.

dentur enim $abcd = efghi$
erit ergo - $a : fgh = ei : bcd$

&

& - - ac: ef = ghi: bd
& - - ad: f = eghi: bc.
& ità porrò.

In numeris perinde eſt.

Sint enim v. g. 12 = 12
erit ergo 1: 3 = 4: 12
vel - - 2: 4 = 3: 6
vel - - 6: 1 = 12: 2

reſolvendo ſemper 12. in ſuos factores.

S C H O L I O N.

CXI. Bina hæc Theoremata nonnihil fuſiùs deduximus, ut tantò magìs memoriæ imprimantur. Ob ingentem eorum utilitatem, in inverſa, non ſolùm Arithmetica, ſed & Geometria.

Corollarium Secundum.

CXII. Ex hoc ſequitur ulterius
ſi ſit - - - a: b = c: d
erit etiam alternando a: c = b: d.

Cum hac ratione iidem factores concurrant ad factum mediorum qui prius & iidem ad extremorum.

Corollarium Tertium.

CXIII. Imò etiam invertendo b: a = d: c cum in hoc caſu eveniat quod ad ſit = bc ut in primo loco poſita proportione fuit.

In numeris idem apparet.

Accipiamus enim quamcunque proportionem ex numeris paulò ante poſitis
v. g. 2: 4 = 3: 6

Alternando erit $2:3=4:6$
& invertendo $3:2=6:4$.

Ubi vides, quod non obſtante hac terminorum permutatione, ſemper veniant multiplicanda 3 per 4, & 2 per 6. Adeoque ſicut primo fuit æquale, factum extremorum, facto mediorum, ità etiam permutatis ſic terminis debeat eſſe.

Theorema III.

CXIV. Si ſit - - $a:b=c:d$
vel - - $4:2=6:3$
erit etiam componendo $a+b:b=c+d:d$
vel - - $4+2:2=6+3:3$.

Demonſtratio.

Cum conſequentes addantur ſuis antecedentibus, neceſſe eſt ut antecedentes, una vice pluries contineant ſuos conſequentes. Proinde exponentes rationis unitate augeantur, adeoque ſi prius fuerunt exponentes æquales, etiam aucti ſic unitate erunt æquales, adeoque quantitates auctæ, proportionales.

Theorema IV.

CXV. Si ſit - - $a:b=c:d$
vel - - $4:2=6:3$
erit etiam ſubtrahendo $4-2:2=6-3:3$.

Demonſtratio.

Cum conſequentes ſubtrahantur, à ſuis antecedentibus, neceſſe eſt, ut una vice minus contineantur in illis, proinde exponentes rationis unitate minuantur. Adeo-

qu

que si prius exponentes fuerunt æquales, etiam ut unitate minuti, æquales erunt, proinde quantitates proportionales.

SCHOLION.

CXVI. POssunt etiam bina hæc Theoremata demonstrari per § 104. per substitutionem consequentis loco antecedentis.

CXVII. THEOREMA V.

Si sit - - $a : b = c : d$

& - - $e : f = g : h$

erit etiam - $ae : bf = cg : dh$.

Seu si quatuor proportionales multiplicentur per alios quatuor proportionales facta erunt proportionalia.

Demonstratio.

Est enim per § 104. - $ad = bc$

& eodem modo - $eh = fg$

ergo multipl: æqalia per

æqualia erit - $adeh = bcfg$

ergo per § 110. $ae : bf = cg : dh$.

COROLLARIUM.

CXVIII. SI sint quatuor quantitates proportionales, erunt etiam proportionalia eorum quadrata, Cubi, & quæcunque aliæ potestates. Cùm hæ generentur ex multiplicatione radicum per seipsas.

THEOREMA VI.

CIX. SI quatuor proportionales, dividantur per alios quatuor proportionales, quoti erunt proportionales.

Sit enim - - ae: bf = cg: dh
& divisores - a: b = c: d
erunt quoti - - e: f = g: h.

Demonstratio.

Si quoti non essent proportionales, tunc quoti ducti in divisores non producerent facta proportionalia per § 110. Sed ex supposito facta sunt proportionalia, ergo etiam quoti sunt proportionales.

In numeris.

Sint 54: 12 = 72: 16
& divisores 9: 4 = 18: 8
erunt quoti 6: 3 = 4: 2

COROLLARIUM.

Potestatum ergo proportionalium, quarumcunque, radices similes, sunt proportionales.

THEOREMA VII.

CXX. Æquè multiplices, sunt in ratione simplicium. Sint enim quantitates, a & b. Et multiplicentur ambæ per m.

Vel in numeris 8 & 4 qui multiplicentur per 2.

Erit - - ma: mb = a: b.
vel - - 8.2:4.2 = 8: 4.

Est enim factum extremorum, æquale facto mediorum. Cùm iidem utrorumque sint factores, adeoque per § 109. quantitates proportionales.

THEO-

THEOREMA VIII.

CXXI. PArtes ſimiles ſunt in eadem ratione totorum. Sint enim quantitates a & b, quæ dividantur per m. vel in numeris ſint 8 & 4, quæ dividantur per 2.

erit ergo - - $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$

vel - - $\frac{8}{2} : \frac{4}{2} = 8 : 4$

Ubi clarum eſt, quod factum extremorum, ſit æquale facto mediorum. Ob factores eosdem, adeoque per § 109. Quantitates proportionales.

SCHOLION.

CXXII. ATque his ferè Theorematis, continetur doctrina proportionum, & ſi, quæ omiſſa ſunt, facilè deducuntur per ſubſtitutiones, quas tradidimus Theoremate primo fundamentali § 104. reſtat adhuc indagandum, cùm dixerimus, Theoremate 5to. § 117. quod ſi quatuor termini proportionales multiplicentur per alios quatuor itidem proportionales, facta ſint proportionalia. Reſtat inquam indagandum, quomodo hæc proportio ſe habeat, reſpectu proportionis ſimplicium. Item ſi ſint quantitates complures, in continua proportione, quam rationem dicat primus v. g. ad tertium, aut quemcunque terminum, pro quo ſit.

Theorema IX.

CXXIII. EXponens rationes compositæ est factum omnium exponentium, quæ rationem compositam constituunt.

Sit enim ratio a: b exponens dicatur m
& alia - - c: d cujus exponens n
vel in numeris 4: 2 cujus exponens 2
alia - - 6: 3 exponens itidem 2.

Dico exponentem rationis compositæ
ac: db esse
factum exponentium mn
vel in numeris exponens rationis compositæ - - - - 24: 6
est factum exponentium 2. 2 seu 4.

Nam substitutione facta consequentium, per exponentem rationis multiplicatorum, loco ipsorum antecedentium, per § 104.

Prima erit mb: b.
Secunda nd: d.

quæ multiplicatæ per invicem faciunt mnbd: bd.

Et diviso antecedente per consequens bd quotus est mn.

nempe exponens rationis compositæ.

Eodem modo in numeris si factum antecedentium 24 dividatur per factum consequentium 6 quotus est 4 seu 2. 2. nempe factum exponentium rationum simplicium.

Corollarium Primum.

CXXIV. QUando rationes componentes,

tes, habent exponentes æquales, si duæ componantur, exponens compositarum est quadratus, si tres est Cubus, & ità porrò. Dicuntúrque tunc antecedentes compositi dicere rationem duplicatam, ad suos consequentes, si nempe sint compositæ ex duabus, si verò ex tribus erit ratio triplicata. Et ità porrò quadruplicata, quinduplicata &c.

Corollarium Secundum.

CXXV. Hinc cùm omnes potentiæ similes, ad invicem comparatæ, generentur ex rationibus æqualibus, quadratum ad quadratum, dicet rationem duplicatam, Cubus ad Cubum, rationem triplicatam radicum, &c.

Theorema X.

CXXVI. Si sint quotcunque quantitates, Geometricè continuè proportionales, erit prima ad tertiam, in ratione duplicata, primæ ad secundam. Prima ad quartam, in ratione triplicata, seu Cubica, primæ ad secundam. Et ità porrò.

Sint enim quantitates continuè Geometricè proportionales a: b: c: d: f.

Loco quarum, servatis duabus a : b, invenietur tertia continuè proportionalis, per § 107.

nempe - - $a : b = b : \frac{bb}{a}$

& quarta per § 106. $a : b = \frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa}$

erit

erit igitur a: b: $\frac{bb}{a}$: $\frac{bbb}{aa}$ continua proportio multipl: hos terminos per aa erunt hi ſic multiplicati in ratione ſimplicium per § 120.

nempe aaa: aab: abb: bbb

ubi manifeſtè apparet quod primas ſit ad quartum in ratione triplicata primi ad ſecundum ſeu a : b.

Si tres primi multiplicentur per a erit proportio priori ſimilis nempe aa: ab: bb.

Ubi iterum apparet quod primus ſit ad tertium in ratione duplicata primi ad ſecundum. Seu a: b.

In numeris ſint quantitates continuè proportionales, - 8: 4: 2: 1.

erit in alia expreſſione per § 107. tertia 8: 4: $\frac{16}{8}$ & multiplicando per 8 hos tres terminos erunt in eadẽ proportione 64: 32: 16 ex quo apparet primum 64 eſſe ad tertium 16 in ratione duplicata 8: 4. ſeu primi ad ſecundum.

Corollarium Tertium.

CXXVII. Ex quibus ſequitur, quod cùm termini in proportione continua, æqualem habeant exponentem rationis, adeoque primus ad tertium dicit rationem duplicatam, ſeu quadraticam, primi ad ſecundum. Et primus ad quartum, triplicatam. Sequitur inquam. Si primus terminus dicatur a, exponens rationis m,

quæ-

quæcunque ſeries continua Geometrica, per hanc generalem formulam exprimi poſſit.

Et creſcens quidem $a.\ ma\ ma^2\ ma^3\ ma^4\ ma^5$

decreſcens $a\ \frac{a}{m}\ \frac{a}{m^2}\ \frac{a}{m^3}\ \frac{a}{m^4}\ \frac{a}{m^5}$

vel in numeris creſcentibus ſi primus terminus dicatur 1 exponens 2.

erit in creſcent: $1 : 1.2 : 1.2^2 : 1.2^3 : 1.2^4 : 1.2^5$

ſeu quod idem eſt $1.1 : 2\ 1.4 : 1.8 : 1.16 : 1.32$

id eſt $1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$

in decreſcentibus ſit numerus primus 32 exponens rationis 2

erit $32 : \frac{32}{2}\ \frac{32}{2^2}\ \frac{32}{2^3}\ \frac{32}{2^4}\ \frac{32}{2^5}$

ſeu quod idem eſt $32\ \frac{32}{2}\ \frac{32}{4}\ \frac{32}{8}\ \frac{32}{16}\ \frac{32}{32}$

id eſt - - $32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1.$

Corollarium Secundum.

CXXVIII. Ex inſpecta hac generali formula, ſeriei Geometricæ continuæ, apparet. Dato termino primo, & exponente rationis, inveniri poſſe quemcunque terminum, talis ſeriei. v.g. 6tum ſi nimirùm exponens rationis, elevetur ad 5tam potentiam, & hæc potentia multiplicetur per terminum primum. Si inveniendus ſit ſeptimus elevatur exponens ad ſextam potentiam, ſemper nimirùm ad uno gradu minorem, quam ſit terminus quæſitus.

Corol-

Corollarium Tertium.

CXXIX. Ex eadem inſpectione formulæ generalis apparet, quod dato termino primo. Ultimo & numero terminorum inveniri poſſit exponens rationis. Si nimirùm terminus ultimus dividatur per primum, & ex quoto extrahatur radix potentiæ, uno gradu inferioris, quam ſit numerus terminorum. Quæ radix, erit exponens rationis quæſitus.

Sit enim numerus terminorum 5 terminus primus 1 ultimus 16.

