

**Rácz István**



**Gyenge  
gravitációs hullámok  
leírása az általános  
relativitáselméletben**



**RÁCZ ISTVÁN**  
**Gyenge gravitációs hullámok leírása**  
**az általános relativitáselméletben**



**RÁCZ ISTVÁN**

**Gyenge gravitációs  
hullámok leírása  
az általános  
relativitáselméletben**



Nagykanizsa 2014

A kötet témaválasztásához kapcsolódó kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

ISBN: 978-963-9782-37-2

Kiadja:  
Czupi Kiadó  
8831 Nagykanizsa, Pityer u. 19.  
Tel: 93 320 766  
[www.czupi.hu](http://www.czupi.hu)

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>7</b>
<b>2. A linearizált elmélet</b>	<b>15</b>
2.1. A téridő mint entitás . . . . .	16
2.2. A linearizált elmélet . . . . .	18
2.3. A linearizált Einstein-egyenletek . . . . .	20
2.4. A Maxwell-elmélet . . . . .	21
2.5. A diffeomorfizmusinvariancia . . . . .	24
2.6. A Newtoni határeset . . . . .	28
2.7. A forrás leírása . . . . .	28
2.8. A próbatestek leírása . . . . .	31
<b>3. Gravitációs hullámok</b>	<b>35</b>
3.1. Az inhomogén egyenlet . . . . .	36
3.2. A forrásmentes eset . . . . .	41
3.2.1. A „sugárzási” mérték . . . . .	41
3.3. A geometriai szabadsági fokok . . . . .	45
3.4. „Sugárzási” mérték az általános esetben . . . . .	48
3.4.1. Az analóg elektrodinamikai probléma . . . . .	48

3.4.2.	A linearizált gravitáció esete . . . . .	51
3.4.3.	Az energia-impulzus tenzor felbontása . . . . .	53
3.4.4.	$\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ nem lokális . . . . .	54
3.4.5.	A linearizált Einstein-egyenletek sugárzási mértékben . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>A mérhető mennyiségek</b>	<b>57</b>
4.1.	Mértékválasztás . . . . .	58
4.2.	A megfigyelésről . . . . .	63
4.2.1.	A detektor válasza valódi források figyelembevételével . . . . .	67
	<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>71</b>



# 1. fejezet

## Bevezetés

Ha végigtekintünk az eddigi fizikai elméleteken, látható, hogy az általános relativitáselmélet – vagy ahogy szintén hivatkozhatunk rá, az Einstein-féle gravitációelmélet – a klasszikus fizika utolsó nagy átfogó elmélete. Kétségtárgy, hogy klasszikus abban az értelemben, hogy a kvantumfizika eszköztárára semmilyen formában nem épít. A klasszikus jelző ugyanakkor furcsán is hat, hiszen ez az elmélet alapjaiban rázza meg a korábbi térről és időről kialakított elképzeléseinket. A teret és az időt már a speciális relativitáselmélet egymásba ötvözte, és egy merőben új fogalommal, a téridővel helyettesítette. Az általános relativitáselmélet ennél lényegesen tovább megy, hiszen ebben az elméletben még Shakespeare<sup>1</sup> híres, „színház az egész világ” kijelentése is teljesen új megvilágításba kerül, mivel itt maga a színpad is „szereplővé”, azaz

---

<sup>1</sup>Hivatkozhatnánk a szofista Epiktetoszra ( Kr.u.50) is, aki Shakespeare híres mondatával teljesen összecsengően fogalmazott [10].

dinamikai entitássá válik. Az általános relativitáselmélet nem csupán az anyag történetének egy egyszer és mindenkorra rögzített geometriai háttéren történő leírására vállalkozik, hanem egy impozáns, a modern fizika elvárásaival is összeegyeztethető, kísérletek által nagyon meggyőzően alátámasztott modelljét kínálja az anyag és geometria kölcsönös meghatározottságának.

Jelen jegyzetünk éppen ezen impresszív elmélet linearizált változatának a bemutatására törekszik. Bár az elmélet közel száz évvel ezelőtt megszületett és Einstein alapgondolatai és a konstrukció lényegileg nem változatott, mi a modern differenciálgeometria eszköztárát felhasználva törekszünk a matematikai alapok ismertetésére. Nyilvánvaló az is, hogy egy olyan fizikai elmélet, amely azt állítja magáról, hogy a téridőt is mint dinamikai egységet kezeli, általános érdeklődésre tarthat számot. Szerencsére ennél sokkal több is igaz. Az elmélet a csillagászati megfigyelések magyarázatának keresése során nagyon sokszor érdekes és új megvilágítást biztosító értelmezéssel szolgált és szolgál napjainkban is.

El kell azonban azt is ismernünk, hogy az elmélet közel százéves története során többször is a mellőzöttség állapotába került. Ennek egyik oka, hogy az elmélet valóban precíz matematikai megfogalmazása a fizikus körökben szokatlan differenciálgeometriai ismeretek alkalmazásán alapul. Ezzel párhuzamosan az sem elhanyagolható, hogy a huszadik század első kétharmada kétségkívül a kvantummechanika és a kvantumtérelmélet virágkora, mely a legjelentősebb kutató műhelyeket az adott időszakban teljesen lekötötte. Mindezekhez járul még egy na-

gyon egyszerű érv. A természetben ismert négy alapvető kölcsönhatás közül – ezek a részecskék erős és gyenge kölcsönhatását leíró erők, valamint az elektromágneses és a gravitációs erők – kétségkívül a gravitációs kölcsönhatás a leggyengébb. Ezt az állítást érzékletesen támasztja alá az, ha két elektron esetében összehasonlítjuk a fellépő gravitációs és – az erősségi sorrendben éppen csak előtte álló elektromágneses kölcsönhatáshoz tartozó – Coulomb-erők nagyságát, mely során a meglepő

$$\frac{F_{gr}}{F_{el}} = \frac{G \frac{m^2}{r^2}}{k \frac{e^2}{r^2}} \sim 10^{-41} \quad (1.0.1)$$

érték adódik. Ennek fényében különösen meglepő lehet, éppen ezért érdemes is azt kiemelni, hogy az univerzum nagy léptékű struktúrájának kialakításában mégis ez a meglepően gyenge kölcsönhatás játssza a főszerepet. Ennek az egyik oka, hogy a két magerő nagyon rövid ( $< 10^{-13}$ ) hatótávolságú. Emellett, bár az elektromos kölcsönhatás a gravitációhoz hasonlóan végtelen hatótávolságú, elegendően nagy léptékben nézve az univerzum elektromosan semleges, azaz az azonos és ellentétes előjelű töltések között fellépő taszító és vonzó erők lényegében mindenhol közömbösítik egymást. A gravitáció esetében ezzel szemben nem léteznek ilyen ellentétes hatású töltések, így kozmológiai léptékben mérve egyedülálló univerzális és minden más kölcsönhatásnál számottevőbb erőhatást eredményezhet. A gravitáció azonban viszonylag rövid hatótávolságon is dominánssá válhat, mint például amikor a neutronok degenerációs nyomását produkáló legerősebb magerőket leküzdve lokális hatásként az elegendően nagy tömegű neutroncsil-

lagok feketelyukká válását idézheti elő.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy nemcsak az a fontos, hogy a gravitáció bizonyos helyzetekben a legjelentősebb kölcsönhatássá válik. Az is fontos jellemzője, hogy minden részecskére, annak további anyagi jellemzőitől függetlenül, egyformán fejti ki hatását. Feltehetőleg Galileitől származik az a felismerés, hogy a gravitáció a testek tömegétől függetlenül, egyformán fejti ki hatását. Ezt a felismerést azzal kiegészítve, hogy az anyagi minőség sem játszik szerepet, Eötvös Loránd, a róla elnevezett ingával a 19. század végére nagyon nagy pontossággal kísérletileg is ellenőrizte. „Ha lenne eltérés a különböző anyagok vonzásában, akkor annak  $5 \cdot 10^{-9}$  értéknél kisebbnek kellene lennie.” Ezek a mérések alapvető szerepet játszottak abban, hogy Einstein az új gravitációelmélet megalkotása során nem egyszerűen a Newton-féle elmélet relativizált változatát kereste, hanem annál egy sokkal impozánsabb geometrizált elméletet dolgozott ki. Einstein elméletében a gravitációs kölcsönhatást a téridő geometriájának nem triviális görbült jellegével helyettesítette, ahol a görbültség mértékét az anyag eloszlása és mozgásállapota határozza meg.

Ez az az elmélet, amelyben elegáns formában ölt testet Bolyai, Riemann, Poincaré és Mach azon a 19. században megfogalmazott vélekedése, melyet a tudománytörténet Mach-elvként ismer, hogy a fizikai valóságot valamely nemeuklideszi geometria írja le és a lokálisan tapasztalható jelenségek lényegében mindig az univerzum egésze által meghatározottak.

Az elmélet első kísérleti bizonyítéka az Eddington által 1919-ben

vezetett csillagászati megfigyelések tapasztalata, miszerint a fénysugarak az elmélet által megjósolt mértékben hajlanak el erős „gravitációs térben”.

Ennek a megfigyelésnek két fontos következménye volt. Az első az, hogy megerősítette az elmélet alapfeltevését, hogy a téridő geometriája nem sík (és nem is konformisan sík). A másik következmény a téridőt alkotó események lehetséges oksági relációit érinti. Mivel Einstein relativitáselmélete alapján semmilyen fizikai hatás nem terjedhet a vákuumbeli fény sebességénél gyorsabban, az, hogy a gravitáció Einstein-féle elméletében a fényjelek pályája megváltozhat a gravitáció hatására, azt jelenti, hogy a görbült téridőben az oksági relációk is közvetve az anyag eloszlása és mozgása által meghatározottak.

A gravitációnak éppen ez a tulajdonsága vezet az egyik legmeglepőbb probléma köréhez, a feketelyukak létezéséhez. Elképzelhető ugyanis az anyag olyan nagy mértékű koncentrációja, mely az adott térrészből még a fényjelek kijutását is képes megakadályozni. Ha nem juthat onnan ki fény, akkor fekete. Érdekes észben tartani, hogy ez a tulajdonság még nem zárja ki, hogy a környezetében lévő anyagot felszippanató feketelyuk, az adott időszakban, csillagászati megfigyelők számára ne jelenjen meg úgy, mint az égbolt éppen legfényesebben tündöklő objektuma.

Visszatérve a tudománytörténeti tényekhez érdemes azt is megemlíteni, hogy ‘60-as évek során jelentősen megnőtt a fizikusok érdeklődése az általános relativitáselmélet iránt. Nem egyszerű véletlennek köszönhető ez az odafordulás sem. Az 1950-es évek végétől kezdődően egy

sor olyan csillagászati megfigyelés történt – a kvazárok, kicsiny méretű röntgenforrások, pulzárok észlelése –, melyek magyarázata elképzelhetetlennek látszott (ma is az) a gravitációs összeomlási folyamatok során felszabaduló irdatlan mennyiségű energia forrásának megértése nélkül. Ezen megfigyelések megmagyarázásához az erős gravitációs terek leírására alkalmas elméletre volt szükség – ilyen az általános relativitáselmélet is –, amely egyszerre képes leírni a gravitációs összeomlási folyamatot, az annak során keltett energiát valamint annak téridőbeli transzportját, illetve a folyamat során kialakuló feketelyuk tulajdonságait.

A lokalizált csillagszerű objektumok leírása mellett minden valamit önmagára adó gravitációelmélet törekszik az univerzum tulajdonságainak is magyarázatát adni. Einstein az univerzum látszólagos időben állandó jellegéből kiindulva egy statikus univerzum modellt tartott adekvátnak. Lényegében ez vezette el a róla elnevezett Einstein-féle statikus kozmológiai modell kidolgozásához, melynek során bevezette a kozmológiai állandót, melyet idősebb korában egyik legnagyobb tudományos tévedésének tekintett.

Érdemes felidézni, hogy a csillagászati megfigyelések még 1912-ben is éppen csak elvétve jelezték azt, hogy vannak olyan galaxisok, amelyek igen nagy  $\sim 200$  km/s sebességgel távolodni látszanak. Hubble csak 1929-ben tette közzé híres dolgozatát [13], amelyben egy hatmillió fényév sugarú gömbön belül végzett szisztematikus mérésekre alapozva állította azt, hogy az galaxisok a tőlünk mért távolsággal arányos, igen nagy sebességgel távolodnak.

Mindeközben 1922-ben az Einstein-elméletet vizsgálva a Kazanyi Egyetemen, teljes tudományos elszigeteltségben Alexander Friedmann [5] talált olyan kozmológiai modellt, amelyben természetes módon jelenik meg a táguló világegyetem és a távolsággal arányos távolodási sebesség koncepciója. Ezt azonban akkor a megfigyelések hiánya folytán egyszerűen elfelejtették, majd – már a megfigyelések ösztönző hatásának köszönhetően Lemaître, Robertson és Walker újra felfedezték [17, 30, 31, 32, 38]. 1948-ban Gamow és munkatársai már a táguló univerzumot kezdetben kitöltő sugárzás maradványainak keresésére tesznek javaslatot. Ennek megtalálása, a mikrohullámú háttérsugárzás Penzias és Wilson [23, 24] általi véletlen felfedezése szintén jelentősen hozzájárult a relativitáselméleti kutatások megerősödéséhez.

Jelen rövid jegyzetünk napjaink legfontosabb gravitációelmélethez kapcsolódó kísérletének elméleti vonatkozásait, azaz a gravitációs hullámok gyenge hullámok esetén érvényes leírását adjuk meg. Először a linearizált elmélet alapjait mutatjuk be. Ez lehetőséget ad arra, hogy a Newton-elméletet, az Einstein-elmélet olyan határeseteként értelmezhessük, amelyben a gravitációs hatások gyengék, továbbá a mozgások lassúak. Ezt követi a gyenge gravitációs hullámok, a sugárzási szabadsági fokok, valamint a gravitációshullám-detektorok mértékinvariáns mennyiségeken keresztül kifejezett mérési elvének bemutatása. Végül arra is rámutatunk, hogy a források szisztematikus figyelembevétele a szokásos hullámjelenségek mellett egy olyan izotrop geometriai változást is eredményez, ami további érdekes fizikai jelenségek vizsgálatát teszi szükségessé.





