

RÁCZ ISTVÁN

# Bevezetés az Einstein-féle gravitációelméletbe



RÁCZ ISTVÁN

# Bevezetés az Einstein-féle gravitációelméletbe



Rácz István

# Bevezetés az Einstein-féle gravitációelméletbe



Nagykanizsa, 2014

A könyv témaválasztásához kapcsolódó kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

ISBN 978-963-9782-39-6

Kiadja:  
Czupi Kiadó  
8831 Nagykánizsa, Pityer u. 19.  
Tel: 93 320 766  
[www.czupi.hu](http://www.czupi.hu)

*Gyermekeimnek*

*Zsoltnak, Orsolyának és Zoltánnak*





# Előszó

Az általános relativitáselmélet a gravitációs kölcsönhatás – kísérletek által a többi fizikai elmülethez viszonyítva is nagyon nagy pontossággal igazolt – klasszikus geometrizált elmélete. Klasszikus abban az értelemben, hogy a kvantumfizika eszköztárára semmilyen formában nem épít. A klasszikus jelző ugyanakkor furcsán is hat, hiszen ez az elmélet alapjaiban rázta meg a korábbi térről és időről kialakított elképzeléseinket. A teret és az időt már a speciális relativitáselmélet egymásba ötvözte, és egy merőben új fogalommal, a téridővel helyettesítette. Az általános relativitáselmélet ennél lényegesen tovább megy, hiszen nem csupán az anyag történetének egy egyszer és mindenkorra rögzített geometriai háttéren realizálódó leírására vállalkozik, hanem egy impozáns, a modern fizika elvárásaival is összeegyeztethető modelljét kínálja az anyag és geometria kölcsönös meghatározottságának.

Bármely fizikai elmélet, amely a téridőt is mint dinamikai egységet kezeli, magától értetődő módon általános érdeklődésre tarthat számot. Valójában ennél sokkal több is igaz. Az elmélet a csillagászati megfigyelések magyarázatának keresése során nagyon sokszor érdekes és új megvilágítást biztosító értelmezéssel szolgált és szolgál napjainkban is.

Nem szabad elfeledkeznünk arról sem, hogy az elmélet közel százéves története során folyamatosan változó intenzitású fejlődési korszakokon ment át és lényegében csak a hatvanas évek elejétől tartozik az igazán dinamikus fejlődő modern fizikai elméletek közé. Ennek csak egyik oka, hogy az elmé-

let valóban precíz matematikai megfogalmazása a fizikus körökben szokatlan differenciálgeometriai ismeretek alkalmazásán alapul. Ezzel párhuzamosan az sem elhanyagolható, hogy a huszadik század első kétharmada kétségkívül a kvantummechanika és a kvantumtérelmélet virágkora, mely a legjelentősebb kutató műhelyeket az adott időszakban teljesen lekötötte. Mindezekhez járul még az a nagyon egyszerű tény, hogy a természetben ismert négy alapvető kölcsönhatás közül – ezek a részecskék erős és gyenge kölcsönhatását leíró erők, valamint az elektromágneses és a gravitációs erők – környezetünkben kétségkívül a gravitációs kölcsönhatás a leggyengébb. Érdekes azonban észben tartani, hogy az univerzum nagy léptékű struktúrájának kialakításában mégis ez a környezetünkben meglepően gyenge kölcsönhatás játssza a főszerepet. Ennek az egyik oka, hogy a az erős és a gyenge kölcsönhatás nagyon rövid ( $< 10^{-13}_{[cm]}$ ) hatótávolságú. Emellett, bár az elektromos kölcsönhatás a nála sokkal gyengébb gravitációs kölcsönhatáshoz hasonlóan végtelen hatótávolságú, elegendően nagy léptékben nézve az univerzum elektromosan semleges, vagyis az azonos és ellentétes előjelű töltések között fellépő taszító és vonzó erők lényegében mindenhol közömbösítik egymást. A gravitáció esetében ezzel szemben nem léteznek ilyen ellentétes hatású töltések, így kozmológiai léptékben mérve egyedülálló univerzális és minden más kölcsönhatásnál számottevőbb erőhatást eredményez. Fontos azt is kiemelni, hogy a gravitáció nem csak az univerzum egésze szempontjából játszik alapvető szerepet. Meglepő módon viszonylag rövid hatótávolságon is dominánssá válhat. Például a neutronok degenerációs nyomását produkáló legerősebb magerőket is felülmúlja, miközben valamely elegendően nagy tömegű neutroncsillagból a gravitációs összeomlási folyamat révén feketelyukat alakít ki. Ezen utóbbi körülmények között talán nem is teljesen adekvát az alapkölcsönhatások erősségének szokásos összehasonlítását alkalmazni.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy nemcsak az a fontos, hogy a gravitáció bizonyos helyzetekben a legjelentősebb kölcsönhatássá válik. Az is lényeges tulajdonsága, hogy minden részecskére, annak egyedi anyagi sajátosságaitól

függetlenül, egyformán fejti ki hatását. Érdeemes felidézni, Arisztotelész még azt állította, hogy a nehezebb testek gyorsabban, a könnyebbek lassabban esnek. Galilei kísérleteivel valószínűleg elsőként bizonyította azt, hogy a lejtőn leguruló vagy a szabadon eső golyók a tömegüktől függetlenül gyorsulnak. Ezt a felismerést azzal kiegészítve, hogy az anyagi minőség sem játszik szerepet, Eötvös Loránd, a róla elnevezett ingával a 19. század végére nagyon nagy pontossággal kísérletileg is ellenőrizte. Eötvös méréseinek legfontosabb következménye az, hogy „Ha lenne eltérés a különböző anyagok vonzásában, akkor annak  $5 \cdot 10^{-9}$  értéknél kisebbnek kellene lennie.” Ezek a mérések alapvető szerepet játszottak abban, hogy Einstein az új gravitációelmélet megalkotása során nem egyszerűen a Newton-féle elmélet relativizált változatát kereste, hanem annál egy sokkal impozánsabb geometrizált elméletet dolgozott ki. Einstein elméletében a gravitációs kölcsönhatást a téridő geometriájának nem triviális görbült jellegével helyettesítette, ahol a görbültség mértékét az anyag eloszlása és mozgásállapota határozza meg.

Einstein elmélete ad elegáns formát Bolyai, Riemann, Poincaré és Mach a 19. században megfogalmazott azon vélekedésének – melyet a tudománytörténet ma Mach-elvként ismer –, miszerint a fizikai valóságot valamely nemeuklideszi geometria írja le.

Az elmélet első kísérleti bizonyítékát az Eddington által 1919-ben vezetett csillagászati megfigyelések adták. Tapasztalataik szerint az erős „gravitációs térben” a fénysugarak az Einstein-elmélet által megjósolt mértékben hajlanak el. Ennek a megfigyelésnek két fontos következménye volt. Az első az, hogy megerősítette az elmélet alapfeltevését, miszerint a téridő geometriája nem sík (és nem is konformisan sík). A másik következmény a téridőt alkotó események összességén értelmezett oksági relációt érinti. Mivel Einstein relativitáselmélete alapján semmilyen fizikai hatás nem terjedhet a vákuumbeli fény sebességénél gyorsabban, az, hogy a gravitáció Einstein-féle elméletében a fényjelek pályája megváltozhat a gravitáció hatására, azt jelenti, hogy a görbült téridőben az oksági relációk is közvetve az anyag eloszlása és mozgás-

állapota által meghatározottak.

A gravitációnak éppen ez a tulajdonsága vezet az Einstein-elmélet egyik legmeglepőbb problémaköréhez, a feketelyukak létezéséhez. Kialakulhat ugyanis az anyag olyan nagy mértékű koncentrációja, mely az adott térrészből még a fényjelek kijutását is képes megakadályozni. Ha nem juthat onnan ki fény, akkor fekete. Érdekes azonban észben tartani, hogy ez a „feketesség” még nem zárja ki, hogy a közvetlen környezetében lévő anyagot felszippantó feketelyuk az anyag intenzív gerjesztetettsége folytán ne tündökölhessen úgy, mint az égbolt egyik legfényesebb objektuma.

Visszatérve a tudománytörténeti tényekhez érdemes azt is megemlíteni, hogy ‘60-as évek során jelentősen megnőtt a fizikusok érdeklődése az általános relativitáselmélet iránt. Ez annak köszönhető, hogy az 1950-es évek végétől kezdődően egy sor olyan csillagászati megfigyelés történt – a kvazárok, a kicsiny méretű röntgenforrások és a pulzárok felfedezése –, melyek magyarázata elképzelhetetlennek látszott (ma is az) a gravitációs összeomlási folyamatok során felszabaduló irdatlan mennyiségű energia figyelembevétele nélkül. Ezen megfigyelések megmagyarázásához az erős gravitációs terek leírására alkalmas elméletre volt szükség. Az általános relativitáselmélet pont egy ilyen elmélet, ráadásul egyszerre képes számot adni a gravitációs összeomlási folyamatról, az annak során felszabaduló energia mértékéről, annak téridőbeli transzportjáról, illetve a folyamat során kialakuló feketelyuk tulajdonságairól.

A lokalizált csillagszerű objektumok vizsgálata mellett minden valamit önmagára adó gravitációelmélet törekszik az univerzum egészére vonatkozó csillagászati megfigyelések magyarázatát is megadni. Einstein az univerzum látszólagos időben állandó jellegéből kiindulva egy statikus univerzummodellt tartott adekvátnak. Lényegében ez vezette el a róla elnevezett Einstein-féle statikus kozmológiai modell kidolgozásához, melynek során bevezette a kozmológiai állandót, melyet később egyik legnagyobb tudományos tévedésének tekintett.

Einstein gondolatmenetének védelmében érdemes felidézni azt, hogy a csillagászati megfigyelések még 1912-ben is éppen csak elvették jelezték azt, hogy vannak olyan galaxisok, amelyek nagy sebességgel távolodni látszanak. Hubble csak 1929-ben tette közzé híres dolgozatát [17], amelyben egy viszonylag kicsiny, hatmillió fényév sugarú gömbön belül végzett szisztematikus mérésekre alapozva állította azt, hogy az galaxisok a tőlünk mért távolsággal arányos, igen nagy (néhány száz km/s) sebességgel távolodnak.

Einstein elméletét vizsgálva Alexander Friedmann [8] 1922-ben találta az első olyan kozmológiai modellt, amelyben természetes módon jelenik meg a táguló világegyetem és a távolsággal arányos távolodási sebesség koncepciója. Ez azonban a megbízható csillagászati megfigyelések hiánya, valamint Friedmann (aki a Kazáni Egyetem professzora volt) viszonylagos tudományos elszigeteltsége folytán egyszerűen nem került be a tudományos köztudatba. Később – az egyre szaporodó és mind adekvátabbá váló megfigyelések ösztönző hatásának köszönhetően – Lemaître, Robertson és Walker lényegében újra felfedezték [23, 42, 43, 44, 51] a Friedmann által talált modelleket. A csillagászati megfigyelések és az elméleti jóslatok egyezésére alapozottan 1948-ban Gamow és munkatársai már a táguló univerzumot kezdetben kitöltő sugárzás maradványainak keresésére tesznek javaslatot. A Penzias és Wilson [30, 31] által felfedezett mikrohullámú háttérsugárzás indexmikrohullámú háttérsugárzás szintén jelentősen hozzájárult a relativitáselméleti kutatások 1970-es évek eleje óta tartó intenzív fejlődéséhez.

Ebben a könyvben az Einstein-elmélet matematikai alapjainak bemutatását tűzzük ki célként. Bár az elmélet közel száz évvel ezelőtt megszületett és Einstein alapgondolatai és a konstrukció lényegileg nem változott, mi a modern differenciálgeometria eszköztárát felhasználva törekszünk a kapcsolódó matematikai alapok ismertetésére.

Az Einstein-elmélet sajátosságainak megértése során fontos a metrika kettes szerepét tisztán látni. Sokszor maguk az általános relativitáselméletben

aktív kutatásokat végzők is úgy tekintenek az Einstein-elméletre, hogy az a gravitációs kölcsönhatás egy olyan térelméleti leírása, melyben a metrika is dinamikai entitássá válik. Térelméleti szempontból ez a választás egyáltalán nem szerencsés mert annak érdekében, hogy a gravitáció két valódi fizikai szabadsági fokát kiválaszthassuk (lásd pl. [37, 38, 39]-ben található vizsgálatokat) túl sok és bizonyos szempontból szokatlan kényszer használatára van szükség. Nem szabad azonban elfeledkezni arról sem, hogy az elmélet önmeghatározása azzal kezdődik, hogy értelmezzük a fizikai történéseknek helyet biztosító arénát, azaz az események összességét (amit matematikailag egy négydimenziós téridősokaság jelenít meg), továbbá tisztázzuk azt, hogy hogyan lehet a fizika törvényeit az adott sokaság feletti tenzormezőkre vonatkozó tenzoregyenletek segítségével kifejezni. Ebben az általános keretben a metrika csak egyike a négydimenziós téridőn értelmezett nemdegenerált  $(0, 2)$ -típusú szimmetrikus tenzormezőknek. Ugyanakkor a metrika létezése teremti meg annak lehetőségét, hogy beszélhessünk két megfigyelési irány által bezárt szögről, bármely háromdimenziós tartomány térfogatáról, illetve a kétdimenziós felületek felszínéről, vagy akár egy megfigyelő világvonala mentén mért sajátidőről.

Mint speciális esetet érdemes felidézni, hogy Maxwell napjainkban használt elméletében az imént említett aréna a geometriai értelemben fix Minkowski-téridő. Ugyanakkor az elektrodinamikai értelemben fontos változásokat az antiszimmetrikus Faraday-tenzorra vonatkozó Maxwell-egyenletek határozzák meg. Ezzel szemben az általános relativitáselméletben a gravitációs jelenségek leírására hivatott metrika, mely az ekvivalencia elv alapján Einstein-egyenletekben a potenciál szerepét tölti be, ugyanakkor a téridő geometriai tulajdonságainak meghatározásában is alapvető szerepet játszik.

Érdemes azt is felidézni, hogy az általános relativitáselmélet gyakran úgy kerül bemutatásra, mintha a téridő Lorentz-szignatúrájú  $g_{\alpha\beta}$  metrikája egyedül jelenítené meg a gravitációs hatásokat. Ezzel szemben az elmélet megalkotása során legalább ennyire fontos szerepet játszott a gravitációs hatások megjelenítésében az a  $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$  affinösszefüggés, amely a metrika – egymáshoz képest

mozgó „inerciális” megfigyelők által mért – elsőrendű eltéréseit méri. Ezt a két struktúrát a Palatini-hatásra alapozott variációs elv (lásd pl. [26]-et) valóban meg is különbözteti. Amint azt az 5.4. fejezetben látni fogjuk, az ami egymáshoz kapcsolja a metrikus és affin struktúrát az nem más mint a  $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$  kompatibilitási feltétel.

További technikai nehézségeket jelent az, hogy az általános relativitáselmélet a gravitáció egy erősen nemlineáris elmélete, valamint az, hogy az egymással fizikailag ekvivalens téridőmodelleket egymásba vivő diffeomorfizmusok – ezek a fentebb már említett szokatlan kényszerek forrásai – végtelen dimenziós nem-abeli mértékcsoporthoz tartoznak. Ezen bőség – mely az általános relativitáselmélet alapfeltevéseiből következik – felelős például Einstein elméletének a kvantumtérelméletekhez történő illesztésében megjelenő nehézségekért.

Érdemes azt is szemügyre venni, hogy milyen mértékű az Einstein-elméletben megjelenő nemlinearitás. Ehhez tekintsünk például egy tetszőleges  $x^\alpha$  lokális koordinátarendszert. A négydimenziós anyagmentes esetben az Einstein-egyenlet a Ricci-tenzor (lásd például a 6.6 alfejezetet, valamint a (14.5.46)-(14.5.47) relációkat)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\varepsilon\sigma} \{ \partial_\varepsilon \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\varepsilon\sigma} - \partial_\varepsilon \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\varepsilon\nu} \} \\ + H_{\mu\nu}(g_{\lambda\kappa}, \partial_\gamma g_{\lambda\kappa})$$

eltűnésével ekvivalens, ahol  $\partial_\alpha$  az  $x^\alpha$  koordináta szerinti parciális deriváltat jelöli. A fenti egyenletben szereplő  $H_{\mu\nu}$  kifejezés a  $H'_{\mu\nu}/[\det(g)]^2$  hányadosként írható fel, ahol a  $H'_{\mu\nu}$  és a  $[\det(g)]^2$  kifejezések külön-külön a metrikus tenzor  $x^\alpha$  lokális koordinátákhoz tartozó  $g_{\varepsilon\sigma}$  komponenseinek nyolcadrendű polinomjai.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Ennek belátásához érdemes meggondolni, hogy  $H_{\mu\nu}$  a Christoffel-féle szimbólumok kvadratikus kifejezése, melyek tartalmazzák a  $g_{\mu\nu}$  komponensek parciális deriváltjainak lineáris kombinációját, valamint a  $g^{\mu\nu}$  inverz metrikát, mely önmagában is  $g'^{\mu\nu}/\det(g)$  alakban adható meg, ahol a  $g'^{\mu\nu}$  algebrai alddeterminánsok legjobb esetben is harmadrendű polinomjai a metrika  $g_{\mu\nu}$  komponenseinek.

Jelen könyv megírásával elsősorban azon olvasóknak szeretnék segítséget nyújtani, akik a fizikával kapcsolatos ismereteiket az Einstein-féle gravitációelmélet, azaz az általános relativitáselmélet elvi és technikai eszköztárának megismerésével kívánják bővíteni. A könyv elsősorban az Eötvös Loránd Tudományegyetem elméleti fizikai doktori iskoláján tartott előadásaimra épül, melyeket kezdetben erősen motiváltak a [21, 50, 52] monográfiák. Ugyanakkor fontos azt is kiemelni, hogy a könyv megírása során folyamatosan törekedtem az új fogalmak szisztematikus kiépítésére, melynek köszönhetően (reményeim szerint) minden az analízisben elemi jártassággal rendelkező olvasó jó eséllyel kezdhet hozzá az általános relativitáselmélet matematikai alapjaival történő ismerkedéshez.

Könyvünk első részében a differenciálgeometria alapjainak részletes bemutatására törekszünk. A differenciálható sokaságokon értelmezhető különféle matematikai struktúrák ismertetése során megcélzott részletesség esetleg túlzónak is tűnhet. Legfontosabb mentségünk az, hogy azok a magyar nyelven elérhető monográfiák, melyek Einstein elméletének bemutatását tűzték ki célként, nem építenek a globális differenciálgeometria könyvünkben ismertetett koncepcióira. Ugyanakkor a vonatkozó új ismeretek nemcsak az általános relativitáselméletben, de a modern matematikai fizika más fejezeteiben is jól alkalmazható, hasznos eszköztárat kínálnak.

Könyvünk második részében az általános relativitáselmélet fizikai alapjainak bemutatására törekszünk. Az Einstein-egyenletek variációs elven történő származtatásán túl annak bemutatására törekszünk, hogy alkalmas mértékválasztást használva az Einstein-egyenletek egy csatolt nemlineáris hullámeqyenlet-rendszerre írhatók át. Emellett napjaink legfontosabb gravitációelmélethez kapcsolódó kísérletének elméleti vonatkozásait, azaz a gyenge gravitációs hullámok részletes leírását is megtalálja az érdeklődő olvasó. Mindezeket követi a homogén izotróp kozmológiai modellek ismertetése. Zárásként a gömbszimmetrikus csillagmodellek rövid bemutatását igyekszünk megadni, valamint a



feketelyukak kialakulásához vezető gravitációs összeomlási folyamat lehetőleg egyszerűbb, ugyanakkor pontos leírását tűztük ki célként.

Végül álljon itt néhány hasznos tanács a könyv tartalmával ismerkedő olvasó számára.

A feladatok mindig az aktuálisan ismertett matematikai segédeszközökhöz, illetve a vizsgált fizikai rendszerekhez illeszkednek. Éppen ezért nem különítettük el őket a könyv főszövegétől. Így ezeket a feladatokat első körben mint igaz, de még nem bizonyított állításokat célszerű olvasni. A második olvasás alkalmával már érdemes elmerengeni azon, hogyan oldaná meg az olvasó a kijelölt feladatokat. A témakörrel történő tüzetesebb ismerkedés során érdemes megoldani azokat a feladatokat is, amelyeket a fent javasolt iteráció első két lépésében még esetleg nem oldott volna meg a kedves olvasó.

Amikor olyan állításokat fogalmazunk meg, melyek bizonyítása meghaladja a megcélzott olvasókör feltételezett háttértudását – ezeket általában a „belátható” és „megmutatható” szavakkal vezetjük be – igyekszünk a szakirodalomban elérhető bizonyításokra utalni.

## Köszönetnyilvánítás

A könyv kiadásra történő előkészítése a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében történt. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg. Ezen túlmenően szeretnék külön köszönetet mondani Frenkel Andornak, Gáspár Merse Elődnek, Rácz Zoltánnak, Vasenszki Zsuzsannának és Vasúth Mátyásnak a kézirat gondos átolvasásáért, valamint Czupi Gyulának a könyv nyomtatásra történő előkészítése során megfogalmazott hasznos tanácsaiért.

Budapest, 2014. augusztus

Rácz István



# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>vi</b>
Köszönetnyilvánítás . . . . .	xv
<b>I. Differenciálgeometriai alapok</b>	<b>23</b>
<b>1. Mi a téridő?</b>	<b>25</b>
1.1. A téridő fizikai és matematikai meghatározása . . . . .	25
1.2. Néhány egyszerű topológia alapfogalom . . . . .	28
<b>2. Differenciálható sokaságok</b>	<b>35</b>
2.1. Érintőtér . . . . .	40
2.2. A duális tér . . . . .	45
<b>3. Tenzorok</b>	<b>49</b>
3.1. Kontrakció . . . . .	50
3.2. Tenzori szorzat . . . . .	50
3.3. Transzformációs szabályok . . . . .	52

3.4. Tenzormezők . . . . .	55
3.5. Az absztrakt index . . . . .	56
3.6. Tenzorok szimmetriái és antiszimmetriái . . . . .	57
<b>4. A metrika</b>	<b>61</b>
4.1. Az inverz-metrika . . . . .	62
4.2. Szignatúra . . . . .	63
4.3. A metrika által meghatározott izomorfizmusok . . . . .	64
<b>5. A kovariáns derivált</b>	<b>67</b>
5.1. Párhuzamos eltolás a'la Levi-Civita . . . . .	68
5.2. Kovariáns deriválás . . . . .	70
5.3. Párhuzamos eltolás az általános esetben . . . . .	79
5.4. A metrikával kompatibilis kovariáns derivált . . . . .	83
<b>6. A görbületi tenzor</b>	<b>87</b>
6.1. A görbületi tenzor definíciója . . . . .	87
6.2. A görbület tulajdonságai . . . . .	90
6.3. A Ricci-tenzor és a skalárgörbület . . . . .	92
6.4. A görbületi tenzor független elemei . . . . .	93
6.5. A kontrahált Bianchi-azonosságok . . . . .	95
6.6. A görbület kiszámításának főbb módszerei . . . . .	96
<b>7. Még egyszer a vektormezőkről</b>	<b>103</b>
7.1. Vektormezők kommutátorai . . . . .	106
7.2. Frobenius-tétel . . . . .	110

<b>8. „Önmagukkal párhuzamos” görbék</b>	<b>113</b>
8.1. Geodetikusok . . . . .	116
8.2. A vektorok kauzális jellege . . . . .	117
8.3. Az ívhossz variációja . . . . .	120
8.3.1. A Jacobi-egyenlet . . . . .	123
8.3.2. Az ívhossz második variációja . . . . .	125
<b>9. Tenzorok előretolása és visszahúzása</b>	<b>131</b>
9.1. A metrika globális létezése . . . . .	136
<b>10. Lie-derivált</b>	<b>141</b>
10.1. A Lie-derivált tulajdonságai: . . . . .	142
10.2. Illeszkedő koordináták . . . . .	143
10.3. A Lie-derivált koordinátamentes alakja . . . . .	145
10.4. Killing-vektormezők . . . . .	147
<b>11. Differenciálformák</b>	<b>149</b>
11.1. Külső szorzás és külső deriválás . . . . .	150
11.2. Sokaságok irányíthatósága . . . . .	152
<b>12. Integrálás sokaságokon</b>	<b>157</b>
12.1. Stokes-tétel . . . . .	160
12.2. A térfogati forma . . . . .	162
12.3. Gauss-tétel . . . . .	166

<b>II. Az általános relativitáselmélet alapjai</b>	<b>171</b>
<b>13. Az általános relativitáselmélet alapjai</b>	<b>173</b>
13.1. Az alkalmazott hipotézisek . . . . .	173
<b>14. A téregyenletek származtatása</b>	<b>179</b>
14.1. Az anyagmezőkre vonatkozó téregyenletek . . . . .	182
14.2. A szimmetrikus energiaimpulzus-tenzor . . . . .	184
14.3. Az Einstein-egyenletek . . . . .	187
14.4. A diffeomorfizmusinvariancia következményei . . . . .	191
14.5. Általános megjegyzések . . . . .	193
14.6. Nemlineáris hullámgörvények . . . . .	196
<b>15. A linearizált elmélet</b>	<b>203</b>
15.1. A linearizált elmélet . . . . .	203
15.2. A linearizált Einstein-egyenletek . . . . .	204
15.3. A Maxwell-elmélet . . . . .	206
15.4. A diffeomorfizmusinvariancia speciális esete . . . . .	207
15.5. A Newtoni határeset . . . . .	211
15.6. A forrás leírása . . . . .	211
15.7. A próbatestek leírása . . . . .	213
<b>16. Gyenge gravitációs hullámok</b>	<b>217</b>
16.1. Az inhomogén egyenlet . . . . .	217
16.2. A forrásmentes eset . . . . .	222
16.2.1. A sugárzási mérték . . . . .	222

16.3. A geometriai szabadsági fokok . . . . .	225
16.4. Sugárzási mérték az általános esetben . . . . .	227
16.4.1. Az analóg elektrodinamikai probléma . . . . .	227
16.4.2. A linearizált gravitáció esete . . . . .	229
16.4.3. Az energiaimpulzus-tenzor felbontása . . . . .	230
16.4.4. $\sigma_{\alpha\beta}$ nem lokális . . . . .	231
16.4.5. A linearizált Einstein-egyenletek sugárzási mértékben . . . . .	232
16.5. A mérhető mennyiségek . . . . .	233
16.6. Mértékválasztás . . . . .	234
16.7. A megfigyelésről . . . . .	238
16.8. A detektor válasza . . . . .	242
<b>17. Izotróp kozmológiai modellek</b>	<b>245</b>
17.1. Geometriai alapok . . . . .	245
17.1.1. Geometriai tulajdonságok . . . . .	248
17.1.2. A Hubble-törvény geometriai megfogalmazása . . . . .	256
17.1.3. A geometriai-optikai közelítés . . . . .	258
17.1.4. A kozmológiai vöröseltolódás . . . . .	261
17.2. Tökéletes folyadékok . . . . .	264
17.3. Izotróp kozmológiai modellek dinamikája . . . . .	267
17.3.1. Friedmann-kozmológiák . . . . .	268
17.3.2. A skálafaktor evolúciója . . . . .	271
17.3.3. Einstein sztatikus univerzuma . . . . .	272
17.4. Az univerzum kritikus paraméterei . . . . .	273

17.5. Kozmológiai távolságok . . . . .	275
17.5.1. Távolság-meghatározás a látószög alapján . . . . .	275
17.5.2. Távolság-meghatározás a mozgás alapján . . . . .	276
17.5.3. Távolság-meghatározás a luminozítás alapján . . . . .	277
17.5.4. A luminozítási távolság vöröseltolódás-függése . . . . .	278
17.6. A horizontprobléma . . . . .	282
<b>18. Gömbszimmetrikus téridők</b>	<b>287</b>
18.1. A Schwarzschild-téridő . . . . .	287
18.2. Gömbszimmetrikus téridők . . . . .	289
18.2.1. A Birkhoff-tétel . . . . .	293
18.3. Próbatetek mozgása . . . . .	294
18.3.1. Fényelhajlás . . . . .	296
18.3.2. Gravitációs vöröseltolódás . . . . .	299
18.4. A Schwarzschild-téridő analitikus kiterjesztése . . . . .	301
18.5. Gömbszimmetrikus csillagok egyensúlya . . . . .	309
18.5.1. Sztatikus gömbszimmetrikus csillagmodellek . . . . .	309
18.5.2. Állandó sűrűségű csillag . . . . .	316
18.6. Gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás . . . . .	318
18.6.1. Porszerű anyag összeomlása . . . . .	318
<b>Hivatkozások</b>	<b>329</b>
<b>Tárgymutató</b>	<b>333</b>



**I. rész**

# **Differenciálgeometriai alapok**



# 1. fejezet

## Mi a téridő?

Ahogy azt már a bevezetőben is említettük, a gravitáció napjainkban elfogadott legpontosabb elmélete az Einstein-féle általános relativitáselmélet. Az Einstein-elmélet a gravitáció egy olyan geometrizált elmélete, melyben a gravitációs hatások a téridő geometriájának görbültségén keresztül jeleníthetők meg. Ebben az elméletben nincs a korábbi elméletekre jellemző egyszer és mindenkorra adott fix színpad – tér és idő –, amelyen a rajta értelmezett mezők történetét írjuk le. Ehelyett a világmindenségben található anyag elhelyezkedése és mozgása határozza meg a téridő geometriáját, ugyanakkor a kozmoszt felépítő anyag fejlődése is csak ezen az időben és térben is változó geometria fejlődésével együtt írható le.

### 1.1. A téridő fizikai és matematikai meghatározása

A speciális és általános relativitáselmélet megértésében a legfőbb nehézséget a térről és időről, a hétköznapi tapasztalataink alapján kialakított elképzelések megszokáson alapuló helytelen alkalmazása okozza. Éppen ezért fontos annak tisztázása, hogy mit is értünk a teret és időt sajátos módon egymásba ötvöző téridőn.

**1.1.1. Definíció. A fizikus megfogalmazás:** *A téridőről feltesszük, hogy megjeleníti a vizsgálatra kiválasztott fizikai rendszer teljes történetét, azaz tartalmazza az ahhoz kapcsolódó összes lehetséges múlt-, jelen- és jövőbeli eseményt.*

A klasszikus fizikában esemény például két próbatest ütközése, vagy ahogy Dede Miklós volt kiváló tanárunk fogalmazott „... amikor egy csillag pontszerű képe éppen áthalad a távcső vonalkeresztjén.” Ennek megfelelően hallgatólagosan mindig feltételezzük, hogy egy klasszikus esemény belső struktúra nélküli, mind térben, mind pedig időben pontszerű, mely a geometriai pont fogalmának kialakulásához hasonló absztrakció eredményeként jött létre.

Az 1.1.1 definíció értelmében egy-egy téridő mindig tartalmazza a vizsgált fizikai elrendezéshez tartozó összes lehetséges múlt-, jelen- és jövőbeli eseményt. Ugyanakkor minden az események összességét megjelenítő téridő-sokaság tetszőleges pontjából indítható a téridőben mindenütt kauzális érintővektorral rendelkező görbe. Ezek a görbék az elvileg lehetséges megfigyelők világvonalai. Mivel egy megfigyelő által megfigyelhető események összessége a megfigyelő történetét ábrázoló világvonal kauzális múltjával esik egybe, az általunk alkalmazott megközelítésben az *elvileg megfigyelhető* és a *lehetséges* események halmaza bármely téridőmodellen belül egybeesik.

Ha az elmélet eredeti kereteit átlépve valaki a kvantumviselkedésről is szót kívánna adni, akkor első körben azt kellene megmondania, hogy milyen értelemben használja a kvantáltság fogalmát. Mivel jelenleg nincs olyan elmélet, amelyet kvantumgravitációnak tekinthetnénk<sup>1</sup>, egyedül a kvantumos viselkedő részecskék kapcsán vizsgálható következetesen az a kérdés is, hogyan változna meg a fentebb említett idealizáció folytán kialakult klasszikus

---

<sup>1</sup> Még abban sincs egyetértés, hogy melyik matematikai szinten kellene végrehajtani a kvantálást. A metrikát, a kauzális, vagy vele ekvivalens konformis szerkezetét kellene kvantált módon kezelni, vagy esetleg sokkal mélyebbről építkezve magát a klasszikus eseményteret is egy spinhálózaton értelmezett kvantumtérelmélet effektív alacsony energiás határeseteként kellene értelmeznünk.

eseményfogalom. Amint arra Wigner már 1957-ben rámutatott [54], a kvantummechanika korlátokat szab a klasszikus eseményfogalmunkon alapuló téridőkoncepciónak is. Wigner úgy érvelt, hogy két tömeges elemi részecske ütközése – bár sokkal adekvátabb azok egymáson történő szóródásáról beszélni – szükségszerűen nem pontszerű, hiszen ezen kvantumos folyamat éppen azzal a kiterjedt téridőtartománnyal kapcsolható össze, amelyben a résztvevő részecskék megtalálási valószínűségének szorzata lényegesen nagyobb nullánál.

A fentebb ismertetett, fizikai elveken nyugvó koncepció bemutatása után érdemes azt is rögzíteni, hogy matematikai értelemben mit értünk téridőn.

