JOAN. BAPT. HORVATH,

PRESBYTERI ARCHI-DIOECESIS STRIGONIENSIS, NUNC IN REGIA SCIENTIARUM UNIVERSITATE BUDENSI THEORIÆ PHYSICÆ SUBLIMIORIS, PHYSICÆ ITEM EXPERIMENTALIS, ET MECHANICÆ PROFESSORIS PUBLICI ORDINARII.

INSTITUTIONES MATHESEOS,

PHILOSOPHIÆ AUDITORUM USIBUS ACCOMMODATÆ.

EDITIO NOVISSIMA.

AUGUSTÆ VINDELICORUM,

SUMPTIBUS MATTHÆI RIEGER p. m. FILIORUM.

MDCCLXXXII.

CONSPECTUS MATERIARUM.

PARS PRIMA.

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

 tio-

ELEMENTA ALGEBRÆ.

SECTIO PRIMA.
DE PRIMIS CALCULIS ALGEBRAICIS.

SECTIO

SECTIO SECUNDA.

DE QUANTITATUM POTENTIIS, & RADICIBUS.

SECTIO TERTIA.

DE PROBLEMATUM RESOLUTIONE, SEU ANALYSI.

SECTIO QUARTA.

DE VARIIS QUANTITATUM RELATIONIBUS.

PARS SECUNDA.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

SECTIO PRIMA.

DE LINEIS ET ANGULIS.

SECTIO SECUNDA.

DE TRIGONOMETRIA PLANA, ET MENSURATIONIBUS LINEARUM GEOMETRICIS, AC TRIGONOMETRICIS.

SECTIO

SECTIO TERTIA.
DE SUPERFICIEBUS ET SOLIDIS.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM.

PROLE-

PROLEGOMENA
MATHESEOS.

I.

Mathesis re ipsa idem significat Græcis, quod Latinis *scientia*, vel *disciplina*; usu tamen receptum est, ut vocabulo hoc earum scientiarum naturalium classis designetur, quæ pro objecto *quantitatem* habent: unde etiam Mathesis vulgo *Scientia quanti* nominari solet. Porro *quantitas* appellatur quævis magnitudo, quæ additione augeri, vel ablatione imminui potest: e. g. numeri, lineæ, pondera, quoniam augeri, ac imminui possunt, *quantitates sunt*.

2. Mathesis peculiarem quemdam modum usurpat in veritatibus suis inveniendis, ac demonstrandis; qui modus *methodus mathematica* nuncupatur. Solent in ea adhiberi Definitiones, Hypotheses, Axiomata, Postulata, Theoremata, Problemata, Lemmata, Corollaria, & Scholia.

3. *Definitio* est distincta *rei*, aut *nominis*, de quo agitur, explicatio. Ut si dicas: *numerus est collectio unitatum.*

4. *Hypothesis*, seu *Suppositio* sunt res, vel signa rerum ad libitum assumpta, ex institutione hominum. Sic 1) signum + est assumptum pro signo additionis: nimirum si quantitas una signo + interjecto adjunga-

tur alteri; significatur, eam quantitatem, cui signum illud præfixum est, alteri addi. e. g. $5 + 3$ significat, numerum 3 addi numero 5, id est, significat *summam*, seu collectionem numerorum 5 & 3. Porro signum $+$ solet enunciari vocabulo *plus*; adeoque $5 + 3$ sic enunciatur: *quinque plus tria.* 2) Signum — est assumptum pro signo subtractionis: nimirum si quantitas una signo — interjecto adjungatur alteri; significatur, eam quantitatem, cui signum illud præfixum est, ab altera tolli. e. g. $5 - 3$ significat, numerum 3 tolli a numero 5, id est, numerum 5 numero 3 mulctari. Porro signum — solet enuntiari vocabulo *minus*; adeoque $5 - 3$ sic enunciatur: *quinque minus tria.* 3) Signum $=$ est signum æqualitatis; id est, significat, eas quantitates, inter quas interjicitur, esse æquales: unde etiam vocabulo *æquale* solet enunciari. Hinc e. g. $5 - 3 = 2$, tantundem significat, ac: $5 - 3$ *æquale* 2. Plures Mathematicorum hypotheses suis locis adnotabimus.

5. Notanda hoc loco est propositionis in theoreticam, & practicam divisio. Propositio *theoretica*, seu *speculativa* est, in qua nonnisi veritas quæpiam in sola speculatione sistens enuntiatur. e. g. *Totum est majus sua parte.* *Practica* vero propositio dicitur illa, in qua fieri quidpiam, aut fieri debere asseritur, vel postulatur. e. g. *Lineam rectam in duas æquales partes secare.* Utraque hæc propositionum classis dividitur in propositiones indemonstrabiles, & demonstrabiles. Propositio *indemonstrabilis* est, cujus veritas solis terminis rite apprehensis evidenter patet, ac proinde cujus veritas lumine naturæ nota est. e. g. *Totum est majus sua parte.* *Demonstrabilis* autem ea dicitur, cujus veritas ex aliis propositionibus notis evidenter infertur. His intellectis facilis jam est definitio axiomatis, postulati, theorematis, & problematis. Nimirum

6. *Axioma* est propositio theoretica indemonstrabilis. e. g. *Totum est majus sua parte.*

7. *Postulatum* est propositio practica indemonstrabilis. e. g. *A quovis puncto ad aliud linea recta duci potest.*

8. *Theorematis* nomine venit propositio theoretica demonstrabilis. e. g. *Anguli ad verticem oppositi sunt æquales.*

æquales. Theorematis demonſtrationem multi his notis finiunt: Q. E. D. id eſt, *Quod erat demonſtrandum.*

9. *Problema* eſt propoſitio practica demonſtrabilis. e. g. *Lineam rectam in duas æquales partes dividere.* Propoſitioni problematis ſubjicitur ejusdem *Reſolutio*, ſeu praxis, qua problemati propoſito ſatisfaciendum eſt: hanc conſequitur *Demonſtratio*, quæ oſtendit praxim illam, ſeu reſolutionem eſſe bonam, ac legitimam. *Reſolutio* a multis finiri ſolet his notis: Q. E. F. id eſt, *Quod erat faciendum.*

10. *Lemma* eſt demonſtratio prævia, quæ ad illuſtre quoddam theorema, vel problema facilius demonſtrandum nonnunquam præmittitur.

11 *Corollaria*, ſeu *conſectaria* ſunt propoſitiones, quæ ex præcedente Definitione, aut Axiomate, Theoremate &c. facillime deduci poſſunt. Majoris tamen claritatis gratia, brevis & plana demonſtratio etiam corollario frequenter adjicitur.

12. *Scholia* denique ſunt adnotationes quædam poſt theoremata, problemata &c. poni ſolitæ, quibus obſcura declarantur, uſus doctrinæ indicatur, eruditio aliqua proponitur, aut de quacunque re Lector utiliter admonetur.

Scholion. Definitiones has, quæ proxime præcedentibus octo numeris continentur, in Logica quoque *Diſſert.* II. peculiari §pho pertractavimus.

13. Quod attinet ad ordinem, quem Matheſis in tradendis veritatibus ſuis tenere conſuevit: methodus mathematica exigit, ut ante omnia voces, & res omnes, de quibus agendum eſt, perſpicue definiantur; præmittantur Axiomata, Hypotheſes, & Poſtulata, ſi iis opus ſit; tum ſtatus quæſtionis (id eſt, theorematis, vel problematis) clare, diſtincte, & quatenus fieri licet, breviſſime proponatur; factam propoſitionem conſequatur item clara, & diſtincta rei propoſitæ demonſtratio. Porro in demonſtrationibus nihil adhibeatur, quod non ſit jam prius demonſtratum, definitum, aut declaratum. Ex his utilia corrollaria deducantur; & ſcholia, ſi opus ſit, ſubjiciantur. Ordo autem theorematum caute obſervandus eſt; ut maxime ſimplicia,

& facillima præmittantur, ex quibus ad fublimiora tanquam per gradus fiat progreffus.

Scholion. Mathematici adlaborare folent, ut quam maxime fuccinctas adferant demonftrationes, vitataque omni verborum fuperfluitate, rem uno alterove enthymemate, aut fyllogismo, fi fieri poffit, conficiant. At non omnia fane, quæ fuperflua videri posfunt comparate ad exculta fcientiis ingenia, æque fuperflua funt etiam comparate ad Tirones, fublimioribus ratiociniis nondum affuetos. Quapropter ego quidem, cui Tironum utilitas cumprimis cordi eft, piaculo mihi nequaquam ducam, aliqua nonnihil fufius, enucleatiusque proponere, quam nonnulli rigidiores Critici forte vellent.

14. Ut elementa hæc, aliosque libros mathematicos Tiro cum fructu legat, fequentia monita cumprimis obfervet. 1) Res fingulas eo legat ordine, quo propofitæ funt in libro, nec tranfiliat rem ullam non intellectam, præfertim fi adfit peritus quispiam, quem confulere poffit. Methodus enim mathematica eft ejusmodi, ut pofteriores veritates continenter a prioribus dependeant, neque intelligi fine prævia priorum veritatum notitia poffint. 2) Dum demonftrationem legit, videat, an cujuslibet enunciationis, quæ demonftrationem illam ingreditur, fenfum, & veritatem affequatur. Quod fi de fenfu, aut veritate cujuspiam dubitet; citatum eo loco numerum diligenter relegat, & plerumque dubium illico fibi fublatum experietur. Plurima enim dubia Tironibus idcirco exoriuntur, quod ea, quæ præcefferant, & a quibus pofteriores demonftrationes dependent, e memoria exciderint. 3) Plurimum ad profectum fibi conferre experietur Tiro fcholafticus, fi materiam in fcholis proxime explanandam ipfe prævie perlegat, marteque proprio intelligere fatagat, tum non intellecta adnotet, eorumque cumprimis explicationem fumma in fcholis attentione excipiat. 4) Si veritas demonftrata quoquo modo in praxim deduci poffit, ejus praxim per fingulos cafus variando exerceat.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Numeris generatim; tum speciatim de Numeratione.

15. Numerus (circa quem omnis versatur Arithmetica) est *collectio unitatum*; ita ut numerus quilibet saltem duas unitates in se complecti debeat. Hinc etiam unitas *non numerus*, sed *principium numeri* dici consuevit.

16. Signa, seu notæ, quas ad exprimendos numeros adhibet Arithmetica, sunt hæ decem: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Novem priores notæ, si earum unaquæque seorsim, & extra aliarum consortium collocetur, denotant unitates: nempe 1, denotat unam unitatem; 2, duas; 3, tres; 4, quatuor; 5, quinque; 6, sex; 7, septem; 8, octo; 9, novem. Postrema nota, seu 0 (quæ *zerus* vocari solet) seorsim collocata prorsus nihil significat. Unde etiam nonnisi novem illæ priores notæ vocantur *significantes*.

17. Eædem hæ notæ numericæ, quum plures conjunguntur, ordineque collocantur, peculiarem quendam valorem nanciscuntur etiam a loco, quem in ejusmodi ordine occupant. Scilicet in quolibet id genus ordine nota dextima significat unitates; secunda versus sinistram nota significat decades; tertia centenarios; quarta millenarios &c. e. g. In hoc ordine: 4672, dextima nota 2, valet tantum simplices unitates, nimirum duas; sequens versus sinistram nota 7, valet tot decades, quot unitates simplices significare solet tunc, quum extra consortium aliarum collocatur, ac proinde valet septem decades, seu *septuaginta*; tertia versus sinistram nota 6. valet sex centenarios, seu *sexcenta*; quarta de-

nique nota 4. valet quatuor millenarios, ſeu *quatuor millia.*

18. Corollarium. Itaque in quolibet notarum numericarum ordine valor earundem notarum a dextra verſus ſiniſtram progrediendo continenter creſcit in decuplum; ita ut in hoc e. g. ordine: 4672, quælibet unitas numeri 7 decies plus valeat, ac valeat quælibet unitas numeri 2 dextram verſus proxime collocati, item quælibet unitas numeri 6 decies plus valeat, ac valeat unitas quælibet numeri 7, & ſic porro.

19. Quodſi eo caſu, quo plures numericæ notæ ordine collocandæ ſunt, cuipiam loco nulla competat ex novem illis ſignificantibus notis, quas n. 16. deſcripſimus; locum illum zerus occupat. e. g. Sit exprimendus notis arithmeticis hic numerus: *tria millia quinquaginta.* Hic numerus conſtat tribus millenariis. quinque decadibus, nullo centenario, nulla unitate ſimplice. Itaque locum centenariorum, & unitatum ſimplicium, adeoque locum a dextra verſus ſiniſtram tertium, item dextimum (17) zerus occupet, eſt neceſſe: hoc eſt, eum numerum hic notarum ordo debet exprimere: 3050. Si enim omiſſis zeris ſcriberetur 35; hic ordo jam non *tria millia quinquaginta*, ſed *triginta quinque* ſignificaret. Unde patet valorem numeri eatenus augeri adjectis zeris, quatenus hoc pacto notæ ſignificantes magis verſus ſiniſtram retruduntur.

Scholion. Signa numerica n. 16. deſcripta, quoniam ab Arabibus inventa ſunt, numeri *Arabici* ſolent nuncupari. Numeri Romani hodierni ſunt ſequentes.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
XX.	XXX.	XL.	L.	LX.	LXX.	LXXX.	XC.		
20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,		
C.	CC.	CCC.	CD.	D.	DC.	DCC.			
100,	200,	300,	400,	500,	600,	700,			
DCCC.	CM.	M.							
800,	900,	1000.							

20. *Numeratio* eſt ars ſcribendi, & enunciandi quoscunque numeros ſecundum valores ſuos totales.

21. PROBLEMA I. *Numerum quemcunque propoſitum enunciare.*

RESOLUTIO. 1*mo*. Numerus propoſitus inchoando a dextris ſiniſtram verſus dividatur in claſſes per *virgulas*, ſive *commata*, cuilibet claſſi aſſignando tres numeros: claſſis ſiniſtima poteſt etiam duabus, aut una nota conſtare. e. g. Si detur hic numerorum ordo: 28673256913294; eum hoc modo per commata divide: 28, 673, 256, 913, 294.

2*do*. Poſt virgulam dextimæ claſſis ſignetur ſuperne *puncto* uno is numerus, qui verſus ſiniſtram ſequitur; & poſt virgulam ſecundæ claſſis ſequens numerus ſignetur ſuperne *virgula* una. Poſt tertiæ claſſis virgulam notetur ſuperne numerus puncto uno; poſt quartæ claſſis virgulam notetur numerus duabus virgulis: & ſic porro a dextra ſiniſtram verſus progredere alternando ſuperne puncta, & virgulas. Attamen dum ſecunda vice ponenda eſt ſuperne virgula, ea jam duplicata ſit, oportet; triplicata autem, ſi tertia vice poni debeat, & ſic porro. Itaque ſuperius datus numerorum ordo hoc modo erit ſignandus punctis, & virgulis:

$$2\overset{\prime\prime}{8},\ 67\dot{3},\ 25\overset{\prime}{6},\ 91\dot{3},\ 294.$$

3*tio*. Peracta hac partitione, prima claſſis ſeu dextima, a dextris ſiniſtram verſus regrediendo ſignificabit unitates, decades, & centenarios ſimplices: ſecunda claſſis ſignificabit unitates, decades, centenarios millium: 3tia unitates, decades, centenarios millionum; nam virgula ſuperne poſita, eſt ſignum millionum: 4ta unitates, decades, centenarios millium millionum. 5ta unitates decades, centenarios bimillionum; duplex enim virgula ſuperne poſita ſignum eſt bimillionum &c. En valorem ordinis ſuperius dati:

2	8″,	6	7	3,	2	5	6′,	9	1	3,	2	9	4
Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates
Bimillionum.		Millium. Millionum.			Millionum.			Millium.			Simplices		

Itaque hunc numerorum ordinem ſic enunciabis: viginti octo *bimilliones*, ſexcenta ſeptuaginta tria *millia millionum*, ducenti quinquaginta ſex *milliones*, nongenta tredecim *millia*, ducenta nonaginta quatuor.

Demonstratio hujus enunciationis facilis eſt. Dum enim plures notæ numericæ conjunguntur, earum valor a dextra verſus ſiniſtram progrediendo continenter creſcit in decuplum, ita ut quælibet unitas numeri ſiniſtram verſus collocati decies plus valeat, ac valeat quæcunque unitas numeri ipſi dextram verſus proximi (18): atqui, ſi dictas legas obſerves in enunciando numerorum valore, ſingulis unitatibus cujuslibet numeri ſiniſtram verſus collocati decies majorem tribuis valorem, ac tribuas cuilibet unitati numeri dextram verſus proxime collocati, uti patebit conſideranti; quodſi ergo dictas leges in enunciando numerorum valore obſerves, eos numeros rite enuncias.

22. Corollarium I. Igitur hic e. g. numerus: 2′, 658, 934, hoc modo eſt enunciandus: *Duo milliones, ſexcenta quinquaginta octo millia, nongenta triginta quatuor.*

23. Coroll. II. Eodem modo enuntiantur etiam ejusmodi numeri, in quibus unus, aut plures zeri reperiuntur; hoc ſolum notato, quod cum zerus nihil ſignificet (16), zeri non enuncientur. e. g. Hunc numerum: 304, 604 ſic enunciabis: *tercenta quatuor millia, ſexcenta quatuor.* Scilicet locum decadum ſimpli cium-

cium, item decadum millium zerus occupat; itaque neutræ decades ſunt enunciandæ. Hunc vero numerum: 204, 060, 010 ſic enunciabis: *ducenti quatuor milliones, ſexaginta millia, decem.*

Scholion. Si admodum longus proponeretur numerorum ordo, in quo aliqui numeri juxta 2dam legem n. 21. datam tribus, quatuor, aut etiam quinque virgulis eſſent ſuperne ſignandi; tres virgulæ *trimillionem*, quatuor virgulæ *quadrimillionem*, & ſic porro, ſignificarent.

CAPUT SECUNDUM.

De Additione, & Subtractione numerica.

24. *Species* numeros computandi ſunt quatuor: ſcilicet *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio*. Hoc Capite de Additione, & Subtractione duntaxat agemus.

25. Numerus dividi ſolet in purum, & mixtum. Numerus *purus*, ſive *abſtractus* eſt, qui ſolam multitudinem ſignificat, quin exprimat, cujus rei ſit illa multitudo. Ut ſi dicas: *quinque*, *viginti*, *centum* &c. Numerus *mixtus*, ſive *concretus* dicitur, qui præter multitudinem ſimul exprimit, cujusnam rei ſit illa multitudo. Ut ſi dicas: *tres nummi*, *quatuor floreni*, *decem urnæ vini* &c.

26. Duo, aut plures numeri mixti inter ſe comparati vel ſunt homogenei, vel heterogenei. *Homogenei* dicuntur, qui ſignificant res ejusdem ſpeciei, & denominationis: e. g. *quatuor floreni*, & *novem floreni*. *Heterogenei* ſunt, qui ſignificant res diverſæ ſpeciei, & denominationis: e. g. *tres floreni*, & *ſeptem cruciferi*; item *quinque urnæ vini*, & *decem orgyæ lignorum* &c.

27. Numeri heterogenei ſubdividuntur in reducibiles, & irreducibiles. *Reducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, denominationemque reduci poſſunt. e. g. *Duo groſſi*, & *quinque cruciferi* ſunt numeri ad eandem denominationem reducibiles. Nam imprimis duos groſſos in ſex cruciferos reſolvendo, loco duorum groſſo-

rum, & quinque cruciferorum acquiro *undecim* cruciferos: quo pacto grossi ad cruciferos reducuntur. Deinde si tres cruciferos in unum grossum componam; loco eorundem duorum grossorum, & quinque cruciferorum habeo tres grossos, & 2 cruciferos: ac proinde ii cruciferi (saltem ex aliqua parte) ad grossos reduci possunt. Numeri heterogenei *irreducibiles* vocantur illi, qui ad eandem speciem, seu denominationem reduci nequeunt: e. g. *quinque urnæ vini*, & *decem orgyæ lignorum.*

28. *Additio numerica* est duorum, vel plurium numerorum homogeneorum in unum *totum*, seu *summam* collectio. Ajo: *numerorum homogeneorum.* Nam heterogenei numeri, e. g tres homines, & septem floreni, in unam summam cogi utique non possunt. Hinc si numeri heterogenei sint *reducibiles* (27); prius reducendi sunt, seu reddendi homogenei, ac tum primum in unam summam cogendi. e. g. Tres grossi & sex cruciferi addi poterunt, si sex crucigeros reducas ad duos grossos, hosque tribus illis reliquis grossis addideris, ut acquiras quinque grossos. Porro numeri, qui in unam summam cogendi sunt, *addendi nuncupantur.*

29. PROBLEMA II. *Addere numeros.*

Resolutio. 1*mo.* Numeri homogenei *addendi* infra se invicem hac lege scribantur, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c.

2*do.* Sic collocati numeri subducantur linea, ne *addendi* confundantur cum *summa*; tum inchoetur collectio a dexteris, ac proinde ab unitatibus, & summa unitatum scribatur sub linea directe infra unitates: eodem modo colligantur decades, earumque summa scribatur directe infra decades: summa centenariorum scribenda est infra centenarios, millenariorum infra millenarios, & sic porro.

EXEMPLUM *hujus 2dæ Regulæ.*

Addendi	6402
	554
	23
Summa	6979

Nimi-

Nimirum ab unitatum additione inchoo operationem dicens: 3 *&* 4 *ſunt* 7, *additis* 2 *ſunt* 9; *adeoque* 9 *ſcribo infra unitates.* Tranſiens ad decades dico: 2 *&* 5 *ſunt* 7, *addito zero manent* 7; *igitur* 7 *ſcribo infra decades.* Proſequor: 5 *&* 4 *ſunt* 9; *quem numerum centenariis ſubſcribo.* Demum numerum 6, quoniam nullus alter adeſt illi addendus, ſolitarium depono infra eum locum, quem inter *addendos* obtinet. Atque ita obtineo ſummam = 6979.

3*tio.* Si unitatum ſumma excedat numerum 9, ac proinde ſi excreſcat in numerum pluribus notis numericis exprimendum; ſola dextima nota ſcribatur infra lineam, altera vero mente retineatur interim, ac poſtea addatur decadibus in claſſe ſequenti. Eodem modo adde decades, deinde centenarios &c.

EXEMPLUM *hujus* 3*tiæ Regulæ.*

$$\begin{array}{l r} \textit{Addendi} \left\{ \begin{array}{r} 9785 \\ 4606 \\ 812 \end{array} \right. \\ \hline \textit{Summa} \quad 15203 \end{array}$$

Nimirum ab unitatibus inchoando dico: 2 *&* 6 *ſunt* 8, *additis* 5 *ſunt* 13; *dextimam notam* 3 *ſcribo infra unitates*, *alteram* 1, *mente retineo mox decadibus addendam.* Tranſeundo ad decades dico: 1 (quod nempe mente retinui) *&* 1 *ſunt* 2, *addito zero manent* 2, *additis* 8 *ſunt* 10; *dextimam notam*, *ſeu zerum infra decades ſcribo*, *altera centenariis addenda remanet.* Proſequor: 1 & 8 *ſunt* 9, *additis* 6 *ſunt* 15, *additis* 7 *ſunt* 22; *dextimam notam* 2 *infra centenarios ſcribo*, *altera remanet. Porro* 2 *&* 4 *ſunt* 6, *additis* 9 *ſunt* 15; *quem numerum depono ita*, *ut dextima nota* 5 *infra unitates millenariorum veniat.*

30. Demonstratio. Additio numerica eſt datorum numerorm homogeneorum in unam ſummam collectio (28): atqui per has regulas in unam ſummam colliguntur omnes dati numeri homogenei unitatum, decadum, centenariorum &c. uti perſpicuum eſt expendenti: ergo per has regulas additio numerica rite peragitur.

Schol.

Schol. 1. Aliqua adhuc additionis exempla adjicere lubet, in quibus Tirones ſe ſe exercere queant.

Addendi	96872	*Addendi*	58760
	39059		69740
	8797		1200
Summa	144728	*Summa*	129700
Addendi	6873	*Addendi*	717692
	7609		835677
	9875		446631
Summa	24357	*Summa*	2000000

Schol. 2. *Examen* rite peractæ additionis inferius ope *ſubtractionis* dabimus: methodum autem addendi numeros heterogeneos *reducibiles*, e. g. florenos, groſſos, cruciferos, trademus Cap. 5to.

31. *Subtractio numerica* eſt unius numeri ab altero homogeneo ablatio, ut reſiduus numerus innoteſcat. Numerus, a quo alter ſubtrahitur, vocatur *totum*, vel numerus *minuendus*; is vero, qui ſubtrahitur, *ſubtrahendus* audit: denique numerus ille, qui facta ſubtractione remanet, appellatur *reſiduum*, vel *differentia*. e. g. Si numerus 5 a numero 9 ſubtrahi debeat; 9 eſt *totum*, ſeu *minuendus*. 5 autem eſt *ſubtrahendus*; id denique, quod facta ſubtractione remanet, nimirum 4 eſt *reſiduum*, ſeu *differentia*.

32. Coroll. Igitur *ſubtrahendus* nequit eſſe major *minuendo*; quomodo enim ſecus poſſet ab iſto auferri? Item: minuendus, & ſubtrahendus numeri homogenei, vel ſaltem ad homogeneitatem reducibiles ſint, oportet: neque enim poſſunt e. g. tres urnæ vini a quinque orgyis lignorum ſubtrahi.

33. PROBLEMA III. *Numeros ſubtrahere.*

Resolut. 1mo. Subtrahendus numerus ſcribatur infra minuendum ita, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus &c. quemadmodum in additione (29) dictum eſt; tum numeri hi ſic collocati linea ſubducantur, ne confundantur cum *reſiduo*.

2do.

2do. Inchoetur ſubtractio ab unitatibus; tum transeatur ad decades, centenarios, & ſic porro: reſidua autem ſingula ſcribantur ſub linea infra illum numerum, cujus reſidua ſunt: id eſt, reſiduum unitatum ſcribatur infra unitates, decadum infra decades &c.

3tio. Si numerus ſubtrahendus æqualis fuerit ſuperiori, aut ſi zerus a zero ſubtrahi debeat; ſcribatur pro reſiduo zerus. Utroque enim hoc caſu reſiduum utique nihilo æquale eſt. Quod ſi autem *minuendus* fuerit numerus ſignificans, *ſubtrahendus* vero fuerit zerus; pro reſiduo ponatur totus numerus minuendus. Cum enim zerus ſecundum ſe nihil ſignificet; a quocunque numero ſubtrahatur zerus, perſpicuum eſt, numerum illum remanſurum totum.

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Minuendus	9 4 6 0 7 8
Subtrahendus	7 0 2 0 7 5
Reſiduum	2 4 4 0 0 3

Scilicet ab unitatibus inchoando dico: 5 *ab* 8 *ſubtrahendo remanent* 3; *quem proinde numerum* (per. reg. 2.) *colloco infra lineam ſub unitatibus.* 7 *a* 7 *ſubtrahendo remanet* (per reg. 3.) *zerus, infra decades collocandus. Zerum a zero ſubtrahendo remanet zerus,* (per reg. 3.) *pro reſiduo collocandus.* 2 *a* 6 *ſubtrahendo remanent* 4. *Si zerum a* 4 *ſubtraham, remanet integer numerus* 4, (per reg. 3.) *pro reſiduo habendus. Denique ſi* 7 *a* 9 *ſubtraham, remanent* 2. *Conſequenter totum reſiduum eſt* = 244003.

4to. Si nota inferior major a ſuperiore minore, vel a zero veniat ſubtrahenda; ad minorem illum ſuperiorem numerum, vel zerum transferatur, ſeu *concedatur* unitas e nota ſiniſteriore. Hoc pacto minor ille numerus ſuperior, vel zerus decade augebitur: quælibet enim unitas loci proxime ſiniſterioris decuplo plus valet, quam valeat quælibet unitas loci dexterioris (17). Poſt hanc *conceſſionem* poterit jam inferior numerus ſubtrahi a numero ſuperiore, vel zero jam decade aucto. Interim nota illa ſiniſterior, ex qua unitas translata eſt, ſignetur puncto, quod in memoriam revocet, eam notam unitate fuiſſe mulctatam.

e. g. Sit	*Minuendus*	7. 5. 0
	Subtrahendus	2 6 4;
	erit *Reſiduum*	4 8 6.

Sic enim procedendum eſt: 4 *a zero non poſſum ſubtrahere; ergo ex nota ſiniſteriore* 5 *transfero unitatem* (id eſt, reapſe decadem) *tum ex* 10 *ſubtrahendo* 4 *remanent* 6: *quem numerum infra unitates ſcribo. Porro notam* 5 *ſignavi puncto, quod indicat, eam notam unitate mulctatam eſſe: hinc* 6 *non jam a* 5, *ſed a* 4 *veniunt ſubtrahenda. Quæ ſubtractio cum impoſſibilis ſit, rurſus ex nota ſiniſteriore* 7 *transfero unitatem, atque ita numerum* 4 *decade augeo: quo facto* 6 *ex* 14 *ſubtraho, remanentque* 8. *Denique cum numerus* 7 *unitate mulctatus ſit;* 2 *non ex* 7, *ſed ex* 6 *ſubtrahi debent, remanentque* 4. *Hoc eſt, totum reſiduum eſt* = 4 8 6.

5*to*. Si in caſu nunc expoſitæ regulæ quartæ ſiniſterior illa nota, ex qua unitas transferenda eſſet, zerus fuerit; unitas illa e nota zerum præcedente debebit *concedi*: quo facto zerus ille abibit in numerum 9. e. g. Sit

Minuendus	4. 0. 2
Subtrahendus	7 6;
erit *Reſiduum*	3 2 6.

Nempe quoniam 6 a 2 ſubtrahere nequeo, numerumque 2 præcedit zerus; ex numero 4 transfero unitatem, & dextimum numerum 2 augeo decade dicoque; 6 *a* 12 *ſi ſubtraham, remanent* 6; *quem numerum infra unitates ſcribo.* Proſequor: ſi 7 *a* 9 (nam Zerus abit in numerum 9) *ſubtraham, remanent* 2. *Denique quoniam numerus* 4 *unitate mulctatus eſt,* 3 *depono, acquiroque totum reſiduum* = 3 2 6. Porro zerum, qui tranſilitur, debere abire in numerum 9, ſic declaro: Unitas illa, qua numerus 4 in aſſumpto exemplo mulctatur, reapſe transfertur ad zerum, adeoque zerus augetur decade, ſeu abit in numerum 10. Porro ex hoc numero 10, unitas ultra transfertur ad numerum dextimum 2, quæ unitas hunc numerum decade auget. Itaque in loco zeri remanent

manent 9 unitates, & numerus dextimus 2 auctus decade abit in numerum 12. Hinc ea unitatis translatio, seu *concessio* efficit imprimis, ut jam 6 a 12, & 7 a 9 subtrahi debeant; efficit deinde, ut numerus 4 unitate mulctatus in numerum 3 abeat.

6to. Si, dum concedenda est unitas, versus sinistram plures continenter zeri sequantur; omnes transiliendi sunt, dum perveniatur ad numerum significantem: porro singuli zeri, qui transiliuntur, abeunt in numerum 9. e. g.

Sit *Minuendus*	4. 0 0 2
Subtrahendus	7 6;
erit *Residuum*	3 9 2 6.

Dum enim a numero 4 unitas conceditur, reapse idem fit, ac si unitas illa transferretur immediate ad primum zerum, qui dextram versus proxime sequitur; qui proinde zerus decade augetur, adeoque abit in numerum 10. Ab hoc numero 10 tacite ad alterum zerum dexteriorem transfertur unitas: quo pacto in loco prioris zeri remanent 9, & alter zerus abit in numerum 10. Denique ex hoc numero 10, rursus unitas ultra promovetur ad dextimum numerum 2; atque ita in alterius quoque zeri loco nonnisi 9 remanent, & dextimus numerus 2 auctus decade in numerum 12 abit. Hinc in allato exemplo sic procedendum est: *Quoniam* 6 *a* 2 *subtrahere nequeo, & post numerum* 2 *sinistram versus duo zeri sequuntur, hos transiliendo, unitatem ex numero* 4, *qui idcirco puncto signandus est, concedo. Quo facto zeri abeunt in* 9, *& ultimus numerus in numerum* 12. *Itaque* 6 *a* 12 *subtrahendo remanent* 6; 7 *a* 9 *subtrahendo remanent* 2; *demum numeri* 9 *&* 3, *cum nullus jam supersit numerus subtrahendus, ordine suo infra lineam scribendi sunt, estque totale residuum* = 3926.

34. Demonstratio. Subtractio numerica est unius numeri ab altero homogeneo ablatio, ut residuus numerus innotescat (31): atqui per has regulas singulæ partes numeri subtrahendi, scilicet unitates, decades &c. auferuntur a singulis partibus numeri minuendi, & innotescit singularum partium residuum, uti patet eas regulas expendenti: ergo per has regulas subtractio rite peragitur.

Schol.

Schol. 1. En alia adhuc exempla ſubtractionis.

Minuendus	89643	*Minuendus*	60105
Subtrahendus	64975	*Subtrahendus*	23507
Reſiduum	24668	*Reſiduum*	36598
Minuendus	95042	*Minuendus*	900506
Subtrahendus	7658	*Subtrahendus*	192870
Reſiduum	87384	*Reſiduum*	707636

Schol. 2. Methodum ſubtrahendi numeros heterogeneos *reducibiles*; e. g. complexum florenorum, groſſorum, cruciferorum ab alio complexo florenorum, groſſorum, cruciferorum, Cap. 5to dabimus.

35. AXIOMA. *Totum eſt æquale omnibus partibus ſuis ſimul ſumptis.*

36. Coroll. I. Quod ſi ergo totum quodpiam conſtet e. g. tribus partibus A, B, C; imprimis ſublata ſola parte A remanere debet complexum partium B & C: deinde ſublatis duabus partibus A & B remanere debet pars C: denique ſublatis omnibus partibus A, B, C, ex eo toto prorſus nihil remaneat, oportet.

37. Coroll. II. Quodpiam totum vocemus A. Si, poſtquam ex hoc toto A ſublata eſt pars B, remaneat C; reſidua hæc pars C addita parti ſubtractæ B debet adæquare totum A, id eſt, debet eſſe $B + C = A$. Secus enim non eſſet totum æquale omnibus partibus ſuis ſimul ſumptis.

38. PROBLEMA IV. *Examinare, num rite peracta ſit Additio numerica.*

Resolut. Ex ſumma ſubtrahe unam *addendorum* ſeriem; ex reſiduo hujus ſubtractionis ſubtrahe alteram ſeriem addendorum; rurſus ex reſiduo hujus ſecundæ ſubtractionis ſubtrahe tertiam addendorum ſeriem, & ſic porro: ſi demum ex ſumma nihil remanſerit, id erit indicium evidens legitimæ additionis. e. g. In exemplo 2dæ Regulæ n. 29, ſi ex ſumma 6979 ſubtrahas primam *addendorum* ſeriem, quæ eſt 6402; reſiduum erit = 577. Si ab hoc reſiduo ſubtrahas alteram ſeriem 554; reſi-

residuum est = 23, seu remanet ipsa tertia addendorum series: qua proinde subtracta nihil amplius remanet ex summa. Evidenti saue argumento rite peractæ additionis.

Demonstratio continetur in *Coroll.* 1. n. 36.

Schol. 1. Non desunt, qui putent, additionem examinari posse hoc modo: numerum 9 vel 7 toties, quoties possunt, abjiciunt tam ex addendis, quam ex summa; & si idem demum residuum maneat in summa, quod in addendis, concludunt legitimam esse additionem. e. g. Si in exemplo 2dæ regulæ n. 29 ex addendis abjiciatur numerus 9 toties, quoties abjici potest, demum remanet numerus 4; idem remanet ex summa: unde inferunt, legitimam esse additionem. At hoc examen esse fallax, ac erroneum, facile patet, si vel sola loci permutatio fiat in numeris *summam* constituentibus. Nam sicui per errorem hæc prodivisset summa: 9697; etiam tum facta numeri 9 abjectione demum residuum utrobique esset = 4.

Schol. 2. Præterea circa additionem hæc duo notare juverit. 1) Si nimis longa series occurrat addendarum unitatum, decadum &c. tutius instituetur operatio, si *addendi* numeri ductis lineis transversis in aliquot partes divisi fuerint, & cujuslibet id genus partis additio separatim fiat, tum summæ particulares in unam totalem summam colligantur. 2) Si, dum e. g. unitates in unam summam collectæ fuerunt, additio earundem peracta est, sursum eundo per ipsarum seriem; repetatur additio eundo deorsum. e g. Si in exemplo reg. 3tiæ n. 29. unitates hoc modo collegisti: 2 *&* 6 *sunt* 8, *additis* 5 *sunt* 13; repete operationem descendendo hoc modo: 5 *&* 6 *sunt* 11, *additis* 2 *sunt* 13. Si enim summæ duplici hac operatione acquisitæ congruant, valde probabile est, non esse commissum errorem in additione.

39. PROBLEMA V. *Examinare, num rite peracta sit subtractio numerica.*

Resolut. *Residuum* subtractionis adde numero *subtrahendo*: si *summa* fuerit æqualis numero *minuendo*, id erit signum evidens rite peractæ subtractionis. e. g. In exemplo regulæ 4tæ n. 33. si *residuum* 4 8 6 addas ſubtrahendo 264; ſumma erit = 750. Quæ cum æqualis ſit *minuendo*, legitimam fuiſſe ſubtractionem evincit.

Demonstratio clare continetur in *Coroll.* 2. *n.* 37.

40. Coroll. Igitur *examen* additionis per ſubtractionem; ſubtractionis vero per additionem obtinetur.

CAPUT TERTIUM.

De Multiplicatione numerica.

41. *Multiplicatio numerica* eſt unius numeri toties ad ſe ipſum facta additio, quot alter numerus, per quem ille multiplicari dicitur, unitates in ſe continet e. g. 4 multiplicare per 2, eſt numerum 4 bis ſumere. Numerus, qui multiplicatur, *multiplicandus*; alter vero ille, per quem *multiplicandus* multiplicatur, *multiplicator* dicitur. Summa ex multiplicatione reſultans ſolet *factum*, vel *productum* nuncupari. Multiplicator, & multiplicandus vocantur etiam *factores*. Denique numerus, qui multiplicatur per alterum, dicitur *duci* in alterum illum; ut adeo e. g. 3 *ducere in* 4 tantundem ſit, ac 3 *multiplicare per* 4.

42. Coroll. Igitur in *facto* toties continetur *multiplicandus*, quoties unitas in *multiplicatore*. e. g. Si 4 multiplicentur per 3; in *facto* 12, *multiplicandus* 4 debet ter contineri. Quippe *factum* nihil aliud eſt, quam totalis illa ſumma, quæ enaſcitur ex *multiplicandi* toties ad ſe ipſum facta additione, quot unitates *multiplicator* continet (41).

43. THEOREMA I. *Sint quicunque duo factores: idem factum prodit, ſive primus ducatur in ſecundum, ſive ſecundus in primum.*

Demonst. Reſolvantur *factores* e. g. 3. & 4. in ſuas unitates, & eo ordine collocentur, quem exhibet figura hæc:

	A		4		B
	1	1		1	1
3	1	1		1	1
	1	1		1	1
	C				D

Jam ducere numerum 3 in 4 idem eſt, ac unitatum ſeriem A D quater ſumere, & 4 in 3 ducere idem eſt, ac unitatum ſeriem A B ter ſumere (41): atque utroque in caſu idem numerus unitatum acquiritur, is ſcilicet, qui ſpatio A B D C continetur, eſtque $=12$: ergo idem eſt *factum*, ſive 3 in 4, ſive 4 in 3 ducas. Idem eodem modo de quibuscunque aliis duobus factoribus demonſtrari poteſt.

44. Coroll. Igitur perinde eſt, uterlibet factor ſit *multiplicandus*, aut *multiplicator*. Hinc, quoniam ſemper *multiplicandus* toties continetur in *facto*, quoties unitas in *multiplicatore* (42); generatim *factor* quilibet toties continetur in *facto*, quoties unitas in *factore* altero.

45. Quoniam in actuali multiplicatione, neceſſaria eſt promptitudo inveniendi facta particularia numerorum ſimplicium, e. g. quot ſint ſepties novem, aut octies octo, eaque promptitudine Tirones carere ſolent; iis vel addiſcenda eſt *Regula Pigri*, quæ hoc loco oretenus doceri poterit, quamve nos in Algebra exponemus, vel in promptu habenda *Tabula Pythagorica*, quam iſthic adjecimus.

								D		
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
F	6	12	18	24	30	36	42	48	54	G
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
C	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
								E		

Ope hujus tabellæ factum quorumvis duorum numerorum ſimplicium hoc modo invenitur. Sit e. g. numerus 8 multiplicandus per 7. Quæratur in ſerie A B numerus 8, & in ſerie A C numerus 7, aut contra; tum a numero 8 procedatur per ſeriem D E, & a numero 7 per ſeriem F G, usque dum perveniatur ad quadratulum, in quo concurrunt duæ illæ ſeries: numerus 56 illi quadratulo inſertus eſt factum quæſitum. Eodem modo invenitur, octies novem eſſe = 72, novies novem = 81 &c.

46. PROBLEMA VI. *Numeros quosvis multiplicare.*

Resolut. Casus I. *Si multiplicator nonniſi unica nota numerica conſtet.* 1*mo*. Scribatur numerus multiplicandus, & infra ejus dextimam notam ſcribatur multiplicator: tum ſubducantur linea.

2*do*. A dextris inchoando multiplicentur per *multiplicatorem* omnes notæ *multiplicandi*, id eſt, imprimis unitates, deinde decades, tum centenarii &c. *Facta* autem particularia ſcribantur infra lineam, ita ut facta unitatum unitatibus reſpondeant, decadum decadibus &c.

3*tio*. Si quodpiam particulare factum excreſcat ultra 9 adeoque ſi excreſcat in ejusmodi numerum, qui duabus notis exprimendus foret; nonniſi dextima nota ſcribatur (uti in *additione n.* 29. *reg.* 3*tia* dictum eſt) altera vero ſiniſtima retineatur mente, ac deinde addatur novo facto, orto ex multiplicatione notæ ſequentis. e. g.

Sit *Multiplicandus*		9 0 6 7 2
Multiplicator		— — — 4
erit *Factum*	— —	3 6 2 6 8 8.

Scilicet a dextris inchoando dico: *quater* 2 *ſunt* 8; *quod particulare factum ſcribo infra unitates. Quater* 7 *ſunt* 28; *numerum* 8 *ſcribo infra decades, alterum* 2 (per reg. 3.) *mente retineo. Quater* 6 *ſunt* 24, *additis* 2, *quæ mente retinui, ſunt* 26; 6 *depono*, 2 *iterum mente retineo. Quater zerus eſt denique zerus, additis* 2 *mente retentis ſunt* 2, *quæ depono. Quater* 9 *ſunt* 36. *cujus*

numeri

numeri utramque notam (cum jam finis ſit multiplicationis) depono. Atque ita acquiro factum totale = 362688

Casus II. *Si multiplicator conſtet duabus, vel pluribus notis.* 1*mo.* Multiplicator ſubſcribatur multiplicando ea lege, qua ſubſcribendus eſſet, ſi eidem multiplicando *addi* deberet (29), ac proinde ita, ut unitates multiplicatoris unitatibus multiplicandi, decades decadibus &c. reſpondeant; tum ſubducantur linea.

2*do.* Per unitates multiplicatoris multiplicetur totus multiplicandus, ut in Caſu I. Tum per decades multiplicatoris rurſus eodem modo multiplicetur totus multiplicandus; hoc ſolum notato, quod alterum hoc particulare factum ita debeat ſcribi, ut ejus dextima nota non jam unitatibus, ſed decadibus multiplicatoris reſpondeat. Pariter, ſi multiplicator tribus, aut pluribus notis conſtiterit, etiam per centenarios, millenarios &c. multiplicatoris multiplicetur ſucceſſive totus multiplicandus: ita tamen, ut ſemper dextima facti particularis nota ſub ea multiplicatoris nota ſcribatur, per quam ſit multiplicatio; uti in ſubjecto exemplo videre eſt.

3*tio.* Peracta multiplicatione addantur facta partialia in unam ſummam: atque ſumma hæc erit ipſum totale factum.

e. g. Sit *Multiplicandus*		4502
Multiplicator		2531
Erunt *facta partialia*		13506
		22510
		9004

& *factum totale* = 1139006.

Scilicet per 3 multiplicando totum multiplicandum, acquiritur primum factum partiale 13506; quod ita ſcribitur infra lineam, ut ejus dextima nota 6 reſpondeat unitatibus multiplicatoris. Deinde per 5 multiplicando totum multiplicandum, acquiritur alterum factum partiale 22510, ita ſcribendum, ut ejus dextima nota 0 reſpondeat decadibus multiplicatoris. Denique per 2 multiplicando totum multiplicandum, acquiquiritur tertium factum partiale 9004; quod ita ſcribi debet, ut ejus ultima nota 4 reſpondeat centenariis multiplicatoris. Hæc omnia facta partialia in unam ſummam collecta dant *factum totale* 1139006.

47. DEMONSTRAT. *Multiplicatio numerica* eſt unius numeri (id eſt, *Multiplicandi*) toties ad ſe ipſum facta additio, quot alter numerus (ſcilicet *Multiplicator*) unitates in ſe continet (41); ergo ſi in *facto totali* per has regulas acquiſito toties continetur totus multiplicandus, quot unitates continentur in toto multiplicatore, per regulas has rite peragitur multiplicatio: atqui in facto totali per has regulas acquiſito toties continetur totus multiplicandus, quot unitates continentur in toto multiplicatore; quod ſic oſtendo. Contemplemur exemplum multiplicationis paullo ſuperius allatum, in quo multiplicator eſt 253. In multiplicatore hoc ſunt unitates 200 + 50 + 3. Jam evidens imprimis eſt, in primo partiali facto 13506 ter contineri totum multiplicandum. Iſtud enim factum acquiritur, ter ſibi addendo tam unitates, quam etiam decades, centenarios &c. multiplicandi.

Deinde dum totum multiplicandum per 5 multiplicando, acquiritur alterum factum partiale 22510; pariter evidens eſt, in altero hoc partiali facto ſeorſim conſiderato quinquies contineri totum multiplicandum. Quod ſi ergo eidem facto concipiamus addi a dextris zerum, ut ſiat = 225100; id factum quinquageſies continebit totum multiplicandum: ea enim adjectione quilibet ejus facti nota ad ſequentem verſus ſiniſtram locum retruditur, ac proinde cujuslibet notæ valor in decuplum augetur (18). Jam vero dum partiale illud factum ita ſcribitur, ut prima ejus nota decadibus multiplicatoris reſpondeat; idem ſane eſt, ac ſi zerus ipſi adderetur a dextris, eo ſcilicet loco, qui vacuus relinquitur: ergo alterum factum partiale, eo, quo regula exigit, modo ſcriptum quinquageſies continet totum multiplicandum.

Denique dum totum multiplicandum per 2 multiplicando, acquiritur tertium factum partiale 9004; in facto hoc ſeorſim conſiderato bis continetur totus multiplicandus. Concipiamus ei facto zerum unum a dex-

dextris addi, ut fiat = 90040; ejus valor in decuplum augebitur, ac proinde jam vigeſies continebit totum multiplicandum: ſi novum ei zerum addamus, ut fiat = 900400; rurſus in decuplum augebitur ejus valor, ita ut jam 200 vicibus contineat totum multiplicandum. Atqui, dum partiale illud factum ita ſcribitur, ut prima ejus nota centenariis multiplicatoris reſpondeat; idem ſane fit, ac ſi duo zeri adderentur ipſi a dextris, iis ſcilicet locis, qui vacui relinquuntur: ergo tertium factum partiale, eo, quo regula exigit, modo ſcriptum 200, vicibus continet totum multiplicandum.

Itaque omnia tria facta partialia in unam ſummam collecta, 253 vicibus continent totum multiplicandum. Hoc eſt, factum totale tot vicibus continet totum multiplicandum, quot unitates continentur in toto multiplicatore: conſequenter multiplicatio per regulas ſuperius allatas rite peragitur.

48. Coroll. I. Si in intermedio multiplicatoris loco unus, aut plures zeri occurrant, ut ſi e. g. multiplicator eſſet numerus 2003; compendio locus eſt. Scilicet omiſſis his zeris per ſolas ſignificantes multiplicatoris notas multiplicetur totus multiplicandus; hoc uno notato, quod in deſcribendis partialibus factis ſervandus ſit ordo, in 2da *Caſus 2di* regula generatim præſcriptus (46).

e. g. Sit *Multiplicandus* 3122
Multiplicator 2003;

erunt *facta partialia* 9366
6244

adeoque *factum totale* erit = 6253366.

Ratio compendii eſt. Nam ſi multiplicandus etiam per intermedios illos multiplicatoris zeros multiplicatus fuiſſet; hæc quatuor partialia facta fuiſſent acquiſita:

```
      9366
     0000
    0000
   6244;
```

quæ quatuor partialia facta in unam ſummam collecta non aliud factum totale dediſſent utique, quam quod ſuperius compendio uſi acquiſivimus, ſcilicet = 6253366.

49. Coroll. II. Quod ſi autem in fine unius *factoris*, vel utriusque ſimul, occurrant zeri quotcunque; ſufficiet multiplicationem inſtituere per reliquas notas, finalibus illis zeris interea neglectis, & deinde in fine facti totalis addere tot zeros, quot erant neglecti illi finales.

e. g. Sit *Multiplicandus* 1 2 0
Multiplicator 3 0 0;

ſufficit multiplicare 12 per 3. & facto, quod erit = 36, addere in fine tres illos zeros, quorum unus eſt in fine multiplicandi, alii duo autem in fine multiplicatoris: quo facto erit factum totale = 36 000. Si enim quis hoc compendio uti nolens, per ſingulas multiplicatoris notas totum multiplicandum multiplicare vellet; hæc tria particularia facta acquiret:

000
000
360;

quorum ſumma totalis eadem eſt, quam ſuperius compendio uſi acquiſivimus, ſcilicet = 36000.

EXEMPLA MULTIPLICATIONIS.

Multiplicandus	6785	*Multiplicandus*	8709
Multiplicator	897	*Multiplicator*	796
Fact. tot.	6086145	*Fact. tot.*	6932364
Multiplicandus	6948	*Multiplicandus*	9500
Multiplicator	7005	*Multiplicator*	6700
Fact. tot.	48670740	*Fact. tot.*	63650000

Schol. Examen rite peractæ multiplicationis fit ope diviſionis, uti *Cap. ſequente* oſtendemus.

CAPUT

CAPUT QUARTUM.

De Divisione Numerica.

50. *Divisio numerica* est operatio arithmetica, qua ex datis duobus numeris eruitur tertius, qui indicat, quoties unus datorum numerorum in altero contineatur. e. g. Dum 12 per 3 dividuntur, reapse inquiritur in tertium numerum 4, qui indicet, quoties 3 in 12 contineantur. Numerus, qui dividitur, *dividendus*; alter vero ille, per quem dividendus dividitur, *divisor* dicitur. Denique tertius ille numerus, in quem hac operatione inquiritur, seu qui indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *quotus*, vel *quotiens* audit. Sic in allato exemplo *dividendus* est 12, *divisor* 3, *quotus* 4.

51. COROLL. Cum quotus indicet, quoties divisor contineatur in dividendo; perspicuum est, divisorem toties contineri in dividendo, quot unitates continentur in quoto. e. g. Divisorem 3 quater contineri in *dividendo* 12, tantundem significat, ac: 3 in 12 toties contineri, quot unitates in quoto 4 reperiuntur.

52. PROBLEMA VII. *Dividere numeros, si divisor unica duntaxat nota constet*

RESOLUT. 1*mo.* Scribatur numerus dividendus intra parenthesim, & divisor ad ejus sinistram collocetur.

2*do.* Operatio non jam a dextris, ut in præcedentibus operationibus, sed a sinistris inchoetur, quæraturque, quoties contineatur divisor in prima, seu sinistima dividendi nota, vel si hæc divisore minor est, in duabus primis dividendi notis: quas quidem dividendi notas vitandæ confusionis gratia a reliquis *commate* separare oportet. Deinde quotus scribatur post parenthesim ad dextram dividendi. Porro idem quotus ducatur in divisorem, & *factum* subscribatur iis dividendi notis, quæ dividebantur, subtrahaturque ab iisdem. Denique, si quid ex hac subtractione rema-

 neat,

neat, ducta transversa linea subscribatur. Atque hæc est prima pars operationis, quam juvat illico videre in exemplo.

Sit *Divisor*, *Dividendus*, *Prima quoti nota.*

$$2 \; (13, 52) \; 6$$
$$\underline{12}$$
$$-1$$

Scilicet *dividendo* parenthesi incluso, collocatoque ad ejus sinistram divisore, accipiantur duæ sinistimæ dividendi notæ 13 (nam solam primam, utpote divisore minorem accipere non sufficit) & a ceteris *commate* secernantur; tum quæratur, quoties divisor 2 contineatur in 13. Quoniam 2 in 13. continetur sexies, numerus 6 scribatur pro *quoto* ad dextram dividendi; tum idem quotus 6 ducatur in divisorem 2, & factum = 12 scribatur infra eas dividendi notas, quæ dividebantur, seu infra 13, idque ea lege, quam *subtractio* exigit. Denique subducatur linea, & 12 subtrahantur a 13, ac *residuum* = 1 infra lineam scribatur.

3*tio*. Altera operationis pars est hæc: Ejusmodi residuo ad dextram jungatur sequens dividendi nota, pariter *commate* secernenda a reliquis; si autem in subtractione prioris operationis nihil remansit, sola ponatur sequens dividendi nota infra lineam. Tum inquiratur rursus, quoties contineatur divisor in his notis, quæ infra lineam scriptæ sunt, & novus quotus scribatur ad dextram prioris quoti. Porro novus quotus ducatur in divisorem, ut ante, & factum subscribatur iis notis, quæ nunc dividebantur, subtrahaturque ab iisdem. Denique, si quid ex hac subtractione remaneat, ducta altera linea, subscribatur. En continuationem operationis in assumpto exemplo.

Divisor, *Dividendus*, *Duæ priores quoti notæ.*

$$2 \; (13, 5, 2) \; 67$$
$$\underline{12}$$
$$-15$$
$$\underline{14}$$
$$-1$$

Sci-

Scilicet *reſiduo* = 1 infra primam lineam ſcripto addatur ad dextram ſequens dividendi nota 5; hæcque ſecernatur *commate*, ut ſciatur, quam procul ſit proceſſum in diviſione. Deinde quæratur, quoties diviſor 2 contineatur in 15; & novus quotus 7 adjungatur priori quoto ad dextram. Porro novus quotus 7 ducatur in diviſorem 2. & factum 14 ſubſcribatur notis modo diviſis, ſeu notis 15. Denique ducta altera linea, 14 ſubtrahantur a 15, & novum reſiduum = 1 infra lineam illam alteram ſcribatur.

4to. Si adhuc una, vel plures dividendi notæ nondum diviſæ ſuperfuerint; reſiduo infra 2dam lineam ſcripto pariter addatur nova dividendi nota, & prorſus eadem operandi ratione; quam nunc in præcedente regula 3tia deſcripſimus, eruatur tertius quotus, ad dextram priorem locandus, tum quartus &c. usque dum omnes dividendi notæ dividantur. En ulteriorem in aſſumpto exemplo operationis continuationem, & ſimul etiam ſchema totius jam operationis.

Diviſor, Dividendus, Quotus integer.

```
2  ( 13, 5, 2, )  676
     12
     ------
     —15
      14
     ------
       12
       12
     ------
       00
```

Nempe ulterior operationis continuatio hoc modo procedit: Reſiduo = 1, infra ſecundam lineam ſcripto additur ultima dividendi nota 2; tum quæritur, quoties diviſor 2 contineatur in 12. Novus quotus 6 ſcribitur ad dextram priorum, idemque quotus ducitur in diviſorem 2, & factum 12 ſcribitur infra notas nunc diviſas, ſeu infra 12. Porro ſubtrahuntur 12 a 12; ex qua ſubtractione nullum remanet reſiduum. Peracta ergo eſt etiam ultimæ dividendi notæ diviſio; ac proinde finita eſt operatio, acquiſito quoto integro = 676.

5to. Si accidat, ut facta ſubtractione nullum remaneat reſiduum pro ulteriore operatione, & præterea ſequens dividendi nota, quæ deponitur, minor ſit diviſore; ſcribatur pro quoto zerus, ac ex dividendo adhuc una nota deponatur, atque ita juxta præcedentes regulas continuetur operatio. Regulam hanc mox exemplo illuſtrabimus.

6to. Si quid ex ultima ſubtractione remanet, ſcribatur per modum *fractionis*; id eſt, ad dextram quoti partem ducatur lineola transverſa, ſupra quam ſcribatur numerus *reſiduus*, infra eandem autem ſcribatur *diviſor*.

EXEMPLUM *Regulæ 5tæ, & ſimul 6tæ.*

Diviſor, Dividendus, Quotus.

```
2 ( 8, 1, 3, ) 4 0 6½
    8
  ―――――――
  — 1 3
    1 2
    ―――――――
    — 1
```

Scilicet ſolam primam dividendi notam 8 aſſumo, cum hæc non ſit diviſore minor, & quæro, quoties contineantur 2 in 8; tum quotum 4 ad dividendi dextram colloco, poſtea in diviſorem 2 duco, factumque 8 ſubſcribo notæ diviſæ 8. ac ab eadem ſubtraho. Facta ſubtractione nullum manet reſiduum pro altera operationis parte. Itaque ſequentem dividendi notam 1 infra lineam prius ducendam depono. Quia vero diviſor 2 in 1 ne ſemel quidem continetur, per *reg. 5tam* pro quoto zerum ſcribo, tum adhuc unam dividendi notam, id eſt, ſequentem notam 3 adjicio, & quæro, 2 in 13 quoties contineantur. Quotum 6 reliquis quoti notis addo, poſtea in diviſorem duco, factumque 12 ſubtraho a 13. Facta ſubtractione habeo reſiduum = 1; quod poſt quotum per modum fractionis ſcribo, ſubſcripto ipſi diviſore. Itaque pro quoto acquiro 406, & præterea 1 in 2 partes dividendum.

53. Demonstratio. Diviſio numerica eſt operatio, qua invenitur *quotus*, qui indicet, quoties diviſor con-

contineatur in toto dividendo (50): atqui ex ipſa operatione juxta has regulas inſtituta liquet, *quotum* inventum indicare, quoties diviſor contineatur in ſingulis dividendi millenariis, centenariis, decadibus, & unitatibus, ac proinde quoties contineatur in toto dividendo; per has ergo regulas diviſio rite peragitur.

EXEMPLA *alia præced. Regularum.*

	Diviſor,	*Dividendus*,	*Quotus.*
I.	4	(956)	239.
II.	9	(6381)	709.
III.	7	(6863)	$980\frac{3}{7}$.

54 PROBLEMA VIII. *Dividere numeros, ſi diviſor duabus, aut pluribus notis conſtet.*

Resolut 1*mo.* Obſervata eadem ſcribendi lege, quam in præc. Probl. ſecuti ſumus, *commate* ſeparentur a ceteris tot ſiniſtimæ notæ dividendi, quot neceſſariæ fuerint ad efficiendum numerum toto diviſore non minorem. e. g. Sit diviſor 34. Sit primæ duæ ſiniſtimæ dividendi notæ fuerint e. g. 40; has duas notas a ceteris *commate* ſeparare ſufficiet: numerus enim 40 non eſt minor toto diviſore 34. At ſi primæ duæ ſiniſtimæ dividendi notæ fuerint e. g. 29, vel 33: quoniam uterque hic numerus minor eſt toto diviſore 34, in neutro caſu ſufficiet duas notas ſeparare *commate*, ſed tres erunt ſeparandæ.

2*do.* Inquiratur deinde, quoties prima diviſoris nota contineatur in prima dividendi nota, aut (ſi hæc minor ſit, quam prima diviſoris nota) in duabus primis dividendi notis; & quotus in totum diviſorem ductus ſubtrahatur a ſiniſtimis illis dividendi notis, quæ *commate* ſunt a reliquis ſeparatæ. Si factum hoc ſubtrahi inde nequeat; id indicio eſt, quotum juſto majorem eſſe, ac proinde imminuendum. Atque iſtud perfrequenter evenit, ſi id unice attendatur, quotiesnam prima diviſoris nota contineatur in prima, vel in duabus primis dividendi notis: quare, ne quotus juſto major

fuſumatur, ſimul attendi debet, an etiam reliquæ diviſoris notæ in ſequentibus dividendi notis, *commate* ſeparatis, totidem vicibus contineantur. Quod ſi autem facta ſubtractione reſiduum fuerit diviſore majus; id argumento erit, quotum juſto minorem eſſe, ac proinde augendum. Denique quotus pro juſto habendus erit, ſi is in totum diviſorem ductus det factum vel æquale, vel proxime minus notis dividendi.

3*tio*. Poſtquam juſtus quotus inventus eſt, ſcribatur is poſt parentheſim a dextris dividendi, ut in præc. PROBL. dictum eſt; tum factum, quod ex eo quoto in totum diviſorem ducto enaſcitur, ducta linea transverſa, ſcribatur infra dividendi notas *commate* ſeparatas, ita ut ab iisdem ſubtrahi poſſit. Peracta ſubtractione, reſiduo (ſi quod remanſit) ad dextram jungatur ſequens dividendi nota, pariter *commate* ſecernenda a reliquis; tum inquiratur rurſus, quoties contineatur diviſor in his notis, quæ infra lineam ſcriptæ ſunt: quæ quidem inquiſitio eodem modo fiat, quem Regula 2da nunc pertractata præſcribit. Si quid ex ultima ſubtractione remaneat, jungatur ad dexteram quoti, eique interjecta lineola diviſor ſubſcribatur: id eſt inſtar *fractionis* ſcribatur, ut in 6ta præc. PROBL. regula dictum eſt.

4to. ſi reſiduum quoddam cum adjuncta nota dividendi minus fuerit diviſore; ſcribatur pro quoto zerus, & ex dividendo nota ſequens iterum deponatur: ſi adhuc diviſor major fuerit, rurſus ſcribatur zerus pro quoto, & ex dividendo nota ſequens denuo deponatur; idque tamdiu repetatur, dum reſiduum ſic auctum dividi demum poſſit per diviſorem. In reliquis ſervetur conſueta operandi methodus, quam nempe regulæ præcedendis Problematis (52) continent.

DEMONSTRATIO eſt eadem, quæ Problematis præcedentis (53).

EXEM-

EXEMPLUM *harum Regularum.*

```
Diviſor,     Dividendus,         Quotus.
 15   ( 121, 2, 0, 6, 0 )   80804
        120
      ———————
      — — 120
          120
      ———————
      — — — 60
             60
      ———————
             00.
```

Scilicet, quoniam duæ primæ dividendi notæ 12, minorem efficiunt numerum diviſore, per reg. 1mam tres primæ dividendi notæ ſunt *commate* ſeparandæ, inquirendumque methodo regulæ 2dæ, quoties diviſor 15 contineatur in 121. Juſtus diviſor erit 8. qui ductus in totum diviſorem dat factum = 120. Factum hoc dividendi notis commate ſeparatis ſubſcribatur, & ab iisdem ſubtrahatur; tum reſiduo = 1 infra lineam transverſam ſcripto addatur ſequens dividendi nota 2. At quoniam in 12 diviſor 15 ne ſemel quidem continetur, per reg. 4tam ſcribatur pro quoto zerus, & ex dividendo ſequens nota 0 deponatur, quæraturque, quoties 15 contineantur in 120. Novus quotus 8 adjungatur reliquis, & ejus in diviſorem ducti factum = 120 ſubſcribatur iis dividendi notis, quæ nunc dividebantur, ſeu notis 130. Facta ſubtractione nullum manet reſiduum pro ulteriori operatione: quapropter deponatur ſequens dividendi nota 6; quæ cum minor ſit diviſore, pro quoto ſcribatur zerus, & nova dividendi nota 0 adjiciatur. Porro quæratur, quoties 15 contineantur in 60, & quotus 4 reliquis adſcribatur; cujus in diviſorem ducti factum = 60 ſubſcribatur iis dividendi notis, quæ nunc dividebantur. Facta ſubtractione nullum manet reſiduum; & quia omnes jam *dividendi* notæ ſenſim depoſitæ ſunt, tota diviſio peracta eſt, acquiſitusque quotus = 80804.

EXEM-

EXEMPLA DIVISIONIS.

	Divisor.		*Dividendus,*		*Quotus.*
I.	12	(	2568	)	214.
II.	25	(	125110	)	$5004\frac{10}{25}$.
III.	89	(	870954	)	9786.

Schol. 1. Si divisor habeat in fine unum, aut plures zeros; compendio locus est in divisione. Scilicet finales illi zeri resecentur a divisore, & per reliquas divisoris notas dividatur totus dividendus: at finita hac divisione in quoto totidem notæ ultimæ resecentur, quot zeri resecti erant in divisore, scribanturque pro numeratore fractionis, cujus denominator sit unitas cum iis zeriis, qui principio ex divisore resecti fuere. Scilicet si unicus zerus resectus fuit a divisore, in quoto dicto nonnisi unitatum nota resecanda erit: at si a divisore duo fuerint resecti zeri; jam in quoto dicto non modo unitatum, verum etiam decadum nota resecari, ac pro fractionis numeratore scribi debebit, & sic porro.

e. g. Sit *dividendus* 1284, *divisor* 400. Resectis ex divisore duobus zeris, dividatur totus dividendus per residuam divisoris notam significantem 4: quotus erit $= 321$. At ex hoc quoto duæ postremæ notæ 21 scribantur pro numeratore fractionis, cujus numerator sit 100: quo facto jam obtinetur quotus quæsitus $= 3\frac{21}{100}$.

Ratio compendii est. Cum enim sit $400 = 4 \times 100$; idem est, sive numerus 1284 dividatur per 400, sive numerus ille dividatur primum per 4, deinde vero quotus enascens porro dividatur per 100. Sic etiam idem est, e. g. sive 24 dividas per 6, sive divisore 6 in duos factores 2 & 3 resoluto, dividas imprimis 24 per 2, tum quotum enascentem 12 porro per 3 dividas. Jam vero in assumpto exemplo, dum dicto compendio uteris, re ipsa numerum 1284 per 4 dividis, deinde vero enascentem quotum 321 porro dividis per 100: ergo eo compendio utendo, numerum 1284 reapse per 400 dividis. Demonstratio hæc cuilibet alteri particulari

casui

caſui facile applicari poteſt; modo notetur, eo caſu, quo prima diviſio quotum cum fractione adjuncta dat, fractionem adjunctam in reſectione notarum cum dextima integrarum unitatum nota pro unica nota habendam eſſe. e. g. Si numerus 1185 per 400 hac methodo dividi debeat; quotus eſt $= 3\frac{21\frac{3}{4}}{100}$.

Schol. 1. Si diviſor in fine zeros habeat; hoc quoque compendii genere uti licet. Nimirum reſectis finalibus diviſoris zeris, reſecentur a dextris dividendi totidem notæ, quot zeri e diviſore reſecti fuere, & diviſio cum reliquis dividendi, & diviſoris notis peragatur. Hac peracta, reſiduo ultimo, ſi quod manſit, jungantur a dextris notæ reſectæ dividendi, & interpoſita lineola diviſor totus ſubſcribatur. Si autem nullum manſit reſiduum, nonniſi reſectis e dividendo notis diviſor totus eſt ſubſcribendus. e. g. Sit dividendus 1384, diviſor 400: reſectis e diviſore duobus zeris, & e dividendo totidem notis dextimis, dividantur 13 per 4; erit quotus $= 3$, manebitque reſiduum $= 1$. Huic ergo reſiduo jungantur reſectæ dividendi notæ 84, ut ſit 184, interjectaque lineola diviſor 400 ſubſcribatur: erit quotus quæſitus $= 3\frac{184}{400}$. Si autem 1284 debeat per 400 dividi; ex prima diviſione nullum remanet reſiduum: adeoque ſolæ reſectæ dividendi notæ debent pro fractionis numeratore ſcribi, eſtque quotus $= 3\frac{84}{400}$.

Schol. 2. Si vero tam in fine diviſoris, quam etiam dividendi adfuerint zeri; adhuc facilius eſt compendium. Scilicet reſecentur ex diviſore totidem zeri, quot ex dividendo, & cum reliquis notis conſueta operatio inſtituatur: idem prodibit quotus, qui prodiret, ſi compendio non utereris. e. g. Sit *diviſor* 400, *dividendus* autem 12000. Reſecentur ex utroque zeri duo, dividanturque 120 per 4: quotus erit 30; ſcilicet ille idem, qui acquiritur, ſi abſque hoc compendio 12000 per 400 dividantur.

55. THEOREMA II. *In legitima multiplicatione, ſi factum dividatur per unum factorem e. g. per multi-*

plicatorem, pro quoto debet prodire alter factor e. g. multiplicandus. In legitima autem diviſione, ſi diviſor ducatur in quotum, factum inde enaſcens æquale eſſe debet numero dividendo.

Demonstr. *1mæ partis.* Si legitima eſt multiplicatio, generatim *factor* unus toties continetur in *facto*, quoties unitas in *factore* altero (44): ergo ſi *factum* dividatur per unum *factorum*, alter *factor* pro quoto obveniat, eſt neceſſe (51).

Demonstr. *2dæ partis.* Diviſor toties continetur in dividendo, quot unitates continentur in quoto (51): quod ſi ergo diviſor toties accipiatur, quot unitates ſunt in quoto, id eſt, ſi diviſor in quotum ducatur, factum inde proveniens æquale eſſe debet dividendo (35).

56. Coroll. Igitur *examen* rite peractæ multiplicationis ſit per diviſionem; *examen* vero rite peractæ diviſionis per multiplicationem. Nempe imprimis quod ad multiplicationem attinet: divide factum per unum factorum e. g. per multiplicatorem: ſi pro quoto acquiſiveris factorem alterum e. g. multiplicandum, id argumento erit, rite peractam fuiſſe multiplicationem. Quod autem attinet ad diviſionem: ſi diviſor in quotum ductus det factum æquale dividendo, legitima fuit diviſio.

CAPUT QUINTUM.

De Reductione numerorum mixtorum Heterogeneorum reducibilium; item de eorundem Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Diviſione.

57. Volenti numeros heterogeneos reducere, addere, ſubtrahere &c. neceſſarium eſt ſcire, quotnam unitates ſpeciei minoris requirantur ad efficiendam unitatem ſpeciei majoris. Quare aliquot tabulas ſpecierum apud nos in frequentiore uſu poſitarum prævie adferre lubet.

TABU-

TABULA I.

Menſurarum vulgarium, ſeu civilium longitudinis.

1 Hexapeda eſt	=	6 pedibus
1 Pes	=	12 digitis
1 Digitus	=	12 lineis.

TABULA II.

Ponderum Civilium, ſeu Mercatorum Noſtratium.

1 Centenarius eſt	=	100 libris
1 Libra	=	32 Semunc.
1 Semuncia, ſeu *Loth*	=	4 drachmis, ſeu *Quintl.*

TABULA III.

Ponderum Apothecariorum Noſtratium.

1 Libra Apothec. eſt	=	12 unciis
1 Uncia	=	8 drachmis
1 Drachma	=	3 ſcrupulis
1 Scrupulus	=	20 granis.

TABULA IV.

Temporis vulgaris.

1 Dies	=	24 horis
1 Hora	=	60 minutis primis
1 Minutum primum	=	60 minutis ſecundis
1 Minutum ſecundum	=	60 minutis tertiis.

TABULA V.

Valoris pecuniæ in Hungaria.

1 Florenus Germ eſt	=	20 groſſis
1 Groſſus	=	3 cruciferis
1 Crucifer	=	$1\frac{2}{3}$ nummis.

TABULA VI.

Menſurarum arcuum circuli.

Circulus integer eſt	=	360 gradibus
1 Gradus	=	60 minutis primis
1 Minut. primum	=	60 ſecundis
1 Minut. ſecundum	=	60 tertiis.

TABULA VII.

Menſurarum Geographicarum.

1 Milliare Germ eſt	=	4 milliar. Italicis
1 Milliare Italic.	=	8 ſtadiis
1 Stadium	=	125 paſſibus
1 Paſſus	=	5 pedibus.

58. PROBLEMA IX. *Quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducere ad datam ſpeciem minorem, ſeu inferiorem.*

Resolut. Multiplicetur ſpecies major per eum ſpeciei minoris numerum, qui numerus adæquat unitatem ſpeciei majoris, ſeu ſuperioris. e. g. Sint 20 milliaria Germanica reducenda ad milliaria Italica. Quoniam juxta Tab. VII. (57) 4 milliaria Italica æquivalent uni milliari Germanico, multiplicentur 20 per 4; & factum 80 exprimet 20 milliaria Germanica reducta ad milliaria Italica.

59. Si ſpecies major reducenda ſit ad ſpeciem minorem non proxime ſequentem, ſed remotiorem, ita ut inter eam ſpeciem, quæ reducenda eſt, & eam, ad quam

quam illa reducenda eſt, una vel plures aliæ ſpecies intermediæ intercedant, ut ſi e. g. 100 dies eſſent ad minuta ſecunda reducendi; gradatim hoc modo procedendum eſt: data ſpecies major reducatur imprimis ad minorem ſpeciem proxime ſequentem; deinde factum ex hac reductione enaſcens ad aliam minorem ſpeciem proxime ſequentem reducatur, & ſic porro gradatim, usque dum ad eam ipſam ſpeciem perveniatur, ad quam ut ſpecies major reducatur, exigebatur. Sic in allato exemplo 100 dies reducendi ſunt imprimis ad horas: nempe quoniam unus dies eſt = 24 horis, 100 multiplicari debent per 24; factumque ex hac multiplicatione enaſcens, id eſt, 2400 indicabit numerum horarum, quibus 100 dies æquivalent. Deinde is horarum numerus reducatur ad minuta prima: nempe quoniam quælibet hora continet in ſe 60 minuta prima, 2400 multiplicentur per 60, factumque 144000 exhibebit minuta prima, quibus 100 dies æquivalent. Denique is minutorum primorum numerus reducatur ad minuta ſecunda, id eſt 144000 multiplicentur per 60: factum enaſcens 8640000 exhibebit demum 100 dies ad minuta ſecunda reductos. Quod ſi tamen notus eſſet is datæ ſpeciei minoris numerus, cujus unitates adæquant unitatem datæ ſpeciei majoris; non eſſet neceſſe dicto modo gradatim procedere, e. g. Sint 5 floreni germ. reducendi ad cruciferos. Tametſi inter florenos, & cruciferos intercedat intermedia ſpecies groſſorum; quia tamen communiter notum eſt, florenum æquivalere 60 cruciferis, non erit neceſſe florenos primo ad groſſos, deinde ad cruciferos reducere, ſed illico poterunt 5 illi floreni ad cruciferos reduci: ſcilicet 5 multiplicando per 60 acquiritur factum 300, quod exprimit 5 florenos reductos ad cruciferos.

60. PROBLEMA X. *Quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem reducere ad datam ſpeciem majorem, ſeu ſuperiorem.*

Resolut. Diſpiciatur, quotnam unitates ſpeciei minoris reducendæ, æquivaleant unitati ſpeciei majoris, & per numerum earum unitatum dividatur datus numerus reducendus: quotus enaſcens exprimet eundem numerum ad datam ſpeciem majorem jam reductum. e. g. Sint reducenda 80 milliaria Italica ad milliaria Germanica. Quoniam 4 milliaria Italica efficiunt unum milliare germanicum, datus numerus italicorum milliarium, id eſt, 80, dividatur per 4: quotus 20, exhibebit milliaria germanica, 80 italicis æquivalentia. Item ſint 300 cruciferi ad florenos reducendi. Quoniam 60 cruciferi efficiunt unum florenum, 300 dividantur per 60: quotus = 5 indicabit, 300 cruciferos quinque florenis æquivalere.

Schol. Si quod reſiduum manſerit ex diviſione; illud erit ejusdem ſpeciei cum dividendo. e g. Si 312 cruciferi dentur ad florenos reducendi; hoc numero per 60 diviſo, quotus eſt = 5, & præterea manet reſiduum = 12. Hoc itaque reſiduum deſignat cruciferos: ut adeo 312 cruciferi æquivaleant 5 florenis, & præterea 12 cruciferis.

61. PROLEMA XI. *Addere numeros mixtos heterogeneos reducibiles.*

Resolut. 1*mo.* Si addendi ſint numeri heterogenei *reducibiles*, e. g. floreni, groſſi, cruciferi ad florenos, groſſos, cruciferos, collocentur addendi numeri ſub ſe invicem, ita ut e. g. cruciferi reſpondeant cruciferis, groſſi groſſis, floreni florenis: tum juxta communes additionis regulas addantur imprimis ſibi numeri ſpeciei minimæ; tranſeatur deinde ad additionem numerorum ſequentis ſpeciei majoris, & ſic porro.

2*do.* Habitis ſingularum ſpecierum ſummis partialibus, minima ſpecies reducatur ope diviſionis (60) ad ſpeciem majorem proxime ſequentem; tum quotus ex diviſione enaſcens addatur ſummæ ejusdem ſpeciei majoris: ſi quod autem manſit reſiduum, ſcribatur infra numeros ſpeciei minoris (60. Schol.). Eodem modo reducatur ſequens ſumma ad ſpeciem majorem proxime ſequentem, & ſic porro.

flor.

	flor.	*gros.*	*crucif.*
e. g. Sint *Addendi*	10,	12,	2,
	9,	14,	1,
	—	16,	—
erunt ſummæ partiales *nondum* reductæ	19,	42,	3
erunt eædem jam *reductæ*	21,	3	—

Scilicet habitis jam partialibus ſummis, 3 cruciferos per 3 dividendo reduco ad unum groſſum, neque ullum manet reſiduum: itaque ad ſummam groſſorum adjicio unitatem. Deinde, quoniam florenus 20 groſſis æquivalet; 43 groſſos per 20 dividendo, eosdem reduco ad 2 florenos: manent autem reſidui 3 groſſi, quos ducta linea transverſa infra groſſos ſcribo. Denique 2 florenos reductione acquiſitos ſummæ florenorum addo; atque ita obtineo 21 florenos, 3 groſſos, & nullum cruciferum.

Scholion. Si non adeſt periculum confuſionis; quam primum peracta fuerit minimæ ſpeciei additio, eadem ſpecies illico reduci poterit ad ſpeciem proxime ſequentem, ac tum primum ſequi additio ſequentis illius ſpeciei majoris, jam auctæ numero ex reductione acquiſito. Idem eſt de reliquis ſequentibus ſpeciebus intelligendum. Hinc in ſequentibus exemplis nonniſi ſummas ſpecierum jam reductas adnotabimus.

EXEMPLA *Additionis mixtorum.*

	Hexap.	*Pedes,*	*Digit.*	*Lineæ.*
I. *Addendi*	12,	5,	8,	10,
	3,	4,	11,	8.
Summa	16,	4,	8,	6.

Conſulatur TABULA I. num. 57.

		Centen.	*Libr.*	*Semunc.*	*Drach.*
II.	*Addendi*	3,	75,	24,	3,
		2,	94,	30,	2,
		—	36,	9,	1,
	Summa	7,	—7,	— —	2,

Consulatur TABULA II. num. cit.

		Gradus,	*Min. prima,*	*Min. secun.*
III.	*Addendi*	8,	57,	36,
		3,	49,	54,
		4,	12,	30,
	Summa	17,	— —	— —

Consulatur TABULA VI. num. cit.

62. PROBLEMA XII. *Subtrahere numeros mixtos heterogeneos reducibiles.*

RESOLUT. Collocentur subtrahendi infra minuendos, ita ut e. g cruciferi respondeant cruciferis, grossi grossis &c. uti in *Additione* num. præc. dictum est; tum a minima specie inchoando, peragatur subtractio methodo consueta: hoc solum notato, quod in casu concessionis Regulæ 4tæ (num. 33.) concessa unitas a specie majore tot valeat unitates, quot unitates speciei minoris in illa continentur. e. g. Si pro classe grossorum unus florenus concedatur; hæc unitas valebit 20 unitates, seu 20 grossos; si autem pro classe cruciferorum concedatur unus florenus; hæc unitas valebit 60 unitates, seu 60 cruciferos.

e. g. Sit *Minuendus*	*flor.*	9,	*crucif.*	45.
Subtrahendus	*flor.*	5,	*crucif.*	52.
erit *Residuum*	*flor.*	3,	*crucif.*	53.

Cum enim 52 cruciferos nequeam subtrahere a 45 cruciferis, ex classe florenorum transfero unitatem, quæ in classe cruciferorum valet 60 unitates: habeo ita-

itaque cruciferos 60 + 45 = 105; e quibus ſi ſubtrahantur 52, remanent cruciferi 53; infra lineam ſub cruciferis ſcribendi. Tranſeo deinde ad ſubtractionem florenorum: at jam 5 non a 9, ſed ab 8 habeo ſubtrahendos, cum 1 florenus ad claſſem cruciferorum ſit translatus. Erit ergo totum reſiduum = fl. 3, crucif. 53.

EXEMPLA *Subtractionis mixtorum.*

		Hexaped.	*Pedes,*	*Digit.*	*Lineæ*
I.	*Minuendus*	15.,	3.,	4.,	6
	Subtrahendus	6,	5,	10,	8
	Reſiduum	8	3,	5	10

		Centen.	*Libræ,*	*ſemunc.*	*Drachmæ*
II.	*Minuendus*	1.,	48.,	25.,	1
	Subtrahendus	—	69,	29,	2
	Reſiduum	—	78	27	3

		Floren.	*Groſſi,*	*Cruciferi*
III.	*Minuendus*	100,	12,	1,
	Subtrahendus	50,	15,	2,
	Reſiduum	49,	16,	2.

Schol. 1. Multiplicatio numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium difficultate caret. Satis enim eſt ſingulas ſpecies multiplicare per datum numerum, tum facta particularia ad ſpecies majores proxime ſequentes reducere. e. g. Si floreni 3, groſſi 12, cruciferi 2 debeant multiplicari per 4; a minima ſpecie inchoando, multiplicentur per 4 ſingulæ ſpecies: erit factum = flor. 12, groſ. 48, crucif. 8. Porro minoribus ſpeciebus ad majores proxime ſequentes reductis, erit factum = flor. 14, groſ. 10, crucif. 2.

Schol. 2. Si numeros mixtos hererogeneos reducibiles per datum numerum dividere cupis; ſingulas ſpecies majores reduc ad ſpeciem minimam, totumque in unam ſummam collige. Deinde ſummam hanc per datum numerum divide. Denique quotum ex hac diviſione enaſcentem rurſus ad ſpecies majores reduc. e. g. Sint 37 floreni, 13 groſſi, & 1 crucifer dividendi in 4 partes. Reducantur omnes ſpecies ad cruciferos: erit ſumma totalis cruciferorum = 2260; quæ ſumma per 4 diviſa dat quotum = 565 cruciferis. Hi cruciferi ad majores ſpecies reducti æquivalent florenis 9, groſſis 8, & crucifero 1. Ceterum hoc etiam modo poteſt inſtitui diviſio: Imprimis divide 37 florenos per 4; pro quoto acquires 9 florenos, & 1 florenus erit reſiduus: deinde reſiduum hunc florenum in 20 groſſos reſolutum adde 13 groſſis, & ſummam groſſorum = 33 divide per 4; pro quoto altero acquires 8 groſſos, & reſiduus erit 1 groſſus. Denique reſiduum hunc groſſum in 3 cruciferos reſolutum adde 1 crucifero, & ſummam cruciferorum = 4 divide per 4; pro quoto obveniet crucifer unus. Atque ita obtinebis quotum totalem = 9 florenis, 8 groſſis, 1 crucifero, ut prius.

Schol. 3. His pertractatis agendum jam eſſet de fractionibus vulgaribus: at quia earum theoria longe faciliore methodo demonſtratur in Algebra, eorum conſilium ſequimur, qui fractionum pertractationem ad Algebram rejiciendam cenſent.

FINIS ELEMENTORUM ARITHMETICÆ.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ.

SECTIO PRIMA.
DE PRIMIS CALCULIS ALGEBRAICIS.

CAPUT PRIMUM.
Definitiones, & Hypotheses in Algebram universam.

Algebra est scientia, quæ ope literarum alphabeti secundum certas regulas inquirit in quantitates, & veritates ignotas, easque ex datis quibusdam cognitis infallibiliter eruit, ac determinat. Quid autem veniat *quantitatis* nomine, *Arith.* n. 1. dictum est.

2. Quantitates, quemadmodum in Arithmetica literis arabicis 1, 2, 3 &c. ita in Algebra minusculis alphabeti latini literis solent designari: & cognitæ quidem quantitates primoribus alphabeti literis a, b, c, d; incognitæ autem postremis x, y, z designantur. Sæpe tamen memoriæ adjuvandæ caussa adhibentur primæ literæ earum vocum, quæ ipsas quantitates significant, e. g. Tempus repræsentari solet litera t, celeritas litera c, spatium litera s, &c.

Schol. In Arithmetica, quælibet nota numerica certo loco scripta fixam habet significationem: e. g. nota 3 semper tantum *tria* significat (*Arith.* 16.). At in Algebra, literarum significatio non æque fixa est, sed eadem litera e. g. litera a pro signo cujuscunque quantitatis utcunque magnæ, aut parvæ assumi potest. e. g. Dentur duo numeri, 37, & 23 cum certo quæstionis statu, ex quibus tertius numerus incognitus, qui satisfaciat positæ quæstioni, erui debeat: Algebraicus numero 37 literam a, & numero 23 literam b, aut aliam substituet,

ſtituet, tertium vero illum incognitum numerum litera x deſignabit; atque cum literis his per notas ſibi regulas operationem inſtituet, quæ ipſum in notitiam incogniti illus numeri deducet. Dentur deinde alii duo numeri, e. g. 342, & 400 cum alio quæſtionis ſtatu, ex quibus numeris itidem tertius aliquis numerus incognitus ſit eruendus: Algebraicus rurſus iisdem literis utetur; e. g. numerum 342 litera a, & numerum 400 litera b ipſi deſignabit, litera vero x tertium illum incognitum.

Schol. Quantitatibus literas ſubſtituendo, atque ita juxta regulas algebræ operando difficillimæ quæſtiones, quas ope numericæ Arithmeticæ vix, ac ne vix quidem enodaveris unquam, admirando compendio, facilitateque ſolvuntur: profundiſſimæ veritates e tenebris eruuntur, & in plena luce collocantur. Hinc Algebra egregios omnino habet uſus in omnibus iis diſciplinis, in quibus certæ quantitatum ſpecies, e. g. numeri, lineæ, ſpatia, tempora, celeritates, vires, pondera &c. pertractantur; quaslibet enim quantitates literis deſignare, & ad calculum revocare poteſt: quapropter etiam *Calculus univerſalis* nuncupatur. Sed Tiro, priusquam præſtantiſſimos Algebræ fructus delibet, primos calculos algebraicos rite condiſcendos habet.

3. Quælibet quantitas vel eſt *poſitiva*, ſeu major nihilo, vel eſt *negativa*, ſeu nihilo minor; ut adeo nihilum ſit quaſi limes quidam quantitatum poſitivarum, & negativarum. e. g. 1) Poſſideat quispiam 10 florenos, nec ulli debeat quidquam: hi 10 floreni relate ad eum poſſeſſorem ſunt quantitas *poſitiva*, ſeu *nihilo major*; cum poſſeſſor ille plus habeat, quam nihil. 2) Poſſideat quispiam 10 florenos, ſed alteri cuipiam tantundem debeat: dicetur is *habere nihil*, cum omnis illa pecunia, quam poſſidet, ab æquali debito veluti exſtinguatur. 3) Poſſideat quispiam 10 florenos, ſed alteri cuipiam debeat 12 florenos: iſte habet quantitatem *negativam*, ſeu *nihilo minorem* duorum florenorum, id eſt, habet 2 florenos negativos. Tametſi enim omnes ſuos 10 florenos Creditori ſuo tradiderit, adhuc eidem debebit 2 florenos; ac proinde minus habet *nihilo*, ita ut

ut ad hoc, ut pure *nihil* habere intelligatur, indigeat adhuc 2 florenis, quibus debitum ſuum expungat.

4. COROLL. Id, quod deſideratur ad hoc, ut is, qui nihilo minus habet, ad eum reponatur ſtatum, in quo pure *nihil* habeat, eſt vera quantitas, & non merum nihilum. Sic in allato ſuperius exemplo, 2 illi floreni, qui memorato Poſſeſſori neceſſarii eſſent ad hoc, ut is cenſeatur habere pure *nihil*, utique vera quantitas ſunt, ſed quæ quantitas comparate ad eum poſſeſſorem *negativa* ſit, non *poſitiva*. Id ergo, quod *negativam* quantitatem appellamus, re vera eſt quantitas, & non merum nihilum; ita ut nonniſi comparate ad certa rerum adjuncta dicatur *negativa*. Aliqua de quantitate negativa adſerentur etiam num. ſeq. in *Scholio*.

5. Poſitiva quantitas deſignatur ſigno $+$ præfixo negativa autem ſigno $-$ præfixo. Quum aliqua litera poſitivam quantitatem deſignans ſolitaria ponitur, non præfigitur ipſi ſignum $+$, ſed iſtud ſubintelligitur: pariter, quum plures literæ interpoſitis ſignis conjunguntur, primæ literæ. ſi ea poſitivam quantitatem deſignet, nullum ſolet præfigi ſignum, ſed ei ſignum $+$ ſubintelligitur eſſe præfixum. At negativæ quantitati ſignum $-$ ſemper expreſſe præfigitur. e. g. Sit tam a, quam b quantitas poſitiva; hoc modo ſcribendæ erunt: $a + b$. Si a fuerit quantitas poſitiva, b negativa; ſic eaſdem ſcribes: $a - b$. Scilicet utroque caſu poſitivæ quantitati a, quia primum in ſerie locum obtinet, nullum ſignum præfigitur, ſed præfixum eſſe intelligitur ſignum $+$. Quod ſi autem utraque fuerit quantitas negativa; hoc modo ſcribuntur: $- a - b$. Porro ejusmodi ſigna, ut jam in Arithmetica (4) indicatum eſt, hoc modo enunciantur: $a + b$, *a plus b*; $a - b$, *a minus b*, &c.

Schol. Natura quantitatis poſitivæ, & negativæ ſolet etiam exemplo motus progreſſivi declarari. e. g. Si motum tuum verſus orientem referas; paſſus, quos verſus orientem facis, *poſitivi* ſunt, quia verſus orientem re ipſa progrederis: at ſi volens verſus orientem progredi, verſus occaſum regrediaris; regreſſus in occaſum comparate ad motum verſus orientem factum *negativus* eſt. Immo quaſcunque duas quantitates directe

recte oppositas inter se conferamus, e. g. lucrum & damnum, incrementum & decrementum, motum sursum, & motum deorsum &c. semper una quantitas relate ad alteram sibi oppositam quantitas negativa est; e. g. damnum respectu lucri, decrementum respectu incrementi, motus deorsum respectu motus sursum, & vicissim. Unde etiam si signum $+$ significet lucrum, incrementum, motum sursum &c. signum $-$ designabit damnum, decrementum, motum deorsum &c. Si autem signum $+$ postrema hæc denotet, signum $-$ priora illa designabit.

6. Signum $=$ designat æqualitatem earum quantitatum, inter quas inseritur. Sic si velimus exprimere, quantitatem a esse æqualem quantitati b, hoc modo scribimus: $a = b$; sic autem enunciamus: *a æquale b.* Recole *Arith.* n. 5.

7. Cum quæpiam quantitas signo $+$ interjecto adjungitur alteri, in Algebra, non secus ac in Arithmetica (*Arith.* 4.) significatur, eam quantitatem, cui id signum præfixum est, alteri addi: si autem quantitas una signo $-$ interjecto jungatur alteri, significatur, eam quantitatem, cui signum illud præfixum est, ab altera tolli, seu *subtrahi.* e. g. $a + b$ significat, quantitatem b ad a addi; $a - b$ autem significat, quantitatem b ab a subtrahi: seu quantitatem a quantitate b mulctari.

8. Coroll. Quoniam *addi*, & *subtrahi* contraria sunt, perspicuum est, quantitatem positivam adjuncta æquali negativa reddi æqualem nihilo. e. g. $a - a$, vel $4 - 4$ æquantur nihilo. Hinc si duæ inæquales quantitates, quarum altera positiva sit, altera negativa, conjungantur; minor e majore semper tantum destruit, quanta est ipsa minor. Sic $6 - 4 = 2$; $8 - 3 = 5$.

9. Signum *multiplicationis* est crux decussata $\times$, aut punctum inter factores interjectum. e. g. 2×3, vel $2 . 3$ designat 2 multiplicari per 3, estque $= 6$. Est etiam signum multiplicationis, si factores absque ullo interjecto signo conjungantur. e. g. $a\,b$ significat a multiplicatum per b; $2\,a$ significat a multiplicatum per 2. Usitatissimum *divisionis* signum est, si indicetur per modum *fractionis*, id est, si *dividendus* subducatur linea,

&

& infra lineam ſcribatur *diviſor.* e. g. Si quantitatis a per quantitatem b diviſio indicanda eſt, ſcribitur ſic: $\frac{a}{b}$, & enuntiatur ſic: *a diviſum* per b. Deinde diviſionis ſignum ſunt etiam duo puncta (:) interjecta inter dividendum, & diviſorem. Sic ($a + b$) *diviſum* per ($c - d$) nonnunquam ſic exprimitur, $(a+b) : (c-d)$.

10. Signum $>$ indicat quantitatem anteriorem eſſe majorem poſteriore: at ſignum $<$ ſignificat, anteriorem quantitatem poſteriore minorem eſſe. Hinc $a > b$ ſignificat, quantitatem a eſſe majorem quantitate b; at $2 < 3$ indicat, numerum 2 numero 3 eſſe minorem.

11. Signum ∞ eſt ſignum quantitatis infinitæ, Hinc $a = \infty$ ſignificat, quantitatem a eſſe infinitam. Signum autem 0, ſeu *Zerus* eſt ſignum *nihili;* ita ut e. g. $3 - 3 = 0$ tantumdem ſignificet, ac, 3 *minus* 3 æquari nihilo.

12. Quantitas dividitur in complexam, & incomplexam. Quantitas *complexa*, ſeu *polynomia* conſtat e pluribus quantitatibus ſigno $+$ vel $-$ junctis. e. g. $ab + 2c - d$ eſt quantitas complexa. Quantitas *incomplexa*, ſeu *monomia* eſt, quæ non conſtat e pluribus quantitatibus ſigno $+$ vel $-$ conjunctis. e. g. a eſt quantitas incomplexa, item abc, vel $3\,ab$ &c. Porro in quantitate complexa quantitates illæ, quæ ſigno $+$ vel $-$ conjunguntur, ejusdem quantitatis complexæ *termini* nuncupantur: ut adeo totidem *terminis* conſtet quantitas complexa, quot in ea reperiuntur quantitates ſigno $+$ vel $-$ conjunctæ. Sic quantitas complexa $ab + 2c - d$ tribus terminis conſtat: primus eſt ab, alter $+ 2c$, tertius $- d$. Quantitas complexa duobus terminis conſtans vocatur *binomia*, tribus terminis conſtans *trinomia*, & ſic porro.

13. In Algebra literis numeri quoque ſæpiſſime adjunguntur. Iſtud autem tripliciter fieri poteſt. Nempe vel 1) inter literas & numeros interjicitur ſignum $+$ vel $-$, ut in hac quantitate complexa, $ab + c - 3$; vel 2) numeri præfiguntur literis ſigno $+$ vel $-$ non interjecto, ut $3\,a\,b$; vel denique 3) numeri literis a dextris ſurſum verſus adduntur, ut in hac quantitate: a^2.

14.

14. Numeri literis non interjecto ſigno $+$ vel $-$ præſixi vocantur earum *coeſſicentes*, afficiuntque totum terminum, cui præfiguntur, ac indicant, quoties terminus ille cum ſuo ſigno poſitus ſit. Sic $3\,ab$ ſignificat terminum ab ter eſſe poſitum; hoc eſt, $3\,ab$ eſt $=$ $ab + ab + ab$. Unde patet, expreſſionem per coefficientes eſſe methodum compendiariam ſcribendi eosdem terminos aliquoties cum ſuo ſigno poſitos. Quod ſi autem cuipiam termino nullus præfigatur coefficiens; illic unitas præfixa intelligitur: quod evenit tunc, quum terminus cum ſuo ſigno ſemel tantum poſitus eſt. Sic loco $1\,ab$ ſolet omiſſa unitate ſcribi ab.

15. Numeri, qui literis a dextris ſurſum verſus adſcribuntur, vocantur earundem literarum *exponentes*. Jam *exponens* indicat, eam literam, cui ipſe a dextris adſcriptus eſt, toties eſſe multiplicatione poſitam, quot ipſe exponens unitates in ſe continet. Sic a^3 ſignificat, quantitatem a ter eſſe multiplicatione poſitam. Probe autem advertendum eſt, quid ſit, aliquam quantitatem aliquoties eſſe *multeplicatione* poſitam. Nimirum quantitas a bis multiplicatione poſita, ſeu a^2 eſt $=$ $a \times a$; eadem quantitas ter multiplicatione poſita, ſeu a^3 eſt $= a \times a \times a$; quater multiplicatione poſita, ſeu a^4 eſt $= a \times a \times a \times a$, & ſic porro. Conſequenter tunc aliqua quantitas ponitur bis multiplicatione, quum ſemel per ſe ipſam multiplicatur; tunc ponitur ter multiplicatione, quum bis per ſe ipſam multiplicatur, & ſic porro. Unde patet, *exponentes* non eſſe confundendos cum *coefficientibus*, longeque aliud eſſe e. g. a^2, ac ſit $2a$. Quippe $2a$ ſignificat quantitatem a bis *additione* eſſe poſitam, ſeu eſt $2a = a + a$; at a^2 ſignificat quantitatem a bis eſſe *multiplicatione* poſitam, ſeu eſt a^2 $= a \times a$. Hinc ſi ponatur $a = 3$; eſt $2a = 6$, & a^2 $= 9$. Porro *exponens* eam ſolum literam afficit, cui a dextris jungitur. Sic in quantitate abc^2d, exponens 2 ſolam literam c indicat bis eſſe multiplicatione poſitam. Contraria eſt *coeſſicientium* natura, uti num. præc. expoſuimus. Denique ſicubi deſit exponens, illic unitas intelligitur eſſe exponens. e. g, Eſt $a = a^1$.

Schol. 1. Interdum pro exponentibus adhibentur literæ minuſculæ loco numerorum. e. g. a^m ſignificat, quan-

quantitatem a toties eſſe multiplicatione poſitam, quot in quantitate m unitates continentur. Nonnunquam pro exponentibus adhibentur literæ numeris permiſtæ; e. g. a^{m-2}.

Schol. 2. Valor termini, quantitatem complexam conſtituentis, in Algebra prorſus non pendet a loco, quem is terminus comparate ad reliquos terminos occupat. Hinc valor quantitatis complexæ non mutatur, quo demum cunque ordine ſcribantur termini eandem componentes. e. g. Eſt $a\,b + c - d = c + a\,b - d = a\,b - d + c = c - d + a\,b$ &c.

16. Quantitates monomiæ, ſeu *termini* dividuntur in homogeneos, & heterogeneos. Duo termini tunc dicuntur *homogenei*, quum iisdem accurate literis conſtant, & quidem ita, ut eadem litera eundem habeat in utroque termino exponentem; neque tamen officiet homogeneitati, ſi termini illi diverſa ſigna ſibi præfixa, aut diverſos coefficientes habuerint. Ex adverſo duo termini ſunt *heterogenei*, ſi non iisdem accurate literis conſtent, aut ſi aliqua litera alium in uno, alium in altero termino exponentem habeat; ſive deinde termini illi iisdem gaudeant ſignis, & coefficientibus, ſive diverſis. Sic 1) abc^2 & abc^2 ſunt termini homogenei, quia iisdem accurate literis conſtant, & quælibet litera eundem habet exponentem in uno termino, quem habet in altero. 2) Eandem ob cauſſam homogenei ſunt termini $2\,a^2\,b$ & $-\,a^2 b$, tametſi diverſis ſignis, & coefficientibus gaudeant. At 3) termini abc & ac heterogenei ſunt; quia prior terminus habet aliquam literam, ſcilicet c, qua terminus alter caret, ac proinde non conſtat uterque terminus iisdem accurate literis. 4) Pariter heterogenei ſunt termini abc, & $a^2\,b\,c$; quia tametſi uterque iisdem conſtet literis, attamen litera a non habet eundem exponentem in uno termino, quem habet in altero. 5) Potiori jure heterogenei ſunt termini abc^2, & $a^2\,c\,f$; quia neque conſtant iisdem accurate literis, neque habent eosdem exponentes literæ a & c in uno termino, quos habent in altero.

CAPUT SECUNDUM.

De Additione, Subtractione, & Multiplicatione Algebraica quantitatum integrarum.

17. PROBLEMA I. *Quantitates algebraicas addere.*

RESOLUT. 1*mo* Partes addendæ retentis ſingularum ſignis ſcribantur infra eas, ad quas addendæ ſunt, tum linea transverſa ſubducantur.

2*do*. Diſpiciatur, quinam partium addendarum termini ſint inter ſe homogenei, & num termini homogenei iisdem gaudeant ſignis, an contrariis. Quod ſi termini homogenei eodem ſigno gaudeant; coefficientes iis præfixi addantur in unam ſummam, hæcque ſumma retento communi ſigno præfigatur communibus terminorum literis, quin earum literarum exponentes immutentur. e. g. Si in una parte addenda reperiatur terminus $+3a^2b$, in altera terminus $+2a^2b$; quoniam hi termini ſunt homogenei, eodemque ſigno $+$ affecti, eorum coefficientes 3 & 2 in unam ſummam colligantur, eaque ſumma $= 5$ præfigatur literis utrique illi termino communibus, ſeu literis a^2b, quin earundem exponentes immutentur: duorum illorum homogeneorum ſumma, infra lineam transverſam ſcribenda, erit $= 5a^2b$.

3*tio*. Si vero termini homogenei contrariis ſignis afficiantur; minor coefficiens ſubtrahatur a majore, & reſiduum, quod ex hac ſubtractione manet, cum ſigno majoris coefficientis præfigatur communibus terminorum literis. e. g. Si in una parte addenda reperiatur terminus $+3a^2b$, in altera autem terminus $-2a^2b$; quoniam hi termini ſunt homogenei, contrariis ſignis affecti, coefficiens minor 2 ſubtrahatur a majore 3, & reſiduum $= 1$ cum majoris coefficientis ſigno $+$ præfigatur communibus literis a^2b, quin earundem exponentes immutentur: duorum illorum terminorum ſumma erit $= 1a^2b$, ſeu quoniam 1 pro coefficiente non ſolet

ſolet expreſſe poni, ſed ſubintelligi (14), dicta ſumma erit $= a^2b$.

4to. Si termini homogenei contrariis ſignis affecti, æquales habuerint coefficientes; ii termini penitus omittantur.

5to. Denique termini heterogenei conjungantur cum ſuis ſignis absque ulla mutatione.

$$\text{e. g. Sint partes } addendæ \begin{cases} 3a^2b + 2cd - fg \\ 2a^2b - 3cd + fg \\ ab^2 - cd + df \end{cases}$$

$$\text{Erit } Summa \quad \overline{5a^2b + ab^2 - 2cd + df.}$$

Nam a ſiniſtris inchoando, termini $3a^2b$ & $2a^2b$ ſunt homogenei, eodem ſigno $+$ ſubintellecto affecti; eorum ergo ſumma per Reg. 2dam eſt $= 5a^2b$: quæ ſcribatur infra lineam. Terminus ab^2 cum nullo alio termino eſt homogeneus (16); iſte ergo cum ſuo ſigno per Reg. 5tam absque ulla mutatione ſcribatur infra lineam. Porro termini $2cd$, $- 3cd$, & $- cd$ ſunt homogenei, ſed non eodem omnes ſigno affecti: quia vero ſumma duorum terminorum $- 3cd$ & $- cd$, eodem ſigno affectorum eſt per Reg. 2dam $= - 4cd$; tres illi termini æquivalent his duobus: $+ 2cd - 4cd$. Horum autem duorum ſumma per Reg. 3tiam eſt $= - 2cd$; quæ proinde ſumma ſcribatur infra lineam. Deinde $- fg$ & $+ fg$ ſunt termini homogenei contrariis ſignis affecti, & æqualibus coefficientibus gaudentes: ii ergo per Reg. 4tam penitus omittantur. Denique terminus df cum nullo alio termino convenit accurate in ſuis literis, & coefficientibus, adeoque pro heterogeneo eſt habendus: adjiciatur ergo per Reg. 5tam ſummæ reliquæ absque ulla mutatione.

18. Demonstr. Ratio 2dæ regulæ ex n. 14 patet; hæc enim regula non aliud exigit, quam compendiariam methodum ſcribendi terminos, cum ſuo ſigno aliquoties poſitos. Ratio reg. 3tiæ, & 4tæ n. 8 continentur. Ratio denique reg. 5tæ eſt; quia heterogeneæ quantitates additione temere confundi non poſſunt. Recole *Arith.* n. 28.

Schol. *Examen* rite peractæ additionis fit ope subtractionis sequ. Probl. pertractandæ.

EXEMPLA *Additionis algebraicæ.*

$$\begin{array}{lll} & \textit{Partes} & \left\{\begin{array}{l} 3ax + 4bx - 2de \\ 2ax - 3bx + 2de \end{array}\right. \\ \text{I.} & \textit{addendæ} & \\ \hline & \textit{Summa} & 5ax + bx. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II.} & \textit{Partes} & \left\{\begin{array}{l} 5a^2b - 3a^2c - 4 \\ -a^2b + a^2c + 3 \end{array}\right. \\ & \textit{addendæ} & \\ \hline & \textit{Summa} & 4a^2b - 2a^2c - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{III. } \textit{Partes} & 7a^3bc - 2a^2bc + 2cd + fg - 10 \\ \textit{addendæ} & -4a^3bc + 7a^2bc - cd - fg - 5 \\ & -a^3bc - a^2bc - cd + 10fg + 20 \\ \hline \textit{Summa} & 2a^3bc + 4a^2bc + 10fg + 5 \end{array}$$

19. PROBLEMA II. *Quantitates algebraicas subtrahere.*

Resolut. Pars subtrahenda subscribatur quantitati *minuendæ*, seu *toti*, ductaque linea transversa mutentur signa omnia partis subtrahendæ in contraria, nempe $+$ in $-$, & $-$ in $+$; tum eadem pars subtrahenda jam contrariis signis affecta addatur per regulas superiores (17) quantitati *minuendæ*: summa ex hac additione enascens erit ipsum residuum quæsitum. e. g.

$$\begin{array}{ll} \text{Sit } \textit{quantitas minuenda}, & 4ab + 3cd - 5fg, \\ \textit{pars subtrahenda} & ab + 2cd - fg. \\ \hline \text{Erit } \textit{Residuum} & 3ab + cd - 4fg. \end{array}$$

Scilicet pars *subtrahenda* mutatis in contraria signis abit in hanc quantitatem: $-ab - 2cd + fg$; adeoque hæ duæ quantitates sunt sibi addendæ:

$$\begin{array}{ll} & 4ab + 3cd - 5fg \\ & -ab - 2cd + fg. \\ \hline \text{Quarum } \textit{summa} \text{ est} = & 3ab + cd - 4fg. \end{array}$$

Quod

Quod autem hæc ſumma ſit ipſum quæſitum reſiduum, hoc modo demonſtratur:

20. Demonstr. Terminus ſubtrahendus vel eſt poſitivus, vel negativus. Si poſitivus eſt; rite ſubtrahitur, ſi mutato ſigno addatur quantitati minuendæ: poſitivum enim tollere idem eſt, ac tantundem negativi addere (8). Si eſt negativus; negativum tollere idem eſt, ac tantundem poſitivi addere: ſic ſi tres florenos alteri debeas, id eſt, ſi tres florenos *negativos* habeas; hi tres negativi floreni tollentur tibi, ſi totidem florenos reapſe acquiras: ergo negativus quoque terminus rite ſubtrahitur, ſi mutato ſigno quantitati *minuendæ* addatur. Conſequenter generatim, quantitates quaſcunque algebraicas ſubtrahere idem eſt, ac easdem mutatis in contraria ſignis quantitati *minuendæ* addere.

EXEMPLA *Subtract. algebr.*

I.	*Quantitas minuen.*	$5ax + bx$
	Pars Subtrahen.	$2ax - 3bx + 2de.$
	Reſiduum	$3ax + 4bx - 2de$

II.	*Minuend.*	$4a^2b - 2a^2c - 1$
	Subtrahend.	$-a^2b + a^2c + 3$
	Reſiduum	$5a^2b - 3a^2c - 4$

III.	*Minuen.*	$2a^3bc + 4a^2bc + 10fg + 5$
	Subtrah.	$a^3bc - a^2bc - cd + 3fg + 7$
	Reſiduum	$a^3bc + 5a^2bc + cd + 7fg - 2$

Schol. Quemadmodum de numeris locuti ſumus (Arith. 38, 30, & 40), ita etiam algebraicæ additionis *examen* per ſubtractionem, ſubtractionis vero per additionem obtinetur. E. g. 1mum additionis algebraicæ exemplum (n. 18. in Scholio) eſt legitimum; quia ſi ex ſumma $5ax + bx$, ſubtrahas unam partium addendarum, e. g. hanc: $2ax - 3bx + 2de$, reſiduum eſt æquale alteri parti addendæ, ſeu huic: $3ax - 4bx - 2de$. Item e. g. 2dum ſubtractionis algebraicæ exemplum paullo ſuperius (hoc num. 20.) allatum, legitigitimum eſt; ſi enim reſiduum $5a^2b - 3a^2c - 4$ addas parti ſubtrahendæ $- a^2b + a^2c + 3$; ſumma ex hac additione enaſcens eſt æqualis *toti*, ſeu quantitati *minuendæ* $4a^2b - 2a^2c - 1$.

21. PROBLEMA III. *Quantitates algebraicas multiplicare.*

Resolut. 1mo. Scribatur multiplicator infra multiplicandum, ductaque linea transverſa, per ſingulos multiplicatoris terminos multiplicetur quilibet terminus multiplicandi. Hæc autem multiplicatio fit præciſe conjungendo literas multiplicatoris cum literis multiplicandi. e. g. Si terminus ab multiplicandus ſit per terminum cd; *factum* eſt $abcd$. Solent autem hujusmodi literæ ordine alphabeti ſcribi. e. g. Solet ſcribi ab, non ba. Ceterum tametſi ordo alphabeti plerumque obſervetur, is tamen non eſt prorſus *neceſſarius*. Cum enim idem factum prodeat ſive quantitas a multiplicetur per b, ſive b per a, uti ex *Arith. n.* 43. intelligere licet; factum ab prorſus idem eſſe debet cum facto ba.

2do Quod attinet ad ſignum *facto* ex terminorum multiplicatione enaſcenti præfigendum: videndum eſt, num factores contrariis ſignis affecti ſint, unus poſitivo, alter negativo; an vero uterque factor eodem ſigno gaudeat, ſcilicet vel uterque poſitivo vel uterque negativo. Si factores contrariis ſignis ſint affecti; facto ex eorum multiplicatione enaſcenti præfigi debet ſignum negativum $-$. Sic ſi debeat multiplicari $+ab$ per $-cd$; acquiritur factum $-abcd$. Quod ſi autem uterque factor eodem ſigno gaudeat, ſive poſitivo, ſive negativo; facto ſignum poſitivum $+$ eſt præfigendum. Sic ſi debeat multiplicari $+ab$ per $+cd$; acquiritur factum $+abcd$. Pariter ſi $-ab$ per $-cd$ multiplicandum ſit, eſt factum $+abcd$.

3tio. Coefficientes terminorum multiplicentur inter ſe more aliorum numerorum, eorumque factum præfigatur facto literali. e. g. Si multiplicari debeat $2ab$ per $4cd$; erit factum $= 8abcd$. Scilicet coefficientes 2 & 4 multiplicantur inter ſe, eorumque factum 8 præfigitur facto literali.

4to. Si litera quæpiam in utroque factore reperiatur; ea non debet in facto bis ſcribi, ſed ſemel duntaxat: at ejus exponentes, quorum unum in uno factore habet, alterum in altero, in unam ſummam colligantur, hæcque ſumma adſcribatur ipſi in facto pro exponente. e. g. Sit $a^2\, b$ multiplicandum per $a\, c$: litera a in facto ſemel duntaxat ſcribi debet; at pro exponente adſcribatur ei a dextris ſurſum verſus numerus 3, cum ejus exponens in multiplicando ſit 2, in multiplicatore autem ſit unitas ſubintellecta, horumque exponentium ſumma ſit $= 3$. Hinc $a^2\, b \times a\, c$ eſt $= a^3\, b\, c$. Eodem modo $a^2 \times a^3 = a^5$; $a\, b^2 \times a\, b = a^2\, b^3$; $a^m b \times a b = a^{m+1}\, b^2$, & ſic porro.

5to. Poſtquam ſinguli quantitatis *multiplicandæ* termini per ſingulos *multiplicatoris* terminos multiplicati fuerint; facta particularia juxta leges additionis (17) colligantur in unam ſummam: ſumma hæc erit ipſum totale *factum*. e. g.

Sit *Multiplicand.*	$a + 2b - c$
Multiplicat.	$a - 2b$
Erunt *facta*	$a^2 + 2ab - ac$
partialia.	$- 2ab - 4b^2 + 2bc$
Factum totale	$a^2 - ac - 4b^2 + 2bc$

Scilicet $a \times a$ eſt (per reg. 4.) $= a^2$, quod proinde infra lineam ſcribatur. Deinde $+ 2b \times + a$ (per reg. 2.) eſt $= + 2ab$. Denique $- c \times + a$ eſt (per reg. 4.) $= - a\, c$. Conſequenter totum *multiplicandum* per primum multiplicatoris terminum, ſeu per a multiplicando, acquiritur factum partiale, in prima infra lineam ſerie ſcribendum, $= a^2 + 2\, a\, b - a\, c$.

Per alterum deinde multiplicatoris terminum, ſeu per $- 2\, b$ multiplicetur totus multiplicandus. Ac imprimis $a \times - 2\, b$ eſt $= - 2\, a\, b$. Deinde $+ 2\, b \times - 2 b = - 4\, b^2$, Denique $- c \times - 2b + 2\, b\, c$. Atque adeo alterum partiale factum, in ſecunda infra lineam ſerie ſcribendum, eſt $= - 2\, a\, b - 4\, b^2 + 2\, b\, c$.

Denique si partialia hæc facta juxta regulas additionis (17) in unam summam cogantur; erit totale factum $= a^2 - ac - 4b^2 + 2bc$.

22. DEMONSTRAT. Regula *1ma* est hypothesis (Arith. 4.). Diximus enim num. 9. receptum in Algebra multiplicationis signum esse id quoque, si factores absque ullo signo interjecto conjungantur.

Regulæ *2dæ* pars *1ma*, quod nimirum *facto* negativum signum sit præfigendum, si factores contraria signa habeant, facile patet. Eo enim casu *factum* consurgit ex factore negativo toties sibi addito, quoties in altero factore positivo unitas continetur (Arith. 42, & 44): ergo eo casu factum negativa quantitas sit, oportet. Sic e. g. 2 floreni negativi (id est, debitum 2 florenorum) ter sumpti utique summam negativam efficiunt, scilicet debitum sex florenorum. Eo ipso autem patet, facto illi negativum signum esse præfigendum.

Ejusdem regulæ *2dæ* pars *altera*, quod nimirum facto positivum signum sit præfigendum, si factores eodem signo gaudeant, sic ostendo. Si uterque factor eodem signo gaudeat; vel uterque gaudet signo positivo, vel uterque negativo. Si uterque factor positivus sit; perspicuum est, factum quoque positivum esse debere: tunc enim *factum* consurgit ex uno factore positivo toties sibi addito, quoties unitas in altero factore positivo continetur (Arith. cit.). Sic 2 floreni ter accepti efficiunt utique summam positivam sex florenorum. Quodsi autem uterque factor negativus fuerit, hoc modo regula demonstrari potest. Sint factores negativi $-a$, & $-b$. Certum est per reg. 1. factum literale esse debere $a\,b$; dubium tantummodo est, debeatne esse $+ a\,b$, an $- a\,b$. At ajo, non posse esse $- a\,b$, & sic declaro. Concipiamus factorem $-a$ multiplicari jam per $a + b$, jam per $a - b$: nequit idem utroque casu totale factum prodire; nam in priore casu $-a$ toties debet in facto contineri, quoties unitas continetur in multiplicatore $a + b$, in altero autem casu idem $-a$ nonnisi toties continetur in facto, quoties unitas in factore $a - b$. Atqui si $-a \times -b$ esset $= - a\,b$; idem profecto totale factum prodiret, sive $-a$ per $a + b$, sive per $a - b$, multiplicetur. Nam in

priore

priore caſu (per *1mam* hujus regulæ partem jam demonſtratam) factum totale eſt $= - a^2 - a\,b$: in caſu altero (per eand. *1mam* reg. partem) primum factum partiale, ſeu $- a \times a$ eſt $= - a^2$; adeoque ſi præterea $- a \times - b$ eſſet $= - a\,b$, etiam in caſu altero factum totale eſſet $= - a^2 - a\,b$. Ergo $- a$ multiplicatum per $- b$, factum poſitivum $+ a\,b$ det, eſt neceſſe. Scilicet, quemadmodum negare negationem eſt *affirmare*, ita etiam negativam quantitatem per negativam multiplicare, eſt factum poſitivum producere.

Ratio regulæ *3tiæ* eſt. Si enim e. g. $2a$ ſit multiplicandum per $4b$, factum eſſe debere $= 8\,a\,b$, ſic demonſtro. Ponamus eſſe $2 = m$, & $4 = n$: erit imprimis (per reg. 1mam) $2a \times 4b = m\,n\,a\,b$; erit deinde $m\,n = 8$. Itaque in facto $m\,n\,a\,b$ loco $m\,n$ ſubſtitui poteſt 8, eritque $2a \times 4b = 8\,a\,b$. Eodem modo in quolibet alio caſu veritas regulæ oſtendi poteſt.

Regulæ *4tæ* ratio eſt. Si enim e. g. a^2 ſit multiplicandum per a^3, factum eſſe debere $= a^5$ ſic oſtendo. Eſt $a^2 = a\,a$, & $a^3 = a\,a\,a$ (15): ergo a^2 multiplicare per a^3 idem eſt, ac aa multiplicare per aaa. Atqui, ſi aa multiplicetur per aaa, eſt factum $= aaaaa$; ergo idem eſt factum etiam tunc, quum a^2 multiplicatur per a^3. Jam vero eſt $aaaaa = a^5$ (15); ergo ſi a^2 multiplicetur per a^3, factum eſt $= a^5$. Atque demonſtratio hæc cuilibet alteri caſui particulari æque accommodari poteſt.

Regula *5ta* demonſtratione non eget.

EXEMPLA *Multipl. Algebr.*

I.	*Multiplicand.*	$a + b$	*Factores*
	Multiplicat.	$a - b$	
	Facta partialia	$a^2 + a\,b$	
		$- a\,b - b^2$	
	Factum totale	$a^2 - b^2$	

II. *Multiplicand.* $a^m + bc^2$ ⎤ *Factores*
Multiplicat. $a - b^2$ ⎦

Factum totale $a^{m+1} + abc^2 - a^m b^2 - b^3 c^2$.

III. *Multiplicand.* $2a + 3b - c$ ⎤ *Factores*
Multiplicat. $3a + 2b + c$ ⎦

Factum tot. $6a^2 + 13ab - ac + 6b^2 + bc - c^2$.

Schol. 1. Si indicanda ſit duarum polynomiarum quantitatum multiplicatio mutua, quin eadem multiplicatio reapſe peragatur; quantitates illæ ſeorſim parentheſi includi ſolent, interjecto ipſis multiplicationis ſigno $\times$, aut puncto, vel etiam nullo ſigno interjecto. e. g. Si ſcribatur: $(a+b) \times (c-d)$, vel $(a+b).(c-d)$, vel $(a+b)(c-d)$; indicatur, quantitatem polynomiam $a + b$ multiplicari per $c - d$. Similiter e. g. $(M + m)$ X ſignificat, quantitatem polynomiam $M + m$ multiplicari per X.

Schol. 2. *Examen* rite peractæ multiplicationis ope diviſionis docebitur *Cap. ſequ.*

CAPUT TERTIUM.

De Diviſione Algebraica

23. THEOREMA I. *Si uterque terminus, tam dividendus, quam diviſor, fuerit poſitivus; quotus quoque poſitivus ſit, oportet. Pariter poſitivus eſt quotus, ſi tam dividendus terminus, quam etiam diviſor fuerit negativus.*

DEMONSTR. *1mæ partis.* In legitima diviſione, ſi diviſor ducatur in quotum, factum inde enaſcens debet eſſe æquale dividendo (*Arith.* 55.): ſed ſi tunc: quum tam terminus dividendus, quam etiam diviſor eſt poſitivus, quotus eſſet negativus; is quotus in diviſorem ductus non eſſet æqualis dividendo, ſeu non redderet dividendum: quotus enim negativus in poſitivum diviſoviſorem ductus dat factum negativum, non poſitivum (21. reg. 2.); ergo ſi uterque terminus (ſcilicet tam dividendus, quam diviſor) poſitivus fuerit, quotus nequit eſſe negativus, ac proinde poſitivus ſit, oportet.

Demonstr. 2*dæ partis.* Nam quotus in diviſorem ductus reſtituere debet dividendum, uti nunc dictum eſt: atqui, ſi in dicto caſu quotus eſſet negativus, is in diviſorem pariter negativum ductus non reſtitueret dividendum negativum, duo enim factores negativi dant factum poſitivum, non negativum (21. reg. 2.); ergo, ſi tam diviſor, quam dividendus fuerit negativus, quotus enaſcens poſitivus ſit, oportet.

24. Coroll. Ergo generatim, ſi diviſor & dividendus eodem ſigno gaudeat, ſive poſitivo, ſive negativo; quoto ex diviſione enaſcenti ſignum + eſt præfigendum.

25. THEOREMA II. *Si quantitas negativa per quantitatem poſitivam, aut poſitiva per negativam dividatur, quotus eſt negativus.*

Demonstr. Quotus enim poſitivus in diviſorem ductus in neutro caſu reſtitueret dividendum, ut conſideranti clara eſt.

26. Coroll. Igitur generatim, ſi diviſor & dividendus contrariis ſignis afficiantur; quoto ex diviſione enaſcenti ſignum — eſt præfigendum.

27. PROBLEMA IV. *Quantitatem algebraicam monomiam per aliam monomiam (ſiquidem diviſio poſſibilis ſit) dividere.*

Resolut. Diſpiciatur, num totus diviſor contineatur in dividendo tanquam unus factorum: & ſiquidem contineri deprehendatur; poſſibilis eſt diviſio actualis. e. g. Sit dividendus ab, diviſor a. Video diviſorem hunc in ab totum contineri tanquam unum factorum; nam quantitas ab conſtat ex a & b tanquam factoribus, cum nihil aliud ſit ab, quam a multiplicatum per b: concludo itaque poſſibilem eſſe hoc in caſu diviſionem actualem. His autem legibus peragenda eſt id genus diviſio. 1*mo.* Videatur, quisnam ſit alter ille factor, qui præter diviſorem in dividendo continetur: atque alter ille factor erit quotus quæſitus. e. g.

Sit dividendus $a\,b$, divisor a. Quoniam in $a\,b$ præter divisorem a alter factor b continetur; ex hac divisione enascens quotus est b. Ratio est: nam si aliqua quantitas constet duobus quibusdam factoribus; in ea quantitate toties continetur unus factor, quot unitates alter factor in se continet (Arith. 44.): consequenter a in $a\,b$ continetur per b; hoc est, a in $a\,b$ toties continetur, quot unitates continentur in b: adeoque si ab dividatur per a, quotus est b. Pariter si $a\,b\,c$ dividendum sit per a, quotus est $b\,c$: possum enim terminum $a\,b\,c$ in duos factores a & $b\,c$ resolvere; hinc si is terminus dividatur per a, quotus erit alter factor $b\,c$.

2do. Coefficiens dividendi dividatur per coefficientem divisoris. e. g. Si $8ab$ dividi debeat per $4a$, quotus est $2b$. Consideranti enim facile patet, hac ratione acquiri alterum illum factorem, qui in dividendo præter divisorem continetur, quemve ipsum quæsitum quotum esse, paullo superius in reg. 1ma vidimus. Sic $8a\,b$ non aliud utique est, quam divisor $4a$ per $2b$ multiplicatus. Quodsi autem coefficiens dividendi nequeat exacte dividi per coefficientem divisoris; indicetur tantummodo divisio, coefficientem divisoris scribendo infra coefficientem dividendi lineol. interjecta. e. g. Si $2\,ab$ dividi debeat per $3a$, quotus est $\frac{2}{3}\,b$.

3tio. Generatim, si quas litteras communes habeant divisor & dividendus; eæ in quoto semel duntaxat scribantur: at id genus litera in quoto alium jam exponentem habebit, ac habuerit in divisore, vel dividendo: scilicet is exponens, quem ejusmodi litera in divisore habet, subtrahatur ab eo exponente, quem habet in dividendo, atque residuum ex hac subtractione resultans adscribatur ipsi pro novo exponente in quoto. e. g. Si $a^3\,b$ dividi debet per a^2; quotus est $a\,b$. Ratio est; nam $a^3\,b$ est $= aaab$, & $a^2 = aa$ (15); jam vero si $aaab$ dividi debeat per aa, quotus (per reg. 1.) est $a\,b$, quippe quantitas $aaab$ præter divisorem aa continet in se factorem alterum ab: ergo etiam, si $a^3\,b$ dividatur per a^2; quotus est $a\,b$. Hoc est, litera a, quæ communis est tam divisori, quam dividendo, semel duntaxat ponitur in quoto; at novum habet exponentem,

tem, ſcilicet unitatem (ſolitam ſubintelligi duntaxat, non expreſſe ſcribi) quæ eſt differentia enaſcens ex ſubtractione exponentis 2 ab exponente 3. Pariter ſi $a^m b$ per a^2 dividi debeat. quotus eſt $a^{m-2} b$. Quodſi autem ejusmodi litera eundem habeat exponentem in diviſore, & in dividendo; ea in quoto pro novo exponente acquiret zerum, ſi enim unus exponens ab altero ſibi æquali ſubtrahatur, reſiduum eſt utique zerus: porro omnis quantitas habens pro exponente zerum, eſt æqualis unitati, ut *ſequ. Sect.* demonſtrabitur; itaque tunc loco id genus literæ ſufficit in quoto ponere, aut ſubintelligere unitatem. e g. Si $a b$ dividatur per a; juxta regulam hanc quotus eſt $= a^0 b = 1b$, ſeu quoniam unitas in conſortio alterius factoris ſubintelligi duntaxat, non expreſſe ſcribi ſolet, eſt $= b$. Eodem modo ſi $a^2 b$ dividatur per a^2, quotus eſt b.

4to. Quod ad ſignum quoto præfigendum attinet, hæc generatim regula eſt præ oculis habenda: ſi diviſor, & dividendus eodem ſigno gaudeant, ſive poſitivo, ſive negativo; ſemper quotus eſt poſitivus, atque adeo ſignum $+$ ipſi præfigendum (24): quodſi autem diviſor & dividendus contraria ſigna habeant, quoto, utpote negativo, ſignum $-$ præfigi debet (26). Sic ſi $+ a b$ per b, vel $- a b$ per $- b$ dividatur; pro quoto obvenit $+ a$: at, ſi $- a b$ per $+ b$; vel $+ ab$ per $- b$ dividi debeat; quotus eſt $- a$.

Schol. Si in dividendo non contineatur totus diviſor, tanquam unus ex factoribus dividendi; non eſt tentanda diviſio, utpote impoſſibilis, ſed indicanda duntaxat, ducendo lineam transverſam infra dividendum, ſubſcribendoque diviſorem. Sic ſi dividendus ſit $a b$, diviſor $d c$; quotus hoc modo eſt exprimendus: $\frac{a b}{c d}$. Sæpe tamen evenit, ut, tametſi totus diviſor non contineatur in dividendo tanquam factor, aliquæ tamen literæ, una vel plures, communes ſint dividendo & diviſori, ut ſi dividendus ſit $a b$, diviſor $b c$: quo caſu in exprimendo quoto compendio eſt locus. e. g. In exemplo nunc memorato quotus eſt $\frac{a b}{b c}$; qui compen-

dio-

diosius exprimi potest hoc modo $\frac{a}{c}$. Scilicet communem utrique literam *b* penitus negligendo. At de hujusmodi compendiis *Cap. sequ.* in theoria fractionum erit agendi locus.