## 2. fejezet

# A linearizált Einstein-elmélet

Ahogy azt a bevezető részben említettük, a gravitáció napjainkban elfogadott legpontosabb elmélete az Einstein-féle általános relativitáselmélet. Az Einstein-elmélet a gravitáció egy olyan geometrizált elmélete, melyben a gravitációs hatások a téridő geometriájának görbültségén keresztül jeleníthetők meg. Ebben az elméletben nincs a korábbi elméletekre jellemző egyszer és mindenkorra adott fix színpad – tér és idő –, amelyen a rajta értelmezett mezők történetét írjuk le. Ehelyett a világmindenségben található anyag elhelyezkedése és mozgása határozza meg a téridő geometriáját, ugyanakkor a kozmoszt felépítő anyag fejlődése is csak ezen az időben és térben is változó geometria fejlődésével együtt írható le.

## 2.1. A téridő mint fizikai és matematikai entitás

A speciális és általános relativitáselmélet megértésében a legfőbb nehézséget a térről és időről korábban kialakított elképzelések megszokásokon alapuló helytelen alkalmazása okozza. Éppen ezért fontos annak megfogalmazása, hogy mit is értünk a teret és időt sajátos módon egymásba ötvöző téridőn.

### 2.1.1. Definíció. A fizikus megfogalmazás:

*Az Einstein-elméletben a téridőről feltesszük, hogy megjeleníti a vizsgálatra kiválasztott fizikai rendszer teljes történetét, azaz tartalmazza az ahhoz kapcsolódó összes lehetséges múlt-, jelen- és jövőbeli eseményt.*

A klasszikus fizikában esemény például két próbatest ütközése, vagy ahogy Dede Miklós volt kiváló tanárunk fogalmazott „... az amikor egy csillag pontszerű képe éppen áthalad a távcső vonalkeresztjén.” Ennek megfelelően hallgatólagosan mindig feltételezzük, hogy egy klasszikus esemény belső struktúra nélküli, mind térben, mind pedig időben pontszerű, mely a geometriai pont fogalmának kialakulásához hasonló absztrakció eredményeként jött létre.

A fentiek értelmében egy-egy téridő mindig tartalmazza a vizsgált fizikai elrendezéshez tartozó összes lehetséges múlt-, jelen- és jövőbeli eseményt. Ugyanakkor minden az események összességét megjelenítő téridősokaság tetszőleges pontjából indítható a téridőben mindenütt kauzális érintővektorral rendelkező görbe. Ezek a görbék az elvileg lehetséges megfigyelők világvonalai. Mivel egy megfigyelő által megfigyel-

hető események összessége a megfigyelő történetét ábrázoló világvonala kauzális múltjával esik egybe, az általunk alkalmazott megközelítésben az *elvileg megfigyelhető* és a *lehetséges* események halmaza bármely téridőmodellen belül egybeesik.

Ha az elmélet eredeti kereteit átlépve valaki a kvantumviselkedésről is számot kívánna adni, akkor első körben azt kellene megmondania, hogy milyen értelemben használja a kvantáltság fogalmát. Mivel jelenleg olyan elmélet nincs, amelyet kvantumgravitációnak tekinthetnénk<sup>1</sup>, egyedül a kvantumosan viselkedő részecskék kapcsán vizsgálható következetesen az a kérdés is, hogyan változna meg a fentebb említett idealizáció folytán kialakult klasszikus eseményfogalom. Amint arra Wigner már 1957-ben rámutatott [40], a kvantummechanika korlátokat szab a klasszikus eseményfogalmunkon alapuló téridőkonceptciónak is. Konkrétabban, Wigner úgy érvelt, hogy két tömeges elemi részecske ütközése – bár sokkal adekvátabb azok egymáson történő szóródásáról beszélni – szükségszerűen nem pontszerű, hiszen ezen kvantumos esemény azzal a kiterjedt téridőtartománnyal kapcsolható össze, amelyben a résztvevő részecskék megtalálási valószínűségének szorzata lényegesen nagyobb nullánál.

Mindezen fizikus motiváció után érdemes azt is rögzíteni, hogy matematikai értelemben mit értünk téridőn.

---

<sup>1</sup>Még abban sincs egyetértés, hogy melyik matematikai szinten kellene végrehajtani a kvantálást. A metrikát, a kauzális, vagy vele ekvivalens kauzális szerkezetet kellene esetleg kvantált módon kezelni, vagy sokkal mélyebbről építkezve magát a klasszikus eseményteret is spinhálózatokon értelmezett kvantumelmélet effektív alacsony energiás határeseteként kellene értelmeznünk.

**2.1.2. Definíció. A matematikus megfogalmazás:**

*Téridőn egy olyan  $(M, g_{ab})$  párt értünk, ahol  $M$  összefüggő, négydimenziós, Hausdorff, parakompakt, irányítható  $C^\infty$  differenciálható sokaság,  $g_{ab}$  pedig egy Lorentz-szignatúrájú metrika  $M$ -en. A téridőről feltesszük, hogy időirányítható, és egy időirányítást ki is választottunk rajta.*

Természetesen az imént megfogalmazott definícióban szereplő fogalmak meglehetősen technikaiak, a topológia és a differenciálgeometria fogalomtárához tartoznak. Egy későbbiekben megjelenő könyvünk első felének nagy része éppen ezeknek és a kapcsolódó fogalmak pontos magyarázatát, illetve használatuk adekvátságát igyekszik majd megadni, illetve alátámasztani.

**2.2. A linearizált elmélet**

Az Einstein-féle gravitációelméletben nincs gravitációs mező, azaz a gravitációs jelenségek teljes egészében a téridő geometriájának helytől és időtől való függése, pontosabban fogalmazva téridőfüggése révén válnak magyarázhatóvá. Ennek az elméletnek most egy olyan határesetét fogjuk tekinteni, amelyben a gravitáció „gyenge”. Ez az általános relativitáselméletben pontosan azt jelenti, hogy a téridő geometriája csak kis mértékben tér el a sík Minkowski-téridő geometriájától. Megmutatjuk, hogy ez a határeset mind a Newton-elmélet alapjainak reprodukálását, mind pedig a gyenge gravitációs hullámok leírását lehetővé

teszi.<sup>2</sup>

**2.2.1. Feltétel.** *A téridő  $g_{ab}$  metrikája csak „kicsit”, a*

$$^{(1)}g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \quad (2.2.1)$$

*egyenletnek megfelelően, csak a  $h_{ab}$  eltéréstenzorral tér el a Minkowski-téridő  $\eta_{ab}$  metrikájától. Az eltérés „kicsinységre” vonatkozó feltételünk azzal egyenértékű, hogy a téridőben létezik olyan Minkowski-féle globális koordinátarendszer, hogy az  $\eta_{ab}$  és a  $h_{ab}$  eltéréstenzor erre vonatkozó  $\eta_{\alpha\beta}$  és  $h_{\alpha\beta}$  komponenseire az  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , valamint a*

$$|h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma \partial_\delta h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (2.2.2)$$

*relációk teljesülnek.*

A linearizált egyenleteket úgy nyerjük, hogy az Einstein-egyenletbe a metrika helyére a (2.2.1) kombinációt helyettesítjük, majd a kapott egyenletekből a  $h_{ab}$ -ban magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk, azaz csak a lineáris tagokat tartjuk meg. Legyen  $\partial_a$  az  $\eta_{ab}$  metrikához tartozó „kovariáns deriváló operátor”. Annak érdekében, hogy a  $h_{ab}$  eltérésnek ne legyenek rejtett előfordulásai, a soron következő formulákban minden index lehúzást és felemelést az  $\eta_{ab}$  és  $\eta^{ab}$  metrikák segítségével végzünk el. Érdeemes észben tartani – az egyedüli kivételt –, hogy a  $^{(1)}g^{ab}$  metrikát nem az  $\eta^{ae}\eta^{bf}{}^{(1)}g_{ef}$  kontrakcióként definiáljuk, hanem az alábbi feladat megoldásaként kapott közelítést alkalmazzuk.

**2.2.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (2.2.1) relációval meghatározott  $^{(1)}g_{ab}$  metrika inverzének linearizált alakját – amelyre a  $^{(1)}g_{ab}{}^{(1)}g^{bc} \approx$*

---

<sup>2</sup>A továbbiakban speciális,  $n = 4$ -dimenziós téridőket vizsgálunk.

$\delta_a^c$  egyenlet linearizált értelemben teljesül – a

$$^{(1)}g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} = \eta^{ab} - \eta^{ae}\eta^{bf}h_{ef} \quad (2.2.3)$$

relációval adhatjuk meg.

## 2.3. A linearizált Einstein-egyenletek

Az előző részben kiválasztott Minkowski-féle globális koordinátarendszer felett a  $h_{ab}$  eltérését felhasználva a linearizált Christoffel-szimbólumokat a

$$^{(1)}\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}\eta^{ce}(\partial_a h_{be} + \partial_b h_{ae} - \partial_e h_{ab}), \quad (2.3.4)$$

a Riemann-tenzort a

$$\begin{aligned} ^{(1)}R_{abcd} &= \eta_{de} \left( \partial_b ^{(1)}\Gamma_{ac}^e - \partial_a ^{(1)}\Gamma_{bc}^e \right) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_b \partial_c h_{ad} + \partial_d \partial_a h_{bc} - \partial_b \partial_d h_{ac} - \partial_a \partial_c h_{bd}), \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

a Ricci-tenzort a

$$\begin{aligned} ^{(1)}R_{ab} &= ^{(1)}R_{aeb}{}^e \\ &= \frac{1}{2}(\partial_e \partial_b h^e{}_a + \partial_e \partial_a h^e{}_b - \square h_{ab} - \partial_a \partial_b h), \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

valamint az Einstein-tenzort a

$$\begin{aligned} ^{(1)}G_{ab} &= ^{(1)}R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab} ^{(1)}R = \frac{1}{2}(\partial_e \partial_b h^e{}_a + \partial_e \partial_a h^e{}_b \\ &\quad - \square h_{ab} - \partial_a \partial_b h - \eta_{ab} \partial_e \partial^f h^e{}_f + \eta_{ab} \square h) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

kifejezésekkel adhatjuk meg, ahol a  $h$  és  $\square$  szimbólumok a  $h_{ab}$  eltérés  $h = h_e^e = h_{ab}\eta^{ab}$  kontrakcióját és az  $\eta^{ab}$  metrika  $\square = \eta^{ab}\partial_a\partial_b$  hullámoperátort jelöli. A  $\square$  hullámoperátor bármely Minkowski-féle koordináta-rendszerben  $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  alakban adható meg.

**2.3.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az utolsó egyenletet felhasználva, valamint a  $h_{ab}$  eltérés helyett a*

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h \quad (2.3.8)$$

„trace”-megfordított<sup>3</sup> kifejezést használva a linearizált Einstein-egyenletek a

$${}^{(1)}G_{ab} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{ab} + \partial^e\partial_{(b}\bar{h}_{a)e} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^e\partial^f\bar{h}_{ef} = 8\pi{}^{(1)}T_{ab} \quad (2.3.9)$$

alakban írható fel.

## 2.4. A Maxwell-elmélet

A Minkowski-téridőben – ezt az  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  párral jeleníthetjük meg – értelmezett elektrodinamikában az elektromágneses mezőt az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor segítségével jelentjük meg, mely a

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = -4\pi J_\beta \quad (2.4.10)$$

$$\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0, \quad (2.4.11)$$

---

<sup>3</sup>Az elnevezés onnan adódik, hogy ekkor a  $\bar{h}_{ab}$  és  $h_{ab}$  kifejezések „trace”-ire a  $\bar{h} = -h$  összefüggés teljesül.

egyenleteknek tesz eleget, ahol  $J_a$  az elektromos töltésekhez tartozó négyes áramvektort jelöli.

Mivel az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor valójában egy 2-forma amelyre (2.4.11) teljesül, a Poincaré-lemma biztosítja, hogy létezik olyan  $A_a$  vektorpotenciál, amelyre

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a. \quad (2.4.12)$$

Ekkor az (2.4.10) egyenletet a

$$\partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = \partial^a \partial_a A_b - \partial_b (\partial^a A_a) = -4\pi J_b \quad (2.4.13)$$

alakban írhatjuk fel, ahol a második lépésben a parciális deriváltak sorrendjének felcserélhetőségét használtuk ki, továbbá

$$\partial^a \partial_a = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = -\partial_t^2 + \nabla^2, \quad (2.4.14)$$

ahol  $\nabla^2$  a jól ismert Laplace-Beltrami operátort jelöli.

Ismert, hogy a vektorpotenciál nem egyértelmű, hiszen tetszőleges (elegendően reguláris)  $\chi$ -függvény választása esetén a

$$A'_a = A_a + \partial_a \chi \quad (2.4.15)$$

kifejezéssel adott vektorpotenciál is ugyanazt a Faraday-tenzort adja, azaz  $F'_{ab} = F_{ab}$ .

Ezt a szabadságot kihasználva tudunk olyan vektorpotenciált, más néven mértéket választani, amelyre (2.4.13) helyett a nála sokkal barát-



ságosabbnak tűnő

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b \quad (2.4.16)$$

egyenlet teljesül. Ennek belátásához tegyük fel, hogy az  $A_a$  vektorpotenciál tetszőleges és válasszuk meg most a  $\chi$ -függvényt úgy, hogy az tegyen eleget a

$$\partial^a \partial_a \chi = -\partial^a A_a \quad (2.4.17)$$

egyenletnek. Vezessük be ezek után (2.4.15) felhasználásával azt az  $A'_a$  vektorpotenciált, melyet  $A_a$ , valamint a  $\chi$ -függvény határoz meg. Mivel

$$\partial^a A'_a = \partial^a A_a + \partial^a \partial_a \chi = 0 \quad (2.4.18)$$

az így nyert vektorpotenciál esetén a Maxwell-egyenletet (a vesszők elhagyása után) valóban az (2.4.19) alakban írhatjuk fel.

Érdeemes még megemlíteni, hogy az így nyert új  $A'_a$  vektorpotenciál sem egyértelmű, hiszen tetszőleges olyan újabb  $\chi$ -függvény választása esetén, amelyre

$$\partial^a \partial_a \chi = 0 \quad (2.4.19)$$

teljesül, megőrzi a Lorentz-mértékűséget, azaz egy ilyen mértéktranszformáció végrehajtása után is érvényben marad a  $\partial^a A_a = 0$  reláció az újonnan nyert vektorpotenciálra.

## 2.5. A diffeomorfizmusinvariancia speciális esete

Vegyük észre, hogy amennyiben azt tudnánk garantálni, hogy a

$$\partial^e \bar{h}_{ae} \quad (2.5.20)$$

kifejezés nullává váljon, akkor – mivel a  $\partial_a$  kovariáns operátorok tetszőleges típusú tenzormezők esetén kommutálnak – a (2.3.9) egyenletet a

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi^{(1)} T_{ab} \quad (2.5.21)$$

alakban írhatnánk fel.