**1.1.2. Definíció. A matematikus megfogalmazás:** *Téridőn egy olyan  $(M, g_{ab})$  párt értünk, ahol  $M$  összefüggő, négydimenziós, Hausdorff, parakompakt, irányítható  $C^\infty$  differenciálható sokaság,  $g_{ab}$  pedig egy Lorentz-szignatúrájú metrika  $M$ -en. A téridőről feltesszük, hogy időirányítható, és egy időirányítást ki is választottunk rajta.*

Természetesen az imént megfogalmazott definícióban szereplő fogalmak meglehetősen technikai jellegűek. A topológia és a differenciálgeometria foglomtárához tartoznak. Könyvünk első felének nagy része éppen ezeknek és a kapcsolódó fogalmak bemutatását tartalmazza, illetve ezen fogalmaknak a fizikai modelljeinkben történő alkalmazhatóságát igyekszik alátámasztani.

## 1.2. Néhány egyszerű topológia alapfogalom

Az események összességét megjelenítő alapsokaságot első közelítésben topológikus térként kezeljük. Ez a legegyszerűbb struktúra, melynek segítségével az alapteret felépítő pontok közelségét és ilyen értelemben vett megkülönböztethezőségét tudjuk kifejezni.

**1.2.1. Definíció.** Legyen  $X$  egy halmaz, továbbá jelölje  $\mathcal{T}$  az  $X$  halmaz részhalmazainak valamely rendszerét. Az  $(X, \mathcal{T})$  párt topologikus térnek nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek

- (i) Tetszőleges  $\mathcal{T}$ -beli halmazok uniója is  $\mathcal{T}$ -hoz tartozik, azaz tetszőleges  $\alpha$  indexválasztás mellett, ha  $\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{T}$  akkor  $\bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{T}$ .
- (ii)  $\mathcal{T}$ -beli halmazok véges metszete is  $\mathcal{T}$ -hoz tartozik, azaz amikor  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) akkor  $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$ .
- (iii)  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ , azaz a teljes tér és az üres halmaz  $\mathcal{T}$ -hoz tartozik.

Ekkor  $\mathcal{T}$ -t az  $X$  halmazon értelmezett topológiának,  $\mathcal{T}$  elemeit pedig nyílt halmazoknak nevezzük.

**1.2.1. Példa.** Diszkrét topológia: Az  $X$  halmaz tetszőleges részhalmaza nyílt. Túl sok a nyílt halmaz, nem alkalmas a konvergencia kifejezésre.

**1.2.2. Példa.** Indiszkrét topológia:  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ . Túl durva, azaz kevés a nyílt halmaz.

**1.2.3. Példa.** Jelölje  $\mathbb{R}$  a valós számok halmazát. Ekkor az  $\mathbb{R}$ -en értelmezett nyílt intervallumok egy topologikus teret határoznak meg, melyet a továbbiakban  $(\mathbb{R}, \{(a, b)\})$ -val jelölünk.

**1.2.2. Definíció.** Legyen  $A \subset X$  tetszőleges, valamint  $(X, \mathcal{T})$  topologikus tér. Ekkor az  $(A, \mathcal{T}_A)$  páros, ahol  $\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \subset A \mid \mathcal{U} = A \cap \mathcal{O}, \text{ valamely } \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ ,

topologikus teret alkot,  $\mathcal{T}_A$ -t pedig az  $A \subset X$  halmaz által indukált topológiának nevezzük.

**1.2.3. Definíció.** Legyenek  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  és  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  topologikus terek. Belátható, hogy ezek szorzata  $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$  is topologikus tér az  $\mathcal{T} = \{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \mid \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i (i = 1, 2)\}$  szorzat topológiára nézve.

Legyenek  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  és  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  topologikus terek. Tekintsünk egy ekvivalenciarelációt az  $X_1 \cup X_2$  halmazon, melyet  $\sim$ -vel jelölünk. Jelölje továbbá  $X_1 \cup X_2 / \sim$  a  $\sim$  ekvivalenciareláció hányadossterét, azaz az  $X_1 \cup X_2 / \sim$  halmaz pontjait az  $X_1 \cup X_2$  halmaz egymással  $\sim$ -ekvivalens pontjainak halmazai alkotják, melyeket ekvivalencia-osztályoknak nevezünk. Jelölje  $\pi : X_1 \cup X_2 \rightarrow (X_1 \cup X_2) / \sim$  azt a  $\sim$  ekvivalenciareláció által indukált projekciót, mely az  $X_1 \cup X_2$  halmazt a  $\sim$  által indukált  $X_1 \cup X_2 / \sim$  ekvivalencia-osztályokra képezi. Jelölje  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 / \sim$  az  $X_1 \cup X_2 / \sim$  halmaz azon részhalmazainak rendszerét, melyek  $\pi$  általi ősképe nyílt vagy  $X_1$ , vagy pedig  $X_2$  felett, azaz  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 / \sim$  pontosan akkor, ha  $\pi^{-1}[\mathcal{O}] = \{x \in X_1 \cup X_2 \mid \pi(x) \in \mathcal{O}\} \in \mathcal{T}_1 \text{ cup } \mathcal{T}_2$ . Belátható, hogy ekkor az  $(X_1 \cup X_2 / \sim, \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 / \sim)$  páros topologikus teret határoz meg, melyet a  $\sim$  ekvivalenciareláció által indukált hányadosstér-topológiának nevezünk.

**1.2.4. Definíció.** Legyenek  $(X, \mathcal{T}_X)$  és  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologikus terek, valamint  $f : X \rightarrow Y$  leképezés. Ekkor  $f$ -et folytonosnak nevezzük, ha bármely  $Y$ -beli nyílt halmaz ősképe nyílt  $X$ -ben, azaz tetszőleges  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_Y$  esetén  $f^{-1}[\mathcal{O}] = \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{O}\} \in \mathcal{T}_X$ .

**1.2.5. Definíció.** Amennyiben  $f$  kölcsönösen egyértelmű ráképezése  $X$ -nek  $Y$ -ra, továbbá mind  $f$ , mind pedig  $f^{-1}$  folytonos, akkor  $f$ -et homeomorfizmusnak nevezzük. Ekkor az  $(X, \mathcal{T}_X)$  és  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologikus terek topológiai szempontból megkülönböztethetetlenek.

**1.2.6. Definíció.** Valamely  $C \subset X$  zárt részhalmaza az  $(X, \mathcal{T})$  topologikus térnek, ha az  $X \setminus C$  különbség-halmaz nyílt.

**1.2.4. Példa.**  $[a, b]$  zárt  $a$  valós számok  $(\mathbb{R}, \{(a, b)\})$  nyílt intervallumok által generált topológiájára nézve.

**1.2.5. Példa.** Vannak sem nem zárt, sem pedig nem nyílt részhalmazok is, például az  $(a, b]$  vagy  $[a, b)$  alakú intervallumok.

**1.2.6. Példa.** A diszkrét topológiában minden részhalmaz egyszerre nyílt is és zárt is.

**1.2.7. Definíció.** Valamely  $(X, \mathcal{T})$  topologikus teret összefüggőnek nevezzük, ha benne csak a teljes tér és az üres halmaz nyílt és zárt is egyszerre.

**1.2.7. Példa.** A valós számok halmazán a nyílt intervallumok által generált  $(\mathbb{R}, \{(a, b)\})$  topológiából kiindulva készítsük el a  $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \{(a, b)\}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}})$ , indukált topologikus teret, ahol  $\mathcal{A} = (A, B)$ ,  $\mathcal{B} = (C, D)$  továbbá  $A < B < C < D$  valós számok. Az így nyert topologikus tér nem összefüggő mivel  $\emptyset, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  egyszerre nyílt és zárt is  $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \{(a, b)\}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}})$ -ban.

Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topologikus tér valamint  $A \subset X$  egy tetszőleges részhalmaz. Ekkor  $A$  lezártján azt az  $\overline{A}$ -val jelölt halmazt értjük, melyet az  $A$ -t tartalmazó zárt halmazok metszete határoz meg. Hasonlóan,  $A$  belsején azt az  $A^\circ$ -el jelölt halmazt értjük, melyet az  $A$  által tartalmazott nyílt halmazok uniója határoz meg. Az  $A$  halmaz határán a  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$  különbség-halmazt értjük.

A topologikus terek elméletében az úgynevezett szétválaszthatósági axiómák fejezik ki, milyen mértékben képes az adott topologikus tér az alaptér pontjait megkülönböztetni. A szétválaszthatósági axiómák közül mi csak a fizikai értelemben „legplauzibilisebbel”, a  $T_2$  szétválaszthatósággal, más néven Hausdorff-féle topologikus terekkel foglalkozunk.

**1.2.8. Példa.** Az  $(X, \mathcal{T})$  topologikus teret Hausdorff-félének nevezzük, ha bármely két  $X$ -beli ponthoz találhatók diszjunkt  $\mathcal{T}$ -beli környezetek, azaz tetszőleges  $p, q \in X$ -hez léteznek olyan  $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_q \in \mathcal{T}$  nyílt halmazok, amelyekre  $\mathcal{O}_p \cap \mathcal{O}_q = \emptyset$ .



**1.2.1. Feladat.** Legyen  $(\mathbb{R}, \{(a, b)\})$  az  $\mathbb{R}$ -en a szokásos nyílt intervallumok által generált topologikus tér és jelölje  $(\mathbb{R}', \{(a', b')\})$  annak egy másolatát. Legyen továbbá  $\sim$  az az ekvivalencia-reláció, mely  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{R}'$  azonos negatív értékkel bíró pontjait (és csak azokat) felelteti meg egymásnak. Mutassuk meg, hogy az  $(\mathbb{R} \cup \mathbb{R}' / \sim, \{(a, b)\} \cup \{(a', b')\} / \sim)$  topologikus tér nem Hausdorff.

Nyilvánvaló, hogy a félegyenesek azonosítását kétdimenzióban például félsíkok, magasabb dimenziós Euklideszi-terekben félterek azonosításaival helyettesíthetjük. Így az iménti feladat példát adhat arra, hogy olyan téridőben, ami nem Hausdorff-féle előfordulhatna az, hogy egy történet „kettéhasad”, azaz kétféleképpen folytatható és elvileg sem tudnánk dönteni, hogy melyik féltérbeli folytatás tekinthető adekvátabbnak. Az ilyen típusú „határozatlanságok” kizárását biztosítja a Hausdorff-féle tulajdonság megkövetelése.

**1.2.8. Definíció.** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topologikus tér és  $A \subset X$  egy tetszőleges részhalmaz. Az  $\{\mathcal{O}_\alpha\} \subset \mathcal{T}$  nyílt halmazok rendszerét  $A$  nyílt lefedésének nevezzük, ha  $A \subset \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$  teljesül.

**1.2.9. Definíció.**  $A$ -t az  $(X, \mathcal{T})$  topologikus tér kompakt részhalmazának nevezzük, ha bármely nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok nyílt halmaz, mely szintén lefedése  $A$ -nak, azaz létezik olyan  $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\} \subset \{\mathcal{O}_\alpha\} \subset \mathcal{T}$  részhalmaz, amelyre  $A \subset \bigcup_i \mathcal{O}_i$ .

**1.2.9. Példa.**  $[a, b]$  kompakt  $(\mathbb{R}, \{(a, b)\})$  nyílt intervallumok által generált topológiájára nézve.

**1.2.10. Példa.**  $(a, b]$  nem kompakt, mert például az  $\mathcal{O}_n = (a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ , ahol  $n \in \mathbb{N}$ , nyílt halmazok által meghatározott lefedéséből nem tudunk véges részfedelet kiválasztani.

**1.2.10. Definíció.** Legyen  $(X, \mathcal{T})$  topologikus tér és legyenek  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  és  $\{\mathcal{V}_\beta\}$   $X$  nyílt lefedései. Ekkor a  $\{\mathcal{V}_\beta\}$  nyílt lefedést az  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  lefedés finomításának nevezzük, ha tetszőleges  $\mathcal{V}_\beta$ -hoz létezik olyan  $\mathcal{O}_\alpha$ , amelyre  $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{O}_\alpha$ .

**1.2.11. Definíció.** A  $\{\mathcal{V}_\beta\}$  nyílt lefedést lokálisan végesnek nevezzük, ha tetszőleges  $x \in X$ -hez létezik olyan  $\mathcal{W} \in \mathcal{T}$  nyílt környezet, amelynek csak véges sok  $\{\mathcal{V}_\beta\}$ -beli halmazzal vett metszete nem üres.

**1.2.12. Definíció.** Az  $(X, \mathcal{T})$  topologikus teret parakompaktnak nevezzük, ha  $X$  tetszőleges  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  nyílt lefedéséhez található  $\{\mathcal{V}_\beta\}$  lokálisan véges finomítás.

Megmutatható (lásd például [21] harmadik Appendixét), hogy valamely  $(X, \mathcal{T})$  összefüggő, Hausdorff-féle topologikus tér pontosan akkor parakompakt, ha van megszámlálható bázisa, azaz létezik nyílt halmazoknak olyan  $\{\mathcal{O}_i \mid i = 1, \dots, \infty\}$  megszámlálható rendszere, amelyek a  $\mathcal{T}$  topológiához tartozó nyílt halmazok mind ezen rendszer részrendszereiben található halmazok uniójaként állíthatók elő.

Magától értetődik, hogy minden kompakt tér egyben parakompakt is. Az is igaz, hogy minden metrizálható<sup>2</sup> topologikus tér parakompakt. Sokszor azt is felteszik, hogy a parakompakt topológikus terek egyben Hausdorff-félék is. A nem parakompakt topologikus terek bizonyos mértékben patológikusak és emiatt nem is könnyű ilyet találni. Az egyik legegyszerűbb például az úgynevezett „hosszú vonal” – *long line* (vagy Alexandroff-vonal) – szolgál. Ez egy olyan topologikus tér, amely ugyan lokálisan kompakt, de nincs megszámlálható bázisa és így nem parakompakt.

A nem parakompakt topologikus terek kivételessége számunkra azért is nagyon fontos, mert ahogy azt látni fogjuk a metrika létezését, vagy az integrálok

---

<sup>2</sup>Valamely  $(X, \mathcal{T})$  topológikus tér metrizálható, ha megadható rajta egy távolságfüggvény, azaz egy olyan nemnegatív valós értékű  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyre tetszőleges  $x, y, z \in X$  pontok esetén teljesül az alábbi három relációban megfogalmazott reflexivitás, szimmetria és háromszög-egyenlőtlenség.

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d(x, y) = d(y, x);$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

sokaságok feletti értelmezhetőségét biztosító egységfelbontás mindig létezik, ha a téridőt megjelenítő differenciálható sokaság parakompakt.



## 2. fejezet

# Differenciálható sokaságok

Minden az általános relativitáselméletet megelőző fizikai elméletben nagyon erős, a tér és idő aszimptotikáját érintő feltételeket építettünk be az elméleteinkbe. Ennek ékes bizonyítéka például a Newton „Principia”-jában megjelenő abszolút tér, melyet Descartes nyomán az Euklideszi-tér analízisbeli megfelelőjeként  $\mathbb{R}^3$ -al azonosítunk. Hasonlóan az abszolút időt a valós számok  $\mathbb{R}$  halmazával megjelenítve a tér és idő egészét lényegében  $\mathbb{R}^4$ -el helyettesítettük. Teljesen analóg feltételezéssel élt Einstein, Minkowski és Lorentz a Minkowski-téridő megalkotása során. A téridő alapsokasága ebben az esetben is  $\mathbb{R}^4$ , bár ebben az esetben a metrika már Lorentz-féle szignatúrával rendelkezik. Ezzel szemben az általános relativitáselméletben egyedül azzal az egyszerűsítő feltevessel élünk, hogy a téridő bármely eseményéhez található olyan elegendően kicsiny környezet, mely lokálisan  $\mathbb{R}^4$ -szerű. Cserébe fel tesszük azt, hogy ezek a lokálisan  $\mathbb{R}^4$ -szerű tartományok természetes módon összefűzhetők. Érdemes azonban megjegyezni, hogy önmagában még ez a két feltétel sem jelent semmiféle megszorítást azzal kapcsolatban, hogy milyen globális topológiai tulajdonságokkal kell az összes lehetséges eseményt megjelenítő téridőnek rendelkeznie. Látni fogjuk, hogy ez a szabadság milyen érdekes következményekkel bír már a legegyszerűbb feketelyuk valamint

kozmológiai téridőmodellek vizsgálata során is.

**2.0.13. Definíció.** Valamely  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$  ( $n, n' \in \mathbb{N}$ ) függvény  $C^r$ -osztályú ( $r \in \mathbb{N}$ ), ha bármely változója szerinti  $r$ -edik parciális deriváltja létezik és az folytonos. Így a folytonos függvények  $C^0$ -osztályúak, míg azok a függvények, melyeknek tetszőleges rendű parciális deriváltjai léteznek  $C^\infty$ -osztályúak. Ha ezenfelül a függvény még meg is egyezik a Taylor-sorával, akkor azt analitikusnak, illetve  $C^\omega$ -osztályúnak mondjuk.

**2.0.14. Definíció.** Az  $(M, \mathcal{T})$  topologikus teret  $C^r$ -osztályú,  $n$ -dimenziós ( $n \in \mathbb{N}$ ), valós, differenciálható sokaságnak nevezzük, ha létezik hozzá  $\{(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)\}$  párok olyan halmaza, amelyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

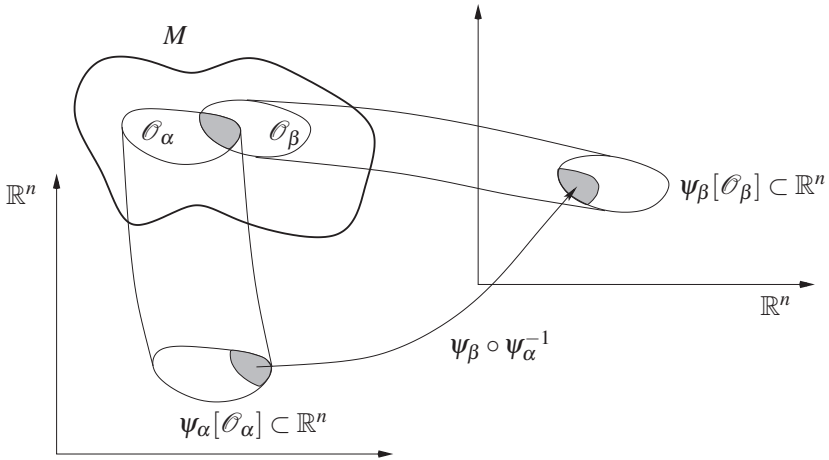
- (i) Az  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  halmazok rendszere nyílt lefedését adja  $M$ -nek, azaz  $M \subset \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ .
- (ii) Bármely  $\mathcal{O}_\alpha$ -hoz található olyan  $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz, amelyre a  $\psi_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$  leképezés egy homeomorfizmus  $\mathcal{O}_\alpha$  és  $\mathcal{U}_\alpha$  között.
- (iii) Ha valamely  $\alpha$  és  $\beta$  választás esetén  $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ , akkor a

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \rightarrow \psi_\beta[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \quad (2.0.1)$$

leképezés legalább  $C^r$ -osztályú a szokásos  $\mathbb{R}^n$ -en vett értelemben (lásd az 2.1. ábrát).

Amennyiben a fenti definícióban  $\mathbb{R}^n$  helyett mindenütt  $\mathbb{C}^n$ -et használunk, akkor  $n$ -dimenziós komplex differenciálható sokaság fogalmát kapjuk.

A matematikusok az  $(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)$  párokra, mint térképekre, ezek  $\{(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)\}$  gyűjteményére, pedig mint atlaszokra szoktak hivatkozni. Fizikus körökben az  $(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)$  párokra leginkább, mint lokális koordinátarendszerekre, a (iii) tulajdonságban megadott leképezésre pedig, mint az érintett két lokális koordinátarendszereket összekötő koordináta transzformációra szoktunk hivatkozni. Valamely  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép esetén  $\psi$  helyett sokszor használjuk az általa meghatározott  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákat is.

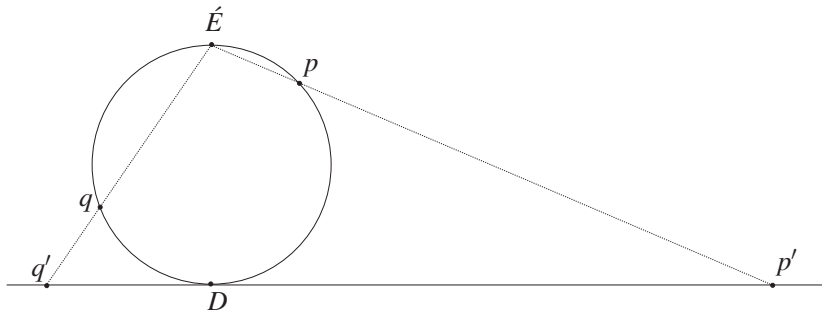


2.1. ábra. A  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  leképezés a  $\psi_\alpha[\mathcal{O}_\alpha] \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz egy részét képezi a  $\psi_\beta[\mathcal{O}_\beta] \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz megfelelő részére.

Két differenciálható sokaságot teljesen fölösleges lenne megkülönböztetni, ha egyik a másiktól csak néhány térkép hozzávételével, vagy elhagyásával különbözik. Éppen ezért a matematikusok általában meg is követelik, hogy a differenciálható sokaságok definíciójában megfogalmazott (i)-(iii) három feltételnek eleget tevő térképek halmaza legyen maximális. Érdekes megjegyezni, hogy ezzel ellentétben a fizikában mi mindig arra törekszünk, hogy az adott fizikai problémához legadekvátabb lokális koordinátákat – azaz pontosan azokat, amelyekben az aktuális jelenségek legegyszerűbben írhatók le – válasszuk ki.

**2.0.11. Példa.** Az egyik legtriviálisabb példa valós differenciálható sokaságra maga az  $n$ -dimenziós Euklideszi-tér  $\mathbb{E}^n$  a szokásos globális  $\mathbb{R}^n$  koordinátákkal, melyek például csak a kezdő pontjuk megválasztásában térnek el, azaz a  $\psi_\alpha$  leképezéseket az  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  középpontú, egymással párhuzamos tengelyelrendezésű affín koordinátarendszerek jelölik ki. Ekkor  $\mathbb{E}^n$  az  $\{(\mathcal{O}_\alpha = \mathbb{R}_\alpha^n, \psi_\alpha)\}$  atlaszra nézve  $C^\infty$ -osztályú differenciálható sokaság.

**2.0.2. Feladat.** Jelölje  $S^1$  a körvonalat, továbbá  $S^1 \setminus \{\dot{E}\}$  és  $S^1 \setminus \{D\}$  azokat az  $\mathbb{R}$ -rel homeomorf halmazokat, melyek a körből az északi pólus és a déli pólus eltávolításával jönnek létre. Jelölje továbbá az  $S^1 \setminus \{\dot{E}\}$  és  $S^1 \setminus \{D\}$  halmazokat  $\mathbb{R}$ -be képező, északi és a déli pólusból elvégzett sztereografikus projekciókat  $\psi_{\dot{E}}$  és  $\psi_D$  [lásd a 2.2. ábrát]. Mutassuk meg, hogy  $S^1$   $C^\infty$ -osztályú differenciálható sokaság az  $\{(S^1 \setminus \{\dot{E}\}, \psi_{\dot{E}}), (S^1 \setminus \{D\}, \psi_D)\}$  atlaszra nézve. Mutassuk meg, hogy analóg konstrukció alkalmazható  $S^2$ , valamint  $S^n$  esetében is.



2.2. ábra. Az északi pólusból elvégzett  $\psi_{\dot{E}}$  sztereografikus projekció hatásának megjelenítése.

Az  $\alpha$  indexeket „hordozó” halmaz számosságával kapcsolatban csak annyit szeretnénk megjegyezni, hogy az nem feltétlenül véges. Léteznek olyan differenciálható sokaságok, amelyekhez nem található véges atlasz. Egy extrém példaként, ahol valóban (megszámlálhatóan) végtelen sok térképből álló atlaszt kellene használnunk, képzeljünk el egy olyan univerzum-modellt, amelyben végtelenül sok fekete lyukat szeretnénk megjeleníteni.

Abban az esetben, amikor például olyan további struktúrára, mint metrika vagy valamely differenciálható sokaságon értelmezett integrál fogalomra lesz szükségünk, feltesszük, hogy az  $M$  alapsokaságunk *parakompakt*. Amint az ismert (lásd például [21] 271. o), minden összefüggő Hausdorff-sokaság pontosan akkor parakompakt, ha bármely atlaszból kiválasztható megszámlálható, lokálisan véges részatlasz.



Fizikusok lévén automatikusan fogalmazódik meg az a kérdés, hogy milyen „gyakorlati” haszna van a fentebb használt matematikai általánosságnak. A válasz nagyon egyszerű. Minden a valós analízisből ismert és a fizikán belül is széles körben alkalmazott technika átvihető a differenciálható sokaságokra is. Például, a differenciálható sokaság imént megfogalmazott koncepcióját felhasználva értelmezhetjük a differenciálható sokaságokat egymásra képező leképezéseink differenciálhatóságát is.

**2.0.15. Definíció.** Legyenek  $M$ , illetve  $M'$   $n$ -, illetve  $n'$ -dimenziós  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaságok az  $\{(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)\}$  és az  $\{(\mathcal{O}'_\beta, \psi'_\beta)\}$  atlaszokra nézve.<sup>1</sup> Ekkor az  $f: M \rightarrow M'$  leképezést  $C^k$ -osztályúnak ( $k \leq r$ ) nevezzük, ha bármely olyan  $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha \subset \mathcal{O}_\alpha$ , valamint  $\tilde{\mathcal{O}}'_\beta \subset \mathcal{O}'_\beta$  halmazokra, amelyekre  $f[\tilde{\mathcal{O}}_\alpha] \subset \tilde{\mathcal{O}}'_\beta$  teljesül a

$$\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha[\tilde{\mathcal{O}}_\alpha] \rightarrow \psi'_\beta[\tilde{\mathcal{O}}'_\beta] \quad (2.0.2)$$

$\psi_\alpha[\tilde{\mathcal{O}}_\alpha] \subset \mathbb{R}^n$ -et  $\psi'_\beta[\tilde{\mathcal{O}}'_\beta] \subset \mathbb{R}^{n'}$ -be képező leképezés legalább  $C^k$ -osztályú.

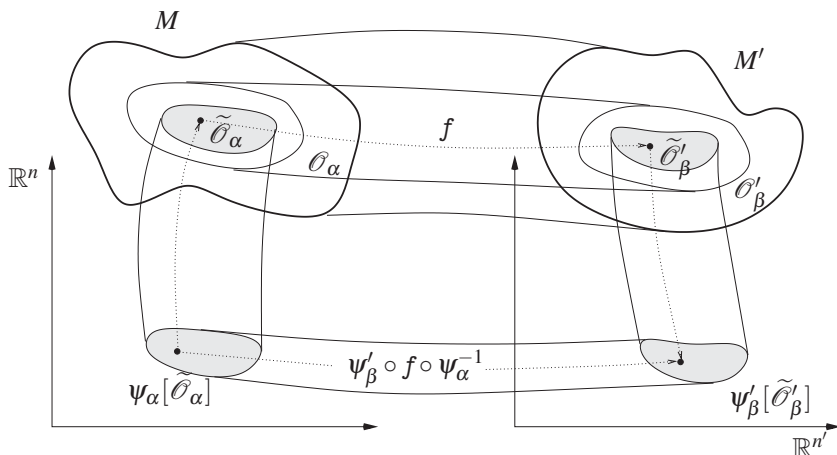
**2.0.12. Példa.** Válasszuk az  $M$  alapsokaságot  $\mathbb{R}$  valamely részhalmazának! Ekkor a fenti definíciót használva valamely  $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow M'$  leképezés éppen egy  $M'$ -ben futó  $C^k$ -osztályú görbe definícióját adja.

**2.0.13. Példa.** Tekintsük most azt az esetet, amikor  $M' = \mathbb{R}$ . Ekkor a fenti meghatározás éppen az  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $C^k$ -osztályúságának definícióját adja.

**2.0.16. Definíció.** Legyenek most  $M$  és  $M'$   $n$ -dimenziós  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaságok, valamint az  $f: M \rightarrow M'$  leképezés  $M$  kölcsönösen egyértelmű ráképezése  $M'$ -re.  $f$ -et  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmusnak nevezzük, ha mind  $f$ , mind pedig  $f^{-1}$  legalább  $C^r$ -osztályú.

---

<sup>1</sup> Vegyük észre, hogy  $n, n' \in \mathbb{N}$  értékek nem feltétlenül ugyanazok!



2.3. ábra. Az  $M$  és  $M'$  differenciálható sokaságok között ható  $f: M \rightarrow M'$  leképezés hatásának megjelenítése.

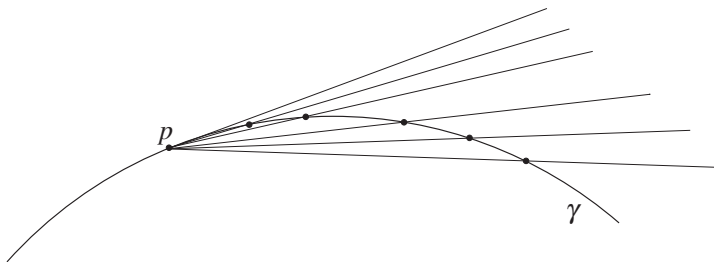
Két egymással  $C^r$ -diffeomorf sokaság – a  $C^r$ -osztályú differenciálhatósági tulajdonságok tekintetében – teljesen egyenértékű, azaz a  $C^r$ -diffeomorfizmusok egy ekvivalencia-relációt határoznak meg a differenciálható sokaságok terén.

**2.0.14. Példa.** A diffeomorfizmus definíciójában nem elegendő az, ha csak az  $f: M \rightarrow M'$  leképezés kölcsönös egyértelműségét és differenciálhatóságát követeljük meg, mert például az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amelyre  $f(x) = x^3$  kölcsönösen egyértelmű és differenciálható, ugyanakkor az inverz nem differenciálható az  $f(x) = 0$  pontban.

## 2.1. Érintőtér

Az  $\mathbb{R}^n$  vektortér jellegéről legkésőbb az elemi egyetemi matematikai tanulmányok során mindenki értesül. Többé-kevésbé az is nyilvánvalónak tűnik, hogy mit is kellene egy  $\mathbb{R}^3$ -ba beágyazott, elegendően sima görbült felület, valamely

pontjához tartozó érintőtérén érteni. Ha az analízisből megtanult fogalmakat is segítségül hívjuk, akkor az is könnyen látható, hogy a felületelméletben megjelenő érintővektorok egyszerűen, mint görbékre vonatkozó iránymenti deriváltak értelmezhetők. Ebben az egyszerű képben bármely vektor egy irány és egy nagyság kombinációjából áll össze. A háromdimenziós térben irányt például egy félegyenes határoz meg. Ilyen például a 2.4. ábrán jelzett  $\gamma$  görbe  $p$  pontjából – egy választott parametrizációnak megfelelően irányított módon – indított szelőkinek határ-félegyenesese. Ez a  $p$  pontban érinti a  $\gamma$  görbét. A  $p$  pontbeli érintővektor nagyságát például a  $\gamma$  görbe átparaméterezéseihez tudjuk kapcsolni.



2.4. ábra. A  $\gamma$  görbe  $p$  pontjából indított szelőkinek határ-félegyeneseként előálló érintő – a választott parametrizációnak megfelelően irányított – félegyenesest határoz meg.

Amint azt hamarosan látni fogjuk, a görbékre vonatkozó iránymenti deriváltak általános differenciálható sokaságok esetén is értelmezhetők, ezért kézenfekvőnek tűnik, hogy ezek segítségével definiáljuk az érintővektorok, illetve az érintőtér fogalmát.

**2.1.1. Definíció.** Legyenek  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták a  $p \in M$  pont valamely  $\mathcal{O}$  nyílt környezetében. Legyen  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  egy tetszőleges legalább  $C^1$ -osztályú görbe  $\mathcal{O}$  felett úgy, hogy  $p = \gamma(0) \in \mathcal{O}$  és az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákban  $\gamma$ -t az  $x^\mu = x^\mu(t)$  egyenletek segítségével adjuk meg, ahol  $\mu$  az  $1, \dots, n$  értékeket veszi fel. Jelölje továbbá  $\mathcal{F}(\mathcal{O})$  az  $\mathcal{O}$  nyílt környe-

zetben értelmezett, legalább  $C^1$ -osztályú függvények halmazát. Ekkor tetszőleges  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvény esetén az

$$X(f) := \left. \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(x^\mu(t)))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\in \mathbb{R}) \quad (2.1.3)$$

számot az  $f$  függvény  $p$  pontbeli  $\gamma$  görbére vonatkozó iránymenti deriváltjának nevezzük.

A közönséges deriválás tulajdonságait felhasználva könnyen belátható, hogy a fent meghatározott

$$X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1.4)$$

hozzárendelési szabály egyrészt

- (i) lineáris, azaz tetszőleges  $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvények és  $a, b \in \mathbb{R}$  számok esetén

$$X(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot X(f) + b \cdot X(g), \quad (2.1.5)$$

valamint

- (ii) tiszteletben tartja a Leibnitz-szabályt, azaz tetszőleges  $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvények esetén

$$X(f \cdot g) = g \cdot X(f) + f \cdot X(g). \quad (2.1.6)$$

Értelmezhetjük az így meghatározott  $X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  típusú hozzárendelések összeadását, valamint skalárral való szorzását is az alábbiak szerint.

- (1) Legyenek  $\gamma, \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  a  $p = \gamma(0) = \lambda(0) \in M$  pontra illeszkedő görbék, továbbá  $X, Y : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\gamma$  és  $\lambda$  görbék által meghatározott leképezések. Ekkor  $X + Y : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  az a leképezés, amelyre

tetszőleges  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvényhez az

$$(X+Y)(f) := \left. \frac{d(f(\gamma(t) + \lambda(t)))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(x_\gamma^\mu(t) + x_\lambda^\mu(t)))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\in \mathbb{R}) \quad (2.1.7)$$

számot rendeli.