28. PROBLEMA V. *Quamcunque polynomiam quantitatem algebraicam per aliam dividere.*

Resolut. 1mo. Scribatur primum divisor; tum in eadem linea scribatur dividendus parenthesi inclusus. Deinde dispiciatur, in quonam dividendi termino contineatur totus divisoris primus terminus, tanquam unus factorum, & is dividendi terminus per primum divisoris terminum dividatur juxta regulas præc. n. 27. allatas; tum quotus scribatur post dividendum. Porro quotus iste multiplicetur per totum omnino divisorem, & factum ex hac multiplicatione enatum subtrahatur a quantitate dividenda. Quodsi ex hac subtractione nullum remaneat residuum, peracta est divisio tota. e. g.

Sit *Divisor*,	*Dividendus*,	erit *Quotus*.
$M + m$,	$(MX + mX)$	X.

Nam primus divisoris terminus M in primo dividendi termino M X continetur per X: itaque pro quoto scribo X. Hic quotus in totum divisorem ductus dat factum $= MX + mX$. Istud factum si a dividendo subtrahatur; nullum residuum manet pro ulteriore operatione: tota ergo jam divisio peracta est, ac proinde quotus est $= X$.

2do. Quodsi ex subtractione memorata remaneat quodpiam residuum; cum hoc residuo repetatur eadem, quæ prius, operatio. Scilicet dispiciatur, in quonam ejus residui termino contineatur totus divisoris terminus primus, tanquam factor, & is residui terminus per primum divisoris terminum dividatur juxta regulas n. 27. allatas; tum quotus cum suo signo scribatur post quotum priore operatione inventum. Porro novus iste quotus multiplicetur per totum omnino divisorem, & factum ex hac multiplicatione enatum subtrahatur a dicto residuo. Si ex hac quoque altera subtratractione quodpiam residuum maneat; eodem pacto continuetur operatio, dum nihil denique restet e dividendo. e. g.

Sit *Divisor*, *Dividendus*, erit *Quotus*.

$$a^2 - c^2 \;(\; a^4 + c^2 x^2 - a^2 c^2 - a^2 x^2 \;)\; a^2 - x^2.$$

Nam primus divisoris terminus a^2 in primo dividendi termino a^4 continetur per a^2 (27. reg. 3.); itaque a^2 scribatur pro quoto. Hic quotus in totum divisorem ductus dat factum $= a^4 - a^2 c^2$; quod factum si a dividendo subtrahatur, manet residuum $= + c^2 x^2 - a^2 x^2$. Cum residuo hoc repetatur eadem operatio. Scilicet video primum divisoris terminum a^2 in residui hujus termino $- a^2 x^2$ contineri tanquam factorem; qui terminus residui si per a^2 dividatur, quotus est $- x^2$ (27. *reg.* 3. & 4.). Scribatur ergo $- x^2$ pro novo quoto. Novus hic quotus in totum divisorem ductus dat factum $= - a^2 x^2 + c^2 x^2$; quod factum si ab eo residuo subtrahatur, nullum amplius manet residuum. Peracta ergo jam est tota divisio, acquisitusque quotus totalis $= a^2 - x^2$.

Schol. 1. Quemadmodum de numerica multiplicatione, divisioneque locuti sumus *Arith.* n. 56. ita etiam algebraicæ multiplicationis *examen* per divisionem, *examen* vero divisionis per multiplicationem obtinetur. Scilicet algebraica quoque multiplicatio tunc est legitima, si facto per unum factorem diviso, alter factor obveniat pro quoto; divisio autem tunc legitima est, si quotus in divisorem ductus restituat dividendum. Atque vel hinc elucet, per regulas superius allatas rite peragi divisionem algebraicam: si enim quotus per eas regulas obtentus in divisorem ducatur, semper restituit dividendum, ut periclitanti patebit.

Schol. 2. Si, dum per allatas regulas divisio algebraica tentatur, advertatur inter operandum, subtractione ejus facti, quod enascitur e quoto in divisorem ducto, nequaquam minui numerum terminorum in dividendo, sed potius augeri; id erit plerumque indicium, divisionem absque residuo peragi non posse. Quare indicedicetur duntaxat divisio, divisore infra dividendum interjecta linea subscripto.

EXEMPLA *Divisionis Algebr.*

	Divisor,	*Dividendus*,	*Quotus.*
I.	$a - b$	$(a^2 - b^2)$	$a + b$

II. *Divisor*, *Dividendus*, *Quotus.*

$2a + b^2\ (2a^{m+1} + a^m b^2 + 8abc^2 + 4b^3 c^2)\ a^m + 4bc^2.$

	Divisor,	*Dividendus*,	*Quotus.*
III.	$2a - b + c$	$\left[\begin{array}{l} 2a^2 + 3ab - ac \\ -2b^2 + 3bc - c^2 \end{array}\right]$	$a + 2b - c.$

CAPUT QUARTUM.

De Natura, & variis Transformationibus Fractionum.

29. *Fractio* est quantitas, quæ cujuspiam *totius* partes, unam, vel plures significat. e. g. Unus crucifer est fractio comparate ad grossum: quia significat unam tertiam grossi partem. Porro ad determinandum cujuspiam fractionis valorem opus est duabus quantitatibus, quarum alter *denominator* fractionis, alter ejusdem *numerator* vocatur. *Denominator* exprimit, in quotnam partes dividi concipiatur *totum* illud, de cujus fractione sermo est; *numerator* autem indicat, quotnam ejusmodi partes fractio contineat. Id est, *denominator* exprimit, cujusnam *speciei*, *denominationisque* sint partes illæ, quas fractio in se continet, an nempe sint tertiæ, vel quartæ, vel decimæ &c. partes *totius*; *numerator* autem indicat, quotnam ejusmodi partes fractio valeat. Solet autem denominator subscribi numeratori lineola interjecta, e. g. $\frac{2}{3}$ significat duas tertias cujuspiam *totius* partes.

30. THEOREMA III. *Si manente eodem denominatore crescat numerator; valor fractionis augetur: & quidem ea ratione augetur, qua ipse numerator, ita ut numeratore in duplum, aut triplum &c. crescente valor quoque fractionis in duplum, aut triplum &c. crescat. Ex adverso, si manente eodem denominatore numerator decrescat; valor fractionis imminuitur: & quidem eadem ratione imminuitur, qua ipse numerator, ita ut, si numerator duplo, aut triplo &c. minor evadat, ac prius fuerit, etiam valor fractionis duplo, aut triplo minor fiat.*

DEMONSTRAT. 1*mæ partis*. Quamdiu manet idem denominator, tamdiu perdurat eadem species, denominatioque partium illarum, quas fractio exprimit: ergo, si manente eodem denominatore crescat numerator, fractio jam plures ejusdem speciei partes continet, ac prius continuerit; & quidem ita, ut numeratore in duplum, aut triplum &c. crescente fractio jam duplo, aut triplo &c. plures ejusdem speciei partes contineat, ac prius continuerit. Atqui istud tantundem sane est, ac eadem prorsus ratione crescere valorem fractionis, qua numerator ejusdem crescit.

DEMONSTR. 2*dæ partis*. Si enim manente eodem denominatore numerator decrescat; fractio jam pauciores ejusdem speciei partes continet, quam continuerit prius: & quidem ita, ut si numerator duplo, aut triplo &c. minor evadat, fractio jam duplo, aut triplo &c. pauciores ejusdem speciei partes contineat, quam prius continuerit. Quod tantundum utique est, ac eadem prorsus ratione imminui valorem fractionis, qua numerator ejusdem imminuitur.

31. COROLL. Quodsi ergo duæ fractiones eundem habuerint denominatorem; ejus fractionis major est valor, cujus numerator fuerit major. e. g. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

32. THEOREMA IV. *Si manente eodem numeratore crescat denominator; valor fractionis imminuitur: & quidem eadem ratione imminuitur, qua ratione denominator crescit, ita ut denominatore in duplum, aut triplum &c. crescente valor fractionis duplo, aut triplo minor evadat. Ex adverso, si manente eodem numeratore*

decreſcat denominator; valor fractionis augetur: & quidem eadem ratione augetur, qua denominator decreſcit, ita ut ſi denominator duplo, aut triplo &c. minor evadat, ac prius fuerit, valor fractionis in duplum, aut triplum &c. creſcat.

Demonstr. 1*mæ partis.* Si manente eodem numeratore denominator creſcat; fractio totidem quidem partes ſui *totius* continet, quot prius; at ſingulas eo jam minores, quam prius, quo denominator ille magis creverit: ita ut denominatore in duplum, aut triplum &c. creſcente, quælibet earum partium, quas numerator ſignificat, jam duplo, aut triplo &c. minor ſit, ac prius fuerit. Sic quælibet $\frac{1}{4}$ pars totius eſt duplo minor, ac ſit quælibet $\frac{1}{2}$ pars; quælibet $\frac{1}{6}$ pars eſt triplo minor, ac ſit quælibet $\frac{1}{2}$ pars, & ſic porro. Eo ipſo autem manifeſtum ſane eſt; valorem fractionis decreſcere debere, ſi manente eodem numeratore denominator creſcat, & quidem eadem ratione debere decreſcere, qua denominator creſcit.

Demonstr. 2*dæ partis.* Si manente eodem numeratore denominator decreſcat; fractio totidem quidem partes ſui *totius* continet, quot prius; at eo jam majores ſingulas, quam prius, quo denominator ille magis decrevit: ita ut, ſi denominator duplo, aut tripolo &c. minor fiat, quælibet earum partium, quas numerator ſignificat, jam duplo, aut triplo &c. major evadat, ac prius fuerit. Sic quælibet $\frac{1}{2}$ pars eſt duplo major, ac ſit quælibet $\frac{1}{4}$ pars ejusdem *totius.* Eo ipſo autem clarum utique eſt, valorem fractionis creſcere, ſi manente eodem numeratore denominator decreſcat, & quidem eadem ratione creſcere, qua denominator decreſcit.

33. Coroll. Quodſi ergo duæ fractiones eundem habeant numeratorem; ejus fractionis major eſt valor, cujus denominator fuerit minor. e. g. $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$.

34. Si totum quodpiam in tres e. g. partes æquales, adeoque in meras partes *tertias* dividi concipiatur; utique tres id genus partes ſimul ſumptæ adæquant ipſum *totum* (*Arith.* 35.): ſimiliter, ſi totum quodcunque in meras *quartas* partes dividi concipiatur; quatuor

tuor id genus partes ſimul ſumptæ æquales ſunt ipſi toti, & ſic porro. Ergo generatim, ſi numerator fractionis ſit æqualis denominatori; id genus fractio eſt æqualis ipſi toti. Sic $\frac{3}{3}$ vel $\frac{4}{4}$ partes unius floreni adæquant ipſum florenum integrum. Porro id genus *totum*, cujus partes fractio exprimit, per modum *unius* conſideratur, ita ut, dum aliqua fractio dicitur eſſe æqualis, major, aut minor unitate, nomine *unitatis* intelligatur ipſum *totum*, cujus partes ea fractio repræſentat. Itaque fractio, cujus numerator eſt æqualis denominatori, eſt $= 1$. Hinc, quoniam manente eodem denominatore valor fractionis eo major, aut minor eſt, quo major, aut minor eſt numerator (32); clarum eſt, eam fractionem, cujus numerator major eſt denominatore, majorem eſſe unitate, eam vero eſſe unitate minorem, cujus numerator minor eſt denominatore. e. g. Eo ipſo, quod ſit $\frac{3}{3} = 1$ eſt $\frac{4}{3} > 1$, & $\frac{2}{3} < 1$.

35. Coroll. I. Fractio, quæ eſt æqualis, aut major unitate, vocatur fractio *impropria*; fractio autem *genuina* eſt, quæ minor eſt unitate: igitur fractio *impropria* eſt, cujus numerator eſt æqualis, aut major denominatore, *genuina* vero, cujus numerator eſt denominatore minor. e. g. $\frac{4}{3}$ eſt fractio *impropria*; at $\frac{2}{3}$ eſt *genuina*.

36. Coroll. II. Cum valor fractionis manente eodem denominatore ita creſcat, aut decreſcat, uti creſcit, aut decreſcit numerator; quemadmodum fractio tunc æqualis eſt unitati, quum numeratorem habet denominatori æqualem, ita tunc æquivalet duabus, tribus &c. unitatibus, quum ejus numerator eſt duplo, triplo &c. major denominatore. Hinc generatim valorem fractionis indicat quotus ille, qui enaſcitur numeratore per denominatorem diviſo. e. g. Fractio $\frac{8}{2}$ eſt $= 4$; quia ſi numerator 8 per denominatorem 2 dividatur, quotus eſt $= 4$: item $\frac{2}{3}$, ſeu duæ tertiæ ſunt ille ipſe quotus, qui prodit, ſi 2 per 3 dividatur. Atque hæc eſt ratio, cur eodem modo ſoleamus ſcribendo

exprimere e. g. & 2 *divisum per* 3, & *duas tertias*; scilicet utrumque hoc signo: $\frac{2}{3}$.

37. Coroll. III. Si divisor & dividendus iisdem signis gaudeant, quotus est *positivus* (24.); *negativus* autem, si divisor & dividendus contraria signa habeant sibi præfixa (26). Cum ergo quævis fractio sit ille ipse quotus, qui enascitur numeratore per denominatorem diviso; valor fractionis positivus est, si tam numerator, quam denominator iisdem signis, sive positivis, sive negativis afficiantur: negativus autem, si numerator, & denominator contraria signa habeant.

38. Coroll. IV. Quævis quantitas integra æquivalet ei fractioni impropriæ, cujus numerator sit eadem illa quantitas, denominator autem unitas. e. g. Est $3 = \frac{3}{1}$. Si enim numerator 3 per denominatorem 1 dividatur, quotus est $= 3$. Eodem modo patet esse $4 = \frac{4}{1}$

$$a = \frac{a}{1} \text{ \&c.}$$

39. THEOREMA V. *Si fractionis cujuspiam tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur; valor ejusdem non mutatur. Pariter non mutatur valor fractionis, si ejus tam numerator, quam denominator per idem dividatur.*

Demonstr. 1*mæ partis*. Multiplicetur e. g. per 2 tam numerator, quam denominator cujuspiam datæ fractionis. Si imprimis numerator per 2 multiplicetur; hac multiplicatione valor fractionis in duplum augetur (30): si deinde denominator per eundem numerum 2 multiplicetur, hac multiplicatione valor ejusdem fractionis duplo minor efficitur (32). Ergo quum tam numerator, quam denominator fractionis cujuspiam per eundem numerum 2 (vel per quemcunque alium) multiplicatur, tantundem augetur ejus valor ex una parte, quantum ex alia parte imminuitur. Eo ipso autem clarum est, non mutari valorem fractionis, si ejus tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur.

Demonstr. 2*dæ partis*. Dividatur e. g. per 2, tam numerator, quam denominator cujuspiam datæ fractionis.

nis. Si imprimis numerator per 2 dividatur; hac divisione valor fractionis duplo minor efficitur (30. *per 2dam partem theor.*): si deinde denominator per eundem numerum 2 dividatur; hac divisione valor ejusdem fractionis in duplum augetur (32 *per 2dam partem theor.*): ergo quum tam numerator, quam denominator fractionis cujuspiam per eundem numerum 2 (vel per quemcunque alium) dividitur, tantundem imminuitur ex una parte, quantum ex alia parte augetur. Eo ipso autem clarum est, non mutari valorem fractionis, si ejus tam numerator, quam denominator per idem dividatur.

40. Coroll. I. Quodsi ergo numerator fractionis per majorem quantitatem multiplicetur, quam denominator; valor fractionis ex una parte magis augetur, quam imminuatur ex parte altera: eo ergo casu valor ejusdem fractionis reapse augetur. Ex adverso, si numerator fractionis per minorem quantitatem multiplicetur, quam denominator; valor fractionis ex una parte minus augetur, quam imminuatur ex parte altera: consequenter valor ejusdem fractionis reapse imminuitur.

41. Coroll. II. Si numerator per majorem quantitatem dividitur, quam denominator; valor fractionis ex una parte magis imminuitur, quam augeatur ex parte altera: tunc ergo valor ejusdem fractionis reapse imminuitur. Ex adverso, si numerator per minorem quantitatem dividatur, quam denominator; valor fractionis ex una parte minus imminuitur, quam augeatur ex parte altera: consequenter valor ejusdem fractionis reapse augetur.

42. Duæ, aut plures fractiones, quæ eundem habent denominatorem, tametsi numeratores ipsarum diversi sint, inter se comparatæ vocantur *homogeneæ*, item *ejusdem denominatoris*. Sic *homogeneæ* fractiones sunt: $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{3}$; $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$ $\frac{bc}{dm}$ & $\frac{ef}{dm}$ &c.

Ex adverſo fractiones *heterogeneæ*, ſeu *diverſi denominatoris* ſunt, quæ non habent eundem denominatorem. *e. g.* $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ &c.

43. PROBLEMA VI. *Datas quotcunque fractiones heterogeneas reducere ad eundem communem denominatorem, ſeu convertere in homogeneas, quin prior earundem valor immutetur.*

Resolut. Sint e. g. tres hæ fractiones heterogeneæ $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ & $\frac{m}{o}$ reducendæ ad communem denominatorem. Imprimis omnes denominatores multiplicentur inter ſe: factum enaſcens $b\,d\,o$ erit communis denominator. Deinde cujuslibet fractionis numerator multiplicetur per omnes reliquarum fractionum denominatores, non tamen per proprium; tum facta enaſcentia ſcribantur pro novis numeratoribus. Sic in aſſumpto exemplo, primæ fractionis numerator a multiplicetur per denominatores d & o, & factum $a\,d\,o$ ſcribatur pro novo numeratore primæ fractionis. Similiter numerator c ducatur in denominatores b & o, factumque $b\,c\,o$ ſcribatur pro numeratore novo ſecundæ fractionis &c. Hoc pacto tres illæ fractiones heterogeneæ abibunt in has tres novas homogeneas: $\frac{a\,d\,o}{b\,d\,o}$, $\frac{b\,c\,o}{b\,d\,o}$, $\frac{b\,d\,m}{b\,d\,o}$; & tamen quælibet fractio priorem valorem ſuum accurate retinebit, quod ſic oſtendo. Quando denominatores omnes inter ſe multiplicati ſunt, & factum pro novo primæ fractionis denominatore ſcriptum eſt, reapſe prior primæ fractionis denominator per denominatores omnium reliquarum eſt multiplicatus: at etiam numerator ejusdem primæ fractionis multiplicatus eſt per denominatores omnium reliquarum, & factum iſthoc eſt pro novo numeratore ſcriptum: ergo prima fractio $\frac{a}{b}$ haud aliter abivit in novam $\frac{a\,d\,o}{b\,d\,o}$, quam quatenus tam numerator ipſius, quam etiam denominator per idem

idem eſt multiplicatus, nempe per $d\,o$. Atqui valor fractionis prorſus non mutatur, ſi ejus tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur (39.); ergo prima fractio abeundo in novam, prorſus ejusdem, ac prius, valoris manet. Simili ratione patet, neque ſecundæ, aut tertiæ fractionis valorem eſſe dicta operandi ratione immutatum.

Scholion. Compendii gratia, communis denominator ſemel duntaxat ſubſcribitur numeratoribus reductis. e. g. Fractiones modo reductæ ſic ſcribuntur:

$$\frac{a\,d\,o,\ b\,c\,o,\ b\,d\,m}{b\,d\,o.}$$

EXEMPLA *Hujusm. Reduction.*

I. *Reducend.* $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$,
Reduct. $\frac{5,\quad 6}{15.}$

II. *Reducend.* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$.
Reduct. $\frac{15,\ 20,\ 18}{30.}$

II. *Reducend.* $\frac{2a^m}{3c}$, $\frac{c^2 b}{2a^2}$
Reduct. $\frac{4a^{m+2},\quad 3c^3 b.}{6a^2 c.}$

44. PROBLEMA VII. *Invenire, utra ſit majoris valoris ex datis duabus heterogeneis fractionibus.*

Resolut. Datæ fractiones heterogeneæ reducantur ad eundem denominatorem (43): cujus major fuerit numerator, ea erit majoris valoris (31). Si autem idem fuerit utriusque numerator, idem erit utriusque valor. e. g. Si fractiones $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{5}$ reducantur ad eundem denominatorem; abeunt in has: $\frac{5}{15}$ & $\frac{6}{15}$. Eſt ergo poſterior priore major, ſeu eſt $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$.

45. PROBLEMA VIII. *Datam fractionem ad simpliciorem expressionem, seu ad minorem numeratorem, & denominatorem reducere, quin prior ejus fractionis valor immutetur.*

Resolut. Si per aliquam quantitatem exacte dividi possit tam numerator, quam denominator: per eam dividatur uterque. Hoc pacto termini fractionis imminuentur, & tamen prior ejusdem valor retinebitur (39). e. g. Fractionis $\frac{8}{12}$, tam numerator, quam denominator exacte dividi potest per 4; qua divisione peracta. fractio illa abit in hanc simpliciorem: $\frac{2}{3}$. quin prior ipsius valor immutetur. Quodsi termini fractionis per aliquam quantitatem unitate majorem (nam unitas nihil dividit) non possunt exacte dividi: id genus fractio ad simpliciorem expressionem reduci nequaquam potest. e. g. Fractio $\frac{4}{7}$ non potest reduci ad expressionem simpliciorem; cum nullus sit numerus, qui tam numeratorem, quam denominatorem ejus exacte dividat.

46. Coroll. Itaque si e. g. abc per ad dividi debeat; quotus (literam a utrique termino communem omittendo) est $= \frac{bc}{d}$. Quippe quotum ex ea divisione oriundum exprimit fractio $\frac{abc}{ad}$ (27. Schol.): quae fractio, si tam numerator abc, quam denominator ad dividatur per a, retento priore valore suo abit in hanc: $\frac{bc}{d}$. Item, si a^2bc^2 dividi debeat per abc^3; quotus (utrumque terminum per abc^2 dividendo est $= \frac{a}{c}$.

Schol. Divisor numeratori, & denominatori communis in literis facile perspicitur; at difficilius in numeris, praesertim paullo majoribus. Quare aliqua hanc in rem adjumenta subnectere non erit supervacuum. Scilicet 1) videatur, an non numerator exacte metiatur denominatorem: id enim si eveniat, fractionem ad simpliciorem expressionem reduces, per numeratorem dividenvidendo tam ſe ipſum, quam etiam denominatorem. e. g. $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. 2) Si tam numerator, quam denominator fuerint numeri pares; uterque per 2 dividi poterit. e. g. $\frac{16}{28} = \frac{8}{14}$; & quia video, in hac quoque reducta fractione tam numeratorem, quam etiam denominatorem eſſe numerum parem, adhuc continuari poterit per 2 diviſio, eritque demum $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$. 3) Si tam numerator, quam denominator in fine zeros habuerint; poterunt dividi per 10, vel 100 &c. delendo utrobique unum vel duos &c. zeros. e. g. $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. 4) Si tam numerator, quam denominator pro dextima nota habuerit numerum 5, aut alter numerum 5, alter zerum; ambo dividi poterunt per 5. e. g. $\frac{15}{55} = \frac{3}{11}$.

47. PROBLEMA IX. *Datam fractionem impropriam ad integra reducere.*

RESOLUT. Dividatur numerator per denominatorem: quotus exprimet datam fractionem ad integra reductam, vel ſine, vel cum aliqua genuina fractione remanente. Cujuslibet enim fractionis valorem indicat quotus ille, qui enaſcitur numeratore per denominatorem diviſo (36). e. g. $\frac{2a^2b}{a} = 2ab$; $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ &c.

48. PROBLEMA X. *Datam quantitatem integram convertere in fractionem dati denominatoris.*

RESOLUT. Data quantitas integra multiplicetur per datum denominatorem, & facto idem denominator ſubſcribatur. e. g. Si data quantitas integra ſit $= a$, datus denominator $= b$; quæſita fractio erit $= \frac{ab}{b}$. Nam fractio hæc eſt dati denominatoris b: porro eandem fractionem eſſe æqualem datæ quantitati integre a facile patet. Eſt enim imprimis quælibet integra quantitas $a = \frac{a}{1}$ (38): deinde tam numeratorem, quam denominatorem hujus fractionis multiplicando per datum

tum denominatorem b, acquiritur $\frac{ab}{b} = \frac{a}{1}$ (39): eſt ergo etiam $a = \frac{ab}{b}$. Eodem modo, ſi e. g. numerus 4 convertendus ſit in fractionem, cujus denominator ſit 3; multiplicetur 4 per 3, & facto 12 ſubſcribatur idem denominator 3; quæſita fractio erit $\frac{12}{3} = 4$.

49. PROBLEMA XI. *Cujuscunque datæ quantitatis fractionem quamcumque invenire. e. g. Invenire $\frac{2}{3}$ partes alicujus quantitatis.*

Resolut. Quantitas data multiplicetur per numeratorem fractionis, & factum dividatur per ejusdem fractionis denominatorem: quotus enaſcens erit ipſa fractio quæſita. Quærantur enim e. g. $\frac{2}{3}$ partes cujuscunque quantitatis a. Quantitas hæc multiplicata per 2, & ſimul diviſa per 3, æquivalet $\frac{2}{3}$ ſui partibus, ſeu eſt $\frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$, quod ſic declaro. $\frac{2a}{3}$ eſt $\frac{1}{3}$ pars quantitatis $2a$: ſi enim quæcunque quantitas per 3 dividatur, utique pro quoto obvenit $\frac{1}{3}$ pars ejusdem quantitatis. Jam vero $\frac{1}{3}$ pars quantitatis $2a$ efficit $\frac{2}{3}$ partes quantitatis a, cum $2a$ ſit duplum quantitatis a: ergo $\frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$. Quæ demonſtrandi ratio cuilibet alteri particulari caſui æque applicari poteſt.

50. Coroll. Quodſi ergo e. g. $\frac{3}{5}$ partes quærantur de numero 60; multiplicetur 60 per 3, & factum = 180 per 5 dividatur: quotus = 36, partes quæſitas exprimet.

51. PROBLEMA XII. *Invenire, quoties data unitatis fractio in quacunque data quantitate contineatur. e. g. Fractio $\frac{2}{3}$ quoties in numero 4 contineatur.*

Resolut. Datam quantitatem multiplica per denominatorem datæ fractionis, tum factum divide per ejusdem fractionis numeratorem: hoc pacto quotum quæſitum

ſitum obtinebis. Sic ſi quæratur, quoties $\frac{2}{3}$ in 4 contineantur; 4 multiplica per 3, & factum $=$ 12 divide per 2: quotus enaſcens $=$ 6, indicat, fractionem $\frac{2}{3}$ in numero 4 ſexies contineri.

DEMONSTR. Quæratur enim, quoties e. g. $\frac{2}{3}$ partes unitatis contineantur in quacunque data quantitate a. Quoniam $\frac{1}{3}$ pars unitatis in qualibet unitate *ter* continetur (34); ſi quantitas a per denominatorem 3 multiplicetur, factum enaſcens $3a$, indicat, quoties $\frac{1}{3}$ pars unitatis contineatur in quantitate a. Poſtquam autem deprehendi, numerum tertiarum unitatis partium in quantitate a contentarum eſſe $= 3a$; ut innoteſcat quotiesnam duæ tertiæ unitatis partes in eadem quantitate a contineantur, utique $3a$ per numeratorem 2 dividere debeo: ut adeo numerus $\frac{2}{3}$ partium unitatis in quantitate a contentarum ſit $= \frac{3a}{2}$. Hoc eſt, ſi quæratur quoties unitatis fractio $\frac{2}{3}$ contineatur in quacunque quantitate a; quæſitus quotus erit æqualis quantitati a multiplicatæ per fractionis denominatorem, & ſimul diviſæ per ejusdem numeratorem. Quæ demonſtrandi ratio cuilibet alteri particulari caſui æque applicari poteſt, ac proinde legitimam eſſe probl. *reſolutionem* generatim evincit.

52. PROBLEMA XIII. *Datam quamcunque quantitatem quacunque ſui fractione, e. g.* $\frac{1}{3}$ *ſui parte mulctare.*

RESOL. Datæ fractionis numeratorem a denominatore ſubtrahe, & per horum differentiam multiplica datam quantitatem; tum factum enaſcens divide per denominatorem ejusdem fractionis datæ. e. g. Si numerus 30 mulctandus ſit $\frac{2}{5}$ ſui partibus; imprimis ſubtrahe 2 a 5, & per differentiam $=$ 3 multiplica numerum 30, tum factum $=$ 90 divide per 5: quotus enaſcens $=$ 18 æquabitur numero 30 duabus quintis ſui partibus mulctato.

De-

Demonstr. Quoniam quæcunque data quantitas a eſt $= \frac{a}{1}$ (38) $= \frac{2a}{2} = \frac{3a}{3} = \frac{4a}{4}$ &c. (38); ſi ea quantitas 1) mulctanda ſit $\frac{1}{3}$ ſui parte, reſiduum erit $= \frac{2a}{3}$: ſi 2) mulctanda ſit $\frac{1}{4}$ ſui parte, reſiduum erit $= \frac{3a}{4}$: ſi 3) mulctari debeat $\frac{2}{5}$ ſui partibus, reſiduum eſt $= \frac{3a}{5}$ &c. Ex horum autem reſiduorum contemplatione clare ſane patet, tunc datam quantitatem aliqua ſui fractione mulctari, ſi multiplicetur per differentiam terminorum datæ fractionis, & per ejusdem fractionis denominatorem dividatur. Sic ſi quæcunque quantitas a mulctanda ſit $\frac{1}{3}$ ſui parte, reſiduum, uti diximus, eſt $= \frac{2a}{3}$: jam vero prorſus idem acquires, ſi datæ fractionis $\frac{1}{3}$, numeratorem a denominatore ſubtrahas, & per differentiam $= 2$ multiplices quantitatem a, tum factum $2a$ per ejusdem fractionis datæ denominatorem 3, dividas.

53. Coroll. Igitur datam quantitatem data ſui fractione mulctare tantundem eſt, ac eam quantitatem multiplicare per aliam novam fractionem, cujus novæ fractionis numerator ſit ipſa differentia terminorum datæ fractionis, denominator autem idem ſit cum denominatore ejusdem datæ fractionis. Sic ſi quantitas a mulctanda ſit $\frac{1}{3}$ ſui parte; re ipſa quantitas illa multiplicari debet per $\frac{2}{3}$: quo pacto acquiretur quantitas $\frac{2a}{4}$ æqualis quantitati a, $\frac{1}{3}$ ſui parte mulctatæ.

CAPUT

CAPUT QUINTUM.

De Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Divisione Fractionum.

54. PROBLEMA XIV. *Datas quotcunque fractiones addere.*

Resolut. Si fractiones ſunt homogeneæ; numeratores earum in unam ſummam addantur, tum ſummæ huic communis denominator ſubſcribatur. Si autem fractiones fuerint heterogeneæ; convertantur primum in homogeneas, ac deinde numeratores ipſarum, ut modo dictum eſt, in unam colligantur ſummam, huicque ſummæ communis denominator ſubſcribatur. e. g. Si addendæ ſint hæ fractiones homogeneæ: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$: numeratoribus in unam ſummam collectis erit ſumma $= \frac{7}{8}$. Si autem addi debeant hæ e. g. fractiones heterogeneæ: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$; convertantur primum in has homogeneas: $\frac{12.\ 16.\ 6}{24}$ (43), tum numeratores in unam colligantur ſummam: erit ſumma fractionum $= \frac{34}{24}$.

Demonstr. Fractiones heterogeneas e. g. $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ in unam ſummam addi non poſſe clarum eſt: nam ea ſumma neque partes dimidias, neque tertias denotaret. Itaque fractiones addendæ, ſi heterogeneæ ſunt, primum in homogeneas convertantur, oportet. Porro homogenearum fractionum ſummam acquiri, ſi numeratoribus in unam ſummam collectis communis denominator ſubſcribatur, perſpicuum eſt: quis enim non videt, e. g. unam quartam, & duas quartas efficere ſummam trium quartarum? Scilicet denominatores non indicant numerum partium, adeoque ſummam neque augent, neque imminuunt, ſed tantum indicant, cujusnam ſpeciei partes ſint illæ, quarum numerum numerator exprimit.

Schol.

Schol. Si fractiones integris quantitatibus adjunctæ fuerint; primum addantur integræ quantitates methodo consueta, tum fractiones methodo nunc descripta in unam colligantur summam. Quodsi summa fractionum fuerit fractio impropria; ea reducatur ad integra, numerusque integer reductione acquisitus summæ integrorum adjiciatur. e..g. Debeant in unam summam addi hi numeri: $2\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Imprimis summa integrorum est $= 7$. Deinde fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ convertantur in has homogeneas: $\frac{12,\ 16,\ 18}{24}$; quarum summa est $= \frac{46}{24}$. Hæc summa, si ad integra reducatur (47), est $= 1\,\frac{22}{24}$; ex qua si integra unitas transferatur ad summam integrorum superius inventam, seu ad 7, summa totalis erit $= 8\frac{22}{24}$. At hæc fractio, utrumque ejus terminum per 2 dividendo, ad minores terminos reduci potest, id est, converti in hanc, $\frac{11}{12}$ (45): itaque totalis summa demum acquiritur $= 8\frac{11}{12}$.

55. PROBLEMA XV. *Datam fractionem ab altera subtrahere..*

Resolut. Reductis fractionibus ad eundem denominatorem, fractionis subtrahendæ numerator methodo consueta subtrahatur a numeratore alterius: residuo subscribatur communis denominator, hæcque nova fractio erit quæsidum residuum. e. g. Si $\frac{1}{4}$ subtrahi debeat a $\frac{2}{3}$; fractiones istæ convertantur in has homogeneas $\frac{8}{12}$, $\frac{3}{12}$. Porro subtrahendo numeratorem 3 a numeratore 8, residuus numerator est 5; cui si denominator communis subscribatur, acquiritur residuum quæsitum $= \frac{5}{12}$.

Schol. Examen additionis æque per subtractionem fit in fractionibus, ac in quantitatibus integris; examen vero subtractionis per additionem.

56. PROBLEMA XVI. *Datam fractionem per datum numerum integrum multiplicare, aut dividere.*

Reso-

Resolut. Si fractio per nnmerum integrum multiplicanda ſit; ſufficit ſolum numeratorem per integrum illum numerum multiplicare. e. g. $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$. Si autem fractio per numerum integrum dividenda ſit: ſolus denominator ejus fractionis per numerum illum integrum multiplicetur. e. g. $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12}$.

Demonstrat. 1*mæ partis.* Manente eodem denominatore valor fractionis ita creſcit, uti creſcit ejusdem numerator (30): ergo ſolum fractionis numeratorem per datum numerum integrum multiplicare tantundem eſt, ac fractionem per eundem numerum integrum multiplicare.

Demonstr. 2*dæ partis.* Manente eodem numeratore valor fractionis ea ratione decreſcit, qua creſcit ejusdem denominator; ita ut, ſi denominator evadat duplo, triplo &c. major, valor fractionis ex adverſo fiat duplo, triplo &c. minor (32): ergo ſolum fractionis denominatorem per datum numerum integrum multiplicare tantundem eſt, ac fractionem illam per eundem numerum integrum dividere.

57. PROBLEMA XVII. *Fractionem unam per alteram fractionem multiplicare.*

Resolut. Multiplicentur inter ſe numeratores datarum fractionum, & ſimiliter denominatores inter ſe; tum factum numeratorum ſcribatur pro novo numeratore; factum vero denominatorum pro novo denominatore: nova hæc fractio erit ipſum *factum* ex multiplicatione fractionum enaſcens. e g. Si $\frac{2}{3}$ multiplicari debeat per $\frac{3}{4}$; eſt *factum* $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Pariter; ſi $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ inter ſe multiplicentur; *factum* eſt $= \frac{1}{8}$.

Demonstr. Sit e. g. fractio $\frac{2}{3}$ multiplicanda per $\frac{3}{4}$. Multiplicare quamcumque quantitatem tantundem eſt, ac eandem toties ſumere, quot unitates in multiplicatore continentur (*Arith.* 41). Cum ergo in multiplicatore $\frac{3}{4}$, unitas ne ſemel quidem contineatur integra, ſed tantum ſecundum tres quartas ſui partes; fractionem $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$ multiplicare, eſt eandem ne ſemel

qui-

quidem ſumere integram, ſed ſumere tres duntaxat quartas ejus partes. Porro ſi tres quartas cujuscunque quantitatis partes ſumere vis; eas obtinebis, quantitatem illam primum per 3 multiplicando, deinde dividendo per 4 (49). Ergo etiam fractionis $\frac{2}{3}$ tres quartas partes acquires, ac proinde eam per $\frac{3}{4}$ multiplicabis, ſi eandem primum per diviſoris numeratorem 3 multiplicaveris, deinde vero per ejusdem diviſoris denominatorem 4 diviſeris. Atqui fractio $\frac{2}{3}$ per 3 multiplicatur, ſi ejus numerator multiplicetur per 3; & eadem fractio per 4 dividitur, ſi ejus denominator per 4 multiplicetur (56). Ergo $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ eſt $= \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$. Hoc eſt, aſſumptarum fractionum multiplicatio rite peragitur, ſi numeratores inter ſe, & pariter denominatores inter ſe multiplicentur, tum factum numeratorum pro novo numeratore, factum vero denominatorum pro novo denominatore ſumatur. Quæ demonſtrandi ratio cum alteri cuilibet particulari caſui æque applicari queat; veritas *reſolutionis* generatim patet.

58. Coroll. I. Igitur factum, quod enaſcitur ex multiplicatione fractionis unius per alteram, eſt fractio fractionis multiplicandæ, & quidem determinate ejusmodi fractio, quæ per multiplicatorem exprimitur. e. g. Factum $\frac{6}{12}$, ſeu $\frac{1}{2}$, quod enaſcitur ex multiplicatione fractionis $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, eſt fractio fractionis multiplicandæ $\frac{2}{3}$, & quidem ejusmodi fractio, quam multiplicator $\frac{3}{4}$ exprimit. Hoc eſt, factum $\frac{1}{2}$ æquivalet tribus quartis partibus fractionis $\frac{2}{3}$: nam in eo facto fractio multiplicanda ne ſemel quidem poteſt integra contineri, ſed ſecundum tres duntaxat quartas ſui partes, uti ſuperius demonſtravimus. Unde patet generatim methodus inveniendi quamcunque fractionem cujuscunque datæ fractionis. e. g. Si cupis tres quartas partes obtinere fractionis $\frac{1}{3}$; multiplica $\frac{1}{3}$ per $\frac{3}{4}$: factum enaſcens $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ erit æquale tribus tertiis partibus fractionis $\frac{1}{3}$. Pariter, ſi cupis unam dimidiam partem fractionis $\frac{3}{2}$ obti-

obtinere; $\frac{1}{2}$ multiplica per $\frac{1}{2}$: factum $= \frac{1}{4}$ æquivalebit uni dimidiæ parti fractionis $\frac{1}{2}$ &c.

59. Coroll. II. Quoniam tunc, quum una fractio genuina per alteram multiplicatur, fractio multiplicanda in facto ne ſemel quidem debet integra contineri; mirum videri non debet, quod factum ex multiplicatione duarum id genus fractionum enaſcens ſemper minus ſit fractione multiplicanda.

60. PROBLEMA XVIII. *Fractionem unam per alteram fractionem dividere.*

Sesolut. Diviſor invertatur, ita ut ejus denominator abeat in numeratorem, & viciſſim; poſt inverſionem factam numeratores inter ſe, & denominatores itidem inter ſe multiplicentur: denique factum numeratorum ſumatur pro novo numeratore, factum autem denominatorum pro novo denominatore. Nova fractio erit quotus quæſitus. e. g. Sit $\frac{2}{3}$ fractio dividenda per $\frac{3}{4}$. Invertatur diviſor, ut abeat in hanc fractionem: $\frac{4}{3}$; tum fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{3}$ multiplicentur inter ſe, ſcilicet numeratoribus 2 & 4 inter ſe, & denominatoribus 3 & 3 itidem inter ſe multiplicatis. Factum $= \frac{8}{9}$ erit quotus quæſitus.

Demonstr. Sit e. g. fractio $\frac{2}{3}$ dividenda per $\frac{2}{6}$. Diviſionem hanc inſtituere tantundem eſt, ac inquirere in quotum, qui indicet, quotiesnam fractio $\frac{2}{6}$ in $\frac{2}{3}$ contineatur (*Arith.* 50.). Jam vero, ſi inveniendum ſit, quoties data fractio in quacunque data quantitate contineatur, hæc quantitas data multiplicari debet per denominatorem datæ fractionis, tum factum dividi per ejusdem fractionis numeratorem (51). Ergo etiam ut inveniatur quotus, qui indicet, quotiesnam fractio $\frac{2}{6}$ in $\frac{2}{3}$ contineatur, fractio $\frac{2}{3}$ multiplicari debet per alterius denominatorem 6, tum per ejusdem numeratorem 2 dividi. Atqui tunc, quum fractio $\frac{2}{6}$ invertitur & numeratores inter ſe, pariterque denominatores inter ſe multiplicantur, reapſe fractio $\frac{2}{3}$ per 6 multiplicatur, & factum enascens per 2 dividitur (56): hoc ergo pacto assumpta divisio rite peragitur. Quæ demonstrandi ratio cuilibet alteri particulari casui æque applicari potest.

61. Coroll, Sæpe una fractio in altera bis, ter, aut etiam sæpius continetur: e. g. $\frac{1}{8}$ in $\frac{1}{2}$ continetur quater. Cum ergo quotus ope divisionis quæri solitus indicare debeat, quotiesnam divisor in dividendo contineatur; mirum videri non debet, si ex divisione fractionum sæpe prodeat quotus: qui sit numerus integer, aut fractio fractione dividenda major. Sic si $\frac{1}{2}$ dividi debeat per $\frac{1}{8}$; quotus est $= \frac{8}{2} = 4$.

Schol. 1. Si quæcunque quantitas integra a per datam fractionem dividi debeat; quantitas illa convertatur in fractionem sibi æquivalentem, seu in hanc, $\frac{a}{1}$; tum hæc fractio per aliam illam datam consueta fractionum methodo superius exposita dividatur. e. g. Si quantitas a dividi debeat per $\frac{3}{2}$, quotus est $= \frac{2a}{3}$. Numerus 3 per $\frac{1}{2}$ divisus, dat quotum $\frac{3 \times 2}{1 \times 1} = 6$ &c.

Schol. 2. *Examen* multiplicationis per divisionem; divisionis per multiplicationem fit in fractis æque, ac in numeris integris.

Schol. 3. Demum his, duo adhuc theoremata adjicere juvat, quorum usus est in iis, quæ in Physica nostra de Catoptrica, & Dioptrica tradimus.

62. THEOREMA VI. *Ponamus tam numeratorem, quam etiam denominatorem cujuspiam fractionis augeri. 1) Si augmentum numeratoris tanta quantitas fuerit comparate ad numeratorem, quantum fuerit augmentum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator dimidia sui parte, & etiam denominator dimidia sui parte augeatur; prior fractionis valor non mutatur. 2) Si augmentum numeratoris majus fuerit comparate ad numeratorem, ac sit augmentum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator dimidia*

midia ſui parte, denominator autem nonniſi tertia ſui parte augeatur; valor fractionis creſcit. 3) *Si augmentum numeratoris minus fuerit comparate ad numeratorem, ac ſit augmentum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. ſi numerator tertia ſui parte, denominator autem dimidia ſui parte augeatur; valor fractionis decreſcit.*

Demonstr. Nam in 1*mo caſu* reapſe tam numerator, quam denominator per idem multiplicatur. e. g. Si tam numerator dimidia ſui parte, quam etiam denominator dimidia ſui parte augeatur; reapſe uterque per $1 + \frac{1}{2}$ multiplicatur. Si enim quamcunque quantitatem a per $1 + \frac{1}{2}$ multiplices; enaſcitur factum $= a + \frac{1}{2} a$: hoc eſt, quantitas a una dimidia ſui parte augetur. Jam vero ſi tam numerator, quam etiam denominator per idem multiplicetur; valor fractionis non mutatur (39).

In 2*do caſu* per majorem numerum multiplicatur numerator, quam denominator: e. g. ſi numerator dimidia ſui parte, denominator autem tertia duntaxat ſui parte augeatur; illa per $1 + \frac{1}{2}$, iſte vero per $1 + \frac{1}{3}$ duntaxat multiplicatur. Itaque in 2*do caſu* per majorem quantitatem multiplicatur numerator, quam denominator: conſequenter valor fractionis creſcit (40).

In 3*tio caſu* per minorem quantitatem multiplicatur numerator, quam denominator. Si enim numerator e. g. $\frac{1}{3}$ ſui parte, denominator autem $\frac{1}{2}$ ſui parte augeatur; numerator per $1 + \frac{1}{3}$, denominator autem per $1 + \frac{1}{2}$ multiplicatur. Hoc ergo caſu valor fractionis decreſcat, oportet (40).

63. Coroll. Aſſumamus fractionem $\frac{2}{4}$. 1) Si numeratorem hujus fractionis unitate, denominatorem autem numero 2 augeas, ut ea fractio abeat in hanc: $\frac{3}{6}$; prior ejusdem valor non mutatur. Quemadmodum enim 1 eſt dimidia pars numeratoris 2, ita 2 eſt dimidia pars denominatoris 4. 2) Si tam numeratorem, quam denominatorem aſſumptæ fractionis $\frac{2}{4}$ augeas unitate,

ut abeat in hanc: $\frac{3}{5}$; valorem ejus fractionis auges. Nam 1 est major quantitas comparate ad numeratorem 2, quam sit comparate ad denominatorem 4; est enim illius dimidia pars, hujus autem nonnisi pars quarta. 3) Si fractionis $\frac{2}{4}$ numeratorem unitate, denominatorem autem numero 3 augeas, ut ea fractio abeat in hanc: $\frac{3}{7}$; valorem ejusdem imminuis. Nam 1 est minor quantitas comparate ad numeratorem 2, ac sit 3 comparate ad denominatorem 4.

Schol. Esse imprimis $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$, esse deinde $\frac{3}{5} > \frac{2}{4}$, denique esse $\frac{3}{7} < \frac{2}{4}$ facile deprehendes ea etiam methodo, quam n. 44. tradidimus.

64. THEOREMA VII. *Ponamus tam numeratorem, quam etiam denominatorem cujuspiam fractionis imminui.* 1) *Si decrementum numeratoris tanta quantitas fuerit comparate ad eundem numeratorem, quantum fuerit decrementum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si & numerator dimidia sui parte, & etiam denominator dimidia sui parte mulctetur; prior fractionis valor non mutatur.* 2) *Si decrementum numeratoris majus fuerit comparate ad numeratorem, ac sit decrementum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator dimidia sui parte, denominator autem nonnisi tertia sui parte mulctetur; valor fractionis decrescit.* 3) *Si decrementum numeratoris minus fuerit comparate ad numeratorem, ac sit decrementum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator tertia sui parte, denominator autem dimidia sui parte mulctetur; valor fractionis crescit.*

Demonstr. Nam in *primo casu* reapse non aliud fit, quam quod tam numerator, quam denominator per eandem fractionem multiplicetur. Si enim uterque e. g. $\frac{1}{3}$ sui parte mulctetur; uterque re ipsa per fractionem $\frac{2}{3}$ multiplicatur, ut ex num. 53. intelligere licet. Valor ergo fractionis hoc in casu nequit immutari (39).

In 2*do casu* pariter non aliud fit reapse, quam quod & numerator, & denominator per aliquam fractionem multiplicetur; at numerator per minorem, denominator per majorem. Si enim ponamus numeratorem e. g. dimi-

dimidia ſui parte, denominatorem autem tertia duntaxat ſui parte mulctari; numerator per $\frac{1}{2}$, denominator autem per $\frac{2}{3}$ multiplicatur (53). Hoc ergo caſu valor fractionis imminuitur (40).

In 3*tio caſu* rurſus tam numerator, quam denominator per aliquam fractionem multiplicatur; at numerator per majorem, denominator per minorem. e. g. Si numerator $\frac{1}{3}$ ſui parte, denominator autem dimidia ſui parte mulctetur; reapſe numerator per $\frac{2}{3}$, denominator autem per $\frac{1}{2}$ multiplicatur (53). Hoc ergo caſu valor fractionis reapſe augetur (40).

SECTIO SECUNDA.

DE QUANTITATUM POTENTIIS, ET RADICIBUS.

CAPUT PRIMUM.

De Quantitatum Radicibus, & Potentiis generatim.

65. *Factum*, quod oritur, ſi quantitas quæpiam ſemel, aut ſæpius per ſe ipſam multiplicetur, vocatur *Potentia*, vel *Dignitas*. Sic a^2 eſt potentia quantitatis a: item $16 = 4 \times 4$ eſt potentia numeri 4. &c. Ipſa multiplicatio quantitatis per ſe ipſam, vocatur ejusdem quantitatis *elevatio ad potentiam.*

66. Si quantitas ſemel duntaxat multiplicetur per ſe ipſam, dicitur elevari ad 2*dam potentiam*, ſeu ad *quadratum*; ſi bis per ſe ipſam multiplicetur, elevatur ad *potentiam* 3*tiam*, ſeu ad *cubum*; ſi ter, ad 4*tam*; & ſic porro. Ipſa quantitas, quæ elevatur, aut elevari poteſt ad quadratum, cubum, vel aliam quamcunque altiorem potentiam, *Radix*, vel etiam *Potentia prima* nuncupatur. e. g. Quantitas *a* eſt *radix*, cujus 2da po-

potentia, seu quadratum est a^2, potentia tertia, seu cubus est a^3, quarta potentia a^4, & sic porro. Si enim quantitatem a semel per se ipsam multiplices, enascitur factum $= a^2$: si eandem bis multiplices per se ipsam, id est, si, postquam ex prima multiplicatione acquisivisti factum a^2, hoc factum rursus per radicem a multiplices, acquiris factum $= a^3$: & sic porro.

67. Coroll. I. Quoniam 2da cujuscunque radicis a potentia est $= a^2$, 3tia $= a^3$, quarta $= a^4$, & sic porro; clarum est, per exponentem quantitatis accurate indicari gradum potentiæ illius, ad quam ea quantitas elevata sit. Hinc generatim a^m est ea quantitatis a potentia, quam exprimit exponens numericus tot unitatibus constans, quot unitates m in se continet e. g. Si ponatur esse $m = 3$; a^m est potentia tertia, seu cubus quantitatis a.

68. Coroll. II. Si fractio ad aliquam potentiam evehenda sit; ejus numerator per se ipsum, & denominator itidem per se ipsum multiplicari debet. e. g. Quadratum fractionis $\frac{2}{3}$ est $= \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$. Quævis enim quantitas tunc elevatur ad aliquam potentiam, quum per se ipsam multiplicatur (65): fractio autem tunc multiplicatur per se ipsam, quum ejus tam numerator per se ipsum, quam etiam denominator per se ipsum multiplicatur. Sic $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ est utique $= \frac{2 \times 2}{3 \times 3}$ (57).

69. Radix comparate ad quadratum suum dicitur *radix quadrata*; comparate ad cubum suum dicitur *radix cubica*; comparate ad quartam potentiam *radix quarta*, & sic porro. Sic a comparate ad a^2 est radix quadrata; comparate ad a^3 est radix cubica: pariter 2 comparate ad 4 est radix quadrata, nam $2 \times 2 = 4$; comparate ad 8 est radix cubica, nam $2 \times 2 \times 2 = 8$.

70. Signum radicis quadratæ est $\sqrt[2]{}$, vel $\sqrt{}$; radicis cubicæ est $\sqrt[3]{}$, radicis quartæ est $\sqrt[4]{}$, radicis denique inde-

indeterminatæ eſt $\sqrt[n]{\ }$. Quantitas ſigno radicali inſcripta, uti eſt numerus 3 in ſigno radicis cubicæ, vocatur *exponens radicis* : ea vero quantitas, cui tale ſignum præfixum eſt, *quantitas radicalis* appellatur. e. g. $\sqrt[3]{ab^2}$ eſt quantitas radicalis, ſignificatque radicem cubicam quantitatis ab^2 inſtar cubi conſideratæ. Quando deſignanda eſt radix cujuspiam complexæ quantitatis; id genus quantitas plerumque parentheſi includitur, tum præfigitur ipſi ſignum radicale. e. g. Radix cubica de quantitate complexa $a+b$ plerumque hoc modo ſcribitur: $\sqrt[3]{\ }(a+b)$; interdum vero hoc modo: $\sqrt[3]{a+b}$. Ipſæ etiam potentiæ quantitatum complexarum ſæpe *indicantur* duntaxat, hoc nempe modo: $(a+b)^2$; hoc eſt, quadratum quantitatis complexæ $a+b$: vel etiam hoc modo: $\overline{a+b}^2$.

71. Radix alia dicitur rationalis, alia irrationalis, alia denique imaginaria. Radix *rationalis*, ſeu *vera* eſt, quæ numeris exacte exprimi poteſt. e. g. Numerus 3 eſt *vera* radix quadrata numeri 9. Radix *irrationalis*, ſeu *ſurda* vocatur illa, quæ non poteſt numeris exacte exprimi; licet in lineis geometricis dari queat. e. g. Videbimus ſuo loco, radicem quadratam numeri 8, ſeu $\sqrt{8}$ lineis exprimi poſſe, tametſi numeris exprimi nequeat: itaque $\sqrt{8}$ eſt radix ſurda. Denique radix *imaginaria*, ſeu *impoſſibilis* illa eſt, quæ nec lineis, nec numeris exprimi poteſt. e. g; $\sqrt{-4}$ eſt radix imaginaria, ſeu impoſſibilis. Quippe impoſſibile eſt, ut ulla radix per ſe ipſam ſemel multiplicata det quadratum $= -4$. Vel enim $+2$, vel -2 deberet eſſe radix illa: atqui neutra hæc radix dat quadratum $= -4$; nam & $+2 \times +2$, & -2×-2 eſt $= +4$ (27. *Reg.* 4*ta.*).

72. PROBLEMA XIX. *Datam potentiam monomiam ad aliam dati exponentis potentiam elevare. e. g. Quantitatem a^2 elevare ad cubum ſuum.*

Resolut. Exponens datæ potentiæ monomiæ multiplicetur per exponentem datum potentiæ quæſitæ:

 tum

tum factum scribatur pro novo exponente datæ potentiæ. e. g. Si a^2 elevari debeat ad cubum; exponens datæ potentiæ est $= 2$, exponens autem quæsitæ potentiæ, seu cubi est $= 3$: itaque 2 multiplicetur per 3, & factum $= 6$ adscribatur potentiæ a pro novo exponente: acquiretur quantitas a^6, quæ erit cubus datæ potentiæ a^2.

Demonstr. Quævis data potentia monomia repræsentari potest per a^m. Porro quadratum potentiæ a^m est $= a^m \times a^m$, cubus $= a^m \times a^m \times a^m$, & sic deinceps. Jam vero est $a^m \times a^m \times a^{2m}$; $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$, & sic porro (21. *Reg.* 4.): ergo si a^m ad 2dam potentiam elevari debeat, ejus exponens m per 2 multiplicari debet; si ad 3tiam, per 3; & sic deinceps. Hoc est, ejus exponens per datum quæsitæ potentiæ exponentem est multiplicandus.

73. Coroll. I. Si ergo quæcunque potentia a^m elevari debeat ad potentiam exponentis n; quæsita potentia erit $= a^{mn}$: si $a^{\frac{m}{n}}$ debeat elevari ad potentiam exponentis n; potentia quæsita erit $= a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

74. Coroll. II. Si data potentia monomia pluribus constet literis; cujuslibet literæ exponens multiplicandus est per datum quæsitæ potentiæ exponentem. e. g. Quantitas $a^m b^r$ ad quadratum elevata, est $= a^{2m} b^{2r}$: eadem quantitas elevata ad potentiam exponentis n, est $= a^{mn} b^{rn}$. Quippe quadratum ejus quantitatis est $= a^m b^r \times a^m b^r = a^{2m} b^{2r}$, cubus autem $= a^m b^r \times a^m b^r \times a^m b^r\ a^{3m} b^{3r}$. (21. *Reg.* 4.). Hoc est, ut data quantitas pluribus literis constans ad potentiam aliquam elevetur, per datum quæsitæ potentiæ exponentem singularum literarum exponentes multiplicari debent.

75 Coroll. III. Si quantitas algebraica monomia ad aliquam potentiam elevanda, habeat coefficientem numericum; is coefficiens pariter ad potentiam illam elevetur, est necesse. e. g. Quantitatis $2a^m$ quadratum est $= 4a^{2m}$, cubus $= 8a^{3m}$; scilicet etiam coefficientem 2 elevando ad quadratum, cubum. Nam $2a^m \times 2a^m$

est

est $= 4a^{2m}$, & $2a^m \times 2a^m \times 2a^m = 8a^{3m}$ (21. *Reg.* 3*tia*.

76. THEOREMA VIII. *Potentia habens pro exponente zerum eſt æqualis unitati.*

Demonstr. Omnis ejusmodi potentia repræſentari poteſt per a^0; eſſe vero $a^0 = 1$ ſic oſtendo. Si a^m dividatur per a^m, quotus eſt $= a^0$ (27. *Reg.* 3*tia*): atqui is quotus, qui ex hac diviſione enaſcitur, debet eſſe $= 1$, nam a^m in a^m ſemel continetur; eſt ergo $a^0 = 1$.

77. In libris Mathematicis occurrere ſolent quantitates algebraicæ habentes pro exponente quantitatem integram negativam, aut fractionem aliquam, jam poſitivam, jam negativam. Cujusmodi expreſſionum valores (quibus quidem expreſſionibus nos neque in hoc, neque in phyſicis opuſculis noſtris utemur) ſiquis noſſe deſiderat, ii ſic habent. I. Generatim $a^{\frac{m}{n}}$ eſt $= \sqrt[n]{a^m}$. Elevetur enim imprimis $\sqrt[n]{a^m}$ ad potentiam exponentis n, quæſita potentia utique erit $= a^m$: nam per $\sqrt[n]{a^m}$ non aliud ſignificatur, quam ea radix, quæ ſi elevaretur ad potentiam exponentis n, fieret $= a^m$. Elevetur deinde etiam $a^{\frac{m}{n}}$ ad eandem potentiam, ſcilicet exponentis n; quæſita potentia erit $= a^{\frac{mn}{n}}$ (73), ſeu erit rurſus $= a^m$ (45). Atqui nequiret ſane utriusque radicis potentia n eſſe eadem, niſi radices illæ eſſent æquales, hoc eſt, niſi eſſet $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Unde hæc generalis regula fluit: *Si quæcunque quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ habens pro exponente fractionem poſitivam exprimi debeat ope ſigni radicalis, quin prior ipſius valor immutetur; ſolus numerator fractionis relinquatur ei potentiæ pro exponente, denominator autem ejusdem fractionis ſigno radicali pro exponente radicis inſcribatur.* Hinc e. g. $a^{\frac{2}{3}}$ eſt $= \sqrt[3]{a^{\frac{2}{1}}}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$ ſeu $= a$ (70).

78. II. Est generatim $ba^{-m} = \frac{b}{a^m}$. Multiplicetur enim ba^{-m} per a^m; factum erit $= ba^{-m+m} = ba^0$ (27. *Reg.* 3tia), seu ob $a^0 = 1$ (76), factum erit $= b$. Deinde multiplicetur etiam $\frac{b}{a^m}$ per idem a^m; factum erit $= \frac{ba^m}{a^m}$ (56) $= b$ (45). Ergo idem factum b prodit, sive ba^{-m}, sive $\frac{b}{a^m}$ multiplicetur per a^m. Atqui istud evenire utique non posset, nisi esset $ba^{-m} = \frac{b}{a^m}$. Unde hæc generalis lex eruitur: *Si quæcunque potentia, habens pro exponente quantitatem integram negativam exprimi debeat cum exponente positivo, quin prior ipsius valor immutetur; ejus quantitatis coefficiens sumatur pro numeratore fractionis, pro denominatore autem sumatur eadem illa quantitas cum priore suo exponente, sed jam positivo, non negativo.* Hinc est $2a^{-2} = \frac{2}{a^2}$; & $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, cum in a^{-m} nullus præter unitatem reperiatur alter coefficiens.

79. III. Est $\frac{b}{a^{-m}} = ba^m$. Nam est $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (79); ergo idem est, sive per a^{-m}, sive per $\frac{1}{a^m}$ dividatur quantitas b: atqui, si b dividatur per a^{-m}, quotus est $= \frac{b}{a^{-m}}$, ut clarum est, si autem idem b dividatur per $\frac{1}{a^m}$ quotus est $= ba^m$ (61. *Schol.*); est ergo $\frac{b}{a^{-m}} = ba^m$. Eodem modo ostendi potest esse $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$.

80. IV. Eſt generatim $ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$. Si enim imprimis quatitas $ba^{-\frac{m}{n}}$ elevetur ad potentiam n; erit quæſita potentia $= b^n a^{-\frac{mn}{n}}$ (74) $= b^n a^{-m} = \frac{b^n}{a^m}$ (78): ſi deinde quantitas $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ elevetur ad potentiam n; ejus fractionis tam numerator, quam denominator elevari debebit ad potentiam n (68), adeoque quæſita potentia erit $= \frac{b^n}{a^m}$. Ergo eadem acquiritur potentia quæſita, ſive $ba^{-\frac{m}{n}}$, ſive $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ elevetur ad potentiam n. Atqui iſtud evenire utique non poſſet, niſi eſſet $ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$; ergo. Sed, uti jam n. 77. innuimus, hæc a Tironibus noſtris prætermitti poſſe exiſtimamus.

CAPUT SECUNDUM.

De Extractione radicum e potentiis algebraicis.

81. *Radicem extrahere* e data potentia, eſt ex eadem eruere eam quantitatem, quæ aliquoties per ſe ipſam multiplicata potentiam illam generavit. e. g. Extrahere radicem quadratam ex a^6 eſt invenire quantitatem a^3, quæ ſemel per ſe ipſam multiplicata gignit quadratum $= a^6$: ex eadem quantitate a^6 extrahere radi-

radicem cubicam eſt invenire quantitatem a^2, quæ bis per ſe ipſam multiplicata dat cubum a^6. Hinc quadratum, cubus, aliæque altiores potentiæ, ſicuti *multiplicatione* naſcuntur, ita *diviſione* diſſuuntur, ſuasque in radices reſolvuntur.

82. PROBLEMA XX. *E data potentia monomia radicem quamcunque extrahere.*

Resolut. Exponens datæ potentiæ dividatur per exponentem datæ radicis; quotus, qui enaſcetur, erit exponens radicis quæſitæ. e. g. Si ex a^6 extrahenda ſit radix quadrata; quoniam exponens radicis quadratæ eſt $= 2$ (67), dividatur exponens 6 per 2, & quotus 3 erit exponens radicis quæſitæ, hoc eſt, radix quæſita erit $= a^3$. Si ex $a^4 b^2$ radix quadrata extrahenda ſit, dividantur exponentes per 2, & erit radix quæſita $= a^2 b$. Radix cubica quantitatis a^6 (exponentem per 3 dividendo) eſt $= a_2$. Radix cubica quantitatis $a^6 b^3 = a^2 b$, & ſic porro. Scilicet, quemadmodum data radix monomia ad datam potentiam elevatur *multiplicando* ejus exponentem per exponentem datæ potentiæ (72), ita ex adverſo, ut ex data potentia monomia extrahatur radix dati exponentis, exponens potentiæ per exponentem radicis *dividatur*, eſt neceſſe (81). Et ſane radix hac methodo inventa, ſi per ſe ipſam multiplicetur (nempe quadrata ſemel, cubica bis &c.). ſemper reſtituit datam potentiam: ac proinde radix hac methodo inventa, genuina radix ſit, oportet.

83. THEOREMA IX. *Quodlibet quadratum radicis binomiæ conſtat* 1) *quadrato termini primi radicis ſuæ*, 2) *duplo ejusdem termini primi per terminum ſecundum multiplicato*, 3) *quadrato termini ſecundi.*

Demonstr. Quævis radix binomia repræſentari poteſt, vel per $a + b$, vel per $a - b$: conſequenter (radices has elevando ad quadrata) quodlibet quadratum radicis binomiæ rite repræſentatur, vel per $a^2 + 2ab + b^2$, vel per $a_2 - 2ab + b^2$. Atqui conſideranti patet, utrumque iſtud quadratum conſtare 1) quadrato termini primi radicis ſuæ, 2) duplo ejusdem termini primi per terminum ſecundum multiplicato, 3) quadradrato termini ſecundi; ergo quodlibet quadratum radicis binomiæ &c.

84. Coroll. Quæcunque polynomia radix quadrata ad binomiam reduci poteſt, ſi plures ejus notæ inſtar unius termini conſiderentur. Igitur cujusvis quadrati quamcunque polynomiam radicem habentis partes per alterutram formularum nunc allatarum exhiberi poſſunt. e. g. Aſſumamus quadratum numericum, cujus radix tribus notis numericis conſtans eſt $= 132$. Quoniam eſt $132 = 130 + 2$; ſi ponatur $130 = a$, & $2 = b$, erit radix illa $= a + b$: ac proinde quadratum ipſum rite repræſentabitur per $a^2 + 2ab + b^2$.

85. PROBLEMA XXI. *E data potentia algebraica polynomia radicem quadratam extrahere.*

Resolut. Ordinetur data potentia ſecundum exponentes cujusdam literæ, ita ut maximus exponens primo loco ſit; tum præ oculis ſit generalis quadratorum lex n. 83. demonſtrata, quod nempe quodlibet quadratum radicis binomiæ conſtet quadrato termini primi, duplo termini primi per terminum ſecundum multiplicato, & quadrato termini ſecundi: quam legem hæc formula generalis $a^2 + 2ab + b^2$ ob oculos poſita non ſinet e memoria effluere. Porro operatio his peragatur legibus.

1*mo*. Cum in primo datæ, riteque ordinatæ potentiæ termino lateat quadratum termini primi radicis; extrahatur radix quadrata e primo termino, ea videlicet methodo, quam n. 82. tradidimus, & ſcribatur pro primo radicis termino poſt potentiam datam parentheſi incluſam. Deinde quadratum hujus radicis ſubtrahatur a data potentia, & reſiduum pro ulteriore operatione reſervetur.

2*do*. In reſiduo hoc latebit adhuc duplum factum termini primi in ſecundum ducti, item quadratum ſecundi. Itaque hæc duo porro fiant: 1) Per duplum termini primi jam inventi dividatur aliquis reſidui illius terminus, & quotus monomius ſcribatur pro ſecundo radicis termino. 2) Quotus iſte multiplicetur tam per ſe ipſum, quam per duplum termini primi, ſeu per diviſorem; & facta hæc a dicto reſiduo ſubtrahantur.

Quodſi

Quodſi poſt alteram hanc ſubtractionem nihil remanſerit ex data potentia; id argumento erit, eam fuiſſe perſectum quadratum radicis binomiæ, ejus nempe, quæ extracta jam eſt: hactenus enim ex data potentia nihil aliud ſubtractum eſt, quam partes quadrati, dictam radicem binomiam habentis, ſcilicet quadratum termini primi, duplum factum termini primi in ſecundum ducti, & quadratum termini ſecundi.

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Sit *potentia data*; Erit ejus *radix quadrata.*

$(n^2 + 4n + 4)$ - - - - - $n + 2.$

Scilicet imprimis per reg. 1*mam*, ex quadrato monomio n^2 extrahatur radix n, ſcribaturque pro primo quæſitæ radicis termino; tum ejus quadratum n^2 ſubtrahatur a data potentia: manebit reſiduum $= + 4n + 4$. Deinde juxta reg. 2*dam*, hujus reſidui terminus $4n$ dividatur per duplum termini jam inventi, ſeu per $2n$, & quotus $= + 2$ ſcribatur pro ſecundo quæſitæ radicis termino. Porro hic quotus, ſeu $+ 2$ multiplicetur tam per ſe ipſum, quam etiam per diviſorem $2n$, & factum $= + 4n + 4$ ab eo reſiduo ſubtrahatur. Poſt alteram hanc ſubtractionem nihil remanet amplius e data potentia: unde patet, datam potentiam eſſe perfectum quadratum radicis binomiæ $n + 2$. Et ſane ſi hæc radix in ſe ipſam ducatur, non aliud enaſcitur quadratum, quam data illa potentia, ut periclitanti patebit.

3*tio.* Quodſi eveniat, ut poſt alteram quoque ſubtractionem aliquod reſiduum e data potentia remaneat; id indicio erit, radicem quæſitam tertio quoque termino conſtare, qui adhuc extrahendus ſuperſit. Quo caſu hoc modo procedendum eſt. Duo primi quæſitæ radicis termini per ſuperiores regulas jam inventi, inſtar unius accipiantur, habeanturque pro primo radicis quæſitæ termino, ille autem, qui adhuc latet, pro ſecundo. Hac facta hypotheſi, hactenus non plus ſubtractum eſt a data potentia, quam quadratum termini primi: adeoque in ejus reſiduo latet adhuc duplum factum termini primi (per *terminum primum* deinceps intelligendo ſummam duorum terminorum jam inventotorum) in ſecundum ducti, & quadratum termini ſecundi (84). Itaque rurſus (ut in *2da* reg. dictum eſt) hæc duo fiant: 1) Per duplum termini primi jam inventi dividatur aliquis reſidui illius, quod adhuc remanſit, terminus, & quotus monomius ſcribatur pro novo radicis termino. 2) Quotus iſte multiplicetur tam per ſe ipſum, quam per duplum termini primi, & facta hæc a dicto reſiduo ſubtrahantur. e. g.

Sit *potentia data*,	Erit *radix quadrata*
$(a^2 - 2a + 4ab + 4b^2 - 4b + 1)$	$a - 1 + 2b.$

Nimirum 1) per reg *1mam*, ex quadrato monomio a^2 extrahatur radix quadrata a, ſcribaturque pro primo quæſitæ radicis termino; tum ejus quadratum a^2 ſubtrahatur a data potentia: manebit reſiduum $= - 2a + 4ab + 4b^2 - 4b + 1$.

2) Per reg. *2dam*, hujus reſidui terminus $- 2a$ dividatur per duplum termini jam inventi, ſeu per $2a$, & quotus $= - 1$ ſcribatur pro ſecundo radicis quæſitæ termino. Porro hic quotus, ſeu $- 1$ multiplicetur tam per ſe ipſum, quam etiam per diviſorem $2a$, & factum $= - 2a + 1$ ſubtrahatur a reſiduo ſuperius adnotato. Poſt hanc ſubtractionem alteram adhuc remanet e data potentia reſiduum $= + 4ab + 4b^2 - 4b$. Itaque

3) Per reg. *3tiam*, duo quæſitæ radicis termini hactenus inventi inſtar unius accipiantur, & per eorum duplum, ſeu per $2a - 2$ dividatur poſtremum iſthoc reſiduum. Scilicet quæratur, quotiesnam primus diviſoris terminus $2a$ contineatur in primo reſidui dividendi termino $+ 4ab$ (28, *Reg. 1ma*), & quotus $= + 2b$ ſcribatur pro novo radicis termino. Porro idem quotus $2b$ multiplicetur tam per ſe ipſum, quam per integrum diviſorem $2a - 2$, & factum $= 4ab - 4b + 4b^2$ ab eodem reſiduo poſtremo ſubtrahatur. Poſt tertiam hanc ſubtractionem nihil amplius remanet e data potentia: ac proinde data potentia eſt perfectum quadratum, cujus radix eſt $= a - 1 + 2b$.

4to. Si poſt tertiam quoque ſubtractionem aliquod reſiduum maneat e data quapiam potentia; id erit indicio, quartum quoque radicis terminum latere in ea po-

potentia. Itaque radix quatuor terminorum reducatur ad duos, ita ut pro primo termino accipiantur tres ſimul termini jam inventi; cetera autem peragantur ut ante. Si poſt hanc quoque operationem aliquod adhuc reſiduum ſupereſſet, in ulteriore operatione quatuor primi termini jam inventi pro uno accipiendi eſſent, & operatio conſtanter eadem, quam hucusque ſecuti ſumus, lege deberet continuari, dum vel evaneſcat omne reſiduum, vel abeatur in ſeriem quandam infinitam.

5to. Si data potentia fuerit fractio; per easdem regulas radix tam e numeratore, quam etiam ex denominatore extrahi debebit (68. & 81).

EXEMPLA ALIA *Extract. Radic. Quadrat.*

I. *Quadratum*, $x^2 - x + \frac{1}{4}$. *Radix*, $x - \frac{1}{2}$.

II. *Quadrat.* $4a^4 + 12a^2 b + 9b^2$. *Radix*, $2a^2 + 3b$.

III. *Q.* $x^2 + 2nx + n^2 - 4x - 4n + 4$. *Radix*, $x + n - 2$.

Schol. Legitime peractam eſſe operationem id evincet, ſi radix inventa per ſe ipſam multiplicata dederit ejusmodi quadratum, quod cum data potentia prorſus ſit idem.

86. PROBLEMA XXII. *Invenire, quibus partibus conſtet cubus radicis binomiæ.*

Resolut. Id eluceſcet, ſi $a + b$ ad cubum elevetur. Eſt autem ejus cubus $= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, uti patebit, ſi eam radicem bis per ſe ipſam multiplicaveris. Itaque cubus radicis binomiæ conſtat 1) cubo termini primi radicis ſuæ; 2) triplo facto quadrati termini primi in terminum ſecundum ducti; 3) triplo facto termini primi in quadratum ſecundi ducti; 3) cubo termini ſecundi.

Schol. Extractione radicis cubicæ ex quantitate polynomia ſive algebraica, ſive numerica neque in hoc, neque in phyſicis opuſculis noſtris utemur uſpiam: methodum tamen eam extractionem peragendi, ſi quis noſſe deſiderat, in ſequentibus adnotatam habet.

87. PROBLEMA XXIII. *E data potentia algebraica polynomia radicem cubicam extrahere.*

Reso-

Resolut. Ordinetur data potentia ſecundum exponentes cujusdam literæ, ita ut maximus exponens primo loco ſit; tum ponatur ob oculos formula generalis $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, partes cubi binomiam radicem habentis repræſentans (36), & hæ denique regulæ obſerventur.

1mo. Ex inſpectione formulæ generalis patet, in primo datæ, riteque ordinatæ potentiæ termino latere cubum termini primi quæſitæ radicis: itaque extrahatur radix cubica ex primo datæ potentiæ termino (82), & ſcribatur poſt datam potentiam parentheſi incluſam pro primo quæſitæ radicis termino. Deinde cubus hujus radicis nunc inventæ ſubtrahatur a data potentia, & reſiduum pro ulteriore operatione notetur.

2do. In hoc reſiduo latebit inter cetera triplum factum quadrati termini primi nunc inventi in ſecundum radicis terminum ducti; quod factum in generali formula per $3a^2 b$ repræſentatur. Itaque ſi ex termino primo nunc invento fiat quadratum, & per triplum hujus quadrati dividatur primus rite ordinati reſidui terminus, pro quoto obveniet ſecundus quæſitæ radicis terminus, priori poſt potentiam datam parentheſi incluſam addendus. Porro triplum quadratum termini primi multiplicetur per terminum ſecundum nunc inventum, deinde triplum quadratum ſecundi hujus termini multiplicetur per terminum primum, denique idem terminus ſecundus elevetur ad cubum, & facta hæc a reſiduo ſuperius notato ſubtrahantur. Hoc pacto totus jam radicis binomiæ hactenus inventæ cubus (& nihil aliud) ſubtractus eſt a data potentia, uti formulæ generalis contemplatio palam facit. Hinc ſi poſt alteram hanc ſubtractionem nihil amplius remaneat e data potentia; id argumento erit, eam potentiam eſſe perfectum cubum radicis binomiæ, ejus nempe, quæ extracta jam eſt.

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Sit *potentia data*	Erit ejus *radix cubica.*
$(8x^6 - 12x^4 n + 6x^2 n^2 - n^3)$	$2x^2 - n.$

Scilicet imprimis per reg. 1*mam*, ex primo datæ, riteque ordinatæ potentiæ termino $8x^6$ extrahatur radix cubica $2x^2$ (82), ſcribaturque pro primo quæſitæ radicis termino; tum ejus cubus $8x^6$ ſubtrahatur a data potentia: manebit reſiduum $= -12x^4 n + 6x^2 n^2 - n^3$.

Deinde juxta reg. 2*dam*, hujus reſidui terminus $-12x^4 n$ dividatur per triplum quadratum primi quæſitæ radicis termini nunc inventi, ſeu per $12x^4$, & quotus $= -n$ ſcribatur pro ſecundo radicis termino. Porro hic quotus multiplicetur per triplum quadratum termini primi, ſeu per diviſorem, deinde triplum quadratum ejusdem quoti, ſeu termini ſecundi ducatur in terminum primum, denique idem terminus ſecundus elevetur ad cubum, & facta hæc $= -12x^4 n + 6x^2 n^2 - n^3$ a reſiduo ſuperius notato ſubtrahantur, Poſt alteram hanc ſubtractionem nihil jam remanet e data potentia; evidenti argumento, eam fuiſſe perfectum cubum radicis binomiæ $2x^2 - n$. Et ſane, ſi hæc radix bis in ſe ipſam ducatur, non alius enaſcetur cubus, quam data illa potentia, uti periclitanti patebit.

3*tio*. Quodſi eveniat, ut poſt alteram quoque ſubtractionem aliquod reſiduum a data potentia remaneat; indicio erit, radicem quæſitam tertio quoque termino conſtare. Quo in caſu hoc modo procedendum porro eſt. Duo primi quæſitæ radicis termini, per ſuperiores regulas jam inventi, inſtar unius accipiantur, habeanturque pro primo quæſitæ radicis termino: ille autem, qui adhuc latet, pro ſecundo. Hoc ſtante hactenus non plus ſubtractum eſt a data potentia, quam cubus termini primi: adeoque in ejus reſiduo latet adhuc triplum quadratum termini primi (per *terminum primum* deinceps intelligendo ſummam duorum terminorum jam inventorum) in ſecundum ducti, triplum quadratum termini ſecundi adhuc latentis multiplicatum per terminum primum, & cubus ejusdem termini ſecundi. Itaque rurſus (ut in reg. 2*da* dictum eſt) hæc duo fiant: Imprimis ex termino primo (ſeu ex ſumma duorum terminorum jam inventorum) fiat quadratum, & per triplum hujus quadrati dividatur ſequens reſidui rite ordinati terminus; tum quotus enaſcens ſcribatur pro

novo

novo radicis termino. Deinde triplum quadratum termini primi, ſeu diviſor ducatur in terminum ſecundum nunc inventum, triplum autem quadratum termini ſecundi ducatur in terminum primum, denique terminus ſecundus elevetur ad cubum; tum facta hæc a reſiduo illo, quod poſt alteram ſubtractionem remanſit, ſubtrahantur.

4to. Si poſt tertiam quoque ſubtractionem aliquod reſiduum e data potentia manſerit, id erit indicio, quartum quoque radicis terminum latere in data potentia. Itaque radix quatuor terminorum reducatur ad duos, ita ut pro primo termino accipiantur tres ſimul termini jam inventi; cetera autem peragantur, ut ante.

5to. Si data potentia fuerit fractio; per easdem regulas radix cubica tam e numeratore, quam etiam e denominatore extrahenda erit (68, & 81).

Schol. Conſideranti facile patet, methodum extrahendi radicem cubicam congruere cum methodo extrahendi radicem quadratam; hoc uno diſcrimine, quod in extractione radicis quadratæ formula $a^2 + 2ab + b^2$ doceat, quorum diviſorum ope inveniendi ſint termini radicis, & quæ ſubtractio inſtituenda ſit invento quovis termino radicis, in cubicæ autem radicis extractione formula $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ præluceat.

CAPUT TERTIUM.

De Extractione Radicum e numeris.

88. Pro extrahenda radice quadrata, vel cubica e numeris ſimplicibus in promptu eſſe debet tabula ſequens; in qua ſeries prima eſt radicum, altera quadratorum iis reſpondentium, tertia vero cuborum.

Radices,	Quadrata,	Cubi.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

89. Si e quadrato numerico, cujus radix duabus, aut pluribus notis numericis conſtet, radix extrahenda ſit; reapſe eædem regulæ, quæ in extractione radicis quadratæ polynomiæ e potentiis algebraicis (85), obſervandæ ſunt, & eadem formula generalis $a^2 + 2ab + b^2$, quadrati partes exhibens præ oculis habenda eſt, qua illic uſi ſumus: hoc tamen diſcrimine, quod partes quadrati, quas generalis illa formula exhibet, non æque incurrant in oculos in quadratis numericis, ac in algebraicis, ſed in iis veluti confuſæ, & permixtæ lateant. Itaque præter regulas n. 85. allatas aliis adhuc regulis opus eſt in extractione radicis quadratæ numericæ, in quibus ſtatuendis ſequentes animadverſiones facem nobis præferent.

90. *Animadverſio 1ma.* Imprimis, ſi datum quadratum numericum unica, vel duabus tantum notis numericis conſtet; ejus radix nonniſi unica nota conſtabit, quæ proinde in Tabula n. 88 allata quæri debebit: nam minima radix quadrata, quæ duabus notis conſtet, eſſe poteſt numerus 10; hujus autem quadratum = 100 jam trium notarum eſt. Deinde, ſi datum quadratum tres, vel quatuor notas complectatur; ejus radix eſt duarum notarum. Nam maxima duarum

no-

notarum radix eſt 99, cujus quadratum = 9801 ultra quatuor notas non aſſurgit: & minima trium notarum radix 100 gaudet quadrato = 10000, jam ad quinque notas aſſurgente. Denique, ſi datum quadratum quinque, vel ſex notarum ſit; ejus radix tribus notis conſtat. Nam maxima trium notarum radix eſt 999, cujus quadratum = 998001 ultra ſex notas non aſſurgit; & minima quatuor notarum radix 1000 habet quadratum = 1000000, jam ad ſeptem notas aſſurgens. Eadem methodo oſtendi poteſt, radicem quadrati ſeptem vel octo notas complectentis conſtare quatuor notis; radicem quadrati novem, vel decem notas complectentis eſſe quinque notarum, & ſic porro.

91. Coroll. Quodſi ergo a dextris inchoando poſt binas quasque dati quadrati numerici notas inſeratur virgula, ſeu *comma*; ejus radix tot notarum erit, quot fuerint in quadrato hujusmodi membra virgulis diſtincta. e. g. Radix quadrati 1, 74, 24 tribus notis conſtat.

92. *Animadverſio 2da.* Aſſumamus quodcunque quadratum numericum, in ſua membra virgulis ea lege, quam nunc (91) deſcripſimus, interjectis diſtributum, e.g. hoc: 5, 47, 56, cujus radix quadrata eſt = 234. 1) Siniſtimus radicis terminus 2, quoniam locum centenariorum occupat, eſt re ipſa = 200; adeoque ejus quadratum 4, eſt reapſe = 200 × 200 = 40000. Unde patet, quadratum illud latere in ſiniſtimo dati quadrati membro, quod membrum ſiniſtimus numerus 5 conſtituit. Eodem modo deprehenditur in quocunque alio quadrato numerico, quadratum ſiniſtimi termini radicis in ſiniſtimo quadrati membro contineri. 2) Secundus ejusdem radicis (ſemper a ſiniſtris ſumendo initium) terminus 3, decadum locum occupat, adeoque eſt re ipſa = 30. Hinc, quum duplum termini primi in ſecundum ducendo acquiris factum = 12, reapſe factum iſtud eſt = 400 × 30 = 12000: conſequenter factum iſtud = 12 terminatur in ſecundo a ſiniſtris membro quadrati, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota: quippe terminatur in quarta a dextris nota, quæ in aſſumpto quadrado 5, 47, 56 eſt ſiniſterior ſecundi a ſiniſtris membri. Eodem modo de-

 pre-

prehendi poteſt in quocunque alio quadrato numerico, duplum termini primi radicis ductum in ſecundum terminari in ſiniſteriore ſecundi membri nota. 3) Quoniam ſecundus radicis aſſumptæ terminus 3, eſt re ipſa $= 30$, uti nunc oſtenſum eſt; ejus quadratum 9 eſt re ipſa $= 30 \times 30 = 900$. Unde iſthoc quadratum pariter in ſecundo dati quadrati membro terminatur; at in dextima hujus membri nota. Idem eodem modo deprehenditur in quocunque alio numero quadratico.

93. Coroll. Quodſi ergo quodcunque datum quadratum numericum in membra ſua eo, quem n. 91 deſcripſimus, modo diſtribuatur; de ejus radice tres has leges generatim ſtatuere licet. 1) Quadratum primi, ſeu ſiniſtimi termini radicis latet in ſiniſtimo dati quadrati membro. 2) Duplum termini primi ductum in terminum ſecundum terminatur in ſecundo dati quadrati membro, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota. 3) Quadratum termini ſecundi terminatur pariter in ſecundo dati quadrati membro; at in dextima ejusdem nota.

94. *Animadverſio 3tia.* Si in aſſumpto ſuperius (92) quadrato numerico duæ ſiniſtimæ radicis notæ 23 pro primo ejusdem radicis termino ſumantur; ſequens autem nota 4 pro ſecundo; quoniam terminus 23 in eo quadrato eſt re ipſa $= 230$, duplum termini primi ductum in terminum ſecundum, ſeu 46×4 eſt re ipſa $= 460 \times 4 = 1840$. Unde patet, factum illud terminari in tertio dati quadrati membro, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota: quippe terminatur in ſecunda a dextris nota, quæ in aſſumpto quadrato 5, 47, 56 eſt ſiniſterior nota tertii a ſiniſtris membri. Idem in alio quocunque quadrato numerico, cujus radix pluribus, quam duabus notis conſtet, æque animadvertere licet. Deinde quadratum termini ſecundi 4, quod quadratum eſt $= 16$, in ejusdem tertii membri nota dextima terminari clarum eſt.

95. Coroll. Quodſi ergo dati quadrati numerici radix pluribus, quam duabus, notis conſtet, & primæ duæ notæ pro primo ejusdem radicis termino ſumantur, tertia autem nota pro termino ſecundo; hæ præterea leges generatim ſtatui poſſunt. 1) Duplum termini

mini primi ductum in terminum ſecundum terminatur in tertio dati quadrati membro, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota. 2) Quadratum termini ſecundi in dextima ejusdem tertii membri nota terminatur.

Schol. Si aſſumeretur ejusmodi quadratum numericum, cujus radix quadrata ſit quatuor notarum, & ſi præterea tres priores radicis notæ pro primo ejusdem radicis termino aſſumerentur, dextima autem nota pro ſecundo; ea, quam hactenus ſecuti ſumus, ratiocinandi methodo facile pateret, duplum termini primi ductum in terminum ſecundum terminari in ſiniſtima nota membri quarti; quadratum vero termini ſecundi terminari in dextima ejusdem quarti membri nota: & ſic porro.

96. PROBLEMA XXIV. *E dato quadrato numerico utcunque magno radicem quadratam extrahere.*

Resolut. Datum quadratum includatur parentheſi; tum a dextris inchoando poſt binas quasque notas inſeratur virgula: radix tot erit notarum, quot fuerint hujusmodi membra virgulis diſtincta (91). e. g. Si ex 529 extrahenda ſit radix quadrata; id quadratum hoc modo ſcribatur: 5, 29.

2do. A ſiniſtris inchoando operationem, aſſumatur primum dati quadrati membrum. in membro hoc latet quadratum termini primi quæſitæ radicis (93): itaque in tabula (88) quæratur numerus quadratus, qui ſit æqualis, vel proxime minor primo illo dati quadrati membro; tum ejus numeri quadrati radix ſcribatur poſt datum quadratum parentheſi incluſum, pro prima radicis nota. Denique quadratum inventæ radicis, ſeu quadratus numerus in tabula inventus ſubtrahatur ab aſſumpto primo dati quadrati membro. & reſiduum, ſi quod manet, ducta linea transverſa ſubſcribatur.

3tio. Ejusmodi reſiduo, ſi quod manſit, adjungatur a dextris ſecundum dati quadrati membrum: ſi autem nullum manſit reſiduum, ſolum ſecundum dati quadrati membrum ſcribatur infra lineam transverſam. Porro dextima ſecundi hujus membri nota interjecto commate ſeparetur, & numeri, qui *comma* ſiniſtram verſus præcedunt, dividantur per duplum primi termini jam inventi; tum quotus pro ſecundo radicis termino ſcribatur ad dextram prioris termini. Porro quotus iſte adjungatur diviſori a dextris, totumque hoc multiplicetur per eundem quotum; dein vero factum ex hac multiplicatione enaſcens ſubtrahatur a numero infra transverſam lineam ſcripto. En exemplum harum regularum.

Quadratum datum,		*Radix.*
	(5, 29)	23.
A	4	
B	12, 9	
C	43	
D	129	
	— — — —	

Nempe ſub lit. A eſt numerus quadratus in tabula (88) repertus, primo dati quadrati membro = 5 proxime minor; cujus radix = 2 (per reg. 2*dam*) pro prima radicis nota ſcribitur a dextris dati quadrati, parentheſi incluſi.

Sub lit. B prima nota 1 eſt reſiduum, quod manet 4 a 5 ſubtrahendo; cui reſiduo (per reg. 3*tiam*) adjicitur a dextris ſecundum dati quadrati membrum = 29. ſed ita, ut hujus dextima nota 9 interjecto *commate* ſecernatur.

Sub lit. C prima nota 4 eſt duplum termini primi radicis, per quam dividitur numerus 12, ſub lit. B a nota dextima *commate* ſeparatus, & quotus = 3 pro ſecunda radicis nota ſcribitur. Porro ſub eadem lit. C diviſori 4 adjicitur a dextris quotus nunc inventus 3, tum 43 per eundem quotum multiplicatur. Demum factum ex hac multiplicatione enaſcens, ſub litera D adnotatum, ſubtrahitur a numero infra primam lineam transverſam ſub litera B ſcripto: qua ſubtractione peracta nullum amplius manet reſiduum, ac proinde peracta jam eſt tota operatio; inventaque radix integra = 23.

4*to.* Si datum quadratum pluribus, quam duobus membris conſtet; ejus radix pluribus, quam duabus notis

notis conſtabit (91). Itaque duæ radicis notæ per ſuperiores regulas jam inventæ conſiderentur inſtar unius, habeanturque pro primo radicis quæſitæ termino, ea vero nota, quæ proxime ſequitur, latetque adhuc, pro ſecundo: tum eadem methodo, quam regula 3*tia* præſcribit, continnetur operatio. Scilicet ad reſiduum, quod poſt alteram ſubtractionem remanſit, adjungatur a dextris tertium dati quadrati membrum, interjectoque *commate* reſecetur dextima hujus membri nota; tum numeri, qui comma ſiniſtram verſus præcedunt, dividantur per duplum termini primi radicis, ſeu per duplum duarum radicis notarum jam inventarum, & quotus pro novo radicis termino ſcribatur &c. Recole, quæ in Reg. 3*tia* porro præcipiuntur. Si tribus radicis notis jam inventis adhuc quarta lateat; tres illæ notæ jam inventæ pro primo radicis termino habeantur, & ea, quæ adhuc latet, pro ſecundo: tum rurſus ea methodo, quam regula 3*tia* continet, operatio continuetur; & ſic porro.

EXEMPLUM *omnium præced. regularum.*

Datum quadratum (1, 74, 24) *Radix* 152.

A		1
B	—	7, 4
C		2 3
D		6 9
E	—	5 2, 4
F		2 6 2
G		5 2 4
		— — —

Sub lit. A eſt quadratum in tabula (88) repertum primo dati quadrati membro æquale, cujus radix = 1 pro prima quæſitæ radicis nota ſcribitur. Idem quadratum ſi a primo illo dati quadrati membro ſubtrahatur, nullum manet reſiduum. Hinc per reg. 3*tiam* infra linem transverſam nonniſi ſecundum dati quadrati membrum = 74 ſcribitur ſub lit. B; ita tamen, ut ejus notam dextimam ab altera interjectum *comma* ſecernat.

Sub lit. C. prima nota 2 eſt duplum termini primi radicis, per quod dividitur numerus 7, & quotus = 3 pro ſecunda radicis nota ſcribitur. Porro quotus iſte adjungitur eidem numero 2 a dextris ſub ead. lit. C, totumque iſtud, ſcilicet 23, per eundem quotum multiplicatur; tum factum enaſcens = 69, ſub lit. D. ſcriptum, ſubtrahitur ab aſſumpto dati quadrati membro ſub lit. B. adnotato, & reſiduum = 5 infra novum transverſam lineam pro ulteriore operatione ſub lit. E adnotatur.

Tranſitur jam ad regulam 4*tam*; juxta quam reſiduo 5 adjungitur a dextris tertium dati quadrati membrum = 24 ſub ead. lit. E, ejusque dextima nota interjecto commate ſeparatur.

Sub lit. F ſcribitur duplum duarum primarum radicis notarum hactenus inventarum, quod duplum eſt = 26, & per illud numerus 52 ſub lit. E. ſcriptus dividitur; tum quotus = 2 ſcribitur pro nova radicis nota. Porro idem quotus diviſori 26 adjungitur a dextris ſub lit. F, & totum hoc per eundem quotum multiplicatur. Denique factum enaſcens = 524 ſub lit. G. ſcriptum ſubtrahitur a numero 524 ſub lit. E adnotato. Qua ſubtractione peracta cum nullum ſuperſit reſiduum, omniaque dati quadrati membra jam ſenſim depoſita ſint; abſoluta eſt operatio tota, acquiſitaque radix integra = 132.

5*to*. Si inter operandum eveniat, ut duplum termini primi majus ſit numero per ipſum dividendo; pro quoto, ſeu pro nova radicis nota ſcribatur zerus: tum eidem numero dividendo adjiciatur a dextris ſequens dati quadrati membrum. Porro dextima hujus membri nota interjecto commate ſecernatur, numerique comma præcedentes per duplum omnium radicis notarum hactenus inventarum, inſtar unius termini conſideratarum dividantur: denique quotus enaſcens ſcribatur pro nova radicis nota, & reliqua more conſueto fiant. e. g.

Da-

Datum quadrat. (4, 2 4, 3 6) *Radix* 206.

A	4
B	— 2, 4
C	4
B	2 4 3, 6
C	4 0 6
D	2 4 3 6
	— — —

Sub lit. A eſt numerus quadratus in tabula (88) repertus. Sub litera B eſt ſecundum dati quadrati membrum. Sub lit. C eſt duplum termini primi radicis. Jam vero hoc duplum ne ſemel quidem continetur in numero 2 ſub lit. B poſito: itaque pro ſecunda radicis nota (per reg. 5*tam*) ſcribitur zerus, & ſub lit. E ſecundo dati quadrati membro adjicitur ejusdem membrum tertium.

Sub lit. C primæ duæ notæ 40 ſunt duplum duarum radicis notarum hactenus inventarum; per quod numerus 243, ſub lit. B poſitus dividitur, & quotus $=$ 6 pro tertia radicis nota ſcribitur. Porro idem quotus diviſori 40 adjungitur a dextris ſub lit. C, & totum hoc per eundem quotum multiplicatur. Denique factum enaſcens $=$ 2436 ſub lit. D ſcriptum ſubtrahitur a numero 2436 ſub lit. B adnotato. Qua ſubtractione peracta nullum amplius manet reſiduum: hinc cum præterea neque ſuperſit amplius ullum dati quadrati membrum, peracta eſt tota operatio, acquiſitaque radix integra $= 206$.

6to. Si ex fractione radix quadrata extrahenda ſit; ea tam ex numeratore per regulas ſuperiores, quam etiam ex denominatore extrahatur. e. g. $\sqrt{\frac{144}{4}}$ eſt $= \frac{12}{2} = 6$; eſt enim $\sqrt{144} = 12$, & $\sqrt{4}$ $= 2$.

Demonstratio *harum regularum.* 1) Quoniam in primo cujuslibet dati quadrati membro latet quadratum

tum termini primi radicis (93); per regulam *2dam* rite derminari primum radicis terminum in confeſſo eſt.

2) Ut regulæ *3tiæ* ratio pateat, ponamus ob oculos exemplum, quod eidem regulæ *3tiæ* ſubnexuimus. Sub lit. B continetur datum quadratum ſolo primi radicis ſuæ termini quadrato $= 4$ mulctatum: itaque ſub lit. B continetur duplum termini primi radicis ductum in ſecundum, in formula generali (83) per $2ab$ repræſentari ſolitum, & præterea quadratum ſecundi termini, ſeu b^2 (83). At duplum termini primi ductum in ſecundum terminatur ante *comma* in numero 2, ſcilicet in dati quadrati ſiniſteriore ſecundi membri nota (93). Hinc ſi numerus 12, *comma* præcedens dividatur per duplum termini primi radicis; pro quoto obvenire debet ſecundus radicis terminus (*Arith.* 55.). Hoc eſt, ſecundus radicis terminus per regulam tertiam rite determinatur.

Porro poſtquam duæ radicis notæ jam inventæ ſunt, earum quadratum a dato quadrato plene ſubtrahendum eſt, ut appareat, num præterea aliquid in dato quadrato lateat, an non: conſequenter adhuc duplum termini primi ductum in ſecundum, & quadratum ſecundi (nam quadratum termini primi jam per reg. *1mam* ſubtractum eſt) reſtat ſubtrahendum. Atque hujus ſubtractionis inſtituendæ methodum continent reliqua, quæ in regula *3tia* porro præſcribuntur. Dum enim in aſſumpto exemplo, duplo primi termini radicis, ſeu numero 4 ſub lit. C adjunctus erat a dextris ſecundus radicis terminus 3; reapſe duplum termini primi, & terminus ſecundus in unam ſummam collecta fuere: adeoque dum 43 per 3 multiplicatus fuit, re ipſa ſecundus radicis terminus 3 tam in duplum termini primi, quam etiam in ſe ipſum ductus erat. Hinc dum factum ex hac multiplicatione enaſcens $= 129$ ſubtractum fuit a numero 129 ſub lit. B poſito, totum jam radicis binomiæ quadratum a dato quadrato ſubtractum erat. Unde etiam, quoniam ſubtractis his nihil amplius remanſit e dato quadrato, palam eſt, integram dati quadrati radicem eſſe eam, quæ illic inventa eſt, ſcilicet $= 23$.

3) Ut ratio regulæ *4tæ* pateat, contemplemur tantiſper exemplum eidem regulæ *4tæ* ſubnexum. Hoc

in

in exemplo prorſus eadem methodo extractæ ſunt duæ priores radicis notæ, totumque earum quadratum a dato quadrato ſubtractum, qua uſi ſumus in exemplo regulæ tertiæ ſubnexo; ita ut ſub lit. E jam ea duntaxat dati quadrati pars contineatur, quæ remanſit, poſtquam ex eo ſubtractum eſt quadratum duarum priorum radicis notarum. Itaque ſi duæ priores radicis notæ inſtar unius termini primi conſiderentur, ea vero nota, quæ adhuc latet, inſtar ſecundi; in numero 524 ſub lit. E adnotato latet adhuc duplum termini primi radicis ductum in ſecundum, & præterea quadratum termini ſecundi. Eo ipſo autem facile patet, eadem methodo, quam regula 3tia præſcribit, continuandam eſſe operationem.

4) Regula 5*ta* fere ejusmodi compendium continet, quo in *diviſione* uti ſolemus, dum eo caſu, quo *diviſor* in aſſumpta *dividendi* nota ne ſemel quidem continetur, pro quoto *zerum* ſcribimus, & novam *dividendi* notam priori adjungimus (*Arith.* 54. *reg.* 4*ta*). Denique ratio regulæ 6*tæ* eſt: nam ſi fractio ad quadratum elevanda ſit, ejus tam numerator, quam etiam denominator ad quadratum elevari debet (68): ergo etiam, ſi ex fractione radix quadrata extrahenda ſit, tam ex numeratore ejus, quam ex denominatore radix quadrata extrahatur, oportet (81).

EXEMPLA ALIA *Extr. Radic. quadrat.*

I.	*Quadrat.*	(1, 44)	*Radix*	12
II.	*Quadrat.*	(6, 25)	*Radix*	25
III.	*Quadrat.*	(64, 00)	*Radix*	80
IV.	*Quadrat.*	(6, 40, 09)	*Radix*	253
V.	*Quadrat.*	(4, 20, 25)	*Radix*	205

Schol. Si in dato quopiam exemplo ex membro ultimo poſt peractam ſubtractionem quodpiam reſiduum maneat; id argumento erit, datum numerum non eſſe perfectum quadratum. Quo caſu extractio radicis per *approximationem* continuanda eſt, ſeu reſidua radicis pars in fractionibus quatenus fieri licet, eſt invenienda. Hoc autem modo inſtituatur operatio. Detur e. g. numemerus 147, ex quo extrahenda ſit radix quadrata. Fiat operatio per regulas ſuperiores, dum e dato hoc numero nullum amplius ſuperſit membrum. Invenietur in numeris integris radix $= 12$; at peracta ultima ſubtractione remanebit reſiduum $= 3$.

Reſiduo huic tanquam numero integro concipiatur pro denominatore ſubſcripta unitas; tum numeratori adjiciantur duo zeri, ut ſit 300, totidemque adjici concipiantur denominatori: hoc pacto reſiduum illud convertetur in fractionem, cujus denominator ſit $= 100$, quin prior ejus reſidui valor immutetur (48). Jam taciti hujus denominatoris radix quadrata erit $= 10$, mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix per regulas ſuperiores, ſpectando zeros adjectos inſtar novi membri adjuncti. Scilicet is numerator hoc modo ſcribatur: 3 0, 0; tum 30 dividatur per duplum notarum hactenus inventarum, ſeu per 24, & quotus $= 1$ pro nova radicis nota ſcribatur, ſubſcripta ipſi denominatoris radice $= 10$. Conſequenter radix hactenus eſt $= 12 + \frac{1}{10}$: at peracta poſtremæ hujus operationis ſubtractione remanet reſiduum $= 59$; quare aliqua radicis pars adhuc latet, ac proinde approximatio, ſi lubet, continuari poteſt.

Scilicet reſiduum 59 ob duos illos zeros ſuperius adjectos pro denominatore habet 100. Adjungantur denuo reſiduo illi numeratori duo zeri, totidemque adjungi concipiantur etiam denominatori. Denominator erit $= 10000$, cujus radix quadrata eſt $= 100$, mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix ut ante, ſpectando zeros adjectos inſtar novi membri adjuncti. Nimirum reſiduus ille numerator duobus zeris auctus hoc modo ſcribatur: 590, 0, tum 590 dividatur per duplum notarum hactenus inventarum, ſeu per 242, & quotus $= 2$ pro nova radicis nota, cujus denominator erit $= 100$, ſcribatur. Quo pacto radix hactenus inventa, eſt $= 12 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$; at aliqua ejus pars adhuc remanet latens; immo ſemper remanebit aliqua, tametſi porro quoque continuetur operatio: ſemper tamen magis ac magis accedetur

ad

ad veram radicem, quo ſæpius ea, quam hactenus tenuimus, operandi ratio repetita fuerit.

97. PROBLEMA XXV. *E dato cubo numerico utcunque magno radicem cubicam extrahere.*

Resolut. 1*mo*. Datus cubus includatur parentheſi; tum a dextris inchoando poſt ternas quasque notas inſeratur virgula: radix tot erit notarum, quot hujusmodi membra (quorum quidem ſiniſtimum etiam duabus, aut unica nota conſtare poteſt) virgulis diſtincta fuerint. Hinc ſi datus cubus ultra tres notas non aſſurgat; ejus radix nonniſi unica nota conſtabit, quæ proinde radix in tabula n. 88. quærenda erit.

2*do*. Ponatur ob oculos formula generalis $a^2 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^2$, quæ partes cubi radicem binomiam habentis repræſentet (86): tum a ſiniſtris inchoando operationem, aſſumatur primum dati cubi numerici membrum. In hoc membro latet cubus notæ primæ radicis: itaque in tabella (88) quæratur cubus, qui ſit æqualis, vel proxime minor aſſumpto illo membro primo, & ejus radix ſcribatur poſt datum cubum parentheſi incluſum pro prima radicis nota. Porro cubus inventæ radicis ſubtrahatur ab eodem membro primo; tum ducta transverſa linea reſiduum, ſi quod manſit, ſubſcribatur.

3*tio*. Ad reſiduum, ſi quod manſit, adjungatur a dextris ſecundum dati cubi membrum: ſi autem nullum manſit reſiduum; ſolum ſecundum dati cubi membrum ducta transverſa linea ſubſcribatur. In ſiniſtima hujus membri nota terminatur $3a^2 b$, ſeu triplum quadratum primi radicis termini jam inventi in ſecundum terminum, qui adhuc latet, ductum: in penultima ejusdem membri nota terminatur $3ab^2$, ſeu triplum termini primi ductum in ſecundi quadratum: denique in nota ultima terminatur b^3, ſeu cubus termini ſecundi. Hæc facile illuſtrari poſſent ejusmodi animadverſionibus, cujusmodi ſunt eæ, quas n. 90, & ſequ. pro extractione radicis quadratæ attulimus, niſi Tironibus noſtris ad res ſibi magis neceſſarias properandum eſſe cenſeremus. Itaque relictis, commateque interjecto ſeparatis

dua-

duabus dextimis fecundi membri notis reliquum dividatur per triplum quadratum primi termini jam inventi, & quotus pro fecundo radicis termino fcribatur. Idem quotus ducatur in triplum quadratum termini primi jam inventi, feu in diviforem, & factum ita fubfcribatur affumpto numero, qui ex refiduo prioris fubtractionis, & adjuncto fequente cubi membro conftat, ut dextima ejus facti nota finiftimæ fecundi illius membri notæ refpondeat: huic facto fubfcribatur factum alterum, fcilicet tripli quadrati termini fecundi in primum terminum ducti, fed ita, ut hujus facti nota dextima refpondeat penultimæ dicti fecundi membri notæ: demum fubfcribatur etiam cubus fecundi termini, ita tamen, ut ultima hujus nota ultimæ fecundi membri notæ refpondeat. Porro tria hæc facta in unam fummam collecta fubtrahantur ab affumpto numero, nimirum ab eo, qui complectitur refiduum fuperioris fubtractionis, & fecundum dati cubi membrum.

4to. Si datus cubus pluribus, quam duobus membris conftet, ejus radix pluribus, quam duabus notis conftabit. Itaque duæ radicis notæ per fuperiores regulas jam inventæ pro primo radicis quæfitæ termino habeantur, ea vero nota, quæ proxime fequitur, latetque adhuc, pro fecundo; hoc pofito, fi eadem operatio repetatur, reperietur tertia radicis nota. Hac inventa, fi poft fubtractionem adhuc aliquod maneat refiduum; huic refiduo adjungatur membrum fequens, ac tribus radicis notis jam inventis inftar unius confideratis eadem lege repetatur operatio. Quod fi inventis tribus radicis terminis, quartus adhuc lateat; tres inventi termini inftar unius primi habendi erunt, & fic porro.

5to. Si inter operandum eveniat, ut triplum quadrati termini primi majus fit numero per ipfum dividendo: pro quoto, feu pro nova radicis nota fcribatur zerus: tum eidem numero dividendo adjiciatur a dextris fequens dati cubi membrum. Porro duæ dextimæ hujus membri notæ interjecto commate fecernantur, numerique *comma* præcedentes per triplum quadratum omnium radicis notarum hactenus inventarum inftar unius termini confideratarum dividantur: denique quotus

tus enaſcens ſcribatur pro nova radicis nota, operatioque more conſueto continuetur.

EXEMPLUM *Extract. Radic. Cubic.*

Datus Cubus (12, 167) *Radix* 23.

A	8
B - -	41, 67
C - -	12
D - -	36
E - - -	54
F - - - -	27
G - r	4167

Sub lit. A eſt cubus in tabula (88) repertus, primo dati cubi membro proxime minor, cujus radix $=2$ pro prima radicis quæſitæ nota ſcribitur. Sub lit. B prima nota 4 eſt reſiduum, quod manſit ſubtrahendo cubum in tabula repertum a primo membro, ſeu 8 a 12; reliquæ autem notæ a dextris adjunctæ, ſunt ſecundum dati cubi membrum: quarum duæ poſtremæ notæ per Reg. 3tiam commate interjecto ſecernuntur.

Sub lit. C eſt triplum quadratum primæ notæ radicis, ſeu numeri 2, per quod numerus 41 (per reg. 3tiam) dividitur, & quotus $=3$ pro ſecunda radicis nota ſcribitur. Sub lit. D eſt triplum quadratum termini primi radicis in terminum ſecundum ductum; quod in formula generali per $3a^2 b$ repræſentatur. Sub lit. E eſt triplum quadratum termini ſecundi ductum in terminum primum, per $3ab^2$ repræſentari ſolitum. Sub lit. F eſt cubus termini ſecundi, ſeu numeri 3. Denique ſub lit. G eſt ſumma trium particularium factorum, ſub literis D, E, F contentorum: quæ ſumma ſi a numero 4167 ſub lit. B poſito ſubtrahatur, nullum remanet reſiduum; ac proinde operatio tota peracta jam eſt, acquiſitaque integra radix cubica $=23$.

Schol. Si in dato quopiam exemplo ex ultimo membro poſt peractam ſubtractionem quodpiam reſiduum maneat: id argumento erit, datum numerum non eſſe perfectum cubum. Quo casu extractio radicis per *approximationem* continuanda est; uti de quadrato imperfecto num. 96 Schol. locuti sumus: hoc discrimine, quod hic non duo, sed tres zeri sint adjiciendi tam numeratori, quam etiam denominatori residui, extractioque radicis juxta leges hoc numero allatas instituenda.

CAPUT QUARTUM.

De Calculo quantitatum Radicalium.

98. Quantitates *radicales* eæ dicuntur, quibus signum radicale (70) præfigitur. e. g. $\sqrt{8}$. Hujusmodi quantitates, tametsi plerumque *irrationales*, seu *surdæ* (71) sint, capaces tamen sunt variarum transformationum, additionis, subtractionis &c. Quapropter aliqua de quantitatibus radicalibus problemata resoluturi sumus: monentes interim, ea a Tironibus nostris sine dispendio doctrinæ sibi necessariæ prætermitti posse.

99. Quantitates radicales inter se comparatæ dicuntur esse *ejusdem denominationis*, si una eundem habeat exponentem signi sui radicalis, quem habet altera. e. g. $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$ sunt *ejusdem denominationis*, quia exponens signi radicalis utrobique est idem, scilicet 2, qui plerumque non ponitur expresse, sed subintelligitur (70). Pariter ejusdem sunt denominationis $\sqrt[3]{3}$ & $\sqrt[3]{5}$. *Diversæ denominationis* autem eæ vocantur, quæ diversos habent signi radicalis exponentes: e. g. $\sqrt{a}$ & $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{5}$ & $\sqrt[4]{5}$.

100. PROBLEMA XXVI. *Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem denominationem reducere.*

Resolut. Sint reducendæ $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[s]{b^r}$. Est $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ & $\sqrt[s]{b^r} = b^{\frac{r}{s}}$ (77). Cum ergo novi hi ex-

exponentes ſint fractiones heterogeneæ, reducantur ad eundem denominatorem methodo conſueta (43), ac proinde convertantur in has: $a^{\frac{ms}{ns}}$ & $b^{\frac{nr}{ns}}$. Denique ſi his fractionibus reſtituantur ſigna radicalia, abeunt demum in has *ejusdem denominationis* radicales: $\sqrt[ns]{a^{ms}}$ & $\sqrt[ns]{b^{nr}}$, quin prior earundem valor immutetur (77). Eodem modo ſi reducendæ ſint $\sqrt{}$ & $\sqrt[3]{}\ 5$; eæ convertantur primum in has: $5^{\frac{1}{2}}$ & $5^{\frac{1}{3}}$ (77): hæ in iſtas: $5^{\frac{3}{6}}$ & $5^{\frac{2}{6}}$, ſcilicet fractiones ad communem denominatorem reducendo: iſtæ denique quantitates commutentur demum in has *eadem denominatione* gaudentes: $\sqrt[6]{5^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$.

101. AXIOMA I. *Quæ ſunt æqualia uni tertio, aut duobus æqualibus, ſunt æqualia inter ſe.* e. g. 1) Si ſit $a = b$, & $c = b$; erit etiam $a = c$. 2) Ponamus $a = b$ $c = d$: ſi fuerit $b = d$, erit etiam $a = c$.

102. PROBLEMA XXVII. *Quantitates radicales reducere ad minores terminos, ſeu ad ſimpliciorem expreſſionem.*

Resolut. Quantitas poſt ſignum radicale poſita reſolvatur in ſuos factores. Quodſi unus ex iis factoribus fuerit potentia ejusdem gradus, quem ſigni radicalis exponens indicat; extrahatur ex eo radix, & ponatur ante ſignum pro coefficiente, ceteris factoribus poſt ſignum radicale relictis. e. g. Quantitas radicalis $\sqrt[n]{a^m b^n}$ habet poſt ſignum radicale factores a^m & b^n; quorum alter nempe b^n cum ſit potentia ejusdem gradus, quem ſigni radicalis exponens n indicat, ejus radix b ponatur ante ſignum, altero factore poſt ſignum relicto: hoc pacto quantitas illa radicalis abibit in hanc jam ſimpliciorem: $b\sqrt[n]{a^m}$. Porro non mutari priorem ejus valorem, ſeu eſſe $\sqrt[n]{a^m b^n} = b\sqrt[n]{a^m}$

 faci-

facile patet. Nam est $\sqrt[n]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{n}}$, & $b\sqrt[n]{a^m} = b a^{\frac{m}{n}}$ (77); atqui est $a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{n}} = b a^{\frac{m}{n}}$; est ergo etiam $\sqrt[n]{a^m b^n} = b\sqrt[n]{a^m}$ (101).

103. Coroll. Detur radicalis numerica $\sqrt[3]{24}$; hæc in suos factores resoluta abit in hanc: $\sqrt[3]{8.3}$. Ex factore 8 extrahatur radix cubica 2, & ante signum radicale ponatur: erit eadem radicalis quantitas ad simplic. express. reducta $= 2\sqrt[3]{3}$. Et vicissim coefficiens ante signum radicale positus transferri potest post idem radicale signum, quin prior quantitatis radicalis valor immutetur, modo coefficiens ille elevetur ad eam potentiam, quam indicat exponens signi radicalis. e. g. In quantitate radicali $2\sqrt[3]{3}$, coefficiens 2 elevetur ad cubum, isque cubus ponatur post signum radicale: nova quantitas radicalis $\sqrt[3]{3.8}$, seu $\sqrt[3]{24}$ erit æqualis priori $2\sqrt[3]{3}$.

Schol. Quantitas radicalis, quæ aut non potest in factores resolvi, aut non habet factorem, qui sit potentia exponentis datæ radicis, est *irreducibilis*. e. g. $\sqrt{7}$.

104. Si duæ, vel plures quantitates, ad simplicissimam expressionem reductæ, fuerint imprimis *ejusdem denominationis*, deinde habuerint eandem quantitatem post radicale signum positam; id genus quantitates dicuntur *commmunicantes*. e. g. $2\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$. item $a\sqrt{b}$ & $c\sqrt{b}$. Eæ vero quantitates radicales, in quibus alterutra harum conditionum, aut utraque deest, *incommensurabiles* vocantur: e. g. $3\sqrt{2}$ & $5\sqrt{3}$.

105. PROBLEMA XXVIII. *Addere, vel subtrahere quantitates radicales.*

Re-

Resolut. Reducantur datæ quantitates ad expreſſionem ſimpliciſſimam (102); tum, ſi deprehendantur eſſe communicantes, addantur, vel ſubtrahantur earum coefficientes ante ſignum radicale poſiti, & ſumma, vel differentia communi quantitati radicali præfigatur. e. g. Dentur quantitates radicales $\sqrt{27}$ & 12, ut in unam ſummam addantur, vel vero ut poſterior a priore ſubtrahatur. Reductione ad ſimpliciſſimam expreſſionem abeunt in has: $3\sqrt{3}$ & $2\sqrt{3}$ (102). Earum ergo ſumma eſt $= 5\sqrt{3}$; differentia autem $= \sqrt{3}$. Ratio eſt; ſi enim $\sqrt{3}$ ponatur eſſe $= a$; quantitates illæ radicales æquivalent his: $3a$ & $2a$; harum autem ſumma eſt utique $= 5a$, & differentia $= a$.

Schol. Si quantitates irrationales ad expreſſionem ſimpliciſſimam reductæ deprehendantur non eſſe *communicantes*; tractentur ut heterogeneæ (17. *reg.* 5).

106. PROBLEMA XXIX. *Quantitates radicales inter ſe multiplicare.*

Resolut. Si quantitates radicales non fuerint ejusdem denominationis, ante omnia reducantur ad eandem denominationem (100); tum coefficientes multiplicentur inter ſe, & quantitates poſt radicale ſignum poſitæ itidem multiplicentur inter ſe, communi ſigno radicali retento. e. g. Si $\sqrt[n]{a^m}$ multiplicari debeat per $\sqrt[s]{b^r}$; reductæ ad eandem denominationem abeunt in has: $\sqrt[ns]{a^{ms}}$ & $\sqrt[ns]{b^{nr}}$ (100) Itaque *factum* erit $= \sqrt[ns]{a^{ms}b^{nr}}$. Ratio eſt; nam aſſumptæ radicales his æquivalent: $a^{\frac{m}{n}}$ & $b^{\frac{r}{s}}$ (77); quæ inter ſe multiplicatæ dant *factum* $= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} b^{\frac{nr}{ns}}$ (43) $= \sqrt[ns]{a^{ms} b^{nr}}$ (77).

Schol. Quod ſi quantitates pluribus ſignis radicalibus afficiantur; eæ radicales debent in ſe ipſas duci, quæ totidem radicalia ſigna ante ſe habent. e. g. Sit $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$ multiplicanda per $\sqrt{(5\sqrt{4})}$; ſeu quod

 idem

idem eſt, ſit $\sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{2}}$ multiplicanda per $\sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{4}}$. Quantitas radicalis 3 per 5, & 2 per 4 multiplicari debebit, eritque *factum* totale $= \sqrt{15} \times \sqrt{\sqrt{4}} + \sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{8}}$. Sit enim $\sqrt{2} = a$, $\sqrt{3} = b$, $\sqrt{4} = c$, $\sqrt{5} = d$. Reapſe datur $b + \sqrt{a}$ multiplicanda per $d\sqrt{c}$. Jam vero, uti ex *Reſolut. problem.* patet, *factum* ex hac multiplicatione enaſcens eſt $= bd\sqrt{c} + d\sqrt{ac}$: quod factum (ſi literis valores numerici reſtituantur) eſt $= \sqrt{15} \times \sqrt{\sqrt{4}} + \sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{8}}$.

107. PROBLEMA XXX. *Datam quantitatem radicalem per aliam radicalem dividere.*

Resolut. Si quantitates radicales non fuerint ejusdem denominationis, ante omnia reducantur ad eandem denominationem; tum coefficiens dividendi dividatur per coefficientem diviſoris, & quantitas, quæ in dividendo poſt ſignum radicale poſita eſt, dividatur per quantitatem in diviſore poſt ſignum radicale poſitam. e. g. Sit *dividendus* $6\sqrt{ab}$, *diviſor* $3\sqrt{b}$; erit quotus $2\sqrt{a}$. Nempe diviſio prorſus contraria eſt multiplicationi, ita ut id totum diſſuat diviſio, quod multiplicatio componit: quemadmodum ergo in multiplicatione coefficientes multiplicari debent inter ſe, & quantitates poſt ſignum radicale poſitæ itidem inter ſe (106), ita ex adverſo in diviſione coefficiens dividendi per coefficientem diviſoris, & quantitas in *dividendo* poſt ſignum radicale poſita per quantitatem in *diviſore* poſt ſignum radicale poſitam dividatur, oportet.

Schol. Si quantitates pluribus afficiantur ſignis radicalibus, illæ debent per ſe ſe dividi, quæ poſt totidem ſigna radicalia poſitæ ſunt.

SECTIO

SECTIO TERTIA.
DE PROBLEMATUM RESOLUTIONE, SEU ANALYSI.

CAPUT PRIMUM.
De Præcipuis Analyſeos Operationibus.

108. *Problematis* nomine hoc loco venit ejusmodi propoſitio, qua petitur, ut e datis quibusdam quantitatibus alia incognita quantitas, una vel plures detegantur. e. g. Si quæratur, quisnam ſit ille numerus, qui tribus ſeptimis ſui partibus additus efficiat ſummam = 60; *problema ſolvendum* proponi dicitur. Methodus hujusmodi problema ope calculi algebraici reſolvendi vocatur *Analyſis*.

Porro manifeſtum eſt, non poſſe e datis quantitatibus erui quantitatem incognitam, niſi inter hanc, & illas nexus quidam, & relationes intercedant. Ejusmodi nexus, & relationes nuncupantur *conditiones problematis*. e. g. In exemplo nunc allato hæc adnectitur conditio, ut numerus inveniendus, ſi tribus ſeptimis ſui partibus addatur, accurate efficiat ſummam = 60. Quodſi inveniatur quantitas, quæ id genus datis conditionibus ſatisfaciat; problema *ſolutum eſſe* dicitur.

109. In quavis data problematis conditione involvitur quædam æqualitas quarundam duarum quantitatum, quæ *æquatio* appellatur. Unde conſequens eſt, problema in tot æquationes reſolvi poſſe, quot adjectas habuerit conditiones: ſcilicet quævis conditio æquatione ſua exprimi poteſt, e. g. Si proponatur problema de inveniendis duobus numeris, quorum ſumma ſit = 10, differentia = 2; duæ aderunt conditiones, totidemque æquationes. Sed hæc ex ſequentibus clariora fient.

Schol. Univerſam hanc problema reſolvendi artem in quatuor præcipuas operationes generatim diſtribubuere lubet: in quibus ſi Tiro probe exercitatus fuerit, etiam in difficilioribus problematis ſolvendis cum ſucceſſu verſabitur.

PRIMA ANALYSEOS OPERATIO.

110. Prima analyſeos operatio conſiſtit in *accurata omnium conditionum problemati adnexarum diſcuſſione, & apta quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum denominatione.* Scilicet Analyſta problema quodpiam reſoluturus rite conſideret imprimis, quisnam ſit ſtatus quæſtionis, & quæ conditiones problemati adjectæ. His probe cognitis diſpiciat deinde, quænam ſint quantitates cognitæ, quæ incognitæ; tum cognitas quidem quantitates primis alphabeti literis a, b, c &c. denominet, incognitas vero ultimis x, y, z. e.g. Si proponatur problema de inveniendis duobus numeris, quorum ſumma ſit $= 15$, factum autem $= 56$; ponat $15 = a$, $56 = b$, unum numerum inveniendum $= x$, alterum $= y$: ſcilicet in calculo deinde loco earum quantitatum his literis uſurus. Porro denominationes hæ ad latus quodpiam folii adnotandæ erunt; ne excidat e memoria, quænam litera hujus quantitatis loco uſurpetur in calculo.

111. Sæpius ex ipſis problematis conditionibus diligenter expenſis patet, pro ſtatuendis denominationibus non debere totidem diverſas alphabeti literas aſſumi, quot diverſas quantitates problema continet, ſed plures quantitates (ſeu eæ cognitæ ſint, ſeu incognitæ) paucioribus literis exprimi poſſe. Quo caſu ejusmodi compendio in ſtatuendis denominationibus utendum omnino eſt: ſic enim facilior evadet problematis ſolutio, uti deinceps apparebit. Quam in rem tres ſequentes regulas notaſſe juvabit. 1*mo*. Si in dato problemate duæ ſint incognitæ quantitates, clarum autem ſit, unam earum eſſe duplam alterius; prima denominetur x: at altera non denominetur y, ſed $2x$. Si autem altera quantitas eſſet dimidia prioris, & iſta prior denominaretur x; altera illa deberet poni $= \frac{x}{2}$. Et ſic porro in aliis quoque ſimilibus caſibus ſive incognitarum quantitatum, ſive etiam cognitarum.

2do. Sint duæ quæcunque incognitæ quantitates in dato problemate, quarum differentia d nota ſit. Si major quantitas ponatur $= x$; minor ponenda erit $= x - d$: ſi autem minor ponatur $= x$; major ponenda erit $= x + d$. Clarum enim eſt, ex duabus quibuscunque inæqualibus quantitatibus minorem ſemper eſſe æqualem majori, dempta differentia; majorem vero æqualem eſſe minori, addita differentia. Sic ſi aſſumamus numeros 6 & 4, quorum differentia eſt $= 2$; eſt utique $4 = 6 - 2$, & $6 = 4 + 2$.

3tio. Sint quæcunque duæ quantitates inæquales, quarum ſumma vocetur s, differentia d; demonſtrabimus ſequ. Cap. quantitatem majorem eſſe $= \frac{s + d}{2}$ minorem autem $= \frac{s - d}{2}$. Hoc eſt, majorem quantitatem ſemper eſſe æqualem ſemiſummæ addita ſemidifferentia; minorem autem ſemiſummæ dempta ſemidifferentia. Unde hoc corollarium eruitur: ſi duæ id genus quantitates occurrant in problemate, quarum ſumma s nota ſit, non item differentia; non eſt neceſſe duas illas quantitates duabus diverſis literis x & y denominare, ſed ſatis eſt earundem ſemidifferentiam ponere $= x$. Hoc enim poſito major quantitas erit $= \frac{s}{2} + x$, minor autem $= \frac{s}{2} - x$.

EXEMPLA *Primæ operationis Analyſ.*

I. Detur ſequens problema. *Quidam parens tribus filiis ſuis reliquit hæreditatem* 800 *florenorum. hac lege, ut ſecundus filius* 100 *florenis plus acquirat ex ea hæreditate, quam primus: tertius autem tantundem accipiat, quantum primus, & ſecundus ſimul. Quæritur, quantum unicuique ex ea hæreditate obtigerit?* Quantitates, quæ hoc in problemate denominari debent, ſunt duæ cognitæ, ſcilicet numerus 800. & 100; deinde tres incognitæ, nempe ſingulorum filiorum hæreditates. Itaque ponatur imprimis $800 = a$, $100 = b$. Deinde hæreditas primi filii ponatur $= x$: quo poſito hæreditas

 ſecun-

ſecundi erit $= x + b$; tertii autem $= x + x + b$, ſeu $= 2x + b$.

II. Proponatur iſtud problema. *Quidam parens* 30 *annis ſenior eſt filio ſuo. Quodſi ætati Parentis addas ejusdem ætatis dimidium, & præterea* $\frac{1}{4}$ *partem ætatis filii; pro ſumma totali obvenient* 80 *anni. Quæritur, quot annorum ſit parens, quot annorum filius.* Quantitates, quæ hoc in problemate denominandæ occurrunt, ſunt: 30, 80, ætas parentis, ætas filii, dimidia pars de ætate parentis, & $\frac{1}{4}$ pars de ætate filii. Anni 30, quoniam ſunt *differentia* ætatum, ponantur eſſe $= d$; $80 = a$. Ætas parentis ſit $= x$: quo poſito ætas filii erit $= x - d$, ſcilicet per illud compendii genus, quod ſuperius in reg. 2da deſcripſimus. Hinc dimidia parentis ætas erit $= \frac{x}{2}$, & $\frac{1}{4}$ pars ætatis filii erit $= \frac{x-d}{4}$.

III. Detur problema ſequens. *Quidam interrogatus, quotnam oviculas haberet, hoc modo reſpondit: ſi adhuc totidem haberem, quot habeo, & præterea* $\frac{1}{2}$ *partem earum, item* $\frac{1}{4}$ *partem, & adhuc unam; tunc eſſent* 100. *Quæritur, quotnam oviculas habuerit.* Sit $100 = a$; quæſitus ovicularum numerus $= x$. Hujus numeri $\frac{1}{2}$ pars erit $= \frac{x}{2}$, & $\frac{1}{4}$ pars $= \frac{x}{4}$.

Schol. Tria hæc problemata probe imprimantur memoriæ: ea enim in ſingulis ſequentibus operationibus reſumentur.

ALTERA ANALYSEOS OPERATIO.

112. Altera analyſeos operatio eſt *dati problematis ad ſuas æquationes reductio.* Scilicet poſt probe cognitum quæſtionis ſtatum, inſtitutasque ſingularum quantitatum ad problema pertinentium denominationes, accurate videat Analyſta, quamnam æquationem in ſe contineat quævis conditio problematis; tum quamlibet conditionem propria æquatione exprimat, inter quantita-

titates, quæ per conditionem problematis æquales sunt, signum $=$ interponendo. Hoc est, propositum problema signis algebraicis per unam, vel plures æquationes adæquate exprimat. Quodsi aliqua problematis conditio (quod aliquando evenit) non æquationem, sed aliquam proportionem in se contineat; ejusmodi proportio methodo suo loco tradenda in æquationem transformetur.