Természetesen semmi ok arra, hogy az  $\partial^e \bar{h}_{ae}$  kifejezés értéke általában mindenütt nulla legyen, ugyanakkor – ahogy azt lentebb meg is mutatjuk – az általános relativitáselmélet diffeomorfizmusinvarianciáját kihasználva mindig találhatunk olyan, az eredeti  $h_{ab}$  eltéréstenzorral mértékekivivalens  $h'_{ab}$  ábrázolást, amelyre a  $\partial^e \bar{h}'_{ae}$  kifejezés már eltűnik.

Emlékezzünk arra, hogy az  $(M, g_{ab})$  és az  $(M', g'_{ab})$  téridők mértékekivivalensek, ha található hozzájuk olyan  $\phi : M \rightarrow M'$  az  $M$  sokaságot az  $M'$  sokaságra képező diffeomorfizmus, amely a  $g_{ab}$  metrikát a  $g'_{ab}$  metrikára képezi, azaz  $g'_{ab} = \phi^* g_{ab}$ .

Korábbi feltevéseinknek megfelelően a linearizált elméletben léteznek Minkowski-féle globális koordinátarendszerek. Az ezek közötti át-

menetet biztosító legegyszerűbb  $\phi : M \rightarrow M$  diffeomorfizmusokat a

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha \quad (2.5.22)$$

típusú koordináta-transzformációval adhatjuk meg, ahol  $\xi^\alpha$  olyan „infinitezimális” vektormező az  $\mathbb{R}^4$ -gyel diffeomorf alapsokaságon, amelynek komponenseire bármely Minkowski-féle koordinátarendszerben a  $\partial_a \xi_b$  tenzor komponensei kicsik, azaz  $\partial_a \xi_b \ll 1$ . Érdemes megjegyezni, hogy a Lorentz-transzformációk nem jöhetnek számításba, mert azoknál bizonyos komponensek mindig túl nagyokká válnak.

Egy általános koordinátatranszformáció során a  $g_{ab}$  metrika  $g_{\alpha\beta}$  komponensei a

$$g'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.5.23)$$

relációnak megfelelő szabály szerint transzformálódnak. A speciális (2.5.22) koordinátatranszformáció esetében a Jacobi-mátrixot a

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu \quad (2.5.24)$$

alakban írhatjuk fel. Így a (2.5.23) és (2.5.24) egyenleteknek megfelelően, a  $h_{ab}$  eltéréstenzorban és a  $\partial_a \xi_b$  kifejezésekben magasabb rendű járulékok elhanyagolásával azt kapjuk, hogy a

$$g'_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = \eta_{ab} + h_{ab} + \mathcal{L}_\xi \eta_{ab} \quad (2.5.25)$$

relációval meghatározott metrika linearizált értelemben mértékekvi-

lens az eredeti  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  metrikával. Tehát azt mondjuk, hogy a sík Minkowski-téridő  $h_{ab}$  és  $h'_{ab}$  lineáris perturbációi biztosan mértékekvivalensek, ha az alapsokaságon található olyan  $\xi^a$  „infinitezimális” vektormező úgy, hogy a

$$h'_{ab} = h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = h_{ab} + \mathcal{L}_\xi \eta_{ab} \quad (2.5.26)$$

reláció teljesüljön. Így a  $\xi^\alpha$  vektormező alkalmas megválasztása – konkrétan, a  $\partial_\alpha \xi_\beta$  deriváltak infinitezimalitása – biztosítja azt, hogy az eredeti „Minkowski-típusú  $x^\alpha$  koordinátákból” a (2.5.22) koordinátatranszformáció segítségével kapott új  $x'^\alpha = x'^\alpha(x^\gamma)$  koordináták ugyancsak Minkowski-típusúak.

Az eredeti célunkhoz visszatérve induljunk ki most egy teljesen általános  $h_{ab}$  lineáris perturbációiból és határozzuk meg a

$$\square \xi_a = -\partial^e h_{ae} \quad (2.5.27)$$

lineáris hullámegyenletnek eleget tevő  $\xi^a$  vektormezőt.

**2.5.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (2.5.27) egyenlet megoldása által meghatározott (2.5.22) koordinátatranszformáció és a  $h_{ab} \rightarrow h'_{ab} = h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$  mértéktranszformáció eredményeként előálló  $\bar{h}'_{ab}$  kifejezés eleget tesz a*

$$\partial^e \bar{h}'_{ae} = 0 \quad (2.5.28)$$

*alakban felírt Lorentz-feltételnek.*<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>A feltétel elektrodinamikai megfelelőjét elsőként a dán származású Ludwig Lorenz alkalmazta, ugyanakkor mindenki azt gondolta, hogy az is a sokkal ismertebb Hendrik Lorentz-től származik. Ez a történeti hiba öröklődően megmaradt, így ma már mindenki Lorentz-mértékfeltételről beszél.

Mindezekből az következik, hogy a vesszőzött eltéréstenzorra – a vesszők elhagyása után – a linearizált Einstein-egyenlet valóban a

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi^{(1)}T_{ab} \quad (2.5.29)$$

alakban írható fel. A vákuumesetben, azaz amikor  $^{(1)}T_{ab}$  azonosan zérus értékű a (2.5.29) linearizált Einstein-egyenlet pontosan a zérus nyugalmi tömegű 2-es spinű részecskék a sík Minkowski-téridőben felírt fejlődési egyenleteivel esik egybe. Így az Einstein-elmélet a lineáris határesetben (és csak ekkor!) valóban a zérus nyugalmi tömegű 2-es spinű „gravitonok” elméletévé redukálódik.

Fontos megemlíteni, hogy a (2.5.27) és (2.5.20) egyenletek alapján további olyan (2.5.22) alakú speciális mértéktranszformáció végrehajtására van módunk – amelyek megtartják a (2.5.29) egyenlet alakját –, feltéve, hogy a koordinátatranszformáció  $\xi^a$  generátora eleget tesz a

$$\square \xi_a = 0 \quad (2.5.30)$$

homogén lineáris hullámeqyenletnek.

## 2.6. A Newtoni határeset

Bár az Einstein-elmélet a gravitáció napjainkban elfogadott legpontosabb elmélete, nem szabad figyelmen kívül hagyni azt, hogy a Newton-féle gravitációelmélet nagyon jól használható olyan gravitációs jelenségek leírása során, amelyekben nem lépnek fel túlságosan erős gravitációs hatások és a gravitációs tér forrásainak mozgása lassú. Mindezen fizikai feltételeknek az imént ismertetett linearizált Einstein-elméletben az alábbiakban kifejtett matematikai hipotézisek felelnek meg.

## 2.7. A forrás leírása

Tekintsünk először is egy csillagszerű objektumot, mely a gravitáció forrásául szolgál. Mivel a linearizált elmélet keretein belül gondolkodunk, léteznie kell olyan  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordinátarendszernek, hogy az  $\eta_{ab}$  metrika és a  $h_{ab}$  eltéréstenzor erre vonatkozó  $\eta_{\alpha\beta}$  és  $h_{\alpha\beta}$  komponenseire az  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , valamint a  $|h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma \partial_\delta h_{\alpha\beta}| \ll 1$  relációk teljesülnek.

Az, hogy a forrás lassan mozog, egyrészt azt jelenti, hogy a hozzá tartozó  ${}^{(1)}T_{ab}$  energia-impulzus tenzorban megjelenő impulzusáramok, illetve belső feszültségek (nyomások) sokkal kisebbek, mint az energiaáram-sűrűség, azaz  ${}^{(1)}T_{ab}$ -re a

$${}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{t\bar{\alpha}}, \text{ valamint } {}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (2.7.1)$$

relációk teljesülnek, ahol most és a továbbiakban a felülvonásos gö-

rög indexek mindenütt az 1, 2, 3 értékeket veszik fel.<sup>5</sup> Ennek alapján csillagszerű objektumot valamely lassan változó elrendezésű rendszerét megjelenítő  ${}^{(1)}T_{ab}$  energia-impulzus tenzort közelíthetjük a

$${}^{(1)}T_{ab} \approx \rho t_a t_b \quad (2.7.2)$$

kifejezéssel, ahol  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  az adott vonatkoztatási rendszerben a csillag anyagával együttmozgó megfigyelők érintővektorát,  $\rho$  pedig az általuk mért energiasűrűséget jelöli.

A források lassú mozgásának egy másik következményeként feltehetjük, hogy a kialakuló gravitációs tér időbeli változása lassú. Ez a linearizált elméletben azt jelenti, hogy a  $h_{ab}$  eltéréstenzor időfüggésétől eltekinthetünk, és így a  $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$  kifejezés időderiváltja is elhanyagolható.

Mindezen feltétek teljesülése mellett a (2.5.29) egyenletből a

$$\Delta \bar{h}_{tt} = -16\pi\rho \quad (2.7.3)$$

következik, továbbá, amikor az  $\alpha$  és  $\beta$  indexek legalább egyike nem időszerű a

$$\Delta \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.7.4)$$

egyenleteket kapjuk, ahol  $\Delta$  a Laplace-operátort jelöli, azaz az alkalmazott Minkowski-szerű koordinátáinkban a  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  alakban ír-

---

<sup>5</sup>Az energia-impulzus áramokat megjelenítő négyesvektort, melyet  $j^a$ -val jelölünk a  $j^a = -T^a_b t^b$  relációval értelmezhetjük. Így az  ${}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{t\alpha}$ , valamint  ${}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  egyenlőtlenségek a  $|j^t| \gg |j^{\bar{\alpha}}|$ , valamint  ${}^{(1)}T^t_t \ll {}^{(1)}T^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$  alakban is felírhatók.

ható fel. A parciális differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy az utóbbi egyenlet a  $r \rightarrow \infty$  peremfeltételnek megfelelő  $\bar{h}_{\alpha\beta} \rightarrow 0$  határesetben a  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  megoldások mind az időtől, mind pedig a térkoordinátáktól független állandó értéket vesznek fel.

**2.7.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  =állandó kifejezések segítségével definiált*

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2} \bar{h}^\mu_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}} \quad (2.7.5)$$

*koordináta-, vagy mértéktranszformáció  $\xi^\mu = \frac{1}{2} \bar{h}^\mu_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}}$  generátora infinitezimális. Lássuk be, hogy a (2.7.5) koordinátatranszformáció alkalmazása révén a  $\bar{h}_{\mu\nu}$  komponensekkel mértékekivivalens ábrázolásban a  $\bar{h}'_{\mu\nu}$  eltéréstenzor nem tisztán időszerű komponensei zérus értéket vesznek fel.*

Éppen ezért – legalábbis a jelen kontextusban – a  $tt$ -komponenstől eltekintve a  $h_{\alpha\beta}$  perturbáció összes többi komponenséről feltehetjük, hogy azok azonosan zérus értéket vesznek fel.

Ezek után vezessük még be a

$$\bar{h}_{tt} = -4\phi \quad (2.7.6)$$

jelölést, ami segít annak felismerésében, hogy az általunk vizsgált határesetben a  $\bar{h}_{ab} = -4\phi t_{at}b$  tenzor egyetlen nem zérus komponensére vonatkozó (2.7.3) egyenlet éppen a Newton-elmélet alapegyenleteként is felfogható

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \quad (2.7.7)$$

Poisson-egyenletnek felel meg.



**2.7.2. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a  $\bar{h}_{ab} = -4\phi t_a t_b$  tenzorhoz tartozó  $h_{ab}$  eltéréstenzor diagonális és a*

$$h_{ab} = \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{h} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi \quad (2.7.8)$$

*alakban írható fel, és így a  $h_{tt} = -2\phi$  egyenlőség is teljesül.*

## 2.8. A próbatestek leírása

Ahogy azt korábban említettük, az általános relativitáselméletben a Mach-elvet megjelenítő tulajdonság folytán a próbatestek geodetikus pályán mozognak. Egy ilyen pályán mozgó test egyenletét valamely  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordinátarendszerben a

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (2.8.9)$$

alakban írhatjuk fel, ahol az  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  függvény a próbatest geodetikus világvonalát ábrázolja,  $\tau$  pedig a világvonal mentén mért sajátidő paraméter, mely egyben affin-paraméter is az  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  geodetikus mentén.

A próbatest  $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$  négyessebességvektorát, az SI mértékegységek, valamint a speciális relativitáselméletben bevezetett

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2.8.10)$$

boost-faktor segítségével az ismerősebb  $u^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$  alakban is felírhatjuk.

Ennek megfelelően a lassú mozgás határeset a  $\gamma \approx 1$  relációnak felel meg, ami a geometrizált egységekre visszatérve, a  $c = 1$  feltétel miatt azt adja, hogy  $u^t \approx 1$ , azaz a  $\tau$  sajátidő paraméterre és az  $t$  koordináta-időre a  $\tau \approx t$  reláció teljesül. Így a továbbiakban elegendő  $u^\alpha$  sebességvektor térszerű komponenseivel foglalkoznunk.

**2.8.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az (2.7.8) egyenlet által meghatározott  $h_{ab}$  eltéréstenzorhoz – erre a  $h_{t\bar{\alpha}} = h_{\bar{\alpha}\beta} = 0$  relációk teljesülnek – a (2.3.4) egyenletnek megfelelően tartozó linearizált Christoffel-szimbólumra a*

$${}^{(1)}\Gamma_{tt}^{\bar{\alpha}} \approx \frac{\partial \phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \quad (2.8.11)$$

*reláció teljesül, ahol a felülvonásos indexek mindenütt az 1, 2, 3 értékeket veheti fel.*

Mindezek következtében, valamint a (2.8.9) és (2.8.11) egyenletek következtében a próbatest egyenletét a

$$\frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{dt^2} \approx - {}^{(1)}\Gamma_{tt}^{\bar{\alpha}} \approx - \frac{\partial \phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}}, \quad (2.8.12)$$

vagy az ennél sokkal ismerősebb

$$m \mathbf{a} \approx -m \mathbf{grad}(\phi) = \mathbf{F}_{grav} \quad (2.8.13)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $\mathbf{a}$ -val a próbatestnek a  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordinátarendszerhez viszonyított  $a^{\bar{\alpha}} = \frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}(t)}{dt^2}$  gyorsulását jelöltük.

Mivel a (2.7.7) és (2.8.13) egyenletek éppen a Newton-féle gravitációelmélet alapegyenletei, azt mondhatjuk, hogy az általános relati-

vitáselmélet lassú mozgás és gyenge gravitációs hatások határesetben a Newton-elméletté redukálódik, így annak természetes általánosítása-ként is tekinthetünk rá.