- (2) Hasonlóan,  $a \cdot X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  az a leképezés, amelyre tetszőleges  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvény és  $a \in \mathbb{R}$  szám esetén

$$(a \cdot X)(f) := \left. \frac{d(f(\gamma(a \cdot t)))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(x_\gamma^\mu(a \cdot t)))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\in \mathbb{R}). \quad (2.1.8)$$

Jelölje  $\mathcal{T}(p)$  az  $X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  típusú hozzárendelések összességét. Belátható, hogy  $\mathcal{T}(p)$  a fent definiált összeadásra, valamint a skalárral való szorzásra nézve valós vektorteret alkot, azaz  $\mathcal{T}(p)$  az összeadásra nézve egy egysegelemes abeli csoport, továbbá bármely  $X, Y \in \mathcal{T}(p)$  és  $a, b \in \mathbb{R}$  esetén az

$$a \cdot (b \cdot X) = (a \cdot b) \cdot X \quad (2.1.9)$$

$$a \cdot (X + Y) = a \cdot X + a \cdot Y \quad (2.1.10)$$

$$(a + b) \cdot X = a \cdot X + b \cdot X \quad (2.1.11)$$

$$1 \cdot X = X \quad (2.1.12)$$

összefüggések teljesülnek.

**2.1.1. Lemma.** Legyen  $p$  az  $M$   $n$ -dimenziós differenciálható sokaság egy tetszőleges pontja. Ekkor a  $p$  pontbeli  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér  $n$ -dimenziós valós vektortér, melynek a  $\{(\partial/\partial x^\mu)_p\}$  vektorrendszer egy bázisát határozza meg.

*Bizonyítás:* Mivel  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták a  $p$  pont valamely  $\mathcal{O}$  nyílt környezetében a  $\mu = 1, \dots, n$  index tetszőleges értékére  $(\partial/\partial x^\mu)_p \in \mathcal{T}(p)$ , hiszen a parciális deriváltak a koordinátavonalakhoz, mint görbékhez tartozó

íránymenti deriváltak, azaz bármely  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvény esetén  $(\partial f / \partial x^\mu)_p \in \mathbb{R}$ .

Megmutatjuk, hogy a  $\{(\partial / \partial x^\mu)_p\}$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ) vektorrendszer  $\mathcal{T}(p)$  bázisát alkotja. Tekintsünk egy tetszőleges  $\gamma(t)$  görbét, amelyre  $p = \gamma(0)$  és amelyet az  $\mathcal{O}$  nyílt környezethez tartozó  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákban az  $x^\mu = x^\mu(t)$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ , egyenletek segítségével adhatunk meg. Ekkor, amint azt a valós analízisből – az összetett függvények deriválási szabálya alapján – tudjuk, tetszőleges  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvényre a

$$\left. \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)_p \cdot \left( \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right) \Big|_{t=0} \quad (2.1.13)$$

egyenlőség teljesül, amely igazolja, hogy tetszőleges, görbe menti derivált segítségével meghatározott  $X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{T}(p)$  alakú leképezés a (2.1.13) reláció jobb oldalán álló lineárkombinációként adható meg.

Az is igaz, hogy tetszőleges

$$X = \sum_{\mu=1}^n \xi^\mu \cdot (\partial / \partial x^\mu)_p \quad (2.1.14)$$

lineárkombináció által meghatározott  $X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{T}(p)$  leképezéshez tartozik olyan  $\gamma(t)$  görbe, amelyre nézve  $X$  a  $\gamma(t)$  görbéhez tartozó iránymenti deriválttal esik egybe. Ennek belátásához elegendő azt az

$$x^\mu(t) = x_p^\mu + t \cdot \xi^\mu \quad (2.1.15)$$

görbét tekinteni, melynek (2.1.13) szerint meghatározott érintővektora éppen (2.1.14) alakú.

Végül annak belátása érdekében, hogy a  $\{(\partial / \partial x^\mu)_p\}$  vektorrendszer valóban lineárisan független, azaz  $\mathcal{T}(p)$  bázisát alkotja, indirekt módon tegyük fel, hogy a zérus vektor felírható valamely  $\xi^\mu$  nem azonosan nulla értékekből álló

szám  $n$ -es, valamint a  $(\partial/\partial x^\mu)_p$  báziselemek segítségével képzett

$$0 = \sum_{\mu=1}^n \xi^\mu \cdot (\partial/\partial x^\mu)_p \in \mathcal{T}(p) \quad (2.1.16)$$

lineárkombinációként. Ekkor a (2.1.16) összefüggés jobb oldalán álló kifejezést külön-külön alkalmazva az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákra – ezek az  $\mathcal{O}$  nyílt környezet felett értelmezett függvények – rögtön adódik, hogy  $\xi^1 = \dots = \xi^n = 0$ . A kapott ellentmondás igazolja az eredeti állításunk helyességét.  $\square$

**2.1.1. Megjegyzés.** Tekintsük most az

$$x^\mu(t) = x_p^\mu + t \cdot \xi^\mu + t^2 \cdot \eta^\mu + \zeta^\mu(\mathcal{O}(t^3)) \quad (\mu = 1, \dots, n) \quad (2.1.17)$$

összefüggés által meghatározott görbét, ahol  $\eta^\mu$  tetszőleges szám  $n$ -es, valamint  $\zeta^\mu(t^3)$  egy  $t$ -ben legalább harmadrendű sima függvény. Könnyen belátható, hogy bármely  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$  függvény esetén az ezen görbére vonatkozó iránymenti derivált értéke a  $p$  alappontban megegyezik a (2.1.15) görbéhez tartozó értékkel. Ez azt mutatja, hogy az  $X : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  leképezések (ezek a  $\mathcal{T}(p)$  vektortér elemei) valójában a  $p$  alappontban lineáris rendben megegyező (egymást ott érintő), görbéken ugyanazt az értéket veszik fel.

**2.1.2. Definíció.** Az  $\{(\partial/\partial x^\mu)_p\} \subset \mathcal{T}(p)$  vektorrendszert az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákhoz tartozó lokális koordinátabázisnak nevezzük.

## 2.2. A duális tér

Legyen  $\mathcal{T}$  egy tetszőleges  $n$ -dimenziós valós vektortér, azaz most  $\mathcal{T}$  nem szükségképpen  $\mathcal{T}(p)$ -t jelöli. Valamely  $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést lineárisnak nevezünk, ha tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  valós számokra  $\tau(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \tau(X) + b \cdot \tau(Y)$  teljesül. Tekintsük most a  $\mathcal{T}$ -t  $\mathbb{R}$ -be képező lineáris leképezések

$$\mathcal{T}^* = \{\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \mid \tau \text{ lineáris}\} \quad (2.2.18)$$

halmazát. Belátható, hogy az értelemszerűen definiálható összeadás és skalárral való szorzás műveletére nézve  $\mathcal{T}^*$  természetes vektortér-struktúrával látható el. Az így nyert  $\mathcal{T}^*$  vektortérre, mint  $\mathcal{T}$  duálisára, míg  $\mathcal{T}^*$  elemeire, mint duális vektorokra szoktunk hivatkozni.

Tegyük fel, hogy  $\{v_\mu\}$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ) bázisa  $\mathcal{T}$ -nek. Ekkor  $\mathcal{T}^*$  azon  $v^{\mu*}$  elemei, melyeket a

$$v^{\mu*}(v_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad (2.2.19)$$

relációkkal értelmezünk, ahol  $\delta^\mu_\nu$  a Kronecker-féle deltát jelöli, azaz  $\delta^\mu_\nu = 1$ , ha  $\mu = \nu$  és 0 különben, egy bázisát alkotják  $\mathcal{T}^*$ -nak. A  $\{v^{\mu*}\}$  bázist a  $\{v_\mu\}$  bázishoz tartozó *duális bázisnak* nevezzük. Mindebből adódik, hogy  $\dim(\mathcal{T}^*) = \dim(\mathcal{T})$ , valamint az, hogy a  $v_\mu \longleftrightarrow v^{\mu*}$  megfeleltetés  $\mathcal{T}$  és  $\mathcal{T}^*$  egy bázisfüggő izomorfizmusát határozza meg.

Ha most a fenti konstrukciót a  $\mathcal{T}^*$  vektortérből kiindulva megismételjük  $\mathcal{T}$  kétszeres duálisához,  $\mathcal{T}^{**}$ -hoz jutunk.  $\mathcal{T}^{**}$  elemei a  $\mathcal{T}^*$ -ot  $\mathbb{R}$ -be képező lineáris leképezések. Vegyük észre, hogy  $\mathcal{T}^{**}$  és  $\mathcal{T}$  természetes módon izomorfak, hiszen  $\mathcal{T}^{**}$  konstrukciója folytán  $\dim(\mathcal{T}^{**}) = \dim(\mathcal{T})$ , továbbá tetszőleges  $v \in \mathcal{T}$ -hez kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető az a  $v^{**} \in \mathcal{T}^{**}$  leképezés, amelyre

$$v^{**}(w^*) = w^*(v) \quad (2.2.20)$$

tetszőleges  $w^* \in \mathcal{T}^*$  esetén, azaz létezik egy kölcsönösen egyértelmű (nem bázisfüggő) megfeleltetés  $\mathcal{T}$  és  $\mathcal{T}^{**}$  elemei között. Így a vizsgált esetben  $\mathcal{T}$  kétszeres duálisa semmi újat nem ad  $\mathcal{T}$ -hez képest, ezért a továbbiakban nem teszünk különbséget a  $\mathcal{T}$  és  $\mathcal{T}^{**}$  vektorterek elemei között.

**2.2.1. Megjegyzés.** Amint láttuk, véges dimenziós esetben  $(\mathcal{T}^*)^*$  és  $\mathcal{T}$  természetes módon izomorfak,  $(\mathcal{T}^*)^* \simeq \mathcal{T}$ . Amikor  $\mathcal{T}$  nem szükségképpen véges dimenziós teljes normált lineáris tér, azaz  $\mathcal{T} = \mathcal{B}$  egy Banach-tér, általában csak a  $(\mathcal{B}^*)^* \supset \mathcal{B}$  reláció teljesül. Amikor azonban  $\mathcal{T} = \mathcal{H}$  egy Hilbert-tér, azaz olyan Banach-tér amelyen megadható egy  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{C}$  belső szorzat, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján [40] bármely



$\omega \in \overline{\mathcal{H}^*}$ -hoz létezik olyan  $\psi \in \mathcal{H}$ , amelyre a  $\langle \psi, . \rangle: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  lineáris leképezés éppen  $\omega \in \overline{\mathcal{H}^*}$ -val egyezik meg. Így  $\mathcal{H} \simeq \overline{\mathcal{H}^*}$  és  $\overline{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}^*$ , továbbá a véges dimenziós esetben használt argumentum alapján az is belátható, hogy  $\mathcal{H} \simeq \overline{\mathcal{H}^*} \simeq \mathcal{H}^{**}$ .



## 3. fejezet

# Tenzorok

**3.0.1. Definíció.** Legyen  $\mathcal{T}$  egy tetszőleges  $n$ -dimenziós, valós vektortér,  $\mathcal{T}^*$  pedig  $\mathcal{T}$  duálisa. Ekkor a

$$T : \underbrace{\mathcal{T}^* \times \cdots \times \mathcal{T}^*}_k \times \underbrace{\mathcal{T} \times \cdots \times \mathcal{T}}_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.0.1)$$

alakú multi-lineáris – azaz minden változójában lineáris – leképezéseket  $(k, l)$ -típusú tenzoroknak nevezzük.

Belátható, hogy a  $(k, l)$ -típusú tenzorok az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve valós vektorteret alkotnak, melyet ezentúl  $\mathcal{T}^k_l$ -el jelölünk.

**3.0.1. Példa.** A  $(0, 1)$ -típusú tenzorok terét éppen a  $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  alakú lineáris leképezések feszítik ki, azaz  $\mathcal{T}^0_1 = \mathcal{T}^*$ .

**3.0.2. Példa.** Hasonlóan, az  $(1, 0)$ -típusú tenzorok terét a  $t : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{R}$  alakú lineáris leképezések feszítik ki, azaz  $t \in \mathcal{T}^{**}$  és így a fentebb ismertetett megfontolások alapján  $\mathcal{T}^1_0 = \mathcal{T}$ .

### 3.1. Kontrakció

**3.1.1. Definíció.** Tekintsük azon  $(k, l)$ -típusú tenzorok  $\mathcal{T}^k_l$  terét, amelyekre  $k, l \geq 1$ . Ekkor az „ $i$ -edik” duális és a „ $j$ -edik” vektor változóiban vett kontrakción azt a

$$\mathcal{C}^i_j : \mathcal{T}^k_l \rightarrow \mathcal{T}^{k-1}_{l-1} \quad (3.1.2)$$

leképezést értjük, amely a  $T \in \mathcal{T}^k_l$  tenzorhoz azt a  $\mathcal{C}^i_j T \in \mathcal{T}^{k-1}_{l-1}$  tenzort rendeli, amelyet a

$$\mathcal{C}^i_j T = \sum_{\varepsilon=1}^n T \left( \dots, \overset{i}{\underset{j}{v}}^{\varepsilon}, \dots; \dots, \overset{k+j}{v}_{\varepsilon}, \dots \right) \quad (3.1.3)$$

hozzárendelési szabállyal értelmezzünk, ahol  $\{v_{\sigma}\}$  a  $\mathcal{T}$  vektortér egy tetszőlegesen választott bázisát,  $\{v^{*\sigma}\}$  pedig annak duálisát jelöli.

**3.1.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy  $\mathcal{C}^i_j T$  valóban független a  $\{v_{\sigma}\}$  bázis megválasztásától, azaz ha a  $\{v_{\sigma}\}$  bázis helyett egy olyan  $\{v'_{\gamma}\}$  bázist használunk, amelynek elemeit a  $v'_{\gamma} = \sum_{\rho=1}^n A_{\gamma\rho} v_{\rho}$  összefüggéssel határozzuk meg, ahol az  $A_{\gamma\rho}$  mátrix nem degenerált ( $\det(A_{\gamma\rho}) \neq 0$ ), akkor a multi-linearitást kihasználva a  $\mathcal{C}^i_j T(\{v_{\sigma}\}) = \mathcal{C}^i_j T(\{v'_{\gamma}\})$  reláció teljesül.

### 3.2. Tenzori szorzat

**3.2.1. Definíció.** Legyenek  $T \in \mathcal{T}^k_l$ , valamint  $T' \in \mathcal{T}^{k'}_{l'}$  tetszőleges tenzorok. Ekkor a  $T$  és  $T'$  tenzorok  $\otimes$ -szorzatán azt a  $T \otimes T' \in \mathcal{T}^{k+k'}_{l+l'}$  tenzort értjük, amelyre

$$\begin{aligned} T \otimes T'(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k+k'}; w_1, \dots, w_{l+l'}) = \\ T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}; w_1, \dots, w_l) \cdot T'(\omega^{*k+1}, \dots, \omega^{*k+k'}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

teljesül tetszőleges  $\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k+k'} \in \mathcal{T}^*$  és  $w_1, \dots, w_{l+l'} \in \mathcal{T}$  választás esetén.

Így a tenzorok  $\otimes$ -szorzata valójában a  $(k, l)$ - és  $(k', l')$ -típusú tenzorok terének Descartes-szorzatából a  $(k + k', l + l')$ -típusú tenzorok terébe vivő

$$\otimes : \mathcal{T}_l^k \times \mathcal{T}_{l'}^{k'} \rightarrow \mathcal{T}_{l+l'}^{k+k'} \quad (3.2.5)$$

leképezés.

A tenzori szorzás műveletét felhasználva a  $\mathcal{T}$  és  $\mathcal{T}^*$  elemiből kiindulva értelmezhetünk különféle szorzat-tenzorokat. Például a korábban tekintett  $t \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_0^1$  és  $\tau \in \mathcal{T}^* = \mathcal{T}_1^0$  elemek  $t \otimes \tau$  szorzata  $(1, 1)$ -típusú tenzor.

**3.2.1. Feladat.** *Találjunk példát olyan  $(1, 1)$ -típusú tenzorra, mely nem állítható elő  $(0, 1)$  és  $(1, 0)$ -típusú tenzorok  $\otimes$ -szorzataként.*

Jelölje most  $\{v_\sigma\}$   $\mathcal{T}$  tetszőleges bázisát, valamint  $\{v^{*\sigma}\}$  ennek duálisát. Ekkor, a fentebb tett megállapításaink fényében az is nyilvánvaló, hogy  $\{v_\sigma\}$  a  $(1, 0)$ -típusú tenzorok terén, míg  $\{v^{*\sigma}\}$ , a  $(0, 1)$ -típusú tenzorok terén egy-egy bázist határoznak meg. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogyan adhatók meg a  $\mathcal{T}_l^k$  vektortér bázisai. A tenzorok  $\otimes$ -szorzatának tulajdonságaira alapozva belátható, hogy a

$$v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*v_1} \otimes \cdots \otimes v^{*v_l} \quad (3.2.6)$$

alakú tenzori szorzatok  $\mathcal{T}_l^k$ -nak egy bázisát határozzák meg.

Mivel a  $\{v_\sigma\}$  rendszerhez tartozó báziselemek száma  $n$ , a (3.2.6) alakú szorzatok által meghatározott,  $\{v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*v_1} \otimes \cdots \otimes v^{*v_l}\} \subset \mathcal{T}_l^k$ , bázishoz tartozó elemek száma éppen  $n^{k+l}$  kell legyen, azaz a  $\mathcal{T}_l^k$  vektortér dimenziójára  $\dim(\mathcal{T}_l^k) = n^{k+l}$  adódik. Mivel  $\{v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*v_1} \otimes \cdots \otimes v^{*v_l}\}$  bázisa  $\mathcal{T}_l^k$ -nek, bármely  $T \in \mathcal{T}_l^k$  kifejezhető ezen bázis szerint a

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{v_1 \dots v_l} \cdot v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*v_1} \otimes \cdots \otimes v^{*v_l} \quad (3.2.7)$$

formában, ahol a báziskifejtésben használt együtthatókat (a  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{v_1 \dots v_l}$  szá-

mokat) a  $T \in \mathcal{T}_l^k$  tenzor  $\{v_\mu\}$  bázisra vonatkozó komponenseinek nevezzük.

A komponensek segítségével a kontrakció és a tenzori szorzás művelete a

$$\left(\mathcal{C}^i_j T\right)^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1}} = \sum_{\varepsilon=1}^n T^{\mu_1 \dots \overset{i}{\varepsilon} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \overset{j}{\varepsilon} \dots \nu_l} \quad (3.2.8)$$

$$(T \otimes T')^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \cdot T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}} \quad (3.2.9)$$

kifejezések segítségével adható meg.

### 3.3. Transzformációs szabályok

A tenzorokkal kapcsolatban megfogalmazott minden eddigi állításunk igaz, bárhogyan is választjuk meg a kiindulási  $n$ -dimenziós  $\mathcal{T}$  vektorteret. Ahhoz, hogy téridőt megjelenítő  $M$  differenciálható sokaságon értelmezett tenzormezőket definiálhassuk és vizsgálhassuk, vissza kell térnünk az  $M$  pontjaihoz rendelt érintőterekhez. Jelölje megint  $\mathcal{T}(p)$  a  $p \in M$  ponthoz tartozó érintőtér! Amint azt a 2.1. alfejezetben láttuk, a  $p$  pont valamely  $\mathcal{O}$  környezetében értelmezett  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták által meghatározott  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  vektorrendszer egy lokális koordinátabázist határoz meg tetszőleges  $q \in \mathcal{O}$  ponthoz tartozó  $\mathcal{T}(q)$  érintőtéren. Tegyük fel, hogy  $(x'^1, \dots, x'^n)$  valamilyen más lokális koordináták a  $p$  pont  $\mathcal{O}'$  környezetében! Ekkor az összetett függvények deriválási szabályait felhasználva, látható, hogy bármely  $q \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$  pontban a  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  és a  $\{\partial/\partial x'^\mu\}$  lokális koordinátabázisok<sup>1</sup> a

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x'^\sigma}, \quad (3.3.10)$$

vagy

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (3.3.11)$$

---

<sup>1</sup> Minden legalább  $C^1$ -osztályú differenciálható sokaság felett.

összefüggések szerint kapcsolódnak egymáshoz.

Most vizsgáljuk meg, mi a kapcsolat valamely  $v \in \mathcal{T}(q)$  vektor  $\{\partial/\partial x^\mu\}$ , illetve  $\{\partial/\partial x'^\mu\}$  lokális koordinátabázisokra vonatkozó komponensei között. Ehhez, (3.3.10) alapján, elegendő a

$$v = \sum_{\sigma=1}^n v'^\sigma \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_{\sigma,\mu=1}^n v^\mu \left( \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \quad (3.3.12)$$

báziskifejtéseket tekintenünk, amelyből azonnal adódik, hogy

$$v'^\sigma = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \left( \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \right). \quad (3.3.13)$$

Mielőtt továbbhaladnánk, célszerű tisztáznunk, mi a  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  bázis duálisa. Mivel  $M$  tetszőleges differenciálható sokaság, minden rajta értelmezett, legalább  $C^1$ -osztályú,  $f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$  függvényhez hozzárendelhetjük annak teljes differenciálját,  $df$ -t. Így az  $M$  sokaság tetszőleges  $p$  pontjában értelmezzük a  $df: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést úgy, hogy tetszőleges  $v \in \mathcal{T}(p)$ -hez rendelje azt a  $df(v)$  számot, amelyre  $df(v) = v(f)$ . Mivel  $v: \mathcal{F}^{(1)}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés lineáris, az így meghatározott  $df$  teljes differenciál valóban a  $\mathcal{T}^*(p)$  duális térhez tartozik. Ezen definíciót használva most már könnyen látható, hogy a  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  lokális koordinátabázishoz tartozó duális bázis éppen a  $\{dx^\mu\}$  rendszer, melyet a koordinátafüggvények  $dx^\mu$  elemi differenciáljai feszítenek ki, hiszen ekkor a duális bázist meghatározó  $dx^\mu(\partial/\partial x^\nu) = \partial x^\mu/\partial x^\nu = \delta^\mu_\nu$  reláció automatikusan teljesül.

Mindezeket figyelembe véve, jelölje most a  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  bázishoz tartozó duális bázist  $\{dx^\mu\}$ , továbbá  $\{dx'^\mu\}$  a  $\{\partial/\partial x'^\mu\}$  bázishoz tartozó duális bázist. Legyen továbbá  $\omega \in \mathcal{T}^*(p)$  tetszőleges. Ekkor az analízisből jól ismert

$$dx^\mu = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) dx'^\nu \quad (3.3.14)$$

reláció, valamint a

$$\omega = \sum_{\nu=1}^n \omega'_\nu dx'^\nu = \sum_{\mu=1}^n \omega_\mu dx^\mu \quad (3.3.15)$$

báziskifejtések felhasználásával láthatjuk, hogy a  $\{dx'^\mu\}$ , valamint  $\{dx^\mu\}$  bázisokra vonatkozó komponenseket az

$$\omega'_\nu = \sum_{\mu=1}^n \omega_\mu \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) \quad (3.3.16)$$

összefüggés kapcsolja össze. Összehasonlítva a (3.3.11) és (3.3.16) relációkat látható, hogy az  $\omega \in \mathcal{T}^*(p)$  komponenseire vonatkozó transzformációs törvényben a vesszőzött és vesszőzetlen mennyiségeket ugyanaz a mátrix kapcsolja össze, mint amely a  $\{\partial/\partial x'^\mu\}$  lokális koordinátabázist a  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  bázishoz köti. Éppen ezért  $\mathcal{T}^*(p)$  elemeit „együtt változó”, vagy „kovariáns” vektoroknak,  $\mathcal{T}(p)$  elemeit pedig, amelyek a  $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)$  mátrix inverzével transzformálódnak, „ellentétesen változó”, vagy „kontravariáns” vektoroknak is szoktuk nevezni.

A tenzorok multilineáris voltát felhasználva könnyen belátható, hogy bármely  $T \in \mathcal{T}^k_l$  tenzor komponenseinek transzformációjára a

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \sum_{\alpha_1, \dots, \beta_l=1}^n T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \left( \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \right) \cdots \left( \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\alpha_k}} \right) \left( \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \right) \cdots \left( \frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial x'^{\nu_l}} \right) \quad (3.3.17)$$

reláció adódik. Erre az egyenletre, mint a tenzorok általános koordinátabázisokra vonatkozó transzformációs szabályára is szoktunk hivatkozni. Érdemes megjegyezni, hogy néhány monográfia éppen ennek a transzformációs összefüggésnek a segítségével vezeti be a tenzor fogalmát.



### 3.4. Tenzormezők

Rendeljünk hozzá az  $M$  sokaság minden egyes pontjához egy  $(k, l)$ -típusú tenzort. Az így kapott objektumot  $(k, l)$ -típusú tenzormezőnek nevezzük, míg a  $(k, l)$ -típusú tenzormezők halmazát  $\mathcal{T}^k_l(M)$ -mel jelöljük.

Ha  $t \in \mathcal{T}(M)$  egy vektormező, azaz  $t(1, 0)$ -típusú tenzormező  $M$ -en, akkor tudunk beszélni a  $t$  vektormező differenciálhatóságáról, hiszen bármely differenciálható  $f \in \mathcal{F}(M)$  függvény esetén a  $t(f)$  kifejezés<sup>2</sup> egy  $t(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvény  $M$ -en, amelynek differenciálhatóságát már korábban [lásd a 2.0.15. definíciót] értelmeztük. Így a  $t$  vektormezőt  $C^k$ -osztályúnak nevezzük, ha a  $t(f)$  függvény  $C^k$ -osztályú minden legalább  $C^k$ -osztályú  $f \in \mathcal{F}^{(k)}(M)$  függvény esetén. Hasonlóan értelmezhető a  $(0, 1)$ -típusú tenzormezők differenciálhatósága, hiszen bármely  $v \in \mathcal{T}(M)$  és  $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$  választás esetén  $\omega(v)$  egy valós függvényt határoz meg  $M$ -en. Így  $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$ -et  $C^k$ -osztályúnak nevezzük, ha az  $\omega(v)$  függvény  $C^k$ -osztályú minden legalább  $C^k$ -osztályú  $v \in \mathcal{T}(M)$  vektormező esetén. Belátható, hogy  $v \in \mathcal{T}(M)$  és  $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$  pontosan akkor  $C^k$ -osztályúak, ha a legalább  $C^{k+1}$ -osztályú  $M$  differenciálható sokaság bármely lokális koordinátarendszeréhez tartozó komponenseik  $C^k$ -osztályúak.

Általában egy  $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$  tenzormezőt  $C^k$ -osztályúnak nevezünk, ha bármely  $\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k} \in \mathcal{T}^*(M)$  és  $w_1, \dots, w_l \in \mathcal{T}(M)$  legalább  $C^k$ -osztályú kovariáns és kontravariáns vektormező esetén a  $T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}, w_1, \dots, w_l) : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $C^k$ -osztályú. Belátható, hogy a lokális koordinátarendszerekhez tartozó komponensek  $C^k$ -osztályúsága általános esetben is ekvivalens a  $(k, l)$ -típusú tenzormezők  $C^k$ -osztályúságával.

---

<sup>2</sup>Ez tetszőleges  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép esetén, amelyhez  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták tartoznak a  $t(f) = \sum_{\alpha} t^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}$  alakban írható fel.

### 3.5. Az absztrakt index

Legyen  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$  tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzormező. A továbbiakban  $T$ -t, mint általános tenzoriális objektumot  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ -vel jelöljük, ahol a „kis latin betűs indexek” a

$$T(\underbrace{\dots, \dots, \dots}_k; \underbrace{\dots, \dots, \dots}_l) \quad (3.5.18)$$

„hasában levő”, különben meg nem nevezett, „nyílások” megjelenítésére szolgálnak.

Megkülönböztetésül a  $T \in \mathcal{T}_l^k(k, l)$ -típusú tenzor valamely  $\{v_v\} \subset \mathcal{T}$  és  $\{v^{*v}\} \subset \mathcal{T}^*$  duális bázispárjához tartozó komponenseit továbbra is  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ -vel jelöljük, azaz a „kis görög betűs indexek” mindig konkrét bázisokra vonatkozó komponenseket jelölnek.

Miért jó ennek a jelölésnek a használata? Ennek illusztrálására tekintsük a következő egyszerű példákat. Legyenek,  $v^a \in \mathcal{T}(M)$  és  $\omega_b \in \mathcal{T}^*(M)$ . Ezek tenzori szorzatát, valamint annak kontrakcióját röviden a  $v^a \omega_b \in \mathcal{T}^1_1(M)$ , valamint  $v^e \omega_e \in \mathcal{T}(M)$  kifejezések jelölik. Az absztrakt index jelölésben mindig az Einstein-féle összegzési szabályt alkalmazzuk, melynek értelmében az ugyanolyan betűvel jelzett kovariáns és kontravariáns indexekre összegzését hajtunk végre. Az Einstein-féle összegzési szabályt az imént felírt kontrakcióban már alkalmaztunk is. Általában a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l^k(M)$  tenzor „ $i$ -edik” és „ $j$ -edik” index párjában vett kontrakcióját a

$$\left( \mathcal{C} \begin{matrix} i \\ \smile \\ j \end{matrix} T \right)^{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k}_{b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_l} = T^{a_1 \dots e \dots a_k}_{b_1 \dots e \dots b_l} \quad (3.5.19)$$

relációval jelenítjük meg. Hasonlóan, például a  $T^{abc}_{de} \in \mathcal{T}^3_2(M)$  és az  $S^{gh}_{jk} \in \mathcal{T}^2_2(M)$  tenzorok  $\otimes$ -szorzatát  $T^{abc}_{de} S^{gh}_{jk}$ -vel jelöljük. Mindezeknek megfe-

lelően

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} v^{*\mu_1}_{a_1} \dots v^{*\mu_k}_{a_k} v^{b_1}_{\nu_1} \dots v^{b_l}_{\nu_l}. \quad (3.5.20)$$

Azt érdemes megjegyezni, hogy az absztrakt indexek használatával felírt egyenletek mindig tenzor egyenletek, azaz belőlük tetszőleges bázisválasztásra vonatkozó komponensek egyenlősége következik. Az absztrakt indexek használatán alapuló jelölésrendszer előnye ott jelentkezik, hogy minden, az alkalmazásával felírt tenzor egyenletnek akkor is van értelme, ha a komponensek használata során elengedhetetlenül szükséges konkrét bázisválasztásról még egy szót sem ejtettünk. Ezáltal a tenzorokkal végzett műveletek nagy része lényegesen leegyszerűsödik, bár el kell ismerni, hogy minden így kapott eredmény értelemszerűen a komponensek használatára alapozott pontos lokális megfontolások révén is származtatható.

### 3.6. Tenzorok szimmetriái és antiszimmetriái

Tekintsünk egy tetszőleges  $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$  tenzormezőt. Legyenek továbbá  $v^a$  és  $w^a$  tetszőleges vektormezők  $M$ -en. Ekkor  $T_{ab}v^aw^b$  kontrakció valós függvény  $M$ -en. Hasonlítsuk össze a  $T_{ab}v^aw^b$  és  $T_{ab}w^av^b$  függvényeket.

**3.6.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$  tenzormező szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus, ha a  $v^a, w^a \in \mathcal{T}(M)$  vektormezők tetszőleges választása esetén a

$$T_{ab}v^aw^b = T_{ab}w^av^b, \quad \text{illetve} \quad T_{ab}v^aw^b = -T_{ab}w^av^b \quad (3.6.21)$$

egyenlőség teljesül.

Belátható, hogy  $T_{ab}$  pontosan akkor szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus, ha (az absztrakt index jelölésben)  $T_{ab} = T_{ba}$ , illetve  $T_{ab} = -T_{ba}$ . Bármely  $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$  tenzormezőhöz hozzárendelhetjük annak szimmetrikus, illetve

antiszimmetrikus részét, amelyeken a

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \text{ illetve a } T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) \quad (3.6.22)$$

tenzormezőket értjük.

**3.6.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy  $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$  pontosan akkor szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus, ha  $T_{[ab]} = 0$ , illetve  $T_{(ab)} = 0$ , azaz  $T_{ab} = T_{(ab)} \Leftrightarrow T_{[ab]} = 0$ , illetve  $T_{ab} = T_{[ab]} \Leftrightarrow T_{(ab)} = 0$ .

Egyszerre több, azonos típusú tenzorindexben vett szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus rész is értelmezhető.

**3.6.2. Definíció.** Legyen például  $T_{a_1 \dots a_l} \in \mathcal{T}^0_l(M)$ . Ekkor  $T_{a_1 \dots a_l}$  teljesen szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus részén a

$$T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \quad (3.6.23)$$

illetve a

$$T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} \cdot T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \quad (3.6.24)$$

tenzormezőket értjük, ahol a kijelölt összegzéseket az  $1, \dots, l$  számok összes,  $l!$  számú  $\pi$  permutációjára kell elvégezni, továbbá  $\delta_{\pi}$  értéke 1, ha az adott  $\pi$  permutáció páros, illetve  $-1$ , ha  $\pi$  páratlan.