Diviſo ultimo 16 per primum 1.

Quotus eſt - 16.

Et extracta radix quarta per § 59. eſt 2.

Seu quæſitus exponens.

In decreſcentibus ſit 1mus 32 ultimus 2.

Numerus terminorum 5.

erit ultimus 2 diviſus per 32 $= \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

& extracta radice quarta tam ex numeratore quam denominatore quotus eſt $\frac{1}{2}$ ſeu exponens rationis.

Corollarium Quartum.

CXXX. Ex binis his Corollariis ſequitur, datis duobus terminis, inveniri poſſe, quotcunque medios proportionales. Datur enim in hoc caſu, terminus primus, terminus ultimus, & numerus terminorum.

Ergo

Ergo per Corollarium præcedens, invenitur exponens rationis. Adeoque per § 227. inveniri poteſt quiscunque terminus proportionis Continuæ.

Vel etiam ex formula generali multiplicando terminum primum per exponentem rationis habebitur terminus ſecundus, multiplicando primum per quadratum exponentis, habetur tertius. Et ità porrò.

S C H O L I O N.

CXXXI. FUſius fortaſsè Theoria proportionum tractata eſt, quam aliquibus placeat. At ubi eam aplicuerimus ad uſum Regulæ aureæ, præſertim ad Compendia quædam quæ in ea adhiberi ſolent apparebit eam neceſſariò permittendam fuiſſe ut horum Compendiorum ratio reddi queat.

C A P U T IV.

Uſus Regulæ aureæ per exempla declaratur.

CXXXII. REgulam auream, ſive trium, nihil eſſe aliud, quam proportionem Geometricam, apparet ex § 106. proinde termini qui talem proportionem conſtituunt, debent eſſe homogenei. Nempe antecedentes, antecedentibus. Et conſequentes, conſequentibus. Unde malè quis quæreret pretium duorum modiorum tritici. Si diceret una urna vini, conſtat 3 florenos. quantum conſtant, duo modii tritici. Quia triticum, & vinum, ſunt hæteroterogenei. Possunt quidem etiam hæterogenei in proportionem ordinari: si reducibiles sint. Quos proinde ante operationem reduci oportebit, modus verò reducendi, tradetur Sectione sequenti, in doctrina fractionum.

CXXXIII. Regula hæc aurea, in duas communiter Species, dividi solet. Nempe in directam, & inversam. Directa dicitur, quando quoties continet, vel continetur antecedens, primæ rationis, in antecedente secundæ rationis, toties continet, vel continetur, Consequens primæ rationis, in Consequente secundæ rationis. Hinc ad reperiendum quartum proportionalem, multiplicatur secundus terminus, per tertium, & factum dividitur, per primum, quotus dabit terminum quartum quæsitum. Uti diximus § 106.

CXXXIV. Inversa dicitur. Quando quoties continet, vel continetur antecedens primæ rationis, in antecedente, secundæ rationis, toties continet, vel continetur, reciprocè consequens secundæ rationis, in Consequente primæ rationis. Hinc jubetur plerumque dum talis inversa occurrit, multiplicari terminus primus, per secundum, & factum dividi, per tertium. Sed cùm inversa, in directam mutari possit. Hæc quoque methodus, reperiendi quartum quæsitum, in methodum, Regulæ directæ, muta-

mutari poteſt. Sint enim quantitates inverſè proportionales a, b, c.

erit ergo $a : X = c : b$

& alternando $a : c = X : b$

ac invertendo $c : a = b : X$

ex quo apparet $X = \frac{Ab}{c}$ proinde factum mediorum dividi per primum.

Dato proinde caſu Regulæ inverſæ, alio opus non eſt, quam ut terminus datorum tertius, ponatur primo loco. Homogeneus primo, ponatur 2do loco, ac deniq; homogenus quarto quæſito, tertio loco. Quo facto, Regulâ directâ, utendum erit.

CXXXV. Utraque hæc Regula nempe tam directa quam inverſa, ſubdividitur, in Simplicem, & Compoſitam. Simplex eſt in qua dantur: tres termini, ſolitarii. v. g. tres urnæ vini veniunt 7 florenis, quanti venient ſeptem. Compoſita eſt, in qua dantur termini quinque, vel ſeptem, adeoque ſextus, vel octavus, inveniendus eſt. Proinde quotquot dentur termini, ad tres reduci debent. Niſì quis, pluribus operationibus, terminum quæſitum invenire velit. Quia tamen, & hæ operationes, plerumque multis fractionibus obnoxiæ ſunt. Hinc ad facilitandum laborem, utimur Regula Compoſita. Hinc ſi detur: Tres operæ, duobus diebus, fodiunt 6 orgias. Operæ 7, diebus 8, quot fodient.

Quinque hi termini, ad tres reducendi ſunt per rationum multiplicationem juxta § 117. Sit igitur Regulæ ſimplicis.

Exemplum Primum.

CXXXVI. Spatio 3 menſium expenduntur in operarios centum 4000 florenorum, quantum expendetur, in eosdem operarios, ſpacio 6 menſium.

In hoc caſu adverto, quod quantum augetur numerus menſium, tantum debeat creſcere, numerus florenorum expendendorum. Proinde quæſtio, per Regulam directam, reſolvi debet. Si jam dicatur quæſitus terminus X.

	mens	mens	flor:	flor:
Erit	3 :	6 =	4000 :	X.
vel per § 121.	1 :	2 =	4000 :	X

ergo per § 106. X = 8000.

Cum, unitas nihil dividat.

SCHOLION.

CXXXVII. Horum Compendiorum, uſus tunc tantùm eſt, quando terminus primus, dividit ſecundum, juxta § 106 citatum, vel etiam quando idem primus dividit tertium. Cùm manente proportione, tertius poſſit mutari in 2dum. per § 112. & eodem modo ſi ſecundus vel tertius dividat primum. Quod ſi hæc circumſtantia abſit, debet 2dus turminus integer multiplicari per tertium, & dividi

per

per primum, uti in Casu proposito fieri potest si quis Compendio uti nolit & idem quartus prodibit nempe 8000.

Exemplum Secundum.

CXXXVIII. Tres ulnæ Panni veniunt flor. 12. quanti venient 7.

Erit ergo $3 : 12 = 7$ - -
vel per § 121. $1 : 4 = 7$
erit igitur quartus quæsitus per § 106 28.

Exemplum Tertium.

CXXXIX. Ad fodiendam Vineam intra 8 dies, requiruntur Operarii centum, quot requirentur, ad eandem fodiendam, intra dies 16.

In hoc Casu adverto. Quod si longiore tempore, absolvendus sit labor, pauciores Ooerarii requirantur, quam si sit Opus, breviore tempore absolvendum. Proinde, quod Operarii sint, ad Operarios, in ratione inversa temporum.

Erit ergo $16 : 8 = 100$
vel potius $2 : 1 = 100$
adeoque quartus quæsitus $= \frac{100}{2} = 50$.

Exemplum Quartum.

CXL. Ad reparandas vias intra 3 menses requiruntur Operarii 50. intra duos menses quot requirentur.

Ubi iterum adverto. Quod cùm ad absolvendum Opus, breviori tempore, plures Operarii requirantur, erunt iterum Operarii, in ratione inverſa, temporum.

Erit igitur 2 : 3 = 50 - -

vel per § 137. 1 : 3 = 25 - -

Quæſitus igitur quartus terminus eſt 75.

Applicatio Regulæ Aureæ ſimplicis ad Problemata ſocietatum.

CXLI. PRoblemata ſocietatum ſunt illa, dum E. C aliquot Mercatores, conferunt aliquam ſummam, ad faciendum lucrum. Elapsô autem certô tempore, lucrum, pro rata collatæ pecuniæ, dividere cupiunt.

Porrò in ſimilibus Problematis, ſic ordinatur proportio, ut primo loco ponatur, ſumma omnium in unum collecta. Secundo ſummæ ſingulorum, & tertio lucrum vel primo ſumma totalis, 2do lucrum totale, tertio ſummæ ſingulorum.

Exemplum Quintum.

CXLII. Tres Mercatores, contulerunt in unum, florenos 100. primus dedit 24, ſecundus 30, tertius 46, poſt tempus unius anni, lucrati ſunt, hac ſummâ, florenos 200. Quæritur, quantum quisque lucrari debeat. Quia igitur tres contulerunt, ter quoque inſtituenda eſt proportio. Erit igitur

1mi . 100 : 24 = 200 - - -

2di - - 100 : 30 = 200 - - -

3tii - - 100 : 46 = 200 - - -

vel

vel per § 137. 1 : 24 = 2 - - -
2di 1 : 30 = 2 - - -
3tii 1 : 46 = 2 - - -

& multiplicando 2dum terminum per tertium, & dividendo per primum, erunt lucra ſingulorum

1mi		48
2di	- -	60
3tii	- -	92

Summa omnium 200. ſeu lucrũ totale.

CAPUT V.

Exempla Regulæ Compoſitæ.

Exemplum Primum.

CXLIII. SIt Regula Compoſita, tres operæ, diebus 2 fodiunt 6 orgias. Operæ 7, diebus 8, quot orgias fodient.

Ubi adverto 6 orgias foſſas, eſſe ad orgias quæſitas, in ratione Compoſita, tum dierum, tum operarum.

Adverto 2do. Quod ſicut 8 diebus, plures orgiæ, fodi poſſunt, quam duabus, ità 7 operæ plùs fodere poſſunt, quam tres. Adeoque 6 orgiæ ſunt, ad orgias quæſitas, in ratione directa, tum dierum, tum operarum.

$$\text{Erit ergo ſicut.)}\ \begin{matrix} \text{Oper} & & \text{Oper} \\ 3 & : & 7 \\ \text{\& Dies} & & \text{Dies} \\ 2 & : & 8 \end{matrix} \Bigg\} = 6$$

 redu-

reducendo per § 117. $6 : 56 = 6$
& multiplicando ſecundum terminum, per tertium, & dividendo per primum, quotus eſt - 56. Nimirùm numerus orgiarum, à 7 Operariis, intra 8 dies fodiendarum.

Exemplum Secundum.

CXLIV. Ad effodiendos 2 Palmos terræ, cujus reſiſtentia eſt ut 3. requiruntur vires ut 4. Ad effodiendos palmos terræ 3. Cujus reſiſtentia eſt, ut 4. Quantæ vires requirentur:

Ubi obſerva vires eſſe ad vires, in ratione directa, tam palmorum, quam reſiſtentiarum.

$$\text{Erit ergo } \& \begin{matrix} \text{Pal:} \\ 2 : \\ \text{Res} \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Pal:} \\ 3 \\ \text{Res} \\ 4 \end{matrix}\Bigg\} \ 4.$$

Proinde per § 117. $6 : 12 = 4$
vel per § 137. $1 : 2 = 4.$
& multiplicando, 2dum per 3tium, cum unitas nihil dividat, quæſitæ vires erunt 8.

Exemplum Tertium.

CXLV. Ad alendos 20 homines, annis duobus, expenduntur 1000 floreni. Ad alendos 30 homines, annis 6, quot floreni requirentur.

Adverto. Quod floreni 1000, ſint ad expendendos, in ratione directa, tam hominum, quam annorum.

Erit

Erit proinde ut $\&\left.\begin{array}{l} 20 : 30 \\ 2 : 6 \end{array}\right\} = 1000$

vel per § 137. $\&\left.\begin{array}{l} 2 : 3 \\ 1 : 3 \end{array}\right\} 1000$

& per § 117. - - $2 : 9 = 1000.$

Et multiplicando 2dum per 3tium, erunt 9000. Ac dividendo per 2. Quotus quæſitus erit, 4500.

Exemplum Quartum.

CXLVI. Mercatores 6, aureis 100, menſibus duobus, lucrantur 70. Mercatores 12, aureis 400, menſibus 4, quantum lucrabuntur.