Van azonban egy nagyon lényeges koncepcionális eltérés a két elmélet között. Míg a Newton-elmélet például a naprendszerbeli bolygók mozgását úgy írja le, mint ezeknek a próbatesteknek a Nap által keltett gravitációs térben, egy abszolút térben végzett gyorsuló mozgásait, addig az általános relativitáselmélet megközelítésének megfelelően a bolygók szabad próbatestként, geodetikus pályán mozognak a Nap tömege és energiája révén görbült téridőben. Mivel a téridő geometriája elegendően görbült, a bolygómozgásokhoz tartozó geodetikus pályák térszerű értelemben korlátosak.



## 3. fejezet

# Gyenge gravitációs hullámok

Ahhoz hasonlóan, ahogyan a Coulomb-féle elektrosztatika után természetes módon jelentek meg az elektromágneses hullámok az elektrodinamikában, a Newton-féle gravitációelmélet általánosításának számító Einstein-féle gravitációelméletben is újfajta, gravitációs hullámjelenségek léptek fel. A gravitációs hullám, mint a téridő geometriájában keletkezett zavar fénysebességgel történő tovaterjedése képzelhető el. Ebben az alfejezetben – az előző részben bevezetett linearizált közelítés felhasználásával – a gyenge gravitációs hullámok néhány alapvető tulajdonságának ismertetését, illetve a megtalálásukra kialakított kísérleti berendezések közül az interferometrikus detektorok elvi működésének rövid bemutatását tűzzük ki célként.

### 3.1. Az inhomogén egyenlet

Ahogy az korábban már megmutattuk, a  $\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$  Lorentz-féle mértékfeltételnek eleget tevő  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés segítségével a linearizált Einstein-egyenletet a

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi {}^{(1)}T_{ab} \quad (3.1.1)$$

alakban írhatjuk fel.

Ennek segítségével határozhatjuk meg például a jobb oldalon álló  ${}^{(1)}T_{ab}$  energia-impulzus tenzormező által megjelenített anyag, mint forrás által keltett gravitációs hullámokat. A most következő rövid részben  $\bar{h}_{ab}$  tisztán térszerű részeinek vezetőrendű viselkedését tárgyaljuk.

Először is érdemes felidézni, hogy a (3.1.1) egyenlet általános megoldása mindig az inhomogén egyenlet valamely partikuláris megoldásának, valamint a homogén egyenlet általános megoldásainak segítségével írható fel. Ebben a részben most csak az inhomogén egyenlet megoldásaival foglalkozunk, melyet a  ${}^{(1)}T_{ab}$  energia-impulzus tenzor ismeretében, valamint a szokásos retardált Green-függvény segítségével a

$$\bar{h}_{ab}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T_{ab}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \quad (3.1.2)$$

integrál segítségével adhatunk meg, ahol  $\vec{x}$  a  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordinátarendszer térszerű részéhez tartozó  $(x, y, z)$  komponensekkel rendelkező helyvektort jelöli.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Egy

$$\square \psi(t, \vec{x}) = \varepsilon(t, \vec{x}) \quad (3.1.3)$$

A kifejezések rövidítése érdekében a  $^{(1)}T_{ab}$  energia-impulzus tenzor linearizálásra utaló „ $^{(1)}$ ”-es indexét a továbbiakban elhagyjuk. Érdeemes

$$\bar{h}_{ab}(p) = 4 \int_{J^-(p)} \frac{T_{ab}(p')}{|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')|} d^3S(p') \quad (3.1.8)$$

alakban is felírni a (3.1.2) integrált, mert sokkal szemléletesebb. Itt  $J^-(p) \approx \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$  a  $p$  pont által megjelenített esemény múlt fénykúpját,

$$|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')| = \sqrt{\sum_{\tilde{\alpha}=1}^3 (x^{\tilde{\alpha}}(p) - x^{\tilde{\alpha}}(p'))^2} \quad (3.1.9)$$

a  $p$  és  $(p')$  események térszerű távolságát, továbbá  $d^3S(p')$  a  $J^-(p)$  fényszerű hiperfelületen értelmezett térfogati formát jelöli, ami, pél-

---

típusú egyenlet megoldása mindig megadható a  $G(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$  Green-függvény segítségével, mely (3.1.4) pontszerű forráshoz tartozó megoldása, azaz a

$$\square G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \delta(t - t', \vec{x} - \vec{x}') \quad (3.1.4)$$

egyenletnek tesz eleget. (3.1.4)  $\psi(t, \vec{x})$  megoldását a

$$\psi(t, \vec{x}) = \int G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') \varepsilon(t', \vec{x}') dt' d^3x' \quad (3.1.5)$$

alakban írhatjuk fel. Ezek után kihasználva, hogy a  $\square$  hullámoperátor Green-függvénye a

$$\square G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = -\frac{\delta(t' - [t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c])}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.1.6)$$

adható meg [14], ahol  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  a „retardált időt” jelöli, (3.1.4) megoldását a

$$\psi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (3.1.7)$$

implicit alakban írhatjuk fel.

dául gömbi koordinátákban a  $d^3S(p') = r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'$  alakban írhatunk fel.

A továbbiakban feltesszük:

- (1) egyrészt azt, hogy a forrást messziről figyeljük meg, azaz a forrás  $L$  karakterisztikus átmérője elhanyagolható a forrás megfigyelőtől mért  $r$  távolságától,
- (2) másrészt azt, hogy a forrás mozgása lassú, azaz azt az esetet tekintjük, amikor a forrás részeinek belső mozgásának  $\vec{v}$  sebessége sokkal kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség.

Az (1) feltétel azt biztosítja, hogy a nevezőben lévő  $|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')|$  kifejezést helyettesíthetjük az  $r$  távolsággal és az ekkor használt közelítés relatív hibája nem nagyobb, mint  $L/r$ . Hasonlóan, a (2) feltétel azt biztosítja, hogy a  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  retardált időt is helyettesíthessük az egyszerűbb  $t - r/c$  kifejezéssel. Az utóbbi esetben alkalmazott közelítés relatív hibája a  $|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')| \sim r + n_{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\alpha}} + \mathcal{O}(1/r)$  összefüggés értelmében, ahol  $n^{\bar{\alpha}} = x^{\bar{\alpha}}/r$ , az  $L/\tau$  nagyságrendjébe esik, ahol  $\tau$  a forrás karakterisztikus időskáláját jelzi, azaz a forrás belsejében lejátszódó folyamatok (2) feltétel értelmében elhanyagolhatónak tekintett sebességével arányos.

Mindezen előkészítések után  $\bar{h}_{ab}$ -t a

$$\bar{h}_{ab}(t, \vec{x}) = \frac{4}{r} \int T_{ab}(t - r, \vec{x}') d^3x' \quad (3.1.10)$$

kifejezéssel adhatjuk meg.



A  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés tisztán térszerű részeinek vezetőrendű viselkedése ezek után a  $T_{ab}$  energia-impulzus tenzormező  $\partial_a T^{ab} = 0$  divergencia-mentességét kihasználva<sup>2</sup> az alábbiak szerint határozható meg. A

$$\partial_t T^{tt} + \partial_{\bar{\varepsilon}} T^{\bar{\varepsilon}t} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\partial_t T^{t\bar{\varphi}} + \partial_{\bar{\varepsilon}} T^{\bar{\varepsilon}\bar{\varphi}} = 0 \quad (3.1.12)$$

egyenletek alapján – a (3.1.11) egyenletet  $t$ , míg a (3.1.12) egyenletet az  $x^{\bar{\varphi}}$  koordináta szerint deriválva – azt kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 T^{tt} = \partial_{\bar{\varepsilon}} \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\varepsilon}\bar{\varphi}}. \quad (3.1.13)$$

Az utolsó egyenlet mindkét oldalát az  $x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}}$  kifejezéssel megszorozva a

$$\partial_t^2 [T^{tt} x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}}] = [\partial_{\bar{\varepsilon}} \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\varepsilon}\bar{\varphi}}] x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \quad (3.1.14)$$

egyenlethez jutunk. A Leibnitz-szabály, valamint a  $\partial_{\bar{\varepsilon}} x^{\bar{\alpha}} = \delta_{\bar{\varepsilon}}^{\bar{\alpha}}$  reláció többszöri alkalmazásával a jobb oldalon álló kifejezést a

$$\begin{aligned} [\partial_{\bar{\varepsilon}} \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\varepsilon}\bar{\varphi}}] x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} &= \partial_{\bar{\varepsilon}} \left[ (\partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\varepsilon}\bar{\varphi}}) x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \right] - (\partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\alpha}\bar{\varphi}}) x^{\bar{\beta}} - (\partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\beta}\bar{\varphi}}) x^{\bar{\alpha}} \\ &= \partial_{\bar{\varepsilon}} \left[ (\partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\varepsilon}\bar{\varphi}}) x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \right] - \left\{ \partial_{\bar{\varphi}} (T^{\bar{\alpha}\bar{\varphi}} x^{\bar{\beta}}) - T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right\} \\ &\quad - \left\{ \partial_{\bar{\varphi}} (T^{\bar{\beta}\bar{\varphi}} x^{\bar{\alpha}}) - T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right\} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

alakban írhatjuk fel.

Ezek után a (3.1.10), (3.1.13), (3.1.14) és (3.1.15) egyenletek alap-

---

<sup>2</sup>Ismert, hogy az energia-impulzus tenzor divergencia-mentessége mindig biztosított, ha az anyagmezőkre vonatkozó mozgásegyenletek teljesülnek.

ján és kihasználva azt, hogy a tisztán térszerű részekre a  $T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  egyenlőség teljesül azt kapjuk, hogy a

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(p) &= \frac{4}{r} \int T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(p') d^3x' = \frac{2}{r} \int \left\{ \partial_t^2 \left[ T^{tt} x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \partial_{\bar{\epsilon}'} \left[ T^{\bar{\alpha}'\bar{\epsilon}'} x'^{\bar{\beta}} + T^{\bar{\epsilon}'\bar{\beta}'} x'^{\bar{\alpha}} \right] - \partial_{\bar{\epsilon}'} \left[ \left( \partial_{\bar{\varphi}'} T^{\bar{\epsilon}'\bar{\varphi}'} \right) x'^{\bar{\alpha}'} x'^{\bar{\beta}'} \right] \right\} d^3x' \\
 &= \frac{2}{r} \int \partial_t^2 \left[ T^{tt} x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right] d^3x' = \frac{2}{r} \partial_t^2 \left[ \int T^{tt} x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} d^3x' \right] \\
 &= \frac{2}{r} \partial_t^2 \int \left[ \rho x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right] d^3x' \tag{3.1.16}
 \end{aligned}$$

reláció teljesül, ahol a  $d^3x'$  térfogatelem előtt szögletes zárójelekben álló kifejezések mindegyikét a  $t' = t - \frac{r}{c}$  retardált időben kell kiértékelnünk. A második sorban megjelenő teljes divergenciákat az integrálás Gauss-tétele alapján azzal az észrevétellel hagytuk el, hogy a forrás lokalizált, azaz tartójának és a  $p$  pont múlt fénykúpjának metszete mindig kompakt. A harmadik sor második lépésében az integrálási tartomány időfüggetlenségét kihasználva az idő szerinti deriválásokat felcserélhetjük az integrálás műveletével. Végül az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy  $T^{tt} = -T^t_t$  a forrás  $(\partial/\partial t)^a$  egységvektorral mozgó megfigyelők által a  $t=\text{állandó}$  hiperfelületeken mért  $\rho$  energiasűrűségével egyezik meg.

Mindezek alapján a  $\bar{h}_{ab}$  tisztán térszerű  $\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  részének vezetőrendű viselkedésére azt kapjuk, hogy

$$\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(p) = \frac{2}{r} \partial_t^2 \int \left[ \rho x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right]_{t'=t-\frac{r}{c}} d^3x', \tag{3.1.17}$$

azaz  $\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  a forrás tömegeloszlásának második momentumának második idő szerinti deriváltjának segítségével adható meg.

## 3.2. A forrásmentes eset

Ebben a részben azokkal a szabad gravitációs hullámokkal foglalkozunk, amelyek csak anyagmentes, azaz a  $T_{ab} \equiv 0$  egyenletnek eleget tevő téridőkben léteznek.

Amint azt korábban is hangsúlyoztuk, a  $\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$  Lorentz-féle mértékfeltételnek eleget tevő  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés a (3.1.1) linearizált Einstein-egyenlet alakjának megtartása mellett további (2.5.22) alakú koordinátatranszformációnak vethető alá, feltéve, hogy az infinitezimális  $\xi^a$  vektormező eleget tesz a

$$\square \xi_a = 0 \quad (3.2.18)$$

egyenletnek. Ezen mértéktranszformáció felhasználásával lényegében véve további négy feltételt róhatunk ki a  $\bar{h}_{ab}$  kifejezésre, vagy a vele ekvivalens  $h_{ab}$  eltéréstenzor komponenseire.

### 3.2.1. A „sugárzási” mérték

A tiszta sugárzásokat leíró speciális esetben, azaz amikor nincs anyag a téridőben, a metrika  $h_{ab}$  perturbációjára mind a  $h = h_{ef} \eta^{ef}$  kifejezés, mind pedig a  $h_{i\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) komponensek azonosan nullává tehetők. Ennek belátásához elegendő meggondolni, hogy amikor  $T_{ab} \equiv 0$  a  $\bar{h}_{ab}$

kifejezés a

$$\square \bar{h}_{ab} = 0 \quad (3.2.19)$$

egyenletnek tesz eleget. Ismert, hogy az ehhez az egyenlethez tartozó kezdőértékprobléma *jól kezelhető*, azaz a kezdőértékproblémának létezik megoldása és az egyértelmű, továbbá a megoldás folytonosan és kauzálisan függ a kezdőadatokról. Mivel (3.2.19) értelmében a  $\bar{h}_{ab}$  komponensek fejlődése szétcsatolódik, azt is tudjuk, hogy azokhoz a komponensekhez csak az azonosan zérus megoldás tartozhat, amelyekhez triviális, azaz zérus kezdőadatot tudunk választani. Így ahhoz, hogy a  $\bar{h}$  és  $\bar{h}_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) mennyiségek mindenütt azonosan zérus értéket vegyenek fel, csak azt kell biztosítani a kezdőfelületen, hogy a  $\bar{h}$  és  $\bar{h}_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) mennyiségeire vonatkozó kezdőadatok eltűnjenek. A  $\bar{h} = 0$  esetben a  $\bar{h} = -h$  reláció folytán az is igaz, hogy  $\bar{h}_{ab} = h_{ab}$ . Emiatt elegendő a  $h$  és  $h_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) kifejezésekre vonatkozó kezdőadatok eltűnését biztosítanunk. Utóbbiak a  $h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha$  transzformációs szabály folytán a

$$0 = h' = h - 2\partial_t \xi_t + 2\partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\mu}} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t h' &= \partial_t h - 2\partial_t \partial_t \xi_t + 2\partial_{\bar{\mu}} (\partial_t \xi_{\bar{\mu}}) = \\ &= \partial_t h - 2\partial_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} \xi_t + 2\partial_{\bar{\mu}} (\partial_t \xi_{\bar{\mu}}) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$0 = h'_{t\bar{\alpha}} = h_{t\bar{\alpha}} + \partial_t \xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}} \xi_t \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t h'_{t\bar{\alpha}} &= \partial_t h_{t\bar{\alpha}} + \partial_t \partial_t \xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}} \partial_t \xi_t = \\ &= \partial_t h_{t\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}} \partial_t \xi_t \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

formában adhatók meg, ahol a felülvonásos  $\bar{\alpha}$  és  $\bar{\mu}$  indexek a korábban bevezetett jelöléseink értelmében az 1, 2, 3 értékeket veszik fel, valamint az indexek kettőzött előfordulása továbbra is mindenütt összegzésre utal.