A szimmetrikus, illetve az antiszimmetrikus rész képzése az azonos típusú tenzorindexekben (melyek nem feltétlenül ölelik fel az összes azonos típusú indexet) mindig, akár egyszerre is értelmezhető. Így például

$$T^{(ab)c}_{[de]} = \frac{1}{2} \left( T^{abc}_{[de]} + T^{bac}_{[de]} \right) = \frac{1}{4} \left( T^{abc}_{de} + T^{bac}_{de} - T^{abc}_{ed} - T^{bac}_{ed} \right). \quad (3.6.25)$$

**3.6.2. Feladat.** Legyen  $T_{abc} \in \mathcal{T}^0_3(M)$  úgy, hogy  $T_{abc} = -T_{bac}$ , azaz  $T_{abc} = T_{[ab]c}$ . Keressük meg a  $T_{[abc]}$  tenzormező legegyszerűbb alakját.

**3.6.3. Feladat.** Legyen  $S^{abcd} \in \mathcal{T}_0^4(M)$  tetszőleges tenzormező. Határozzuk meg az  $S^{a(b[cd]}$ , valamint az  $S^{a[b(cd]}$  tenzormezőket.



## 4. fejezet

# A metrika

Ha végigtekintünk a klasszikus fizikai elméleteken – a 2.2.1. megjegyzés értelmében a kvantált elméletek sem kivételek – azt láthatjuk, hogy mindegyikben fellelhető egy metrikus tulajdonságok kifejezésére alkalmas matematikai struktúra, amelyet egy  $(0,2)$ -típusú szimmetrikus tenzormező segítségével jeleníthetünk meg. A metrikát felhasználva tudunk olyan fontos megállapításokat tenni, hogy mekkora egy adott téridőpontban két térszerű vektor által bezárt szög, mekkorák a térszerű, illetve időszerű távolságok, a sajátidő intervallumok, vagy például bizonyos felületdarabok felszíne, illetve különféle téridőtartományok négyes térfogata. Mindemellett az általános relativitáselméletben a téridőn értelmezett metrika görbültsége helyettesíti a gravitációs kölcsönhatást is, így az Einstein-elmélet szempontjából az egyik legalapvetőbb matematikai struktúra.

**4.0.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $X_{ab} : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$   $(0,2)$ -típusú tenzormező degenerált a  $p \in M$  pontban, ha létezik olyan  $v^a \in \mathcal{T}(p)$  nemzérus vektor, amelyre tetszőleges  $w^a \in \mathcal{T}(p)$  vektor esetén az  $X_{ab}v^aw^b = 0$  egyenlőség teljesül.

**4.0.4. Definíció.** Legyen  $g_{ab}$  egy sehol sem degenerált  $(0,2)$ -típusú, szimmetrikus tenzormező  $M$ -en. Ekkor azt mondjuk, hogy  $g_{ab}$  egy metrikát határoz meg  $M$ -en.

Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép, amelyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták. Ezekhez a lokális koordinátákhoz tartozó  $\{(dx^\mu)_a\}$  duális bázismező segítségével  $\mathcal{O}$  pontjaiban a  $g_{ab}$  metrikát a

$$g_{ab} = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} \cdot (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \quad (4.0.1)$$

relációval, valamint, ahogy ezt sokszor teszik, ennek egyszerűsített „vonalelemes” alakjával

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} \cdot dx^\mu dx^\nu \quad (4.0.2)$$

adhatjuk meg.

Belátható, hogy  $g_{ab}$  pontosan akkor nemdegenerált az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett, ha az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákhoz tartozó komponenseiből felépített  $n \times n$ -es  $g_{\mu\nu}$  mátrix invertálható, azaz  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ .

## 4.1. Az inverz-metrika

Mivel  $g_{ab}$ -ről feltettük, hogy az nemdegenerált megmutatható, hogy egyértelműen található hozzá egy olyan  $g^{ab} \in \mathcal{T}^2_0(M)$   $(2, 0)$ -típusú szimmetrikus tenzormező  $M$ -en, amely eleget tesz a

$$g^{ae} g_{eb} = \delta^a_b \quad (4.1.3)$$

relációnak, ahol  $\delta^a_b$  pontonként az adott pontbeli érintőtér önmagára vett azonos leképezését jelöli. Ezt a  $g^{ab}$  tenzort a metrika inverzeként, vagy a metrika kontravariáns alakjaként is szokás emlegetni.

A fentiek alapján könnyen belátható, hogy amennyiben  $g_{ab}$  valamely  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképhez tartozó  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákra vonatkozó komponenseit  $g_{\mu\nu}$  jelöli, akkor a  $g^{ab}$  kontravariáns metrika  $g^{\mu\nu}$  komponenseit az  $n \times n$ -es  $g_{\mu\nu}$  mátrix  $(g_{\mu\nu})^{-1}$  inverzével adhatjuk meg  $\mathcal{O}$  felett.



## 4.2. Szignatúra

Legyen  $g_{ab}$  metrika  $M$ -en. Ekkor  $g_{ab}$  segítségével bármely  $p \in M$  pontban mindig megkonstruálható a  $p$ -beli  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér olyan  $\{e_{(a)}^a\}$  ( $a = 1, \dots, n$ ) ortonormált bázisa, amelyre  $g_{ab}$  ezen bázisra vonatkozó  $g_{ab}$  komponenseinek abszolút értékeire

$$|g_{ab}| = |g_{ab} e_{(a)}^a e_{(b)}^b| = \delta_{ab} \quad (4.2.4)$$

reláció teljesül, azaz a  $g_{ab}$  mátrix nem zérus elemei a főátlóban találhatók és vagy  $+1$ , vagy  $-1$  értékűek. Ismert, hogy amikor létezik a fenti követelményeknek eleget tevő ortonormált bázis, akkor mindig végtelen sok ilyen bázis létezik. Azonban a nemdegenerált, szimmetrikus bilineáris leképezésekről – a lineáris algebrai tanulmányaink során – tanultak alapján tudjuk, hogy azon ortonormált bázisvektorok száma, amelyekhez  $+1$ , illetve  $-1$  belső szorzat tartozik független attól, hogy melyik ortonormált bázisban végezzük el a vonatkozó számlálást.

**4.2.1. Definíció.** Azon ortonormált bázisvektorok számát, melyekhez pozitív, illetve negatív belső szorzat tartozik a metrika szignatúrájának nevezzük.

**4.2.1. Megjegyzés.** Sokszor előfordul az, hogy az ortonormált bázisvektorok belső szorzatának előjeléből képzett

$$(\underbrace{-, \dots, -}_m, \underbrace{+, \dots, +}_{n-m}) \quad (4.2.5)$$

kifejezésre, vagy az  $s = n - 2m$  számra is, mint a metrika szignatúrájára hivatkozunk.

A  $(+, \dots, +)$  szignatúrájú pozitív definit metrikákat *Riemann-félének*, míg a  $(-, +, \dots, +)$  szignatúrájú metrikákat *szemi-Riemann-*, vagy *Lorentz-félének* nevezzük. Azokat a transzformációkat, amelyek a Riemann-, illetve a Lorentz-féle metrikákhoz tartozó ortonormált bázisokat kapcsolják össze, ortogonális-, illetve Lorentz-transzformációnak nevezzük.

Belátható, hogy amikor valamely  $M$  differenciálható sokaságon megadható metrika, azaz egy nemdegenerált  $(0,2)$ -típusú szimmetrikus, legalább folytonos  $g_{ab}$  tenzormező, akkor  $g_{ab}$  szignatúrája konstans, azaz nem változhat pontról pontra, illetve térképről térképre.

### 4.3. A metrika által meghatározott izomorfizmusok

Legyen  $g_{ab}$  metrika  $M$ -en. Ekkor bármely  $p \in M$  esetén a  $g_{ab} : \mathcal{T}(p) \times \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés segítségével megadható a  $\mathcal{T}(p)$  és  $\mathcal{T}^*(p)$  vektorterek között egy olyan  $g : \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathcal{T}^*(p)$  lineáris leképezés is, amely tetszőleges  $v^a \in \mathcal{T}(p)$ -hez azt a  $[g(v)]_a \in \mathcal{T}^*(p)$  duális vektort rendeli hozzá, amelyre  $[g(v)]_a = g_{ab}v^b$ . Mivel  $g_{ab}$  nemdegenerált megmutatható, hogy tetszőleges  $p \in M$  esetén  $g : \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathcal{T}^*(p)$  a  $\mathcal{T}(p)$  érintőteret kölcsönösen egyértelmű módon képezi rá  $\mathcal{T}^*(p)$ -re. Így  $g : \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathcal{T}^*(p)$  egy (bázisfüggetlen) természetes izomorfizmus a  $\mathcal{T}(p)$  és  $\mathcal{T}^*(p)$  vektorterek között.

Hasonlóan a  $g_{ab}$  metrika inverze, azaz  $g^{ab}$  segítségével is tetszőleges  $p \in M$  esetén definiálhatunk egy olyan természetes  $g^{-1} : \mathcal{T}^*(p) \rightarrow \mathcal{T}(p)$  izomorfizmust a  $\mathcal{T}^*(p)$  és  $\mathcal{T}(p)$  vektorterek között, amely tetszőleges  $\omega_a \in \mathcal{T}^*(p)$ -hoz a  $[g^{-1}(\omega)]^a = g^{ab}\omega_b \in \mathcal{T}(p)$  vektort rendeli, és így  $\mathcal{T}^*(p)$ -t kölcsönösen egyértelmű módon képezi rá  $\mathcal{T}(p)$ -re.

A  $g_{ab}$  metrika, valamint a fenti leképezés segítségével vektorindexeket „húzzhatunk le”, míg  $g^{ab}$ -vel kovektorindexeket „emelhetünk fel”. Mivel tetszőleges típusú tenzorok mindig az alaptér és annak duálisa elemeiből kiindulva tenzori szorzatok lineárkombinációiként fejezhetők ki, tetszőleges típusú tenzor, vektor, illetve kovektor indexét lehúzzhatjuk, illetve felemelhetjük a  $g_{ab}$  metrika, illetve annak  $g^{ab}$  inverze segítségével. Így például, ha  $T^{abc}_{de} \in \mathcal{T}^3_2(M)$ , akkor az ily módon belőle képzett  $T^a_{b\ cde}$  tenzormezőn a  $g_{bi}g^{dj}g^{ek}T^{aic}_{jk}$  kifejezést fogjuk érteni.

**4.3.1. Feladat.** Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép  $M$ -en  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákkal. Legyenek továbbá  $\{(\partial/\partial x^\mu)^a\} \subset \mathcal{T}(M)$  és  $\{(dx^\mu)_a\} \subset \mathcal{T}^*(M)$  az ezekhez a koordinátákhoz tartozó érintőtérbeli és duálistérbeli bázisok. Mutassuk meg, hogy a fent definiált bázisfüggetlen természetes izomorfizmusok csak nagyon speciális metrika esetén adják vissza a  $\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$  és  $\{(dx^\mu)_a\}$  duális bázispárok (2.2.19) reláció által meghatározott kölcsönösen egyértelmű megfeleltetését.

**4.3.2. Feladat.** Legyen  $\{e_{(a)}^a\} \subset \mathcal{T}(M)$  ( $a = 1, \dots, n$ ) egy tetszőleges ortonormált bázismező  $M$ -en. Jelölje  $\{e_a^{(a)}\} \subset \mathcal{T}^*(M)$  az  $\{e_{(a)}^a\}$ -hoz duális bázismezőt. Mutassuk meg, hogy

$$g_{ab} e_{(a)}^a = g_{ab} e_b^{(b)} \quad (4.3.6)$$

tetszőleges  $a$  névindex esetén és így a szignatúrát a (4.3.6) egyenlet által megfogalmazott sajátértékprobléma  $-1$ -es sajátértékeinek számával is megadhatjuk.



## 5. fejezet

# A kovariáns derivált

A fizikai mennyiségek időbeli, illetve térbeli változásának gyorsaságát a különféle fizikai folyamatokat leíró téregyenletek kapcsolják össze. A változási gyorsaság mindig egy jól meghatározott deriválási művelet segítségével fejezhető ki. Skaláris mennyiségek esetén teljesen kielégítő az iránymenti deriváltak használata. Vannak azonban olyan fizikai rendszerek, ilyenek például az elektromágneses tereket, vagy különféle folyadékokat leíró modellek, amelyekben tenzoriális mennyiségeket kell alkalmaznunk a fizikai mennyiségek és folyamatok adekvát megjelenítése érdekében. Naivan ekkor is okoskodhatnánk úgy – például a Maxwell-elméletre gondolva – hogy az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor változási gyorsaságát valamely  $\gamma$  görbe  $p = \gamma(t_p)$  pontjában a

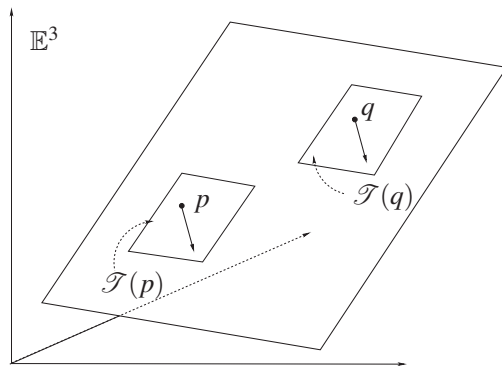
$$\frac{F_{ab}(\gamma(t)) - F_{ab}(\gamma(t_p))}{t - t_p} \quad (5.0.1)$$

formális hányados  $t \rightarrow t_p$  átmenethez tartozó határeseteként értelmezzük. Van azonban egy nagy baj ezzel a naiv megközelítéssel. A számlálóban található különbség tagjai mindig két különböző pont, a  $\gamma(t)$  futópont és a  $\gamma(t_p)$  alapponthoz tartoznak. Ezek különböző vektorterek így ezek elemeit nem lehet egymásból kivonni, ezért – anélkül, hogy megfelelő kapcsolatot létesítenénk a  $\mathcal{T}_2(\gamma(t))$  és  $\mathcal{T}_2(\gamma(t_p))$

terek között – nincs értelme a fenti különbségnek. Éppen ezért a különféle görbült geometriára építő metrikus fizikai elméletekben – ilyen az Einstein-féle gravitációelmélet is – a deriválás művelete csak a különböző pontokhoz tartozó érintőterek közötti kapcsolat megadása után válik értelmezhetővé. Ilyen deriváltra példa a soron következő részben tárgyalt kovariáns deriválás, valamint ahogy azt később látni fogjuk, a bizonyos értelemben sokkal egyszerűbb Lie-deriválás művelete is csak ily módon válik értelmezhetővé.

### 5.1. Párhuzamos eltolás a'la Levi-Civita

Amikor az  $\mathbb{E}^3$  háromdimenziós Euklideszi térbe beágyazott sík lapot látunk (lásd az 5.1. ábrát) teljesen nyilvánvalónak tűnik, hogy az nem görbült. Ez



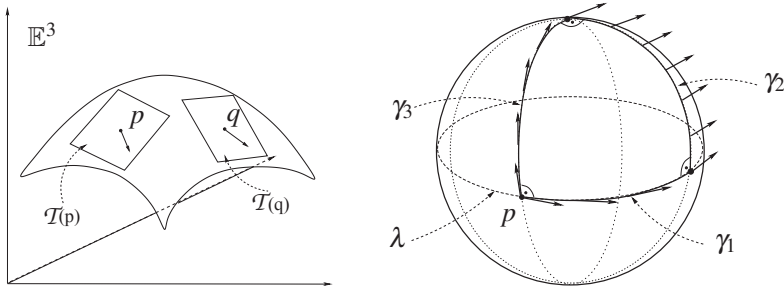
5.1. ábra. Az  $\mathbb{E}^3$  háromdimenziós Euklideszi térbe beágyazott sík lap, valamint az ott elvégzett párhuzamos eltolás hatásának illusztrációja.

egyrészt azért fejeződik ki, hogy bármely két különböző pontjának érintőtereit, az  $\mathbb{E}^3$ -ban értelmezett párhuzamos eltolás szabályait használva, mindig kölcsönösen egyértelmű módon meg tudjuk feleltetni egymásnak. Ezzel szemben amikor egy görbült felületet látunk  $\mathbb{E}^3$ -ba beágyazva azt is rögtön érezzük,

mit jelent a felület görbülsége. Az  $\mathbb{E}^3$ -ba beágyazott görbült felületek esetén két különböző ponthoz tartozó érintőtér megfeleltetése már korántsem olyan magától értetődő, mint a sík felület esetében. Ezt a felületelméleti kérdést Levi-Civita oldotta meg 1917-ben.

Levi-Civita konstrukciójának kicsit leegyszerűsített változatát követve az alábbi lépéseket kell végrehajtanunk. Vegyünk a felület egy tetszőleges  $p$  pontját, valamint a  $\mathcal{T}(p)$  érintőtérnek egy tetszőleges  $v^a$  elemét. Arra vonatkozóan, hogy mit kell megfeleltetnünk  $v^a$ -nak a  $p$ -hez „infinitezimálisan” közeli  $q$  pont  $\mathcal{T}(p)$  érintőterében a következő előírást kell követnünk. Először  $v^a$ -t toljuk el párhuzamosan a  $q$  pontba az  $\mathbb{E}^3$ -ban érvényes párhuzamos eltolási szabályt alkalmazva. Ekkor  $v^a$  vektor  $q$ -beli megfelelője már nem szükségképpen lesz benne a  $q$ -beli érintőtérben. Második lépésben vetítsük le az így nyert vektort a  $q$ -beli érintőtérbe. Ezt az eljárást alkalmazva tetszőleges felületi görbe mentén pontról-pontra haladva értelmezhetjük bármely vektor adott görbe menti párhuzamos eltolását. Az így kapott párhuzamos eltolás művelete azonban általában – kivéve például az imént említett sík felületre vonatkozó példát – függ a választott útvonaltól. Ennek illusztrálása érdekében, tekintsünk egy gömbfelületet. Jelölje  $\lambda$  az egyenlítői főkört, továbbá jelölje  $\gamma$  az 5.2. ábrának megfelelő három egymásra merőleges főkörívből álló  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  zárt görbét. Könnyen látható, hogy amennyiben a Levi-Civita-féle eljárást követjük, akkor a  $\lambda$  zárt görbe mentén vett párhuzamos eltolás a  $p$  pontbeli  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér önmagára vett identikus leképezését eredményezi, míg a  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  görbe mentén körbemenve minden vektor az óramutató járásával ellentétesen forgásirányba 90 fokkal elfordul.

Látni fogjuk, hogy a párhuzamos eltolás és a kovariáns deriválás egymáshoz nagyon közeli geometriai struktúrák, valójában általános differenciálható sokaságok esetén is egyik felhasználásával a másik mindig meghatározható. Mi azt a megközelítést alkalmazzuk, amely a kovariáns deriválás műveletét tekinti elsődlegesnek, így az alábbiakban először ezt a fogalmat vezetjük be.



5.2. ábra. A baloldalon az  $\mathbb{E}^3$  háromdimenziós Euklideszi térbe beágyazott görbült felület, valamint a párhuzamos eltolás hatásának illusztrációja, míg a jobboldalon a gömbfelületen a  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ , három egymásra merőleges fő körívből álló zárt görbe mentén végzett párhuzamos eltolás hatása látható.

## 5.2. Kovariáns deriválás

**5.2.1. Definíció.** Kovariáns deriváláson olyan

$$\nabla_a : \mathcal{T}_l(M) \rightarrow \mathcal{T}_{l+1}(M) \quad (5.2.2)$$

a  $C^m$ -osztályú,  $(k, l)$ -típusú tenzormezők teréből a  $C^{m-1}$ -osztályú,  $(k, l+1)$ -típusú tenzormezők terébe vivő leképezést értünk, amely eleget tesz az alábbi négy feltételnek.

(1)  $\nabla_a$  lineáris, azaz tetszőleges  $T, S \in \mathcal{T}_l(M)$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  választás esetén

$$\begin{aligned} \nabla_c(\alpha \cdot T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \cdot S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) &= \\ &= \alpha \cdot \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \cdot \nabla_c S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

(2) Teljesül a Leibnitz-szabály, azaz bármely  $T \in \mathcal{T}_l(M)$  és  $S \in \mathcal{T}^{k'}_{l'}(M)$  választás esetén

$$\begin{aligned} \nabla_c(T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \cdot S^{e_1 \dots e_{k'}}_{f_1 \dots f_{l'}}) &= \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \cdot S^{e_1 \dots e_{k'}}_{f_1 \dots f_{l'}} \\ &+ T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \cdot \nabla_c S^{e_1 \dots e_{k'}}_{f_1 \dots f_{l'}}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$



(3) *Felcserélhető a kontrakció műveletével, azaz tetszőleges  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$  esetén*<sup>1</sup>

$$\nabla_c \left( T^{a_1 \dots \overset{i}{\underset{\cdot}{e}} \dots a_k}_{b_1 \dots \overset{j}{\underset{\cdot}{e}} \dots b_l} \right) = (\nabla_c T)^{a_1 \dots \overset{i}{\underset{\cdot}{e}} \dots a_k}_{b_1 \dots \overset{j}{\underset{\cdot}{e}} \dots b_l}. \quad (5.2.5)$$

(4) *Összhangban van azzal, ahogyan a skalár függvényekre ható iránymenti deriváltakat*<sup>2</sup> *értelmeztük, azaz bármely  $f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$ -re és  $t^a \in \mathcal{T}(M)$ -re*

$$t(f) = t^a \nabla_a f. \quad (5.2.6)$$

Az (1)-(4) feltételeknek eleget tevő  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorokról megmutatható – ezt hamarosan mi is megteesszük – hogy mindig létezik hozzájuk olyan (1,2)-típusú  $T^c_{ab}$  tenzormező, melyet  $\nabla_c$  torziótenzorának nevezünk és amely bármely  $f \in \mathcal{F}^{(2)}(M)$  függvényre a

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f \quad (5.2.7)$$

egyenletnek tesz eleget. Azt mondjuk, hogy valamely  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor torziómentes, ha  $T^c_{ab} = 0$ .

**5.2.1. Megjegyzés.** *Sokszor a kovariáns deriváló operátoroktól a torziómentességét, mint (5)-dik tulajdonságot, külön is meg szokták követelni, azaz felteszik, hogy*

---

<sup>1</sup> Az előző két tulajdonság felhasználásával megmutatható, hogy ezzel a feltétellel egyenértékű annak megkövetelése, hogy bármely  $\{v^a_{(\alpha)}\}$  és  $\{v^{*(\alpha)}_a\}$  duális bázispárra a névindexek tetszőleges értékeire a

$$\nabla_c (v^a_{(\alpha)} v^{*(\alpha)}_a) = (\nabla_c v^a_{(\alpha)}) v^{*(\alpha)}_a + v^a_{(\alpha)} (\nabla_c v^{*(\alpha)}_a) = 0$$

egyenlőség teljesüljön. Mivel a kovariáns derivált és a kontrakció műveletének felcserélhetőségét ebben az esetben is fel kell tenni, ezen utóbbi feltételek használata nem okoz semmiféle egyszerűsítést a (5.2.5) relációban megfogalmazott feltételhez képest.

<sup>2</sup> Gondoljunk vissza a (5.0.1) kifejezés kapcsán alkalmazott érvelésre.

(5)  $\nabla_a$  torziómentes, azaz bármely  $f \in \mathcal{F}^{(2)}(M)$ -re

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f. \quad (5.2.8)$$

Az első természetes kérdés az, hogy létezhet-e egyáltalán a fenti definícióban kirótt általános feltételeknek eleget tevő kovariáns deriváló operátor.

Először azt mutatjuk meg, hogy lokálisan mindig meg tudunk adni ilyen operátort. Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképet az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákkal. Legyen  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  legalább  $C^1$ -osztályú,  $(k, l)$ -típusú tenzormező  $M$ -en és jelölje  $T^{a_1 \dots a_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  annak az  $x^\mu$  koordinátákra vonatkozó komponenseit <sup>3</sup>  $\mathcal{O}$  felett. Definíáljuk most a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzor  $\partial_c$ -deriváltját, melyet  $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ -vel jelölünk és úgy értelmezzük, hogy ennek a  $(k, l+1)$ -típusú tenzormezőnek az  $x^\mu$  koordinátákra vonatkozó komponensei legyenek éppen a

$$\frac{\partial T^{a_1 \dots a_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}}{\partial x^\gamma} \quad (5.2.9)$$

parciális deriváltak.

Könnyen belátható, hogy a parciális deriváltak ismert tulajdonságainak köszönhetően a fenti definícióban megfogalmazott négy elvárás automatikusan teljesül. Mindezekon felül a deriváltak sorrendjének felcserélhetőségére vonatkozó, a torziómentességet kifejező (5.2.8) egyenlet nemcsak függvényekre, hanem az  $\mathcal{O}$  halmaz felett értelmezett tetszőleges típusú tenzormezőkre is teljesül.

Van azonban egy igen jelentős hiányossága az így definiált  $\partial_c$ -deriválnak. Ez az operátor általában csak lokálisan, azaz valamely  $\mathcal{O} \subset M$  részhalmaz felett értelmezett, így erősen függ az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták megválasztásától. Azt, hogy ez milyen problémákhoz vezethet érzékletesen mutatja be a következő egyszerű példa.

---

<sup>3</sup>A tömörebb szóhasználatot előnyben részesítve ezentúl a tenzoriális kifejezések valamely duális bázispárra vonatkozó komponenseinek megnevezése során többször előfordul majd, hogy nem magára a bázispárra, hanem csak a kiindulási koordináta-rendszerre vagy esetleg csak az érintőtér bázisára hivatkozunk.

**5.2.1. Példa.** Tekintsük az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképpel átfedésben lévő  $(\mathcal{O}', \psi')$  térképet, amelyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták, valamint legyen  $v^a \in \mathcal{T}(M)$  tetszőleges vektormező. Ekkor az  $\mathcal{O}$  és  $\mathcal{O}'$  halmazok közös részén a  $v'^B(x') = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha(x) \left( \frac{\partial x'^B(x)}{\partial x^\alpha} \right)$ , valamint az  $x^\mu = x^\mu(x')$  relációk folytán a

$$\frac{\partial v'^B}{\partial x'^\gamma} = \sum_{\alpha, \delta=1}^n \left\{ \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\delta} \left( \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \right) \left( \frac{\partial x'^B}{\partial x^\alpha} \right) + v^\alpha \left( \frac{\partial^2 x'^B}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} \right) \left( \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \right) \right\}, \quad (5.2.10)$$

egyenlet köti össze a  $v^a$  vektormező különböző koordináták által meghatározott  $\partial_c$ , illetve  $\partial'_c$  deriváltjainak koordináta-komponenseit. Az (5.2.10) egyenletből az következik, hogy  $\partial_c v^a$  csak egymással lineáris függvénykapcsolatban lévő koordináták használata esetén transzformálódik úgy, mint a „valódi”  $(1, 1)$ -típusú tenzormezők.

Az imént bemutatott korlátok ellenére lokálisan mindig értelmezhető az (1) – (5) feltételeknek eleget tevő kovariáns deriváló operátor. Mielőtt megmutatnánk, hogy a kovariáns deriválás művelete globálisan is definiálható, először – feltéve, hogy legalább egy létezik – azt mérjük fel, hogy milyen tág a lehetséges kovariáns deriváló operátorok tere.

Kiindulásképpen tegyük most fel, hogy  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  két kovariáns deriváló operátor és vizsgáljuk meg ezek hatásának eltérését a differenciálható függvényeken.

**5.2.1. Lemma.** Bármely  $f$  differenciálható függvény esetén  $\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f$ .

*Bizonyítás:* Emlékezzünk, hogy a (4)-es tulajdonság kirovásával éppen azt követeltük meg, hogy bármely  $f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$ -re és  $t^a \in \mathcal{T}(M)$ -re

$$t(f) = t^a \nabla_a f \quad (5.2.11)$$

teljesüljön. Mivel  $\nabla_a$ -ról csak azt tettük fel, hogy kovariáns deriváló operátor,

ebből azonban azonnal adódik az is, hogy

$$t^a \nabla_a f = t^a \tilde{\nabla}_a f = t(f) \quad (5.2.12)$$

tetszőleges  $f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$ -re és  $t^a \in \mathcal{T}(M)$ -re, ami  $t^a$  tetszőlegessége folytán igazolja a lemma állítását.  $\square$

**5.2.2. Megjegyzés.** Ebből az egyszerű lemmából azonnal következik, hogy amikor az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképen az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták által meghatározott  $\partial_a$  kovariáns deriváló operátort tekintjük, akkor az is igaz, hogy  $\mathcal{O}$ -n bármely  $f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$ -re

$$\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f = \partial_a f. \quad (5.2.13)$$

Vizsgáljuk meg ezek után a  $\nabla_a$  és a  $\tilde{\nabla}_a$  kovariáns deriváló operátorok hatásának eltérését a differenciálható kovariáns vektormezőkön. Legyen  $f$  és  $\omega_a$  differenciálható függvény és kovariáns vektormező  $M$ -en. Mivel mind  $\nabla_a$ , mind pedig  $\tilde{\nabla}_a$  eleget tesz a Leibnitz-szabálynak, a különbségükre teljesül a

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(f \omega_b) = \left[ (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) f \right] \omega_b + f \left[ (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b \right] = f (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b \quad (5.2.14)$$

egyenlőség, ahol az utolsó lépésben a fenti lemmát alkalmaztuk. Mivel az  $f$  függvény tetszőlegesen választható, az  $f \omega_a$  kifejezést is tetszőlegesen változtatjuk. Legyen most  $p \in M$  tetszőleges pont. Ekkor az  $f(p) = 1$  feltételnek eleget tevő sima függvények változtatásával a  $p$  pont környezetében  $f \omega_a$  úgy változik, hogy az  $p$ -ben mindvégig  $\omega_a$ -val esik egybe. Az (5.2.14) egyenlet értelmében a  $\tilde{\nabla}_a$  és a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorok hatásának eltérése a differenciálható kovariáns vektormezőkön – a tetszőlegesen megválasztott  $p$  pontban – független attól, hogy az adott kovariáns vektormező hogyan viselkedik a  $p$  pont környezetében. Mivel a kovariáns deriváló operátorok külön-külön lineárisak a  $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$  operátor is lineáris, így a fent megfogalmazott észrevételeket összegezve azt mondhatjuk, hogy bármely  $p \in M$  pontban a

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) : \mathcal{T}_1^0(p) \rightarrow \mathcal{T}_2^0(p), \quad (5.2.15)$$

lineáris leképezés csak az adott  $\omega_a$  differenciálható kovariáns vektormező  $p$ -beli értékétől függ. Mivel az  $[L(\omega)]_{ab} = (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b$  lineáris leképezés értéke határozottan függ  $\omega_a$   $p$ -beli értékétől, minden egyes  $p \in M$  pontban léteznie kell egy olyan  $C^c_{ab} \in \mathcal{T}^1_2(p)$  tenzornak – és így  $M$ -en egy  $(1,2)$ -típusú  $C^c_{ab} \in \mathcal{T}^1_2(M)$  tenzormezőnek –, amelyre

$$[L(\omega)]_{ab} = C^c_{ab} \omega_c. \quad (5.2.16)$$

A  $C^c_{ab}$  tenzormező segítségével a  $\nabla_a$  és a  $\tilde{\nabla}_a$  kovariáns deriváló operátorok hatásának eltérése a

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \omega_b = C^c_{ab} \omega_c, \quad (5.2.17)$$

vagy a sokkal többször használt és ezzel ekvivalens

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c_{ab} \omega_c, \quad (5.2.18)$$

formában írható fel.

**5.2.3. Megjegyzés.** Ha most a  $\nabla_a$  és a  $\tilde{\nabla}_a$  kovariáns deriváló operátorok közül az egyik, mondjuk  $\tilde{\nabla}_a$  torziómentes, valamint az utolsó relációt az ‘ $ab$ ’ indexpárban vett antiszimmetrizálással együtt az

$$\omega_a = \nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f \quad (5.2.19)$$

kovariáns vektormezőre alkalmazzuk, azonnal látható, hogy

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} f = \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} f - C^c_{[ab]} \nabla_c f = -C^c_{[ab]} \nabla_c f, \quad (5.2.20)$$

azaz a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor az (5.2.7) összefüggés szerint meghatározott torzióját a

$$T^c_{ab} = 2C^c_{[ab]} \quad (5.2.21)$$

relációval adhatjuk meg.

**5.2.4. Megjegyzés.** Amikor sem a  $\nabla_a$ , sem pedig a  $\tilde{\nabla}_a$  kovariáns deriváló operátorok nem torziómentesek, akkor (5.2.21) bal oldalán a két kovariáns deriváló operátor torziótenzorának különbsége szerepel. (5.2.21)-ből az is azonnal

következik, hogy amikor mindkét kovariáns deriváló operátor torziómentes, akkor  $a^c{}_{[ab]} = 0$  reláció teljesül.

Fontos annak meghatározása, hogy hogyan hat a  $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$  lineáris leképezés a különféle típusú tenzormezőkön. Ennek meghatározása érdekében első lépésben tegyük fel, hogy  $t^a \in \mathcal{T}(M)$  és  $\omega_a \in \mathcal{T}^*(M)$  tetszőleges kontra- és kovariáns vektormezők  $M$ -en. Ekkor az 5.2.1 lemmát felhasználva

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(t^b \omega_b) = 0, \quad (5.2.22)$$

továbbá a Leibnitz-szabály és (5.2.17) alapján

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(t^b \omega_b) = \omega_b(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)t^b + t^b C^e{}_{ab} \omega_e = \left[ (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)t^b + C^b{}_{ae} t^e \right] \omega_b, \quad (5.2.23)$$

amiből  $\omega_b$  tetszőlegessége és (5.2.22) folytán a

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C^b{}_{ae} t^e \quad (5.2.24)$$

reláció következik.