Cùm lucrum aureorum 70, ſit ad lucrum quæſitum in ratione directa, tum Mercatorum, tum menſium, tum ſummæ collatæ, pro mercimonio.

Erit $\left.\begin{array}{rcl} 2 & : & 4 \\ 6 & : & 12 \\ 100 & : & 400 \end{array}\right\} = 70$

vel per § 137. $\left.\begin{array}{rcl} 1 & : & 2 \\ 1 & : & 2 \\ 1 & : & 4 \end{array}\right\} 70$

Et per § 117. $1 : 16 = 70$

& multiplicando, 2dum per 3tiũ, fit 1120. ſeu terminus quartus quæſitus.

Exemplum Quintum.

CXLVII. Mercatores tres, contulerunt certas ſummas, ad faciendum lucrum. Sed pro diverſis temporibus.

Et 1mus quidem flor. 10 pro mensib. 19
2dus - - - - 13 pro mensib. 10
3tius - - - 30 pro mensib. 6

Exacto hoc tempore, lucrati simul sunt florenos 1000. Quæritur quantum cuique obveniat.

Cùm in hac quæstione, Menses sint coeficientes summarum, à singulis datarum, ut summa totalis; pro instituenda proportione, colligi possit, debent singulorum summæ, multiplicari per menses, sibi competentes.

Erit ergo 1mi	10 .	19	=	190
2di	13 .	10	=	130
3tii	30 .	6	=	180
Summa productorum	-			500.

Igitur per § 141.	500	:	190	=	1000
Sic ordinatur	500	:	130	=	1000
Proportio.	500		180	=	1000
vel per § 137.	1	:	190	=	2
	1	:	130	=	2
	1	:	180	=	2

Et facta multiplicatione, secundi termini per tertium, cùm unitas non dividat, fit lucrum.

Primi - - 380
Secundi - - 260
Tertii - - 360.

Exemplum Sextum.

CXLVIII. Ad effodiendos Palmos 20, diebus 3, requiruntur Operarii 10. Ad effo-

effodiendos 12, diebus 6, quot Operarii.

Cùm Operarii 10, ſint ad Operarios quæſitos, in ratione directa palmorum, & inverſa temporum. Alio opus non eſt, quam ut numerus dierum, ordine inverſo ponatur, nempe: loco 3 : 6, poni debet 6 : 3.

$$\text{Erit ergo}\quad \left.\begin{matrix} 20 : 12 \\ 6 : 3 \end{matrix}\right\} 10$$

$$\text{vel per § 137.}\quad \left.\begin{matrix} 2 : 12 \\ 2 : 1 \end{matrix}\right\} 1$$

$$\text{\& per § 117.}\quad 4 : 12 = 1$$

& multiplicando, 2dum per tertium, & dividendo, per primum. Numerus quæſitus Operariorum eſt $\frac{12}{4} = 3$.

Exemplum Septimum.

CXLIX. Octo curribus, orgiæ 100, vehuntur diebus 10. 16 curribus, orgiæ 300, quot diebus vehentur.

Ubi obſervo. Decem dies eſſe, ad numerum quæſitum dierum, in ratione directa orgiarum, ſed inverſa curruum.

$$\text{erit ergo \&}\quad \left.\begin{matrix} 100 : 300 \\ 16 : - 8 \end{matrix}\right\} = 10$$

$$\text{vel}\quad \left.\begin{matrix} 1 : 3 \\ 2 \quad 1 \end{matrix}\right\} = 10$$

$$\text{reductione facta}\quad 2 : 3 = 10$$

multiplicando 2dum per 3tium, & dividendo per primum erit $\frac{30}{2} = 15$ ſeu numerus quæſitus dierum.

CL

CL. In his operationibus, ex propoſito non ſunt adducta exempla, quæ fractionibus obnoxia ſint. Ex eo, quod doctrina fractionum nondum ſit tradita. Poſt quam admiſcebimus exemplis Algebraicis, etiam Regulam auream, cum fractionibus, quantum ſatìs erit.

SECTIO III.

CAPUT I.

De Fractionibus.

Definitiones.

CLI. PRima Fractio propriè talis eſt, quantitas unitate minor. Proinde talis quantitas, quæ nec unitate, nec alio numero exprimi poteſt, exprimi ſolet per rationem, quam habet, ad unitatem. Sit enim aliqua linea a b. Et alia minor, c d.

A |—|—|—| B C |—|—| D

Quare ſi linea ab, aſſumatur pro unitate, erit linea cd, minor hac unitate. Igitur ut quantitatem lineæ cd, exprimere poſſim, hanc comparo, cum linea ab, & ex hac comparatione obſervo, quod ſi linea ab, dividatur in tres partes æquales, linea cd, duas tales partes præcisè contineat. Hinc dico lineam cd, eſſe ad unitatem linearem ab, ſicut duæ partes, lineæ ab, ad ipſam lineam ab. Hoc eſt, ad tres ejus partes. Exprimitur ergo linea cd, per rationem 2 : 3. vel quod uſitatius eſt, $\frac{2}{3}$ & per Algebram a: b vel $\frac{a}{b}$

Vel si linea ab, suponatur divisa, in quatuor partes, & alia quædam minor, tres tales partes præcisè contineat, hæc talis minor linea, habebit se, ad unitatem linearem ab, ut 3 : 4. seu $\frac{3}{4}$ & sic de reliquis.

2da: Antecedens hujus rationis, vel minor illa quantitas, vocatur numerator. Consequens, dicitur denominator. Sic in hac fractione $\frac{3}{4}$ antecedens 3, est numerator. Consequens 4, est denominator sic de aliis.

3tia: Denominator in omni fractione, repræsentat unitatem, tanquam totum aliquod, in tot partes sectum, quot indicat denominator. Numerator verò designat, quot tales partes competant, quantitati minori unitate. Sic in fractione $\frac{3}{4}$ denominator 4 indicat unitatem, tanquam totum, in quatuor partes sectam.

Numerator verò 3, indicat tres tales partes, quantitati minori unitate competere.

Ex quibus sequitur, duas quantitates, unitate minores, æquales esse, si ad unitatem, seu denominatorem, æqualem rationem dicant. Ut si sint numeratores dimidium, suorum denominatorum, vel tertia aut quarta pars. Proinde si in fractione

qua-

quacunque, numerator, & denominator multiplicentur, per quemcunque numerum, fractio ex hac multiplicatione exurgens, priori æqualis eſt, ſeu idem ſignificat. Sic ſi $\frac{1}{2}$, multiplicetur per 2, per 3, per 4, per 5, &c.

Erunt fractiones $\frac{2}{4}\ \frac{3}{6}\ \frac{4}{8}\ \frac{5}{10}$.

Quæ omnes idem ſignificant quod $\frac{1}{2}$

Eodem modo ſi fractio, ſeu tam numerator, quam denominator, dividatur, per quemcunque numerum, fractio, quæ ex hac diviſione emergit, idem ſignificat, quod prior. Sic ſi $\frac{6}{12}$ dividantur per 6, per 3, per 2,

Erunt fractiones $\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{2}{6}$

Quæ ſunt æquales $\frac{6}{12}$. ſeu idem ſignificant quod $\frac{6}{12}$. per § 120. & 121.

4ta: Fractiones ſpuriæ, aut impropriæ, vocantur illæ, quarum numeratores, ſunt æquales, aut majores, ſuis denominatoribus. Ut ſunt $\frac{2}{2}\ \frac{5}{3}$ &c.

5ta: Fractiones, quæ habent eosdem denominatores, dicuntur ejusdem denominaminationis, aut homogeneæ. Ut $\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}$ vel $\frac{ad}{bd}\ \frac{bc}{bd}$.

CAPUT II.

De 5. Speciebus fractionum.

PROBLEMA PRIMUM.

Fractiones ad eandem denominationem reducere.

CLII. Cum reductio fractionum, ad eandem denominationem, nihil aliud significet, quam duas vel plures fractiones, quæ diverſos denominatores habent, adeoque ſunt hæterogeneæ, in alias transmutare, quæ idem omnino ſignificent, quod priores, & denominatorem jam æqualem habeant. Quod fit per maltiplicationem, aliquando ſed rariùs per diviſionem. Quando nimirùm locus eſt compendio.

CLIII. Porrò univerſaliter, & infallibiliter, fractiones reducuntur ad eandem denominationem; ſi per unius fractionis denominatorem, multiplicetur altera fractio. Nempe tam numerator, quam denominator, & viciſſim, per alterius fractionis denominatorem, multiplicatur, prioris fractionis, tam numerator, quam denominator.

Sic ſint duæ fractiones $\frac{2}{3}\ \frac{3}{5}$

erit $\frac{2}{3}\Big)^{\cdot} 5 = \frac{10}{15}$ & $\frac{3}{5}\Big)^{\cdot} 3 = \frac{9}{15}$

ex

ex quo apparet, quod denominator communis, ſit factum denominatorum, talium duarum fractionum. Numeratores verò, conſurgant ex facto numeratoris, per denominatorem, alterius fractionis.

CLIV. Quod ſi fractiones, plures ſint quam duæ, eodem modo inſtituitur operatio. Multiplicando nimirùm, omnes denominatores per invicem, ut fiat denominator communis. Numeratores verò, cujuslibet fractionis, multiplicantur, per aliarum fractionem denominatores.

Sic ſi ſint $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{5}$

Communis denominator erit	30
Numerator primæ fractionis	15
Secundæ - -	20
Tertiæ - -	18

erunt ergo frectiones reductæ $\frac{15}{30}\ \frac{20}{30}\ \frac{18}{30}$.
eodem modo fit, ſi plures fractiones reducendæ occurrant.

CLV. Diximus autem § 152. aliquando eſſe locum compendii, in reductione fractionum. Illud verò tunc ſemper fit, quando denominator unius fractionis, eſt duplus, triplus, aut quadruplus &c. Denominatoris alterius fractionis tunc enim fractionem illam cujus denominator minor eſt multiplico per 2 aut 3 &c. prout eſt ſubdudupla, vel subtripla. Altera illesa relicta. Et habebitur idem denominator.

Sic si dentur $\frac{4}{12}$ $\frac{5}{6}$

Cum denominator in $\frac{5}{6}$ sit ab duplus respectu 12 multiplicando $\frac{5}{6}) \cdot 2$ erit $\frac{10}{12}$ adeoq; in eadem denominatione cum fractione $\frac{4}{12}$

Item cum in fractione $\frac{4}{12}$, tam numerator, quam denominator sit divisibilis per 2, proinde utrumque dividendo per duo erunt

$$\frac{4}{12}) : 2 = \frac{2}{6}$$

adeoque in eadem denominatione cum $\frac{5}{6}$

CLVI. Est denique locus compendio, quando utriusque fractionis denominator, per aliquem numerum divisibilis est. Tunc enim, per quotum, ex divisione majoris denominatoris emergentem, multiplicatur fractio, cujus minor est denominator, & vicissim per quotum emergentem, ex minoris denominatoris divisione, multiplicatur fractio, cujus denominator major est. Et erunt fractiones in eodem nomine

Sic si sint $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$ erunt reductæ

Si

Si multiplicentur $\frac{3}{4}$ per 3 & $\frac{5}{6}$ per 2

erit enim $\frac{9}{12}$ & $\frac{10}{12}$

eodem modo $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{9}$

nam $\frac{5}{6}$) 3 dat $\frac{15}{18}$ & $\frac{4}{9}$) 2 dat $\frac{8}{18}$

Quia tamen his compendiis ſemper uti non licet, aut etiam non placet, recurrendum eſt ad methodum, § 153. traditam.

In literis eodem modo fit operatio

Sint enim fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$

erunt reductæ $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$

SCHOLION.

