

BURJÁN GÁL EML



LEONARDO PISANO SZÁMLAI

BURJÁN-GÁL EMIL

# LEONARDO PISANO SZÁMAI

2017

GYERGYÓSZENTMIKLÓS

A borítót tervezte Burján Gál Enikő  
(Címlapon: a szerző kompozícióját ábrázoló fénykép; hátoldalon: Gál Éva Emese grafikája)

{emil.burjanganal.ro} {evaemese.burjanganal.ro} {eniko.burjanganal.ro}

© Burján-Gál Emil  
Gyergyószentmiklós (Gheorgheni)

© Lajos Árpád (Arad)

Kiadja a Mark House Kft.  
ISBN: 978-606-8666-56-3

Még-már a mesés múltban élt (a ferde torony megépülése előtt) egy Leonardo di Pisa, Leonardo Pisano, aki 1202-ben sokadszorra felfedezte azt, amit arany-metszésnek nevezünk, azaz Fibonacci számsornak.

Olvasható az interneten, hogy a Fibonacci-sorozat első két tagja a 0 és az 1. A következő tagok mindig az őket megelőző két tag összegével egyenlők. (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...)

A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjainak hányadosából képzett sorozat (1/1, 2/1, 3/2, 5/3, ...) határértéke éppen az aranymetszés aránya.

Még néhány adat:

>>A Fibonacci sorozat egyre nagyobb sorszámú elemeinek hányadosa egy állandó számhoz, az aranymetszéshez tart. Már az ókori görögök is ismerték, és aranymetszésnek, „isteni arálynak” hívták.<<

<https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Baum>.

.<<Hemachandra és mestere, Gopala azt is vizsgálta, hogy a rövid és hosszú szótagok miként töltenek ki egy adott időtartamot a szanszkrit költészetben. **Így fedezték fel a matematikai sorozatot, melynek első pontos említése 1150-ből való.** >>

<http://indiahangja.reblog.hu/fibonacci-sorozat-a-szamtani-sorozatok-kiralya>

Én magam is verselgetés közben vettem észre, hogy hány féle módon szakaszolható a (nemcsak felező) nyolcas, valamint a tíz szótagú sorok. Majd a 13 szótagú sorral is megismételtem. Utána következett az esztétika könyvemben közölt, alább idemásolt **számtömb**.

Ha egymás alá írjuk az összeadás-sorból képzett számsor első 15 elemét és egy mások oszlopba a köztük lévő arányszámot négy tizedesig kiszámolva, tehát öt számjegyet figyelembe véve, rájövünk, hogy éppen a tizenharmadik sorban áll be az 1,6180-as arány, ami a továbbiakban változatlan. Lehetne bárhol, de mintha a maga belső szerkezeti szépségére is figyelne. Sok szerkezeti érdekessége fedezhető fel az arany metszés sorozatnak, közülük a *Nyelv és esztétikum* című könyvemben ([mek.oszk.hu/14100/14145/index.phtml](http://mek.oszk.hu/14100/14145/index.phtml)) az alább következő keresztrejtvény szerűséget közöltem:

$$\begin{array}{l} 8+5+8=\mathbf{21}=1\times5+2\times8 \\ 13+8+13=\mathbf{34}=2\times5+3\times8 \\ 21+13+21=\mathbf{55}=3\times5+5\times8 \\ 34+21+34=\mathbf{89}=5\times5+8\times8 \\ 55+34+55=\mathbf{144}=8\times5+13\times8 \end{array}$$

Későbbi ismeretek felhasználásával a fenti számtömb így egészíthető ki:

$8+5+8=21$	$=1 \times 5 + 2 \times 8$	$=3 \times 5 + 2 \times 3$	$=3 \times 8 - 1 \times 3$
$.. 13+8+13=34$	$=2 \times 5 + 3 \times 8$	$=3 \times 8 + 2 \times 5$	$=5 \times 8 - 2 \times 3$
$21+13+21=55$	$=3 \times 5 + 5 \times 8$	$=3 \times 13 + 2 \times 8$	$=8 \times 8 - 3 \times 3$
$4+21+34=89$	$=5 \times 5 + 8 \times 8$	$=3 \times 21 + 2 \times 13$	$=13 \times 8 - 5 \times 3$
$55+34+55=144$	$=8 \times 5 + 13 \times 8$	$=3 \times 34 + 2 \times 21$	$=21 \times 8 - 8 \times 3$

Hasonló számtömbök keletkeznek a következő, nem csupán összeadásra épülő kombinációkból:

$2 \times 5 + 3 = 13$	$3 \times 5 + 1 = 2 \times 8$	$4 \times 5 + 1 = 21$	$5 \times 5 + 1 = 2 \times 13$
$2 \times 8 + 5 = 21$	$3 \times 8 + 2 = 2 \times 13$	$4 \times 8 + 2 = 34$	$5 \times 8 + 2 = 2 \times 21$
$2 \times 13 + 8 = 34$	$3 \times 13 + 3 = 2 \times 21$	$4 \times 13 + 3 = 55$	$5 \times 13 + 3 = 2 \times 34$
$2 \times 21 + 13 = 55$	$3 \times 21 + 5 = 2 \times 34$	$4 \times 21 + 5 = 89$	$5 \times 21 + 5 = 2 \times 55$
$2 \times 34 + 21 = 89$	$3 \times 34 + 8 = 2 \times 55$	$4 \times 34 + 8 = 144$	$5 \times 34 + 8 = 2 \times 89$

Aki az eredeti számsorban nem találja meg a számára kedves mennyiséget, vagy kerülni szeretné a 13-at, keresheti az alábbi, az eredeti számsorhoz hasonló kombinációkban:

$$\begin{aligned}
 \underline{5+1=6} &= 8-2= & 2 \times 3 \\
 8+2 &= \underline{10} = 13-3= & 2 \times 5 \\
 13+3 &= \underline{16} = 21-5= & 2 \times 8 = 3 \times 5 + 1 \\
 21+5 &= \underline{26} = 34-8= & 2 \times 13 = 5 \times 5 + 1 = 8 \times 3 + 2 \times 1 \\
 34+8 &= \underline{42} = 55-13= & 2 \times 21 = 8 \times 5 + 2 = 8 \times 5 + 2 \times 1 = 3 \times 13 + 3 = 2 \times 13 + 2 \times 8 = 34 + 8 \\
 55+13 &= \underline{68} = 89-21= & 2 \times 34 = 13 \times 5 + 3 = 8 \times 8 + 2 \times 2 = 3 \times 21 + 5 \\
 89+21 &= \underline{110} = 144-34= & 2 \times 55 = 21 \times 5 + 5 = 8 \times 13 + 2 \times 3 = 3 \times 34 + 8 \\
 144+34 &= \underline{178} = 233-55= & 2 \times 89 = 34 \times 5 + 8 = 8 \times 21 + 2 \times 5 = 3 \times 55 + 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{5+2=7} &= 8-1= & 13-2 \times 3= & 2 \times 3+1= & 21-13-1= & 2 \times 2+3 \\
 8+3 &= \underline{11} = 13-2= & 21-2 \times 5= & 2 \times 5+1= & 34-21-2= & 2 \times 3+5 \\
 13+5 &= \underline{18} = 21-3= & 34-2 \times 8= & 2 \times 8+2= & 55-34-3= & 2 \times 5+8 \\
 21+8 &= \underline{29} = 34-5= & 55-2 \times 13= & 2 \times 13+3= & 89-55-5= & 2 \times 8+13 \\
 34+13 &= \underline{47} = 55-8= & 89-2 \times 21= & 2 \times 21+5= & 144-89-8= & 2 \times 13+21 \\
 55+21 &= \underline{76} = 89-13= & 144-2 \times 34= & 2 \times 34+8= & 233-144-13= & 2 \times 21+34 \\
 89+34 &= \underline{123} = 144+21= & 233-2 \times 55= & 2 \times 55+13= & 377-233-21= & 2 \times 34+55
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
8+1=9= & 13-2 \times 2= & 3 \times 3=2 \times 5-1= & 21-8-2 \times 2 \\
13+2=15= & 21-2 \times 3= & 3 \times 5=2 \times 8-1= & 34-13-2 \times 3 \\
21+3=24= & 34-2 \times 5= & 3 \times 8=2 \times 13-2= & 55-21-2 \times 5 \\
34+5=39= & 55-2 \times 8= & 3 \times 13=2 \times 21-3= & 89-34-2 \times 8 \\
55+8=63= & 89-2 \times 13= & 3 \times 21=2 \times 34-5= & 144-55-2 \times 13 \\
89+13=102= & 144-2 \times 21=3 \times 34=2 \times 55-8= & 233-89-2 \times 21 & \\
144+21=165= & 233-2 \times 34=3 \times 55=2 \times 89-13= & 377-144-2 \times 34 & \\
233+34=267= & 377-2 \times 55=3 \times 89=2 \times 144-21= & 610-233-2 \times 55 & 
\end{array}$$