Schol I. Altera hæc analyseos operatio, seu æquationum inventio maximi laboris est, & quasi lapis lydius, in quo egregium ingenii sui specimen Analysta dare possit. Immo præter acre ingenium longiori etiam exercitio opus est, ut facilitas æquationes in quibusvis problematis inveniendi acquiratur. Quare Tirones, cumprimis initio, in statuendis problematum ipsis propositorum æquationibus juvandi erunt. Lubeat resumere tria illa problemata, quæ num. III. proposita sunt, & pro iis æquationes determinare.

In Probl. I. (III) Filii primi hæreditas est $= x$, secundi $= x + b$, tertii $= 2x + b$, uti eo loco dictum est. Porro ex problematis conditione patet, omnium trium filiorum hæreditates simul sumptas esse 800 florenos, seu esse $= a$: itaque in hoc problemate est $x + x + b + 2x + b = a$, seu est $4x + 2b = a$.

In Probl. II. (III) Ætas parentis est $= x$, hujus dimidium $= \frac{x}{2}$; ætas filii $= x - d$, hujus $\frac{1}{4}$ pars $= \frac{x-d}{4}$. Cum ergo per conditionem problematis ætas parentis cum suo dimidio, & simul cum $\frac{1}{4}$ parte ætatis filii debeat efficere 80 annos, seu esse $= a$; erit in hoc problemate $x + \frac{x}{2} + \frac{x-d}{4} = a$.

In Probl. III. (cit.) Ex data conditione facile patet, quæsitum ovicularum numerum x bis sumptum, addita $\frac{1}{2}$ sui parte, & ^{1} parte, ac præterea unitate esse $= a$; id est, esse $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4}\ 1 = a$.

Schol.

Schol. 2. Patebit ex ſequentibus, non eſſe plures æquationes ad ſolvendum problema neceſſarias, quam ſint in eo problemate incognitæ quantitates diverſis literis expreſſæ: cum ergo in quolibet allatorum trium problematum nonniſi unica litera x deſignet quantitatem incognitam; pro ſingulis eorum unicam æquationem inveniſſe ſatis eſt.

Schol. 3. Tertiæ analyſeos operationi præmittenda ſunt quæpiam axiomata, & theoremata.

113. AXIOMA II. *Si æqualibus quantitatibus eadem quantitas, vel æquales quantitates addantur; ſummæ erunt æquales.* e. g. Si ſit $a+b=c-d$; erit etiam (utrique idem e addendo) $a+b+e=c-d+e$.

114. AXIOMA III. *Si ab æqualibus quantitatibus eadem quantitas, aut æquales quantitates ſubtrahantur; reſiduæ quantitates erunt æquales.* e. g. Si ſit $a+b=c-d$; erit (ab utroque idem e ſubtrahendo) $a+b-e=c-d-e$.

115. THEOREMA X. *Quivis æquationis terminus ex uno membro in alterum transponi poteſt cum ſigno contrario, retenta membrorum æqualitate.* e. g. Si ſit $a+b=c-d$; poteſt e. g. quantitas d transponi in alterum æquationis membrum, dummodo ejus ſignum $-$ in contrarium $+$ transmutetur, eritque $a+b+d=c$. Pariter poteſt e. g. b transponi in membrum alterum mutato in contrarium ſigno ipſius, eritque $a+d=c-b$. Et ſic porro.

Demonstr. Terminus, quem ex uno æquationis membro in alterum transferre cupis, vel eſt poſitivus, vel negativus. Si eſt poſitivus; eum ex uno æquationis membro in alterum ſigno mutato transferre tantundem eſt, ac poſitivum illum terminum tam ab uno, quam ab altero æquationis membro ſubtrahere. Sit enim $a+b=c$: ſi b mutato ſigno transferas, illud primo membro, ex quo auffers, utique ſubtrahis: at idem b ſubtrahis etiam ex membro altero, in quod mutato ſigno illud transfers: addere enim alicui quantitati quantitatem $-b$ tantundem utique eſt, ac ab eadem ſubtrahere $+b$. Atqui æquatio non turbatur, ſi ex utro-

utroque ejus membro idem ſubtrahatur (114): ergo terminus quivis poſitivus ex uno æquationis membro in alterum transferri poteſt mutato ſigno, quin *æquatio*, ſeu mutua membrorum æqualitas turbetur. e. g. Cum ſit $6 + 4 = 10$, eſt etiam $6 = 10 - 4$. Quodſi autem terminus ex uno æquationis membro in alterum transferendus negativus fuerit; eum mutato ſigno transferre tantundem eſt, ac unam eandemque poſitivam quantitatem addere tam uni, quam alteri æquationis membro. e. g. Si ſit $a = c - b$; quum ex membro dextimo transfers $- b$, utique eidem membro addis $+ b$. tollere enim quantitatem negativam eſt æqualem poſitivam addere: at etiam membro ſiniſtimo addis ea translatione quantitatem $+ b$, ut clarum eſt. Cum ergo non turbetur æquatio, quum idem utrique membro additur (113); etiam quantitas negativa ex uno æquationis membro in alterum transferri poteſt, quin turbetur æquatio. e. g. Cum ſit $6 = 10 - 4$; eſt etiam $6 + 4 = 10$. Totius ergo theorematis veritas manifeſta eſt.

116. Coroll. I. Poteſt ergo quæcunque æquatio reddi æqualis nihilo: ſi nempe omnes unius membri termini mutatis ſignis in alterum transferantur. e. g. Si eſt $a + b = c - d$; eſt $a + b - c + d = 0$. Item cum ſit $10 - 3 = 5 + 2$, eſt $10 - 3 - 5 - 2 = 0$.

117. Coroll. II. Si in æquatione quapiam omnium utriusque membri terminorum ſigna mutentur in contraria, quin ullus terminus transferatur ex uno membro in aliud; mutua membrorum æqualitas non turbatur; dummodo ſingulorum omnino terminorum nullo neglecto ſigna mutentur in contraria. e. g. Cum ſit $6 + 4 = 12 - 2$; eſt quoque $- 6 - 4 = - 12 + 2$. Periclitanti enim patebit, hoc compendio idem præſtari, ac ſi omnes omnino utriusque membri termini ex una æquationis parte in alteram mutato ſigno ſucceſſive transferrentur: quæ ſucceſſiva translatio æqualitatem membrorum utique non turbat (115). At ſi vel in uno termino negligatur ſigni immutatio; jam prior membrorum æqualitas in aſſumpta hypotheſi terminorum loca ſua retinentium ſuffertur. Sic ſi eſt $a - b = c - d$; non poteſt eſſe $a + b = - c + d$: priorem enim

enim æquationem ſucceſſiva terminorum ex uno membro in alterum translatione nunquam commutabis in hanc poſteriorem, ut periclitanti patebit.

118. Coroll. III. Quivis terminus, qui in utroque æquationis membro, eodem ſigno affectus reperitur, retenta membrorum æqualitate utrinque deleri poteſt. e. g. Cum ſit $6 + 2 + 4 = 10 + 2$; utrinque delendo $+ 2$ eſt $6 + 4 = 10$. Nam delere utrinque eandem quantitatem poſitivam tantundem eſt, ac utrinque eandem quantitatem ſubtrahere: delere autem utrinque eandem quantitatem negativam, idem eſt, ac utrinque addere æqualem quantitatem poſitivam.

119. AXIOMA IV. *Si æqualia per idem, aut per æqualia multiplicentur, vel dividantur; etiam* facta, *vel* quoti *inter ſe æquari debent.* e. g. Si ſit $a = b$; erit etiam $2a = 2b$, item $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$.

120. THEOREMA XI. *Si unus, aut plures termini ſive in uno duntaxat, ſive in utroque æquationis membro per eandem aliquam quantitatem diviſi ſint; is diviſor in eo, vel iis terminis deleri poteſt, dummodo reliqui omnes utriusque membri termini per eundem diviſorem multiplicentur.* e. g. Si ſit $a + \frac{b}{2} = c$; erit $2a + b = 2c$. Si fuerit $\frac{a}{c} + b = d - \frac{m}{c}$; erit $a + bc = cd - m$.

Demonstr. Delere alicujus fractionis diviſorem tantundem eſt, ac fractionem illam per ſuum diviſorem multiplicare: ſi enim e. g. fractio $\frac{a}{2}$ debeat per 2 multiplicari, *factum* eſt $= \frac{2a}{2} = a$ (45). Quodſi ergo alii quoque omnes utriusque membri termini in quibus ea deletio non uſurpatur, per eundem diviſorem multiplicentur; reapſe utrumque æquationis membrum per idem multiplicatur: æqualitas ergo membrorum prorſus non turbatur (119).

121.

121. Coroll. Si ergo omnes utriusque membri termini per eandem quantitatem divisi sint, sufficit communem illum divisorem ubique delere. e. g. Si sit $\frac{a-b}{2} = \frac{a+d}{2}$; est $a - b = c + d$.

122. THEOREMA XII. *Si unus, aut plures termini in aliqua æquatione multiplicati sint per eandem quantitatem; hæc quantitas, seu coefficiens in eo, vel iis terminis deleri potest, modo reliqui omnes termini in utroque æquationis membro per eundem coefficientem dividantur.* e. g. Si sit $2a + 4 = 10$; erit $a + 2 = 5$.

Demonstr. Delere alicujus termini coefficientem tantundem est, ac eum terminum dividere per eundem coefficientem: si enim e. g. $2a$ dividi debeat per 2, quotus est $= \frac{2a}{2}\ a$. Quodsi ergo alii quoque omnes utriusque membri termini, in quibus ea deletio non usurpatur, per eundem coefficientem dividantur; reapse utrumque æquationis membrum per idem dividitur: æqualitas ergo membrorum prorsus non turbatur (119).

123. Coroll. Itaque si omnes utriusque membri termini eundem habeant coefficientem; eo coefficiente deleto æqualitas membrorum non turbatur, modo is ubique deleatur. e. g. Si sit $2a + 2b = 2c - 2d$; est $a + b = c - d$

124. THEOREMA XIII. *Potest utrumque æquationis membrum retenta æqualitate mutua ad eandem potentiam elevari; vel ex utroque membro eadem radix extrahi.* e. g. Si sit $a = b$; est imprimis $a^m = b^m$, est deinde $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

Demonstr. 1*mæ partis.* Assumamus quascunque duas radices c & b, inter se æquales. Has ad eandem potentiam quamcunque elevare, reapse non aliud est, quam easdem per æqualia semel, aut sæpius multiplicare. Sic si radices illæ eleventur ad cubum; a per a, b per b bis multiplicatur (66); est autem ex hypoth. $a = b$. Jam vero si æqualia multiplicentur, facta quoque inter se æquari debent (119): ergo potest utrumque

que æquationis membrum retenta æqualitate mutua ad eandem potentiam elevari.

DEMONSTR. *2dæ partis.* Fieri nequit, ut duæ inæquales quantitates eandem habeant potentiam ſecundam, tertiam &c. Secus enim quantitas minor e. g. bis in ſe ipſam ducta prorſus idem factum daret, quod daret quantitas major itidem bis in ſe ipſam ducta; quod abſurdum eſt. Itaque ſi duæ ejusdem exponentis potentiæ fuerint æquales; etiam radices ipſarum eodem exponente gaudentes æquales ſint, eſt neceſſe. Hoc eſt, altera quoque Theorematis pars manifeſta eſt.

TERTIA ANALYSEOS OPERATIO.

125. Tertia Analyſeos operatio eſt *æquationis ad unum terminum incognitum, & ſolitarium reductio.* Nimirum inventa per 2dam analyſeos operationem æquatione, in id incumbere debet Analyſta, ut retenta ſemper membrorum æqualitate ita pedetentim transformet æquationem, ut unum æquationis membrum ſola quantitas incognita conſtituat, in altero autem membro meræ quantitates notæ nullis incognitis permixtæ habeantur. e. g. Si per 2dam operationem (112) hæc obtenta eſt æquatio: $x + b = c$; ea per regulas ſequentes transformanda eſt in hanc: $x = c - b$, ut unum æquationis membrum ſola incognita quantitas x conſtituat, in altero autem membro ſint meræ cognitæ quantitates c & b. Hoc enim pacto jam innoteſcit valor incognitæ illius quantitatis, ac proinde problema propoſitum ſolvitur. Sic ſi in aſſumpta æquatione ſit $c = 8$, $b = 3$; eſt $x = 8 - 3 = 5$.

126. Tertia hæc analyſeos operatio ſequentibus legibus eſt peragenda. 1*mo.* Si in aliquo, vel utroque æquationis membro occurrant fractiones; eæ ante omnia tollantur, ita tamen, ut membrorum æqualitas non turbetur: & quidem, ſi plures diverſæ fractiones occurrerint, juvabit confuſionis vitandæ gratia tollere unam poſt alteram. Tollitur autem fractio, quin turbetur membrorum æqualitas, ſi ejus denominator deleatur, & per eundem denominatorem reliqui omnes utriusque membri termini multiplicentur (120). e. g. Si

Si ſit $\frac{ax}{2} - b = c$; ſublata fractione erit $ax - 2b = 2c$.

2do. Videndum deinde eſt, an quantitas incognita, cujus valor quæritur, in unico duntaxat, an in utroque æquationis membro reperiatur. Si in utroque; ex uno membro transferatur in alterum mutato ſigno (115), ut deinceps in unico duntaxat membro compareat. At hac in translatione judicio opus eſt, ut nimirum ad illud membrum transferatur quantitas incognita, in quo demum valor ejus ſit poſitivus, non negativus. e. g. Si ſit æquatio $3x + b = a + x$; ex parte dextra ad ſiniſtram transferenda eſt quantitas incognita x, ſeu ſcribendum $3x - x + b = a$: ſi enim ex parte ſiniſtra in dextram transferretur, id eſt, ſi ſcriberetur $b = a + x - 3x$; facile patet fore, ut demum valor quantitatis x ſit negativus, Eandem ob cauſſam, tametſi quantitas incognita in unico ſolummodo membro compareat, ſi tamen ea ſit ibi valoris negativi, in membrum alterum mutato ſigno eſt transferenda. e. g. Si ſit $a - x = b$; mox initio transferatur x ad partem alteram, ut ſit $a = b + x$ (115).

3tio. Si terminis incognitam quantitatem continentibus adhæreant quantitates cognitæ, ſigno + vel − junctæ; eæ omnes mutatis ſignis transferantur ad membrum alterum (115). e. g. Si ſit $ax + b - c = bd$; termini b & c mutatis ſignis transferantur ad partem alteram, ſeu ſcribatur: $ax = bd - b + c$.

4to. Si quantitas incognita coefficientem aliquem habeat; is coefficiens deleatur, & per eundem dividantur omnes reliqui termini membri utriusque: hoc pacto quantitas incognita liberabitur a ſuo coefficiente, & tamen æqualitas membrorum retinebitur (122). e. g. Si ſit $2ax = b + c$; transformetur æquatio in hanc: $x = \frac{b+c}{2a}$.

5to. Si incognita quantitas a cognitis plene jam ſeparata, ad aliquam potentiam e. g, ad quadratum elevata eſſe deprehendatur; ex utroque æquationis membro extrahatur radix ejus gradus, quem indicat expo-

 nens

nens potentiæ. Quæ quidem extractio in quantitate incognita reapſe perficienda eſt methodo num. 82. allata; at in altero membro quantitates cognitas complectente ſufficit nunc adhuc eandem præfixo radicali ſigno indicare duntaxat. e. g. Si ſit demum $x^2 = a - b$; ſcribatur $x = \sqrt{(a-b)}$. Quodſi autem ex adverſo quantitas incognita deprehendatur eſſe ſigno radicali affecta; elevetur utrumque membrum ad eam potentiam, quam indicat exponens ſigni radicalis. e. g. Si ſit $\sqrt{x} = a + b$; erit $x = (a + b)^2$. Neutro enim caſu turbari membrorum æqualitatem, num. 124. demonſtratum eſt.

Schol. 1. Si quis in tollendis (per reg. 1mam) fractionibus compendio uti velit; cujuslibet in utroque æquationis membro fractionis numeratorem, item quamlibet utriusque membri quantitatem integram multiplicet per factum omnium utriusque membri denominatorum excepto denominatore proprio. e. g. Sit $\frac{a}{3} + b - \frac{c}{2} = x + \frac{d}{4}$ Multiplicetur a per 2×4, ſeu per 8; b per $3 \times 2 \times 4$; c per 3×4; x per $3 \times 2 \times 4$; d per 3×2: erit $8a + 24b - 12c = 24x + 6d$.

Schol. 2. Si quantitatis incognitæ valorem demum aliqua fractio expreſſerit, quæ ad ſimpliciorem expreſſionem reduci poſſit (45), ea reductio negligenda non erit. e. g. Si per regulas præcedentes demum acquiratur $x = \frac{8a-8}{22}$; fractionis tam numeratorem, quam denominatorem per 2 dividendo, fiat $x = \frac{4a-4}{11}$.

Schol. 3. Præcedentes quinque generales regulæ memoriæ probe imprimendæ ſunt, eodemque, quo propoſitæ ſunt, ordine dato problemati applicandæ. Libeat earum ope tertiam analyſeos operationem in problematum num. 111. propoſitorum æquationibus, n. 112. Schol. 1. inventis exercere.

Pro Probl. I. Hanc invenimus n. 112. Schol. 1. æquationem. $4x + 2b = a$.

Jam

Jam *1ma*, & *2da* 3tiæ hujus operationis regula hoc in exemplo non habet locum. Per *3tiam* transponendo $2b$, eſt: $$4x=a-2b$$

Per *4tam* reg. dividendo per 4, eſt: $$x=\frac{a-2b}{4}$$

Seu eſt: $$x=\frac{a}{4}-\frac{b}{2}.$$

In Probl. II. erat æquatio: $$x+\frac{x}{2}+\frac{x-d}{4}=a.$$

Per reg. 1. tollen. 1. fract. eſt $$2x+x+\frac{2x-2d}{4}=2a.$$

ſeu eſt: $$3x+\frac{x-d}{2}=2a.$$

Tollendo fract. alteram eſt: $$6x+x-d=4a.$$

ſeu eſt: $$7x-d=4a.$$

Per 3 reg. transpon. $-d$, eſt: $$7x=4a+d.$$

Per 4 reg. dividendo per 7, eſt: $$x=\frac{4a+d}{7}.$$

In Probl. III. hæc fuit æquatio, $2x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=a.$ Jam per reg. 1. tollendo fractiones (utamur compendio ſuperius in *Schol.* 1 allato) eſt:

$$16x+4x+2x+8=8a$$

ſeu eſt: - - - - $$22x+8=8a.$$

Per reg. 3 transpon. 8, eſt: - - - - $$22x=8a-8.$$

Per reg. 4 divid. totum per 22; eſt $$x=\frac{8a-8}{22}$$

Reducendo ad ſimpl. expreſſ. eſt: - $$x=\frac{4a-4}{11}.$$

QUARTA ANALYSEOS OPERATIO.

127. Quarta analyſeos operatio eſt *æquationis, ad unum terminum incognitum, & ſolitarium jam reductæ, in numeros reſolutio.* Scilicet poſtquam per tertiam analyſeos operationem valor incognitæ quantitatis erutus, perque noti valoris literas expreſſus eſt; literis illis valores proprii in numeris ſubſtituendi ſunt, ut

etiam incognitæ quantitatis valor in ipſis numeris clare videatur. Lubeat praxim hujusm. reſolutionis videre in problematis n. 111 propoſitis, quarum æquationes ultimas paullo ſuperius (126. Schol. 3.) determinavimus.

In Probl. I. Æquatio ultima, ſeu ad unum terminum, & incognitum reducta, eſt hæc: $x = \frac{a}{4} - \frac{b}{2}$ (126. Schol. 3.). Porro hoc in problemate eſt $a = 800$, $b = 100$ (111): eſt ergo $x = \frac{800}{4} - \frac{100}{2} = 200 - 50$; adeoque eſt $x = 150$. Jam vero x eſt hæreditas primi filii, uti cit. loco ponitur: itaque primo filio obvenit hæreditas 150 florenorum. Secundus filius per conditionem problematis 100 florenis plus debuit acquirere, quam primus: ſecundi ergo hæreditas eſt 250 florenorum. Tertius tantundem acquirere debuit, quantum reliqui duo ſimul; adeoque hujus hæreditas eſt $= 150 + 250$ flor. $= 400$. flor.

In Probl. II. Ultima æquatio eſt: $x = \frac{4a + d}{7}$. Erat vero $a = 80$, $d = 30$ (111): eſt ergo $x = \frac{320 + 30}{7} = \frac{350}{7} = 50$. Porro x deſignat annos parentis: quibus cognitis anni filii, ſcilicet $x - d$, innoteſcunt; eſt enim $x - d = 50 - 30 = 20$. Hoc eſt, parens erat 50 annorum, filius autem annorum 20.

In Probl. III. Invenimus demum eſſe $x = \frac{4a-4}{11}$. Eſt autem hoc in problemate $a = 100$ (111): itaque eſt $x = \frac{400-4}{11} = \frac{396}{11} = 36$. Hoc eſt, quæſitus oviculaum numerus eſt $= 36$.

Schol. Atque hæc ſunt generales analyſeos operationes, quæ in quolibet problemate reſolvendo locum habent: ſuperſunt adhuc particulares aliquæ regulæ, operationesque in certis problematum claſſibus obſervandæ, quas ſequ. Cap. pertractabimus.

128. Poſtquam ſolutum eſt problema, examinandum eſt, num ſolutio ſit legitima: hoc autem modo inſtituendum eſt *examen*. Singulis literis tam cognitis a, b, c, &c. quam etiam incognitis x, y, &c. ſed jam detectis, ſubſtituantur ſui valores numerici; tum ſingulæ problematis conditiones ponantur ob oculos: ſi numeri illi his conditionibus exacte ſatisfecerint, legitima eſt ſolutio; ſin minus, vitioſa.

e. g. In Probl. I. (111) per primam conditionem, omnium trium filiorum hæreditates ſimul ſumptæ debent eſſe $= 800$ florenis: invenimus autem n. 127, hæreditatem primi filii eſſe 150 flor. 2di $= 250$ flor. 3tii $= 400$ flor. Cum ergo ſit $150 + 250 + 400 = 800$; primæ conditioni ſatisfit. Porro reliquæ problematis conditiones erant, ut hæreditas ſecundi 100 florenis ſit major hæreditate primi, & hæreditas 3tii æquetur hæreditatibus duorum reliquorum ſimul ſumptis: cum ergo ſit $250 = 150 + 100$, & $400 = 150 + 250$; etiam poſteriores hæ problematis conditiones implentur. Solutio ergo problematis fuit legitima.

CAPUT SECUNDUM.

De Analyſi Problematum Simplicium ſpeciatim.

129. Problema vel eſt poſſibile, vel impoſſibile. *Poſſibile* eſt, cujus conditiones non pugnant inter ſe, ac proinde ſolutionem admittunt, cujusmodi ſunt tria illa problemata, quæ præc. Cap. (127) ſolvimus. Problema *impoſſibile* eſt, cujus conditiones inter ſe pugnant. e. g. Si quæratur numerus, qui ſit $\frac{1}{3}$ pars numeri 6, & ſimul $\frac{1}{4}$ pars numeri 12; problema impoſſibile eſt: ejus enim conditiones inter ſe pugnant, ut expendenti patet.

130. Problematis impoſſibilitas vel illico ex ipſis conditionibus rite apprehenſis elucet; vel ſaltem per decurſum operationis ſe ſe manifeſtat, quatenus Analyſta ſuo calculo ad manifeſtum abſurdum deducitur: ut

quum e calculo prodit e. g. totum esse æquale suæ parti, esse $3 = -4$, & similia.

131. Problema possibile aliud est determinatum, aliud indeterminatum. *Determinatum* est, in cujus solutione cujuslibet incognitæ quantitatis valor calculo eruitur, quin ulli incognitæ debeat valor ad arbitrium Analystæ statui. Ejusmodi sunt problemata n. 111. proposita. *Indeterminatum* contra est, in cujus solutione alicui quantitati incognitæ valor ab Analysta pro arbitrio statuitur, ac tum primum valor alterius, vel aliarum incognitarum e formulis calculo acquisitis eruitur. e. g. Si quærantur duo numeri, quorum summa sit $= 100$, quin ulla alia conditio adjiciatur; unus ex incognitis numeris erit x, alter y, eritque ex conditione problematis $x + y = 100$, adeoque $x = 100 - y$ (126. per reg. 3.). At porro in calculo progredi non est integrum, & tamen valor incognitæ x necdum patet, propterea quod ejus valorem ingrediatur incognita quantitas y. Itaque problema est *indeterminatum*, debetque Analysta quantitati y valorem statuere ad arbitrium: quo facto valorem x jam formula ipsa determinabit. Si enim ponatur y esse e. g. $= 20$; erit $x = 100 - 20 = 80$.

132. Coroll. I. Ex æquatione data eatenus eruitur valor incognitæ quantitatis, quatenus ita sensim transformatur æquatio, ut unum ejus membrum solitaria quantitas incognita constituat, in altero autem membro solæ quantitates cognitæ reperiantur (125), itaque ex unica æquatione duæ incognitæ quantitates innotescere minime possunt. Hinc, ut problema sit determinatum, necesse est tot adesse diversas conditiones diversis æquationibus exprimendas, quot incognitæ quantitates diversis literis expressæ in problemate continentur. Si autem plures diversæ literæ, incognitas quantitates designantes, reperiuntur in problemate, quam sint conditiones diversis æquationibus exprimendæ; problema est indeterminatum.

133. Coroll. II. Quodsi plures dentur conditiones, quam sint quantitates incognitæ diversis literis exprimendæ; problema est *plus quam determinatum*. Sed hujusmodi problemata plerumque sunt impossibilia ob pug-

pugnam conditionum, quæ eo caſu plerumque adeſt: poteſt tamen evenire nonnunquam, ut poſtquam ex neceſſariis, ſimulque ſufficientibus conditionibus valores incognitarum quantitatum erutæ ſunt, reliquæ etiam ſuperfluæ conditiones verificentur.

134. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia ſunt ſimplicia, alia compoſita, ſeu altioris gradus. *Simplicia* ſunt, in quorum æquationibus incognitæ quantitates ultra primam potentiam non aſſurgunt: *compoſita* autem, ſeu *altioris gradus* ſunt, in quorum æquationibus aliqua, vel aliquæ quantitates incognitæ ad quadratum, vel cubum, vel altiorem aliquam potentiam ſunt elevatæ. e. g. Problema illud, cujus hæc eſt æquatio: $x = a - b$, *ſimplex* eſt; *compoſitum* autem, ſi hac e. g. æquatione gaudeat: $x^2 - x = ab$.

Schol. Hoc Cap. nonniſi de problematis ſimplicibus acturi ſumus: ac imprimis quidem de problematis ſimplicibus determinatis, unicam incognitam quantitatem continentibus; deinde de ſimplicibus determinatis plurium quantitatum incognitarum; demum de ſimplicibus indeterminatis.

135. PROBLEMA XXXI. *Reſolvere problemata ſimplicia determinata, in quibus unica occurrit quantitas incognita.*

Resolut. Pro reſolvendis hujus generis problematis haud opus eſt aliis regulis, quam iis, ſecundum quas, generales analyſeos operationes n. 110, & ſequ. pertractatæ inſtitui debent. Itaque ſtatutis juxta num. 110 denominationibus, eruatur per n. 112 æquatio; tum per regulas n. 126. traditas ad unum terminum incognitum, & ſolitarium reducatur: denique reſolvatur in numeros (127).

EXEMPLA.

I. *Quidam interrogatus, quotnam haberet famulos, ſic reſpondit: dimidia pars meorum famulorum laborat in vinea; pars tertia piſcatur; tres autem famulos miſi venatum: jam plures non habeo. Quæritur, quotnam famulos habuerit.*

Operatio 1ma (110). Sit $3 = a$; numerus omnium famulorum $= x$: erit eorum dimidia pars $= \frac{x}{2}$, & pars tertia $= \frac{x}{3}$.

Oper. 2da (112). Quoniam adæquatum famulorum numerum juxta problematis conditionem constituunt pars eorundem dimidia, pars tertia, & præterea tres; hæc habetur æquatio: $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a$.

Operat. 3tia (125). Per reg. 1. (126) tollendo primam fractionem, adeoque totum multipl. per 2, est: - - - $2x = x + \frac{2x}{3} + 2a$

Tollendo fract. alteram, adeoque per 3 multiplic. est: $6x = 5x + 6a$.

Per reg. 2. transponendo $5x$, est: $6x - 5x = 6a$.

Id est: $x = 6a$.

Operat. 4ta (128). Est $a = 3$; est ergo x, seu numerus famulorum $= 18$.

Examen (128). Cum sit $x = 18$; est $\frac{x}{2} = 9$ & $\frac{x}{3} = 6$. Igitur hos valores literis substituendo in æquatione, quam *operat.* 2da invenimus, deberet esse $18 = 9 + 6 + 3$. Quæ æquatio cum stet, solutionem legitimam esse evincit.

II. *Abiit Tyrnavia Cajus Romam ante dies* 6, *qui singulis diebus emetitur milliaria* 3: *nunc Titius itidem Tyrnavia Romam movet, idem accurate iter, quod Cajus, emensurus, at singulis diebus confecturus milliaria* 5. *Quæritur, intra quot dies sit Titius Cajum assecuturus.*

Sit $6 = a$, $3 = b$, $5 = c$, quæsitus dierum numerus $= x$. Clarum est, duos hos peregrinos eo temporis momento conventuros, quo milliaria ab utroque emensa fuerint totidem; itaque amborum milliaria algebraice exprimenda sunt, & inter se æquanda. Porro Cajus intra dies a, Titii iter præcedentes, confecit milliarium numerum $= ab$, confecturus adhuc intra dies x millia-

rium

rium numerum $= bx$: hinc numerus milliarium a Cajo, dum ipſum Titius aſſequatur, emetiendorum eſt $= ab + bx$. Titius, qui, antequam Cajum aſſequatur, perget tantum diebus x, conficiet milliarium numerum $= cx$. Hanc itaque habemus æquationem:

$$cx = ab + bx$$

Transponendo bx (nam $cx > bx$) eſt: $cx - bx + ab$;
Dividendo totum per $c - b$ (28. reg. 3.) eſt:

$$x = \frac{ab}{c-b}.$$

Æquationem reſolvendo in numeros, eſt $x = \frac{6 \times 3}{5 - 3}$.

Seu eſt $x = \frac{18}{2} = 9$.

III. *Data ſumma, & differentia duorum numerorum invenire numeros ipſos.*

Sit ſumma data $= s$, differentia $= d$. Numerus quæſitus major ſit $= x$: eo ipſo numerus minor eſt $= x - d$. At idem numerus minor eſt etiam $= s - x$; ſi enim ex ſumma duorum inæqualium numerorum ſubtrahatur numerus major, clarum eſt, remanere debere numerum minorem. Itaque eſt:

$$x - d = s - x \text{ (101)}.$$

Transpon. imprimis $- x$, deinde $- d$, eſt:

$$2x = s + d;$$

Dividendo per 2. eſt $x = \frac{s+d}{2}$.

Hoc eſt, *generatim quicunque duo inæquales numeri aſſumantur; ſemper numerus major eſt æqualis ipſorum ſemiſummæ addita ſemidifferentia.*

Porro: numerus minor eſt, uti diximus, $= x - d$, ac proinde loco x ſubſtituendo valorem nunc inventum, eſt numerus minor $= \frac{s+d}{2} - d$. Totum hoc multiplicando per 2, acquiritur numeri minoris duplum $= s + d - 2d = s - d$ (8): quod duplum ſi dividatur per 2, acquiritur numerus minor $= \frac{s-d}{2}$.

Hoc eſt, *generatim quicunque duo inæquales numeri aſſumantur, ſemper minor eſt æqualis ipſorum ſemiſummæ dempta ſemidifferentia.*

e. g. Si aſſumantur numeri 12 & 8, quorum ſemiſumma eſt $= 10$, ſemidifferentia $= 2$; erit major, ſeu $12 = 10 + 2$, & minor, ſeu $8 = 10 - 2$.

Schol. Duo adhuc exempla ſubjicimus; ſed compendio, ut Tirones in iis uberius ſe ſe exercere queant,

IV. *Interrogatus quispiam, quotnam florenos lucratus ſit, reſpondit: $\frac{2}{3}$ partes mei lucri additis ejusdem lucri $\frac{3}{4}$ partibus efficiunt 34 florenos. Quæritur; quotnam is florenos ſit lucratus.* Sit $34 = a$, numerus quæſitus x; eſt per conditionem problematis $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = a$. Hinc $x = 24$.

V. *Aliquot milites certam aureorum ſummam hoſti ereptam habuerunt inter ſe æqualiter dividendam. Primum tentarunt ſinguli accipere ex ſumma aureos 7; at 5 aureos experti ſunt deeſſe ſibi ad æquam diviſionem: dum autem tentarunt ſinguli accipere aureos 5; exacte ſucceſſit diviſio, quin ullus ex ſumma aureus aut deeſſet, aut ſupereſſet. Quæritur, quotnam fuerint millites illi.* Sit numerus militum $= x$; ex conditione problematis hæc obtinetur æquatio: $7x - 5 = 6x$. Hinc $x = 5$. Unde innoteſcit etiam numerus aureorum $= 5 \times 6 = 30$.

136. Si in quopiam problemate determinato plures occurrant quantitates incognitæ, adeoque etiam æquationes (132); fere quælibet id genus æquatio plures, quam unam, complectitur incognitas quantitates. Jam vero ex æquatione plures incognitas quantitates complectente nullius incognitæ quantitatis valor poteſt erui; quia nequit ejusmodi æquatio ita transformari, ut unum ejus membrum unica incognita quantitas ſolitaria conſtituat, in altero autem membro ſolæ cognitæ quantitates reperiantur. Itaque ex qualibet id genus æquatione eliminandæ ſunt incognitæ quantitates præter unicam, ac tum demum unicæ hujus relictæ valor ex ea æquatione eruendus. Praxim hujus eliminationis dabit ſequens

137.

137. PROBLEMA XXXII. *Si dentur duæ æquationes eandem incognitam quantitatem complectentes; quantitatem illam incognitam ex alterutra ipsarum eliminare.*

RESOLUT. Plures id genus eliminationis praxes habentur, quarum jam hanc, jam illam pro variis problematum propositorum adjunctis Analysta usurpare poterit, 1*ma* praxis est per *substitutionem*: si nempe valor cujusdam incognitæ quantitatis ex una æquatione erutus in altera eidem incognitæ substituatur. e. g. Ponamus aliquod problema per 2dam analyseos operationem in has duas æquationes resolvi: $x + y = a$, & $3x = 2y$. In priore transponendo y, acquiro $x = a - y$: quem valorem si loco x substituam in altera æquatione, loco $3x = 2y$ acquiro $3a - 3y = 2y$; hoc est, incognitam x hoc pacto ex æquatione altera elimino.

2*da* praxis est per *compositionem* duarum quantitatum uni eidemque tertiæ æqualium: scilicet si e duabus æquationibus totidem valores ejusdem incognitæ eliciantur, & in unam æquationem componantur. e. g. In exemplo pro prima praxi allato, prima æquatio in hanc transformari potest: $x = a - y$; altera in hanc: $x = \frac{2y}{3}$; scilicet ope theorematum, & regularum ad 3tiam analyseos operationem pertinentium. Hoc est, duo diversi ejusdem incognitæ x valores acquiruntur: qui cum inter se æquales esse debeant (101), in hanc æquationem incognita x jam carentem componi possunt: $a - y = \frac{2y}{3}$.

Curandum autem est, ut duo diversi ejusdem incognitæ valores, in novam æquationem componendi, ex ejusmodi duabus diversis æquationibus eruantur, quarum una non dependeat ab altera; seu quarum una in alteram ope generalium regularum (126) transformari non possit: secus enim valores illos componendo ejusmodi æquatio acquiretur, cujus membra post varias transformationes demum utrinque fient æqualia nihilo; cujusmodi æquatio solvendo problemati apta prorsus non est. Sic si quis ex his duabus æquationibus: $a +$

$2x = c - y$, & $\frac{a}{2} + x = \frac{c-y}{2}$ (quarum prior in alteram, dividendo per 2, transformatur) duos diversos incognitæ x valores eruere, eosque in novam æquationem, e qua deinde alterius incognitæ y valorem detegat, componere vellet; irrito conatu laboraret, ut periclitanti patebit.

3*tia* praxis est per *additionem* unius æquationis ad alteram. e. g. Si in aliquo problemate hæ duæ æquationes inveniantur: $x + y = a$, & $x - y = b$; addendo sibi has duas æquationes, erit $x + y + x - y = a + b$, seu erit $2x = a + b$: si enim æqualibus addantur æqualia, manent æqualia. Consequenter acquiritur nova æquatio, in qua incognita y non amplius comparet. At hæc praxis nonnisi tunc potest adhiberi, quum per additionem id obtinetur, ut quantitas incognita ob contraria sua signa, quorum unum in una, alterum in altera æquatione habuerat, se se elidat.

4*ta* praxis est per *subtractionem* unius æquationis ab altera. e. g. Sint rursus in aliquo problemate hæ duæ æquationes: $x + y = a$, & $x - y = b$. Posteriorem a priore subtrahendo acquiritur residuum $= x + y - x + y = a - b$; seu acquiritur $2y = a - b$. At neque hanc praxim posse semper exerceri, clarum est: ut adeo plerumque alterutra e duabus primis sit arripienda.

138. PROBLEMA XXXIII. *Resolvere problemata simplicia determinata, in quibus plures occurrunt quantitates incognitæ.*

Resolut. 1) Per primam generalem analyseos operationem fiant denominationes more consueto (110). e. g. Sit propositum sequens problema: *Mater de trium filiorum ætate rogata respondet; primus cum secundo habet annos* 25; *secundus cum tertio annos* 60; *tertius cum primo annos* 37. *Quæritur ætas singulorum.* Sint anni primi filii $= x$, secundi $= y$, tertii $= z$; $25 = a$, $60 = b$, $37 = c$.

2) Operatione altera totidem æquationes eruantur e datis conditionibus, quot fuerint quantitates incognitæ diversis literis denominatæ. Atque adeo in assumpto exemplo tres eruendæ sunt æquationes: nempe ex pri-

prima conditione hæc: $x + y = a$; ex ſecunda hæc: $y + z = b$; ex tertia denique hæc: $x + z = c$.

3) Quod ad tertiam analyſeos operationem attinet: in id incumbendum eſt, ut æquationes datæ reducantur ad unam, in qua nonniſi unica incognita reperiatur, ceteris eliminatis; tum ex nova hac æquatione valor ejus incognitæ, quæ in ea adhuc continetur, eruatur. Id genus reductio praxibus n. 137. allatis, accedente Analyſtæ judicio, frequentioreque exercitio haud difficulter peragetur.

e. g. In aſſumpto exemplo, ut eliminetur imprimis incognita x, duo ipſius valores, tametſi ab incognita nondum liberi, eliciantur primam æquationem transformando in hanc: $x = a - y$, tertiam vero in hanc: $x = c - z$. Hos duos ejusdem x valores componendo acquiritur nova æquatio: $a - y = c - z$, in qua incognita x jam non comparet. Deinde ut acquiratur æquatio, in qua neque x, neque y compareat; æquatio nunc inventa transformetur in hanc: $y = a - c + z$, & æquatio ſecunda $y + z = b$ in hanc: $y = b - z$: hoc pacto acquiruntur duo valores ejusdem incognitæ y, ſolam incognitam z complectentes; quos valores componendo exurgit hæc æquatio: $a - c + z = b - z$, in qua jam neque x, neque y, ſed ſola incognita z reperitur.

Habita hac æquatione, valor incognitæ z jam per ſolas generales tertiæ operationis leges n. 126 allatas erui poteſt: juxta quas ea æquatio in hanc demum abit: $z = \frac{b - a + c}{2}$. Porro invento valore incognitæ z, facile jam innoteſcunt valores etiam incognitarum x & y: at compendii gratia eos in ſolis numeris ſequente operatione invenire ſatis erit.

4) Quarta analyſeos operatio (127) hoc modo inſtituenda eſt. Valor unius ex incognitis operatione præcedente plene detectus reſolvatur in numeros methodo conſueta; tum valor ille numericus ſubſtituatur eidem incognitæ in æquatione altera, alterius incognitæ valorem exprimente: hoc pacto jam alterius quoque incognitæ valor innoteſcet, & ſic porro. Sic in

aſ-

assumpto exemplo valor incognitæ z in numeros resolutus, est $=36$; qui valor si in æquatione $y = b - z$ loco z substituatur, erit $y = b - 36 = 60 - 36 = 24$. Denique si porro valor iste in altera æquatione $x = a - y$ loco y substituatur; erit $x = a - 24 = 25 - 24 = 1$. Itaque jam omnium incognitarum valores detecti sunt: est nempe $x = 1$, $y = 24$, $z = 36$.

EXEMPLA ALIA.

I. *Herus cum suo servo hoc pactum iniit: pro quolibet die, quo laboraveris* (inquit herus ad servum) *præter victum acquires a me* 3 *grossos: ex adverso singulis diebus, quibus feriatus fueris, tu mihi pro victu* 7 *grossos solves. Elapsis a pacto diebus* 50 *nihil servo debebatur, nec servus quidquam hero debuit. Quæritur, quot diebus laboraverit servus, quot item diebus feriatus fuerit.*

Operat. 1*ma.* Ponamus $50 = a$, dies laboris $= x$, dies feriarum $= y$. Expendenti facile patet, solutionem problematis connexam esse tam cum summa grossorum laborando acquisitorum a servo, quam etiam cum summa grossorum ab eodem feriando perditorum: ac proinde utraque summa denominetur, oportet. Est autem prior summa $= 2x$, posterior $= 7y$.

Oper. 2*da.* Juxta conditionem problematis dies laboris, & feriarum simul sumpti erant $= 50$; est ergo $x + y = a$. Deinde summa grossiorum laborando acquisitorum erat æqualis summæ grossorum feriando perditorum; elapsis enim 50 diebus nec herus servo, nec iste illi debuit quidquam: est ergo $3x = 7y$.

Operat. 3*tia.* Ex æquatione prima acquiritur $x = a - y$. Hic valor si in æquatione altera loco x substituatur, est $3a - 3y = 7y$. Ex æquatione hac per communes regulas (126) invenitur valor incognitæ y: est enim demum $y = \frac{3a}{10}$. Valor x compendii gratia solum in numeris sequ. operat. eruetur.

Ope-

Operat. 4ta. Literis numeros ſubſtituendo, eſt $y = \frac{3 \times 50}{10} = 15$. Qui valor ſi in æquatione $x = a - y$ loco y ſubſtituatur, eſt $x = a - 15 = 50 - 15 = 35$. Hoc eſt, ſervus ille 35 diebus laboravit, & 15 diebus feriatus eſt.

II. Euclides hoc olim ænigma propoſuiſſe fertur: *Ibant Mulus, & Aſina vinum portantes: Aſinæ ſub pondere ingemiſcenti ait Mulus: quid ita lamentaris? Si e vino, quod portas, menſuram unam mihi dederis; onus meum erit duplo majus, quam tuum: ſin tu a me unam menſuram acceperis, æqualia pondera feremus. Quæritur, quot menſuras Mulus, quot item Aſina bajulaverit.*

Numerus menſurarum onus muli conſtituentium ſit $= x$, & numerus menſurarum aſinæ impoſitarum ſit $= y$. Imprimis ſi aſina menſuram unam mulo daret; muli onus eſſet $= x + 2$, aſinæ autem remaneret onus $= y - 1$: porro hac menſuræ translatione facta, onus muli per 1mam problematis conditionem duplo majus eſſet, quam aſinæ, adeoque eſſet æquale oneri aſinæ per 2 multiplicato; eſt ergo $x + 1 = 2y - 2$. Quodſi autem mulus aſinæ menſuram daret; aſinæ onus eſſet $= y + 1$, mulo autem remaneret onus $= x - 1$: porro hoc caſu per alteram probl. condit. æqualia eſſent ipſorum onera; eſt ergo $x - 1 = y + 1$. Jam ex priore æquatione acquiritur $x = 2y - 3$: qui valor ſi in æquatione altera loco x ſubſtituatur, eſt $2y - 4 = y + 1$. Hinc $y = 5$. Qui valor ſi loco y ſubſtituatur in æquatione $x = 2y - 3$, patet eſſe $x = 7$.

III. *Quidam certam puræ ſiliginis menſuram ſolet vendere 22 groſſis, & eandem puri tritici menſuram 38 groſſis: cuperet autem ita commiſcere ſiliginem cum tritico, ut menſura mixti frumenti, ſervato priore utriusque pretio, valeat 30 groſſos. Quærit itaque; quotamnam menſuræ partem debeat efficere ſiligo, quotam triticum.*

Sit $22 = a$, $38 = b$, $30 = c$; pars menſuræ, quam ſiligo efficere debent, ſit $= x$, quam autem efficere debet triticum, ſit $= y$. Imprimis erit $x + y = 1$; nam quæſitæ portiones ſiliginis & tritici ſimul ſumptæ per

corcondit. probl. debent efficere menſuram unam. Deinde pretium ſiliginis in ea menſura contentæ erit $= ax$, & pretium tritici $= by$: hinc quoniam mixti frumenti menſura integra debet 30 groſſos valere, erit $ax + by = c$. Jam ex æquatione prima acquiritur, $x = 1 - y$: qui valor ſi in æquatione altera loco x ſubſtituatur, erit $a - ay + by = c$. Unde per communes regulas (126) demum acquiritur $y = \frac{c-a}{b-a} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Hic valor ſi loco y ſubſtituatur in æquatione $x = 1 - y$; patet eſſe etiam $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Hoc eſt, una dimidia pars ex ſiligine, & altera dimidia pars ex tritico eſt accipienda.

IV. *Quidam volens emere ſacharum vidit ad 7 libras ſachari exſolvendas deeſſe ſibi 2 florenos: itaque nonniſi 4 libras emit; quibus exſolutis reſiduos adhuc habuit 5 groſſos. Quæritur imprimis, quanti fuerit una libra ſachari, deinde quantum pecuniæ is emptor habuerit.*

Omnem pecuniam in groſſos reſolvamus, adeoque 2 florenos in 40 groſſos. Sit autem $40 = a$; pretium ſachari in groſſis ſit $= x$, pecunia tota emptoris itidem in groſſis ſit $= y$. Eſt imprimis $7x = y + a$; eſt deinde $4x = y - 5$. Unde $x = 15$, & $y = 65$. Hoc eſt, ſachari libra vendebatur 15 groſſis, & emptor habuit 65 groſſos, ſeu 3 florenos, 5 groſſos.

V. *Determinare generatim* factum *duorum numerorum, quorum uterlibet decade ſit minor: e. g. quantum ſit ſepties octo.* Unius numeri a decade differentia ſit $= x$, alterius $= y$. Erit prior numerus $= 10 - x$, poſterior $= 10 - y$; conſequenter *factum* ipſorum ($10 - x$ multiplicando per $10 - y$) erit generatim $= 100 - 10x - 10y + xy$. Ex cujus *facti* contemplatione hoc theorema eruitur: *Ut acquiratur factum duorum numerorum, quorum uterlibet decade ſit minor; ex* 100 *ſubtrahantur tot decades, quot ſunt unitates in utriusque numeri a decade differentia, & reſiduo addatur factum earundem differentiarum.* e. g. Quæratur, quot ſint ſepties octo. Numeri 7 a 10 differentia eſt $= 3$, numeri 8 $= 2$; adeoque utraque ſimul differentia eſt $= 5$, & factum earundem differentiarum eſt $= 6$. Itaque 5 decades

des (ſeu 50) ſubtrahantur a 100, & reſiduo $= 50$ addantur 6; acquiretur numerus $56 = 7 \times 8$.

Schol. 1. Ex hujus problematis ſolutione intelligi poteſt theoria ejus multiplicandi praxeos, quæ vulgo *Tabula Pigri* nuncupatur. Nimirum concipe 10 depreſſos manuum tuarum in pugnam contractarum digitos eſſe totidem decades: erit *ſumma* per omnes ſimul digitos expreſſa $= 100$. Deinde erige tot digitos in una manu, quot unitates continet unius *factoris* dati a 10. differentia $= x$; in altera autem manu erige tot digitos, quot unitates continet alterius *factoris* dati a 10 differentia $= y$: porro erecti digiti non amplius decades, ſed ſimplices unitates valere concipiantur. Clarum eſt, per reſiduos digitos depreſſos (quorum unusquisque, uti monuimus, decadem valet) exprimi ſummam $= 100 - 10x - 10y$; quia tot jam decades ſubtractæ ſunt a 100, quot in utraque manu digitos erexiſti. Denique ſi erectos unius manus digitos per erectos alterius manus digitos multiplicaveris, *factum* erit $= xy$: ii enim digiti datorum factorum a 10 differentias exprimunt. Itaque ſumma per depreſſos digitos veluti per totidem decades expreſſa, addito *facto* digitorum erectorum manus unius in erectos alterius manus digitos ductorum, erit $= 100 - 10x - 10y + xy$, adeoque erit ipſum *factum* ex datorum factorum multiplicatione enaſcens.

e. g. *Quæratur, quantum ſit* 7×8. Quoniam $10 - 7 = 3$, & $10 - 8 = 2$, erige in manu una 3 digitos, in altera 2 digitos. 5 depreſſi digiti valent 5 decates, ſeu 50; quibus ſi addas erectorum unius manus digitorum in erectos alterius ductorum factum $= 6$, acquires $56 = 7 \times 8$. Item: *quæratur, quantum ſit novies novem, ſeu* 9×9. Quoniam $10 - 9 = 1$, tam in una, quam in altera manu unicus duntaxat digitus erigatur: depreſſi 8 digiti valebunt 80; digiti erecti in ſe ducti dant factum $= 1$, nam $1 \times 1 = 1$: eſt itaque $9 \times 9 = 81$.

Schol. 2. Ex his facile patet, ope *tabulæ pigri* nonniſi ejusmodi factorum *factum* poſſe compendio obtineri, quorum neuter eſt minor numero 5. & alteruter major eodem numero 5.

139. PROBLEMA XXXIV. *Reſolvere problemata ſimplicia indeterminata.*

Resolut. Problematum indeterminatorum ſolutio iisdem legibus peragitur, quibus determinatorum; hoc uno diſcrimine, quod in problemate indeterminato ob defectum ſufficientium æquationum non poſſint omnium incognitarum valores calculo erui, ſed incognitæ cuipiam, uni, vel ſubinde pluribus etiam valor ad arbitrium Analyſtæ ſtatui debeat, atque tunc primum reliquarum incognitarum valores conſuetis analyſeos operationibus detegi poſſint.

e. g. Sit propoſitum problema ſequens. *Quidam ſtatuit* 100 *florenos expendere in coemenda triplicis ſpeciei vina. Urna unius vini venditur* 7 *florenis; alterius urna* 5 *florenis; tertii urna* 3 *florenis. Vult autem univerſe emere tantum* 18 *urnas. Quæritur, quotnam urnas accipere debeat ex prima ſpecie, quot ex ſecunda, quot ex tertia, ut pro* 18 *urnis nec plus, nec minus ſolvere debeat, quam florenos* 100.

Sit $18 = a$, $100 = b$; numerus urnarum accipiendarum ex prima ſpecie ſit $= x$, accipiendarum ex ſpecie ſecunda $= y$, ex tertia $= z$. Erit pretium primæ ſpeciei $= 7x$, ſecundæ $= 5y$, tertiæ $= 3z$: cum ergo totum pretium debeat 100 florenos æquare, erit imprimis $7x + 5y + 3z = b$. Deinde, cum urnæ coemendæ debeant eſſe 18, eſt $x + y + z = a$. Atque hæ duntaxat æquationes poſſunt ex datis conditionibus erui: hinc quoniam incognitæ ſunt tres, problema eſt indeterminatum (132).

Jam æquatio altera transformetur in hanc: $x = a - y - z$, & valor iſte in æquatione prima ſubſtituatur loco x; erit $7a - 7y - 7z + 5y + 3z = b$.

ſeu erit: $7a - 2y - 4z = b$.

Adeoque erit: $y = \dfrac{7a - b}{2} - 2z$.

Atque ex poſtrema hac æquatione non amplius poteſt incognita z eliminari, ob defectum æquationis tertiæ,

tiæ, ſed ejus valor ad arbitrium Analyſtæ determinari debet. Qua in re judicio opus eſt; ne tantus ſtatuatur valor quantitati z, ut pro alterutra ceterarum deinde ex calculo prodire debeat valor negativus, aut nihilo æqualis. Ponamus ergo eſſe $z = 3$. Hoc valore loco z ſubſtituto, poſtrema æquationum præcedentium abit in hanc: $$y = \frac{7a - b}{2} - 6.$$

Conſequenter valor incognitæ y jam innoteſcit: ſi enim literis numeros ſubſtituamus, eſt:

$$y = \frac{126 - 100}{2} - 6 = 7.$$

Porro ut etiam valor incognitæ x innoteſcat; in æquatione $x = a - y - z$ ſubſtituatur loco y valor nunc inventus $= 7$, & loco z valor ſuperius ad arbitrium ſtatutus $= 3$. Hoc facto erit $x = 18 - 7 - 3 = 8$. Atque ita habemus jam valores determinatos omnium trium incognitarum: ſcilicet ſi ponatur $z = 3$, eſt $y = 7$, & $x = 8$.

EXEMPLA ALIA.

I. *Sint inveniendi duo inæquales numeri, quorum facto ſi addatur ſumma, prodeant* 79.

Sit $79 = a$, unus numerus quæſitus $= x$, alter $= y$: erit eorum factum $= xy$, & ſumma $= x + y$.

Itaque per condit. probl. eſt: $xy + x + y = a$.

Transponendo y, eſt: $xy + x = a - y$.

Dividendo per $y + 1$, eſt: $x = \frac{a - y}{y + 1}$.

Jam cum ex æquatione hac nequeat incognita y eliminari, ſtatuatur ipſi valor pro arbitratu, ſed talis tamen, qui minor ſit quam a, ne x evadat quantitas negativa. e. g. Si ponatur $y = 7$, erit $x = \frac{79 - 7}{8} = 9$.

II. *Sint inveniendi duo numeri, quorum factum sit æquale duplæ summæ.*

Sit numerus quæsitorum unus $= x$, alter $= y$: erit eorum factum $= xy$, & dupla summa $= 2x + 2y$.

Itaque per condit. probl. est: $xy = 2x + 2y$.

Transponendo $2x$, est $xy - 2x = 2y$.

Ponamus jam esse $y = 3$; erit $3x - 2x = 6$, seu $x = 6$.

III. *Floreni* 100 *distribuendi sunt inter* 20 *pauperes, ita ut singuli viri acquirant flor.* 7. *singulæ mulieres flor.* 5, *& singuli pueri flor.* 1. *Quæritur numerus virorum, mulierum, & puerorum.*

Numerus virorum sit $= x$, mulierum $= y$, puerorum $= z$: sit deinde $100 = a$, $20 = b$. Erit imprimis $x + y + z = b$; erit deinde $7x + 5y + z = a$. Porro ex prima æquatione est $z = b - x - y$, & ex secunda est $z = a - 7x - 5y$. Itaque duos ejusdem z valores componendo, est:

$$b - x - y = a - 7x - 5y.$$

Transpon. b, & $-y$, item $-7x$, est:

$$6x = a - b - 4y$$

Dividendo per 6, est, $x = \dfrac{a - b - 4y}{6.}$

Id est: $x = \dfrac{80 - 4y}{6.}$

Statuatur jam incognitæ y valor ad arbitrium, sed ita, ut deinde valor x in numeris integris absque fractione acquiratur: e. g. ponatur $y = 8$; erit $x = \dfrac{90 - 32}{6} = 8$. Hinc, quoniam ex prima æquatione eruitur esse $z = b - x - y$, erit $z = 20 - 8 - 8 = 4$. Hoc est, si ponatur $y = 8$, est etiam $x = 8$, & $z = 4$.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De Analyſi Problematum compoſitorum ſecundi gradus.

140. Si in æquatione compoſita maximus exponens quantitatis incognitæ ſit $= 2$; id genus æquatio dicitur *ſecundi gradus*; ſi dictus exponens ſit $= 3$. vel $= 4$ &c. æquatio eſt 3*tii*, vel 4*ti* &c. gradus. Nos, qui ſolis Tironibus ſcribere ſtatuimus, prætermiſſis altiorum graduum æquationibus, utpote quarum reſolutionem ſublimior Analyſis ſibi vendicat, nonniſi methodum ſolvendi æquationes ſecundi gradus ſtrictim exponemus.

141. PROBLEMA XXXV. *Reſolvere problemata determinata ſecundi gradus.*

Resolut. *Prima*, & *ſecunda* analyſeos operatio (110, & 112) more conſueto peragatur: *tertia* vero operatio, ſeu æquationis ad unum terminum incognitum, & ſolitarium reductio (135) his legibus fiat.

1*mo*. Per communes leges in præcedentibus traditas, & hactenus uſurpatas ita transformetur æquatio, ut in uno æquationis membro ſit imprimis quadratum incognitæ, per nullam quantitatem multiplicatum, vel diviſum, deinde omnes illi, ſiqui adſint, termini, in quibus eadem incognita, ſed ſimplex comparet; in altero autem membro meræ cognitæ quantitates contineantur. Hinc ſi plures diverſæ incognitæ adfuerint in æquatione problematis; conſueta incognitarum *eliminatio* (137) inſtituenda eſt, priusquam ad ſequentes regulas tranſeatur. Porro dicta æquationis transformatio ita inſtituenda eſt, ut imprimis quadratum incognitæ ſit poſitivum, cum nullum quadratum poſſit eſſe negativum, uti ex n. 21. *reg.* 2. intelligere licet; deinde ut idem quadratum in eo æquationis membro, ad quod pertinet, primo loco ſcribatur. e. g. Si per 2dam analyſeos operationem hæc obtineatur æquatio: $4ax = 2b - 2x^2$; ea per communes regulas (126) eousque

que transformanda eſt, dum in hanc demum abeat: $x^2 + 2ax = b$.

2do. Exacta ad regulam primam æquatione, ſi in uno æquationis membro ſolum incognitæ quadratum fuerit repertum; facile jam abſolvitur reductio: nihil enim amplius reſtat faciendum, quam extrahenda eſt utrinque radix quadrata (126. reg. 5.) Quæ quidem radix ex quadrato incognitæ *reapſe* extrahatur (82): in altero autem æquationis membro extractio radicis nunc adhuc *indicetur* duntaxat, præfixo radicali ſigno. e. g. Hæc æquatio: $x^2 = a - b$ in hanc commutetur: $x = \sqrt{(a-b)}$,

3tio. Quodſi autem in uno æquationis ad primam regulam jam exactæ membro quadratum incognitæ habuerit adnexos ſibi alios terminos (unum vel plures) incognitam ſimplicem continentes, uti ſuperius in exemplo regulæ *1mæ* videre eſt; hoc modo procedatur: quadratum incognitæ habeatur pro primo membro quadrati binomiam radicem habentis, quod membrum in formula generali (83) per a^2 repræſentatur; reliqui adjuncti termini, incognitam ſimplicem continentes, conſiderentur ut alterum ejusdem quadrati membrum, in formula generali (83) per $+ 2ab$, vel per $- 2ab$ repræſentari ſolitum. Hoc pacto illud æquationis membrum erit quadratum *incompletum* radicis binomiæ: ſcilicet carebit ſolo quadrato termini ſecundi radicis. e. g. In hac æquatione: $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$, habeatur x^2 pro primo, & $- 4ax$ pro ſecundo quadrati binomiam radicem habentis termino, in formula generali (83) per $- 2ab$ repræſentari ſolito; primum æquationis membrum $x^2 - 4ax$ erit quadratum incompletum radicis binomiæ, in quo ſolum quadratum ſecundi termini radicis, per b^2 repræſentari ſolitum deſideretur.

Jam ut valor incognitæ in hujusmodi æquationibus detegatur; id genus quadratum incompletum prævie complendum eſt: quæ completio priusquam per ſequentem regulam 3tam, aut 5tam peragatur, hæc facienda ſunt: 1) extrahatur radix ex eo termino, qui pro primo quadrati binomiam radicem habentis membro aſſumptus eſt, ſeu in aſſumpto exemplo ex x^2; radix illa erit primus radicis binomiæ terminus (83): 2) per

per duplum hujus termini primi dividatur alterum quadrati binomiam radicem habentis membrum, nempe in aſſumpto exemplo dividatur $-4ax$ per $2x$; quotus enaſcens (qui in aſſumpto exemplo eſt $-2a$) erit ſecundus radicis binomiæ terminus (83). Porro hæc radix binomia notetur ad latus folii; tum ſecundus ejusdem radicis terminus elevetur ad quadratum, quod pariter notetur. In aſſumpto exemplo radix binomia eſt $= x - 2a$; adeoque quadratum ſecundi termini eſt $+ 4a^2$.

4to. His peractis inveſtigetur, num quadratum termini ſecundi radicis nunc inventæ reperiatur in altero æquationis membro, meras cognitas quantitates continente, idque cum ſigno negativo, an non. Et ſiquidem repertum fuerit, transferatur mutato ſigno ad membrum illud, quod incognitas continet. Hoc facto illud æquationis membrum, quod incognitas continet, jam erit *completum* quadratum, cujus radix binomia per reg. tertiam determinata jam eſt: quippe præter quadratum termini primi radicis, & duplum termini primi in ſecundum ductum aderit jam in eo membro etiam quadratum termini ſecundi radicis. Sic in exemplo regulæ 3tiæ, ſeu in æquatione $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$, quadratum ſecundi termini radicis, quod eſt $= 4a^2$ reperitur inter cognitas quantitates cum ſigno negativo: quo quadrato in aliud æquationis membrum translato, ita ut ſit $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$, membrum illud æquationis jam evadit completum quadratum radicis binomiæ $x - 2a$: quippe continet imprimis primi termini radicis quadratum $= x^2$, deinde duplum termini primi in ſecundum ductum $= - 4ax$, deinde termini ſecundi quadratum $= + 4a^2$; quæ partes ſimul ſumptæ conſtituunt completum quadratum radicis binomiæ (83).

Itaque extrahatur utrinque radix quadrata: ac ejus quidem membri, quod completum quadratum eſt, radix quadrata jam per 3tiam regulam innotuit; in altero autem æquationis membro extractio radicis nunc adhuc indicetur duntaxat, præfigendo ſignum radicale. e. g. Aſſumpta ſuperius æquatio $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$ transformetur in hanc: $x - 2a = \sqrt{2b}$. Quo facto facile jam reducitur æquatio ad unum incognitum, &

 foliſolitarium terminum, ſi nempe $-2a$ transponatur, ut ſit $x = \sqrt{(2b)} + 2a$.

Porro dictum eſt ſuperius, inveſtigandum eſſe, num quadratum termini ſecundi radicis reperiatur in altero æquationis membro *cum ſigno negativo*. Si enim ejusmodi quadrato in altero illo æquationis membro ſignum poſitivum eſſet præfixum; pro tertio quadrati binomiam radicem habentis membro haberi nequaquam poſſet. Aſſumamus enim hanc e. g. æquationem: $x^2 - 4ax = 2b + 4a^2$. Tametſi $+ 4a^2$ ſit re ipſa quadratum ſecundi termini; ſi tamen mutato ſigno ad alterum æquationis membrum transferretur, ut ſit $x^2 - 4ax - 4a^2 = 2b$, in eo membro quadratum binomiæ radicis non compleret: nam $- 4a^2$ non poteſt eſſe quadratum termini ſecundi, cum nec poſitivus, nec negativus terminus poſſit habere quadratum negativum (21. *reg.* 2).

5*to*. Quodſi autem peractis iis, quæ regula 3tia exigit, quadratum ſecundi termini radicis in altero æquationis membro ſolas quantitates cognitas continente non reperiatur cum ſigno negativo; quadratum illud cum ſigno poſitivo addatur utrique æquationis membro. Hoc pacto *complebitur* in uno æquationis membro quadratum radicis binomiæ, ut clarum eſt, & ſimul membrorum æqualitas retinebitur. e. g. Sit $x^2 + 2ax = b$. Aſſumatur (per *reg.* 3*tiam*) x^2 pro primo quadrati binomiam radicem habentis membro, & $+ 2ax$ pro ſecundo. Erit primus radicis binomiæ terminus x; per cujus duplum, ſeu per $2x$ ſi dividatur $+ 2ax$, obtinebitur ſecundus radicis terminus $+ a$: adeoque tota radix erit $= x + a$, & quadratum ſecundi termini radicis erit a^2. Jam quadratum iſtud, cum non reperiatur in altero æquationis membro, addatur utrique membro æquationis, ut ſit $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$: hoc pacto primum æquationis membrum erit completum quadratum radicis binomiæ $x + a$. Hinc extrahendo utrinque radicem quadratam, erit $x + a = \sqrt{(b + a^2)}$, & transponendo a, erit demum $x = \sqrt{(b + a^2)} - a$.

Quarta analyſeos operatio more conſueto fit, literis numeros ſubſtituendo (127). e. g. In æquatione $x = \sqrt{}$
$(b +$

$(b + a^2) - a$ ſit $a = 5$, $b = 24$: erit $x = \sqrt{(14 + 25)} - 5 = \sqrt{(49)} - 5 = 7 - 5 = 2$.

Schol. Ex his intelligere jam licet, quidnam ſit quadratum *incompletum*, & quando, ac quomodo *compleri* debeat. Scilicet, quando in æquatione ſecundi gradus (ut de altioribus æquationibus nihil dicam) ad regulam primam ſuperius allatam exacta, membrum unum præter quadratum incognitæ adnexos habet alios etiam terminos (unum vel plures) eandem incognitam, ſed ſimplicem continentes; membrum illud eſt quadratum incompletum radicis binomiæ: nam continet quidem quadratum termini primi radicis, & duplum termini primi ductum in terminum ſecundum, ut ex tertia regula intelligi poteſt; at caret quadrato termini ſecundi. Hoc ergo caſu *compleri* debet ejusmodi quadratum; ſecus enim ex eo radix extrahi non poſſet retenta membrorum æqualitate, quæ tamen extractio ad detegendum incognitæ valorem neceſſaria eſt. Hoc autem ordine proceditur in complendo quadrato: per regulam etiam invenitur uterque radicis terminus, & terminus ſecundus ad quadratum elevatur; tum inveſtigatur, num quadratum iſthoc reperiatur in altero æquationis membro cum ſigno negativo, an non. Si reperitur; regula 4ta ſuppeditat methodum complendi quadratum: ſin minus; regula 5ta.

PROBLEMATA *Determinata 2di gradus.*

I. *Aliquot Patresfamilias cum ſuis ſinguli ſervis ad perficiendum quodpiam opus confluxerunt. Singuli patresfamilias totidem ſervos habuerunt, quot fuerunt omnes ſimul patresfamilias: numerus autem ſervorum erat* $= 625$. *Quæritur numerus patrumfamilias.*

Sit $625 = a$, numerus patrumfamilias $= x$. Per condit. problem. eſt $x^2 = a$. ut conſideranti patet. Itaque (per *reg. 2dam*) ſufficit mox utrinque radicem quadratam extrahere: ac proinde eſt $x = \sqrt{a} = \sqrt{625} = 25$.

II. *Duo luſores ex theatro reduces hunc in modum ſermocinantur. Primus ad ſecundum: tu 4 florenis plus lucratus es, inquit, quam ego. Secundus ei reſpondet: ſi tam mei lucri, quam etiam tui numerus elevaretur ad* *quadratum; duo hæc quadrata ſimul ſumpta accurate 400 florenos efficerent. Quæritur, quot florenos primus, quot ſecundus ſit lucratus.*

Operat. 1ma. Sit $4 = a$, $400 = b$. numerus florenorum, quos primus luſor lucratus eſt, ſit $= x$; erit numerus florenorum ſecundi luſoris $= x + a$.

Operat. 2da. Quadratum quantitatis x eſt $+ = x^2$, & quadratum quantitatis $x + a$ eſt $= x^2 + 2ax + a^2$ (83): eſt ergo per condit. probl. $2x^2 + 2ax + a^2 = b$.

Operat. 3tia juxta regulas paullo ſuperius allatas facienda. Ut regulæ *1mæ* ſatisfiat, transponatur a^2, & tota æquatio per 2 dividatur: erit $x^2 + ax = \frac{b - a^2}{2}$ Porro ſi (per *reg. 3tiam*) x^2 pro primo, & $+ ax$ pro ſecundo quadrati binomiam radicem habentis membro aſſumatur; primum æquationis membrum continebit quadratum incompletum, in quo ſolum ſecundi termini radicis membrum deſideretur. Itaque compleatur id quadratum hoc modo. 1) Per reg. 3tiam ſcribatur x pro primo radicis termino. 2) Per hujus duplum, ſeu per x^2 dividatur $+ ax$, & quotus $= + \frac{a}{2}$ pro ſecundo radicis termino ſcribatur; cujus quadratum eſt $= \frac{a^2}{4}$ 3) Iſthoc quadratum, quoniam in altero æquationis membro non reperitur, per *reg. 5tam* utrique æquationis membro addendum eſt, ut ſit $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ Quo facto anterius membrum æquationis jam completum quadratum eſt, habens radicem binomiam $x + \frac{a}{2}$ Hinc extrahendo utrinque radicem quadratam, eſt:

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{b - a_2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Transpon. $\frac{a}{2.}$ eſt $x = \sqrt{\left(\frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2.}$

Operat. 4*ta*. Literis numeros ſubſtituendo, eſt:

$$x = \sqrt{\left(\frac{\frac{400 - 16}{2}}{} + \frac{16}{4}\right)} - 2.$$

Seu eſt: $x = \sqrt{196)} - 2 = 14 - 2 = 12.$

Itaque primus luſor lucratus eſt flor. 12, alter flor. $12 + 4 = 16$.

III. *Cajus agricola ait ad Titum: ego 4 metretis minus ſeminavi, quam tu ſeminaveris; & tamen, ſi metretæ ſingulæ, quas ſeminavi, tantum procrearent, quantum tu ſeminaſti, inferrem in horreum metretas 165. Quæritur, quot metretas ſeminaverit Cajus, quot metretas Titius.*

Sit $165 = a$: numerus metretarum a Titio ſeminatarum ſit $= x$; erit numerus metretarum a Cajo ſeminatarum $= x - 4$. Hinc, ſi metretæ ſingulæ a Cajo ſeminatæ tantum procrearent, quantum ſeminavit Titius; Cajus inferret in horreum metretas $= (x - 4) x = x^2 - 4x$. Conſequenter eſt per condit. probl. $x^2 - 4x = a$.

Porro quod ad *operat.* 3*tiam* per regulas ſuperius allatas inſtituendam attinet: æquatio hæc ad *primam* earum regularum exacta jam eſt. Per *reg.* 3*tiam* in ſiniſteriore ejus membro habeatur x^2 pro primo quadrati binomiam radicem habentis membro, $- 4x$ pro altero: erit primus radicis terminus x, & ſecundus ($- 4x$ per $2x$ dividendo) erit $- 2$. Hujus quadratum $= + 4$ ſi utrique æquationis membro (*per reg.* 5*tam*) addatur, complebitur quadratum in dexteriore æquationis membro, eritque:

$$x^2 - 4x + 4 = a + 4.$$

Extrah. rad. quadr. eſt: $\quad x - 2 = \sqrt{(a + 4)}.$

Transponendo $- 2$, eſt: $\quad x + \sqrt{(a + 4)} + 2.$

Con-

Confequenter ob $a = 165$. eſt :

$$x = \sqrt{(169)} + 2 = 13 + 2 = 15.$$

Hoc eſt, Titius ſeminavit 15 metretas, adeoque Cajus metretas 11.

IV. *Invenire numerum x, qui quadrato ſuo additus efficiat ſummam* $= 600$.

Sit $600 = a$; erit per condit. probl. $x^2 + x = a$.

Complendo (per *reg.* 3. & 5.) quadratum erit :

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$$

Extrah. utrinque radic. quadrat. eſt :

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)}.$$

Transpon. $\frac{1}{2}$ eſt : $x = \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}.$

Loco a valorem ſuum ſubſtit. eſt :

$$x = \sqrt{\left(600 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}.$$

Si reducantur 600 ad fractionem ejusdem cum adjuncta fractione denominationis, eſt :

$$x = \sqrt{\left(\frac{2401}{4}\right)} - \frac{1}{2}$$

Reapſe extrah. radicem quadr. eſt :

$$x = \frac{49}{2} - \frac{1}{2} = 24.$$

V. *Quidam interrogatus, quotnam aureos nummos quot item argenteos in marſupio ſuo haberet, ſic reſpondit : ſi numerus aureorum ſubtrahatur a quadrato argenteorum, reſiduum eſt* $= 395$; *ſi autem quadratum argenteorum addatur quadrato aureorum, ſumma eſt* $= 425$. *Quæritur, quotnam habeat aureos nummos, quot argenteos.*

Sit $395 = a$, $425 = b$, numerus aureorum $= x$, argenteorum $= y$. Eſt per primam condit. probl. $y^2 - x$

$-x = a$, & per ſecundam eſt $x^2 + y^2 = b$. Quoniam duæ adſunt incognitæ, alterutra eliminanda eſt. Scilicet ex prima æquatione eſt $y^2 = a + x$, & ex altera eſt $y = b - x^2$. Quos duos ejusdem y valores componendo eliminatur y^2, eſtque: $a + x = b - x^2$. Transponendo a & $-x^2$, eſt $x^2 + x = b - a$. Tum per regulas ſuperius allatas continuando operationem, demum acquiritur $x = 5$ Qui, valor ſi in æquatione $y^2 = a + x$, loco x ſubſtituatur; eſt $y^2 = a + 5$: unde innoteſcit $y = 20$.

Schol. Quandoque accidit, ut æquatio ſecundi gradus inter operandum abeat in ſimplicem, quin opus ſit completione quadrati. e. g. *Quærantur duo numeri, quorum ſumma ſit* $= 20$, *&* *differentia quadratorum* $=$ 80. Sit $20 = a$, $80 = b$, quæſitus numerus major $= x$, minor $= y$. Eſt per condit. probl. imprimis $x + y = a$; eſt deinde $x^2 - y^2 = b$.

Jam ex priore æquatione eruitur eſſe $x = a - y$: itaque (totum elevando ad quadrat.) eſt $x^2 = a^2 - 2ay + y^2$. Qui valor ſi in æquatione altera loco x^2 ſubſtituatur, eſt $a^2 - 2ay + y^2 - y^2 = b$; ſeu eſt $a^2 - 2ay = b$. Hoc eſt, æquatio compoſita 2di gradus jam in ſimplicem, adeoque communi methodo (138) ſolvendam abit. Qua quidem methodo reperietur demum eſſe $y = 8$, & hoc valore in æquatione $x = a - y$ loco y ſubſtituto reperietur eſſe $x = 12$.

142. PROBLEMA XXXVI. ***Reſolvere problemata indeterminata ſecundi gradus.***

Resolut. Incognita quantitas, cui valor (quod nimirum ea non poſſit ex æquatione eliminari) pro arbitrio ſtatui debebit, tractetur interim inſtar quantitatis cognitæ, omnisque operatio methodo n. 141 tradita inſtituatur, dum perveniatur ad quartam analyſeos operationem. Ad hanc ubi perventum fuerit, ſtatuatur ad arbitrium valor ei incognitæ, quæ hactenus inſtar cognitæ tractabatur: at in eo valore ſtatuendo judicio opus erit, ut nimirum is valor intra limites ab intermediis æquationibus determinatos ſtatuatur, quemadmodum

dum monuimus etiam in resolutionibus problematum indeterminatorum simplicium (139).

e. g. *Sint inveniendi duo numeri x & y, quorum factum additum quadrato primi efficiat summam* $= 105$.

Sit $105 = a$; erit per condit. probl. $x^2 + xy = a$.

Compl. quadrat., erit. $x^2 + xy + \frac{y^2}{4} = a + \frac{y^2}{4}$.

Extrah. radic. quadr. erit: $x + \frac{y}{2} = \sqrt{\left(a + \frac{y^2}{4}\right)}$.

Transpon. $\frac{y}{2}$, erit: $x = \sqrt{\left(a + \frac{y^2}{4}\right)} - \frac{y}{2}$.

Ponamus jam esse $y = 8$; erit $x = \sqrt{(105 + 16)} - 4$.
Id est, erit $x = 11 - 4 = 7$.

SECTIO QUARTA.

DE VARIIS QUANTITATUM RELATIONIBUS.

CAPUT PRIMUM.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica; item de Proportione Arithmetica.

143. *Ratio* est habitudo quædam duarum quantitatum ad se invicem comparatarum. Comparantur autem duæ quantitates inter se, ut innotescat, an, & quantum altera excedat alteram, vel quoties una in alia contineatur. Hinc duplex est ratio: nempe alia est *arithmetica*, *geometrica* alia. *Ratio arithmetica* est habitudo duarum quantitatum quoad *differentiam*; ita ut ea differentia, quæ obtinetur unam quantitatem ab altera subtrahendo, indicet earundem quantitatum rationem

nem arithmeticam. Sic rationem arithmeticam numerorum 8 & 10, indicat eorundem differentia = 2.

144. *Ratio geometrica* eſt habitudo duarum quantitatum quoad *quotitatem*; ita ut is quotus, qui obtinetur unam quantitatem dividendo per alteram, indicet rationem geometricam earundem quantitatum. e g. Si quæratur ratio geometrica numerorum 2 & 6; divide 6 per 2, & quotus 3 indicabit, numerum 6 eſſe triplum numeri 2, ac proinde 2 eſſe tertiam partem numeri 6: vel vero divide 2 per 6, & quotus $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ indicabit, numerum 2 eſſe tertiam partem numeri 6, ac proinde hunc eſſe illius triplum. Unde patet, duarum quarumpiam quantitatum *a* & *b* rationem geometricam perinde innoteſcere, ſive *a* per *b*, ſive *b* per *a* dividatur.

145. Quantitates, quæ ad ſe invicem comparantur, tam in Arithmetica, quam geometrica ratione vocantur *termini*: ſcribantur autem in eodem uterque ordine, interjectis inter ipſos duobus punctis. e. g. 2 : 6; id quod in ratione arithmetica ſic enuntiatur: 2 *differt a* 6; in geometrica autem ſic: 2 *ſe habet ad* 6. Prior terminus vocatur *antecedens*; poſterior *conſequens*. Sic in ratione 2 : 6. *antecedens* eſt 2, *conſequens* autem 6.

146. PROBLEMA XXXVII. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentat quamcunque rationem arithmeticam.*

Resolut. Cujusvis rationis arithmeticæ antecedens poteſt appellari a, differentia d. Jam conſequens vel erit major antecedente, vel minor; quippe hujusmodi comparationes nonniſi inter æquales quantitates inſtitui ſolent. Si fuerit major; conſtabit ex antecedente addita differentia, adeoque erit $= a + d$: ſin autem minor fuerit; conſtabit ex antecedente dempta differentia, ac proinde erit $= a - d$. Ergo quævis ratio arithmetica bene repræſentatur hac formula: $a : a \pm d$; id eſt, vel hac: $a : a + d$, vel hac: $a : a - d$.

Schol. Tametſi quælibet ratio arithmetica ſeorſim conſiderata bene repræſentetur hac formula $a : a \pm d$;

nihi-

nihilominus ſi duæ rationes arithmeticæ antecedentibus, & differentiis diſcrepantes comparentur inter ſe, non bene repræſentatur utraque per eandem formulam: ſed ſi una repræſentetur per dictam formulam, altera, quemadmodum alium habet antecedentem, & differentiam, ita per formulam aliis literis conſtantem repræſentanda erit. e. g. Antecedens alterius rationis dicatur b, differentia c : eam rationem rite repræſentabit formula, $b : b \pm c$. Quodſi tamen eadem fuerit utriusque rationis *differentia* : litera d in utraque formula retinenda erit, ita ut rationem primam formula $a : a \pm d$, alteram formula $b : b \pm d$ repræſentet.

147. Quotus ille, qui duarum quarumpiam quantitatum rationem geometricam exprimit (144), vocatur *exponens* rationis geometricæ. Jam aliqui pro *exponente* ſumunt eum quotum, qui acquiritur antecedentem dividendo per conſequentem; alii autem eum, qui naſcitur ex diviſione conſequentis per antecedentem. Uterque quotus perinde exprimit rationem geometricam duarum quantitatum ad ſe invicem comparatarum, uti n. 144 vidimus: conſequenter perinde eſt, ſive eum quotum aſſumas pro *exponente* rationis geometricæ, qui naſcitur ex diviſione antecedentis per conſequentem. ſive eum, quem dat conſequens per antecedentem diviſus. At ſi alterutrum ſemel elegeris, eundem deinceps modum conſtanter retineas, oportet. Nos conſtanter pro exponente eum quotum habebimus, qui ex diviſione conſequentis per antecedentem enaſcitur. Sic in ratione $2 : 6$, nobis exponens eſt $= \frac{6}{2} = 3$.

148. Quælibet quantitas a dicitur eo majore in ratione eſſe comparate ad aliam quampiam quantitatem b, quo eadem quantitas a comparate ad b major fuerit. Sic 1) numerus 3 comparate ad 6 eſt in majori ratione, quam comparate ad 9 : nam 3 comparate ad 6 eſt $\frac{1}{2}$ pars, & comparate ad 9 eſt tantum $\frac{1}{3}$ pars. 2) Numerus 8 eſt in majori ratione comparate ad 2, quam comparate ad 4; quippe eſt quadruplus numeri 2, & numeri

meri 4 eſt tantum duplus. 3) Numerus 12 eſt in majori ratione comparate ad 4, quam ſit 6 comparate ad 3; nam 12 eſt triplus numeri 4. & 6 eſt tantum duplus numeri 3 &c. Unde ſi pro exponente rationis geometricæ (uti nos conſtanter facturi ſumus) is quotus aſſumatur, qui naſcitur diviſione conſequentis per antecedentem; eo majori in ratione eſt antecedens ad conſequentem, quo minor fuerit exponens rationis, & contra. Sic ſi aſſumamus rationes 2: 4, & 3: 9; exponens prioris rationis eſt 2, poſterioris eſt 3: eſt autem prioris rationis antecedens in majore ratione comparate ad ſuum conſequentem, quam ſit antecedens poſterioris ad conſequentem ſuum. Contrarium obtinet ſi conſideretur ratio conſequentis ad antecedentem: nam e. g. in aſſumptis rationibus 2 : 4 & 3: 9, quemadmodum prioris exponens minor eſt exponente poſterioris, ita conſequens prioris in minori ratione eſt comparate ad ſuum antecedentem, ac ſit conſequens poſterioris ad antecedentem ſuum.

149. Coroll. Quoniam exponens indicat, quantanam ſit geometrica ratio duarum quarumpiam quantitatum; duas id genus rationes, quarum idem eſt exponens, æquales eſſe oportet: & viciſſim, ſi duæ quæpiam rationes ſint æquales; eundem utraque exponentem habeat, eſt neceſſe. e. g. Rationes 2: 4 & 3: 6, eo ipſo quod eundem habeant exponentem (nempe 2), ſunt inter ſe æquales; & quoniam ſunt æquales, diverſos habere exponentes omnino non poſſunt.

150. PROBLEMA XXXVIII. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet quamcunque rationem geometricam.*

Resolut. Cujusvis rationis geometricæ antecedens poteſt appellari a, exponens m: quibus poſitis conſequens erit am. Cum enim exponens rationis nobis ſit is quotus, qui oritur diviſione conſequentis per antecedentem (147); reapſe conſequens rationis eſt *dividendus*, antecedens *diviſor*, & exponens *quotus*: atqui *diviſor* in *quotum* ductus ſemper eſt æqualis *dividendo* (Arith. 55.); quodſi ergo antecedens rationis dicatur a, exponens m, consequens ejusdem rationis est $= am$. Igitur quævis ratio geometrica bene repræsentatur hac formula: $a : am$.

Schol. Tametsi quælibet ratio geometrica seorsim considerata bene repræsentetur per $a : am$; nihilominus si duæ rationes geometricæ antecedentibus, exponentibusque discrepantes repræsentandæ sint; duæ diversæ formulæ sunt assumendæ, non secus, ac de ratione arithmetica n. 146. *Schol.* locuti fuerimus. Nempe si una id genus rationum repræsentetur per $a : am$; alterius antecedens dicatur b, exponens n, atque ita altera illa ratio repræsentetur per $b : bn$. Quodsi tamen idem fuerit utrobique *exponens*; litera m in utraque formula retinenda erit, ita ut primam rationem formula $a : am$, alteram formula $b : bm$ repræsentet.

151. THEOREMA XIV. *Si rationis cujusvis geometricæ tam antecedens, quam consequens per idem multiplicetur, aut dividatur; ratio non mutatur.*

Demonstr. Quævis ratio geometrica repræsentari potest hac formula $a : am$ (150), & quivis multiplicator, aut divisor potest vocari n. Jam imprimis si rationis $a : am$ tam antecedens, quam consequens multiplicetur per idem n; nova ratio $an : amn$ eundem exponentem m habebit, quem habuit prius: si enim amn per an dividatur, quotus est $= m$ (27). Deinde si tam antecedens, quam consequens rationis $a : am$ dividatur per idem n; nova ratio $\frac{a}{n} : \frac{am}{n}$ rursus eundem exponentem m habebit, quem habuit prius: si enim fractio $\frac{am}{a}$ dividatur per fractionem $\frac{a}{n}$ quotus est $= \frac{amn}{an}$ (60) $= m$ (45). Jam vero ratio tamdiu non mutatur, quamdiu eundem retinet exponentem (149). Veritas ergo theorematis manifesta est.

Schol. Si cujuspiam rationis termini fuerint fractiones quæcunque; tollentur compendio fractiones illæ, si numerator antecedentis per denominatorem consequentis, & numerator consequentis per denominatorem

rem antecedentis multiplicetur. e. g. Ratio $\frac{b}{a} : \frac{d}{c}$ æquivalet huic, $bc : ad$; uti patebit, si rationis $\frac{b}{a} : \frac{d}{c}$ utrumque terminum per idem ac multiplicaveris.

152. Duæ rationes æquales *proportionem* constituunt, ut adeo proportio nihil aliud sit, quam æqualitas duarum rationum. Unde etiam duæ rationes proportionem constituentes signo = ipsis interjecto jungi solent. Porro quemadmodum ratio, ita etiam proportio alia est *arithmetica*, *geometrica* alia. Scilicet duæ rationes arithmeticæ æquales, seu eadem differentia gaudentes constituunt proportionem arithmeticam; duæ autem geometricæ rationes æquales, seu eundem exponentem habentes (159) efficiunt proportionem *geometricam*. e. g. $3 : 5 = 7 : 9$ est proportio arithmetica, & sic enunciatur: 3 *differt a* 5 *sicut* 7 *a* 9; at e. g. $2 : 4 = 3 : 6$, est proportio geometrica, & sic enunciatur: 2 *se habet ad* 4, *sicut* 3 *ad* 6.

153 Coroll. Omnis ergo proportio quatuor habet terminos, duos nimirum antecedentes, & duos consequentes. e. g. In hac proportione $2 : 4 = 3 : 6$, 2 & 3 sunt antecedentes, 4 & 6 consequentes.

154. In qualibet proportione, tam arithmetica, quam geometrica primus terminus, & quartus simul vocantur *extremi*; secundus autem & tertius *medii* nuncupantur. e. g In hac proportione, $2 : 4 = 3 : 6$, 2 & 6 sunt *extremi*, 4 & 3 *medii*.

155. Quælibet proportio (sive sit arithmetica, sive geometrica) vel est *continua*, vel *discreta*. Illa proportio vocatur *continua*, in qua primus consequens est idem cum secundo antecedente; & terminus ille, qui ita repetitur, *medius proportionalis* dici solet. e. g. Hæc proportio arithmetica $3 : 5 = 5 : 7$ est *continua*, estque in ea terminus 5 *medius proportionalis*. Quodsi autem consequens primus non sit idem cum antecedente secundo; proportio vocatur *discreta*, ut hæc geometrica, $2 : 4 = 3 : 6$.

156. PROBLEMA XXXIX. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet quamlibet proportionem arithmeticam.*

Resolut. Quævis ratio arithmetica una bene repræſentatur hac formula, $a : a \pm d$, & altera huic æqualis hac, $b : b \pm d$ (146, ejusque *Schol.*): cum ergo duæ rationes æquales conſtituant proportionem (152); quævis proportio arithmetica bene repræſentatur hac formula, $a : a \pm d = b : b \pm d$; id eſt, vel hac, $a : a + d = b : b + d$, vel hac. $a : a - d = b : b - d$.

157. Coroll. Quoniam in proportione continua, conſequens primæ rationis eſt antecedens rationis ſecundæ (155); in formula generali $a : a \pm d = b : b \pm d$, ſiquidem de continua proportione arithmetica ſit ſermo, eſt $b = a \pm d$. Quem proinde valorem loco b ſubſtituendo, formula generalis quamlibet *continuam* proportionem arithmeticam repræſentans eſt hæc, $a : a \pm d = a \pm d : a \pm 2d$.

Schol. Ceterum, quamvis iſtud ita ſe habeat; prior tamen illa formula generalis omnem proportionem arithmeticam, etiam quæ reapſe continua eſt, rite repræſentat: hoc uno notato, quod in ea, ſi de continua proportione ſpeciatim ſit ſermo, ſit $a \pm d = b$.

158. THEOREMA XV. *In quavis proportione arithmetica ſumma* extremorum (154) *æquatur ſummæ* mediorum.

Demonstr. Quævis arithmetica proportio repræſentari poteſt hac formula, $a : a \pm d = b : b \pm d$ (156, & 157 Schol.): atqui in hac formula patet, ſummam extremorum eſſe æqualem ſummæ mediorum; in hac enim eſt $a + b \pm d = a \pm d + b$. Ergo in quavis proportione arithmetica &c.

159. PROBLEMA XL. *Datis tribus terminis invenire quartum arithmetice proportionalem.*

Resolut. Si dentur tres termini $a, b, c,$ & quæratur quartus x, ſtabit hæc proportio arithmetica, $a : b = c : x$;

$c : x$; erit ergo $a+x=b+c$ (185), ac proinde erit $x=b+c-a$. Hoc est, si secundus & tertius terminus in unam summam cogantur, & ab ea summa subtrahatur terminus primus; residuum erit ipse quæsitus terminus quartus. e. g. Si dentur tres hi termini, 2, 5, 9, & quæratur quartus x; erit $x=5+9-2=12$. Et sane stabit hæc arithmetica proportio, $2:5=9:12$; nam utrobique eadem est differentia, nimirum 3.

160. Coroll. Atque hinc facile jam intelligitur, quomodo inveniendus sit datis duobus terminis tertius, aut inter duos datos medius arithmetice proportionalis. Scilicet si 1) datis duobus terminis a & b quæratur tertius x; stabit hæc continua proportio, $a : b =: x$ erit ergo $a+x=2b$ (158), adeoque erit $x=2b-a$. Hinc si e. g. sit $a=3$, $b=5$; erit $x=7$.

Si 2) inter datos duos terminos e. g. inter 2 & 8 quæratur medius arithmetice proportionalis x; stabit hæc continua proportio arithmetica, $2 : x = x : 8$; erit ergo $2+8=2x$ (158), ac proinde erit $x=\frac{2+8}{2}=5$.

CAPUT SECUNDUM.

De Natura, variisque Transformationibus Proportionum Geometricarum.

161. In omni quantitatum genere proportiones geometricæ sæpissime in considerationem veniunt. Unde etiam quando vocabula *ratio*, *proportio*, *proportionalis* absque omni addito proferuntur, ea semper pro *geometricis* sumuntur. Nos nobilissimam hanc Algebræ partem, id est, *proportionis geometricæ doctrinam*, qua nihil esse magis necessarium per universam Mathesim, Philosophiamque naturalem, nihil in omni vitæ humanæ commercio utilius, nonnisi ignarus inficiari potest, hoc, & sequ. duobus Capit. pertractabimus.

162. *Proportionem geometricam* (uti jam n. 152 dictum est) constituunt duæ rationes geometricæ æquales, seu eundem exponentem habentes (149). Unde

 etiam

etiam evidens proportionis geometricæ ſignum eſt, ſi utraque ratio eundem habeat exponentem; ſicut ex adverſo, ſi duæ quæpiam rationes non habeant eundem exponentem, eæ veram proportionem geometricam non efficiunt.

163. PROBLEMA XLI. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet quamlibet proportionem geometricam.*

Resolut. Quævis ratio geometrica una bene repræſentatur hac formula, $a : am$, & altera huic æqualis hac, $b : bm$ (150, ejusque *Schol.*) cum ergo duæ rationes geometricæ æquales efficiant proportionem geometricam (162); quævis proportio geometrica bene repræſentatur hac formula, $a : am = b : bm$.

164. Coroll. Si de continua proportione geometrica ſit ſermo; in formula nunc inventa, eſt $am = b$ (155): tunc ergo formula generalis (loco b ponendo am) abit in hanc, $a : am = am : am^2$.

165. THEOREMA XVI. *In quavis proportione geometrica, factum* extremorum *eſt æquale facto* mediorum. *Nempe ſi ſit, $a : b = c : d$, erit $ad = bc$.*

Demonstr. Quævis geometrica proportio repræſentari poteſt hac formula, $a : am = b : bm$ (163): atqui hac in formula patet, factum extremorum eſſe æquale facto mediorum; in hac enim eſt $abm = amb$: ergo in quavis proportione geometrica &c.

166. PROBLEMA XLII. *Datis tribus terminis invenire quartum geometrice proportionalem.*

Resolut. Si dentur tres termini a, b, c, & quæratur quartus x, ſtabit hæc proportio geometrica, $a : b = c : x$; erit ergo $ax = bc$ (165) ac proinde erit $x = \frac{bc}{a}$. Hoc eſt, ſi terminus ſecundus ducatur in tertium, & factum eorum dividatur per terminum primum; quotus enaſcens erit ipſe quæſitus terminus quartus. e. g. Si dentur tres hi termini, 2, 4, 3, & quæratur quartus x; erit $x = \frac{4 \times 3}{2} = 6$. Et ſane ſtare hanc geometricam

pro

proportionem, $2 : 4 = 3 : 6$ in confeſſo eſt; quippe in utraque ratione idem eſt exponens, nimirum 2.

167. Coroll. I. Itaque quicunque tres termini in proportionem ordinari poſſunt, dummodo pro quarto termino aſſumatur factum terminorum ſecundi, & tertii diviſum per terminum primum. e. g. Tres hi termini, $a, b, c,$ in hanc proportionem ordinari poſſunt, $a : b = c : \frac{bc}{a}$: vel in hanc, $c : b = a : \frac{ab}{c}$ &c.

168. Coroll. II. Ex problemate n. 166 reſoluto facile intelligitur, quomodo inveniendus ſit datis duobus terminis tertius, aut inter duos datos medius geometrice proportionalis. Scilicet ſi 1) datis duobus terminis a & b, quæratur tertius x, ſtabit hæc continua proportio, $a : b = b : x$; erit ergo $a x = b^2$ (165), adeoque erit $x = \frac{b^2}{a}$. Hinc ſi e. g. ſit $a = 2, b = 4$; erit $x = \frac{16}{2} = 8$.

Si 2) inter datos duos terminos 2 & 8 quæratur medius geometrice proportionalis x; ſtabit hæc proportio continua, $2 : x = x : 8$; erit ergo $x^2 = 16$ (165), adeoque erit $x = \sqrt{16} = 4$.

169. THEOREMA XVII. *Aſſumamus quaſcunque duas quantitates æquales, quarum tam una, quam altera in duos factores reſolvatur. Quatuor hi duarum quantitatum æqualium factores ſemper ſunt reciproce proportionales: id eſt, ſemper poſſunt in proportionem ordinari ita, ut unius quantitatis factores aſſumantur pro ſolis* extremis *proportionis, alterius vero factores pro ſolis* mediis.

Demonstr. Quævis duæ æquales quantitates, quarum tam una, quam altera in duos factores reſolvi debeat, repræſentari poteſt per $AB = cd$; ergo ad theorematis veritatem generatim demonſtrandam ſufficit oſtendere, hac in æquatione factores eſſe reciproce proportionales, ſeu ſtare hanc proportionem: $A : c = d : B$. Illud autem ſic oſtendo. Evidens ſignum bonæ proportionis geometricæ eſt, ſi utraque ejus ratio eundem habeat exponentem (162); atqui utraque hujus proportionis ratio eundem habet exponentem; nam hic exponentes ſunt $\frac{c}{A}$ & $\frac{B}{d}$ (147), quos eſſe æquales ſic declaro. Aſſumamus factum antecedentium proportionis $A : c = d : B$. quod factum eſt $A\,d$. Quoniam eſt ex hypotheſi $A\,B = cd$, utrumque dividendo per idem factum Ad, eſt $\frac{AB}{Ad} = \frac{cd}{Ad}$ (119): ergo reducendo fractiones ad ſimpliciores expreſſiones (45) eſt $\frac{B}{d} = \frac{c}{A}$. Hoc eſt, dicti exponentes ſunt æquales.

170. Coroll. I. Itaque ſi 1) ſit $C\,T = ct$; ſtat $C : c = t : T$. Scilicet prioris quantitatis factores C & T pro extremis proportionis aſſumendo, alterius vero factores c & t pro mediis. 2) Si ſit $a\,b\,c = d^2$; ſtabit, $a : d = d : b\,c$. Nempe prior quantitas poteſt reſolvi in factores a & bc, pro extremis proportionis aſſumendos; alterius autem quantitatis factores ſunt d & d. 3) Si ſit $a\,b = c$: eſt $a : c = 1 : b$. Scilicet prioris quantitatis factores ſunt a & b, poſterioris autem ſunt c & 1.

171. Coroll. II. Evidens ſignum eſt bonæ proportionis, ſi factum extremorum ſit æquale facto mediorum. Ponamus enim, ſi fieri poteſt, non ſtare hanc proportionem, $a : d = c : b$, tametſi ſit $a\,b = c\,d$. Ea proportio non ſtabit, uti ponitur: at ſimul ſtare debet; nam æqualium quantitatum $a\,b$ & $c\,d$ factores ſunt reciproce proportionales, hoc eſt, in proportionem $a : d = c : b$ ordinari poſſunt (169): ergo proportio illa ſtabit, & ſimul non ſtabit, quod abſurdum eſt.

172. THEOREMA XVIII. *Si in proportione geometrica tam antecedens, quam conſequens unius ejusdemque rationis per idem multiplicetur, aut dividatur; proportio non turbatur.* Sic ſi ſit $a : b = c : d$; primæ ratio-

tionis terminos per idem m multiplicando, aut dividendo, ſtabit $am : bm = c : d$, vel $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$.

Demonstr. Ratio quæcunque $a : b$ non mutatur ſi ejus tam antecedens, quam conſequens per idem multiplicetur, aut dividatur (151): ergo ratio illa, quemadmodum ante, ita etiam poſt multiplicationem, aut diviſionem eſt $= c : d$. Adeoque veritas theorematis manifeſta eſt.

173. Coroll. Quemadmodum una ratio, ita etiam altera multiplicari, aut dividi per quamcunque quantitatem poteſt manente proportione; modo unius ejusdemque rationis termini per eandem uterque quantitatem multiplicentur, aut dividantur. Sic ſi ſtat, $a : b = c : d$; licebit prioris rationis terminos per quamcunque quantitatem m, poſterioris autem terminos per quamcunque n multiplicare, vel dividere, aut unius terminos multiplicare, alterius autem dividere manente proportione. Hoc eſt, ſtabunt hæ proportiones: $am : bm = cn : dn$; $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$; $am : bm = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$ &c. Nam nulla id genus multiplicatio, aut diviſio mutat ſive priorem, ſive poſteriorem rationem (151).

Schol. Nunc recenſitas proportiones ſtare, hoc quoque modo deprehendes. Quoniam ponitur ſtare $a : b = c : d$, eſt $ad = bc$ (165). Quo notato, ſi in recenſitis proportionibus extremos inter ſe, & medios inter ſe multiplicaveris, facile deprehendes ubique factum extremorum eſſe æquale facto mediorum: quod evidens ſignum eſt bonæ proportionis (171).

174. THEOREMA XIX. *Si in quapiam proportione uterque antecedens, vel uterque conſequens per idem multiplicetur, aut dividatur; proportio illa non mutatur.* e. g. Cum ſit $2 : 8 = 6 : 24$; licebit 1) antecedentes per 3 multiplicare, ſtabitque, $6 : 8 = 18 : 24$; licebit 2) conſequentes multiplicare per 2, ſtabitque $2 : 16 = 6 : 48$; licebit 3) antecedentes multiplicare per 2, & ſimul conſequentes dividere per 4, ſtabitque $4 : 2 = 12 : 6$ &c.

Demonstr. Quævis proportio repræſentari poteſt hac formula, $a : am = b : bm$ (163): atqui in hac formula per dictas multiplicationes, aut diviſiones proportionem non turbari clarum eſt; ſemper enim manet factum extremorum æquale facto mediorum. Sic ſi 1) antecedentes per idem c multiplicentur, ut ſit $ac : am = bc : bm$; erit $ambc = acbm$. Si 2) conſequentes multiplicentur per c, ut ſit $a : amc = b : bmc$; rurſus erit $abmc = amcb$. Si 3) antecedentes multiplicentur per c, conſequentes autem dividantur per d, ut ſit $ac : \frac{am}{d} = bc : \frac{bm}{d}$; eritque denique $\frac{acbm}{d} = \frac{ambc}{d}$ &c.

175. THEOREMA XX. *Poteſt* inverti *proportio, quin mutetur; id eſt, poſſunt ex extremis fieri medii, & ex mediis extremi.* e. g. Si ſit $a : b = c : d$; *erit* $b : a = d : c$. *Item poteſt* alternari *proportio, quin mutetur; id eſt, poſſunt medii manentibus extremis permutari, ita ut ex primo conſequente fiat ſecundus antecedens, & viciſſim.* e. g. Si ſit $a : b = c : d$; erit $a : c = b : d$. *Denique poſſunt manentibus mediis* permutari extremi, *ita ut ſi ſit* $a : b = c : d$, *debeat eſſe etiam* $d : b = c : a$.

Demonstr. In omnibus his permutationibus factum extremorum manet æquale facto mediorum, atque adeo proportio perſeverat (171). Quævis enim proportio repræſentari poteſt per $a : am = b : bm$ (163): jam vero ſi 1) *invertendo* fiat $am : a = bm : b$, erit $abm = amb$; ſi 2) *alternando* fiat $a : b = am : bm$, eſt rurſus $abm = bam$; ſi denique 3) *extremos permutando* fiat $bm : am = b : a$, erit $bma = amb$ (*Arith.* 43).

176. THEOREMA XXI. *In qualibet proportione ſumma vel differentia terminorum primæ rationis ita ſe habet ad primum antecedentem, vel conſequentem, uti ſe habet ſumma, vel differentia terminorum ſecundæ rationis ad ſecundum antecedentem, vel conſequentem.* Hoc eſt, ſi ſtat hæc proportio: - - - $a : b = c : d$; Stabunt etiam hæ:

1) Addendo: $a + b : a = c + d : c$.
Vel: $a + b : b = c + d : d$:

2) Subtrahendo : $a - b : a = c - d : c.$
Vel : $a - b : b = c - d : d.$

Demonstr. Nam in omnibus his permutationibus ſactum extremorum manet æquale facto mediorum, ac proinde proportio non mutatur (171) Quævis enim proportio repræſentari poteſt per $a : am = b : bm$ (163). Jam vero ſi 1) fiat *addendo* $a + am : a = b + bm : b$, vel $a + am : am = bm : bm$; aut 2) ſi fiat *ſubtrahendo*, $a - am : a = b - b\ bm : b$, vel $a - am : am = b - bm : bm$; ſemper factum mediorum eſt æquale facto extremorum, ut periclitanti patebit. Semper ergo vera eſt proportio (171).

177. Coroll. Itaque ſi ſtat $a : b = c : d$; ſtabit etiam *mixtim* $a + b : a - b = c + d : c - d$. Nam ex modo demonſtratis ſtant hæ duæ proportiones :

$a + b : a = c + d : c,$
&, $a - b : a = c - d : c.$

Ergo *alternando* (175) ſtabunt hæ quoque :

$a + b : c + d = a : c$
& $a - b : c - d = a : c.$

Jam vero duæ rationes uni tertiæ æquales utique inter ſe quoque æquari debent (101) : eſt ergo $a + b : c + d = a - b : c - d$; & altern. $a + b : a - b = c + d : c - d$.

178. THEOREMA XXII. *Non turbatur proportio, ſi omnes ejus termini ad eandem potentiam eleventur : non turbatur item, ſi ex omnibus ejus terminis eadem radix extrahatur.* Hoc eſt, ſi ſit $a : b = c : d$; eſt etiam $a^m : b^m = c^m : d^m$, item eſt $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Demonstr. Si enim ſtat $a : b = c : d$; eſt $a \times d = b \times c$ (165) Hinc elevando ad quacunque potentiam m, eſt, $a^m \times d^m = b^m \times c^m$; vel vero extrahendo quamcunque radicem n, eſt $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$ (124) Atqui prior æquatio reſolvi poteſt in proportionem hanc, $a^m : b^m = c^m\ d^m$; poſterior autem in hanc, $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$ (169) : ergo

Schol. Atque hæc de transformationibus cujusvis proportionis ſeorſim conſideratæ : ſequentia theoremata con-

continebunt transformationes ex plurium proportionum comparatione oriundas.

179. THEOREMA XXIII. *Si duarum, vel plurium proportionum antecedentes inter se, & consequentes inter se multiplicentur; facta erunt proportionalia.* Hoc eſt:

$$\begin{aligned} &\text{Si ſit} & a : b &= c : d, \\ &\& & e : f &= g : h; \\ \text{erit etiam,} & & ae : bf &= cg : dh. \end{aligned}$$

Demonstr. Nam in proportione, quæ ex ejusmodi multiplicatione enaſcitur, ſemper factum extremorum eſt æquale facto mediorum. Sic in aſſumpto exemplo eſſe $aedh = bfcg$, ſic oſtendo. Cum ex hypotheſi ſit 1) $a : b = c : d$, 2) $e : f = g : h$; erit 1) $ad = bc$, & 2) $eh = fg$ (165). Itaque æqualia per æqualia multiplicando, eſt quoque $ad \times eh = bc \times fg$ (119); ſeu eſt $aedh = bfcg$.

Schol. Dum dicto modo antecedentes inter ſe, & conſequentes inter ſe multiplicantur; *rationes componi* & nova proportio *compoſitis rationibus* oriri dicitur.

180. THEOREMA XXIV. *Si cujuspiam proportionis antecedentes per alterius antecedentes ipſis correſpondentes, conſequentes autem per conſequentes dividantur; quoti erunt proportionales.*
Hoc eſt:

$$\begin{aligned} &\text{Si ſit} & a : b &= c : d, \\ &\& & e : f &= g : h; \\ \text{erit etiam dividendo,} & & \frac{a}{e} : \frac{b}{f} &= \frac{c}{g} : \frac{d}{h}. \end{aligned}$$

Demonstr. Nam in proportione, quam quoti illi conſtituunt, eſt ſemper factum extremorum æquale facto mediorum: ergo (171). Sic in aſſumpto exemplo eſſe $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$, ſic oſtendo. Cum ex hypotheſi ſit 1) $a : b = c : d$, & 2) $e : f = g : h$; eſt 1) $ad = bc$, & 2) $eh = fg$ (165). Itaque æqualia per æqualia dividendo, eſt etiam $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$ (119).

181. THEOREMA XXV. *Sint duæ proportiones, quæ duos terminos ſibi communes habeant: una harum proportionum ſubſcribatur alteri; tum termini utrique proportioni communes dictis duabus lineolis conjungantur, ut a ſubjectis exemplis videre eſt. Jam* 1) *ſi lineæ illæ fuerint* æquidiſtantes, *ſeu paralellæ, ſimulque ſitum obliquum habuerint; reliqui quatuor termini erunt* ex æquo ordinato, *ſeu directe proportionales, ita ut reſidui duo termini proportionis unius ſint in nova proportione meri antecedentes, alterius autem proportionis reſidui duo termini ſint meri conſequentes.*

e. g. Si ſit $a : b = c : d$

& $b : f = d : g$;

erit $a : f = c : g$.

2) *Si lineæ illæ fuerint* æquidiſtantes, *ſeu parallelæ, ſimulque ſitum erectum habuerit, ſed tamen ita, ut vel ſolos antecedentes, vel ſolos conſequentes connectant; reſidui termini rurſus erunt* ex æquo ordinato *proportionales.* e. g.

Si ſit $a : b = c : d$

& $f : b = g : d$;

erit $a : f = c : g$.

3) *Si dictæ lineæ fuerint quidem parallelæ, ſituque erecto, ſed vel ſolos extremos terminos, vel ſolos medios connexuerint; reliqui termini erunt* ex æquo perturbato, *ſeu reciproce proportionales, ita, ut reſidui duo termini proportionis unius ſint in nova proportione extremi; duo autem reſidui termini proportionis alterius eſſe debeant medii, aut viciſſim.* e. g.

Si ſit $a : b = c : d$

$a : f = g : d$;

erit $b : f = g : c$.

4) *Denique ſi lineæ illæ fuerint convergentes, ſive ſurſum, ſive deorſum; reliqui termini pariter* ex æquo perturbato *proportionales erunt.* e. g.

Si

Si ſit $a : b = c : d$

$f : a = d : g$;

erit $b : f = g : c$.

Demostr. 1*mæ partis*. Si enim eſt

$a : b = c : d$.

$b : f = d : g$;

utramque proportionem alternando, prima abit in hanc, $a : c = b : d$.

altera autem in hanc, $b : d = f : g$ (175).

Itaque rationes $a : c$ & $f : g$ ſunt uni tertiæ $b : d$ æquales, ac proinde eſt $a : c = f : g$, & alternando eſt $a : f = c : g$.

Demonstr. 2*dæ partis* Si ſit $a : b = c : d$,

& $f : b = g : d$;

utramque alternando, prima eſt, $a : c = b : d$

altera vero, $f : g = b : d$.

Eſt ergo $a : c = f : g$ (101), & alternando

$a : f = c : g$.

Demonstr. 3*tiæ partis*. Si ſit $a : b = c : d$,

& $a : f = g : d$;

med. & extr. multipl. eſt imprimis $ad = bc$, eſt deinde $ad = fg$: eſt ergo $bc = fg$ (101); atque hinc $b : f = g : c$ (169).

Demonstr. 4*tæ partis*. Si ſit $a : b = c : d$

$f : a = d : g$;

med. & extr. multipl. eſt in prima, $ad = bc$, & in ſecunda eſt $fg = ad$. Eſt ergo $bc = fg$ (101), & hinc $b : f = g : c$ (169).

Schol. Veritatem theorematis juverit in numeris quoque intueri. 1) Cum ſit $2 : 4 = 3 : 6$,

& $4 : 8 = 6 : 12$;

eſt ex æquo ordinato, $2 : 8 = 3 : 12$.

2)

2) Cum ſit $2:4=3:6$,

& $8:4=12:6$;

eſt ex æquo ordinato, $2:8=3:12$.

3) Cum ſit $2:4=3:6$,

& $2:1=12:6$;

eſt ex æquo perturb. $4:1=12:3$.

4) Cum ſit $2:4=3:6$,

& $12:2=6:1$;

eſt ex æquo perturb. $4:12=1:3$.

182. THEOREMA XXVI. *Si fuerint quotcunque rationes æquales; erit ſumma omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium, ut quiscunque antecedens ad ſuum conſequentem.* e. g. Si ſit $a:b=c:d=e:f$; erit $a+c+e:b+d+f=a:b$.

Demonstr. Si plures rationes inter ſe æquales ſint; eundem omnes habebunt exponentem (149): itaque id genus rationes repræſentari poſſunt his formulis generalibus:

$a:am$
$b:bm$
$c:cm$ &c. (150. *Sch.*).

Jam vero in his formulis ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium eſt: ut quiscunque antecedens ad ſuum conſequentem, ſeu $a+b+c:am+bm+cm$ eſt e. g. $=a:am$. Factum enim extremorum ſemper fore æquale facto mediorum, periclitanti patebit. Veritas ergo theorematis generatim patet.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De Æqualitate Geometrica, seu Rationis.

183. Si duæ quæcunque variabiles quantitates s & c ita sint inter se connexæ, ut dum quantitas c duplo major sit, ac prius fuerit, eo ipso etiam s fiat duplo major, triplicata quantitate c triplicetur etiam s, & ita porro; rationem id genus quantitatum sæpissime per æquationem exprimunt Mathematici, & Physici, e. g. scribendo $s = c$, Cujusmodi formula non volunt illi designare arithmeticam æqualitatem inter s & c, qualis est e. g, inter bis duo & quatuor, sed *geometricam* duntaxat, & *rationis*. Hoc est, non aliud volunt designare, quam s constanter esse, ut est c, seu s esse *in ratione* ipsius c, ita ut duplicato c debeat etiam s duplicari, triplicato c, s quoque triplicetut &c. Eodem modo, si de rationis æqualitate loquendo sit $s = ct$; istud tandundem est, ac s semper esse in ratione facti illius, quod prodit, si c ducatur in t; seu duplicato hoc facto duplicari s, triplicato triplicari &c. Denique $c = \frac{s}{t}$ denotat c esse constanter, ut est quotus, qui prodit, si s dividatur per t.

184. Coroll. I. Si ergo sit universe $s = c$, & duo diversi status, seu magnitudines quantitatis s exprimantur literis S & s, status autem quantitatis c illis respondentes, literis C & c; stabit hæc proportio, $S : C = s : c$. Secus enim non esset verum, s constanter esse ut est c. Hinc *alternando* stabit etiam hæc proportio, $S : s = C : c$.

185. Coroll. II. Vicissim si fuerit $S : C = s : c$, seu alternando, $S : s = C : c$; poni potest $s = c$, semper intelligendo rationis æqualitatem. Quippe nequit dicta proportio stare, nisi sit s in ratione c. Pariter si sit $S : s = CT : ct$; est $s = ct$, &c.

Schol. Si quæcunque quantitas s sit in ratione cujuscunque alterius c; dicitur s esse *proportionalis* ipsi c, & vicissim.

186.

186. THEOREMA XXVII. *Si ita ſint comparatæ duæ quæpiam variabiles quantitates c & t, ut una creſcente, altera decreſcat, & quidem eadem prorſus ratione decreſcat, qua prior creſcit, ita ut dum t fit duplo major, ac prius fuerit, eo ipſo c fiat duplo minor; loquendo de rationis æqualitate eſt* $c = \frac{1}{t}$.

DEMONSTR. Valor fractionis $\frac{1}{t}$ (ſi ejus numerator ſemper maneat idem) ea ratione creſcit, qua decreſcit ejus denominator t, & ea ratione decreſcit, qua creſcit idem denominator t (32): quodſi ergo etiam c ſemper ea ipſa ratione creſcat, qua decreſcit t, & ea ratione decreſcat, qua idem t creſcit; c prorſus eadem ratione creſcit, aut decreſcit, qua ratione creſcit, aut decreſcit fractio $\frac{1}{t}$. Igitur de rationis æqualitate n. 183 explicata loquendo, eſt in aſſumpta hypotheſi $c = \frac{1}{t}$.

187. Si quæcunque quantitas c ea ratione creſcat, qua decreſcit altera, ita ut ſit $c = \frac{1}{t}$, duoque diverſi ſtatus quantitatis c exprimantur literis C & c, ſtatus vero quantitatis t, illis reſpondentes deſignentur literis T & t; quatuor hi termini poſſunt in hanc ordinari proportionem, $C : c = t : T$, ita nimirum, ut duo heterogenei termini, ſed ſibi correſpondentes C & T pro extremis aſſumantur, alii vero duo heterogenei, pariter ſibi correſpondentes c & t pro mediis. Dum enim ſit $c = \frac{1}{t}$, eſt $C : c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$ (184). Hinc 2dam rationem per Tt multiplicando (172) eſt $C : c = \frac{Tt}{T} : \frac{Tt}{t}$, ſeu eſt $C : c = t : T$ (45).

188. COROLL. II. Cum in aſſumpto caſu ſit $C : c = t : T$; eſt invertendo, $c : C = T : t$ (175). Hoc eſt, ſi

sit $c = \frac{1}{t}$, & quatuor termini C, c, T, t, in proportionem ordinari debeant; perinde est, sive unum, sive alterum par heterogeneorum, simulque sibi respondentium terminorum accipiatur pro extremis, aut mediis proportionis terminis. Nempe si e. g. C assumatur pro uno extremo, alter extremus debet esse T; si autem c fuerit unus extremus, alter extremus nonnisi t esse poterit.

189. Si quantitas quæpiam sit in ratione alterius; ea vel est in ratione *simplici*, vel *composita*. Scilicet si quantitas quæpiam sit tantum in ratione *unius* cujuspiam alterius quantitatis; ea dicitur esse in illius ratione *simplici*. e. g. Si sit $c = s$; est c in ratione *simplici* ipsius s. At si quantitas quæpiam sit in ratione cujuspiam *facti*, ex multiplicatione duarum, aut plurium quantitatum in se ductarum enascentis; id genus quantitas dicitur esse in ratione *composita*. e. g. Si sit $s = ct$, dicitur s esse in ratione composita quantitatum c & t.

190. Quodsi quantitas una sit ut quadratum alterius; dicitur esse in ratione *duplicata* ejusdem: si autem sit ut *cubus* alterius, dicitur esse in ratione *triplicata* ejusdem, & sic porro. e. g. Si sit $s = c^2$, dicitur s esse in ratione *duplicata* ipsius c: si autem sit $s = c^3$; est c in ratione *triplicata* ipsius c. Si quantitas quæpiam sit ut radix quadrata alterius; id genus quantitas dicitur esse in ratione *subduplicata* alterius: si sit ut radix cubica alterius, est in ratione *subtriplicata* ejusdem, & sic porro. e. g. Si sit $s = \sqrt{c}$, est s in ratione *subduplicata* ipsius c: si sit $s = \sqrt[3]{c}$, est s in ratione *subtriplicata* ejusdem c.

Schol. Itaque cavendum est, ne vocabula *duplicatum*, *triplicatum* &c. cum *duplo*, *triplo* &c. & *subduplicatum*, *subtriplicatum* &c. cum *subduplo*, *subtriplo* &c. confundantur. Nam tunc quæpiam quantitas s dicitur *dupla* alterius c. quando est duplo major quantitate c; & tunc s est *subdupla* quantitatis c, quando s est $= \frac{1}{2}$ parti ejusdem c.

191. Quantitas, quæ est in ratione alterius, sive duplicata, sive simplici, vel est in ratione *directa* ejusdem, vel in ratione *reciproca*, seu *inversa*. Nimirum si quæpiam

piam quantitas s ea ratione crescat, aut decrescat, qua crescit, aut decrescit altera c, hoc est, si sit $s = c$ (183); dicitur s esse in ratione *directa* ipsius c. Si autem quapiam quantitate c crescente, altera t eadem ratione decrescat, & contra, hoc est, si sit $c = \frac{1}{t}$ (186); dicitur c esse in ratione *reciproca*, seu *inversa* ipsius t.

192 Ex his jam intelligi potest ratio sequentium apud Mathematicos, & Physicos usitatarum loquendi formularum. Nempe 1*mo*. Si fuerit $s = c$; dicitur s esse in ratione simplici directa ipsius c. Sic in *summa* pecuniæ, numerus grossorum semper est in ratione simplici directa numeri florenorum. Cum enim duplicato florenorum numero duplicetur etiam numerus grossorum, triplicato triplicetur, & sic porro; si numerus grossorum dicatur g, & numerus florenorum dicatur f, loquendo de rationis æqualitate est semper $g = f$.

2*do*. Si sit $c = \frac{1}{t}$ (186); dicitur c esse in ratione simplici reciproca, seu inversa ipsius t. Sic si aliqua linea in partes æquales dividenda sit; quoniam eo minores esse debent singulæ partes æquales, quo plures in partes linea illa divisa fuerit, ita ut e. g. duplicato partium numero, magnitudo singularum partium duplo minor esse debeat; magnitudo partium est in ratione inversa numeri earundem

3*tio*. Si sit $s = c\,t$; est s in ratione *composita directa* quantitatum c & t. Sic spatium, quod a quopiam cursore conficitur, est in ratione composita directa celeritatis, qua cursor ille præditus est, & temporis, quo spatium illud conficit.

4*to*. Si sit $s = c^2$; est s in ratione *directa duplicata* quantitatis c.

5*to*. Si sit $v = \frac{1}{d^2}$, est v in ratione *reciproca duplicata* quantitatis d.

6*to*. Si sit $c = \frac{s}{t}$, seu quod idem est, si sit $c = s$

$\times \frac{1}{t}$; est c in ratione composita ex *directa* simplici quantitatis s, & *inversa* simplici quantitatis t. Si autem sit $v = \frac{m}{d^2}$ est v in ratione composita ex *directa* simplici quantitatis m, & *inversa* duplicata quantitatis d.

7mo. Si sit $c = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{d};}$ est c in ratione composita ex directa *subduplicata* ipsius e, & inversa *subduplicata* ipsius d. Si autem esset $c = \frac{e^4}{\sqrt{d};}$ esset c in ratione composita ex directa *duplicata* quantitatis e, & inversa *subduplicata* quantitatis d &c.

Schol. Si dicatur aliqua quantitas esse in ratione alterius, quin exprimatur, num sit in ratione simplici, an duplicata, aut triplicata &c. semper intelligi solet ratio *simplex*: si autem non exprimatur, sitne in ratione directa, an inversa; ratio *directa* designatur.

193. Si in quapiam formula geometricam æqualitatem exprimente reperiatur id genus quantitas, quæ variata ea quantitate, cujus valorem exprimit formula, vel per se non varietur, vel saltem ponatur non variari; quantitas illa solet vocari *constans.* e. g. Si sit $s = ct$, & variata quantitate s, vel per se maneat eadem magnitudo quantitatis c (uti sæpe evenit) vel saltem ponatur non variari: erit in ea formula c quantitas *constans.*

194. THEOREMA XXVIII. *Si in formula quapiam algebraica æqualitatem geometricam, seu rationis exprimente occurrat quæcunque quantitas* constans (193); *ea citra mutationem æqualitatis geometricæ omitti potest, modo in ejus locum substituatur unitas* e. g. Si sit $s = ct$, & sit t constans; erit $s = c \times 1$, seu erit $s = c$. Item si sit $c = \frac{s}{t}$, & sit s constans; erit $c = \frac{1}{t}$, &c.

Demonstr. Si enim e. g. sit $s = ct$; est $S : s = CT : ct$ (184). Jam si præterea sit $T = t$; 2*dam* rationem per hæc æqualia dividendo, est $S : s = C : c$ (172): ac ac proinde eſt $s = c$ (183). Pariter ſi ſit $c = \frac{s}{t}$, eſt $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$; hinc ſi præterea ſit $S = s$, eſt (2*dam* rationem per hæc æqualia dividendo) $C : c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$, conſequenter eſt $c = \frac{1}{t}$.

195. THEOREMA XXIX. *In formula æqualitatem rationis exprimente, poteſt utrumque membrum per idem multiplicari, aut dividi, quin rationis æqualitas mutetur.* e. g. Si ſit inprimis $s = c$, utrumque per 2 multiplic. eſt $2s = 2c$: deinde ſi ſit $s = ct$; utrumque per idem t dividendo eſt $c = \frac{s}{t}$.

Demonstr. Nam imprimis ſi ſit $t = c$; eſt $S : s = C : c$. Porro licet utramque rationem per idem multiplicare, e. g. per 2, quin turbetur proportio (173): eſt ergo $2S : 2s = 2C : 2c$; ac proinde eſt $2s = 2c$ (173).

Deinde ſi ſit $s = ct$; eſt $S : CT = s : ct$. Porro licet primam rationem per T, 2dam vero per t dividere, quin turbetur proportio: quo facto eſt $\frac{S}{T} : C = \frac{s}{t} : c$; conſequenter eſt $c = \frac{s}{t}$.

196. Coroll. Simili ratiocinandi methodo patet, etiam tum manere geometricam æqualitatem, ſi ea, quæ geometrice æqualia ſunt, per ea multiplicentur, aut dividantur, quæ nonniſi geometrice ſunt æqualia. e. g. Si loquendo de geometrica æqualitate ſit $s = c$, & $v = t$; eſt imprimis $sv = ct$, eſt deinde $\frac{s}{v} = \frac{c}{t}$. Nam ob $s = c$ ſtat $S : s = C : c$, & ob $v = t$ ſtat $V : v = T : t$. Itaque imprimis *compoſitis rationibus* ſtat $SV : sv = CT : ct$ (179), ac proinde eſt $sv = ct$ (183): deinde

 pro-

proportionem unam dividendo per alteram ſtat, $\frac{S}{V}$: $\frac{s}{v} = \frac{C}{T} : \frac{c}{t}$ (180), conſequenter eſt $\frac{s}{v} = \frac{c}{t}$ (183).

Schol. Tametſi loquendo de æqualitate arithmetica *per ſe* notum axioma ſit, perſiſtere æqualitatem, ſi æqualia per idem, aut per æqualia multiplicentur, vel dividantur (119); iſtud tamen comparate ad æqualitatem geometricam, ſeu rationis profecto non ſupervacue demonſtratur. Nam loquendo de æqualitate arithmetica pariter *per ſe* notum axioma eſt, perſiſtere æqualitatem, ſi æqualibus idem addatur, aut ſubtrahatur (113. & 114): quod tamen non perinde ſubſiſtere ſemper, ſi de ſola rationis æqualitate ſermo ſit, inde patet, quod non ſemper perduret proportio, ſi unius proportionis antecedentes alterius proportionis antecedentibus, conſequentes autem conſequentibus addantur, aut ſubtrahantur. Sic tametſi ſtent hæ duæ proportiones,

$$2 : 4 = 3 : 6,$$
$$\& \quad 1 : 3 = 2 : 6;$$

non ſtat tamen *addendo*:

$$2 + 1 : 4 + 3 = 3 + 2 : 6 + 6,$$

neque ſtat *ſubtrahendo*:

$$2 - 1 : 4 - 3 = 3 - 2 : 6 - 6.$$

197. THEOREMA XXX. *In formula, rationis æqualitatem exprimente, poteſt unum membrum altero intacto per quemcunque numerum multiplicari, aut dividi, quin turbetur æqualitas rationis.* e. g. Si ſit $s = c\,t$; eſt $s = \frac{c\,t}{2}$, item $s = 2\,c\,t$ &c.

DEMONSTR. Si eſt $s = s\,t$; ſtat $S : s = C\,T : c\,t$, Jam licet 2dam rationem intacta priore per quemcunque numerum multiplicare, aut dividere, quin turbetur proportio (172); ut adeo ſtent hæ proportiones, $S : s = \frac{CT}{2} : \frac{ct}{2}$, & $S : s = 2CT : 2ct$ &c. Eſt ergo $s = \frac{ct}{2}$, item $s = 2ct$ &c.

198. THEOREMA XXXI. *Sit quæcunque quantitas e in ratione cujuspiam quantitatis c, ita ut loquendo de rationis æqualitate (quod ſemper intelligendum eſt) ſit ceteris paribus e = c. Si præterea eadem quantitas e dependeat etiam ab alia quapiam quantitate t, ita ut ceteris paribus ſit e = t; reapſe quantitas e erit generatim in ratione compoſita utriusque, ſeu erit e = c t.*

Demonstr. Quantitas *e*, quæ a quantitatibus *c* & *t* dicto modo dependet, ſeu ita, ut utrique ſit proportionalis, poteſt conſiderari inſtar effectus a cauſis *c* & *t* ita dependentis, ut utrique earum ſit proportionalis. Quo poſito, duos diverſos illius effectus ſtatus exprimamus literis E & *e*, & ſtatus cauſarum illis reſpondentes deſignemus literis C, *c*, & T, *t*: ita nimirum, ut effectui E reſpondeant cauſæ C, T, & effectui *e* cauſſæ *c*, *t*. Aſſumamus præterea novum quempiam effectum ε a cauſſis *c* & T, quarum utrique is proportionalis ſit, conjunctim agentibus oriundum. Jam ſi effectus ε a cauſſis *c* & T proveniens comparetur imprimis cum effectu E, a cauſſis C & T oriundo; quoniam cauſſa in utrumque pariter influit, evidens eſt, eorum diſcrimen pendere a reliquis cauſis *c* & C, ita ut ſit ε : E = *c* : C. Unde eſt $\varepsilon = \frac{Ec}{C}$.

Quodſi autem idem effectus ε a cauſſis *c* & T proveniens comparetur cum effectu *e*, a cauſſis *c* & *t* oriundo; quoniam cauſſa *c* eſt utrique communis, horum diſcrimen pendebit a reliquis cauſſis T & *t*, ita ut ſit ε : *e* = T : *t*. Hinc $\varepsilon = \frac{eT}{t}$

Itaque duos ejusdem e valores conjungendo, eſt $\frac{Ec}{C} = \frac{eT}{t}$, & ſublatis fractionibus (ſcilicet utrumque membrum per C*t* multiplicando, vel utendo compendio n. 126. *Schol.* 1. adnotato) eſt E*ct* = *e*CT. Unde hæc exurgit proportio, E : e = CT : *ct* (169); ac proinde *e* = *c t*.