Amint az könnyen ellenőrizhető, a (3.2.22)-os egyenletből  $\partial_t \xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezve, majd az így nyert kifejezést a (3.2.21) egyenletbe helyettesítve a

$$\Delta \xi_t = \frac{1}{4} \partial_t h - \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h_{t\bar{\mu}} \quad (3.2.24)$$

egyenletet nyerjük. Hasonlóan a (3.2.20)-as egyenletből  $\partial_t \xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezve, majd az így nyert kifejezést a (3.2.23) egyenletbe helyettesítve a

$$\Delta \xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}} (\partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\mu}}) = \frac{1}{2} \partial_{\bar{\alpha}} h - \partial_t h_{t\bar{\alpha}} \quad (3.2.25)$$

egyenlethez jutunk. Mind (3.2.24), mind pedig (3.2.25) elliptikus egyenlet, melyek a források,  $\partial_t h$ ,  $\partial_{\bar{\mu}} h_{t\bar{\mu}}$ ,  $\partial_{\bar{\alpha}} h$  és  $\partial_t h_{t\bar{\alpha}}$  ismeretében külön-külön megoldhatók a  $\xi_t$ , illetve  $\xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezésekre. Utóbbiakból (3.2.24), valamint (3.2.25) alapján a  $\partial_t \xi_t$ , illetve  $\partial_t \xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezések is meghatározhatók.

Ezen eljárás végigvitelével a (3.2.24) - (3.2.25) egyenletrendszer egyértelműen megoldható a kezdőfelületen a

$$(\xi_t, \xi_x, \xi_y, \xi_z; \partial_t \xi_t, \partial_t \xi_x, \partial_t \xi_y, \partial_t \xi_z) \quad (3.2.26)$$

változókra, hiszen ott a forrástagokban szereplő

$$h, \partial_t h, h_{t\bar{\alpha}}, \partial_t h_{t\bar{\alpha}} \quad (3.2.27)$$

kifejezések ismertek.

Utolsó lépésként alkalmazzuk ezeket a kezdőfelületen meghatározott kifejezéseket a keresett mértéktranszformáció generátorának előállításánál a (3.2.18) egyenletben, mint a  $\xi^a$  vektormező komponenseire vonatkozó kezdőadatokat. Az így kapott kezdőfeltételeket használva meghatározzuk a (3.2.18) egyenlet megoldását, majd annak segítségével végrehajtjuk a (2.5.22) transzformációt, (a vesszők elhagyása után) az eredményül kapott  $h_{ab}$  eltéréstenzor nemcsak a Lorentz-feltételnek, de a

$$h = 0, \quad (3.2.28)$$

valamint a

$$h_{t\bar{\alpha}} = 0 \quad (\bar{\alpha} = 1, 2, 3) \quad (3.2.29)$$

feltételeknek is eleget tesz.

Az már csak egy kellemes ráadás, hogy ekkor a  $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$  reláció ismételt használata folytán a  $\partial^\alpha h_{\alpha\beta}$  Lorentz-feltétel a  $\beta = t$  esetben a

$$\partial_t h_{tt} = 0 \quad (3.2.30)$$

alakot ölti. Így a most vizsgált tiszta sugárzás esetében, azaz amikor  $T_{ab} \equiv 0$  és csak akkor, a  $h_{tt}$  komponensre vonatkozó linearizált Einstein-egyenletből

$$\Delta^2 h_{tt} = 0, \quad (3.2.31)$$

következik. Ennek az egyenletnek az egyetlen, mindenütt reguláris megoldása egy időtől és helytől egyaránt független állandó. Ennek értéke egy további, minden korábbi feltételünket tiszteletben tartó (2.7.5)

típusú mértéktranszformáció segítségével zérussá tehető.

### 3.3. A geometriai szabadsági fokok

Az elektrodinamikához hasonlóan a (3.1.1) linearizált Einstein-egyenletből kapott homogén egyenlet megoldásai is mint síkhullám-megoldások szuperpozíciói adhatók meg. A vizsgált rendszerünk valódi szabadsági fokainak felderítéséhez érdemes a homogén hullámegyenlet elemi síkhullám megoldásait tekintenünk. Ennek megfelelően — a sugárzási mértéket, továbbá az azzal kompatibilis  $\bar{h}_{ab} = h_{ab}$  egyenlőséget — használva tekintsük a

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \exp \left[ i \sum_{\gamma=0}^3 k_{\gamma} x^{\gamma} \right] \quad (3.3.32)$$

síkhullám megoldást, ahol  $H_{\alpha\beta}$  valamint  $k_{\alpha}$  helytől és időtől független kifejezések, azaz  $\partial_{\gamma} H_{\alpha\beta} = 0$  valamint  $\partial_{\gamma} k_{\alpha} = 0$  teljesül.<sup>3</sup> Ezt a (3.1.1)-ből kapott homogén egyenletbe helyettesítve

$$\sum_{a,b=0}^3 k_{\alpha} k_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.3.33)$$

---

<sup>3</sup>A (3.3.32) egyenlet által meghatározott eltéréstenzor komplex és így csak a komplex konjugált kifejezés hozzáadásával nyert valós rész tekinthető fizikainak. Fontos azonban megjegyezni, hogy a (3.3.32) alakban alkalmazott  $H_{\alpha\beta}$  kifejezésre kapott összefüggések mindegyike teljesül  $H_{\alpha\beta}$  valós részére is, így a formulák egyszerűbb alakját elsődlegesnek tartva ebben a részben mindenütt a komplex  $H_{\alpha\beta}$ -vel dolgozunk.

következik, ami azt jelenti, hogy az elemi hullámunk  $\phi = i \sum_{\gamma=0}^3 k_{\gamma} x^{\gamma}$  fázisában szereplő  $k^{\alpha}$  hullámszám-vektor fényszerű az  $\eta_{\alpha\beta}$  metrikára nézve. Mindezeken túlmenően – a vizsgált speciális esetben – a sugárzási és Lorentz-féle mértékfeltételeket

$$h = 0 \iff \sum_{\alpha,\beta=0}^3 H_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.3.34)$$

$$h_{t\alpha} = 0 \iff H_{t\alpha} = 0 \quad (\alpha = t, x, y, z), \quad (3.3.35)$$

$$\partial^{\alpha} h_{\alpha\beta} = 0 \iff \sum_{\alpha=0}^3 k^{\alpha} H_{\alpha\beta} = 0 \quad (\beta = t, x, y, z) \quad (3.3.36)$$

alakban írhatjuk fel.

Ebből a kilenc algebrai feltételből csak nyolc független, hiszen a középső egyenletekből az utolsó egyenlet  $\beta = t$  választásnak megfelelő speciális esete automatikusan adódik. Így a szimmetrikus  $H_{ab}$  tenzornak – melynek általános esetben tíz független komponense van – a fenti nyolc algebrai megszorítás következtében csak két algebrailag független komponense lehet.

Az egyszerűség kedvéért, és az általánosság megszorítása nélkül<sup>4</sup>, tekinthetünk olyan síkhullámot is, amely a  $z$ -koordinátatengely irányába mozog. Ekkor

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \exp[-i\omega(t - z)], \quad (3.3.37)$$

ahol a  $k^{\alpha}$  fényszerű hullámszám-vektor komponensei  $k^{\alpha} = (\omega, 0, 0, \omega)$ , továbbá  $\omega$  a hullám fázisváltozási gyorsaságát jelöli, amelyre a jól is-

---

<sup>4</sup>A vonatkoztatási rendszerünket alkalmas, az Euklideszi-térben szokásos forgatások segítségével a kívánt irányba tudjuk állítani.



mert  $\omega \equiv k' = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  egyenlőség teljesül. A (3.3.35) egyenletből, valamint a Lorentz-feltételből azonnal adódik, hogy

$$\partial^\alpha h_{\alpha\tilde{\beta}} = \partial^t h_{t\tilde{\beta}} + \partial^{\tilde{\alpha}} h_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = -\partial_t h_{t\tilde{\beta}} + \partial_{\tilde{\alpha}} h_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \partial_z h_{z\tilde{\beta}} = 0. \quad (3.3.38)$$

Ez a reláció a  $h_{ab}$  eltéréstenzor regularitására vonatkozó korábban már többször alkalmazott érvelésünknek megfelelően azt jelenti, hogy a  $H_{z\tilde{\beta}}$  komponensek tetszőleges,  $\tilde{\beta} = x, y, z$ -re szintén zérus értékűek. Emiatt csak a  $H_{xx}$ ,  $H_{xy}$ ,  $H_{yx}$  és a  $H_{yy}$  komponensek vehetnek fel nullától eltérő értéket.

Ezek után  $h_{ab}$  szimmetriája és trace-mentessége folytán a két algebrai független komponens, például a  $H_+ = H_{xx} = -H_{yy}$  és a  $H_\times = H_{xy} = H_{yx}$  kifejezésekkel adhatjuk meg. Ezek segítségével magát a  $H_{ab}$  tenzort a

$$H_{ab} = H_+ [(e_x)_a (e_x)_b - (e_y)_a (e_y)_b] + H_\times [(e_x)_a (e_y)_b + (e_y)_a (e_x)_b], \quad (3.3.39)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $(e_x)_a$  és  $(e_y)_b$  az  $x$  és  $y$  koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorokat jelölik. A jobb oldalon található két tag együtthatóját a tekintett gravitációs síkhullám két független – „plusszos” és „keresztes” – polarizációs állapotának amplitúdóinak nevezzük.

Érdemes megemlíteni, hogy az imént kapott két független kifejezés  $H_+$  és  $H_\times$  is a (3.2.19) homogén hullámegyenletnek tesz eleget.

### 3.4. „Sugárzási” mérték az általános esetben

Korábban láttuk, hogy a Maxwell-féle elektrodinamika és a linearizált Einstein-elmélet több esetben nagyon hasonló viselkedést mutat. Ez nem is meglepő, hiszen az alapvető téregyenletek is nagyon hasonlítanak egymásra, azzal a nem-triviális eltéréssel, hogy míg a Maxwell-elméletben a vektorpotenciál, addig a linearizált Einstein-elméletben a metrika perturbációja az alaptérváltozó.

#### 3.4.1. Az analóg elektrodinamikai probléma

Amint azt a 2.4 alfejezetben láttuk, a Maxwell-elmélet mértékfüggetlen alapváltozója az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor, melyet egy tetszőlegesen választott  $A_a$  vektorpotenciál segítségével az  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$  írhatunk fel. Azt is láttuk, hogy a különféle vektorpotenciálokat egy tetszőleges (elegendően reguláris)  $\chi$ -függvény kapcsolja össze, azaz az  $A_a$ , valamint a  $A'_a = A_a + \partial_a \chi$  kifejezésekkel megadott vektorpotenciálok ugyanazt a Faraday-tenzort határozzák meg. Láttuk, hogy még a Lorentz-feltétel sem választja ki egyértelműen a vektorpotenciált, hiszen a  $\chi$ -függvényt mindig megválaszthatjuk úgy, hogy az eleget tegyen a (2.4.19) egyenletnek és az így nyert  $A'_a = A_a + \partial_a \chi$  vektorpotenciál pontosan akkor tesz eleget a Lorentz-feltételnek, ha  $A_a$  is eleget tesz neki.

Azt is láttuk, hogy amikor az  $A_a$  vektorpotenciál eleget tesz a  $\partial^a A_a = 0$  egyenlettel meghatározott Lorentz-feltételnek, a Maxwell-egyenletet

a

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b \quad (3.4.40)$$

alakban írhatjuk [14, 37].

Az kevésbé ismert, hogy bizonyos technikai feltételek betartása mellett mértékfüggetlen mennyiségek származtathatók a vektorpotenciálból. A vonatkozó mértéket Coulomb-, transzverzális, vagy sugárzási mértékként szokás emlegetni, és az alábbi eljárással állítható elő.

Tekintsük a Minkowski-téridő valamely inerciális megfigyelőrendszerre vonatkozó  $(t, \mathbf{x})$  idő-tér felbontását. Az ehhez tartozó felbontásra alapozottan bármely  $A_a$  vektorpotenciált is felbonthatunk<sup>5</sup> a  $A_\alpha = (-\phi, A_{\bar{\alpha}})$  alakban. Az ebben a felbontásban megjelenő  $A_{\bar{\alpha}}$  térszerű rész is tovább bontható „transzverzális” és „longitudinális” részekre a  $A_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}}^T + \partial_{\bar{\alpha}} \varphi$  összefüggésnek megfelelően, ahol az  $A_{\bar{\alpha}}^T$  transzverzális rész a  $\partial^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}^T = 0$  feltételnek tesz eleget. Belátható, hogy ez a felbontás valóban egyértelmű, ha a  $\varphi$  potenciál eleget tesz a  $\nabla^2 \varphi = \partial^{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}$  egyenletnek és  $\varphi \rightarrow 0$  a  $r \rightarrow \infty$  határesetben.