Az imént bemutatott érvelés analógiájára az is megmutatható, hogy a  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  operátorok hatásának eltérése egy tetszőleges  $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}^k_l(M)$  tenzormezőn  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  operátorokat összekötő  $(1, 2)$ -típusú  $C^c{}_{ab} \in \mathcal{T}^1_2(M)$  tenzormező segítségével a

$$\begin{aligned} \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} &= \tilde{\nabla}_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} \\ &+ \sum_{i=1}^k C^{a_i}{}_{ce} T^{a_1 \dots \overset{i}{e} \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{j=1}^l C^e{}_{cb_j} T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots \overset{j}{e} \dots b_l} \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

alakban adható meg. Így a  $\nabla_a$  és  $\tilde{\nabla}_a$  operátorok hatásának eltérését mindig kifejezhetjük az (5.2.17) relációban bevezetett  $(1, 2)$ -típusú  $C^c{}_{ab}$  tenzormező segítségével.

**5.2.5. Megjegyzés.** Fordítva is gondolkodhatunk. Tekintsünk egy  $\tilde{\nabla}_a$  kovariáns deriváló operátort a  $C^r$ -osztályú  $M$  differenciálható sokaságon, és vá-

lasszunk egy tetszőleges  $(1,2)$ -típusú,  $C^r$ -osztályú  $C^c_{ab}$  tenzormezőt  $M$ -en. Ekkor az (5.2.25) egyenlet segítségével definiált  $\nabla_a : \mathcal{T}^k_l(M) \rightarrow \mathcal{T}^k_{l+1}(M)$  leképezés szintén kovariáns deriváló operátort határoz meg  $M$ -en. Ez az észrevétel érzékletesen mutatja milyen kiterjedéssel bír az  $M$  differenciálható sokaság felett értelmezhető kovariáns deriváló operátorok tere feltéve, hogy ez nem üres (ezt az 5.4. és 9.1. fejezetekben megmutatjuk).

Legyen most  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép  $M$ -en az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákkal, valamint  $\partial_a$  a fentebb meghatározott,  $\mathcal{O}$  felett jól definiált, kovariáns deriváló operátor. Ekkor a  $\nabla_a$  kovariáns deriváltat a  $\partial_a$ -hoz kapcsoló lokálisan értelmezett  $(1,2)$ -típusú  $C^c_{ab}$  tenzort megkülönböztetésül  $\Gamma^c_{ab}$ -vel jelöljük és *Christoffel-szimbólumnak* nevezzük. Ebben az esetben, az (5.2.24) egyenlet például az  $\mathcal{O}$  térkép felett a

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ae} t^e \quad (5.2.26)$$

alakot ölti.

Nem szabad azonban megfeledkezni arról, hogy amikor az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép helyett egy  $(\mathcal{O}', \psi')$  térképet használunk, akkor az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákat az  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordinátákkal, és hasonlóan a  $\partial_a$  deriváló operátort a  $\partial'_a$  kovariáns deriváló operátorral kell helyettesítenünk. Ennek megfelelően  $\Gamma^c_{ab}$  helyett is egy másik  $\Gamma'^c_{ab}$  tenzort kell alkalmaznunk  $\mathcal{O}'$  felett. Mivel a  $\Gamma^c_{ab}$  és  $\Gamma'^c_{ab}$  kifejezések külön-külön csak az  $\mathcal{O}$  és  $\mathcal{O}'$  halmazok felett értelmezett  $(1,2)$ -típusú tenzormezők, nem szabad úgy rájuk tekintenünk, mintha globálisan jól definiált tenzormezők lennének. Ennek fényében az sem meglepő – gondoljunk például az (5.2.10) egyenlet származtatása során bemutatott érvelésre – hogy az egymással átmetsző  $\mathcal{O}$  és  $\mathcal{O}'$  térképekhez tartozó  $\Gamma^c_{ab}$  és  $\Gamma'^c_{ab}$  kifejezések komponensei sem a tenzormezők esetén érvényes (3.3.17) transzformációs szabályok szerint, hanem (5.3.32)-nek megfelelően kapcsolódnak egymáshoz.





### 5.3. Párhuzamos eltolás az általános esetben

**5.3.1. Definíció.** Legyen  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor,  $v^a \in \mathcal{T}(M)$  egy tetszőleges vektormező  $M$ -en. Legyen továbbá  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  egy görbe  $M$ -ben, melynek valamely paraméterezéshez tartozó érintővektorát  $t^a$  jelöli. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $v^a$  vektormező párhuzamosan elterjesztett ( $\nabla_a$ -ra nézve) a  $\lambda$  görbe mentén, ha a

$$(t^e \nabla_e v^b)|_\lambda = 0, \quad (5.3.27)$$

egyenlőség teljesül. Hasonlóan definiálható tetszőleges tenzormező  $\lambda$  görbe mentén vett párhuzamosan elterjesztettsége is.

Legyen most  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép  $M$ -en az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákkal, valamint  $\partial_a$  a koordináták által meghatározott kovariáns deriváló operátor. Ekkor az (5.3.27) egyenletet  $\partial_a$  és a  $\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-szimbólumok segítségével a

$$(t^e \partial_e v^b + \Gamma^b_{ef} t^e v^f)|_\lambda = 0 \quad (5.3.28)$$

alakban írhatjuk fel. Ugyanez az egyenlet az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták felhasználásával a

$$\frac{dx^\alpha(t)}{dt} \frac{\partial v^\beta(t)}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\varepsilon\varphi}(t) t^\varepsilon(t) v^\varphi(t) = 0, \quad (5.3.29)$$

alakban írható fel, ahol felhasználtuk, hogy az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákban a  $\lambda$  görbét az  $x^\alpha = x^\alpha(t)$ , míg annak érintőjét a  $t^\alpha = \frac{dx^\alpha(t)}{dt}$  relációk határozzák meg. Ezek után felhasználva (5.3.29)-et és a

$$\frac{dx^\alpha(t)}{dt} \frac{\partial v^\beta(t)}{\partial x^\alpha} = \frac{dv^\beta(t)}{dt} \quad (5.3.30)$$

összefüggéseket azt kapjuk, hogy a  $v^a$  vektormező pontosan akkor párhuzamosan elterjesztett a  $\lambda$  görbe mentén, ha a  $v^\beta$  komponensek a  $\lambda$  görbe mentén a

$$\frac{dv^\beta}{dt} + \Gamma^\beta_{\varepsilon\varphi} t^\varepsilon v^\varphi = 0 \quad (5.3.31)$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenletek tesznek eleget. Alkalmas kezdőértékek megválasztása esetén az (5.3.31) egyenletnek mindig létezik egyértelmű megoldása, feltéve, hogy a  $\Gamma^\beta_{\varepsilon\varphi} t^\varepsilon$  függvények legalább  $C^{1-}$  osztályúak, azaz lokálisan Lipschitz-félék.<sup>4</sup> Ezen egyértelmű megoldásokat felhasználva az  $M$  differenciálható sokaság tetszőlegesen választott két pontjának érintőtereiből vett elemeket – ugyan a pontokat összekötő görbe megválasztásától függő módon –, kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetjük egymásnak. Ezt a megfeleltetést, pontosabban az érintőterek közötti kapcsolatot szokás *konnexió*, vagyis *affinösszefüggés* néven emlegetni, és ezért néha magát a  $\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-szimbólumot is így nevezzük.

Most megmutatjuk, hogy konnexiók egy jól megválasztott rendszerét alkalmazva mindig megadható egy globális, azaz az adott differenciálható sokaságon mindenütt értelmezett kovariáns deriváló operátor. Ennek belátása érdekében tekintsünk most egy  $M$  differenciálható sokaságot, amelyen az  $\{(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)\}$  térképek rendszere egy  $C^r$ -osztályú atlaszt határoz meg. Külön-külön minden  $(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)$  térkép felett értelmezhető a  $^{(\alpha)}\partial_a$  kovariáns deriváló operátor, valamint a most még tetszőlegesen megválasztható  $^{(\alpha)}\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-féle szimbólumok. Ezek együtt mindig meghatároznak egy  $^{(\alpha)}\nabla_a$  kovariáns deriváló operátort is minden egyes  $(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)$  térkép felett. A célunk egy  $M$ -en mindenütt értelmezett kovariáns deriváló operátor meghatározása, azaz a  $^{(\alpha)}\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorok szinkronizációja. Ennek elérése érdekében a  $^{(\alpha)}\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-féle szimbólumokra vonatkozó olyan kiválasztási elvet alkalmazunk, amely a különböző térképeken az általuk ott meghatározott  $^{(\alpha)}\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorok szerint értelmezett párhuzamos eltolási eljárások kompatibilitását követeli meg. Azaz elvárjuk, hogy az  $\alpha, \beta$  indexpár tetszőleges választása esetén az egymással átfedő  $\mathcal{O}_\alpha$  és  $\mathcal{O}_\beta$  halmazok közös része felett valamely vektormező pontosan akkor legyen párhuzamosan elterjesztett

---

<sup>4</sup>Valamely  $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény legalább  $C^{1-}$  osztályú, azaz lokálisan Lipschitz-féle, ha létezik olyan  $K > 0$  szám, amelyre tetszőleges  $x, y \in \mathcal{O}$  választatás esetén teljesül a  $|f(x) - f(y)| < K \cdot |x - y|$  egyenlőtlenség, ahol  $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$ .

a  $^{(\alpha)}\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorra nézve, ha az a  $^{(\beta)}\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorra nézve is párhuzamosan elterjesztett, és fordítva. Mivel a  $^{(\alpha)}\nabla_a$  operátorokat a Christoffel-féle szimbólumok kapcsolják  $^{(\alpha)}\partial_a$  operátorokhoz, az imént megfogalmazott kompatibilitási feltétel a  $^{(\alpha)}\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-féle szimbólumokra kirótt alábbiak szerint meghatározott feltételekben ölt testet.

**5.3.1. Állítás.** *Legyenek  $(\mathcal{O}, \psi)$  és  $(\mathcal{O}', \psi')$  egymással átfedő térképek, továbbá  $(x^1, \dots, x^n)$  és  $(x'^1, \dots, x'^n)$  a kapcsolódó lokális koordináták. Ekkor az  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$  halmazon valamely tetszőlegesen kiválasztott görbe mentén bármely vektormező pontosan akkor párhuzamosan elterjesztett az  $\nabla_a$  és az  $\nabla'_a$  kovariáns deriváló operátorokra nézve, ha a hozzájuk tartozó Christoffel-féle szimbólumok koordináta komponenseire a*

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma'^\delta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \quad (5.3.32)$$

relációk teljesülnek.

*Bizonyítás:* Legyenek a  $\lambda$  görbe és a  $v^a$  vektormező tetszőlegesek. Ekkor  $\lambda$  mentén a  $t^\epsilon \nabla'_\epsilon v^b = 0$  egyenlet az  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordinátákban a

$$\begin{aligned} t'^\mu \partial'_\mu v'^\nu + \Gamma'^\nu_{\mu\sigma} t'^\mu v'^\sigma &= t^\alpha \partial_\alpha \left( v^\beta \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) + \Gamma'^\nu_{\mu\sigma} \left( t^\alpha \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left( v^\beta \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \left( t^\alpha \partial_\alpha v^\beta \right) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + t^\alpha v^\beta \left[ \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma'^\nu_{\mu\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right] \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

alakban írható fel, ahol az első egyenlőség utáni kifejezések származtatása során egyedül a  $t'^\mu = t^\alpha \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$ , valamint a  $t'^\mu \partial'_\mu = t^\alpha \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x'^\mu} \partial_\beta = t^\alpha \partial_\alpha$  összefüggéseket használtuk fel.

Ezek után az (5.3.33) egyenletet a  $\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\nu}$  mártixsal megszorozva azt kapjuk, hogy a

$$\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\nu} \left[ t'^\mu \partial'_\mu v'^\nu + \Gamma'^\nu_{\mu\sigma} t'^\mu v'^\sigma \right] = t^\alpha \partial_\alpha v^\beta + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} t^\alpha v^\beta \quad (5.3.34)$$

egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a  $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$  és  $\Gamma^\nu_{\mu\sigma}$  Christoffel-féle szimbólumok az (5.3.32) reláció szerint kapcsolódnak egymáshoz.  $\square$

Megmutatható, hogy az (5.3.32) egyenlet azt is biztosítja, hogy az  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$  halmazon tetszőlegesen kiválasztott görbe mentén egy tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzormező pontosan akkor párhuzamosan elterjesztett az  $^{(\mathcal{O})}\nabla_a$  kovariáns deriváltra nézve, ha az az  $^{(\mathcal{O}')} \nabla_a$  kovariáns deriváltra nézve is az. Így a páronként átfedő térképeken az (5.3.32) egyenlet teljesülése szükséges és elegendő feltétele annak, hogy globálisan is létezzen kovariáns deriváló operátor.

## 5.4. A metrikával kompatibilis kovariáns derivált

A kovariáns deriváló operátorok terében van egy, amely az általános relativitáselmélet szempontjából központi szerepet játszó metrikus struktúra által egyértelműen meghatározott. Ezt a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátort a

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad (5.4.35)$$

feltétel választja ki. Az alábbi egyszerű lemma értelmében (5.4.35) azzal a geometriai követelménnyel egyenértékű, hogy tetszőlegesen kiválasztott görbék mentén az ott párhuzamosan elterjesztett vektormezők belső szorzata legyen állandó.

**5.4.1. Lemma.** *Legyen  $t^a$  a  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  görbe érintővektora. Legyen  $\nabla_a$  olyan kovariáns deriváló operátor, amelyre (5.4.35) teljesül. Legyenek továbbá  $v^a$  és  $w^a$  a  $\lambda$  görbe mentén párhuzamosan elterjesztett vektormezők. Ekkor a  $v^a$  és  $w^a$  vektormezők belső szorzata állandó a  $\lambda$  görbe mentén.*

*Bizonyítás:* Mivel  $v^a$  és  $w^a$  a  $\lambda$  görbe mentén párhuzamosan elterjesztett vektormezők, a  $t^e \nabla_e v^b|_\lambda = 0$  és  $t^e \nabla_e w^b|_\lambda = 0$  egyenletek teljesülnek. Ekkor a Leibnitz-szabály alapján a

$$t^a \nabla_a (g_{ef} v^e w^f) = t^a (\nabla_a g_{ef}) v^e w^f \quad (5.4.36)$$

egyenlőség is teljesül, így (5.4.35) alapján adódik a lemma állítása.  $\square$

Most megmutatjuk, hogy az (5.4.35) feltételben szereplő  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor egyértelműen meghatározott feltéve, hogy  $\nabla_a$  torziómentes.

**5.4.1. Állítás.** *Legyen  $g_{ab}$  metrika  $M$ -en. Ekkor  $g_{ab}$  egyértelműen meghatároz egy olyan torziómentes  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátort, amely eleget tesz az (5.4.35) feltételnek.*

*Bizonyítás:* Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  az  $\{(\mathcal{O}_\alpha, \psi_\alpha)\}$   $C^r$ -osztályú atlasz egy tetszőleges térképe, továbbá  $\partial_a$  és  $\Gamma^c_{ab}$  a rajta értelmezett kovariáns deriváló operátor és a kapcsolódó Christoffel-féle szimbólumok. Ekkor (5.2.25) és (5.4.35) alapján

$$0 = \nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^e_{ca} g_{eb} - \Gamma^e_{cb} g_{ae} \quad (5.4.37)$$

teljesül, melyből index lehúzással és egyszerű átrendezéssel a

$$\Gamma_{bca} + \Gamma_{acb} = \partial_c g_{ab} \quad (5.4.38)$$

relációt kapjuk. (5.4.38)-ból az ‘ $ac$ ’, illetve a ‘ $bc$ ’ indexek felcserélésével nyert

$$\Gamma_{bac} + \Gamma_{cab} = \partial_a g_{cb} \quad (5.4.39)$$

illetve

$$\Gamma_{cba} + \Gamma_{abc} = \partial_b g_{ac} \quad (5.4.40)$$

egyenleteknek is teljesülniük kell. Ekkor az (5.4.40) és (5.4.39) egyenletek összegéből az (5.4.38) egyenletet kivonva, továbbá a  $\nabla_a$ , valamint  $\partial_a$  operátorok torziómentességét kifejező  $\Gamma^c_{[ab]} = 0$  relációból következő  $\Gamma_{abc} = \Gamma_{acb}$  egyenlőség többszöri alkalmazása révén azt kapjuk, hogy

$$2\Gamma_{cab} = \partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}, \quad (5.4.41)$$

azaz

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{ce} \{ \partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab} \}. \quad (5.4.42)$$

A fenti eljárásból következik, hogy a  $\partial_a$  kovariáns derivált és az (5.4.42) egyenlet által meghatározott  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor egyrészt torziómentes, másrészt az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett eleget tesz az (5.4.35) feltételnek. Végül  $(\mathcal{O}, \psi)$  tetszőlegessége folytán az is azonnal adódik, hogy (5.4.35)  $M$ -en mindenütt teljesül, ha a  ${}^{(a)}\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-féle szimbólumokat térképenként, a  $g_{ab}$  metrika és a  ${}^{(a)}\partial_a$  kovariáns deriváló operátorok felhasználásával, az (5.4.42) egyenletnek megfelelően határozzuk meg.  $\square$

**5.4.1. Feladat.** Legyenek  $(x^1, \dots, x^n)$  és  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordináták az

egymással átfedésben lévő  $(\mathcal{O}, \psi)$  és  $(\mathcal{O}', \psi')$  térképeken. Mutassuk meg, hogy az  $(\mathcal{O}, \psi)$  felett értelmezett Christoffel-féle szimbólumok

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\epsilon} [\partial_\alpha g_{\epsilon\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\epsilon} - \partial_\epsilon g_{\alpha\beta}] \quad (5.4.43)$$

komponensei az (5.3.32) egyenletnek megfelelően transzformálódnak az  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$  halmazon felett.

**5.4.1. Megjegyzés.** Az 5.2.5 megjegyzés, valamint az imént bizonyított állítás következtében, amikor megadható metrika valamely  $M$  differenciálható sokaságon, azaz  $g_{ab}$ -hez egyértelműen található egy globálisan értelmezett és a metrikával kompatibilis torziómentes  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor, akkor a  $\nabla_a$ -ból az (5.2.25) egyenlet és a szabadon választható  $(1,2)$ -típusú  $C^c_{ab}$  tenzormező segítségével végtelen sok – nem szükségképpen torziómentes – kovariáns deriváló operátort értelmezhetünk  $M$ -en. Így a kovariáns deriváló operátorok globális létezésének kérdését a metrika létezésének problémájára vezettük vissza. Amint a 9.1. alfejezetben megmutatjuk, amikor az alapsokaság parakompakt, globálisan is megadható rajta metrika, és – az imént idézett megfontolások értelmében – ekkor végtelen sok globálisan értelmezett kovariáns deriváló operátor létezik  $M$ -en.





## 6. fejezet

# A görbületi tenzor

A felületelméleti analógiák bemutatása során (lásd a 5.2 ábrát) már említettük, hogy valamely felület görbületse és a rajta végzett párhuzamos eltolás görbefüggősége között szoros kapcsolat van. Az előző részben éppen azt mutatuk meg, hogy a párhuzamos eltolás fogalmának alkalmas általánosítása révén tudunk globális értelemben is jól definiált kovariáns deriváló operátor(oka)t megadni. Most a párhuzamos eltolás görbefüggőségének mennyiségi jellemzésére bevezetjük a görbületi, vagy Riemann-tenzor fogalmát.

### 6.1. A görbületi tenzor definíciója

Legyen  $\nabla_a$  torziómentes kovariáns deriváló operátor, valamint  $f$  és  $\omega_a$  legalább kétszer differenciálható függvény és kovariáns vektormező  $M$ -en. Ekkor a  $\nabla_a \nabla_b (f \omega_c)$  kifejezést a Leibnitz-szabály felhasználásával a

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b (f \omega_c) &= \nabla_a [(\nabla_b f) \omega_c + f(\nabla_b \omega_c)] \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) \omega_c + (\nabla_b f) (\nabla_a \omega_c) + (\nabla_a f) (\nabla_b \omega_c) + f(\nabla_a \nabla_b \omega_c) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

alakban írhatjuk fel. Kihasználva ekkor  $\nabla_a$  torziómentességét, valamint a legutóbb kapott (6.1.1) egyenlet jobb oldalán álló második és harmadik kifeje-

zésének  $ab$  indexekben vett szimmetriáját, az egyenlet  $ab$  indexpárban vett antiszimmetrikus részének kétszeresét véve a

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \quad (6.1.2)$$

egyenlőséget kapjuk.

A (5.2.14) egyenlet levezetését követő gondolatmenetet alkalmazva most is úgy érvelhetünk, hogy a  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c$  kifejezés értéke bármely  $p \in M$  pontban csak az  $\omega_a$  (legalább kétszer) differenciálható kovariáns vektormező  $p$  pontbeli értékétől függ. Így a

$$\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a : \mathcal{T}^0_1(p) \rightarrow \mathcal{T}^0_3(p) \quad (6.1.3)$$

lineáris leképezés hatását a

$$\mathcal{C}^1_4 \left[ \mathcal{T}^1_3(p) \otimes \mathcal{T}^0_1(p) \right] \longleftrightarrow \mathcal{T}^0_3(p) \quad (6.1.4)$$

megfeleltetés folytán – ahol a  $\mathcal{T}^0_1(p)$  faktor az  $\omega_a$  kovariáns vektormező  $p$  pontbeli értékétől való függés megjelenítésére szolgál – léteznie kell egy olyan  $(1,3)$ -típusú  $R_{abc}{}^d$  tenzornak  $\mathcal{T}^1_3(p)$ -ben, és a  $p$  pont tetszőlegessége folytán egy olyan  $(1,3)$ -típusú  $R_{abc}{}^d$  tenzormezőnek  $M$ -en, amelyre a

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (6.1.5)$$

egyenlőség teljesül.

**6.1.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy amikor a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor nem eltűnő  $T^c{}_{ab}$  torzióval rendelkezik, akkor egy, a fentiekhez teljesen analóg érvelés révén egyrészt a*

$$(2\nabla_{[a} \nabla_{b]} + T^c{}_{ab})(f\omega_c) = f(2\nabla_{[a} \nabla_{b]} + T^c{}_{ab})\omega_c, \quad (6.1.6)$$

*reláció igaz, másrészt létezik olyan  $(1,3)$ -típusú  $R_{abc}{}^d$  tenzormező, amelyre a*

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d - T^e{}_{ab} \nabla_e \omega_c \quad (6.1.7)$$

*egyenlőség teljesül.*

Térjünk most vissza a torziómentes  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorhoz. Ekkor a (6.1.5) egyenlet felhasználásával meghatározhatjuk a  $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$  operátor hatását vektormezőkön, illetve tetszőleges típusú tenzormezőkön. Így például amikor  $t^a$  és  $\omega_a$  legalább kétszer differenciálható, de különben tetszőleges kontravariáns és kovariáns vektormezők  $M$ -en, akkor  $\nabla_a$  torzió mentessége folytán

$$\begin{aligned}
 0 &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (t^c \omega_c) & (6.1.8) \\
 &= \nabla_a [\omega_c (\nabla_b t^c) + t^c (\nabla_b \omega_c)] - \nabla_b [\omega_c (\nabla_a t^c) + t^c (\nabla_a \omega_c)] \\
 &= [(\nabla_a \omega_c) (\nabla_b t^c) + \omega_c (\nabla_a \nabla_b t^c) + (\nabla_a t^c) (\nabla_b \omega_c) + t^c (\nabla_a \nabla_b \omega_c)] \\
 &\quad - [(\nabla_b \omega_c) (\nabla_a t^c) + \omega_c (\nabla_b \nabla_a t^c) + (\nabla_b t^c) (\nabla_a \omega_c) + t^c (\nabla_b \nabla_a \omega_c)] \\
 &= \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c \\
 &= \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c R_{abc}{}^d \omega_d
 \end{aligned}$$

adódik, amiből  $\omega_a$  tetszőlegessége következtében a

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -R_{abe}{}^c t^e \quad (6.1.9)$$

relációt kapjuk.

Egy indukciós eljárás révén az is megmutatható, hogy bármely legalább kétszer differenciálható, de különben tetszőleges  $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l^k(M)$  tenzormező esetén

$$\begin{aligned}
 (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} &= - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots \overset{i}{e} \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots \overset{j}{e} \dots d_l}
 \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Mindezek fényében azt mondhatjuk, hogy a kovariáns derivált kommutátorának hatása tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzormező esetében mindig kifejezhető a tenzormező, valamint a görbületi tenzor kontrakcióiból előálló kifejezések segítségével.

## 6.2. A görbület tulajdonságai

Ebben az alfejezetben görbületi tenzor legfontosabb tulajdonságait tekintjük át.

**6.2.1. Állítás.** Legyen  $\nabla_a$  torziómentes kovariáns deriváló operátor  $R_{abc}{}^d$  pedig a  $\nabla_a$ -hoz tartozó görbületi tenzormező  $M$ -en. Ekkor

$$(1) R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d,$$

$$(2) R_{[abc]}{}^d = 0,$$

$$(3) R_{abcd} = -R_{abdc} \text{ feltéve, hogy } \nabla_a \text{ eleget tesz a (5.4.35) feltételnek,}$$

$$(4) \text{ teljesül a } \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \text{ Bianchi-azonosság.}$$

*Bizonyítás:* (1) azonnal adódik a görbületi tenzor definíciója alapján.<sup>1</sup> (2) belátása előtt az alábbi – a külső deriválás műveletének definiálása során is fontos szerepet játszó – lemmát bizonyítjuk.

**6.2.1. Lemma.** Legyen  $\nabla_a$  torziómentes kovariáns deriváló operátor, valamint  $\omega_a$  legalább kétszer differenciálható, de különben tetszőleges kovariáns vektormező  $M$ -en. Ekkor

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = 0. \quad (6.2.11)$$

*A lemma bizonyítása:* Tetszőleges  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett  $\nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma^e{}_{bc} \omega_e$  alakban írható fel, ahol  $\nabla_a$  torziómentessége folytán a Christoffel-szimbólumok a kovariáns indexekben szimmetrikusak, azaz  $\Gamma^e{}_{[bc]} = 0$ . Így  $\nabla_a \nabla_b \omega_c$ -re a

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \nabla_a [\partial_b \omega_c - \Gamma^e{}_{bc} \omega_e] = \partial_a [\partial_b \omega_c - \Gamma^e{}_{bc} \omega_e] + \\ &\quad + \Gamma^f{}_{ab} [\partial_f \omega_c - \Gamma^e{}_{fc} \omega_e] + \Gamma^f{}_{ac} [\partial_b \omega_f - \Gamma^e{}_{bf} \omega_e]. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

---

<sup>1</sup>A (6.1.7) egyenletnek megfelelően a görbületi tenzor első két kovariáns indexében akkor is antiszimmetrikus, ha a kovariáns deriváló operátor torzióval rendelkezik.

Az így kapott egyenletet az  $abc$  indexekben antiszimmetrizálva azt kapjuk, hogy az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett a  $\nabla_{[a}\nabla_b\omega_c]$  kifejezés valóban zérus értéket vesz fel, hiszen az  $a$  és  $b$  indexű  $\partial_a$  és  $\partial_b$  operátorok sorrendje tetszőleges típusú tenzormezőkön felcserélhető. Ezen túlmenően a  $\nabla_{[a}\nabla_b\omega_c]$  kifejezés a két alsó indexében antiszimmetrizáláson átesett Christoffel-szimbólumok, illetve azok elsőrendű  $\partial_a$  deriváltjainak kontrakcióiból felépülő tagok összegeként adható meg.  $\square$

Ezek után a görbületi tenzor definícióját, a

$$0 = 2\nabla_{[a}\nabla_b\omega_c] = \nabla_{[a}\nabla_b\omega_c] - \nabla_{[b}\nabla_a\omega_c] = R_{[abc]}^d\omega_d \quad (6.2.13)$$

relációt, valamint  $\omega_a$  tetszőlegességét felhasználva (2) azonnal adódik.

(3) belátása érdekében alkalmazzuk a (6.1.10) egyenletet a  $g_{ab}$  metrikára

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)g_{cd} = R_{abc}^e g_{ed} + R_{abd}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}, \quad (6.2.14)$$

amiből – annak felhasználásával, hogy  $\nabla_a$  eleget tesz a (5.4.35) feltételnek – következik a  $R_{abcd} = -R_{abdc}$  reláció.

Végül a (4)-ben megfogalmazott Bianchi-azonosság igazolása érdekében alkalmazzuk most a  $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$  operátort a  $\nabla_c\omega_d$  kifejezésre, ahol  $\omega_a$  legalább háromszor differenciálható, de különben tetszőleges kovariáns vektormező  $M$ -en. Ekkor a (6.1.10) egyenlet alapján egyrészt

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\nabla_c\omega_d = R_{abc}^e\nabla_e\omega_d + R_{abd}^e\nabla_c\omega_e, \quad (6.2.15)$$

másrészt a

$$\nabla_a[(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\omega_d] = \nabla_a[R_{bcd}^e\omega_e] = \omega_e\nabla_a R_{bcd}^e + R_{bcd}^e\nabla_a\omega_e \quad (6.2.16)$$

összefüggéseket kapjuk. A (6.2.15) és (6.2.16) egyenleteket külön-külön az  $abc$  indexekben antiszimmetrizálva a kapott egyenletek baloldalai megegyez-

nek, így a jobb oldalon álló kifejezések is egyenlőek, azaz

$$\cancel{R_{[abc]}^e \nabla_e \omega_d} + \cancel{R_{[ab|d]}^e \nabla_c \omega_e} = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}^e + \cancel{R_{[bc|d]}^e \nabla_a \omega_e}. \quad (6.2.17)$$

Az utóbbi egyenletet, valamint a (2) tulajdonságot és azt felhasználva, hogy a második tagok megegyeznek – hiszen azok az  $abc$  indexeknek csak egy páros permutációjában különböznek –  $\omega_a$  tetszőlegessége folytán kapjuk a (4)-dik tulajdonságban megfogalmazott állítást.  $\square$

**6.2.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az (1), (2) és (3) tulajdonságok miatt az*

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (6.2.18)$$

*egyenlőség is teljesül, azaz a görbületi tenzor indexpárokból vett szimmetriával is rendelkezik, feltéve, hogy  $\nabla_a$  valamely  $g_{ab}$  metrikával kompatibilis torziómentes kovariáns deriváló operátor.*

### 6.3. A Ricci-tenzor és a skalárgörbület

Legyen  $R_{abc}^d$  a  $g_{ab}$  metrikával kompatibilis  $\nabla_a$  torziómentes kovariáns deriváló operátorhoz tartozó Riemann-tenzor. Ekkor az (1) és (3) tulajdonságok alapján az  $R_a^a{}_c^d$  és az  $R_{abe}^e$  kontrakciók azonosan nulla értéket vesznek fel. Ezzel szemben az  $R_{ab}{}^{ad}$  és az  $R_{abc}^b$  kontrakciók nem feltétlenül tűnnek el.

**6.3.1. Definíció.** *A Riemann-tenzorból az*

$$R_{ab} = R_{aeb}^e \quad (6.3.19)$$

*kontrakcióval képzett (0,2)-típusú tenzormezőt Ricci-tenzornak nevezzük.*

A definíció és a görbületi tenzor tulajdonságai alapján azonnal adódik, hogy

$$R_{ab} = R_{aeb}^e = R_{ea}^e{}_b = R_{eb}^e{}_a = R_{ba}, \quad (6.3.20)$$

ahol a második egyenlőség az első és második indexpárban külön-külön vett antiszimmetria, míg a harmadik egyenlőség (6.2.18) összefüggés alapján teljesül. Az imént felírt egyenletnek megfelelően a Ricci-tenzor szimmetrikus, azaz  $R_{ab} = R_{(ab)}$ .

### 6.3.2. Definíció. A Ricci-tenzorból a

$$R = R_{ab} g^{ab} = R_a^a \quad (6.3.21)$$

kontrakcióval képzett skalárt Riemann- vagy görbületi skalárnak nevezzük.

A  $g_{ab}$  metrika, az  $R_{ab}$  Ricci-tenzor és az  $R$  görbületi skalár felhasználásával különválaszthatjuk a görbületi tenzor azon – Weyl-tenzornak nevezett és  $W_{abcd}$ -vel jelölt – részét, amelynek tetszőleges indexpárjában vett kontrakciója azonosan nulla. Belátható, hogy bármely  $n \geq 3$ -dimenziós sokaság esetén

$$R_{abcd} = W_{abcd} + \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}. \quad (6.3.22)$$

**6.3.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a (6.3.22) egyenlet által értelmezett  $W_{abcd}$  Weyl-tenzorra is teljesülnek az (1), (2) és (3) tulajdonságok, továbbá  $W_{abcd}$  bármely indexpárjában vett kontrakciója azonosan nulla.

## 6.4. A görbületi tenzor algebrailag független elemei

A  $g_{ab}$  metrikával kompatibilis  $R_{abcd}$  Riemann-tenzornak, mint bármely négy-indexes tenzornak, egy  $n$ -dimenziós sokaság esetén  $n^4$  komponense van. Fentebb láttuk, hogy  $R_{abcd}$  eleget tesz az (1), (2) és (3) algebrai feltételeknek, melyek – amint azt rögtön megmutatjuk – lényegesen lecsökkentik az egymástól algebrailag független komponensek számát. Például  $n = 4$  estén  $n^4 = 256$ , ugyanakkor ezek közül csak húsz algebrailag független.