Vagy akár a következőkben:

$$\begin{array}{lll}
1+3+8=12 & 1+5+21=27 & 5+21+89=115 \\
2+5+13=20 & 2+8+34=44 & 8+34+144=186 \\
3+8+21=32 & 3+13+55=71 & 13+55+377=445 \\
5+13+34=52 & 5+21+89=115 & 21+89+610=720 \\
8+21+55=84 & 8+34+144=186 & 34+144+987=1165
\end{array}$$



$1+3=4$	$8+21=29$	$55+144=199$	$377+987=1364$
$2+5=7$	$13+34=47$	$89+233=322$	$610+1597=2207$
$3+8=11$	$21+55=76$	$144+377=521$	$987+2584=3571$
$5+13=18$	$34+89=123$	$233+610=843$	$1597+4181=5778$

$13+5-1=17$	$21+5-1=25$	$34+5-1=38$	$55+5-1=59$
$21+8-2=27$	$34+8-2=40$	$55+8-2=61$	$89+8-2=95$
$34+13-3=44$	$55+13-3=65$	$89+13-3=99$	$144+13-3=154$
$55+21-5=71$	$89+21-5=105$	$144+21-5=160$	$233+21-5=249$

Szintén számtömbök állíthatók össze az alábbi sorozatokból is:

$2 \times 2 + 1 = 5$	$3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$	$2 \times 5 - 2 = 8$	$2 \times 5 + 3 = 13$	$3 \times 2 - 1 = 5$
$2 \times 3 + 2 = 8$	$3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$	$2 \times 8 - 3 = 13$	$2 \times 8 + 5 = 21$	$3 \times 3 - 1 = 8$
$2 \times 5 + 3 = 13$	$3 \times 5 + 2 \times 3 = 21$	$2 \times 13 - 5 = 21$	$2 \times 13 + 8 = 34$	$3 \times 5 - 2 = 13$
$2 \times 8 + 5 = 21$	$3 \times 8 + 2 \times 5 = 34$	$2 \times 21 - 8 = 34$	$2 \times 21 + 13 = 55$	$3 \times 8 - 3 = 21$
$2 \times 13 + 8 = 34$	$3 \times 13 + 2 \times 8 = 55$	$2 \times 34 - 13 = 55$	$2 \times 34 + 21 = 89$	$3 \times 13 - 5 = 34$
$2 \times 21 + 13 = 55$	$3 \times 21 + 2 \times 13 = 89$	$2 \times 55 - 21 = 89$	$2 \times 55 + 34 = 144$	$3 \times 21 - 8 = 55$

**$3 \times 5 - 2 = 13$**   
 **$3 \times 8 - 3 = 21$**   
 **$3 \times 13 - 5 = 34$**   
 **$3 \times 21 - 8 = 55$**   
 **$3 \times 34 - 13 = 89$**   
 **$3 \times 55 - 21 = 144$**

**$5 \times 5 - 2 \times 2 = 21$**   
 **$5 \times 8 - 2 \times 3 = 34$**   
 **$5 \times 13 - 2 \times 5 = 55$**   
 **$5 \times 21 - 2 \times 8 = 89$**   
 **$5 \times 34 - 2 \times 13 = 144$**   
 **$5 \times 55 - 2 \times 21 = 233$**

**$8 \times 3 - 3 \times 1 = 21$**   
 **$8 \times 5 - 3 \times 2 = 34$**   
 **$8 \times 8 - 3 \times 3 = 55$**   
 **$8 \times 13 - 3 \times 5 = 89$**   
 **$8 \times 21 - 3 \times 8 = 144$**   
 **$8 \times 34 - 3 \times 13 = 233$**

**$13 \times 3 - 5 \times 1 = 34$**   
 **$13 \times 5 - 5 \times 2 = 55$**   
 **$13 \times 8 - 5 \times 3 = 89$**   
 **$13 \times 13 - 5 \times 5 = 144$**   
 **$13 \times 21 - 5 \times 8 = 233$**   
 **$13 \times 34 - 5 \times 13 = 377$**

**$1 + 8 = 3 \times 3 = 9$**   
 **$2 + 13 = 3 \times 5 = 15$**   
 **$3 + 21 = 3 \times 8 = 24$**   
 **$5 + 34 = 3 \times 13 = 39$**   
 **$8 + 55 = 3 \times 21 = 63$**   
 **$13 + 89 = 3 \times 34 = 102$**

**$34 - 8 = 2 \times 13 = 26$**   
 **$55 - 13 = 2 \times 21 = 42$**   
 **$89 - 21 = 2 \times 34 = 68$**   
 **$144 - 34 = 2 \times 55 = 110$**   
 **$233 - 55 = 2 \times 89 = 178$**   
 **$377 - 89 = 2 \times 144 = 288$**

**$13 - 3 = 2 \times 5 = 10$**   
 **$21 - 5 = 2 \times 8 = 16$**   
 **$34 - 8 = 2 \times 13 = 26$**   
 **$55 - 13 = 2 \times 21 = 42$**   
 **$89 - 21 = 2 \times 34 = 68$**   
 **$144 - 34 = 2 \times 55 = 110$**

Íme egy, a bemutatott előmunkálatokat előfeltételező számtömb, és az eredeti sorozat két, módosított változata:

$1+3 \times 2+2 \times 3=\mathbf{13}=3 \times 3+2 \times 2$	$1+2 \times 5=2+3 \times 3=3+8=\mathbf{11}=13-2$
$2+3 \times 3+2 \times 5=\mathbf{21}=3 \times 5+2 \times 3$	$2+2 \times 8=3+3 \times 5=5+13=\mathbf{18}=21-3$
$3+3 \times 5+2 \times 8=\mathbf{34}=3 \times 8+2 \times 5$	$3+2 \times 13=5+3 \times 8=8+21=\mathbf{29}=34-5$
$5+3 \times 8+2 \times 13=\mathbf{55}=3 \times 13+2 \times 8$	$5+2 \times 21=8+3 \times 13=13+34=\mathbf{47}=55-8$
$8+3 \times 13+2 \times 21=\mathbf{89}=3 \times 21+2 \times 13$	$8+2 \times 34=13+3 \times 21=21+55=\mathbf{74}=89-13$
$13+3 \times 21+2 \times 34=\mathbf{114}=3 \times 34+2 \times 21$	$13+2 \times 55=21+3 \times 34=34+89=\mathbf{123}=144-24$
$21+3 \times 34+2 \times 55=\mathbf{233}=3 \times 55+2 \times 34$	$21+2 \times 89=34+3 \times 55=55+144=\mathbf{199}=233-34$