 Schol.

Schol. Veritas theorematis variis etiam exemplis illustrari potest. e. g. Contemplemur spatium, quod ab aliquo cursore certa celeritate æquabili prædito intra tempus quodpiam percurritur. Sit celeritas cursoris ea, qua is diebus singulis 8 milliaria conficiat; ponamus autem spatium assumptum percurri ab eo diebus 10. Quoniam spatium percursum est imprimis ceteris paribus ut celeritas, qua percurritur, deinde ut tempus, quo percurritur; dictus cursor intra 10 dies conficit millaria $= 8 \times 10 = 80$. Hoc est, spatium ab eo percursum est in ratione *composita* celeritatis, & temporis.

199. Coroll. I. Quodsi ergo aliqua quantitas c sit imprimis ceteris paribus ut s, deinde ut $\frac{1}{t}$; reapse ea est generatim ut $s \times \frac{1}{t}$, seu est $c = \frac{s}{t}$.

200. Coroll. II. Si quæcunque ratio $a : b$ sit imprimis ceteris paribus $= c : d$, deinde autem $= g : f$; ea reapse est æqualis rationi ex utraque compositæ, seu est $a : b = cg : df$. Nam illæ rationes æquivalent his fractionibus, $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{f}{g}$ (144, & 147). Porro si quantitas $\frac{b}{a}$ sit imprimis ceteris paribus $= \frac{d}{c}$, deinde $= \frac{f}{g}$; est re ipsa per num. 198, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \times \frac{f}{g}$, seu est $\frac{b}{a} = \frac{df}{cg}$. Unde hæc exurgit proportio, $a : b = cg : df$ (144. & 147).

201. THEOREMA XXXII. *Si quæpiam ratio* a : b *sit inversa alterius* c : d, *hoc est*, *si crescente ratione* a : b, *altera* c : d *decrescat*, *& vicissim*; *ex duabus hujusmodi rationibus exsurgere potest proportio*, *si alterutrius rationis termini invertantur ita*, *ut ex antecedente fiat consequens*, *& vicissim*. e. g. Secundæ rationis $c : d$ terminos invertendo, est $a : b = d : c$.

De-

DEMONSTR. Si enim ratio $a:b$ eſt inverſa rationis $c:d$; reapſe fractio $\frac{b}{a}$ eſt æqualis unitati diviſæ per fractionem $\frac{d}{c}$ (186), adeoque eſt $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$ (61 Schol. 1). Hinc autem hæc exurgit proportio, $a:b = d:c$ (144. & 147).

202. COROLL. Quodſi ergo aliqua ratio $a:b$ ſit ceteris paribus imprimis $= f:c$, ſit deinde *inverſa* rationis $c:d$; reapſe ratio $a:b$ eſt æqualis rationi ex his duabus ita compoſitæ, ut termini rationis $c:d$ invertantur; ſeu eſt $a:b = df:cg$. Si enim $a:b$ ſit inverſa rationis $c:d$; ex duabus his rationibus hæc exurgit proportio, $a:b = d:c$ (201.) Itaque in aſſumpta hypotheſi eſt $a:b$ ceteris paribus imprimis $= d:c$, deinde $= f:g$; adeoque eſt reapſe $a:b = df:cg$ (200).

CAPUT QUARTUM.

De Uſu Regulæ Aureæ.

203. Cum in humano commercio pretia duabus diverſis ejusdem generis mercium quantitatibus reſpondentia, ſint iis ipſis quantitatibus proportionalia, pariter operariorum labor eorundem numero, nec non tempori, quo perficitur, proportione reſpondere ſoleat, & plurima id genus alia; pene innumera in uſu vitæ civilis quotitie occurrunt ſolvenda problemata, quæ ſolvere non aliud ſit, quam datis tribus terminis quartum geometrice proportionalem invenire. e. g. Si ſciam 2 ulnas panni vendi florenis 7; ut detegam, quotnam florenis vendantur 6 ulnæ ex eadem panni ſpecie, imprimis hanc inſtituere debeo proportionem, ſicut ſe habent 2 ulnæ ad 6 ulnas, ita ſehabent 7 floreni ad quæſitum florenorum numerum x: deinde debeo incognitum x, tanquam quartum geometrice proportionalem ea methodo invenire, quam num. 166 propoſuimus. Unde etiam ea methodus (ſcilicet datis tribus terminis

 quar-

quartum geometrice proportionalem inveniendi) ob insignes suos in omni vita civili usus *Regula Aurea* nominari consuevit.

204. *Regula Aurea*, seu methodus datis tribus terminis quartum geometrice proportionalem inveniendi, alia est *simplex*, alia *composita*. Nempe si tres duntaxat termini dentur, ut quartus proportionalis inveniatur; regula aurea est *simplex*: *composita* autem, si quinque, aut septem termini dentur, ut incognitus ipsis proportionalis detegatur. Exemplum num. præc. allatum continet regulam auream *simplicem*; *compositæ* autem exemplum præbet hæc e. g. quæstio: *Floreni* 1500 *per annos* 6 *dant censum flor.* 450; *ergo floreni* 800 *quot florenos dabunt pro censu intra* 4 *annos*?

205. Quælibet aurea regula tam simplex, quam composita constat ex meris rationibus inter se connexis, quarum quælibet seorsim considerata terminos habeat *homogeneos*, seu ejusdem generis rem designantes. Sic in exemplo nunc (204) allato, continetur imprimis ratio 1500 : 800, cujus uterque terminus designat florenos censum dantes; deinde continetur ratio 6 : 4, quæ est ratio annorum; denique si terminus quæsitus dicatur x, tertia ratio 450 : x est ratio florenorum censum constituentium. Rationem illam, quæ terminum incognitum x continet, deinceps rationem *quæsitam*; reliquas autem rationes, *cognitas* vocabimus.

206. PROBLEMA XLIII. *Resolvere problemata Regulæ aureæ simplicis.*

Resolut. 1mo Terminus quæsitus vocatur x; tum ex quatuor terminis, quos problema complectitur, efformentur duæ rationes geometricæ ita, ut unam rationem duo termini inter se homogenei, & alteram itidem duo termini inter se homogenei interjectis duobus punctis constituant. Porro in ratione *quæsita* terminus incognitus x scribatur a dextris: in *cognita* autem ratione is terminus scribatur a dextris, qui adnexam habet quæstionem, seu cui in ratione *quæsita* terminus incognitus x respondet. e. g. Proponatur problema sequens: 2 *urnæ vini venduntur* 3 *florenis*, *ergo* 6 *urnæ quot florenis veniunt?* Imprimis quæsitus florenorum numemerus dicatur x. Porro termini 3 & x ſunt inter ſe homogenei: nam uterque florenos deſignat: itaque efformetur ex iis ratio, ita ut x a dextris ſit; ſeu ſcribatur 3: x. Reliqui duo termini 2 & 6 itidem ſunt inter ſe homogenei, nam uterque urnas vini deſignat: eſt autem quæſtio termino 6 adnexa; quæritur enim, 6 *urnæ vini quanti veniant*: itaque his ex terminis ita efformetur altera ratio, ut terminus 6 dextrum locum occupet, ac proinde ſcribatur 2: 6. Hoc pacto duæ rationes geometricæ obtinebunt, ſcilicet ratio *quæſita* 3 : x, & altera *cognita* 2: 6.

2do. Si aliquis terminus in alterutra, vel utraque ratione fuerit compoſitus ex diverſæ ſpeciei valoribus, e. g. ex florenis & cruciferis; is terminus, nec non ejus homogeneus, vitandæ confuſionis gratia reducatur ad valorem ſpeciei infimæ. e. g. Proponatur problema ſequens: 1 *floreno* + 24 *cruciferis emuntur* 2 *libræ ſacchari*, *ergo* 3 *florenis quot libræ emi poſſunt?* In hoc problemate ratio florenorum eſt hæc, 1. *flor.* + 24 *crucif.*: 3 *flor.* hinc quoniam hujus rationis antecedens eſt compoſitus ex florenis, & cruciferis, uterque ejusdem rationis terminus reducatur ad cruciferos, ſcribaturque, crucif. 84 : 180. Si autem hoc e. g. problema proponatur, 2 *urnæ vini venduntur* 3 *florenis*, 24 *cruciferis*, *ergo* 6 *urnæ quot florenis emendæ erunt?* in ratione *quæſita* loco 3 *flor.* 24. *crucif.* ſcribantur 204 cruciferi, & litera x itidem numerum cruciferorum deinceps deſignare intelligatur.

3tio. Inveſtigetur, num ratio *cognita* reſpectu *quæſitæ* ſit directa, an inverſa (191). Scilicet ſedulo expendatur, num ea res, cujus duas diverſas magnitudines exprimunt duo termini rationis *quæſitæ*, creſcat, an decreſcat *creſcente* re illa, cujus duas diverſas magnitudines exprimunt duo termini rationis *cognitæ*. Si hac re *creſcente*, illa quoque *creſcat*; ratio cognita reſpectu quæſitæ eſt *directa*: *inverſa* autem, ſi una dictarum rerum *creſcente*, altera *decreſcat*.

e. g. In exemplo regulæ 1*mæ* ſubnexo ſic Tiro ſecum ipſo: *Ratio* 3 : x *eſt ratio florenorum pro vini urnis numerandorum*, & *ratio* 2 : 6 *eſt ratio urnarum*, *pro quibus floreni illi ſunt numerandi*: *jam vero quo* plures *urnæ emuntur, eo* plures *floreni sunt pro iis numerandi; ergo ratio* 2: 6 *est* directa *respectu rationis quæsitæ* 3: x. Item detur sequens e. g. problema: *certa pecuniæ summa pro diurna 6 operariorum mercede sufficit per dies 4: ergo eadem pecuniæ summa pro diurna 12 operariorum mercede per quot dies sufficiet?* Hoc in problemate per reg. 1*mam* duæ hæ rationes reperiuntur, 4 : x, & 6 : 12, scilicet prior ratio est ipsa ratio *quæsita* dierum, altera est operariorum. Itaque sic porro secum ipso Tiro: *ratio* 4 : x *est ratio dierum, quibus certa pecuniæ summa pro diurna operariorum mercede sufficit, & ratio* 6 : 12 *est operariorum illorum, pro quorum diurna mercede, certa illa pecuniæ summa per aliquot dies sufficit: jam vero quo* major *est numerus operariorum, eo* paucioribus *diebus sufficit eadem pecuniæ summa pro diurna ipsorum mercede, adeoque* crescente *operariorum numero dictus dierum numerus* decrescit: *ergo ratio* 6 : 12 *est* inversa *comparate ad quæsitam rationem* 4 : x.

4to. Si ratio *cognita* deprehendatur esse directa respectu *quæsitæ*; connectantur eæ rationes interjecto ipsis signo $=$; ut efficiant proportionem: at ratio quæsita a dextris scribenda est, ut terminus incognitus x semper sit quartus proportionis terminus. Sic in exemplo regulæ 1*mæ* subnexo, rationes 2: 6 & 3: x (quoniam prior est *directa* respectu posterioris) hoc modo scribantur, $2 : 6 = 3 : x$. Sin autem ratio cognita respectu quæsitæ inversa fuerit; eadem ratio cognita invertatur, ut ex ejus antecedente fiat consequens, & vicissim, ac tum primum cum ratione quæsita interjecto signo $=$ connectatur (201). Sic in exemplo regulæ 3*tiæ* subnexo vidimus, rationem cognitam 6 : 12 esse inversam respectu quæsitæ 4 : x; itaque invertatur prius ratio illa cognita, ut sit 12 : 6, ac tum primum connectatur cum ratione quæsita: hoc est, hæc efformetur proportio, $12 : 6 = 4 : x$.

5to. His peractis reducatur (siquidem fieri possit) proportio ad terminos simpliciores. Nimirum dividatur imprimis uterque primæ rationis terminus per communem aliquem (si adfuerit) divisorem (172): deinde possunt etiam antecedentes proportionis per commu-

nem

nem (si habuerint) divisorem dividi, quin mutetur proportio (174). Juvat hic recolere num. 46. *Schol.*

Sit in proportione $2:6=3:x$, quam pro exemplo regulæ 1*mæ* subnexo in reg. 4*ta* determinavimus, uterque primæ rationis terminus potest dividi per 2; quo facto ea proportio in hanc simpliciorem abit, $1:3=3:x$. Item proportio $12:6=4:x$ (quam in eadem reg. 4*ta* pro exemplo regulæ 3*tiæ* subnexo determinavimus) primam rationem per 6 dividendo abit in hanc, $2:1=4:x$; hæc autem, antecedens per 2 porro dividendo, demum abit in hanc simplicissimam, $1:1=2:x$.

6*to*. Demum inveniatur valor incogniti termini x: multiplicando proportionis medios inter se, & factum dividendo per terminum primum (166). Sic in proportione $1:3=3:x$, est $x=9$; & in proportione $1:1=2:x$ est $x=2$.

EXEMPLA *alia Regulæ Aureæ simplicis.*

I. *Ex certa vini specie 24 florenis emi possunt 4 urnæ; ergo 60 florenis quot urnæ poterunt emi?*

1) Per reg. 1*mam*, rationes exprimantur hoc modo: *Flor.* 24 : 60. *Urnæ* $4:x$. Regula 2*da* hoc in exemplo non habet locum.

2) Per reg. 3*tiam* investigetur, num ratio florenorum sit directa respectu rationis quæsitæ, an inversa, Scilicet Tiro hoc modo ratiocinetur: $4:x$ *est ratio urnarum vini emendarum, &* 24 : 60 *est ratio florenorum, quibus urnæ vini emi debent: jam vero* crescente *florenorum numerandorum numero* crescit *etiam numerus urnarum emendarum*: *itaque ratio* 24 : 60 *est* directa *respectu rationis quæsitæ* $4:x$. *Hinc*

3) Per reg. 4*tam* hæc fiat proportio, $24:60=4:x$.

4) Transeatur ad reg. 5*tam*. Nempe proportio nunc inventa, primam rationem per 12 dividendo, abit in hanc, $2:5=4:x$; hæc autem, antecedens per 2 dividendo, demum abit in hanc, $1:5=2:x$.

5) Per reg. 6*tam*, in ultima hac proportione multiplicando medios terminos inter se, & factum dividendo per primum, acquiritur $x=10$. Hoc est, ex dicto vini genere 60 florenis emi possunt urnæ 10.

II. *Certa annonæ quantitas* 32 *militibus ſufficit* 20 *diebus; ergo eadem annonæ quantitas* 24 *militibus quot diebus ſufficiet?*

Scribatur per reg. 1*mam*, *Milit.* 32 : 24, & *Dies* 20 : x. Tum per reg. 3*tiam* ſic Tiro ſecum ipſo : 20: x *eſt ratio dierum, per quos certa annonæ quantitas militibus alendis ſufficit*, & 32 : 24 *eſt ratio militum, quibus alendis annona per aliquot dies ſufficit*: *jam vero quo* major *eſt militum numerus, eo* paucioribus *diebus ſufficit iis alendis eadem annonæ quantitas*; *itaque ratio* 32 : 24 *eſt* inverſa *reſpectu quæſitæ rationis* 20 : x. *Hinc invertenda eſt prior illa ratio, hæcque formanda proportio*, 24 : 32 = 20: x.

Porro hæc proportio, ſi prior ejus ratio per 8 dividatur, abit in hanc, 3 : 4 = 20 : x. Unde eſt $x = \frac{4 \times 20}{3} = 26\frac{2}{3}$. Hoc eſt, dicta annonæ quantitas 24 militibus ſufficeret per 26 dies, & præterea 27ma die quilibet miles acquireret $\frac{2}{3}$ partes portionis diurnæ.

III. *Ex ſacharo* 2 *libræ emptæ ſunt fl.* 1 + 24 *crucif. ergo* 8 *libræ quanti veniunt.*

Scribatur: *Libræ* 2 : 8; tum per reg. 2*dam fl.* 1 + 24 crucif. reducatur ad cruciferos, ſcribaturque: *Crucif.* 84: x. Jam quoniam *creſcente* emendarum librarum numero *creſcit* numerus cruciferorum pro iis numerandorum, ratio 2 : 8 eſt directa reſpectu rationis 84 : x; conſequenter hæc obtinetur proportio, 2: 8 = 84 : x, ſeu (primam rationem per 2 dividendo) 1 : 4 = 84 : x. Unde x = 336 crucif. = fl. 5. crucif. 36.

207. PROBLEMA XLIV. *Reſolvere problemata regulæ aureæ compoſitæ.*

Resolut. 1*mo*. Attente audita ſemel problematis propoſitione, problema illud hoc modo in chartam conjice: Proponatur e. g. ſequens problema: *Militibus* 5 *libræ carnis* 100 *ſufficiunt per dies* 20; *ergo* 15 *militibus* quam-

quamdiu ſufficient carnis libræ 600? Primam problematis partem lente tibi dictatam ſic exprime:

Milit.	5:	
Carnis lib.	100:	
Dies	20:	

Tum alteram ejusdem problematis partem: *ergo* 15 *militibus* &c. exprime complendo inchoatas homogeneorum terminorum rationes, ut totalis expreſſio ſit hæc demum

Milit.	5:	15
Carnis lib.	100:	600
Dies	20;	x.

2do. Quodſi cujuspiam rationis terminus alteruter, aut uterque compoſitus fuerit ex diverſæ ſpeciei valoribus, e. g. ex florenis. & cruciferis; fiat utriusque termini reductio ad valorem ſpeciei infimæ, uti in reg. 2da num. præc. explicatum eſt. Regula hæc in aſſumpto exemplo non habet locum.

3tio Singulæ rationes *cognitæ* (205) reducantur (ſiquidem fieri poſſit) ad ſimpliciorem expreſſionem, utrumque rationis terminum per idem dividendo. Sic in aſſumpto exemplo licet primam rationem per 5, ſecundam vero per 100 dividere: quo facto hæc acquiritur nova problematis expreſſio jam ſimplicior:

Milit.	1:	3
Carnis lib.	1:	6
Dies	20:	x

4to. Singulæ rationes *cognitæ* conferantur ſucceſſive cum ratione *quæſita*, ut innoteſcat, quænam earum ſit directa reſpectu hujus, quæ item inverſa (206. *Reg.* 8*tia*). Ratio *quæſita* erit æqualis rationi ex omnibus *cognitis* rationibus compoſitæ (200): at ita rationes illæ componendæ ſunt, ut eæ, quæ ſunt inverſæ reſpectu rationis *quæſitæ*, prius inverti debeant (202). Itaque ſingulæ hujusmodi rationes inverſæ prius invertantur; tum omnes omnino rationes *cognitæ* componantur in unam, earum antecedentes inter ſe, & conſequentes itidem inter ſe multiplicando: denique ratio compoſita ſcribatur pro prima proportionis ratione, & ratio quæſita interjecto ſigno $=$ pro altera.

e. g.

e. g. In aſſumpto ſuperius exemplo ſic Tiro procedat: 1) Ratio 20 : x eſt dierum, per quos carnis libræ militibus ſufficere debent; & ratio 1 : 3 eſt militum, quibus carnis libræ per dies illos ſufficere debent. Jam vero certus librarum numerus eo *paucioribus* diebus ſufficit militibus, quo militum illorum numerus fuerit *major*: itaque ratio 1 : 3 eſt inverſa reſpectu rationis quæſitæ 20 : x; conſequenter (rationem 1 : 3 invertendo) eſt ceteris paribus, $3 : 1 = 20 : x$ (201).

2) Ratio 20 : x eſt ratio dierum, per quos libræ carnis ſufficere debent militibus, & ratio 1 : 6 eſt ratio librarum carnis, quæ ſufficere debent. Jam vero quo *plures* fuerint libræ carnis, illæ eo *pluribus* diebus ſufficiunt iisdem militibus; adeoque ratio 1 : 6 eſt directa reſpectu quæſitæ, ſeu eſt ceteris paribus $1 : 6 = 20 : x$.

Hinc ratio quæſita 20 : x eſt reapſe æqualis rationi, ex rationibus 3 : 1 & 1 : 6 compoſitæ (198). Quapropter rationes illæ hoc modo ſcribantur:

$$\left.\begin{matrix} 3 : 1 \\ 1 : 6 \end{matrix}\right] = 20 : x;$$

tum rationes cognitas componendo hæc fiat proportio, $3 : 6 = 20 : x$.

5*to*. Ultima proportio reducatur (ſi fieri poſſit) ad ſimpliciorem expreſſionem, methodo, quam in 5*ta* præced. probl. regula expoſuimus; tum inveniatur incognita x, medios proportionis multiplicando inter ſe, & factum dividendo per terminum primum. Sic in aſſumpto exemplo ultima proportio $3 : 6 = 20 : x$ (priorem rationem per 3 dividendo) abit in hanc, $1 : 2 = 20 : x$. Unde facillime jam innoteſcit, eſſe $x := 40$. Hoc eſt, ſi 5 militibus libræ carnis 100 ſufficiunt per dies 20; 15 militibus carnis libræ 600 ſufficient per dies 40.

Schol. 1. Quodſi eveniat, ut rationes componendæ. etiam poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos reductæ fuerint, ſatis magnos adhuc terminos habeant; in earum compoſitione *indicetur* duntaxat multiplicatio terminorum: tum, ſi qui communes factores deprehendantur in utroque rationis compoſitæ termino, aut in antecedentibus rationum, deleantur. Hac deletione obtinebitur compendioſa proportionis ad ſimpliciorem expreſſionem reductio.

e. g.

e. g. Si in quopiam exemplo hæ acquirantur per reg. 4tam rationes componendæ:

$$\left.\begin{array}{r} 9:\ 8 \\ 8:\ 9 \\ 2:\ 3 \end{array}\right\} = 4 : x;$$

nonnisi hoc modo scribatur proportio, $9 \times 8 \times 2 : 8 \times 9 \times 3 = 4 : x$. Tum in prima ratione communes utrique termino factores 9 & 8 deleantur: hoc pacto ratio illa reapse imprimis per 9, deinde vero per 8 dividetur, abibitque in hanc, $2 : 3 = 4 : x$ Hæc vero antecedentes per 2 dividendo) convertatur in hanc, $1 : 3 = 2 : x$; ex qua nullo jam negotio innotescit esse $x = 6$.

Schol. 2. Arithmetici regulam auream tam simplicem, quam compositam dividere solent in *directam*, & *inversam*, seorsimque solent tradere regulas tam pro directa, quam pro inversa. Vocant autem *directam*, in qua nulla reperitur ratio, quæ sit inversa respectu rationis quæsitæ; *inversam* autem, si aliqua ratio reperiatur in problemate, quæ sit inversa respectu rationis quæsitæ. At nos regulas pro qualibet aurea regula simplici n. 206, & pro qualibet composita n. 207 tradidimus, quin regulam auream in directam, & inversam diserte dispesceremus.

EXEMPLA *Regulæ Aureæ compositæ.*

I. *Floreni* 1500 *per annos* 6 *dant censum fl.* 450; *ergo floreni* 800 *per* 4 *annos quantum dabunt?*

1) Per reg. 1*mam*, exprimatur problema hoc modo:

Flor. censum dantes	1500: 800
Anni	6: 4
Census	450: x.

2) Per reg. 3*tiam* reducantur rationes cognitæ ad simpliciores expressiones, primam per 100, alteram per 2 dividendo, scribaturque:

Flor. censum dantes	15: 8
Anni	3: 2
Census	450: x.

3) Per reg. 4*tam*, singulæ rationes cognitæ conferantur cum ratione quæsita, ut innotescat, quænam ca-

rum ſit directa reſpectu hujus, quæ item inverſa. Facile patet, utramque eſſe directam: quare ſcribatur:

$$\left.\begin{array}{r} 15:\ 8 \\ 3:\ 2 \end{array}\right\} = 450 : x.$$

Tum compoſitis rationibus (uſurpando methodum in *Schol.* 1. propoſitam) fiat hæc proportio, $15 \times 3 : 8 \times 2 = 450 : x$.

4) Per reg. 4*tam*, ultima hæc proportio reducatur ad ſimpliciorem expreſſionem. Nempe antecedentes primum per 15 dividendo, eſt $3 : 8 \times 2 = 30 : x$; eosdem antecedentes porro per 3 dividendo, eſt $1 : 8 \times 2 = 10 : x$, ſeu eſt $1 : 16 = 10 : x$. Eſt itaque $x = 160$.

II. *Murarii 24 qualibet die 12 horis laborando, murum 36 hexapedarum erigere poſſunt intra 16 dies: ergo 60 murarii quotidie 8 horis laborando murum 30 hexapedarum intra quot dies poterunt erigere?*

1) Per reg. 1*mam* exprimatur problema hoc modo:

Murarii	24 :	60
Horæ	12 :	8
Hexap.	36 :	30
Dies	16 :	x.

2) Per reg. 3*tiam* reducantur rationes ad expreſſiones ſimpliciores, primam rationem dividendo per 12, 2dam per 4, 3tiam per 6, ſcribaturque:

Murarii	2 :	5
Horæ	3 :	2
Hexap.	6 :	5
Dies	16 :	x.

3) Per reg. 4*tam* examinentur rationes. Ac prima quidem ratio cognita reſpectu quæſitæ inverſa eſt: quo enim *plures* ſunt murarii, eo *paucioribus* egent diebus, ſi cetera ſint paria, ad eundem murum erigendum: itaque prima ratio cognita invertatur, ut ſit 5 : 2. Altera cognita ratio eſt itidem inverſa reſpectu quæſitæ; quo enim *pluribus* quotidie horis laborant murarii, eo *paucioribus* egent diebus ad eundem murum erigendum: conſequenter altera quoque ratio cognita invertenda eſt, ut ſit 2 : 3. Tertia cognita ratio eſt directa reſpectu rationis quæſitæ; quo enim *plurium* hexapedarum murus erigendus eſt, eo *pluribus* diebus opus eſt,

ſi cetera ſint paria: tertia ergo ratio cognita invertenda non eſt. Hinc ſcribatur:

$$\left.\begin{array}{l} 5:2 \\ 2:3 \\ 6:5 \end{array}\right\} = 16 : x;$$

tum compoſitis rationibus ſtat hæc proportio, $5 \times 2 \times 6 : 2 \times 3 \times 5 = 16 : x$.

4) Per reg. 5*tam* reducatur hæc proportio ad expreſſionem ſimpliciorem. Nempe in prima ratione factores 6 & 2, utrique termino communes deleantur: hoc facto erit $6 : 3 = 16 : x$. Porro prima hujus proportionis ratio dividatur per 3; erit demum $2 : 1 = 16 : x$. Unde $x = 8$.

III. *Olim* 4 *Studioſi per* 4 *menſes ali poterant florenis* 60; *ergo nunc, ſi ponamus annonæ pretium* $\frac{1}{4}$ *ſui parte auctum eſſe, quot Studioſi poterunt ali* 200 *florenis per* 10 *menſes?*

1) Exprimatur problema hoc modo:

Studioſi	4	:	x
Menſes	4	:	10
Floreni	60	:	200
Pretium annonæ	1	:	$1 + \frac{1}{4}$.

Porro ratio pretii annonæ reducatur tota ad fractionem, ejusdem cum adjuncta fractione denominationis, ſeu ſcribatur; *Pret. annonæ* $\frac{4}{4} : \frac{5}{4}$

2) Reducantur rationes ad ſimpliciores expreſſiones, rationem menſium per 2, florenorum per 20 dividendo, rationem autem pretii annonæ multiplicando per 4. Adeoque ſcribatur:

Studioſi	4	:	x
Menſes	2	:	5
Floreni	3	:	10
Pret. annonæ	4	:	5.

3) Ratio menſium, uti & pretii annonæ, inverſa eſt reſpectu rationis *quæſitæ*. Nam eo *pauciores* ſtudioſi poſſunt ali certa ſumma florenorum, quo *pluribus* menſibus alendi ſunt, item quo *majus* eſt annonæ pretium.

At rationem florenorum esse directam, clarum est. Itaque inversis mensium, & pretii annonæ rationibus scribatur :

$$\left.\begin{array}{l} 5 : 2 \\ 3 : 10 \\ 5 : 4 \end{array}\right\} = 4 : x.$$

Unde hæc acquiritur proportio composita, $5 \times 3 \times 5 : 2 \times 10 \times 4 = 4 : x$.

4) Ultima hæc proportio, si prima ratio per 5 dividatur (sufficit autem in primo termino delere unum factorem 5, & in altero factorem 10 per 5 dividere) abit in hanc, $3 \times 5 : 2 \times 2 \times 4 = 4 : x$, seu $15 : 16 = 4 : x$. Unde $x = 4 : \frac{4}{15}$. Hoc est, 200 florenis in assumpta hypothesi possent per 10 menses ali 4 Studiosi, & præterea pro quinto Studioso remanerent $\frac{4}{15}$ partes ejus pretii, quod pro suo 10 mensium victu pendere deberet.

Schol. 3. Exempla hæc fusius pertractare libuit, quo melius imbibant Tirones hanc nostram methodum, sibi per totum vitæ decursum non parvo usui futuram. Nunc jam alia quoque exempla subjicere lubet, in quibus iidem proprio marte resolvendis sese exercere queant.

I. *Si vasa singula coempti vini venderem* 16. *florenis. lucrarer in* 60 *vasis florenos* 360 : *quantum ergo lucrarer in* 80 *vasis*, *si singula venderem* 20 *florenis ?* Erit $x =$ 600 florenis.

II. *Messores* 16 *demetunt* 50 *jugera intra dies* 10; *ergo* 4 *messores jugera* 15 *quot diebus demetent ?* Est $x = 12$ diebus.

III. *Sartores* 5 *singulis diebus laborando* 8 *horis intra* 16 *dies præparant* 60 *tunicas* ; *ergo unus sartor singulis diebus laborando* 16 *horis*, *tunicas* 30 *intra quot dies præpararet ?* Est $x = 20$ diebus.

Schol. 4. *Examen* rite peractæ operationis, sive regulæ aureæ *simplicis*, sive *compositæ*, hoc modo institui potest. Immutetur tantisper problema ita, ut incognitæ x suus valor per operationem inventus substituatur, & alter cujuscunque rationis cognitæ terminus pro in-

incognito habeatur, denomineturque x. Si nova operatione instituta inveniatur x esse æquale ei numero, loco cujus idem x interim substitutum erat; id erit indicium rite peractæ operationis. e. g. In problemate, quod in regula 1*ma* proposuimus, loco x substituamus ejus valorem $= 40$, & in ratione militum numerum 15 ponamus esse incognitum, vocemusque x: consequenter problema illud hoc modo immutemus: *Militibus* 5 *libræ carnis* 100 *sufficiunt per dies* 20; *ergo* 600 *libræ carnis quot militibus sufficient per* 40 *dies*? Si operatione juxta regulas præscriptas instituta prodiverit esse $x = 15$; id erit indicio, in operatione priori errorem non fuisse commissum.

208. Arithmetices Scriptores, dum de regula aurea agunt, solent speciatim tradere etiam *Regulam Societatis*, ita dictam propterea, quod tunc potissimum adhiberi soleat, quando plures in commune negotium symbolas suas conferunt, ut dein commune lucrum vel damnum pro ratione symbolarum a se collatarum inter se partiantur. Consistit autem Regula Societatis non alia in re, quam in applicatione regulæ aureæ toties repetita, quot sunt homines, inter quos partitio est facienda. Scilicet sicuti se habet summa omnium symbolarum ad quamcunque particularem symbolam a, ita se habet totum lucrum vel damnum ad illam lucri, vel damni partem, quæ symbolæ a respondet. Sed res exemplo optime illustratur. Itaque

Sit sequens problema propositum: *Tres mercatores lucri gratia contulerunt certam pecuniæ summam. Primus contulit* 600 *florenos, secundus fl.* 400. *tertius fl.* 200. *Sunt autem universe lucrati flor.* 300. *Quæritur, quantum unicuique obveniat ex lucro?*

1) Sit primi lucrum $= x$, secundi $= y$, tertii $= z$; tum pro primo hæc instituatur proportio: sicut se habet symbolarum summa, seu 1200 flor. ad primi mercatoris symbolam, seu ad fl. 600, ita se habet totum lucrum seu flor. 300 ad ejusdem primi lucrum x. Id est, hæc instituatur proportio, $1200 : 600 = 300 : x$. Quæ (si prima ratio per 600 dividatur) abit in hanc, $2 : 1 = 300 : x$. Unde $x = 150$ fl.

2) Pro secundo mercatore hæc stat proportio $1200 : 400 = 300 : y$; seu $3 : 1 = 300 y$. Unde $y = 100$.

3) Pro tertio est, $1200 : 200 = 300 ; z$ seu $6 : 1 = 300 : z$. Unde $z = 50$.

Hoc est, *primi* lucrum est $= 150$ fl. *secundi* $= 100$ fl. *tertii* $= 50$ fl. Quæ partialia lucra, si in unam summam cogantur, restituunt lucrum totale $= 300$ flor. Quod ipsum est indicium quoddam rite peractæ operationis.

209. Sæpe fit, ut non sola quantitas collatarum symbolarum, sed alia etiam adjuncta attendi debeant. e. g. tempora, quibus singulæ symbolæ lucrum fecerunt. Quo casu Regulam societatis vocare possumus *compositam*. Eadem autem est operandi ratio, quæ in regula simplici, quam num. præc. exposuimus: hoc uno notato, quod pro symbola quavis particulari summi debeat quantitas symbolæ, multiplicata per id genus *adjunctum* sibi respondens, e. g. per tempus, quo lucrum fecit, aut damnum intulit.

e. g. Sit problema sequens propositum. *Tres mercatores contulerunt successive certam pecuniæ summam. Primus contulit fl. 300, secundus 100, exercueruntque hac summa mercimonium per 4 annos. Tertius contulit fl. 600; at nonnisi unico anno postremo summa hæc cum priori lucrum fecit. Lucrum totale est = 220 flor. Quæritur lucrum singulis obveniens.*

1) Primi lucrum sit $= x$, secundi $= y$, tertii $= z$. Primus per annos 4 conferendo fl 300, tantundem fecit, ac si per unum annum contulisset floren. 300×4; adeoque primi symbola æquivalent 1200 florenis. Secundi symbola æquivalet 400 florenis. Tertius per unum annum contulit fl. 600. Hinc summa symbolarum æquivalet fl. $1200 + 400 + 600$ seu florenis 2200.

2) Itaque pro primo mercatore hæc fiat proportio, $2200 : 1200 = 220 x$: Quæ (si prima ratio per 100 dividatur, deinde vero antecedentes per 22) abit in hanc. $1 : 12 = 10 : x$ Unde est $x = 120$.

3.) Pro secundo stat, $2200 : 400 = 220 : y$, seu $1 : 4 = 10 ; y$. Unde $y = 40$. Pro tertio denique est, $2200 : 600 = 220 : z$, seu $1 : 6 = 10 : z$. Hinc $z = 60$.

Hoc est, primi lucrum est $= 120$ flor. secundi $=$ 40

40 fl. tertii $=$ 60. Quæ partialia lucra in unam summam collecta, sunt $=$ 200 fl.

EXEMPLA *Regulæ Societatis.*

I. Regulæ *simplicis*. Tres simul elocarunt ad censum fl. 4000. Primus dedit fl. 1200 alter 1800, tertius fl. 1000. Ex hac summa periverunt 1800 floreni. Quæritur quantum quisque damni sit passus?

Fiat imprimis pro primo hæc proportio: sicut se habet tota summa fl. 4000 ad fl. 1200, ita se habet totale damnum fl. 1800 ad primi damnum x. Erit adeo $x =$ 540 fl. Simili modo invenietur secundi damnum, seu y esse 810. tertii damnum seu $z = 450$.

II. Regulæ *compositæ*. Tribus lanionibus elocantur quædam pascua fl. 60. Primus 100 boves aluit iis pascuis per 2 menses; secundus 50 boves per 4 menses; tertius 400 boves uno mense. Quæritur, quantum quisque lanio solvere debeat? Est $x = 15$; $y = 15$, $z = 30$.

210. His quæpiam de Regula falsi adjicere lubet. *Regula falsi*, seu *falsæ positionis* tunc exercetur, quum terminis incognitis substituuntur interim termini ad arbitrium assumpti, sed tamen tales, qui sint incognitis proportionales, ut deinde ope eorum, adhibita regula aurea, ipsi incogniti detegantur.

e. g. Proponatur sequens problema: *Tres mercatores, Sempronius, Cajus, & Titius certam pecuniæ summam lucri faciendi gratia contulerunt. Cajus duplo plus contulit, quam Sempronius: Titius autem tantundem contulit, quantum Sempronius & Cajus simul. Lucrum integrum est* $=$ 90 *flor. Quæritur, quantum unicuique hoc ex lucro obtingat?*

Quoniam non datur quantitas a singulis mercatoribus collata, sed solum ratio quantitatum collatarum; substituantur interim ad arbitrium quantitates, quæ easdem ad se invicem rationes habeant, quæ in problemate dantur. e. g. Si quantitas a Sempronio collata ponatur esse $= 1$; quantitas Caji erit $= 2$, & Titii $= 3$. Hinc summa quantitatum erit $= 6$. Unde si lucrum Sempronio obveniens dicatur x, hæc stabit proportio. $6 : 90 = 1 : x$. Unde $x = 15$. Pro Cajo hæc stat proportio, $6 :$

 $90 =$

$90 = a : y$; adeoque $y = 30$. Denique pro Titio est $6 : 90 = 3 : z$, ac proinde $z = 45$.

CAPUT QUINTUM.

De Progressionibus, & Seriebus.

211. *Progressio* est series quantitatum continue proportionalium: seu est series ejusmodi quantitatum, quarum prima est ad secundam, ut secunda ad tertiam; secunda ad tertiam, ut tertia ad quartam; tertia ad quartam, ut quarta ad quintam, & sic porro (155). Si quantitates fuerint continue arithmetice proportionales; progressio est *arithmetica*: *geometrica* vero, si quantitates fuerint geometrice proportionales.

212. Coroll. Itaque in progressione arithmetica terminus primus sic differt a secundo, ut secundus a tertio; secundus a tertio, ut tertius a quarto: in geometrica vero sic se habet primus ad secundum, ut secundus ad tertium; secundus ad tertium, ut tertius ad quartum, & sic porro. Sic numeri naturales 1, 2, 3, 4 &c. constituunt progressionem arithmeticam; at numeri 1, 2, 4, 8 &c. sunt in progressione geometrica.

213. Progressio tam arithmetica, quam geometrica, alia est *crescens*, alia *decrescens*. *Crescens* est, in qua terminus primus est minimus, secundus major, tertius adhuc major, & sic porro. Ea vero, in qua terminus primus est maximus, secundus minor, tertius adhuc minor, & sic porro; est progressio *decrescens*. Sic 1, 2, 4 &c. est progressio geometrica *crescens*; at 8, 4, 2, 1 est *decrescens*.

214. PROBLEMA XLV. *Construere formulam generalem, quæ repræsentet omnem progressionem arithmeticam.*

Resolut. Cujusvis progressionis arithmeticæ terminus primus potest appellari a, differentia d. Quibus positis, in progressione crescente secundus terminus erit $a + d$, & tertius (utpote constans ex secundo addita

dita differentia) erit $a + 2d$, quartus $a + 3d$ & ſic porro: in decreſcente contra erit ſecundus terminus $a - d$, tertius $a - 2d$, quartus $a - 3d$, & ſic porro (212). Ergo generatim quævis progreſſio arithmetica bene repræſentatur hac formula, a, $a \pm d$, $a \pm 2d$, $a \pm 3d$, $a \pm 4d$ &c.

215. THEOREMA XXXIII. *Summa totius progreſſionis arithmeticæ æquatur ſemiſummæ terminorum primi, & ultimi ſimul ſumptorum, multiplicatæ per numerum omnium terminorum.*

Demonstr. Aſſumamus e. g. progreſſionem creſcentem quatuor terminorum. Ea progreſſio rite repræſentabitur hac formula, a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ (214). Jam hujus progreſſionis ſumma eſt $= 4a + 6d$; quam æqualem eſſe ſemiſummæ extremorum multiplicatæ per numerum terminorum ſic oſtendo. Summa extremorum eſt $= 2a + 3d$, adeoque ſemiſumma $= a + \frac{3d}{2}$, quæ ſi per terminorum numerum $= 4$ multiplicetur, fit $= 4a + \frac{12d}{2}$, ſeu $= 4a + 6d$. Itaque veritas theorematis in aſſumpto exemplo evidenter patet. Quæ demonſtrandi ratio cum alteri cuilibet proportionis arithmeticæ ſive creſcentis, ſive decreſcentis exemplo æque applicari poſſit, ejusdem theorematis veritatem generatim etiam evincit.

216. PROBLEMA XLVI. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet omnem progreſſionem geometricam.*

Resolut. Cujusvis geometricæ progreſſionis terminus primus poteſt appellari a, communis exponens m. Quibus poſitis, eſt ſecundus terminus am (150). Tertius eſt am^2; ſi enim tertius terminus dicatur x, erit in progreſſione geometrica, $a : am = am : x$ (212); unde $x = \frac{a^2 m^2}{a} = am^2$. Si quartus dicatur y; quoniam eſt ſecundus ad tertium, ut tertius ad quartum, ſtat $am : am^2 = am^2 : y$. Unde $y = am^3$. Eodem modo deprehenditur quintus eſſe am^4, ſextus am^5, & ſic porro. Hinc omnem univerſe progreſſionem geometricam repræſentabit hæc formula, a, am, am^2, am^3, am^4 &c.

217. THEOREMA XXXIV. *In progreſſione geometrica, quiscunque prior terminus ſic ſe habet ad quemcunque poſteriorem, ut primus ad ſecundum, ſi horum uterque ad eam potentiam elevetur, quam indicat duorum illorum diſtantia mutua.* e. g. Quatuor hi termini, L, T, D, B ſint continue proportionales, ſeu conſtituant progreſſionem geometricam, quæraturque quomodo ſe habeat T ad B. Quoniam diſtantia inter T & B intercepta duobus (quot nempe *commata* continet) intervallis conſtat; primi duo termini L & T eleventur ad ſecundas potentias; erit $T : B = L^2 : T^2$.

DEMONSTR. Nam e. g. in progreſſione L, T, D, B, poteſt terminus primus L vocari a, & exponens communis m; quo poſito erit $T = am$, $D = am^2$, $B = am^3$ (216). Hinc erit $L^2 = a^2$, & $T^2 = a^2 m^2$ (75). Quodſi ergo ſtat $am : am^3 = a^2 : a^2 m^2$, ſtabit etiam $T : B = L^2 : T^2$. Jam vero priorem illam proportionem ſtare clarum eſt; quippe in ea factum mediorum eſt æquale facto extremorum: ergo altera quoque ſtet, eſt neceſſe. Quæ demonſtrandi ratio cum alteri cuicunque particulari caſui æque applicari poſſit, theorematis veritatem generatim evincit.

218. THEOREMA XXXV. *Summa totius progreſſionis geometricæ eſt æqualis fractioni, cujus numerator ſit factum termini ultimi in communem exponentem ducti, termino primo mulctatum, denominator autem ſit ipſe communis exponens unitate mulctatus.* Hoc eſt, ſi ſumma vocetur s, terminus primus a, ultimus u, communis exponens m; eſt $s = \dfrac{um - a}{m - 1}$.

DEMONSTR. Cum in progreſſione quivis terminus ſit antecedens excepto ultimo, erit ſumma omnium ante-

antecedentium $= s - a$; & cum quivis terminus sit consequens excepto primo, erit summa omnium consequentium $= s - a$. Jam vero si dentur plures rationes communi exponente gaudentes; summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium, ut quivis antecedens ad suum consequentem (182). Est ergo in progressione geometrica:

$$s - a : s - a = a : am,$$

Multipl. med. & extr. $sam - aam = sa - a^2$,

Divid. totum per a: $sm - am = s - a$.

Transpon. s & $- am$, est: $sm - s = am - a$.

Divid. per $m - 1$, $s = \dfrac{am - a}{m - 1}$. Q, E, D.

Schol. Lubeat theorematis veritatem in numeris intueri. Assumamus progressionem, 1, 2, 4, 8, cujus exponens est $= 2$. Ultimus terminus per exponentem multiplicatus, est $= 16$. Itaque juxta theorema deberet esse in hac progressione $s = \dfrac{16 - 1}{2 - 1} = 15$. Et omnino ita se res habet: est enim $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

219. *Series* est ordo quantitatum certa aliqua, & constanti lege se se excipientium. e. g. Progressiones arithmeticae, & geometricae sunt *series*: nam earum termini constanti lege sese excipiunt (211). Series, in qua numerus terminorum est finitus, dicitur *finita*; *infinita* autem, si numerus ille sit infinitus, seu omni, qui cogitari potest, major.

220. Coroll. Igitur in serie infinita, cujus termini continenter crescunt, ultimus terminus infinite magnus sit, oportet; in ejusmodi vero serie infinita, cujus termini continenter decrescunt, nonnisi infinite parvus, seu omni, qui cogitari queat, minor esse potest.

Schol. 1. Quoniam signum quantitatis infinitae est ∞ (11), quantitas infinite parva, seu omni, quae cogitari possit,

poſſit, minor rite exprimitur per $\frac{1}{\infty}$. Cum enim valor fractionis, manente eodem numeratore, eo magis decreſcat, quo magis creſcit ejusdem denominator (32); ſi denominator fuerit infinite magnus, ſeu $= \infty$, ex adverſo valor fractionis infinite parvus ſit, oportet.

Schol. 2. Quantitas infinite parva reſpectu quantitatis finitæ evaneſcit, ita, ut pro nihilo haberi poſſit. e. g. Si quantitati finitæ a adjuncta ſit alia infinite parva, ſeu $\frac{1}{\infty}$; hæc in ejus conſortio pro nihilo haberi poteſt, ita ut ponit queat $a + \frac{1}{\infty} = a$. Si enim non eſſet $a + \frac{1}{\infty} = a$; differentia harum quantitatum, quæ eſt $= \frac{1}{\infty}$, eſſet quantitas determinatæ magnitudinis: quandocunque enim duæ quæpiam quantitates ſunt reapſe inæquales, earum differentia *determinata* ſit, oportet: atqui $\frac{1}{\infty}$ non poteſt eſſe quantitas determinata: ſecus enim non eſſet infinite parva, ſeu omni, quæ cogitari poſſit, minor: ergo.

221. PROBLEMA XLVII. *Invenire ſummam fractionum numero infinitarum, quarum numerator eſt conſtans, denominatores autem creſcunt in progreſſione geometrica.*

Resolutio. Si primus denominator appelletur b, & exponens progreſſionis geometricæ denominatorum dicatur m; eam progreſſionem bene repræſentabit hæc formula, $b, bm, bm^2, bm^3 - - bm^\infty$ (216). Hinc ſi præterea communis numerator vocetur d; quævis ejusmodi fractionum ſeries repræſentari poteſt hac formula, $\frac{d}{b}$,

$\frac{d}{b}, \frac{d}{bm}, \frac{d}{bm^2}, \frac{d}{bm^3}, - - \frac{d}{bm^\infty}.$ Jam cum in his fractionibus manente eodem numeratore denominatores crescant in progressione geometrica; fractiones decrescunt in progressione geometrica (32). Hinc ultimus terminus $\frac{d}{bm^\infty}$, est fractio valoris infinite parvi (220). Invertamus eam progressionem hoc modo: $\frac{d}{bm^\infty}, - - - \frac{d}{bm^3}, \frac{d}{bm^2}, \frac{d}{bm}, \frac{d}{b}$; hoc pacto prior illa progressio decrescens abit in crescentem, cujus primus terminus sit $\frac{d}{bm^\infty}$, ultimus $\frac{d}{b}$, Cum ergo in hujusmodi progressione sit summa; seu $s = \frac{um-a}{m-1}$ (218); si loco u substituamus $\frac{d}{b}$, & primum terminum a, seu $\frac{d}{bm^\infty}$, utpote infinite parvum negligamus (220. Schol. 2), erit $s = \left(\frac{dm}{b}\right) : (m-1) = \frac{dm}{b\,(m-1)}$ (218).

222. Coroll. Igitur summa hujus progressionis infinitæ, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, - - - - \frac{1}{\infty}$ est $= 2$. In hac enim est $d = 1$, $b = 1$, $m = 2$; adeoque est $\frac{dm}{b\,(m-1)} = \frac{1 \times 2}{1\,(2-1)} = \frac{2}{1} = 2$. Et sane si duos primos ejus

pro-

progreſſionis terminos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}$ aſſumamus; horum ſumma eſt $= 2 - \frac{1}{2}$: ſi tres aſſumamus; eorum ſumma erit $= 2 - \frac{1}{4}$, quatuor terminorum ſumma eſt $= - \frac{1}{8}$, & ſic porro ſemper ita, ut ſummæ a numero 2 defectus ſit æqualis termino ex aſſumptis ultimo. Hinc ſi ſeriem infinitam accipiamus, cujus ultimus terminus ſit $\frac{1}{\infty}$; ſumma omnium terminorum erit $= 2 - \frac{1}{\infty}$, ſeu erit ſumma illa $= 2$ (220. *Schol.* 2).

CAPUT SEXTUM.

De Fractionibus Decimalibus.

223. Fractio, quæ peculiari nomine *decimalis*, dicitur, pro denominatore ſemper habet unitatem cum aliquot zeris. e.g. $\frac{246}{1000}$ eſt fractio decimalis, ſignificatque *ducentas quadraginta ſex milleſimas.*

Schol. In denominatore fractionis decimalis quandam progreſſionem geometricam contineri patebit in ſequentibus: unde etiam ejus pertractationem hunc in locum rejici poſſe exiſtimavimus; præſertim cum primum fractionis decimalis uſum in Logarithmis ſequ. Cap. pertractandis habituri ſimus.

224. Mathematici in exprimendis fractionibus decimalibus compendio uti ſolent, quod his capitibus continetur. 1*mo.* Omiſſo denominatore ſolum numeratorem ſcribunt, eumque ab integris interjecto *commate*, vel

vel puncto ſeparant. Subintelligunt autem, denominatorem ſemper conſtare unitate poſt ſe totidem zeros adjunctos habente, quot notas numerator continet. e. g. $4\frac{246}{1000}$ hoc modo ſcribunt: 4, 246; id quod ſignificat 4 integra, 246 milleſimas. Hinc e. g. 2, 1 ſignificat duo integra, & unam partem decimam: cum enim numerator unica duntaxat nota conſtet, etiam in denominatore nonniſi unicus zerus intelligendus eſt unitati adjunctus. At 2, 12 ſignificat duo integra, & 12 centeſimas.

2do. Fractionem decimalem omiſſo denominatore ſcriptam inde dignoſci, quod commate ſecernatur ab integro numero ſibi præſixo, clarum eſt. Si enim loco 2, 12 omiſſo commate ſcriberes 212; hic numerus mera integra, & nullam fractionem deſignaret. Hinc ſi detur quæpiam fractio decimalis absque omni integro; ea ita ſcribi ſolet, ut locum integri numeri zerus occupet, a fractione commate ſeparatus. Sic 246 milleſimæ absque omni integro datæ hoc modo ſcribuntur: 0, 246. Hinc e g. 0, 34 ſignificat 34 centeſimas absque omni integro.

3tio. Si fractionis decimalis cum ſuo denominatore ſcriptæ numerator pauciores habeat notas, quam ſint in denominatore zeri; id genus fractio nequit omiſſo denominatore ſcribi, niſi in numeratore numerus notarum præfixis zeris expleatur ita, ut totidem ſint notæ in numeratore, quot in denominatore zeri. Sic ſi detur fractio $\frac{12}{1000}$, deſignans 12 milleſimas; ea nequit omiſſo denominatore, hoc modo ſcribi: 0, 12. Hæc enim expreſſio (per reg. 1*mam*) ſignificaret 12 centeſimas. Verum numeratori 12 præfigendus eſt zerus, ſeu fractio illa decimalis hoc modo eſt exprimenda: 0, 012. Hoc enim pacto jam innoteſcit, in denominatore poſt unitatem tres zeros adeſſe, cum numerator, tribus notis conſtet, ac proinde innoteſcit, 12 illas partes, quas nume-

numerator continet, esse millesimas. Pariter $\frac{1}{1000}$, omisso denominatore sic scribitur: 0, 001; $3\frac{4}{100}$ hoc modo, 3, 04. &c.

225. THEOREMA XXXVI. *Cuivis fractioni decimali adjungi possunt a dextris zeri quotcunque, quin ejus valor mutetur.* e. g. Loco 2, 12 scribi potest 2, 120, vel 2, 1200 &c.

DEMONSTR. Cum enim denominator semper totidem zeros post unitatem habere intelligatur, quot notis numerator constat (224. reg. 1.); si numeratori quotcunque zeri adjiciantur a dextris, denominatori quoque semper totidem zeri adjici concipiuntur: consequenter numeratori quotcunque zeros a dextris addere non aliud reapse est, quam & numeratorem, & denominatorem per idem multiplicare, scilicet per 10, vel per 100, vel per 1000 &c. Eo ipso autem id genus adjectione valor fractionis non mutatur (39).

226. THEOREMA XXXVII. *In fractionibus decimalibus prima post comma nota denotat partes decimas, secunda centesimas, tertia millesimas, & sic porro.* e. g. 3, 456 denotat 3 integra, 4 decimas, 5 centesimas, 6 millesimas.

DEMONSTR. Assumamus e. g. fractionem 0, 435. Hæc fractio æquivalet huic, $\frac{435}{1000}$ (224), ac proinde æquivalet his fractionibus: $\frac{400}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000}$; harum enim summa est $= \frac{435}{1000}$. Jam vero si harum fractionum duas priores ad simpliciores expressiones reducamus, eæ abeunt in has, $\frac{4}{10}, \frac{3}{100}$, : ergo prima nota

4, re-

4, reapse partes decimas; secunda 3, partes centesimas significat: tertiam notam 5 esse partium millesimarum clarum est. Quæ demonstratio cuicunque alteri fractioni decimali æque applicari potest, ac proinde theorematis veritatem generatim evincit.

227. Coroll. Cum prima fractionis decimalis nota significet partes decimas, secunda centesimas, tertia millesimas, & sic porro; patet imprimis earum notarum seorsim consideratarum denominatores esse in progressione geometrica: patet deinde, earundem notarum valorem a fine regrediendo continenter crescere in decuplum, ut fit in numeris integris.

228 PROBLEMA XLVIII. *Datam fractionem non decimalem convertere in decimalem manente priori valore.*

Resolut. Numeratori datæ fractionis adjiciatur zerus, tum dividatur per denominatorem: rursus residuo, si quod manet, adjungatur zerus, ac iterum per denominatorem dividatur, & sic porro. e. g. Sit $\frac{1}{8}$ reducenda ad fractionem decimalem. Numeratori 1 addatur zerus, tum 10 dividantur per 8: quotus erit $=$ 1, pro prima fractionis decimalis nota scribendus, manebitque residuum $= 2$. Huic residuo addatur zerus, & 20 rursus per 8 dividantur: quotus erit $= 2$, pro secunda fractionis decimalis nota scribendus, manebitque residuum $= 4$. Huic residuo addatur iterum zerus, & 30 dividantur per 8: quotus erit $= 5$, pro tertia fractionis decimalis nota scribendus. Et quoniam peracta hac tertia divisione nullum amplius manet residuum, tota operatio peracta jam est, inventaque fractio decimalis 0, 125. Quam quidem esse $= \frac{1}{8}$ facile patet. Nam est $0, 125 = \frac{125}{1000}$ (224); esse autem

$\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ videbis, si fractiones has ad communem denominatorem reduxeris (44).

Schol. Quodsi continenter aliqua fractio remaneat, porro reducenda; id erit indicio, datam fractionem non posse exacte converti in fractionem decimalem: quo tamen diutius continuata fuerit operatio, eo magis accedet inventa fractio decimalis ad verum fractionis datæ valorem. c. g. $\frac{2}{3} = 0,6666$ &c.

229. PROBLEMA XLIX. *Fractiones decimales addere.*

Resolut. Cum fractionum decimalium notæ a dextra sinistram versus more integrorum progrediantur (227); additio fractionum decimalium eodem prorsus modo fit, quo numerorum integrorum. Scilicet subscribantur integra integris, decimæ decimis, centesimæ centesimis, & cetera more consueto peragantur. Hoc uno notato, quod si numerus decimarum ultra 9 excrescat, sola dextima nota sit habenda pro decima, reliquæ autem sinisteriores pro integris commate separandis. e. g.

$$\text{Sint } \textit{Addendi} \left\{ \begin{array}{l} 3,872 \\ 0,4 \\ 0,051 \end{array} \right.$$
$$\text{Erit } \textit{summa} \quad 4,322.$$

230. PROBLEMA L. *Fractiones decimales subtrahere.*

Resolut. Ob rationem num. præc. indicatam subtractio quoque eodem modo peragitur in fractionibus decimalibus, quo in integris, subscribendo integra integris, decimas decimis &c.

e. g. Sit *minuendus*	3,072
subtrahendus	1,581
Erit *residuum*	1,492.

231.

231. PROBLEMA LI. *Fractiones decimales inter ſe multiplicare.*

Resolut. Multiplicentur inter ſe fractiones more numerorum integrorum: at in facto totali reſecentur interjecto commate tot notæ dexteriores, quot in ambabus ſimul fractionibus notæ decimales erant. e. g. Si 2, 31 multiplicari debeat per 3, 42; multiplicationem more in integris conſueto peragendo acquiritur factum totale = 79002: porro fractiones, quarum una per alteram multiplicata fuit, ambæ ſimul habent 4 notas decimales; itaque in facto hoc totali quatuor dexteriores notæ ſunt reſecandæ, ut ſit 7,9002. Quodſi facti totalis notæ non ſufficerent totidem notis reſecandis, quot decimales notas habent ambo ſimul factores; zeris præfixis augendæ ſunt, dum ſufficiant. e. g. Si fractio 0, 23 multiplicari debeat per 0, 04; factum totale eſt = 92. Jam fractio multiplicanda duas habet notas decimales, totidem altera; itaque quatuor notæ reſecandæ eſſent a facto totali: at iſtud duabus tantum notis conſtat; quapropter zeris præfixis augeatur, ſcribaturque 0, 0092.

Demonstr. Sit e. g. fractio 2, 31 multiplicanda per 3, 42. Prior æquivalet huic: $2\frac{31}{100}$ altera huic: $3\frac{42}{100}$ (224). Porro ſi integra reducantur ad fractionem, ejusdem cum adjectis fractionibus denominationis; prior abit in hanc: $\frac{231}{100}$, poſterior in hanc: $\frac{342}{100}$ (48): ergo reapſe in aſſumpto caſu hæ duæ fractiones: $\frac{231}{100}$ & $\frac{342}{100}$ ſunt inter ſe multiplicandæ. Harum autem multiplicatio peragitur, ſi numeratores inter ſe, & denominatores inter ſe multiplicentur (57).

 Ita-

Itaque pro numeratore novæ fractionis acquiritur reapſe illud factum, quod enaſcitur, ſi factores more in integris conſueto inter ſe multiplicentur: quæ proinde multiplicandi ratio rite præſcribitur in *Reſolutione* Problematis. At denominator novus $= 100 \times 100 = 10000$ tot zeris unitati adjectis conſtabit, quot in utroque ſimul denominatore zeri reperiuntur. Unde jam altera quoque *reſolutionis* pars, qua præſcribitur in facto totidem notas dexteriores commate ſeparandas eſſe, quot in utroque ſimul factore notæ decimales erant, eluceſcit. Sic enim ratiocinari licet: Quoniam fractio decimalis ſemper totidem notis decimalibus conſtat, quot zeros continet ejus denominator (224); in facto totidem notæ dexteriores reſecandæ ſunt pro decimalibus, quot zeros continet denominator ejusdem facti: atqui denominator facti tot zeros continet, quot zeros continebant utriusque ſimul factoris denominatores, adeoque quot notæ decimales erant in utroque ſimul factore; ergo in facto totidem notæ dexteriores reſecandæ ſunt interjecto commate, quot in utroque ſimul factore notæ decimales erant.

232. Coroll. Si ergo fractio decimalis per numerum integrum multiplicari debeat; in facto (quod itidem communi multiplicandi methodo obtinebitur) nonniſi tot notæ dexteriores erunt commate ſeparandæ, quot notas decimales fractio illa habuerit. e. g. $2, 01 \times 12 = 24, 12$.

233. PROBLEMA LII. *Fractionem unam decimalem dividere per alteram.*

Resolut. 1mo. Dividatur dividendus per diviſorem more in integrorum diviſione recepto: at in quoto tot notæ dexteriores ſeparentur interjecto commate, quot notis decimalibus ſuperat dividendus diviſorem. e. g. Si 2, 76 dividi debeat per 1, 2; more in integris uſitato diviſionem inſtituendo acquiritur quotus $= 23$: & quoniam dividendus unica habet plures notas decimales, quam habeat diviſor, in quoto unica nota dextima interjecto commate reſecanda eſt; hoc eſt, is quotus hoc modo ſcribi debet: 2, 3. Hac methodo rite peragi diviſionem decimalium vel inde patet, quod quo-

quotus in diviſorem ductus ſemper reſtituat dividendum. Sic in aſſumpto exemplo, ſi quotus 2, 3 in diviſorem 1, 2 ducatur methodo n. 131 tradita, pro *facto* acquiritur ipſe dividendus 2, 76. Hinc ſi in diviſore totidem occurrant notæ decimales, quot in dividendo; in quoto nulla nota reſecanda erit. e. g. Si 11, 20 per 0, 32 dividi debeat; quotus eſt 35: qui ſi in diviſorem 0, 32 ducatur, reſtituit dividendum 11, 20 (232).

2do. Si in diviſore plures occurrant notæ decimales, quam in dividendo; dividendi notis adjiciantur in fine zeri, unus, vel plures, donec numerus decimalium major evadat in dividendo, quam diviſore, vel ſaltem æqualis utrobique. Hoc pacto dividendi valor non mutabitur (225), & tamen diviſio jam per reg. 1*mam* inſtitui poterit. e. g. Si 11, 2 per 0, 32 dividi debeat; addatur dividendo zerus, ut ſit 11, 20, ac tum primum diviſio per reg. 1*mam* inſtituatur: erit quotus, uti ſuperius vidimus, = 35.

3tio. Si ex diviſione quodpiam reſiduum maneat; addatur ei zerus, atque ita continuetur diviſio. e. g. Si 1, 17 per 0,5 dividi debeat; acquiritur quotus 23, & manet reſiduum 2 per 5 dividendum. Itaque reſiduo 2 addatur zerus, & 20 per 5 dividatur, novusque quotus 4 reliquis adjungatur: erit quotus totalis = 234. At zerus ille additus ita ſpectandus eſt, quaſi jam initio additus fuiſſet dividendo: reapſe enim hoc pacto 1, 170 dividitur per 0, 5. Hinc dividendus jam non una, ſed duabus decimalibus ſuperare diviſorem 0, 5 cenſendus eſt: ac proinde per reg. 1*mam* duæ dexteriores quoti notæ ſint commate ſeparandæ, ſeu quotus ille hoc modo ſcribendus eſt: 2, 34. Quodſi poſt primam zeri adjectionem adhuc maneat aliquot ex diviſione reſiduum; rurſus id genus reſiduo adjiciatur zerus, ac diviſio methodo in integris uſitata continuetur. Omnes autem zeri ſucceſſive adjecti ita ſpectandi ſunt, ac ſi jam initio adjecti fuiſſent dividendo. Unde, ſi quis hujusmodi ſucceſſivas zerorum adjectiones evitare cupit; mox initio operationis aliquot zeros dividendo adjiciat.

e. g. Si 3, 2 per 0, 23 dividi debeat; acquiritur primo quotus = 1 cum residuo = 7. Huic residuo adjiciatur zerus, & 70 per 25 dividatur: erit altera quoti nota 2. manebitque residuum 20. Alteri huic residuo si adjiciatur zerus, & 200 per 25 dividatur; tertia quoti nota 8 absque omni jam residuo acquiretur. Erit adeo quotus talis 128. At quoniam duo successive zeri adjecti sunt dividendo, reapse 3, 200 divisus est per 0, 25; adeoque per reg. 1*mam* in quoto unica nota dextima separanda est commate, seu quotus ille hoc modo est scribendus: 12, 8.

234. Coroll. Quoniam in quoto tot notæ dexteriores separandæ sunt interjecto commate, quot notis decimalibus superat dividendus divisorem; si fractio decimalis per numerum integrum fractione decimali prorsus carentem dividatur, in quoto totidem dexteriores notæ resecentur, oportet, quot notas decimales fractio dividenda habet.

Schol. Fractionum decimalium ad usus geometricos applicationem in Geometria dabimus.

CAPUT SEPTIMUM.

De Logarithmis.

235. Si progressioni arithmeticæ numerorum naturalium a zero initium sumenti subscribatur progressio geometrica, cujus primus terminus sit unitas; termini progressionis arithmeticæ erunt *logarithmi* sibi respondentium terminorum progressionis geometricæ. e. g. Si sint duæ hæ progressiones:

Arithmetica,	0,	1,	2,	3,	4,
Geometrica,	1,	10,	100,	1000,	10000;

quivis terminus superior erit *logarithmus* inferioris sibi respondentis.

236. THEOREMA XXXVIII. *Logarithmi quantitatum ſunt earundem quantitatum exponentes.*

Demonstr. Si primus progreſſionis geometricæ cujuscunque terminus vocetur a, exponens m; quævis progreſſio geometrica rite repræſentatur hac formula, a, am^1, am^2, am^3, am^4 &c. (216). At in ea progreſſione geometrica, cujus logarithmi ſunt ipſa numerorum naturalium progreſſio arithmetica a zero ſumens initium, primus terminus eſt $= 1$ (235); quodſi ergo de hac ſpeciatim progreſſione geometrica ſit ſermo, in formula generali nunc adnotata eſt $a = 1$: conſequenter ſi de dicta progreſſione geometrica ſpeciatim ſit ſermo, ea rite repræſentatur (in ſuperiore formula generali loco a ponendo 1) rite, inquam, repræſentatur per 1, m^1, m^2, m^3, m^4 &c. ſeu ob $m^0 = 1$ (76) rite repræſentatur per m^0, m^1, m^2, m^3, m^4 &c. Jam vero ſi hæc geometrica progreſſio ſubſcribatur arithmeticæ logarithmorum progreſſioni, num. præc. deſcriptæ, ut ſit:

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \\ m^0, & m^1, & m^2, & m^3, & m^4; \end{array}$$

evidenter apparet, ſeriem logarithmorum prorſus eandem eſſe cum ſerie exponentium. Veritas ergo theorematis patet.

Schol. Exſtant tabulæ logarithmorum pro ſerie continua numerorum naturalium; pro quibus conficiendis ea ipſa numerorum naturalium progreſſio geometrica aſſumpta eſt, quam n. 235. adnotavimus, quæve pro exponente habet numerum 10. Scilicet unitati aſſignatus eſt pro logarithmo zerus, numero decimo unitas, centeſimo numerus 2, milleſimo numerus 3, & ſic porro. Unde conſequens eſt, numerorum inter 1 & 10 intercedentium logarithmos eſſe majores zero, minores unitate, ac proinde eſſe fractiones; numerorum inter 10 & 100 intercedentium logarithmos eſſe majores unitate, at minores numero 2, adeoque eſſe æquales unitati cum adjuncta fractione, & ſic porro. Id genus intermedios logarithmos ut determinarent dictarum tabularum conſtructores, logarithmorumque tabulas (quarum usus egregios in sequentibus videbimus) pro continua numerorum naturalium serie conficerent; in arithmetica illa logarithmorum progressione, quam n. 235 adnotavimus, quemlibet terminum converterunt in æquivalentem fractionem decimalem, additis cuilibet termino septem zeris, tanquam totidem decimalibus: ac proinde eam progressionem hoc modo scripserunt: 0,0000000; 1,0000000; 2,0000000; 3,0000000 &c. tum in partibus decimalibus intermedios illos logarithmos variis proportionibus institutis determinarunt. e. g. Pro numero 2 inventus est logarithmus 0,3010300, qui zero major, at unitate minor est: numero 20 respondet in tabulis logarithmus 1.3010300, unitate major quidem, at numero 2 (qui est logarithmus numeri 100) minor. Recole naturam fractionum decimalium (224).

237. Prima cujusvis logarithmi nota, quæ a reliquis commate (quamquam in tabulis loco *commatis* punctum solet adhiberi) separatur, designatque numerum integrum in logarithmo partibus decimalibus præfixum, *characteristica* vocatur. Hinc quoniam numeri 10 logarithmus est = 1,0000000 (236 *Schol.*), in logarithmis numerorum decimo minorum, characteristica nonnisi *zerus* esse potest: at in logarithmis numerorum a 10 inclusive, usque ad 100 exclusive characteristica est = 1; a 100 inclusive, ad 1000 exclusive est characteristica = 2 &c. Unde patet logarithmi characteristicam semper unitate minorem esse numero notarum omnium ejus numeri, cui logarithmus ille respondet: ut adeo logarithmi characteristica innotescente illico innotescat numerus notarum omnium ejus numeri, cui logarithmus ille respondet, & vicissim e. g. Si dati logarithmi characteristica sit = 3. numerus, cui logarithmus ille respondet, quatuor notis constare debet: si datus numerus constet tribus notis; in ejus logarithmo characteristica est = 2.

238. PROBLEMA LIII. *Datos numeros inter se multiplicare ope logarithmorum ipsis respondentium.*

Resolut. Logarithmus multiplicatoris addatur logarithmo multiplicandi; ſumma enaſcens erit logarithmus *facti* quæſiti: adeoque is numerus erit *factum* quæſitum, qui novo huic logarithmo in tabulis reſpondet. e g, Sit multiplicandus 89, multiplicator 97. Priori reſpondens in tabulis logarithmus eſt 1,9493900, poſterioris autem logarithmus eſt, 1, 9867717; quorum ſumma eſt = 3, 9361617. Itaque huic ſummæ, tanquam logarithmo reſpondens in tabulis numerus 8633 eſt quæſitum *factum.*

Demonstr. Logarithmi ſunt *exponentes* numerorum ſibi reſpondentium (236): atqui, ſi addantur exponentes factorum, ſumma enaſcens eſt exponens facti (21. *reg.* 4); ergo etiam ſi factorum logarithmi in unam ſummam addantur, obtinetur logarithmus facti.

239. Coroll. Itaque ſi numerus quispiam per ſe ipſum multiplicari, id eſt, ad quadratum elevari debeat; ſufficit ejus logarithmum per 2 multiplicare: factum enaſcens erit logarithmus quæſiti quadrati.

240. PROBLEMA LIV. *Numerum unum dividere per alterum ope logarithmorum.*

Resolut Logarithmi ſunt exponentes quantitatum (236): atqui, ſi exponens diviſoris ſubtrahatur ab exponente dividendi, obtinetur exponens quoti (27. *reg.* 3.); ergo etiam ſi logarithmus diviſoris ſubtrahatur a logarithmo dividendi, obtinetur logarithmus quoti. Sic ſi 8633 dividi debeat per 97; hujus logarithmus = 1. 9867717 ſubtrahatur ab illius logarithmo = 3. 9361617: reſiduum = 1. 9493900 erit logarithmus quoti. Hinc cum huic logarithmo reſpondeat in tabulis numerus 89; hic ipſe numerus eſt quotus quæſitus.

241. PROBLEMA LV. *E dato numero quamcunque radicem ope logarithmorum extrahere.*

Resolut. Si exponens potentiæ dividatur per exponentem datum radicis, obtinetur exponens radicis quæſitæ (82): ergo etiam, ſi logarithmus datæ potentiæ dividatur per exponentem datum radicis, obtinetur ejusdem radicis logarithmus (236). e. g Sit ex 5184 extrahenda radix quadrata. Ejus numeri logarithmus = 3 7146650 dividatur per exponentem radicis quadratæ, ſeu per 2; quotus = 1. 8573325 erit logarithmus radicis quæſitæ. Hinc cum logarithmo huic in tabulis reſpondeat numerus 72; hic ipſe numerus eſt radix quadrata numeri 5184.

Schol. Ex his intelligere jam licet, tabulas logarithmorum (quæ paſſim proſtant) egregiæ omnino utilitatis eſſe, cumprimis in calculo majorum numerorum. At ſæpe in logarithmorum uſu aliquam moram afferunt ſequentia. 1) In tabulis nonniſi pro continua integrorum naturalium numerorum ſerie 1, 2, 3, 4 &c. habentur logarithmi. Hinc ſæpius occurrit logarithmus, quem in tabulis fruſtra quæſieris, cujusmodi ſunt logarithmi fractionum, aut integrorum aliquam fractionem adjunctam habentium. 2) Tametſi in maximis tabulis habeantur logarithmi numerorum naturalium ab 1 usque ad 100000; in minoribus tamen tabulis numeri 10000*mo* majores non reperiuntur cum ſuis logarithmis. Hinc ſæpius occurrere poteſt in calculo logarithmus iis major, qui in tabulis, quas præ manibus quis habet, reperiri queant. Itaque pro ſuperandis his difficultatibus aliqua adhuc problemata adjiciemus.

242. PROBLEMA LVI. *Invenire numerum ejusmodi logarithmo reſpondentem, qui non reperitur in tabulis, in quibus tamen eo logarithmo tam majores, quam minores reperiuntur.*

Resolut. Quoniam in tabulis continua numerorum integrorum ſeries 1, 2. 3, 4 &c. adnotatur cum ſuis logarithmis; ſi logarithmus datus non reperiatur in tabulis, tametſi reperiantur alii illo majores, & minores, id erit indicio. datum logarithmum reſpondere numero integro aliquam fractionem adjunctam habenti: qui numerus hac methodo eſt inveniendus.

1) Logarithmus, qui dato logarithmo proxime minor eſt in tabulis, ſubtrahatur a logarithmo proxime majore, & prima hæc differentia notetur.

2) Idem

2) Idem logarithmus proxime minor ſubtrahatur etiam a dato logarithmo, & altera hæc differentia pariter notetur.

3) Jam differentia eorum numerorum, quorum uni reſpondet in tabulis logarithmus dato logarithmo proxime minor, alteri autem logarithmus dato proxime major, eſt = 1. Quæ unitas convertatur in fractionem decimalem additis ipſi aliquot zeris, e. g. in hanc, 1, 000; tum inferatur: differentia prima, ſcilicet duorum logarithmorum, quorum alter in tabulis eſt proxime minor dato logarithmo, alter proxime major, dat differentiam numerorum ipſis reſpondentium, quæ ſit = 1, 000; ergo differentia altera, nempe logarithmi dati, & logarithmi illo proxime minoris, quam dabit differentiam numerorum ipſis reſpondentium? Inventus quartus proportionalis ſumi poterit pro differentia, qua numerus dato logarithmo reſpondens excedit numerum logarithmo proxime minori in tabulis reſpondentem: quæ proinde differentia ſi addatur ei numero, qui in tabulis dicto logarithmo proxime minori reſpondet, acquiritur numerus dato logarithmo reſpondens.

e. g. Detur logarithmus in tabulis non occurrens 3. 7073546, & quæratur numerus eidem reſpondens. 1) Logarithmus in tabulis proxime minor 3. 7073146 a logarithmo proxime majore 3. 7073998 ſubtractus relinquit differentiam 852. 2) Idem proxime minor logarithmus a dato logarithmo ſubtractus relinquit differentiam 400. Itaque 3) hæc fiat proportio, 852: 400 = 1, 000: x; ſeu primam rationem per 4 dividendo, 213: 100 = 1, 000: x.

Jam medios inter ſe multiplicando acquiritur factum = 100, 000 (n. 231): quod factum dividendo per terminum primum, eſt proxime x = 0, 469 (n. 224). Hinc ſi hæc fractio addatur numero 5097, qui in tabulis reſpondet minori logarithmo 3. 7073146; obtinebitur numerus 5097, 469 dato logarithmo (quantum quidem ad praxim attinet) ſat accurate reſpondens.

243. PROBLEMA LVII. *Invenire numerum ejusmodi logarithmo dato respondentem, qui excedat omnes eos logarithmos, qui in tabulis continentur.*

Resolut. A dato logarithmo ſubtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. donec reſiduus logarithmus jam minor ſit, quam ſit ultimus in tabulis: quæratur deinde numerus huic reſiduo logarithmo reſpondens in tabulis, ac multiplicetur per 10, vel per 100, vel per 1000 &c. prout nempe logarithmum numeri 10, vel numeri 100, aut 1000 &c. ſubtraxiſti a logarithmo dato. Factum enaſcens erit ipſe numerus quæſitus.

e. g. Si in tabulis, quas præ manibus habes, ultimus logarithmus ſit 4. 0000000, quæraturque numerus logarithmo 4. 7104559 reſpondens; ab hoc logarithmo ſubtrahatur logarithmus numeri 100, qui eſt 2. 0000000: reſiduus logarithmus erit $=$ 3. 7104559, cui in tabulis reſpondet numerus 5134. Hic itaque numerus ſi per 100 multiplicetur, acquiretur quæſitus numerus $=$ 513400. Scilicet ſi numerus quispiam per 10 multiplicetur, ejus logarithmus interea unitate creſcit; ſi idem numerus multiplicetur per 100, ejus logarithmus interea duabus unitatibus augetur; uti ex contemplatione progreſſionum num. 235, & 236 adnotatarum intelligere licet.

244. PROBLEMA LVIII. *Invenire logarithmum numeri fractionem decimalem adnexam habentis.*

Resolut. Quæratur logarithmus e. g. numeri 5326, 4. Numeri integri 5326 abſque adjecta fractione conſiderati logarithmus 3. 7264012 ſubtrahatur a logarithmo in tabulis proxime majore 3. 7264827, noteturque differentia 815. Jam numerus 5326 ab eo numero, cui logarithmus ille proxime major reſpondet, unitate differt; & idem numerus 5326 a dato numero 5326, 4 differt 4 decimis. Hæc ergo inſtituatur quæſtio: *numerorum differentia* $=$ 1 *dat logarithmorum ipſis reſpondentium differentiam* $=$ 815; *ergo numerorum differentia* $=$ 0; 4 *quam dabit differentiam logarithmorum ipſis reſpondentium?* Ex qua per regulas regulæ aureæ ſimplicis (206) hæc proportio eruitur. $1 : 0,4 = 815 : x$. Unde x (ſeu differentia inter logarithmos numerorum 5326 & 5326,

4)

4) eſt $= 326$: quæ differentia ſi logarithmo 3. 7264012 addatur, obtinetur logarithmus quæſitus 3. 7264338.

245. PROBLEMA LIX. *Invenire logarithmum numeri majoris, quam ſint ii, quorum logarithmi habentur in tabulis.*

Resolut. Una vel plures finales dati numeri notæ deprimantur ad fractionem decimalem; tum pro numero illo ita jam conſiderato, ac ſi ex integris, & adjunctis decimalis conſtaret, inveniatur logarithmus methodo n. 244 tradita. Denique inventi logarithmi characteriſtica tot unitatibus augeatur, quot notæ ad fractionem depreſſæ fuerunt.

e. g. Si in tabulis, quæ præ manibus habes, non reperiatur logarithmus numeri 10000*mo* majoris, & tamen quæratur logarithmus numeri 53264: dextimam dati numeri notam 4 deprime ad fractionem decimalem, ut ſit 5326, 4: tum methodo num. præc. tradita inveni hujus numeri logarithmum 3. 7264348. Si hujus logarithmi characteriſticam unitate (cum unica duntaxat nota fuerit ad fractionem decimalem depreſſa) auxeris; obtinebis numeri dati logarithmum 4. 7264338.

246. PROBLEMA LX. *Invenire logarithmum cujuscunque fractionis.*

Resolut. In qualibet fractione numerator eſt dividendus, denominator *diviſor*, & ipſa fractio *quotus* (36). Jam vero ſi logarithmus diviſoris ſubtrahatur a logarithmo dividendi; reſiduum eſt logarithmus quoti (240): ergo ut fractionis logarithmum acquiras, logarithmus denominatoris ſubtrahendus eſt a logarithmo numeratoris. Hinc ſi numerator denominatore minor fuerit, uti ſemper eſt in fractionibus genuinis; reapſe logarithmus numeratoris ſubtrahendus erit a logarithmo denominatoris, & reſiduo ſignum — præfigendum. Nam generatim, ſi quantitas major ſubtrahi, & reſiduo ſignum — præfigi. Sic $3 - 5 = - 3$; $a - 2a = - a$ &c. Hinc ſi quæratur e. g. logarithmus fractionis $\frac{2}{3}$; quoniam numerator eſt minor denominatore, numeratoris

toris logarithmus 0. 3010300 ſubtrahatur a denominatoris logarithmo 0. 4771212, tum reſiduo præfigatur ſignum —; erit logarithmus quæſitus = — 0. 1760912. Et ſane, quoniam logarithmus unitatis eſt 0, 0000000 = 0, fractionum unitate minorum logarithmi, *zero* minores, ac proinde negativi ſint, eſt neceſſe.

At ſi fractionis numerator denominatore major fuerit; logarithmus quoti erit poſitivus. Sic ſi quæratur logarithmus fractionis $\frac{3}{2}$ denominatoris logarithmus 0. 3010300 ſubtrahi poterit a numeratoris logarithmo 0. 4771212, relinquetque poſitivum reſiduum = 0. 1760912: quod ipſum reſiduum erit quæſitus fractionis $\frac{3}{2}$ logarithmus.

247. Coroll. Si integer numerus adjunctam habeat quamcunque fractionem; poteſt totus numerus reduci ad fractionem impropriam (48), atque ita ejus logarithmus methodo nunc expoſita inveniri. e. g. Numeri $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$ logarithmus acquiritur, ſi logarithmus numeri 3 ſubtrahatur a logarithmo numeri 17, ſeu is logarithmus eſt = 1. 2304489 — 0. 4771212 = 0. 7533277.

PARS SECUNDA,

COMPLECTENS

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

ET

SECTIONUM CONICARUM.

ELEMENTA
GEOMETRIÆ.
SECTIO PRIMA.
DE LINEIS, ET ANGULIS.

CAPUT PRIMUM.
De primis Geometriæ Fundamentis.

1. Quantitas *extenſa* tres dimenſiones habere poteſt; ſcilicet longitudinem, latitudinem, & profunditatem, ſeu craſſitudinem. Scientia, quæ harum dimenſionum proprietates demonſtrat, *Geometria* nuncupatur: conſiderat autem Geometria has dimenſiones, ut *continuas*, ſeu nuſpiam interruptas.

2. Longitudo, quatenus abſque omni latitudine, & profunditate conſideratur, *linea* vocatur: longitudo, & latitudo ſimul, ſi concipiatur abſque omni profunditate, nomine *ſuperficiei* venit: denique complexum ex longitudine, latitudine, & ſimul profunditate conſurgens ſolet a Geometris *ſolidum*, vel etiam *corpus* nuncupari.

3. *Punctum* eſt quoddam initium magnitudinis, omni prorſus extenſione carens: Veteribus *ſignum* dicebatur.

4. Punctum, si motu continuo ferri concipiatur, intelligitur generare *lineam*: & quidem, si ita moveatur punctum, ut nullam in partem deflectat, ejus semita est linea *recta*; sicubi autem a via cœpta deflectat; lineam *curvam* describit. Porro si punctum momentis singulis a via recta declinet, ac proinde si directionem suam *continenter* mutet; describit motu suo curvam *continuam*, seu talem, cujus nulla omnino definita pars, utcunque parva, sit recta.

5. Coroll. I. Quoniam punctum tunc motu suo generat lineam rectam, quum ita movetur, ut nullam in partem deflectat; perspicuum est 1) ab uno puncto ad aliud nonnisi unicam rectam duci posse: perspicuum est 2) lineam rectam esse brevissimam omnium earum linearum, quæ ab uno puncto ad aliud duci possunt.

6. Coroll. II. Ex his autem aperte consequitur, mutuam duorum datorum punctorum distantiam aptissime exhiberi per lineam rectam, ab uno eorundem punctorum ad alterum ductam. Nam mensura cujuspiam rei debet esse fixa, determinataque, & non vaga, ac incerta: jam vero mensura mutuæ duorum punctorum distantiæ tunc solum est fixa, determinataque, si eam distantiam metiatur recta, ab uno eorum punctorum ad alterum ducta: curvæ enim lineæ ab uno puncto ad alterum duci possunt innumeræ, eæque jam breviores, jam longiores, recta autem ab uno puncto ad alterum ducta, quoniam nonnisi unica esse potest (5), fixæ, determinatæque longitudinis sit, oportet.

7, THEOREMA I. *Duæ rectæ, quarum duo quæcunque puncta congruunt, totæ congruunt ita, ut reapse unam rectam, non duas diversas efficiant.*

Demonstr. Ponamus enim, si fieri potest, lineas ABC, & ABD (*Tab.* 1. *Fig.* 1.) esse imprimis rectas, deinde duo puncta A & B habere sibi communia, nec congruere tamen totas, sed alteram ab altera versus C & D recedere. Cogitentur duo puncta ex A versus B moveri, alterum post alterum, quæ fluxu suo lineas ABC & ABD generent. Quoniam a puncto A ad B nonnisi unica recta duci potest (5), punctum posterius ab A usque ad B continenter insistet vestigiis puncti

præ-

præcedentis; atque adeo utrumque punctum interea eandem habebit motus ſui directionem: cum ergo puncta illa ultra B recedant a ſe ipſis, tunc jam vel utrumque ipſorum, vel ſaltem alterum deſeret priorem ſuam directionem, & ad latus deflectet; conſequenter vel utrumque, vel ſaltem alterutrum lineam curvam generabit (4). Fieri ergo nequit, ut duæ quæpiam lineæ ABC & ABD ſint imprimis rectæ, deinde ut duo puncta habeant communia, nec tamen congruant tota: conſequenter veritas Theorematis in aperto eſt.

8. Coroll. I. Quoniam e. g. per puncta A & B nequeunt id genus duæ diverſæ rectæ duci, quæ vel minimum a ſe invicem deflectant uſpiam; data duo puncta poſitione ſua plene determinant ſitum rectæ per ipſa ducendæ; ita nimirum, ut datis quibuscunque duobus punctis, per quæ duci debeat linea recta, non amplius ſit in arbitrio ducentis, hunc vel illum ſitum tribuere rectæ ducendæ, ſed eo ipſo determinetur totus ſitus ejusdem rectæ utcunque longæ.

9. Coroll. II. Duæ quæcunque rectæ nonniſi in unico puncto poſſunt ſeſe interſecare. Si enim in pluribus punctis ſeſe interſecarent; jam verum eſſet, eas habere duo puncta ſibi communia: eo ipſo autem totæ congruerent ita, ut reapſe unam rectam, non duas diverſas efficiant (7).

Schol. De ſuperficiebus *Sect.* 3. acturi ſumus: attamen jam nunc notanda eſt earum in planas, & curvas diviſio. Superficies *plana* eſt, cujus omnibus partibus linea recta applicari poteſt: e. g. menſæ hujus ſuperficies eſt plana. Ceteræ omnes ſuperficies, quibus non poteſt ex omni parte applicari linea recta, *curvæ* appellantur: e. g. ſuperficies ſphæræ eſt curva. Porro ſuperficies plana ſolet compendii gratia *planum* appellari; ita ut hæc e. g. phraſis, *rectæ* AC, DC, MC (*Fig.* 2.) *ſunt in eodem plano*, tantundem ſignificet Geometris, ac, tres illas rectas in eadem ſuperficie plana jacere totas. Nos tota hac, & ſequ. *Sectione* varias lineas partim rectas, partim curvas inter ſe comparaturi, ſemper (quod probe notandum eſt) de ejusmodi

modi duntaxat lineis loquemur, quæ *in eodem plano* ſitæ ſint.

10 Si linea recta AC circa fixum punctum C convertatur, ita ut ex ſitu AC transſeat primo in ſitum DC, tum in ſitum MC, OC, & ſic porro, usque dum ad priorem ſuam poſitionem revertatur; verret interea ſpatium linea curva AOBNA concluſum, quod *circulus* nominatur: ipſa autem linea curva AOBNA vocatur *peripheria circuli*. Ceterum hæc ipſa linea curva non raro nomine *circuli* deſignatur. Punctum C eſt *centrum* circuli. Quælibet recta AB, vel DE, vel ML &c., quæ per centrum tranſit, & utrinque in peripheria circuli terminatur, *diameter* audit. Quælibet recta AC, DC, &c., quæ inter circulum & ejus centrum intercipitur, eſt *radius*, ſeu *ſemidiameter*. Quæcunque peripheriæ pars AD, vel AM, vel MO &c. nomine *arcus* venit. Denique ſpatium duobus radiis & arcu comprehenſum *ſector* circuli nuncupatur. e. g. Spatium ACD, quod radiis AC & DC, item arcu AD concluditur, eſt ſector circuli AOBNA.

11. Coroll. I. Quoniam peripheria AOBNA ab extremo rectæ BC circa fixum centrum C circumactæ puncto A deſcribitur; perſpicuum eſt, ſingula ejusdem peripheriæ puncta A, D, M, O &c. a centro C diſtare intervallo = AC: conſequenter omnes ejusdem circuli radios AC, DC, MC &c. inter ſe æquales omnino eſſe. Porro clarum eſt, quamlibet diametrum duobus circuli ſui radiis æqualem eſſe; quæ ipſa eſt ratio, quod radius ſoleat etiam *ſemidiametur* nominari: ergo omnes quoque ejusdem circuli diametri inter ſe æquentur, eſt neceſſe.

12. Coroll. II. Dum recta AC circa centrum C dicto modo circumagitur; quemadmodum extremum ejus punctum A peripheriam circularem AOBNA, ita quodlibet ejusdem intermedium punctum *a* peripheriam circularem *aobna* deſcribit: & quemadmodum in circulo AOBNA, ita etiam in quolibet alio *aobna* radios omnes inter ſe, & diametros inter ſe æquales eſſe perſpicuum eſt.

13. THEOREMA II. *Si in quocunque circulo* AOBNA *ceteroquin fixo concipiatur ejusdem ſector mobilis*

bilis ACD *circa centrum* C *converti, ut abeat in quemcunque alium ſitum* MCO; *arcus mobilis* AD, *dum de uno loco in alium tranſit, conſtanter in ipſa circuli fixi peripheria manet, ita ut ſemper totus cum aliqua peripheriæ parte congruat.*

Demonstr. Nam ſi alicubi quodpiam mobilis illius arcus punctum D intra, vel extra circuli fixi peripheriam caderet; ſectoris radius DC aliquo circuli ſui radio minor, vel major eſſet. Iſtud autem manifeſte abſurdum eſt: cum enim omnes ejusdem circuli radii inter ſe æquales ſint (11); quilibet ſectoris ACD radius cuilibet alteri circuli ſui AOBNA radio æqualis ſit, eſt neceſſe.

14. Coroll. Atque hinc facile deducitur, circulum a qualibet ſua diametro AB bifariam, ſeu in duas æquales partes ſecari, adeoque arcus AOB, & BNA eſſe ſemiperipherias circuli. Concipiamus enim circuli partem BNA eſſe fixam, uti & centrum C; at partem AOB cum diametro AB circa fixum centrum C converti poſſe. Si pars hæc mobilis cum diametro AB ſic convertatur circa centrum C, ut punctum A in priorem puncti B locum perveniat, & viciſſim punctum B puncto A ſuccedat; arcus AOB cadet in arcum BNA (13), & præterea uterque hic arcus iisdem terminis A & B concludetur: eo ipſo autem clarum eſt, eos arcus eſſe inter ſe æquales, ac proinde eſſe ſemiperipherias circuli. Idem de qualibet alia diametro DE, ML &c. eodem modo demonſtratur.

15. Cujusvis circuli peripheria integra dividi ſolet in 360 partes æquales, quæ *gradus* nuncupantur: quilibet gradus ſubdividitur in 60 *minuta prima*; quodlibet minutum primum in 60 *minuta ſecunda*; quodlibet minutum ſecundum in 60 *tertia* &c. Porro partes iſtæ compendii gratia hoc modo ſcribuntur:

$45^{\circ}, 38', 16'', 5'''$ &c. Id eſt, 45 gradus, 38 minuta prima, 16 ſecunda, 5 tertia.

16. Si duæ quæcunque lineæ AC & DC in quopiam puncto C concurrant; eæ ad illud concurſus punctum efficiunt *angulum*: qui quidem angulus nonniſi mutuam earum linearum ad ſe invicem inclinationem

 expri-

exprimit, ita ut magnitudo anguli non a quantitate linearum ipsum comprehendentium, sed a sola earundem divaricatione pendeat. Unde etiam *angulus* definiri solet, duarum linearum in quopiam puncto concurrentium ad se invicem *inclinatio*. Porro angulus vel est rectilineus, vel curvilineus, vel denique mixtus. *Rectilineus* est, quem lineæ rectæ efficiunt; *curvilineus*, quem curvæ; *mixtus* denique, quem recta & curva. Nobis nonnisi de rectilineis angulis sermo erit.

Schol. Si a diversis lineis circa commune concursus punctum diversi anguli efficiantur, uti videre est in Figura effici circa punctum C; id genus angulus vitandæ confusionis gratia plerumque tribus literis, quarum una in concursu duarum linearum angulum efficientium, reliquæ duæ in aliis earundem linearum extremitatibus sitæ sint, exprimi solet: ita tamen, ut litera linearum concursum designans medio loco enuncietur. e. g. Angulus, quem rectæ AC & DC comprehendunt, literis ACD exprimi solet, ita ut litera C, quæ in Figura ad concursum earundem rectarum sita est, medio loco scribatur, enuncieturque. Ceterum in ejusmodi casu determinatus angulus potest, & solet designari etiam unica litera, quæ intra ipsas lineas angulum comprehendentes ad earundem concursum scribatur: e. g. angulus ACN, quem rectæ AC & NC comprehendunt, per literam x sufficienter designatur.

17. THEOREMA III. *Ex centro* C *circuli* AOBNA *ducantur quotcunque radii* AC, DC, MC, *&c.* 1) *Si fuerit angulus* ACD = MCO; *erit etiam arcus* AD = MO. 2) *Si fuerit angulus* ACM *duplo major angulo* MCO, *id est, si fuerit ang.* ACM = 2MCO: *erit etiam arcus* AM *duplo major arcu* MO. 3) *Si fuerit angulus* ACO *triplo major angulo* MCO; *erit etiam arcus* AO *triplo major arcu* MO, *& sic porro.*

Demonstr. Sit enim 1) ang. ACD = MCO. Concipiamus sectorem ACD converti circa fixum centrum C versus O. Quoniam arcus AD totus semper in ipsa circuli peripheria moveri debet (13), ejus punctum D aliquo temporis momento perveniet ad O, ita ut cum eo congruat: eo ergo temporis momento rectæ DC

&

& OC habebunt duo puncta O & C sibi communia, ac proinde totæ congruent (7). Porro eodem illo temporis momento recta AC, ob angulum ACD=MCO, cum recta MC congruere debebit: ergo arcus AD punctis M & O terminabitur. Eo ipso autem patet, in assumpta hypothesi esse arcum AD=MO.

2) Sit ang. ACM=2MCO. Si angulus ACM ducto radio DC bifariam dividatur; clarum est fore angulum MCO=ACD=DCM: ergo per 1mum Theorematis *membr.* erit etiam arcus MO=AD=DM. Eo ipso autem patet fore arcum AM=2MO.

3) Sit ang. ACO=3MCO. Clarum est fore angulum ACM=2MCO: hinc si angulus ACM ducto radio CD bifariam secetur, erit angulus MCO=ACD =DCM. Erit ergo per 1. Theorem. membr. arcus MO=AD=DM. Eo ipso autem patet fore arcum AO=3MO.

18. THEOREMA IV. *Vicissim. si* 1) *fuerit arcus* AD=MO; *erit etiam angulus* ACD=MCO. 2) *Si fuerit* AM=2MO; *erit etiam angulus* ACM=2MCO. 3) *Si fuerit arcus* AO=3MO; *erit etiam angulus* ACO=3MCO, *& sic porro.*

Demonstr. Sit enim 1) arcus AD=MO. Concipiamus sectorem ACD converti circa fixum centrum C versus O. Quoniam arcus AD totus semper in ipsa circuli peripheria moveri debet (13), estque præterea ex hypothesi æqualis arcui MO; aliquo temporis momento hi duo arcus adæquate congruent, puncto D cum O, & puncto A cum M congruentibus: eo ergo temporis momento recta DC cum AC ob duo puncta O & C ipsis communia, & recta AC cum MC ob puncta M & C ipsis communia tota congruent (7). Eo ipso autem patet, angulum ACD fore = MCO.

2) Sit arcus AM=2MO. Si arcus AM ducto radio DC bifariam dividatur; clarum est fore arcum MO=AD=DM: ergo per 1mum Theor. *membr* est ang. MCO=ACD=DCM. Eo ipso autem patet, angulum ACM esse = 2MCO.

3) Sit arcus AO=3MO. Clarum est fore arcum AM=2MO: hinc si arcus AM ducto radio DC bifariam secetur; erit arcus MO=AD=DM. Erit ergo

per 1*mum* Theor. *membr.* angulus MCO $=$ ACD $=$ DCM. Eo ipſo autem patet, fore angulum ACO $=3$ MCO.

19. Coroll. I. Quoniam creſcente aut decreſcente angulo ACD ſemper etiam arcus AD creſcit, aut decreſcit, & viciſſim, & quidem is arcus eadem prorſus ratione creſcit aut decreſcit, qua creſcit aut decreſcit ipſe angulus ACD, & viciſſim (17, & 18); clarum eſt, pro menſura cujuscunque anguli ACD a quibuscunque rectis AC & CD comprehenſi aſſumi poſſe arcum AD, centro C (in quo nimirum puncto rectæ illæ concurrunt) deſcriptum, & intra easdem rectas interceptum. Et re vera hanc anguli menſuram aſſumpſere etiam Geometræ; ita ut angulum ACD totidem graduum, ac minutorum eſſe dicant, quot gradus, & minuta continet arcus AD centro C deſcriptus, & inter rectas AC & DC angulum comprehendentes interceptus.

20. Coroll. II. Si cogitemus radium AC circa fixum centrum C ita converti, ut ejus extimum punctum A circuli peripheriam AOBNA deſcribat motu *æquabili*, ſeu ita, ut punctum A quibuscunque æqualibus temporis partibus æquales arcus percurrat; etiam quodlibet aliud ejusdem radii punctum *a* ſibi reſpondentem circuli peripheriam *aobna* motu *æquabili* deſcribet. Si enim puncti A motus ſit æquabilis, ita ut duobus quibusdam æqualibus tempuſculis æquales arcus AD & DM percurrat; etiam arcus *a d* & *d m*, quos iisdem æqualibus tempuſculis punctum *a* motu æquabili progreſſurum deſcribet, æquales fore ſic declaro. Si eſt arcus AD $=$ DM, eſt angulus ACD ſeu *aCd* æqualis angulo DCM ſeu angulo *dCm* (18): atqui, ſi eſt angulus *aCd* $=$ *dCm*, eſt etiam arcus *a d* $=$ *dm* (17): ergo ſi eſt arcus AD $=$ DM, eſt etiam arcus *ad* $=$ *dm*.

21. THEOREMA V. *Duo quicunque circuli* AOBNA *&* aobna *ſint concentrici, ſeu ex eodem centro* C *deſcripti; tum arcus* AD, *&* a d *intercipiantur a quibuscunque duobus radiis* AC & DC: *arcus* a d *totidem ſemper graduum ac minutorum erit, quot graduum ac minutorum fuerit arcus* AD; *tametſi verum ſit, gradus arcus* AD *abſoluta ſua reali magnitudine majores fore gradibus arcus* a d.

De-

DEMONSTR. Cogitemus enim radium AC circa fixum centrum C ita converti, ut ejus extimum punctum A peripheriam AOBNA motu æquabili describat: tempus, quo arcus AD generatur, sit $= t$; tempus, quo tota peripheria AOBNA absolvitur, sit $=$ T: denique eadem tota peripheria vocetur P. Quoniam in motu æquabili, duplo tempore duplum spatium, triplo triplum &c. conficitur, manifestum est stare hanc proportionem: t: AD $=$ T : P, & alternando t: T $=$ AD : P (*Algeb.* 184).

Porro eodem tempore t, quo punctum A arcum AD generat, punctum a generat arcum $a\,d$, & eodem tempore T, quo punctum A absolvit totam peripheriam AOBNA, a puncto a absolvitur peripheria *aobna*; præterea quemadmodum puncti A, ita etiam puncti a motus est æquabilis (20): quodsi ergo peripheria *aobna* vocetur p; hæc pariter proportio stabit, t: T $= a\,d : p$. Unde duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, stat:

$$AD : P = a\,d : p.$$

Hoc est, arcus $a\,d$ tanta peripheriæ *aobna* pars est, quanta peripheriæ AOBNA pars est arcus AD: hinc quoniam quælibet circuli peripheria (tam major, quam minor) in 360 gradus, & quilibet gradus in 60 minuta prima &c. dividi solet (15), arcus $a\,d$ totidem graduum ac minutorum, quot arcus AD, sit, est necesse.

22. COROLL. Cum ergo mensura anguli consistat in gradibus, & minutis, ita ut e. g. angulus ACD totidem graduum ac minutorum esse dicatur, quot gradus & minuta continet arcus AD; pro mensura e. g. anguli ACD æque assumi potest quiscunque arcus minor $a\,d$, centro C intra rectas AC & DC descriptus, ac quiscunque alter major AD, ex eodem centro C intra easdem rectas descriptus. Hoc est, pro mensura cujuscunque anguli ACD rectis AC & DC comprehensi rite assumitur quiscunque arcus centro C descriptus, & inter easdem rectas AC & DC interceptus.

Schol. Dati anguli gradus, seu quantitatem examinare solemus in charta ope *transportatorii*, seu semicirculi e materia solida e. g. ex orichalco, aut cornu transparente efformati, inque 180 gradus divisi. Nempe centrum transportatorii colloca supra dati anguli ECG verticem C (*Fig.* 3.), & ejusdem transportatorii radium CB supra dati anguli latus CG: arcus DB inter anguli dati crura interceptus indicabit, quotnam graduum sit datus angulus ECG. Ejusdem transportatorii ope efformari potest datæ quantitatis angulus e. g. Si petatur angulus 60 graduum; ex transportatorii centro C duc rectam indefinitam CG, cum transportatorii radio Co congruentem: tum ab extremitate B versus D numera gradus 60. Si per gradum sexagesimum alteram rectam indefinitam CE duxeris; erit ECG petitus 60 graduum angulus.

23. Si recta AC (*Fig.* 4.) ita insistat alteri BD, ut ad neutram partem magis inclinetur, ac proinde ut sit angulus ACA = ACD; dicitur AC esse *perpendicularis*, seu *normalis* ad rectam BD: anguli autem ACB, & ACD vocantur *recti*. Angulus, qui recto major est, *obtusus*; qui autem est recto minor, *acutus* nuncupatur.

24. Coroll. I. Anguli recti mensura sunt 90 gradus, seu quadrans circuli. Nam angulum rectum ACB mensurat arcus AB, & alterum rectum ACD arcus AD (22); adeoque duos rectos mensurat arcus BAD. Porro arcus BAD est semiperipheria circuli (14), quælibet autem circuli semiperipheria (ob integram peripheriam = 360°) est = 180°; ergo duorum rectorum angulorum ACB & ACD simul sumptorum mensura est arcus 180 graduum. Eo ipso autem patet, recti unius mensuram esse 90 gradus.

25. Coroll. II. Cum ergo angulus obtusus major sit recto, acutus autem minor; anguli obtusi mensura major est 90 gradibus, acuti vero minor.

26. Spatium lineis rectis undique conclusum vocatur *polygonum*, & rectæ illæ, quæ id genus spatium claudunt, *latera* polygoni nuncupantur: nominatim polygonum tribus lateribus terminatum nomine *trianguli* venit. De polygonis alibi erit uberius agendi locus: hoc tamen non obstante jam hic generalia quædam de triangulis theoremata proponenda putamus, utpote magno mox usui nobis futura. Sic etiam de circu-

circulo aliqua in præcedentibus neceſſario adducenda erant, tametſi de reliquis circuli proprietatibus peculiari loco adhuc acturi ſimus.

27. THEOREMA VI. *Si in duobus triangulis duo latera cum angulo intercepto æqualia fuerint ; etiam tertium latus tertio æquale erit, & præterea quivis bini anguli homologi, id eſt, æqualibus lateribus oppoſiti, æquabuntur inter ſe.* e. g. Si in triangulis ABC & *abc* (*Fig.* 5.) fuerit latus AB $=$ *ab*, AC $=$ *ac*, & præterea angulus A $=$ *a*; erit etiam tertium latus BC $=$ *bc*, item erit ang. B $=$ *b*, & ang. C $=$ *c*.

Demonstr. Concipiamus enim triangulum *abc* ſuperponi triangulo ABC ita, ut ob AB $=$ *ab*, puncto *a* cadente in A, *b* cadat in B : ob angulum A $=$ *a*, latus *ac* cadet in AC, & quidem ob AC $=$ *ac*, ipſum etiam extremum punctum *c* cadet in C. Itaque tertium latus *bc* terminabitur punctis B & C, conſequenter cum latere BC congruet (7), eidemque æquabitur. Porro eo ipſo, quod triangulum *abc* alteri ſuperpoſitum dicto modo congruat cum eodem, manifeſtum eſt, eſſe etiam angulum B $=$ *b*, & C $=$ *c* : conſequenter totius theorematis veritas patet.

28. THEOREMA VII. *Si in quocunque Triangulo* ABC (*Fig.* 6.) *augeatur angulus* A, *latere* AC *in ſitum* Ac *abeunte ; latus* BC *angulo* A *oppoſitum creſcit, ſeu eſt* Bc $>$ BC : *& ex adverſo, ſi in quocunque triangulo* ABc *imminuatur angulus* A, *latere* Ac *in ſitum* AC *abeunte ; latus* Bc *angulo* A *oppoſitum decreſcit, ſeu eſt* BC $<$ Bc. Nam quo magis augetur angulus A in quocunque triangulo ABC ; extima puncta B & C eo magis recedunt a ſe invicem, latere BC eo magis accedente ad æqualitatem cum ſumma laterum AB & AC : & ex adverſo, quo magis imminuitur angulus A in quocunque triangulo AB*c* ; extima puncta B & *c* eo magis accedunt ad ſe invicem, latere B*c* eo magis deficiente ab æqualitate cum ſumma laterum AB & A*c*.

Schol. Veritas theorematis hoc etiam modo declarari poteſt. In triangulo A*dc* eſt utique A*d* $+$ *dc* $>$ A*c*, & pariter in triangulo B*d*C eſt B*d* $+$ *d*C $>$ BC : ergo majorem quantitatem majori, minorem minori addendo,

eſt :

$$\text{eſt}: Ad + dc + Bd + dC > Ac + BC.$$

Hinc æqualibus æqualia ſubſtituendo, ſcilicet loco $Ad + dC$ ponendo AC, & loco $Bd + dc$ ponendo Bc,

$$\text{eſt}: AC + Bc > Ac + BC.$$

Porro eſt $AC = Ac$; nam Ac eſt ipſum latus AC de uno ſitu translatum in alium: ergo utrinque ſubtrahendo hæc æqualia, remanet $Bc > BC$.

29. THEOREMA VIII. *Si duo quæcunque unius trianguli latera* AB & AC (*Fig.* 5.) *æqualia fuerint duobus alterius lateribus* a b *&* a c, *at anguli* A *&* a, *ab æqualibus lateribus intercepti non fuerint æquales; tertium latus* BC *erit majus vel minus latere* b c, *prout nempe angulus* A *fuerit major, vel minor angulo* a.

Demonstr. Ponamus enim imprimis angulos A & a eſſe æquales: quoniam eſt ex hypotheſi $AB = ab$, & $AC = ac$, erit etiam tertium latus $BC = bc$ (27). Ponamus deinde angulum A variari, non variato angulo a; aucto angulo A creſcet latus oppoſitum BC, imminuto decreſcet (28): quodſi ergo fiat angulus $A > a$, erit etiam latus $BC > bc$; ſi autem fiat ang. $A < a$, etiam latus BC erit $< bc$.

30. Coroll. I. Igitur, ſi tria unius trianguli latera fuerint æqualia tribus alterius trianguli lateribus, nempe unum uni, alterum alteri, tertium tertio; etiam quælibet bini anguli *homologi*, ſeu æqualibus lateribus oppoſiti (ſcilicet unus in uno, alter in altero triangulo) erunt inter ſe æquales. e. g. Si in triangulis ABC & abc ſit latus $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$; eſt ang. $A = a$, $B = b$, $C = c$. Nam e. g. angulum A eſſe $= a$, ex præcedente theoremate ſic deduco. Cum ſit $AB = ab$, & $AC = ac$; ſi angulus A eſſet major vel minor angulo a, etiam latus oppoſitum BC eſſet majus, vel minus latere bc (29): atqui eſt ex hypotheſi etiam $BC = bc$; ergo angulus quoque $A = a$ ſit, eſt neceſſe. Eodem modo oſtendi poteſt eſſe $B = b$, & $C = c$.

31. Coroll. II. Quodſi ergo e quibuscunque duobus centris A & B (*Fig.* 7.) ducantur duo quicunque arcus CED & GeH, utcunque inæqualium radiorum; ii ar-

ii arcus in unico puncto E interſecant ſeſe, quin ulla continua lineola Ee, utcunque parva, poſſit eſſe communis utrique arcui, Secent enim, ſi fieri poteſt, ii arcus ita ſeſe, ut interſectio non ſit unicum punctum E, ſed continua aliqua lineola Ee, ac proinde ut puncta E & e ſint utrique arcui communia. Ex centris A & B ad ea puncta ducantur rectæ AE, BE, Ae, Be; tum centra per rectam AB connectantur. In triangulis AEB & AeB tria unius latera erunt æqualia tribus alterius lateribus: cum enim puncta E & e ponantur eſſe in arcu CED centro A deſcripto, eſt AE = Ae; & cum eadem puncta ſint ex hypotheſi etiam in arcu GeH, centrum in B habente, eſt BE = Be; denique tertium latus AB eſt utrique triangulo commune. Ergo anguli EAB & eAB, utpote æqualibus lateribus BE & Be oppoſiti, æquales ſunt (30); quod tamen abſurdum eſſe in confeſſo eſt.

CAPUT SECUNDUM.

De Lineis rectis in quopiam puncto concurrentibus.

32. Recta una reſpectu alterius, quacum in quopiam puncto concurrit, vel eſt perpendicularis, ſeu normalis, vel eſt obliqua. Nempe ſi recta una ita inſiſtat alteri, aut eam ſecet, ut ad neutram partem magis inclinetur, ſed utrinque æquales angulos cum eadem efficiat; eſt ad ipſam perpendicularis, uti jam n. 23. dictum eſt: ſi autem ita inſiſtat alteri, aut eandem ſecet, ut cum eadem majorem angulum comprehendat ex una parte, quam ex altera; reſpectu alterius *obliqua* dicitur. Sic recta EC (*Fig.* 3.) eſt obliqua reſpectu rectæ AG. Eo autem major erit *obliquitas* unius rectæ reſpectu alterius, quo major fuerit differentia id genus angulorum. e. g. Recta DC (*Fig* 2.) magis obliqua eſt reſpectu rectæ AB, quam ſit MC reſpectu ejusdem AB. Nempe ſi ex concurſus puncto C erigatur perpendiculum CO; obliquitatem rectæ DC meti-

tur

tur angulus DCO, & obliquitatem rectæ MC angulus MCD.

33. Anguli ACE & ECG (*Fig.* 3.), quos recta EC alteri AG insistens utrinque facit, vocantur *contigui*, vel *deinceps positi*: anguli autem *m* & *r* (*Fig.* 8.), item anguli ACD & OCB, seu *x* & C, quos rectæ AB & OD in puncto C sese intersecantes versus oppositas plagas efficiunt, *verticales*, vel *ad verticem oppositi* nuncupantur.

34. THEOREMA IX. *Anguli deinceps positi* m *&* x, *quos recta* AC *alteri* OD *insistens utrinque facit, simul sumpti continent* 180 *gradus, ac proinde duobus rectis angulis æquivalent.*

Demonstr. Si enim ex centro C describatur quiscunque circulus OADBO; angulum *m* metietur arcus OA, & angulum *x* arcus AD (19), adeoque utrumque simul angulum metitur arcus OAD. Jam vero hic arcus est semiperipheria circuli (14), adeoque continet 180 gradus (15): ergo etiam anguli *m* & *x* simul sumpti continent 180 gradus.

35. Coroll. I Igitur omnes anguli ACD, DCM, MCO, OCB (*Fig.* 2.), qui a quotcunque rectis DC, MC, OC rectæ AB in eodem puncto C insistentibus effici possunt, simul sumpti continent 180 gradus: clarum enim est, omnes id genus angulos, utcunque multi fuerint, simul sumptos duobus deinceps positis æquivalere.

36. Coroll. II. Omnes anguli *m*, *x*, *r*, C (*Fig.* 8.), qui circa idem punctum C fieri possunt in plano circuli ADBOA, simul sumpti continent 360 gradus, ac proinde quatuor rectis æquivalent. Si enim concipiatur circulus ADBOA centro C descriptus; anguli *m* mensura erit arcus OA, anguli *x* arcus AD &c., ac proinde omnium in toto circuitu angulorum, quotcunque demum ii fuerint, simul sumptorum mensura est integra circuli peripheria ADBOA $= 360^\circ$.

37. THEOREMA X. *Si duæ rectæ* AB & OD *in puncto* C *sese intersecent; anguli verticales* m *&* r *æquales erunt.*

Demonstr. Est enim ang. $m + x = 180^\circ$, & pariter $x + r = 180^\circ$ (34); est ergo $m + x = x + r$ (*Al-*

(*Algebr.* 101): consequenter utrinque idem x tollendo, est $m = r$ (*Ejusd.* 114). Eodem modo demonstratur, verticales x & C inter se æquales esse.

38. Coroll. I. Quodsi ergo e quatuor illis angulis, quos duæ quæcunque rectæ AB & OD in puncto C sese intersecantes circa idem punctum C efficiunt, unus innotescat; eo ipso innotescunt etiam tres reliqui. Ponamus enim esse e. g. angulum $m = 40°$; erit etiam ejus verticalis $r = 40°$: porro ob $m + x = 180°$, est $x = 180° - m = 180° - 40° = 140°$; adeoque etiam ejus verticalis C est $= 140°$.

39. Coroll. II. Si rectæ AE & BD (*Fig.* 4) ita se se intersecent in puncto C. ut unus ex quatuor angulis circa idem punctum C efformatis e. g. angulus ACB sit rectus; omnes etiam reliquos oportebit esse rectos. Si enim sit ang. ACB $= 90°$; est etiam ang. ACD $= 90°$ (33): porro est DCE $=$ ACB, & BCE $=$ ACD (37): ergo.

40. Coroll. III. Si ergo rectæ AE pars una AC est perpendicularis ad rectam BD; etiam altera ejus pars EC ad eandem BD perpendicularis sit, est necesse. Si enim est AC ad BD perpendicularis; anguli ACB & ACD sunt recti (23); ergo recti sunt etiam reliqui anguli BCE & DCE. Eo ipso autem est EC ad BD perpendicularis (23).

41. Coroll. IV. Si recta AC est perpendicularis ad BD; est vicissim BD, seu BC perpendicularis ad AC, seu ad AE. Si enim sit AC ad BD perpendicularis; angulus ACB est rectus (23), adeoque etiam angulus BCE est rectus (34): ergo BC ita insistit rectæ AE, ut cum eadem efficiat utrinque angulum rectum. Eo ipso autem est BC ad AE, seu ad AC perpendicularis (23).

42. Coroll. V. Recta AC insistat rectæ BD in C; tum ex C ducatur in adversam partem quæpiam recta CE. Si fuerit ang. ACB $=$ DCE; recta CE in directum jacebit cum recta AC; id est, recta CE erit continuatio rectæ AC, ita ut puncta A, C, E in eadem recta jaceant. Si enim negas, sit C*e* continuatio rectæ AC, seu sit AC*e* linea recta: anguli ACB & & DC*e* erunt ad verticem oppositi, adeoque æquales (37); hinc

hinc cum ſit ex hypoth. $DCE = ACB$, erit etiam $DCE = DCe$, nempe pars toti, quod abſurdum eſt.

43. THEOREMA XI. *Si recta* AC (*Fig.* 9.) *ſit ad rectam* DE *perpendicularis; quælibet alia recta* AC, *quæ ex eodem puncto* A *ad eandem rectam* DE *duci poteſt, longior erit, quam ſit* AC.

Demonstr. Producatur enim recta AC in M ita, ut ſit $AC = CM$; tum ducatur recta BM. In triangulis ACB & MCB eſt ex conſtr. $AD = CM$, & latus CB utrique triangulo commune; præterea ob AC ad DE ex hyp. perpendicularem, anguli ACB & MCB iis lateribus comprehenſi, ſunt æquales (39): ergo eſt etiam $AB = BM$ (27). Unde ſic jam ratiocinari licet. Cum ſit $AC = CM$, & $AB = BM$; eſt $AC + CM = 2AC$ & $AB + BM = 2AB$: cum ergo manifeſtum ſit eſſe $AB + BM > AC + CM$; eſt quoque $2AB > 2AC$. Eo ipſo autem patet eſſe etiam $AB > AC$.

44. Coroll. I. Ex uno eodemque puncto A ad eandem rectam DE nonniſi unica perpendicularis poteſt demitti. Ducantur enim, ſi fieri poteſt, ex eodem puncto A ad eandem rectam DE duæ perpendiculares AC & AB. Eo ipſo, quod AC ſit ad DE perpendicularis, jam erit $AB > AC$, uti modo demonſtravimus: at eſſet etiam $AC > AB$, quod eadem argumentandi ratione ſic declaro. Producatur recta AB in L ita, ut ſit $AB = BL$; tum ducatur recta CL. In triangulis ACB & LCB eſt ex conſtr. $AB = BL$, & latus BC utrique triangulo commune; præterea ob AB & DE ex hyp. perpendiculares, anguli ABC & LBC iis lateribus comprehenſi, eſſent æquales (39): ergo eſſet etiam $AC = CL$ (27). Unde ſic jam ratiocinari licet, Cum ſit $AB = BL$, & $AC = CL$; eſt $AB + BL = 2AB$, & $AC + CL = 2AC$: cum ergo manifeſtum ſit, eſſe $AC + CL > AB + BL$; eſſet quoque $2AC > 2AB$, ac proinde eſſet etiam $AC > AB$. Itaque ſi tam AC quam AB eſſet ad DE perpendicularis; eſſet $AB > AC$, & ſimul $AC > AB$: quod cum manifeſte abſurdum ſit, patet ex eodem puncto A ad eandem rectam DE nonniſi unicam perpendicularem duci poſſe.

45. Coroll. II. Si ex puncto A ad rectam DE nulla poſſit brevior linea duci, quam ſit AC; eo ipſo erit

erit AC ad DE perpendicularis. Sit enim, si fieri potest, non recta AC, sed aliqua alia AB ad DE perpendicularis. Ea, qua num. præc. usi sumus, ratiocinatione patet fore AC > AB : ergo contra hypothesim ex puncto A ad rectam DE potest brevior linea duci, quam sit AC ; quod absurdum est.

46. Coroll. III. Cum perpendicularis AC brevissima sit omnium earum rectarum, quæ ex puncto A ad rectam DE duci possunt (43), & nomine *distantiæ* puncti A a recta DE intelligi soleat linea recta, quæ ex A ad DE duci potest brevissima ; distantiam puncti A a recta DE rite exhibet perpendicularis AC. Et sane mensura cujuspiam rei, uti jam *n.* 6. diximus debet esse fixa, determinataque, & non vaga, ac incerta : jam vero mensura distantiæ puncti A a recta DE tunc solum est fixa, determinataque, si eam distantiam metiatur recta perpendicularis AC : rectæ enim non perpendiculares ex puncto A ad rectam DE duci possunt innumeræ, eæque jam longiores, jam breviores ; recta autem perpendicularis ex dato puncto ad datam rectam ducta, quoniam nonnisi unica esse potest (44), fixæ, determinatæque longitudinis sit, oportet.

47. THEOREMA XII. *Si recta quæpiam* AB (*Fig.* 10.) *cum altera recta* DE *in aliquo puncto* C *concurrens habuerit quæcunque duo ejusmodi puncta, quorum utrumlibet seorsim consideratum æquidistet a datis quibusdam duobus rectæ* DE *punctis* ; *erit* AB *ad* DE *perpendicularis* e. g. Si rectæ AB puncta A & C ab alterius punctis D & E æquidistent, ita nempe, ut sit AD = AE, & DC = CE ; recta AB rectam DE perpendiculariter secat.

Demonstr. 1) Ponamus rectæ AB puncta A & C (quarum alterum sit ipsum intersectionis punctum) æquidistare ab alterius duobus punctis D & E. In triangulis ACD & ACE tria unius latera sunt æqualia tribus alterius lateribus; est enim ex hypoth. AD = AE, & DC = CE, præterea latus AC est utrique triangulo commune : igitur anguli ACD & ACE, utpote homologi, æquales sunt (30). Eo ipso autem patet, rectam AC esse ad DE perpendicularem (23).

2) Ponamus rectæ AB puncta A & *m* (quorum utrumque extra rectam DE versus eandem plagam jaceat) æquidistare a punctis D & E, seu esse AD = AE, & *m*D = *m*E. In triangulis AD*m* & AE*m* tria unius latera sunt æqualia tribus alterius lateribus: ergo anguli ad A, utpote homologi, sunt æquales (30). Contemplemur jam triangula ADC & AEC. In his est ex hyp. AD = AE; latus autem AC est utrique triangulo commune: cum ergo præterea anguli ad A, qui his lateribus intercipiuntur, sint, uti vidimus, æquales; etiam latus DC est = CE (27). Hoc est, in triangulis ADC & AEC tria unius latera sunt æqualia tribus alterius lateribus. Hinc anguli homologi ACD & ACE sunt æquales (30). Eo ipso autem clarum est, esse AC ad DE perpendicularem (23).

3) Ponamus denique rectæ AB puncta A & B (quæ respectu DE in oppositis plagis jaceant) æquidistare a punctis D & E, seu esse AD = AE, & BD = BE. In triangulis ADB & AEB tria unius latera sunt æqualia tribus alterius lateribus: ergo anguli ad A, utpote homologi, sunt æquales (30). Contemplemur jam triangula ADC & AEC. In his est ex hyp. AD = AE, & latus AC utrique triangulo commune: cum ergo anguli ad A, qui his lateribus intercipiuntur, sint, uti nunc vidimus, æquales; est etiam DC = CE (27). Hoc est, in triangulis ADC & AEC tria unius latera sunt æqualia tribus alterius lateribus. Hinc anguli homologi ACD & ACE sunt æquales (30). Eo ipso autem clarum est, esse AC ad DE perpendicularem (23).

48. THEOREMA XIII. *Si quæcunque recta* AB *fuerit ad rectam* DE *perpendicularis, habueritque quodcunque punctum unum æqualiter distans a duobus quibusdam alterius punctis* D *&* E; *singula ejusdem rectæ* AB *puncta ab iisdem alterius punctis* D *&* E *æquidistabunt.* e. g. Si fuerit AD = AE; erit etiam *m*D = *m*E, DC = CE, BD = BE &c.

Demonstr. Ponamus enim 1) ipsum intersectionis punctum C æquidistare a punctis D & E: seu esse DC = CE: fore, ut quodcunque aliud rectæ AB punctum *m* æquidistet ab iisdem punctis D & E, sic declaro,

claro. In triangulis mDC & mEC erit ex hyp. DC=CE, & latus mC utrique triangulo commune; præterea ob AC ad DE ex hyp. perpendicularem, anguli, qui a dictis lateribus ad C intercipiuntur, erunt æquales, scilicet recti (23): ergo etiam reliqua latera mD & mE erunt inter se æqualia (27). Hoc est, punctum m a punctis D & E æquidistabit. Eodem modo ostenditur, quodcunque aliud rectæ AB punctum A vel B ab iisdem alterius punctis D & E debere æquidistare.

2) Ponamus quodcunque punctum m extra rectam DE situm æquidistare a punctis D & E: fore, ut quodcunque aliud rectæ AB punctum A vel B æquidistet ab iisdem punctis D & E, sic declaro. Eo ipso, quod ex hyp. sit mD = mE. & prætera sit mC ad DE perpendicularis, etiam ipsum intersectionis punctum C æquidistabit a punctis D & E. Sit enim, si fieri potest, his stantibus medium rectæ DE punctum non in C, sed e. g. in o, ita nempe, ut sit Do = oE: recta mo habebit duo puncta m & o æquidistantia a punctis D & E, adeoque erit ad DE perpendicularis (47): igitur ex puncto m ad rectam DE duæ perpendiculares mC & mo ducentur, quod absurdum est (44). Jam vero, si mC sit ad DE perpendicularis, & præterea ipsum intersectionis punctum C æquidistet a punctis D & E; reliqua etiam rectæ AB puncta singula ab iisdem punctis D & E æquidistare debere in primo demonstrationis membro ostensum est.

49. Coroll. Quodsi ergo quæcunque duo rectæ AB puncta æquidistent a datis duobus rectæ DE punctis D & E; singula ejusdem rectæ AB puncta ab iisdem punctis D & E æquidistent, est necesse. Si enim duo quæcunque puncta rectæ AB æquidistent a punctis D & E: est AB ad DE perpendicularis (47): atqui, si recta AB sit ad DE perpendicularis, deprehendaturque habere vel unicum punctum, quod ab alterius punctis D & E æquidistet, jam inferre licet, singula ejusdem rectæ AB puncta ab iisdem alterius punctis D & E æquidistare (48); ergo.

Schol. Lineam rectam in charta duci graphio, penna, vel plumbagine, juxta ductum regulæ ad data duo puncta applicatæ, nulli non cognitum est; modo regula bona sit: istud autem hoc e. g. modo explorari potest. Juxta regulæ aciem ducatur linea DE (*Fig.* 9.); tum invertatur regula in latus alterum, ac eadem ejus acies extremis lineæ nunc ductæ punctis D & E applicetur; ita nimirum, ut jam nunc ea pars aciei respondeat puncto D, quæ prius respondit puncto E, & vicissim: denique rursus ex D in E ducatur linea juxta eandem regulæ aciem. Quodsi regula fuerit bona; altera hæc linea cum priori perfecte congruet: si autem duæ illæ lineæ aliqua sui parte non congruerint; id erit indicio, aliquem in regula sinum adesse, a rectitudine deficientem. Porro Geometricis usibus optime serviunt regulæ e lignis indicis e. g. ex ebano efformari solitæ. Hæ enim bene poliri possunt, ne fibræ exiguæ uniformem calami, graphiique motum (quod quernis, nuceis, & his similibus regulis famimiliare vitium est) impediant: præterea non maculant chartam, uti regulæ ex orichalco efformatæ maculare solent. Utendum autem est atramento Sinico potius, quam communi: tum quia commune atramentum ob vitriolum, quod in se continere solet, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit e graphio, tametsi communi atrius sit. Accedit, quod Sinico nitidiores lineæ ducantur, quam communi.

50. PROBLEMA I. *Rectam finitam* DE (*Fig.* 10.) *bifariam, & simul perpendiculariter secare.*

Resolut. Aperiatur circinus ad arbitrium, sed tamen ita, ut ejus apertura major sit dimidia parte rectæ DE; tum manente eadem circini apertura, e punctis extremis D & E tanquam centris describantur arcus, in A & B sese intersecantes: recta AB per intersectionum puncta transiens erit perpendicularis ad DE, simulque eandem in puncto C bifariam, seu in duas æquales partes secabit.

Demonstr. Cum enim arcuum intersectiones manente eadem circini apertura fiant; est ex constr. AD = AE, & DB = BE: ergo recta AB habet duo puncta A & B a duobus rectæ DE punctis D & E æquidistantia. Hinc est imprimis AB ad DE perpendicularis

ris (47): deinde ſingula ejusdem rectæ AB puncta (adeoque etiam interſectionis punctum C) ab alterius punctis D & E æquidiſtant, ſeu eſt DC=CE (49).

51. PROBLEMA II. *E dato rectæ* Ab (*Fig.* 11,) *quocunque puncto* C *erigere perpendicularem* MC.

Resolut. Aperto ad arbitrium circino, unoque ejus crure ad C applicito, capiantur æqualia ſegmenta CD & CE; tum aucta tantiſper circini apertura ex punctis D & E tanquam centris deſcribantur arcus in M ſeſe interſecantes: recta MC ex interſectionis puncto M (31) ad datum punctum C ducta, erit quæſita perpendicularis.

Demonstr. In triangulis DMC & EMC tria unius latera ſunt æqualia tribus alterius lateribus; eſt enim ex conſtr. MD=ME, CD=CE, & latus MC utrique triangulo commune; ergo anguli homologi ad C ſunt æquales (30). Eo ipſo autem eſt MC ad AB perpendicularis (25).