$R_{abcd}$  algebrailag független komponensei számának meghatározása érdekében idézzük fel, hogy az  $\{ab\}$ , valamint a  $\{cd\}$  összetett indexpárok lehetséges értéke, az (1) és (3) tulajdonságok által jelzett antiszimmetria folytán, külön-külön  $N = \frac{n(n-1)}{2}$ . A (6.2.18) összefüggés alapján az  $\{ab\}$  és  $\{cd\}$  összetett indexpárokból vett szimmetria figyelembevételével a független komponensek száma  $\frac{N(N+1)}{2}$  lenne. Eddig azonban még nem használtuk a (2) tulajdonságot.

**6.4.1. Feladat.** *Definiáljuk az  $A_{abcd}$   $(0,4)$ -típusú tenzormezőt az*

$$A_{abcd} = R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} \quad (6.4.23)$$

*összefüggés segítségével. Az (1), (2) és (3) tulajdonságok felhasználásával mutassuk meg, hogy  $A_{abcd}$  teljesen antiszimmetrikus, azaz  $A_{abcd} = A_{[abcd]}$ .*

Az imént megfogalmazott feladat állítása értelmében az

$$A_{abcd} = A_{[abcd]} = A_{[[abc]d]} = R_{[[abc]d]} + R_{[[cab]d]} + R_{[[bca]d]} = 0 \quad (6.4.24)$$

reláció csak abban az esetben ad a  $0 = 0$  azonosságtól eltérő algebrai megszorítást, ha  $A_{abcd}$  mind a négy indexe különböző értéket vesz fel, ami egy  $n < 4$  dimenziós sokaság esetén soha, míg – egyszerű kombinatorikai megfontolások alapján – egy  $n \geq 4$  dimenziós sokaság esetén  $\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)$  féleképpen valósulhat meg.

**6.4.2. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy  $R_{abcd}$  algebrailag független komponenseinek száma*

$$\frac{N(N+1)}{2} - \binom{n}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \quad (6.4.25)$$

Speciálisan, bármely kétdimenziós sokaság ( $n = 2$ ) esetén  $\frac{n^2(n^2-1)}{12} = 1$ , így a kétdimenziós  ${}^{(2)}R_{abcd}$  görbületi tenzor algebrailag független komponenseinek száma egy, ami összhangban van Gauss „Theorema Egregium”-ával, hiszen ekkor

$${}^{(2)}R_{abcd} = R g_{a[c} g_{d]b}. \quad (6.4.26)$$



Analóg módon bármely háromdimenziós sokaság ( $n = 3$ ) esetén  $\frac{n^2(n^2-1)}{12} = 6$ , ami annak felel meg, hogy a háromdimenziós  ${}^{(3)}R_{abcd}$  görbületi tenzor algebrailag független komponenseit teljes egészében a Ricci-tenzor algebrailag független komponensei határozzák meg az

$${}^{(3)}R_{abcd} = 2(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - Rg_{a[c}g_{d]b}, \quad (6.4.27)$$

összefüggésnek megfelelően.

## 6.5. A kontrahált Bianchi-azonosságok

A Bianchi-azonosság kétszer kontrahált alakja nagyon fontos következményekkel bír a geometrizált gravitációelméletekben. Amint azt hamarosan megmutatjuk, (és [37] is jól illusztrálja), a kétszer kontrahált Bianchi-azonosság az Einstein-féle általános relativitáselméletben egyike a központi szerepet játszó integrálhatósági feltételeknek.

Először a (4) tulajdonságban megfogalmazott  $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0$  Bianchi-azonosság egy egyszerű átfogalmazását adjuk meg. A Bianchi-azonosságban szereplő  $abc$  indexekben vett antiszimmetrizálás és a (3.6.2) definíció alapján a

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = \frac{1}{6} [\nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e - \nabla_b R_{acd}{}^e - \nabla_c R_{bad}{}^e - \nabla_a R_{cbd}{}^e] \quad (6.5.28)$$

egyenlet teljesül. Mivel az  $R_{abc}{}^d$  görbületi tenzor antiszimmetrikus az első két indexében, (14.5.52) alapján azonnal látható, hogy a (4) tulajdonság a

$$\nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e = 0 \quad (6.5.29)$$

egyenlettel egyenértékű. Az  $a$  és  $e$  indexekben vett kontrakció révén (6.5.29)-ből azonnal a

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd} = 0 \quad (6.5.30)$$

egyszer kontrahált Bianchi-azonosság adódik. A kétszer kontrahált Bianchi-azonosságot (6.5.30)-ból a  $d$  index  $g^{ed}$  metrikával való felhúzása, majd az  $b$  és

$e$  indexekben vett kontrakció révén a

$$\nabla_a R_c^a - \nabla_c R + \nabla_a R_c^a = 0 \quad (6.5.31)$$

formában írhatjuk fel. Ennek egy rövidebb és jobban ismert alakja a

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (6.5.32)$$

Einstein-tenzor segítségével a

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (6.5.33)$$

egyenlet által adható meg.

**6.5.1. Megjegyzés.** Minden olyan geometrizált gravitációelméletben, ahol az Einstein-tenzort valamilyen az anyagmezőket, esetleg a görbület magasabb rendű deriváltjait tartalmazó kifejezéssel tehetjük egyenlővé – ez fordul elő például a Einstein-féle általános relativitáselméletben is, hiszen ott a téregyenleteket  $G_{ab} = \kappa T_{ab}$  alakban írhatjuk fel, ahol  $\kappa$  egy állandó, míg  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor a téridő anyagtartalmát hivatott megjeleníteni – a kétszer kontrahált Bianchi-azonosság az adott elmélet egyik központi szerepet játszó integrálhatósági feltétele, hiszen például az Einstein-egyenletek csak akkor oldhatók meg, ha az energiaimpulzus-tenzor is eleget tesz a  $\nabla^a T_{ab} = 0$  feltételnek.

**6.5.2. Megjegyzés.** Ahogy azt a 13. fejezetben megmutatjuk, a kétszer kontrahált Bianchi-azonosság a geometrizált gravitációelméletek diffeomorfizmusinvarianciájából is természetes módon származtatható.

## 6.6. A görbület kiszámításának főbb módszerei

Különféle fizikai problémák megoldása során szükségünk lesz a metrikával kompatibilis torziómentes kovariáns deriváló operátorhoz tartozó  $R_{abc}{}^d$  görbületi tenzor komponenseinek konkrét meghatározására. Ebben az alfejezetben a két leggyakrabban használt módszert ismertetjük.

### A görbület meghatározása koordináta komponensek felhasználásával

Legyen az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép tetszőleges, melyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták. Ahogy ezt korábban már megmutattuk, az  $\mathcal{O}$  halmaz felett bármely  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátornak a differenciálható  $\omega_a$  kovariáns vektormezőn vett hatását a  $\partial_a$  deriváló operátor és  $\Gamma^c_{ab}$  Christoffel-féle szimbólumok segítségével a

$$\nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma^e_{bc} \omega_e \quad (6.6.34)$$

alakban adhatjuk meg. Felidézve most a (6.2.12) egyenletet

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \nabla_a [\partial_b \omega_c - \Gamma^e_{bc} \omega_e] = \partial_a [\partial_b \omega_c - \Gamma^e_{bc} \omega_e] - \\ &\quad - \Gamma^f_{ab} [\partial_f \omega_c - \Gamma^e_{fc} \omega_e] - \Gamma^f_{ac} [\partial_b \omega_f - \Gamma^e_{bf} \omega_e] . \end{aligned}$$

az  $ab$  indexekben antiszimmetrizálva – az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[a} \nabla_{b]} \omega_c &= -2 [\partial_{[a} \Gamma^e_{b]c} \omega_e + \Gamma^e_{[b|c|} \cancel{\partial_{a]} \omega_e}] - 2\Gamma^f_{[ab]} [\cancel{\partial_f \omega_c} - \cancel{\Gamma^e_{fc} \omega_e}] - \\ &\quad - 2\Gamma^f_{[a|c|} \cancel{\partial_{b]} \omega_f} + 2\Gamma^f_{[a|c|} \Gamma^e_{b]f} \omega_e = \\ &= [-2\partial_{[a} \Gamma^e_{b]c} + 2\Gamma^f_{[a|c|} \Gamma^e_{b]f}] \omega_e = R_{abc}{}^e \omega_e \end{aligned} \quad (6.6.35)$$

ahol<sup>2</sup> a legutolsó lépésben a görbületi tenzor definíciója mellett az antiszimmetrizálás során azt használtuk ki, hogy  $\partial_a$  és  $\partial_b$  operátorok sorrendje tetszőleges típusú tenzormezőkön felcserélhető, valamint azt, hogy a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor torziómentessége folytán  $\Gamma^f_{[ab]} = 0$ . Az utolsó egyenlőség-ből az  $\omega_a$  kovariáns vektormező tetszőlegessége folytán a

$$R_{abc}{}^e = \partial_b \Gamma^e_{ac} - \partial_a \Gamma^e_{bc} + \Gamma^f_{ac} \Gamma^e_{bf} - \Gamma^f_{bc} \Gamma^e_{af} \quad (6.6.36)$$

reláció adódik.

---

<sup>2</sup>Az iménti egyenletben és a soron következőkben minden olyan kifejezést, ami vagy önmagában, vagy más kifejezésekkel együtt zérus értéket ad, áthúzással és szürke szín alkalmazásával jelölünk.

Speciálisan, amikor  $\nabla_a$  a metrikával kompatibilis torziómentes kovariáns deriváló operátor, akkor az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképen először a metrika  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták szerinti  $\partial_e g_{ab}$  parciális deriváltjait, azok és az inverz metrika felhasználásával a

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{ce} \{ \partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab} \} \quad (6.6.37)$$

Christoffel-féle szimbólumokat határozzuk meg. Végül ezeket és a parciális deriváltjaikat felhasználva a (6.6.36) egyenletben megfogalmazott eljárást követve meghatározható a metrikával kompatibilis torziómentes kovariáns deriváló operátorhoz tartozó  $R_{abc}{}^d$  görbületi tenzor is.

### A görbület meghatározása bázismezők segítségével

Ez a módszer is mindig alkalmazható bármely metrikus struktúrával rendelkező sokaság esetében. Legyen  $\{e^a_{(a)}\}$ , ahol az  $a$  névindex az  $1, \dots, n$  értékeket veszi fel, egy olyan bázismező  $M$ -en, vagy annak csak valamely  $M'$  részhalmozán, amelyre a

$$C_{ab} = g_{ab} e^a_{(a)} e^b_{(b)} \quad (6.6.38)$$

belső szorzatok egy nem-szinguláris konstans mátrixot határoznak meg. Az, hogy az adott  $C_{ab}$  mátrix valójában milyen elemeket tartalmaz, az még egy rögzített szignatúra esetén is a választott bázistól, az pedig leginkább a megoldani kívánt probléma jellegétől függ. Például a szokásos négydimenzós téridőben értelmezett Lorentz-szignatúrájú metrikák esetében használhatunk ortonormált, pszeudo-ortonormált, vagy a Newmann-Penrose formalizmusban használt komplex fényszerű bázisokat, melyekhez tartozó  $C_{ab}$  mátrixok aktuális alakja külön-külön a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ vagy } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6.39)$$

formában adható meg.

A (6.6.38) egyenlet felhasználásával belátható, hogy az  $\{e_{(a)}^a\}$  bázismező, valamint a  $C_{ab}$  mátrix  $C^{ab}$ -vel jelölt inverzének segítségével a metrikát a

$$g_{ab} = \sum_{a,b=1}^n C^{ab} e_{(a)a} e_{(b)b} \quad (6.6.40)$$

alakban adhatjuk meg. Ezen reláció helyességét a legegyszerűbben úgy ellenőrizhetjük, hogy mindkét oldalt tenzoriálisan szorozzuk a  $e_{(c)}^c$  vektormezővel, majd kontrakciót hajtunk végre az 'bc' téridő-indexekben.

A célunk a metrikával kompatibilis  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorhoz tartozó görbület meghatározása. Mielőtt ezt megtennénk, érdemes felidézni, hogy  $\nabla_a$ -nak az alábbi három feltételt kell kielégítenie.

- 1°  $\nabla_a$  a metrikával kompatibilis, azaz  $\nabla_a g_{bc} = 0$ ,
- 2° A  $\nabla_a$  operátor torziómentes, azaz bármely legalább kétszer differenciálható  $f \in \mathcal{F}$  függvényre  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f = 0$  teljesül,
- 3° Továbbá bármely legalább kétszer differenciálható  $\omega_a$  formamezőre a görbületi tenzort meghatározó szokásos  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = R_{abc}{}^e \omega_e$  reláció teljesül.

A görbület meghatározása során célszerű az

$$\omega_{amn} = e_{(m)}^f \nabla_a e_{(n)f} \quad (6.6.41)$$

$n^2$  számú duális vektormezőt alkalmazni, melyeket *konnexió formáknak* is szokás nevezni. Az  $\omega_{amn}$  konnexió formák  $\{e_{(a)}^a\}$  bázisra vonatkozó komponenseit, azaz a

$$\omega_{amn} = e_{(a)}^a e_{(m)}^f \nabla_a e_{(n)f} \quad (6.6.42)$$

kifejezéseket, *Ricci-féle forgási együtthatóknak* nevezzük.

A  $C_{ab}$  mátrix elemeinek helytől való függetlenségét kihasználva, valamint a Leibnitz-szabályt alkalmazva, azonnal adódik, hogy

$$0 = \nabla_a (e_{(m)}^f e_{(n)f}) = (\nabla_a e_{(m)}^f) e_{(n)f} + e_{(m)}^f (\nabla_a e_{(n)f}). \quad (6.6.43)$$

A fent megfogalmazott  $1^\circ$  tulajdonság felhasználásával a jobb oldal első tagjára

$$(\nabla_a e_{(m)}^f) e_{(n)f} = \left( \nabla_a e_{(m)h} g^{hf} \right) e_{(n)f} = (\nabla_a e_{(m)h}) e_{(n)}^h \quad (6.6.44)$$

adódik, amely a konnexió formákat definiáló (6.6.41), valamint a (6.6.43) egyenlettel együtt az

$$\omega_{amn} + \omega_{anm} = 0 \quad (6.6.45)$$

összefüggést adja. Így azt mondhatjuk, hogy az  $1^\circ$  tulajdonság éppen a konnexió formáknak a névindexükben vett antiszimmetriájával egyenértékű.

A  $2^\circ$  tulajdonság természetes adaptációja a következő módon igazolható: A (6.6.41) egyenletet a  $\sum_{p=1}^n C^{op} e_{(p)d}$  kombinációval tenzoriálisan szorozva, majd azt 'kontrahálva' az  $m, o$  névindexpárban, végül a kapott kifejezést antiszimmetrizálva az 'ad' téridő-indexpárban a

$$\nabla_{[a} e_{(n)d]} = \sum_{m,p=1}^n C^{mp} e_{(p)[d} \omega_{a]mn} \quad (6.6.46)$$

egyenletekhez jutunk. Az utóbbi reláció bármely  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett  $-\nabla_a$  torziómentessége, valamint a Christoffel-féle szimbólumok szimmetriája folytán

– a

$$\partial_{[a} e_{(n)d]} = \sum_{m,p=1}^n C^{mp} e_{(p)[d} \omega_{a]mn} \quad (6.6.47)$$

egyenletté egyszerűsödik, melynek értelmében a bázisvektorok koordináták szerinti parciális deriváltjai között kapcsolatot teremthetünk a bázisvektorok, a konnexió formák és a  $C^{ab}$  mátrix felhasználásával.

Végül a görbületi tenzor  $\{e_{(a)}^a\}$  bázismezőre vonatkozó komponenseinek meghatározása érdekében induljunk ki a 3<sup>o</sup> tulajdonságból, azaz tekintsük a

$$R_{abc\mathfrak{d}} = e_{(a)}^a e_{(b)}^b e_{(c)}^c \left[ R_{abc}^d e_{(\mathfrak{d})d} \right] = e_{(a)}^a e_{(b)}^b e_{(c)}^c \left[ (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) e_{(\mathfrak{d})c} \right] \quad (6.6.48)$$

összefüggést. Vegyük észre, hogy a jobb oldalon lévő zárójeles kifejezés első tagját a Leibnitz-szabály segítségével a

$$e_{(c)}^c \nabla_a \nabla_b e_{(\mathfrak{d})c} = \nabla_a \left[ e_{(c)}^c \nabla_b e_{(\mathfrak{d})c} \right] - [\nabla_a e_{(c)}^c] [\nabla_b e_{(\mathfrak{d})c}] \quad (6.6.49)$$

formában írhatjuk fel, továbbá vegyük észre, hogy az utóbbi egyenlet jobb oldalának második tagjára a (6.6.40) egyenlet felhasználásával kapott

$$\delta_b^h = \sum_{m,p=1}^n C^{mp} e_{(m)b} e_{(p)}^h \quad (6.6.50)$$

azonosság figyelembevételével, a

$$[\nabla_a e_{(c)}^c] \delta_c^h [\nabla_b e_{(\mathfrak{d})h}] = \sum_{m,p=1}^n C^{mp} [(\nabla_a e_{(c)}^c) e_{(m)c}] (e_{(p)}^h [\nabla_b e_{(\mathfrak{d})h}]) \quad (6.6.51)$$

egyenlőség adódik. Mindezek alapján, valamint a konnexió formák definíciójának figyelembevételével (6.6.49) az

$$e_{(c)}^c \nabla_a \nabla_b e_{(\mathfrak{d})c} = \nabla_a \omega_{b\mathfrak{c}\mathfrak{d}} - \sum_{m,p=1}^n C^{mp} \omega_{apc} \omega_{bm\mathfrak{d}} \quad (6.6.52)$$

alakot ölti. Felhasználva most a (6.6.48) és (6.6.52) egyenleteket a görbületi tenzornak az  $\{e_{(a)}^a\}$  bázismezőre vonatkozó komponenseire az

$$R_{abc\mathfrak{d}} = e_{(a)}^a e_{(b)}^b \left( \nabla_a \omega_{b\mathfrak{c}\mathfrak{d}} - \nabla_b \omega_{a\mathfrak{c}\mathfrak{d}} - \sum_{m,p=1}^n C^{mp} \left[ \omega_{apc} \omega_{bm\mathfrak{d}} - \omega_{bpc} \omega_{am\mathfrak{d}} \right] \right) \quad (6.6.53)$$

összefüggést kapjuk.

**6.6.1. Feladat.** Az (6.6.42) összefüggésnek megfelelően értelmezett Ricci-féle forgási együtthatók felhasználásával mutassuk meg, hogy a görbületi tenzor  $\{e_{(a)}^a\}$  bázismezőre vonatkozó komponenseire

$$R_{abcd} = e_{(a)}^a \nabla_a \omega_{bcd} - e_{(b)}^b \nabla_b \omega_{acd} - \sum_{m,p=1}^n C^{mp} \left[ \omega_{apc} \omega_{bmd} - \omega_{bpc} \omega_{amd} + \omega_{apb} \omega_{mcd} - \omega_{bpa} \omega_{mcd} \right] \quad (6.6.54)$$

teljesül.



## 7. fejezet

# Még egyszer a vektormezőkről

**7.0.1. Definíció.** Legyen  $M$  tetszőleges  $n$ -dimenziós differenciálható sokaság. Ekkor azt mondjuk, hogy valamely  $C^r$ -osztályú  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  leképezés egy egyparaméteres  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus-csoportot határoz meg  $M$ -en, ha

- (i) bármely rögzített  $t \in \mathbb{R}$ -re  $\phi$ -nek a  $\{t\} \times M$  sokaságra vett megszorítottja – ezt ezentúl  $\phi_t : M \rightarrow M$ -mel jelöljük – az  $M$  differenciálható sokaság önmagára vett  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmusa,
- (ii) a  $\phi_t$  leképezésekre bármely  $s, t \in \mathbb{R}$  esetén a  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$  relációk teljesülnek.

A fenti definícióból azonnal adódik, hogy  $\phi_0$  az  $M$  differenciálható sokaság önmagára vett azonos leképezésével esik egybe, továbbá, hogy  $\phi_{-t}$  éppen a  $\phi_t$  leképezés inverze.

Amint azt rögtön megmutatjuk az egyparaméteres  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus-csoportok és a  $C^{r-1}$ -osztályú vektormezők nagyon szoros kapcsolatban vannak egymással.

**7.0.1. Lemma.** Minden egyparaméteres  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus-csoport-hoz egyértelműen hozzárendelhető egy  $C^{r-1}$ -osztályú vektormező.

**Bizonyítás:** Az állítás belátása érdekében tekintsük a tetszőleges  $p \in M$  pont  $\phi_t$  leképezések általi képét, melyet  $\{\phi_t(p)\}$ -vel jelölünk és a  $p$  pont pályájának nevezzük. Könnyen látható, hogy  $\{\phi_t(p)\} \subset M$  valójában  $C^r$ -osztályú görbe a  $p = \phi_0(p)$  ponton keresztül. Ennek a görbének a  $t$  paraméterhez tartozó érintővektora  $v^a$  bármely  $\phi_t(p)$  ponthoz tartozó  $\mathcal{T}(\phi_t(p))$  érintőtérben jól meghatározott. Mivel a  $p$  pontot tetszőlegesen választottuk, továbbá a  $\phi_t$  leképezések értelmezési tartománya  $M$ , a pályák pedig nem metszhetik egymást, ezzel az eljárással  $M$  minden egyes pontjához egyértelmű módon hozzárendelhetünk egy vektort. Az is könnyen látható, hogy az így nyert  $v^a$  vektormező legalább  $C^{r-1}$ -osztályú, hiszen maguk a pályák  $C^r$ -osztályú görbék. A  $v^a$  vektormezőt éppen ezért szokás az egyparaméteres  $C^r$ -osztályú  $\phi_t$  diffeomorfizmus-csoport infinitezimális generátorának is nevezni.  $\square$

Az utóbbi elnevezés jogosságát az alábbi egyszerű észrevétel is megerősíti.

**7.0.2. Lemma.** *Minden  $C^{r-1}$ -osztályú  $v^a$  vektormezőhöz egyértelműen hozzárendelhető egy (lokális) egyparaméteres  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus-csoport.*

**7.0.1. Megjegyzés.** *A lokális egyparaméteres  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus-csoport definíciója egyedül abban tér el a 7.0.1. definícióban megfogalmazottaktól, hogy utóbbiban  $\mathbb{R}$ -et, a valós számhalmazt mindenütt a zérus elem valamely elegendően kicsiny  $\varepsilon > 0$  szám által meghatározott  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  nyílt környezetével kell helyettesítenünk. Ennek megfelelően az (i) és (ii) feltételeket az alábbiak szerint kell módosítanunk.*

- (i') *bármely rögzített  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ -re  $\phi_t$ -nek a  $\{t\} \times M$  sokaságra vett megszorítottja – melyet ezentúl  $\phi_t : M \rightarrow M$ -vel jelölünk – az  $M$  differenciálható sokaság önmagára vett  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmusa,*
- (ii') *a  $\phi_t$  leképezésekre bármely olyan  $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  választásra, amelyre  $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , teljesülnek a  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$  relációk.*

**Bizonyítás:** A lemma állításának bizonyítása érdekében tekintsük először a  $C^{r-1}$ -osztályú  $v^a$  vektormező integrálgörbéit  $M$ -en. Ezek olyan görbék, ame-

lyeket a  $v^a$  vektormező minden egyes pontjukban érint, azaz az  $M$  sokaság minden egyes pontján egy és csakis egy ilyen görbe haladhat át. Annak belátása érdekében, hogy integrálgörbék ilyen rendszere létezik, válasszunk egy tetszőleges  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképet, amelyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták. Ekkor az  $\mathcal{O}$  halmazon a  $v^a$  vektormező integrálgörbéit a

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu(x^1, \dots, x^n) \quad (7.0.1)$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenlet megoldásai határozzák meg, ahol  $v^\mu$  a  $v^a$  vektormező  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  lokális koordinátabázisra vonatkozó komponenseit jelöli. Mármint minden, legalább integrálható  $v^a$  vektormező, valamint az  $x^\mu(t_p)$  adatokkal jellemzett tetszőlegesen megválasztható  $p$  kezdőpont estén – a kezdőpont elegendően kicsiny lokális környezetében – a (7.0.1) egyenlethez mindig hozzárendelhető a

$$x^\mu(t) = x^\mu(t_p) + \int_{t_p}^t v^\mu dt' \quad (7.0.2)$$

megoldás. Így lokálisan a  $v^a$  vektormezőhöz mindig egyértelmű módon hozzárendelhetők  $v^a$  integrálgörbéi.

Ezek segítségével a fent említett (lokális) egyparaméteres  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus-csoportot a következő eljárással értelmezzük. Legyen a  $p \in M$  pont tetszőleges, valamint a  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  szám elegendően kicsiny. Ezek után definiáljuk a  $\phi_t$  leképezést úgy, hogy az tetszőleges  $p \in M$  ponthoz rendelje azt a  $\phi_t(p)$  pontot, amely a  $v^a$  vektormező  $p$  ponton áthaladó integrálgörbéje mentén az  $x^\mu(t_p)$  koordinátákkal adott  $p$  ponthoz éppen a  $t$ -paraméter távolságba eső  $x^\mu(t + t_p)$  koordinátákkal adott  $\phi_t(p)$  pontját rendelje, ahol

$$x^\mu(t + t_p) = x^\mu(t_p) + \int_{t_p}^{t+t_p} v^\mu dt'. \quad (7.0.3)$$

Mivel az integrál, mint a felső határ függvénye differenciálható, továbbá (7.0.3) alapján bármely, elegendően kicsiny  $s, t$  paraméterértékre – amelyekre még

$s + t$  is elegendően kicsiny – a

$$\begin{aligned} x^\mu((s+t) + t_p) &= x^\mu(t_p) + \left[ \int_{t_p}^{t+t_p} v^\mu dt' + \int_{t+t_p}^{(s+t)+t_p} v^\mu dt' \right] = \\ &= x^\mu(t + t_p) + \int_{t+t_p}^{s+(t+t_p)} v^\mu dt' \end{aligned} \quad (7.0.4)$$

relációk is teljesülnek, az imént értelmezett  $\phi_t$  leképezések valóban csak egy  $C^r$ -osztályú (lokális) egyparaméteres  $\phi_t$  diffeomorfizmus-csoportot határoznak meg, hiszen az integrálgörbék az alkalmazott  $t$ -paraméterértékek esetleg csak valamely kicsiny intervallumán értelmezhetők.  $\square$

**7.0.2. Megjegyzés.** A fenti megállapításainkat úgy összegezhethetjük, hogy a tetszőleges  $M$  differenciálható sokaságon értelmezett  $C^{r-1}$ -osztályú vektormezők és a (lokális)  $C^r$ -osztályú egyparaméteres diffeomorfizmus-csoportok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg.

## 7.1. Vektormezők kommutátorai

**7.1.1. Definíció.** Legyenek  $v^a, w^a$  legalább  $C^1$ -osztályú vektormezők  $M$ -en. Ekkor a  $v^a$  és  $w^a$  vektormezők kommutátorán azt a  $[v, w]^a$ -vel jelölt vektormezőt értjük, amely minden, legalább  $C^2$ -osztályú  $f \in \mathcal{F}(M)$  függvény esetén a

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) \quad (7.1.5)$$

egyenletnek tesz eleget.

A  $[v, w]^a$  vektormező  $v^a$ -tól és  $w^a$ -tól függő konkrét alakjának meghatározása érdekében induljunk ki abból, hogy bármely  $v^a$  vektorra  $v(f) = v^a \nabla_a f$ , ahol  $\nabla_a$  egy tetszőleges kovariáns deriváló operátort jelöl. A továbbiakban feltesszük, hogy  $\nabla_a$  torziómentes. Ezek után egyrészt a

$$[v, w](f) = [v, w]^d \nabla_d f, \quad (7.1.6)$$

összefüggést, másrészt  $\nabla_a$  torziómentességét kihasználva a

$$[v, w](f) = v^c \nabla_c (w^d \nabla_d f) - w^c \nabla_c (v^d \nabla_d f) = [v^c \nabla_c w^d - w^c \nabla_c v^d] \nabla_d f \quad (7.1.7)$$

relációt kapjuk. Így (7.1.6) és (7.1.7) alapján, valamint az  $f \in \mathcal{F}$  függvény tetszőlegessége folytán a  $v^a$  és  $w^a$  vektormezők kommutátorára a

$$[v, w]^a = v^e \nabla_e w^a - w^e \nabla_e v^a \quad (7.1.8)$$

egyenlőség teljesül.

**7.1.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy bármely  $v^a, w^a, z^a$  legalább kétszer differenciálható vektormezőre teljesül a Jacobi-azonosság, azaz a*

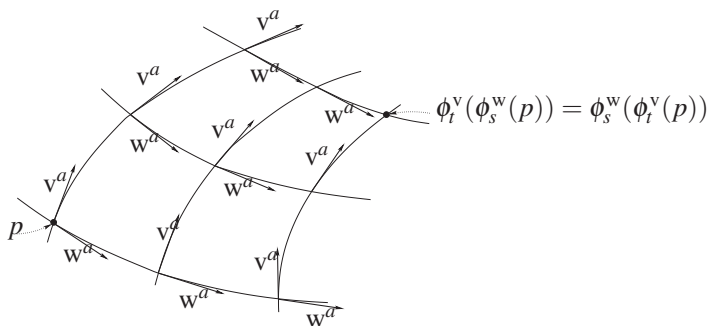
$$[[v, w], z] + [[z, v], w] + [[w, z], v] = 0 \quad (7.1.9)$$

*reláció!*

Tekintsünk most két olyan  $C^r$ -osztályú vektormezőt,  $v^a$ -t és  $w^a$ -t, amelyek kommutátora eltűnik, azaz  $[v, w]^a = 0$ . Amint azt korábban már megmutattuk, mindkét vektormezőhöz hozzárendelhető egy-egy (lokális) egyparaméteres  $C^{r+1}$ -osztályú diffeomorfizmus csoport. Jelöljük ezeket  $\{\phi_t^v\}$ -vel, valamint  $\{\phi_t^w\}$ -vel. Belátható, hogy  $[v, w]^a$  kommutátor eltűnése pontosan azzal egyenértékű, hogy a  $\{\phi_t^v\}$  és  $\{\phi_t^w\}$  diffeomorfizmusok sorrendje felcserélhető, azaz bármely  $p \in M$  pont és elegendően kicsiny  $s, t \in \mathbb{R}$  értékek esetén

$$\phi_t^v \circ \phi_s^w(p) = \phi_s^w \circ \phi_t^v(p). \quad (7.1.10)$$

A vektormezők kommutátorának egy alkalmazásaként tekintsük most  $M$  egy tetszőlegesen választott  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképét, amelyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták, valamint válasszuk a  $v_{(\mu)}^a$  vektorokat, ahol a  $\mu$  névindex az  $1, \dots, n$  értékeket veszi fel, úgy, hogy azok éppen a  $\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$  lokális koordinátabázisvektorokkal essenek egybe. Ekkor a  $v_{(\mu)}^a$  vektorok  $\{(\partial/\partial x^\mu)^a\}$  bázisra



7.1. ábra. A kommutáló  $v^a$  és  $w^a$  vektormezőkhöz tartozó  $\phi_t^v$  és  $\phi_s^w$  diffeomorfizmusok sorrendje felcserélhető, azaz elegendően kicsiny  $s, t \in \mathbb{R}$  értékek esetén  $\phi_t^v(\phi_s^w(p)) = \phi_s^w(\phi_t^v(p))$ .

vonatkozó komponenseire  $v_{(\mu)}^\alpha = \delta^\alpha_\mu$  adódik, amiből a (7.1.8) relációt a  $\partial_a$  kovariáns deriváló operátorra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$[v_{(\mu)}, v_{(\nu)}]^a = 0 \quad (7.1.11)$$

a  $\mu$  és  $\nu$  névindexek tetszőleges választása esetén, azaz a koordináta-bázisvektorok kommutátorai mindig zérus értéket vesznek fel.

**7.1.1. Megjegyzés.** Az utóbbi megállapítás nem is kellene, hogy olyan nagyon meglepő legyen, hiszen a koordinátavonalak, mint integrálgörbék által megjelenített diffeomorfizmus-csoportok elemei felcserélhetők kell hogy legyenek. Ellenkező esetben egyszerűen nem lenne értelme semmiféle koordinátázásnak.

Érdemes megjegyezni, hogy a (7.1.11) egyenlethez tartozó állítás fordítottja is igaz.

**7.1.1. Lemma.** Tekintsük a  $\{v_{(1)}^a, \dots, v_{(n)}^a\}$  lineárisan független, legalább egyszer differenciálható vektormezők egy rendszerét. Ekkor bármely  $p \in M$  pont valamely  $\mathcal{O}_p$  nyílt környezetében pontosan akkor léteznek olyan, legalább  $C^2$ -osztályú  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták, amelyekre  $v_{(\mu)}^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$  tetszőle-

ges  $\mu = 1, \dots, n$  értékére, ha a  $[v_{(\mu)}, v_{(\nu)}]^a$  kommutátorok a  $\mu$  és  $\nu$  névindexek tetszőleges választása esetén zérus értéket vesznek fel.

*Bizonyítás:* Az imént megfogalmazott állítás helyességének ellenőrzéséhez először válasszunk ki a  $p \in M$  pont környezetében egy  $(\mathcal{O}', \psi')$  térképet, amelyen  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordináták. Jelölje a  $\{v_{(1)}^a, \dots, v_{(n)}^a\}$  lineárisan független vektorrendszerhez tartozó duális rendszert  $\{v_a^{*(1)}, \dots, v_a^{*(n)}\}$ . Amint az a duális bázispárok definíciójából következik, az így kiválasztott duális vektorrendszerek elemei eleget tesznek a  $v_a^{*(\mu)} v_{(\nu)}^a = \delta^\mu_\nu$  relációnak.