Egy, az eredeti számsort kettővel beszorzó változat:

$$\begin{aligned}
 2 \times 8 &= 3 \times 5 + \mathbf{16} = 5 \times 3 + 1 = 2 \times 3 + 2 \times 5 \\
 2 \times 13 &= 3 \times 8 + 2 = \mathbf{26} = 5 \times 5 + 1 = 2 \times 5 + 2 \times 8 \\
 2 \times 21 &= 3 \times 13 + 3 = \mathbf{42} = 5 \times 8 + 2 = 2 \times 8 + 2 \times 13 \\
 2 \times 34 &= 3 \times 21 + 5 = \mathbf{68} = 5 \times 13 + 3 = 2 \times 13 + 2 \times 21 \\
 2 \times 55 &= 3 \times 34 + 8 = \mathbf{110} = 5 \times 21 + 5 = 2 \times 21 + 2 \times 34 \\
 2 \times 89 &= 5 \times 55 + 13 = \mathbf{178} = 5 \times 34 + 8 = 2 \times 34 + 2 \times 55
 \end{aligned}$$

Egyes kombinációk az eredeti számsor minden második elemét eredményezik, de néha felbukkan az őket kiegészítő párjuk is (ahol az összeadás helyett kivonás van):

$$\begin{aligned}3 \times 5 + 2 \times 3 &= \mathbf{21} \\5 \times 8 + 3 \times 5 &= \mathbf{55} \\8 \times 13 + 5 \times 8 &= \mathbf{144} \\13 \times 21 + 8 \times 13 &= \mathbf{377} \\21 \times 34 + 13 \times 21 &= \mathbf{987} \\34 \times 55 + 21 \times 34 &= \mathbf{2584}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \times 5 - 1 \times 2 &= \mathbf{13} \\5 \times 8 - 2 \times 3 &= \mathbf{34} \\8 \times 13 - 3 \times 5 &= \mathbf{89} \\13 \times 21 - 5 \times 8 &= \mathbf{233} \\21 \times 34 - 8 \times 13 &= \mathbf{610} \\34 \times 55 - 13 \times 21 &= \mathbf{1597}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 5 - 1 \times 2 &= \mathbf{8} \\3 \times 8 - 1 \times 3 &= \mathbf{21} \\5 \times 13 - 2 \times 5 &= \mathbf{55} \\8 \times 21 - 3 \times 8 &= \mathbf{144} \\13 \times 34 - 5 \times 13 &= \mathbf{377} \\21 \times 55 - 8 \times 21 &= \mathbf{987} \\34 \times 89 - 13 \times 34 &= \mathbf{2584}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \times 3 + 2 \times 5 &= \mathbf{13} \\2 \times 5 + 3 \times 8 &= \mathbf{34} \\3 \times 8 + 5 \times 13 &= \mathbf{89} \\5 \times 13 + 8 \times 21 &= \mathbf{233} \\8 \times 21 + 13 \times 34 &= \mathbf{610} \\13 \times 34 + 21 \times 55 &= \mathbf{1597} \\21 \times 55 + 34 \times 89 &= \mathbf{4181}\end{aligned}$$

Olvastam, hogy új sorozat alkotható csak az egyjegyű számainktól indítva:

$\underline{2}+2=\mathbf{4}=2\times 2$	$\underline{3}+3=\mathbf{6}=3\times 2$	$\underline{4}+4=\mathbf{8}=4\times 2$	$\underline{5}+5=\mathbf{10}=5\times 2$
$2+4=\mathbf{6}=2\times 3$	$3+6=\mathbf{9}=3\times 3$	$4+8=\mathbf{12}=4\times 3$	$5+10=\mathbf{15}=5\times 3$
$4+6=\mathbf{10}=2\times 5$	$6+9=\mathbf{15}=3\times 5$	$8+12=\mathbf{20}=4\times 5$	$10+15=\mathbf{25}=5\times 5$
$6+10=\mathbf{16}=2\times 8$	$9+15=\mathbf{24}=3\times 8$	$12+20=\mathbf{32}=4\times 8$	$15+25=\mathbf{40}=5\times 8$
$10+16=\mathbf{26}=2\times 13$	$15+24=\mathbf{39}=3\times 13$	$20+32=\mathbf{52}=4\times 13$	$25+35=\mathbf{65}=5\times 13$
$16+26=\mathbf{42}=2\times 21$	$24+39=\mathbf{63}=3\times 21$	$32+52=\mathbf{84}=4\times 21$	$5+65=\mathbf{105}=5\times 21$
$\underline{6}+6=\mathbf{12}=6\times 2$	$\underline{7}+7=\mathbf{14}=7\times 2$	$\underline{8}+8=\mathbf{16}=8\times 2$	$\underline{9}+9=\mathbf{18}=9\times 2$
$6+12=\mathbf{18}=6\times 3$	$7+14=\mathbf{21}=7\times 3$	$8+16=\mathbf{24}=8\times 3$	$9+18=\mathbf{27}=9\times 3$
$12+18=\mathbf{30}=6\times 5$	$14+21=\mathbf{35}=7\times 5$	$16+24=\mathbf{40}=8\times 5$	$18+27=\mathbf{45}=9\times 5$
$18+30=\mathbf{48}=6\times 8$	$21+35=\mathbf{56}=7\times 8$	$24+40=\mathbf{64}=8\times 8$	$27+45=\mathbf{72}=9\times 8$
$30+48=\mathbf{78}=6\times 13$	$35+56=\mathbf{91}=7\times 13$	$40+64=\mathbf{104}=8\times 13$	$45+72=\mathbf{117}=9\times 13$
$48+78=\mathbf{126}=6\times 21$	$56+91=\mathbf{147}=7\times 21$	$64+104=\mathbf{168}=8\times 21$	$72+117=\mathbf{189}=9\times 21$

Ha a fentiekben keletkezett eredményeket, vagyis a **4, 6, 10, 26, 42** (stb.) számokat táblázatba rendezzük, a következő összkép áll elő:

		(2)	(3)	(5)	(8)	(13)	(21)
		↑	↑	↑	↑	↑	↑
( <u>2</u> )	→	4	~ 6	~ 10	~ 16	~ 26	~ 42
( <u>3</u> )	→	6	~ 9	~ 15	~ 24	~ 39	~ 63
( <u>4</u> )	→	8	~ 12	~ 20	~ 32	~ 52	~ 84
( <u>5</u> )	→	10	~ 15	~ 25	~ 40	~ 65	~ 105
( <u>6</u> )	→	12	~ 18	~ 30	~ 48	~ 78	~ 126
( <u>7</u> )	→	14	~ 21	~ 35	~ 56	~ 91	~ 147
( <u>8</u> )	→	16	~ 24	~ 40	~ 64	~ 104	~ 168
( <u>9</u> )	→	18	~ 27	~ 45	~ 72	~ 117	~ 189

Két prímszámunk, a **7** ( $7=2^2+3=3^2-2$ ) és a **11** ( $11=2\times 5+1=3^2+2$ ), amely szerepel a **21**-ben és az **55**-ben, ugyancsak bevonható az aranymetszés sorozatba:

$7\times 8-1=$	<b>55</b>	$11\times 13+1=$	<b>144</b>	$1\times 11+3=2\times 7$	
$7\times 13-2=$	<b>89</b>	$11\times 21+2=$	<b>233</b>	$2\times 11-1=3\times 7$	
$7\times 21-3=$	<b>144</b>	$11\times 34+3=$	<b>377</b>	$3\times 11+2=5\times 7$	$(4\times 11-2=6\times 7=2\times 21)$
$7\times 34-5=$	<b>233</b>	$11\times 55+5=$	<b>610</b>	$5\times 11+1=8\times 7$	$(6\times 11-3=9\times 7=3\times 21)$
$7\times 55-8=$	<b>377</b>	$11\times 89+8=$	<b>987</b>	$8\times 11+3=13\times 7$	$(9\times 11-1=14\times 7)$

Egy harmadik prímszám, a **17** is (amely a 34 fele;  $17=2\times 8+1=3\times 5+2$ ) a fenti módon Fibonacci számsort képez. Ebben az esetben hagyományos sorozatot egy másik, már előbb előfordult rendhagyó sorozattal (4, 4, 8, 12, 20, 32 stb) együtt eredményez.