CLVII. PОrrò hæc Compendia adhibentur, ut & reductio fractionum facilitetur, & fractiones, quantum fieri poteſt, in minimis terminis contineantur. Cùm inventio communis menſuræ maximæ, operoſa ſit. De qua tamen infra.

PROBLEMA SECUNDUM.

Fractiones addere.

CLVIII. REducantur Fractiones ad eandem denominationem.

2do: Addantur numeratores reducti.

3tiò: Summæ ſubſcribatur denominator communis.

Nova

Nova hæc fractio est summa quæsita.

Sic sint addendæ $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$

erunt reductæ $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$

Summa quæsita - - $\frac{17}{12}$

In literis sint $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ addendæ

erit summa $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

vel si reducere placet erit $\frac{ad + bc}{bd}$

PROBLEMA TERTIUM.

Fractiones à fractionibus subtrahere.

CLIX. Reductis fractionibus ad eandem denominationem, subtrahatur numerator, fractionis subtrahendæ, à numeratore fractionis à qua subtractio facienda, & residuò subscribatur prior denominator.

Sint subtrahendæ $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$

erunt reductæ $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$

residuum seu differentia - $\frac{1}{12}$

in literis sit $\frac{a}{b}$ subtrahendum à $\frac{c}{d}$

erit differentia $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$

vel ſi reducere placet $\frac{cb - da}{bd}$

PROBLEMA QUARTUM.

Fractiones per fractiones multiplicare.

CLX. UT analybicè inveſtigetur, Methodus multiplicandi fractiones, ad vertendum quod cùm diviſor ſit ad dividendum ut unitas ad quotum per § 29.

Si jam ponatur fractio v. g. $\frac{2}{3}$

erit: $3 : 2 = 1$: ad quotum

invenitúrque hìc quotus per § 106. $\frac{2}{3}$ ſeu ipſa fractio

adeoque denominator eſt ad numeratorem utì unitas ad fractionem ipſam.

Sint jam duæ fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$

erit ergo $3 : 2 = 1 : \frac{2}{3}$

item $4 : 3 = 1 \quad \frac{3}{4}$

ergo etiam per § 117. $3.4 : 2.3 = 1.1 : \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

ſeu - - - $12 : 6 = 1$: ad factum harum fractionum

quod invenitur per § 106. $\frac{3.2}{4.3}$ ſeu $\frac{6}{12}$

innoteſcit igitur Methodus multiplicandi fractiones, per fractiones. Nimirùm multiplicando numeratorem, per numeratorem,

rem, qui erit numerator. Et denominatorem, per denominatorem, quod factum, erit denominator fractionis, ut ostendimus in $\frac{6.}{12}$.

In literis eodem prorsùs modo fit.

Si plures sint fractiones omnium numeratores per invicem multiplicantur, similiter & denominatores ut si sint $\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}\ \frac{e}{f}\ \frac{g}{h}$ erit earum factum $\frac{aceg}{bdfh.}$

PROBLEMA SEXTUM.

Fractiones per fractiones dividere.

CLXI. Sint per $\frac{2}{3}$ dividendæ $\frac{3.}{4}$ Ut investigetur Methodus inveniendi quotum, ex hac divisione emergentem, reducantur datæ fractionem ad idem nomen.

Erunt reductæ $\frac{2.4}{12}\ \frac{3.3}{12}$ seu $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$

Et multiplicando per 12 ut tollantur divisores manebit divisor 2.4 dividendus 3.3 seu 8 & 9.

Cum igitur divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum

erit $2.4 : 3.3 = 1$ - - - seu $8:9 = 1$ invenitur adeò quotus per § 106. Cùm unitas nihil multiplicet $\frac{3.3}{2.4}$ seu $\frac{9}{8}$

CLXII. Multiplicandus ergo, est nume-

 rator

rator fractionis dividendæ, per denominatorem divisoris, factum hoc dabit numeratorem. Et denominator fractionis dividendæ, multiplicatur per numeratorem divisoris, factum dabit denominatorem.

Ut in casu proposito per $\frac{2}{3}$ dividendo $\frac{3}{4}$ erit quotus $\frac{9}{8}$. seu $\frac{2}{3}$ continentur in $\frac{3}{4}$ semel & in super una octava pars.

Quod ut clariùs evadat erunt $\frac{2}{3}$ v. g. flor.

Cruciferi 40 & $\frac{3}{4}$ cruciferi 45.

dividendo jam per 40 : 45 quotus est 1 & $\frac{5}{40}$ seu 1 & $\frac{1}{8}$

CLXIII. Per literas idem eruitur. Sit per $\frac{a}{b}$ dividendum $\frac{c}{d}$

Et erunt fractiones reductæ $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ multiplicando per bd ut tollatur divisor

erit ad : bc

ergo § 160. ad : bc = 1 - - -

proinde per § 106. invenitur quotus $\frac{bc}{ad}$

PROBLEMA SEXTUM.

Fractionem ad potentiam datam elevare.

CLXIV. Cum Potentiæ generentur, ex multiplicatione per ipsam radicem, Multiplicatio autem fractionum fiat, multi-

multiplicando numeratorem, per numeratorem, & denominatorem per denominatorem, clarum eſt, tam numeratorem, quam denominatorem, elevari debere ad potentiam datam.

Sic ſit $\frac{a}{b}$ vel $\frac{2}{3}$ elevandũ ad 3tiã potentiã

erit hæc $\frac{a^3}{b^3}$ vel $\frac{8}{27}$

PROBLEMA SEPTIMUM.

Ex fractione radicem datam extrahere.

CLXV. QUem admodũ fractio elevatur ad poteſtatẽ quamcunque, per elevationem tam numeratoris, quam denominatoris, ità quoque radix datæ poteſtatis extrahi debet, tam ex numeratore, quam ex denominatore. Sit enim extrahdnda radix 2da ex fractione $\frac{aa}{bb}$ vel $\frac{4}{9}$

erit illa $\frac{a}{b}$ vel $\frac{2}{3}$

PROBLEMA OCTAVUM.

Integrum ad fractionem datæ denominationis reducere.

CLXVI. SIt quantitas reducenda ad fractionem, a. vel in numeris, 3. Et ſit datus denominator m. vel 4. multiplicetur quantitas data, per denominatorem, & ſubſcribatur illi denominator.

Erit $\frac{am}{m}$ vel in numeris $\frac{3.4}{4}$ ſeu $\frac{12}{4}$.

 Hæc

Hac Methodo utimur v. g. reducendi orgias ad pedes & pedes ad polices vel digitos. Cùm orgia conſtet ſex pedibus pes duodecim digitis. &c.

PROBLEMA NONUM.

Fractionem ſpuriam ad integrum reducere.

CLXVII. CUm in fractione ſpuria, numerator major ſit denominatore, dividatur numerator, per denominatorem, quotus ex hac diviſione emergens, erit integer, & ſi quid poſt diviſionem remanet erit fractio vera.

Sic ſit fractio ſpuria $\frac{16}{5}$ reducenda ad integrum erit quotus 3. & $\frac{1}{5}$.

Hac Methodo reducuntur pedes ad orgias cruciferi ad florenos &c.

PROBLEMA DECIMUM.

Determinare rationem quam habent fractiones inter ſe.

CLXVIII. REducantur fractiones ad eandem denominationẽ: earum ratio ad invicem erit, ut ſunt numeratores per § 121.

Sic fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ fiunt reductæ $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ earũ proinde ratio ad invicẽ eſt ut 8 ad 9.

PRO-

PROBLEMA UNDECIMUM.

Fractionem datam ad minimos terminos reducere.

CLXIX. HÆc fractionis reductio, in eo consistit, quod ejus tam numerator, quam denominator, dividatur exactè, per aliquem numerum, ità ut ampliùs per nullum alium numerum sit divisibilis. Adeoque numerator, & denominator, evadant numeri primi.

Porrò pro inveniendo hoc numero, seu communi mensura maxima, aliquo artificio opus est, nempe per numeratorem dividitur denominator, qui si exactè dividat denomlnatorem ipse erit communis mensura maxima: si non dividat, tunc per residuum quod post divisionem remansit, dividitur numerator, si ex diviso sic numeratore, iterum remaneat aliquid, per hoc dividitur prior divisor, seu residuum illud, quod ex diviso denominatore remansit, tamdiúque iteratur operatio, donec per aliquem divisorem exactè dividatur, aliquod residuum. Quod si procedendo sic, deveniatur ad unitatem, constabit fractio numeris primis, adeoque irreducibilis est.

Sit jam invenienda mensura maxima pro fractione $\frac{130}{280}$ reducenda.

Divisor | Dividendus

130 | 280 | quotus 2

20

Divisor | Dividendus;
20 | 130 | 6
120
10

Divisor 10 | Dividendus
20 | 2
20

residuum 00.

Adeoque communis mensura maxima est 10 per quam divisa fractio proposita dat $\frac{13}{28}$

CLXX. In literis reductio fractionum faciliùs procedit. Cùm enim ibi omnes factores expressi sint, alio opus non est, quam ut similes literæ, tam ex numeratore, quam denominatore deleantur, reliquis relictis. Et erit fractio in minimis terminis. Sic sit fractio $\frac{abcd}{afbc}$ erit reducta $\frac{d}{f}$

PROBLEMA DUODECIMUM.

Fractionem fractionis ad simplicem reducere.

CLXXI. PEr fractionis fractionem nihil aliud intelligitur, quam quando fractio aliqua v. g. $\frac{3}{5}$ consideratur tanquam totum aliquod, vel unitas, cujus partem aliquam, continet alia fractio. Ut si dicam me habere $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ de tribus quintis. Quare cum hæc fractio fractionis, sit pars

par-

partis, necesse est hanc fractionem minores partes habere, quam habeat fractio simplex, cujus est pars. Adeoq; ut hæc addi vel subtrahi possit, necesse est eam prius ad fractionem simplicem reduci, tum ad eandem denominationem.

CLXXII. Reducitur porrò talis fractio ad fractionem simplicem si ejus numerator multiplicetur per numeratorem fractionis simplicis, & denominator per denominatorem, fractio quæ consurgit inde erit ipsa fractionis fractio ad simplicem reducta. Sic $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ erunt reductæ ad simplicem $\frac{6}{15}$.

Demonstratio. Cum in fractionibus, denominator sit ad numeratorem, uti unitas ad quotum. In fractione autem fractionis, sit unitas, illa ipsa fractio simplex.

Erit ergo $3 : 2 = \frac{3}{5}$: ad quotum & multiplicando 2dum terminum, per tertium, ac dividendo per primum, prodit quotus $\frac{6}{15}$ prout supra exhibuimus.

In literis eodem modo fit. Sic si sit $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ erit reducta $\frac{ac}{bd}$.

SCHOLION.

CLXXIII. HÆc de fractionibus ordinariis. Nam de fractionibus decimalibus, aut ſexageſimalibus, breviter Capite tertio inferius inſinuabimus. Quia autem non ſolæ fractiones addendæ, aut ſubtrahendæ veniunt, verùm cum numeris integris, etſi hæc peculiarem difficultatem non habeant, aliquid tamen & de his Capite ſequenti dicemus ſit igitur.

CAPUT II.

De Fractionibus cum integris.

PROBLEMA PRIMUM.

Fractionem cum integro addere.

CLXXIV. REducantur fractiones ad eandem denominationem 2do addantur fractionum numeratores, & ſi emerſerit fractio ſpuria dividatur numerator, per denominatorem & quotus integer, addatur integris, penes quorum ſummam ſcribatur fractio reſidua.

Sic ſint numeri addendi cum fractionibus

	Reductæ	Summa	Quotus
$2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{7}{6}$	$1\frac{1}{6}$
$3\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$		

Summa totalis $6.\ \frac{1}{6}$

PRO

PROBLEMA SECUNDUM.

Integros cum fractione ſubtrahere ab integris cum fractione.