Az imént bevezetett „transzverzális” és „longitudinális” részekre alapozottan belátható, hogy a

$$\Phi = \phi + \partial_t \varphi, \text{ valamint } A_{\bar{\alpha}}^T \quad (3.4.41)$$

kifejezések függetlenek attól, hogy milyen mértéknek megfelelő vektorpotenciálból indultunk ki [14]. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy

---

<sup>5</sup>A  $\phi$  skalárpotenciál előtt álló negatív előjel történeti okoknál fogva sokkal hamarabb megjelent az elektrosztatikában, mint maga az  $A_\alpha$  vektorpotenciál az elektrodinamikában.

a Maxwell-egyletek pontosan akkor teljesülnek, ha ezek az invariáns kifejezések a

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad (3.4.42)$$

$$\square A_{\bar{\alpha}}^T = -4\pi \left[ J_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{4\pi} \partial_{\bar{\alpha}} (\partial_t \Phi) \right] \quad (3.4.43)$$

egyenleteknek tesznek eleget, ahol  $J_{\bar{\alpha}}$  a (lokálisan meghatározott) négyes elektromos áramvektor térszerű részét jelöli, azaz a  $J_{\alpha} = (-\rho, J_{\bar{\alpha}})$  összefüggés teljesül.

Vegyük észre, hogy a (3.4.43) jobb oldalán álló áramvektor nem csak az említett térszerű részt tartalmazza. A kérdéses kifejezés, melyet transzverzális áramvektornak nevezünk a

$$J_{\bar{\alpha}}^T = J_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{4\pi} \partial_{\bar{\alpha}} (\partial_t \Phi), \quad (3.4.44)$$

alakban adott.

Az utóbbi összefüggést kicsit figyelmesebben vizsgálva az is látható, hogy az áramvektor  $J_{\bar{\alpha}}^T$  transzverzális része még abban az esetben sem lokalizált, ha a valódi áramokat megjelenítő áramvektor az [14]. Ez egy egyszerű következménye annak, hogy  $\Phi$  egy Poisson-típusú egyenletnek tesz eleget. Ne feledjük azonban, hogy bár (3.4.42) nem időfejlődési egyenlet,  $\Phi$  mégis rendelkezhet, és dinamikai folyamatok esetén valóban rendelkezik is időfüggéssel.

### 3.4.2. A linearizált gravitáció esete

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy nemcsak a vákuumesetben, de valódi fizikai források feltételezése esetén is be lehet vezetni sugárzási mértéket. Rámutatunk azonban arra, hogy – az elektrodinamikai eset analógiájaként – ezt megfelelő körültekintéssel kell megtennünk, hiszen az utóbbi esetben az így nyert egyenletekben fellépő virtuális (ugyanakkor matematikai értelemben adekvát) forrástagok még véges kiterjedésű testek által keltett hullámok esetében sem lokalizáltak.

A sugárzási, vagy TT-mérték meghatározása érdekében induljunk ki a  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzor egy adekvát Minkowski-féle koordinátarendszerre vonatkozó „időszerű és térszerű”

$$h_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|c} h_{tt} & h_{t\bar{\alpha}} \\ \hline h_{\bar{\alpha}t} & h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \end{array} \right) \quad (3.4.45)$$

felbontásából. Vezessük be az így kapott részekre a

$$h_{tt} = 2\phi \quad (3.4.46)$$

$$h_{t\bar{\alpha}} = \beta_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}}\gamma \quad (3.4.47)$$

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} + \frac{1}{3}H\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \partial_{(\bar{\alpha}}\varepsilon_{\bar{\beta})} + \left( \partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}} - \frac{1}{3}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\nabla^2 \right) \lambda, \quad (3.4.48)$$

jelöléseket, ahol  $H \equiv \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ , melyet a  $H = h + 2\phi$  reláció kapcsol a  $h = h^{\alpha}_{\alpha}$  trace-hez.

A  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzor (3.4.45) - (3.4.48) felbontásában szereplő kifejezések attól válnak egyértelműen meghatározottá, hogy rájuk egyrészt

a

$$\partial^{\bar{\alpha}}\beta_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}}\varepsilon_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}}h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} = 0, \quad \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} = 0, \quad (3.4.49)$$

kényszeregyenleteket, másrészt az  $r \rightarrow \infty$  határesetben a

$$\gamma \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{\bar{\alpha}} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \nabla^2 \lambda \rightarrow 0 \quad (3.4.50)$$

határfeltételeket rójuk ki. A (3.4.49) egyenletei közül az utolsó kettő azt fejezi ki, hogy a  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$  divergencia és spúrmentes, mely állapotot angol nyelven a „transverse-traceless” szavak segítségével fejezzük ki. Mivel a szakirodalomban ezen szavak kezdőbetűivel szokás jelölni a „transverse-traceless” kifejezéseket, mi is ezt használjuk a továbbiakban.

Korábban már láttuk, hogy a  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzor komponensei nem mértékinvariánsak, így a  $\phi, \gamma, \lambda, H, \beta_{\bar{\alpha}}, \varepsilon_{\bar{\alpha}}$  kifejezések sem lehetnek azok.

**3.4.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a  $\phi, \gamma, \lambda, H, \beta_{\bar{\alpha}}, \varepsilon_{\bar{\alpha}}$  kifejezésekből képzett*

$$\Phi \equiv -\phi + \partial_t \gamma - \frac{1}{2} \partial_t^2 \lambda \quad (3.4.51)$$

$$\Theta \equiv \frac{1}{3} (H - \nabla^2 \lambda) \quad (3.4.52)$$

$$\Xi_{\bar{\alpha}} \equiv \beta_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} \partial_t \varepsilon_{\bar{\alpha}}, \quad (3.4.53)$$

*kombinációk, valamint a  $3 \times 3$ -as  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$  mátrix mértékinvariáns kifejezések, azaz ezek a kifejezések függetlenek attól, hogy a  $h_{\alpha\beta}$  vagy a vele mértékekiválens  $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\xi_{\beta} + \partial_{\beta}\xi_{\alpha}$  eltéréstenzor komponen-*

seiből kiindulva határozzuk meg őket.

### 3.4.3. Az energia-impulzus tenzor felbontása

Mielőtt az imént bevezetett mennyiségekre vonatkozó téregyenleteket felírnánk, tekintsük az energia-impulzus tenzornak a  $h_{\alpha\beta}$  eltérésten-zorra alkalmazott felbontásához hasonló eljárással nyert

$$T_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|c} T_{tt} & T_{t\bar{\alpha}} \\ \hline T_{\bar{\alpha}t} & T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \end{array} \right), \quad (3.4.54)$$

felbontását, ahol a  $\rho$ ,  $S_{\bar{\alpha}}$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ ,  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségeket az

$$T_{tt} = \rho \quad (3.4.55)$$

$$T_{t\bar{\alpha}} = S_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}} S \quad (3.4.56)$$

$$T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = P\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \partial_{(\bar{\alpha}}\sigma_{\bar{\beta})} + \left( \partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}} - \frac{1}{3}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\nabla^2 \right) \sigma \quad (3.4.57)$$

összefüggések segítségével definiáljuk, míg ezek egyértelmű meghatározottsága érdekében megköveteljük, hogy a

$$\partial^{\bar{\alpha}} S_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}} \sigma_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \quad (3.4.58)$$

kényszeregyenletek és az  $r \rightarrow \infty$  határesetben a

$$S \rightarrow 0, \quad \sigma_{\bar{\alpha}} \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad \nabla^2 \sigma \rightarrow 0 \quad (3.4.59)$$

lecsengési feltételek teljesüljenek. Vegyük észre, hogy (3.4.61) utolsó két relációja értelmében a  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  hármastenzor valójában egy TT-tenzor.

### 3.4.4. $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ nem lokális

Az általános esetben az Einstein- és az anyagi térváltozókra vonatkozó mozgásegyenleteket szimultán kell megoldanunk. A jelen esetben egyedül a geometriára vonatkozó Einstein-egyenletekkel fogunk foglalkozni, azaz a forrásokot alkotó anyag történetét meghatározó mozgásegyenleteket most nem vesszük figyelembe. Ennek megfelelően a jelen fejezet hátralévő részében feltesszük, hogy a forrásokat leíró anyagmezőkhöz tartozó  $T_{\alpha\beta}$  energia-impulzus tenzor ismert.

A  $T_{\alpha\beta}$  energia-impulzus tenzor (3.4.54), valamint (3.4.55) - (3.4.57) által meghatározott felbontását felhasználva a  $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$  megmaradási törvényt a

$$\nabla^2 S = \dot{\rho} \quad (3.4.60)$$

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2}P + \frac{3}{2}\dot{S} \quad (3.4.61)$$

$$\nabla^2 \sigma_{\bar{\alpha}} = 2\dot{S}_{\bar{\alpha}}, \quad (3.4.62)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $\rho = T_{tt}$ ,  $S_{\bar{\alpha}} = T_{t\bar{\alpha}} - \partial_{\bar{\alpha}} S$  és  $P = \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ . Így amikor  $T_{\alpha\beta}$  adott, ezek az egyenletek a  $S$ ,  $\sigma$  és  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségeket a rájuk vonatkozó határfeltételek együtt teljesen meghatározzák.

Mindezek, valamint (3.4.57) figyelembevételével  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  is egyértelműen meghatározott, és a

$$\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - P\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \partial_{(\bar{\alpha}} \sigma_{\bar{\beta})} - \left( \partial_{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\beta}} - \frac{1}{3} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \nabla^2 \right) \sigma \quad (3.4.63)$$

alakban írható fel.



Mivel a (3.4.61) és (3.4.62) egyenleteknek megfelelően a  $\sigma$  és  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségek nem lokálisak,  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  sem lehet az. Ez teljesen analóg az-  
zal az esettel, hogy a Coulomb-mértékben lévő vektorpotenciál térszerű  
részére vonatkozó (3.4.43) Maxwell-egyenletben sem csak a lokalizált  
töltésáramok, hanem a Coulomb-potenciál deriváltjait is tartalmazó úgy-  
nevezett transverse-töltésáram jelenik meg.

### 3.4.5. A linearizált Einstein-egyenletek sugárzási mér- tékben

Egyszerű algebrai átalakítások révén az is megmutatható, hogy a  $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$  Einstein-egyenletek a jelen esetben a

$$\nabla^2 \Theta = -8\pi \rho \quad (3.4.64)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi (\rho + 3P - 3\partial_t S) \quad (3.4.65)$$

$$\nabla^2 \Xi_{\bar{\alpha}} = -16\pi S_{\bar{\alpha}} \quad (3.4.66)$$

$$\square h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} = -16\pi \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \quad (3.4.67)$$

alakban írhatók fel úgy, hogy az ezekben előforduló  $\Theta$ ,  $\Phi$  és  $\Xi_{\bar{\alpha}}$  mennyi-  
ségek a

$$8\pi S = -\partial_t \Theta \quad (3.4.68)$$

$$8\pi \sigma = -\Phi - \frac{1}{2}\Theta \quad (3.4.69)$$

$$8\pi \sigma_{\bar{\alpha}} = -\partial_t \Xi_{\bar{\alpha}} \quad (3.4.70)$$

relációk is teljesülnek.

Ezek az egyenletek nyilvánvalóan mutatják, hogy valóban csak a metrika TT-része tesz eleget hullámegyenletnek, (3.4.67), míg minden más mértékinvariáns mennyiségre Poisson-típusú egyenlet vonatkozik. Utóbbiak az egyenletek értelmében nem időfejlődnek, annak ellenére, hogy mindannyian időfüggők.

Mindezekre alapozottan a szokásos érvelés a következőképpen hangzik: *A források olyan irdatlanul nagy távolságokban vannak tőlünk, hogy nyugodtan feltehetjük, az általuk keltett a gravitációs hullámok ugyanúgy írhatóak le, mint a tisztán vákuum, azaz forrásmentes esetben.*

A fenti analízisből az következik, hogy ez a következtetés hibás, hiszen a (3.4.63) összefüggéssel meghatározott  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  forrástag nem lokális még akkor sem, amikor a  $T_{\alpha\beta}$  energia-impulzus tenzor tartója kompakt.

## 4. fejezet

# A mérhető mennyiségek

A legígéretesebb gravitációs hullámdetektorok lényegében Michelson-féle lézerinterferométerek. Mára ilyen típusú detektoroknak egy egész világhálózata épült ki. Az interferometrikus detektorok működési elve nagyon egyszerű. Az egymásra merőleges három, illetve négy kilométer hosszúságú karokban, a metszéspontban található féligáteresztő tükörtől azonos fázisban indított, majd a végtükrökről visszaverődő és újraegyesülő lézerfény interferenciaképében beálló változásokat figyelik. Ezek engednek következtetni a karok hosszában bekövetkező változásokra. Leegyszerűsítve a karokban utazó lézerfény relatív fázisváltozásából kívánjuk kiolvasni, hogy valóban áthaladt-e gravitációs hullám a detektorunkon.

Ez a magyarázat első ránézésre valóban egyszerűnek tűnik, de hamar elvesztheti a legjáratosabb elme is a magabiztosságát, ha nem vigyáz arra, hogy a Newton-elméletből átvett, megszokásokon alapuló ér-

velések meg ne tréfálják. Vegyük például a jól ismert tényt, miszerint a táguló univerzumban az ott utazó fény hullámhossza is megnő. Mi történik, ha az interferométer karjaiban utazó fény hullámhossza ugyanolyan mértékben nő vagy csökken, ahogyan a karok hossza változik? Ha ez így lenne, egyáltalán nem kellene semmiféle fáziseltolódásnak fellépnie, azaz esélyünk sem lehetne a detektálásra. Egy másik bizonytalanság forrása lehet az, ha például nem jól használjuk ki azt a tényt, hogy az Einstein-elmélet nemcsak a téridő geometriájának változását, de a benne mozgó anyag és fizikai mezők történetét, valamint a geometriát meghatározó anyageloszlásban beálló változásokat is leírja. Így például mind a gravitációs hullámkeltési folyamatát, mind a keltett gravitációs hullámnak a detektorunkig történő utazását, mind pedig a próbarészecskék szerepét játszó tükrök mozgását. Igaz az, hogy a járulékos változások mind meghatározhatók, és azok, amelyeket elhanyagolunk, valóban elhanyagolhatók? Ha igen, miért?

## 4.1. Mértékválasztás

A fenti kérdések megválaszolása során ismét fontos szerepet játszik a megfelelő mérték alkalmazása. Miután egy alkalmas mértéket kiválasztottunk, először a detektor tükreinek, mint próbarészecskéknek a mozgását tekintjük, majd a detektor karjaiban mozgó fotonok rövid leírását adjuk az alkalmazott lineáris közelítésben.

Általában egy világvonalra, vagy történetre úgy gondolhatunk, mint az adott részecske, vagy próbatest mozgása során érintett téridőpon-

tok koordinátáinak valamely  $\tau$  paramétertől való függését meghatározó  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  relációra. Olyan tömeges próbarészecskék, mint például a tükrök esetén a legalkalmasabb paraméter a tükrök világvonala mentén a tükrökkel együtt mozgó óra által mért sajátidő.