$2\times 17=34$		...	$21\times 17=357$	$(357+\underline{20}=\mathbf{377})$
$3\times 17=51$	$(51+\underline{4}=\mathbf{55})$		$34\times 17=578$	$(578+\underline{32}=\mathbf{610})$
$5\times 17=85$	$(85+\underline{4}=\mathbf{89})$		$55\times 17=935$	$(935+\underline{52}=\mathbf{987})$
$8\times 17=136$	$(136+\underline{8}=\mathbf{144})$		$89\times 17=1513$	$(1513+\underline{84}=\mathbf{1597})$
$13\times 17=221$	$(221+\underline{12}=\mathbf{233})...$		$144\times 17=2448$	$(2448+\underline{136}=\mathbf{2584})$

Ugyanez a módszer, vagyis a prímszám két oldalról való jellemzése a Fibonacci számokkal, érvényes a **19**-re ( $19=2 \times 8+3=3 \times 8-5$ ) is, továbbá a **13**-ra, valamint a rájuk következő **21**-re szintén:

$$(7=2^2+3=3^2-2);$$

$$(11=2 \times 5+1=3^2+2);$$

$$(17=2 \times 8+1=3 \times 5+2);$$

$$(19=2 \times 8+3=3 \times 8-5);$$

$$\mathbf{13}=1 \times 8+1 \times 5=2 \times 8-1 \times 3$$

$$\mathbf{21}=2 \times 8+1 \times 5=3 \times 8-1 \times 3$$

$$\mathbf{34}=3 \times 8+2 \times 5=5 \times 8-2 \times 3$$

$$\mathbf{55}=5 \times 8+3 \times 5=8 \times 8-3 \times 3$$

$$\mathbf{89}=8 \times 8+5 \times 5=13 \times 8-5 \times 3$$

A továbbiakban az összeadás-kivonás, szorzás után az osztás és a hatványra emelés valamint a gyökvonás is szerepet kap. Műtermem falán egy oldószerbe mártott, széles ecsettel húzott vízszintes csík ilyen szabályos lecsorgásokat eredményezett: három hosszú, két rövid, három hosszú, két rövid, három hosszú. Összesen **13** függőleges csík, ami így írható fel:  $\mathbf{2^2+3^2}$ . Sorozattá pedig a következő képpen fejleszthetők:

$$2^2+3^2=\mathbf{13}$$

$$3^2+5^2=\mathbf{34}$$

$$5^2+8^2=\mathbf{89} \dots$$

$$\dots 8^2+13^2=\mathbf{233}$$

$$13^2+21^2=\mathbf{610}$$

$$21^2+34^2=\mathbf{1597}$$



Az átugrott számokat előállítani így lehet:

$$\begin{array}{ll}
 5^2-2^2=\mathbf{21} & \dots 21^2-8^2=\mathbf{377} \\
 8^2-3^2=\mathbf{55} & 34^2-13^2=\mathbf{987} \\
 13^2-5^2=\mathbf{144} \dots & 55^2-21^2=\mathbf{2574}
 \end{array}$$

Létezik olyan számtömb-összefüggés, amelyben az eredeti számsor és az **átugrásos** egy-egy oszlopban egymás mellett van; köbre emeléskor kettős az átugrás:

$$\begin{array}{ll}
 3^2=\mathbf{8}+1^2 & 2^3+3^3-1^3=\mathbf{34} \\
 5^2=\mathbf{21}+2^2 & 3^3+5^3-2^3=\mathbf{144} \\
 8^2=\mathbf{55}+3^2 & 5^3+8^3-3^3=\mathbf{610} \\
 13^2=\mathbf{144}+5^2 & 8^3+13^3-5^3=\mathbf{2584} \\
 12^2=\mathbf{377}+8^2 & \\
 34^2=\mathbf{987}+13^2 & 
 \end{array}$$

(Csupa **páros** szám, megfelelve minden második is az.)

Abban az esetben, ha az eredeti sorból minden harmadik számot kiemeljük, három, egymást (eredetivé) kiegészítő sort kapunk (**kánonszerű visszatéréssel**), ezek belső összetettsége a következő eredményekkel szolgál:

~ 1 ~ 2 ~ 3 ~ 5 ~ 8 ~ 13 ~ 21 ~ 34 ~ 55 ~ 89 ~ 144 ~ 233 ~ 377 ~ 610 ~ 987 ~  
a b c d e f g h i j k l m n o

# # # # # # # # # #  
# # # # # # # #  
# # # # # # #

(#) (5-1=2x2)	# (8-2=2x3)	# (13-3=2x5)
<b>21</b> -5=2x8	<b>34</b> -8=2x13	55-13=2x <b>21</b>
<b>89</b> -21=2x34	<b>144</b> -34=2x55	233-55=2x <b>89</b>
<b>377</b> -89=2x144	<b>610</b> -144=2x233	987-233=2x <b>377</b>

Hogyha a fenti számtömbökben a kivonás jelét osztás jellel helyettesítjük, akkor (a zárójelben lévő sorok kivételével) mindenhol a 4.2-es arányszám jelentkezik, ami azonos az  $1,618^3$  hatvánnyal.

Kiemelhetjük a számsor minden negyedik elemét is, ekkor a közöttük jelentkező arányszám 6,853 lesz, ami azonos az  $1,618^4$  hatvánnyal. Ebben az átugrásos számsorban:  $1 \sim 8 \sim 55 \sim 377 \sim 2584$  (közöttük helyezkedik el szimmetria pontként a 3, a 21, a 144 és a 987) még a következő két szabályszerűség figyelhető meg:

$$\begin{array}{lll}
 1+8=9=3 \times 3; & 2+13=15=3 \times 5; & 3+21=24=3 \times 8; \\
 8+55=63=3 \times 21; & 13+89=102=3 \times 34; & 21+144=165=3 \times 55; \\
 55+377=432=3 \times 144; & 89+610=699=3 \times 233; & 144+987=1131=3 \times 377; \\
 377+2584=2961=3 \times 987; & 610+4187=4797=3 \times 1597; & 987+6765=7752=3 \times 2584;
 \end{array}$$

A második szabályszerűség:

$$\begin{array}{l}
 1+8=9=3^2; \\
 9+55=64=8^2; \\
 64+377=441=21^2; \\
 441+2584=3025=55^2.
 \end{array}$$

(Bizonyára létezik megoldás az átugrott számok hasonló tömbösítésére.)