Az is nyilvánvaló, hogy ha egy  $p \in M$  pont valamely  $\mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}'$  nyílt környezetében léteznek olyan  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták, amelyekre a  $v_{(\mu)}^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$  relációk teljesülnek, akkor a duális bázis elemeit a  $v_a^{*(\mu)} = (dx^\mu)_a$  alakban írhatjuk fel. Felhasználva ekkor egyrészt azt, hogy az  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordinátákban a

$$(dx^\mu)_a = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) (dx'^\nu)_a, \quad (7.1.12)$$

másrészt azt, hogy a

$$v_a^{*(\mu)} = \sum_{\nu=1}^n v_v^{*(\mu)} (dx'^\nu)_a \quad (7.1.13)$$

kifejtések is érvényesek, azt kapjuk, hogy az  $\mathcal{O}_p$  környezetben pontosan akkor létezhetnek olyan  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták, amelyekre  $v_{(\mu)}^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$ , ha a

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = v_v^{*(\mu)}(x'^1, \dots, x'^n) \quad (7.1.14)$$

elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszerhez megadható, azaz léteznek olyan  $x^\mu = x^\mu(x'^1, \dots, x'^n)$  függvények, amelyek eleget tesznek a (7.1.14) egyenletnek.

A parciális differenciálegyenletek elméletéből következik, hogy (7.1.14)-nek pontosan akkor van megoldása, ha teljesülnek az  $x^\mu$  függő változókra vonat-

kozó integrálhatósági feltételek, azaz ha

$$0 = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu} = \frac{\partial v_{\nu}^{*(\mu)}}{\partial x'^\rho} - \frac{\partial v_{\rho}^{*(\mu)}}{\partial x'^\nu}. \quad (7.1.15)$$

Amint azt azonnal látni fogjuk, ezek az integrálhatósági feltételek éppen a  $\{v_{(1)}^a, \dots, v_{(n)}^a\}$  vektorrendszer elemeire kirótt kommutálási relációval egyenértékűek. Ennek belátása érdekében tekintsük a (7.1.15) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés, valamint a  $v_{(\alpha)}^\rho v_{(\beta)}^\nu$  tenzori szorzat kontrakcióját. Az így kapott kifejezésből a Leibnitz-szabály, valamint a  $v_{\rho}^{*(\mu)} v_{(\nu)}^\rho = \delta^\mu_{\nu}$  reláció felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v_{(\alpha)}^\rho \left[ \frac{\partial \left( v_{\nu}^{*(\mu)} v_{(\beta)}^\nu \right)}{\partial x'^\rho} - v_{\nu}^{*(\mu)} \frac{\partial v_{(\beta)}^\nu}{\partial x'^\rho} \right] - v_{(\beta)}^\nu \left[ \frac{\partial \left( v_{\rho}^{*(\mu)} v_{(\alpha)}^\rho \right)}{\partial x'^\nu} - v_{\rho}^{*(\mu)} \frac{\partial v_{(\alpha)}^\rho}{\partial x'^\nu} \right] \\ = -v_{\nu}^{*(\mu)} \left[ v_{(\alpha)}^\rho \frac{\partial v_{(\beta)}^\nu}{\partial x'^\rho} - v_{(\beta)}^\rho \frac{\partial v_{(\alpha)}^\nu}{\partial x'^\rho} \right] = -v_{\nu}^{*(\mu)} [v_{(\alpha)}, v_{(\beta)}]^\nu. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Ezen utóbbi egyenlet alapján most már látható, hogy a (7.1.15) integrálhatósági feltétel pontosan akkor teljesül  $\mathcal{O}_p$  felett, ha a  $\{v_{(1)}^a, \dots, v_{(n)}^a\}$  vektorrendszer elemeihez tartozó  $[v_{(\mu)}, v_{(\nu)}]^a$  kommutátorok a  $\mu$  és  $\nu$  névindexek tetszőleges választása esetén eltűnnek.  $\square$

## 7.2. Frobenius-tétel

Legyen  $M$  egy tetszőleges  $n$ -dimenziós differenciálható sokaság, valamint  $\hat{n} < n$  természetes szám. Tegyük fel, hogy  $M$  minden egyes pontjában adva van az ottani  $n$ -dimenziós  $\mathcal{T}(p)$  érintőtérnek egy  $\hat{n}$ -dimenziós  $\widehat{\mathcal{T}}(p)$ -el jelölt altere. Tegyük fel, hogy ezek az alterek megfelelően simán illeszkednek egymáshoz abban az értelemben, hogy bármely pont elegendően kicsiny környezetében őket valamely  $r \in \mathbb{N}$  értékre  $C^r$  differenciálhatósági osztályú vektormezők feszítik ki. Jelöljük az így kiválasztott alterek összességét  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$ -mel, amelyre



$$\widehat{\mathcal{T}}(M) = \{\widehat{\mathcal{T}}(p) \mid p \in M\}.$$

Fontos, nemcsak elvi jelentőségű az a kérdés, hogy mikor létezhet olyan  $\hat{n}$ -dimenziós  $\widehat{M}$  differenciálható részsokaságok egy  $\{\widehat{M}\}$  rendszere  $M$ -ben, amelyek  $\widehat{\mathcal{T}}(\widehat{M})$  érintőterei bármely  $p \in M$  pontban az ottani  $\mathcal{T}(p)$  érintőtérnek éppen az imént ismertetett eljárással kiválasztott altereivel esnek egybe. Ezeket a részsokaságokat a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszer *integrálsokaságainak* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy amikor valamely  $p \in M$  ponton keresztül létezik ilyen  $\widehat{M}$  integrálsokaság, akkor a  $p$  pont  $\widehat{M}$ -beli  $\widehat{\theta}$  környezetében értelmezett  $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{\hat{n}})$  lokális koordinátákhoz tartozó  $\{(\partial/\partial \hat{x}^m)^a\}$  lokális koordinátabázisban a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszerhez tartozó bármely  $V^a$  vektormező  $\widehat{\theta}$  felett felírható a

$$V^a = \sum_{m=1}^{\hat{n}} V^m (\partial/\partial \hat{x}^m)^a \quad (7.2.17)$$

alakban, ahol a  $V^1, \dots, V^{\hat{n}}$  függvények a  $V^a$  vektormező  $\{(\partial/\partial \hat{x}^m)^a\}$  bázismezőkre vonatkozó komponenseit jelölik. Felhasználva ekkor a  $\{(\partial/\partial \hat{x}^m)^a\}$  bázis elemeinek kommutálását azonnal látható, hogy bármely a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszerhez tartozó  $V^a$  és  $W^a$  vektormezőre

$$\begin{aligned} [V, W]^a &= \left[ \sum_{s=1}^{\hat{n}} V^s (\partial/\partial \hat{x}^s), \sum_{t=1}^{\hat{n}} W^t (\partial/\partial \hat{x}^t) \right]^a \\ &= \sum_{s,t=1}^{\hat{n}} \left\{ V^s \left( \frac{\partial W^t}{\partial \hat{x}^s} \right) - W^s \left( \frac{\partial V^t}{\partial \hat{x}^s} \right) \right\} (\partial/\partial \hat{x}^t)^a. \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Ez azt jelenti, hogy amikor léteznek a keresett integrálsokaságok akkor a kiindulásnál használt  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszerhez tartozó vektormezők kommutátorai is mindig szükségképpen a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszerhez tartoznak.

Frobenius megmutatta (lásd például [53] 8. fejezetét), hogy a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszer elemeinek ezen tulajdonsága nemcsak szükséges, de elegendő feltétele is a kérdéses integrálsokaságok létezésének.

**7.2.1. Tétel.** Frobenius-tétel: A  $\mathcal{T}(M)$ -beli érintőterek  $\hat{n} < n$  dimenziós  $C^r$  módon illeszkedő altereinek egy  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszeréhez pontosan akkor találhatók a fentebb meghatározott értelemben vett  $\hat{n}$ -dimenziós  $\{\widehat{M}\}$  integrálsokaságok, ha a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszerhez tartozó tetszőleges  $V^a$  és  $W^a$  vektormező esetén a  $[V, W]^a$  kommutátor is mindig a  $\widehat{\mathcal{T}}(M)$  rendszerhez tartozik.

## 8. fejezet

# „Önmagukkal párhuzamos” görbék

Az Euklideszi-tér egyenesét az alábbi két tulajdonság jellemzi. Egyrészt az egyenes bármely, két rajta fekvő pont között a legrövidebb görbe, másrészt az is igaz, hogy bármely pontbeli érintővektorának az Euklideszi-térben az egyenes menti párhuzamos eltoltja mindig érinti magát az egyenest. Az első az Euklideszi-tér metrikus, míg a második annak affin szerkezetét tükrözi. Az utóbbi koncepció mindig értelmezhető feltéve, hogy definiálva van a görbe menti párhuzamos eltolás fogalma, míg az első koncepció feltételezi, hogy a kapcsolódó konnexió valamely metrikus struktúrából származtatott.

**8.0.1. Definíció.** Legyen  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  legalább  $C^2$ -osztályú görbe  $M$ -en. Jelölje  $T^a$  a  $\lambda$  görbe  $t$ -paraméterhez tartozó érintővektorát. Ekkor  $\lambda$ -t a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorra nézve „önmagával párhuzamos” görbének nevezzük, ha létezik olyan  $\varphi$  függvény, amelyre  $\lambda$  mentén

$$T^e \nabla_e T^a = \varphi T^a. \quad (8.0.1)$$

Annak belátása érdekében, hogy a (8.0.1) feltétel valóban a fent megfogalmazott geometriai elvárásunkat fejezi ki, érdemes felidézni, hogy a kovariáns

deriválás és a párhuzamos eltolás műveletei között fennálló szoros kapcsolat alapján valamely  $p = \lambda(t_p)$  pontban a

$$T^e \nabla_e T^a|_p = \lim_{t \rightarrow t_p} \frac{T^a_{\parallel} - T^a(t_p)}{t - t_p} \quad (8.0.2)$$

reláció teljesül. Ezen utóbbi egyenletben  $T^a_{\parallel}$  a  $\lambda(t)$  pontbeli  $T^a$  érintővektor párhuzamos eltolját jelöli, amelyet a geometriai feltételünknek megfelelő  $T^a_{\parallel} = \psi T^a$  relációval helyettesítve<sup>1</sup>, és  $p$  tetszőlegességét figyelembe véve éppen a (8.0.1) alakú egyenlethez jutunk.

Nyilvánvaló, hogy a  $\lambda$  görbe mentén a  $t$ -paraméter helyett mindig választhatunk tetszőleges másik  $t'$ -paramétert is. Tegyük fel, hogy  $t' = t'(t)$  a  $t$ -paraméter legalább  $C^2$ -osztályú szigorúan monoton függvénye. Ekkor a  $\lambda$  görbe  $t'$ -paraméterhez tartozó  $T'^a$  érintővektorára  $T^a = \phi T'^a$  teljesül, ahol  $\phi = \frac{dt'}{dt}$ . Behelyettesítve ezt a relációt a (8.0.1) egyenletbe először a

$$(\phi T'^e) \nabla_e (\phi T'^a) = \phi \phi T'^a, \quad (8.0.3)$$

majd a Leibnitz-szabály alkalmazásával a

$$\phi^2 T'^e \nabla_e T'^a + [\phi T'^e (\nabla_e \phi) - \phi \phi] T'^a = 0 \quad (8.0.4)$$

egyenlethez jutunk. Így amennyiben az új  $t' = t'(t)$  görbeparamétert úgy választjuk meg, hogy a (8.0.4) jobb oldalán, a szögletes zárójelben található kifejezés eltűnjön, azaz a

$$T^e \nabla_e \phi - \phi \phi = 0 \quad (8.0.5)$$

egyenlet teljesüljön – mivel  $\phi$  sehol nem válik zérussá – azt kapjuk, hogy bármely „önmagával párhuzamos” görbe egyenlete – egy alkalmas új paraméter bevezetése és a vesszők elhagyása után – a

$$T^e \nabla_e T^a = 0 \quad (8.0.6)$$

---

<sup>1</sup> Az  $\psi$  függvény konkrét alakja a jelenlegi gondolatmenet szempontjából teljes mértékben érdektelen.

összefüggéssé egyszerűsödik. Minden olyan paramétert, amelyre nézve a  $\lambda$  „önmagával párhuzamos” görbe egyenlete a (8.0.6) alakban írható fel, affinparaméternek hívunk.

Érdemes megjegyezni, hogy minden „önmagával párhuzamos” görbéhez mindig található affinparaméter. Ennek belátásához válasszunk most egy tetszőleges  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképet, amelyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták. Ekkor az  $\mathcal{O}$  térkép felett a  $\lambda(t)$  görbét az  $x^\mu = x^\mu(t)$  egyenletekkel adhatjuk meg, továbbá a  $T^a$  érintővektor komponenseire  $T^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$  teljesül. Könnyen belátható, hogy ekkor  $T^e \nabla_e \phi = \frac{dx^e}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial x^e} = \frac{d\phi}{dt}$ . Felhasználva ezt, valamint a  $\phi = \frac{dt'}{dt}$  összefüggést a (8.0.5) egyenletből a

$$\frac{d^2 t'}{dt^2} - \phi \frac{dt'}{dt} = 0 \quad (8.0.7)$$

közönséges differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása minden legáltalább integrálható  $\phi$  függvény esetén a

$$t' = a \cdot \int_0^t e^{\int_0^{\tilde{t}} \phi d\tilde{t}} d\tilde{t} + b \quad (8.0.8)$$

formában írható fel, ahol  $a \neq 0$ ,  $b$  tetszőleges valós számok.

(8.0.8)-nak megfelelően még az affinparaméter sem teljesen egyértelmű. Tegyük fel ugyanis, hogy a  $t$ -paraméter affin. Ekkor (8.0.8)-be  $\phi = 0$ -t helyettesítve azt kapjuk, hogy a  $t' = a \cdot t + b$  paraméter is affin, ahol  $a \neq 0$  és  $b$  tetszőleges valós számok.

Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  ismét egy tetszőlegesen kiválasztott térkép. Ekkor  $(\mathcal{O}, \psi)$  felett a (8.0.6) egyenletet – a Christoffel-féle szimbólumok és a  $\partial_a$  deriváló operátor segítségével – a

$$T^b \partial_b T^a + \Gamma^a_{bc} T^b T^c = 0 \quad (8.0.9)$$

alakban írhatjuk fel. Ebből a  $T^\beta \partial_\beta T^\alpha = \left( \frac{dx^\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2}$  összefüggés figyelembevételével a komponensekben felírt

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0 \quad (8.0.10)$$

egyenletet kapjuk. A közönséges differenciálegyenletek elméletéből tudjuk, hogy tetszőleges  $x^\alpha|_p \in \mathbb{R}^4$ , valamint  $\dot{x}^\alpha(t_p) \in \mathbb{R}^4$  kezdőadatok megválasztása esetén a (8.0.10) egyenlethez tartozó kezdőérték-problémának (lokálisan) mindig létezik olyan egyértelmű  $x^\alpha = x^\alpha(t)$  alakú megoldása, amelyre  $x^\alpha(t_p) = x^\alpha|_p$  és  $\frac{dx^\alpha}{dt}|_p = \dot{x}^\alpha(t_p)$  feltéve, hogy a  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  Christoffel-féle szimbólumok legalább lokálisan Lipschitz-félék, azaz legalább  $C^1$ -osztályúak.

Mivel az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép tetszőleges azt is mondhatjuk, hogy  $M$  tetszőleges  $p$  pontjához, valamint az adott  $p$  pontbeli érintőtér tetszőleges  $T^a \in \mathcal{T}(p)$  eleméhez, mint kezdőértékekhez mindig létezik az adott pontból az adott érintővektor irányába induló „önmagával párhuzamos” görbe.

## 8.1. Geodetikusok

Minden metrikával ellátott sokaság esetében az „önmagukkal párhuzamos” görbék metrikus tulajdonságai is vizsgálhatók. Ez egy Riemann-metrikával ellátott sokaság esetén az ívhossz fogalmát felhasználva tehető meg.

**8.1.1. Definíció.** Legyen  $g_{ab}$  Riemann-metrika  $M$ -en. Ekkor a  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  legalább  $C^1$ -osztályú görbe,  $t = \alpha$  és  $t = \beta$  paraméterértékek által meghatározott  $p = \lambda(\alpha)$  és  $q = \lambda(\beta)$  pontjai közé eső szakaszának ívhosszán az

$$\ell_{[p,q]} = \int_\alpha^\beta (g_{ef} T^e T^f)^{\frac{1}{2}} dt \quad (8.1.11)$$

integrál által meghatározott számot értjük, ahol  $T^a$  a  $\lambda$  görbe  $t$ -paraméterhez tartozó érintővektorát jelöli.

Könnyen belátható, hogy az ívhossz jól definiált, hiszen ha  $t' = t'(t)$  egy másik paraméterezése  $\lambda$ -nak, akkor a  $T^a = T'^a \cdot \frac{dt'}{dt}$  reláció, valamint az integrál-transzformációs szabály alapján látható, hogy

$$\ell_{[p,q]}(t) = \int_{\alpha}^{\beta} (g_{ef} T^e T^f)^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t'(\alpha)}^{t'(\beta)} (g_{ef} T'^e T'^f)^{\frac{1}{2}} \frac{dt'}{dt} dt = \ell_{[p,q]}(t'), \quad (8.1.12)$$

azaz az ívhossz valóban független az alkalmazott paraméterezéstől.

## 8.2. A vektorok kauzális jellege

Mielőtt annak tárgyalására térnénk rá, hogy miként kell a fenti definíciót a Lorentz-féle metrikával ellátott sokaságok esetében módosítanunk, idézzük fel, hogy amikor a metrika Lorentz-szignatúrájú, akkor mindig léteznek olyan nemzérus vektorok, amelyeknek önmagukkal vett belső szorzata nulla.

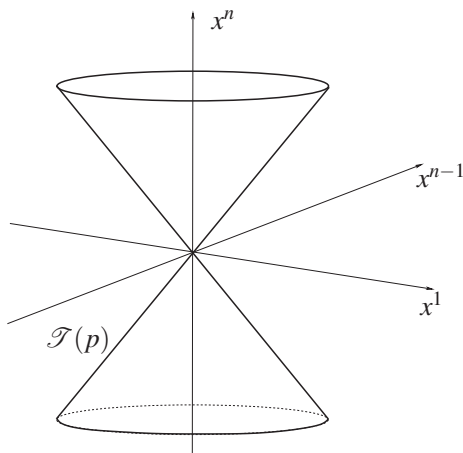
**8.2.1. Definíció.** Legyen  $g_{ab} (-, +, \dots, +)$  szignatúrájú Lorentz-metrika  $M$ -en, valamint  $p \in M$  tetszőleges pont. Ekkor egy  $V^a \in \mathcal{T}(p)$  vektort időszerűnek, fényyszerűnek vagy térszerűnek nevezzük annak megfelelően, hogy a  $V^e V_e = g_{ef} V^e V^f$  belső szorzat kisebb, egyenlő, vagy nagyobb mint nulla.

**8.2.1. Megjegyzés.** Az  $M$  differenciálható sokaság tetszőleges  $p \in M$  pontjához tartozó  $\mathcal{T}(p)$  érintőtérben, a szignatúra megállapításához használt bármely pszeudo-ortonormált bázisra alapozottan, a fénykúpokat a Minkowski-tér-időben megszokott módon ábrázolhatjuk (lásd az 8.1 ábrát). Így a fénykúpok minden  $\mathcal{T}(p)$  érintőtérben két olyan részből állnak, amelyek közös része csak a zérus vektor. Ennek megfelelően a nemzérus kauzális – időszerű vagy fényszerű – vektorok is két diszjunkt halmazba tartoznak minden egyes ponthoz tartozó érintőtérben. Természetesnek tűnik, ezért mi is feltesszük, hogy minden Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott differenciálható sokaságon, azaz tér-időn (lásd a 1.1.2 definíciót) a fénykúpok diszjunkt részeit folytonos módon jövő, illetve múlt „címkézéssel” láthatjuk el. Ekkor azt mondjuk, hogy a tér-idő időirányítható.

**8.2.2. Definíció.** Valamely téridő pontosan akkor időirányítható, ha megadható rajta egy sehol el nem tűnő, folytonos, időszerű vektormező.

**8.2.2. Megjegyzés.** A fizikai problémák megoldása során mi is feltesszük (lásd a 1.1.2 definíciót), hogy minden  $(M, g_{ab})$  párossal reprezentált téridő legyen időirányítható, továbbá a két lehetséges irányítás közül az egyiket ki is választottuk.

Megmutatható, hogy amennyiben egy  $(M, g_{ab})$  téridő nem lenne időirányítható, akkor a téridő kétszeres fedősokasága már biztosan az [25].



8.1. ábra. Annak illusztrációja, hogy minden  $\mathcal{T}(p)$  érintőtérben a fénykúpok tetszőleges pszeudo-ortonormált bázisra nézve a Minkowski-téridőben megszokott módon néznek ki, és két olyan részből állnak, amelyek közös része csak a zérus vektor.

A 8.2.1 definícióban alkalmazott eljáráshoz hasonlóan bármely Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott  $M$  sokaság esetében az  $M$ -ben futó görbék egyes speciális osztályait is megkülönböztethetjük kauzális jellegük alapján.



**8.2.3. Definíció.** A  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$ , legalább  $C^1$ -osztályú görbét időszerűnek, fényszerűnek, vagy térszerűnek nevezzük, ha a  $\lambda$  görbe érintővektora  $\lambda$  mentén mindenütt időszerű, fényszerű, vagy térszerű.

**8.2.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az imént megfogalmazott definícióban alkalmazott kategorizálás független az alkalmazott paraméterezéstől.

Bár a definíció ésszerű elvárásokat fogalmaz meg, hiszen léteznek a kívánalmaknak megfelelő görbék, fontos annak észben tartása, hogy sokkal több olyan görbe létezik, amely nem rendelkezik határozott kauzális karakterrel. Ugyanakkor a metrikával kompatibilis kovariáns deriváló operátorra nézve önmagukkal párhuzamos görbék kauzális karaktere határozott. Ezen utóbbi állítás helyessége azonnal következik abból, hogy valamely affinparaméterezéshez tartozó  $T^a$  érintővektor önmagával vett  $T_e T^e$  belső szorzata bármely, önmagával párhuzamos  $\lambda$  görbe mentén állandó, hiszen a  $\nabla_a g_{bc} = 0$  relációt, valamint a Leibnitz-szabályt alkalmazva azonnal látható, hogy  $T^f \nabla_f (T_e T^e) = 2(T^f \nabla_f T^e)T_e$ . Így  $T^f \nabla_f (T_e T^e)$  valóban azonosan nulla minden affinparaméterezett  $T^f \nabla_f T^e = 0$  egyenletnek eleget tevő önmagával párhuzamos  $\lambda$  görbe mentén.

**8.2.4. Definíció.** Legyen most  $g_{ab}(-, +, \dots, +)$  szignatúrájú Lorentz-metrika  $M$ -en. Ekkor a  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  legalább  $C^1$ -osztályú időszerű, térszerű, illetve fényszerű görbe,  $t = \alpha$  és  $t = \beta$  paraméterértékek által meghatározott  $p = \lambda(\alpha)$  és  $q = \lambda(\beta)$  pontjai közé eső szakaszának ívhosszán az

$$\ell_{[p,q]} = \int_{\alpha}^{\beta} (\varepsilon \cdot g_{ef} T^e T^f)^{\frac{1}{2}} dt \quad (8.2.13)$$

integrál által meghatározott számot értjük, ahol az  $\varepsilon$  paraméter értéke  $-1$ ,  $+1$ , illetve nulla annak megfelelően, hogy a  $\lambda$  görbe időszerű, térszerű, illetve fényszerű.

**8.2.5. Definíció.** Az időszerű görbék ívhossz paraméterét, azaz azt a  $\tau = \tau(t)$

*függvényt, amelyet a*

$$\tau(t) = \tau(\alpha) + \int_{\alpha}^t \left( -g_{ef} T^e T^f \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (8.2.14)$$

*integrál határoz meg, a  $\lambda$  görbe sajátidő-paraméterének nevezzük, ahol a  $\tau(\alpha)$  valós szám jelenléte a kezdőpont szabad választásában lévő szabadságunkat jelzi.*

A sajátidő a  $\lambda$  görbe mentén „egységnormájú”  $T^a$  érintővektorral mozgó megfigyelő által a  $p = \lambda(\alpha)$  és  $q = \lambda(\beta)$  események között eltelt időt hivatott megjeleníteni, mely (8.2.13), a  $g_{ab} T^a T^b = -1$  egyenlet és a

$$\tau_{[p,q]} = \tau(\beta) - \tau(\alpha) = \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} d\tau \quad (8.2.15)$$

relációk folytán valóban az  $\ell_{[p,q]}$  ívhosszal egyezik meg.

### 8.3. Az ívhossz variációja

Ismert, hogy Riemann-geometriák körében az önmagukkal párhuzamos görbék egyben a legrövidebbek is bármely elegendően közeli pontpárjuk között. Mivel a Lorentz-metrikával ellátott differenciálható sokaságok felett minden görbe – az időszerű és térszerű görbék is – közelíthető tört fényszerű görbeívekből felépülő görbével, a Lorentz-szignatúrájú terekben nem a legrövidebb, hanem például – ahogy azt a második variáció meghatározása során meg is mutatjuk – az időszerű görbék esetében éppen a leghosszabb görbeívek vannak kitüntetve. A térszerű görbékkel kapcsolatban érdemes észben tartani, hogy a természetes várákozássoknak megfelelően, amennyiben egy előre adott térszerű hiperfelületen fekvő két pontot összekötő és kizárólag csak a térszerű hiperfelületben futó görbét vizsgáljuk, akkor köztük mindig lesz minimális ívhosszúságú feltéve, hogy a két kiválasztott pont elegendően közel esik egymáshoz.

Az előző bekezdésben megfogalmazott állítások helyességének alátámasztásául először a következő lemmát bizonyítjuk.

**8.3.1. Lemma.** *Legyen  $g_{ab}$  Riemann-, vagy  $(-, +, \dots, +)$  szignatúrájú Lorentz-metrika  $M$ -en. Ekkor az  $\ell_{[p,q]}$  ívhossz funkcionál pontosan akkor veszi fel a szélsőértékét a  $\lambda$  görbe mentén – melyről Lorentz-metrika esetén azt is feltesszük, hogy az nem fényszerű – ha  $\lambda$  önmagával párhuzamos.*

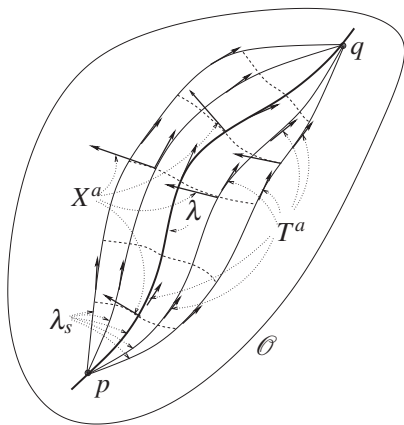
*Bizonyítás:* A bizonyítás az ívhossz első variációjának vizsgálata segítségével adható meg.

Hogyan kapjuk az ívhossz első variációját? Legyen  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  legalább  $C^1$ -osztályú görbe tetszőleges  $t$ -paraméterrel, valamint  $p = \lambda(\alpha)$  és  $q = \lambda(\beta)$  úgy, hogy  $\alpha < \beta$  valamint  $\alpha, \beta \in I$ . Legyen  $X^a$  olyan legalább  $C^1$ -osztályú vektormező  $\lambda$  valamely  $\mathcal{O}$  nyílt környezetében, mely eltűnik a  $p$  és  $q$  pontokban. Jelölje  $\chi_s : M \rightarrow M$  az  $X^a$  vektormezőhöz tartozó lokális egyparaméteres diffeomorfizmus-csoportot, és jelölje  $\lambda_s$  a  $\lambda$  görbe azon *egyparaméteres variációját*, amelyet a  $\lambda$  görbe  $\chi_s$  általi képhalmaza feszít ki [lásd a (8.2) ábrát], azaz

$$\lambda_s = \{\chi_s[\lambda] \mid s \in (-\delta, \delta)\}, \quad (8.3.16)$$

ahol  $\delta$  egy elegendően kicsiny pozitív valós szám. Ekkor minden rögzített  $\bar{s} \in (-\delta, \delta)$ -ra –  $\lambda$  és  $\lambda_{\bar{s}}$  pontjait az  $X^a$  integrálgörbéi mentén megfeleltetve egymásnak – a  $\lambda_{\bar{s}}$  görbe is paraméterezhető  $t$ -vel, amit ezentúl fel is teszünk. Jelöljük  $T^a$ -val a  $\lambda_s$  görbesereg ezen paraméterezéshez tartozó érintővektorai által meghatározott vektormezőt, valamint  $\phi_t$ -vel a  $T^a$ -hoz tartozó lokális egyparaméteres diffeomorfizmus-csoportot. A fenti konstrukció automatikusan biztosítja, hogy a  $\phi_t$  és  $\chi_s$  leképezések bármely rögzített  $t$  és  $s$  értékekre legyenek fölcserélhetők, azaz – a 7.1 alfejezetben alkalmazott érvelésnek megfelelően – a  $T^a$  és  $X^a$  vektormezők kommutálnak

$$[T, X]^a = T^e \nabla_e X^a - X^e \nabla_e T^a = 0. \quad (8.3.17)$$



8.2. ábra. Az ábrán a  $\lambda$  „alapgörbe”  $X^a$  vektormezőhöz tartozó  $\chi_s : M \rightarrow M$  lokális egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport által meghatározott egyparaméteres  $\lambda_s$  variációjának illusztrációja látható.

Tekintsük most az  $\ell_{[p,q]}$  ívhossz változását  $\lambda$  egy tetszőleges egyparaméteres  $\lambda_s$  variációja esetén, amelyet egy a fent leírt eljárásnak megfelelően kiválasztott  $X^a$  vektormező határoz meg. Ekkor az  $\ell_{[p,q]}(s)$  ívhosszak  $s$ -paraméter szerinti deriváltjára a

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_{[p,q]}(s)}{ds} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{ds} \left[ (\varepsilon \cdot g_{ef} T^e T^f)^{\frac{1}{2}} \right] dt = \int_{\alpha}^{\beta} X^d \nabla_d \left[ (\varepsilon \cdot g_{ef} T^e T^f)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon}{f} (X^d \nabla_d T^e) T_e dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\varepsilon f} (T^d \nabla_d X^e) T_e dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ T^d \nabla_d \left( \frac{X^e T_e}{\varepsilon f} \right) - X^e \left[ T^d \nabla_d \left( \frac{T_e}{\varepsilon f} \right) \right] \right\} dt \quad (8.3.18) \end{aligned}$$

egyenlet adódik, ahol – az egyszerűbb és tömörebb jelölés kedvéért –  $f$  az  $(\varepsilon \cdot g_{ef} T^e T^f)^{\frac{1}{2}}$  kifejezést helyettesíti,  $\nabla_a$  a metrikával kompatibilis kovariáns deriváló operátort jelöli, valamint a második sorban a (8.3.17) összefüggést, míg az utolsó sorban a Leibnitz-szabályt alkalmaztuk.

Mivel az utolsó sor első tagja  $t$ -ben teljes divergencia, továbbá az  $X^a$  vektormező konstrukciója folytán eltűnik a görbe végpontjaiban azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\ell_{[p,q]}(s)}{ds} = - \int_{\alpha}^{\beta} X^e \left[ T^d \nabla_d \left( \frac{T_e}{\varepsilon f} \right) \right] dt. \quad (8.3.19)$$

Ennek megfelelően  $\frac{d\ell_{[p,q]}(s)}{ds}|_{s=0}$  pontosan akkor nulla tetszőleges egyparaméteres variáció esetén, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés zérus értékű, azaz amikor  $\frac{T^d}{\varepsilon f} \nabla_d \left( \frac{T_e}{\varepsilon f} \right) = 0$ , ami (8.0.1) alapján éppen azzal ekvivalens, hogy a  $\lambda$  görbe önmagával párhuzamos.  $\square$

**8.3.1. Megjegyzés.** Ezen eredményre alapozottan, amikor a differenciálható sokaságunkon értelmezett konnexió metrikus, az önmagukkal párhuzamos görbékét geodetikus görbéknek szokás nevezni.

### 8.3.1. A Jacobi-egyenlet

Tekintsünk most a  $\lambda$  geodetikus görbe előző alfejezetben értelmezett olyan egyparaméteres variációját, ahol nemcsak  $\lambda$ -ról, de a  $\lambda_s = \{\chi_s[\lambda] \mid s \in (-\delta, \delta)\}$  görbecsaládhoz tartozó görbék mindegyikéről feltesszük, hogy azok affinparaméterezett geodetikus görbék, azaz  $T^a$  érintővektoruk eleget tesz a

$$T^e \nabla_e T^a = 0 \quad (8.3.20)$$

egyenletnek. Ennek az az ára, hogy a  $p$  pontból induló  $\lambda_s$  geodetikusokról most nem tehetjük fel azt, hogy azok bármely más pontban metszenék egymást. Az egyszerűség kedvéért elegendő ha a (8.2) ábrán a  $\lambda$  geodetikus görbe  $p$  pontjának egy nyílt környezetére gondolunk és feltesszük, hogy minden ábrázolt görbe geodetikus a  $t$  affinparaméterre nézve.

Mivel a  $\lambda_s$  geodetikuscsalád  $\lambda_s = \{\chi_s[\lambda] \mid s \in (-\delta, \delta)\}$  alakban adott az előző részben alkalmazott gondolatmenet alapján, az  $T^a$  és  $X^a$  vektormezőkre teljesül a (8.3.17) egyenletben megfogalmazott  $[T, X]^a = T^e \nabla_e X^a - X^e \nabla_e T^a = 0$  kommutációs reláció.