Aliter. Ex conſtr. eſt MD=ME, & CD=CE; ergo eſt MC ad AB perpendicularis (47).

52. PROBLEMA III. *E dato extra rectam indefinitam* AB *puncto* M *ducere rectam* MC, *quæ ſit ad* AB *perpendicularis.*

Resolut. Uno circini ad arbitrium aperti crure ad M applicito, manenteque eadem apertura fiant interſectiones rectæ AB in punctis D & E, tum imminuta tantiſper circini apertura, ex punctis D & E tanquam centris ducantur arcus in puncto O ſeſe interſecantes (31): recta MC per puncta M & O tranſiens erit ad AB perpendicularis. Nam puncta M & O ex ipſa Figuræ conſtructione æquidiſtant a punctis D & E; ergo recta MC habet duo puncta, quæ a duobus rectæ AB punctis æquidiſtent: eo ipſo autem MC ad AB perpendicularis ſit; oportet (47).

Schol. 1. In Problemate dictum eſt: extra rectam *indefinitam*, ſeu talem, cujus longitudo non determinetur. Nam ad rectam definitæ longitudinis non poſſe duci perpendicularem ex quolibet puncto extra ipſam dato, manifeſtum eſt.

Schol. 2. Uſitatum ad erigendas, vel demittendas perpendiculares inſtrumentum eſt *Norma*, ſeu *Gnomon*, constatque ex duabus regulis AC & CB (*Fig.* 12.) ita compactis, ut angulum rectum ACB contineant. Atque hanc ob caussam lineæ perpendiculares solent etiam *normales* nuncupari. Ope hujus instrumenti ex puncto O in rectam ED perpendicularis demittitur, si unum instrumenti latus AC ita puncto O applicetur, ut simul alterum latus CB cum recta ED congruat, ac tum juxta ductum lateris AC recta OC ducatur. Quæ quidem recta produci deinde poterit versus F ope cujuscunque regulæ ad rectam OC applicatæ. Porro num hujusmodi instrumentum rite confectum sit, hoc modo potest examinari. Latere CB ad rectam CD applicito ducatur juxta ductum lateris alterius recta AC; convertatur deinde norma versus E ita, ut latus CB cum recta CE congruat, & apex anguli a regulis comprehensi rursus cadat in C: denique iterum ducatur linea juxta ductum lateris AC. Si altera hæc linea perfecte congruit cum linea prius ducta, norma est bona; sin minus, vitiosa.

CAPUT TERTIUM.

De Lineis parallelis.

53. Præcedente Capite de situ obliquo, & perpendiculari duarum rectarum egimus: nunc de situ parallelo agendum est. Porro id genus duæ rectæ vocantur *parallelæ*, quæ quantumcunque produci concipiantur, a se invicem ubique æqualiter distant. Hinc quoniam mutuas duarum parallelarum distantias metiuntur perpendicula ex una ipsarum in alteram ducta (46); id genus perpendicula omnia inter se æqualia sint, oportet: ut adeo definire liceat, id genus duas rectas esse *parallelas*, inter quas intercepta perpendicula sunt æqualia omnia.

54. Si duas rectas parallelas AB & CD (*Fig.* 13.) secet tertia quæpiam recta EF; octo anguli efficiuntur; nempe quatuor externi, *r*, *o*, *s*, *t*, & totidem interni

terni y, m, n. x. Porro ex his octo angulis alii ſunt anguli *ad eandem partem*, alii *alterni*. Anguli *ad eandem partem* vocantur, qui reſpectu rectæ parallelas ſecantis jacent ad eandem partem. Sic anguli o & t ſunt *externi ad eandem partem*; idem eſt de angulis r & s: anguli m & x ſunt *interni ad eandem partem*; uti & anguli y & n: at e. g. anguli o & x ſunt *externus & internus ad eandem partem*. Duo anguli interni, qui reſpectu rectæ parallelas ſecantis in oppoſitis plagis jacent, neque ſunt deinceps poſiti, vocantur *alterni*: e. g. anguli y & x.

55. THEOREMA XIV. *Si duas parallelas* AB *&* CD *ſecet tertia quæpiam recta* EF; 1) *angulus internus* x *& externus* o *ad eandem partem æquantur inter ſe*: 2) *etiam anguli alterni* y *&* x *inter ſe æquales ſunt.*

Demonstr. 1*mæ partis.* Ponamus rectas AB & EF eſſe fixas, ut angulus o conſtanter idem maneat: tum concipiamus rectam CD ſenſim accedere ad AB, ita tamen, ut a parallelismo nuspiam deflectat vel minimum. Evidens eſt, angulum x ita aſcenſurum penes rectam EF, ut ne minimum quidem augeatur uſpiam, aut imminuatur: in aſſumpto enim caſu divaricatio rectarum EF & CD, a qua ſola dependet quantitas anguli x (16), utique non variatur. Jam vero recta CD, ſi ita ſenſim accedat ad rectam fixam AB, ut a ſitu parallelo nuſpiam deflectat: aliquo temporis momento perfecte congruet cum AB, adeoque etiam angulus x cum o. Eo ipſo autem patet eſſe ang. $x = o$. Eodem modo oſtendi poteſt, angulos n & r eſſe æquales.

Demonstr. 2*dæ partis.* Eſt enim ang. $o = y$ (47): atqui eſt $o = x$, uti nunc oſtenſum eſt; ergo eſt quoque $y = x$.

56. Coroll. I. Igitur duo interni anguli ad eandem partem e. g. m & x, ſimul ſumpti æquivalent duobus rectis; ſeu eſt $m + x = 180°$. Eſt enim $m + o = 180$ (34): atqui per 1*mum* Theor. *memb.* eſt $o = x$; ergo eſt quoque $m + x = 180°$.

57. Coroll. II. Per unum idemque punctum r (*Fig.* 14.) nonniſi unica recta AB duci poteſt, quæ ſit ad CD parallela. Ducantur enim, ſi fieri poteſt, per

idem punctum r duæ rectæ AB & MN, ad CD parallelæ: ob AB ad CD parallelam, anguli alterni y & x erunt æquales (55); pariter ob MN ad CD parallelam anguli MrF & x erunt alterni, inter se æquales: erit ergo ang. $MrF = y$, seu erit ang. $MrA + y = y$; quod absurdum est.

58. THEOREMA XV. *Vicissim, si duæ rectæ* AB *&* CD *a tertia quapiam* EF *sectæ faciant vel* 1) *angulos internum* x *&* *externum* o *ad eandem partem æquales, vel* 2) *alternos* y *&* x *æquales; eædem rectæ* AB *&* CD *parallelæ erunt.*

Demonstr. Sit enim 1) $x = o$. Si AB non esset parallela ad CD; posset per punctum r duci aliqua recta MN, quæ sit parallela ad CD: esset ergo angulus externus ErN æqualis interno x (55). Atqui est ex hyp. $x = o$; esset ergo ang. $ErN = o$, seu esset ang. $o + BrN = o$, quod absurdum est.

Sit 2) $y = x$. Si AB non esset parallela ad CD; posset per punctum r duci aliqua recta MN ad CD parallela: essent ergo anguli alterni MrF & x æquales. Atqui est ex hypoth. $x = y$; esset ergo ang. $MrF = y$, seu esset ang. $MrA + y = y$, quod absurdum est.

59. Coroll. I. Si duæ quæcunque rectæ AB & MN (*Fig.* 15.) sint ad eandem tertiam CD parallelæ; etiam inter se sunt parallelæ, Nam ob AB ad CD parallelam est ang $o = x$ (55); & ob MN ad CD parallelam est ang. $x = r$: est ergo ang. $o = r$. Eo ipso autem est AB ad MN parallela (58).

60. Coroll. II. Duæ rectæ EF & PH (*Fig.* 16.), si sint ad eandem tertiam CD perpendiculares, sunt inter se parallelæ. Nam ob EF & PH ad CD perpendiculares, anguli m & n sunt recti. ac proinde est ang. $m = n$; ergo rectas EF & PH ita secat tertia quæpiam CD, ut anguli externus n & internus m ad eandem partem sint æquales; eo ipso autem est EF ad PH parallela (58).

61. Coroll. III. Si recta quæcunque PH sit ad CD perpendicularis; eadem recta PH erit etiam ad hujus parallelam AB perpendicularis. Nam ob AB & CD paral-

parallelas, anguli alterni v & n ſunt æquales (55): ergo ſi angulus n eſt rectus, etiam v rectus ſit, oportet. Hoc eſt, ſi PH eſt perpendicularis ad CD; etiam ad AB perpendicularis ſit, oportet.

62. THEOREMA XVI. *Si inter rectas* AB *&* CD *duæ rectæ* EF *&* PH *inveniantur, quæ ſint ad eandem* CD *perpendiculares, & ſimul inter ſe æquales; jam inferre licet, rectas* AB *&* CD *eſſe parallelas.*

DEMONSTR. Si enim AB non eſſet parallela ad CD; poſſet per punctum E duci aliqua recta LO, quæ ſit ad CD parallela; quodſi ergo perpendiculum HP produci concipiatur in x, perpendicula EF & xH deberent eſſe æqualia (53). Atqui eſt ex hypoth. EF = PH; eſſet ergo etiam xH = PH, quod abſurdum eſt.

Schol. Atque jam hoc ex Theoremate patet methodus, rectam alteri datæ parallelam per quodcunque datum punctum ducendi. Sit enim recta per punctum E ducenda, quæ ſit ad CD parallela. Ex puncto dato D demitte rectam EF ad CD perpendicularem (52); tum ex quocunque rectæ CD puncto H erige perpendicularem indefinitam Hx; denique ex altero hoc perpendiculo cape circino partem HP = FE: recta per puncta E & P tranſſiens erit, uti nunc demonſtratum eſt, ad CD parallela. At *ſequ. Cap.* ex theoria circuli commodior parallelas ducendi praxis eluceſcet. Ceterum pro parallelis ducendis communiter adhibetur notiſſimum illud inſtrumentum, quod *paralleliſmi* nomine venire ſolet.

CAPUT QUARTUM.

De Circulo.

63. Si intra circulum ducatur quæcunque recta AB (*Tab. II. Fig.* 17.), ita ut utrinque in ipſa circuli peripheria terminetur; id genus recta vocatur *chorda*, diciturque *ſubtendere* arcum AOB. Reapſe chorda AB duos arcus ſubtendit, nempe alterum AOB ſemi-

peripheria circuli minorem, alterum AGB eadem ſemiperipheria majorem: at hoc loco potiſſimum de arcu ſubtenſo, qui ſemiperipheria non ſit major, ſermo nobis erit. Chorda, quæ per ipſum circuli centrum tranſit, *diameter* nuncupatur, uti jam alibi dictum eſt. Spatium AOBA, quod chorda cum arcu ſubtenſo comprehendit, *ſegmentum circuli* appellatur.

64. THEOREMA XVII. *Æquales arcus in eodem circulo ab æqualibus chordis ſubtenduntur: inæquales autem ab inæqualibus, & quidem ita, ut majori arcui major chorda, minori minor reſpondeat.* e. g. Si ſit arcus $AOB = FQG$, eſt etiam chorda $AB = FG$: ſi autem ſit arcus $DPE < PQG$, eſt etiam chorda $DE < FG$.

DEMONSTR. *1mæ partis.* Sit enim arcus $AOB = FQG$: eſt etiam ang. $ACB = FCG$ (19). Cum ergo præterea ſit $AC = FC$, $CB = CG$ (11); etiam chorda AB chordæ FG æqualis ſit, eſt neceſſe (27).

DEMONSTR. *2dæ partis.* Sit arcus $DPE < FQG$: in triangulis CFG & CED angulus FCG eſt major angulo DCE; quia illum metitur major arcus FQG, hunc vero minor DPE. Concipiamus ergo angulum FCG imminui, dum abeat in angulum QCG æqualem angulo DCE. In triangulis CQG & CED eſt $CQ = CE$, $CG = CD$ (11): cum ergo præterea ſit ex hypoth. ang. $QCG = DCE$, eſt etiam latus $QG = DE$ (27). Jam vero eſt $QG < FG$: ſi enim in quocunque triangulo FCG imminuatur angulus C, latere CF in ſitum CQ abeunte; latus FG angulo C oppoſitum decreſcit (28). Ergo eſt quoque $DE < FG$.

65. COROLL. I. Viciſſim, æquales chordæ in eodem circulo æquales arcus ſubtendunt; inæqualibus autem chordis inæquales arcus reſpondent, ita ut a majore chorda major, a minore minor arcus ſubtendatur. Nam 1) ſit chorda $AB = FG$. Si arcus AOB & FQG eſſent inæquales; in uno eodemque circulo inæquales arcus ab æqualibus chordis ſubtenderentur: quod abſurdum eſt (64). Sit 2) chorda $FG > ED$. Si non eſſet arcus FQG major arcu DPE; eſſet vel ei æqualis, vel eo minor: atqui neutrum dici poteſt. Si enim eſſet $FQG = DPE$; æquales arcus in eodem circulo

ab

ab inæqualibus chordis ſubtenderentur: quod rurſus eſt abſurdum (64). Si autem eſſet FQG $<$ DPE; in eodem circulo minori chordæ major arcus. & majori minor reſponderet: quod non minus abſurdum eſt (64).

66. Coroll. II, Evidens eſt, duos circulos æquales, ſi unus alteri ita imponatur, ut ipſorum centra congruant, totos congruere, ac proinde inſtar unius haberi poſſe: ergo etiam in duobus circulis, ſed æqualibus, imprimis æquales arcus ab æqualibus chordis ſubtenduntur, & viciſſim; deinde inæqualibus arcubus inæquales chordæ reſpondent, nempe majori arcui major chorda, minori minor. & viciſſim.

67. THEOREMA XVIII. *Quæcunque recta* CD *vel* ME (*Fig.* 18.) *per centrum* C *tranſiens, ſi chordam* AB *bifariam ſecet in* D, *eſt ad eandem perpendicularis; & viciſſim, ſi ſit ad chordam* AB *perpendicularis, eandem in* D *bifariam ſecat.*

Demonstr. Ponamus enim 1) rectam ME per centrum C tranſire, ſimulque ab ea chordam AB in D bifariam ſecari. In triangulis ACD & BCD erit ex hypoth. AD $=$ DB: cum ergo præterea etiam radii AC & CB æquales ſint, & latus CD utrique triangulo commune; anguli homologi ad D æquales ſunt (30), ac proinde recti: quod tantundem utique eſt, ac rectam ME eſſe ad AB perpendicularem.

2) Ponamus rectam ME per centrum C tranſeuntem, eſſe perpendicularem ad chordam AB. Ob radium AC $=$ CB, recta ME habet unum punctum C a duobus chordæ punctis A & B æquidiſtans: cum ergo præterea ſit ad chordam AB perpendicularis; ſingula ejusdem puncta (ac proinde etiam punctum D) ab iisdem chordæ punctis A & B æquidiſtent, oportet (48). Hoc eſt, recta ME chordam AB in aſſumpta hypotheſi bifariam ſecat.

68. Coroll. Igitur ſi recta MD per centrum C tranſiens bifariam ſecet chordam AB, vel ſit ad eandem perpendicularis; bifariam ſecabit etiam angulum ACB. Si enim 1) bifariam ſecet chordam AB; in triangulis ACD & BCD tria unius latera erunt æqualia tribus alterius lateribus: ergo anguli homologi ad C æqua-

æquales erunt (30). 2) Eadem recta MD, si fuerit perpendicularis ad chordam; hanc secabit bifariam (67): ergo rursus in triangulis ACD & BCD tria unius latera erunt æqualia tribus alterius lateribus, ac proinde anguli homologi ad C æquales erunt.

69. THEOREMA XIX. *Si recta* ME *chordam* AB *bifariam, & ad angulos rectos secet; transit per centrum circuli.*

Demonstr. Si enim recta ME non transiret per circuli centrum; centrum illud esset alicubi extra rectam ME, e. g. in *o*: atqui istud sustineri prorsus non potest. Ducatur enim recta *o*D. Recta hæc ob AD ex hypoth = DB, chordam AB bifariam secaret, præterea transsiret per centrum circuli: esset ergo ad chordam AB perpendicularis (67). At etiam MD est ex hyp. perpendicularis ad AB: ergo tam angulus AD*o*, quam angulus ADM esset = ADC; quod absurdum est.

70. THEOREMA XX. *Chordæ æquales in eodem circulo æqualiter distant a centro; inæquales autem inæqualiter, ita ut chorda major a centro minus distet, minor magis.*

Demonstr. *1mæ partis.* Sit enim chorda AB = FG (*Fig.* 17.). In triangulis ACB & FCG tria unius latera erunt æqualia tribus alterius lateribus; nam præter AB ex hyp. = FG, est radius AC = FC, & BC = CG: ergo anguli homologi ad A & F æquales sint, oportet (30). Jam si ex centro C demittamus in eas chordas perpendicula CL, & CM; perpendicula hæc eas chordas bifariam secabunt (67): ergo ob AB = FG, est quoque AL = FM. Hinc in triangulis ALC & FMC reperiuntur duo latera æqualia cum intercepto angulo; scilicet AC = FC, AL = LM, & ang. A = F: ergo est etiam tertium latus CL = CM. Atqui hæc perpendicula, nempe CL & CM, metiuntur assumptarum chordarum a centro C distantias (46): ergo chordæ AB & FG, eo ipso quod æquales sint, a centro C æqualiter distant.

Demonstr. *2dæ partis.* Sit chorda ED < FG: perpendiculum CN, quod ejus chordæ a centro distantiam metitur, esse majus perpendiculo CM, chordæ FG ab eodem centro distantiam metiente, sic declaro.

Pona-

Ponamus chordam GQ esse $=$ DE, & Cn esse ad GQ perpendicularem; quoniam æquales chordæ a centro æqualiter distant, uti nunc demonstratum est, erit $Cn =$ CN: quodsi ergo est $Cn >$ CM; erit etiam CN $>$ CM, ac proinde minor chorda magis distabit a centro, major minus: esse vero $Cn >$ CM sic demonstro. Quoniam chorda GQ$=$DE est ex hyp. $<$FG; clarum est, totam chordam GQ intra chordam FG & arcum FQG jacere debere, ita ut nonnisi unicum punctum G sit commune chordis FG & GQ (7): ergo perpendicularis Cn (quæ per n. 67. chordam GQ bifariam secare debet) semper intersecabit chordam FG in aliquo puncto x, ita ut Cn semper constet duabus partibus Cx & xn. Jam vero ejus pars Cx nunquam potest esse minor perpendiculo CM (43): ergo Cx—xn, seu integra recta Cn semper major sit perpendiculo CM, est necesse.

71. Coroll. I. Quoniam semper major chorda minus, & minor magis distat a centro; diameter, quæ per ipsum centrum transit, ac proinde a centro nihil distat (10), omnium chordarum maxima est.

72. Coroll. II. Cum duo circuli æquales sibi rite impositi perfecte congruant, & eo ipso instar unius haberi possint; quemadmodum in uno eodemque circulo, ita etiam in duobus æqualibus circulis obtinent ea omnia, quæ in præc. Theoremate demonstrata sunt. Scilicet imprimis æquales chordæ in duobus æqualibus circulis æqualiter distant a centro; diende inæquales inæqualiter, ita ut chorda major minus distet a suo centro in uno circulo, minor autem in altero æquali circulo magis.

73. THEOREMA XXI. *In quocunque circulo* AOBNA (*Tab. I. Fig. II.*) *omnes radii* AC, DC, MC, *&c. in unico centro* C *concurrunt.*

Demonstr. Cum radius sit recta ex centro in peripheriam ducta (10); evidens est, radios omnes in centro concurrere debere: quod autem nulli bini radii possint alibi, quam in centro concurrere, inde manifestum sit, quia si bini quidam radii præter centrum haberent adhuc unum quodcunque punctum sibi commune;

mune; toti congruerent ita, ut non duos diverſos, ſed unum eundemque radium efficiant (7).

74. Coroll. Igitur cujuscunque circuli utcunque parvi peripheria *aobna* nunquam poteſt in tot æquales partes dividi, ut non ſit in plures ſine ullo ſine dividua; Concipiatur enim alter circulus major, ſed tamen priori concentricus AOBNA: evidens eſt, majorem hunc circulum concentricum creſcere poſſe ſine ullo ſine, ejus radio AC ad arbitrium cogitatione noſtra producto, ac proinde ejus peripheriam in plures ſemper & plures æquales partes dividendam eſſe: atqui peripheria *aobna*, utcunque parva, ſemper in totidem æquales partes dividi poterit, in quot partes diviſa fuerit concentrica illa peripheria AOBNA, utcunque magna. Si enim peripheriam AOBNA utcunque magnam, in quotcunque æquales partes AD, DM, MO &c. utcunque parvas dividas, tum ex punctis diviſionum concipias duci radios AC, DC, MC &c. ad commune centrum C; radii hi, eo ipſo quod nuſpiam alibi, quam in centro C concurrant, ſemper in totidem diverſas *ad*, *dm*, *mo* &c. itidem æquales inter ſe (21) partientur peripheriam *aobna*, utcunque parvam. Ergo.

75. Si recta quæpiam EF (*Tab, II. Fig.* 19.) ita occurrat circulo A in punctis O & L, ut ejus rectæ pars quæpiam OL cadat intra eum circulum; recta EF dicitur circulum illum *ſecare*: ſi autem recta CD ita occurrat circulo B, ut nulla ejus rectæ pars cadat intra circulum, ſed tantum cum ipſa circuli peripheria concurrat alicubi in G; dicitur *tangere* circulum, vocaturque *tangens circuli*. Eadem autem intelligenda ſunt etiam de alterius cujuscunque lineæ curvæ continuæ ſecante, & tangente.

76. THEOREMA XXII. *Si recta* CD *circulum* B *in puncto* G *tangat; radius* BG, *qui in ipſo contactus puncto* G *terminatur, eſt ad tangentem* CD *perpendicularis: & viciſſim, ſi radius* BG *ſit perpendicularis ad rectam* CD *per punctum* G *transeuntem; recta* CD *eſt tangens circuli* B.

Demonstr. *Imæ partis.* Evidens eſt, poſſe ex centro B ad tangentem CD (ſi opus eſſet, magis adhuc

verſus

versus C vel versus D producendam) demitti aliquam rectam perpendicularem: atqui si radius BG non esset ad eam perpendicularis; nulla posset alia perpendicularis ad eandem demitti ex centro B, quod sic daclaro. Si non radius BG, sed aliqua alia recta BM esset ad CD perpendicularis; esset recta BM brevior radio BG (43): ergo rectæ CD punctum M caderet intra peripheriam circuli; consequenter recta CD contra hypoth. non *tangeret* circulum, sed secaret (75), quod absurdum est.

Demonstr. *2dæ partis*. Si radius BG est ad rectam CD perpendicularis; quælibet alia recta BM, quæ ex centro B ad eandem rectam CD duci potest, longior est radio BG (43), ac proinde quolibet etiam alio circuli B radio (11): ergo recta CD ita occurrit peripheriæ circuli in puncto G, ut nulla ejus pars cadat intra ipsam peripheriam circuli. Atqui istud tantundem est, ac rectam CD esse tangentem circuli (75); ergo.

77. Coroll. Igitur recta CD circulum B non potest in pluribus simul punctis tangere, sed semper in unico tantum, e. g. in G. Ponamus enim punctum G esse punctum contactus: radius BG est perpendicularis ad tangentem CD, uti nunc ostensum est; &, si præterea etiam punctum quodpiam M esset punctum contactus, eodem modo ostendi posset, rectam BM pariter fore perpendicularem ad eandem tangentem CD: sequeretur ergo, ex eodem puncto B plura perpendicula demitti posse in eandem rectam CD, quod absurdum est (44).

Schol. Immo, cujuscunque curvæ continuæ a circulo diversæ pars ponatur esse arcus *m*G*m*, quem CD tangat in G; contactus in unico duntaxat puncto G evenire debet, quin ulla continua lineola GM, utcunque parva, possit esse communis arcui, & tangenti. Si enim lineola GM est pars rectæ CD; ipsa quoque recta sit, oportet (4): eo ipso autem nequit esse pars curvæ continuæ *m*G*m*; nam curvæ continuæ nulla omnino definita pars, utcunque parva, potest esse recta (4).

78. THEOREMA XXIII. *Si duo circuli* A *&* B *sese tangant, sitque punctum* P *punctum contactus, ac proin-*

proinde utrique circulo commune; centra A & B *cum puncto* P *in eadem linea recta jacent, seu linea* APB *est recta.*

DEMONSTR. Quoniam circuli A & B ponuntur sese tangere duntaxat, & non secare; evidens est, non posse ex centro A ad B breviorem duci lineam, quam quæ sit æqualis radio AP + r ad d. PB, seu quam sit linea APB: cum ergo omnium linearum, quæ ex uno puncto ad aliud duci possunt, brevissima sit linea recta (5); si APB non esset linea recta, nulla alia linea recta posset duci ex centro A ad B: atqui evidens est, a quolibet puncto ad quodlibet aliud punctum rectam lineam duci posse; ergo linea APB recta sit, oportet.

79. COROLL. Igitur duo circuli A & B nequeunt sese in pluribus simul punctis tangere, sed semper in unico tantum, e. g. in P. Tangant enim se se, si fieri potest, in duobus punctis P & *p*: ad puncta contactus ducantur radii AP & A*p*, item BP & B*p*. Quoniam P est punctum contactus, linea APB recta est (78); & quoniam etiam *p* ponitur esse punctum contactus, eadem ratiocinandi methodo evincitur, lineam A*p*B pariter rectam esse oportere: ergo ex eodem puncto A ad idem punctum B duæ diversæ rectæ APB & A*p*B duci possunt, quod absurdum est (5).

80. THEOREMA XXIV. *Quo magis decrescit chorda in uno eodemque circulo, eo magis accedit ad æqualitatem cum arcu, quem subtendit. e. g. Chorda minor* AE (*Fig.* 18.) *magis accedit ad æqualitatem cum suo arcu subtenso* A*x*E, *quam chorda major* AB *cum suo arcu* AEB.

DEMONSTR. Si arcus AEB, quem chorda AB subtendit, bisecetur in E, ut arcus A*x*E sit dimidia pars arcus prioris AEB; chorda AE, quæ arcum A*x*E subtendet, erit major, quam dimidia pars chordæ prioris AB: evidens enim est, chordam AE + EB esse > AB; adeoque cum ob arcus A*x*E & E*y*B æquales, sit chorda AE = EB (64), evidens quoque est esse 2 AE > AB, consequenter esse etiam AE > $\frac{1}{2}$ AB. Itaque decrescente arcu, semper in minore ratione decrescit chorda, quam arcus ipse decrescat, ita ut, si arcus dimi-

dimidia ſui parte decreſcat, chorda minus decreſcat, quam dimidia ſui parte. Eo ipſo autem chorda ſemper eo magis accedit ad æqualitatem cum arcu ſubtenſo, quo magis decreverit: generatim enim, ſi duæ quantitates inæquales decreſcant, ſed minor in minore ratione decreſcat, quam major; quo magis decreverint eæ quantitates, eo magis accedet minor ad æqualitatem cum majore. e. g. Aſſumamus quantitates a & b: initio ſit $a = 16$, & $b = 8$, Dein decreſcat a dimidia ſui parte, ut fiat $= 8$; at b decreſcat minus, quam dimidia ſui parte, ut fiat $= 5$: jam major erit b comparate ad a, quam prius fuerit, adeoque jam magis accedet ad æqualitatem cum a; quippe 5 major quantitas eſt comparate ad 8, ac fuerit 8 comparate ad 16 (*Algeb.* 148). Rurſus a jam $= 8$ decreſcat dimidia ſui parte, ut evadat 4; at b jam $= 5$ minus decreſcat, quam dimidia ſui parte, ut evadat $= 3$: magis adhuc accedent quantitates illæ ad æqualitatem; cum 3 major quantitas ſit comparate ad 4, ac ſit 5 comparate ad 8. Et ſic porro.

81. THEOREMA XXV. *Angulus* APB (*Fig.* 20.) *qui fit in peripheria circuli a tangente* AP *&* *chorda* PB, *habet pro menſura dimidium arcus* PDB, *ab eadem chorda ſubtenſi.*

Demonstr. Ducatur enim imprimis diameter Ee ad chordam PB parallela; deinde diameter Dd ad eandem chordam perpendicularis; denique radius PC. Erit imprimis angulus APC, ſeu $o + x = 90°$ (76): erit deinde etiam angulus $r + y = 90°$; nam diameter Dd, eo ipſo, quod ex conſtr. ſit ad chordam PB perpendicularis, etiam ad ejusdem chordæ parallelam Ee perpendicularis ſit, oportet (61). Eſt itaque ang. $o + x = r + y$. Porro anguli x & y, ob rectas PB & Ee parallelas, ſunt alterni æquales (55): itaque æqualia ab æqualibus ſubtrahendo, eſt ang. o, ſeu ang. APB $= r$. Cum ergo anguli r menſura ſit arcus PD (19); etiam anguli APB menſura eſt idem arcus PD. Jam vero arcum PD eſſe dimidium arcus PDB a chorda PB ſubtenſi, facile patet. Ducatur enim præterea radius BC: diameter Dd, quoniam eſt ex conſtr. perpendicularis ad chordam PB, angulum PCB

 biſabifariam ſecat (68): ergo etiam ejus menſuram, ſeu arcum PDB biſariam ſecat; quod tantundem eſt, ac eſſe arcum $PD = DB$, ac proinde arcum PD eſſe dimidium arcus PDB.

82. Coroll. Pariter anguli aPB, quem eadem chorda cum eadem tangente ex altera parte comprehendit, menſura eſt dimidium arcus PdB, ab eadem chorda ex altera parte ſubtenſi. Eſt enim angulus $APB + aPB = 180^\circ$ (34): ergo utriusque ſimul anguli menſura eſt dimidia circuli peripheria $= \frac{1}{2} PDB + \frac{1}{2} PdB$. Cum ergo menſura anguli APB ſit $= \frac{1}{2}$ PDB; pro angulo aPB remanet menſura $= \frac{1}{2} PdB$.

83. THEOREMA XXVI. *Angulus* x (*Fig.* 21.) *quem in peripheria circuli duæ chordæ* PB *&* PF *comprehendunt, habet pro menſura dimidium arcus* BF, *cui ejusdem crura inſiſtunt.*

Demonstr. Si enim ducatur recta Aa, circulum in P tangens; ang. $o + x + m = 180^\circ$ (35); adeoque trium horum angulorum ſimul ſumptorum menſura eſt circuli ſemiperipheria $=$ arcui $\frac{1}{2}$ PB $+ \frac{1}{2}$ BF $+ \frac{1}{2}$ FP. Cum ergo menſura anguli o ſit arcus $\frac{1}{2}$ PB, & anguli m arcus $\frac{1}{2}$ PF (81); pro anguli x menſura remanet arcus $\frac{1}{2}$ BF.

84. Coroll. I. Igitur angulus ad centrum C eſt duplus anguli x ad peripheriam, eidem arcui BF inſiſtentis. Nam anguli C menſura eſt arcus integer BF (19); anguli x autem menſura eſt arcus $\frac{1}{2}$ BF (83).

85. Coroll. Angulus ABD ad peripheriam (*Fig.* 22.) cujus crura inſiſtunt diametri AD extremitatibus, eſt rectus, ac proinde $= 90^\circ$. Ejus enim menſura eſt dimidia pars ſemiperipheriæ AED, cui crura ipſius inſiſtunt (83).

86. THEOREMA XXVII. *Angulus* MBD (*Fig.* 23.), *qui in peripheria circuli fit a chorda* BD, *& alia recta* MB, *quæ producta circulum ſecat, habet pro menſura* *ſemi-*

ſemiſummam arcuum BxD *&* ByA , *a chorda* BD *& recta* MB *producta interceptorum.*

Demonstr. Nam anguli ABD + MBD menſura eſt circuli ſemiperipheria + $\frac{2}{2}$ BxD + $\frac{1}{2}$ AED + $\frac{1}{2}$ ByA (34): atqui menſura anguli ABD eſt = $\frac{1}{2}$ AED (83); ergo pro angulo MBD remanet menſura = $\frac{1}{2}$ BxD + $\frac{1}{2}$ ByA.

87. THEOREMA XXVIII. *Chordæ parallelæ* MN *&* OL (*Fig.* 22.) *æquales arcus* MO *&* NL *intercipiunt in eodem circulo.*

Demonstr. Si enim ducatur recta ON ; ob chordas MN & OL parallelas, anguli alterni MNO & LON æquales ſunt (55): ergo eorum menſuræ pariter æquales ſunt. Atqui menſura anguli MNO eſt arcus $\frac{1}{2}$ MO, & anguli LON arcus $\frac{1}{2}$ NL (83); eſt ergo $\frac{1}{2}$MO = $\frac{1}{2}$NL ac proinde etiam MO = NL.

88. Coroll. Viciſſim chordæ MN & OL parallelæ ſunt, ſi arcus MO & NL, quos eæ in eodem circulo intercipiunt, æquales fuerint. Cum enim ſit ex hyp. MO = NL; eſt etiam $\frac{1}{2}$ MO = $\frac{1}{2}$ NL: ergo menſuræ angulorum MNO & LON æquantur inter ſe (83), ac proinde anguli illi æquales ſunt. Eo ipſo autem chordæ MN & OL, utpote quæ cum eadem recta ON angulos alternos æquales efficiunt, parallelæ ſint oportet (58).

89. THEOREMA XXIX. *Quæcunque chorda* OL, *& ipſi parallela tangens* RS *in eodem circulo æquales arcus* OE *&* LE *intercipiunt.*

Demonstr. Si enim ducatur recta EL ; ob rectas OL & RS parallelas, anguli alterni OLE & LES ſunt (55): ergo menſuræ quoque eorundem æquales ſunt. Atqui menſura anguli OLE eſt arcus $\frac{1}{2}$ OE (83), & anguli LES eſt $\frac{1}{2}$ LE (81); eſt ergo arcus $\frac{1}{2}$ OE = $\frac{1}{2}$LE, ac proinde eſt etiam integer arcus OE = LE.

90. PROBLEMA IV. *Ducere circulum per data tria puncta* A, B, D (*Fig.* 24.) *non in directum ſita.*

RESOLUT. Data puncta connectantur rectis AB & AD; tum rectæ hæ secentur bifariam & simul perpendiculariter per rectas indefinitas EM & FG (50); denique ex puncto C, in quo rectæ EM & FG concurrunt, tanquam centro describatur circulus radio, qui sit æqualis distantiæ alicujus e datis punctis a puncto C, e. g. radio AC: circlus hac lege descriptus per singula datorum trium punctorum transibit.

DEMONSTR. Ducantur enim rectæ AC, BC, DC. Si tres hæ rectæ sunt æquales, evidens est, circulum radio AC, vel BC, vel DC descriptum per singula datorum trium punctorum transire debere: esse vero eas rectas æquales facile patet. Nam imprimis in triangulis ACE & BCE est ex constr. AE=EB, & latus EC utrique triangulo commune; præterea anguli ad E sunt ex constr. æquales, utpote recti: est ergo etiam AC=RB (27). Deinde in triangulis ACF & DCF pariter est ex constr. AF=FD, latus FC utrique triangulo commune, & anguli ad F recti, ac proinde æquales: ergo est etiam AC=DC (27). Hoc est, rectæ AC, BC, DC æquales sunt.

91. COROLL. Igitur cuicunque triangulo ABD (*Fig.* 23.) circumscribi potest circulus, per ejusdem apices A, B, D transiens. Si enim latus AB per rectam *os*, & latus BD per rectam *rv* bifariam, simulque perpendiculariter secetur (60); ex concursus puncto C radio AC descriptus circulus transibit per puncta A. B, D, uti nunc demonstratum est.

92. PROBLEMA V. *Dati circuli integri* ABDA (*Fig.* 24.) *vel dati arcus* BAD, *qui continuari debeat, centrum invenire.*

RESOLUT. Quæcunque tria dati circuli vel arcus puncta A, B, D connectantur, per chordas AB, & AD; tum ducantur rectæ EM & FG ea lege, ut chordas illas bifariam, & simul perpendiculariter secent: punctum C, in qno rectæ hæ concurrent, erit centrum quæsitum.

DEMONSTR. Recta EM chordam AB bifariam & simul perpendiculariter secans, transit per centrum circuli (69); pariter recta FG chordam AB bifariam & perpendiculariter secans transit per centrum ejusdem

cir-

circuli (cit.) : ergo centrum circuli ibi ſit, oportet, ubi hæ rectæ concurrunt, ſcilicet in puncto C.

Schol. Demonſtrationem hanc in præced. Probl. necdum cenſuimus uſurpandam : hæc enim videtur jam ſupponere, poſſe per quæcunque data tria puncta duci circulum ; quod ipſum tamen in præc. *Probl.* demonſtrandum erat.

93. Coroll. I. Igitur nequit evenire, ut duo diverſi circuli habeant tria quæpiam puncta ſibi communia. Transeant enim, ſi fieri poteſt, per tria puncta A, B, D duo diverſi circuli. Rectæ AB & AD erunt chordæ circulo utrique communes ; conſequenter rectæ EM & FG, quæ chordas has bifariam, & ſimul perpendiculariter ſecant, per utriusque circuli centrum tranſibunt : ergo utriusque circuli centrum erit in C. Hinc cum præterea uterque circulus transeat per puncta A, B, D, radii AC, BC, DC erunt utrique circulo communes. Ii ergo circuli contra hypoth. non erunt duo diverſi, ſed unus idemque, quod abſurdum eſt.

94. Coroll. II. Per tria puncta in directum jacentia circulus duci prorſus non poteſt. Concipiamus enim angulum BAD augeri, dum fiat $= 180^{\circ}$, punctaque B, A, D in directum jaceant : perpendicula EM & FG, chordas AB & AD bifariam ſecantia, erunt inter ſe parallela (60), ac proinde nuſpiam concurrent. Atqui centrum circuli per data quæcunque tria puncta A, B, D transeuntis debet eſſe in concurſu perpendiculorum EM & FG, chordas AB & AD bifariam ſecantium (92) ; ergo centrum circuli, qui per data quæcunque tria puncta in directum jacentia tranſire deberet, nuſpiam exiſtit : hoc eſt, per tria puncta in directum jacentia circulus duci prorſus non poteſt.

95. Coroll. III. Ergo in nullo circulo reperiuntur tria id genus puncta, quæ in eadem linea recta jaceant.

96. PROBLEMA VI. *Quemcunque angulum* LCO (*Fig.* 25.) *bifariam dividere.*

Resolut. Centro C, radio AC ad arbitrium aſſumpto deſcribatur arcus ADB ; tum ducatur chorda AB : denique ex puncto C demittatur recta CM ad rectam

AB perpendicularis. Recta hæc angulum LCO, seu angulum ACB in duos æquales angulos ACM & BCM dividet.

DEMONSTRATIONEM vide num. 68.

97. PROBLEMA VII. *Datum arcum* ADB *bifariam dividere.*

RESOLUT. Ducatur chorda AB, feceturque bifariam, & perpendiculariter per rectam CD (50): recta CD etiam arcum ADB bifariam fecabit in D.

DEMONSTR. Recta CD, cum chordam AB bifariam & perpendiculariter fecet, tranfit per arcus dati centrum C (69); ergo angulum ACB bifariam dividit (68): eo ipfo autem etiam menfuram anguli ACB, feu arcum ADB bifariam dividat, eft neceffe.

98. PROBLEMA VIII. *Datæ rectæ* AB (*Fig.* 26.) *per datum punctum* M *parallelam ducere.*

RESOLUT. Infixo crure circini in dato puncto M, defcribatur ad arbitrium arcus indefinitus FC; tum manente eadem circini apertura, centro F defcribatur arcus MD; denique ex arcu FC refecetur pars FO = MD; recta MO per puncta M & O tranfiens erit ad AB parallela.

DEMONSTR. Si enim ducatur recta MF: anguli v menfura eft arcus OF, & anguli x arcus MD (19): cum ergo hi arcus fint ex conftr. eodem radio defcripti, & æquales; etiam anguli alterni v & x æquales fint, oportet. Eo ipfo autem eft MO ad AB parallela (58).

99. PROBLEMA IX. *Ex datæ rectæ* AB (*Fig.* 27.) *extremo puncto* B *erigere perpendicularem.*

RESOLUT. Affumpto fupra datam rectam quocunque centro C, radio CB defcribatur circulus, qui rectam datam fecet in F; deinde ducatur diameter FD; denique puncta D & B connectantur recta DB. Recta hæc erit quæfita perpendicularis: nam angulus FBD eft rectus (85).

100. PROBLEMA X. *Ad datum in peripheria circuli punctum* B (*Fig.* 28.) *tangentem ducere.*

RESOLUT. Ducatur ad datum punctum B radius CB; tum in ejus extremo B erigatur perpendicularis BA (99): erit AB tangens quæfita (76).

101. PRO-

101. PROBLEMA XI. *Ex dato extra peripheriam puncto A tangentem ad circulum ducere.*

Resolut. Ex dato puncto A ad centrum C ducatur AC, quæ bifariam secetur in *o*. & centro *o* radio *o*C describatur semicirculus ABC, dato circulo occurrens alicubi in B; denique per puncta A & B ducatur recta AB: erit hæc tangens quæsita. Si enim ducatur radius CB; angulus ABC est rectus (85); ergo AB est tangens circuli (76).

Schol. 1. Supersunt adhuc aliqua de circulo adferenda, quorum tamen demonstrationes hoc adhuc loco intelligi nequeunt, propterea, quod ab iis dependeant, quæ pertractari nondum potuerunt.

Schol. 2. In charta circulos ope circini duci, nulli non cognitum est: in campo autem circini loco adhiberi solet catena, vel funis circa fixum clavum mobilis, & altera extremitate stilo ferreo, qui ad funem tensum perpendicularis sit, instructus. Porro funis, ne humore imbutus inæqualiter tendatur, e funiculis in gyros contrarios contortis confici, tum bullienti oleo immergi, & ubi exsiccatus fuerit, per ceram liquatam traduci solet.

CAPUT QUINTUM.

De Triangulis, & Quadrilateris.

102. Polygonum trium laterum, uti jam alias (26) diximus, *triangulum* appellatur: polygonum quatuor lateribus gaudens, *tetragonum*, vel *quadrilaterum*; quinque latera habens, *pentagonum*; sex laterum, *hexagonum*, & sic porro, audit.

103. Triangulum dividi solet imprimis in æquilaterum, isosceles, seu æquicrurum, & scalenum. *Æquilaterum* est, cujus omnia tria latera sunt inter se æqualia. *Isosceles* seu *æquicrurum* dicitur, cujus duo tantum latera, seu *crura*, sunt æqualia. Denique *scalenum* est, quod omnia tria latera habet inter se inæqualia.

104. Dividitur deinde triangulum in rectangulum, obtusangulum, & acutangulum. *Rectangulum* est, in quo unus angulus est rectus. Sic triangulum ABC (*Fig.* 5.), si angulus ad B sit rectus, rectangulum est. Latus AC angulo recto oppositum *hypothenusa* vocatur: reliqua vero duo latera AB, & BC, quæ angulum rectum comprehendunt, *catheti* audiunt. Triangulum *obtusangulum* est, in quo unus angulus obtusus, seu recto major reperitur. *Acutangulum* denique est, cujus omnes anguli sunt acuti.

105 THEOREMA XXX. *In quovis triangulo* ACB (*Fig.* 29.) *omnes tres anguli simul sumpti continent* 180°, *seu æquivalent duobus rectis.*

Demonstr. Potest enim cuivis triangulo ACB circumscribi circulus, qui per ejus apices A, C, B transeat (91). Jam anguli *m* mensura est dimidius arcus AB, anguli *n* dimidius arcus AC, anguli *o* dimidius arcus CB (83): ergo omnium trium angulorum simul sumptorum mensura semper est semiperipheria circuli. Eo ipso autem veritas theorematis manifesta est.

106. Coroll. I. Nequit ergo in triangulo esse angulus rectus, aut obtusus, nisi unicus; & tunc reliqui duo sunt eo ipso acuti. Si enim in quopiam triangulo reperirentur vel duo recti anguli, vel duo obtusi, vel denique unus rectus, vel alter obtusus; tres ejus trianguli simul sumpti plus continerent, quam 180 gradus (24, & 25).

107. Coroll. II. Si in quocunque triangulo ABC (*Fig.* 5.) noti sint quicunque duo anguli A & B; eo ipso innotescit etiam tertius C. Cum enim sit ang. $A + B + C = 180^\circ$ (105); est ang. $C = 180^\circ - A - B$. Item: si in duobus quibuscunque triangulis ABC & *abc* constet, duos unius angulos æquales esse duobus alterius angulis, e. g. esse angulum $A = a$, & $B = b$; eo ipso inferre licet, etiam tertium tertio æqualem esse, seu esse etiam ang. $C = c$. Cum enim tam in uno, quam in altero triangulo omnes tres anguli simul sumpti sint $= 180^\circ$, est ang. $A + B + C = a + b + c$: quodsi ergo sit $A + B = a + b$; hæc æqualia utrinque tollendo remanet $C = c$.

108. In

108. In quovis triangulo ACB (*Tab. II. Fig.* 29.) ſupremus apex C *vertex trianguli* nominatur, & latus AB verticali angulo C oppoſitum, trianguli *baſis* audit. Quodſi in quopiam caſu pro vertice trianguli aſſumeretur e. g. apex A; eo caſu pro baſi habendum eſſet latus BC, utpote verticali angulo A oppoſitum. Pariter ſi pro vertice aſſumas apicem B; baſis eſt AC.

109. THEOREMA XXXI. *Ex vertice trianguli demittatur perpendiculum in ejusdem baſim, ſi opus fuerit, etiam producendam. 1) Si triangulum fuerit acutangulum; quiscunque apex aſſumatur pro vertice trianguli, perpendiculum ex eo in baſim demiſſum extra triangulum cadere non poteſt. 2) Idem eſt, ſi in triangulo rectangulo, aut obtusangulo ex angulo recto, aut obtuſo in oppoſitam baſim demittatur perpendiculum. 3) Si autem in triangulo obtusangulo ex angulo acuto demittatur perpendiculum in baſim oppoſitam; id perpendiculum intra triangulum cadere nequit.*

Demonstr. 1*mæ partis*. Si enim perpendiculum ex trianguli ACB vertice C demiſſum poteſt extra ipſum triangulum cadere; ponamus id genus perpendiculum eſſe rectam CD. Quoniam anguli deinceps poſiti *n* & DBC ſimul ſumpti æquivalent duobus rectis (34), & angulus *n* eſt ex hyp. acutus; ſequitur angulum DBC eſſe obtuſum: porro ſi CD eſt ad baſim AB ſeu ad AD perpendicularis; angulus D eſt rectus: ergo in triangulo CBD aderit unus angulus obtuſus, alter rectus; quod abſurdum eſt (106).

Demonstr. 2*dæ partis* prorſus eadem eſt. Imaginemur enim in eodem triangulo angulum *m* eſſe rectum, vel obtuſum: angulus *n* debebit eſſe acutus (106). Hinc ſi perpendiculum ex C in baſim demiſſum caderet extra triangulum, eſſetque e. g. recta CD; in triangulo CBD rurſus angulus ad B obtuſus, & ad D rectus eſſet; quod abſurdum eſt (106).

Demonstr. 3*tiæ partis*. Sit enim in triangulo ACB (*Fig.* 30.) angulus B obtuſus, adeoque angulus C acutus (106): ſi perpendiculum ex vertice C demiſſum poteſt cadere intra triangulum; ſit ejusmodi perpendiculum recta CD. In triangulo CDB angulus B erit ex hyp. obtusus, & angulus ad D, ob rectam CD ad AB ex hyp. perpendicularem, erit rectus; quod absurdum est (106).

110. THEOREMA XXXII. *In quovis triangulo* ABC (*Fig.* 29.) *majori angulo majus latus opponitur, minori minus; & vicissim angulus majori lateri oppositus major est, minor autem is, qui minori lateri opponitur.*

Demonstr. Circumscribatur enim triangulo circulus, ponamusque 1) angulum n majorem esse angulo m. Mensura anguli n est dimidum arcus CvA, & anguli m dimidium arcus AxB (83): ergo ob angulum $n > m$, est $\frac{1}{2}$ CvA $>$ $\frac{1}{2}$ AxB, consequenter est etiam integer arcus CxA $>$ AxB. Eo ipso autem patet esse etiam chordam AC $>$ AB (64), adeoque majori angulo majus, minori minus latus opponi in eodem triangulo.

2) Ponamus latus AC esse $>$ AB: erit arcus CvA $>$ AxB (65), adeoque erit etiam $\frac{1}{2}$ CvA $>$ $\frac{1}{2}$ AxB. Atqui $\frac{1}{2}$ CvA metitur angulum n, & $\frac{1}{2}$ AxB angulum m (83); est ergo etiam angulus $n > m$: hoc est, majori lateri major, minori minor angulus opponitur in eodem triangulo.

111. Coroll. I. Igitur in uno eodemque triangulo æqualibus angulis æqualia latera, & vicissim æqualibus lateribus æquales anguli opponuntur. Circumscribatur enim circulus triangulo ACB, ponamusque 1) esse ang. $m = n$. Erit arcus $\frac{1}{2}$ AxB $=$ $\frac{1}{2}$ CvA (83). adeoque etiam AxB $=$ CvA: erit ergo etiam chorda AB $=$ CA (64). Hoc est, æqualibus angulis in eodem triangulo æqualia latera opponuntur. Ponamus 2) esse latus AB $=$ CA. Erit arcus AxB $=$ CvA (65), adeoque erit etiam $\frac{1}{2}$ AxB $=$ $\frac{1}{2}$ CvA; ergo mensuræ angulorum m & n æquales sunt (83), ac proinde ipsi quoque anguli m & n inter se æquentur, oportet. Hoc est, æqualibus lateribus in eodem triangulo æquales anguli opponuntur.

112 Co-

112. Coroll. II. Hinc 1) in triangulo æquilatero omnes tres angulos æquales esse oportet. Secus enim non esset universe verum, in triangulo æqualibus lateribus æquales angulos opponi. Eandem ob caussam in triangulo isosceli seu æquicruro, duo anguli basi adjacentes, seu æqualibus cruribus oppositi, æquari inter se debent. 2) Id genus triangulum, in quo omnes tres anguli sunt æquales inter se, æquilaterum sit, oportet. Secus enim non esset universe verum, in triangulo æqualibus angulis æqualia opponi latera. Eandem ob caussam id genus triangulum, in quo duo anguli æquales reperiuntur, isosceles sit, est necesse.

113. THEOREMA XXXIII. *Si in quocunque triangulo* ACB *latus* AB *producatur in* D; *angulus externus* CBD *æquatur duobus internis oppositis* o *&* m.

Demonstr. Nam est imprimis ang. $n +$ CBD $= 180^\circ$ (34); est deinde etiam ang. $n + o + m = 180^\circ$ (105): est ergo:

Ang. $n +$ CBD $= n + o + m$; adeoque CBD $= o + m$.

114. THEOREMA XXXIV, *Triangulum* ABD *(Fig. 31.) sit ad* A *rectangulum: ejus hypothenusa* BD *dividatur bifariam in* C. *Si centro in* C *radio* BC *describatur circulus super hypothenusa, tanquam diametro; is circulus per trianguli verticem* A *transibit.*

Demonstr. Si enim is circulus non transiret per verticem A; deberet transire vel supra A per aliquod punctum m, vel infra A per aliquod punctum x (recole monitum n. 9. *Schol*): atqui neutrum posse dici, sic declaro. Transeat 1) si fieri potest, is circulus per punctum m. Recta BA producatur in m, ducaturque recta mD. Angulus BmD, utpote ad circuli peripheriam situs, simulque diametro insistens, erit rectus (85); consequenter in triangulo ADm jam aderit unus angulus rectus m: cum ergo ob angulum BAD ex hyp. rectum, in eodem triangulo ADm rectus esse debeat etiam angulus DAm; in triangulo illo duo anguli recti aderunt, quod absurdum est (106).

2) Transeat, si fieri potest dictus circulus per punctum x infra A. Si ducatur recta xD; angulus BxD erit rectus (85): cum ergo etiam angulus BAD

sit

fit ex hyp. rectus ; in triangulo DAx duo recti anguli aderunt, nempe ad A, & ad x ; quod pariter absurdum est (206).

115. THEOREMA XXXV. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc (*Fig.* 32.) *ad* A *&* a *rectangulis bases* AC *&* ac *fuerint æquales, sed altitudines* AB *&* ab *inæquales; anguli* B *&* b *basibus oppositi, erunt inæquales ita, ut in eo triangulo sit major angulus basi oppositus, in quo altitudo est minor, & contra, consequenter ita, ut ob* $ab < AB$ *sit ang.* $b > B$.

Demonstr. In catheto AB capiatur pars $Cm = ab$, ducaturque recta mC : in triangulis AmC & abc est ex hypoth. latus $Am = ab$, $AC = AC = ac$, & ang. $A = a$; ergo etiam anguli homologi AmC & b æquales sint, oportet (27) : quodsi ergo est ang. $AmC > B$; est etiam ang. $b > B$. Esse vero ang. $AmC > B$ facile patet : nam angulus AmC respectu trianguli BCm est externus ; æquatur ergo duobus internis oppositis B & BCm simul sumptis (113). Eo ipso autem patet esse ang. $AmC > B$.

Schol. Theoremati huic esse locum, tametsi anguli A & a non fuerint recti, modo tamen sint inter se æquales, ex ipsa ejusdem demonstratione intelligere licet.

116. Si tres anguli unius trianguli fuerint æquales tribus alterius angulis, nempe primus primo, secundus secundo, tertius tertio ; duo id genus triangula dicuntur *æquiangula* : latera vero æqualibus angulis opposita (unum in uno, alterum in altero triangulo) uti jam alias diximus, *homologa* vocantur. e. g. Si in triangulis ABC & abc (*Fig.* 39.) fuerit angulus $A = a$, $B = b$, $C = c$; hæc duo triangula erunt *æquiangula*. & latus AB erit *homologum* lateri ab ; pariter lateri BC respondebit latus *homologum* bc, lateri AC latus ac. Porro triangula duo, quorum areæ æquantur inter se, *æqualia* sunt. Unde patet, posse duo triangula esse æquiangula, quin sint æqualia. At etiam facile intelligere licet, evenire posse, ut duo triangula sint æqualia, quin sint æquiangula ; possunt enim areæ duorum triangulorum esse æquales, quin tres unius anguli tribus alterius angulis (nempe primus

mus primo, ſecundus ſecundo) ſint æquales, uti conſideranti manifeſtum eſt.

117. Duo polygona, quotcunque laterum fuerint, vocantur *ſimilia*, ſi tres hæ conditiones in eis adfuerint: nempe 1) ſi numerus laterum utrobique ſit idem; 2) ſi latera habent *ſimiliter poſita*, id eſt, ſi in uno polygono primum latus cum ſecundo comprehendat angulum æqualem ei, quem in altero polygono itidem primum latus cum ſecundo comprehendit, pariter angulus inter ſecundum, & tertium latus in uno polygono interceptus æqualis ſit angulo, qui in altero polygono itidem inter ſecundum & tertium latus intercipitur, & ſic porro; 3) ſi in eis latera homologa, ſeu ſimiliter poſita, proportionalia fuerint, e. g. ſi primum unius polygoni latus ſic ſe habeat ad primum alterius, uti ſecundum ejusdem latus ad ſecundum alterius. Quodſi tamen de triangulis ſpeciatim ſit ſermo; ſi conſtet quæpiam duo triangula eſſe *æquiangula*, id genus triangula eo ipſo ſimilia vocari ſolent: propterea, quod nequeant duo triangula eſſe *æquiangula*, quin latera homologa, ſeu æqualibus angulis oppoſita (& vel ideo ſimiliter poſita) habeant proportionalia, uti *ſequ. Cap.* demonſtrabimus Unde nos quoque triangula *ſimilia*, & *æquiangula* deinceps pro ſynonimis habebimus. Quod tamen non æque obtinere in quibusvis univerſe duobus totidem laterum, quamvis ſimiliter poſitorum, polygonis, patet vel e duobus quadrilateris, meros angulos rectos habentibus, ſed in quorum uno latera omnia ſint inter ſe æqualia, non item in altero.

118. Coroll. Igitur, ut duo quæpiam triangula poſſint pronunciari *ſimilia*, ſatis eſt, ſi deprehendantur duo unius anguli eſſe æquales duobus alterius angulis, nempe unus uni, alter alteri. Si enim in duobus quibuscunque triangulis ABC & *abc* conſtet duos angulos eſſe æquales duobus alterius angulis; eo ipſo inferre licet, etiam tertium tertio æqualem eſſe (107): ergo (117).

119. THEOREMA XXXVI. *Duo quæcunque triangula* ABC *&* abc (*Tab. I. Fig.* 5.) *ſunt ſimilia & ſimul æqualia, ſi vel* 1) *habeant æqualia duo latera cum angulo*

gulo intercepta; vel 2) *habeant quoscunque duos angulos æquales cum uno latere; vel* 3) *tria unius latera æquentur tribus alterius lateribus, nempe primum primo, ſecundum ſecundo, tertium tertio.*

Demonstr. Sit enim 1) latus AB = *ab*, BC = *bc*, & præterea anguli his lateribus intercepti B & *b* æquentur inter ſe. Concipiamus triangulum *abc* ſuperponi triangulo ABC ita, ut ob AB = *ab*, puncto *a* cadente in A, *b*, cadat in B; tota hæc duo triangula adæquate congruent, uti n. 27. demonſtratum eſt. Eo ipſo autem ſunt ſimilia, ſimulque æqualia. Recole num. cit.

2) Sit ang. A = *a*, C = *c*, & præterea latus BC = *bc*. Erit etiam ang. B = *b* (107). Hinc, ſi concipiamus triangulum *abc* ſuperponi triangulo ABC ita, ut puncto *b* cadente in B punctum C, ob BC = *bc*, cadat in *c*; latus *ab* ob ang. B = *b* cadet ſupra AB, & latus *ac* ob ang. C = *c* ſupra AC: ergo latus *ab* cum AB abibit in unam, eandemque lineam rectam, *a c* autem cum AC; conſequenter punctum interſectionis *a* congruet cum A: duæ enim rectæ in duobus diverſis punctis A & *a* ſeſe interſecare non poſſunt (9). Eo ipſo autem patet, triangula ABC & *abc* fore ſimilia, & ſimul æqualia.

3) Sit latus AB = *ab*, AC = *ac*, BC = *bc*. Erit etiam ang. B = *b* (30); conſequenter in iis triangulis aderunt duo latera æqualia cum angulo intercepto: ergo per *primum* theor. *membr.* triangula illa ſunt rurſus ſimilia, & ſimul æqualia.

120. THEOREMA XXXVII. *Si in triangulis* ABC *&* abc (*Tab. II. Fig.* 34.) *ad* B *&* b *rectangulis hypothenuſæ* AC *&* a c *fuerint æquales inter ſe, & præterea una cathetus unius æquetur uni alterius catheto, e. g. ſi fuerit* BC = b c; *etiam tertium latus erit æquale tertio, ſeu erit* AB = a b.

Demonstr. Hypothenuſæ AC & *ac* ſecentur bifariam in punctis D & *d*; tum radiis AD & *a d* deſcribantur circuli ſuper hypothenuſis illis tanquam diametris: ii circuli tranſibunt per triangulorum vertices B & *b* (114). Hinc anguli A menſura erit dimidium arcus BXC, & anguli *a* dimidium arcus *bxc* (83). Porro ob AC = *ac*, circuli illi ſunt æquales; conſequenquenter ob chordam BC = *bc*, eſt arcus BXC = *bxc* (66), adeoque etiam $\frac{1}{2}$ BXC = $\frac{1}{2}$ *bxc*. Ergo eſt quoque ang. A = *a*. Hinc cum præterea ſit ex hyp. ang. B = *b*; eſt etiam ang. C = *c* (107). In iis ergo triangulis habentur duo latera æqualia cum angulo intercepto. Eo ipſo autem etiam latus AB lateri *ab* æquale ſit, eſt neceſſe (27).

121. Coroll. I. Quodſi ergo in duobus triangulis ABC & *abc* ad B & *b* rectangulis hypothenuſæ fuerint æquales, & præterea una unius cathetus æquetur uni alterius catheto; triangula illa ſunt ſimilia, & ſimul æqualia. Nam eo ipſo habentur in iis duo latera æqualia cum angulo intercepto, uti nunc demonſtratum eſt; ergo (119).

122. Coroll. II. Quoniam quæcunque duo triangula ſimilia, & ſimul æqualia tunc congruunt adæquate, quum ita ſuperponitur unum eorum alteri, ut quilibet unius angulus ſupra alterius angulum ſibi æqualem cadat, adeoque ita, ut quælibet bina latera homologa perfecte congruant; manifeſtum eſt, in quibusvis duobus triangulis ſimilibus, & ſimul æqualibus quælibet bina latera homologa æquari inter ſe.

123. THEOREMA XXXVIII. *In triangulo iſoſceli* DME (*Tab. I. Fig.* 11.) *ex vertice* M *ducatur ad baſim recta* MC. 1) *Recta* MC, *ſi fuerit ad baſim* DE *perpendicularis; bifariam dividet tam angulum* DME, *quam baſim* DE. 2) *Si* MC *bifariam ſecuerit baſim* DE; *erit ad eandem perpendicularis, & ſimul bifariam dividet etiam angulum* DME. 3) *Eadem recta* MC, *ſi angulum* DME *bifariam diviſerit, bifariam dividet etiam baſim* DE, *ſimulque erit ad eandem perpendicularis.*

Demonstr. Sit enim 1) MC ad DE perpendicularis. In triangulis MDC & MCE anguli ad C ſunt recti, adeoque æquales: at eſt etiam ang. D = E (112); ergo anguli quoque ad verticem M æquales ſunt (107): hoc eſt recta MC angulum DME bifariam ſecat. Porro in iisdem triangulis reperiuntur duo latera æqualia cum angulo intercepto; nam MD eſt ex hyp. = ME, latus

latus MC eſt utrique triangulo commune & anguli ad M æquantur inter ſe: ergo eſt etiam DC = CE (27).

2) Recta MC ſecet baſim DE bifariam. In triangulis DMC & EMC erit DC = CE, DM = EM, & latus MC utrique triangulo commune; ergo anguli homologi ad C, item ad M erunt æquales (30). Hoc eſt, recta MC erit ad DE perpendicularis, & ſimul angulum DME bifariam ſecabit.

3) Ponamus a recta MC angulum DME bifariam dividi. In triangulis DMC & EMC anguli ad M ſunt ex hyp. æquales: cum ergo præterea ponatur eſſe MD = ME, & latus MC ſit utrique triangulo commune; in iisdem triangulis adſunt duo latera æqualia cum angulo intercepto. Itaque imprimis eſt etiam DC = CE; deinde anguli homologi ad C æquantur inter ſe (27): hoc eſt, recta MC imprimis baſim DE bifariam ſecat: deinde eſt ad eandem perpendicularis.

124. THEOREMA XXXIX. *Si duo trianguli* ABC (*Tab. II. Fig.* 33.) *latera* AB *&* AC *angulum A comprehendentia parallela fuerint duobus alterius trianguli* abc *lateribus* a b *&* a c *angulum* a *comprehendentibus; erit angulus* A = a.

Demonstr. Producatur enim latus *a c*, dum lateri AB itidem producto occurrat in O. Ob rectas OB & *ab* ex conſtr. parallelas, erit ang. *bac* = O (55): pariter ob AC & O*c* ex conſtr. parallelas, erit ang. BAC = O (cit.): erit ergo ang. BAC = *bac*, ſeu A = *a*.

125. Coroll. Quodſi ergo in quibuscunque duobus triangulis ABC & *abc* tria unius latera parallela fuerint ad tria alterius latera, e. g. latus AB ad *ab*, BC ad *bc*, AC ad *ac*; triangula illa erunt ſimilia. Nam ob AB ad *ab*, & ob AC ad *ac* parallelum, eſt ang. A = *a*, uti nunc demonſtratum eſt: eodem jure ob AB ad *ab*, & ob BC ad *bc* parallelum, eſt ang. B = *b*. Eo ipſo autem duo id genus triangula ſunt ſimilia (118).

126. THEOREMA XL. *In duobus triangulis* ABC *&* abc *ſint æquales anguli* A *&* a, *quorum unus a lateribus* AB *&* AC, *alter a lateribus* a b *&* a c *efficitur: ſi fuerit latus* AB *ad* a b *parallelum; erit etiam* AC *parallelum ad* a c.

De-

Demonstr. Producatur enim latus *a c*, dum lateri AB itidem producto occurrat in O. Ob rectas OB & *ab* ex constr. parallelas est ang, *a*, seu *bac* = O (55) cum ergo sit ex hyp. ang. *bac.* = BAC; est etiam ang. BAC = O. Eo ipso autem latus AC ad O*c* seu ad *a c* parallelum sit, oportet (58),

127. *Tetragonum*, seu *quadrilaterum* dividitur in parallelogrammum, & trapezium. *Parallelogrammum* est quodvis quadrilaterum habens latera opposita parallela : reliqua vero quadrilatera non parallelogramma vocantur *trapezia.*

128. Parallelogrammum, si omnes angulos habeat rectos, vocatur *rectangulum*: sin minus, *non rectangulum* audit. Ceterum nomine *rectanguli* absque omni addito, intelligi solet ejusmodi parallelogrammum rectangulum, cujus latera non sunt omnia inter se æqualia; ejusmodi autem parallelogrammum, quod rectangulum est, & simul omnia latera habet æqualia, *quadratum* nuncupatur.

129, Parallelogrammum non rectangulum subdividitur in *rhombum*, & *rhomboidem. Rhombus* est parallelogrammum non rectangulum, in quo latera omnia sunt inter se æqualia: *rhomboides* autem est parallelogrammum non rectangulum, cujus latera omnia non sunt inter se æqualia. e. g. In *Fig.* 35. parallelogrammum ABCD est *rhombus*, & parallelogrammum ABCD (*Fig.* 36.) est *rhomboides*,

130. Recta AD (*ead. Fig.* 36.), quæ in parallelogrammo per vertices angulorum oppositorum ducitur, *diagonalis* audit. *Altitudo* cujuscunque parallelogrammi ABCD (*Fig.* 35.) est perpendiculum A*m* ex angulo A in oppositum latus BC (si opus fuerit, producendum) demissum; *basis* ejusdem parallelogrammi est idem latus BC, quod angulo A, ex quo perpendiculum A*m* demissum est, opponitur. Ceterum pro basi potest assumi quodcunque latus; at, si e. g. latus DC pro basi assumeretur; eo casu pro altitudine parallelogrammi habendum esset perpendiculum, ex opposito angulo A vel B in idem latus DC demittendum. Eadem intelligenda sunt etiam de altitudine trianguli:

sic altitudo trianguli ABC est perpendiculum *Am*, ex vertice A in basim BC demissum.

131. Coroll. Igitur in parallelogrammo rectangulo ABDC (*Tab. III, Fig.* 37.), si pro basi assumatur unum latus CD, alterum latus AC pro altitudine parallelogrammi habendum est. Nam ob angulum C rectum, perpendiculum ex angulo A in basim CD demissum, est ipsum latus AC. Pariter in triangulo ABC (*Tab. I. Fig.* 5.) ad B rectangulo, si pro basi assumatur latus BC; altitudo trianguli est latus AB.

132. THEOREMA XLI. *In quovis quatrilatero* ABDC (*Tab. II. Fig.* 36.), 1) *si latera opposita fuerint parallela, ita ut* AB *ad* CD, *&* AC *ad* BD *sit parallelum: erunt eadem æqualia, ita ut sit* AB = CD, *&* AC = BD. 2 *Si latera opposita æqualia fuerint; erunt eadem parallela.* 3) *Si bina opposita latera e. g.* AB *&* CD. *fuerint æqualia, & simul parallela; etiam alia bina* AC *&* BD *erunt æqualia inter se, simulque parallela.*

Demonstr. 1) Sit enim AB ad CD, & AC ad BD parallelum, ducaturque ad angulos oppositos *diagonalis* AD. In triangulis ABD & ACD anguli alterni *x* & *y*, ob AC & BD parallelas, æquales sunt (55): pariter ob AB & CD parallelas, æquantur inter se anguli alterni *m* & *n*: cum ergo præterea latus AD sit commune utrique triangulo, his in triangulis adsunt duo anguli æquales cum uno latere; consequenter hæc duo triangula sunt similia, & simul æqualia (119). Ergo latera homologa AC & BD: item AB & CD inter se æquentur, oportet (122).

2) Sit AB = CD; & AC = BD. In triangulis ABD & ACD tria unius latera æqualia sunt tribus alterius lateribus: ergo anguli homologi *m* & *n*, item *x* & *y* æquales sunt (30). Hoc est diagonalis AD ita secat imprimis rectas AB & CD, ut cum iis efficiat angulos alternos *m* & *n* æquales; deinde etiam rectas AC & BD ita secat, ut alterni anguli *x* & *y* æquentur inter se. Eo ipso autem est AB ad CD, & AC ad BD parallelum (58).

3) Sit latus AB parallelum. & ſimul æquale oppoſito lateri CD. In triangulis ABD & ACD eſt AB = CD, & latus AD utrique commune; præterea anguli *m* & *n* iis lateribus intercepti, ob latera AB & CD parallela, æquantur inter ſe (55): hoc eſt in iis triangulis reperiuntur duo latera æqualia cum angulo intercepto. Ergo imprimis tertium quoque latus æquatur tertio, ſeu eſt AC = BD (27): deinde æquantur etiam anguli alterni *x* & *y*, utpote homologi (27), ac proinde eſt AC parallelum ad BD (58).

133. Coroll. I. Igitur diagonalis dividit parallelogrammum in duo triangula ſimilia, ſimulque æqualia ABD & ACB (119).

134. Coroll. II. Hinc quodlibet triangulum eſt dimidia pars parallelogrammmi ſuper eadem baſi, & intra easdem parallelas conſtituti, id eſt, eandem cum ipſo baſim, & altitudinem habentis. Aſſumamus enim quodcunque triangulum ABC (*Fig.* 35.): ex puncto C ducatur recta CD parallela & æqualis rectæ AB. tum puncta A & D per rectam AD connectantur. Recta AD erit pariter æqualis & parallela rectæ BC (132), ac proinde ADCB erit parallelogrammum. Jam BC eſt baſis communis huic parallelogrammo, & triangulo ABC; at etiam altitudo utriusque eadem eſt, ſcilicet perpendiculum A*m* in baſim communem demiſſum: cum ergo triangulum ABC ſit dimidium parallelogrammi ADCB (133); evidens eſt idem triangulum eſſe dimidium parallelogrammi, eandem baſim, & altitudinem habentis, vel quod idem eſt, ſuper eadem baſi, & intra easdem parallelas conſtituti.

135. Coroll. III. In quovis parallelogrammo ABDC (*Fig.* 36.) imprimis anguli oppoſiti B & C ſunt æquales; deinde quilibet duo anguli ſibi proximi, e. g. ang. C & CAB, ſimul ſumpti æquivalent duobus rectis. *Ratio 1mi eſt.* Nam ducta diagonali AD, in triangulis ABD & ACD eſt AB = CD, AC = BD, & AD utrique commune: ergo anguli homologi C & B æquales ſunt (30). Eodem modo oſtendi poteſt, eſſe ang. BAC = BDC, dummodo ex B ad C diagonalis duci concipiatur.

Ratio 2di est. Nam ob latus AB ad CD parallelum, anguli C & CAB sunt *interni ad eandem partem* (54); ergo æquivalent duobus rectis (56). Eodem modo patet, angulos B & BDC simul sumptos duobus rectis æquivalere. &c.

136. COROLL. IV. Si in duobus quadratis *Aerm* & *rsxv* (*Tab. III. Fig.* 37.) quodcunque unius latus *Am* sit æquale cuicunque alterius lateri *rv*; duo illa quadrata sunt æqualia. Ductis enim diagonalibus *me* & *vs*, in triangulis *Aem* & *rsv* est ex hyp. $Am = rv$; hinc ob $Ae = Am$, & ob $rs = rv$ (128), est etiam $Ae = rs$; præterea anguli his lateribus a A & *r* intercepti, æquales sunt, utpote recti (128): ergo duo hæc triangula sunt æqualia (119). Jam vero triangula hæc sunt dimidiæ partes quadratorum *Aerm* & *rsxv* (133): ergo dimidiæ horum quadratorum partes æquantur inter se. Eo ipso autem patet, tota etiam quadrata *Aerm* & *rsxv* inter se æqualia esse debere.

137. COROLL. V. In quovis parallelogrammo ABDC (*Tab. II. Fig.* 36.) decrescente angulo CAB diagonalis AD crescit. Cum enim semper sit ang. $C + CAB = 180°$ (135); decrescente angulo CAB angulus C crescit: atqui angulo C crescente crescit etiam latus oppositum AD (28); ergo. Ex adverso crescente angulo CAB diagonalis AD decrescit. Nam ob ang. $C + CAB = 180°$, crescente angulo CAB angulus C decrescit (135): atqui angulo C decrescente decrescit etiam latus oppositum AD (28); ergo.

138. COROLL. VI. In quovis parallelogrammo ABDC (*Tab. III. Fig.* 37.) si vel unus quiscunque angulus A fuerit rectus; etiam reliqui tres B, D, C recti sint singuli, est necesse. Est enim ang. $A + C = 180°$ (135): ergo ob $A = 90°$, est etiam $C = 90°$. Porro est pariter ang. $C + D = 180°$ (cit.): ergo ob $C = 90°$, est etiam $D = 90°$ &c.

139. THEOREMA XLII. *Parallelogrammi rectanguli cujuscunque* ABCD *latus* AC *dividatur in quotcunque partes æquales utcunque parvas; tum per divisionum puncta* m, n *&c. ducantur rectæ* mo, np *&c. ad* CD *parallelæ: pariter alterum rectanguli latus* CD *dividatur in quotcunque perexiguas partes prioribus æquales,*

les, & per divisionum puncta g, l *&c. ducantur rectæ* ge, if *&c. ad* AC *parallelæ. Quadrilatera* Aerm, efsr *&c. in quæ totum rectangulum* ABDC *resolvetur, erunt* 1) *quadrata singula; erunt* 2) *omnia inter se æqualia.*

Demonstr. 1*mæ partis.* Assumamus e. g. quadrilaterum *rsxv.* Si quadrilaterum istud est imprimis parallelogrammum, deinde rectangulum, denique æqualium laterum; idem *rsxv* quadratum sit, oportet (128): atqui omnibus iis tribus proprietatibus præditum est. Nam 1) ex constr. rectæ *mo*, *np* ad CD, & rectæ *eg*, *fi* ad AC parallelæ sunt: ergo quodlibet quadrilaterum *rsxv* parallelogrammum sit, oportet (127). 2) Quoniam in parallelogrammo *Aerm* angulus A est ex constr. rectus, et am angulus *erm* rectus esse debet (138); ergo etiam ejus verticalis *srv* rectus sit, est necesse: eo ipso autem patet, parallelogrammum *rsxv* esse rectangulum (138). 3) Est $rv = mn$, & $rs = gi$ (132); cum ergo sit ex constr. $mn = gi$, est quoque $rv = rs$: eo ipso autem clarum est, parallelogrammum *rsxv* esse æqualium laterum. Eadem de quolibet alio dictorum quadrilaterorum eodem modo demonstrantur.

Demonstr. 2*dæ partis.* Si singula dicta quadrata sunt æqualia eidem quadrato *Aerm*; etiam inter se æqualia sunt omnia: atqui singula sunt æqualia eidem *Aerm*; nam e. g. quadratum *rsxv* esse $= Aerm$, sic declaro. Ob *mn* ex constr. $= Am$, & ob $rv = mn$ (132), est $rv = Am$; hoc est, latus quadrati *rsxv* est æquale lateri quadrati *Aerm*: eo ipso autem patet esse $rsxv = Aerm$ (136). Eodem modo ostendi potest quodlibet aliud quadratum *vxig* æquale esse eidem quadrato *Aerm.*

140. THEOREMA XLIII. *Quodlibet parallelogrammum rectangulum* ABDC *est æquale facto, quod prodit, si ejus altitudo* AC *ducatur in basim* CD.

Demonstr. Concipiamus enim altitudinem AC in partes æquales indefinite parvas *Am*, *mn* &c. dividi, tum per divisionum puncta duci rectas *mo*, *np* &c. ad CD parallelas; pariter concipiamus basim CD dividi in partes *Cg*, *gi* &c. prioribus æquales, perque divisionum puncta duci rectas *ge*, *if* &c. ad AC parallelas. Totum rectangulum ABDC resolvetur in quadratula *Aerm*, *efsr* &c. inter se æqualia (139), æquabiturque his omnibus quadratulis simul sumptis. Atqui numerus horum quadratulorum est æqualis facto, quod prodit, si altitudo AC ducatur in basim CD; nam series quadratulorum, ab AB versus CD computando totidem sunt, in quot partes divisa est altitudo AC, & in qualibet serie totidem continentur quadratula, quot particulis constat basis CD. Ergo etiam totum rectangulum ABDC est æquale facto, quod prodit, si ejus altitudo AC per basim CD multiplicetur. Recole *Algeb.* n. 198.

141. THEOREMA XLIV. *Quodlibet parallelogrammum non rectangulum* ABDC (*Fig.* 38.) *æquatur ejusmodi rectangulo, cujus altitudo altitudini ipsius, basis autem basi sit æqualis.*

Demonstr. In basim CD productam demittantur perpendicula A*m* & B*o*: perpendicula hæc erunt parallela (60), ac proinde quadrilaterum AB*om* erit parallelogrammum, & quidem rectangulum. Porro rectanguli AB*om* altitudo erit æqualis altitudini parallelogrammi ABDC, basis autem basi: nam imprimis utriusque altitudo est idem perpendiculum A*m* (130); deinde rectanguli basis *mo* est utique = AB = CD (132). Quodsi ergo est ABDC = AB*om*; veritas theorematis in aperto est: esse vero ABDC = AB*om* facile patet. Nam triangula rectangula AC*m* & BD*o*, ob hypothenusas AC & BD inter se æquales, & ob cathetos A*m* & B*o* itidem inter se æquales (132), æqualia sunt (121): ergo utrique addendo idem trapezium ABD*m*, est etiam ABDC = AB*om* (*Algeb.* 113).

142. Coroll. I. Igitur quodlibet parallelogrammum etiam non rectangulum ABDC æquatur facto, quod prodit, si ejus altitudo A*m* ducatur in basim CD. Nam quodvis parallelogrammum non rectangulum ABDC æquatur rectangulo, cujus altitudo sit = A*m*, basis = CD (141): atqui hujusmodi rectangulum est = A*m* × CD (140); ergo etiam ABDC est = A*m* × CD.

143. Coroll. II Quodlibet triangulum ABC (*Tab. II. Fig.* 35.) æquatur dimidio facto altitudinis suæ Am ductæ in basim BC, seu est $= \frac{Am \times BC}{2}$ Nam triangulum ABC est dimidium parallelogrammi ADCB, eandem altitudinem *Am* & basim BC habentis (134): atqui ADCB est $= Am \times BC$ (143); ergo triangulum ABC est $= \frac{Am \times BC}{2}$.

144. Corol. III. Sive dimidiam altitudinem, id est, $\frac{Am}{2}$ ducas in integram basim BC, sive dimidiam basim, id est $\frac{BC}{2}$ in integram altitudinem *Am*; semper idem factum prodit $= \frac{Am \times BC}{2}$ (*Algebr* 56.): ergo trianguli area acquiritur, sive dimidia altitudo in integram basim, sive dimidia basis in integram altitudinem ducatur.

145. Coroll. IV. Quæcunque duo triangula BDE & CED (*Tab. III. Fig.* 39.) super eadem basi DE, & inter easdem parallelas DE & BC constituta æquantur inter se. Nam tam unum, quam alterum est æquale dimidiæ suæ altitudini, ductæ in basim (143): atqui utriusque eadem est ex hypoth. basis; deinde etiam altitudinem ambo habent eandem eo ipso, quod omnia perpendicula inter parallelas DE & BC intercepta sint æqualia (53: ergo. Eodem modo ostenditur, æqualia esse triangula DBC & EBC, super eadem basi BC, & inter easdem parallelas DE & BC constituta.

146. THEOREMA XLV. *Duo quæcunque triangula* T *&* t 1) *generatim sunt in ratione composita suarum altitudinum & basium: id est, si altitudines literis* A *&* a, *bases vero literis* B *&* b *designentur, stat*

generatim T : t = AB : a b. 2) *Si habeant eandem, vel æquales altitudines: sunt in ratione basium, seu est* T : t = B : b. 3) *Si basim habeant eandem, vel æquales; sunt in ratione altitudinum, seu est* T : t = A : a.

DEMONSTR. Est enim $T = \frac{AB}{2}$, & $t = \frac{ab}{2}$ (143): est ergo 1) generatim, $T : t = \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2}$. Consequenter alteram rationem per 2 multiplicando, est $T : t = AB : ab$ (*Algeb.* 172.).

2) Sit jam $A = a$: 2dam proportionis rationem per hæc æqualia dividendo, est $T : t = B : b$ (*Algeb.* 171.).

3) Si autem sit $B = b$; in eadem proportione $T : t = AB : ab$, rationem 2dam per hæc æqualia dividendo, est $T : t = A : a$ (*Algeb.* cit.).

147. COROLL. Igitur si duo triangula T & t fuerint æqualia; in iis bases erunt altitudinibus reciproce proportionales, id est, stabit in iis, $B : b = a : A$. Stat enim generatim, $T : t = AB : ab$ (146): ergo si est $T = t$; est quoque $AB = ab$. Hujus autem æquationis factores in hanc resolvuntur proportionem $B : b = a : A$ (*Algeb.* 169.)

CAPUT SEXTUM.

De Proportionibus Linearum.

148. THEOREMA XLVI. *Si intra triangulum* ABC (*ead. Fig.* 39.) *pro basi assumatur quodcunque latus* BC, *eique parallela recta* DE *ducatur; hæc secabit trianguli latera proportionaliter ita, ut segmenta a trianguli vertice computata proportionalia sint lateribus integris, seu ut stet hæc proportio*, AD : AB = AE : AC.

DEMONSTR. Ductis rectis BE & CD, triangula BDE & CED sunt æqualia, utpote super eadem basi

DE intra easdem parallelas DE & BC constituta (145): ergo utrique addendo idem triangulum ADE, est triangulum AEB = triang. ADC. Jam si imprimis triangulum AEB conferamus cum triangulo AED, assumamusque pro eorum basibus latera AB & AD; utriusque eadem erit altitudo, nempe perpendiculum ex communi vertice E in latus AB demissum: hæc ergo triangula erunt ut ipsorum bases (146); seu erit:

Triang. AED : *triang.* AEB = AD : AB.

Si deinde triangulum ADC conferamus cum eodem triangulo AED, assumamusque pro eorum basibus latera AE & AC; rursus eadem erit utriusque altitudo, scilicet perpendiculum ex communi vertice D in latus AC demissum; ergo hæc quoque triangula sunt in ratione suarum basium, seu est:

Triang. AED : *triang.* ADC = AE : AC.

Jam in superiore proportione, ob triang. AEB = ADC, loco trianguli AEB poni potest triangulum ADC; hoc est, proportio illa in hanc commutari potest, *Triang.* AED : *triang.* ADC = AD : AB. Itaque has duas obtinemus hactenus proportiones:

Triang. AED : *triang.* ADC = AD : AB,
& *Triang.* AED : *triang.* ADC = AE : AC.

Ergo duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, habetur demum: AD : AB = AE : AC.

149. Coroll. I. Igitur *invertendo* est, AB : AD = AC : AE; & hanc propor. *altern.* est AB : AC = AD : AE (*Algeb.* 175.), &c.

150. Coroll. II. Etiam segmenta laterum inter parallelas DE & BC intercepta proportionalia sunt 1) lateribus integris, 2) etiam segmentis a vertice trianguli computatis. Id est, stat 1) DB : AB = EC : AC; stat 2) DB : AD = EC : AE.

Nam 1) est AB : AD : = AC : AE (149);
Hinc *subtrah.* AB — AD : AB = AC — AE : AC.
(*Algeb.* 176.)

Id est, DB : AB = EC : AC.

2) Cum sit AB : AD = AC : AE (149);
est *subtr.* AB — AD : AD = AC — AE : AE.
Id est DB : AD = EC : AE

151. THEOREMA XLVII. *Vicissim, si intra triangulum quodcunque* ABC (*Fig.* 40.) *ducatur recta* DE, *quæ latera proportionaliter secet, ita ut sit* AD : AB = AC : AC; *erit recta illa ad basim* BC *parallela.*

Demonstr. Si enim negas; poterit per punctum D duci alia quæpiam recta MD, ad BC parallela: stabit ergo, AD : AB : = AM : AC (148). At ex hypoth. stat etiam, AD : AB = AE : AC; ergo duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, stabit:

AM : AC = AE : AC;
Alternando AM : AE = AC : AC.

Consequenter ob AC = AC, est etiam AM = AE; quod absurdum est.

152. THEOREMA XLVIII. *Si intra triangulum* ABC (*Fig.* 41.) *ducatur recta* DE, *parallela ad basim* BC: *erit ea ad basim* BC. *uti est lateris segmentum* AD *ad totum latus* AB: *seu erit* DE : BC = BD : AB.

Demonstr. In latere AB capiatur pars B*a* = AD, & per punctum *a* ducatur recta *ae* ad AC parallela; triangula ADE & *a*B*e* (ob *ae* ad AC, & DE ad BC parallelas) sunt similia (55, & 119); & quia præterea est ex constr. B*a* = AD, eadem triangula sunt etiam æqualia (11). Est ergo DE = B*e* (122).

Conferamus jam inter se triangula ABC & *a*B*e*; assumamus autem pro communi eorum vertice punctum B. In his triangulis ob *ae* ad AC parallelum, est:

B*e* : BC = B*a* ; AB (148).

Cum ergo sit B*e* = DB, & B*a* = AD; æqualibus æqualia substituendo, est quoque DE : BC = AD : AB.

153. Coroll. I. Igitur permutando extremos, est AB : BC = AD : DE, & hanc altern. AB: AD = BC: DE (*Algeb.* 175).

154. Coroll. II. Quodsi in quocunque triangulo ABC (*Fig.* 42.) ducantur quotcunque rectæ *mn*, *ro* &c. basi BC parallelæ; omnes erunt inter se inæquales, & quidem ita, ut basis BC sit omnium longissima, dein-

deinde ut e quibuslibet binis ea ſit longior, quæ baſi vicinior. Conferamus eim e. g. parallelas ro & BC: eſt $Ar : AB = ro : BC$ (152): atqui eſt $AB > Ar$; ergo eſt etiam $BC > ro$. Eodem modo patet eſſe $ro > mn$, & ſic porro.

155. THEOREMA XLIX. *Si in triangulo quocunque* ABC (*Fig.* 43.) *recta* BD *angulum* ABC *bifariam diviſerit; eadem recta* BD *baſim* AC *ita ſecabit in* D, *ut ſegmenta baſeos ſint proportionalia lateribus ſibi adjacentibus, ſeu ita, ut ſit* $AD : AB = DC : CB$.

Demonstr. Producatur enim latus AB in F, dum fiat $BF = BC$; tum ducatur recta FC.

1) Erit ang. $o = m$, quod ſic declaro. Eſt ang. $ABC = m + n$ (113); ſeu

$$\text{eſt ang. } r + o = m + n.$$

Jam eſt imprimis ex hyp. ang. $r = o$, adeoque eſt $r + o = 2o$. deinde ob BF ex conſtr. $= BC$, eſt ang. $m = n$ (111); ac proinde eſt $m + n = 2m$.

$$\text{Eſt ergo } 2o = 2m\text{, adeoque eſt } o = m.$$

2) Cum ſit ang. $o = m$; eſt BD ad FC parallela (58); conſequenter recta BD ita ſecat latera trianguli AFC, ut ſegmenta intra parallelas intercepta proportionalia ſint ſegmentis a trianguli vertice computatis, ſeu ut ſtet,

$$BF : AB = DC : AD \ (150).$$

Jam eſt ex conſtr. $BF = CB$; ergo loco BF ponendo CB, ſtat quoque

$$CB : AB = DC : AD.$$

Permut. extr. $AD : AB = DC : CB$ (*Algeb.* 175).

156. THEOREMA L. *In quibusvis duobus triangulis ſimilibus ſeu æquiangulis latera homologa, ſeu æqualibus angulis oppoſita, ſunt proportionalia. e. g. Si triangula* ABC *&* ade (*Fig.* 39.) *ſint ſimilia, ita ut ſit ang.* $A = a$, $B = d$, $C = e$; *ſtant hæ proportiones*, $AB : ad = AC : ae$, $AB : ad = BC : de$ *&c.*

Demonstr. Concipiamus enim triangulum minus *ade* majori ſuperponi, ut puncto *a* in A cadente *ae* cadat ſupra AC, termineturque alicubi in E; ob ang. $a = A$, latus *ad* cadet ſupra AD, ita ut terminetur alicubi in D, tertiumque latus *de* ſitum DE obtineat. Recta *de* ſeu DE, ob ang. *e* ſeu AED ex hyp. $= C$, erit

erit ad BC parallela (58): itaque latera trianguli ABC proportionaliter secabit, seu ita, ut stent hæ proportiones. AB : AD = AC : AE (148.) & AB : AD = BC : DE (153). Hinc æqualibus æqualia (nempe rectis AD, AE & DE rectas *ad*, *ae*, & *de*) substituendo, stant hæ quoque, AB : *ad* = AC : *ae*, & AB : *ad* = BC : *de* &c.

157. THEOREMA LI. *Si duo triangula* ABC *&* ade *circa æquales angulos* A *&* a *habuerint latera proportionalia, ita ut sit* AB : ad = AC : ae; *eadem triangula erunt similia.*

DEMONSTR. Si enim triangulum minus rite superponatur majori, ut anguli æquales A & *a* congruant, adeoque latus *ad* supra AB, & *ae* supra AC cadat, tertio latere *de* situm DE obtinente; erit ex hyp. AB : AD = AC : AE. Itaque DE seu *de* latera trianguli ABC proportionaliter secabit; consequenter erit ad BC parallela (151): est ergo angulus AED seu *e* = C, & ang. ADE seu *d* = B (55). Hoc est, dicta triangula sunt æquiangula, seu similia.

158. THEOREMA LII. *Si duorum triangulorum* ABC *&* ade *omnia latera fuerint proportionalia; erunt eadem similia.*

DEMONSTR. Fiat AD = *ad*, & per punctum D agatur DE, parallela ad BC.

1) Est AE = *ae*, quod sic declaro. Cum ex hyp. sit AB : *ad* = AC : *ae*, & sit ex constr. AD = *ad*; est:

AB : AD = AC : *ae*.

Porro ob DE ex constr. parallelam ad BC, est

AB : AD = AC : AE (149).

Est ergo AC : *ae* = AC : AE; & *permut. extrem.* AE : *ae* = AC : AC. Atqui est AC = AC; ergo est etiam AE = *ae*.

2) Simili argumentandi genere patet esse DE = *de*. Nam imprimis est ex hyp. AB : BC = *ad* : *de*, adeoque ob AD = *ad*, est AB : BC = AD : *de*. Deinde ob DE ad BC parallelam, est AB : BC = AD : DE (153). Est ergo AD : *de* = AD : DE; & *permut. extrem:* DE : *de* = AD : AD. Atqui est AD = AD; ergo est etiam DE = *de*.

Ex

Ex his jam patet, in triangulis ADE & *ade* tria unius latera esse æqualia tribus alterius lateribus; adeoque hæc duo triangula esse similia & æqualia (119). Cum ergo triangula ADE & ABC, ob ang. A utrique communem, & ob DE ad BC parallelam sint similia; etiam triangulum *ade* triangulo ABC simile sit, oportet.

150. THEOREMA LIII. *Si ex vertice anguli recti* A (*Fig.* 44.) *in hypothenusam* BC *demittatur perpendicularis* AD; *dividet hæc triangulum* ABC *in duo triangula, toti & sibi similia. Id est, erit imprimis tam triangulum* ABD, *quam* ACD *simile triangulo majori* ABC, *deinde duo hæc minora triangula inter se quoque similia erunt.*

Demonstr. Nam 1) si triangulum ADC cum majore ABC conferamus; est in iis angulus C utrique communis; est deinde ang. ADC = BAC, quia uterque est ex constr. rectus: ergo triangulum ADC est simile triangulo ABC (118).

2) Pariter in triangulis ADB & ABC angulus B est utrique communis, & ang. ADB = BAC, quia uterque est ex constr. rectus: ergo etiam triangulum ABD simile est eidem majori triangulo ABC (118).

3) Ex similitudine triangulorum ADC & ABC intelligere licet, angulum *o* esse = B (107). Hinc si triangula ADC & ADB inter se conferamus; jam adest in iis ang. *o* = B: cum ergo præterea anguli ad D sint ex constr. recti; triangula hæc inter se quoque similia sint, oportet (118).

Schol. Theorema hoc frequentissimi usus est tam in mathematicis, quam physicis disciplinis: scilicet ex similitudine triangulorum proportio laterum homologorum inferri solet, & ex hac complures veritates in lucem protrahi. At quænam latera, & quo ordine collocari debeant, ut proportio sit legitima, Tirones adhærescere solere expertus sum: quare hæc generalia monita jam nunc probe notanda sunt. 1) Quotiescunque recta AD ad hypothenusam perpendicularis dividit triangulum majus in duo minora, sibi & toti similia; angulus B hypothenusæ adjacens æquatur angulo *o*, ex opposita perpendiculi AD parte ad trianguli verti-

verticem ſito; & angulus C æquatur angulo *m*, itidem ex oppoſita perpendiculi parte ad trianguli verticem ſito: angulos ad D, utpote rectos, tam inter ſe quam etiam angulo recto BAC æquales eſſe, alioquin clarum eſt. Quo notato facile jam eſt diſcernere, quænam latera ſint inter ſe homologa. e. g. Si triangula ABC & ABD ſint inter ſe conferenda; eſt in iis angulus BAC = ADB: cum ergo angulo BAC in majori triangulo opponatur latus BC, angulo autem ADB in minori latus AB; hæc ipſa latera, ſeu hypothenuſæ, ſunt inter ſe homologa. Deinde in iisdem eſt ang. C = *m*: cum ergo angulo C in majori triangulo opponatur latus AB, & angulo *m* in minori latus BD; hæc quoque latera inter ſe homologa ſunt. &c.

2) Si homologa latera per n. 150. in proportionem ordinanda ſint; pro primo proportionis termino poteſt primi trianguli latus, quod libuerit, aſſumi: at pro ſecundo aſſumatur latus ſecundi trianguli primo proportionis termino homologum: pro tertio termino aſſumi poterit alterum, quod libuerit, primi trianguli latus; at quartus terminus ſit latus ſecundi trianguli, tertio porportionis termino homologum. e g. Si latera triangulorum ſimilium ABC & ABD in proportionem ordinanda ſint; aſſumatur pro primo proportionis termino ex majori triangulo e. g. hypothenuſa BC; quo facto jam ex minori triangulo non poteſt aliud latus accipi pro ſecundo termino, quam hypothenuſa AB: aſſumi poterit deinde pro tertio termino ex majori triangulo e. g. latus AB; quo aſſumpto jam pro quarto termino ex minori triangulo non poterit aliud latus accipi, quam BD, lateri AB homologum. Quibus acceptis hæc obtinetur proportio, BC : AB = AB : BD.

Ceterum poſſunt pro primis duobus proportionis terminis aſſumi quæcunque duo latera unius trianguli, dummodo pro reliquis duobus terminis ex altero triangulo ſimili, ea lege accipiantur duo latera, ut tertius terminus primo; quartus autem ſecundo ſit homologus. e. g. Si ex triangulo ABC pro primo termino aſſumis hypothenuſam BC, pro ſecundo autem latus AB; ex altero triangulo ABD pro tertio termino aſſume

assume hypothenusam AC, pro quarto latus BD, termino secundo AB homologum.

3) Hæc proportionem efformandi methodus etiam in aliis quibusque similibus triangulis caute observanda est: nempe dispiciendum imprimis, quinam anguli sint æquales, ut innotescat, quænam latera sint inter se homologa; deinde eo, quem descripsimus, ordine collocanda sunt latera pro terminis proportionis: secus enim facile proportionem vitiosam, ac proinde nullam, pro vera efformabis, ac proinde erroribus inde profluentibus temet implicabis.

160. Coroll. I. Perpendicularis AD (*Fig.* 45.) e quocunque peripheriæ circuli puncto A ad diametrum demissa, est media proportionalis inter diametri segmenta BD & DC: id est, stat hæc proportio, BD : AD = AD : DC. Ductis enim rectis AB & AC, angulus BAC est rectus (85): ergo perpendicularis AD triangulum ABC dividit in duo triangula ABD & ADC inter se similia (159). Hinc in triangulis his latera homologa in proportionem resolvi possunt (156): scilicet sicuti se habet trianguli BAD latus BD ad alterius trianguli latus AD, ipsi ob ang. C = *m* homologum, ita se habet ejusdem trianguli BAD latus AD ad alterius latus DC, ipsi ob ang. = B homologum. Seu est BD : AD = AD : DC. Confer. *Schol.* præc.

161. Coroll. II. Cum in circulo semper sit BD : AD = AD : DC; med. & extr. multipl. est $AD^2 = BD \times DC$. Hoc est, in circulo quadratum perpendicularis AD (quæ *ordinata*, vel *semiordinata* nominari solet) est æquale facto segmentorum diametri sibi respondentium BD & DC, seu ut dici solet, *abscissarum* correspondentium.

162. Coroll. III. in circulo ordinatæ e centro recedendo, decrescunt continenter. Nam diameter BC vocetur $2a$: ejus pars Dr, inter ordinatam AD & circuli centrum r intercepta, dicatur x: erit BD = $a - x$ & DC = $a + x$. Hinc si præterea ordinata AD ponatur = y; ob $AD^2 = BD \times DC$ (161), est $y^2 = a^2 - x^2$. Jam cum x designet ordinatæ a centro distantiam; quo magis ordinata recesserit a centro r, eo

x^2 erit

x^2 erit majoris valoris; ac proinde eo minoris valoris erit $a^2 - x^2 = y^2$. Eo ipso autem veritas asserti patet.

Schol, Ex his facile deduci posset, in circulo ordinatas a centro æquidistantes, esse æquales: at istud facilius adhuc ostenditur hoc modo. Sint in *Fig.* 46. circuli ordinatæ AD & FG a centro C æquidistantes, adeoque sit DC = CG. Ductis radiis AC & FC, in triangulis ADC & FGC, hypothenusæ AC FC erunt æquales, item catheti DC & CG: ergo est quoque AD = FG (120).

163. Coroll. IV. In circulo (*Fig.* 45) quævis chorda AB est media proportionalis inter diametrum integram BC, & hujus segmentum BD, quod eidem chordæ adjacet, & a perpendiculo AD intercipitur: seu est BC : AB = AB : BD. Nam ob ang. BAC rectum (85), & ob rectam AD ex hyp. perpendicularem ad BC, similia sunt triangula ABC & ABD (159): ergo latera homologa sunt proportionalia (156). Hinc sicuti se habet majoris trianguli hypothenusa BC ad minoris trianguli hypothenusam AB; ita se habet majoris trianguli latus AB ad minoris trianguli latus BD, ipsi ob ang. C = *m*, homologum.

164. THEOREMA LIV *Sint* ABCDE & abcde (*Fig.* 47.) *polygona similia* (117). *Si ex quibuscunque ipsorum æqualibus & similiter positis angulis* B & b *ducantur diagonales* BE, BD r & be bd; *resolventur polygona in totidem triangula similia. Scilicet similia erunt imprimis triangula* ABE & abe, *deinde triangula* BED & bed, *denique triangula* BCD & bcd.

Demonstr. 1) Quod ad triangula ABE & *abe* attinet: est ex hyp. ang. A = *a*, & AB : *ab* = AE ; *ae*; ergo hæc duo triangula jam sunt similia (157).

2) Quod attinet ad triangula BED & *bed*. Imprimis ob triangula ABE & *abe* ex modo demonstratis similia, est:

EA : *ea* = EB ; *eb* (156);

Item ob polyg. ex hyp. similia est

EA : *ea* = ED : *ed* (117)

Est ergo - EB ; *eb* = ED ; *ed*.

Præ

Præterea ang. M eſt $= m$. Nam ob triangula ABE & *abe* ſimilia, eſt ang. O $= o$ (117): cum ergo ſit ex hyp. ang. AED $=$ *aed*, ſeu O $+$ M $= o + m$; ab æqualibus ſubtrahendo angulos æquales O & *o*, remanet ang. M $= m$. Hinc triangula BED & *bed* habent circa æquales angulos latera proportionalia: ſunt ergo ſimilia (157).

3) Denique in triangulis BCD & *bcd*, eſt ex hyp. imprimis ang. C $= c$, deinde BC : *bb* $=$ DC : *dc*. Ergo hæc quoque triangula ſunt ſimilia (157). Eadem eſt demonſtratio pro quotcunque triangulis, in quæ duo quotcunque laterum polygona ſimilia reſolverentur.

165. Coroll. Viciſſim, polygona conſtantia triangulis ſimilibus eodem numero, eodemque ordine diſpoſitis ſimilia ſunt. Si enim in polygonis ABCDEA & *abcdea* ſimilia ſint triangula ſimiliter poſita ABE & *abe*, BDE *bde*, BCD & *bcd*, eſt imprimis ang. A $= a$, O $= o$, M $= m$ &c.; eſt deinde AB : *ab* $=$ AE : *ae*, item BC : *bc* $=$ DC : *dc* (117). Denique reliqua etiam quæcunque homologa latera eſſe proportionalia, facile patet: nam e. g. eſſe AE : *ae* $=$ ED : *ed*, ſic declaro.

Ob triangula ABE & *abe* ex hyp. ſimilia, eſt AE : *ae* $=$ EB : *eb*, & ob triangula EBD & *ebd* ſimilia, eſt ED : *ed* $=$ EB : *eb* (cit.); ergo duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, eſt quoque AE : *ae* $=$ ED : *ed*.

Ex his autem manifeſtum fit, poligona ABCDEA & *abcdea* eſſe omnino ſimilia (117).

166. THEOREMA LV. *Peripheriæ, ſeu perimetri duorum polygonorum ſimilium* ABCDEA *&* abcdea *ſunt ut duo quævis homologa latera, e. g. ut* AB : ab, *vel ut* BC : bc &c.

Demonstr. Nam in iis eſt AB : *ab* $=$ BC : *bc*; BC : *bc* $=$ CD : *cd*; CD : *cd* $=$ DE : *de* &c. (117); hoc eſt, æquales ſunt hæ rationes:

AB : *ab*
BC : *bc*
CD : *cd*
DE : *de*
EA : *ea*.

Ergo ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium, uti eſt quivis antecedens ad ſuum conſequentem, ſeu uti eſt AB :*ab*, vel BC : *bc* &c. (*Algeb.* 182.) Atqui ſumma antecedentium eſt ipſa integra perimeter polygoni ABCDEA, & ſumma omnium conſequentium eſt integra perimeter polygoni *abcdea;* ergo perimeter prioris polygoni ad perimetrum polygoni poſterioris eſt, ut AB : *ab*, vel ut BC : *bc* &c.

167. PROBLEMA XII. *Datis quibuscunque tribus rectis invenire quartam proportionalem.*

Resolut. Sit e datis rectis prima AB, altera AC (*Fig.* 48.): jungantur eæ ad quemcunque angulum BAC; tum in recta AB capiatur pars AD, quæ ſit æqualis tertiæ datarum rectarum: denique puncta extrema B & C jungantur per rectam BC, & per punctum D ducatur recta D*x* ad BC parallela. Erit A*x* quæſita quarta proportionalis. Nam ob D*x* ad BC parallelam, eſt AB : AC = AD : A*x* (148).

Schol. Quodſi e datis rectis tertia AD fuerit major, quam AB; Figura 49na erit loco 48væ ob oculos ponenda. Nempe in recta AB producta capiatur AD, quæ ſit æqualis tertiæ datarum rectarum, conjunctis per rectam BC punctis B & C, ducatur D*x* ad BC parallela: denique producto latere AC compleatur triangulum. Rurſus erit AB : AC = AD : A*x* (cit.).

168. PROBLEMA XIII. *Datis quibuscunque duabus rectis tertiam proportionalem invenire.*

Resolut. Sit e datis rectis prima AB (*Fig.* 48), in qua capiatur pars AD, quæ ſit æqualis alteri e datis rectis: porro rectæ AB jungatur ſub quocunque angulo ABC recta BC = AD: denique ducta recta AC compleatur triangulum, & per punctum D ducatur recta D*x* ad BC parallela. Erit D*x* quæſita tertia proportionalis. Nam ob D*x* ad BC parallelam, ſtat, AB : AD = BC : D*x* (152), ſeu ob BC ex conſtr. = AD, ſtat AB : AD = AD : D*x*; quod tantundem eſt, ac rectam D*x* eſſe ad datas AB & AD tertiam proportionalem.

Schol. Quodſi e datis rectis AB & AD fuerit AD > AB; Figura 49na erit loco 48væ ob oculos ponenda:

da: in qua producatur AB, dum in ea capi possit AD æqualis alteri datarum; tum sub quocunque angulo ABC ducatur BC = AD, & per punctum C ducatur indefinita Ax: denique per punctum D agatur Dx ad BC parallela. Rursus erit Dx quæsita tertia proportionalis: stabit enim, AB : AD = BC : Dx (152); seu ob BC ex constr. = AD, stabit, AB : AD = AD : Dx.

169. Coroll. Utcunque magnam esse concipias rectam AB (*Fig.* 48.), & simulque utcunque parvam rectam AD = BC; puncta D & x nunquam congruent, sed semper aliquam lineolam Dx intercipient: si enim aliquando punctum D & x congruerent; rectæ AB & AC haberent duo puncta A & x communia, ac proinde totæ congruerent (7): consequenter contra hypothesim inter eas nulla linea BC intercederet. Porro recta Dx semper erit tertia proportionalis post ipsas, seu semper erit AB : AD = AD : Dx (168); ac proinde semper toties continebitur Dx in AD, quoties AD in AB. Ergo quemadmodum nullus potest cogitari terminus, ultra quem recta AB crescere non possit, ita nullus cogitari potest terminus, ultra quem recta Dx decrescere non possit.

170. PROBLEMA XIV. *Datam rectam* AB (*Fig.* 50.) *in quotcunque partes æquales dividere.*

Resolut. Sit recta AB e. g. in tres æquales partes dividenda. Ex puncto A erige rectam indefinitam AC sub quocunque angulo CAB; e. g. sub recto, apertoque ad arbitrium circino cape in ea tres æquales partes An, nm, mD: porro ultimum divisionis punctum D conjunge cum puncto B per rectam DB, & per penultimum divisionis punctum m duc rectam mx ad AB parallelam. Recta mx erit tertia pars rectæ AB. Nam ob mx ad AB parallelam, est Dm : DA = mx : AB (152): atqui est ex constr. Dm : DA = 1 : 3; ergo est etiam mx : AB = 1 : 3. Quod tantundem utique est, ac rectam mx esse $\frac{1}{3}$ partem rectæ AB.

Quodsi rectam AB in quatuor æquales partes dividere cupis: in recta AC, prout opus fuerit producta, cape quatuor æquales partes, ceteraque fac, ut ante: eadem argumentandi ratione patebit, rectam mx eo casu fore $\frac{1}{4}$ partem rectæ AB. Simili modo in quinque, sex, septem &c. æquales partes quamcunque datam rectam dividere licebit.

171. COROLL. I. Igitur rectam definitam AB, utcunque parvam, semper in totidem partes æquales dividere poteris, quot æquales partes ceperis in recta indefinita AC: nam si in recta AC ceperis e. g. mille partes æquales, ita ut D*m* sit rectæ AD pars millesima; etiam recta *mx* erit pars millesima rectæ AB. Cum ergo in recta AC indefinita, ac proinde, prout volueris, producenda, omni cogitabili major æqualium partium numerus capi possit; etiam recta AB, utcunque parva, in numerum partium æqualium omni cogitabili majorem dividua est.

172. COROLL. II. Cum quævis linea AB, utcunque parva, in quotcunque volueris partes æquales dividua sit (171); nulla potest dari lineola definita, qua alia minor possibilis non sit. Confer. n. 169.

173. PROBLEMA XV. *Inter datas duas quascunque rectas mediam proportionalem invenire.*

RESOLUT. Recta inter datas duas longior e. g. BC (*Fig.* 45.), dividatur bifariam in *r*, & centro *r* radio B*r* describatur circulus: deinde capiatur in recta BC pars BD, quæ sit æqualis alteri datarum rectarum, & ex puncto D erecta perpendiculari AD, ducatur chorda AB. Erit chorda hæc media proportionalis inter datas rectas BC & BD: stabit enim, BC : AB = AB : BD (163).

CAPUT SEPTIMUM.

De Polygonis Regularibus.

174. Polygona dividi solent in regularia, & irregularia. *Regularia* sunt, quæ & latera omnia inter se æqualia, & angulos omnes inter se æquales habent: cetera polygona vocantur *irregularia.*

175. THEOREMA LVI. *Cuivis polygono regulari* ABDEFGA (*Fig.* 51.) *circumscribi potest circulus, transiens per omnium angulorum vertices.*

De-

Demonstr. Si anguli ſibi proximi A & B biſecentur; rectæ AC & BC biſecantes concurrent alicubi in C. Nam imprimis ob ang. $A = B$ (174), etiam eorum dimidia erunt æqualia, ſeu erit angulus $x = m$: deinde, quoniam tam angulus A, quam B eſt minor duobus rectis: tam x quam m erit minor recto, ſeu tam x, quam m erit angulus acutus: eo ipſo autem clarum eſt, rectas AC & BC eſſe ad ſe invicem inclinatas, ita ut in aliquo puncto C concurrere debeant. Jam ſi centro C, radio AC deſcribatur circulus; ajo circulum hunc per omnium angulorum vertices tranſiturum, & ſic demonſtro.

1) Triangulum ACB ob ang. $x = m$ eſt iſoſceles, ſeu eſt $AC = BC$ (112): ergo circulus centro C, radio AC deſcriptus jam per vertices A & B tranſire debet,

2) Si ex vertice D ad centrum C ducatur recta DC; in triangulis ACB & BCD eſt latus $AB = DB$ (174), & latus BC utrique triangulo commune: porro ob angulum ABD biſectum, eſt ang. $m = n$; eſt ergo $AC = DC$ (27). Itaque circulus centro C radio AC deſcriptus tranſit etiam per verticem D.

3) Si ducatur recta EC; in triangulis BCD & DCE eſt ang. $o = r$. Eſt enim imprimis ang. $m + n = o + r$ (174), adeoque ob n ex conſtr. $= m$, eſt $2n = o + r$: cum ergo ob $BC = DC$, ſit ang. $o = n$ (112); eſt etiam ang. $r = n = o$. Hinc cum in iisdem triang. BCD & DCE ſit præterea $BD = DE$, & latus DC utrique commune; eſt etiam $BC = EC$ (27). Conſequenter dictus circulus etiam per verticem E tranſit. Eadem ratiocinandi methodo oſtenditur, circulum centro C, radio AC deſcriptum, per reliquos quoque vertices F, G tranſire debere. Ergo polygono regulari ABDEFGA (idem eſt de quocunque alio regulari polygono) circulum per omnium angulorum vertices transeuntem circumſcribi poſſe in comperto eſt.

176. Coroll. I. Igitur polygonum regulare per rectas e centro circuli ipſi circumſcripti ad vertices angulorum ductas reſolvitur in totidem triangula ſimilia & æqualia, quot ſunt latera polygoni. Nam e. g. in triangulis ABC & BDC eſt $AB = BD$, & latus BC utrique commune: cum ergo præterea anguli his late-

ribus intercepti m & n æquentur inter ſe; tota triangula ſunt ſimilia, & ſimul æqualia (119). Eodem modo patet, ſimilia, & ſimul æqualia eſſe triangula ABC & DEC &c.

177. Coroll. II. Unumquodque latus polygoni regularis circulum ſibi circumſcriptum habentis ſubtendit arcum tot gradus continentem, quot gradus indicat quotus, qui prodit, ſi 360° per numerum laterum dividantur. e. g. Arcus, quem unumquodque latus pentagoni regularis ſubtendit, eſt $= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Nam omnia ſimul latera ſubtendunt 360 gradus; cum ergo ſingula æqualem graduum numerum ſubtendant; ut innoteſcat, quotnam gradus obveniant cuilibet lateri, 360° per numerum laterum dividantur, oportet.

178. Coroll. III. Latus hexagoni regularis ABDEFGA æquatur radio circuli circumſcripti, ſeu eſt e. g. AB = AC. Eſt enim ang. $x + m +$ ACB $= 180^\circ$ (105); ſeu ob $x = m$, eſt $2m +$ ACB $= 180^\circ$: hinc ob arcum AB $= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (177),

$$\text{eſt } 2m + 60^\circ = 180^\circ\text{, adeoque } 2m = 120^\circ$$
$$\text{Hinc ang. } m \text{ eſt} = 60^\circ = \text{ACB}$$

Hoc eſt, in triangulo ACB anguli m & ACB ſunt æquales: eo ipſo autem etiam latera ipſis oppoſita AC & AB æqualia ſint, oportet (112).

179. THEOREMA LVII. *Cuivis polygono regulari* ABDEFGA (*Fig.* 52.) *poteſt inſcribi circulus, qui omnia ejus latera tangat.*

Demonstr. Nam intra polygonum regulare datur quodpiam punctum C, ex quo tanquam centro radio AC deſcriptus circulus tranſeat per vertices omnium angulorum polygoni (175). Porro polygoni latera AB, BD &c. ſunt chordæ reſpectu hujusmodi circuli circumſcripti, & quidem ſunt chordæ æquales (174): ergo perpendiculares Co ex centro C in ea latera demiſſæ imprimis eandem biſariam ſecant (67); deinde ſunt omnes inter ſe æquales (70). Hinc ſi centro C radio Co deſcribatur circulus; is ſingulis lateribus occurret

in

in punctis *o*: cetera autem laterum puncta, e. g. punctum A, extra eum circulum cadent: nam recta AC est longior perpendiculo C*o* (43), adeoque radio circuli inscripti. Eo ipso autem veritas theorematis manifesta est.

180. THEOREMA LVIII, *Perimetri duorum polygonorum regularium totidem latera habentium sunt ut radii circulorum iisdem circumscriptorum.*

Demonstr. Assumamus e. g. duo pentagona regularia ABMNO & *abmno* (*Fig.* 53.) concipiamusque iis circumscribi circulos (175). Si ex horum centris C & *c* in latera AB & *ab* demittantur perpendiculares CD & *cd*; in triangulis CDB & *cdb* est ang. DCB = *dcb*. Cum enim numerus laterum in utroque polygono sit ex hyp. idem; arcus AB & *ab* totidem numero gradus continebunt (177): consequenter erit ang, ACB = *acb* (22). Porro perpendicula CD & *cd* angulos hos bifariam dividunt (68): ergo etiam anguli DCB & *dcb*, utpote dimidia angulorum ACB & *acb*, inter se æquentur, oportet.

Jam in triangulis CDB & *cdb* præterea anguli ad D & *d* sunt ex constr. recti: ea ergo triangula sunt similia (118), ac proinde stat in iis:

DB : *db* = CB : *cb* (156); adeoque etiam

2DB : 2*db* = BC : *cb* (*Algeb.* 172);

Id est, AB : *ab* = CB : *cb* (67).

Cum ergo sit AB = BM = MN &c. & *ab* = *bm* = *mn* &c. (174); est quoque,

BM : *bm* = CB : *cb*

MN : *mn* = CB : *cb* &c.

Hinc est etiam AB + BM + MN + NO + OA : *ab* + *bm* + *mn* + *no* + *oa* = CB : *cb* (*Algebr.* 182). Hoc est, perimetri duorum pentagonorum regularium sunt, ut radii circulorum ipsis circumscriptorum. Idem de quibuslibet aliis totidem laterum polygonis regularibus eodem modo demonstrari potest.

181. Coroll. I. Ergo peripheriæ duorum quorumcunque circulorum sunt ut eorundem radii: id est, si peripheriæ circulorum dicantur P & *p*, eorundem radii R & *r*; semper est P : *p* = R : *r*. Concipiamus enim circulis ADBECFA, & *adbecfa* (*Fig.* 54.) inscribi imprimis

primis trigona regularia ABC & *abc*: deinde vero arcubus ADB, BEB. CFA bifariam sectis in punctis D, E, F, loco lateris AB duo latera AD & DB, loco lateris BC latera BE & EC &c substituamus, idem fiat in altero circulo; ita ut jam loco trigonorum hexagona sint circulis illis inscripta: perimetri magis jam accedent ad peripherias cir ulorum circumscriptorum, quam accesserint perimetri trigonorum. Quodsi continuetur ejusmodi duplicatio laterum, rursus quemlibet arcum AD bifariam secando, ejusque chordæ alias duas chordas substituendo; quo major fuerit in polygonis numerus laterum, tantundem imminuta ipsorum magnitudine, eo magis semper ac magis accedent eorundem polygonorum perimetri ad circulos: adeoque si numerus laterum concipiatur augeri in infinitum, eorundem magnitudine ex adverso imminuta in infinitum; polygona illa in circulos abibunt.

Jam vero dum dicto modo numerus laterum multiplicatur in polygonis; perimetri polygonorum totidem laterum constanter sic sunt inter se, uti sunt radii circulorum ipsis circumscriptorum. Dum enim e. g. loco trigoni ABC hexagonum ADBECFA dicto superius modo substituis; imprimis ob arcus AD, DB, BE, &c. inter se æquales, etiam latera omnia AD, DB &c. æquantur inter se (64): deinde æquales sunt etiam omnes anguli ADB, DBE. BEC &c. nam e. g. anguli ADB mensura est $\frac{1}{2}$ AFCEB, & anguli DBE mensura est $\frac{1}{2}$ DAFCE (83); hæ autem mensuræ, ob arcus omnes AF, FC &c. æquales utique æquantur inter se. Hinc dum dicto modo numerus laterum multiplicatur in polygonis; polygona illa constanter manent regularia totidem laterum: adeoque in eis perimetri semper sunt, ut radii circulorum ipsis circumscriptorum (180). Igitur etiam tunc, quum jam polygona illa in circulos abeunt, perimetri ipsorum in eadem radiorum ratione manent: quod tantundem utique est, ac peripherias duorum quorumvis circulorum esse inter e, uti sunt ipsorum radii.

182. Coroll. II. Ob $P : p = R : r$, est etiam $P : p = 2R : 2r$ (*Algeb.* 172): cum ergo radius bis sum-

ſumptus exæquet diametrum; duo circuli ſunt quoque inter ſe. ut ſunt ipſorum diametri. Hoc eſt, ſi diametri vocentur D & *d*; ſtat quoque P : *p* = D : *d*. Hinc ſi de rationis æqualitate ſermo ſit; ſemper eſt P = R = D *Algeb.* 185

183. Coroll. III. Duo arcus *ſimiles* AD *ad* (*Tab. I. Fig.* 2.), ſeu tales, qui totidem gradus continent, ac proinde qui eundem, aut æquales angulos metiuntur, ſunt eorundem radii. Id eſt, ſi radius arcus AD vocetur R, alterius autem *r*; eſt AD : *ad* = R : *r* Cum enim ii arcus ſint totidem graduum; tanta peripheriæ circuli ſui pars eſt arcus AD, quanta peripheriæ circuli ſui pars eſt arcus *ad*; conſequenter, ſi peripheria AOBNA ponatur = P, & peripheria *aobna* = *p*; eſt AD : *ad* = P : *p*. Atqui eſt P : *p* = R : *r* (181); ergo eſt quoque AD : *ad* = R : *r*.

Schol. 1. Ex iis, quæ n. 181. dicta ſunt, intelligere licet, circulum quemvis conſiderari poſſe inſtar polygoni laterum numero infinitorum, infinite parvorum; at etiam alterius cujuslibet curvæ continuæ arcum conſiderari poſſe, tanquam compoſitum ex lateribus rectilineis numero infinitis, ſimulque infinite parvis, eodem pene modo patet. Nam imprimis quodlibet ſane polygonum eo magis accedit ad lineam curvam continuam, quo magis augetur in eo numerus laterum, imminuta tantundem ipſorum magnitudine; quodſi ergo in quocunque polygono numerus laterum concipiatur augeri in infinitum, ſimulque magnitudo eorum minui in infinitum; polygonum illud in lineam curvam continuam abire intelligitur. Eo ipſo autem patet, cujuslibet curvæ continuæ arcum conſiderari poſſe, tanquam compoſitum ex lateribus rectilineis numero infinitis, ſimulque infinite parvis.

Schol. 2. Notandum autem eſt, mutuam quorumvis duorum ſibi proximorum id genus infiniteſimorum laterum, e quibus lineam curvam continuam componi concipimus, a ſe invicem declinationem eſſe infinite parvam. Aſſumamus enim quæcunque duo latera rectilinea AB & BC (*Tab. II. Fig.* 55.) ſub aliquo angulo ABC concurrentia: ſi latus AB producatur in F, angulus FBC exprimet mutuam horum laterum a ſe ipſis declinationem. Jam ſi lateri AB ſubſtituamus alia duo latera rectilinea AD & DB, lateri BC autem latera BE & EC; producto latere DB in G, mutuam laterum ſibi proximorum DB & BE a ſe invicem declinationem exprimet angulus GBE: quem minorem jam eſſe angulo FBC manifeſtum eſt. Quodſi loco ſingulorum laterum AD, DB, BE, EC alia duo minora latera ſubſtituantur; rurſus decreſcent anguli, qui duorum laterum ſibi proximorum mutuam a ſe invicem declinationem exprimeut, quemadmodum vidimus decreſcere tunc, quum lateri AB latera AD & DB, & lateri BC latera BE & EC ſubſtituuntur. Ergo ſi numerus laterum concipiatur augeri in infinitum, tantundem imminuta ipſorum magnitudine, ut jam ex iis obtineatur linea curva continua; angulus dictam declinationem exprimens, infinite parvus evadat, eſt neceſſe.

Schol. 3. Cum quælibet linea curva conſiderari poſſit tamquam compoſita ex lateribus rectilineis numero infinitis, infinite parvis, quorum quælibet bina proxima declinent a ſe invicem ſub angulo duntaxat infinite parvo (*Schol.* 1. & 2.); facile patet, quemlibet arcum infiniteſimum, cujusmodi arcus numero infiniti efficiunt arcum definitæ magnitudinis, omnino pro lineola recta infinite parva habendum eſſe.

184. PROBLEMA XVI. *Dato polygono regulari* ABDEFGA (*Tab. III. Fig.* 51.) *circumſcribere circulum.*

Resolut. Biſecentur anguli ſibi proximi A & B per rectas AC & BC: concurrent hæ in quopiam puncto D; ex quo tanquam centro, radio AC deſcriptus circulus per omnes polygoni vertices tranſibit (175).

185. PROBLEMA XVII. *Dato polygono regulari* ABDEFGA (*Fig.* 52.) *circulum inſcribere.*

Resolut. Biſecentur anguli ſibi proximi A & B per rectas AC & BC, ut inveniatur circuli polygono circumſcribendi Centrum C (184): tum ex C demittatur in quodcunque polygoni latus perpendicularis Co: circulus centro C radio Co deſcriptus ſingula polygoni latera tanget in punctis *o* (179).

186. PROBLEMA XVIII. *Dato circulo polygonum regulare* ABDEFGA (*Fig.* 51.) *inſcribere.*

Reso-

Resolut. Dividantur 360° per numerum laterum polygoni inſcribendi; tum capiantur in peripheria circuli tot gradus quot indicat quotus ex ea diviſione oriundus: chorda eosdem ſubtendens erit latus polygoni inſcribendi (177); quod proinde transferatur in peripheriam circuli ope circini, quoties fieri poteſt.

187. Coroll. Si hexagonum regulare inſcribendum ſit circulo; ſatis erit pro latere polygoni capere ope circini ipſum circuli radium (178).

188. PROBLEMA XIX. *Dato circulo* aboa (*Fig.* 52.) *polygonum regulare circumſcribere.*

Resolut Dividantur 360° per numerum laterum polygoni circumſcribendi, capiaturque in dato circulo arcus *ab* tot graduum, quot indicat quotus, & biſecetur in puncto *o*; porro per punctum *o* ducatur tangens AB, radiis CA & CB productis occurrens in punctis A & B (100): erit AB latus polygoni circumſcribendi. Denique centro C radii AC deſcribatur circulus: & in eo latus AB ope circini applicetur, quoties poteſt. Hoc pacto habebitur polygonum regulare, dato circulo *aboa* circumſcriptum.

Demonstr. Nam ſi arcum *ab* ponamus eſſe e. g. 60 graduum; totidem graduum erit etiam arcus AB in circulo exteriore (21): conſequenter polygonum ABDEFGA erit hexagonum regulare, circulo exteriori inſcriptum (186). Porro ejus polygoni latera erunt chordæ æquales reſpectu circuli exterioris, adeoque a communi utriusque circuli centro C æquidiſtantes (70): cum ergo unum latus AB ex conſtr, tangat circulum interiorem; reliqua etiam latera ſingula eundem tangant, oportet. Certe ſi aliquod latus GF aut nuſpiam tangeret circulum interiorem, aut eundem ſecaret: illud latus aut magis diſtaret a centro C, aut minus, quam latus AB, ut conſideranti manifeſtum eſt.

SECTIO

SECTIO SECUNDA.

DE TRIGONOMETRIA PLANA ET MENSURATIONIBUS LINEARUM GEOMETRICIS, AC TRIGONOMETRICIS.

CAPUT PRIMUM.

De primis Trigonometriæ planæ Fundamentis.

189. In quovis triangulo adſunt tria latera, & tres anguli; ex quibus ſex partibus ſi dentur tres, fere ſemper reliquæ tres inveniri poſſunt. Eæ cum inveniuntur, triangulum *reſolvi* dicitur, & ea Geometriæ pars, quæ hanc *reſolutionem* docet, *Trigonometria* nuncupatur. Duplex autem eſt Trigonometria; *plana* rectilineorum triangulorum reſolutionem docet: *ſphærica* autem agit de iis angulis, quæ in cujuspiam ſphæræ ſuperficie a circulorum maximorum arcubus efficiuntur. Nos hoc loco de plana duntaxat Trigonometria acturi ſumus.

190. Quamvis oſtenderimus n. 110, in quovis triangulo, majori angulo majus latus opponi, minori minus, & viciſſim; non eſt tamen verum, latera trianguli proportionalia eſſe angulis ſibi oppoſitis: ſeu non eſt verum, duplo angulo accurate duplum latus, triplo triplum opponi. e. g. Si in triangulo ABC (*Tab. IV Fig.* 56.) fuerit angulus C duplo major A; latus AB erit quidem majus latere BC, iſto tamen illud non erit duplo majus. Triangulo enim ABC circumſcribatur circulus (91). Cum ang. C ſit ex hyp. $= 2A$; eſt etiam arcus AMB $= 2$BVC (19): ac proinde ſi arcus AMB ſecetur bifariam in M, æquales erunt inter ſe arcus ArM, MsB, & BVC. Hinc æquales quoque ſunt chordæ AM, MB, & BC (64). Eſt ergo chorda AM $+$ MB $= 2$BC; ac proinde ob AM $+$ MC $>$ AB, eſt

eſt etiam 2BC > AB : hoc eſt, latus AB non eſt duplo majus latere BC. Confer etiam num. 80.

191. Coroll. Hinc manifeſte ſequitur, in triangulo non poſſe angulos (idem eſt de eorum menſuris, ſeu arcubus) in proportionem diſponi cum lateribus oppoſitis; e. g. non ſtat hæc proportio, *ang.* C; *Ang.* A = *latus* AC : *lat.* BC; neque hæc, *arcus.* AMB : *arc.* BVC = *lat.* AB : *lat.* BC. Quapropter, ut ad ignotam trianguli partem inveniendam vera proportio geometrica obtineri poſſit; angulis, eorumque menſuris, ſeu arcubus aliæ quæpiam quantitates ſubſtituendæ ſunt, quæ lateribus trianguli ſint ex vero proportionales. Subſtituuntur autem iis lineæ quædam rectæ, quas *ſinus, coſinus, tangentes* &c. vocant: rectæ hæ arcus, & angulos repræſentant, eorumque quaſi vice in calculo *funguntur*; unde etiam communi vocabulo *functiones* appellantur. Harum notiones, quas jam explicabimus, probe condiſcendæ ſunt, priusquam ad alia progreſſus fiat: totum enim Trigonometriæ artificium eo demum reducitur, ut dictæ *functiones* cum trianguli lateribus in ejusmodi proportionem diſponantur, cujus quartus terminus quæſitam trianguli partem exhibeat, aut ſaltem talis ſit, ex quo quæſita trianguli pars deinde facile innoteſcere poſſit.