Hogyha a számsor egymásra következő **négy** elemét vizsgáljuk, velük ilyen művelet végezhető: **1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34** sorozat **első négy** számából (**1, 2, 3, 5**) ha a legkisebbet összeszorozzuk a legnagyobbbal és ezt hozzáadjuk a második szám négyzetéhez, az eredmény azonos lesz a harmadik szám négyzetével:

$$1 \times 5 = 5; 5 + 2^2 = 3^2; \text{ vagyis } 5 + 4 = 9; 3 \times 3 = 9.$$

A következő négy kiválasztott számjegye a **8; 13; 21; 34**.

$$8 \times 34 = 272; 13^2 = 169; 272 + 169 = \mathbf{441}; 21^2 = \mathbf{441}.$$

(Algebrailag:  $a \times d + b^2 = c^2$ ; illetve  $c^2 - b^2 = a \times d$ ; vagy:  $c^2 = b^2 + a \times d$ . A korábban kialakított rendhagyó számsorok legtöbbje eleget tesz ennek a **négyszámjegye-szabály** nevű feltételnek, amely egy másik változatban is megjelenik:  $c^2 = (a^2 + d^2) : 2 - b^2$ . ~~ (Ha ismerné a szövegszerkesztő a gyökjelt, a  $c^2$  egyszerűsíthető lenne  $c$ -re.) ~~ Az első változatot elemzi a **Függelék**.)

Meglepő, hogy ez a két négyszámjegye-szabály érvényes a sorozat első 13 számjegyére is, ahol még nem jelentkezik az 1,61803398874989484820-as arány-

szám, ettől független, általánosabb érvényű, végtelen tizedes tört helyett egész számokat alkalmaz.

Hármas számcsoporthal végzett műveletek ilyen érdekességgel szolgálnak: a két szélső szorzata plusz-mínusz eggyel tér el a középső négyzetétől.

$$b^2 \pm 1 = a \times c; \quad \underline{2; 3; 5}. \quad (a=2; b=3; c=5) \quad 2 \times 5 = \mathbf{10}; \quad 3^2 = \mathbf{9}.$$

$$\text{Vagy: } \underline{3; 5; 8}. \quad (a=3; b=5; c=8) \quad 3 \times 8 = \mathbf{24}; \quad 5^2 = \mathbf{25}.$$

Ez a háromszámjegy-szabály. Számtömbbé alakítva a  $\pm 1$  kombinációk:

$2^2 - \mathbf{1} = 1 \times 3$	$2 \times 3 = \mathbf{6} = 1 \times 5 + \mathbf{1} = 3^2 - 2^2 + \mathbf{1}$
$3^2 + \mathbf{1} = 2 \times 5$	$3 \times 5 = \mathbf{15} = 2 \times 8 - \mathbf{1} = 5^2 - 3^2 - \mathbf{1}$
$5^2 - \mathbf{1} = 3 \times 8$	$5 \times 8 = \mathbf{40} = 3 \times 13 + \mathbf{1} = 8^2 - 5^2 + \mathbf{1}$
$8^2 + \mathbf{1} = 5 \times 13$	$8 \times 13 = \mathbf{104} = 5 \times 21 - \mathbf{1} = 13^2 - 8^2 - \mathbf{1}$
$13^2 - \mathbf{1} = 8 \times 21$	$13 \times 21 = \mathbf{273} = 8 \times 34 + \mathbf{1} = 21^2 - 13^2 + \mathbf{1}$

(Ennek a háromszámjegy-szabálynak a későbbiekben ilyen változatai lesznek:  $b^2 \pm n = a \times c$ .)

Visszatérve a korább bemutatott (első) **négyszámjegy-szabály** elemeihez, amint kiegészítjük **ötté**, következetesen jelentkezik az ismert  $\pm 1$ :

$$1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 5, 8; \quad \begin{array}{l} 1 \times 5 = 5 + \\ \underline{2^2 = 4} \\ 3^2 = 9 \end{array} \quad 9 = 1 \times 8 + 1$$

$$2, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 8, 13; \quad \begin{array}{l} 2 \times 8 = 16 + \\ \underline{3^2 = 9} \\ 5^2 = 25 \end{array} \quad 25 = 2 \times 13 - 1$$

$$3, \mathbf{5}, \mathbf{8}, 13, 21; \quad \begin{array}{l} 3 \times 13 = 39 + \\ \underline{5^2 = 25} \\ 8^2 = 64 \end{array} \quad 64 = 3 \times 21 + 1$$

$$5, \mathbf{8}, \mathbf{13}, 21, 34; \quad \begin{array}{l} 5 \times 21 = 105 + \\ \underline{8^2 = 64} \\ 13^2 = 169 \end{array} \quad 169 = 5 \times 34 - 1$$

Öt másik, pluszt-minuszt váltogató számtömb:

$$2 \times 13 = 3 \times 8 + 2$$

$$3 \times 21 = 5 \times 13 - 2$$

$$5 \times 34 = 8 \times 21 + 2$$

$$8 \times 55 = 13 \times 34 - 2$$

$$13 \times 89 = 21 \times 55 + 2$$

$$21 \times 144 = 34 \times 89 - 2$$

$$34 \times 233 = 55 \times 144 + 2$$

$$3 \times 8 = 2 \times 13 - 2$$

$$5 \times 13 = 3 \times 21 + 2$$

$$8 \times 21 = 5 \times 34 - 2$$

$$13 \times 34 = 8 \times 55 + 2$$

$$21 \times 55 = 13 \times 89 - 2$$

$$34 \times 89 = 21 \times 144 + 2$$

$$55 \times 144 = 34 \times 233 - 2$$

$$2 \times 3 - 1 = 1 \times 5$$

$$3 \times 5 + 1 = 2 \times 8$$

$$5 \times 8 - 1 = 3 \times 13$$

$$8 \times 13 + 1 = 5 \times 21$$

$$13 \times 21 - 1 = 8 \times 34$$

$$21 \times 34 + 1 = 13 \times 55$$

$$34 \times 55 - 1 = 21 \times 89$$

$$1 \times 5 + 1 = 2 \times 3$$

$$2 \times 8 - 1 = 3 \times 5$$

$$3 \times 13 + 1 = 5 \times 8$$

$$5 \times 21 - 1 = 8 \times 13$$

$$8 \times 34 + 1 = 13 \times 21$$

$$13 \times 55 - 1 = 21 \times 34$$

$$21 \times 89 + 1 = 34 \times 55$$

$$3 \times 5 + 1 = 2 \times 13$$

$$5 \times 8 + 2 = 2 \times 21$$

$$8 \times 13 - 2 = 3 \times 34$$

$$13 \times 21 + 2 = 5 \times 55$$

$$21 \times 34 - 2 = 8 \times 89$$

$$34 \times 55 + 2 = 13 \times 144$$

$$55 \times 89 - 2 = 21 \times 233$$

Léteznek még **±3**-as és **±5**-ös, de **±8**-as és **±13**-as sorozatok is:

$2 \times 8 - 3 = 1 \times 13$	$2 \times 13 - 5 = 1 \times 21$	$2 \times 21 - 8 = 1 \times 34$	$2 \times 21 + 13 = 1 \times 55$
$3 \times 13 + 3 = 2 \times 21$	$3 \times 21 + 5 = 2 \times 34$	$3 \times 34 + 8 = 2 \times 55$	$3 \times 34 - 13 = 1 \times 89$
$5 \times 21 - 3 = 3 \times 34$	$5 \times 34 - 5 = 3 \times 55$	$5 \times 55 - 8 = 3 \times 89$	$5 \times 55 + 13 = 2 \times 144$
$8 \times 34 + 3 = 5 \times 55$	$8 \times 55 + 5 = 5 \times 89$	$8 \times 89 + 8 = 5 \times 114$	$8 \times 89 - 13 = 3 \times 233$
$13 \times 55 - 3 = 8 \times 89$	$13 \times 89 - 5 = 8 \times 144$	$13 \times 144 - 8 = 8 \times 233$	$13 \times 144 + 13 = 5 \times 377$