CLXXV. REductis fractionibus ad eundem denominatorem, ſubtrahatur numerator fractionis ſubtrahendæ, à numeratore fractionis, à qua, ſubtractio fit.

Si is minor ſit, accepta unitas ex integris reducatur ad fractionem per § 166. & connumeretur, cum numeratore priore, ſubſcripto denominatore. Sic ſint numeri.

Dati	$4\frac{1}{2}$	Reductæ $\frac{3}{6}$	Auctus numer:
Subtrahendi	$2\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$
Differentia	$1\frac{5}{6}$		

PROBLEMA TERTIUM.

Integrum cum fractione multiplicare per integrum cum fractione.

CLXXVI. REducantur integri ad fractionem ſibi adhærentem per § 166. adnumerato iis numeratore ejusdem fractionis & ſubſcripto priori denominatore.

2dò: Multiplicentur fractiones per invicem juxta § 160.

3tiò: Cùm hìc emergat fracto ſpuria, reducatur ad integrum per § 167.

Sic

Sic ſint integri cum fractionibus $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{2}{3}$

erunt reducti ad fractionem $\frac{7}{2}$ & $\frac{8}{3}$

Et factum - - $\frac{56}{6}$

Reductæ ad integros $9\frac{2}{6}$ ſeu $9\frac{1}{3}$

PROBLEMA QUARTUM.

Integros cum fractione per integros cum fractione dividere.

CLXXVII. REducantur integri ad fractionem ſibi adhærentem per § 166. ad numerato iis numeratore ejusdem fractionis.

2dò: Dividantur hæ fractiones per § 162.

3tiò: Si emergat fractio ſpuria illa reducatur ad integros per § 167. Si non emergat ſpuria reducatur ad minimos terminos, per § 169.

Sic ſit diviſor $2\frac{2}{3}$ Dividendus $3\frac{3}{4}$

erunt reductæ $\frac{8}{3}$ & - - $\frac{15}{4}$

Quotus - - - $\frac{45}{32}$ ſeu $1\frac{13}{32}$

SCHOLION.

CLXXVIII. SI fractio multiplicanda ſit per integrum, multiplicator ſolus numerator, denominatore eo-

dem

dem manente, ut si multiplicentur $\frac{2}{3}$, per 3. erit $\frac{6}{3}$.

Si fractio dividenda sit per integrum, multiplicatur per integrum denominator, numeratore eodem manente. Ut si dividantur $\frac{2}{3}$ per 3 erit quotus $\frac{2}{9}$.

CAPUT IV.

De Fractionibus decimalibus.

CXXIX. Nomine fractionum decimalium, veniunt hic fractiones fractionum. Ea lege, ut si unitas aliqua, concipiatur divisa in decem partes, una talis pars, vocatur, una decima seu $\frac{1}{10}$. Hæc decima pers, si iterum concipiatur divisa, in alias decem minores, una talis, erit decima decimæ, seu respectu unitatis assumptæ, una centesima, seu $\frac{1}{100}$ si denuò hæc unitas con-concipiatur divisa, in decem minores, erit una decima centesimæ, vel respectu unitatis $\frac{1}{1000}$ & sic $\frac{1}{10000}$. $\frac{1}{100000}$ &c.

CLXXX. Ex quibus apparet, denominatores talium fractionum constituere, seriem geometricam crescentem, in ratione decimali.

Erit enim $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$ $\frac{1}{10000}$ $\frac{1}{100000}$

Porrò

Porrò fractiones $\frac{1}{10}$ vocantur primæ $\frac{1}{100}$ dicuntur ſecundæ $\frac{1}{1000}$ vocantur tertiæ & ita deinceps. Unde ut moleſtia illa tot nullarum ponendarum tolleretur, excogitatus eſt, alter modus, exprimendi fractiones decimales, nempe per exponentes. Ita ut ſuper integros poneretur, o ſuper fractiones primas una virgula. Super ſecundas duæ virgulæ. Super tertias tres. Et ita deinceps, tot nimirùm ponendo virgulas quot nullis conſtabat denominator.

Quare hoc modo exprimendi Series priore numero tradita ſic exprimetur:

$$\overset{0}{1}\quad \overset{\prime}{1}\quad \overset{\prime\prime}{1}\quad \overset{\prime\prime\prime}{1}\quad \overset{\prime\prime\prime\prime}{1}\quad \overset{\prime\prime\prime\prime\prime}{1}$$

$$\text{Seu} \ - \ - \ 1 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{1000} \quad \frac{1}{10000} \quad \frac{1}{100000}.$$

CLXXXI. Uſus harum fractionum ampliſſimus eſt, in determinandis menſuris, ponderibus, &c. quibus in metiendis lineis, Planis, Solidis &c. utimur. Utì fecimus in extractione radicis quadratæ § (68.) quando nimirùm numerus datus quadratus non eſt. Hinc Geometræ in dimetiendis teritoriis, utuntur potius perticis, locò orgiarum, vel hexapedarum. Pertica conſtat decem pedibus, Pes geometricus decem policibus. Polex decem lineis, una linea

linea decem aliis minoribus &c. Hinc tales menſuræ Geometricæ vocantur.

Id porrò commodi inde habent. Quod ſe liberent à moleſtis fractionum reductionibus, quæ in hoc labore non levem moleſtiam faceſſunt. Cùm fractiones decimales tractari poſſint, per modum integrorum. Proinde addi, ſubtrahi, ſinè prævia reductione, ut paulò poſt videbimus.

PROBLEMA PRIMUM.

Integros ad fractiones decimales reducere.

CLXXXII. Hic alia re opus non eſt, quam ut integro tot nullæ adjungantur, quot virgulas habet exponens fractionis decimalis ad quam integer reducitur. Superſcriptis iisdem virgulis, vel quot nullis conſtat denominator fractionis datæ; ſubſcripto eodem denominatore.

Cùm enim docuerimus (§ 166.) integros ad fractionem reduci, ſi per denominatorem multiplicetur integer, & ſubſcribatur facto denominator, unitas autem nihil multiplicet, clarum eſt, tot nullas debere edjungi integro, quot conſtat denominator, fractionis decimalis, ad quam reduci debet.

Sit jam reducendus 24. ad ſecundas vel $\frac{1}{100}$

erit - - $2400''$ vel $\frac{2400}{100}$

Sic de aliis.

CLXXXIII

CLXXXIII. Eodem modo reducuntur fractiones majores ad minores. Si nimirùm numeratori, fractionis majoris, adjungantur tot nullæ, quot nullis superat, denominator fractionis minoris, denominatorem fractionis majoris.

Sint enim reducendæ. $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{3}{1000}$

erunt reductæ. $\frac{300}{1000}$ $\frac{20}{1000}$ $\frac{3}{1000}$

Ex quo apparet quod si numeratores fractionum reductarum addantur faciant simul. $\frac{323}{1000}$ Adeoque reipsa, nulla re alia opus est, quam ut fractionum reducendarum numeratores addantur, ea lege. Ut subscribatur numerator fractionis, uno gradu inferioris, uno gradu dextrã versùs. Duobus gradibus inferioris, duobus gradibus dextram versùs, & ita porrò sic sint

priores fractiones $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{3}{1000}$

Reducendæ - - 3 : :
: 2 :
: : 3

Summa reductarum - - - $\frac{323}{1000}$

vel aliæ $\frac{4}{10}$ $\frac{5}{1000}$

Reducendæ - - - 4 :
: : 5

Sum-

Summa reductarum $\frac{405}{1000}$.

PROBLEMA SECUNDUM.

Fractiones decimales addere.

CLXXXIV. HÆc additio sinè ulla reductione perficitur. Si nimirùm fractionum similium numeratores addantur, subscripto priori denominatore. Si nulla adsit fractio similis, tantùm adjungitur.

$$\text{Sic sint addendæ} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \overset{0}{3} & \overset{\prime}{2} & \overset{\prime\prime\prime}{3} \\ \overset{0}{2} & \overset{\prime}{3} & \overset{\prime\prime}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{vel} \quad - \; - \; - \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \; \frac{2}{10} \; \frac{3}{1000} \\ 2 \; \frac{3}{10} \; \frac{4}{100} \end{array} \right.$$

$$\text{erit summa} \quad \overset{0}{5} \; \overset{\prime}{5} \; \overset{\prime\prime}{4} \; \overset{\prime\prime\prime}{3}$$

$$\text{vel} \; - \; - \quad 5 \; \frac{5}{10} \; \frac{4}{100} \; \frac{3}{1000}$$

$$\text{Et reductæ} \; - \; - \quad 5 \; \frac{543}{1000}$$

PROBLEMA TERTIUM.

Fractiones decimales subtrahere.

CLXXXV. HIc iterum nulla reductione opus est. Sed solùm numeratores, à numeratoribus homogeneis subtrahuntur. Si illi minores sint, accipitur unitas à numeratore, fractionis proximè vicinæ; quæ si uno gradu distet, valebit illa unitas decem, si duobus valebit centum.

Sic sint $\overset{0}{5}\ \overset{\prime}{2}\ \overset{\prime\prime\prime}{3}$

Subtrahendæ $\overset{0}{2}\ \overset{\prime}{3}\ \overset{\prime\prime}{4}$

vel $5\ \frac{2}{10}\ \frac{3}{1000}$

Subtrahendæ $2\ \frac{3}{10}\ \frac{4}{100}$

Differentia $\overset{0}{2}\ \overset{\prime}{8}\ \overset{\prime\prime}{6}\ \overset{\prime\prime\prime}{3}$

vel $2\ \frac{8}{10}\ \frac{6}{100}\ \frac{3}{1000}$

Reductæ $2\ \frac{863}{1000}$

PROBLEMA QUARTUM.

Fractiones decimales multiplicare.

CLXXXVI. Cum hæ fractiones multiplicentur sicut ordinariæ, de quibus (§ 160.) nempe multiplicando numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem, adeoque denominator tot zeris augetur, quot sunt in multiplicante. Unde si quis virgulis superscriptis utatur, facta multiplicatione omnes virgulas tam multiplicantis, quam multiplicandi supra factum notare debet.

Sint

Sint enim multiplicandæ $\frac{2}{100}$ per $\frac{3}{1000}$

vel - - $\overset{\prime\prime}{2}$ per $\overset{\prime\prime\prime}{3}$

Erit factum $\frac{6}{100000}$ vel $\overset{\prime\prime\prime\prime\prime}{6}$

PROBLEMA QUINTUM.

Fractiones decimales dividere.

CXXXVII. DIvisio fractionum decimalium fit, ad instar fractionum ordinariarum, ut (§ 162.) Nempe multiplicando numeratorem dividendæ, per denominatorem dividentis, quod factum erit numerator. Et denominatorem dividendæ, per numeratorem dividentis, factum hoc dabit denominatorem.

Sic sint dividendæ $\frac{2}{100}$ per $\frac{4}{10}$

erit quotus - - $\frac{20}{400}$ seu $\frac{1}{20}$

Quod si quis virgulis utì volet, locò nullarum, is virgulas fractionis dividentis, subtrahat à virgulis dividendæ, & residuas superscribat quoto. Ut in hoc casu erunt.

$\overset{\prime\prime}{2}$ per $\overset{\prime}{4}$

erit quotus - - $\overset{\prime}{\frac{2}{4}}$ vel $\overset{\prime}{\frac{1}{2}}$

SCHOLION PRIMUM.

CLXXXVIII. FRactiones sexagesimales eodem modo tractantur, quo decimales. Nam & ibi unitas, concipitur divisa in 60. una sexagesima, in alias sexaginta & ita porrò. Sola diversitas est quod Calculus sit molestior.

SCHOLION SECUNDUM.