192. Aſſumamus quemcunque angulum ACF ſeu ACB (*Fig.* 57.). Ex puncto C, in quo rectæ angulum efficientes concurrunt, tanquam centro, radio arbitrariæ longitudinis CA deſcribatur circulus AM*b*A; producanturque radii AC & BC, dum abeant in diametros A*a* & B*b*. 1) Si ex arcus AB alterutro extremo B demittatur perpendicularis BD in diametrum *a*A, tranſeuntem per alterum ejusdem arcus extremum A; perpendicularis hæc vocatur *ſinus rectus* ejusdem arcus AB, vel anguli ACB, quem arcus AB metitur: diametri autem pars AD, inter ſinum rectum & arcum intercepta, eſt ejusdem arcus AB vel anguli ACB *ſinus verſus.* 2) Si ex extremo arcus AB puncto A erigatur perpendicularis AF, adeoque circulum in puncto A tangens (76), donec diametro *b*B, quæ per alterum ejusdem arcus extremum tranſit, productæ occurrat in F; perpendicularis AF dicitur *tangens* arcus AB, vel anguli

guli ACB : CF autem eſt *ſecans* ejusdem arcus AB, vel anguli ACB.

193. Coroll. I. Hinc 1) duo arcus *a*MB & AB, qui ſimul ſumpti æquantur ſemiperipheriæ circuli, vel duo anguli deinceps poſiti *a*CB & ACB, quos dicti arcus metiuntur, eundem habent *ſinum rectum.* Nam, ut obtineam ſinum rectum arcus *a*MB, vel anguli *a*CB; ex alterutro ejusdem arcus extremo B debeo demittere perpendicularem BD in diametrum A*a* tranſeuntem per alterum ejusdem arcus extremum *a* (192): atqui perpendicularis BD eſt *ſinus rectus* etiam reſpectu arcus AB, vel anguli ACB (192); ergo.

2) Duorum arcuum *a*MB & AB, qui ſimul efficiunt ſemiperipheriam circuli, vel angulorum deinceps poſitorum *a*CB & ACB tangentes quoque æquantur inter ſe, item ſecantes. Ut enim acquiratur tangens, & ſecans arcus *a*MB, vel anguli *a*CB; ex alterutro arcus *a*MB extremo *a* erigenda eſt perpendicularis *af*, donec diametro B*b*, quæ per alterum ejusdem arcus extremum B tranſit, productæ occurrat in *f*: quo facto *tangens* arcus *a*MB, vel anguli *a*CB eſt perpendicularis *af*, ſecans autem recta C*f* (192). Eſt autem *af* = AF, & C*f* = CF: nam in triangulis ACF & *a*C*f* anguli ad A & *a* ſunt ex conſtr. recti, & ad C verticales, ac proinde æquales; hinc cum præterea ſit in iisdem radius CA = C*a*, triangula illa ſunt ſimilia, & ſimul æqualia (119). Cum ergo arcus AB vel anguli ACB tangens ſit AF (192), tangentes arcuum *a*MB & AB. vel angulorum *a*CB & ACB æquari inter ſe, uti & ſecantes inter ſe, manifeſtum eſt. Idem eſt de quibuscunque aliis duobus arcubus, qui ſimul efficiunt ſemiperipheriam circuli, vel de duobus quibuscunque angulis deinceps poſitis.

194. Coroll. II. Concipiamus imprimis radium CB ſuperponi radio CA, puncto B congruente cum A, & angulo ACB penitus evaneſcente; concipiamus deinde radio CA manente fixo, radium CB circa centrum C converti, puncto B ab A ſucceſſive recedente verſus M, ſit autem ang. ACM rectus: manifeſtum eſt, ſinum rectum BD, ſinum verſum AD, tangentem AF & ſecantem CP eo ſemper majores, ac majores fore, quo magis

gis creverit arcus AB, & ſimul angulus ACB. Quum autem punctum B ad M pervenerit; imprimis arcus AB abibit in quadrantem AM, & angulus acutus ACB in rectum ACM: deinde ſinus rectus BD congruet cum radio MC, eritque maximus omnium ſinuum rectorum extra centrum C terminatorum (162); unde etiam radius ſolet *ſinus totus* vocari: pariter ſinus verſus AD abibit in radium AC. At tangens AF evadet parallela ad ſecantem CF; tunc enim ſecans tranſibit per punctum N, cadetque in ſinum rectum MC: unde conſequitur, tangentem & ſecantem eo caſu nuſpiam concurſuras, ac proinde ambas fore infinitas.

195. Coroll. III. Quævis circuli chorda BG eſt duplus ſinus rectus dimidiæ partis arcus ſubtenſi BAG. Si enim ducatur diameter *a*A ad chordam BG perpendicularis; recta BD eſt ſinus rectus arcus BA (192). Jam diameter *a*A, eo ipſo quod ſit ad chordam BG perpendicularis, eandem bifariam ſecat (67), ac proinde eſt BG $=$ 2BD; ergo chorda BG eſt duplus ſinus rectus arcus BA: atqui BA eſt dimidia pars arcus ſubtenſi BAG; nam diameter *a*A ad BG perpendicularis, etiam arcum BAG bifariam ſecat eo ipſo, quod angulum BCG, quem hic arcus metitur, bifariam ſecet (68): ergo chorda BG eſt duplus ſinus rectus dimidiæ partis arcus ſubtenſi BAG. Et quoniam duo arcus *a*MB & BA eundem habent ſinum rectum (193); chorda BG eſt duplus ſinus rectus partis dimidiæ non tantum arcus ſui ſubtenſi BAG, qui ſemiperipheria circuli minor ſit, verum etiam alterius ſui arcus ſubtenſi B*a*G, circuli ſemiperipheria majoris.

196. Coroll. IV. In quocunque triangulo rectangulo ABC (*Fig.* 58.). 1) ſi hypothenuſa AC aſſumatur pro radio, ſive pro ſinu *toto* (194): cathetus AB erit ſinus rectus anguli ſibi oppoſiti ACB. Si enim centro C, radio AC deſcribatur arcus A*m*, lateri CB producto occurrens in *m*; recta, cum ſit ex conſtr. perpendicularis ad *m*C, erit ſinus rectus arcus A*m* (192), adeoque etiam anguli ACB, utpote quem metitur arcus A*m*. Eodem modo oſtendi poteſt, cathetun BC fore ſinum rectum anguli ſibi oppoſiti BAC.

2) In

2) In eodem triangulo rectangulo, si pro radio assumatur una cathetus e. g. BC; altera cathetus AB est tangens anguli sibi oppositi ACB. Si enim centro C, radio BC describatur arcus B*o*; recta AB, cum sit ex constr. perpendicularis ad BC, erit tangens arcus B*o* (192, adeoque etiam anguli ACB, quem arcus B*o* metitur.

197. Id quod arcui cuipiam deest ad semiperipheriam circuli, vel angulo ad duos rectos, vocari solet ejusdem *supplementum* e. g. arcus AB (*Fig.* 57.) habet pro supplemento arcum *a*MB, & vicissim arcus *a*MB arcum AB; item anguli ACB *supplementum* est angulus *a*CB, & vicissim anguli *a*CB angulus ACB. Differentia autem arcus a quadrante, & anguli a recto, sive deinde differat ab eo per excessum, sive per defectum, dicitur ejusdem *complementum*. e. g. Si angulus ACM ponatur esse rectus, adeoque arcus ABM esse quadrans circuli; tam arcus AB, quam etiam arcus *a*MB pro *complemento* habet arcum BM; quia utriusque differentia a quadrante est = BM, scilicet prioris per defectum, posterioris per excessum; item tam anguli ACB, quam anguli *a*CB *complementum* est angulus MCB; quia utriusque differentia ab angulo recto est = ang. MCB, scilicet prioris per defectum, posterioris per excessum. Jam sinus complementi vocatur *cosinus* respectu ejus arcus vel anguli, cujus est complementum. Sic recta BI ad radium MC perpendicularis, est cosinus anguli ACB, item anguli *a*CB: quia est sinus MCB, qui angulus est complementum anguli ACB, item anguli *a*CB.

Deinde tangens complementi vocatur *cotangens* ejus arcus, vel anguli, cujus est complementum: denique secans complementi est *cosecans* ejus arcus, vel anguli, cujus est complementum.

198. Coroll. I. Igitur duo arcus *a*MB & AB, qui simul efficiunt semiperipheriam circuli, item duo anguli deinceps positi *a*CB & ACB eundem habent cosinum, cotangentem, & cosecantem. Cum enim & arcus *a*MB & arcus AB pro complemento habeat arcum MB, item tam anguli *a*CB, quam etiam anguli ACB complementum sit angulus MCB; sinus, tangens, secans arcus MB vel anguli MCB est cosinus, cotangens, cosecans tam

respe-

respectu arcus *a*MB, quam respectu arcus AB, item tam respectu anguli *a*CB, quam respectu anguli ACB.

199. COROLL. II. Diametri pars CD intercepta inter anguli ACB verticem C & ejusdem anguli sinum rectum BD, est ejusdem anguli ACB cosinus. Nam anguli ACB cosinus est recta BI ad MC perpendicularis (197): est vero CD = BI; nam ob IC & BD ad CA perpendiculares, & ob BI ad MC perpendicularem, BICD est parallelogrammum: in parallelogrammo autem latera opposita æquantur inter se (132).

200. COROLL. III. Si in quocunque triangulo rectangulo ABC (*Fig.* 58.) hypothenusa AC assumatur pro radio; cathetus BC est cosinus anguli acuti sibi adjacentis ACB. Hac enim in hypothesi cathetus AB est sinus rectus anguli ACB (196): ergo altera cathetus BC est pars diametri, intercepta inter anguli ACB verticem C, & ejusdem sinum rectum: eo ipso autem BC est cosinus anguli ACB (199).

Schol. Sinus rectus compendii gratia frequenter absque omni addito *sinus* nominatur: immo quotiescunque *sinus* absque omni addito profertur, eo vocabulo sinus *rectus* designari solet.

201. THEOREMA LIX. *Functiones omnes angulorum æqualium, vel arcuum similium (seu arcuum talium, qui totidem gradus, & minuta in se continent, tametsi deinde reali magnitudine inter se discrepent) sunt constanter in ratione suorum radiorum. Id est, si e. g. angulus* ACB (*Fig.* 59.) *sit* = *ang.* acb; *est* 1) *illius sinus rectus* BD *ad hujus sinum rectum* bd, *ut illius radius* CB *ad hujus radium* cb; 2) *illius tangens* AF *ad hujus tangentem* af *est rursus* = CB : cb *&c.*

DEMONSTR. Nam 1) triangula BCD & *bcd*, ob ang. C ex constr. = *c*, & ob angulos ad D & *d* ex constr. rectos sunt similia (118): ergo stat in iis. BD : *bd* = CB : *cb* (156): hoc est, sinus recti angulorum æqualium C & *c*, vel arcuum similium AB & *ab* sunt in ratione radiorum CB & *cb*.

2) Si productis radiis CB & *cb*, erigantur ex punctis A & *a* tangentes AF & *af*; etiam triangula ACF &

acf, ob angulos C & *c* ex hyp. æquales, & ob ang. ad A & *a* rectos, similia erunt: hinc stabit in iis, AF : *af* = CA : *ca*; item CF : *cf* = CA : *ca* = CB : *cb*. Hoc est, etiam tangentes, nec non secantes arcuum similium AB & *ab*, vel angulorum æqualium C & *c* sunt in ratione eorundem radiorum.

3) Angulorum æqualium complementa pariter æqualia sunt. e. g. si ponamus tam angulum C, quam *c* esse = 40°, utriusque complementum est = 50° (197); ergo sinus, tangentes, & secantes complementorum ad æquales angulos C & *c* pertinentium sunt in ratione radiorum, non secus, ac sint sinus, tangentes, ac secantes ipsorum angulorum C & *c*: atqui sinus, tangentes, & secantes complementorum sunt cosinus, cotangentes, & cosecantes ipsorum angulorum C & *c* (197); ergo etiam cosinus, cotangentes, & cosecantes æqualium angulorum C & *c* (vel arcuum similium AB & *ab*) sunt in ratione dictorum radiorum.

202. Coroll. Ex his patet imprimis, *absolutas* functionum magnitudines pendere ab absolutis radiorum suorum magnitudinibus: tametsi enim anguli C & *c* sint æquales; quia tamen pro iis inæquales radios CA & *ca* assumpsimus, eorundem e. g. sinus BD & *bd* quoad absolutas suas magnitudiues sunt inæquales. At patet deinde, *comparativas* functionum quarumcunque magnitudines a magnitudine absoluta radiorum iisdem respondentium prorsus non dependere. Dum enim quæritur magnitudo comparativa alicujus functionis, e. g. sinus recti (ut de hoc solo loquamur) non aliud quæritur, quam quantanam quantitas sit ea functio comparate ad radium suum: hoc est, radius (cujuscunque demum is longitudinis sit) ponitur esse e. g. = 1000. & quæritur, quotnam ejusmodi partes æquales contineat in se cujuspiam arcus, vel anguli sinus rectus, cujusmodi partes in ejus radio continentur numero 1000. Jam vero si anguli C & *c* sint æquales, adeoque arcus AB & *ab* similes; profecto sinus rectus BD tanta quantitas est comparate ad suum radium CB, quanta quantitas est sinus rectus *bd* comparate ad suum radium *cb*: eo enim casu stat, BD : *bd* = CB : *cb* (201), & alternando, BD : CB *bd* : *cb*. Sic etiam tametsi absoluta magni-

magnitudo arcuum ſimilium AB & *ab* ab abſoluta radiorum ſuorum magnitudine dependeat (183); eorundem tamen magnitudo comparativa, non obſtante radiorum inæqualitate, eadem eſt: totidem enim gradus continet arcus *ab*, quot arcus AB (21).

203. Atque nonniſi hæc magnitudo comparativa ſpectatur in functionibus, non abſoluta; ita ut e duobus e. g Sinubus rectis is dicatur major ſinus, qui major eſt comparate ad radium ſuum. e. g. Aſſumamus ſinus BD & *bd*, quin ſupponamus angulos C & *c* eſſe æquales. Uterque radius CA & *ca* in totidem æquales partes diviſus concipi ſolet, e. g. in 1000; quemadmodum cujuslibet circuli peripheriam in 360° diviſam concipere ſolemus: tum inquiritur, quotnam quilibet ſinus contineat ejusmodi partes, cujusmodi partes in ipſius radio continentur numero 1000. Et ſiquidem ſinus *bd* deprehendatur plures ex ſui radii *ca* particulis continere, ac contineat ſinus BD ex particulis radii ſui CA; idem *bd* dicitur eſſe ſinus major, quam ſit BD, tametſi hujus abſoluta magnitudo ſuperet illius magnitudinem abſolutam.

204. THEOREMA LX. *In quovis triangulo latera ſunt ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum.* e. g. *In triangulo* ABD (*Tab. II. Fig.* 23.) *eſt* AB : BD = *ſin. ang.* D : *ſin. ang.* A.

Demonstr. Cuivis triangulo ABD circumſcribi poteſt circulus, reſpectu cujus, latera ejusdem trianguli ſint chordæ (91): quo circumſcripto, chorda AB eſt duplus ſinus dimidiæ partis arcus ſubtenſi A*y*B, & pariter chorda BD eſt duplus ſinus dimidiæ partis arcus ſubtenſi B*x*D (195). Cum ergo dimidia pars arcus A*y*B metiatur angulum D, & dimidia pars arcus B*x*D angulum A (83); chorda AB eſt duplus ſinus anguli D, chorda BD duplus ſinus anguli A: conſequenter eſt AB : BD = 2 *ſin.* ang. D : 2 *ſin.* ang. A: & 2dam ration. divid. per 2, eſt AB : BD = *ſin.* ang. D : *ſin.* ang. A.

205. Coroll. I. Cum ergo in triangulo æqualibus angulis æqualia latera opponantur, inæqualibus autem inæqualia, ita ut majori angulo majus latus opponatur, minori minus (110, & 111.); conſequitur, ſinus æqua-

lium angulorum esse æquales, inæqualium autem inæquales, ita ut majori angulo major sinus respondeat, minori minor. Nihilominus anguli nequaquam sunt in ratione suorum sinuum. Cum enim sinus angulorum sint in triangulo, ut latera iisdem angulis opposita (204); si anguli essent in ratione suorum sinuum, iidem anguli essent in triangulo, ut latera ipsis opposita: quod absurdum est (190).

206. Coroll. II. Tametsi angulus non sit accurate in ratione sui sinus; decrescente tamen quocunque angulo ACB (*Tab. IV. Fig.* 57.) etiam ejus sinus BD continenter decrescit, ita ut evanescente eo angulo etiam sinus BD penitus evanescat. Ergo si in quopiam triangulo *abc* (*Tab. II. Fig.* 32.) quispiam angulus *b* concipiatur minui in infinitum, seu evadere infinite parvus; etiam sinus ejus infinite parvus evadat, est necesse: & vicissim, si cujuspiam anguli sinus sit infinite parvus; etiam angulum, cujus is sinus est, infinite parvum esse oportet.

Schol. Semper tamen præ oculis sit id, quod n. 203. exposuimus, magnitudinem sinus nonnisi relate ad suum radium esse considerandam; ita ut is dicatur sinus magnus, vel parvus, qui magna, vel parva pars est radii sui: consequenter ita, ut etiam sinus infinite parvus is dicendus sit, qui est radii sui pars infinitesima.

207. Coroll. III. Si in quocunque triangulo *abc* angulus *b* fuerit infinite parvus comparate ad angulum *a*; etiam latus *ac* angulo *b* oppositum, erit infinite parvum comparate ad latus *bc*, quod angulo *a* opponitur. Eo enim casu sinus anguli *a* erit finitus, & anguli *b* infinite parvus (206); consequenter sinus anguli *b* erit ad sinum anguli *a*, ut infinite parva quantitas ad quantitatem finitam: cum ergo latera angulis in triangulo opposita, sint ut sinus eorundem angulorum (204); etiam latus *ac* erit ad latus *bc* ut quantitas infinite parva ad quantitatem finitam: quod tantundem est, ac latus *ac* comparate ad *bc* esse infinite parvum.

208. Coroll. IV. Si in quocunque triangulo *abc* latus *ac* fuerit infinite parvum, reliqua vero duo latera fuerint magnitudinis finitæ; angulus *b* lateri *ac* oppositus, infinite parvus sit, oportet. Est enim *sin.* ang. *b*:

sin.

sin. ang. $a = ac : bc$: (204): cum ergo latus ac comparate ad bc sit ex hyp. infinite parvum; etiam sinus anguli b est infinite parvus comparate ad sinum anguli a: eo ipso autem patet, angulum b infinite parvum esse oportere (206).

Schol. Si quæpiam finita quantitas ponatur esse $= 1$; ejus pars infinite parva rite exprimitur per $\frac{1}{\infty}$. Nam unitatis pars dimidia rite exprimitur per $\frac{1}{2}$, pars tertia per $\frac{1}{3}$ quarta per $\frac{1}{4}$ & sic porro semper ita, ut denominator fractionis indicet, quotanam unitatis pars per fractionem illam exprimatur (*Algeb.* 36): cum ergo signum ∞ denotet quantitatem infinitam (*Algeb.* 11); pars infinitesima unitatis, seu quantitatis finitæ per $\frac{1}{\infty}$ exprimatur oportet. Confer. *Algeb.* n. 220. *Schol.* 1. Hinc si infinitesimam finitæ quantitatis partem $= \frac{1}{\infty}$ in partes numero infinitas subdividi concipiamus; id genus infinitesima pars quantitatis $\frac{1}{\infty}$ rite exprimetur per $\frac{1}{\infty^2}$. Quemadmodum enim se habet finita quantitas, seu 1. ad suam infinitesimam partem seu ad $\frac{1}{\infty}$, ita se habet $\frac{1}{\infty}$ ad suam infinitesimam: ac proinde, si quantitatis infinite parvæ pars infinitesima vocetur x; est $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : x$. Unde prodit $x = \frac{1}{\infty^2}$, Jam quantitas $\frac{1}{\infty}$ vocatur infinitesima *primi ordinis*: hujus pars infinitesima seu $\frac{1}{\infty^2}$ vocatur infinitesima *secundi ordinis*: pars infinitesima quantitatis $\frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3}$, vocaturque infinitesima *tertii ordinis* &c. Porro duæ id genus quantitates, quarum una respectu alterius non est pars infinitesima, dicitur esse *ejusdem* inter se *ordinis*: eæ vero, quarum una respectu alterius est pars infinitesima, sunt *ordinis diversi*. Sic quantitates omnes finitæ, tametsi inæquales, sunt ejusdem inter se ordinis, scilicet finiti; nulla enim earum potest esse pars infinitesima respectu alterius: eandem ob caussam *ejusdem* inter se *ordinis* sunt quantitates infinitesimæ primi ordinis; aut infinitesimæ secundi ordinis, itidem inter se &c. At e. g. quantitas finita, & infinitesima cujuscunque ordinis, aut infinitesima primi ordinis, & infinitesima ordinis secundi sunt inter se *diversi ordinis*.

209. Coroll. V. Si in quocunque triangulo *abc* omnes tres anguli fuerint definitæ magnitudinis, ac proinde ejusdem inter se ordinis; etiam latera ipsis opposita, ejusdem inter se ordinis sint omnia, est necesse: consequenter non poterit fieri, ut e. g. latus *ac* sit infinitesima pars lateris *bc*, vel lateris *ab*. Est enim $bc : ac = \sin.\ ang.\ a : \sin\ ang.\ b$ (204:) ergo si esset *ac* infinitesima pars lateris *bc*; etiam sinus anguli *b* esset infinitesima pars comparate ad sinum anguli *a*: consequenter ob angulum *a* ex hypothesi finitum, angulus *b* contra hypothesim esset infinite parvus (206); quod absurdum est.

Schol. Si in triangulo quocunque omnes tres anguli ponantur esse definitæ magnitudinis, ac proinde ejusdem inter se ordinis; sequitur quidem, uti nunc vidimus, latera quoque omnia ejusdem inter se ordinis esse debere: non sequitur tamen, ipsum etiam ordinem laterum

terum esse debere eundem cum ordine angulorum, sed concipi potest triangulum, in quo tametsi quilibet angulus sit definitæ magnitudinis, latera tamen singula sint infinitesima primi aut alterius ordinis. e. g. Concipiamus in triangulo ABC (*Tab. III Fig.* 42) rectam *mn* ad BC parallelam, quæ infinite vicina sit vertici A: triangula A*mn* & ABC erunt similia (118); consequenter in triangulo A*mn*, non secus ac in triangulo ABC, quilibet angulus erit definitæ magnitudinis: & tamen latera A*m*, *mn*, & A*n* erunt utique infinite parva.

210. Coroll. VI. Cum in omni triangulo, cujus quilibet angulus est definitæ magnitudinis, latera omnia ejusdem inter se ordinis esse debeant (209); si in quopiam id genus triangulo deprehendatur unum quodpiam latus esse e. g. $= \frac{1}{\infty^2}$; eo ipso inferre licet, reliqua etiam duo latera esse singula $= \frac{1}{\infty^2}$.

211. THEOREMA LXI. *In quovis triangulo* ABC (*Tab. IV. Fig.* 60.) *summa quorumvis duorum laterum* AC + AB *est ad eorundem differentiam, seu ad* AC — AB, *ut tangens semisummæ angulorum* E *&* C *iisdem lateribus oppositorum, ad tangentem semidifferentiæ eorundem angulorum.*

Demonstr. Latere minore AB tanquam radio centro a describatur circulus, latus vero alterum CA producatur, dum occurat circuli peripheriæ in D: deinde per puncta D & B ducatur recta indefinita DF: denique puncta B & E connectantur per rectam BE, & ex puncto C agatur recta CF ad BE parallela, occurrens rectæ DF in F. Ob rectam BE ad FC parallelam stabit hæc proportio:

$$DC : EC = DF : BF \ (150).$$

Atqui hanc proportionem stare tantundem est, ac stare proportionem illam, quam Theorema continet.

Nam 1) DC est summa laterum AC + AB; scilicet ob radios AD & AB æquales. 2) est EC = AC — AB: est enim EC = AC — AE; adeoque ob radios AE & AB æquales, est EC = AC — AB.

 3) DF

3) DF Eſt tangens ſemiſummæ angulorum B & C, ſeu angulorum ABC & ACB. Nam angulus DBE diametro DE inſiſtens, eſt rectus (85). adeoque ob rectam FC ad BE parallelam, etiam DFC eſt rectus (55); hoc eſt, triangulum DFC eſt ad F rectangulum: itaque ſi latus FC ſumatur pro radio; recta DF eſt tangens anguli DCF (196). Atqui angulus DCF eſt ſemiſumma angulorum ABC & ACB; quod ſic declaro. Angulus *o* cum ſit externus reſpectu trianguli ABC, æquatur ſummæ angulorum ABD & ACB (113): ergo angulus *m* ſitus ad peripheriam cum ſit $= \frac{1}{2} o$ (84), æquatur ſemiſummæ eorundem angulorum: atqui ob BE ad FC parallelam eſt ang. $m =$ DCF (55); ergo etiam angulus DCF æquatur ſemiſummæ dictorum angulorum ABC & ACB.

4) BF eſt tangens ſemidifferentiæ angulorum B & C ſeu angulorum ABC & ACB. Nam ſi in triangulo rectangulo BFC pro radio aſſumatur idem latus FC, quod ſuperius aſſumpſimus; latus FB eſt tangens anguli *v*, ſeu anguli BCF (196): atqui angulus *v* eſt ſemidifferentia angulorum ABC, & ACB; quod ſic declaro. In triangulo ABC, ob latus AB $<$ AC eſt angulus ACB $<$ ABC (110): ergo angulus ACB æquatur ipſorum ſemiſummæ dempta ſemidifferentia (*Algeb.* 135, *exempl.* III.). Atqui angulus ACB eſt $=$ ang. ACF $- v$, uti clarum eſt, & angulus ACF eſt ſemmiſumma angulorum ABC & ACB uti ſuperius n. 3) vidimus; ergo angulus *v* eorundem ſemidifferentia ſit, oportet.

Eſt ergo ſumma laterum AC + AB ad eorundem differentiam, ut tangens ſemiſummæ angulorum ABC & ACB iisdem lateribus oppoſitorum, ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem angulorum.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

De Tabulis Sinuum.

212. Cum in iis proportionibus, quarum ope resolutio triangulorum peragenda est, angulis substitui debeant eorundem functiones (191); necesse fuit concinnare tabulas quasdam, in quibus id genus functiones pro quolibet quotcunque graduum, & minutorum (saltem primorum) angulo, vel arcu continerentur. Hujusmodi tabulæ vocantur *tabulæ sinuum*, vel *canones functionum*: de quibus hæc jam nunc notanda sunt.

1) Tabulæ, quæ exstant, aliæ sunt majores, minores aliæ. In majoribus majore accuratione sunt expressæ functiones; at hujus generis tabulæ sunt rariores: tabulæ minores facilius præsto esse possunt, & hæ etiam, quantum ad usus ordinarios attinet, sat accuratam functionum expressionem continent.

2) In tabulis usitatis minoribus Adriani Vlacq sinus totus, seu radius cujuscunque circuli tam majoris, quam minoris ponitur $= 10000000$; tum comparativa functionum magnitudo (seu eorundem ad radium $= 10000000$ relatio) pro quolibet quotcunque graduum, & minutorum primorum angulo, vel arcu adjicitur.

3) Quævis tabula sex columnas habere solet: in quarum prima scribuntur gradus, & minuta anguli, vel arcus illius, cujus functiones ea tabula continet; in secunda columna continentur sinus; in tertia tangentes; in quarta secantes correspondentes; in quinta logarithmi sinuum; in sexta logarithmi tangentium. Logarithmi secantium non apponuntur: nam sine illis calculi trigonometrici eadem facilitate persici possunt.

213. PROBLEMA XX. *Dato arcu, qui non sit quadrante major, aut dato angulo, qui recto major non sit, invenire in tabulis sinum, tangentem, aut secantem, eidem arcui, vel angulo respondentes.*

Resolut. Sint inveniendæ functiones e. g. anguli 30 graduum, 10 minutorum. Inveniatur in tabulis pagina,

gina, in cujus fronte legantur 30 gradus, & in columna prima inter minuta contineatur etiam minutum 10mum: huic minuto 10mo respondens e regione, in secunda ejusdem paginæ columna sinus (qui in tabulis minoribus Vlacquianis deprehenditur esse = 50251. 70) est sinus anguli 30 graduum, 10 minutorum. In tertia columna mox e regione sequitur ejusdem anguli tangens = 58123. 53; in quarta secans = 115664. 80.

Schol. 1. Logarithmi quoque sinuum, & tangentium eadem methodo inveniuntur. e. g. Postquam in secunda columna invenisti sinum 50251. 70; e regione in columna quinta deprehendes sinus illius logarithmum = 9. 7011508, & in columna sexta logarithmum tangentis.

Schol. 2. In tabulis dictis cujuslibet functionis duæ notæ dextimæ a reliquis interjecto puncto secernuntur; propterea quod in iisdem tabulis etiam sinus totus reapse ponatur = 100000,00, ita ut postremæ duæ notæ fractionem decimalem denotent. Hinc si in sinu toto punctum illud omittatur; in reliquis etiam functionibus omittendum erit. Id quod nos deinceps constanter observabimus.

Schol. 3. De logarithmis functionum hoc cuipiam dubium occurrere posset; juxta generalem logarithmorum legem *Algebræ* n. 237 a nobis indicatam, logarithmi *characteristica* semper unitate minor esse debet numero notarum omnium ejus numeri, cui logarithmus ille respondet; adeoque cum sinus angulo 30 grad. 10 min. respondens nonnisi septem notis exprimatur in tabulis Vlacquianis, in ejus logarithmo characteristica deberet esse = 6: cur ergo eædem tabulæ pro characteristica dicti sinus habent numerum 9? At notandum est: ii: qui functionum logarithmos repererunt, reipsa sinum totum, seu radium posuerunt esse = 10000000000. Quo posito imprimis characteristica in logarithmo sinus totius juxta commemoratam generalem logarithmorum legem jam debet esse = 10; ac proinde characteristica in logarithmis sinuum radio minorum potest etiam ad numerum 9 assurgere: deinde quilibet sinus tribus notis plures continere deberet, ac contineat in dictis tabulis; at tres ultimæ notæ (cum id sine periculo

culo notabilis erroris fieri possit) compendii gratia omittuntur.

Schol. 4. In tabulis functionibus idcirco adjicuntur eorundem logarithmi: quia si in calculis trigonometricis una functio per alteram multiplicanda, aut dividenda sit, id ope logarithmorum longe facilius obtinetur (*Algeb.* 238, & 240).

214. PROBLEMA XXI. *Dato arcu, qui sit quadrante major, aut angulo, qui recto major sit, invenire in tabulis sinum, tangentem aut secantem, eidem arcui vel angulo respondentem.*

Resolut. Datus arcus vel angulus subtrahatur a 180°, & arcus vel anguli residui functio inveniatur methodo n. 213. exposita; inventa functio erit simul functio arcus vel anguli dati, 90 gradibus majoris: duo enim arcus, vel duo anguli, qui simul sumpti continent 180 gradus, eosdem habent sinus, tangentes, secantes (193). Hinc si quærantur functiones e. g. anguli 120 gradus, & nullum præterea minutum continentis; subtrahe 120° a 180°: residui anguli = 60° sinus = 8660254 erit sinus etiam anguli dati, 120° continentis. Idem est de tangente & secante.

Schol. Si angulus datus (idem est de arcu) præter minuta prima contineat etiam aliquot secunda: pro eo in tabulis minoribus functiones non reperies, utpote quæ pro gradibus tantum. & minutis primis sunt constructæ: hinc si careas tabulis majoribus (in quibus habentur functiones etiam pro denis quibusque secundis) vel negligenda erunt minuta secunda, vel, si ea non videantur negligenda, functio e. g. sinus id genus anguli hac methodo debebit determinari.

1) Sinus anguli, qui dato angulo proxime minor est in tabulis, subtrahatur a sinu anguli proxime majoris, & prima hæc differentia notetur. 2) Idem angulus, qui nempe dato angulo proxime minor est in tabulis, subtrahatur etiam a dato angulo, & altera hæc differentia pariter notetur.

His factis hæc instituatur quæstio: differentia duorum angulorum, quorum alter in tabulis proxime minor est dato angulo, alter proxime major (quæ differentia eſt $=1'=60''$) dat ſinuum ſibi reſpondentium differentiam n. 1) inventam; ergo differentia inter angulum datum, & proximum minorem n. 2) inventa quam dabit differentiam ſinuum ſibi correſpondentium? Inventus quartus proportionalis ſumi poterit pro differentia, qua ſinus dato angulo reſpondens excedit ſinum anguli proxime minoris: quæ proinde differentia ſi addatur ſinui anguli, dato angulo proxime minoris, acquiritur ſinus dato angulo reſpondens. e. g. Si quartus proportionalis dicta methodo inventus ſit $= 1886$, & ſinus ejus anguli, qui dato angulo proxime minor eſt in tabulis, ſit $=5025170$; ſinus dato angulo reſpondens erit $= 5027056$.

215. PROBLEMA. XXII. *Invenire in tabulis dati arcus, vel anguli coſinum, contagentem, & coſecantem.*

Resolut. Inveniatur dati arcus vel anguli ſinus methodo numeri 213. vel 214; in altera pagina e regione poſitus ſinus, tangens, & ſecans erit dati arcus, vel anguli coſinus, cotangens, coſecans. e. g. Pro angulo 30 graduum, 10 minutorum invenimus num. 213. ſinum $=5025170$: itaque ejusdem anguli coſinus eſt $=8645673$, qui e regione in pagina dextra adnotatus eſt pro ſinu anguli 59 gradus, 50 minuta habentis. Ratio eſt; nam tabulæ ita ſunt conſtructæ, ut cuilibet angulo, qui in ſiniſtra pagina adnotatur, e regione in pagina dextra reſpondeat ejusdem *complementum* (197); ſic angulo 30 graduum, 10 minutorum reſpondet in pagina dextra angulus 59 graduum, 50 minutorum. Quæ ipſa eſt cauſſa, quod numeri graduum & minutorum in paginis dextris ordine inverſo progrediantur. Jam vero coſinus, cotangens & coſecans anguli cujuspiam eſt idem cum ejusdem anguli complementi ſinu, tangente, & ſecante (197). Ergo.

216. PROBLEMA XXIII. *Dato ſinu, vel tangente, vel ſecante invenire arcum, vel angulum ei reſpondentem.*

Resolut. Si datus ſinus, vel tangens, vel ſecans reperiatur in tabulis; habebitur etiam e regione in columna prima arcus, vel angulus eidem reſpondens.

Si autem datus ſinus, tangens, vel ſecans non reperiatur in tabulis; hæc fiant: 1) determinetur differentia functionum proxime minoris, & majoris in tabulis: 2) determinetur differentia datæ functionis à functione proxime minori in tabulis; tum hæc inſtituatur quæſtio: differentia functionis proxime minoris ac majoris in tabulis dat arcuum, vel angulorum ipſis reſpondentium differentiam, quæ ſit $= 60''$; ergo differentia inter functionem datam, & functionem proxime minorem in tabulis, quam dabit differentiam arcuum, vel angulorum ipſis reſpondentium? Inventa differentia addatur arcui, vel angulo, qui functioni proxime minori reſpondet in tabulis; obtinebitur arcus, vel angulus datæ functioni reſpondens.

E. g. Quæratur angulus reſpondens ſinui 9860687, in tabulis non adnotato. 1) Differentia ſinuum in tabulis proxime majoris 9860929, & proxime minoris 9860445 eſt $= 484$; 2) Differentia inter ſinum datum, & ſinum in tabulis proxime minorem eſt $= 242$: igitur quæratur: differentia ſinuum $= 484$ dat differentiam angulorum ipſis reſpondentium $= 60''$; ergo ſinuum differentia $= 242$ quam dabit differentiam angulorum ipſis reſpondentium? Id eſt, hæc inſtituatur proportio $484 : 242 = 60'' : x$. Quæſita differentia x erit $= 30''$; quam ſi addideris angulo, qui in tabulis reſpondet ſinui proxime minori, continetque 80 gradus, 25 minuta prima, acquires angulum dato ſinui reſpondentem $= 80^\circ, 25', 30''$.

Schol. Quoniam arcus, vel angulus ſinum, tangentem, reliquasque functiones habet easdem, quas habet ipſius *ſupplementum* (198); dato ſinui 9860687 non ſolus angulus $= 80^\circ, 25', 30''$ methodo nunc expoſita inventus reſpondet, ſed reſpondet etiam ejusdem anguli ſupplementum: quod ſupplementum acquiritur, ſi dictum angulum $= 80^\circ, 25', 30''$ ſubtrahas a 180°, id eſt, a $179^\circ, 59', 60''$ (*Arith.* 58). Hinc quisnam determinate

an-

angulus e duobus, qui ſimul ſumpti 180 gradus efficiunt, datæ cuipiam functioni in particulari quodam caſu reſpondeat, aliunde innoteſcere debebit.

217. PROBLEMA XXIV. *Dato coſinu, vel cotangente, vel coſecante, invenire arcum, vel angulum ipſi reſpondentem.*

Resolut. Sit inveniendus angulus e. g. dato coſinui reſpondens. Is coſinus conſideretur inſtar ſinus, methodoque n. 216 propoſita inveniatur angulus, ipſi tanquam ſinui reſpondens: hujus anguli complementum, item complementi ſupplementum dato numero reſpondebit tanquam coſinui ſuo (197 & 198). Simili modo invenitur angulus, aut arcus datæ cotangenti, vel coſecanti reſpondens.

CAPUT TERTIUM.

De Reſolutione Triangulorum.

218. Reſolvere triangulum, uti jam n. 189 innuimus, tantundem eſt, ac e datis tribus trianguli partibus reliquas invenire; e. g. datis duobus lateribus cum uno angulo invenire latus tertium, & reliquos duos angulos. Porro triangula dividimus hoc loco in *rectangula*, & *non rectangula*, ſeu *obliquangula*. In triangulo rectangulo per ſe nota eſt pars una, ſcilicet angulus rectus; cujus ſinus (id eſt, ſinus totus) in minoribus tabulis Vlacquianis ponitur = 10000000: hinc ad reſolutionem trianguli rectanguli ſufficit, duas ex reliquis ejus partibus innoteſcere, e. g. unum latus, & unum angulum acutum.

De Reſolutione Trianguli rectanguli.

219. PROBLEMA XXV. *In triangulo rectangulo* ABC (*Fig.* 58.) *datis cathetis* AB & BC *invenire reliquas ejusdem trianguli partes, nempe angulos acutos* A & C, *item hypothenuſam* AC.

Re-

Resolut. I. Inveniatur primum angulus C. Nempe si BC assumatur pro radio, seu pro sinu toto; altera cathetus AB est tangens anguli C (196): ergo realis magnitudo catheti BC est ad realem magnitudinem catheti AB, ut sinus totus ad tangentem anguli C; hoc est, stat:

B : AB = *sin. tot.* ad *tang.* anguli C.

In qua proportione, cum tres priores termini dentur; etiam quartus, seu tangens anguli C innotescit (*Algeb.* 166.): qua inventa ipse etiam angulus C facile invenitur (216).

e. g. Sit BC = 2, AB = 3; cum sinus totus sit = 10000000, si tangens anguli C dicatur x, stat: $2 : 3 = 10000900 : x$. Hinc $x = 15000000$; cui tangenti in tabulis respondet proxime angulus 56 grad. 19 min., consequenter angulus C est proxime = 56°, 19.

II. Invento angulo C etiam ang. A innotescit: cum enim ob ang. B rectum sit ang. A + C = 90° (105); est ang. A = 90° — C.

III. Inventis angulis C & A, hypothenusa innotescit ope hujus proportionis:

sin. ang. A : BC = *sin. tot.* ad AC (204).

220. PROBLEMA XXVI. *Data hypothenusa* AC, *& alterutra catheto e. g.* BC, *invenire angulos acutos* A *&* C, *item alteram cathetum* AB.

Resolut. I. Inveniatur angulus A datæ catheto oppositus. Nempe est:

AC : *sin. tot.* = BC : *sin.* ang. A. (204).

II. Invento angulo A facile innotescet ejus complementum, seu ang. C = 90° — A.

III. Invento angulo C cathetum AB hæc proportio manifestabit:

Sin. tot. ad AC = *sin.* ang. C : AB (104).

221. PROBLEMA XXVII. *Dato quocunque uno trianguli rectanguli latere, & uno angulo acuto, reliqua latera invenire.*

Resolut. Dato uno angulo acuto in triangulo rectangulo, etiam alter acutus angulus eo ipso innotescit (107); itaque in omni casu proportionem, inveniendo lateri quæſito aptam efformare poteris, ſi pro primo termino aſſummas ſinum anguli dato lateri oppoſiti, pro ſecundo datum latus, pro tertio ſinum anguli quæſito lateri oppoſiti, pro quarto latus quæſitum. e. g. Si dato latere BC cum angulo C quæratur latus AC; hæc proportio ſerviet:

ſin. ang. A : BB = *ſin. tot.* ad AC.

222. Coroll. Ex his reſolutionibus apparet, in triangulo prius innoteſcere debere angulos, ac deinde ad laterum quæſitorum inventionem eſſe progrediendum: quod etiam in triangulorum non rectangulorum reſolutionibus, ad quas jam gradum facimus, notandum erit.

De Reſolutione Trianguli non rectanguli.

223. PROBLEMA XXVIII. *In triangulo non rectangulo* ABC (*Fig.* 60.) *datis quibuscunque duobus lateribus, cum uno quocunque angulo invenire partes reliquas, nempe reliquos angulos, & tertium latus.*

Resolut. I. Dentur, quæcunque duo latera AB & BC cum angulo alterutri ipſorum oppoſito, e. g. cum angulo A. Primo loco inveniendi ſunt anguli B & C (222); quibus inventis latus tertium AC facile innoteſcet. Ac 1) pro inveniendo angulo C hæc proportio ſervit:

BC : *ſin.* ang. A = AB : *ſin.* ang. C.

Ex hac enim proportione innoteſcit ſinus anguli C; quo invento innoteſcet ipſe etiam angulus C (216), dummodo aliunde innoteſcat, debeatne is angulus eſſe acutus, an obtuſus (216. *Schol.*): id quod ex ipſis caſus particularis adjunctis, facile deducetur.

2) Invento angulo C, cum præterea angulus A detur, innoteſcit etiam angulus B (107).

3) Inventis angulis pro inveniendo latere AC hæc inſtituatur proportio:

ſin ang. C : AB = *ſin.* ang. B : AB.

II. Dentur quæcunque duo latera AB & AC cum angulo intercepto A. Rurſus primo loco inveniendi ſunt anguli reliqui: ac 1(angulus B hoc modo inveniatur. Quoniam in quovis triangulo ABC eſt AC + AC : AC — AB, ut tangens ſemiſummæ angulorum

B &

B & C iisdem lateribus oppoſitorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem angulorum (211); ſi tangens ſemidifferentiæ angulorum B & C dicatur x, ſtat hæc proportio:

$$AC + AC : AC - AB = \textit{tang. ang.} \left(\frac{B+C}{2}\right) : x.$$

Qua in proportione, datis lateribus AC & AB utique duo primi termini noti ſunt: at ob datum angulum A innoteſcit etiam tertius terminus: cum enim in quovis triangulo omnes tres anguli ſimul ſint $= 180^{\circ}$ (105); dato angulo A innoteſcit ſumma angulorum B & C, adeoque etiam ſemiſumma eorundem: poſtquam autem hæc ſemiſumma deducta fuerit, tangens ipſius in tabulis facile reperietur (213). Itaque in dicta proportione inveniri poteſt etiam terminus quartus x, ſeu tangens ſemidifferentiæ angulorum B & C (*Algeb.* 166.).

Porro habita hac tangente inveniatur in tabulis angulus ipſi reſpondens, ſeu ſemidifferentia angulorum B & C (216): hæc ſemidifferentia ſi addatur ſemiſummæ eorundem angulorum, obtinebitur angulus major B (*Algeb.* 135. *exempl.* III.). Si autem eadem ſemidifferentia demeretur a ſemiſumma; acquireretur angulus minor C (cit.) uter autem eorum angulorum major ſit altero, e datis lateribus AB & AC innoteſcit; majori enim lateri AC major angulus B, minori lateri AB minor angulus C opponi debet (110).

2) Invento angulo B, cum præterea angulus A detur, innoteſcit etiam angulus C (107).

3) Inventis angulis, pro inveniendo latere BC hæc inſtituatur proportio:

ſin. ang. B : AB = *ſin.* ang. A : BC.

224. PROBLEMA XXIX. *In triangulo non rectangulo datis quibuscunque duobus angulis cum uno latere quocunque, reliqua duo latera invenire.*

Resolut. Dentur quicunque duo anguli A & B cum uno latere quocunque AB. Eo ipſo datur etiam tertius angulus C (107). Hinc hæ duæ proportiones detegent latera AC & BC:

1) *Sin.*

1) *Sin.* ang. C : AB = *ſin.* ang. B : AC.
2) *Sin.* ang. C : AB = *ſin.* ang. A : BC.

Schol. 1. Solis trianguli tribus angulis datis, poteſt quidem inveniri ratio laterum inter ſe; nam datis angulis innoteſcunt ipſorum ſinus (113, vel 114), latera autem trianguli ſunt ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum (204): at ipſa laterum quantitas cognoſci nequit, niſi unum ſaltem eorundem laterum detur.

Schol. 2. Datis tribus trianguli lateribus AB, AC, & BC inveniri quidem poſſunt anguli A, B, C; at hujus problematis reſolutionem a Tironibus noſtris prætermitti poſſe, e Capite 6to, in quo primum patebit præcedentium reſolutionum utilitas, conjicere licebit.

CAPUT QUARTUM.

De Menſuris Linearum Geometricis.

225. *Menſura*, ab Euclide generatim definitur: *Quantitas, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis.* Minores longitudinis menſuræ ſunt: Hexapeda, Pes, Digitus, ſeu Pollex. Linea &c. *Hexapeda*, ſeu *Orgya* eſt = 6 pedibus; *Pes* = 12 digit. *Digitus* = 12 lin. Recentiores tamen præeunte Stevino ad vitandam fractionum moleſtiam loco *hexapedæ* malunt uti *decempeda*, ſeu menſura 10 pedibus conſtante, quam vocant etiam *Perticam*; & *pedem* patiuntur in 10 *digitos*, ſeu *pollices*; *digitum* in 10 *lineas*; lineam in 10 alias minores partes. Quas menſuras nos quoque deinceps conſtanter retinebimus.

226. Coroll. Itaque numerum decempedarum adjunctos præterea pedes, digitos &c. habentium rite exprimimus inſtar fractionum decimalium (*Algeb.* 224), ita ut numerus integer decempedas, adjunctæ vero notæ decimales exprimant pedes, digitos &c. e. g. Longitudo ſex decempedis, ſeu perticis, tribus pedibus, quatuor digitis, & ſeptem lineis conſtans rite exprimitur per 6, 347 *pertic.* Nam quemadmodum in fractionibus decimalibus poſt numerum *integrorum* inter-

jecto commate sequuntur partes decimæ, tum decimarum decimæ, seu integrorum centesimæ, & sic porro (*Algeb.* 226); ita etiam in usu decempedarum, seu perticarum primo loco exprimitur numerus perticarum, tanquam unitatum *integrarum*, tum sequuntur pedes, utpote *decimæ* perticarum; deinde digiti, qui sunt decimæ pedum, ac proinde perticarum *centesimæ;* & sic porro.

Hinc longitudo e. g. duobus duntaxat pedibus, 4 digitis, & 6 lineis absque ulla pertica constans hoc modo scribi poterit: 0, 246 *pertic.* (*Algeb.* 224. 2*do* &c.): longitudo autem unius digiti, & 2 linearum absque ulla pertica & pede, hoc modo: 0, 012 *pertic.* (*Algeb.* 224. 3*tio* &c.

Schol. 1. In fractionibus decimalibus nunc allatis pertica consideratur instar unitatis *integræ*, ac proinde nota *commati* præfixa denotat perticas integras: at in fractione decimali per notas *commati* præfixas potes etiam diversam a pertica speciem mensuræ denotare, si velis, e. g. pedes, vel digitos &c.; dummodo post fractionem loco vocis *pertic.* scribas *ped.* vel *digit.* &c. prout nempe pedes vel digitos &c. consideras in ea fractione instar integrarum unitatum. E. g. 2, 34 *ped.* significat 2 pedes, 3 digitos, 4 lineas; item 1, 02 *digit.* denotat unum digitum integrum, & duas centesimas digiti partes.

Schol. 2. Si occurrat fractio decimalis, quæ pro unitate integra habeat mensuram pertica minorem, e. g. pedem; ea facile converti potest in æquivalentem aliam ejusmodi fractionem, quæ pro unitate integra habeat perticam.

Scilicet 1*mo.* Si in data fractione unitas integra est pes; *comma* promoveatur sinistram versus ita, ut unam notam transiliat, & post fractionem loco vocis *ped.* scribatur *pertic.* E. g. 12, 34 *ped.* est = 1, 234 *pertic.* Quodsi autem *comma* dicto modo sinistram versus promotum nullam amplius notam ante se habuerit; præfigatur ipsi zerus. E. g. 2, 46 *ped.* est = 0, 246. *pert.*, & 0, 12, *ped.* = 0, 012 *pertic.*

2*do.* Si in data fractione unitas integra sit digitus; *comma* ita promoveatur sinistram versus, ut duas notas transiliat: reliqua fiant, ut ante. Sic. 15, 6 *dig.* eſt = 0, 156 *pertic.* Hinc ſi in data fractione ante *comma* nonniſi unica nota reperiatur; huic notæ præfigantur duo zeri, ut regulis hactenus expoſitis ſatisfieri poſſit. Sic fractio 2, 7 *dig.* convertatur in hanc 0, 027 *pert.* 3*tio.* Si in data fractione unitas integra ſit linea; *comma* tres notas tranſiliat, oportet: reliqua fiant, ut ante. Sic 2, 3 *lin.* = 0, 0023 *pert.*

Ratio horum omnium facile intelligitur inde, quod quemadmodum in quavis fractione decimali notarum valor a dextra ſiniſtram verſus progrediendo continenter in decuplum creſcit, ita etiam in pertica ejusque partibus quælibet menſura ſuperior decuplo major ſit alia proxime inferiore: e. g. digitus 10 lineis æquivalet.

Schol. 3. Eandem ob cauſſam facillimum omnino eſt, diverſas menſuras geometricas quapiam fractione decimali expreſſas ad infimam ipſarum ſpeciem reducere; e. g. 53 perticas, 2 pedes, 6 digitos, id eſt 53, 26 perticas reducere ad meros digitos. Sufficit enim, datam fractionem omiſſo *commate* inſtar numeri integri conſiderare, & in fine ſpeciem illam infimam, ad quam reductio fit, indicare. Sic 53, 26 *pert.* æquivalent 5326 digitis; item 2, 68 *pedes* (quoniam in hac fractione nota ultima 8, deſignant lineas) æquivalent 268 lineis. Porro hujusmodi numerum ad certam ſpeciem jam reductum. ſi ad ſpeciem proxime inferiorem reducere cupis; ſufficit ei addere in fine zerum. Sic 342 pedes æquivalent 3420 digitis; iſti æquivalent 34200 lineis: & ſic porro.

Schol. 4. Diverſæ menſurarum geometricarum ſpecies ſolent etiam aliis quibusdam ſignis peculiaribus indicari. Scilicet ſignum perticarum eſt (°), ſeu zerus; pedum eſt (′), ſeu virgula una; digitorum (″), ſeu duæ virgulæ; linearum (‴), & ſic porro. Quibus ſignis etiam gradus & minuta arcus circularis, aut anguli cujuspiam denotantur, uti n. 15. dictum eſt. Hinc ſi e. g. 6, 347 perticas hujusmodi ſignis, ſeu *exponentibus* exprimere velis; hoc modo ſcribas, oportet; $6^{\circ}, 3^{\prime}, 4^{\prime\prime}, 7^{\prime\prime\prime}$; item 52, 9 *pertic.* hoc modo; $52^{\circ}, 9^{\prime}$; denique

nique 268 lineas hoc modo: 2, 68'''. Sed hujusmodi signa potissimum in mensuris *quadratis*, & *cubicis* (de quibus suo loco) usui esse solent.

Schol. 5. Mensuræ, de quibns hactenus egimus, vocantur *simplices*, ut a mensuris *quadratis*, & *cubicis* discernantur.

Schol. 6. Eædem mensuræ incertæ sunt, nisi determinetur pedis quantitas, ad quam eæ referantur: diversis enim in regionibus diversa pedis quantitas solet in usu esse, ita ut alia sit quantitas pedis Viennensis, alia Parisini, alia Londinensis &c. Quare recentiores vitandæ confusionis gratia censuerunt mensuras commemoratas ad pedem regium *Parisinum* referendas, cujus longitudinem integram, aut dimidiam pleraque instrumenta, quæ omnium manibus tractantur, metallo incisam exhibent. Porro ita se habent aliarum regionum pedes ad pedem regium Parisinum, ut, si ponatur esse pes regius

	Parisinus	$= 1440$;
sit	Rhenanus	$= 1391\frac{3}{10}$,
	Romanus	$= 1320$,
	Londinensis	$= 1350$,
	Venetus	$= 1540$,

R. P. Josephus Liesganig S. J. cum ab Academia Regia Parisina submissam hexapedam haberet, rationem pedis Viennensis ad Parisinum accuratione summa determinavit, reperitque pedem Viennensem esse ad Parisinum, ut 100000 ad 102764. *Dimens. Grad. Merid. Vindob.* 1770.

Schol. 7. Sæpe in geometricis operationibus diversæ mensuræ in unam summam cogendæ sunt, e. g. 3, 2 *pert.* & 2, 47 *ped.*; sæpe earundem subtractio, per se ipsas multiplicatio, aut divisio instituenda. Quare sit

227. PROBLEMA XXX. *Perticas, pedes &c. simplices aliis perticis, pedibus &c. simplicibus addere; aut ab iisdem subtrahere.*

Resolut. I. Si fractiones, quæ datas mensuras simplices exprimunt, addique debent, *homogeneæ* sint, seu tales, quæ pro integra unitate eandem habeant mensuræ furæ ſpeciem; ſubſcribantur integra integris, decimæ decimis, centeſimæ centeſimis, & cetera peragantur, uti *Algebræ* num. 229 præſcriptum eſt. Quodſi autem fractiones addendæ eſſent *heterogeneæ*, ſeu tales, in quibus non una, eademque menſura conſideratur inſtar unitatis integræ; fractio, quæ minorem menſuram habet pro unitate integra, reducatur primum ad eandem denominationem cum altera, methodo, quam num. præc. *Schol.* 2. expoſuimus, ac tum additio per *Algeb.* n. 229. peragatur. e. g. Si 3, 87 *pert.* & 2, 46 *ped.* in unam ſummam cogi debeant; primum 2, 46 *ped.* reducantur ad perticas, ſeu convertantur in 0, 246 *pert.*, ac tum primum additio more conſueto peragatur.

II. Quod ad ſubtractionem attinet: pariter, ſi datæ fractiones decimales ſunt homogeneæ; ſubtractio peragatur methodo *Algebr.* n. 230. præſcripta: ſi autem ſint heterogeneæ, reddantur prius homogeneæ (226. Schol. 2).

228. PROBLEMA XXXI. *Perticas, pedes &c. ſimplices multiplicare, aut dividere per alias perticas, pedes &c. ſimplices.*

Resolut. Si fractiones decimales, quæ datas menſuras exprimunt, heterogeneæ fuerint, primum reddantur homogeneæ (226. *Schol.* 2.): tum multiplicatio, aut diviſio peragatur methodo, *Algeb.* n. 231, aut 233 propoſita.

Schol. Quodſi hexapedæ, earumque partes aliis hexapedis, harumque partibus addendæ (id quod ſæpe evenit tunc, quum in menſurandis lineis menſura pro hexapedis conſtructa quis utitur) aut ab iis ſubtrahendæ ſint; hujusmodi additio, & ſubtractio iis legibus peragatur, quas in *Arithm.* n. 61. & 62. pro additione, & ſubtractione numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium attulimus: conſulatur autem Tab. I. (*Arith.* 57.). Quodſi vero aliquot hexapedæ cum aliquot pedibus, digitis &c multiplicandæ, aut dividendæ ſint per alias hexapedas cum aliquot pedibus, digitis &c.; operatio moleſta omnino eſt: hinc ejusmodi numeri mixti primum in fractiones decimales convertantur, id eſt, hexapedæ, earumque partes reducantur ad per-

perticas, harumque partes: quo facto earundem multiplicatio, aut divisio facilior jam erit.

229. PROBLEMA XXXII. *Hexapedas simplices, earumque partes reducere ad perticas, harumque partes decimales.*

Resolut. Dentur e. g. 9 *hexap.* 5 *ped.* 8 *dig.* 6 *lin.* quæ reduci debeant ad mensuram perticarum.

1) Numerum hexapedarum multiplica per 6, ut acquiras numerum pedum in hexapedis contentorum; qui numerus in præsente casu est $= 9 \times 6 = 54$: deinde huic numero adde numerum pedum hexapedis adjectorum, seu in præsente casu numerum 5: denique in summa $= 59$ ultimam notam interjecto commate reseca, ut sit: 5, 9. Hactenus obtines 5 decempedas, & 9 pedes.

2) Numerus digitorum reducatur ad lineas; id est, cum unus digitus in hexapedis æquivaleat 12 lineis, numerus digitorum multiplicetur per 12: erit factum in præsente casu $= 96$, cui addatur numerus linearum $= 6$. Erit summa linearum $= 102$. Jam hujusmodi lineas pes unus continet numero 144 (225): ergo ut reducantur ad eam linearum speciem, quarum 100 continentur in pede, seu quarum usus est in mensura perticarum, hæc instituatur proportio, $144 : 102 = 100 : x$. Tum 102 multiplicantur per 100, & factum dividatur per 144. Hoc pacto obtinebitur numerus linearum speciei novæ, eritque $= \frac{10200}{144} = 70$, cum aliqua lineæ fractione, quæ negligatur. Hoc est, obtinentur 7 digiti, & ne unica quidem linea integra: quos si numero perticarum, & pedum superius invento addideris; patebit, datas 9 *hexapedas*, 5 *ped.* 8 *dig.* 6 *lin.* æquivalere 5 *decempedis*, 9 *pedibus*, 7 *digitis.*

Schol. Cum decempedæ, earumque partes decimales vulgo fere ignotæ sint, inque usu Civili mos obtinuerit linearum quantitates hexapedis, seu orgyis exprimendi; Geometra decempedas suas, earumque partes decimales ad hexapedas reducendi promptitudinem habeat, est necesse. Itaque sit

230. PROBLEMA XXXIII. *Perticas simplices, earumque partes decimales reducere ad hexapedas, harumque partes.*

Resolut. Sint e. g. 3, 476 *pert.* reducendæ ad hexapedas. 1) Numerus perticarum & pedum integrorum resecetur a notis reliquis, dividaturque per 6; quotus dabit numerum hexapedarum, & residuus ex divisione numerus designabit pedes. Sic in assumpto exemplo 34 dividatur per 6: quotus $= 5$ dabit hexapedas, & residuus numerus $= 4$ designabit pedes. Hoc est, hactenus obtinemus 5 hexapedas, 4 pedes.

2) Residuæ notæ 76 designant septuaginta sex ejusmodi lineas, cujusmodi lineæ 100 continentur in uno pede: ut ergo eæ convertantur in eam speciem linearum, quæ in mensura hexapedarum usurpatur, ac proinde cujusmodi lineæ 144 continentur in uno pede; hæc instituatur proportio, $100 : 76 = 144 : x$. Numerus novæ speciei linearum, seu x erit $= \frac{76 \times 144}{100} = 109 + \frac{44}{100}$. Porro adjecta fractio $\frac{44}{100}$ nec unicam quidem integram lineam valet, ac proinde negligi potest. Integer autem linearum numerus $= 109$ dividatur per 12, ut hac ratione reducatur ad digitos: novus quotus $= 9 + \frac{1}{12}$ designabit 9 digitos, & 1 lineam. Unde patet jam, datas 3, 476 perticas æquivalere 5 hexapedis, 4 pedibus, 9 digitis, & 1 lineæ. Quibus, si lubet, adjicere potes $\frac{44}{100}$ lineæ partes, quas superius negleximus.

3) Quodsi in dato perticarum numero post digitos nullæ adsint lineæ; numerus digitorum addito a dextris zero reducatur ad speciem linearum, & reliqua fiant, ut ante. Si autem in dato perticarum numero non tantum lineæ, sed etiam linearum decimæ adessent; decimæ hæ negligantur, & reliqua fiant, ut ante.

CAPUT

CAPUT QUINTUM.

De quibusdam Instrumentis Geometricis.

Priusquam ad ipsas linearum mensurationes gradum faciamus, non erit abs re describere instrumenta quædam Geometrica, videlicet Scalam geometricam, Goniometricum, & Mensulam Prætorianam, eorumque usus indicare.

De Scala Geometrica.

231. *Scalam Geometricam* exhibet Figura 61; in qua tamen literas, & numeros complures nonnisi demonstrationum facilius intelligendarum gratia addidimus. Hæc autem est Scalæ geometricæ constructio.

1) Fiat parallelogrammum rectangulum ABDC; cujus latus AB dividatur in 10 æquales partes.

2) In recta AC capiantur quæcunque 10 æquales partes sumpto ab A initio, quarum ultima terminetur e. g. in E; tum per E ducatur recta EG ad AB parallela, & BG = AE pariter in easdem 10 æquales partes dividatur.

3) Puncta divisionum in rectis AE & BG connectantur per rectas transversas ita, ut prima transversa ex puncto E ducatur ad K, altera ex 1 ad 2, tertia ex 2 ad 3, & sic porro, quemadmodum in Figura videre est: tum per omnia divisionis rectæ AB puncta ducantur parallelæ ad AC.

4) Denique intervallum AE transferatur in rectam EC, quoties fieri potest, seu fiat EF = AE, & FN pariter = AE &c.; tum per divisionis puncta ducantur rectæ FQ, NS &c. ad AB parallelæ.

232. Coroll. I. Igitur in recta IZ particula I9, seu recta lineola inter notas I & 9 intercepta, est $\frac{1}{10}$ pars rectæ A*m*. Nam in triangulis AB*m* & IB9, ob I9 ad A*m* parallelam, est BI : BA = I9 : A*m* (152): atqui ex constr. BI æquatur $\frac{1}{10}$ parti rectæ BA; ergo etiam I9 æquatur $\frac{1}{10}$ parti rectæ A*m*. Eodem modo patet, re-

ctam II. 8 æquari $\frac{2}{10}$ partibus rectæ *Am*; rectam III. 7 esse $\frac{3}{10}$ *Am*. & sic porro.

233. Coroll. II. Hinc si AE repræsentet perticam; imprimis *Am* repræsentabit pedem unum, A8 pedes duos, A7 tres, & sic porro: deinde I9 repræsentabit digitum unum, II. 8 digitos duos, III. 7 tres digitos, & sic porro. Si autem AE ponatur repræsentare pedem; *Am* repræsentabit digitum unum, I9 lineam unam. Sicut enim *Am* est $= \frac{1}{10}$ AE, & I9 $= \frac{1}{10}$ *Am*, ita etiam pes æquatur $\frac{1}{10}$ parti perticæ, digitus $\frac{1}{10}$ parti pedis, linea $\frac{1}{10}$ parti digiti (225).

234. Coroll. III. Recta lineola *al* (non secus ac I9) æquatur $\frac{1}{10}$ parti rectæ *Am*. Nam in triangulis KEG & *a*E*l*, ob *al* ad KG parallelam, est E*l*: EG $=$ *al*: KG (152): cum ergo ex ipsa Figuræ constr. sit E*l* $= \frac{1}{10}$ EG; est etiam *al* $= \frac{1}{10}$ KG: atqui ex constr. Fig. patet, esse KG $=$ *Am*; ergo est quoque *al* $= \frac{1}{10}$ *Am*. Eodem modo patet esse *bn* $= \frac{2}{10}$ *Am*, *cq* $= \frac{3}{10}$ *Am*, & sic porro.

235. Coroll. IV. Quodsi ergo AE repræsentet perticam, adeoque *Am* pedem; *al* (non secus ac I9) repræsentabit digitum; si autem AE repræsentet pedem, adeoque *Am* digitum; *al* (non secus ac I9) repræsentabit lineam.

Schol. Nobis recta AE in quinque sequentibus Problematis repræsentabit perticam; ac proinde *Am* pedem, & tam I9, quam *al* digitum.

236. PROBLEMA XXXIV. *Unica circini apertura desumere ex scala aliquot perticas cum aliquot pedibus, e. g. 2 perticas, 7 pedes.*

Resolut. Cum intervalla AE, EF, EN repræsentent nobis perticas, & partes rectæ AE repræsentent pedes; si 2 perticas, 7 pedes unica circini apertura desumere vis, in recta AC ex puncto E ascendendo numera 7 particulas rectæ AE, usque dum pervenias ad notam 7; deinde ex eodem puncto E descendendo numera duo intervalla majora, usque dum pervenias ad N: cir-

circini apertura, quæ ſit æqualis intervallo N7, continebit 2 perticas, 7 pedes.

237. PROBLEMA XXXV. *Unica circini apertura deſumere ex ſcala aliquot perticas cum aliquot digitis, e. g. 2 perticas, 6 digitos.*

Resolut. Cum AE repræſentet nobis perticam; in triangulo KEG parallela *ft*, quæ eſt ſexta, ſumpto ab *a* initio, æquatur ſex digitis (234): cum ergo ſit *t*T = 2AE; ſi unum circini crus applicetur ad T alterum extendatur ad *f*, intervallum T*f* erit æquale 2 perticis, 6 digitis

Eodem modo, ſi capi debeat e. g. una pertica cum 4 digitis; ob *dr* = 4 dig & ob M*r* = 1 perticæ, intervallum M*d* continebit unam perticam, & quatuor digitos.

238. PROBLEMA XXXVI. *Unica circini apertura deſumere ex ſcala aliquot pedes cum aliquot digitis, e. g. 5 pedes, 4 digitos.*

Resolut. In triangulo KEG exquire parallelam *dr*, quatuor digitos continentem (234); tum in recta *do*, ſumpto a puncto *d* initio, numera 5 pedes verſus *o* aſcendendo: quoniam 5tus pes terminabitur in *o*, intervallum *ro* (utpote = *dr* + *do*) erit 5 pedibus, 4 digitis.

239. PROBLEMA XXXVII. *Unica circini apertura deſumere ex ſcala aliquot perticas cum aliquot pedibus, & digitis, e. g. 2 perticas, 4 pedes, 6 digitos.*

Resolut. Imprimis in triangulo KEG exquire parallelam *ft*, ſex digitis æqualem; deinde a puncto *f* aſcendendo numera 4 pedes, qui terminabuntur in *y*; denique a puncto *t* deſcendendo numera 2 perticas, qui terminabuntur in T. Circini apertura = *y*T dabit 2 perticas, 4 pedes, 6 digitos. Nam rectæ *y*T pars *yf* eſt = 4 ped. pars *ft* = 6 dig., pars *t*T = 2 perticis.

Schol. Si capi deberent pedes cum aliquot digitis & lineis, e. g. 2 pedes, 4 digiti, 6 lineæ; recta AE deberet poni æqualis uni pedi: quo poſito recta *y*T repræſentaret 2 pedes, 4 digitos, 6 lineas.

240. PROBLEMA XXXVIII. *Datam rectam ad ſcalam applicare, ut innoteſcat, quotnam, & quales ſcalæ partes ea contineat.*

Re-

Resolut. Capiatur data recta circino, tum exploretur, num uno circini crure ad punctum N applicito, crus alterum cadat in rectam AE. Si ita; crura circini ducantur per ſcalam motu parallelo verſus rectam BD, ita ut crus unum conſtanter per rectam NS progrediatur: idque tamdiu, dum crure illo, quod per rectam NS vadit, in aliquo diviſionis puncto e. g. in T exiſtente, crus alterum in eadem recta ad AC parallela incidat in aliquod diviſionis punctum e. g. in *y*. Hoc obtento, data recta erit æqualis rectæ T*y*, adeoque (ob T*t* = 2 pert. ob *tf* = 6 dig. & ob *fy* = 4 ped.) æquabitur duabus ſcalæ perticis, 4 pedibus, & ſex digitis. Si autem uno crure cadente in R, alterum in eadem recta ad AC parallela caderet in punctum diviſionis *o*; data recta contineret duas ſcalæ perticas, 5 pedes, 4 digitos. Et ſic porro.

Schol. 1. Si uno circini crure ad N applicito, alterum ob datæ rectæ parvitatem non pertingeret usque ad rectam AE; crus primum applicetur ad F, vel E, adeoque ducatur per rectam FQ, vel EG. Quod ſi uno crure e. g. ad M perveniente, alterum inciderit in *d*; recta data = M*d*, continebit unam perticam, 4 digitos: ſi autem uno crure e. g. ad *t* applicito, alterum pertingat ad *y*; data recta = *ty*, nonniſi quatuor pedum, ſex digitorum erit. Et ſic porro.

Schol. 2. Quodſi autem data recta longior fuerit, quam ut circino comprehendi, aut ſcalæ dicto modo applicari queat; capiatur ejus pars dimidia, vel tertia, vel quarta &c.: ſi enim conſtiterit, quotnam ſcalæ partes ea pars contineat, facile innoteſcet numerus partium ſcalæ, in tota recta contentarum. Ceterum ſi praxis hæc in prolixioribus geometricis operationibus, ut agrorum, pratorum dimenſionibus, diviſionibusque moleſta tibi fuerit; in plana tabula duc longiorem lineam rectam, eamque in complures majores partes inter ſe æquales, quæ perticas repræſentare queant, divide: tum ultimam perticam in decem pedes, pedem in decem digitos partire. Habebis ſcalam, quæ ad uſus ordinarios ſat apta erit.

Schol. 3. In ſcala pro hexapedis conſtruenda aliam eſſe debere diviſionem linearum AB & AE, ac ſit

ſit in ſcala hac decempedis accommodata, cuique clarum eſt.

De inſtrumento Goniometrico, & Menſula Prætoriana.

241. Inſtrumentum, quod ad metiendos in campo angulos adhibetur, *Goniometricum* vocari conſuevit. Illud, quod Figura 62da exhibet, conſtat imprimis ſemicirculo ABD, in 180 gradus diviſo (ſolet autem quilibet gradus in alias minores partes ſubdividi, e. g. in partes ſex, quarum quævis æquivaleat decem minutis); conſtat deinde duabus regulis AD, & BE. quæ in extremitatibus ſuis adnexas habeant dioptras A, D, & B, E, perpendiculariter erectas: ac regula AD quidem cum ſemicirculi diametro congruere, fixaque eſſe debet; altera autem BE circa ſemicirculi centrum C ultra citraque mobilis ſit oportet. Jam quod ad uſum Goniometrici attinet, ſit

242. PROBLEMA XXXIX. *Angulum in campo metiri.*

Resolut. 1) Inſtrumentum Goniometricum ita collocetur, ut ejus centrum C immineat vertici anguli metiendi. Iſtud obtineri poteſt ope perpendiculi, e. g. fili, cujus extremitati globulus plumbeus appenſus ſit: ſi enim una fili extremitate, inſtrumenti centro applicita, plumbeus globulus cadat in verticem anguli metiendi; huic vertici centrum inſtrumenti imminere clarum eſt.

2) Inſtrumenti radius AC congruat cum uno anguli metiendi crure. Iſtud obtinetur, ſi in baculum, qui extremitati cruris perpendiculariter infixus ſit, ita collineetur per dioptras D & A, ut radius viſualis in medium craſſitudinis baculi incurrat, vel, ſi dioptræ filis perpendiculariter erectis inſtructæ fuerint, ut filum dioptræ ab oculo remotioris obtegatur a filo dioptræ vicinioris, duoque illa fila inſtar unius apparentia, cum baculo dicto in eadem recta cernantur eſſe.

3) Regula BE circa centrum C mobilis promoveatur verſus alterum anguli metiendi crus, donec baculus hujus cruris extremitati perpendiculariter infixus per diop-

dioptras E & B collineanti eodem modo occurrat, quo nunc de baculo prioris cruris extremitati infixo locuti ſumus.

4) His peractis numerentur gradus, quos in ſe continet arcus AB, inter regulas AC & BC interceptus: totidem graduum erit is quoque angulus, quem metiendum ſumpſiſti. Cum enim regulæ AC & BC ita collocentur, ut congruant, cum lateribus anguli metiendi, vel potius, ut ita iis immineant, ut ſint iisdem parallelæ; angulus metiendus eſt = ang. ACB: ergo (19).

Schol. 1. Baculus poteſt infigi terræ perpendiculariter ope perpendiculi, e. g. fili extremitati ſuæ plumbeum globulum adnexum habentis: ſi enim ita ſteterit baculus, ut quacunque ex parte applicetur ejus vertici perpendiculum, globulus libere pendens ſemper proxime radat ejusdem baculi latus; is baculus terræ perpendiculariter inſiſtet.

Schol. 2. Ut in anguli dimenſione error notabilis evitari queat; Goniometricum rite conſtructum ſit, eſt neceſſe. Ac 1) quidem arcus ABD accurate ſemicircularis ſit, oportet, in 180 gradus *æquales* exacte diviſus. 2) Mobilis regula BE pro centro ſuæ rotationis habeat accurate ipſum ſemicirculi centrum C, hoc eſt, accurate centrum C ſit punctum illud, circa quod regula illa movetur: id quod hac ratione poteſt detegi. Mobilis illa regula adducatur ad regulam fixam AD; tum ope ſtili acuti notetur in acie ejusdem regulæ mobilis punctum B, quod cum puncto A, ſeu cum initio peripheriæ ſemicircularis inſtrumento inciſæ congruit: denique convertatur mobilis illa regula, dum motu ſuo ſemicirculum deſcribat, noteturque ſemita puncti B. Quodſi punctum iſthoc conſtanter manſerit in peripheria ſemicirculari, initium in A habente; id erit indicio, centrum rotationis idem eſſe cum centro inſtrumenti: ſin autem ſemita puncti B exerraverit e dicta peripheria; centrum rotationis cum centro inſtrumenti non congruet, ac proinde inſtrumentum vitioſum erit.

3) Curandum eſt, ut dioptræ, ſive conſtent filis tenuibus, ſeu lineis in lamina orichalcina exciſis, ſint ad planum inſtrumenti perpendiculares; & fixæ quidem dioptræ A & D accurate congruant cum punctis 0°,

&

& 180°, mobiles autem B & E cum acie regulæ mobilis. numerum graduum abſcindente. 4) Si regula mobilis BE adducatur ad fixam AD (ut enim iſtud fieri poſſit, regula fixa eſt plerumque longior mobili) quatuor dioptræ debent unius inſtar apparere transſpicienti, & fila ſeſe mutuo accurate tegere: id niſi eveniat; vitioſa eſt dioptrarum collocatio, ac proinde emendanda.

243. Menſula, quam *Prætorianam* vocant, ope limbi exemptilis obtegitur charta munda, & tribus pedibus circa ſuos axes verſatilibus ita fulcitur, ut ad omnem ſitum, pedibus magis, minusve explicatis conſtitui poſſit. Præcipuum ejus organum eſt regula dioptrica: in qua pariter ſedulo curari debent ea, quæ de dioptrarum collocatione nunc in præc. *Schol.* 2. ſub finem dicta ſunt; ut nimirum dioptræ ſint ad planum regulæ perpendiculares &c.

CAPUT SEXTUM.

De Menſurationibus Linearum.

244. PROBLEMA XL. *Lineam rectam in campo deſignare.*

Resolut. Linea recta in campo deſignari ſolet per baculos terræ ita infixos, ut ſint imprimis ad horizontem perpendiculares (242. *Schol.* 1.), deinde ut ſint omnes in eadem linea recta. Et quidem.

I. Si non plus deſignandum ſit, quam unum datæ in campo rectæ extremum eſſe in A, alterum in M (*Fig.* 63); duo baculi recti, teretes, & inferne cuſpidati perpendiculariter infiguntur terræ, unus in A, alter in M. Solet autem eorum ſummitati alligari ſtrophiolum, aut folium chartæ mundæ, ſi e longinquo videri debeant: vel (quod melius eſt) appenditur utrique tabula certo ſigno notata, e g. tabula nigra A (*Fig.* 64) cum annulo albo nigrum circellum ambiente, aut tabula nigra B cum alba cruce &c.

II. Si autem rectæ punctis A & M (*Fig.* 63) terminatæ ductus in ipſo ſolo accurate determinandus ſit; plu-

plures adesse debebunt baculi recti, teretes, & inferne cuspidati. Horum duobus in M & A ita defixis, ut sint ad horizontem perpendiculares, jube laboris adjutorem cum reliquis baculis ex A versus M progredi, tum subsistere circa B, ibique baculum perpendiculariter defigendum (tentato vario defixionis loco) eo usque dirigere, dum tibi per extremitatem baculi A versus M aspicienti baculus B baculum M tegat. Alter baculus eodem modo defigendus erit a socio laboris in C, te infra B constituto, ipsumque, ut prius, dirigente, & sic porro. Hac methodo rite determinari lineæ rectæ ductum, e rectilinea lucis propagatione intelligere licet.

III. Si ex A versus aliquam plagam M linea recta baculis designari debeat, quin possit videri terminus M, scirique, num linea ducenda accurate per M transitura sit; defixis perpendiculariter baculis A & B ita, ut B respectu A cadat versus plagam M, transeat adjutor laboris ad C, ibique defigat perpendiculariter baculum ita, ut tibi per extremitatem baculi A versus M aspicienti baculus B tegat baculum C: defigatur deinde ab Adjutore baculus in D perpendiculariter ita, ut tibi ad baculum C constituto, perque ejusdem extremitatem versus M aspicienti baculus C tegat baculum D; & sic porro. Baculi hac ratione defixi, omnes in eadem linea recta erunt.

245. PROBLEMA XLI. *Datam in campo lineam rectam mensurare, quotnam ea perticas, pedes &c. in se contineat.*

Resolut. Imprimis ad manus sit, oportet mensura legitima. Solet autem pro mensura adhiberi vel 1) catena composita e crassioris fili ferrei portionibus æqualibus, pedem integrum, aut dimidium æquantibus, atque annulorum ope connexis; interjecto aut post quosvis denos pedes (si decempedis utendum sit) aut post senos quosque (si catena pro hexapedis constructa sit) annulo orichalcino: eo scilicet fine, ut decempedæ, aut hexapedæ eo facilius numerari queant. Vel 2) adhibetur funis, e. g. eo, quem n 101. in *Schol.* 2. descripsimus, modo præparatus, & in pedes, ac perticas divisus. Vel denique 3) adhibentur decempedæ

ex

ex ligno efformatæ, non nimis flexiles, inque pedes divisæ. Præterea præsto esse debet alia quoque mensura pedem in digitos, aut etiam dimidios digitos divisum continens; nisi forte ipsius catenæ, aut funis pes ultimus hoc modo divisus esset.

Deinde mensuratio ipsa e. g. ope catenæ hoc modo peragitur. Sit mensuranda recta AM. 1) Defixis in A & M ad perpendiculum baculis, primus catenæ annulus inseritur baculo A, fortiter in terram adacto: tum laboris socius apprehenso altero catenæ extremo versus M progreditur, catenam, quantum res sinit, tendit, ejusque extremo annulo insertum baculum B ita defigit, ut tibi interim ad A remanenti, & versus M aspicienti baculus B baculum M tegat.

2) Postquam socius extremum catenæ in B rite fixit, tu revulsum baculum A cum catena ad C transfers, idemque illic præstas, quod socius in B egerat: nempe baculum annulo extremo insertum perpendiculariter defigis in C ita, ut socio tuo in B remanenti, & versus M aspicienti baculus C baculum M tegat. Eodem modo socius ex B in D transferet extremum catenæ &c. donec ad M perveniatur.

3) Numeretur, quoties catenæ extremum ex uno termino in alterum translatum fuerit, donec ex A ad M perveniretur: & siquidem in fine, postquam integræ perticæ, & pedes toties applicati jam sunt, quoties poterant, adhuc a baculo M aliquot digitis mensura abfuerit; etiam numerus horum digitorum ineatur ope alterius mensuræ, pedem in digitos divisum continentis, cujus superius meminimus. Summa omnium perticarum, pedum, ac digitorum exprimet quantitatem rectæ AM.

Schol. 1. Alii rectam AM, si longior sit, prius pluribus baculis designant ea methodo, quam n. 244. 2do loco descripsimus; tum funem, aut catenam ab uno baculo ad alterum successive transferunt, dum ad ultimum perveniant.

Schol. 2. In mensurationibus ad hæc sedulo attendendum est. 1) Funis, & catena, si justo minus tendatur, sinus, & flexus facit notabiles, ac proinde dat distanſtantiam vera majorem: ſi autem nimiopere tendatur; baculum, cui extremitas ipſius affixa eſt, loco emovet, vel inclinat: immo nimia tenſio ipſius etiam catenæ longitudinem flexis annulis augere poteſt. 2) Dum catena tenditur, examinandum eſt, utrum annuli omnes rite diſpoſiti, & in debito ſitu ſint: ſecus enim facile eveniet, ut inter ſe implexi longitudinem catenæ minuant. 3) Examinanda eſt prima, & poſtrema catenæ decempeda, aut hexapeda; utrum initium menſuræ computandum ſit ab ipſo extremi annuli centro, ac proinde a media craſſitudine baculi, annulo illi inſerendi, an aliter. Si primum obtinere fuerit deprehenſum; nulla correctione opus erit in computatione perticarum: ſin minus; pro quavis catenæ translatione aliquid correctionis adhibendum erit in calculo, prout nempe initium menſuræ ab exteriore, vel interiore annuli extrema parte ſumendum fuerit.

Schol. 3 Longitudo catenarum tres vel quatuor decempedas excedere non debet; ne pondere ſuo moleſtæ ſint. Funes vero communes cannabini vitandi ſunt, utpote quos humor notabiliter contrahit, & vires diverſæ inæqualiter tendunt: ex adverſo ſi funem eo, quem n. 101. in *Schol.* 2. deſcripſimus, modo præparaveris; teſte Illuſtr. Wolffio nullum in eo longitudinis decrementum notabis, etiamſi eum per diem integrum ſub aquis demerſum detineas.

Schol. 4. Quoniam raro habetur ſolum ita æquabile, ut catena, vel funis non faciat flexus, & ſinus ſat notabiles, niſi cum emotione baculi e debito ſitu, juſto magis tendatur; dum magna admodum accuratione opus eſt, rectius adhibentur perticæ e ligno efformatæ, non nimis flexiles. Collocantur autem in eadem recta, ita ut earum extremitates ſe ſe accurate contingant; ſuppoſitis etiam cruribus, ſi hiatus, & aſperitates in ſolo menſurando occurrentes id poſcant. Porro poſtquam duæ, aut tres id genus perticæ rite jam diſpoſitæ fuerint, e. g. AB, BC, & CD; pertica prima AB, ceteris ſuo in ſitu accurate retentis, transfertur ad DE, rurſusque rite dirigitur: hoc facto transfertur BC, tum CD, & ſic porro. Quod ſi autem unica duntaxat pertica lignea uti libuerit: juvabit ejus extremitates annulis

fer-

ferreis inſtruere, quibus baculi (uti de catenis locuti ſumus) inſeri poſſint. Uſus te plura docebit.

246. PROBLEMA XLII. *Metiri diſtantiam mutuam duorum locorum* A & B (*Fig.* 65, *quorum uterque ex eodem tertio loco* C *videri, & accedi poſſit, tametſi intervallum* AB *permeari nequeat.*

Resolut. I. *Ope menſulæ prætorianæ.* 1) Menſulæ alicubi in C, unde uterque locus A & B cerni, & accedi poſſit, ſitu horizantali collocatæ infigatur acicula C, huicque applicetur regula dioptrica: tum per dioptras collineetur in objectum A, e. g in arborem illic ſorte exiſtentem, aut ſaltem in baculum ibidem perpendiculariter defixum, ducaturque in charta (qua probe extenſa menſula obduci ſolet) recta indefinita C*a*. Porro manente eodem menſulæ ſitu, dirigatur regula verſus B, ſed ita, ut aciculam C conſtanter tangat; & facta collineatione ducatur recta indefinita C*b*.

2) E puncto C, in quo acicula defixa eſt, demittatur in terram perpendiculum, & in eo ſoli loco, in quem cadit perpendiculum, remota menſula defigatur baculus; tum ope catenæ menſurentur diſtantiæ CA & CB (245).

3) Inventæ diſtantiarum CA & CB quantitates deſumantur e ſcala geometrica ope Problematum n. 236. & ſequent. pertractatorum, & in rectas C*a* & C*b* in menſula ductas transferantur; ſcilicet diſtantia CA transferatur in C*a*. CB in C*b*: denique puncta *a* & *b*, in quibus terminantur diſtantiæ translatæ, connectantur per rectam *ab*. Recta *ab*, ſi ad eandem ſcalam applicetur (240), indicabit perticas, pedes, digitos diſtantiæ AB.

Nam in triangulis CAB & *cab*, eſt ex conſtr. C*a* : CA = C*b* : CB, & angulus ad C eſt utrique communis: conſequenter triangula hæc ſunt ſimilia (157): ſtat ergo in eis, C*a* : CA = *ab* : AB (156). Hinc quemadmodum recta C*a* particulis ſuis exhibet perticas, pedes, digitos diſtantiæ CA, ita recta *ab* exhibebit perticas, pedes, digitos diſtantiæ AB.

Schol. 1. Menſulæ ſitus horizontalis obtineri poteſt ope *libellæ* aquaticæ (*Tab. V. Fig.* 66.), id eſt. tubi vitrei tubo orichalcino incluſi, ita, ut ſpatio DC vitrum videri possit. Scilicet tubus vitreus aquam cum bulla aeris majuscula M continet; tubus orichalcinus CDEF firmatur supra regulam itidem orichalcinam AB. Jam bulla medium tubi vitrei occupante, regula AB situm horizontalem obtinet, adeoque etiam mensula, cui hæc regula suo plano congruit. Idem obtineri potest etiam ope trianguli majoris lignei ABC (*Fig.* 67): quod quam accuratissime sit isosceles. Ex vertice trianguli suspenditur perpendiculum AP, capsæ ligneæ AF (cujus anterior pars vitro muniri solet) inclusum. Brachium transversale DE ita additur, ut sit AD = AE; notatque in eo artifex punctum, quod a filo perpendiculi obtegitur tunc, quum trianguli pedes B & C reapse in situ horizontali sunt. Hoc itaque triangulo mensulæ imposito, si a perpendiculi filo libere quidem pendente, sed tamen capsæ fundum proxime radente, obtegatur punctum ab artifice adnotatum; mensula situm horizontalem obtinet.

Schol. 2. E mensulæ puncto (*Tab. IV. Fig.* 65), in quo acicula defixa est, perpendiculum in terram commodissime demittitur ope forcipis CAB (*Tab. V. Fig.* 68), cujus crus superius in acumen C desinit, crus autem inferius foramello pertusum in B infra C, appensum habet perpendiculum BP: denique crurum intervallum CB est tantum, ut mensulæ crassitudinem commode capiat. Scilicet, si forcipis acumen C applicetur mensulæ puncto C, ejusdem mensulæ crassitudine in sinum CAB inserta; perpendiculum BP eidem puncto C infra mensulam applicabitur: consequenter ei terræ loco imminebit mensulæ punctum C, in quod plumbago P ceciderit.

247. Resolut II. *Ope Goniometrici.* 1) Collocetur goniometricum (241) alicubi in C (*Tab. IV. Fig.* 65.) situ horizontali, mensureturque angulus ACB (242); tum ex instrumenti centro C demittatur perpendiculum, ut innotescat in terra locus C, cui centrum illud immineat: denique mensurentur in terra ope catenæ, aut funis distantiæ CA & CB.

2) In charta munda fiat angulus *aCb*, æqualis angulo ACB ope goniometrici determinato (22. *Schol.*); tum quantitates distantiarum CA & CB, ex scala geome-

metrica desumantur (236, vel sequ.), transferanturque in rectas Ca & Cb: denique puncta a & b, in quibus terminantur translatæ distantiæ, per rectam ab connectantur. Recta ab, si ad eandem scalam applicetur (240), indicabit perticas, pedes, digitos distantiæ AB.

DEMONSTRATIO est prorsus eadem, quæ *Resolutionis* I.

Schol. Si neque mensula Prætoriana, neque Goniometricum sit ad manus; distantiam duorum locorum A & B (*Tab. V. Fig.* 69), quorum uterque ex eodem tertio loco C accedi, viderique possit, ope solius catenæ, vel funis, & baculorum metiri poteris hoc modo:

1) Elige stationem alicubi in C, unde ambo loca videri, & accedi possint; tum defixo in C baculo, designa aliquot baculis rectas indefinitas Aa, Bb, per punctum C transeuntes.

2) Ope catenæ, vel funis dimetire distantias AC & BC; tum earum quaspiam partes *aliquotas* (pars *aliquota* est, quæ aliquoties accepta adæquat totum; e. g. alicujus quantitatis pars quarta est ejusdem pars aliquota, utpote quæ quater accepta quantitatem illam accurate adæquat) earum, inquam, quaspiam partes aliquotas e. g tertias, vel quartas cape in rectis Ca & Cb; ita, ut si ceperis rectam Ca, æqualem $\frac{1}{3}$ parti rectæ AC, etiam Cb ita capi debeat, ut sit æqualis $\frac{1}{3}$ parti rectæ BC. Recta ba, seu distantia mutua punctorum a & b, in quibus partes aliquotæ terminantur, erit eiusdem denominationis pars aliquota distantiæ AB, cujus denominationis partes aliquotæ fuerint Ca & Cb respectu distantiarum AC & BC; ita ut si rectæ Ca & Cb fuerint partes tertiæ rectarum AC & BC, etiam ba sit futura pars tertia rectæ AB. Consequenter, ut distantiæ AB quantitas innotescat, sufficiet mensurare distantiam ba, eamque multiplicare per 3. vel 4. &c, prout nempe fuerit tertia, vel quarta &c. pars distantiæ AB.

Ponamus enim rectas Ca & Cb esse ex constr. tertias partes rectarum AC & BC. In triangulis ABC & abC est $AC : BC = Ca : Cb$; nam duarum quantitatum partes aliquotæ eandem denominationem habentes, e. g. tertiæ, vel quartæ &c. sunt in ratione ipsarum integrarum quantitatum, uti ex *Algeb.* n. 197. intelligere licet. Cum ergo præterea anguli verticales ad C æquales ſint (37): ea triangula ſunt ſimilia (157). Hinc ſtat in iis, AC: C*a* = AB: *ba* (156): atqui C*a* eſt ex conſtr. pars tertia diſtantiæ AC; ergo etiam *ba* eſt tertia pars diſtantiæ AB: conſequenter recta *ba* ter accepta æquatur diſtantiæ AB.

248. PROBLEMA XLIII. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A *&* B (*Fig.* 70), *quorum unus tantum* A *poſſit accedi.*

RESOLUT. I. *Ope menſulæ Prætorianæ.* 1) Eligatur ſtatio in C, unde locus uterque cerni, A vero accedi etiam poſſit, loceturque illic menſula ſitu horizontali: tum fiant, uti ſupra n. 236 expoſitum eſt, collineationes, & ducantur in menſula rectæ indefinitæ ex C verſus A & B juxta ductum regulæ dioptricæ.

2) E puncto C, in quo acicula defixa eſt, demittatur perpendiculum in humum, & in eo ſoli loco, in quem cadit perpendiculum, remota menſula deſigatur baculus C; tum diſtantia CA ope catenæ menſurata transferatur e ſcala ex C in *a*; atque acicula e menſulæ puncto C extracta deſigatur in *a*.

3) His peractis transferatur menſula ad locum A, & collocetur ſitu horizontali ita, ut punctum *a* loco A directe immineat: tum applicetur regula dioptrica lineæ *a*C in menſula deſcriptæ (quam lineam Figura in ſtatione A jam litteris A*c* exprimit) & moveatur ita menſula (quin tamen punctum *a* deſinat imminere loco A) ut per dioptras videatur pertica in loco C deſixa, ac proinde ita, ut recta A*c* cum AC congruat. Denique fiat penes aciculam collineatio verſus locum B, & ducatur recta, quæ rectam *cb*, in ſtatione C verſus B ductam, ſecet in puncto *b*.

Recta A*b* ſcalæ applicita indicabit ſuis particulis numerum perticarum, pedum &c. diſtantiæ AB. Nam in triangulis ABC & A*bc* anguli C & *c* æquales ſunt; quippe angulus *c* eſt ipſe angulus C ex una ſtatione in alteram translatus: cum ergo præterea angulus A utrique triangulo ſit communis; duo hæc triangula ſunt ſimilia. Itaque ſtat in iis, A*c*: AC: = A*b*: AB: (156); conſequenſequenter ſicut recta Ac ex conſtr. ſuis particulis repræſentat diſtantiam AC, ita Ab repræſentabit diſtantiam AB.

249. RESOLUT. II. *Ope Goniometrici.* 1) Electa commoda ſtatione in C, menſuretur ope Goniometrici angulus ACB; tum transferatur goniometricum in A defixo prius in C baculo, menſureturque etiam angulus CAB: his menſuratis innoteſcit etiam tertius trianguli angulus ABC (107).

2) Menſuretur ope catenæ diſtantia AC, atque numerus perticarum, pedum &c. adnotetur. His peractis cogniti erunt in triangulo ABC tres anguli cum uno latere AC; ergo per n. 224 etiam latus AB facile innoteſcet: ſcilicet ſi hæc inſtituatur proportio:

ſin ang. B : AC = *ſin.* ang. C : AB.

Schol. Juvat ipſum hujusmodi operationis calculum in exemplo videre. Sit ang. C = 80°, A = 56°, 20'; erit ang. B = 43°, 40' (107): ſit deinde latus AC = 53, 26 pertic., ſeu ſit = 5326 *dig.* (226. Schol. 3.): ſi præterea numerus digitorum in quæſito latere AB contentorum dicatur x; proportio ſuperius poſita abit in hanc, *ſin.* ang 43°, 40': 5326 *dig.* = *ſin.* ang. 80° : x.

Jam, ut evitetur moleſtia, quæ in horum numerorum multiplicatione, ac diviſione exhauriri deberet, ſubſtituamus iis logarithmos ipſorum: ſcilicet logarithmi angulorum quærantur in tabulis ſinuum; (213. *Schol.* 1.) logarithmus autem numeri 5326, in tabulis logarithmorum numerorum naturali ſerie creſcentium. Hanc autem dabunt logarithmi proportionem:

9, 8391396 : 3, 7264012 = 9, 9933515 : *log.* x.

Porro ut hac in proportione acquiratur terminus quartus, medii in ſummam unam addendi ſunt, & ab ea ſumma terminus primus ſubtrahendus (*Algeb.* 238. & 240). Quo facto acquiritur *log.* x = 3, 8806131; quo logarithmo proxime minor in tabulis numerorum naturali ſerie creſcentium eſt 3, 8805850, ſibi reſpondentem habens numerum 7596. Itaque latus AB continet in ſe 7596 digitos, & præterea aliquam digiti unius fractionem; quæ poteſt aut negligi, aut *circiter* determinari.

Nisi forte numerum, qui invento logarithmo 3, 8806151, in tabulis non occurrenti accuratius respondeat, determinare malis ea methodo, quam *Algebr.* n. 242. descripsimus. Porro inventi 7596 digiti facile reducuntur ad perticas, & pedes &c.; sunt enim = 75, 96 perticis, seu æquivalent 75 integris perticis, 9 pedibus, & 6 digitis (226. *Schol.* 3.).

250. PROBLEMA XLIV. *Metiri distantiam duorum locorum* A & B (*Fig.* 71.), *quorum neuter possit accedi.*

Resolut. I. *Ope mensulæ.* 1) Electis duabus commodis stationibus C & D, e quarum utraque cerni locus uterque possit, collocetur mensula primum in C situ horizontali, factisque rite collineationibus ducantur in ea rectæ indefinitæ versus A, B, & D.

2) E puncto C, in quo acicula defixa est, demittatur perpendiculum in humum, & in eo soli loco, in quem cadit perpendiculum, remota mensula defigatur baculus C; tum distantia CD ope catenæ mensurata transferatur e scala in mensula ex C in *d*, atque acicula ex C extracta infigatur in *d*.

3) His peractis transferatur mensula ad stationem D, & collocetur situ horizontali ita, ut punctum *d* loco D directe immineat; tum applicetur regula dioptrica lineæ *d*C in mensula descriptæ, (quam lineam Figura in statione D jam literis D*c* exprimit) & moveatur ita mensula (quin tamen punctum *d* desinat imminere puncto D) ut per dioptras videatur pertica in statione C defixa, ac proinde ita. ut recta D*c* cum DC congruat. Denique penes aciculam fiant collineationes versus C, A, B, ducanturque rectæ prioribus occurrentes in punctis *a* & *b*; quæ puncta connectantur per rectam *ab*.

Recta hæc *ab* scalæ applicita indicabit suis particulis numerum perticarum, pedum &c. distantiæ AB. Nam imprimis similia sunt triangula ACD & *ac*D, ob angulum D utrique communem, & ob angulum ACD in *ac*D translatum: est ergo in iis, CD : *c*D = CA : *ca*. Deinde parem ob caussam similia sunt etiam triangula DCB & D*cb*, atque adeo stat in his, CD : *c*D = CB : *cb*.

Ita-

Itaque duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, eſt:

$$CA : ca = CB : cb.$$

Hac proportione inventa patet jam, ſimilia eſſe triangula ABC & *abc*. Nam angulus *acb* eſt ex ACB translatus, adeoque ob $CA : ca = CB : cb$, in dictis triangulis latera circa æquales angulos ſunt proportionalia; eo ipſo autem triangula illa ſunt ſimilia (157.).

Stat ergo in iis, $CA : ca = AB : ab.$
Atqui ſuperius erat $CA : ca = CD : cD$;
itaque ſtat, $CD : cD = AB : ab.$

Conſequenter ſicut *c*D ex conſtr. ſuis particulis repræſentat diſtantiam CD, ita *ab* repræſentabit diſtantiam AB.

251. Resolut. II. *Ope Goniometrici.* 1) Electis duabus ſtationibus C & D, inveniantur omnes anguli in triangulis ACD & BCD. Nempe ex ſtatione C menſurentur anguli ACD & BCD, ex ſtatione D autem anguli CDA & CDB: habitis duobus angulis in quovis triangulo tertius eo ipſo innoteſcet (107.). Situs autem goniometrici ſemper ſit ejusmodi, ut ejusdem regulæ cruribus anguli metiendi parallele immineant.

2) Ope catenæ menſuretur diſtantia CD; tum methodo n. 224. propoſita inveniatur in triangulo ACD latus AC, & in triangulo BCD latus BC. Facilioris autem calculi gratia ſemper angulis, & lateribus ſubſtituantur eorundem logarithmi, uti n. 249. in *Schol.* adhibuimus.

3) Cognitis lateribus AC & CB cum angulo intercepto $ACB = ACD - BCD$, inveniatur in triangulo ACB latus AB ex methodo, quam n. 223. II. expoſuimus.

Schol. 1. Si loca inacceſſa A & B (*Fig.* 72.) ejusmodi fuerint, ut nequeant inveniri duæ id genus ſtationes, e quibus ambo loca A & B cerni poſſint; prolixiore operatione opus erit ad inveniendam ipſorum diſtantiam, ſcilicet ope plurium triangulorum hoc e. g. modo. 1) Eligantur duæ ſtationes C & D ita, ut ex C ad A & D, ex D autem ad B & C proſpectus pateat.

2) Eligatur tertia ſtatio E, ex qua cerni poſſint loca A & C; tum captis ope goniometrici angulis *m* & *n*,

item mensurato ope catenæ intervallo EC, inveniatur in triangulo AEC latus AC (224).

3) Tametsi ex D non pateat ad A prospectus, adeoque angulus *n* goniometrico capi non possit; potest tamen capi angulus *r*: quo capto, mensuratoque ope catenæ intervallo CD, nota erunt in triangulo ACD latera AC & CD cum intercepto angulo *r*. Ex his per n. 223, II. inveniatur latus AD.

4) Hactenus institutæ operationes eo tendunt, ut triangulum ADB resolvi possit: in quo jam latus AD notum est; & ut etiam latus BD innotescat, eligatur quarta statio F, ex qua cerni possint loca B & D. Deinde captis ope goniometrici angulis *t* & V, mensuratoque ope catenæ intervallo DF, inveniatur in triangulo BFD latus BD (224.).

5) Hactenus in triangulo ADB nota sunt latera AD & BD: adhuc innotescere debet angulus *x*; qui goniometrico (quoniam ex D ad A non patet prospectus) capi nequit, sed hoc modo est inveniendus. Ex statione D capiatur goniometrico angulus CDF. ab hoc si subtrahatur angulus *n* (qui ex resolutione trianguli ACD jam prius innotescere debuit) item angulus *t*; remanet angulus *x*. Itaque in triangulo ADB cognita jam erunt latera AD & BD cum angulo intercepto *x*; ex quibus demum etiam latus AB inveniri poterit (223. II.).

Schol. 2. Hæc ope triangulorum, & plurium stationum E, C, D &c. operandi methodus in aliis quoque casibus variis adhiberi poterit: & aliquando quidem sufficient tres stationes, aliquando etiam quinque, aut plures necessariæ erunt, usque dum ad ultimi trianguli ADB resolutionem procedi possit; quemadmodum varios, qui occurrere possunt, casus expendenti patebit. e. g. Si ob varia, quæ sæpe occurrunt, impedimenta nequeat distantia CD ope catenæ mensurari; nova statio eligenda erit alicubi in G: ut nempe methodo numeri 244, vel 245 distantia CD determinari queat.

Schol. 3. Generatim notandum est: quandocunque stationes deligendæ sunt (sive in locorum distantiis, sive in altitudinibus, de quibus mox acturi sumus, dimetiendis) eas ita deligendas esse, ut anguli, quos metiri oportebit, non sint nimis parvi. Nam in capiendis an-

angulis exiguus quispiam error facillime committitur; qui error comparate ad parvum angulum major eſt, quam comparate ad angulum majorem: conſequenter eo majorem in dimenſione diſtantiæ, vel altitudinis pariet errorem, quo minor fuerit is angulus, in quo capiendo errorem illum commiſiſti. e. gr. Magis errabis ſi loco anguli 5 graduum ceperis angulum $= 5^\circ, 4'$. quam ſi loco anguli 50 graduum capias angulum $= 50^\circ, 4'$

252. PROBLEMA XLV. *Metiri altitudinem acceſſam* AB (*Fig.* 73).

Resolut. I. *Ope Goniometrici.* 1) Collocetur Goniometricum in ea ab objecto metiendo diſtantia, ut nullus angulus fiat nimis parvus, e. g. in ſtatione D; collocetur autem verticaliter, ut regula fixa FG ſit in ſitu horizontali. Id, quod obtinetur ope perpendiculi CP, e centro C demiſſi, cujus filum libere pendens, ſimulque inſtrumenti limbum proxime radens abſcindat ex eodem limbo gradum ꝯomum: vel etiam ope libellæ aquaticæ (246. *Schol.* 1.); ſi nempe eousque dirigatur goniometricum, dum in libella regulæ ſixæ applicata, bulla aerea medio loco conquieſcat.

2) Inſtrumento rite collocato, per dioptras regulæ mobilis ML fiat collineatio in ſupremum altitudinis punctum A, noteturque angulus GCM = ACE; tum diſtantia BD = EC menſuretur ope catenæ.

3) His peractis in triangulo ACE, ad E rectangulo notum erit latus EC cum angulo ACE; ac proinde per n. 221. facile invenietur latus AE: cui ſi addatur inſtrumenti altitudo CD = EB; acquiretur tota altitudo quæſita AB.

253. Resolut. II. *Ope umbræ.* Si planum circa datam altitudinem fuerit ſatis horizontale; baculus *ba* (*Fig.* 74.) in plano a Sole illuminato deſigatur perpendiculariter, menſureturque imprimis umbra altitudinis metiendæ AB. Deinde altitudo baculi extra terram eminens, denique umbra baculi; tum hæc inſtituatur proportio: ut baculi umbra *bc* ad ejusdem baculi altitudinem *ba* e terra eminentem, ita altitudinis AB umbra BC

ad

ad eandem altitudinem AB. Nam radii ſolares AC & *ac*, qui umbras uno, eodemque tempore terminant, ſunt ad ſenſum parallelæ: hinc cum etiam rectæ BC & *bc* ſint ex hyp. parallelæ, utpote horizontales; in triangulis ABC & *abc* anguli C & *c* ſunt æquales (124): cum ergo præterea anguli B & *b* ſint recti, triangula illa ſunt ſimilia (118). Stat ergo in eis, $bc : ab = BC : AB$.

Aliter Obſervetur momentum, quo Solis ſupra horizontem altitudo accurate 45 graduum fuerit, noteturque eo temporis momento in plano horizontali umbræ cuſpis C: umbræ longitudo BC erit æqualis altitudini perpendiculari AB. Nam angulum ACB metitur arcus, quem Sol ſupra horizontem jam emenſus eſt, ac proinde is angulus dicto temporis momento eſt $= 45°$. Hinc cum angulus ad B rectus ſit: etiam angulus $A = 45°$ ſit, oportet (105). Eo ipſo autem patet eſſe $BC = AB$ (112).

Schol. Quandonam altitudo Solis ſit $= 45°$, absque omni inſtrumento Aſtronomico determinari poteſt hoc modo Deſcribatur in plano horizontali circulus, inque ejus centro erigatur perpendiculariter ſtilus, qui ſit circuli radio æqualis: quum hujus ſtili umbra accurate in ipſa circuli peripheria terminata fuerit, erit Solis altitudo $= 45°$. Cum enim tunc ſtilus *ab* æquetur umbræ ſuæ *bc*; etiam anguli *a* & *c* æquantur inter ſe (112); ac proinde uterque, ob angulum *b* rectum, erit $= 45°$: atqui tunc, quum angulus *c* eſt $= 45°$, etiam altitudo Solis eſt $= 45°$, utpote quæ eſt menſura anguli *c*; ergo.

254. RESOLUT. III. *Ope duorum baculorum.* Duos baculos inæquales DC & *dc* (*Fig.* 73.) infige terræ perpendiculariter, ita ut per apices C & *c* videas punctum A; tum hanc inſtitue proportionem: uti ſe habet duorum baculorum diſtantia mutua D*d* ad eorundem baculorum differentiam FC, ita ſe habet diſtantia B*d* ad differentiam inter altitudinem quæſitam & altitudinem baculi minoris, ſeu ad $AB - cd$.

Si enim concipiatur recta *c*E ad horizontem B*d* parallela; triangula AE*c* & CF*c*, ob angulos E & F rectos, & angulum *c* utrique communem, erunt ſimilia: conſequenter ſtabit in iis.

$$Fc : FC = Ec : AE.$$

Jam

Jam vero eſt $Fc = Dd$, & $Ec = Bd$ (132); item ob EB $= cd$, eſt $AE = AB - cd$: ergo æqualibus æqualia ſubſtituendo, eſt:

$$Dd : FC = Bd : AB - cd.$$

Porro ſi ad inventam ope hujus proportionis altitudinem $AE = AB - cd$ addideris baculi minoris altitudinem cd; acquires totam altitudinem AB.

Schol. 1. Altitudo AB (*Fig. ead.*) ope menſulæ hoc modo metienda eſſet. Erigatur menſula in ſtatione d verticaliter, ita ut unum ejus latus ſit horizonti parallelum, alterum autem ſit parallelum altitudini perpendiculari AB; tum infixa acicula in puncto c ſtationi d imminente, ducatur recta cF horizontali menſulæ lateri parallela, & fiat immota menſula collineatio verſus apicem A, ducaturque recta indefinita ab acicula c verſus A: denique diſtantia Ec ſeu Bd ope catenæ menſurata transferatur ope ſcalæ ex c in F, ac illic erigatur perpendicularis FC. Hæc ad ſcalam applicata indicabit altitudinem AE. Nam patet ſimilia eſſe triangula AEc, & CFc, ac proinde eſſe $Fc : Ec = CF : AE$.

At uſus hujus menſulæ pro metiendis altitudinibus profecto incommodus eſt: ſi enim menſula verticaliter erigatur; in ea rite applicare dioptricam regulam, & absque errore ducere lineas difficile omnino eſt. Unde etiam de hoc menſulæ uſu deinceps non agemus.

Schol. 2. Non erit ſupervacuum hoc loco videre in exemplo calculum, cujus ope ex tribus lineis cognitis quartæ lineæ quantitas erui queat. Ponamus in *Fig.* 75 innotuiſſe jam hanc proportionem, $Fc : FC = Ec : AE$; & tres priores lineas menſurari poſſe ope catenæ, at quartam AE calculo eruendam eſſe.

1) Menſurentur rectæ Fc, FC, & Ec ſeu Bd ope catenæ; & ſiquidem catena pro hexapedis conſtructa fuerit, quantitates inventæ reducantur ad menſuram perticarum (229). Qua reductione facta, ponamus eſſe rectam $Fc = 0: 84$ *pert.* FC $= 0, 24$ *pert* $Ec = 12, 62$ *pert.*

2) Lineis hos valores ſubſtituendo, ſcribatur hæc proportio: $0, 84 : 0, 24 = 12, 62 : AE$. Deinde termini medii multiplicentur inter ſe (*Algeb.* 231): erit factum $= 3, 0288$. Denique factum iſthoc dividatur per termi-

minum primum. seu per 0, 84 (*Algeb.* 233): ut autem accuratior sit divisio, dividendo addatur in fine zerus (qui per *Algeb.* n. 225 ejus valorem non immutabit) ut sit 3, 02880; ac tum primum divisio instituatur (*Algeb* 233 *Reg* 3.). Acquiretur quotus = 3, 605 *pert.* neglecta fractione, minus quam unam lineam valente. Hoc est, altitudo AE est proxime = 3 *pert.* 6 *ped.* 6 *lin.*

3) Quodsi altitudo in perticis jam inventa, per hexapedas, seu orgyas exprimenda sit; fiat reductio per n. 230.

Schol. 3. Quodsi autem mensura hexapedis constante utens, nolles hexapedas reducere ad perticas; hoc modo procedendum tibi esset. Ponamus in mensura hexapedarum esse Fc = 8 *ped.* 4 *dig.* 9 *lin.* FC = 2 *ped.* 4 *dig.* 9 *lin.* Ec = 21 *hexap.* 2 *dig.* 5 *lin.* Imprimis omnium trium linearum quantitates reducendæ essent ad infimam mensuræ speciem, seu in præsente casu ad meras lineas (*Arith.* 59); deinde numerus linearum in recta Ec contentarum multiplicari deberet per numerum linearum rectæ FC, & factum dividi per numerum linearum rectæ Fc: denique quotus, utpote qui rectam AE in meris lineis daret, reducendus esset ad hexapedas, pedes &c. (*Arith.* 60). Quæ operandi methodus quanto prolixior, molestiorque sit methodo superius *Schol.* 2. exposita, periclitanti patebit.

255. PROBLEMA XLVI. *Metiri altitudinem inaccessam* AB (*Fig.* 76).

Resolut. 1) Eligantur in plano horizantali duæ stationes D & *d*, quæ sint in eadem recta *d*DB; tum ope goniometrici in statione D verticaliter (uti n. 252. exposuimus) erecti capiatur angulus GCM = ACE.

2) Goniometrico ad stationem *d* translato, rursusque verticaliter erecto ita, ut situs regulæ fixæ *fg* cum priori ejusdem situ FG in eadem recta sit, capiatur angulus *gcm* = A*c*E; tum mensuretur distantia D*d* = C*c*. In triangulo AC*c* notus jam erit angulus A*c*C; item angulus AC*c*, utpote cujus deinceps positus ACE jam in statione D ope goniometrici innotuit; denique notum erit etiam latus C*c*: quibus cognitis inveniatur per n. 224. latus AC.

3) Invento latere AC, in triangulo rectangulo ACE, cum præterea notus jam ſit etiam angulus acutus ACE, facile invenietur latus AE (221): denique ſi inventæ altitudini AE addatur inſtrumenti altitudo CD = EB, habebitur tota altitudo quæſita AB.

CAPUT SEPTIMUM.

De Arte Libellandi.

256. Ars *libellandi* eſt, qua inquiritur, an data duo, vel plura cujuspiam lineæ in terræ ſuperſicie datæ puncta ſint æque alta, & quantus ſit exceſſus altitudinis unius ſupra alteram. Ars hæc magni omnino uſus eſt in determinanda altitudine ejusmodi locorum, quæ non arduum, ac præcipitem aſcenſum, ſed lenem acclivitatem, ope goniometrici haud commode menſurandam habent: ſæpe enim aquæ ex uno id genus locorum in alium derivandæ ſunt, ſæpe rivorum alvei mutandi &c.; quibus caſibus ſi non exploretur prius diligenter, num ſufficiens ſit inter ea loca declivitas, facile evenit, ut ſumptus in canalem ſtruendum absque optato ſucceſſu profundantur.

257. Immediatus artis libellandi ſcopus eſt determinare in dato loco lineam *horizontalem*, ſeu talem, quam linea *verticalis* ad angulos rectos ſecet: eſt autem *verticalis* linea, quæ, ſi produci concipiatur, per ipſum terræ centrum tranſit, ac proinde quam perpendiculum libere pendens ſitu ſuo deſignat. Porro inſtrumenta, quibus linea horizontalis determinari ſolet, *libellæ* vocantur.

258. Diverſa libellarum genera excogitata jam ſunt: quorum aliqua breviter deſcribemus. Ac primum quidem libellæ genus eſt quodlibet goniometricum FPG (*Fig.* 73), inſtructum dioptris F & G, quorum altera foramen exiguum circulare, altera in ampliore foramine fila ita ſe ſe interſecantia habeat, ut dioptris plano inſtrumenti perpendiculariter inſiſtentibus, exiguum unius dioptræ foramen, & alterius punctum illud; in quo fila ſeſe interſecant, ab eodem inſtrumenti plano

æqualiter diſtent. Nempe ſi hujusmodi goniometricum verticaliter erigatur, ita ut perpendiculum CP ex centro C demiſſum, ſuperficiemque inſtrumenti proxime radens, ex ſemicirculo abſcindat 90 gradus; recta EC, ob angulum ECP, quem ea cum perpendiculo comprehendit, rectum, erit horizontalis (257).

Schol. Goniometricum eo aptius erit libellationi, quo majus fuerit, cumprimis autem, quo longius fuerit perpendiculum; quod, ne aeris agitatione facile moveatur, capſæ cuipiam, cujus anterior pars vitro munita ſit, includi poteſt: quodſi autem diutius oſcillando properantem moraretur; vaſculo aquam continenti immitti poſſet, ut majore aquæ reſiſtentia motus oſcillatorius citius exſtinguatur. Porro quandocunque ad determinandam lineam horizontalem perpendiculum adhibetur, ſedulo curandum eſt, ne filum vel incumbat regulæ, ex qua ſuſpenditur, vel ab ea multum diſtet; ſed eandem proxime quodammodo radat, ita ut libere, & ſine attritu in utramque partem adhuc oſcillare poſſit.

259. Altera libella (quæ priori præſtat) eſt tubus AB (*Tab. VI. Fig.* 77), ex lamina orichalcina, aut alia quacunque materia efformatus, & verſus extremitates A & B recurvus, qui ope annuli I cum ſphæra Somnem in partem mobili connexus ſit. Recurvis tubi extremitatibus A & B inſeruntur cylindri cavi vitrei DC & FE, committunturque cum iisdem pice liquata, aut alio quopiam apto glutine, quod aquæ dein infundendæ omnem intra laminam, & cylindrorum latera exitum præcludat. Jam ſi in cylindros per tubum AB communicantes aqua infundatur; hæc ex natura fluidorum ſeſe ad libellam componere nitentium, ad æqualem utrinque altitudinem *m* & *n* aſcendet: conſequenter recta *mn*, quæ per aquæ jam ad quietem redactæ ſuperficies tranſibit, *horizontalis* erit. Porro quoniam in ipſo libellationis exercitio, volenti per puncta *m* & *n* collineare, difficile eſt trans vitra accurate diſcernere ſuperficiem aquæ etiam coloratæ; utiliter adduntur utrinque ad cylindrorum vitreorum latera dioptræ R & T, quæ attolli, & deprimi, ac proinde ad ſuperficies *m* & *n* applicari queant.

260. Huic vel præſtat, vel ſaltem non cedit libella illa hydroſtatica (*Tab. V. Fig.* 66.) quam n. 246. *Schol.* 1. deſcripſimus, dummodo ſit accurata, aptoque pedi innixa. Ut autem apta ſit libellationi; debet 1) eſſe debitæ longitudinis, ſcilicet ſaltem unius pedis. 2) Interna tubi vitrei latera debent eſſe rite perpolita, ut bulla aerea ad omnem tubi inclinationem liberrime moveri queat. 3) Bulla aerea non ſit exigua: ſecus enim tempeſtate calidiore lentius movebitur, propterea, quod expanſione liquoris conſtringatur, apprimaturque lateri tubi, quæ liquoris expanſio minor eſt reſpectu bullæ majoris, major reſpectu minoris.

261. Figura telluris ABDO &c. (*Tab. VI. Fig.* 78.) iſthic ponitur ſphærica, centrum habens in C; & pro *vero horizonte* e. g. ſpectatoris B habetur arcus ABD, cujus ſingula puncta æqualiter diſtent a telluris centro C. Hinc conſequitur, ejusdem ſpectatoris lineam horizontalem B*e*, quæ cum verticali *b*C angulum rectum *b*B*e* comprehendit, reapſe diſcernendum eſſe ab horizonte *vero*: unde etiam id genus recta B*e* *horizon apparens* nominatur. Eadem horizontalis linea B*e* ſolet quoque *linea libellæ* nuncupari, propterea, quod ope *libellæ* ſoleat determinari.

262. Jam quoniam fluida non nituntur vi ſuæ gravitatis, niſi verſus telluris centrum; aqua, quæ tota in eodem vero horizonte poſita eſt, non fluit, ſed ſtagnat: ut adeo nonniſi tunc poſſit aqua ex uno loco in alium derivari, ſi loca illa non ſint in eodem horizonte vero. Hinc quum duo quæpiam loca libellamus, reapſe cupimus noſſe, ſintne loca illa in eodem horizonte *vero*, an minus.

263. Coroll. Quoniam ope libellæ nonniſi horizontalis linea, ſeu horizon *apparens* innoteſcit (257), hæc autem cum horizonte *vero* non congruit penitus (261); clarum eſt, evenire poſſe, ut editior quidam locus *e*, tametſi ex eo aqua in alium locum B fluere poſſit, deprehendatur ope libellæ eſſe cum loco B in eadem recta B*e*, quæ reſpectu loci B ſit linea horizontalis. Ajo, *reſpectu loci* B: eandem enim rectam B*e* nonpoſſe ſimul haberi etiam pro linea horizontali loci *e*, a loco B ſat

ſat magno intervallo diſtantis, ſic declaro. Si horum locorum verticales lineæ *b*B & *de* produci concipiantur; eæ concurrent in telluris centro C (257), conſequenter cum recta B*e* claudent triangulum BC*e*. Ponamus jam hoc in triangulo angulum B eſſe rectum; reliqui duo anguli *e* & C ſimul ſumpti æquabuntur angulo recto (105): ergo ſi præterea ponamus rectam B*e* eſſe ſatis magnam, ut angulus C evadat ſenſibilis; angulus *e* ſeu B*e*C erit ſenſibiliter minor recto. Eo ipſo autem recta B*e* nequit haberi pro linea horizontali loci *e*, ſed pro tali habenda eſt alia quæpiam recta MN, ita tranſiens per *e*, ut cum verticali *de* angulum rectum *de* N efficiat.

264. Clarum eſt, differentiam altitudinum locorum B & *e*, in eadem recta B*e* (ad verticalem *b*B perpendiculari) ſitorum, eſſe æqualem rectæ *e*D, inter locum *e* & arcum BD interceptæ: nihilominus quando libellæ linea B*e* non protenditur ultra 100 vel 150 hexapedas, hæc differentia contemni poteſt. Immo tametſi duo quæpiam loca *a* & *e* magis adhuc inter ſe diſtent; ſi tamen linea horizontalis *ae* determinetur ope libellæ in medio intervalli loco B collocatæ, loca *a* & *e* non habebunt differentiam altitudinum: quia intervalla *a*A & *e*D erunt æqualia, ac proinde erit etiam *a*C = *e*C. At ſi libellam non in medio loco B, ſed in alio, qui a B multum diſtet, e. g, in *v* conſtitueres, atque ita determinares lineam horizontalem *ae*; intervalla *a*A & *e*D non eſſent æqualia: conſequenter locorum *a* & *e* altitudines differentiam haberent; cujus differentiæ ratio habenda eſſet.

265. Libellatio dividitur in ſimplicem, & compoſitam. *Simplex* eſt, ſi ope unius ſtationis, in quo collocetur libella, peragi poſſit: ſi autem pluribus id genus ſtationibus opus ſit, libellatio vocatur *compoſita*. Sed jam ad ipſas libellandi praxes gradum faciamus.

266. PROBLEMA XLVII. *Libellare terminorum* A *&* B *altitudinem* (*Fig.* 79.).

Resolut. 1) Præparentur duo haſtilia AF, & BG, plurium pedum, e. g. 8, aut 10, aut amplius, iisque adnectantur ejusmodi tabulæ H & K, quas n. 244 deſcripſimus;

ſimus; adnectantur autem ita, ut libere attolli ac deprimi, & quo loco neceſſe fuerit, ope trochleæ firmari poſſint: haſtilia hoc modo inſtructa infigantur terræ perpendiculariter, unum in A, alterum in B (242. *Schol.* 1.),

2) Medio circiter loco inter A & B eligatur ſtatio C, quæ ſit in eadem recta cum A & B, ac in ea rite conſtituatur libella CM: fiat deinde a te per libellæ dioptras collineatio in haſtile AF, laboris Adjutore tabulam H ad nutum tuum attollente, aut deprimente, usque dum ejus centrum in interſectione filorum appareat.

3) Hoc peracto per dioptras immotæ libellæ fiat collineatio in haſtile alterum BG, altero laboris Adjutore tabulam K ad nutum tuum, ut prius in ſtatione A factum eſt, dirigente.

4) Poſtquam utraque tabula in filorum interſectione apparuerit; menſuretur accurate utriusque tabulæ altitudo AH & BK. Harum altitudinum differentia LB dabit termini A elevationem ſupra terminum B.

Si enim ducatur libellæ linea HK, & huic parallela AL; quoniam puncta H & K æqualiter diſtant a centro telluris, ab eodem centro æqualiter diſtabunt etiam puncta A & L: ergo locus B intervallo LB (ſeu differentia altitudinum AH & BK) vicinius eſt centro terræ, ac ſit locus A. Hoc eſt, dicta differentia LB, exprimit termini A ſupra B elevationem.

267. PROBLEMA XLVII. *Libellare terminos A & E (Fig. 80.), quorum diſtantia major ſit, quam ut altitudinum differentia libellatione ſimplice determinari poſſit.*

Resolut. 1) Inter A & E eligatur intermedius locus C, ita ut loca A & C ſimplice libellatione per n. 266, libellari queant: tum haſtis in A & C perpendiculariter defixis, medio circiter inter A & C loco B collocetur libella BO, & factis collineationibus dirigantur tabulæ M & N in haſtis, usque dum earum centra in filorum interſectione appareant, uti in libellatione ſimplice n. 266. expoſitum eſt: denique menſurentur accurate tabularum altitudines AM & CN, adnoteturque altitudo AM in uno e. g. ſiniſtro, & altitudo CN in dextro chartæ latere.

 2) Ha-

2) Haſta CN relinquatur in C, & altera ex A transferatur in E, infigaturque terræ (quod ſemper obſervandum eſt) perpendiculariter. Deinde libella DR circiter medio inter C & E loco conſtituta, fiant collineationes in tabulas P & Q, non ſecus, ac in priore ſtatione facta fuerint in tabulas M & N; non ſunt autem in haſta CN neceſſariæ duæ tabulæ, ſed eadem, quæ in priore libellatione figi debuit in N, nunc ex N ad P deprimi poterit. Denique altitudines CP & EQ pariter adnotentur in charta, ita ut altitudo CP, quæ reſpectu libellæ cadit verſus terminum A, ſcribatur in ſiniſtra chartæ columna infra altitudinem AM paullo ante adnotatam, altera vero EQ in columna dextra infra altitudinem CN.

Quodſi termini A & E magis diſtarent inter ſe, quam ut duabus libellationibus ex A ad E perveniri queat; non in unico duntaxat intermedio loco C defigenda eſſet haſta, ſed in pluribus e. g. in B, C, D; tum libella primum medio inter A & B loco collocari deberet, deinde inter B & C &c., libellationesque methodo hactenus expoſita continuandæ eſſent, usque dum ad terminum E perveniatur Semper autem illæ tabularum altitudines, quæ reſpectu libellæ cadunt verſus terminum A, ſcribantur in ſiniſtra columna infra altitudinem AM, eæ vero, quæ terminum E ſpectant, in columna dextra.

3) Omnes altitudines in columna ſiniſtra ſcriptæ addantur in unam ſummam; tum addantur in unam ſummam etiam altitudines in dextra columna ſcriptæ: deinde ſumma minor ſubtrahatur a majore. Imprimis ſi prior ſumma minor fuerit poſteriore; locus A erit altior loco E: deinde altitudinum differentia exprimetur per differentiam dictarum ſummarum. e. g. Sit in columna

Sini-

Siniſtra	Dextra
AM = 2, 34 *ped.*	CN = 4, 62 *ped.*
CP = 3. 80 *ped.*	EQ = 6, 01 *ped.*
Summa = 6, 14 *ped.*	*Sum.* = 10, 63 *ped.*
Si ſubtrahatur *Summa* minor = 6, 14 *ped.*;	
Remanet *differentia* - - = 4, 49 *ped.*	

Hoc eſt, terminus A termino E altior eſt 4 pedibus, 4 digitis, & 9 lineis.

Ratio eſt: ſi enim ducantur rectæ AT & CV, ad horizontales MN & PQ parallelæ; clarum eſt, quæſitam differentiam altitudinum eſſe = ET: atqui ET eſt æqualis dictarum ſummarum differentiæ, ſeu eſt ET = CN + EQ — AM — CP, quod ſic declaro. Ob CN — AM = CS, & ob EQ — CP = EV,

eſt: CN — AM + EQ — CP = CS + EV,

ſeu CN + EQ — AM — CP = CS + EV.

Atqui ob CS — VT, eſt - - - CS + EV = ET;

ergo eſt -- CN + EQ — AM — CP = ET.

Schol. 1. Recole hoc loco num. 227. item *Algebræ* num. 229. & ſequ de *Addit.* & *Subtract.* Fractionum decimalium.

Schol. 2. Utcunque tortuoſum ſolum ABCDE (*Fig.* 81.) libellandum ſit; profrus eadem, quam hactenus tenuimus, methodo eſt tunc quoque inſtituenda operatio. Quodſi autem ope libellationis indaganda ſit declivitas cujuspiam fluvii, cujus alveus terminetur linea ACB *Fig.* 79.), ipſa autem aquarum ſuperficies linea *acb*; poſt peractam terminorum A & B in ripa aſſumptorum libellationem, in utroque termino exploretur ope ponderis e fune ſuſpenſi altitudo ripæ ſupra ipſam aquarum ſuperficiem: tum altitudini AH addatur altitudo ripæ A, & altitudini BK altitudo ripæ B; hoc eſt, loco altitudinis AH ſumatur altitudo *a*H, & loco BK ſumatur *b*K: cetera more conſueto peragantur.

Schol. 3. Pro praxi libellandi hæc adhuc monita uſui erunt. 1) Quantum fieri poteſt, libella ita conſtituatur, ut in dioptra filari alterum filum ſit proxime ad horizontem parallelum, alterum verticale. 2) Conveniatur prius inter obſervatorem, & laboris adjutores, qui tabulas in perticis attollere, ac deprimere debent (præſertim ſi diſtantiæ paullo majores ſint, ut vox difficulter audiatur) conveniatur, inquam, de certis ſignis arbitrariis manu vel pileo &c. dandis; ut ex iis mox intelligant, quid ipſis faciendum ſit. 3) Quo breviora intervalla ſumuntur inter libellam & ſcopos, eo minoris erroris eſt periculum. P. Ricciolus exiſtimat juſtum intervallum inter libellam, & haſtile eſſe paſſuum inter 50 & 100.

SECTIO TERTIA.

DE SUPERFICIEBUS, ET SOLIDIS.

CAPUT PRIMUM.

De conſtruendis quibusdam Figuris rectilineis, ſeu polygonis, inveniendisque ſuperficierum planarum areis.