Plusz-mínusz előjel-játék esetén csupán a négyzetre emelés műveletével két korábbi (és két másik, hasonló logikával játszadozó\*) számtömb összefésüléséből (és összefésülendéséből\*) az következik, hogy az eredeti Fibonacci-számsor lesz a végeredmény, a kisebb számok ilyen kombinációjából előállnak a nagyobb számok:

$2^2 + 1^2 = 5$	$\dots 8^2 - 3^2 = 55$	$* 2 \times 3^2 + 1 \times 3 = 21$	$* 2 \times 3^2 - 1 \times 5 = 13$
$3^2 - 1^2 = 8$	$8^2 + 5^2 = 89$	$* 2 \times 5^2 + 1 \times 5 = 55$	$* 2 \times 5^2 - 2 \times 8 = 34$
$3^2 + 2^2 = 13$	$13^2 - 5^2 = 144$	$* 2 \times 8^2 + 2 \times 8 = 144$	$* 2 \times 8^2 - 3 \times 13 = 89$
$5^2 - 2^2 = 21$	$13^2 + 8^2 = 233$	$* 2 \times 13^2 + 3 \times 13 = 377$	$* 2 \times 13^2 - 5 \times 21 = 233$
$5^2 + 3^2 = 34 \dots$	$21^2 - 8^2 = 377$	$* 2 \times 21^2 + 5 \times 21 = 987$	$* 2 \times 21^2 - 8 \times 34 = 610$



Hét elemre is alkalmazható ez az előjel-játék:  $3 \times 21 = \mathbf{63}$ ;  $8^2 = \mathbf{64}$ ;  $5 \times 13 = \mathbf{65}$ ;  $2 \times 34 = \mathbf{68}$ ; ebben az esetben a szorzatok közötti különbségekként megkapjuk a mínusz *egyet*, mínusz *kettőt*, mínusz *hármat*, mínusz *ötöt*, megjelenik a Fibonacci-számsor belső önmozgása, amely mintha egy szonáta dinamikáját kottázná:

$$8^2 - 1 = \underline{63} = 3 \times 21 = 5 \times 13 - 2 = 2 \times 34 - 5$$

Abban az esetben, ha a számsor minden második elemét vesszük sorra, azokból négyes csoportokat alkotva, ilyen szabályszerűség jelentkezik:

1~3~8~21:	$1 \times 21 + \mathbf{3} = 3 \times 8$	$21 - 1 = (8 - 3) \times \mathbf{4}$
2~5~13~34:	$2 \times 34 - \mathbf{3} = 5 \times 13$	$34 - 2 = (13 - 5) \times \mathbf{4}$
3~8~21~55:	$3 \times 55 + \mathbf{3} = 8 \times 21$	$55 - 3 = (21 - 8) \times \mathbf{4}$
5~13~34~89:	$5 \times 89 - \mathbf{3} = 13 \times 34$	$89 - 5 = (34 - 13) \times \mathbf{4}$
8~21~55~144:	$8 \times 144 + \mathbf{3} = 21 \times 55$	$144 - 8 = (55 - 21) \times \mathbf{4}$

Sorozatba illeszkedő számcsoporthoz két szám közötti összeadás és kivonás, mielőtt azok egy másik szinten is megismétlődnek, amint az az **5-1** és az **5+1**, valamint a **8-2** és a **8+2**, és az utánuk következőknél megfigyelhető:

$$2 \times 2 = 4 = 3 + 1 = \underline{5-1}$$

$$2 \times 3 = 6 = \underline{5+1} = \underline{\underline{8-2}}$$

$$2 \times 5 = 10 = \underline{\underline{8+2}} = 13-3$$

$$2 \times 8 = 16 = 13+3 = \underline{21-5}$$

$$2 \times 13 = 26 = \underline{21+5} = \underline{\underline{34-8}}$$

$$2 \times 21 = 42 = \underline{\underline{34+8}} = \underline{\underline{55-13}}$$

$$2 \times 34 = 68 = \underline{\underline{55+13}} = 89-21$$

Négyzetre emeléssel keletkező számtömbök:

$3^2 - 2^2 = 5 = 1 \times 5$	$13^2 - 2^2 = 169 - 4 = 165 = 3 \times 55$	$1^2 + 5^2 = 2 \times 13 = 2 \times (2^2 + 3^2)$
$5^2 - 3^2 = 16 = 2 \times 8$	$21^2 - 3^2 = 441 - 9 = 432 = 3 \times 144$	$2^2 + 8^2 = 2 \times 34 = 2 \times (3^2 + 5^2)$
$8^2 - 5^2 = 39 = 3 \times 13$	$34^2 - 5^2 = 1156 - 25 = 1131 = 3 \times 377$	$3^2 + 13^2 = 2 \times 89 = 2 \times (5^2 + 8^2)$
$13^2 - 8^2 = 105 = 5 \times 21$	$55^2 - 8^2 = 3025 - 64 = 2961 = 3 \times 987$	$5^2 + 21^2 = 2 \times 233 = 2 \times (8^2 + 13^2)$

Négyzetre emeléssel keletkező számsorokról a számtömbök kiterítésével kiderül, hogy soronként nézve rejtetten az eggyel való továbblépés érvényesül az ugrásos sorozatban, a következő képpen:  $(a^2+d^2):2=f$ ;  $(a^2+d^2):2=g$ ; majd:  $(a^2+d^2):2=h$ ;  $(a^2+d^2):2=i$ ;  $(a^2+d^2):2=j$ ; illetve a kiegészítő ugrásos sorozat esetében ilyen változatban:  $(c^2+a^2)=e$ ;  $(c^2+a^2)=f$ ;  $(c^2+a^2)=g$ ;  $(c^2+a^2)=h$ ;  $(c^2+a^2)=i$ ; vagyis:

1~2~3~5~8~13~21~34~55~89~114~233~377~610

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j)

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j)

$$(1+25):2=13$$

$$9-1=8$$

$$(4+64):2=34$$

$$25-4=21$$

$$(9+169):2=89$$

$$64-9=55$$

$$(25+441):2=233$$

$$169-25=144$$

$$(64+1156):2=610$$

$$441-64=377$$

Milyen eredményt kapunk, ha figyelembe vesszük és felhasználjuk az eddig átugrott, vagyis a Fibonacci-számsorból kimaradt számokat?

$2 \times 3 + 4 \times 5 = 2 \times \mathbf{13};$	vagy:	$2 \times 3 + 1 \times 7 = \mathbf{13};$
$3 \times 4 + 5 \times 6 = 2 \times \mathbf{21};$		$2 \times 3 + 6 \times 6 = 42 = 2 \times \mathbf{21};$
$2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 7 = 2 \times \mathbf{34};$		$2 \times 3 + 4 \times 7 = \mathbf{34};$
$3 \times 4 + 6 \times 7 + 7 \times 8 = 2 \times \mathbf{55};$		$2 \times 3 + 7 \times 7 = \mathbf{55}.$

„Kifordítottan” is szemügyre vehető a Fibonacci számsor, amennyiben a 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 számok közötti, „átugrott” mennyiségekre figyelünk.  $3+5=8$ . Itt kimaradt a 3 és az 5 közötti 4, ami a **8** fele. Következik az  $5+8=13$ . Kimaradt a 6 és a 7, ezek összege éppen **13**. Végül:  $8+13=21$ , a közöttük lévő  $9+10+11+12=42$ , ami a 21 kétszerese.  $13+21=34$ , ebben az esetben már 3,5 lesz az eredmény,  $119:3.5=34$ . Tovább folytatva a 0,5; 1; 2; 3,5-ös arányszámot, ekkor 6-ot, 10-et, 16,5-öt és 27-et kapunk. Ezek aránya: 1,75; 1,74; 1,66; 1,65; 1,63 lesz, tehát mind jobban közelítenek az „egy + négyzetgyök alatt öt osztva ketővel” = 1,618033988749894848-hoz.