CLXXXIX. DIcendum hìc adhuc esset de radicibus potestatum, quomodo illæ addendæ, subtrahendæ aut per invicem multiplicandæ. Sed Opusculi præscripta brevitas, non patitur. Hæc proinde aliunde petenda. Pertractat hæc clarè Joannes Crivellius in eleganti Opusculo suæ Arithmeticæ, quo nos etiam in multis usi sumus. Nos interim ad exempla Algebraica, quæ nos adducturos promisimus properamus. Sit igitur

SECTIO IV.

Applicatio Analysis ad Problemata Algebraica.

CAPUT I.

Applicatio Analysis ad Problemata simplicia.

CXC. PRoblemata Arithmetica in duas Classes dividuntur. Nempe in Determinata, & Indeterminata. Determinata dicuntur, quorum tot sunt conditiones, quot sunt quantitates quæsitæ, seu ignotæ. Indeterminata, quorum pauciores sunt conditiones, quam quantitates quæsitæ.

Quan-

Quando Problema determinatum eſt, neceſsè eſt, tot fieri æquationes, quot ſunt quantitates quæſitæ. Tunc enim ſingulis per ſubſtitutionem æqualium, pro æqualibus, ſublatis, ad unam ignotam reducuntur. Qua reperta, facilè reliquæ invenientur.

At quando Problema indeterminatum eſt, neceſsè eſt, ut plures ignotæ remaneant. Proinde in tali caſu una, vel pluribus, meo arbitrio liberè determinatis, reducitur Problema, ad determinatum. Utì res exemplis Capite ſequenti proponendis, clarior evadet. Recolantur hìc, quæ tradita ſunt, à (§ 76.) uſque ad (§ 85.) ut iis in recenti memoria habitis, facilè ad operationes advertatur. Sit jam

THEOREMA.

CXCI. Si quotcunque quantitates, transferantur ex una æquationis parte, ad aliam, mutatis ſignis, quibus afficiuntur, manet æquatio.

Sit æquatio $3 + X - \frac{2}{3} = 2X - 2 - \frac{2}{3}$

Si fiat - $3 + 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2X - X$

Dico hanc æquationem ſtare.

Subtrahatur enim in prima æquatione X

erit - - $3 - \frac{2}{3} = 2X - X - 2 - \frac{2}{3}$

& addendo utrobique $2 + \frac{2}{3}$

erit - - $3 + 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2X - X$

Transferendo igitur quotcunq; terminos, ex una æquationis parte, ad aliam, manet æquatio.

SCHOLION.

CXCII. HOc Theorema ideò præmiſimus, ut appareat quomodo facilè, termini noti, ab ignotis, ſeparari poſſint; & notis ad unam æquationis partem redactis, ignoti in altera compareant.

Porrò hoc Theorema, non in eo ſenſu intelligi volumus, ut ſi tota æquatio permutetur, mutari ſigna debeant. Tunc enim poteſt manere æquatio, etiam ſi ſigna non permutentur. Sic ſi ſit $a = b + c$ eodem modo dicere poſſum $b + c = a$ proinde tunc tantùm intelligendum eſt. Quando ſaltem una quantitate, ex una æquationis parte relicta, aliæ transferuntur. Licèt etſi mutatis ſignis, poſſim etiam totam æquationem transmutare. Quod nonunquam fieri debet.

PROBLEMA PRIMUM.

CXCIII. LUſor quidam interogatus, quantum nummorum attuliſſet? Repoſuit: quintuplum ejus quod haberet, ſe domi reliquiſſe. Univerſim habere ſe 42. aureos. Quæritur quantum habuerit.

Dicatur illum habuiſſe X.

Quare per conditionem Problematis domi reliquit 5 X.

erit

erit ergo $X + 5X = 42$.
reducendo $6X = 42$.

dividendo per 6 erit $X = \frac{42}{6} = 7$.
ſeptem ergo aureos ad luſum attulit.

PROBLEMA SECUNDUM.

CXCIV. PEtrus & Paulus contulerunt 60 aureos ad faciendum lucrum. Ex hac ſumma, ad peculiare negotium, rei ſolvit Petrus $\frac{1}{4}$ pecuniæ à ſe collatæ. Paulus verò $\frac{1}{2}$. Quæ in unum conflata, effecerunt 20 aureos. Quæritur quantum quisque primo contulerit.

Ponatur primus dediſſe - - X.
Secundus - - - y.
erit - - - $X + y = 60$.
& - - $\frac{X}{4} + \frac{y}{2} = 20$.
Multiplicando per 4 erit $\frac{4X}{4} + \frac{4y}{2} = 80$
ſeu - - $X + 2y = 80$.
Subtracta hac æquatione à prima
erit - - $-y = -20$
Et permutando per § (191.) $20 = y$
Ergo Paulus contulit - - 20
Petrus $60 - 20 = 40$.

PROBLEMA TERTIUM.

CXCV. ÆTas Petri tripla ætatis Pauli. Ætas Antonii ſextupla ejusdem ætatis Pauli, & adhuc trium annorum, ſumma ætatum, 153 anni. Quæruntur ſingulorum ætates.

Igitur per conditiones Problematis,

Ætas Pauli $= X$. Petri $= 3X$. Ant. $6X + 3$.

Adeoque $10X + 3 = 153$

Subtrahendo utrobique 3. erit $10X = 150$

Dividendo per 10. erit $X = 15$

Igitur ætas Pauli 15. Petri 45. Antonii 93.

Summa omnium 153. ut ponebatur.

PROBLEMA QUARTUM.

CXCVI. Quidam duas Crumenas exhibuit, cum dicto: in majori eſſe triplum tantùm, quantum in minori. At ſi ſumma majoris, ſubtrahatur à 30, & minoris à 16, reſidua ſunt æqualia. Quæritur ſumma utriusque.

Ergo per primam conditionem in majori ſunt - - - $3X$

In minori - - - X

Per ſecundam conditionem

$$30 - 3X = 16 - X$$

Et transferendo per (§ 191.) $14 = 2X$

Dividendo per 2 - - erit $7 = X$

Summa ergo in minori contenta erat 7 in majori 21.

PROBLEMA QUINTUM.

CXCVII. Invenire duos numeros, quorum primus, ſit quintuplus ſecundi. At ſi primo addantur 4, & ſecundo 6, ſummæ ſint, ut 4 : 1.

erit

erit ergo primus $5X$
Secundus - - X
Et per ſecundam conditionem
erit $5X+4 : X+6 = 4 : 1$
& mult. med: & extrema, $5X+4 = 4X+24$.
& transferendo per (§ 191.) $X = 20$
ſunt ergo numeri 100. & 20.

PROBLEMA SEXTUM.

CXCVIII. INvenire numerum, cujus reſiduum, ſi auferantur 20. Sit ad reſiduum ejusdem, ſi auferantur ab eo 100. ut $3 : 1$

Sit numerus quæſitus X.
erit per conditionem $X-20 : X-100 = 3 : 1$
Mult: med: extr: $X-20 = 3X-300$
& transferendo per (§ 191.) $280 = 2X$
ac divid: per 2. $140 = X$.

Numerus itaque qui conditiones in Problemate poſitas habet eſt 140.

PROBLEMA SEPTIMUM.

CXCIX. DUm mulus & aſinus, portarent ſimul onera, ingemiſcenti aſino, dicit mulus. Si de tuo onere, unus centenarius adderetur meo, ter tantùm ferrem quantum tu. Repoſuit aſinus ſit hoc verum, hoc tamen etiam ſcio, ſi de tuo pondere, meo oneri adjiceretur unus centenarius, æquale pondus ferremus. Quæritur quantum quisque tulerit

Dicatur onus muli X
Aſini - - y

erit per primam conditionem $X + 1 = 3y - 3$
Per secundam - - - $X - 1 = y + 1$
& subtr: hanc æquationem $2 = 2y - 4$
& transferendo 4 - - erit $6 = 2y$
Dividendo per 2 - - - $3 = y$
proinde substituendo in secunda æqnatione loco y. 3 deprehenditur $X = 5$
Tulit ergo mulus 5 centenarios. Asinus 3.

PROBLEMA OCTAVUM.

CC. Quidam in horto furatus Poma, dum exire vellet, obvio sibi cuipiam, nè proderetur, dedit dimidiam partem. In porta civitatis, cum suspectus esset, dedit iterum dimidium dimidii, seu quartam partem. Obviis sibi in civitate sociis, dedit quintam partem, redux tandem domum, deprehendit tantùm 5 poma.

Quæritur quod habuerit
Ponatur habuisse X

Erit ergo $\frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{5} + 5 = X$

reducendo fractones $\frac{20X + 10X + 8X + 5}{40} = X$

adeoque $\frac{38X}{40} + 5 = X$

Multipl: per 40. erit $38X + 200 = 40X$
Transferendo 38X erit $200 = 2X$
Dividendo per 2 - - $100 = X$
Centum ergo poma habuerat.

PROBLEMA NONUM.

CCI. DIvidere 42, in tres partes continuæ proportionales geometricæ, quarum ratio ſit, ut $1 : 4 : 16$.

Erit prima X ſecunda 4X tertia 16X.
adeoque $X + 4X + 16X = 42$
id eſt $21X = 42$
Dividendo per 21 erit $X = 2$
Proinde partes ſunt $2 : 8 : 32$.

PROBLEMA DECIMUM.

CCII. INvenire duos numeros quorum ſumma ſit 46. differentia 24.

Vocetur unus X alter y.
Erit per primam conditionem $X + y = 46$
Per ſecundam - - - $X - y = 24$
Subtrahendo ab invicem erit $2y = 22$
Dividendo per 2 erit - $y = 11$
Proinde deprehenditur $X = 35$.

Univerſaliter.

Vocetur ſumma S. differentia D.
Ignotus unus X alter y
erit per cond: primam $X + y = S$
per ſecundam - $X - y = d$
Subtrahendo ab invicem $2y = S - d$
Dividendo per 2 erit $y = \frac{S - d}{2}$

SCHOLION.

CCIII. INtereſt datum Problema in numeris; reſolvere per ſubſtitutas locò numerorum literas. Cùm ſic quales-

cun-

cunque numeri à datis jam, diversi, ad eandem quæstionem spectantes, sine ulteriori operatione resolvantur. Si modo inspiciatur ultima resolutio literalis. Sic si dentur juxta conditiones prioris Problematis summa numerorum 59. differentia 47. video hanc differentiam à summa subtrahendam esse & residuum per duo dividendum ut habeatur y.

PROBLEMA UNDECIMUM.

CCIV. INvenire tres numeros ejus conditionis ut primus additus secundo faciat 18. Primus additus tertio faciat 24. Secundus cum tertio 22. Sint numeri quæsiti primus X. secundus y. tertius z.

Erit ergo per primam condit:	$X+y=18$
per secundam - -	$X+z=24$
per tertiam - -	$y+z=22$
Et subtrah: tertiam à secunda	$X-y=2$
hanc addendo primæ	$2X=20$
Dividendo per 2	$X=10$

unde $y=8$ & $z=14$.

SCHOLION.

CCV. POrrò $X-y=2$ addimus primæ æquationi, quia hac ratione eliminatur y, & remanent $2X=20$ in quo totũ laborem esse diximus, ut ignotis pluribus eliminatis una sola compareat æqualis quantitati notæ (§ 80.)

PRO-

PROBLEMA DUODECIMUM.

CCVI. INvenire quatuor numeros, ut terni ſibi additi conficiant numeros datos, v. g. primus cum ſecundo & tertio faciat 20, ſecundus cum tertio & quarto 22, tertius cum quarto & primo 24, quartus cum primo & ſecundo 27.

Sint quæſiti primus X ſecundus y tert: z quartus U.

Ut hic brevius expediatur labor dicatur ſumma horum numerorum S.

Erit ergo $X+y+z+u = S$.