268. Quemadmodum lineæ geneſim concipimus, ſi cogitemus punctum moveri, ejusque viam ſignari; ita ſi concipiamus moveri lineam, notemusque ſpatium, quod ea verrit, habebimus ſuperficiem e. g. Si recta CD (*Tab. VI. Fig.* 82.) concipiatur motu continuo devenire in ſitum AB, & ſui veſtigium ubique relinquere: intelligitur generare ſuperficiem ABDC. Porro ſuperficies alia eſt *plana*, alia *curva*; utriusque definitionem n. 9. in *Schol.* dedimus. Hoc, & ſequent. quatuor Capit. nonniſi de ſuperficiebus planis acturi ſumus.

269. PROBLEMA XLIX. *Tres quascunque datas rectas* AB, AC, *&* CB (*Fig.* 83.), *quarum quælibet duæ ſimul ſumptæ tertia majores ſint, in triangulum* abc *componere, ita ut ſit* ab = AB, ac = AC, *&* cb = CB.

Re-

Resolut. Ducatur recta $ab = AB$, unoque circini intervallo AC aperti crure in a fixo ducatur arcus gch: fiat deinde circini apertura $= CB$, utroque crure in b fixo ducatur arcus dcf. Si intersectionis punctum c cum punctis a & b connectatur, obtinetur petitum triangulum abc: est enim ex constr. $ab = AB$, $ac = AC$, & $cb = CB$.

270. PROBLEMA L. *Construere quodcunque parallelogrammum* ABDC (*Tab. II. Fig.* 36.), *cujus duo latera* AC *&* CD, *item angulus* C, *quem latera illa comprehendere debeant, dentur.*

Resolut. Data latera AC & CD conjungantur ad angulum datum C, circinique intervallo CD aperti crure uno in A fixo ducatur arcus per aliquod punctum B transiens; fiat deinde circini apertura $= AC$, unoque crure in D fixo ducatur alter arcus, priorem alicubi in B intersecans. Si intersectionis punctum B cum punctis A & D connexueris, obtinebis petitum parallelogrammum ABDC: est enim ex constr. $AB = CD$, & $BD = AC$, est item angulus C dato æqualis.

271. Coroll. Si petitum parallelogrammum debeat esse quadratum; ex extremo dati lateris CD puncto C (*Tab. VI. Fig.* 84.) erigatur perpendicularis $AC = CD$: tum aperiatur circinus intervallo CD, unoque ejus crure primum in A, deinde in D fixo ducantur arcus in puncto B sese intersecantes: denique intersectionis punctum B cum punctis A & D connectatur.

272. Quemadmodum quamlibet longitudinem seu lineam metimur certis minoribus lineis, scilicet perticis, pedibus, digitis &c. (225); ita superficiem quamlibet metimur certis minoribus superficiebus, quarum magnitudo cognita nobis sit: cujusmodi sunt, pertica quadrata, pes quadratus &c. Porro *pertica quadrata* est ejusmodi quadratum, cujus latus æquatur uni perticæ: *pes quadratus* est quadratum, cujus latus est uni pedi æqualis &c. Hinc areæ cujuspiam magnitudo tot perticarum quadratarum, aut pedum quadratorum &c. esse dicitur, quot ejusmodi quadratis adæquate contegi potest, quorum singulorum latus uni perticæ, aut pedi &c. æquale sit. Porro ideo potius pertica *quadrata*

aſſumitur pro menſura ſuperficiei, quam *rhombus*, cujus latus ſit æquale perticæ; quia menſura cujusque rei debet eſſe fixa, ac determinata; & non vaga, ac incerta: jam vero magnitudo rhombi, tametſi ejus latus maneat ſemper æquale uni perticæ, variari poteſt, prout variatis ejus angulis jam hanc, jam illam altitudinem nanciſcitur (142); ex adverſo perticæ quadratæ (idem eſt de pede, digito &c. quadrato) magnitudinem, quamdiu latus ipſius non variatur, conſtantem manere debere, per ſe clarum eſt.

273. PROBLEMA LI. *Cujuscunque parallelogrammi rectanguli* ABDC (*Tab. III. Fig.* 37.) *aream invenire..*

Resolut. Menſurentur imprimis latera AC & CD, quotnam perticas, pedes &c. contineat unumquodque; tum inventæ ipſorum quantitates ducantur in ſe invicem: factum enaſcens indicabit numerum perticarum, pedum &c. quadratorum in eo parallelogrammo contentorum (140). e. g. Sit AC = 3 perticis, & CD = 4 perticis: ſi quantitates has in ſe invicem duxeris; factum enaſcens = 12, indicabit aream ABDC 12 quadratis perticis æqualem eſſe.

274. Coroll. I. Quodſi ergo latus AC eſſet e. g. = 3, 46 *pert.*, & CD = 4, 52 *pert.*; area totius parallelogrammi eſſet = 15, 6392 *pertic. quadr.* (*Algeb.* 231). Cujusmodi factorum valor ut intelligatur;

Schol. 1. Notandum eſt: pertica quadrata continet in ſe 100 pedes quadratos. Ea enim acquiritur, ſi pertica ſimplex per ſe ipſam multiplicetur, adeoque ſi 10 pedes ſimplices multiplicentur per ſe ipſos; eſt vero 10 × 10 = 100. Similiter patet, pedem quadratum æquivalere 100 digitis quadratis, digitum quadratum 100 quadratis lineis. Hinc quum e. g. 3, 46 perticæ ſimplices multiplicandæ ſunt per 4, 52 perticas ſimplices; in facto = 15, 6392 *pert. quad.* notæ *comma* præcedentes exprimunt quidem integras perticas quadratas, eæ vero, quæ poſt *comma* ſequuntur, partes decimas, centeſimas &c. perticarum quadratarum, uti natura fractionum decimalium exigit (*Algeb.* 226.): at vel ideo prima poſt *comma* nota 6, non ſex, verum ſexaginta qua-

dra-

dratos pedes denotat; neque altera poſt *comma* nota 3, ſignificat tres digitos quadratos, verum tres pedes quadratos. Nam imprimis prima poſt comma nota 6, juxta naturam fractionum decimalium ſignificat ſex decimas partes unitatis integræ, ac proinde in aſſumpto exemplo perticæ quadratæ; at decima pars perticæ quadratæ (ob perticam quadr. $=$ 100 pedibus quadr.) eſt $=$ 10 ped. quadr., adeoque 6 decimæ ſunt $=$ 60 ped. quadrat. Deinde altera poſt *comma* nota 3, ſignificat tres centeſimas perticæ quadratæ partes; ergo ſignificat tres pedes quadratos. Eodem modo oſtendi poteſt, tertiam poſt *comma* notam 9, æquivalere 90 digitis quadratis, quartam autem 2, duobus quadratis digitis.

Schol. 2. Ex his patet, alia lege enunciandas eſſe menſuras *quadratas* fractione decimali expreſſas; alia menſuras *ſimplices*. Si enim aſſumamus e. g. 6, 347 perticas ſimplices; prima poſt *comma* nota 3, deſignat tres pedes; altera 4, quatuor digitos; tertia 7, ſeptem lineas (226): at ſi aſſumamus e. g. 15, 6392 perticas quadratas; duæ priores poſt *comma* notæ 63, ſignificant ſexaginta tres pedes quadratos, & duæ poſteriores notæ 92, nonaginta duos digitos quadratos: hoc eſt, ex notis *comma* ſequentibus cuilibet menſuræ ſpeciei non unica, ſed duæ notæ ſunt aſſignandæ. Hinc ſi e. g. 15, 6392 *pert. quadr.* enunciari debeant; hoc modo procedendum eſt: imprimis notæ 5, quod *comma* proxime præcedit, addatur exponentis inſtar ſignum (o); quod indicabit, per notas *comma* illud præcedentes deſignari unitates integras, ſeu perticas quadratas. Deinde poſt duas verſus dextram notas adjiciatur alterum *comma*, notæque hoc *comma* proxime præcedenti addatur pro exponente ſignum pedum, ſeu ſignum ('). Rurſus poſt alias duas notas addatur tertium *comma*, notæque ipſum proxime præcedenti ſcribatur pro exponente ſignum (''). Hoc eſt, quantitas illa hoc modo ſcribatur: $15^{0}, 63', 92''$, & hoc modo enuncietur: 15 perticæ quadratæ, 63 pedes quadrati, & 92 digiti quadrati.

Pariter ſi 0, 056007 *pert. quadr.* enunciari debeant; hoc modo ſcribantur: $0^{0}, 05', 60'', 07'''$; & hoc modo enuncientur; nulla integra pertica quadrata, 5 pedes quadrati, 60 quadrati digiti, 7 quadratæ lineæ. Quodſi autem in ejusmodi fractione decimali notæ poſt comma ſequentes eſſent numero impari, eaque fractio enunciari deberet; adjiciatur illi zerus a dextris (qui per *Algeb.* n. 225. valorem fractionis non immutabit) & cetera fiant, ut ſupra. e. g. 1,503 *pert. quadr.* hoc modo ſcribantur: $1^{\circ}, 50', 30''$; & hoc modo enuncientur: 1 pertica quadrata, 50 pedes quadrati, 30 digiti quadrati.

275. Coroll. II. Cum in quadrato tam altitudo, quam baſis ſit æqualis cuivis lateri (128); ut area quadrati acquiratur, ſatis eſt quodcunque ejusdem latus per ſe ipſum multiplicare.

276. Coroll. III. Cum menſuræ quadratæ ex menſuris ſimplicibus inter ſe multiplicatis enaſcantur; ſi menſuræ quadratæ dividantur per menſuras ſimplices, quotus enaſcens deſignabit menſuras ſimplices (*Arith.* 55). e. g. Stet in *Tab. V. Fig.* 75. hæc proportio, F*c*: CF = E*c*: AE. Si rectas CF & E*c* inter ſe multiplicaveris, factum enaſcens conſtabit quidem menſuris quadratis; at, ſi idem factum diviſeris per rectam F*c*, quotus ſimplices menſuras dabit.

277. PROBLEMA LII. *Aream cujuscunque parallelogrammi non rectanguli* ABDC (*Tab. III. Fig.* 38.) *invenire.*

Resolut. Baſis CD multiplicetur per altitudinem parallelogrammi, ſeu per perpendiculum A*m*: factum enaſcens erit æquale areæ parallelogrammi (142). e. g. Si CD ſit = 2,3 *pert.* & A*m* = 1,10 *pert.*; area ABDC eſt = 2,392 *pert. quad.* (*Algeb.* 231.), ſeu = $2^{\circ}, 39', 20''$ (274. *Schol.* 2.).

278. PROBLEMA LIII. *Invenire aream cujuscunque trianguli* ABC (*Tab VI. Fig.* 87.).

Resolut. E vertice trianguli demittatur in baſin perpendicularis AD: erit hæc ipſa trianguli altitudo (129). Hinc ſi dimidium hujus perpendicularis ducatur in baſim integram, vel dimidia baſis in integram perpendicularem: factum enaſcens æquabitur areæ quæſitæ (144). E. g.

E. g. Sit altitudo = 5, 6 *ped.* & baſis = 8, 2 perticis: erit dimidia baſis = 4, 1 *pert.*. adeoque area trianguli erit = (5, 6 *ped.*) × (4, 1 *pert.*) At quoniam hi factores ſunt heterogenei, convertendi ſunt in homogeneos (228), id eſt, loco 5, 6 *ped.* ſcribi debent 0, 56 *pert.* (226. Schol. 2.), ac tum primum inſtituenda eſt multiplicatio. Acquiretur autem factum, ſeu area trianguli = 2, 296 perticis quadratis = 20, 29′, 60″.

279 PROBLEMA LIV. *Invenire aream trapezii* ABDC (*Tab. VI. Fig.* 85.), *duo latera* AB *&* CD *parallela habentis.*

Resolut. Dimidium perpendiculi A*m* inter latera parallela intercepti ducatur in ſummam eorundem laterum AB + CD, vel, quod idem eſt, integrum perpendiculum A*m* in ſemiſummam dictorum laterum factum æquabitur areæ quæſitæ.

Demonstr. Ducta enim diagonali AD, dividitur trapezium in duo triangula ADB & ADC. Jam ſi ex horum verticibus A & D demittantur in baſes perpendicula A*m* & D*n*; erit A*m* altitudo trianguli ADC, & D*n* trianguli ADB: conſequenter ob A*m* = D*n* (53), utriusque trianguli altitudo erit = A*m*. Hinc area trianguli ADB erit = $\frac{1}{2}$ A*m* × AB: & area trianguli ADC erit = $\frac{1}{2}$ A*m* × CD (144). Ergo utraque ſimul area, ſeu trapezium integrum erit = $\frac{1}{2}$ A*m* × (AB + CD).

280. PROBLEMA LV. *Invenire aream cujuscunque polygoni regularis* ABDEFGA (*Tab. III. Fig.* 52.).

Resolut. Dimidium perpendiculi C*o*, ex centro C in quodcunque latus demiſſi ducatur in ſummam omnium laterum, ac proinde in integram perimetrum, vel, quod idem eſt, integrum perpendiculum C*o* in ſemiperimetrum: factum æquabitur areæ quæſitæ. Si enim ex centro C ad vertices ducantur rectæ CA, CB &c.; polygonum regulare reſolvetur in totidem ſimilia, ſimulque æqualia triangula, quot ſunt ipſius latera (176): quorum proinde triangulorum eadem erit omnium altitudo C*o*, baſes autem erunt latera AB, BD &c. Hinc primi trianguli area eſt = $\frac{1}{2}$ C*o* × AB, ſecundi = $\frac{1}{2}$ C*o* × BD, & ſic porro (144). Eo ipſo autem patet totius polygoni regularis aream acquiri, ſi dimidium perpendiculi Co ducatur in perimetrum integram.

Schol. Cum omnia triangula, in quæ per rectas CA, CB &c. reſolvitur polygonum regulare, ſint inter ſe æqualia, & ſimul totidem, quot ſunt ejus polygoni latera; ſufficit in praxi unius trianguli aream invenire, eamque multiplicare per numerum laterum.

281. PROBLEMA LVI. *Invenire aream circuli.*

Resolut. Dimidius radius circuli ducatur in ejusdem peripheriam, vel, quod idem eſt, integer radius in ſemiperipheriam: factum æquabitur areæ quæſitæ. Nam, uti ex iis, quæ n. 181. dicta ſunt, intelligere licet, circulus conſiderari poteſt inſtar polygoni regularis infinitorum numero laterum, quorum communis a centro diſtantia eſt ipſo radius, utpote ad peripheriam ubique perpendicularis (76): atqui area polygoni regularis acquiritur, ſi dimidium perpendiculi ex centro in quodcunque latus demiſſi ducatur in integram perimetrum (280); ergo etiam circuli area acquiritur, ſi dimidius radius ducatur in peripheriam integram.

282. Coroll. In circulo area cujuscunque ſectoris ACD (*Tab. I. Fig.* 2.) acquiritur, ſi arcus AD, qui ſectorem terminat, ducatur in dimidium radium, vel, quod idem eſt, integer radius in dimidium arcum AD. Nam in quocunque regulari polygono (*Tab. III. Fig.* 51.), cum omnia triangula ACB, BCD &c. ſint inter ſe ſimilia, & æqualia (176), ac proinde eandem habeant altitudinem; quæcunque areæ pars CABDC acquiritur, ſi ſumma laterum AB + BD ducatur in dimidiam partem perpendiculi e centro in quodcunque latus demiſſi (278): ergo etiam in circulo (utpote polygono regulari laterum numero infinitorum) area ſectoris ACD *Tab. I. Fig* 2.) invenitur, ſi arcus AD ducatur in dimidium perpendiculi e centro in quodcunque latus infiniteſimum demiſſi, ſeu in dimidium radium.

Schol. Ex his patet, notam eſſe debere quantitatem peripheriæ circuli, ut ejusdem circuli area determinari poſſit: hac autem methodo poteſt peripheria circuli inveniri. Menſuretur dati circuli radius, tum ejus quantitas inventa multiplicetur per 2, ut acquiratur quantitas

tas diametri; deinde hæc instituatur proportio, ut 113 : 255, ita diameter inventa circuli ad ejusdem peripheriam. Tametsi enim diameter circuli ad ejusdem peripheriam non sit prorsus accurate ut 113 : 355, uti uberius dicemus inferius; hæc tamen ratio adeo accedit ad verum, ut in peripheria, cujus diameter semialteram leucam continet, una linea non aberret.

Porro inventa absoluta totius peripheriæ magnitudine, facile invenitur absoluta magnitudo cujuscunque arcus AD; scilicet hanc instituendo proportionem: sicuti se habent 260 gradus ad eos gradus, quos continet arcus AD, ita se habet absoluta peripheriæ AOBNA magnitudo ad absolutam magnitudinem arcus AD.

283. PROBLENA LVII. *Cujuscunque polygoni utcunque irregularis* ABCDEEA (*Tab. VI. Fig.* 86.) *aream invenire.*

Resolut. Datum polygonum resolvatur in mera triangula, ductis e. g. rectis FB, FC, FD; tum singulorum triangulorum areæ seorsim inveniantur per num. 278: areæ hæ in unam summam collectæ quæsitam polygoni aream adæquabunt. Porro rectæ, per quas polygonum in triangula resolvatur, e quocunque puncto etiam intra ipsum polygonum assumpto duci poterunt ad polygoni angulos; prout nempe commodius visum fuerit.

Schol. Alia quoque methodus inveniendi aream polygoni cujuscunque patebit ex sequentibus. Trademus enim sequ. Cap. praxim, quamcunque figuram rectilineam utcunque irregularem in triangulum æquale transformandi: qua transformatione facta sufficiet invenire aream trianguli, dato polygono æqualis.

284. PROBLEMA LVIII. *Hexapedas quadratas, earumque partes reducere ad perticas quadratas, harumque partes.*

Resolut. Dentur e. g. 10 *hex. quad.* 4 *ped. quad.* 50 *dig. quad.* quæ debeant reduci ad mensuram perticarum.

1) Hexapeda quadrata continet in se 36 pedes quadratos; est enim $6 \times 6 = 36$. Itaque numerum hexapedarum datarum multiplica per 36, ut acquiras numerum

rum pedum quadratorum in iis contentorum: erit factum in præsente casu $= 360$. Huic facto adde numerum pedum quadratorum hexapedis adjectorum, seu in præsente casu numerum 4. Si ex summe $= 364$, interjecto commate duas notas dextimas resecueris, ut sit 3, 64; hactenus obtines 3 perticas quadratas, & 64 pedes quadratos: nam 100 pedes quadrati æquivalent uni perticæ quadratæ.

2) Quoniam in mensura hexapedarum, 144 digiti quadrati æquivalent uni pedi quadrato, in mensura perticarum autem 100 digitos quadratos continet idem pes quadratus; si hæc instituatur proportio, $144 : 100 = 50 : x$, quartus proportionalis x dabit numerum digitorum quadratorum in mensura perticarum, æqualem 50 id genus digitis quadratis, quorum usus est in mensura hexapedarum.

285. PROBLEMA LIX. *Perticas quadratas, earumque partes reducere ad hexapedas, harumque partes.*

Resolut. Debeant e. g. $24^\circ, 68', 40''$ reduci ad mensuram hexapedarum. 1) Numerus perticarum & pedum resecetur a notis reliquis, ut sit $24^\circ, 68'$. Hic numerus æquivalet, 2468 pedibus quadratis. Hinc cum hexapeda quadrata 36 pedibus quadratis æquivaleat; si 2468 dividantur per 36, quotus $= 68$ dabit hexapedas quadratas, & residuus ex divisione numerus $= 20$ designabit residuos pedes quadratos. Hoc est, hactenus obtines 68 *hexap. quadr.* 20 *ped. quadrat.*

2) Quoniam in mensura perticarum 100 digiti quadrati æquivalent uni pedi quadrato, in mensura hexapedarum autem idem pes quadratus 144 digitos quadratos continet; si hæc instituatur proportio, $100 : 144 = 40 : x$, quartus proportionalis x dabit numerum digitorum quadratorum in mensura hexapedarum, æqualem 40 id genus digitis quadratis, quorum usus est in mensura perticarum.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

De Æqualitate inter diversas superficies planas intercedente.

286. THEOREMA LXII. *In quocunque triangulo rectangulo quadratum hypothenusæ æquatur quadratis cathetorum simul sumptis.* e. g. *In triangulo* ABC (*Tab. III. Fig.* 44) *ad* A *rectangulo est* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Demonstr. Si enim ex vertice A in hypothenusam BC demittatur perpendiculum AD; triangulum ABC dividetur in duo minora triangula ABD & ACD, sibi & toti similia (159). Itaque imprimis triangulum ABD cum majore ABC conferendo, homologaque latera in proportionem resolvendo, stat. $BD : AB = AB : BC$ (156): unde acquiritur $AB^2 = BD \times BC$.

Deinde triangulum ACE cum eodem majore ABC conferendo est. $DC : AC = AC : BC$; unde acquiritur $AC^2 = DC \times BC$. Est igitur

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC.$$

Seu est $AB^2 + AC^2 = (BD + DC) \times BC$,
Adeoque ob $BD + DC = BC$, est

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BC = BC^2.$$

Schol. Quodsi ergo ponamus esse tam AB, quam $AC = 2$, ut $AB^2 + AC^2$ sit $= 4 + 4 = 8$; erit etiam $BC^2 = 8$, ac proinde erit $BC = \sqrt{8}$. Unde patet jam, radicem quadratam numeri 8 per lineam exprimi posse; tametsi per numeros exprimi nequeat: id quod nos demonstraturos. *Algeb.* n. 71. polliciti sumus.

287. THEOREMA LXIII. *In quocunque triangulo* ABC (*Tab. VI. Fig.* 88.) *si basis* BC *bifariam secetur in* D, *& ex vertice demittatur perpendiculum* AM; *semisumma crurum* AB *&* AC *in eorundem semidifferentiam ducta æquatur dimidiæ basi* BD, *ductæ in ejusdem baseos segmentum* DM. *Id est, si semisumma crurum vocetur* a, *semidifferentia* d, BD *sit* $= c$, $DM = x$: *est semper* $ad = cx$.

DEMONSTR. Nam 1) est $AB^2 = AM^2 + BM^2$, & $AC^2 = AM^2 + MC_2$ (286).

2) Si semisumma crurum AB & AC dicatur a, semidifferentia d; est $AB = a + d$, & $AC = a - d$ (*Algeb.* 135. *exempl.* III.). Hinc literales hos valores ad quadrata elevando, superiores æquationes abeunt in has:

$$a^2 + 2ad + d^2 = AM^2 + BM^2$$
$$\& \; a^2 - 2ad + d^2 = AM^2 + MC^2$$

3) Si præterea $BD = DC$ dicatur c, & $DM = x$, est $BM = c + x$, & $MC = c - x$. Itaque est

$$a^2 + 2ad + d^2 = AM^2 + c^2 + 2cx + x^2$$
$$\& \; a^2 - 2ad + d^2 = AM^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

Hinc posteriorem harum æquationum a priore subtrahendo, est:

$$4ad = 4cx \; (\textit{Algeb.}\ 19.).$$

Adeoque divid. per 4, est $ad = cx$.

Schol. Idem eodem modo demonstratur etiam tunc, dum perpendiculum AM (*Fig.* 89.) extra triangulum ABC cadit; hoc unico discrimine, quod tunc in demonstratione, MC non debeat poni $= c - x$, sed $= x - c$.

288. THEOREMA LXIV. *Si quæcunque recta* AB (*Fig.* 90.) *secetur in* C *bifariam, & in* D *non bifariam; quadratum dimidiæ partis* AC *erit æquale quadrato partis* CD *inter sectiones interceptæ addito rectangulo seu facto partium inæqualium* AD *&* DB. Seu *erit* $AC^2 = CD^2 + AD \times DB$.

DEMONSTR. Sit enim $AC = CB = a$, & $CD = x$; erit $AD = a + x$, & $DB = a - x$. Itaque erit imprimis $AC^2 = a^2$; erit deinde $CD^2 = x^2$; erit denique $AD \times DB = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2$. Jam evidens est esse $a^2 = x^2 + a^2 - x^2$; ergo est quoque $AC^2 = CD^2 + AD \times DB$.

289. PROBLEMA LX. *Quodcunque polygonum, seu quamcunque figuram rectilineam* ABCDEA (*Fig.* 91.) *transformare in aliam ipsi æqualem* ABFEA, *uno pauciora latera habentem.*

RESOLUT. Omisso uno angulo D ducatur e proximis angulis diagonalis EC; tum ex omisso angulo D duca-

ducatur recta DF parallela ad EC, & lateri BC producto occurrens alicubi in F: denique ducatur nova diagonalis EF. Ajo polygonum ABFEA, quod uno latere pauciora jam habet, ac habeat polygonum ABCDEA, esse æquale eidem ABCDEA. Hac enim transformatione non aliud fit, quam quod polygono dato adimatur triangulum E*o*D, hujusque loco addatur eidem triangulum F*o*C: quodsi ergo est triang. E*o*D = F*o*C; novum polygonum ABFEA manet æquale dato polygono ABCDEA: esse vero triang. E*o*D = F*o*C facile patet. Nam triangula EDC & EFC, cum super eadem basi EC, & intra easdem parallelas constituta sint, æqualia sunt (145): ergo ab utroque idem triangulum E*o*C subtrahendo, remanet triang. E*o*D = F*o*C.

Schol. Eodem modo res procedit, quum datum polygonum ABCDEA (*Fig.* 92) angulo regrediente EDC gaudet. Scilicet etiam tum omisso angulo EDC ducatur e proximis angulis diagonalis E C; tum ex omisso angulo EDC agatur recta DF ad EC parallela: denique ducatur nova diagonalis EF. Polygonum ABFEA uno latere jam pauciora habebit, quam habeat polygonum ABCDEA, & tamen huic æquale erit. Hac enim transformatione non aliud fit, quam quod polygono dato adimatur triangulum F*o*C, hujusque loco addatur eidem triangulum E*o*D: esse vero triang. F*o*C = E*o*D facile patet. Nam triangula DCE & DEF, cum super eadem basi DF, & intra easdem parallelas constituta sint, æqualia sunt (145): ergo ab utroque idem triangulum D*o*F subtrahendo, remanet triang. F*o*C = E*o*D.

290 PROBLEMA LXI. *Quamcunque figuram rectilineam, seu polygonum in æquale triangulum transformare.*

Resolut. Data figura rectilinea transformetur in aliam uno latere deficientem (289, vel ejus *Schol.*): si figura, quam hac transformatione acquisivisti, necdum sit triangulum; ea pariter transformetur in aliam uno latere deficientem, continueturque hæc operandi ratio, dum demum ad triangulum devenias. e. g. Si polygonum ABCDEA (*Fig.* 93) in triangulum sit transfor-
man-

mandum; transformetur primum in polygonum ABFEA uno latere deficiens (289); istud autem eadem methodo transformetur in triangulum EMF. Triangulum isthoc æquale esse dato polygono ABCDEA inde patet, quod successivis id genus transformationibus nihil aliud fiat, quam quod tantundem addatur ex una parte polygono dato, quantum eidem ex altera parte demitur (289; & ejus *Schol.*).

291. PROBLEMA LXII. *Datæ cuivis figuræ rectilineæ æquale quadratum constituere.*

Resolut. Inveniatur area datæ figuræ ope alicujus ex problematis Cap. præc. tum extrahatur ex ea radix quadrata: erit hæc latus petiti quadrati. Clarum enim est, quadratum lateris hoc modo inventi fore æquale areæ figuræ datæ.

292. PROBLEMA LXIII. *Datæ cuivis figuræ rectilineæ æquale rectangulum, cujus alterutrum latus detur, constituere.*

Resolut. Inveniatur, ut prius, area figuræ datæ: si eam per datum constituendi rectanguli latus diviseris, pro quoto obveniet alterum ejusdem rectanguli latus: quo invento problema solutum utique est. Sit enim datæ figuræ area $= A$; datum rectanguli latus e. g. altitudo sit $= a$, ejusdem latus alterum e. g. basis $= x$.

Per condit. problem. est $A = ax$ (273): est ergo $x = \dfrac{A}{a}$.

e. g. *Debeat confici tapes, rectanguli figuram habens, cujus longitudo sit 16 pedum, latitudo 10 pedum, & quæratur, quanta longitudo debeat pro hoc tapete conficiendo accipi ex ejusmodi panno, cujus latitudo sit 4 pedum.* Reapse hoc in problemate datur rectilinea tapetis figura, quæriturque parallelogrammum panni, æquale areæ figuræ datæ. Itaque si tapetis area, quæ per n. 273 est $= 16 \times 10 = 160$, dividatur per datam panni latitudinem, seu per 4; quotus indicabit, quæsitam panni longitudinem esse $= 40$ ped.

293. Coroll. Si plures quæcunque figuræ rectilineæ dentur, quibus simul sumptis æquale quadratum, aut aliud parallelogrammum sit constituendum; inve-

niantur feorfim areæ fingularum, & in unam fummam addantur: cetera fiant ut ante. Si autem debeat conftitui quadratum, aut aliud parallelogrammum rectangulum, quod fit æquale differentiæ duarum quarumvis datarum figurarum rectilinearum; area minoris figuræ fubtrahatur ab area majoris, & cetera rurfus fiant ut ante.

294 PROBLEMA LXIV. *Dato circulo æquale quadratum conftituere.*

Resolut. Si dimidius circuli radius $= \frac{1}{2}r$ ducatur in ejusdem peripheriam p; acquiritur circuli area $= \frac{1}{2}rp$. (281). Hinc fi ex hoc facto extrahatur radix quadrata m; radix hæc erit latus quæfiti quadrati. Erit enim $m^2 = \frac{1}{2}rp$; feu area quadrati, cujus latus fit $= m$, æquabitur areæ dati circuli.

295. Coroll. Æquatio hæc, $m^2 = \frac{1}{2}rp$ in hanc refolvitur proportionem, $\frac{1}{2}r : m = m : p$ (*Algeb.* 169): ergo latus quadrati dato circulo æqualis, eft medium proportionale inter dimidium radium dati circuli, ejusdemque peripheriam.

Schol. Celeberrimum problema eft, *invenire quadraturam circuli*; in cujus folutione, præftantiffima ab omni ævo ingenia, & Mathematici fummi absque optato fucceffu defudarunt. Nempe tunc invenires quadraturam circuli in fenfu problematis, fi invenires quadratum, cujus aream accurate, & ut dici folet, *mathematice* æqualem effe areæ ejus circuli, cujus folus radius tibi detur, demonftrare queas. Quod a nullo hactenus præftitum eft. Si vera, feu *mathematice* accurata radii vel diametri ad peripheriam ratio innotefceret; problema illud folvere facillimum omnino effet. Nam 1) inventa in quolibet generatim circulo vera diametri ad peripheriam ratione, inveniri poffet in eo circulo, cujus radius (ac proinde etiam diameter) tibi detur, accurata peripheriæ quantitas; fcilicet hanc inftituendo proportionem; ficuti fe habet diameter in quolibet generatim circulo ad peripheriam, ita fe habet data circuli diameter ad ejusdem circuli peripheriam: 2) inventa dati circuli peripheria, inveniri poffet recta linea, quæ ſit media proportionalis inter dimidium dati radii, & inventam peripheriam (173): atque hæc recta eſſet latus quadrati (295).

Hinc ſummi Mathematici, qui in quadrando circulo deſudaverant, omnes conatus ſuos eo converterunt, ut veram in circulo diametri ad peripheriam rationem invenirent: at idem fere ipſis evenit, quod ei eveniret, qui e. g. e numero 8 radicem quadratam *per approximationem* (*Algeb.* 96. *Schol.*) extrahere tentaret Nempe quo diutius continuarunt operationem, eo magis ſemper ac magis acceſſerunt ad veram diametri ad peripheriam rationem. & ſimul eo majores, ac majores evaſerunt numeri illi, qui rationem illam exprimerent; neque potuerunt tamen unquam ad veram illam rationem accurate pervenire: denique tunc demum a continuanda operatione ceſſarunt, dum viderent, arrepta a ſe methodo poſſe quidem ad veram diametri ad peripheriam rationem propius ſemper ac propius finite in infinitum accedi, perveniri tamen accurate nunquam poſſe.

Porro ea diametri ad peripheriam ratio, quæ hactenus per approximationem inventa eſt, tametſi pro ſolutione celeberrimi illius problematis adhiberi non poſſit, quod nempe non ſit mathematice vera; adeo tamen parum a vera aberrat, ut apta omnino ſit inveniendæ ei circuli quadraturæ, quæ non modo communibus vitæ civilis uſibus, verum exactioribus etiam Geometriæ applicationibus abunde ſufficiat: ut adeo „Geo„metræ peritiores (verba ſunt Cl. De la Caille) qua„draturam *abſolutam* circuli inter ea referant, quorum „pretium ſit ſola pulchritudo, & raritas, ideoque ope„ram ſuam rerum magis utilium inventioni impendant: „atque id eo magis, quod admodum certum habeant, „quod, ſi ratio vera diametri circuli ad ſuam circum„ferentiam (*ſeu peripheriam*) numeris exprimi poſſet, „ii numeri adeo forent magni, ut in calculis eorum „uſus eſſe non poſſet, ac proinde in praxi ſemper re„currendum eſſet ad eos, quos nunc ignorata illa qua„dratura adhibemus.„ *Ibid. Element. Mathemat.* n. 613. In minoribus numeris nulla eſt accuratior ratio diametri ad peripheriam. ac ſit ea. quam Adrianus Me-tius a Parente ſuo repertam aſſignat, nempe 113 : 355. Recole n. 282. *Schol.*

CAPUT TERTIUM.

De Comparatione Superficierum planarum.

296. Cum area parallelogrammi (quam litera P deſignare lubet) ſit æqualis ejusdem altitudini in baſim ductæ, ſeu ſit $P = A \times B$ (142); clarum eſt areas quorumvis duorum parallelogrammorum eſſe in ratione compoſita baſium & altitudinum, ſeu eſſe $P : p = A \times B : a \times b$ (*Algeb.* 184.). Hinc ſi ſit $A = a$, eſt $P : p = B : b$; ſi autem ſit $B = b$, eſt $P : p = A : a$. Quæ eadem etiam de triangulis demonſtravimus n. 146.

297. THEOREMA LXV. *Areæ parallelogrammorum ſimilium* ABCD · abcd (*Tab VII. Fig.* 94) *ſunt ut quadrata quorumvis laterum homologorum, ſeu ſimiliter poſitorum, ac proinde ut* $BC^2 : bc^2$, *vel ut* $AB^2 : ab^2$ &c.

Demonstr. Ut pateat dicta parallelogramma eſſe ut $BC^2 : bc^2$; ex angulis A & *a* in latera BC & *bc* demittantur perpendicula AE & *ae*. Triangula ABE & *abe* ſunt ſimilia; nam anguli E & *e* ſunt ex conſtr. recti, & anguli B & *b* propter figurarum ſimilitudinem æquantur inter ſe (117): igitur ſtat, $AE : ae = AB : ab$ (156); ſeu cum ob figurarum ſimilitudinem ſit $AB : ab = BC : bc$, ſtat $AE : ae = BC : bc$.

Jam aſſumpta parallelogramma ſunt in ratione compoſita ex $AE : ae$, & $BC : bc$ (296); ergo loco $AE : ae$ æqualem rationem $BC : bc$ ſubſtituendo, ſunt in ratione compoſita ex $BC : bc$, & $BC : bc$, ſeu ſunt ut $BC^2 : bc^2$. Quo demonſtrato evidenter ſequitur, eadem parallelogramma eſſe etiam ut $AB^2 : ab^2$ &c.; cum enim ob figurarum ſimilitudinem ſit $AC : bc = AB : ab$, eſt quoque $BC^2 : bc^2 = AB^2 : ab^2$ (*Algeb.* 178.).

298. Coroll. Demonſtrationem hanc quibusvis duobus ſimilibus triangulis ABC, & *abc* adæquate applicari poſſe clarum eſt: ergo triangulorum quoque ſimilium areæ ſunt ut quadrata quorumvis homologo-

rum laterum. e g. Est triang. ABC : triang. $abc = BC^2$ bc^2, item $= AB^2 : ab^2$ &c.

299. THEOREMA LXVI. *Areæ quorumvis polygonorum similium* ABCDEA *&* abcdea (*Tab. III. Fig.* 47.) *sunt ut quadrata quorumvis laterum homologorum, e. g. ut* $AB^2 : ab^2$.

DEMONSTR. Ductis enim per æquales angulos B & *b* diagonalibus BE, BD & *be*, *bd*, similia erunt triangula ABE & *abe*, BED & *bed*, BCD & *bcd* (164). Est ergo

1) Triang. ABE : triang. $abe = AB^2 : ab^2$ (298);
2) Triang. BED : triang. $bed = ED^2 : ed^2$.
3) Triang. BCD : triang. $bcd = BC^2 : bc^2$.

Porro ob $AB : ab = ED : ed = BC : bc$ (117), est etiam $AB^2 : ab^2 = ED^2 : ed^2 = BC^2 : bc^2$ (*Algeb.* 178.); ergo omnia triangula similia nunc enumerata, sunt in eadem ratione $AB^2 : ab^2$. Consequenter etiam summæ omnium triangulorum, seu areæ integræ polygonorum similium sunt ut $AB^2 : ab^2$ (*Algeb.* 182.). Quo demonstrato evidenter sequitur, easdem areas esse etiam ut $BC^2 : bc^2$, item ut $CD^2 : cd^2$ &c. Scilicet ob $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2$ &c.

300. THEOREMA LXVII. *Areæ duorum quorumvis circulorum sunt ut quadrata radiorum, vel diametrorum. Id est, si areæ vocentur* A *&* a, *radii* R *&* r, *diametri* D *&* d; est $A : a = R^2 : r^2$, *item* $A : a = D^2 : d^2$.

DEMONSTR. 1*mæ partis*. Quoniam area cujusvis circuli est æqualis ejus peripheriæ in dimidium radium ductæ (281); si præterea peripheriæ vocentur P & *p*, est $A : a = \frac{1}{2} PR : \frac{1}{2} pr$, adeoque est $A : a = PR : pr$ (*Algeb.* 172.). Hoc est, areæ sunt in ratione composita ex $P : p$, & $R : r$. Jam vero est $P : p = R : r$ (181); ergo loco $P : p$ substitui potest $R : r$, ac proinde areæ sunt in ratione composita ex $R : r$, & $R : r$. Quod tantundem est, ac esse $A : a = R^2 : r^2$.

DEMONSTR. 2*dæ partis*. Cum sit $D = 2R$, & $d = 2r$, est $R : r = D : d$, adeoque est etiam $R^2 : r^2 = D^2 : d^2$ (*Algeb.* 178.). Ergo ob $A : a = R^2 : r^2$, est quoque $A : a = D^2 : d^2$.

301. PROBLEMA LXV. *Dato cuicunque polygono* ABCDEF (*Tab. VII. Fig.* 95.) *aliud simile* Abcdef, *ipso minus describere.*

Resolut. Datum, vel pro arbitrio assumptum polygoni construendi latus *Ab* transferatur in dati polygoni latus homologum AB; tum ductis ex angulo A diagonalibus AC, AD, & AE, ducatur per punctum *b* recta *bc* lateri BC parallela, per punctum *c* recta *cd* parallela lateri CD, & sic porro. Triangula ABC & A*bc* erunt similia, ob ang. A utrique communem, & ob rectam *bc* ad BC parallelam; pariter similia sunt triangula ACD & A*cd*, ADE & A*de* &c. Ergo polygona ABCDEF & A*bcdef* similia sint, est necesse (165).

302. Coroll. Si autem dato polygono A*bcdef* aliud simile ABCDEF, ipso maius describendum sit; ductis ex angulo A per angulos *c*, *d*, *e* diagonalibus indefinitis AC, AD, AE, item lateribus A*b* & A*f* indefinite productis, datum, vel pro arbitrio assumptum polygoni construendi latus AB transferatur in dati polygoni latus homologum A*b*, jam prius indefinite productum: deinde ducatur per punctum B recta BC lateri *bc* parallela, per punctum C recta CD parallela lateri *cd*. & sic porro. Polygona ABCDEF & A*bcdef* erunt similia, ut prius.

CAPUT QUARTUM.

De Ichnographia, Dimensione, & Partitione arearum campestrium.

303 PROBLEMA LXVI. *Ichnographiam areæ campestris* ABCDEFA *libere permeabilis perficere; id est, similem ei areæ figuram in charta describere.*

Resolut. I. *Ope mensulæ Prætorianæ.* 1) Collocetur mensula situ horizontali in quopiam areæ datæ angulo A, e quo ad reliquos omnes angulos prospectus pateat; tum factis penes aciculam angulo A imminentem versus omnes angulos collineationibus, ducantur versus eosdem rectæ indefinitæ. Poterunt autem, si opus fuerit, anguli prævie defignari baculis in C, D, E &c. perpendiculariter terræ infixis.

2) Menfurentur diftantiæ AB, AC, AD, AE, AF ope catenæ, transferanturque ope fcalæ geometricæ in menfula ex A in *b, c, d, e, f*; tum puncta hæc, in quibus eæ diftantiæ translatæ terminantur, connectantur per rectas *bc, cd, de, ef* Figura *AbcdefA* fimilis erit areæ campeftri ABCDEFA. Nam fingula triangula *Abc*, *Acd* &c. fimilia funt fuis correfpondentibus ABC, ACD &c. (157); ergo (165).

Eodem modo res procedit, fi menfula non in angulo, fed intra ipfam aream ubicunque in *f* (*Fig.* 96.) collocetur.

304. Resolut. II. *Ope Goniometrici.* Centro goniometrici angulo B (*Fig.* 95.) imminente, capiantur anguli BAC, CAD, DAE, EAF, & ope catenæ menfurentur diftantiæ AB, AC, AD, AE, AF: adnotentur autem ordine fuo tam angulorum, quam diftantiarum quantitates. Deinde fiant in charta ope transportatorii anguli *bAc*, *cAd* &c æquales angulis BAC, CAD, &c.; tum diftantiæ AB, AC &c transferantur ope fcalæ in eadem charta ex A in *b*, *c* &c.; denique puncta hæc connectantur. Figura *AbcdefA* erit, ut ante, fimilis areæ campeftri ABCDEFA, Eodem modo res procedit, fi goniometricum non in angulo, fed intra ipfam aream ubicunque in *f* (*Fig.* 96.) collocaveris

305. Resolut. III *Si neque menfula Prætoriana, neque goniometricum præfto fuerit.* 1) Singula datæ campeftris areæ latera AB, BC, CD &c. (*Fig.* 95.), item fingulas diagonales AC, AD &c., quæ ex angulo quopiam A ad reliquos duci poffunt, menfura ope catenæ (245); tum figuram totam fuis cum diagonalibus ruditer in chartam conjice, adnotata cujuslibet lateris, & diagonalis quantitate.

2) Domi affume imprimis triangulum ABC, opeque fcalæ geometricæ ftatue tres rectas *Ab bc*, & *Ac* quæ diftantias AB, BC, & AC in parva quantitate exprimant (233. vel *fequ.*); tum rectas has in charta probe extenfa in triangulum *Abc* compone (269). Statue deinde rectas *cd* & *Ad*, quæ diftantias CD & AD in parva quantitate exprimant, easdemque fuper latere *Ac* in

tri-

triangulum *Acd* compone, ita ut recta *cd* cum latere CD sibi proportionali, *Ad* autem cum diagonali AD similiter posita sit. Denique eodem modo construe reliqua etiam triangula *Ade*, *Aef*. Figura *Abcdef*A erit similis areæ campestri ABCDEFA. Nam singula triangula *Abc*, *Acd* &c. similia sunt suis correspondentibus ABC, ACD &c. (158); ac proinde figura hæc, & area illa campestris totidem similiter positis triangulis constant: ergo (165). Eodem modo res procedit, si stationem, ex qua rectas ad angulos ducas, non in angulo aliquo A, sed intra ipsam aream ubicunque in *f* (*Fig.* 96.) eligas

Schol Postquam distantiam AB ex aliqua scala desumptam transtulisti ex A in *b* (*Fig.* 95.); reliquæ etiam distantiæ AC, AD &c. ex eadem scala desumendæ sunt: si enim intra operandum scalam variares, proportionem laterum turbatum iri, manifestum est. Quod monitum deinceps etiam semper observandum erit.

306. PROBLEMA LXVII. *Perficere ichnographiam areæ campestris* ABCDEFA (*Fig.* 97), *quæ libere permeari nequeat.*

Resolut. I. *Ope mensulæ Prætorianæ.* 1) Duo areæ propositæ anguli proximi A & B, e quibus ad reliquos angulos prospectus pateat, deligantur pro stationibus; tum collocetur mensula in primo angulo A situ horizontali, ac penes aciculam angulo A imminentem ducantur versus omnes angulos rectæ indefinitæ.

2) Distantia AB ope catenæ mensurata transferatur ope scalæ in mensula ex A in *b*, & acicula in *b* desigatur; tum defixo in A baculo, mensula transferatur in B, & ita collocetur, ut acicula angulo B immineat, & juxta rectam B*a* collineanti baculus in A relictus occurrat. Denique factis penes aciculam versus angulos C, D, E, F collineationibus, ducantur rectæ, quæ prioribus occurrant in punctis *c*, *d*, *e*, *f*. Puncta hæc, si connectantur, dabunt figuram B*afedc*B, areæ propositæ similem.

Pro hujus rei demonstratione facilius memoriæ imprimenda prævie notandum est, omnia triangula minora *ac*B, *ad*B &c. quæ in puncto B ita concurrunt, ut communi basi *a*B gaudeant, esse similia sibi correspondentibus triangulis majoribus itidem in B concurrentibus, simulque communi basi AB insistentibus; e. g. similia esse triangula *ad*B & ADB: nam angulus ad B utrique est communis, & angulus *da*B est ex A in *a* translatus. Eodem modo clarum est e. g. triangula *ac*B & AEB esse similia. Hoc præmisso demonstrandum est, omnia triangula minora in *a* concurrentia, uti sunt *fae*, *ead* &c similia esse sibi correspondentibus majoribus triangulis, in A concurrentibus, uti sunt FAE, EAD &c.: quo demonstrato jam integrarum quoque figurarum ABCDEFA & *aBcdefa* similitudo in comperto erit (165).

Hoc autem modo demonstro similia esse imprimis triangula *fae* & FAE. Ex priore minorum triangulorum classe, eorum videlicet, quæ in B concurrunt, communemque basim *a*B habent, assumamus duo illa, quæ cum triangulo *fae* communem aliquem apicem habent, adeoque assumamus triangula *af*B & *ae*B, conferamusque cum triangulis majoribus, quæ ipsis correspondent. Imprimis ob similitudinem triangulorum *af*B, & AFB; est *af*: AF = *a*B: AB: deinde ob similitudinem triangulorum *ae*B & AEB, est *ae*: AE = *a*B: AB. Est ergo *af*: AF = *ae*: AE. Unde patet, in triangulis *fae* & FAE duo unius latera esse proportionalia duobus alterius: cum ergo præterea angulus *fae* sit ex A in *a* translatus, triangula *fae* & FAE similia sint, oportet (157).

Pariter, ut pateat similia esse triangula *ead* & EAD: ex priore minorum triangulorum classe assumantur *da*B. & *ea*B, quæ nempe communem aliquem cum triangulo *ead* apicem habent, conferanturque cum majoribus triangulis correspondentibus. Imprimis ob similitudinem triangulorum *ea*B & EAB est *ea*: EA = *a*B: AB; deinde ob similitudinem triangulorum *da*B & DAB est *da*: DA = *a*B: AB. Est ergo *ea*: EA = *da*: DA. Hoc est: in triangulis *ead* & EAD duo unius latera sunt alterius duobus proportionalia: cum ergo præterea ang. *ead* sit ex A in *a* translatus; triangula *ead* & EAD sunt similia.

Eodem modo patet similia esse triangula *dac* & DAC. Denique postrema *ca*B & CAB esse similia, jam ſuperius in prima triangulorum claſſe demonſtravimus.

307 Resolut. II. *Ope goniometrici.* 1) Eligantur, ut prius, duo areæ propoſitæ anguli proximi A & B pro ſtationibus; tum in A factis verſus omnes angulos collineationibus, capiantur omnes anguli FAE, EAD &c. in A concurrentes, ruditerque in chartam conjecta figura, iidem anguli ordine ſuo adnotentur. Pariter in B factis verſus omnes areæ propoſitæ angulos collineationibus, capiantur omnes anguli CBD, DBE &c. notenturque ut prius. Denique menſuretur ope catenæ diſtantia AB, & adnotetur.

2) Domi diſtantia AB ope ſcalæ transferatur in charta in rectam *a*B; tum ad *a* conſtruantur ope transportatorii ordine ſuo omnes illi anguli, qui in prima ſtatione A capti ſunt: ſumatur autem initium ab angulo CAB. Pariter ad B conſtruantur ordine ſuo omnes illi anguli, qui in altera ſtatione capti ſunt: ſumatur autem initium ab angulo ABF. Si puncta *f*, *e*, *d*, *c*, in quibus latera angulos efficientia ſeſe interſecant, connectantur; figura *a*B*cdefa* erit ſimilis areæ propoſitæ. Demonſtratio eadem eſt, quæ *Reſolutionis I.*

Schol. Ichnographiam areæ libere permeabilis, non ſecus ac imperviæ, nunc expoſita duarum ſtationum methodo, ſive ope menſulæ, ſive ope goniometrici perfici poſſe, per ſe clarum eſt.

308 Resolut. III. Si per aream datam ex nullo loco pateat ad omnes ejusdem angulos proſpectus, ſed tamen perimeter integra peragrari queat, ut ſi ichnographia ſylvæ, quæ circumiri poſſit, perfici debeat; *ope menſulæ* hoc modo procedere licet. 1) Menſula collocetur in A ſitu horizontali, factaque penes aciculam angulo A imminentem verſus B collineatione, ducatur recta indefinita; tum diſtantia AB ope catenæ menſurata transferatur in menſula ope ſcalæ ex A in *b*; denique acicula ex A extracta deſigatur in *b*.

2) Transferatur menſula in B, ita ut acicula in *b* defixa immineat angulo B, & juxta rectam B*a* collineanti baculus in A relictus occurrat; tum facta penes aciculam verſus C collineatione, ducatur recta indefinita: deni-

denique diſtantia BC menſurata transferatur ope ſcalæ ex B ſeu ex b in c, & acicula defigatur in c.

3) Eadem operandi ratio continuetur etiam in ſtationibus C & D. Ubi autem ad penultimam ſtationem ſeu ad E perventum fuerit; ſufficiet deinceps ſolas diſtantias EF & FA menſuratas transferre ope ſcalæ in rectas ef, & fa, hasque ſuper diagonali ae in triangulum componere. Hoc pacto obtinebitur demum in menſula figura $aBcdefa$ ſimilis areæ propoſitæ.

Schol. 1. Generatim in quibuslibet duobus totidem laterum figuris rectilineis ABCDE & $abcde$ (*Tab. III. Fig.* 47.), tametſi eæ non ponantur eſſe ſimiles, ſumma omnium angulorum a lateribus comprehenſorum ſemper eadem eſt; ſeu ſemper eſt ang. $A + B + C + D + E =$ ang. $a + b + c + d + e$. Si enim ductis diagonalibus BE, BD & be, bd polygona reſolvantur in mera triangula; hujusmodi triangulorum anguli omnes ſimul ſumpti efficient ipſas ſummas eorum angulorum, qui a polygoni lateribus comprehenduntur: atqui triangulorum anguli omnes ſimul ſumpti eandem ſummam conſtituunt in uno polygono, quam in altero quocunque totidem laterum polygono; nam totidem laterum polygona in totidem numero triangula poſſunt dicto modo reſolvi, & in quolibet triangulo omnes tres anguli ſimul ſumpti duobus rectis æquivalent (105): ergo.

Hinc etiam in *Tab. VII. Fig.* 97. ſumma angulorum $A + B + C$ &c. ſemper eſt æqualis ſummæ angulorum $a + B + c$ &c. five polygona ABCDEF & $aBcdef$ ſimilia ſint, ſive non, dummodo ſint totidem laterum. Atque ex his patet methodus inveſtigandi, num rite perfecta ſit ichnographia. Nempe ſi peracta operatione tota, deprehenderis angulum afe non eſſe æqualem angulo AFE; id erit indicio, neque reliquos figuræ minoris angulos eſſe omnes æquales figuræ majoris, ſeu areæ datæ angulis ſibi reſpondentibus, ac proinde in collineationibus errorem eſſe commiſſum: ſecus enim ſumma omnium angulorum non eſſet eadem utrobique. Et ſiquidem differentia angulorum afe & AFE notabilis fuerit; aliqua angulorum correctione opus erit in ichnographia, prout angulus *afe* minor, vel major fuerit angulo AFE.

Schol. 2. Ichnographia dictæ areæ ABCDEF, per quam non pateat profpectus ad omnes angulos; etiam *ope goniometrici* perfici poteft: fi nempe captis ejus ope angulis A, B, C &c. item menfuratis omnibus lateribus AB, BC, CD &c. riteque adnotatis, fiat domi in charta figura fimilis ope transportatorii, & fcalæ geometricæ. Hunc autem in modum inftituatur domi operatio. Detur area ABCDE (*Tab. III. Fig.* 47), cujus fingula latera AB, BC &c. nota fint in perticis, pedibus &c. & anguli A, E &c. in gradibus, & minutis. 1) Latus AE inter angulos cognitos interceptum transfer ope fcalæ geometricæ in rectam *ae*; tum in extremitatibus *a* & *e* ope transportatorii conftrue angulos *a* & *e*, æquales angulis A & E, rectis *ab* & *ed* interea indefinite ductis. 2) Latus AB transfer ex *a* in *b*, & latus ED ex *e* in *d*.

3) Reliqua duo latera DC & BC transfer ope ejusdem fcalæ in aliquas rectas *dc* & *bc*, hasque fuper diagonali *bd* in triangulum *bdc* compone (269). Figura *abcdef* erit fimilis areæ ABCDEF.

Schol. 3. Ichnographia eo accuratius poterit perfici, quo ea fuerit major comparate ad aream propofitam, ac proinde quo majores fuerint lineæ, quæ in fcala geometrica perticas, pedes &c. repræfentant. Poteris autem conftruere tibi fcalam, ut libuerit magnam ea methodo, quam n. 240. *Schol.* 2. indicavimus.

Schol. 4. Methodum, angulos pro ichnographia perficienda ope acus magneticæ determinandi, utpote non fatis tutam; non cenfuimus defcribendam.

309. PROBLEMA LXVIII. *Mappam alicujus territorii, utcunque magni, perficere* (*Tab. VII. Fig.* 98).

Resolut. 1) Luftratis propofiti territorii notabilioribus locis, in mappa fpeciatim exprimendis (uti funt colles, tumulique notabiliores, villæ, molæ &c.) deligatur opportuno loco bafis AB, cujus longitudo notabilem habeat rationem ad diftantias locorum in mappam referendorum, & ex cujus extremitatibus A & B pateat afpectus ad complura eorundem locorum.

Men-

Menſuretur deinde accurate baſis AB (245), & transferatur in charta ope ſcalæ in rectam *ab*

2) Ex ſtatione A ſiant collineationes in circumſita loca C, D &c. capianturque anguli CAB, DAB &c. ac rite adnotentur: præteritis interim ejusmodi angulis, qui nimis obtuſi, vel nimis acuti eſſent, cujusmodi eſſet angulus EAB. Transferatur deinde goniometricum in B, factisque in eadem loca C, D &c. in quæ ex priore ſtatione factæ erant, collineationibus, capiantur anguli CBA, DBA &c. pariterque adnotentur.

3) His peractis, in triangulis ACB, ADB &c nota erit communis baſis AB cum duobus angulis adjacentibus: ex quibus inveniantur reliqua latera AD & CB, item AD & DB &c. (224). Porro eadem latera transferantur ope ſcalæ in rectas *ac* & *cb*, in *ad* & *db* Si rectæ hæ ſuper baſi *ab* in triangula *acb*, *adb* &c. conjungantur; patebit, locis A & B in *a* & *b* expreſſis, locum C in *c*, D in *d* &c. debere exprimi.

4) Ut loca interim omiſſa (e. g locus E) determinentur; aſſumatur pro baſi diſtantia AC, vel BC jam inventa; ceteraque ſiant, ut prius e. g Pro determinando loco E aſſumatur baſis AC, capiaturque ex A angulus EAC, & ex C angulus ECA: in triangulo EAC nota erit baſis AD cum duobus angulis adjacentibus. Itaque inveniantur latera AE & EC (224), transferanturque ope ſcalæ in rectas *ae*, & *ec* Si rectæ hæ ſuper baſi *ac* in triangulum *eac* componantur; patebit, locum E in *e* eſſe exprimendum.

5) Ut ejusmodi loca determinari queant, quæ a ſtationibus A & B magis remota ſunt, quam ut ex his in ea collineationes commode fieri poſſint; pro baſi aſſumatur aliquod latus jam cognitum, e cujus extremitatibus in loca illa collineationes jam commodius fieri poſſint. e. g. Si locus F a baſi AB juſto plus diſtet; aſſumatur pro baſi latus EC jam notum: deinde capiantur anguli FEC & FCE, ceteraque ſiant, ut ante. Quodſi operatio continuanda ſit ultra F; pro nova baſi ſervire poterit latus FC, vel FE, & ſic porro. Eadem autem methodo, qua nunc a baſi AB verſus F receſſimus, etiam verſus C, B, D &c. quaquaverſus recedere, territoriique utcunque magni ichnographiam perficere licebit.

Nem-

Nempe figura, quæ in charta hunc in modum construetur, constabit totidem triangulis similibus, ac similiter positis, quot habet ipsum territorium propositum, ac proinde erit huic similis (165).

310. PROBLEMA LXIX. *Quamcunque datam aream campestrem dimetri, seu invenire, quotnam ea perticas, pedes &c. quadratos in se contineat.*

Resolut. I. *Si area data meris rectilineis lateribus claudatur.* 1) Perficiatur areæ datæ ichnographia ope Prob. LXVI. (303).

2) Area ichnographiæ, seu figuræ in charta descriptæ inveniatur ope alicujus ex problematis a num. 283. ad num. 283. inclusive resolutis. e. g. Si in charta obtineas irregularem, sed meris rectilineis lateribus comprehensam figuram ABCDEFA (*Tab. VI. Fig.* 86); ejus aream invenis ope Problematis LVII. (283). Nempe ductis e. g. rectis FB, FC, FD: totam aream in mera triangula resolve; tum ex triangulorum verticibus in bases perpendicula demitte: erunt hæc eorundem altitudines (130). Porro tam bases, quam altitudines triangulorum, ope circini captas applica eidem scalæ, qua usus es in perficienda ichnographia; ut innotescat, quotnam eæ perticas, pedes &c. in mensura scalæ contineant. Denique cujuslibet trianguli basim duc in dimidiam ejusdem altitudinem, ut singulorum areæ innotescant; tum areas has in unam summam collige. Totidem perticarum, pedum &c. quadratorum erit area proposita, quot in ichnographia dicto modo deprehendes.

Quodsi inventam ichnographiam in triangulum æquale transformare libuerit (290); sufficiet solius hujusmodi trianguli aream invenire.

311. Resolut. II. *Ti area data non meris rectilineis lateribus claudatur, ut area* AmnopDlA (*Tab. VII. Fig.* 99.). 1) Area data reducatur primum ad latera rectilinea. Scilicet seligantur stationes A, B, C, D ea lege, ut latera rectilinea AB, BC &c. in iis stationibus terminata ita secent peripheriam curvilineam, ut ex area proposita fere tantundem abscindant ad *m* & *l*, quantum eidem addunt ad angulos B & C.

2) Baculis in A, B &c. defixis loco datæ areæ menſuretur rectilinea ABCD (283).

Schol. Hæ dimetiendi methodi ſupponunt datæ campeſtris areæ ſuperficiem eſſe perfecte planam: at complures ſane campi occurrere ſolent dimetiendi, qui jam in colles aſſurgunt, jam in valles deprimuntur, ac proinde qui majorem habent reapſe ſuperficiem, ac habeat baſis plana, cui inſiſtunt. At ſi magnitudo areæ æſtimanda ſit vel ratione ædium illic conſtruendarum, vel ratione frugum, & arborum, quæ ibidem enaſci poſſunt; neglectis id genus inæqualitatibus ſumendum eſt ſpatium in plano horizontali. Nam ædificia, fruges, arbores ita aſſurgunt, ut ſitum habeant horizonti perpendicularem: patet autem conſideranti, id genus perpendicula ſemper totidem poſſe conſiſtere in plano horizontali ME (*Tab. VI. Fig.* 81.), quot in ſuperficie ſinuoſa ABCDE. Notandum tamen eſt, ſolam arearum capacitatem hoc loco nos conſiderare, abſtrahereque mentem a variis impedimentis fertilitatis, & aliis circumſtantiis.

312. PROBLEMA LXX. *Datum triangulum* ABC (*Tab. VII. Fig.* 100.) *in quotcunque partes æquales dividere.*

Resolut. Baſis BC dividatur in tot æquales partes, in quot dividendum eſt triangulum, e. g. in tres; tum ex vertice A per diviſionum puncta D & E ducantur rectæ AD, AE. Rectæ hæ triangulum propoſitum in totidem æquales partes divident: nam triangula ABD, ADE, AEC eandem habent altitudinem, & baſes ex conſtr. æquales; ergo ſunt omnia inter ſe æqualia (143).

313. PROBLEMA LXXI. *Quamcunque figuram quadrilateram* ABCD (*Fig.* 101.), *quæ duo oppoſita latera* AD *&* BC *habeat parallela, in quotcunque æquales partes dividere.*

Resolut. Utrumque laterum parallelorum dividatur in totidem partes æquales, in quot figura tota dividenda eſt. e. g. in tres: rectæ *mo*, *nr*, quæ per diviſionum puncta ducentur, figuram in tres æquales partes divident. Nam e. g. partes A*mo*B & *mnro* æquari inter ſe ſic declaro. Ductis diagonalibus *m*B & *mr*, impriprimis triangula AmB & mrn habent bases ex construct. æquales, præterea intra easdem parallelas sunt constituta; ergo sunt æqualia (145): easdem ob caussas æqualia sunt etiam triangula Bmo, & omr: eo ipso autem clarum est esse $AmoB = mnro$.

314. PROBLEMA LXXII. *Quodcunque polygonum* ABCDE *(Tab. VI. Fig. 93.) in quotcunque partes æquales dividere.*

Resolut. Imprimis datum polygonum transformetur in triangulum æquale EMF (290); deinde hujus trianguli basis MF dividatur in totidem æquales partes, in quot polygonum dividi debet, e. g. in duas: denique ad punctum divisionis v (si autem plura fuerint divisionis puncta, ad singula) ducatur ex vertice E recta Ev. Recta hæc polygonum in duas æquales partes $EABv$ & $EDCv$ dividet.

Demonstr. Recta Ev, cum ex constr. bifariam dividat trianguli EMF basim MF, bifariam dividit ipsum etiam triangulum EMF (312); adeoque triangulum EvF est dimidia pars trianguli EMF. Cum ergo sit triang. EMF = polyg. ABCDE; triangulum EvF est æquale dimidiæ parti polygoni ABCDE. Hinc si fuerit trapezium $EDCv$ = triang EvF, idem trapezium erit dimidia pars polygoni ABCD, consequenter recta Ev polygonum istud in duas æquales partes dividet: esse vero trapezium $EDCv$ = triang. EvF, facile patet. Nam triangula EoD & FoC, quorum unum demitur, alterum additur polygono, dum istud transformatur in triangulum æquale, sunt æqualia, uti n. 289 in *Fig.* 91. ostensum est: ergo utrique addendo idem trapezium $EoCv$, erit quoque trapezium $DECv$ = triang. EvF.

315. PROBLEMA LXXIII. *Datam quamcunque aream campestrem in quotcunque partes æquales dividere.*

Resolut. I. Si constet, aream datam esse triangulum, aut quadrilaterum habens duo latera opposita parallela; methodo num. 312, vel 313 partitio peragi poterit. Si autem alterius generis polygonum e. g. ABCDE (*Fig.* 93.) detur, in aliquot æquales partes dividendum; primum ichnographia ejus perficiatur: deinde

inde hæc per num. 314. in quotcunque æquales partes dividi poterit. Ubi autem in charta partitio abſoluta fuerit, e. g. polygoni ABCDEA per rectam E*v* in duas æquales partes diviſio; recta B*v* ad ſcalam applicata indicabit, quotnam perticæ, pedes &c. debeant in campo ab angulo B verſus C numerari, ut diviſionis punctum *v* determinetur.

Schol. Tametſi polygonum ABCDE methodo nunc commemorata bifariam ſectum abeat in duas areas quadrilateras AB*v*EA & EDC*v*E; ſi tamen in plures partes eadem methodo divideretur, partes aut omnes, aut ſaltem intermediæ eſſent triangula Hinc cum in agrorum diviſione methodus hæc (ſcilicet aream in triangula partiendi) Poſſeſſoribus grata eſſe non ſoleat, propterea quod in agris anguli minus apti ſint, ut arentur; aliam præterea campeſtres areas partiendi methodum ſubjiciamus, oportet. Sit itaque

316. Resolut. II. Data campeſtris area ſit e. g. in tres æquales partes dividenda. 1) Perficiatur ejus ichnographia; quæ ſit e. g. polygonum ABCDE (*Tab. VII. Fig.* 102): tum inveniatur ejusdem area integra (310): denique ſumma hæc dividatur in totidem partes æquales, in quot partes area data dividenda eſt, ac proinde in præſente caſu ſumma illa dividatur per 3. e. g. Si tota area ſit $= 360^{\circ}, 24'$; ſummam hanc per 3 dividendo acquiretur totius areæ pars tertia $= 120^{\circ}, 08'$.

2) Dividatur in charta polygonum ABCDE oculi duntaxat judicio in partes petitas, adeoque in præſente caſu in tres partes circiter æquales, ductis e. g. rectis *mn*, & *op* ad quodpiam latus AB parallelis. Menſurentur deinde partes AB*nm*, & *mnop*, ut appareat, quantum unaquæque earum ab una tertia totius parte deficiat, vel eandem excedat: vix enim continget, ut reperiantur eſſe eidem æquales. Porro menſuratio hæc ob rectas AB, *mn*, *op* parallelas, ſat commode perfici poteſt: ſi enim per punctum *n* ducatur recta *ls*, ad parallelas illas perpendicularis; area trapezii AB*nm* erit $= \frac{1}{2} nl \times (AB + mn)$, & area trapezii *mnpo* $= \frac{1}{2} nt \times (mn + op)$

$+ op$), (279). Inventis his duabus areis etiam tertia *op*CDE innotefcet: quæ adnotentur fingulæ.

3) Ponamus aream primam AB*nm* deficere a tertia totius areæ datæ parte. Area AB*nm* fubtrahatur a tertia totius parte, fitque differentia e. g $=$ 20 *pert. quadr.* Hoc cafu aliquod triangulum *nm*V $=$ 20 *pert. quadr.* adjiciendum erit areæ AB*nm*, ut acquiratur area ABV*m*, æqualis tertiæ totius parti. Hoc autem modo determinandum eft triangulum *nm*V. Per quantitatem rectæ *mn*, jam prius in perticis, pedibus &c. inventam dividatur differentia illa, cui triangulum *mn*V æquale effe debet: quotus enafcens dabit dimidiam trianguli *nm*V altitudinem. Si enim area trianguli dividatur per bafim *mn*, pro quoto obvenire debet dimidia ejusdem trianguli altitudo (143), Itaque quotus ille per 2 multiplicatus dabit integram ejusdem trianguli altitudinem. Hinc fi in perpendiculo *ns* ceperis partem *nr*, æqualem dicto quoto per 2 multiplicato; altitudo petiti trianguli, pro bafi rectam *mn* habentis, debet effe $=$ *rn*. Itaque per punctum *r* duc rectam *f*V ad *mn* parallelam; tum puncta *m* & V per rectam *m*V conjunge: obtinebis petitum triangulum *nm*V. Hujus enim altitudo, fi recta *mn* pro bafi fumatur, eft recta V*x* ad *mn* perpendicularis: porro ob *mn* & *f*V parallelas eft V*x* $=$ *rn*. Hinc area ABV*m* erit una tertia pars totius areæ propofitæ. Quodfi autem area AB*nm* excederet tertiam totius partem; hæc pars tertia deberet ab ea area fubtrahi, & ex altera rectæ *mn* parte deberet eadem prorfus methodo determinari triangulum, æquale differentiæ, & ab area AB*nm* demendum.

4) Poftquam innotuit, aream ABV*m* effe tertiam totius partem; ab area *mnop* fubtrahatur triangulum *nm*V; ut innotefcat quantitas areæ V*mop*. Porro fi hæc deficiat a tertia totius parte; eodem, ut prius, modo determinetur triangulum *po*H ipfi adjiciendum.

5) Inventis duabus quæfitis partibus, tertia HCDE*o* per fe datur. Porro poftquam divifio in charta peracta eft; intervalla BV, VH, A*m*, *mo* applicentur ad fcalam, ut eorundem quantitates in perticis, pedibus &c. innotefcant. Hoc pacto in campo quoque ope catenæ determinari poterunt divifionum puncta V, H, *m*, *o*.

CAPUT QUINTUM.

De vario Situ, & Concursibus Planorum.

317. Nomine *plani*, uti jam n. 9. in *Schol.* dictum est, venire solet superficies *plana*, seu talis, cujus omnibus partibus linea recta applicari potest; ita nimirum, ut nequeat una rectæ pars esse in plano, parte altera supra idem planum eminente, aut infra illud dehiscente.

Schol. In linea nomine *partis* non venit punctum individuum, sed alia minor linea; pariter in superficie *partis* nomine venit alia superficies minor, non autem linea carens latitudine. In linea punctum *terminus* duntaxat est, uti & linea in superficie.

318. Coroll. I. Nequit fieri, ut cujuspiam plani A pars una congruat cum aliquo plano B, pars autem altera ab eodem plano B divergat. Secus enim posset in plano A duci linea recta, cujus una pars cadat in planum B, pars altera supra idem planum B emineat, aut infra illud dehiscat; quod absurdum est (317).

319. Coroll. II. Quodlibet triangulum semper totum in uno eodemque plano sit, oportet; ita ut nequeat una ejus pars esse in quopiam plano A, & simul pars altera supra idem planum A eminere, aut infra illud dehiscere. Secus enim pars duorum trianguli laterum esset in plano A, pars autem aut emineret supra idem A; aut infra illud dehisceret; quod absurdum est (317).

320. Coroll. III. Igitur quæcunque tria puncta non in directum sita A, B, C (*Tab. I. Fig.* 5.) assumamus; per ea poterit transire planum aliquod: at nonnisi unicum. Ratio *1mi est.* Nam tria id genus puncta semper possunt connecti per tres rectas, quæ claudant triangulum ABC: cum ergo totum triangulum ABC in uno eodemque plano sit (219); per omnia tria puncta A, B, C planum quodpiam transeat, est necesse. *Ratio 2di est.* Si enim per tria puncta A, B, C duo plana *diversa*, seu talia, quæ alicubi divergunt, transirent; duo illa plana haberent aliquam partem sibi communem, scilicet

licet triangulum ABC, & tamen aliqua alia sui parte a se invicem divergerent: quod absurdum est (318).

321. COROLL. IV. Cum per quæcunque tria puncta non in directum jacentia nonnisi unicum planum transire possit (320); data tria puncta non in directum jacentia, positione sua plene determinant situm plani per ipsa transeuntis: non secus ac data quæcunque duo puncta determinant situm rectæ per ipsa ducendæ (8).

322. THEOREMA LXVIII. *Communis duorum quorumcumque planorum intersectio semper est linea duntaxat, eaque recta.*

DEMONSTR. 1*mæ partis.* Ponamus enim, si fieri potest, duorum quorumpiam planorum intersectionem non esse duntaxat lineam, sed superficiem. Superficies hæc utrique plano communis esset; ergo plana illa congruerent aliqua sui parte, altera vero parte, scilicet ultra intersectionem, a se invicem divergerent; quod absurdum est (318)

DEMONSTR. 2*dæ partis.* Assumamus plana AN & ND (*Tab. VII. Fig.* 103.) ita sese intersecantia, ut extima intersectionis puncta sint M & N. Quoniam puncta hæc utrique plano communia sunt, potest a puncto M ad N linea recta duci tam in plano AN, quam in plano ND: nam in quovis plano a quocunque dato puncto uno ad aliud linea recta duci utique potest (317). Jam duæ hæ rectæ perfecte congruant, oportet; secus enim a puncto M ad N duæ diversæ rectæ duci possent, quod absurdum est (5): ergo recta MN, ab uno intersectionis puncto extimo ad alterum ducta, utrique planorum sese intersecantium communis est. Atqui planis sese intersecantibus nihil commune est præter lineam intersectionis; ergo linea, in qua duo plana sese intersecant, recta sit, est necesse.

323. Sit BFDEB (*Fig* 104.) quodpiam planum; e. g. horizontale: ducantur in eo quotcunque lineæ BD, FE, HG &c., in puncto C sese intersecantes; tum ex eodem puncto C concipiatur erigi recta quæpiam AC, quæ plano illi in puncto C insistat. Quodsi id genus recta AC ita insistat plano BFDEB, ut ad omnes rectas BD, FE, HG &c. quæ in eodem plano per punctum C duci

 pos-

possunt, sit perpendicularis; dicitur esse *ipsi plano perpendicularis*: eo enim casu est ang. ACB = ACD, ACF = ACE &c. ac proinde recta AC in nullam plani partem magis inclinatur.

Schol. Si figura hæc e solida materia efformata fuerit, e. g. stilo tabulæ planæ perpendiculariter infixo; Tirones illico concipient, quomodo possit esse ang. ACB = ACD, ACF = ACE &c.

324. Coroll. I. E puncto extra planum posito nonnisi unica perpendicularis potest in idem planum demitti. Ponamus enim, si fieri potest, ex eodem puncto A in idem planum BFDEB duas perpendiculares AC & AD demitti. Puncta C & D connectantur per rectam CD. Quoniam AC est ad planum perpendicularis, angulus ACD rectus sit, oportet (323), similem ob caussam rectus erit etiam ang. ADC (cit.): ergo in eodem triangulo ACD aderunt duo anguli recti; quod absurdum est (106).

325. Coroll. II. Similiter ex plani BFDEB quocunque puncto C nonnisi unica perpendicularis CA potest erigi. Ponamus enim, si fieri potest, ex eodem puncto C duas rectas CA & C*o* posse erigi, ad planum BFDEB perpendiculares. Concipiamus per puncta A, C, *o* transire quodpiam planum, quod intersecet planum BFDEB in recta BC. Angulus ACB, ob rectam AC ad planum BFDEB perpendicularem, erit rectus (323); eodem jure angulus *o*CB, ob rectam *o*C ad idem planum ex hypoth. perpendicularem, rectus erit (cit.): uterque autem hic angulus in eodem plano existet, in eo nempe, quod per rectas AC, *o*C & BC transit. Ergo duo anguli ACB & *o*CB in eodem plano siti æquabuntur inter se, ae proinde pars erit æqualis toti; quod absurdum est.

326. Coroll. III. Cum ex dato puncto extra planum posito nonnisi unica perpendicularis possit in idem planum demitti (324); cujuslibet puncti a plano distantiam metitur perpendicularis, ex puncto illo ad idem planum demissa. Confer. n. 46.

327. THEOREMA LXIX. *Si recta quæpiam* AC *perpendicularis sit duabus rectis* BD *&* EF, *quæ in plano* BFDEB *in eo ipso puncto* C *sese intersecent, in quo recta* AC

AC *eidem plano insistit; eadem recta* AC *perpendicularis erit cuilibet alteri rectæ* GH, *per idem punctum* C *in eodem plano ductæ.*

Demonstr. Ponamus planum BFDEB esse circulum, centrum in C habens, ac proinde sit CG = CB = CF &c Cogitemus deinde triangulum ACB circa latus immotum C ita converti, ut angulus ad C constanter maneat rectus: patet manifeste, a latere BC debere describi, seu quodammodo verri quandam planam superficiem circularem. Porro cum anguli ACF, ACD sint ex hyp. recti, latus BC dicto modo circumactum congruet successive cum rectis FC, DC: ergo illud determinate planum circulare describet, quod per puncta F, D, C transit. Per quæ tria puncta cum nonnisi unicum planum transire possit (320), nempe illud ipsum, in quo omnia puncta G, E, D, H &c. sunt ex hyp. sita; latus BC dicto modo circumactum congruet aliquo temporis momento etiam cum recta GC, adeoque etiam angulus rectus ACB congruet cum angulo ACG. Eo ipso autem clarum est, rectam AC esse ad GH perpendicularem. Eodem modo patet, rectam AC fore perpendicularem ad quamcumque aliam rectam, in plano BFDEB per punctum C ductam.

328. Coroll. Quodsi ergo recta quæpiam AC perpendicularis sit ad duas quascunque rectas BD & FE, in plano BFDEB ita ductas, ut in eo ipso puncto C sese intersecent, in quo recta AC eidem plano insistit; erit AC eo ipso perpendicularis ipsi etiam plano (323).

329. Duorum quorumcunque planorum AN & ND (*Fig.* 103.) sese in quadam recta MN intersecantium apertura, seu divaricatio vocatur *angulus planus.* Hinc si e quocunque mutuæ intersectionis puncto I ducantur binæ rectæ IE & IH ad rectam MN perpendiculares; arcus E*x*H, centro I radio IE descriptus, qui metietur angulum rectilineum EIH, erit etiam mensura anguli plani, seu divaricationis planorum. Clarum enim est, eandem esse divaricationem planorum, quæ est rectarum IE & IH.

330. Coroll. Sicut ergo duo anguli rectilinei deinceps positi, quos recta EI alteri IH insistens, cum eadem utrinque efficit, duobus rectis æquivalent (34), ita

etiam anguli plani deinceps positi, quos planum unum alteri insistens, cum eodem utrinque efficit, sunt æquales duobus rectis. Item sicuti duo anguli verticales, quos duæ rectæ sese intersecantes efficiunt, æquales sunt, ita etiam duo anguli plani verticales, a duobus planis sese intersecantibus effecti, æquantur inter se. Denique omnia, quæ in præcedentibus dicta sunt de angulis, quos efficit recta una cum alia, etiam ad angulos planos, quos unum planum cum altero efficit, transferri posse, clarum est.

331. Si angulus planus, quem planum AN alteri ND insistens, cum eodem efficit, rectus sit, dicitur planum AN esse *perpendiculare* ad ND: tunc enim AN respectu ND in neutram partem magis inclinatur.

332. THEOREMA LXX. *Si planum* AN *sit ad* ND *perpendiculare, & ex quocunque intersectionis puncto* I *erigatur recta, quæ sit ad planum* ND *perpendicularis; ejusmodi recta extra planum* AN *cadere omnino non potest.*

DEMONSTR. Si enim ex puncto I ducamus in plano AN rectam IE ad intersectionem MN perpendicularem, & in plano ND rectam IH itidem ad MN perpendicularem; angulus rectilineus EIH erit rectus: nam ob planum AN ad ND perpendiculare, angulus planus erit rectus (331), iste vero æqualis est angulo rectilineo EIH, quia utrumque metitur idem arcus ExH (329). Ergo rectæ IE, quæ ex intersectionis puncto I in plano AN erigitur ita, ut sit ad intersectionem MN perpendicularis, est perpendicularis ad duas rectas MN & IH, in plano ND per punctum I ductas: consequenter eadem recta IE est etiam ad planum ND perpendicularis (328). Hinc si præterea posset erigi ex puncto I recta quæpiam plano ND perpendicularis, quæ cadat extra planum AN; ex uno eodemque puncto I possent duæ rectæ erigi ad idem planum ND perpendiculares: quod cum absurdum sit (325); veritas theorematis manifesta est.

333. COROLL. Quodsi ergo plura plana sese in una eademque recta intersecantia ita insistant plano horizontali ND (vel cuicunque alteri), ut singula ipsorum sint ad istud perpendicularia; recta illa, in qua plana illa

illa perpendicularia ſeſe interſecant, erit ad planum ND perpendicularis. Si enim ex puncto I, in quo linea interſectionis mutuæ planorum perpendicularium inſiſtit plano ND, ac proinde per quod punctum ſingula plana perpendicularia tranſeunt, concipiamus erigi rectam IE, ad planum ND perpendicularem; recta hæc non poteſt cadere extra ullum dictorum planorum perpendicularium (332): hoc eſt, recta IE erit communis omnibus dictis planis perpendicularibus. Atqui plana ſeſe interſecantia non poſſunt aliam lineam habere ſibi communem, niſi lineam interſectionis: ergo interſectionis linea eſt ipſa recta IE, quam ea lege erigi concepimus, ut ſit ad planum ND perpendicularis. Hoc eſt, communis id genus planorum perpendicularium interſectio eſt ad planum ND perpendicularis.

CAPUT SEXTUM.

De Geneſi, & ſuperficie Solidorum.

334. *Solidi* nomine intelligunt Geometræ complexum ex longitudine, latitudine, & ſimul profunditate conſurgens (2). Solida ſuperficiebus planis terminata generatim *polyedra* dicuntur: ſpeciatim vero *tetraedra, pentaedra, hexaedra* &c. audiunt; prout nempe quatuor, quinque, ſex &c. planis ſuperficiebus terminantur.

335. *Angulus ſolidus* eſt, quem plura plana in aliquo puncto concurrentia comprehendunt. Sic in *Fig.* 105. plana ACB, CDB, & ACB in puncto B concurrentia efficiunt angulum ſolidum ad idem punctum B.

336. Tria minimum plana in eodem puncto B concurrentia requiri ad angulum ſolidum efficiendum, per ſe clarum eſt. Summa autem angulorum rectilineorum, quos latera planorum in aliquo puncto B concurrentium, ad idem punctum B efficiunt, ſemper minor eſt quatuor rectis; id eſt, anguli rectilinei ABD, DBC, CBA ſimul ſumpti minus efficiunt, quam quatuor rectos. Si enim quodcunque planum ACDE (*Fig.* 105), ductis quotcunque rectis BA, BC &c. in quotcunque

partes ABC, CBD &c. in puncto B concurrentes dividamus; omnes anguli, qui a lateribus harum partium ad punctum B efficientur, simul sumpti æquabuntur quatuor rectis (36). Unde patet, id genus plana, quæ ita concurrunt in aliquo puncto B, ut summa angulorum, quos eorundem latera ad idem punctum B efficiunt, sit æqualis quatuor rectis, abire in unum planum continuum ACDE: ut adeo summa illa angulorum, quatuor rectis æqualis, imminui debeat e. g. rejecta parte DBE, ut e reliquis tribus ABC, CBD, & ABE angulus solidus effici, claudique possit. Id quod facilius intelliges, si e chartifolio ACDE, parte EBD mulctato, & juxta ductus rectarum AB & CB inciso angulum solidum efformaveris.

337. Polyedrum aliud est regulare, irregulare aliud. *Regulare* est, si plana ejus superficiem constituentia, sint omnia inter se æqualia, simulque regularia totidem laterum (174), & si præterea ex his planis ad quemlibet solidum polyedri angulum efficiendum totidem numero concurrant. Cetera polyedra sunt *irregularia.*

338. Porro quinque tantum possunt haberi polyedra regularia. Quod ut clarum evadat, polygona regularia, quæ polyedrum regulare comprehendere queant, ordine suo contemplemur. 1) Inter polygona regularia primum occurrit triangulum æquilaterum. In hoc quilibet angulus est $= 60^\circ$: cum enim in triangulo æquilatero omnes tres anguli sint inter se æquales (112), iidem simul sumpti contineant 180 gradus (105); quilibet eorum est $= 60^\circ$. Hinc imprimis si tria æquilatera triangula ABD, DBC, CBA (*Fig.* 105.) in quopiam puncto B concurrant; ad idem punctum efficere poterunt angulum solidum: hoc enim casu tres anguli rectilinei ABD, DBC, CBA simul sumpti nonnisi 180 gradus, adeoque quatuor rectis minus, continebunt. Recole num. 336. Atque istud evenit in *Tetraedro*, seu polyedro quatuor triangulis æquilateris terminato; in quo quilibet angulus solidus tribus polygonis clauditur. Deinde possunt etiam quatuor triangula æquilatera concurrere ad angulum solidum efficiendum: nam quatuor anguli rectilinei unum solidum terminantes, erunt $= 60^\circ \times 4 = 120^\circ$, adeoque quatuor rectis minus efficient.

cient. Hujusmodi anguli ſolidi habentur in *Octaedro*, ſeu polyedro regulari octo triangulis æquilateris terminato. Denique poſſunt quinque etiam triangula æquilatera concurrere ad efficiendum angulum ſolidum: nam etiam quinque anguli rectilinei minus efficient quatuor rectis, utpote qui ſimul ſumpti, ſunt $=60^\circ \times 5 = 300^\circ$. Atque tales cernuntur anguli ſolidi in *Icoſaedro*, ſeu 20 triangulis æquilateris terminato. At quatuor id genus anguli jam efficerent $60^\circ \times 6 = 360^\circ$, adeoque angulum ſolidum efficere non poſſent (336). Hinc nonniſi tria hactenus commemorata polyedra regularia poſſunt terminari triangulis æquilateris.

2) Inter polygona regularia poſt triangulum æquilaterum ſequitur quadratum. In hoc quilibet angulus eſt rectus; adeoque nonniſi tres poſſunt concurrere ad efficiendum angulum ſolidum (336). Hinc unicum duntaxat polyedrum regulare poteſt quadratis terminari; ſcilicet *Hexaedrum*, ſeu ſex quadratis terminatum, quod *cubi* nomine venire ſolet.

3) Quivis pentagoni regularis angulus, e. g. ang. ONM (*Tab. III. Fig.* 53.) continet 108°. Ejus enim menſura eſt dimidium arcus OABM (81); porro cum in pentagono regulari quodlibet latus ſubtendat arcum $= 72^\circ$ (177), arcus OABM eſt $= 72^\circ \times 3 = 216^\circ$: conſequenter dimidium ejusdem eſt $= 108^\circ$. Hinc nonniſi tres ejusmodi anguli poſſunt concurrere ad efficiendum angulum ſolidum, adeoque unicum duntaxat polyedrum regulare poteſt haberi pentagonis regularibus terminatum; ſcilicet *Dodecaedrum*, ſeu 12 id genus pentagonis comprehenſum.

In reliquis polygonis regularibus vel tres anguli (quibus tamen pauciores ad efformandum ſolidum angulum non ſufficiunt) jam aſſurgunt ad 360°, aut etiam ultra: ex iis ergo nequit amplius efformari angulus ſolidus, adeoque nec polyedrum regulare. Unde nullum amplius polyedrum regulare poſſibile eſt præter quinque hactenus enumerata, ſeu præter tetraedrum, hexaedrum, octaedrum, dodecaedrum, & icoſaedrum.

339. Si polygonum quodcunque ABC (*Tab. VII, Fig.* 107.) concipiatur moveri motu ſibi ſemper parallelo juxta directionem rectæ cujuspiam *Aa*, donec ad

ſitum

ſitum *abc* perveniat; generabitur ſolidum, quod *prisma* appellatur. Polygona ABC & *abc* ſunt *baſes* prismatis; & perpendiculum inter baſes interceptum, *altitudo* prismatis eſt.

340. Prisma aliud eſt rectum, obliquum aliud. *Rectum* eſt, ſi linea directrix *Aa* fuerit ad polygonum generans perpendicularis: ſecus prisma *obliquum* erit. Præterea diverſa ſunt prismatum genera pro numero laterum polygoni generantis. Nempe prisma unum dicitur *triangulare*, aliud *quadrangulare*, aliud *pentagonum* &c.; prout nempe baſis ejus, ſeu planum generans *tribus*, *quatuor*, aut *quinque* &c. lateribus terminatur Quodſi baſis ſit parallelogrammum, prisma ſpeciatim *parallelepipedum* nuncupatur: ſi autem baſis fuerit quadratum, & linea directrix fuerit ad baſim perpendicularis, ſimulque æqualis lateri baſis; prisma dicitur *cubus*.

341. THEOREMA LXXI. *Superficies cujusvis prismatis ſecluſis baſibus, eſt æqualis facto ex perimetro baſeos in communem altitudinem parallelogrammorum, eam ſuperficiem conſtituentium. e. g. In prismate recto* Ac *dicta ſuperficies eſt* $= (AB + BC + CA) \times Aa$.

Demonstr. Nam ex ipſa prismatis geneſi patet, ejus ſuperficiem coaleſcere ex tot æque altis parallelogrammis. quot ſunt latera baſeos, ſeu polygoni generantis (339): cum ergo quodlibet id genus parallelogrammum ſit æquale facto ex eo perimetri baſeos latere, cui ipſum tanquam baſi ſuæ inſiſtit, in communem altitudinem ducto (142); ſumma omnium parallelogrammorum, ſeu dicta prismatis ſuperficies æquatur facto ex integra perimetro baſeos in altitudinem ductam.

342. Ponamus cujuspiam prismatis baſim, ſeu polygonum generans eſſe polygonum regulare: ſi in hoc polygono concipiamus numerum laterum infinite creſcere, eorundem magnitudine tantundem decreſcente, eo ſcilicet modo, quem n. 181 expoſuimus; polygonum illud generans abit in circulum (cit.), & prisma generatum in *cylindrum*: ut adeo *cylinder* ſit prisma rotundum, cujus ſuperficies ſecluſis baſibus ſumpta conſtat infinitis numero parallelogrammis, ſed quorum ſingula baſim habeant infinite parvam.

343. Coroll. Igitur cylindri ſuperficies ſecluſis baſibus acquiritur, ſi ejusdem ſuperficiei altitudo in peripheriam baſeos ducatur (341).

344. *Pyramis* eſt quodcunque ſolidum ABDC (*Fig.* 105), cujus baſis eſt quodpiam polygonum ADC, reliqua autem ſuperficies conſtat ex meris triangulis rectilineis ABD, DBC &c. perimetro baſeos inſiſtentibus, & in quopiam puncto B (quod pyramidis *vertex* dicitur) concurrentibus. *Altitudo* pyramidis eſt perpendiculum ex vertice in baſim (ſi opus fuerit, etiam producendam) demiſſum. Pyramis dicitur *recta*, ſi perpendicula illa, quæ ex vertice B ad latera baſeos demittuntur, ſint omnia inter ſe æqualia; ſin minus, pyramis eſt *obliqua.* Item pyramis quoque, non ſecus ac priſma (340), alia eſt *triangularis*, alia *quadrangularis*, *pentagona* &c. Quodſi pyramis plano quopiam *adc* ſecetur; pyramidis pars *adc* CAD: inter id planum, & baſim intercepta, pyramis *truncata* nuncupatur.

345. Coroll. Si quæcunque pyramis ABCD ſecetur plano, baſi ADCA parallelo; ſectio *adca* erit polygonum ſimile baſi ADCA. Nam 1) totidem fore latera ſectionis, quot ſunt latera baſis ipſius, per ſe clarum eſt. 2) Quoniam planum ſecans ponitur eſſe baſi parallelum, erit latus *ad* parallelum ad AD, *dc* ad DC &c. conſequenter erit ang. $a = A$, $d = D$ &c. 3) Latera homologa erunt proportionalia: nam e. g. fore $ad : AD = dc : DC$, ſic declaro: ob *ad* ad AD parallelum eſt $ad : AD = Bd : BD$ (152), & ob *dc* ad DC parallelum, eſt $dc : DC = Bd : BD$ (cit.): eſt ergo $ad : AD = dc : DC$. Eo ipſo autem patet, ſectionem *adca* fore polygonum ſimile baſi ADCA (117). Eodem prorſus modo patet, quascunque duas parallelas pyramidis ſectiones eſſe polygona inter ſe ſimilia.

346. THEOREMA LXXII. *Superficies pyramidis rectæ ſecluſa baſi, æquatur facto ex ſemiperimetro baſeos in rectam, e vertice ad quodvis baſeos latus perpendicularem.*

Demonstr. Ea enim ſuperficies conſtat totidem triangulis æque altis, quot in baſe ſunt latera (344.); hæc autem omnia ſimul triangula æquantur facto ex

dimi-

dimidiis omnium basibus in communem eorundem altitudinem (143), adeoque ex semiperimetro baseos in rectam, e vertice ad quodvis baseos latus perpendicularem.

Schol. Cum in pyramide obliqua, triangula superficiem seclusa basi sumptam constituentia non sint omnia ejusdem altitudinis (344); singula eorum seorsim metienda, tum in unam summam addenda erunt.

347. THEOREMA LXXIII. *Superficies rectæ pyramidis truncatæ* adcADC *bases parallelas habentis, seclusis basibus æquatur facto ex semisumma perimetrorum basium* adca & ADCA *in perpendiculum, inter duo quæcunque earundem basium latera parallela e. g. inter* ad & AD *interceptum.*

Demonstr. Ea enim superficies constat totidem trapeziis bases parallelas habentibus, quot latera habet quævis basis pyramidis truncatæ: nempe in præsente casu constat tribus trapeziis *ad*DA, *dc*CD, *ca*AC. Jam vero cujusvis id genus trapezii area æquatur semisummæ laterum parallelorum ductæ in perpendiculum inter eadem interceptum; e. g. area trapezii *ad*DA æquatur semisummæ laterum *ad* & AD ductæ in perpendiculum inter eadem interceptum (279). Cum ergo id genus perpendicula, ob bases ex hyp. parallelas, omnia debeant esse æqualia (53); area omnium trapeziorum, adeoque tota superficies dicta, æquatur facto ex semisumma omnium laterum parallelorum, seu perimetrorum basium in perpendiculum, inter duo quæcunque basium latera parallela interceptum.

348. Ponamus cujuspiam pyramidis basim esse polygonum regulare: si in hoc polygono concipiamus numerum laterum infinite augeri, tantundem imminuta eorundem magnitudine, eo scilicet modo, quem n. 181. exposuimus; basis illa abibit in circulum, & triangula, quæ pyramidis superficiem seclusa basi sumptam constituunt, erunt numero infinita, sed quorum singula basim habeant infinite parvam: hoc est pyramis evadet rotunda, seu abibit in *conum*. Ut adeo *conus* non aliud sit, quam pyramis, cujus basis infinitis numero lateribus infinite parvis, inter se æqualibus constat,

349. Coroll. I. Igitur conus quoque, quemadmodum de pyramide n. 344. locuti ſumus, alter eſt rectus, alter obliquus. *Rectus* eſt, ſi diſtantia peripheriæ baſeos a vertice (quæ diſtantia *latus* coni vocari ſolet) ubique ſit eadem: ſin autem diſtantia hæc alicubi major ſit, alicubi minor; conus eſt *obliquus*.

350. Coroll. II. Quoniam conus eſt pyramis, cujus baſis ſit polygonum infinitorum numero laterum infinite parvorum (348); imprimis ſuperficies coni recti ſecluſa baſi, æquatur facto ex ſemiperipheria baſeos in perpendiculum ex vertice ad peripheriam baſeos demiſſum, ſeu in latus coni (346): deinde ſuperficies coni truncati recti ſecluſis baſibus æquatur ſemiſummæ peripheriarum baſium ductæ in latus inter easdem peripherias interceptum (347). Coni obliqui ſuperficies ad accuratum calculum vocari hactenus non potuit.

351. *Sphæra* eſt ſolidum unica ſuperficie comprehenſum (*Fig.* 108.), a cujus medio puncto C (quod *centrum* ſphæræ dicitur) ad ſuperficiem ductæ rectæ CA, CB &c. ſunt omnes inter ſe æquales. Hujusmodi rectæ, non ſecus ac in circulo, vocantur *radii*, vel *ſemidiametri*; quælibet autem recta AB, quæ per centrum C ducta utrinque in ſuperficie ſphæræ terminatur, *diameter* ſphæræ nuncupatur.

352. Coroll. I. Cum ſingula ſuperficiei ſphæræ puncta æqualiter diſtent a centro C; tam radios ſphæræ omnes inter ſe, quam etiam diametros omnes inter ſe æquales eſſe debere, perſpicuum eſt.

353. Coroll. II. Quivis ſemicirculus ADB, centrum in C habens, ſi circa diametrum immotam AB converti concipiatur, dum ad priorem ſuam poſitionem redeat, generabit interea ſphæram, eodem centro C, & diametro AB gaudentem: generabit enim ſolidum, ad cujus ſuperficiem ductæ ex centro C rectæ erunt omnes inter ſe æquales; ergo (351).

354. THEOREMA LXXIV. *Si ſphæra plano quopiam ſecetur quacunque directione; planum ſectionis ſemper erit circulus.*

Demonstr, Tranſeat enim 1) planum ſectionis per ipſum ſphæræ centrum C. Rectæ in eo plano ex centro

tro C ad ejusdem plani peripheriam ductæ, omnes erunt inter se æquales; nam ea peripheria cadet in superficiem sphæræ, rectæ autem ex centro C in sphæræ superficiem ductæ, omnes sunt inter se æquales (351): eo ipso autem patet planum dictæ sectionis fore circulum, centrum in C habentem (10).

2) Sectio quæcunque *mnorvm* cadat extra sphæræ centrum C. Singula perimetri sectionis puncta *m*, *n*, *o*, *r*, *v* &c. a sphæræ centro C æquidistabunt, seu erit $mC = nC = oC = rC = vC$ &c.: nam singula puncta *m*, *n*, *o* &c in ipsa superficie sphæræ erunt, ejus autem superficiei puncta omnia a centro C æquidistant (351). Unde patet, sectionem *mnorvm* esse basim coni recti, cujus vertex sit in C. Eo ipso autem sectio illa circulus sit, oportet (348, & 349).

355. Coroll. Is circulus est maximus in superficie sphæræ, cujus planum transit per ipsum sphæræ centrum: ceteri vero circuli eo minores sunt, quo magis recedunt ab eodem centro Nam diameter ejus circuli, cujus planum per ipsum sphæræ centrum transit, æquatur diametro ipsius sphæræ: reliquorum autem diametri æquantur chordis circuli maximi; quæ eo minores sunt, quo magis recedunt a centro C, sphæræ & circulo maximo communi (70).

356. THEOREMA LXXV. *Superficies cujusvis sphæræ æquatur facto ex peripheria circuli maximi in diametrum.*

Demonstr. Concipiamus sphæram (*Fig.* 109.) secari duobus planis infinite sibi vicinis, simulque parallelis; sint autem sectionum diametri E*e* & M*m*: deinde sit diameter AB ad eas sectiones perpendicularis: denique sit sphæræ centrum in C.

Jam 1) arcus EM & *em* inter parallelas E*e* & M*m* intercepti æquantur inter se (88), &, quoniam sunt infinite parvi, pro rectis lineolis habendi sunt (183. *Schol.* 3): unde consequitur, sphæræ segmentum EM*me* inter sectiones E*e* & M*m* interceptum, esse conum rectum truncatum (348, & 349.). Hinc ejus segmenti superficies demptis basibus æquatur semisummæ peripheriarum basium, ductæ in latus EM (350): adeoque ſi peripheria ſectionis diametro Mm gaudentis dicatur P, & peripheria ſectionis diametrum Ee habentis ſit $= p$; dicta ſuperficies eſt $= (\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} p) \times EM$.

Cum diameter Ee nonniſi intervallo HL, quod ex hyp. eſt infinite parvum, magis diſtet a centro C, ac diſtet diameter Mm; reapſe utriusque a centro C diſtantia eſt eadem (*Algeb.* 220. *Schol.* 2.); ac proinde diametri Mm & Ee reapſe æquantur inter ſe (70: atqui dictarum ſectionum peripheriæ P & p ſunt ut earundem diametri Mm & Ee (181); eſt ergo etiam $P = p$: conſequenter $\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} p$ eſt $= P$. Hinc cum per n. 1) ſuperficies ſegmenti $LMme$ ſecluſis baſibus ſit $= (\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} p) \times EM$; patet eandem ſuperficiem eſſe $= P \times EM$.

3) Si ex puncto E demittatur ad diametrum Mm perpendicularis EO; triangulum MOE, ob arcum infiniteſimum EM pro linea recta habendum, erit rectilineum. Porro ſi ducatur præterea radius MC; triangula MEO & MCL erunt ſimilia. Nam imprimis in triangulis his anguli ad O & L ſunt ex conſtr. recti: eſt deinde ang. EMO $=$ MCL, quod ſic declaro: ob arcum infiniteſimum EM pro linea recta habendum, ſimulque cum circuli tangente congruentem, angulus EMm ſeu EMO habet pro menſura dimidium arcus MAm (81), adeoque habet pro menſura arcum MEA (68): atqui etiam angulus MCA ſeu MCL pro menſura habet arcum MEA (19); eſt ergo ang. EMO $=$ MCL. Eo ipſo autem patet triangula MEO & MCL eſſe ſimilia (118).

4) Ex his ſequitur, ſuperficiem ſegmenti $EMme$ ſecluſis baſibus æquari facto ex diametri ſegmento HL in peripheriam circuli maximi. Nam in triangulis MEO & MCL per n. 3) ſimilibus latera homologa in proportionem reſolvendo ſtat, EO : EM $=$ ML : MC, ſeu ob EO $=$ HL (53), ſtat:

$$HL : EM = ML : MC.$$

Jam ML eſt radius ejus ſectionis, cujus peripheriam ſuperius vocavimus P, & MC eſt radius circuli maximi: cum ergo peripheriæ duorum quorumvis circulorum ſint ut eorundem radii (181), ſtat quoque

$$HL : EM = P : \text{periph. circ. maximi.}$$

Adeoque eſt $P \times EM = HL \times$ periph. circ. max. (*Algeb.* 165.) Atqui per n. (2) ſuperficies ſegmenti $EMme$ ſecluſis baſibus eſt $= P \times EM$; ergo eadem ſuperficies eſt quoque $= HL \times$ periph. circ. maximi.

His præmiſſis jam plana ſit theorematis demonſtratio. Si enim totam ſphæram in ejusmodi ſegmenta, quale eſt $EMme$. dividi concipiamus ope innumerorum planorum Nn, Ss &c. parallelorum, infiniteque ſibi vicinorum; eodem modo oſtendi poterit, ſuperficiem ſegmenti $MNnm$ demptis baſibus fore æqualem diametri ſegmento LC in peripheriam circuli maximi ducto, ſuperficiem ſegmenti $NSsn$ fore $CV \times$ periph. circ. max. & ſic porro. Ergo omnium ſegmentorum, iſt eſt, totius ſphæræ ſuperficies erit æqualis facto ex omnibus diametri ſegmentis, ſeu ex integra diametro in peripheriam circuli maximi. Q. E. D.

357. Coroll. I. Igitur ſuperficies ſphæræ eſt quadrupla circuli maximi ejusdem ſphæræ. Si enim radius ſphæræ ſit $= r$, adeoque diameter $= 2r$, peripheria circuli maximi p; erit ſuperficies ſphæræ ex modo demonſtratis $= 2rp$: atqui ſuperficies circuli maximi eſt tantummodo $= \frac{1}{2}rp$ (280); ergo.

358. Coroll. II. Superficies ſegmenti ſphærici MAm dempta baſi æquatur altitudini ſuæ AL, ductæ in peripheriam circuli maximi: pariter ſuperficies cujuscunque ſegmenti $ESse$ baſibus parallelis terminati, demptis iisdem baſibus eſt $= HV \times$ periph. circ. maximi.

359: Coroll. III. Superficies quarumvis duarum ſphærarum ſunt ut quadrata radiorum; id eſt, ſi ſuperficies vocentur S & s, radii R & r, eſt ſemper $S ; s = R^2 : r^2$. Cum enim ſit ſphæræ ſuperficies ſeu $s = 2rp$ (357, litera p circuli maximi peripheriam deſignante, & loquendo de rationis æqualitate ſit $p = r$ (182); loquendo de eadem rationis æqualitate loco p poni poteſt r, ac proinde eſt $s = 2r^2$, ſeu eſt $s = r^2$ (*Algeb.* 197). Unde in duabus quibusvis ſphæris eſt $S : s = R^2 : r^2$ (*Algeb.* 184).

CAPUT

CAPUT SEPTIMUM.

De Soliditate, ſeu Volumine Solidorum.

360. THEOREMA LXXVI. *Soliditas, ſeu volumen cujusvis priſmatis æquatur facto ex ejusdem baſi in altitudinem.*

DEMONSTR. Concipiamus enim priſmatis altitudinem dividi in partes æquales infinite parvas, tum per puncta ſectionum tranſire totidem plana baſi priſmatis parallela. Plana hæc imprimis divident priſma in totidem lamellas infinite tenues, in quot partes altitudo priſmatis diviſa fuerit; deinde ex ipſa priſmatis geneſi (339) patet, quamlibet earum lamellarum fore ſimilem, & æqualem lamellæ infimæ, ſeu baſi priſmatis: ergo ſumma omnium harum lamellarum, ſeu tota priſmatis ſoliditas acquiritur, ſi ejusdem baſis iu altitudinem ducatur.

361. COROLL. I. Quodſi ergo duorum quorumcunque priſmatum ſoliditates vocentur S & s, altitudines A & a, baſes B & b; eſt generatim $S ; s = AB : ab$. Adeoque, ſi ſit $A = a$, eſt $S : s = B : b$; ſi autem ſit $B = b$, eſt $S : s = A : a$.

362. COROLL. II. Quoniam *cubus* eſt priſma habens baſim quadratam, & altitudinem lateri baſis æqualem (340); ſoliditas cubi acquiritur, ſi ejus latus quodcunque ad cubum elevetur. Si enim latus baſeos dicatur l, eſt baſis ipſa $= l^2$: cum ergo altitudo quoque ſit $= l$; tota cubi ſoliditas eſt $= l^3$ (360).

363. COROLL. III. Cum cylinder ſit e genere priſmatum (342), etiam cylindri cujusvis ſoliditas æquatur facto ex baſi in altitudinem.

364. Pro menſura ſolidorum aſſumpſere Geometræ cubum notæ quantitatis; cujusmodi ſunt, pertica cubica, pes cubicus, digitus cubicus &c. Porro *pertica cubica* eſt ejusmodi cubus, cujus latus æquatur uni perticæ: *pes cubicus* eſt cubus, cujus latus eſt uni pedi æqualis &c. Hinc ſolidi cujuspiam volumen tot perticarum cubicarum, aut pedum cubicorum eſſe dicitur,

 quot

quot ejusmodi cubos in ſe continet. Porro pertica cubica continet in ſe 1000 pedes cubicos: ea enim acquiritur, ſi pertica ſimplex ad cubum elevetur (362), adeoque ſi 10 pedes ſimplices bis in ſe ipſos ducantur. Similiter patet, pedem cubicum 1000 digitis cubicis æqualem eſſe, & ſic porro.

365. Coroll. Itaque 1) ſi menſuræ ſimplices ducantur in quadratas, factum enaſcens dabit menſuras cubicas: e. g. ſi perticam quadratam ducas in ſimplicem, factum dat perticam cubicam. 2) Si menſuræ cubicæ dividantur per ſimplices, quotus dabit menſuras quadratas: e. g. ſi cubica pertica dividatur per ſimplicem, quotus eſt pertica quadrata. 3) Si menſuræ cubicæ dividantur per quadratas, pro quoto obvenient menſuræ ſimplices: e. g. ſi pertica cubica per quadratam dividatur, quotus eſt pertica ſimplex. Juvat hic recolere *Arith.* n. 55.

366. PROBLEMA LXXIV. *Dati priſmatis ſoliditatem menſurare, e. g. capacitatem cubiculi, parallelepipedi formam referentis.*

Resolut. Inveniatur imprimis area baſeos (283); deinde area hæc ducatur in altitudinem priſmatis: factum enaſcens æquabitur ſoliditati, ſeu volumini propoſiti priſmatis (360). e. g. In cubiculo, cujus baſis ſit parallelogrammum, ponamus unum baſeos latus eſſe $=$ 1, 3 *pert.* alterum $=$ 3, 1 *pert.* Erit ejus cubiculi baſis $=$ 4, 03 *pert. quadr.* (*Algeb.* 231): adeoque ſi altitudo cubiculi ſit $=$ 1, 2 *pert.* tota capacitas erit $=$ 4, 03 $\times$ 1, 2 $=$ 4, 836 (*Algeb.* cit.). At hæ menſuræ jam erunt cubicæ (365); hoc eſt, dicta capacitas erit $=$ 4, 836. *pert. cubic.* Cujusmodi factorum valor ut intelligatur;

Schol. 1. Notandum eſt: in facto menſuras cubicas exprimente, e. g. in facto $=$ 4, 836 *pert. cub.* nota 4, quæ *comma* præcedit, exprimit quidem integras perticas cubicas, eæ vero, quæ poſt comma ſequuntur, partes decimas, centeſimas &c. perticarum cubicarum, uti natura fractionum decimalium exigit (*Algeb.* 226.): quia tamen pertica cubica 1000 pedibus cubicis æquivalet (364), prima poſt comma nota 8, deſignat cente-

tena-

tenarios pedum cubicorum; altera nota 3, eorundem decades: tertia 6, unitates. Hinc in hoc menſurarum genere, ex notis *comma* ſequentibus cuilibet menſuræ ſpeciei tres notæ ſunt aſſignandæ. e. g. Si 14, 836157 *pert cub*, enuntiari debeant; hoc modo eſt procedendum: imprimis notæ 4, *comma* proxime præcedenti addatur exponentis inſtar ſignum (°); quod indicabit, per notas comma illud præcedentes deſignari unitates integras ſeu perticas cubicas. Deinde poſt tres verſus dextram notas adjiciatur alterum *comma*, notæque hoc *comma* proxime præcedenti addatur ſignum pedum, ſeu ſignum (′). Rurſus poſt alias tres notas addatur tertium *comma*, notæque ipſum proxime præcedenti ſcribatur pro exponente ſignum (″). Hoc eſt, quantitas illa hoc modo ſcribatur: $24^{\circ}, 83\acute{6}, 15\ddot{7}$, & hoc modo enuntietur: 24 perticæ cubicæ, 836 pedes cubici, 157 digiti cubici.

Pariter ſi 4, 836 pert. cub. enuntiari debeant; hoc modo ſcribantur: $4^{\circ}, 83\acute{6}$, & hoc modo enuntientur: 4 perticæ cubicæ, 836 pedes cubici. Quodſi autem in ejusmodi fractione decimali notæ poſt comma ſequentes non eſſent tres, ſex, aut novem &c. ſed e. g. duo, aut quinque &c.; augentur adjectis zeris a dextris, dum fiant tres, aut ſex &c. Hoc pacto valor fractionis non mutabitur (*Algeb.* 225); & tamen nunc traditæ ſcribendi, enuntiandique regulæ jam ſatisfieri poterit. e. g. 4, 8362 pert cubic. hoc modo ſcribantur: $4^{\circ}\ 83\acute{6}, 20\ddot{0}$, & hoc modo enuncientur: 4 perticæ cubicæ, 836 pedes cubici, digiti 200 cubici.

Schol. 2. Si quæpiam ſoliditas non menſuris cubicis ſuperius deſcriptis, ſed aliis quibusdam exprimenda ſit, ut ſi quæratur, quotnam lateres (qui non cubi. ſed parallelepipeda eſſe ſolent) requirantur ad datum murum exſtruendum; debebit quidem baſis in altitudinem duci, ſed uſus fractionum decimalium non habebit locum. Nempe ſi quæſtio nunc commemorata proponatur, hoc modo procedendum eſt. 1) Explora, quotnam lateres ſecundum longitudinem ſuam diſpoſiti expleant longitudinem muri, quot item lateres ſecundum latitudinem suam dispositi expleant ejusdem muri latitudinem; tum numeros inventos inter se multiplica: factum enascens dabit numerum laterum, qui basim muri constituent. 2) Inquire quotnam lateres supra se positi expleant muri altitudinem; horum numerus exprimet altitudinem muri; quem proinde numerum si in basim paullo ante inventam duxeris, factum enascens indicabit numerum laterum ad totam muri soliditatem requisitorum, Spatii tamen a calce lateribus intermixta occupandi ratio habenda erit.

367. LEMMA. *In serie numerorum naturalium* 1, 2, 3, 4 *&c. cubus termini ultimi semper constat* 1) *cubo termini primi*, 2) *triplo quadrato cujuslibet termini ultimum præcedentis*, 3) *triplo cujuslibet termini ultimum præcedentis*, 4) *denique numero eorundem terminorum, ultimum præcedentium.*

DEMONSTR. Numeri naturales quotcunque bene repræsentantur per a, b, c. d &c. qui cum inter se differant unitate, erit $d = c + 1$, $c = b + 1$, $b = a + 1$. Quodsi ergo hi termini ad cubum eleventur: erit

$$d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$$
$$b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \quad (Algeb.\ 86).$$

Jam si in formula prima ultimi termini cubum exprimente loco c^3 sustituamus ejus valorem in 2*da* formula contentum; erit

$$\begin{aligned} d^3 = b^3 &+ 3b^2 + 3b + 1 \\ &+ 3c^2 + 3c + 1. \end{aligned}$$

Porro si in hoc quantitatis d^3 valore, loco b^3 substituamus valorem ipsius, superius in tertia formula contentum; erit

$$\begin{aligned} d^3 = a^3 &+ 3a^2 + 3a + 1 \\ &+ 3b^2 + 3b + 1 \\ &+ 3c^2 + 3c + 1 \end{aligned}$$

Ex cujus formulæ postremæ contemplatione veritas lemmatis manifesta jam fit.

368. COROLL. Jam si ejusmodi seriem ab unitate inchoatam ponamus esse infinitam; erit imprimis terminus

minus ultimus $=\infty$, adeoque ejus cubus $=\infty^3$: erit deinde cubus termini primi $=1$: denique numerus omnium terminorum erit $=\infty$, adeoque numerus omnium terminorum ultimum præcedentium erit $=\infty - 1$. Hinc si præterea summam quadratorum terminorum ultimum præcedentium vocemus Ss, & summam eorundem terminorum litera s exprimamus; erit per *Lemma*,

$$\infty^3 = 1 + 3Ss + 3s + \infty - 1,$$
$$\text{seu } \infty^3 = 3Ss + 3s + \infty.$$

369. Coroll. II. Quoniam summa totius progressionis arithmeticæ generatim æquatur semisummæ terminorum primi, & ultimi multiplicatæ per numerum omnium terminorum (*Algeb.* 215.); in assumpta a nobis serie infinita, summa illa est $= \left(\frac{1+\infty}{2}\right) \times \infty = \frac{\infty + \infty^2}{2}$. Est ergo $3s = \frac{3\infty + 4\infty^2}{2}$.

Quem valorem loco $3s$ substituendo in ultima præc. Corollari æquatione, est:

$$\infty^3 = 3Ss + \left(\frac{3\infty + 3\infty^2}{2}\right) + \infty.$$

$$\text{Hinc } 3Ss = \infty^3 - \left(\frac{3\infty + 3\infty^2}{2}\right) - \infty.$$

Jam stat hæc proportio, $\infty^3 : \infty^2 = 1 : \frac{1}{\infty}$, est enim factum extremorum æquale facto mediorum. Hinc quemadmodum $\frac{1}{\infty}$ in consortio unitatis, seu finitæ quantitatis nihilo æqualis poni potest (*Algeb.* 220 *Schol.* 2.), ita etiam ∞^2 evanescit in consortio quantitatis ∞^3: consequenter in ejusdem consortio potiore jure evanescit quantitas ∞. Itaque quantitates infinitas primi, & secundi ordinis negligendo, est reapse

$$3Ss = \infty^3\text{; adeoque } Ss = \frac{\infty^3}{3} = \infty$$

370. Coroll. III Ex his elucet jam in assumpta serie infinita summam omnium totius seriei quadratorum æqualem esse tertiæ parti facti ex quadrato termini ultimi in numerum omnium terminorum. Cum enim summa quadratorum terminorum ultimum præcedentium sit $= \frac{\infty^3}{3}$ (369); & ultimus seriei terminus sit $= \infty$; summa quadratorum totius seriei est $= \frac{\infty^3}{3}$ $+ \infty^2$: seu cum ∞^2 comparate ad $\frac{\infty^3}{3}$ evanescat, summa quadratorum totius seriei est $= \frac{\infty^3}{3} = \frac{\infty^2 \times \infty}{3}$. Atqui ∞^2 est quadratum termini ultimi, & ∞ est numerus omnium terminorum; ergo.

371. THEOREMA LXXVII *Soliditas cujusvis pyramidis est tertia pars facti ex basi in altitudinem.*

Demonstr. Concipiamus enim e. g. pyramidem totam BADC (*Fig.* 105.) planis basi parallelis, & æquidistantibus secari in lamellas infinite tenues, ac proinde numero infinitas. Imprimis harum lamellarum latera inchoando a vertice continenter una infinitesima parte crescent ac proinde seriem numerorum naturalium infinitam constituent. Deinde lamellæ ipsæ, seu sectiones, erunt polygona similia (345), adeoque erunt ut quadrata laterum homologorum (399): cum ergo latera homologa lamellarum continenter crescentium constituant seriem numerorum naturalium infinitam; lamellæ ipsæ constituent seriem infinitam quadratorum numerorum naturalium. Hinc cum tota series infinita qua-

quadratorum numerorum naturalium æquetur tertiæ parti facti ex quadrato ultimo in numerum omnium terminorum (370); etiam in pyramide summa omnium lamellarum, seu tota pyramidis soliditas æquatur tertiæ parti facti ex ultima lamella seu basi in numerum omnium lamellarum, seu in pyramidis altitudinem.

372. Coroll. I. Cum ergo conus sit e genere pyramidum (348), coni quoque soliditas est tertia pars facti ex basi in altitudinem.

373. Coroll. II. Cum tam prismatis, quam cylindri soliditas æquetur facto ex basi in altitudinem integram (360, & 363); pyramidem esse tertiam partem prismatis, conum autem cylindri, eandem basim, & altitudinem habentis, in confesso est.

374 Coroll. III. Pyramides, aut coni æqualium basium & altitudinum, æquantur inter se.

Schol. Ex his patet methodus inveniendi soliditatem datæ pyramidis, & coni: scilicet basis ducenda est in $\frac{1}{3}$ partem altitudinis. Quodsi autem pyramidis truncatæ *adc*CDA soliditas invenienda sit: inveniatur imprimis soliditas tam integræ pyramidis BADC, quam etiam resectæ partis *Badc*: differentia harum soliditatum æquabitur soliditati pyramidis truncatæ *adc*CDA. Eodem modo invenitur soliditas coni truncati.

375. THEOREMA LXXVIII. *Soliditas cujusvis sphæræ æquatur tertiæ parti facti ex ejusdem superficie in radium.*

Demonstr. Concipiamus enim superficiem sphæræ (*Fig.*108.) resolvi in particulas infinite parvas, ac proinde tales, quæ ad superficiem planam infinite accedant, sitque ex iis particulis una *abd*. Si a singulis earum particularum perimetri punctis ducantur ad centrum C rectæ *a*C, *b*C, *d*C &c.; tota sphæræ soliditas resolvetur in totidem pyramides, quot particulis superficies ejus constabit: quarum pyramidum communis altitudo erit ipse radius sphæræ, bases autem erunt eædem particulæ, in quas totam ſphæræ ſuperficiem reſolvi concepimus. Jam cujuslibet id genus pyramidis ſoliditas æquabitur tertiæ parti facti ex baſi ſua in radium ſphæræ (371): ergo ſoliditas omnium ſimul pyramidum, id eſt totius ſphæræ ſoliditas æquabitur tertiæ parti facti ex tota ſphæræ ſuperficie in ejusdem radium.

376 Coroll. I. Quarumvis duarum ſphærarum ſoliditates ſunt ut cubi radiorum. Si enim ſphæræ ſuperficies vocetur s, radius r; ejusdem ſphæræ ſoliditas eſt $= \frac{1}{2}\, sr$ (375): adeoque loquendo de rationis æqualitate, eſt ſphæræ ſoliditas $= sr$. (*Algeb.* 197.). Ergo ob $s = r^2$ (359). dicta ſoliditas eſt $= r^3$: conſequenter in duabus quibusvis ſphæris ſoliditates ſunt ut $R^3\ r^3$.

377. Coroll. II. Quilibet circulus maximus, ſeu per ipſum ſphæræ centrum tranſiens, ſphæram in duas æquales partes dividit. Sit enim Nn (*Fig.* 109.) diameter circuli maximi, ſeu per ſphæræ centrum C transeuntis, eandemque in duo ſegmenta NAn & NBn dividentis. Soliditas ſegmenti NAn æquabitur tertiæ parti facti ex ejusdem ſegmenti ſuperſicie convexa in radium; id quod prorſus eadem argumentandi ratione patet, qua Theorema n. 375. demonſtravimus: pariter ſoliditas ſegmenti NBn æquabitur tertiæ parti facti ex ſuperficie convexa ejusdem ſegmenti NBn in radium. Hinc ſi ſuperficies illæ convexæ dicantur S & s, radius vero ſphæræ ſit $= r$; eſt:

$$\text{Soliditas } NAn : NBn = \tfrac{1}{3}\, Sr : \tfrac{1}{3}\, sr.$$

adam rat. divid. per $\frac{1}{3} r$, $NAn : NBn = S : s$.

Atqui, ſi peripheria circuli maximi dicatur P, eſt $S = AC \times Pc$ & $s = BC \times P$ (358); eſt ergo

$$NAn : NBn = AC \times P : BC \times P.$$

Divid. per P, eſt $NAn : NBn = AC : BC$.

Itaque ob $AC = BC$, eſt etiam $NAn = NBn$.

378. PROBLEMA LXXV. *Invenire ſoliditatem, ſeu volumen cujuscunque corporis utcunque irregularis.*

Resolut. Datum corpus utcunque irregulare immittatur in quodpiam cavum parallelepipedum (*Tab. III. Fig.* 37), eique aqua aut arena ſuperfundatur; tum notetur aquæ, aut arenæ complanatæ altitudo AC: porro corpore extracto rurſus obſervetur aquæ, aut arenæ complanatæ altitudo *m*C. Clarum eſt, volumen dati illius corporis æquale fore parellelepipedo A*mo*B: adeoque ſi iſtud menſuretur, baſi in altitudinem ducta (360): quæſita corporis dati ſoliditas obtinebitur.

FINIS ELEMENTORUM GEOMETRIÆ.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM.

CAPUT PRIMUM.

De Ellipsi ad axes suos relata.

1. *Sectionum conicarum* nomine veniunt tres quædam lineæ curvæ *legitimæ*, seu certa quadam stabilique lege duci, ac determinari solitæ: nimirum *ellipsis*, *parabola*, & *hyperbola*. Nominis origo inde est, quod jam una harum curvarum, jam alia soleat enasci in superficie *coni*, si iste plano quopiam jam hac, jam alia lege *secetur*.

2. Ut *ellipseos* notio habeatur; assumantur duæ quæpiam rectæ AB & DE (*Tab. VIII. Fig.* 1), quæ sese in puncto C ad angulos rectos, simul bifariam secent, ita nimirum, ut sit AC = CB, & DC = CE: sit autem AB > DE, adeoque etiam AC > DC. Deinde centro C radio AC describatur circulus *AmoBqnA*; tum e recta AB erigantur utrinque innumeræ rectæ P*m*, R*o*, S*f*, S*h*, R*q*, &c. quæ in ipsa circuli peripheria terminentur, sintque ad DE parallelæ, adeoque ad AB perpendiculares. Denique ex his perpendicularibus abscindantur segmenta PM, RO, SF, SH &c. ea lege, ut quodlibet segmentum sit quartum proportionale ad AC, DC, & eam perpendicularem, cujus segmentum est, seu ea lege, ut stent hæ proportiones:

AC : DC = P*m* : PM,
AC : DC = R*o* : RO,
AC : DC = S*h* : SH &c. (*Geom.* 167).

Linea

Linea curva ADBEA, quæ per ſingulorum ſegmentorum hac lege determinatorum extremitates tranſit, *ellipſis* vocatur. Recta AB dicitur axis *major*, vel *transverſus*, vel etiam *principalis*; DE autem axis *minor*, vel *conjugatus* audit. Punctum C, in quo axes ſeſe interſecant, eſt *centrum* ellipſeos. Rectæ MP, OR, FS, HS &c. ad axem transverſum perpendiculares, vocantur *ordinatæ* axis transverſi, ſeu majoris, item *ordinatim applicatæ* ad axem majorem, vel etiam absque omni addito *ordinatæ*. Sunt, qui eas malint vocare *ſemiordinatas:* ſed horum loquendi morem non ſequemur. Axis majoris ſegmenta AP, AC &c. *abſciſſæ* nuncupantur. Denique extremitates axis majoris, ſeu puncta A & B *vertices* ellipſeos audiunt.

Schol. 1. Ut notio ellipſeos obtineri, tum ejus proprietates inveſtigari queant; neceſſe utique eſt, mox initio aliquem ellipſeos characterem aſſumere, per quem illa a ceteris lineis legitimis ſufficienter diſcernatur. Perinde autem eſt, ſive unum, ſive alterum characterem aſſumas; dummodo ex eo, quem ſemel aſſumſiſti, reliquas ellipſeos proprietates (vocatis etiam in ſubſidium, ubi opus fuerit, Algebræ, & Geometriæ principiis) feliciter deducere queas. Id quod etiam de Parabola, & Hyperbola intelligendum erit. Nos eum nunc characterem aſſumpſimus pro efformanda ellipſeos notione, quem ad reliquas ejusdem proprietates pro captu Tironum deducendas accommodatiſſimum judicavimus.

Schol. 2. *Abſciſſa* absque omni addito, deſignat ſegmentum axeos majoris, inter determinatum verticem, & ordinatam interceptum. e. g. Si abſciſſas a vertice A computare libeat, abſciſſa ordinatæ MP eſt AP; abſciſſa ordinatæ OR eſt AR, & ſic porro. Quodſi nominentur abſciſſæ *correſpondentes* cuipiam ordinatæ; his vocabulis deſignantur duo ſegmenta axeos, inter vertices & eam ordinatam interceptæ. e. g. Ordinata MP habet abſciſſas ſibi *correſpondentes* AP & PB; ordinatæ OR *correſpondent* abſciſſæ AR, & RB, & ſic porro, Abſciſſa *a centro computata* eſt ſegmentum axeos majoris, inter centrum C & ordinatam interceptum. e. g. Abſciſſa ordinatæ MP *a centro computata* eſt CP; ordinatæ OR eſt CR. Porro ordinata in calculis algebraicis ſem-

ſemper per litteram y, abſciſſa vero, ſive a vertice, ſive a centro computetur, per literam x ſolet deſignari.

3. Coroll. I. In ellipſi quadratum cujuslibet ordinatæ eſt ad factum abſciſſarum ipſi correſpondentium, uti eſt quadratum ſemiaxis minoris ad quadratum ſemiaxis majoris: e. g. eſt $MP^2 : AP \times PB = DC^2 : AC^2$. Eſt enim $AC : DC = mP ; MP$ (2), & invert. $DC : AC = MP : mP$. Elev. ad quadrat. $DC^2 : AC^2 = MP^2 : mP^2$. Atqui eſt $mP^2 = AP \times PB$ (*Geom.* 171.); eſt ergo $DC^2 : AC^2 = MP^2 : AP \times PB$.

4. Coroll. II. Igitur in ellipſi quadrata duarum quarumvis ordinatarum ſunt inter ſe, ut facta abſciſſarum ipſis correſpondentium: e. g. eſt $MP^2 : OR^2 = AP \times PB : AR \times RB$. Eſt enim imprimis $MP^2 : AP \times PB = DC^2 : AC^2$ (3); deinde eodem jure eſt $OR^2 : AR \times RB = DC^2 : AC^2$. Ergo duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, eſt $MP^2 : AP \times PB = OR^2 : AR \times RB$, & alternando, $MP^2 : OR^2 = AP \times PB : AR \times RB$.

5. Coroll. III. Major ellipſeos axis AB ſit $2a$, minor $DE = 2b$; ordinata quæcunque MP recepto more dicatur y, & ejus abſciſſa a vertice computata $AP = x$. Erit imprimis $AC = a$, & $DC = b$ (2); deinde PB, utpote $= AB - AP$, erit $= 2a - x$, adeoque erit $AP \times PB = 2ax - x^2$. Itaque ob $MP^2 : AP \times PB = DC^2 : AC^2$ (3), eſt

$$y^2 : 2ax - x^2 = b^2 : a^2.$$ Hinc multipl. med. & extr.

eſt $$a^2 y^2 = 2ab^2 x - b^2 x^2.$$

Divid. per a^2. $$y^2 = \frac{2ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}.$$

Atque hæc eſt prima ad ellipſim *æquatio*, ſeu ejusmodi formula algebraica, quæ relationem inter ellipſeos ordinatas, & abſciſſas *a vertice* computatas exprimit.

6. Coroll. IV. Si abſciſſæ a centro C computentur, ita ut litera x jam aliquam abſciſſam CP deſignet, reliquis prioribus denominationibus retentis; $AP = AC - CP$ erit $= a - x$, & $PB = BC + CP$ erit $= a + x$, adeoque $AP \times PB$ erit $= a^2 - x^2$. Itaque proportio $MP^2 : AP \times PB = DC^2 : AC^2$ (3), jam abibit in hanc:

y^2 :

$$y^2 : a^2 - x^2 = b^2 : a^2.$$

Unde est $y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}$ (*Algeb.* 166.)