Egy kis furcsaság. Ha az 1-, 2-, 3-, 5-, 8-ból az első három számot egybeírva hozzáadjuk a továbblépéssel keletkező másik három számhoz, megkapjuk a harmadik három elemből álló számcsoporthoz.

123+

235= (Ugyanezt „tudja” a  $1321+2134=3455$  illetve a  $2134+3455=5589$  is.)

358 (Meg lehet próbálni a  $12+23+35+58$ -cal.)

Van egy dallamunk, amelynek a szövege:

*„Cifra / palota / zöld az ablaka, / gyere ki te, tubarózsa, / vár az ibolya.”*

Itt öt részre tagolódnak a szöveg, a szótagok száma 23, ami az aranymetszést mintázó ütemezésből adódik össze:  $2+3+5+8+5=23$ . (Kifinomult stílusérzékre vall egyrészt az, hogy a második, a harmadik és az ötödik tag rímel, másrészt az, hogy mindhárom rímszó azonos szótagszámú.) A korábban előfordult változatok között nincs a 23-as, tehát a „gyakorlat” kibővíti az itteni kombinációk világát.

Különben maga a 23-as szám sorozata is meglepően furcsa sajátosságokat mutat. Ha leírjuk az eredeti Fibonacci-sor első 10 számát, látjuk, hogy abból öt egyjegyű és öt kétjegyű szám. Továbbá azt is, hogy az egyjegyű számok megismétlődnek a kétjegyűek első számjegyeként: **13 ~ 21 ~ 34 ~ 55 ~ 89**.

Ha az első öt számot:  $1 \sim 2 \sim 3 \sim 5 \sim 8$ , sorra hozzáadjuk (négyes ugrással) a második öthöz:  $13 \sim 21 \sim 34 \sim 55 \sim 89$ , megkapjuk az  $\sim 1+13=14 \sim 2+21=23 \sim 3+34=37 \sim 5+55=60 \sim 8+89=97 \sim$  sorozatot. (Ugyanez: 144; 233; 377.)

De kivonással a 23-tól és 14-től visszafelé felbukkan a  $\sim 9 \sim 5 \sim 4 \sim 1 \sim$  is, ami éppen a  $\sim 89 \sim 55 \sim 34 \sim$  és a 21 második számjegye. (Az 1-et és a 4-et megelőzi a „misztikus” 13-ból a *három*, amely sorozatot így indít:  $3+1=4$ ;  $1+4=5$ .)

Jellemző erre a tíz számból álló sorozatra ( $\sim 3 \sim 1 \sim 4 \sim 5 \sim 9 \sim 14 \sim 23 \sim 37 \sim 60 \sim 97 \sim$ ), hogy a négyszámjegy-szabály mindkét változatát kielégíti, illetve a háromszámjegy-szabály  $b^2 \pm 1 = a \times c$  képletét nem, csak annak  $b^2 \pm 11 = a \times c$  változatát. (Ez utóbbi  $\pm 11$  szintén kimaradt a korábbi levezetésekből.) Továbbá, hogyha nem az 1-gyel és 4-gyel, hanem az 1-nél nagyobb 3-mal indítjuk a sorozatot:  $3 \sim 1 \sim 4 \sim 5 \sim 9$ , az előbb említett három szabályszerűség mindenikét teljesíti a számsor. (Ez is igazolja általánosabb érvényűket.) Ellenőrizve a háromszámjegy-szabályt:

$$3 \times 4 = 12 = 1^2 + 11; \quad 1 \times 5 = 5 = 4^2 - 11; \quad 4 \times 9 = 36 = 5^2 + 11.$$

Megismételhető a leválasztásos módszer a háromjegyű számoknál is, ha kiemeljük az utolsó számjegyet, a  $144 \sim 233 \sim 377 \sim 610$  esetében kapjuk a  $4 \sim 3 \sim 7 \sim 10$  számokat. Alkalmazhatók a négyszámjegy-szabályok:

$$c^2 = a \times d + b^2 \rightarrow 4 \times 10 = \mathbf{40} + \frac{3 \times 3 = \mathbf{9}}{7 \times 7 = \mathbf{49}} \quad c^2 = (a^2 + d^2) : 2 - b^2 \rightarrow 7 \times 7 = \mathbf{49} = (16 + 100) : 2 - 9$$

Itt a háromszámjegy-szabály így módosul:  $c^2 \pm 19 = a \times c$ . (Ugyanezt a sorozatot kapjuk a kétjegyű számok számjegyeinek összeadásából is:  $1+3=\mathbf{4}$ ;  $2+1=\mathbf{3}$ ;  $3+4=\mathbf{7}$ ;  $5+5=\mathbf{10}$ ;  $8+9=\mathbf{17}$ .) Önmagukra még így reflektálnak a kétjegyű számok: amint kivonjuk a második számjegyeket az elsőkből, kapjuk a  $\sim -2 \sim -1 \sim 1 \sim 0 \sim 1 \sim$  sorozatot, itt is a háromszámjegy-szabály állandója:  $\pm 1$ .

De az utolsó kétjegyű (89) és az első háromjegyű (144) szám utolsó számjegyeivel is indítható sorozat:  $\mathbf{9} \sim \mathbf{4} \sim 13 \sim 17 \sim 30 \sim 47$ , érvényesek a négyszámjegy-szabályok, azonban a háromszámjegy-szabály állandója  $\pm 101$  lesz.

Összeadhatjuk a **89**-et követő első három háromjegyű szám számjegyeit:  $1+4+4=\mathbf{9}$ ;  $2+3+3=\mathbf{8}$ ;  $3+7+7=\mathbf{17}$ . ( $8+17=\mathbf{25}$ , stb.) Itt az állandó éppen:  $\pm \mathbf{89}$ . Amire még felteszi az aranykoronát, hogy  $17^2=\mathbf{289}$ ; továbbá az is, hogy  $67^2=\mathbf{4489}$ .

GYERGYÓSZENTMIKLÓS, 2017 szeptembere

*Burján-Gál Emil*

## FÜGGELÉK

**Lajos Árpád** aradi számítás technikus szíves munkájának köszönhető a már megismert „**négyszámjegy-szabály**” első változatának, az  $\mathbf{a \times d + b^2 = c^2}$  matematikai levezetése, bizonyítása, átirata (Facebookon közölve):