Így a tükrök, melyek a felfüggesztésükre merőleges síkban szabadon elmozoghatnak, olyan  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  geodetikusokkal jeleníthetők meg, amelyek  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)$  érintővektorának térszerű része az

$$u^\varepsilon \nabla_\varepsilon u^{\bar{\alpha}} = \frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{d\tau^2} + \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\varepsilon\varphi} u^\varepsilon u^\varphi = 0 \quad (4.1.1)$$

egyenletnek tesz eleget.

Láttuk, hogy tetszőleges  $\xi^\alpha$  infinitezimális vektormező által indukált

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha \quad (4.1.2)$$

koordinátatranszformáció hatására (lineáris közelítésben) a  $h_{ab}$  eltéréstenzor a

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha \quad (4.1.3)$$

szabály szerint változik.

A (2.3.4) összefüggés egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezen változásra nézve a Christoffel-szimbólumok nem invariánsak, és így a (4.1.1) egyenlettel meghatározott próbarészecskék pályái sem azok. Kicsit pontosabban fogalmazva, a  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  metrikához tartozó globális Minkowski-féle  $x^\alpha$  koordinátákban felírt Christoffel-szimbólumok és az  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  pálya függvényalakja különbözik a  $g'_{ab} = \eta_{ab} +$

$h'_{ab}$  metrikához  $x'^\alpha$  koordinátákban felírt Christoffel-szimbólumoktól és az  $x'^\alpha = x'^\alpha(\tau)$  pálya függvényalakjától.

Ez azt jelenti – és ez az általános relativitáselmélet keretein belül nem is kellene, hogy nagyon meglepő legyen –, hogy arra a kérdésre nem adható mérték- és koordináta-választástól független válasz, hogy valamely részecske koordináta-világvonala milyen  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  függvénykapcsolattal adható meg. Éppen ezért érdemes körültekintőnek lenni, amikor a fent megfogalmazott kérdéseinkre válaszokat keresünk.

Mind ezidáig a linearizált elmélet keretein belül is már többször alkalmaztuk az általános relativitáselmélet diffeomorfizmusinvarianciájából adódó mértékszabadságot. Felmerülhet a kérdés, vajon nem egyszerű gauge-effektus-e a vizsgált hullámjelenség és mint ilyen esetleg nem is mérhető. Ebből a szempontból alapvető fontossággal bír annak a kérdésnek a tisztázása, hogy van-e egyáltalán, és ha van, mely mennyiségek mértékinvariánsak a linearizált elméletben?

**4.1.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az (4.1.2) és (4.1.3) transzformációk alkalmazása során a linearizált Riemann-tenzor*

$${}^{(1)}R_{abcd} = \frac{1}{2}(\partial_b\partial_ch_{ad} + \partial_d\partial_ah_{bc} - \partial_b\partial_dh_{ac} - \partial_a\partial_ch_{bd}) \quad (4.1.4)$$

*invariáns marad, azaz a  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  metrikához tartozó linearizált Riemann-tenzornak az  $x^\alpha$  koordinátákhoz tartozó  $\{(\partial/\partial x^\alpha)\}$  koordináta bázisvektorokra vonatkozó komponensei megegyeznek a transzformált  $g'_{ab} = \eta_{ab} + h'_{ab}$  metrikához tartozó  $x'^\alpha$  koordináták által meghatározott  $\{(\partial/\partial x'^\alpha)\}$  koordináta bázisvektorokra vonatkozó komponenseivel.*

Fontos kiemelni, hogy a soron következő számítások tetszőleges mértékben és az ehhez illeszkedő megfelelő koordinátaválasztás mellett elvégezhetők. A számításaink egyszerűbb elvégezhetősége érdekében ennek az alfejezetnek a hátralévő részében mindenütt az anyagmentes esetben szokásos „sugárzási mértékválasztáshoz” illeszkedő lokális koordinátákat használunk. Hangsúlyozni szeretnénk azonban, hogy bármilyen koordinátákat is használunk, csak a mértékinvariáns, azaz a koordináták megválasztásától független kifejezések bírnak valódi fizikai jelentéssel. Mivel a görbületi tenzor komponensei függetlenek az alkalmazott mértéktől, érdemes lenne a detektorok által mért fizikai mennyiséget is ezek segítségével kifejeznünk.

Ahogy az a (3.2.28) - (3.2.31) egyenletekből következik, a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordináták alkalmazása esetén a  $h_{t\alpha}$  ( $\alpha = t, x, y, z$ ) kifejezések zérus értékűek. Ennek megfelelően a (2.3.4) összefüggés által meghatározott Christoffel-szimbólumokra a

$$\Gamma^{\bar{\alpha}}_{tt} = 0 \quad (\bar{\alpha} = 1, 2, 3) \quad (4.1.5)$$

egyenlet adódik. Továbbá, mivel most  $g_{tt} = -1$  és  $g_{t\alpha} = 0$  – és így az is igaz, hogy a  $t$  koordinátaidő éppen a tükrök világvonala mentén mért  $\tau$  sajátidővel esik egybe – a (4.1.5) és (4.1.1) összefüggések alapján azt kapjuk, hogy  $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0$ . Feltéve, hogy a tükrök kezdetben nyugalomban vannak, azaz a  $\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$ , a detektor tükreinek térszerű koordinátái nem változnak meg akkor sem, ha gravitációs hullám halad át a detektoron.

Fontos hangsúlyozni, hogy ez nem azt jelenti, hogy tükrök nem mozognak. Az imént megfogalmazott következtetés nem a tükrök távol-

ságának állandóságát jelenti, egyedül a tükrök térszerű koordinátáinak időbeni változatlanóságát fogalmazza meg a kiválasztott koordinátarendszerre vonatkozóan.

Az imént megfogalmazott érveléshez hasonlóan a (4.1.4) egyenletből az is következik, hogy a kiválasztott, a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordinátarendszerben a Riemann-tenzor árapály komponenseit a

$$R_{\bar{\alpha}t\bar{\beta}t} = -\frac{1}{2}\partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (4.1.6)$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Annak megértésében, hogy a  $\frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{d\tau^2} = 0$  és a (4.1.6) egyenletek nem mondanak ellent egymásnak, segíthet az alábbi feladatban megfogalmazott állítás ellenőrzése.

**4.1.2. Feladat.** *Ismert, hogy a  $T^a$  érintővektorral és  $X^a$  eltérésvektorral jellemzett egyparaméteres geodetikus kongruenciák*

$$a^a = T^e \nabla_e (T^f \nabla_f X^a) \quad (4.1.7)$$

*relatív gyorsulására*

$$T^e \nabla_e (T^f \nabla_f X^a) = -R_{efd}{}^a T^e X^f T^d \quad (4.1.8)$$

*teljesül. Mutassuk meg, hogy bármely a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordinátarendszerben, ahol  $t$  koordinátavonalak, mint geodetikusok  $u^a$  érintővektorára az  $u^\alpha = (\partial/\partial t)^\alpha = \delta^\alpha_t$  reláció teljesül, a térszerű  $X^a_{(\bar{\beta})} = (\partial/\partial x^{\bar{\beta}})^a$  koordináta bázisvektorokra, mint eltérésvektorok második  $u^a$  menti kovariáns deriváltjára, a (4.1.6) egyenlettel*



összhangban, az

$$u^\varepsilon \nabla_\varepsilon (u^\varphi \nabla_\varphi X^{\bar{\beta}}) = \frac{1}{2} \partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} X^{\bar{\alpha}} \quad (4.1.9)$$

egyenlet teljesül, ahol kihasználtuk azt, hogy a felülvonásos térszerű koordinátakomponensek indexe előjelváltoztatás nélkül szabadon lehúzható, vagy felemelhető.

## 4.2. A megfigyelésről

Tekintsünk most egy realisztikus, bár lényegesen leegyszerűsített interferencia elvén működő detektor elrendezését. A LIGO és Virgo detektorok esetében a legnagyobb érzékenység a 200 Hz körüli frekvenciatartományba esik. A számítások egyszerűsítése érdekében tekintsük ennek a frekvenciának a felét. Első hallásra meglepő, de az ennek megfelelő frekvenciájú gravitációs hullám  $\lambda$  hullámhossza körülbelül 3000 km. A detektor bármely pontjában egy ilyen hullám két azonos fázisú állapotának megjelenése között – az imént megfogalmazott frekvenciafeltételünk értelmében –  $t_{gh} \sim 10^{-2} s$  idő telik el.

Ez azt jelenti, hogy a fényjeleknek egy, a karok mentén oda-vissza történő utazása során a  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  komponensek értéke, az általánosság megszorítása nélkül, jó közelítéssel állandónak tekinthető<sup>1</sup>, hiszen az elektromágneses hullámok  $t_{eh} \sim \frac{2 \cdot 50 \cdot 3 \text{ km}}{300,000 \text{ km/s}} = 10^{-3} s$  idő alatt 50-szer teszik

---

<sup>1</sup>Fontos megemlíteni, hogy a LISA detektor geometriai elrendezése és méretei lényegesen mások, így a LISA esetében az alábbi argumentum alkalmazása nem adekvát.

meg az oda-vissza utat a detektorkarok mentén.

Ahogy azt már fentebb említettük, az alkalmazott koordinátáinkra vonatkozó feltételeket összegezve azt mondhatjuk, hogy a kiválasztott koordinátarendszerben  $g_{tt} = -1$  és  $g_{t\alpha} = 0$ , így a koordinátaidő  $t$  éppen a tükrök világvonala mentén mért sajátidővel esik egybe. A térszerű koordináták azonban még a  $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  térszerű komponensek viszonylagos állandósága ellenére sem esnek egybe valamely inerciális megfigyelőkhöz tartozó szokásos koordinátákkal.

Válasszuk most a koordinátarendszerünk térszerű koordinátáit úgy, hogy azok origója a féligáteresztő tükörnél legyen, míg az interferométer karjainak végén található tükrök külön-külön helyezkedjenek el az  $x$ -, illetve  $y$ -tengelyek mentén.

A detektor karjaiban utazó fotonok történetére – geometriai optika közelítésben – mint fényszerű geodetikusra gondolhatunk, amely mentén alkalmas affin paraméterként szolgál az  $A_a = A_a^\circ \exp[i\phi]$  vektorpotenciál által meghatározott elektromágneses hullám  $\phi = \phi(x^\mu)$  fázisa.<sup>2</sup>

Például, az  $x$ -tengely mentén mozgó fotonokat megjelenítő elektro-

---

<sup>2</sup>Az imént felírt vektorpotenciál komplex és ahogy azt korábban is említettük csak a komplex konjugált kifejezés hozzáadásával nyert valós rész tekinthető fizikainak. A formulák egyszerűbb alakját elsődlegesnek tartva ebben a részben mindenütt a komplex  $A_a$ -vel dolgozunk annak tudatában, hogy az ily módon nyert kifejezések mindegyike teljesül  $A_a$  valós részére is. Fontos azt is felidézni, hogy egy  $\omega$  (kör)frekvenciájú  $k^a$  hullámszám vektorú elektromágneses síkhullám fázisát a  $\phi = k_\alpha x^\alpha$  alakban írhatjuk fel.

mágneses tér  $A_a$  vektorpotenciáljára vonatkozó hullámoperátor a

$$\nabla^\varepsilon \nabla_\varepsilon A_\alpha = \square^x A_\alpha = \left( -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + (1 + h_{xx}) \partial_x^2 \right) A_\alpha = \left( -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \partial_{x'}^2 \right) A_\alpha \quad (4.2.10)$$

alakban írható fel, ahol az utolsó lépésben bevezetett  $x'$  koordinátát a

$$dx'/dx = \sqrt{1 + h_{xx}} \sim 1 + \frac{1}{2} h_{xx} \quad (4.2.11)$$

reláció határozza meg.

Így a  $(t, x', y, z)$  koordinátákban a fotonok evolúciójára vonatkozó hullámegyenlet pontosan úgy néz ki, mintha azok a Minkowski-téridőben utaznának. Ezért a fotonok elektrodinamikai megjelenítésére szolgáló  $A_a$  vektorpotenciál fázisváltozásának meghatározása során nyugodtan alkalmazhatjuk a speciális relativitáselméletben megszokott formulákat. Mindezeknek megfelelően az  $x$ -tengely mentén mozgó  $\omega$  körfrekvenciájú  $k^\alpha = (\omega, \omega, 0, 0)$  hullámszám-vektorú elektromágneses hullám  $\phi^{(x)} = k_\alpha x'^\alpha$  fázisának megváltozását – az  $x$ -tengelyen fekvő kar mentén egy oda-vissza út során – a

$$\delta\phi^{(x)} = k_\alpha x'^\alpha = \omega (ct - 2x'_m) = \omega \left( ct - 2 \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{xx} \right] x_m \right) \quad (4.2.12)$$

formulával adhatjuk meg, ahol – a korábban tett megállapításainknak megfelelően – azt is kihasználtuk, hogy az alkalmazott koordinátarendszerben a  $t$  koordinátaidő éppen a tükrök mentén mért sajátidővel egyezik meg. Ezek alapján a két karban külön-külön mozgó fényjelek fáziseltérése – ez a féligáteresztő tükrőtől egyszerre, ugyanabban a fázis-

ban induló fényjelek fázisában az utazásuk során változik, de csak a féligáteresztő tükörnél történő újraegyesülésükkor válik mérhetővé – az utazási távolságkülönbségek  $\omega$ -szorosával egyezik meg, azaz

$$\delta\phi = \delta\phi^{(y)} - \delta\phi^{(x)} = \omega x_m (2 + h_{xx}) - \omega y_m (2 + h_{yy}), \quad (4.2.13)$$

ahol  $x_m$  és  $y_m$  a karok végén található tükrök a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordinátarendszerben állandó (nem zérus értékű) térszerű koordinátáit jelöli. A kiinduló feltevéseinkkel összhangban, a zárójelekben álló kifejezések közül az első mindkét esetben sokkal nagyobb, mint a második. Azonban ezek a kifejezések időfüggetlenek, így tőlük időderiválással megszabadulhatunk. Annak érdekében, hogy mértékfüggetlen mennyiségeket kaphassunk célszerűbb a (4.2.13) reláció kétszeres időderiváltját, azaz a

$$\frac{d^2\delta\phi}{dt^2} = \omega (x_m \partial_t^2 h_{xx} - y_m \partial_t^2 h_{yy}) \quad (4.2.14)$$

egyenletet tekintenünk. Mivel az  $x_m$  és  $y_m$  értékek – legalábbis nulldrendben biztosan – helyettesíthetők a karok közös  $L$  hosszúságával, továbbá az általunk használt koordinátarendszerben a (4.1.6) reláció alapján a  $\partial_t^2 h_{xx}$  és  $\partial_t^2 h_{yy}$  kifejezéseket, valamint a görbületi tenzor  $R_{xtxt}$  és  $R_{ytyt}$  árapály komponenseinek egyenlőségét kihasználva (4.2.13)-ból kapjuk a

$$\frac{d^2\delta\phi}{dt^2} = 2\omega L (R_{xtxt} - R_{ytyt}) \quad (4.2.15)$$

relációt. Így a fáziseltérés időszerinti második deriváltját, mely a detektorok által mérhető mennyiség, a mértékinvariáns görbületi tenzor

árapály komponensei segítségével tudtuk kifejezni.