Jam cum per conditionē 1am. $X+y+z=20$

erit ſubſtituendo	$20+u=S$
& - -	$22+X=S$
Sic quoque -	$24+y=S.$
tandem - -	$27+z=S$
His quatuor additis	$93+X+y+z+u=4S.$
æquatione prima	$X+y+zu+u=S.$
Subtracta ab hac erit	$93=3S$
dividendo per 3. erit	$31=S.$

Hoc valore ſubſtituto pro ſumma S

Invenitur
$U = 11$
$X = 9$
$Y = 7$
$Z = 4.$

PROBLEMA DECIMUMTERTIUM.

CCVII. PEtrus iter ingreſſus intra unum diem conficit milliaria germanica 6. jámque octo diebus itineratur. Paulus qui hunc aſſequi cupit, ex eodem loco, & eadem via, intra unum diem conficere

ſta-

ſtatuit milliaria 8, & actu iter agreditur.

Quæritur intra quot dies Petrum aſſequetur? tempus quæſitum dicatur X.

Cum Petrus ſingulis diebus conficiat 6. milliaria & 8 diebus præceſſerit clarum eſt eum jam 48 milliaria confeciſſe.

Præterea tempus donec illum Paulus aſſequatur cum 6 milliaria in dies faciat erit $6X$

Pauli autem - - - $8X$

erit ergo - - $8X = 6X + 48$

& ſubtrahendo $6X$ erit $2X = 48$

Dividendo per 2 erit $X = 24$

Aſſequetur ergo Paulus Petrum die 24.

PROBLEMA DECIMUMQUARTUM.

CCVIII. DAto pretio, unius menſuræ vini generoſi, v. g. 10 groſſorum, & pretio vilioris, v. g. 4 groſſorum, invenire quantitatem vini vilioris, generoſo admiſcendi, ut dato pretio medio, v. g. 8 groſſis, vendi poſſit.

Vocetur hæc quantitas X

proinde quantitas generoſi erit, una menſura minus quantitate X, adeoque $1 - X$

Cujus pretium erit $10 - 10X$

pretium vilioris, quantitatis X, erit $4X$

adeoque $10 - 10X + 4X = 8$ ſeu pretio medio ſeparando notos ab igſiotis $10 - 8 =$
$10X - 4X$

ſeu - - - $2 = 6X$

Dividendo per 6 erit $\frac{2}{6}$ vel $\frac{1}{3} = X$

Pro-

Proinde tertia pars menſuræ; debet eſſe de vino viliori. Cujus pretium ſunt 4 cruciferi, $\frac{2}{3}$ de generoſo, cujus pretium ſunt 20 cruciferi.

Summa 24 cruciferi ſeu 8 groſſi.

PROBLEMA DECIMUMQUINTUM.

CCIX. DAtis duobus metallis, v. g. auro & argento, datóque valore unius unciæ Auri, v. g. fl: 8. itémque unius unciæ Argenti, fl: 4. Ex his duobus metallis, componi debet metallum mixtum, 10 unciarum, ea lege, ut ſit unius unciæ va lor flor: 6.

Quæritur quot ſint accipiendæ unciæ Auri, quot Argenti.

Vocentur unciæ Argenti X Aari y
erit pretium Argenti - $4X$ Auri $8y$.
Pretium verò 10. unciarum mixti 60. fl.
Adeoque per 1mam conditionem $X + y = 10$
per ſecundam - - $4X + 8y = 60$
mult: 1am æquationē per 4. erit $4X + 4y = 40$
Hanc ſubtrahendo à ſecunda erit $4y = 20$
Dividendo per 4. erit - - $y = 5$
Proinde etiam - - $X = 5$

PROBLEMA DECIMUMSEXTUM.

CCX. DAtis duobus metallis mixtis, in quorum primo pars auri ſit 1, argenti 2. In ſecundo, partes auri 4, argenti 5. Petitur ut fiat maſſa 7 cujus partes auri ſint 3, argenti 4.

Quæ-

Quæritur quantum ſummendum, de primo, quantum de ſecundo.

Sumenda pars ex primo ſit X

ex ſecundo ſit y.

Cùm in primo ſit pars auri 1 argenti 2 componetur v. g. una uncia hujus metalli, ex tribus partibus, nempe $\frac{1}{3}$ auri, & $\frac{2}{3}$ argenti.

erit ergo in illo $\frac{X}{3}$ auri & $\frac{2X}{3}$ argenti

Eodem modo in ſecundo, cùm ſint 4 partes auri, & 5 argenti, quæ ſimul faciunt 9.

erunt ergo $\frac{4y}{9}$ auri, & $\frac{5y}{9}$ argenti

Jam cùm in novo mixto debeant eſſe 3 partes auri ſequitur quod ſit $\frac{X}{3} + \frac{4y}{9} = 3$.

Et cùm argenti ſint 4 partes erit $\frac{2X}{3} + \frac{5y}{9} = 4$

Tollendo fractiones ſit primo $3X + 4y = 27$

ſit ſecundo - - - $6X + 5y = 36$

Et mult: primam per 2 ſit $6X + 8y = 54$

ab hac ſubtrahendo ſecundam ſit $3y = 18$

& dividendo per 3 ſit $y = 6$

Igitur ex mixto quod habet 4 partes auri, & 5 argenti, ſumendæ ſunt 6 partes, & una ex primo mixto, ut prodeat mixtum, cujus tres ſunt partes auri, & 4 argenti.

SCHO-

SCHOLION.

HÆc Problemata mixtionis, probè intellecta, viam faciunt, ad omnia, hujus generis intelligenda. Quod si plura miscibilia mixtionem ingrediantur, quam duo, Problema erit indeterminatum, quorum exempla sequenti Capite adducentur.

PROBLEMA DECIMUMSEPTIMUM.

CCXI. QUidam debitor, quinque annis capitale apud se detentum, tandem una cum censu quinque annorum quinque pro centum Creditori restituit. Fuerunt autem 2000.

Quæritur quantum fuerit capitale, & quantum census efferat.

Sit Capitale X.

Census unius anni erit $\frac{5X}{100}$

& quinque annorum - - $\frac{25X}{100}$ seu $\frac{X}{4}$.

Erit ergo $X + \frac{X}{4} = 2000$

multipl: per 4 erit $4X + X$ seu $5X = 8000$

Dividendo per 5 - $X = 1600$

Seu Capitale quæsitum

Census unius anni 5 pro cento = 80

& quinque annorum - - 400:

Proinde summa totalis - 2000.

PROBLEMA DECIMUMOCTAVUM.

CCXII. CReditor quidam, Capitale 100. flor. perdiderat, tandem debi-

 tor

tor ejus misertus, promisit ultrò se soluturum, una cum censu quinque pro cento, id quidem non ad semel, sed per triennium, ità ut post primum annum ellapsum, deponat integrum censum, 100 florenorum, & addat aliquid ex Capitali, secundo anno iterum censum integrum, pecuniæ apud se remanentis, cui iterum addere velit partem Capitalis, & tandem tertio anno iterum integrum censum, una cum reliqua parte Capitalis, quæ apud se remanserat. Hac tamen lege, ut sibi dicat Creditor, quantum primo anno deponere debeat, ut sibi singulis annis æquales summæ solvendæ veniant. Secùs se nihil soluturum. Solicitus proinde Creditor, Arithmeticos consulit, quæ sit illa summa, quæ petitas conditiones impleat.

Vocetur igitur sum̃a primo añó danda X. Atque ut generalem Regulam eruamus, pro similibus Problematibus, utemur Calculo literali.

Dicatur Capitale seu - - $100 = a$
Census - - - seu $5 = b$.
Erit igitur post primum annum $a + b$
& deposito Creditori - - X
manebit pro sequenti anno $a + b - X$.
hujus census inquiritur per proportionem ut est $100 : 5$ seu ut $a : b = a + b - X$
& mult: tertium per secundum & dividendo per primum invenitur Census $\frac{ab + bb - bX}{a}$ est

est igitur anno 2do sum̃a $a+b-X\,\frac{+ab+bb-bX}{a}$

ex qua deposito X

manet pro 3tio anno $a+b-2X\,\frac{+ab+bb-bX}{a}$

Census hujus invenitur

ut $a:b=a+b-2X\,\frac{+ab+bb-bX}{a}$

erit hic $\frac{ab+bb-2bX}{a}+\frac{abb+bbb-bbX}{aa}$

Summa proinde $a+b=2X\,\frac{+2ab+2bb-3bX}{a}$

$+\frac{abb+bbb-bbX}{aa}$

Atque deposito X debet remanere nihil

erit ergo $a+b-2X\,\frac{+2ab+2bb-3bX}{a}$

$\frac{+abb\;bbb-bbX}{aa\qquad aa}=X.$

Multipl: per aa erit. $aaa+aab-2aaX+2aab$
$+2abb-3abX+abb+bbb-bbX=aaX$

Separando notos ab ignotis & similes adden:
erit $aaa+3aab+3abb+bbb=3aaX+3abX$
$+bbX$.

Dividendo per $3aa+3ab+bb$.

erit $\frac{aaa+3aab+3abb+bbb}{3aa+3ab+bb}=X$

Ex ultima resolutione apparet, quod in simili quæstione, Capitale cum suo censu primi anni, elevari debeat ad potentiam numeri annorum, pro quibus quæstio proponitur. Sic ad tertiam potentiam, ſi per tres annos exolvendum ſit, ad quartam ſi per quatuor, & porrò, atque hæc potentia erit dividendus.

Pro inveniendo diviſore, eadem potentia ſolius Capitalis, ſubtrahenda venit à dividendo, & reſiduum dividitur per cenſum primi anni. Hic quotus dabit diviſorem. Sic in noſtro caſu

Capitale cum cenſu eſt	105	
Multiplicatum per -	105	
	525	
	1050	
Summa -	11025.	
Iterum multipl: per	105	
	55125	
	110250	
Dividendus	1157625	
Solùm Capitale - -		100
Multiplicatum per -		100
Dat - -		10000
Iterum multiplicatum per		100
Dat - - -		1000000
Hoc ſubtr: à Dividendo		
reſtant	157625	

hoc reſiduo diviſo per 5 quotus eſt 31525 ſeu diviſor. Per hunc diviſorem dividi debet, potentia data Capitalis cum cenſu. Et quotus dabit valorem X

nem-

nempe $31525\ (1157625)\ 36\frac{22725}{31525}$

$$\begin{array}{r} 94575 \\ \hline 211875 \\ 189150 \\ \hline 22725 \end{array}$$

Est ergo $X = 36 \dagger \frac{22725}{31525}$ seu $36\ \frac{\dagger 909}{1261}$

Summa ergo primo anno - 105

Subtractis - - - $36\frac{\dagger 909}{1261}$

restat pro sequenti anno $68. \dagger \frac{352}{1261}$

Census hujus $\frac{340}{100}$ seu $3 \dagger \frac{4}{10} \dagger \frac{1760}{126100}$

Fractiones hæ reductæ $3 \dagger \frac{504400 \dagger 17600}{1261000}$

504400

additæ $3 \dagger \frac{17600}{522000}$ faciunt $\frac{522000}{1261000}$

in minimis terminis. $3 \dagger \frac{522}{1261}$

His additis ad restantiam fit $71\ \frac{\dagger 874}{1261}$

Solutis secundo anno $36\frac{\dagger 909}{1261}$

Restant pro tertio anno $34 \dagger \frac{1226}{1261}$

Census $\frac{170}{100}$ seu $1 \dagger \frac{7}{10} \dagger \frac{6130}{126100}$

Reductis fractionibus $1. \dagger \frac{882700 \dagger 61300}{1261000}$

Fractionibus additis $1.+\ 882700$
61300

Fit - - $1.+\frac{944000}{1261000}$.

Numerator & denominat: divisus per mille

facit - - $1+\frac{944}{1261}$

Adddendo restantiæ nempe $34+\frac{1226}{1261}$

fit summa tertii anni $35+\frac{2170}{1261}$

Spuria reducta fit $1+\frac{909}{1261}$

Unitas ad 35 addita facit $36\ \&\ \frac{909}{1261}$

Summam nempe æqualem summæ primo anno depositæ.