Atque hæc est altera ad ellipsim *æquatio*, quæ relationem inter ordinatas, & abscissas *a centro* computatas exprimit.

Schol. Denominationes hactenus statutas in sequentibus constanter retinebimus. Nempe $2a$ semper designabit nobis axem majorem, $2b$ minorem; adeoque a semiaxem majorem, b semiaxem minorem; y ordinatam; x denique abscissam, vel a vertice, vel a centro computatam. Nominatim hoc, & sequentibus tribus Capitibus litera x semper designabit nobis abscissam ab ellipseos *centro* computatam.

7. Coroll. V. Ordinatæ ellipseos sunt inter se, ut sunt ordinatæ circuli, ipsis respondentes: e. g. est MP : OR $=$ mP : oR. Cum enim sit AC : DC $=$ mP : MP, & AC : DC $=$ oR : OR (2): est mP : MP $=$ oR : OR, & altern. mP : oR $=$ MP : OR.

8. Coroll. VI. Cum sit mP : MP $=$ oR : OR (7) est:

mP — MP : mP $=$ oR — OR : oR (*Algeb.* 176.)

Seu est mM : mP $=$ oO : oR.

Hoc est, differentiæ ordinatarum circuli, & ellipseos sunt ut ordinatæ ipsæ circuli. Ac proinde sunt etiam ut ordinatæ ellipseos (7).

9. Coroll. VII. Quo majore in ratione fuerit semiaxis minor DC comparate ad semiaxem majorem AC. id est, quo major fuerit DC comparate ad AC (*Algeb.* 148.), eo magis accedet ellipsis ad circulum: &, si DC evaserit $=$ AC: jam ellipsis in circulum abibit. Cum enim in ellipsi semper sit MP : mP $=$ DC : AC (2); quo magis DC accedit ad æqualitatem cum AC, eo magis accedit quælibet ellipseos ordinata MP ad æqualitatem cum circuli ordinata mP, ipsi respondente: &, si DC evaserit $=$ AC, quælibet etiam ellipseos ordinata MP evadet æqualis circuli ordinatæ mP. Eo ipso autem corollarii veritas in aperto utique est.

10. Coroll. VIII. Ellipsis, non secus ac circulus. est curva linea in se ipsam rediens. Cum enim ordinatæ ellip-

ellipſeos ſemper ſint in ratione ordinatarum circuli, eis reſpondentium (7); loquendo de rationis æqualitate eſt MC = *m*P (*Algeb.* 185.). Hinc decreſcente *m*P decreſcit etiam MP, ita ut evaneſcente *m*P debeat etiam MP evaneſcere. Quemadmodum ergo in circulo ordinatæ *m*P, *o*R &c. recedendo a centro decreſcunt continenter, ita ut in punctis A & B penitus evaneſcant (*Geom.* 162); ita etiam in ellipſi, ordinatæ MP, OR &c. recedendo a centro decreſcere debent continenter, ita ut in verticibus A & B penitus evaneſcant. Eo ipſo autem patet, ellipſim, non ſecus ac circulum, eſſe curvam in ſe ipſam redeuntem.

11. Coroll. IX. In ellipſi axis major AB omnes parallelas MN, OQ &c. biſariam ſecat. Aſſumamus enim e. g. parallelam MN. Eſt MP : NP = *m*P : *n*P (7): eſt vero *m*P = *n*P; nam recta AB, quæ in circulo per centrum tranſit, & chordam *mn* ad angulos rectos ſecat, eandem biſariam dividit (*Geom* 67): ergo eſt etiam MP = NP. Eodem modo patet, etiam aliam quamcunque parallelam OQ in ellipſi ab axe majore AB biſariam ſecari.

12. Coroll. X. Igitur axis major AB dividit ellipſim in duas ſimiles, & ſimul æquales partes. Si enim pars AMOB circa axem majorem AB immotum in adverſam partem converti concipiatur; quoniam eſt MP = PN, DC = CE &c. (11), perpendiculares hæ ita congruent, ut punctum M cadat in N, D in E, O in Q &c. Tota ergo curva AMOB cum tota curva ANQP congruet. Eo ipſo autem veritas corollarii patet.

13. Coroll. XI. In ellipſi ordinatæ a centro æquidiſtantes æquantur inter ſe: e. g. ſi ſit CP = CR, eſt MP = OR. Eſt enim MP : OR = *m*P : *o*R (7); atqui ob CP ex hyp. = CR, eſt *m*P = *o*R (*Geom.* 162. *Schol.*); ergo eſt etiam MP = OR.

14. Coroll. XII. Igitur etiam axis minor DE ellipſim in duas ſimiles, & ſimul æquales partes dividit. Si enim arcus DMANE circa minorem axem DE immotum in adverſam partem converti concipiatur, ut ob AC = CB vertex A cum vertice B congruat: quoniam ordinatæ a centro æquidiſtantes, ſunt æquales, quævis MN

MN cum æquidiſtante OQ congruet. Eo ipſo autem corollarii veritas manifeſta eſt.

15. Fiat circini apertura æqualis ſemiaxi transverſo AC; tum uno crure ad axis conjugati alterutrum verticem e. g. ad D applicito, ſecetur altero crure axis transverſus in punctis S & s; duo hæc puncta vocantur *foci* ellipſeos. Unde patet, extremitatem axis conjugati a focis S & s æquidiſtare.

16. Coroll. I. Igitur foci ellipſeos ab ejusdem centro æquidiſtant, ſeu eſt $CS = Cs$. Nam in triangulis SDC & sDC ad C rectangulis (2) hypothenuſæ SD & sD ſunt æquales (15), & cathetus DC eſt utrique communis: ergo eſt etiam $CS = Cs$ (*Geom.* 120.).

17. Coroll. II. Foci S & s etiam a verticibus B & A æquidiſtant, ſeu eſt $BS = As$. Cum enim ſit $AC = BC$, & $Cs = CS$; ab æqualibus æqualia ſubtrahendo remanet $BS = As$.

18. Diſtantia foci a centro, ſeu recta $CS = Cs$, *excentricitas* ellipſeos nuncupatur: quam deinceps litera c deſignaturi ſumus.

19. THEOREMA I. *Quadratum excentricitatis in ellipſi æquale eſt differentiæ quadratorum ſemiaxis majoris, & minoris; ſeu eſt* $c^2 = a^2 - b^2$. Nam in triangulo rectang. DCS eſt $DS^2 = DC^2 + CS^2$ (*Geom.* 286); adeoque ob $DS = AC$ (15), eſt $AC^2 = DC^2 + CS^2$. Hinc $CS^2 = AC^2 - DC^2$; ſeu $c^2 = a^2 - b^2$.

20. Coroll. I. Igitur in ellipſibus a circulo parum admodum diſcrepantibus excentricitas eſt exigua. In iis enim ob exiguam axium differentiam (9), $a^2 - b^2$ (ac proinde etiam c^2) eſt valoris reſpective exigui. Ob rationem contrariam in ellipſibus valde compreſſis excentricitas magna ſit, oportet.

21. Coroll. II. Ex adverſo, diſtantia foci a vertice viciniore in ellipſibus parum compreſſis eſt reſpective magna, in ellipſibus autem valde compreſſis reſpective parva. Cum enim $SB + CS$, ſeu diſtantia foci a vertice viciniore, & excentricitas ſimul ſemper æquentur ſemiaxi majori BC, uti clarum eſt; quo major fuerit excentricitas CS manente eodem axe majore, eo mi-

minorem esse oportet rectam SB, seu distantiam foci a vertice viciniore. Atqui excentricitas CS in ellipsibus parum compressis, seu parum discrepantibus a circulo est exigua, in ellipsibus autem valde compressis magna (20); ergo ex adverso, distantia foci a vertice viciniore &c.

22. THEOREMA II. *Semiaxis conjugatus* DC *est medius geometrice proportionalis inter unius, ejusdemque foci a verticibus distantias. e g. inter* AS *&* SB. *Hoc est, stat e. g.* $AS : DC = DC : SB$.

Demonstr. Cum enim in triangulo rectangulo DCS sit $SD^2 = DC^2 + CS^2$ (*Geom.* 286.); est $DC^2 = SD^2 - CS^2$.

Est vero $SD^2 - CS^2 = (SD + CS) \times (SD - CS)$, uti patebit, si factores hos inter se multiplicaveris; est ergo:

$$DC^2 = (SD + CS) \times (SD - CS).$$

Jam vero est $SD = AC = BC$ (15): igitur loco SD in uno factore ponendo AC, in altero autem ponendo BC, est:

$$DC^2 = (AC + CS) \times (BC - CS).$$

Quæ postrema æquatio in hanc resolvitur proportionem:

$$AC + CS : DC = DC : BC - CS \text{ (Algeb. 169.)}$$

Id est, $AS : DC = DC : SB$.

23. Coroll. Itaque multiplicando med. & extrem. est $AS \times SB = DC^2$.

24. THEOREMA III. *Semiaxis transversus* AC *est medius arithmetice proportionalis inter unius, ejusdemque foci a verticibus distantias. e. g. inter* AS *&* SB.

Demonstr. Generatim, inter quoslibet duos terminos inæquales medius arithmetice proportionalis æquatur eorundem semisummæ. Ponamus enim inter quoscunque duos terminos a & b medium arithmetice proportionalem esse x: quoniam ex hypoth. est $a : x = x : b$; est $x = \frac{a+b}{2}$ (*Algeb.* 159.). Cum ergo sit $AS + SB = AB$; medius arithmetice proportionalis inter AS & SB est $= \frac{AB}{2} = AC$.

25. Co-

25. COROLL. Itaque cum sit $DS = AC$ (15); est etiam DS medius arithmetice proportionalis inter AS & SB.

26. Linea recta, quæ post axem transversum, & conjugatum sit tertia proportionalis, vocatur *latus rectum*, vel *parameter* axis transversi, seu principalis. Hanc rectam nos constanter litera *p* designabimus.

27. COROLL. I. Igitur ex ipsa parametri notione stat hæc proportio, $2a : 2b = 2b : p$; adeoque primam rationem per 2 dividendo, est $a : b = 2b : p$. Est ergo $p = \frac{2b^2}{a}$ Unde cum *a* & *b* in una eademque ellipsi constantes sint; parameter quoque in una eademque ellipsi constans sit, oportet (*Algeb.* 193.).

28. COROLL. II. Si per focum utrumlibet ducatur recta FH, quæ sit ad axem AB perpendicularis, & utrinque in ipsa ellipseos perimetro terminetur; ea erit æqualis parametro ejusdem ellipseos. Est enim

$FS^2 : BS \times SA = DC^2 : AC^2$ (3), adeoque ob $BS \times SA = DC^2$ (23), est $FS^2 : DC^2 = DC^2 : AC^2$.

Extrah. rad. - - $FS : DC = DC : AC$.

Multipl. per 2, - $2FS : 2DC = 2DC : 2AC$,

seu - - $FH : 2b = 2b : 2a$ (11).

$$\text{Unde est } FH = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} = p \ (27).$$

29. THEOREMA IV. *Area ellipseos est ut factum semiaxium ipsius: id est, si area ellipseos dicatur* e; *loquendo de rationis æqualitate est* $e = ab$.

DEMONSTR. Si enim centro C, radio AC describatur circulus AmoBqnA; quælibet ellipseos ordinata MP est ad circuli ordinatam sibi respondentem *m*P, ut DC : AC (2): ergo etiam summa omnium ellipseos ordinatarum est ad summam omnium ordinatarum circuli, ut DC : AC (*Algeb.* 182.). Hinc si ellipseos area dicatur *e*, & area dicti circuli vocetur *c*; est $e : c = b : a$, ac proinde est $e = \frac{cb}{a}$. Porro area circuli est ut quadratum radii sui (*Geom.* 300.); consequenter *c* rite repræsentatur per a^2. Hinc loco e ponendo a^2, eſt e ut $\frac{a^2 b}{a}$, ſeu eſt e ut ab. Hoc eſt, loquendo de rationis æqualitate eſt $e = ab$.

30. Sint AB & DE (*Fig.* 2.) axes ellipſeos, focos in S & s habentis. Capiatur filum æquale axi majori AB, ejusque extremitates defigantur in focis S & s; tum ſtilo M filum $SMs = AB$ probe tenſum circumducatur. Ajo, ſtilum hoc modo circumductum tranſire debere per axium extremitates A, E, B, D. Eſt enim ex hyp, filum $SM + sM$ ſemper $= AB = BS + SA$; adeoque ob $BS = sA$ (17), eſt ſemper $SM + sM = SA + sA$. Jam vero 1) ſi ſtilus M, dum verſus A per directionem axis BA tranſit, ultra punctum A excurreret; eſſet tunc $SM > SA$, & $sM > sA$, ut clarum eſt: ſi autem infra A tranſiret; eſſet $SM < SA$, & $sM < sA$: adeoque neutro caſu eſſet $SM + sM = SA + sA$. Ergo ſtilus per ipſum punctum A tranſeat, oportet. Eodem modo patet, ſtilum etiam per punctum B tranſire debere.

2) Ob $SE = sE = AC$ (15), eſt $SE + sE = AB = SM + sM$: hinc ſi ſtilus M, dum verſus E per directionem axis minoris DE tranſit, ultra punctum E excurreret, eſſet tunc $SM + sM > AB$; ſi autem tranſiret infra E, Eſſet $SM + sM < AB$: ergo ſtilus M etiam per punctum E tranſeat, eſt neceſſe. Eodem modo patet, eundem ſtilum per punctum D quoque tranſire debere.

31. PROBLEMA I. *Datis axibus* AB *&* DE *ellipſim motu continuo deſcribere.*

Resolut. Determinentur in axe majore AB foci S & s (15); capiatur deinde filum $= AB$, ejusque extremitates defigantur in focis S & s: denique ſtilo M filum prope tenſum circumducatur. Stilus motu ſuo deſcribet petitam ellipſim ADBEA.

Demonstr. Imprimis ſtilus dicto modo circumductus tranſire debet per axium datorum extremitates A, D, B, E (30); adeoque jam per quatuor puncta petitæ ellipſeos tranſit. Deinde etiam quodlibet aliud curvæ ab eo ſtilo deſcriptæ punctum M fore in perimetro petitæ ellipſeos, ſic demonſtro. Ex puncto M demittatur ad axem AB perpendiculum, ſeu ordinata MP. Sit autem

tem AB $=2a$, CS $=c$, abſciſſa a centro computata CP $=x$, MP $=y$.

1) Quoniam filum SM*s* eſt ex hyp. $=$ AB $=2a$; in triangulo SM*s* ſemiſumma crurum SM & *s*M eſt $=a$: hinc ſi eorundem ſemidifferentia dicatur d, majus crus SM eſt $=a+d$ (*Algeb.* 135. *exempl.* III.). Porro eſt $SM^2 = MP^2 + SP^2$ (*Geom.* 286.), ſeu ob SP $=$ CS $+$ CP, eſt $SM^2 = MP^2 + (CS+CP)^2$: itaque literales linearum valores ad quadrata elevando, eſt:

$$a^2 + 2ad + d^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2.$$

2) Cum ſit CS $=$ C*s* (16), in triangulo SM*s* baſis S*s* in C biſariam ſecatur: ergo ſemiſumma crurum SM & *s*M in eorundem ſemidifferentiam ducta æquatur ſemibaſi SC ductæ in ſegmentum CP, ſeu eſt $ad = cx$ (*Geom.* 287.). Unde eſt $d = \frac{cx}{a}$, & $d^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$. Quos valores in ſuperiore æquatione loco d & d^2 ſubſtituendo, eſt:

$$a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + 2cx + x^2,$$

ſeu $a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$.

Subtr. $2cx$, - $a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + x^2$.

Mult. per a^2, eſt $a^4 + c^2x^2 = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2$.
Transp. a^2c^2 & a^2x^2, eſt:

$$a^4 + c^2x^2 - a^2c^2 - a^2x^2 = a^2y^2.$$

3) Ob $CS^2 = AC^2 - DC^2$, ſeu ob $c^2 = a^2 - b^2$ (19), eſt $a^2 - c^2 = b^2$. Itaque ſi poſtremæ æquationis membrum ſiniſtrum per $a^2 - c^2$ dividatur, & ſimul dextrum per b ; non turbatur æquatio (*Algeb.* 119.): adeoque eſt:

$$\frac{a^4 + c^2x^2 - a^2c^2 - a^2x^2}{a^2 - c^2} = \frac{a^2y^2}{b^2}.$$

Hinc in membro ſiniſtro actualem diviſionem peragendo (vide in *Algebra* n. 28. hoc ipſum *regulæ* 2*dæ* exemplum) eſt:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}.$$

Multipl. per b^2, eſt - $a^2 b^2 - b^2 x^2 = a^2 y^2$;

Divid. per a^2, eſt - $y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}.$

Hoc eſt, *æquatio* ellipſi propria (6) convenit ei curvæ, cujus quodlibet punctum M ſtilus dicto modo circumductus determinavit; conſequenter curva dicto modo determinata, eſt ellipſis

32. Coroll. I. Igitur ſi in ellipſi ex focis S & *s* ad quodcunque perimetri punctum M ducantur rectæ SM & *s*M; ſumma hujusmodi rectarum eſt ſemper æqualis axi majori AB. Datis enim axibus AB & DC nonniſi unica poteſt reſpondere ellipſis, uti e num. 2. intelligere licet; conſequenter ea ipſa duntaxat reſpondet, quæ methodo num. præc. allata determinatur; atqui in ellipſi, quæ methodo num. præc. determinatur, eſt ſemper SM + *s*M = AB; ergo.

33. Coroll. II. Cum in ellipſi ſemper debeat eſſe SM + *s*M = AB (32); ſi in quopiam caſu deprehendatur eſſe SM + *s*M > AB, eo ipſo inferre licebit, punctum M cadere extra perimetrum ellipſeos: ſi autem deprehendatur eſſe SM + *s*M < AB, jure inferetur, punctum M intra ellipſim cadere.

CAPUT SECUNDUM.

De Ellipſi ad ſuas Tangentes, & Diametros relata.

34. Quævis recta RQ (*Fig.* 3.), quæ ita occurrit ellipſi alicubi in P, ut nulla ejus rectæ pars cadat intra ellipſim, ſed tantum punctum P ſit ipſi commune cum ellipſi, eſt *tangens* ellipſeos puncto P reſpondens (*Geom.* 75.). Vel, ſi ellipſim conſideres inſtar polygoni infinite parvorum laterum AB, BC, CD &c. (*Fig.* 4.) numero infinitorum (*Geom.* 183. *Schol.* 1.); tangens puncto P reſpondens eſt recta RQ, quæ congruit

cum

cum latere infinitesimo BC: ut adeo tangens PQ seu RQ puncto P respondens non aliud sit, quam continuatio lateris infinitesimi, quod ellipseos perimetrum ad P constituit. Unde patet, cuicunque dato ellipseos puncto P unicam duntaxat tangentem PQ seu RQ respondere.

35. PROBLEMA II. *Ad datum ellipseos punctum* P (*Fig.* 3.) *tangentem ducere.*

RESOLUT. Ex focis S & *s* ducantur ad datum punctum P rectæ SP & *s*P, producaturque *s*P in T, dum fiat PT = SP: ducatur deinde recta ST, seceturque bifariam in R. Recta RP seu RQ per puncta R & P transiens, erit *tangens* ellipseos, ejusdem puncto P respondens.

DEMONSTR. Si recta RQ in unico duntaxat puncto P congruit cum ellipsi, ita ut quodlibet aliud ejus punctum *r* sit extra ellipsim; eadem recta RQ est tangens ellipseos, ejusdem puncto P respondens (34): atqui recta RQ in unico duntaxat puncto P congruit cum ellipsi, ita ut quodlibet aliud ejus punctum *r* sit extra ellipsim; quod sic ostendo. Quoniam in triangulis TPR & SPR est ex constr. TP = SP, TR = RS, & latus RP utrique commune; anguli homologi ad R sunt æquales, ac proinde recti (*Geom.* 30.). Hinc in triangulis T*r*R & S*r*R, quibus præterea commune est latus R*r*, adsunt duo latera æqualia cum angulo ab iisdem ad R intercepto: consequenter etiam tertium latus æquatur tertio, seu est T*r* = S*r* (*Geom.* 27.).

Jam ob SP + *s*P = AB (32), & ob TP ex constr. = SP, recta TP*s* est = AB: cum ergo sit T*r* + *rs* > TP*s* (*Geom.* 5.); est T*r* + *rs* > AB: consequenter ob T*r* = S*r*, est S*r* + *rs* > AB. Eo ipso autem patet, quodlibet punctum *r* cadere extra ellipsim (33).

36. COROLL. I. Quodsi ergo ex focis S & *s* ad quodcunque ellipseos punctum P ducantur rectæ SP & *s*P, tum *s*P producatur in T, dum fiat PT = SP, ducaturque recta TS; tangens ellipseos puncto P respondens rectam TS in R semper bifariam, & ad angulos rectos secat. Si enim hac lege ducas rectam RP, ut rectam TS bifariam, & ad angulos rectos secet in R; ea semper est tangens ellipseos, puncto P respondens (35): cum ergo puncto P unica duntaxat tangens respondeat (34); nequit dari tangens ellipseos, puncto P respondens, quæ re-

rectum TS non fecet bifariam, & fimul ad angulos rectos.

37. Coroll. II. Igitur ea eſt ellipſeos proprietas, ut angulus RPS, quem recta SP ex uno foco ad contactus punctum P ducta, ex una parte comprehendit cum tangente, ſemper ſit æqualis angulo QPs, ſeu ei, quem recta sP, ex altero foco ad idem contactus punctum ducta, cum eadem tangente ex altera parte efficit. Si enim sP producatur in T, ut ſit PT = SP; tangens RQ puncto P reſpondens rectam TS ſemper bifariam & ad angulos rectos ſecat in R (36): ergo in triangulis TPR & SPR ſemper adſunt duo latera æqualia cum angulo ab iis ad R intercepto: conſequenter anguli homologi TPR & RPS ſemper ſunt æquales (*Geom.* 27.). Cum ergo angulus TPR æqualis eſſe debeat ſuo verticali QPs; etiam angulus RPS ſemper æqualis ſit angulo QPs, eſt neceſſe.

38. Coroll. III. In ellipſi tangens extremitati axis minoris reſpondens, eſt ad eundem perpendicularis. e. g. In *Fig.* 2. recti ſunt anguli LEC & VEC. Si enim ex focis ducantur ad punctum contactus rectæ SE & sE; in triangulis SCE & sCE ad C rectangulis erit CS = Cs (16), & latus CE utrique commune: erit ergo ang. SEC = sEC (*Geom.* 27.) Atqui eſt etiam ang. SEL = sEV (37); ergo æqualibus addendo æqualia, eſt ang. SEL + SEC = sEV + sEC, ſeu eſt ang. LEC = VEC. Eo ipſo autem patet, utramque hunc angulum eſſe rectum (*Geom.* 23.), ac proinde tangentem LV eſſe perpendicularem ad axem minorem DE, & viciſſim.

39. Coroll. IV. Idem etiam de axe majore facile deducitur: id eſt e. g. tangens ON, majoris axis extremitati B reſpondens, cum eodem axe majore etiam rectum angulum utrinque efficit. Concipiamus enim ex focis S & s duci ad verticem B rectas SB & sB; utraque hæc recta cadet in axem majorem AB (*Geom.* 7.): cum ergo rectæ ex focis S & s ad idem perimetri punctum ductæ ſemper æquales angulos efficiant cum tangente in partibus oppoſitis (37); eſt ang. OBS = NBs, ſeu eſt ang. OBA = NBA, ac proinde uterque rectus.

40. *Diameter* ellipſeos eſt quævis recta per centrum tranſiens, & utrinque in perimetro terminata. Sic in ellipſi

ellipsi AGFBPKA (*Fig.* 5.) recta FK est diameter, uti & recta GP. Porro cuilibet ellipseos diametro respondere potest alia diameter, quæ ipsius *conjugata* dicitur, estque illa, quæ est parallela ad tangentem, prioris illius diametri extremitati respondentem. Sic diametro FK respondet diameter conjugata GP, quæ est parallela ad tangentem KL, ejusdem diametri FK extremitati K respondentem. Hujusmodi duæ diametri, uti sunt FK & GP, solent etiam communi vocabulo *diametri conjugatæ* nominari.

41. THEOREMA V. *Quælibet ellipseos diameter* FK (*Fig.* 6.) *in ipso centro* C *bisecatur*.

Demonstr. Sit ex perimetri puncto quocunque F per centrum C ducenda diameter. Ducatur ejus diametri pars FC duntaxat; tum ex puncto F demittatur ad axem majorem perpendiculum, seu ordinata Ft. Porro capiatur in axe majore pars $Cr = Ct$, et ex puncto r erigatur perpendiculum, seu ordinata rK: penique puncta C & K connectantur per rectam CK, quin adhuc recta hæc cogitatur esse continuatio rectæ FC.

Jam in triangulis FCt & KCr est ex constr. $Ct = Cr$, & eo ipso est etiam ordinata $Ft = Kr$ (13); præterea anguli ad t & r, ab his lateribus intercepti, æquantur inter se, utpote ex constr. recti: ergo est etiam $FC = CK$, & ang. $FCt = KCr$ (*Geom.* 27.). Ex quibus sic ratiocinari licet. Ob ang. $FCt = KCr$, manifestum est, lineam FCK modo superius descripto ductam, esse rectam (*Geom.* 42.), ac proinde esse eam diametrum, quæ ex perimetri puncto F duci potest. Cum ergo sit $FC = CK$; diameter, quæ ex perimetri puncto F duci potest, in ipso ellipseos centro bifariam secatur. Idem de qualibet alia diametro, ex quocunque perimetri puncto ducenda, eodem modo demonstrari potest.

42. THEOREMA VI. *Si ducatur diameter* FK *parallela ad tangentem* QL, *&* *ex focis* S *&* s *ad contactus punctum* P *ducantur rectæ* SP *&* sP; *diameter* FK *intercipit ex recta* SP *partem* HP, *æqualem semiaxi majori* AC.

Demonstr. Ducatur enim e foco s recta sT parallela ad tangentem QL, adeoque etiam ad diametrum FK.

1) Erit SH = HT. Nam in triangulis SHC & STs, ob HC ad Ts parallelam, est SH : HT = SC : Cs (*Geom.* 150.)

150.): atqui eſt $SC = Cs$ (16); ergo eſt etiam $SH = HT$.

2) Eſt $TP = sP$. Si enim ex punctis T & s demittantur ad tangentem perpendicula TQ & sO; in triangulis TPQ & sPO eſt imprimis ang. $QPT = sPO$ (37), deinde anguli ad Q & O ſunt ex conſtr. recti, denique eſt $TQ = sO$ (*Geom.* 53.): ergo triangula illa ſunt ſimilia, ſimulque æqualia (*Geom.* 119.): conſequenter eſt $TP = sP$ (*Geom.* 122.).

$$\text{Jam eſt } SP + sP = AB\,(32) = 2\,AC;$$
$$\text{ſeu eſt } SH + HT + TP + sP = 2\,AC.$$

Adeoque ob $SH = HT$ per n. 1), & ob $TP = sP$ per n. 2), eſt:

$$2\,HT + 2\,TP = 2\,AC;$$
$$\text{ſeu eſt } 2\,HP = 2\,AC, \text{ adeoque } HP = AC.$$

43. COROLL. I. Igitur reſidua rectæ SP pars SH eſt ſemidifferentia rectarum SP & sP. Nam earum rectarum major SP conſtat ex earundem ſemiſumma, addita ſemidifferentia (*Algeb.* 135. *exempl.* III.): cum ergo ſit $SP = HP + SH$; ſi eſt HP ſemiſumma rectarum SP & sP, earundem ſemidifferentia eſt $= SH$. Atqui rectarum SP & sP ſemiſumma eſt $= HP$: eſt enim $SP + sP = 2a$ (32), adeoque $\frac{1}{2}(SP + sP) = a = HP$ (42). Ergo ſemidifferentia rectarum SP & sP eſt $= SH$.

44. COROLL. II. Eadem recta SH eſt $= \frac{cx}{a}$, litera x deſignante abſciſſam a centro computatam CN, ordinatæ PN, quæ e contactus puncto demittitur, reſpondentem. Nam in triangulo SPs baſis Ss bifariam ſecatur in C (16): ergo ſemiſumma laterum SP & sP, in eorundem ſemidifferentiam ducta, eſt $= SC \times CN = cx$ (*Geom* 287.). Atqui dicta ſemiſumma eſt $= a$, & ſemidifferentia $= SH$ (43); eſt ergo $a \times SH = cx$, adeoque $SH = \frac{cx}{a}$.

45. Si axis transverſus BA producatur, donec cum tangente QL concurrat in aliquo puncto L, tum ex contactus puncto P demittatur ordinata PN; recta NL, quæ inter hanc ordinatam, & concurſus punctum L intercipitur, *ſubtangens* nuncupatur.

THE-

46. THEOREMA VII. *In ellipsi subtangens* NL *est* $= \dfrac{a^2 - x^2}{x}$, *litera x abscissam* CN *a centro computatam designante; id est, differentia quadratorum semiaxis transversi. & abscissæ. per eandem abscissam divisa, æquatur subtangenti* NL.

Demonstr. Si enim ducatur diameter FK, tangenti QL parallela; in triangulis SHC & SPL, ob HC ad PL parallelam, erit SH : SC = HP : CL (*Geom.* 150.): seu erit

$$SH : SC = HP : CN + NL.$$

Jam si sit $SC = c$, & $CN = x$, est $SH = \dfrac{cx}{a}$ (44): praeterea est $HP = a$ (42).

$$\text{Est ergo} \;\; - \; - \; \frac{cx}{a} : c = a : x + NL.$$

Antec. multipl. per a, - $cx : c = a^2 : x + NL$.
Multipl. med. & extr. - $a^2\, c = cx^2 + cx \times NL$.
Divid. per c. - - $a^2 = x^2 + x \times NL$.
Transpon. x^2, - $a^2 - x^2 = x \times NL$;
Divid. per x, - $\dfrac{a^2 - x^2}{x} = NL$.

47. THEOREMA VIII. *Sint* FC *&* GC (*Fig.* 7.). *Ellipseos semidiametri conjugatæ. Si ex extremis earum punctis* F *&* G *demittantur ad axem majorem ordinatæ* FI *&* GN; *quadratum abscissæ a centro* C *computatæ; uni ordinatæ respondentis, erit æquale facto abscissarum alteri ordinatæ correspondentium. Id est, erit* $CI^2 = BN \times NA$, *&* $CN^2 = AI \times IB$.

Demonstr. Retentis solitis denominationibus (6. *Schol.*), præterea abscissa CN ponatur $= x$, & abscissa $CI = u$: erit $BN = a + x$, $NA = a - x$. & $AI = a + u$, $IB = a - u$; adeoque erit $BN \times NA = a^2 - x^2$. & $AI \times IB = a^2 - u^2$. Cum ergo in ellipsi semper sit $BN \times NA$; $AI \times IB = GN^2 : FI^2$ (4); est:

$$a^2 - x^2 : a^2 - u^2 = GN^2 : FI^2.$$

Jam

jam si ex puncto G ducatur tangens GL; triangula GNL & FIC sunt similia: scilicet ob FC & GL parallelas (40). & ob angulos ad I & N ex constr. rectos. Itaque stat in iis, GN : FI = NL : CI (*Geom*, 156.); & elev. ad quadr. $GN^2 : FI^2 = NL^2 : CI^2$.

Est ergo - $a^2 - x^2 : a^2 - u^2 = NL^2 : CI^2$.

Porro, quoniam subtangens NL est $= \dfrac{a^2 - x^2}{x}$ (46); hæc fractio, si ad quadratum elevetur, adeoque si tam numerator ipsius, quam etiam denominator elevetur ad quadratum (*Algeb.* 68, evadet $= NL^2$: hinc ejus fractionis denominatorem x reapse elevando ad quadratum, in numeratore autem indicando duntaxat elevationem ad quadratum, est $NL^2 = \dfrac{(a^2 - x^2)\,2}{x^2}$.

Præterea CI superius denominavimus u, adeoque est $CI^2 = u^2$. Itaque in postrema proportione loco NL^2 & CI^2 hos valores substituendo, est:

$$a^2 - x^2 : a^2 - u^2 = \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} : u^2.$$

Multipl. antec. per x^2, est:

$$(a^2 - x^2) : x^2 - u^2 = (a^2 - x^2)^2 : u^2.$$

Divid antec. per $a^2 - x^2$. est:

$$x^2 : a^2 - u^2 = a^2 - x^2 \; u^2.$$

Multipl, med. & extr. est:

$$u^2 x^2 = a^4 - a^2 x^2 - a^2 u^2 + u^2 x^2.$$

Transpon. $- a^2 u^2$, est:

$$u^2 x^2 + a^2 u^2 = a^4 - a^2 x^2 + u^2 x \; .$$

Subtrah. $u^2 x^2$, est $a^2 u^2 = a^4 - a^2 x^2$.

Dividen. per a^2, est:

$$u^2 = {}^2 - x^2 \quad \text{Id est, } CI^2 = BN \times NA.$$

Transpon. u^2 & $-x^2$. est.

$$x^2 = a^2 - u^2. \quad \text{Id est. } CN^2 = AI \times IB.$$

48. Coroll. Est ergo $IC^2 + CN^2 = a^2$. Hoc est: si e diametrorum conjugatarum extremitatibus demittantur ad axem majorem ordinatæ FI & GN; quadrata absciffarum IC & CN simul sumpta æquantur quadrato semiaxis majoris. Si enim abscissa CN vocetur x; est im-

imprimis, uti patet, $CN^2 = x^2$: est deinde $IC^2 = a^2 - x^2$ (47). Est ergo $IC^2 + CN^2 = a^2 - x^2 + x^2 = a^2$

49. THEOREMA IX. *Si in ellipsi ex quarumcunque conjugatarum diametrorum extremitatibus G & F demittantur ad axem majorem perpendicula, seu ordinatæ* GN *&* FI; *quadrata harum ordinatarum simul sumpta æquantur quadrato semiaxis minoris; seu est* $GN^2 + FI^2 = b^2$

Demonstr. Si enim abscissam C N vocemus x; est

1) $$GN^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} \ (6) = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

2) Ob $FI^2 : AI \times IB = b^2 : a^2$ (3), & ob $AI \times IB = CN^2 = x^2$ (47), est $FI^2 : x^2 = b^2 : a^2$: ac proinde est $$FI^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

Itaque est $$GN^2 + FI^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} = b^2.$$

50. THEOREMA X. *In ellipsi quarumlibet duarum semidiametrorum conjugatarum quadrata æquantur quadratis semiaxium simul sumptis. e. g. Si* FC *&* GC *sint semidiametri conjugatæ; est* $FC^2 + GC^2 = a^2 + b^2$.

Demonstr. Si enim ex punctis F & G demittantur ad axem majorem ordinatæ FI & GN; est $FC^2 = IC^2 + FI^2$, & $GC^2 = CN^2 + GN^2$ (*Geom.* 286).
Est itaque $FC^2 + GC^2 = IC^2 + FI^2 + CN^2 + GN_2$,
Atqui est $IC + CN^2 = a^2$ (48), & $FI^2 + GN^2 = b^2$ (49);

Est ergo $FC^2 + GC^2 = a^2 + b^2$.

51. THEOREMA XI. *Ex focis* S *&* s (*Fig.* 8.) *ducantur ad quodcunque ellipseos perimetri punctum* P *rectæ* SP *&* sP: *tum ex puncto* P *ducatur diameter* PG, *item ejus conjugata* FK. *Factum rectarum* SP *&* sP *est semper æquale quadrato semidiametri* FC, *seu ejus, quæ est conjugata diametri ex puncto* P *ductæ. Id est, semper est* $SP \times sP = FC^2$.

Demonstr. Est $SP = HP + SH$: & quoniam rectarum SP & sP semisumma est $= HP$, & semidifferentia $= SH$

$= SH$ (43); est $sP = HP - SH$ (*Algeb.* 135. *exempl.* III.). Itaque est $SP \times sP = (HP + SH) \times (HP - SH) = HP^2 - SH^2$. Adeoque ob $HP = a$ (42), & ob $SH = \frac{cx}{a}$, litera x abscissam CM designante (44),

$$\text{est } SP \times sP = a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2}.$$

Atqui est etiam $FC^2 = a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2}$, quod sic declaro. Si ex puncto F demittatur ordinata FI; est $FC^2 = IC^2 + FI^2$ (*Geom.* 286.). Jam imprimis est $IC^2 = a^2 - x^2$ (47): deinde ob $FI^2 : AI \times IB = b^2 : a^2$ (3), & ob $AI \times IB = CM^2 = x^2$ (47), est $FI^2 : x^2 = b^2 : a^2$,

adeoque est $FI^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$.

Itaque est - - $FC^2 = a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$.

Multipl. per a^2. - $FC^2 \times a^2 = a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2$.

Est vero $b^2 = a^2 - c^2$ (19); adeoque est

$b^2 x^2 = a^2 x^2 - c^2 x^2$. Est ergo:

$FC^2 \times a^2 = a^4 - a^2 x^2 + a^2 x^2 - c^2 x^2$;

Seu est $FC^2 \times a^2 = a^4 - c^2 x^2$.

Divid. per a^2, est $FC^2 = a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2}$.

Igitur est $SP \times sP = FC^2$. Q. E. D.

CAPUT TERTIUM.

De correspondentibus Circuli, & Ellipseos diametris.

52. Sit AB (*Fig.* 5.) axis transversus ellipseos AGFBPKA, centrum in C habentis; tum radio CA, centro C describatur circulus AgHBsEA: denique duca-

ducatur quæcunque ellipſeos diameter FK. Si per punctum F ducatur recta HI ad AB perpendicularis, & circuli peripheriæ occurrens in H, tum ex puncto H per centrum C ducatur circuli diameter HE; ejusmodi diametros FK & HE deinceps vocabimus diametros *correſpondentes*. item diametrum HE nuncupabimus circuli diametrum *reſpondentem* ellipſeos diametro FK. Similiter, ſi per punctum G ducatur recta gN ad AB perpendicularis, circuli peripheriæ occurrens alicubi in g; circuli diameter *gs*, ex puncto g ducta, eſt *reſpondens* ellipſeos diametro GP.

53. Coroll. Si recta HI ſit ad AB perpendicularis, adeoque FK & HE ſint diametri *correſpondentes* (52); recta ER per alias earundem diametrorum extremitates tranſiens, pariter erit ad AB perpendicularis. Nam in triangulis HCF & ECK eſt FC = CK (141), & radius HC = CE: cum ergo præterea anguli verticales his lateribus comprehenſi æquentur inter ſe; etiam anguli ad H & E ſunt inter ſe æquales (*Geom.* 27.) Itaque HF ſeu HI eſt ad EK ſeu ad ER parallela (*Geom.* 58.); conſequenter ob HI ad AB perpendicularem, eſt etiam ER perpendicularis ad AB.

54. THEOREMA XII. *Sint* FC & GC (*Fig.* 7.) *ellipſeos ſemidiametri conjugatæ; tum deſcripto ſuper axe majore circulo* AgH &c. *ſint* HI & gN *ad* AB *perpendiculares, adeoque* HC & gC *ſint ſemidiametri circuli*. reſpondentes *conjugatis ellipſeos ſemidiametris* FC & GC (52). *In triangulis* HIC & gNC *eſt ſemper* IC = gN, & CN = HI.

Demonstr. Eſt enim IC^2 — $BN \times NA$ (47): cum ergo ſit etiam $gN^2 = BN \times NA$ (*Geom* 161); eſt $IC^2 = gN^2$, adeoque etiam IC = gN. Eodem modo patet eſſe CN = HI.

55. Coroll. I. Cum ergo præterea anguli ab his lateribus ad I & N intercepti æquentur inter ſe, utpote ex conſtr. recti; anguli homologi gNC & IHC ſunt æquales (*Geom.* 27.): immo tota triangula ſunt ſimilia, ſimulque æqualia (*Geom.* 119.).

56. Coroll. II. Hinc angulus HCg, quem circuli ſemidiametri conjugatis ellipſeos ſemidiametris *reſpon-*

den-

dentes comprehendunt, eſt ſemper $= 90^\circ$; adeoque eſt gC ad HC perpendicularis.

Eſt enim ang. $ICH + HCg + gCN = 180^\circ$ (*Geom.* 35.); adeoque ob ang. $gCN = IHC$ (55),
eſt: ang. $ICH + HCg + IHC = 180^\circ$.
Atqui in triangulo HIC ad I rectangulo eſt ang. $ICH + IHC = 90^\circ$ (*Geom.* 105.); ergo hæc æqualia utrinque ſubtrahendo, eſt:

$$\text{ang. } HCg = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

57. Sint FK & GP (*Fig.* 5.) ellipſeos diametri conjugatæ. Si ex quocunque ellipſeos perimetri puncto D demittatur ad FK recta Dv, quæ ſit ad GP parallela; id genus recta Dv dicitur *ordinata* diametri FK, vel *ordinatim applicata* ad diametrum FK: ſcilicet *ordinata* cujuspiam diametri eſt quævis recta, quæ e perimetro ellipſeos in eam diametrum ita demittitur, ut ſit parallela ad alteram diametrum, prioris conjugatam. Unde cum diametri conjugatæ FK & GP non ſint ad ſe invicem perpendiculares; neque ordinata Dv eſt ad FK perpendicularis. Nempe ſolis axium ordinatis eſt id proprium, ut quemadmodum axis *conjugatus* perpendicularis eſt ad *transverſum*, ita etiam ordinata axis unius perpendicularis ſit ad axem alterum.

58. THEOREMA XIII. *Sint* FK *&* GP *ellipſeos diametri conjugatæ, quibus respondeant circuli diametri* HE *&* gs; *tum ex quocunque puncto* D *demittatur ad diametrum* FK *ordinatim applicata* Dv, *adeoque ad* GC *parallela. Si per punctum* D *ducatur recta* dO *ad* AB *perpendicularis, item recta* dx, *tranſiens per punctum* M, *in quo ordinata* Dv *axem* AB *interſecat; ajo rectam hanc* dx *fore ad* gC *parallelam.*

Demonstr. Nam 1) ob diametros *gs* & GP ex hyp. *correſpondentes*, eſt gN perpendicularis ad AB (52): hinc cum ſit etiam *d*O ex conſtr. perpendicularis ad AB, & DM ad GC parallela; triangula GCN & DMO ſunt ſimilia. Eſt ergo in iis, GC : DM = GN : DO (*Geom.* 156.). Hinc ob GN : DO = gG : *d*D (8), eſt GC : DM = gG : *d*D. Hoc eſt, in triangulis gCG & *d*MD latera, quæ angulos gGC & *d*DM comprehendunt, ſunt proportionalia.

2) Iidem

2) Iidem anguli gGC & *d*DM (ob *d*D ad gG, & ob DM ad GC ex constr. parallelas) sunt æquales (*Geom.* 124). Ergo triangula gCG & *d*MD sunt similia (*Geom.* 157) adeoque est in iis ang. $g = d$. Hinc ob latus *d*D ad gG parallelum, etiam *d*M seu *dx* ad gC parallelum sit, oportet (*Geom.* 126.).

Coroll. I. Si ergo ex puncto K ducatur ellipseos tangens KL, axi majori producto occurrens in L, & puncta E & L connectantur per rectam EL: erit EL tangens circuli. Nam in triangulis GCN & KLR tangens KL est parallela ad semidiametrum conjugatam GC (40: præterea anguli ad N & R sunt recti; ille ex constr. iste vero per n. 53., Itaque triangula hæc sunt similia, adeoque stat in iis:

KR : KL = GN : GC (*Geom.* 156.).

Est vero EK : KR = gG : GN (8);

Ergo est EK : KL = gG : GC (*Algeb.* 181).

Hoc est, in triangulis KEL & gGC latera angulos K & G comprehendentia. proportionalia sunt. Cum ergo anguli K & G (ob KL ad GC, & ob EK ad gG parallelas) æquales sint (*Geom.* 124); triangula KEL & gGC sunt similia (*Geom.* 157.).

Ex quibus sic jam ratiocinari licet: ob similitudinem triangulorum KEL & gGC, anguli homologi KEL & CgG æquantur inter se; adeoque ob EK ad gG parallelam, est etiam EL ad gC parallela (*Geom.* 126.). Atqui est gC ad HE perpendicularis (56); ergo est etiam EL perpendicularis ad HE (*Geom.* 61.). Eo ipso autem patet, rectam EL esse tangentem circuli (*Geom.* 76.).

60. Coroll. II. Quodsi ergo e quarumcunque circuli & ellipseos diametrorum *correspondentium* extremitatibus K & E ducantur tangentes, nempe una ad ellipsim, altera ad circulum; eæ axi majori producto in eodem puncto L occurrent.

61. Coroll. III. Cum *dx* sit ad gC parallela (58); & gC ad HE perpendicularis (56); est etiam *dx* ad HE perpendicularis: consequenter est *dx* ordinata diametri HE. Hinc quemadmodum diametri FK & HE sunt *correspondentes*; ita etiam rectas *dx* & *Dv* nominare

possumus diametrorum ellipseos & circuli ordinatas *correspondentes*.

62. Coroll. IV. Ordinatæ *correspondentes* Dv & dx ita intersecant sese in axis majoris puncto M, ut segmenta majora DM & dM sint proportionalia semidiametris *correspondentibus* GC & gC; seu ita, ut sit $dM : DM = gC : GC$. Nam in triangulis CgG & MdD similibus (*Geom.* 125.), latera homologa sunt proportionalia (*Geom.* (156).

63. Coroll. V. Earundem ordinatarum *correspondentium* in puncto M se se intersecantium minora quoque segmenta Mv & Mx proportionalia sunt iisdem semidiametris *correspondentibus* GC & gC; id est, stat quoque $Mx : Mv = gC : GC$. Si enim e diametrorum correspondentium FK & HE extremitatibus K & E ducantur tangentes, una ad ellipsim, altera ad circulum; eæ tangentes axem majorem ultra A productum in eodem puncto L intersecabunt; id est, si KL sit tangens ellipseos, est EL tangens circuli (60).

Jam 1) Recta dx, eo ipso, quod sit parallela ad Cg (58), diametro HE perpendicularem (56), est parallela etiam ad tangentem EL, utpote ad HE pariter perpendicularem (*Geom*, 76.): adeoque in triangulis CMx & CLE est $Mx : LE = CM : CL$ (*Geom.* 152.).

2) Recta Dv, eo ipso quod sit ex constr. parallela ad GC, est etiam parallela ad tangentem KL (40): adeoque in triangulis CMv & CLK est, $Mv : LK = CM : CL$ (*Geom.* 152.).

Itaque duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, est:

$Mx : LE = Mv : LK$, & altern. $Mx : Mv = ME : LK$

Porro in triangulis KEL & gGC similibus (59), est $LE : LK = gC : GC$ (*Geom.* 156.); est ergo demum $Mx : Mv = gC : GC$,

64. Coroll. VI. Igitur est etiam $dx : Dv = gC : GC$; hoc est, ordinatæ correspondentes dx & Dv sic sunt inter se, uti sunt semidiametri correspondentes gC & GC. Est enim imprimis $dM : DM = gC : GC$ (62); est deinde etiam $Mx : Mv = gC : GC$ (63): est ergo,

$$dM : DM = Mx : Mv,$$

Altern. - $dM : Mx = DM : Mv$.

Ad-

Addendo,

$dM + Mx = Mx = DM + Mv : Mv$. (*Algeb.* 179.).

seu - - $dx : Mx = Dv : Mv$.

Altern. - $dx : Dv = Mx : Mv$.

Adeoque - $dx : Dv = gC : GC$. (63).

65. Coroll. VII. Si diametrorum correspondentium extremitates E & K connectantur per rectam EK, & ordinatarum correspondentium extremitates x & v per rectam xv; erit xv ad EK parallela. Cum enim sit $dM : DM = Mx : Mv$ (64); in triangulis dMD & vMx latera angulos ad M verticales; adeoque æquales comprehendentia proportionalia sunt: consequenter eadem triangula sunt similia (*Geom.* 157.). Hinc ang. x est $= d$, ac proinde est xv ad dD parallela (*Geom.* 58.): Atqui etiam EK seu ER est parallela ad dD seu ad dO: nam dO ex constr. est perpendicularis ad AB; & ER, quoniam per extremitates diametrorum correspondentium transit, pariter perpendicularis est ad AB (53). Ergo xv est etiam EK parallela (*Geom* (59.)

CAPUT QUARTUM.

De reliquis Elipseos proprietatibus, quæ a principiis hactenus jactis dependent.

66. Theorema XIV. *Sint* FC *&* GC (*Fig.* 7.) *ellipseos semidiametri conjugatæ, compleaturque parallelogrammum* FCGD. *Hujusmodi parallelogrammum semidiametrorum conjugatarum in ellipsi semper æquatur rectangulo semiaxium; seu semper est* $FCGD = ab$.

Demonstr. Per puncta F & G ducantur rectæ HI & gN ad axem majorem perpendiculares, quæ circuli, centro C radio AC descripti peripheriæ occurrant in punctis H & g: ducantur deinde circuli radii HC & gC item diagonalis FG.

1) Area trapezii FING, ob FI & GN ad AB perpendiculares erit $= \frac{1}{2}(FI + GN) \times IN$ (*Geom.* 279.); seu ob $IN = IC + CN$, erit $= \frac{1}{2}(FI + GN) \times (IC + CN)$: Hoc est, erit:

$$FING = \tfrac{1}{2}(FI \times IC + FI \times CN + GN \times IC + GN \times CN).$$

Jam triangulum FIC eſt $= \frac{1}{2} FI \times IC$, & triang. GNC $= \frac{1}{2} GN \times CN$ (*Geom.* 143): ergo hæc triangula a trapezio FING ſubtrahendo, reſidua ejusdem trapezii pars FCG eſt $= \frac{1}{2}(FI \times CN + GN \times IC)$. Cum ergo parallelogrammum FCGD ſit $= 2FCG$ (*Geom.* 133.); eſt:

$$FCGD = FI \times CN + GN \times IC$$

2) Ob $FI : HI = b : a$ (2), eſt $FI = \dfrac{HI \times b}{a}$, & ob $GN : gN = b : a$ (cit.), eſt $GN = \dfrac{gN \times b}{a}$. Eſt ergo:

$$FCGD = \frac{HI \times b \times CN}{a} + \frac{gN \times b \times IC}{a}$$

Multipl. per a, eſt:

$$FCGD \times a = HI \times b \times CN + gN = \times b \times IC.$$

Seu ob $HI = CN$, & ob $gN = IC$ (54), eſt:

$$FCGD \times a = CN^2 \times b + IC^2 \times b.$$

Hoc eſt, $FCGD = (CN^2 + IC^2) \times b$.

Itaque ob $CN^2 + CI^2 = a^2$ (48), eſt:

$$FCGD \times a = a^2 b;$$

adeoque divid. per a, eſt $FCGD = ab$

67. Coroll. Quodſi ergo FK & GP (*Tab.* IX. *Fig.* 9.) fuerint ellipſeos diametri conjugatæ, & ex puncto P in diametrum FK demittatur perpendiculum PM; eſt $FC \times PM = AC \times DC = ab$. Nam parallelogrammum ſemidiametrorum conjugatarum FC & PC, ſi pro ejus baſi ſumatur FC, eſt $= FC \times PM$ (*Geom.* 142): atqui idem parallelogrammum eſt etiam $= ab = AC \times CD$ (66); eſt ergo $FC \times PM = ab = AC \times DC$.

68. THEOREMA XV. *Sint* FK & GP (*Tab. VIII. Fig.* 5.) *ellipſeos diametri conjugatæ, &* Dv *ſit ordinatim applicata ad diametrum* FK, *adeoque ſit parallela ad* CG. *Quadratum ordinatæ* Dv *erit ad factum abſciſſarum ipſi correſpondentium* Ev *&* vK, *ut quadratum ſemidiametri* CG *ad quadratum ſemidiametri* CK, *ſeu illius*

lius. ad quam eadem Dv *est ordinatim applicata. Id est, erit* $Dv^2 : Fv \times vK = CG^2 : CK^2$.

Demonstr. Sit eadem, quæ præcedentibus numeris, Figuræ 5tæ constructio. 1) Ob rectam xv ad EK parallelam 65). in triangulis Cxv & CEK est:

$$CE : Cx = CK : Cv \text{ (\textit{Geom.} 148.)}$$

Elev. ad quadr. $CE^2 : Cx^2 = CK^2 : Cv^2$ (*Algeb.* 178.)

Subtrah. $CE^2 - Cx^2 : CE^2 = CK^2 - Cv^2 : CK^2$ (*Algebr.* 6.).

2) Quoniam diameter HE in C bifariam secatur, & in x non bifariam. est $CE^2 = Cx^2 + Hx \times xE$ (*Geom.* 288.); adeoque est $CE^2 - Cx^2 = Hx \times xE$.

Eodem modo invenitur esse $CK^2 - Cv^2 = Fv \times vK$.

Igitur in postrema n. 1) proportione æqualibus æqualia substituendo, est:

$$Hx \times xE : CE^2 = Fv \times vK : CK^2.$$

Jam ob dx ad HE perpendicularem (61), est $Hx \times xE = dx$ (*Geom.* 161.): est item $CE = gC$, adeoque etiam $CE^2 = gC^2$. Itaque rursus æqualibus æqualia substituendo, est:

$$dx^2 : gC^2 = Fv \times vK : CK^2.$$

Porro cum sit $dx : Dv = gC : GC$ (64); est altern. $dx : gC = Dv : GC$, & elev. ad quadr. $dx^2 : gC^2 = Dv^2 : GC^2$. Hinc loco $dx^2 : gC^2$ ponendo $Dv^2 : GC^2$, est:

$$Dv^2 : GC^2 = Fv \times vK : CL^2.$$

Altern. $Dv^2 : Fv \times vK = GC^2 : CK^2$.

69. THEOREMA XVI. *Assumamus in Tab. IX. Fig. 9. arcum ellipseos infinite parvum* PQ. *Ex puncto* P *ducatur tangens* PR, *&* *punctum* P *cum foco* S *connectatur per rectam* SP: *deinde ex puncto* Q *agatur* QR *ad* SP *parallela*, *&* QT *ad eandem* SP *perpendicularis. Ajo, rectam* QR *multiplicatam per parametrum ellipseos semper fore æqualem quadrato rectæ* QT; *seu fore* $QR \times p = QT^2$.

Demonstr. Inveniamus imprimis valorem rectæ QR. Ducatur diameter PG, eique conjugata FK, tum recta Qv ad tangentem PR parallela. Quoniam etiam FK est parallela ad PR (40), rectæ Qv & FK, seu xv & HC sunt parallelæ ad se invicem (*Geom.* 59.); consequenter in triangulis Pxv & PHC est:

$$PC : PH = Pv : Px \text{ (\textit{Geom.} 148.).}$$

 Jam

Jam ob QR ad SP, & Qv ad RP ex conftr. parallelas, eft $QR = Px$ (*Geom.* 132.). Ergo loco Px ponendo QR, eft $PC : PH = Pv : QR$.

Confequenter eft - $QR = \frac{PH \times Pv}{PC}$.

Inveniamus deinde valorem quadrati rectæ QT. Si ex puncto P ad diametrum FK demittatur perpendicularis PM: fimilia funt triangula QTx & PMH. Nam ob Qx ad HM parallelam, anguli alterni QxT & PHM æquantur inter fe; præterea anguli ad T & M funt ex conftr. recti.

Stat ergo: $PM : PH = QT : Qx$ (*Geom.* 156.).

Adeoque $PM^2 : PH^2 = QT^2 : Qx^2$ (*Algeb.* 178.).

Unde eft - $QT^2 = \frac{PM^2 \times Qx^2}{PH^2}$

Itaque eft, $QR : QT^2 = \frac{PH \times Pv}{PC} : \frac{PM^2 \times Qx^2}{PH^2}$

Tollendo fractiones,

$QR : QT^2 = PH^3 \times Pv : PM^2 \times Qx^2 \times PC$.

Jam 1) quoniam eft $Qv^2 : Pv \times Gv = FC^2 : PC^2$ (68); eft $Qv^2 \times PC^2 = Pv \times Gv \times FC^2$: confequenter eft $Pv = \frac{Qv^2 \times PC^2}{Gv \times FC^2}$. Quem valorem in poftrema proportione loco Pv fubftituendo, eft:

$QR : QT^2 = \frac{PH^3 \times Qv^2 \times PC^2}{Gv \times FC^2} : PM^2 \times Qx^2 \times PC$.

Secundam rationem divid. per PC, eft

$QR : QT^2 = \frac{PH^3 \times Qv^2 \times PC}{Gv \times FC^2} : PM^2 \times Qx^2$.

2) Ob arcum PQ ex hyp. infinitefimum, triangulum QRP pro rectilineo haberi poteft (*Geom.* 183. *Schol.* 3.); in quo angulus RPQ eft infinite parvus (*Ibid. Schol.* 2.). Cum ergo angulus $QRP = SPg$ fit finitus; in eo triangulo eft PQ ad QR, ut finus finiti anguli ad finum anguli infinitefimi (*Geom.* 204.): confequenter eft

est $PQ : QR = 1 : \frac{1}{\infty}$; seu ob PQ ex hyp. $= \frac{1}{\infty}$, est $\frac{1}{\infty} : QR = 1 : \frac{1}{\infty}$. Unde est $QR = \frac{1}{\infty^2}$ seu est infinitesima 2di ordinis (*Geom.* 208. *Schol.*) Ergo etiam $Px = QR$ est infinitesima ordinis secundi. Unde consequitur, in triangulo Pxv reliqua quoque latera Pv & xv esse infinitesima secundi ordinis. Nam triangula Pxv & PHC similia sunt, uti superius vidimus; adeoque sicut in triangulo PHC, ita etiam in triang. Pxv quilibet angulus est definitæ magnitudinis: ergo omnia trianguli Pvx latera sunt ejusdem inter se ordinis (*Geom.* 209.); consequenter ob latus Px infinitesimum ordinis secundi, reliqua etiam latera Pv & xv singula sint infinitesima secundi ordinis, est necesse.

Hinc cum $Qx = PR$ sit $= \frac{1}{\infty} : xv = \frac{1}{\infty^2}$ comparate ad Qx evanescit, ita ut sit $Qx + xv$, seu $Qv = Qx$ (*Algeb.* 220. *Schol.* 2.). Potiori jure $GP - Pv$, seu Gv est $= GP$; GP vero est $= 2PC$ (41): ergo in postrema n. 1) proportione loco Qv^2, ponendo Qx^2, & loco Gv ponendo 2PC, est:

$$QR : QT^2 = \frac{PH^2 \times Qx^2 \times PC}{2PC \times FC^2} : PM^2 \times Qx^2.$$

$$\text{Id est, } QR : QT^2 = \frac{PH^2}{2FC^2} : PM^2$$

Toll. fract. est $QR : QT^2 = PH^2 : 2FC^2 \times PM^2$.
Seu ob $PH = AC$ (42), est:
$QR : QT^2 = AC^2 : 2FC^2 \times PM^2$.
Porro est $FC \times PM = AC \times CD$ (67): ergo est,
$QR : QT^2 = AC^2 : 2AC^2 \times CD^2$;
adam rat. divid. per AC^2, est
$QR : QT^2 = AC : 2CD^2$.

$$\text{Est ergo } QT^2 = \frac{QR \times 2CD^2}{AC.}$$

Hinc ob $\frac{2CD^2}{AC} = \frac{2b^2}{a} = p$ (27), est demum:

$$QT^2 = QR \times p. \quad \text{Q. E. D.}$$

70. Coroll. Itaque eſt $QR = \frac{QT^2}{p}$; ac proinde divid. per QT^2, eſt $\frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{p}$. Atqui $\frac{1}{p}$ eſt quantitas conſtans (27); ergo in ellipſi etiam $\frac{QR}{QT^2}$ eſt quantitas conſtans.

Schol. Corollarium hoc cum præcedente theoremate egregio in Phyſica uſui eſt.

CAPUT QUINTUM.

De Parabola.

71. E ſingulis cujuſpiam rectæ AB (*Fig.* 10.) punctis F, P, &c. concipiantur utrinque erigi rectæ FN, PO, FM PL &c. quæ ſunt ad eandem AB perpendiculares: concipiantur autem ea lege erigi, ut quælibet perpendicularis FN ſit media proportionalis inter abſciſſam ſibi reſpondentem AF, ſemper ab eodem puncto A computatam, & inter datam, aut aſſumptam quampiam rectam AC; adeoque ea lege, ut ſtent hæ proportiones:

AF : FN = FN : AC
AF : FM = FM : AC
AP : PO = PL : AC
AP : PL = PL : AC &c.

Linea curva TONAML &c. quæ per omnium perpendicularium, ſeu *ordinatarum* utrinque erectarum extremitates tranſit, *Parabola* vocatur. Recta AB eſt *axis* parabolæ: AC autem eſt ejusdem *parameter*; quam deinceps litera p deſignabimus. Punctum A, a quo abſciſſæ omnes computantur, parabolæ *vertex* audit. Quodſi autem in axe capiatur abſciſſa AF, æqualis $\frac{1}{4}$ parti parametri AC; punctum F *focus* parabolæ nuncupatur.

72. Coroll. I. Igitur in parabola cujuslibet ordinatæ quadratum æquatur facto ex abſciſſa in parametrum, ſeu eſt $y^2 = px$. Eſt enim ſemper $x : y = y : p$ (71); eſt ergo $y^2 = px$.

73. Coroll. II. Hinc cum parameter ſit quantitas conſtans, utpote determinata recta AC (71); loquendo de rationis æqualitate eſt ſemper $y^2 = x$ (*Algeb.* 194.): conſequenter duas diverſas ordinatas, earumque abſciſſas conferendo, eſt $Y^2 : y^2 = X ; x$. Hoc eſt, in parabola, quadrata ordinatarum ſunt ut abſciſſæ ipſis reſpondentes.

74. Coroll. III. In parabola axis AB omnes perpendiculares MN, LO &c. bifariam ſecat; ſeu eſt $MF = NF$, $LP = OP$ &c. Eſt enim $MF^2 : NF^2 = AF : AF$ (73): ergo ob $AF = AF$, eſt etiam $MF^2 = NF^2$; unde eſt quoque $MF = NF$. Eodem modo patet eſſe $LP = OP$ &c.

75. Coroll. IV. Perpendicularis MN, per focum F tranſiens, & utrinque terminata in parabola, æquatur parametro ejusdem parabolæ: ſeu eſt $MN = p$. Eſt enim $MF^2 = AF \times p$ (72); adeoque ob $AF = \frac{1}{4} p$ (71) eſt $MF^2 = \frac{1}{4} p^2$, & extrah. utrinque radicem, eſt $MF = \frac{1}{2} p$. Cum ergo ſit $MN = 2MF$ (74); eſt $MN = p$.

76. Coroll. V. Cum ſemper ſit y^2 ut x (73); in vertice A, in quo nulla jam eſt abſciſſa, ordinatæ utrinque evaneſcunt. Hoc eſt, crura parabolæ in vertice A concurrunt.

77. Coroll. VI. Dum ſemper ſit y^2 ut x (73): creſcente abſciſſa continenter creſcunt ordinatæ ipſi reſpondentes: ac proinde crura parabolæ, quo magis a vertice diſtant, eo magis ſemper ac magis recedunt tam ab axe, quam a ſe ipſis. Unde patet, parabolam non eſſe curvam in ſe redeuntem, ſed ejus crura, uti & axem protendi in infinitum.

78. Coroll. VII. In ellipſi, cujus axis major ſit ingens, arcus vertici vicinus congruit ad ſenſum cum arcu parabolico: nempe quamdiu abſciſſa a vertice computata inſenſibilis eſt comparate ad axem transverſum, tamdiu arcus ellipticus cum parabolico ad ſenſum congruit. Nam in ellipſi, ſi abſciſſa a vertice computetur,

est $y^2 = \frac{2ab^2x - b^2x^2}{a^2}$ (5). Porro in eadem ob $a : b = 2b : p$ (27), est $b^2 = \frac{ap}{2}$; quem proinde valorem loco b^2 substituendo, est in ellipsi:

$$y^2 = \frac{2a^2px - apx^2}{2a^2}$$

$$\text{Seu } y^2 = px = \frac{px^2}{2a}.$$

Jam est $px : \frac{px^2}{2a} = 2a : x$; factum enim extremorum est æquale facto mediorum: ergo quamdiu x evanescit comparate ad $2a$, tamdiu etiam $\frac{px^2}{2a}$ evanescit comparate ad px; hoc est, tamdiu est ad sensum in ellipsi $y^2 = px$, adeoque ob p constantem, tamdiu est ad sensum y^2 ut x. Atqui x hoc loco designat abscissam a vertice ellipseos computatam, $2a$ vero axem transversum; ergo quamdiu abscissa a vertice ellipseos computata evanescit comparate ad axem transversum, tamdiu arcus ellipseos cum arcu Parabolico ad sensum congruit (73).

79. THEOREMA XVII. *In axe parabolæ ultra verticem* A *producto capiatur pars* AI, *quæ sit æqualis rectæ* AF: *seu distantiæ foci* F *a vertice* A, *& per punctum* I *ducatur recta indefinita* ER, *ordinatis parallela, adeoque ad axem perpendicularis: deinde ex foco* F *ducatur ad quodcunque parabolæ punctum* O *recta* FO, *& ex puncto* O *erigatur recta* OH *ad* ER *perpendicularis, adeoque ad axem parallela. Ajo, rectam* FO *semper fore* = OH.

Demonstr. Est enim $FO^2 = FP^2 + OP^2$ (*Geom.* 286.): porro $FP = AP - AF$ est $= x - \frac{1}{4}p$ (71.); adeoque si facilioris calculi gratia ponamus $p = 4r$, est $FP = x - r$, & hinc $FP^2 = x^2 - 2rx + r^2$. Cum ergo præterea sit $OP^2 = px$ (72) $= 4rx$; est:

FO

$$FO^2 = x^2 - 2rx + r^2 + 4rx,$$
seu est $FO^2 = x^2 + 2rx + r^2$.
Extrah. rad. est:
$$FO = x + r = x + \tfrac{1}{4}p = AP + AI = OH.$$

80. Coroll. Itaque si ex quopiam puncto t ducatur recta una tF ad focum F, altera tv ad rectam ER, parallela axi, deprehendaturque esse $tF > tv$; eo ipso inferre licet, punctum t extra parabolam situm esse. Unde etiam recta ER dicto superius modo ducta solet nominari *directrix* parabolæ.

81. PROBLEMA III. *Ad datum parabolæ punctum* O *tangentem ducere.*

Resolut. E data puncto O ducatur ad focum recta OF, & altera OH ad directricem ER perpendicularis: tum puncta F & H connectantur per rectam FH. Si recta hæc FH bifariam secetur in D; recta KO per puncta D & O transiens *tanget* parabolam in puncto O.

Demonstr. Si recta KO seu Kt unicum duntaxat punctum O habet commune cum parabola, ita ut quodlibet aliud ejusdem rectæ punctum t cadat extra parabolam; recta KO seu Kt est tangens ellipseos, puncto O respondens (*Geom.* 75.): atqui recta Kt unicum duntaxat punctum O habet commune cum parabola, ita ut quodlibet aliud ejusdem punctum t cadat extra parabolam; quod sic declaro. In triangulo FOH est FO = OH (79): adeoque recta OD, quæ basim FH ex constr. bifariam secat, eandem secat perpendiculariter (*Geom.* 123.): hoc est, anguli ad D sunt recti. Ducatur jam recta tH. In triangulis FtD HtD est ex constr. FD = HD, & latus Dt utrique commune: cum ergo anguli ab his lateribus ad D intercepti, sint, uti nunc vidimus, recti, ac proinde æquales; est Ft = tH (*Geom.* 27.). Itaque si ducatur tv ad directricem ER perpendicularis; ob $tH > tv$ (*Geom.* 110.), est etiam $Ft > tv$. Eo ipso autem patet, punctum t extra parabolam esse situm (80).

82. Coroll. I. Igitur tangens KO angulum FOH bifariam dividit, seu est ang. FOD = HOD. Nam ob OF = OH (79), triangulum FOH est isosceles: ergo tan-

tangens KO, quæ baſim FH bifariam dividit (81), bifariam dividit etiam angulum FOH (*Geom.* 123.).

83. Coroll. II. Tangens parabolæ vertici A reſpondens, eſt ad axem AB perpendicularis. Si enim quodcunque parabolæ punctum O aſſumamus, ducamusque ex eo unam rectam OF ad focum, & alteram OH erigamus perpendicularem ad directricem ER; tangens KO puncto O reſpondens, rectam FH puncta F & H connectentem ſemper ad angulos rectos ſecat (81), Ponamus jam punctum O continenter magis, ac magis accedere ad verticem A: etiam recta FH continenter magis, ac magis accedet ad poſitionem rectæ FI; & ubi punctum O cum A congruerit, etiam recta FH cum FI penitus jam congruet. Ergo tangens, quæ puncto O tunc reſpondebit, quum iſtud cum vertice A congruerit, jam ipſam rectam FI ſecabit ad angulos rectos: quod tantundem eſt, ac tangentem vertici A reſpondentem eſſe perpendicularem ad axem AB.

84. Coroll. III. Si ex quocunque parabolæ puncto O ducatur recta OQ ad axem AB parallela, & idem punctum O cum foco F connectatur per rectam OF; eſt ſemper angulus DOF $=$ QOt: hoc eſt anguli, quorum unum tangens ex una parte cum recta FO, ex foco ad punctum contactus ducta, alterum autem ex parte altera cum recta OQ ad axem parallela efficit, ſemper æquantur inter ſe. Eſt enim ang. DOF $=$ DOH (82): atqui eſt ang. DOH $=$ QOt (*Geom.* 37.): ergo eſt etiam ang. DOF $=$ QOt

Schol. Ab hac parabolæ proprietate dependet elegans ſpeculorum parabolicorum phænomenon, in phyſica explicari ſolitum.

85. THEOREMA XVIII. *Ex quocunque parabolæ puncto* O *ducatur tangens* OK, *axi producto occurrens alicubi in* K; *item erigatur recta* OH *ad directricem* ER *perpendicularis, adeoque axi parallela: deinde focus* F *connectatur cum puncto* H *per rectam* FH, *& ex vertice* A *per punctum* D, *in quo tangens* OK *rectam* FH *interſecat, ducatur recta* AX, *rectæ* OH *occurrens in* X. 1) *Erit* AD $=$ DX: 2) *erit* AX *ad* KB *ſeu ad* AB *perpendicularis.*

De-

Demonstr. Nam 1) in triangulis AFD & HDX, ob HX ad AF parallelam, similibus est FD = DH (81): ea ergo triangula sunt præterea etiam æqualia (*Geom.* 119.), ac proinde latera homologa AD & DX æquantur inter se (*Geom.* 122.).

2) In similibus, simulque æqualibus triangulis AFD & HDX est HX = AF (*Geom.* 122); ergo ob AF ex const. = IA (79.). est etiam HX = IA. Cum ergo præterea HX sit ad IA ex constr. parallela: in quadrilatero IHXA est etiam AX ad IH parallela (*Geom.* 132): consequenter ob IH ad KB ex constr. perpendicularem, est quoque AX ad KB seu ad AB perpendicularis.

86. Coroll. I. Igitur si ex vertice L, & quocunque alio parabolæ puncto O ducantur tangentes AX & OK item ex puncto O erigatur OH, axi parallela, quæ tangenti AX occurrat alicubi in X; 1) tangens OK tangentem AX semper bifariam dividet in D, seu semper erit AD = DX; 2) triangula KAD & OXD, quorum unum tangentes cum recta AK, alterum cum OX comprehendunt, semper erunt æqualia. *Ratio 1mi est.* Si enim per punctum D, in quo tangens OK rectam FH intersecat, ducatur ex vertice A recta AX, rectæ OH occurrens in X; hæc recta bifariam secatur a tangente OK (85): atqui hujusmodi recta AX, eo ipso quod sit ad AB perpendicularis (85), est tangens vertici A respondens (83); ergo. *Ratio 2di est.* Nam triangula KAD & OXD, ob OX ad AK parallelam sunt similia: ergo ob AD = DX sunt præterea etiam æqualia (*Geom.* 119.).

87. Coroll. II. Hinc si præterea ex eodem puncto O demittatur ordinata OP; 1) recta KA semper æquatur abscissæ AP: 2) triangulum KPO est semper = rectang. AXOP. *Ratio 1mi est.* Nam in triangulis KAD & OXD similibus & æqualibus (86), est KA = XO = AP. *Ratio 2di est.* Nam triangulis KAD & DOX æqualibus addendo idem trapezium ADOP, non turbatur æqualitas; ac proinde est KPO = AXOP.

88. Coroll. III. Si recta HO ad axem parallela producatur versus Q & ex puncto P agatur recta PQ, tangenti parallela; triangulum POQ est simile & æquale triangulo KPO. Nam parallelogrammum KPQO a dia-

gonali

gonali PO in duo similia, simulque æqualia triangula dividitur (*Geom.* 133.). Unde id quoque patet, esse $2OPQ = KPQO$.

89. *Diameter* parabolæ est quævis recta OG, quæ e quocunque parabolæ puncto O ita demittitur, ut sit ad axem AB parallela. Nempe generatim, diameter sectionis conicæ per ejusdem centrum transit: hinc, cum parabolæ centrum, ob ejusdem axem infinitum (77), infinite distet a vertice; ejusdem diameter cum axe nuspiam concurrit, ac proinde est axi parallela.

90. THEOREMA XIX. *E quocunque parabolæ puncto* O (*Fig.* 11.) *ducatur tangens* OK. *item diameter* OG, *quæ producatur in partem oppositam, dum verticis tangenti* AX *occurrat in* X: *ducatur deinde recta* ae, *tangenti* KO *parallela, quæ parabolam ita secet in punctis* E *&* e, *ut axi producto occurrat alicubi in* a: *denique ex punctis* E *&* e *demittantur in axem ordinatæ* ER *&* er, *producaturque* ER, *dum diametro* OG *in* X *productæ occurrat in* H. 1) *Triangulum* aRE. *ab ordinata* ER, *axe producto, & secante comprehensum æquatur rectangulo* AXHR, *cujus unum latus sit abscissa* AR, *alterum autem verticis tangens* AX. 2) *Pariter triangulum* are, *ab ordinata* er, *axe, & secante comprehensum æquatur rectangulo* AXTr, *cujus unum latus sit abscissa* Ar, *alterum autem verticis tangens* AX.

Demonstr. 1) Triangula similia KPO & *a*RE sunt ut $OP^2 : ER^2$ (*Geom.* 298.), adeoque ut AP : AR (73): atqui etiam rectangula AXOP & AXHR, ob bases ipsorum æquales. sunt ut AP : AR (*Geom.* 296.); ergo duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, est:

$$KOP : aRE = AXOP : AXHR,$$

$$\text{Altern.} \quad KOP : AXOP = aRE : AXHR.$$

Hinc ob KOP = AXOP (87), est etiam *a*RE = AXHR.

2) Similiter triangula similia KOP & *are* sunt ut $OP^2 : er^2$ (*Geom.* 298). adeoque ut AP : A*r* (73): atqui etiam rectangula AXOP & AXT*r*, ob bases eorum æquales, sunt ut AP : A*r* (*Geom.* 296.); ergo duas rationes eidem tertiæ æquales conjungendo, est:

KOP

KOP : are = AXOP : AXTr,

Altern. KOP : AXOP = are : AXTr.

Hinc ob KOP = AXOP (87), eſt etiam are = AXTr.

91. Coroll. Tametſi recta MG (*Fig.* 12.) tangenti KO parallela, parabolamque ſecans ita ducatur, ut ipſum axem AB ſecet in aliquo puncto L; adhuc triangulum MNL, ab ordinata MN, axe, & ſecante comprehenſum æquatur rectangulo AXHN, cujus unum latus ſit abſciſſa AN, alterum autem tangens vertici reſpondens AX, quam diameter GO producta in X intercipit: idque eadem prorſus argumentandi ratione, qua hactenus (90) uſi ſumus, evincitur. Nempe triangula ſimilia KOP & MNL ſunt ut $OP^2 : MN^2$ (*Geom.* 298.), adeoque ut AP : AN (73): atqui etiam rectangula AXOP & AXHN, ob baſes ipſorum æquales, ſunt ut AP : AN (*Geom.* 296.); eſt ergo:

KOP : MNL = AXOP : AXHN.

Altern. KOP : AXOP = MNL : AXHN.

Hinc ob KOP = AXOP (87), eſt quoque MNL = AXHN.

92. THEOREMA XX. *Fiat eadem, quæ n. 90. Figuræ 11mæ conſtructio. Triangulum* HES *ab ordinata* RE *producta, ſecante, & diametro producta comprehenſum, æquale eſt parallelogrammo* KOSa, *cujus unum latus ſit tangens* KO, *alterum autem diametri pars* OS, *inter tangentem & ſecantem ipſi parallelam intercepta.*

Demonstr. Ducatur recta Ss ad axem perpendicularis. Cum ſit KOP = AXOP (87); erit etiam:

KOP + OSsP = AXOP + OSsP,

Seu KOSs + AXSs.

Hinc ob aRE = AXHR (90), eſt:

KOSs — aRE = AXSs — AXHR.

ſeu KOSa + RESs = HES + RESs.

Unde ſubtrah. RESs, eſt KOSa = HES.

93. Coroll. I. Pariter triangulum TeS, ab ordinata $e\,r$, ſecante, & diametro comprehenſum æquatur eidem parallelogrammo KOSa. Eſt enim TeS = HES; quod ſic declaro. Cum ſit aer = AXTr, & aER = AXHR (90) eſt:

$aer - aER = AXTr - AXHR$;

Seu eſt $REer = RHTr$.

Ergo utrinque demendo idem RESTr, remanet $TeS = HES = KOSa$ (92).

94. Coroll. II. Immo tametſi recta MG (*Fig* 12.) tangenti KO parallela, parabolamque ſecans ita ducatur, ut ipſum axem AB ſecet alicubi in L; adhuc triangulum MHG, ab ordinata in H producta, diametro, & ſecante comprehenſum æquatur parallelogrammo KOGL, cujus unum latus ſit tangens KO, alterum autem diametri abſciſſa OG, a ſecante intercepta. Eſt enim $MNL = AXHN$ (91): adeoque utrique addendo idem NHGL, eſt:

$$MHG = AXGL.$$

Atqui ob $KAD = OXD$ (85), eſt $AXGK = AXGL + KAD - OXD$ (*Algeb.* 8.) $= KOGL$: ergo eſt quoque $MHG = KOGL$.

95. Coroll. III. Diameter OG (*Fig.* 11.) quamlibet rectam Ee utrinque in parabola terminatam, & parallelam tangenti KO biſariam ſecat in S, ſeu eſt $ES = Se$. Nam triangula HES & TeS, præterquam quod ob eT ad HE parallelam ſimilia ſint, æquantur inter ſe (93): ergo in iis latera homologa ES & Se ſunt æqualia (*Geom.* 122.).

96. *Ordinata* diametri OG, ſeu *ordinatim applicata* ad diametrum OG eſt quævis recta ES, vel eS (*Fig.* 11), item MG (*Fig.* 12.). ex parabola ita in ipſam demiſſa, ut ſit parallela tangenti KO, ſeu ei, quæ ejusdem diametri extremitati O reſpondet.

97. THEOREMA XXI. *In parabola quadratum* ordinatim applicatæ *ad diametrum eſt ſemper in ratione abſciſſæ, ipſi in eadem diametro reſpondentis. e. g. Eſt* ES^2 *ut* OS (*Fig.* 11.); *eſt item in* Fig. 12, MG^2 *ut* OG.

Demonstr. Si enim in *Fig.* 11. ducatur PQ ad tangentem KO parallela; triangula ſimilia HES & OPQ erunt ad quadrata laterum homologorum (*Geom.* 398.); adeoque erit:

$$HES : OPQ = ES^2 : PQ^2. \text{ Conſequ.}$$

mult. per 2, - $HES : 2\,OPQ = ES^2 : 2PQ^2$

Atqui eſt $HES = KOSa$ (92), & $2OPQ = KPQO$ (88); ergo

eſt

$$\text{est } KOSa : KPQO = ES^2 : 2PQ^2.$$

Jam vero est KOSa: KPQO = OS : OQ; rectangula enim, quorum eadem est altitudo, sunt in ratione basium (*Geom.* 296.: est ergo,

$$ES^2 : 2PQ^2 = OS : OQ, \text{ adeoque } ES^2 = \frac{OS \times 2PQ^2}{OQ.}$$

Porro cum triangulum OPQ semper simile & æquale sit triangulo KPO (88); tam PQ quam etiam OQ respectu unius ejusdemque diametri OG est quantitas constans: ergo de rationis æqualitate loquendo est $ES^2 = OS$, seu est ES^2 ut OS (*Algeb.* 183).

Similiter si in *Fig.* 12. ducatur PQ ad tangentem OK parallela; est HMG: OPQ = MG^2 : PQ^2 adeoque HMG: 2OPQ = MG^2 : $2PQ^2$. Atqui est HMG = KOGL, & 2OPQ = KOQP (94. & 88.); ergo est:

$$KOGL : KOQP = MG^2 : 2PQ^2.$$

Jam vero est KOGL : KOQP = OG : OQ (*Geom* 296.); est ergo:

$$MG^2 : 2PQ^2 = OG : OQ, \text{ adeoque } MG^2 = \frac{OG \times 2PQ_2}{OQ.}$$

Cum ergo PQ & OQ respectu unius ejusdemque diametri constantes sint; est MG^2 ut OG.

98. Coroll. Igitur duas unius ejusdemque diametri ordinatas Y & y cum abscissis respondentibus X & x conferendo, est semper $Y^2 : y^2 = X : x$. Hoc est, in parabola, etiam diametri ordinatarum quadrata sunt ut abscissæ ipsis in eadem diametro respondentes.

99. PROBLEMA IV. *Data parametro parabolam describere.*

Resolut. Assumantur quæcunque duæ rectæ indefinitæ ND & BG (*Fig.* 13.) sese in A ad angulos rectos intersecantes; ita tamen, ut rectæ BG pars BA sit æqualis datæ parametro. Deinde centris in recta BG pro arbitrio assumptis, circino semper usque ad B aperto describantur quam plurimi circuli, qui rectas ND & BG in punctis R & P secent. Si assumptis lateribus AR & AP compleatur parallelogramma ARMP; linea curva per angulos M transiens erit parabola, verticem in A ha-

habens. Nam quælibet recta AR, adeoque quælibet etiam ordinata PM erit media proportionalis inter parametrum AB, & abscissam AP (*Geom.* 161.): ergo quælibet PM erit ordinata parabolæ, verticem in A habentis (71). Eo ipso autem patet, curvam per angulos M transeuntem esse parabolam, cujus vertex sit in A.

Schol. Si parabolam motu continuo describere velis; normæ HDI (*Fig.* 14.) cruri longiori DH adnecte in H filum, ipsi æquale: tum alteram fili extremitatem fige in dato, vel assumpto foco F, normamque regulæ fixæ AB admotam ita promove, ut ejus crure breviore DI juxta regulam AB versus B progrediente, filum stilo P detineatur penes normam semper probe distentum. Stili vestigium MPN erit arcus parabolicus, cujus vertex sit in M, & linea directrix sit AB. Nam ob FP + PH ex constr. = DP + PH. semper erit FP = PD; ergo (79). Descripto uno crure convertatur norma in partem alteram, & alter parabolæ arcus eodem modo describatur.

CAPUT SEXTUM.

De Hyperbola.

100. Assumantur duæ quæcunque rectæ indefinitæ AB & Ab (*Fig.* 15.), in puncto A sub quocunque angulo BAb concurrentes; in quibus capiantur quæcunque partes AD & Ad inter se æquales, compleaturque parallelogrammum ADCd. Deinde in recta AB capiantur quotcunque abscissæ AP. AL &c. & ex singulis punctis P, L &c. erigantur rectæ PM, LN &c. ad Ab parallelæ; ea autem lege erigantur, ut quælibet hujusmodi parallela sit tertia proportionalis post abscissam, & rectam DC, seu ut stent hæ proportiones:

$$AP : DC = DC : PM,$$
$$AL : DC = DC : LN \text{ \&c.}$$

Pariter in altera recta indefinita Ab capiantur quotcunque abscissæ Ap. Al. &c. & ex singulis punctis p. l &c. erigantur rectæ pm, ln &c. ad AB parallelæ; ea autem

rur-

rurſus lege erigantur, ut quælibet hujusmodi parallela ſit tertia proportionalis poſt abſciſſam, & rectam dC, ſeu ut ſtent hæ proportiones:

$$Ap : dC = dC : pm,$$
$$Al : dC = dC : ln \text{ \&c.}$$

Linea curva NMCmn &c. quæ per extremitates omnium parallelarum dicta lege erectarum tranſit. *Hyperbola* vocatur. Rectæ indefinitæ AB & Ab vocantur *aſymptoti* hyperbolæ. Recta DC (quæ ob AD ex conſtr. $= Ad$. eſt $= dC = Ad = AD$. *latus potentiæ* hyperbolæ nuncupatur. Segmenta AP, AL, Ap. Al. &c. ſunt abſciſſæ *in aſymptotis captæ*: parallelæ autem PM, LN, pm. ln &c. dicuntur *ordinatæ* iisdem reſpondentes.

101. Coroll. I. Igitur ordinatæ, quæ abſciſſis in una aſymptoto e. g. in AB captis reſpondent, ſunt parallelæ alteri aſymptoto Ab.

102. Coroll. II. Si ipſa recta AD = DC aſſumatur pro abſciſſa, & ordinata ipſi reſpondens vocetur y, eſt AD : DC = DC : y (100; adeoque ob AD = DC, eſt etiam y = DC. Hoc eſt, ordinata abſciſſæ AD reſpondens. eſt ipſum potentiæ latus DC; ac proinde punctum C eſt hyperbolæ. Eodem modo oſtenditur, ordinatam abſciſſæ Ad reſpondentem eſſe ipſum potentiæ latus dC. Unde patet, duo hyperbolæ crura in puncto C concurrere: quod punctum *vertex* hyperbolæ nuncupatur.

103. Coroll. III. Utcunque magna abſciſſa AL capiatur; ſemper reperiri poterit aliqua ordinata L N. quæ ſit tertia proportionalis poſt abſciſſam AL, & rectam DC (*Geom.* 169.): ergo utcunque magnam abſciſſam AL aſſumas; ſemper determinari poteſt punctum hyperbolæ, ei abſciſſæ reſpondens, quin unquam evaneſcat ordinata inter abſciſſam & hyperbolam intercepta. Hoc eſt, crura hyperbolæ intra aſymptotos in infinitum protenduntur, quin unquam cum iisdem conveniant.

104. Coroll. IV. Cum in hyperbola ordinata reſpondens abſciſſæ in aſymptoto captæ ſemper ſit tertia proportionalis poſt abſciſſam, & conſtantem lineam DC, quæ *latus potentiæ* dicitur (100); ſi conſtans hæc linea

vocetur d, abſciſſa x. ordinata y, eſt ſemper $x : d = d : y$. Unde eſt $yx = d^2$. Hoc eſt, factum ex abſciſſa in ordinatam eſt ſemper æquale quadrato rectæ conſtantis DC.

105. Coroll. V. Quemadmodum, ſi unam abſciſſam vocemus x, & ejus ordinatam y, eſt $yx = d^2$; ita ſi alteram abſciſſam dicamus X, ejusque ordinatam Y, eſt $XY = d^2$. Eſt ergo $XY = xy$, adeoque eſt $X : x = y : Y$ (*Algeb.* 169.). Hoc eſt, in hyperbola, ſi abſciſſæ capiantur in aſymptoto, ordinatæ ſunt in ratione inverſa abſciſſarum.

106. Coroll. VI. Itaque creſcentibus abſciſſis ordinatæ ex adverſo continenter decreſcunt: hoc eſt, crura hyperbolæ, quo magis recedunt a vertice C. eo magis ac magis accedunt ad ſuas aſymptotos. Atqui cum iisdem nunquam conveniunt (103); ergo aſymptoti AB & Ab ejusmodi rectæ indefinitæ ſunt, ad quas crura hyperbolæ continenter magis, ac magis accedunt, quin tamen cum iisdem unquam concurrant. Atque hæc eſt ratio, quod rectæ illæ indefinitæ, *Aſymptoti* hyperbolæ vocentur.

107. Coroll. VII. Capiatur quæcunque abſciſſa Ar, quæ ſit minor, quam ſit $AD = DC$; tum ex puncto r erigatur ei reſpondens ordinata rm, ſeu parallela ad Ab, quæ hyperbolæ occurret alicubi in m (106.). Etiam hujusmodi ordinata rm eſt tertia proportionalis poſt ſuam abſciſſam Ar. & potentiæ latus DC, ſeu eſt $Ar : DC = DC : rm$; ac proinde eſt $Ar \times rm = DC^2$. Si enim ex puncto m erigatur ordinata mp, ad AB parallela; ſtat $Ap : dC := dC : mp$ (100), & permut. extremos, $mp : dC = dC : Ap$. Atqui ob rm ad Ab parallelam, & ob mp parallelam ad AB, eſt $mp = Ar$, & $Ap = rm$ (*Geom.* 132.); ergo ſtat etiam. $Ar : dC = dC : rm$, ſeu ob $dC = DC$ ſtat $Ar : DC := DC : rm$. Unde eſt $Ar \times rm = DC^2$.

108. Coroll. VIII. Eodem modo, ſi alia quæcunque abſciſſa Ao, & ei reſpondens ordinata on aſſumatur, deprehenditur eſſe $Ao \times on = DC^2$. Eſt ergo $Ar \times rm = Ao \times on$; adeoque eſt $Ar : Ao = on : rm$ (*Algeb.* 169).

Hoc

Hoc est, etiam abscissæ latere potentiæ minores, sunt in ratione inversa suarum ordinatarum, & vicissim.

109. Coroll. IX. Si ex quotcunque hyperbolæ punctis *m*, *n* &c. demittantur ad asymptotum AB ordinatæ *mr*, *no* &c. ordinata *no*, e remotiori a vertice puncto *n* demissa, erit imprimis semper longior, quam altera quæcunque *mr* e viciniore vertici puncto *m* demissa, uti clarum est: erit deinde *no* vicinior asymptoto *Ab*, quam sit altera *mr*; si enim ex punctis *m* & *n* erigantur ordinatæ *mp* & *nl*; est $nl < mp$ (106). Cum ergo hyperbolæ crus *Cmn* &c. in infinitum protendatur, quin unquam cum asymptoto *Nb* concurrat (103), atque adeo possint in eo semper accipi puncta magis ac magis (finite in infinitum) a vertice C distantia, e quibus ordinatæ in rectam DA demitti queant; ordinatæ ex D versus A progrediendo continenter crescunt finite in infinitum, quin ulla detur ordinata determinata *on*, utcunque magna, simulque asymptoto *Ab* utcunque vicina, qua non detur alia major, simulque asymptoto *Ab* vicinior.

110. Coroll. X. Si angulus B*Ab*, sub quo asymptoti concurrunt, fuerit rectus; ordinatæ sunt perpendiculares ad suas abscissas. Eo enim casu asymptotus *Ab* est ad AB perpendicularis: ergo etiam ordinatæ DC, PM, LN &c. cum sint ad *Ab* parallelæ, ad AB perpendiculares sint, oportet (*Geom.* 61.(.

111. Hyperbola hactenus descripta, seu in qua est $xy = d^2$, vocatur hyperbola *communis*, vel *Apolloniana*, item *secundi gradus*. Hyperbola, in qua est $x^2y = d^3$, vocatur *tertii gradus*, propterea, quod ejus æquationem ingrediatur potentia tertia, videlicet d^3.

112. Coroll. I. Igitur in hyperbola *tertii gradus* est $x^2 : d^2 := d : y$. Hoc est, in hoc hyperbolæ genere ordinata abscissæ in asymptoto captæ respondens est quarta proportionalis post quadratum abscissæ, quadratum rectæ constantis DC, & eandem rectam constantem DC. Clarum enim est, semper esse possibiles duas quaspiam rectas A & B, quarum prior sit ad posteriorem, ut $x^2 : d^2$, seu ut sit $A : B = x^2 : d^2$; jam

vero post rectas, quascunque AB, & DC utique potest semper obtineri quarta proportionalis (*Geom.* 167.): ergo etiam post x^2, d^2, & d semper potest quarta proportionalis obtineri. Hoc est, possunt determinari ordinatæ hyperbolæ tertii gradus, ac proinde ipsa etiam hyperbola tertii gradus, utpote quæ est curva per id genus ordinatarum extremitates transiens.

113. Coroll. II. Cum in hyperbola tertii gradus sit semper $x^2y = d^3$; est $X^2Y = x^2y$, adeoque est $X^2 : x^2 = y : Y$. Hoc est, in hoc hyperbolæ genere ordinatæ sunt in ratione reciproca duplicata abscissarum, ab eo puncto, in quo asymptoti concurrunt, computatarum.

114. Coroll. III. Igitur crescentibus abscissis, ordinatæ continenter decrescunt: hoc est, crura hyperbolæ, quo magis a vertice recedunt, eo magis accedunt ad suas asymptotos. Quia vero semper est $x^2y = d^3$; abscissa y evanescere nunquam potest: si enim alicubi evaderet $y = 0$; illic esset etiam $x^2y = 0$, adeoque esset $d^3 = 0$, quod absurdum est. Hoc est, etiam in hyperbola tertii gradus ita accedunt continenter crura ad asymptotos, ut tamen cum iisdem nuspiam omnino concurrant.

Atque hæc nosse de Hyperbola Physicæ Candidatis sufficiet; in quorum gratiam hæc de Sectionibus Conicis Geometriæ adjeci.

FINIS.

MONI-

MONITUM.

Præter necessarias ad usum Civilem praxes Geometricas, ac Trigonometricas non parce pertractatas id cumprimis curavimus hoc in opusculo, ut nihil eorum prætermitteremus non demonstratum. quæ in Physicis opusculis nostris veluti certa principia, e Mathematicis disciplinis deprompta, variis locis usurpamus. At in iis opusculis Lectorem pro videndis id genus veritatum mathematicarum demonstrationibus fere ubique ad *compendiariam Matheseos Institutionem* R. D. Pauli Mako remisimus. Hinc ut ii, quibus Physica nostra uti libuerit, hoc quoque opusculo nostro mathematico commodius uti queant; sequentem indicem adjiciendum censuimus: in quo sinistra columna continet numeros, e laudata R. D. Mako compendiaria Matheseos Institutione in Physica nostra citatos, dextra vero columna numeros iisdem in hoc opusculo nostro respondentes.

57	—	—	*Algeb.*	27
67 & 70	—	—	62. &	sequ.
80	—	—	—	55
204	—	—	—	169
205	—	—	175. &	176
206 & 207	—	—	—	181
209	—	—	—	174
211	—	—	—	179
215	—	—	—	217
302	—	—	*Geom.*	76
313	—	—	—	58
320	—	—	—	70
340	—	—	—	81
342	—	—	—	83
345	—	—	—	85
360	—	—	—	105
367	—	—	—	117
				368.


Fig.

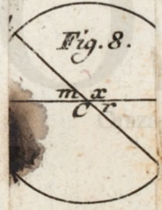
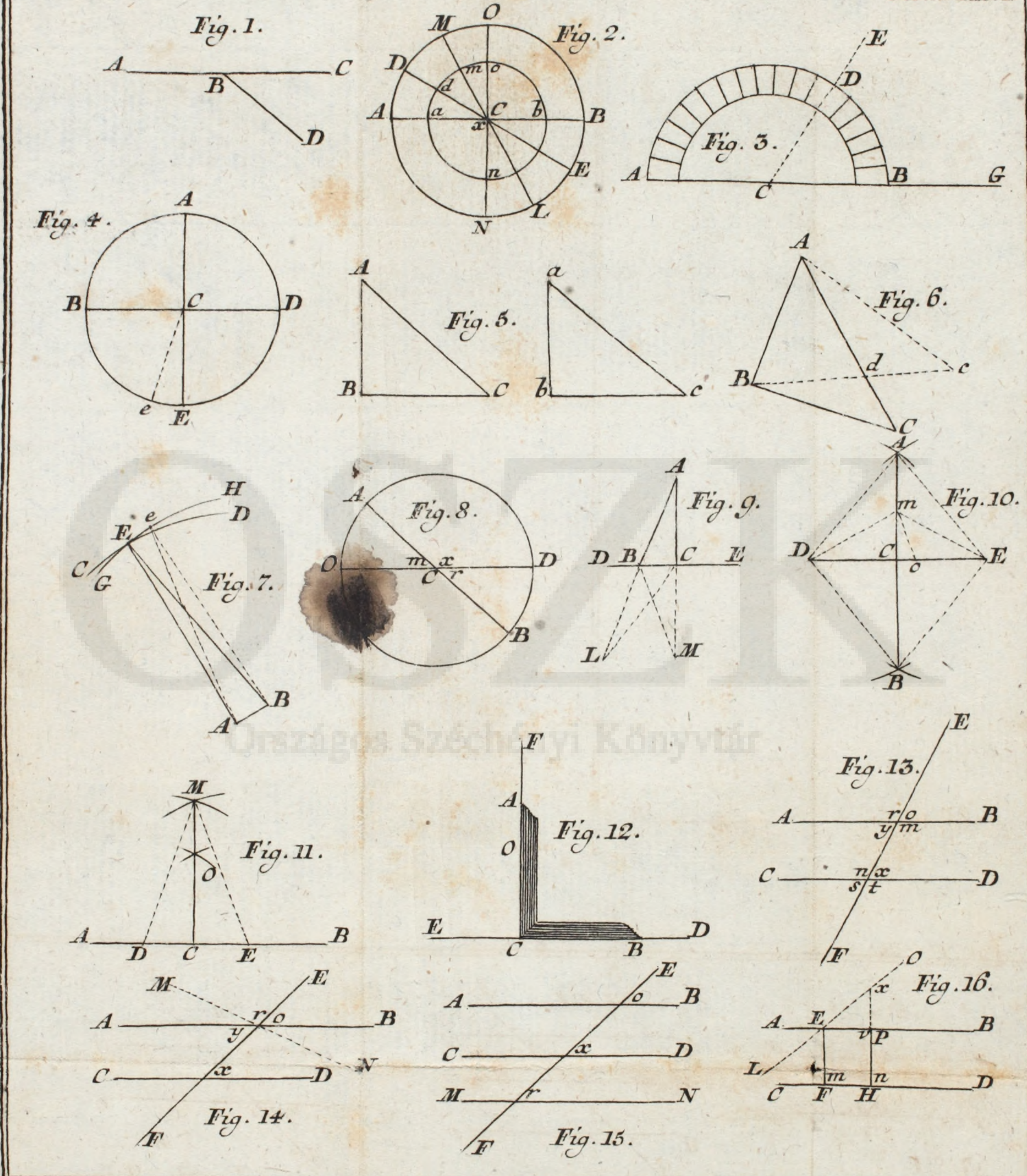


Fig. 8.

Geom. Tab. I.



Horvath Mathes.

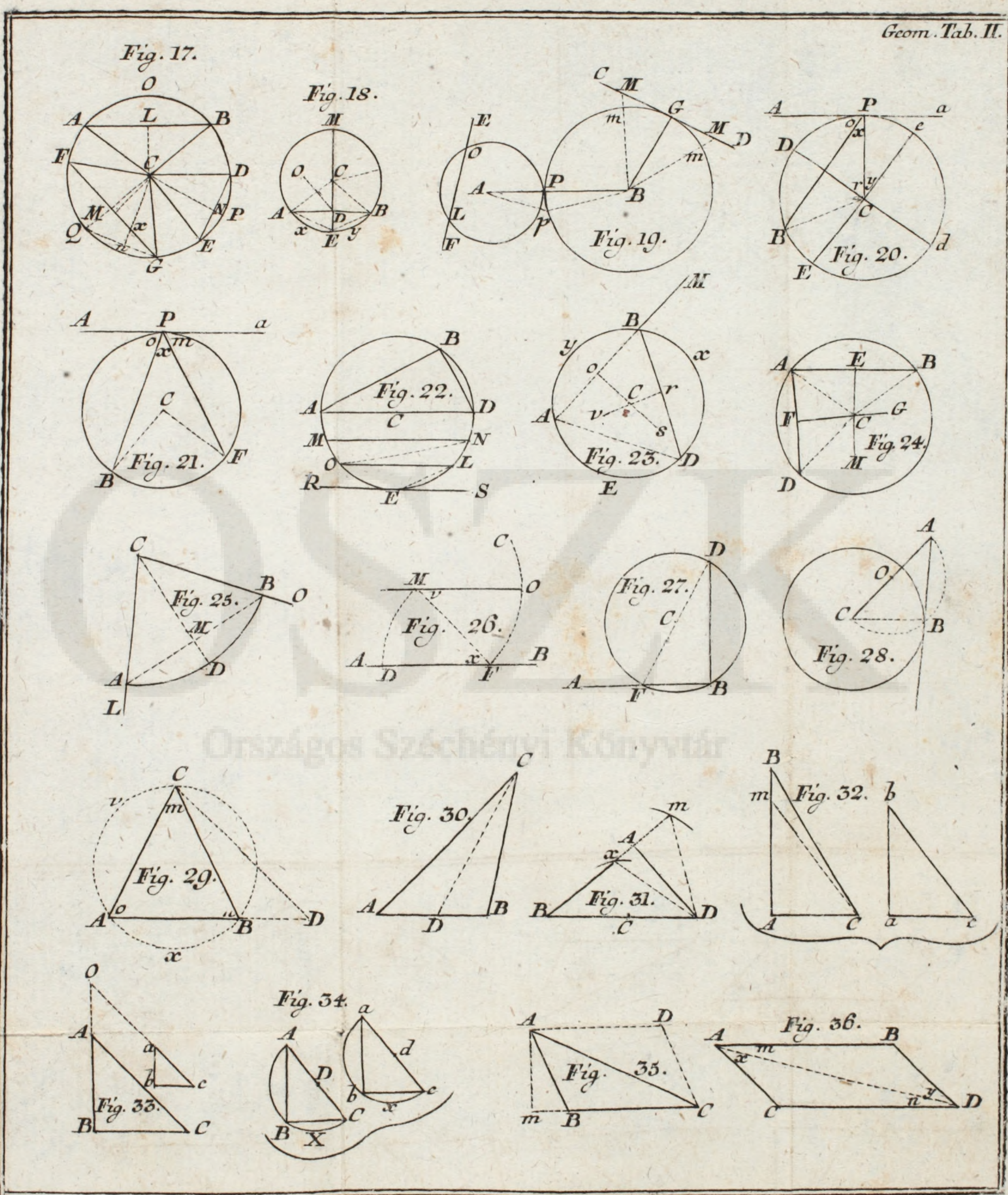
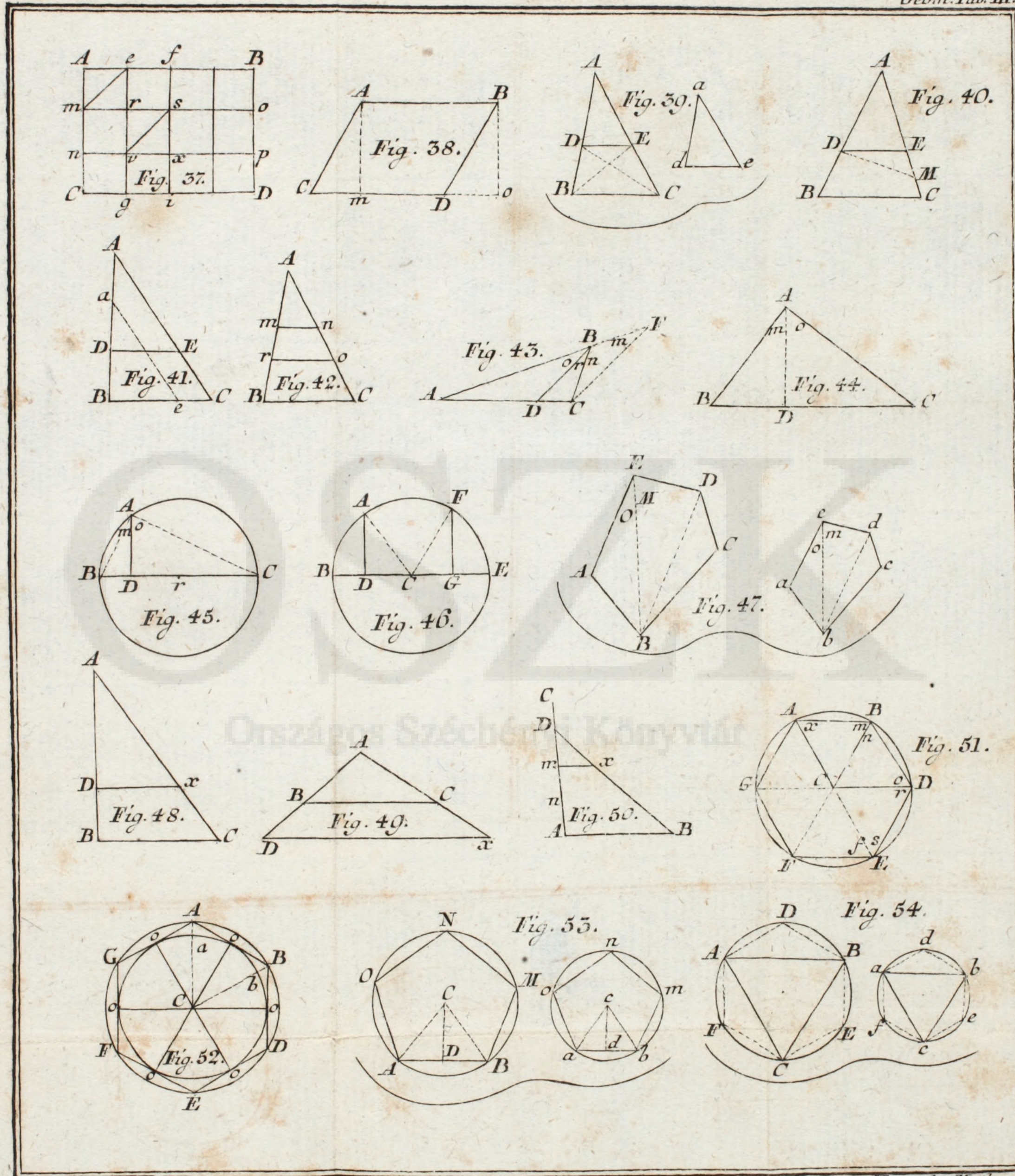
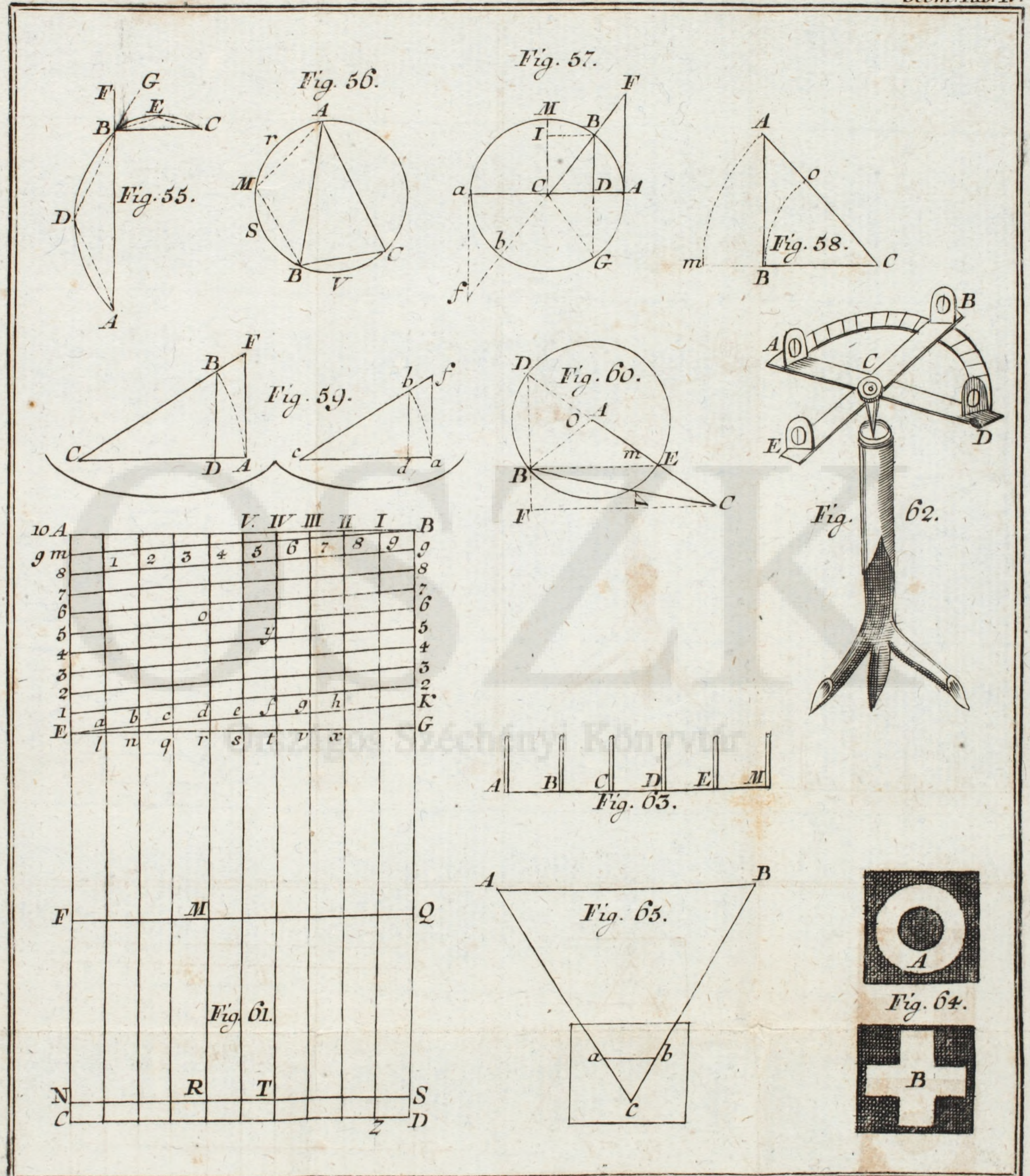


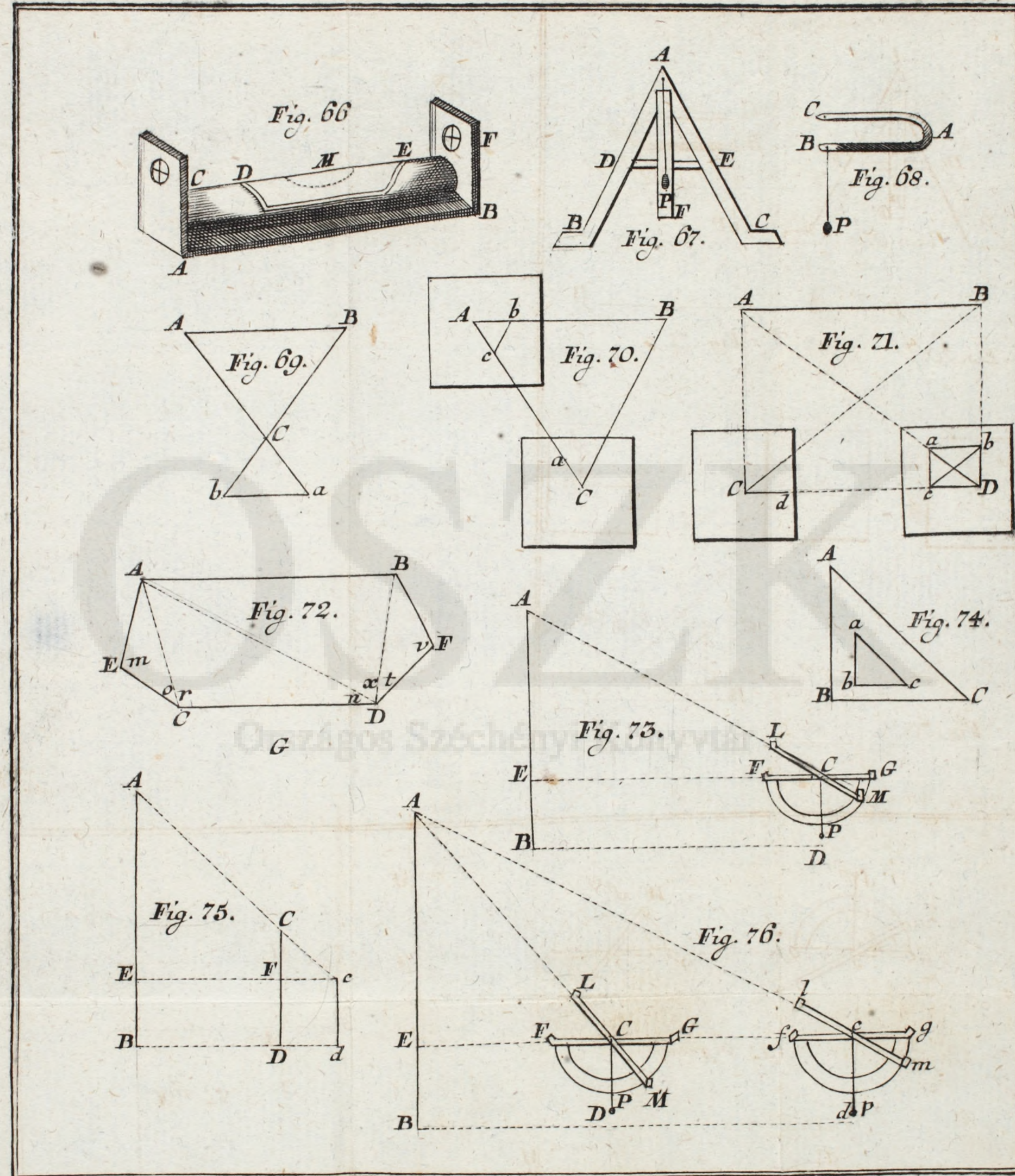
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.



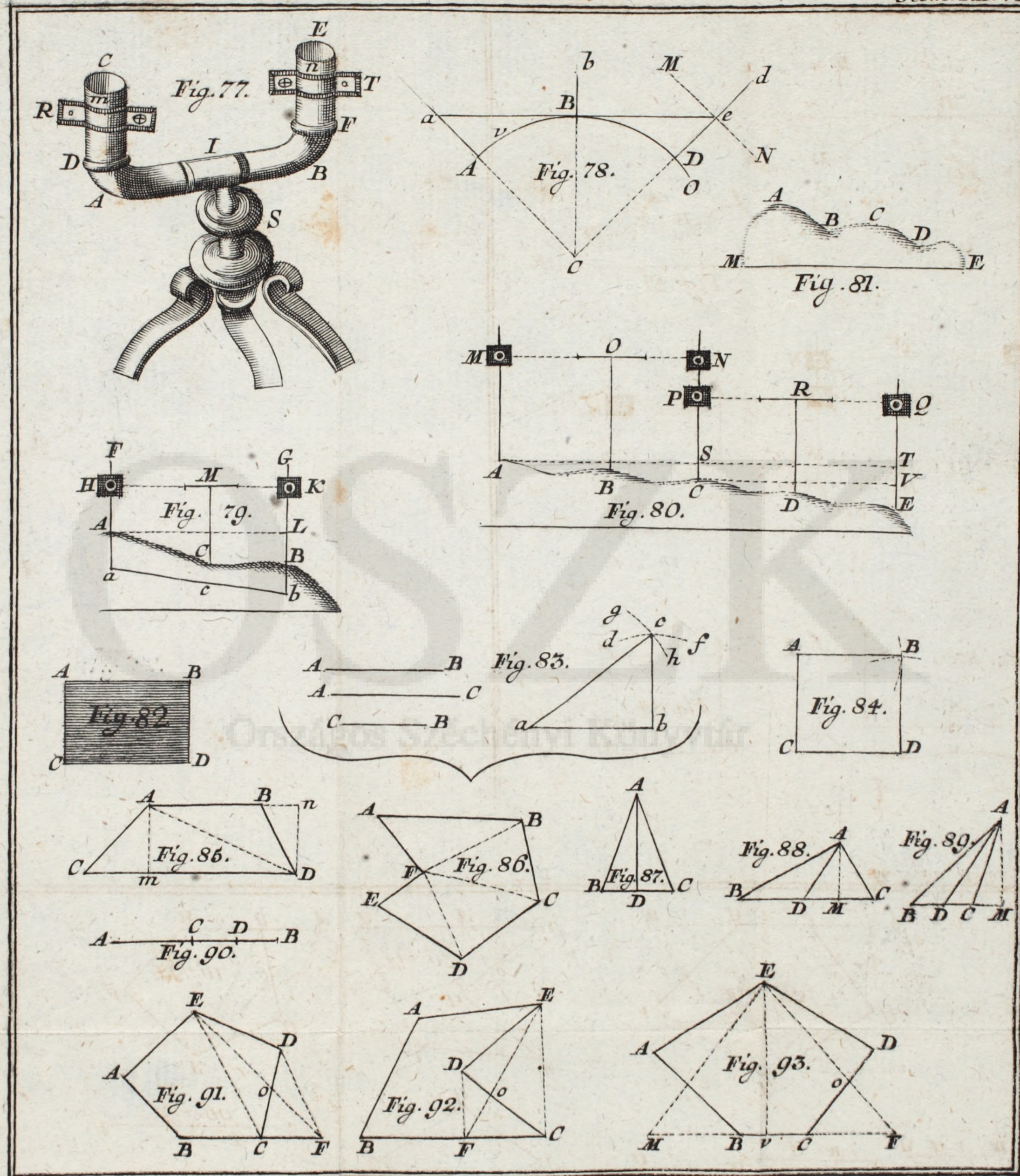
Horvath Mathes



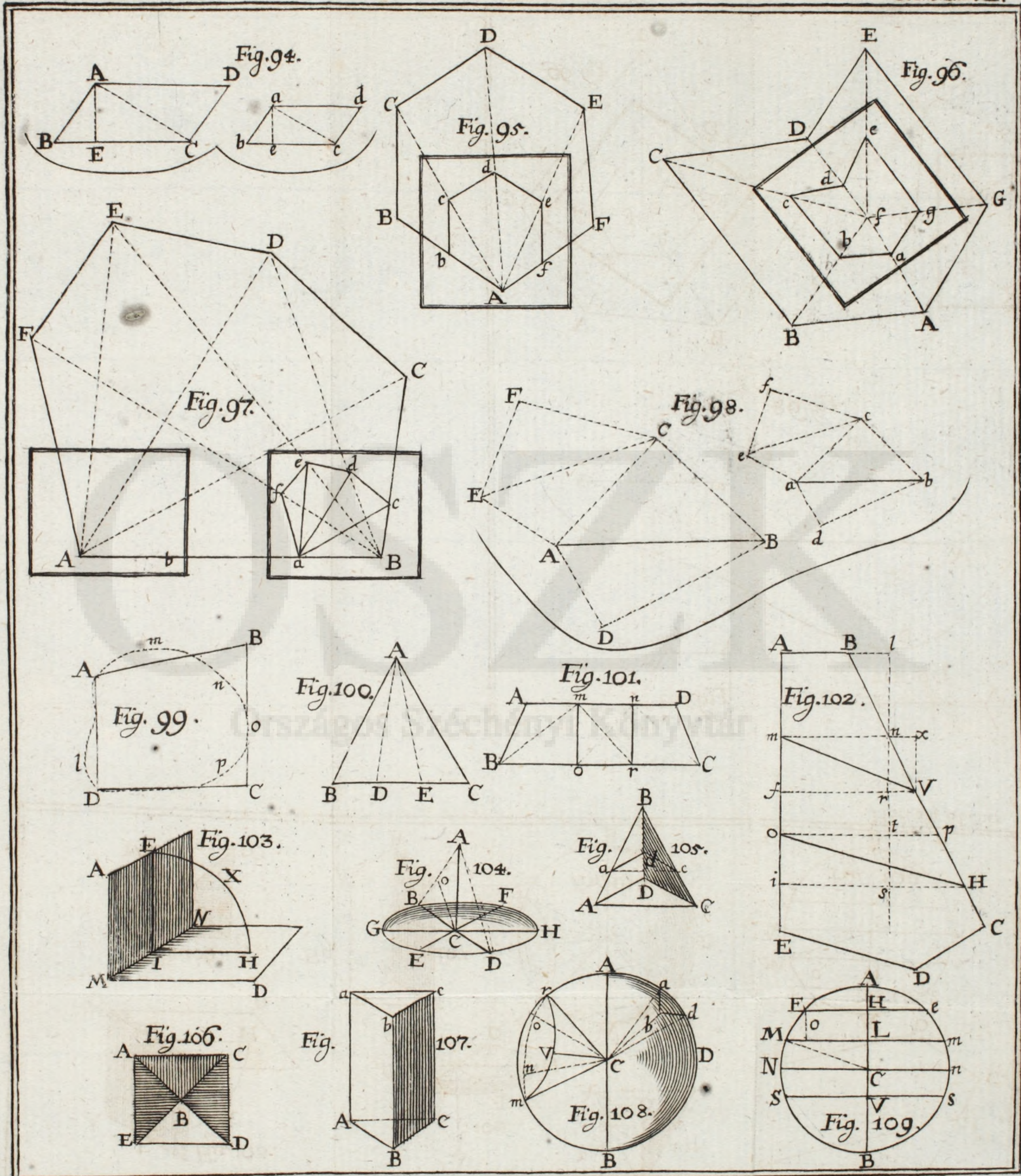
Horvath Mathe.



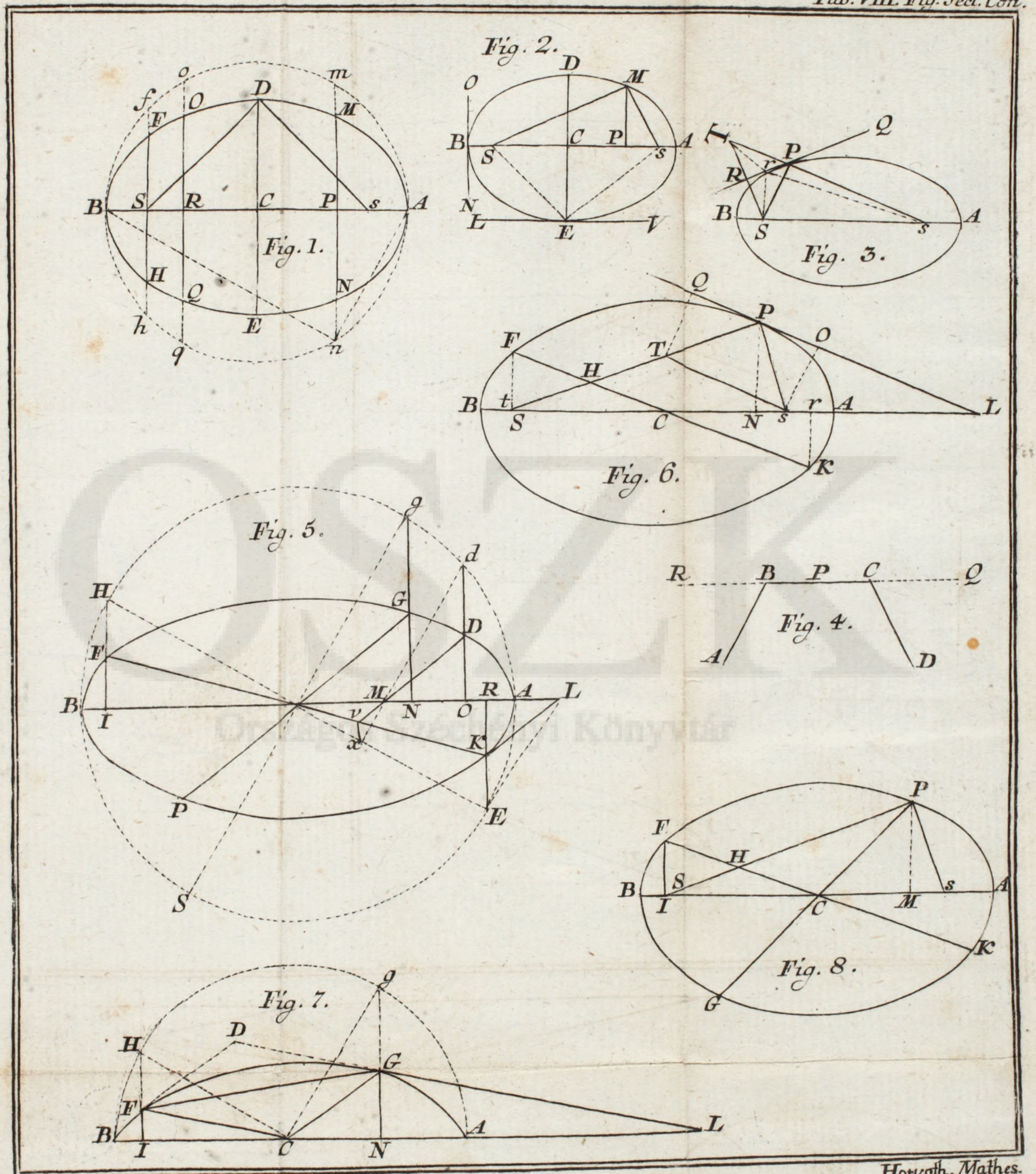
Horvath Mathes.



Horvath Mathes.



Horvath Mathes.



Horvath. Mathes.

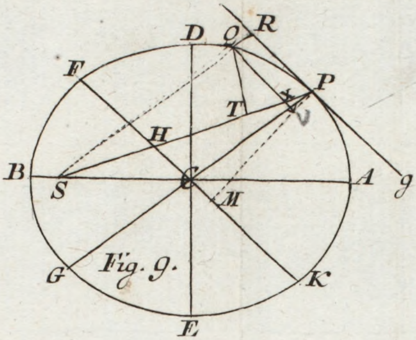


Fig. 9.

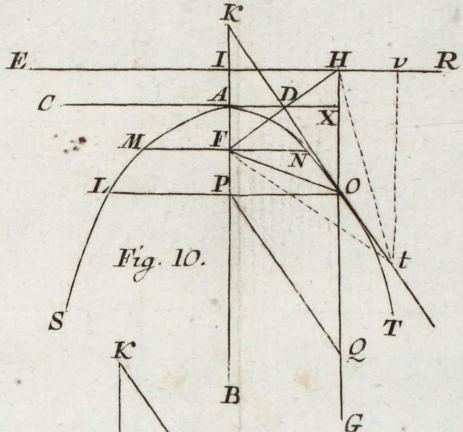


Fig. 10.

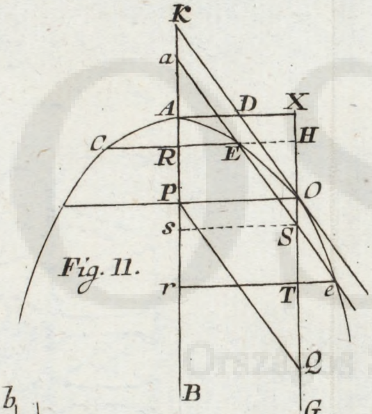


Fig. 11.

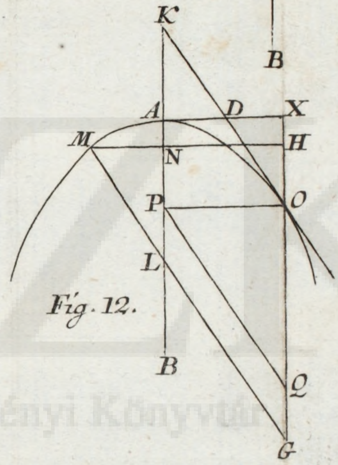


Fig. 12.

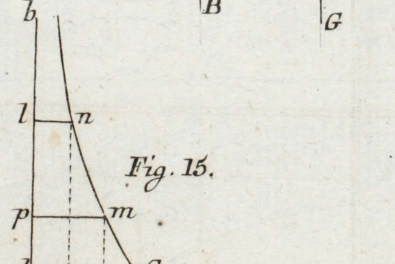


Fig. 15.

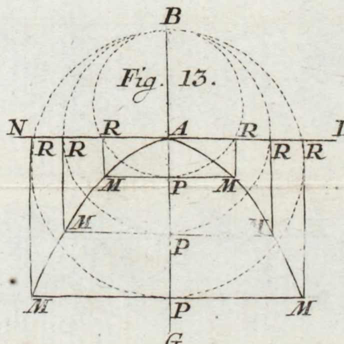


Fig. 13.

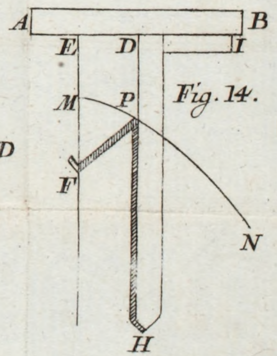


Fig. 14.

II