Érdemes kiemelni, hogy amint az a fenti levezetésből is jól látszik, hogy bár a detektor tükreinek térszerű koordinátái időben változatlanok, a köztük lévő távolság megváltozik, amikor gravitációs hullám halad át a detektorunkon. Az, hogy a köztük lévő távolság megváltozását a tükrök mozgásaként, vagy az őket elválasztó tér tágulásaként, illetve összehúzódásaként interpretáljuk, ízlés kérdése. Ami nem szabad választás kérdése, az a mértékinvariáns mennyiségekre kapott összefüggések, például a fáziseltérés második időderiváltjára, mint megfigyelhető mennyiségre kapott (4.2.15) összefüggés szükségszerű komolyan vétele a gravitációs hullámok megfigyelése során.

### 4.2.1. A detektor válasza valódi források figyelembevételével

A (4.1.8) egyenletből az is következik, hogy a detektorainkhoz érkező gravitációs hullámok a detektor tükreinek  $L^{\tilde{\alpha}}(t)$  valódi távolságában az

$$\frac{d^2 L^{\tilde{\alpha}}(t)}{dt^2} = -R^{\tilde{\alpha}}_{i\tilde{\beta}t} L^{\tilde{\beta}}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.2.16)$$

egyenletnek megfelelő változást idéznek elő, ahol az  $R^{\tilde{\alpha}}_{i\tilde{\beta}t}$  kifejezések a különben mértékinvariáns görbület árapály részét jelölik.

Azt is láttuk, hogy az  $L^{\tilde{\alpha}}(t) = L^{\tilde{\alpha}}_0 + \delta L^{\tilde{\alpha}}(t)$  helyettesítés, valamint a  $|\delta \mathbf{L}| \ll |\mathbf{L}_0|$  feltétel biztosítása mellett, a (4.1.6) összefüggést, valamint a szokásos  $\left. \frac{d(\delta L^{\tilde{\alpha}})}{dt} \right|_{t_0} = \delta L^{\tilde{\alpha}}|_{t_0} = 0$  kezdőfeltételeket használva azt

kapjuk, hogy a karok hosszváltozására

$$\delta L_{\bar{\alpha}}(t) = \frac{1}{2} h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} L_0^{\bar{\beta}} \quad (4.2.17)$$

teljesül.

Akkor azonban, amikor a gravitációs hullámokat valódi források keltik, a görbület mértékinvariáns részeire az

$$R_{\bar{\alpha}t\bar{\beta}t} = -\frac{1}{2} \partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} + \partial_{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\beta}} \Phi + \partial_t \partial_{(\bar{\alpha}} \Xi_{\bar{\beta})} - \frac{1}{2} (\partial_t^2 \Theta) \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (4.2.18)$$

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}t} = \partial_t \partial_{[\bar{\alpha}} h_{\bar{\beta}]k}^{\text{TT}} + \partial_{[\bar{\alpha}} \Xi_{\bar{\beta}]k} + (\partial_t \partial_{[\bar{\alpha}} \Theta) \delta_{\bar{\beta}]k} \quad (4.2.19)$$

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} = \partial_{\bar{\beta}} \partial_{[\bar{\gamma}} h_{\bar{\delta}]\bar{\alpha}}^{\text{TT}} - \partial_{\bar{\alpha}} \partial_{[\bar{\gamma}} h_{\bar{\delta}]\bar{\beta}}^{\text{TT}} - (\partial_{\bar{\alpha}} \partial_{[\bar{\gamma}} \Theta) \delta_{\bar{\delta}]\bar{\beta}} + (\partial_{\bar{\beta}} \partial_{[\bar{\gamma}} \Theta) \delta_{\bar{\delta}]\bar{\alpha}} \quad (4.2.20)$$

relációk teljesülnek.

Mivel a különféle potenciálok,  $\Phi, \Theta, \Xi_{\bar{\beta}}, h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$ , eredendően  $\frac{1}{r}$  rendben csengnek le az  $r \rightarrow \infty$  határesetben  $\partial_{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\beta}} \Phi$  például már  $\frac{1}{r^3}$ , míg  $\partial_t \partial_{(\bar{\alpha}} \Xi_{\bar{\beta})}$  egy kicsit lassabb  $\frac{1}{r^2}$  rendben cseng le. Ezekkel szemben a  $\partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$ , valamint a  $\partial_t^2 \Theta$  kifejezések továbbra is  $\frac{1}{r}$  rendben csengenek le a vizsgált  $r \rightarrow \infty$  határesetben. Ezért (4.2.16) és (4.2.18) alapján a detektorkarok hosszváltozásra (4.2.17) helyett a

$$\delta L_{\bar{\alpha}}(t) \approx \frac{1}{2} \left[ h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} + \Theta \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right] L_0^{\bar{\beta}} \quad (4.2.21)$$

összefüggés teljesül.

Newtoni közelítésben a második tag járuléka elhanyagolható, illetve kompenzálható. Azonban a fizikailag reális dinamikai esetekben  $\Theta$  já-

mulékát, valamint a sugárzási visszahatást is figyelembe kell vennünk. Utóbbi azt jelenti, hogy  $T_{\alpha\beta}$ -t mindenütt a  $T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{GW}$  kifejezéssel kell helyettesítenünk, ahol  $t_{\alpha\beta}^{GW} = -\frac{1}{8\pi} {}^{(2)}G_{\alpha\beta}$ , ahol  ${}^{(2)}G_{\alpha\beta}$  az Einstein-tenzor pontosan másodrendű tagjait tartalmazza. Ekkor az érvelésünk korábbi részében alkalmazott megmaradási törvényt is a  $\partial^\alpha (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{GW}) = 0$  összefüggéssel kell helyettesítenünk.

Fontos annak hangsúlyozása is, hogy a  $\rho$ ,  $S_{\bar{\alpha}}$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ ,  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségek értelemszerű újradefiniálása mellett minden korábbi egyenletünk érvényben marad, továbbá a (4.2.21) egyenlet második tagja, függetlenül a gravitációs hullámot keltő asztrofizikai folyamatától,  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{TT}$ -val összemérhető, időben változó és a

$$\nabla^2 \Theta = -8\pi (T_{00} + t_{00}^{GW}) < 0 \quad (4.2.22)$$

egyenlet értelmében mindenütt pozitív járulékot ad.

Ennek megfelelően a (4.2.21) egyenlet jobb oldalán álló második tag egy esetleg csak kicsiny mértékű, de mindenkor izotróp expanziót eredményez, melyet a karok relatív hosszváltozására érzékeny LIGO-Virgo típusú detektorok nem képesek érzékelni.

A pontos mennyiségi változások kiszámítása nélkül is felmerül az a kérdés, hogy honnan származhat az univerzum expanzióját előidéző térfogat-növekedéshez szükséges energia. Előfordulhat, hogy a források által gravitációs hullámok alakjában kibocsátott energia egy része esetleg nem a sugárzási szabadsági fokok közvetítésével jut el hozzánk? Számos hasonló kérdést tehetnénk még fel, azonban ezek megválaszo-

lása csak a nemlineáris visszahatást is figyelembe vevő, azaz a teljes Einstein-egyenletek használatán alapuló analitikus és numerikus vizsgálatok segítségével történhet majd meg.



# Irodalomjegyzék

- [1] G.D. Birkhoff: *Relativity and Modern Physics* Cambridge, MA: Harvard University Press. LCCN 23008297 (1923)
- [2] Y. Choquet-Bruhat, H. Friedrich: *Motion of isolated bodies*, Class. Quant. Grav. **23**, 5941-5950 (2006)
- [3] J. Ehlers and R. Geroch: *Equation of Motion of Small Bodies in Relativity*, Annals. Phys. **309**, 232-236 (2004)
- [4] E. Fomalont, S. Kopeikin, G. Lanyi, J. Benson: *Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA*, Astrophys. J. **699**, 1395-1402 (2009)
- [5] A. Friedman: *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik A **10**, 377-386 (1922)
- [6] H. Friedrich: *On the hyperbolicity of Einstein's equations and other gauge field equations*, Commun. Math. Phys. **100**, 525-543 (1985)
- [7] H. Friedrich, A. D. Rendall: *The Cauchy Problem for the Einstein Equations*, Lect. Notes Phys. **540** 127-224 (2000)
- [8] H. Friedrich: *Hyperbolic reductions for Einstein's equations*, Class. Quant. Grav. **13**, 1451-1469 (1996)
- [9] R. Geroch, L. Lindblom, *Causal Theories of Dissipative Relativistic Fluids*, Ann. Phys. (NY) **207**, 394-416 (1991)
- [10] B. Hamvas: *Anthologia humana*, MEDIO Kiadó (1996)

- [11] S.W. Hawking and G.R.F. Ellis: *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, (1973)
- [12] D. Hilbert: *Die Grundlagen der Physik*, Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr. Math.-Phys. Kl. 395-407 (1915)
- [13] E. Hubble: *The Exploration of Space*, Harper's Magazine **158**, 732 (1929)
- [14] J.D. Jackson: *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc. 3rd ed. (1999)
- [15] S. Kobayashi és K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*. Interscience (Wiley), New York (1963)
- [16] M.D. Kruskal: *Maximal Extension Of Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960)
- [17] G. Lemaître: *Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **91**, 483-490 (1931)
- [18] L. Markus: *Line Element Fields and Lorentz Structures on Differentiable Manifolds*, Ann. Math. **62**, 411-417 (1955)
- [19] A. Palatini: Rend. Circ. Math. Palermo **43**, 203 (1919)
- [20] R. Penrose: *Techniques of differential topology in relativity*, SIAM, No. 7., Philadelphia (1972)
- [21] R. Penrose and W. Rindler: *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press (1987)
- [22] R. Penrose and W. Rindler: *Spinors and Space-Time: Volume 2, Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge University Press (1988)
- [23] A.A. Penzias, R. W. Wilson: *A Measurement Of Excess Antenna Temperature At 4080 Mc/s*, Astrophysical Journal Letters **142**, 419-421 (1965)

- [24] A.A. Penzias, R. W. Wilson: *A Measurement of the Flux Density of CAS A At 4080 Mc/s*, Astrophysical Journal Letters **142**, 1149-1154 (1965)
- [25] R.V. Pound, Jr.G.A. Rebka: *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*, Phys. Rev. Letters **3**, 439-441 (1959)
- [26] R.V. Pound, Jr.G.A. Rebka: *Apparent weight of photons*, Phys. Rev. Letters **4**, 337-341 (1959)
- [27] I. Rácz: *Spacetime extensions I.*, J. Math. Phys. **34**, 2448 - 2464 (1993)
- [28] I. Rácz: *Space-time extensions II*, Class. Quant. Grav. **27**, 155007 (2010)
- [29] M. Reed és B. Simon: *Methods of modern mathematical physics, 1. volume: Functional Analysis*, Academic Press, INC. (1981)
- [30] H.P. Robertson: *Kinematics and world structure*, Astrophysical Journal **82**, 284-301 (1935)
- [31] H.P. Robertson: *Kinematics and world structure II.*, Astrophysical Journal **83**, 187-201 (1936)
- [32] H.P. Robertson: *Kinematics and world structure III.*, Astrophysical Journal **83**, 257-271 (1936)
- [33] K. Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **1**, 189-196 (1916)
- [34] G. Szekeres: *On the singularities of a Riemannian manifold*, Puhl. Mat. Dehrecen **7**, 285 (1960)
- [35] R. Sverdlov: *Spinor fields in causal set theory*, arXiv:0808.2956 (2008)
- [36] R.C. Tolman: *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, Phys. Rev. **55**, 364-373 (1939)

- [37] R.M. Wald: *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [38] A.G. Walker: *On Milne's theory of world-structure*, Proceedings of the London Mathematical Society 2 **42**, 90-127 (1937)
- [39] C. von Westenholtz: *Differential forms in mathematical physics*, North-Holland, Amsterdam, (1981)
- [40] E.P. Wigner: *Relativistic Invariance and Quantum Phenomena*, Rev. Mod. Phys. **29**, 255-268 (1957)





## **Rácz István**

A Wigner Fizikai Kutatóközpont  
tudományos tanácsadója, az MTA  
doktora, címzetes egyetemi tanár

---

Einstein már 1916-ban, közvetlenül az általános relativitáselmélet megalkotása után felismerte, hogy elmélete alkalmas a gravitációs hullámok leírására, majd vizsgálta azok tulajdonságait. Einstein elmélete segítségével azt is megjósolta, hogy a gravitációs tér csillagászati léptékű és erősen aszimmetrikus dinamikus folyamatai során rengeteg energia szabadulhat fel gravitációs hullámok formájában, ugyanakkor ezek a távoli megfigyelők számára nagyon gyenge változásokként jelennek meg.

Az Einstein-elmélet a gravitáció egy olyan geometrizált elmélete, amelyben nincs gravitációs erő, helyette a gravitációs hatások a téridő geometriájának görbültségén keresztül jeleníthetők meg. Az elmélet alapján a Világmindenségben található anyag elhelyezkedése és mozgása határozza meg annak geometriáját, ugyanakkor az Univerzumot felépítő anyag fejlődése csak ezen – az időben és térben is változó – geometria fejlődésével együtt írható le. Mindezekkel összhangban a gravitációs hullámokra mint a hullámforrások környezetében kialakuló geometriai változásoknak a téridőben fénysebességgel tovaterjedő hatására gondolhatunk.

A tudományos közösség várakozásai szerint a gravitációs hullámok első közvetlen detektálása néhány éven belül megtörténik. Ez a megfigyelés és ezt követően a gravitációshullám-csillagászat kialakulása korszakalkotó jelentőségű lesz, hiszen csak ezen hullámok segítségével nyerhetünk közvetlen információt az univerzum 96%-át kitevő „sötét rész”, a sötét energia és a sötét anyag mibenlétéről.

---

A kötet témaválasztásához kapcsolódó kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.