A bizonyítási eljárás egyik nagyon kézenfekvő módszere ebben a kérdéskörben a matematikai indukció. Ennek a módszertani algoritmusnak a lényege az, hogy ismerünk egy képletet, amit igaznak sejtünk és tudjuk, hogy bizonyos, véges megfigyelés alapján az  $i$ -dik elemre igaz a minta. Ezt ismerve, átlátva nekünk mindössze azt kell kétséget kizáróan kimutatnunk, hogy abból, hogy az  $i$ -dik elemre ráhúzható a minta kétséget kizáróan következik, hogy az  $i+1$  - dik elem-re is ráhúzható a minta. Ebben is szívesen segíték. Ha ezeket a képleteket kimutatjuk, akkor a dolgozat már tudományosan publikálható lesz és érdemes megkérni valakit, hogy nézze meg, hogy a talált minták és képletek közül melyek innovációk és melyek voltak már felfedezve öntől függetlenül egy másik kutató által. Ezek után érdemes publikálni egy tudományos lapban az eredményeket. Miután a képleteket előkészítettük egy koráb-



bi kutatótársamat megkérhetem, hogy nézzen utána a képletek egyediségének. A számtömbök jelenlegi formájukban megfigyelések és nem tudom, hogy így lehet-e publikálni. Úgy vélem, hogy először kell a képleteket felírni és kidolgozni, utána ellenőrizni kell, hogy mi innováció és ez után válik tudományos eredménnyé. Ezért arra kérném, hogy válasszon egy példát, egy számtömböt, amit kielemezhetünk közösen, hogy vigyük végig azon a folyamaton, amelyben megfigyelésből tudományos tényné válik. „*Kezdjük az egyszerűbb négyszámjegy-szabály képlettel*”. A szavakban leírt gondolati minta (azaz a „***négyszámjegy-szabály***”) így néz ki:

$$F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = F(i + 2) * F(i + 2)$$

az i-dik szám a sorozatban szorozva a hárommal utána következővel, majd ezt összeadva az utána következő négyzetével megkapjuk a kettővel utána levő négyzetét.

legyen  $i = 1$

$$F(i) = 1 \quad F(i + 1) = 2 \quad F(i + 2) = 3 \quad F(i + 3) = 5$$

$$F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = 1 * 5 + 2 * 2 = 9$$

$$F(i + 2) * F(i + 2) = 3 * 3 = 9$$

Most, hogy a mintát ismerjük, meg kell határozzuk, hogy milyen  $i$ -re várjuk el, hogy a minta működjön

Kipróbálom  $i = 2$ -re is

$$F(i) = 2 \quad F(i + 1) = 3 \quad F(i + 2) = 5 \quad F(i + 3) = 8$$

$$F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = 2 * 8 + 3 * 3 = 25$$

$$F(i + 2) * F(i + 2) = 25$$

Eddig biztató a minta. Létezik néhány szolid megfigyelés, amire működik a sejtésünk szerinti minta, azt akarjuk megvizsgálni, hogy ha  $F(i)$ -re igaz, akkor ebből következik-e, hogy  $F(i + 1)$  - re is igaz, mert ha ezt igazolni tudjuk, akkor a minta immár tudományos, általánosan érvényes tény a matematikai indukció elve alapján. A dolgozatban szerepel, hogy a Fibonacci sorozatról van szó abban a kontextusban, ha megemlíti, hogy  $F$ -el rövidíti a sorozat valahányadik elemét és azt, hogy a hányszorodik elem függvényparaméterként adjuk át, akkor úgy gondolom, hogy érthető.

Tudjuk, hogy  $F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = F(i + 2) * F(i + 2)$   
azt szeretnénk bizonyítani, hogy ebből az következik, hogy  
 $F(i + 1) * F(i + 4) + F(i + 2) * F(i + 2) = F(i + 3) * F(i + 3)$

Induljunk ki az egyenlet bal oldalából és jussunk arra, hogy megegyezik a jobb oldalal (bizonyíték) vagy különbözik tőle (cáfolat).

$$\begin{aligned} & F(i + 1) * F(i + 4) + F(i + 2) * F(i + 2) = \\ & = F(i + 1) * F(i + 4) + F(i) * (F(i + 3) + F(i + 1)) * F(i + 1) = \\ & = F(i + 1) * [F(i + 4) + F(i + 1)] + F(i) * F(i + 3) = \\ & = F(i + 1) * [F(i + 2) + F(i + 3) + F(i + 1)] + F(i) * F(i + 3) \\ & = F(i + 1) * [F(i + 3) + F(i + 3)] + F(i) * F(i + 3) \\ & = 2 * F(i + 1) * F(i + 3) + F(i) * F(i + 3) \\ & = F(i + 3) * [2 * F(i + 1) + F(i)] \\ & = F(i + 3) * [F(i + 1) + F(i + 1) + F(i)] \\ & = F(i + 3) * [F(i + 1) * F(i + 2)] \\ & = F(i + 3) * F(i + 3) \end{aligned}$$

**Ez az, amit bizonyítani akartunk.**

”.

Ugyanezzel a módszertannal valószínűleg az összes minta, vagy nagy többségük ellenőrizhető és bizonyítható vagy cáfolható.” (2017. Augusztus 13.)

(“Jól néz ki, majd még kell szerkeszteni rajta, de az nem sürgős.”)

A levezetéssel kapcsolatban röviden elmagyarázom a lépéseket.

Először felírtam a kiindulópontot, oda behelyettesítettem az  $F(i + 2) * F(i + 2)$  értékének ismert mintáját, ami a korábbi megfigyelések alapján tényszerű.  
Kiemeltem  $F(i + 1)$ -et felhasználva, hogy  $F(i + 2) + F(i + 1) = F(i + 3)$   
Összevettem  $F(i + 3) + F(i + 3) = 2F(i + 3)$  alapján kiemeltem  $F(i + 3)$ -at a nagy zárójelben  $2F(i + 1) + F(i) = F(i + 3)$ , hiszen  $F(i + 1) + F(i) = F(i + 2)$  és ezért  $2F(i + 1) + F(i) = F(i + 2) + F(i + 1) = F(i + 3)$   
Ezzel megkaptam, hogy a jobb oldali zárójel is  $F(i + 3)$ , azt szorozva a baloldali zárójellel,  $F(i + 3)$  - mal megkaptam az egyenlet jobb oldalát, tehát a sejtés beigazolódott, általános érvényű tudományos tény.

A többi esetben is hasonlóan kell eljárjunk,  $F(i)$  függvényében felírjuk a mintát, majd a megfigyelésekből kiindulva igazoljuk azt, hogy egy  $i$ -dik elemre tetszőleges  $i$  esetén ha teljesül, akkor a következőre is teljesül, ezzel egy végtelen következtetési láncsal a bizonyítás a teljes feladatteret bejárja.

Az sem baj, ha egy mintáról kiderül, hogy nem helyes, akkor viszont rá lehet mutatni, hogy az összefüggés csak látszólagos, az is fontos tudományos eredmény.  
A lényeg az, hogy minden felvetést górcső alá kell vennünk és bármi is legyen a kiértékelés, azzal hasznos munkát végeztünk.

$$\begin{aligned}
& F(i) \cdot F(i+3) + F^2(i+1) = F^2(i+2) \stackrel{3}{=} \\
& \stackrel{2}{=} F(i+1) \cdot F(i+4) + F^2(i+2) = F^2(i+3) \\
& F(i+1) \cdot F(i+4) + F^2(i+2) = \\
& = F(i+1) \cdot F(i+4) + F(i) \cdot F(i+3) + F^2(i+1) = \\
& = F(i+1) \cdot [F(i+4) + F(i+1)] + F(i) \cdot F(i+3) = \\
& = F(i+1) \cdot [F(i+2) + F(i+3) + F(i+1)] + F(i) \cdot F(i+3) = \\
& = F(i+1) \cdot [F(i+2) + F(i+3)] + F(i) \cdot F(i+3) = \\
& = 2 \cdot F(i+1) \cdot F(i+3) + F(i) \cdot F(i+3) = \\
& = F(i+3) \cdot [2 \cdot F(i+1) + F(i)] = \\
& = F(i+3) \cdot [F(i+1) + F(i+1) + F(i)] = \\
& = F(i+3) \cdot [F(i+1) + F(i+2)] = \\
& = F(i+3) \cdot F(i+3) = \\
& = F^2(i+3)
\end{aligned}$$

Megjelent a Mark House Kft. támogatásával.