SCHOLION.

INterest aliquando, hujusmodi operationes arripere, ut horror fractionum, qui Tyrones non rarò infestat, supperetur.

LEMMA.

CCXIII. DAtis quotlibet terminis, in serie Geometrica, datur semper hæc proportio, ut est terminus primus ad secundum, ità summa omnium, præter ultimum, ad summam omnium, præter primum.

Quod manifestè apparet, si modò termini exprimantur, per Seriem generalem, ex-

expressam per exponentes, uti diximus § 127. nempe $a \quad ma \quad m^2a \quad m^3a \quad m^4a$

apparet inquam quod $a : ma = a + ma + m^2a + m\,a : ma + m^2a + m^3a + m^4a$

nam factum extemorū est $maa + m^2aa + m^3aa + m\,aa$

Mediorum - - $maa + m^2aa + m^3aa + m^4aa$

eadem est demonstratio Seriei decrescentis.

PROBLEMA DECIMUMNONUM.

CCIV. Datis in Serie Geometrica, termino primo, secundo, & ultimo. Invenire summam illius Seriei.

Sit terminus primus a, secundus b, ultimus u.

Summa quæsita X.

Erit per Lemma $a : b = X - U : X - a$

Mult: media & extrema $aX - aa = bX - bu$

Separando ab ignotis $bu - aa = bX - aX$

ergo - - - $\dfrac{bu - aa}{b - a} = X$

Hoc pro Serie crescente

pro decrescente erit $aX - bX = aa - bu$

ergo dividendo per $a - b$. $X = \dfrac{aa - bu}{a - b.}$

Igitur ut habeatur summa, omnium Seriei crescentis, à producto secundi termini, in ultimum, tollatur quadratum primi, & residuum dividatur, per differentiam, secundi à primo.

Si sit terminus primus 1 secundus 2 ultimus

mus 256 erit ſumma 256. 2 ſeu 512 − 1 id eſt 511.

CAPUT II.

Applicatio Analyſis ad Problemata indeterminata.

PROBLEMA PRIMUM.

CCV. DAtis tribus metallis, quorum primi uncia ſit quatuor florenis, ſundi 6, tertii 9. ut componantur unciæ 20, quæ ſingulæ valeant 7 florenos, quantum ex qualibet ſpecie accipiendum ſit.

Sit portio primi X ſecundi y tertii Z.

erit $X + y + z = 20$.

Et quia quævis hæc uncia valere debet ſeptem florenos valor omnium erit 140 florenorum

erit ergo $4X + 6y + 9z = 140$

Mult: primam per 4. erit $4X + 4y + 4z = 80$.

Subtrahendo hanc à priore

erit - - $2y + 5z = 60$

Statuatur jam $z = 10$ erunt $5z = 50$

& $2y = 10$ adeoque $y = 5$

& cum $10z$ & $5y$ ſint 15 etiam erunt $5X$

Si dicatur $z = 8$ erit $y = 10$ $X = 2$.

SCHOLION.

SI quatuor ſunt miſcibilia, duo determinanda erunt. Si 5 tria determinari debent.

PROBLEMA SECUNDUM.

CCVI. VIginti tranſiverunt per telonium, Viri mulieres, & infantes.

tes. Vir quilibet ſolvit 3 denarios fœmina 1, infans $\frac{1}{2}$ numerata pecunia inventi ſunt 20 denarii.

Quæritur, quot fuerint Viri, quot fœminæ, quot infantes.

Dicantur Viri X fœminæ y infantes z

erit - - $X+y+z=20$

item - - $3X+y+\frac{z}{2}=20$

Subtrahendo ſuperiorem ab inferiore

erit - - $2X-\frac{z}{2}=0$

transferendo z erit $2X=\frac{z}{2}$

multiplicando per 2 erit $4X=z$

Solvitur ergo Problema, ſi modo quater tot infantes ponantur, quot Viri.

Ponatur ergo $X=1$ erit $z=4$ & $y=15$
ſit - - $X=2$ erit $z=8$ & $y=10$
ſit - - $X=3$ erit $z=12$ & $y=5$

PROBLEMA TERTIUM.

CCVII. Sint diſtribuendi floreni 100, hominibus 30, Viris, fœminis, & pueris. Hac lege, ut Viri accipiant, per 8 flor:, fœmina per 5, pueri per 1.

Quæritur? quot ſint futuri Viri? quot fœminæ? quot pueri?

Vocentur Viri X, fœminæ y, pueri z.

erit per conditionem 1mam $X+y+z=30$

per ſecundam - - $8X+5y+z=100$

Subtrahendo superiorem æquationem ab inferiore

erit - - - $7X + 4y = 70$

Ubi observandum, quod si desiderentur numeri integri, quantitas X vel y quod perinde est, talis statuenda sit, ut illa multiplicata per cœficientem de X vel de y, & facto subtracto à 70, residuum debeat esse divisibile, per cœficientem alterius. Sic in hoc Casu

Si X statuatur 2 hoc multiplicatum per 7 sunt 14 his 14 subtractis à 70 restant 56 quæ divisa per 4 dant quotum 14

erit ergo $X = 2$. $y = 14$. & $z = 14$

Statuatur $X = 6$ erit $y = 7$ & $z = 17$.

CAPUT III.

De Æquationibus Compositis.

CCXVIII. Diximus jam § 76. definitione 3. æquationem compositam vocari, quando quantitas ignota, est plurium dimensionum. In specie si sit duarum dimensionum, seu secundi gradus, dicitur quadratica. Si trium dimensionum, vel tertii gradus, dicitur Cubica & ita porrò.

Nos hìc opusculi angustiis constricti, quadraticas tantùm resolvemus, quæ utpotè breviores, faciliores captu sunt.

Nec in eo dificultas est, ut potentiæ cujuscunque, si modò nullo termino careat, radix inveniatur. Siquidem de hac inveniennienda regulas tradidimus. Sectione 1ma, Cap. 3, § 63, & sequentibus verùm si quadratum quantitatis ignotæ, non sit completum, sed termino seu membro tertio careat, v. g. si sit $XX + 2X = 99$.

Inveniendum igitur, hìc tertium membrum est, quo ex utraque æquationis parte addito, radix quadrata, juxta § 63. facilè extrahetur. Et sola ignota X, æqualis numero noto comparebit.

CCIX. Pro quo inveniendo adverte. Quod tertium membrum, semper sit quadratum, de dimidio cœficiente secundi membri. Consideremus enim quadratum, ex radice $a + b$ in se ducta ortum. Erit illud $aa + 2ab + bb$ in quo manifestè apparet, quod tertium membrum seu bb, sit quadratum de dimidio cœficiente. Secundi membri, seu de dimidio 2b quod est b. Unde in exemplo, superius adducto, in quo cœficiens secundi membri, est 2 cujus dimidium est 1. unitatis quadratum est itidem 1. Addita itaque, ex utraque æquationis parte unitate,

prodibit - $XX + 2X + 1 = 99 + 1 = 100$
cujus radix est - $X + 1 = 10$
& subtrahendo 1 erit $X = 9$.

Si in secundo membro, compareat solum X, illius cœficiens intelligitur unitas, proinde quadratum de $\frac{1}{2}$ pro complemento, seu pro tertio termino adhiberi debet.

Si

Si in ſecundo membro compareat 3X, pro complendo quadrato, ſeu pro tertio termino, aſſummi debet quadratum, de $\frac{3}{2}$ & ſic de aliis.

PROBLEMA PRIMUM.

CCXX. EXuſto quodam Cœnobio dimiſſi ſunt Cœnobitæ ad corrogandam ſtypẽ, exacto tempore reduces, depræhenſus eſt quilibet tot florenos attuliſſe quot fuerant exmiſſi. Summa autem totalis erat 144 floreni.

Quæritur quot fuerint & quantum quisque tulerit.

Dicantur fuiſſe miſſi X
proinde quilibet etiam tulit X
erit ergo - - - $XX = 144$
extracta utrobique radix eſt $X = 12$.
fuerunt ergo exmiſſi 12.

PROBLEMA SECUNDUM.

CCXXI. LAtrones expillarunt fornicem Mercatoris & abſtulerunt 3333 florenos. Diviſione facta depræhenderunt quod quilibet ter tot florenos acceperit, quot erant latrones & inſuper quilibet adhuc duos.

Quæritur quot fuerint latrones & quantum quisque acceperit.

Dicantur fuiſſe X
accepit ergo quilibet $3X + 2$
Summa omnium eſt $3XX + 2X = 3333$

Divi-

Dividendo per 3 erit $XX + \frac{2X}{3} = 1111$

Complendo quadratum per § 218

erit $XX + \frac{2\lambda}{3} + \frac{4}{36} = 1111 + \frac{4}{36}$

&, reducendo 1111 ad fractionem $\frac{4}{36}$

erunt - - - - $\frac{40000}{36}$

Cujus radix est per § 165. $\frac{200}{6}$

& dividendo per 6 erunt - - $33\frac{2}{6}$

Proinde $X + \frac{2}{6} = X\frac{2}{6}$

Subtrahendo $\frac{2}{6}$ fit $X = 33$

33 ergo erant latrones
& quilibet 101 florenos abstulit.

PROBLEMA TERTIUM.

CCXXII. Sodales cujusdam Cætus ob excessum mulctati sunt à Magistro Cætûs, ut quilibet tot denarios deponeret, quot sunt sodales. Tandem intercessione facta, remisit cuilibet 3 denarios. Solutione facta depræhensa est summa 504 penariorum.

Quæritur quot fuerint sodales & quantum quilibet solvere debuerit.

Dicatur numerus sodalium X

Egit solutio singulorum X − 3

Erit

Erit ergo - - $XX - 3X = 504$

Et addendo $\frac{9}{4}$ erit $XX - 3X + \frac{9}{4} = 504 + \frac{9}{4}$

reducendo ad fractionem 504. erit $\frac{2025}{4}$

erit ergo $XX - 3X + \frac{9}{4} = \frac{2025}{4}$

Radix est - $X - \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$

transferendo $-\frac{3}{2}$ erit $X = \frac{48}{2} = 24$

erant proinde 24 sodales & solvit quilibet 21

PROBLEMA ULTIMUM.

CCXXIII. INdixit Cætus contributionem pro novo vexillo, ea lege ut quilibet Magister dimidium tot florenos deponat, quot sunt Magistri, & adhuc 3. Singuli sodales deponant tertiam partem summæ à Magistro depositæ. Sodales erant ter tot quot Magistri, collecta summa fecit 720 florenos.

Quæritur quot fuerint Magistri, quot sodales, & quantum quisque solverit.

Vocetur numerus Magistrorum X, erit sodalium $3X$,

Solutio Magistrorũ $\frac{X}{2} + 3$, & sodalium $\frac{X}{6} + 1$.

Summa erit $\frac{XX}{2} + 3X \frac{+3XX}{6} + 3X = 720$

adeoque $XX + 6X = 720$

Addendo 9 erit $XX + 6X + 9 = 729$

Cujus

Cujus radix $X+3 = 27$
& ſubtrahendo 3. erit $X = 24$
erant ergo Magiſtri - - 24
Sodales - - 72

Magiſtri ſinguli contulerunt $\frac{X}{2}+3 = 15$
Sodales tertiam partem - ſeu 5.

INDEX
SECTIONUM & CAPITUM.

SECTIO I.

SECTIO II.

SE-

SECTIO III.

De Fractionibus.

SECTIO IV.

O. A. M. D. G.

1.

Dño Stephano
Dobr

Homo natus de Mulie,
re brevi vivens tempore
multis repletur Miseriis &
Iurabis: vivit Deus in Ver
itate, & Justitia &c.

Mas