A  $\lambda$  geodetikus mentén az  $X^a$  vektormező tulajdonképpen a  $\lambda$ -hoz „infinitezimálisan” közel futó geodetikusok relatív távolságát, míg annak egyszeres

$$v^a = T^e \nabla_e X^a \quad (8.3.21)$$

illetve kétszeres

$$a^a = T^e \nabla_e (T^f \nabla_f X^a) = T^e \nabla_e v^a \quad (8.3.22)$$

görbementi deriváltja a  $\lambda_s$  geodetikussalád infinitezimálisan közel futó elemeinek  $\lambda$ -hoz viszonyított  $v^a$  relatív sebességét, illetve  $a^a$  relatív gyorsulását méri. Ennek a terminológiának használata különösen adekvát akkor, amikor a  $\lambda_s$  geodetikussalád elemei időszerű görbék.

Az

$$\begin{aligned} a^a &= T^e \nabla_e (T^f \nabla_f X^a) = T^e \nabla_e (X^f \nabla_f T^a) = \\ &= (T^e \nabla_e X^f) \nabla_f T^a + X^f T^e (\nabla_e \nabla_f T^a) = \\ &= (T^e \nabla_e X^f) \nabla_f T^a + X^f T^e (\nabla_f \nabla_e T^a - R_{efd}{}^a T^d) = \\ &= \cancel{X^e \nabla_e (T^f \nabla_f T^a)} - R_{efd}{}^a T^e X^f T^d = -R_{efd}{}^a T^e X^f T^d \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

összefüggés értelmében, melynek származtatásához a  $T^a$  és  $X^a$  vektormezők kommutálását, a Leibnitz-szabályt, a görbületi tenzor definícióját, valamint  $\lambda_s$  görbecsalád geodetikusságát használtuk fel, a geodetikus görbék menti relatív gyorsulás mértékét teljes egészében meghatározza a görbületi tenzor, valamint az  $T^a$  és  $X^a$  vektormezők  $R_{efd}{}^a T^e X^f T^d$  kontrakciója.

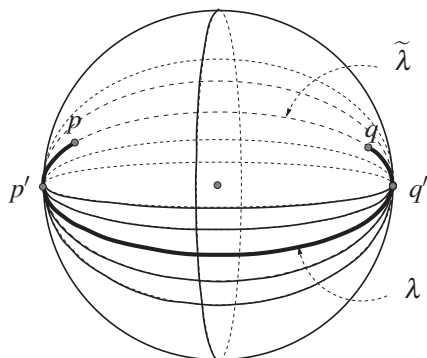
**8.3.2. Megjegyzés.** Az  $a^a = -R_{efd}{}^a T^e X^f T^d$  összefüggés értelmében a  $\lambda_s$  geodetikussalád  $\lambda$ -hoz viszonyított relatív gyorsulása pontosan akkor zérus, ha az  $R_{efd}{}^a T^e X^f T^d$  kontrakció eltűnik  $\lambda$  mentén. Amikor  $T^a$  időszerű vektormező, akkor a

$$R_{aebf} T^e T^f \quad (8.3.24)$$

kontrakciót a görbületi tenzor  $T^a$  négyessebességgel mozgó megfigyelőre vonatkozó árapály részének nevezzük.

### 8.3.2. Az ívhossz második variációja

Az 8.3.1. Lemma állítása értelmében az egymáshoz elegendően közeli pontok között az önmagukkal párhuzamos, azaz geodetikus görbék határozzák meg a leghosszabb, illetve a legrövidebb görbeszakaszokat. Az is ismert, hogy amennyiben valamely önmagával párhuzamos görbe mentén egymáshoz konjugált pontpárok találhatók, akkor – ahogy azt a (8.3) ábrán mutatott példa is illusztrálja – az adott görbe nem a leghosszabb, illetve a legrövidebb görbeszakaszokat határozza meg a konjugált pontpárnál nagyobb paraméter-távolságban lévő pontjai között. Az ábrán megjelenített lehetőség pontosabb



8.3. ábra. A kétdimenziós gömbön a főkörök, azaz a gömb középpontjára illeszkedő síkok, valamint a gömb metszetei geodetikus görbéket határoznak meg. A  $p$  és  $q$  pontok között a megvastagított  $\lambda$ -val jelölt főkörív-szakasz nem minimális ívhosszúságú, hiszen például az ugyanazon főköríven fekvő  $p'$  és  $q'$ , az átellenes pólusokban elhelyezkedő pontok konjugáltak egymáshoz  $\lambda$  mentén. Ugyanakkor a  $p$  és  $q$  pontokat a  $\tilde{\lambda}$ -mal jelölt szaggatott vonal mentén összekötő főkörív-szakasz minimális ívhosszúságú, mert az nem tartalmaz egymáshoz konjugált pontpárt.

mennyiségi leírása csak az ívhossz második variációjának figyelembevételével, az alábbiak szerint történhet meg.

Tegyük fel, hogy  $t$  tetszőleges paraméter a  $\lambda = \lambda_0$  geodetikus alapgörbe mentén. Határozzuk meg most (8.3.19)  $s$ -paraméter szerinti deriváltját, melynek

felhasználásával az  $\ell_{[p,q]}(s)$  ívhosszak  $s$ -paraméter szerinti második deriváltjára az  $s = 0$  helyen a

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \ell_{[p,q]}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} &= - \int_{\alpha}^{\beta} X^c \nabla_c \left[ X^e \left\{ T^d \nabla_d (T_e / \varepsilon f) \right\} \right] dt \\
 &= - \int_{\alpha}^{\beta} \left[ (X^c \nabla_c X^e) \left( T^d \nabla_d (T_e / \varepsilon f) \right) + X^c X^e \left\{ \nabla_c \left( T^d \nabla_d (T_e / \varepsilon f) \right) \right\} \right] dt \\
 &= - \int_{\alpha}^{\beta} X^e \left[ \left( X^c \nabla_c T^d \right) (\nabla_d (T_e / \varepsilon f)) + \right. \\
 &\quad \left. + X^c T^d \left\{ \nabla_d \nabla_c (T_e / \varepsilon f) + R_{cde}{}^h (T_h / \varepsilon f) \right\} \right] dt \\
 &= - \int_{\alpha}^{\beta} X^e \left[ \left( T^c \nabla_c X^d \right) (\nabla_d (T_e / \varepsilon f)) + T^d [\nabla_d (X^c \nabla_c (T_e / \varepsilon f))] \right. \\
 &\quad \left. - \left( T^d \nabla_d X^c \right) (\nabla_c (T_e / \varepsilon f)) + R_{cde}{}^h X^c T^d (T_h / \varepsilon f) \right] dt \\
 &= - \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} X_e \left[ T^d \nabla_d (X^c \nabla_c (T^e / f)) + R_{dch}{}^e T^d X^c (T^h / f) \right] dt \quad (8.3.25)
 \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk, ahol a második sorban egyrészt a  $\lambda$  alapgörbe önmagával párhuzamos voltát, azaz a  $T^d \nabla_d (T^e / \varepsilon f)$  kifejezés  $\lambda$  menti eltűnését, másrészt a görbületi tenzor definícióját alkalmaztuk, míg az utolsó előtti átalakításhoz a görbületi tenzor szimmetria tulajdonságainak felhasználására volt szükség.

Az előző egyenlet még nem alkalmas a kívánt következtetés származtatására. Mielőtt azt megtehetnénk, be kell vezetnünk a Jacobi-mezőket, valamint a konjugált pontpárok fogalmát.

**8.3.1. Definíció.** Legyen  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  legalább  $C^2$ -osztályú önmagával párhuzamos görbe, melynek a  $t$  affinparaméterezéshez tartozó érintővektora  $T^a$ . Ekkor a  $\lambda$  görbe mentén a

$$T^d \nabla_d (T^c \nabla_c Y^a) + R_{dch}{}^a T^d Y^c T^h = 0 \quad (8.3.26)$$

egyenletnek eleget tevő,  $T^a$ -ra merőleges  $Y^a$  vektormezőit a  $\lambda$  görbéhez tartozó Jacobi-mezőnek nevezzük.



Azt mondjuk, hogy a  $\lambda$  görbe  $p' = \lambda(\alpha')$  pontja  $\lambda$  mentén konjugált a  $t = \alpha$  paraméterértékhez tartozó  $p = \lambda(\alpha)$  ponthoz, ha létezik a (8.3.26) egyenletnek olyan, nem azonosan nulla megoldása, mely eltűnik mind a  $p$ , mind pedig a  $p'$  pontokban.

**8.3.3. Megjegyzés.** Az előző alfejezetben származtatott (8.3.23) összefüggés értelmében az  $X^a$  vektormező – mely tulajdonképpen a  $\lambda$ -hoz „infinitézimálisan” közel futó  $\lambda_s$  geodetikussaládhoz tartozó geodetikuskok  $\lambda$ -hoz viszonyított relatív távolságát méri – Jacobi-mező  $\lambda$  mentén. Így  $\lambda$  mentén a konjugált pontpárok létezése azt jelenti, van olyan  $p$ -ből induló, infinitézimálisan közeli geodetikusból álló görbecsalád, amelynek elemei újra metszik egymást a  $p'$  pont elegendően kicsiny környezetében.

Ezek után pontosan megfogalmazhatjuk és bizonyíthatjuk a geodetikus görbék ívhosszának „globális” minimalitására, illetve maximalitására vonatkozó korábbi állításainkat.

**8.3.1. Tétel.** Legyen  $g_{ab}$  Riemann-, illetve  $(-, +, \dots, +)$  szignatúrájú Lorentz-metrika  $M$ -en. Legyen továbbá  $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow M$  legalább  $C^2$ -osztályú önmagával párhuzamos – a Lorentz-szignatúrájú esetben kauzális, azaz időszerű vagy fényszerű – görbe ‘ $t$ ’ affinparaméterrel. Tegyük fel, hogy a  $\lambda$  görbe egyetlen pontja sem konjugált a  $p = \lambda(\alpha)$  ponthoz  $\lambda$  mentén. Ekkor a  $\lambda$  görbe a rajta fekvő bármely két pont között a legrövidebb, illetve a leghosszabb görbeívet határozza meg.

**Bizonyítás:** Az állítás helyességének belátásához tekintsük ismét az  $\ell_{[p,q]}$  ívhossz második variációjára kapott (8.3.25) összefüggést, melyet a tetszőleges  $X^a$  vektormező által meghatározott egyparaméteres  $\lambda_s$  variációt használva kapunk. Vegyük figyelembe azt, hogy a  $\lambda$  alapgörbe önmagával párhuzamos, továbbá affinparaméterezett, amiből  $\lambda$  mentén az  $f \cdot \varepsilon = \varepsilon$  és a  $T^e \nabla_e (\frac{1}{f \cdot \varepsilon}) = 0$  relációk következnek. Ekkor a (8.3.25) egyenletben szereplő integrandus első

tagjára azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 X_e \left[ T^d \nabla_d (X^c \nabla_c (T^e / f)) \right] &= \quad (8.3.27) \\
 &= T^d \nabla_d [X_e X^c \nabla_c (T^e / f)] - \left( T^d \nabla_d X_e \right) [(X^c \nabla_c T^e) / f - T^e (X^c \nabla_c f) / f^2] \\
 &= T^d \nabla_d [X_e X^c \nabla_c (T^e / f)] - \frac{1}{f} \left[ \left( T^d \nabla_d X_e \right) (T^c \nabla_c X^e) - \frac{\varepsilon}{f^2} (T^e (T^c \nabla_c X_e))^2 \right],
 \end{aligned}$$

amelynek származtatása során a korábban, a (8.3.18) egyenlet levezetésekor már alkalmazott  $X^c \nabla_c f = \frac{\varepsilon}{f} (X^c \nabla_c T^d) T_d$  összefüggést, valamint a  $T^a$  és  $X^a$  vektormezők kommutálását használtuk.

Legyenek most az  $Y_{(\rho)}^a$  vektormezők, ahol a  $\rho$  névindex az  $1, \dots, n-1$  értékeket veheti fel, olyan megoldásai a (8.3.26) Jacobi-egyenletnek, melyek eltűnnek  $p$ -ben, továbbá amelyekre a  $\{T^e \nabla_e Y_{(\rho)}^a|_p\}$  vektorrendszer lineárisan független, valamint az  $Y_{(\rho)}^a$  vektorok a  $\rho$  index tetszőleges választása esetén merőlegesek  $T^a$ -ra. Ekkor a  $\{Y_{(1)}^a, \dots, Y_{(n-1)}^a, T^a\}$  vektorrendszer a  $p$  ponttól eltekintve  $\lambda$  minden egyes pontjában egy bázist határoz meg, hiszen tételünk feltételei értelmében, egyik Jacobi-mező sem tűnhet el a  $\lambda$  alapgörbe mentén. Továbbá ha a  $\lambda$  görbe valamely  $p$ -től eltérő  $q'$  pontjában  $Y_{(\rho)}^a = c \cdot Y_{(\bar{\sigma})}^a$  teljesedne valamely  $c \neq 0$  valós szám és  $\bar{\rho} \neq \bar{\sigma}$  indexek választása esetén, akkor az  $Y^a = Y_{(\bar{\rho})}^a - c \cdot Y_{(\bar{\sigma})}^a$  vektormező, ami egyben Jacobi-mező is, eltűnne  $q'$ -ben, ami szintén ellentmondana tételünk feltevéseinek. Mindezeket felhasználva az egyparaméteres  $\lambda_s$  variációt meghatározó  $X^a$  vektormező mindig, az általánosság megszorítása nélkül, felírható az

$$X^a = \sum_{\rho=1}^{n-1} \phi_{(\rho)} Y_{(\rho)}^a + \phi T^a \quad (8.3.28)$$

alakban, ahol  $\phi_{(\rho)}$  és  $\phi$  megfelelően sima függvények a  $\chi_s[\lambda]$  kétdimenziós sokaságon, amelyek eltűnnek a  $p$  pontban, továbbá  $\phi$  értéke  $q$ -ban is zérus. Ekkor a görbületi tenzor szimmetriatulajdonságait, valamint a Jacobi-egyenletet

alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 \ell_{[p,q]}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = -\varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} X_e \left[ T^d \nabla_d (X^c \nabla_c T^e / f) - \sum_{\rho=1}^{n-1} \phi_{(\rho)} T^d \nabla_d (T^c \nabla_c Y_{(\rho)}^e) \right] dt. \quad (8.3.29)$$

Ezen utóbbi egyenlet, továbbá (8.3.27) figyelembevételével az adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ell_{[p,q]}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = & -\varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ T^d \nabla_d \left[ X_e (X^c \nabla_c T^e / f) - X_e \sum_{\rho=1}^{n-1} \phi_{(\rho)} (T^c \nabla_c Y_{(\rho)}^e) \right] \right. \\ & - \left[ (T^d \nabla_d X_e) (T^c \nabla_c X^e) - \varepsilon (T^e (T^c \nabla_c X_e))^2 - \right. \\ & \left. \left. - \sum_{\rho=1}^{n-1} (T^d \nabla_d (\phi_{(\rho)} X_e)) (T^c \nabla_c Y_{(\rho)}^e) \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

Az integrandus első tagja  $t$ -ben teljes divergencia, mely a végpontokban eltűnő  $X^a$  vektormezőtől lineárisan függ, így az első tag járuléka nulla. A második tag járulékának kiszámítása során  $X^a$  (8.3.28) szerinti felbontását alkalmazva egyszerű algebrai átalakítások elvégzése után (8.3.30) a

$$\frac{d^2 \ell_{[p,q]}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \sum_{\rho, \sigma=1}^{n-1} (\dot{\phi}_{(\rho)} Y_{a(\rho)}) (\dot{\phi}_{(\sigma)} Y_{(\sigma)}^a) \right\} dt \quad (8.3.31)$$

formában írható fel, ahol  $\dot{\phi}_{(\rho)}$  a  $T^d \nabla_d \phi_{(\rho)}$  kifejezés rövidítésére szolgál, továbbá kihasználtuk az  $Y_{(\rho)}^a$  Jacobi-mezők azon tulajdonságát, hogy azok a  $\rho$  index bármely értékére merőlegesek  $T^a$ -ra, hiszen (8.3.26)  $T_a$ -val vett kontrakciója, a görbületi tenzor tulajdonságai, valamint a  $T^d \nabla_d T^a = 0$  geodetikus egyenlet folytán  $T^d \nabla_d (T^c \nabla_c [Y_{(\rho)}^a T_a]) = 0$  mindenütt a  $\lambda$  görbe mentén. Mivel ennek a közönséges differenciálegyenletnek az  $Y_{(\rho)}^a|_p = 0$ , valamint  $(T^c \nabla_c Y_{(\rho)}^a) T_a|_p = 0$  kezdőfeltételek mellett csak triviális megoldása van, az  $Y_{(\rho)}^a T_a$  kontrakció azo-

nosan nulla a  $\lambda$  görbe mentén.<sup>2</sup> Mindezen megállapítások legfontosabb következménye az, hogy a  $\lambda$  görbe mentén a  $\sum_{\rho, \sigma=1}^{n-1} (\dot{\phi}_{(\rho)} Y_{a(\rho)}) (\dot{\phi}_{(\sigma)} Y_{(\sigma)}^a)$  kontrakció mind Riemann-féle, mind pedig Lorentz-szignatúrájú metrikák esetén – feltevé, hogy  $\lambda$  időszerű vagy fényszerű<sup>3</sup> – nem negatív, ami (8.3.31) egyenlet, valamint az  $\varepsilon$  paraméter lehetséges értékeinek figyelembevételével igazolja a tételünk állítását.  $\square$

---

<sup>2</sup>Bár ez a jelen bizonyítás szempontjából nem fontos, ekkor a  $(T^c \nabla_c Y_{(\rho)}^a) T_a$  kontrakció is azonosan nulla  $\lambda$  mentén.

<sup>3</sup>Amennyiben a Lorentz-szignatúrájú esetben a  $\lambda$  görbe térszerű, akkor csak az esetlegesen fellépő időszerű Jacobi-mező kizárása esetén lehet  $\sum_{\rho, \sigma=1}^{n-1} (\dot{\phi}_{(\rho)} Y_{a(\rho)}) (\dot{\phi}_{(\sigma)} Y_{(\sigma)}^a)$  kifejezés nem negatív voltát biztosítani. Ezt elérhetjük például úgy, hogy a térszerű görbének csak valamely térszerű hiperfelületeken belüli variációit engedjük meg.

## 9. fejezet

# Tenzorok előretolása és visszahúzása

**9.0.2. Definíció.** Legyen  $M$  egy  $m$ -dimenziós  $N$  pedig egy  $n$ -dimenziós  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaság úgy, hogy  $m \leq n$ . Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\phi : M \rightarrow N$  leképezés az  $M$  sokaság  $C^r$ -osztályú beágyazása  $N$ -be, ha a  $\phi$  leképezés kölcsönösen egyértelmű  $M$  és  $\phi[M] \subset N$  között.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy  $\phi$  segítségével  $M$  felsőindexes tenzorait előretolhatjuk  $\phi[M] \subset N$ -re, míg a  $\phi[M] \subset N$ -en értelmezett alsóindexes tenzorokat visszahúzzhatjuk  $M$ -re.

Ennek belátásához tekintsünk először egy tetszőleges  $N$ -en értelmezett  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt. Az  $f$  függvény  $M$ -re történő visszahúzottján az  $f \circ \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt értjük.

Legyen most  $p \in M$ , továbbá  $v^a \in \mathcal{T}(p)$  tetszőleges. Ekkor a  $v^a$  vektorhoz a  $\phi$  leképezést felhasználva egyértelmű módon hozzárendelhetjük azt a  $(\phi_* v)^a$ -val jelölt vektort a  $\phi(p) \in N$  pontbeli  $\mathcal{T}(\phi(p))$  érintőtérből, amelyet azáltal definiálunk, hogy megköveteljük, hogy a

$$(\phi_* v)f|_{\phi(p)} = v(f \circ \phi)|_p \quad (9.0.1)$$

reláció teljesüljön tetszőleges  $N$ -en értelmezett  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre.

Nyilvánvaló, hogy ez az eljárás minden  $p \in M$  pont esetén a  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér tetszőlegesen választott elemére értelmezett, másrészt a hozzárendelési eljárás egyenes következménye az, hogy az így definiált  $\phi_* : \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathcal{T}(\phi(p))$  leképezés lineáris a  $p \in M$  pontbeli  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér, valamint a  $\phi(p) \in N$  pontbeli  $\mathcal{T}(\phi(p))$  érintőtér között. Ezt a  $\phi_*$  leképezést a  $\phi : M \rightarrow N$  leképezés *derivált leképezéseként* is szokták emlegetni.

Az utóbbi elnevezés jogossága az alábbi meggondolásokból következik. Legyenek  $(x^1, \dots, x^m)$ , illetve  $(y^1, \dots, y^n)$  lokális koordináták a  $p \in M$ , illetve  $\phi(p) \in N$  pont valamely környezetében. Ekkor a  $\phi$  leképezést lokálisan az  $y^v = y^v(x^\mu)$  relációval adhatjuk meg, és így

$$f \circ \phi = f(y^v(x^\mu)). \quad (9.0.2)$$

Emiatt a  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , illetve  $\frac{\partial}{\partial y^v}$  koordináta-bázisvektoroknak az  $f \circ \phi$ , illetve az  $f$  függvényeken kifejtett hatását a

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \phi) = \frac{\partial f}{\partial y^v} \frac{\partial y^v}{\partial x^\mu} \quad (9.0.3)$$

alakban írhatjuk fel, amiből a  $\phi_*$  leképezés mátrixára a

$$(\phi_*)^v_{\mu} = \frac{\partial y^v}{\partial x^\mu} \quad (9.0.4)$$

összefüggést kapjuk.

A  $\phi : M \rightarrow N$  leképezés segítségével, a fentiekkel teljesen analóg módon, bármely  $p \in M$  pont esetén értelmezhetjük az  $N$ -beli duális vektorok visszahúzását eredményező  $\phi^* : \mathcal{T}^*(\phi(p)) \rightarrow \mathcal{T}^*(p)$  lineáris leképezést is. A  $\phi^*$  leképezést úgy értelmezzük, hogy az egy tetszőleges  $\omega_a \in \mathcal{T}^*(\phi(p))$  duális vektorhoz azt a  $(\phi^* \omega)_a \in \mathcal{T}^*(p)$  duális vektort rendelje, amelyre a

$$(\phi^* \omega)_a v^a|_p = \omega_a (\phi_* v)^a|_{\phi(p)} \quad (9.0.5)$$

egyenlőség teljesül tetszőleges  $v^a$   $p \in M$  pontbeli vektor választása esetén. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált  $\phi^*$  leképezéshez tartozó mátrix az  $(x^1, \dots, x^m)$ , illetve  $(y^1, \dots, y^n)$  lokális koordináták esetén éppen

$$(\phi^*)^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (9.0.6)$$

Az imént definiált  $\phi^*$  leképezés értelemszerűen kiterjeszthető úgy, hogy az tetszőleges  $\phi[M] \subset N$ -beli  $(0, l)$ -típusú tenzorokat  $M$ -beli  $(0, l)$ -típusú tenzorokra „húz vissza”, azaz definiálható az a  $\phi^* : \mathcal{T}_l^0(\phi(p)) \rightarrow \mathcal{T}_l^0(p)$  lineáris leképezés, amely egy tetszőleges  $T_{a_1 \dots a_l} \in \mathcal{T}_l^0(\phi(p))$  tenzorhoz azt a  $(\phi^* T)_{a_1 \dots a_l} \in \mathcal{T}_l^0(p)$  tenzort rendeli, amelyre a

$$(\phi^* T)_{a_1 \dots a_l} v_{(1)}^{a_1} \dots v_{(l)}^{a_l} |_p = T_{a_1 \dots a_l} (\phi_* v_{(1)})^{a_1} \dots (\phi_* v_{(l)})^{a_l} |_{\phi(p)} \quad (9.0.7)$$

egyenlőség teljesül tetszőleges  $v_{(1)}^a, \dots, v_{(l)}^a \in \mathcal{T}(p)$  választás esetén.

Ezzel az eljárással teljesen analóg módon kiterjeszthetjük a korábban értelmezett  $\phi_* : \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)}$  leképezést is, azaz az  $M$ -beli  $(k, 0)$ -típusú tenzorokat a  $\phi[M] \subset N$ -beli  $(k, 0)$ -típusú tenzorokba „áttol”,  $\phi_* : \mathcal{T}_0^k(p) \rightarrow \mathcal{T}_0^k(\phi(p))$  lineáris leképezést, amely egy tetszőleges  $T^{a_1 \dots a_k} \in \mathcal{T}_0^k(p)$  tenzorhoz azt a  $(\phi_* T)^{a_1 \dots a_k} \in \mathcal{T}_0^k(\phi(p))$  tenzort rendeli, amelyre a

$$(\phi_* T)^{a_1 \dots a_k} \omega_{a_1}^{(1)} \dots \omega_{a_k}^{(k)} |_{\phi(p)} = T^{a_1 \dots a_k} (\phi^* \omega^{(1)})_{a_1} \dots (\phi^* \omega^{(k)})_{a_k} |_p \quad (9.0.8)$$

egyenlőség teljesül bármely  $\omega_a^{(1)}, \dots, \omega_a^{(k)} \in \mathcal{T}^*(\phi(p))$  választás esetén.

Amint azt az imént megmutattuk, a  $\phi : M \rightarrow N$  differenciálható leképezés segítségével értelmezett  $\phi_*$ , illetve  $\phi^*$  leképezésekkel  $(k, 0)$ -típusú tenzorokat tudunk előretolni  $M$ -ről  $\phi[M] \subset N$ -re, illetve  $(0, l)$ -típusú tenzorokat tudunk visszahúzni  $\phi[M] \subset N$ -ről  $M$ -re. Fontos azonban észben tartani, hogy általában sem  $\phi_*$ , sem pedig  $\phi^*$  nem terjeszthető ki a vegyes típusú tenzorokra.

Abban az esetben, amikor  $M$  és  $N$  ugyanolyan dimenziójúak, továbbá  $\phi : M \rightarrow N$  nemcsak  $C^r$ -osztályú, hanem egy  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus is – ekkor

a  $\phi$  leképezés kölcsönösen egyértelmű, így létezik az inverze, továbbá a  $\phi^{-1}$  inverz maga is  $C^r$ -osztályú – akkor a  $\phi$  segítségével definiált  $\phi^*$  leképezés hatása tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzorokra értelmezhető. Ekkor, például  $(\phi^{-1})^*$  segítségével, az  $N$ -en értelmezett vektorokat is vissza tudjuk húzni  $M$ -re, de valójában ennél több igaz.

**9.0.3. Definíció.** Legyen a  $\phi : M \rightarrow N$  leképezés  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus  $M$  és  $N = \phi[M]$  között. Jelölje  $\phi^* : \mathcal{T}_l^k(\phi(p)) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(p)$  azt a leképezést, amely a  $p$  pont tetszőleges választása esetén valamely  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l^k(\phi(p))$  tenzorhoz azt a  $(\phi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l^k(p)$  tenzort rendeli, amelyre a

$$\begin{aligned} (\phi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\phi^* \omega^{(1)})_{a_1} \dots (\phi^* \omega^{(k)})_{a_k} ((\phi^{-1})^* v_{(1)})^{b_1} \dots ((\phi^{-1})^* v_{(l)})^{b_l} |_p = \\ = T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_l} \omega_{a_1}^{(1)} \dots \omega_{a_k}^{(k)} v_{(1)}^{b_1} \dots v_{(l)}^{b_l} |_{\phi(p)} \end{aligned} \quad (9.0.9)$$

egyenlőség teljesül tetszőleges  $\omega_a^{(1)}, \dots, \omega_a^{(k)} \in \mathcal{T}^*(\phi(p))$ , valamint  $v_{(1)}^a, \dots, v_{(l)}^a \in \mathcal{T}(\phi(p))$  választás esetén.

Az így definiált  $\phi^*$  leképezés egy lineáris kapcsolatot létesít az  $N$ , illetve  $M$  sokaság egymásnak megfelelő pontjai felett értelmezett vegyes típusú tenzorok között.<sup>1</sup>

Diffeomorfizmusok esetén az imént ismertetett eljárással teljesen analóg módon, a  $\phi_* : \mathcal{T}(p) \rightarrow \mathcal{T}(\phi(p))$  leképezés is kiterjeszthető tetszőleges vegyes, azaz  $(k, l)$ -típusú tenzormezőkre. Azonban megmutatható, hogy az így definiált  $\phi_*$  leképezés nem más mint  $(\phi^{-1})^*$ , így a továbbiakban az általánosság elvesztése nélkül szorítkozhatunk a  $\phi^*$  használatára.

A  $\phi^*$  leképezés hatásának teljesebb megértése érdekében alkalmazzuk most a (9.0.9) egyenletet valamely a  $\phi(p)$  pont környezetében értelmezett  $(y^1, \dots, y^n)$

---

<sup>1</sup>Emlékezzünk arra, hogy bármely tenzor – ahogy azt a 3. alfejezetben megfogalmaztuk – egyszerűen egy multilineáris leképezés az alap érintőtérnek és duálisának megfelelő számú kópiájából képzett Descartes szorzatból a valós számok halmazába. Így egy tenzor akkor ismert, ha hatása ezen szorzattér tetszőlegesen választott eleme esetén ismert. Ebben az értelemben a (9.0.9) egyenlet egyértelműen meghatározza a  $(\phi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzort.



lokális koordinátákhoz tartozó  $\{(\partial/\partial y^\alpha)^a\}$  bázis  $\{(dy^\alpha)_a\}$  duális bázispárjának elemeire. Konkrétan legyenek most  $\omega_a^{(1)} = (dy^{\alpha_1})_a, \dots, \omega_a^{(k)} = (dy^{\alpha_k})_a$ , valamint  $v_{(1)}^a = (\partial/\partial y^{\beta_1})^a, \dots, v_{(l)}^a = (\partial/\partial y^{\beta_l})^a$  a koordináta névindexek valamely  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  és  $\beta_1, \dots, \beta_l$  választása esetén. Ekkor (9.0.9) jobb oldala éppen a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}^k_l(\phi(p))$  tenzor  $\{(\partial/\partial y^\alpha)^a\}$  és  $\{(dy^\alpha)_a\}$  duális bázispárjához tartozó komponenseivel egyezik meg, azaz

$$T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_l} \omega_{a_1}^{(1)} \dots \omega_{a_k}^{(k)} v_{(1)}^{b_1} \dots v_{(l)}^{b_l} |_{\phi(p)} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} |_{y(\phi(p))}. \quad (9.0.10)$$

Kihasználva ezek után azt, hogy a  $\phi^*$ , valamint  $(\phi^{-1})^*$  leképezések mátrixaira a  $[\phi^*]^\nu_\mu = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\right)$ , valamint  $[(\phi^{-1})^*]^\mu_\nu = \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right)$  relációk teljesülnek – ahol  $(x^1, \dots, x^n)$  a  $p \in M$  pont környezetében az  $x^\mu(p) = y^\mu(\phi(p))$  relációk által értelmezett lokális koordinátákat jelöli – a  $(\phi^* \omega^{(i)})_{a_i} \in \mathcal{T}^*(p)$  és a  $((\phi^{-1})^* v_{(j)})^{b_j} \in \mathcal{T}(p)$  vektorokat a

$$(\phi^* \omega^{(i)})_{a_i} = (\phi^*(dy^{V_i}))_{a_i} = ([\phi^*]^{V_i}_\mu (dy^\mu))_{a_i} = (dx^{V_i})_{a_i} \quad (9.0.11)$$

és a

$$((\phi^{-1})^* v_{(j)})^{b_j} = (\partial/\partial y^{\mu_j})^{b_j} = ([(\phi^{-1})^*]^\mu_{\nu} (\partial/\partial y^\nu))^{b_j} = (\partial/\partial x^{\mu_j})^{b_j} \quad (9.0.12)$$

alakban írhatjuk fel. Ezek után a (9.0.9), (9.0.10), (9.0.11) és (9.0.12) egyenleteket figyelembe véve kapjuk az alábbi lemmát.

### 9.0.2. Lemma.

$$(\phi^* T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} |_{x(p)} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} |_{y(\phi(p))}, \quad (9.0.13)$$

azaz a  $\phi(p)$  pontban értelmezett  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzorhoz a  $\phi^*$  leképezés a  $p$  pontban értelmezett azon  $(\phi^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzort rendeli, amelynek a  $p \in M$  pont környezetében az  $x^\mu(p) = y^\mu(\phi(p))$  relációk által értelmezett  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákra vonatkozó komponensei megegyeznek  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ -nek a  $\phi(p)$  pont környezetében értelmezett  $(y^1, \dots, y^n)$  lokális koordinátákra vonatkozó komponenseivel.

Ezek után a kontrakcióképzésre, illetve a tenzori szorzatra vonatkozó 3.1.1 és 3.2.1 definíciók felidézése révén viszonylag könnyen megoldhatók az alábbi feladatok is.

**9.0.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy  $\phi^*$  felcserélhető a kontrakcióképzéssel.*

**9.0.2. Feladat.** *Legyenek  $T$ , illetve  $S$  tetszőleges  $(k, l)$ -, illetve  $(k', l')$ -típusú tenzorok a  $\phi(p) \in N$  ponthoz tartozó  $\mathcal{T}(\phi(p))$  érintőtér fölött. Mutassuk meg, hogy ekkor  $\phi^*(T \otimes S) = \phi^*T \otimes \phi^*S$  teljesül  $p \in M$ -ben.*

Befejezésül felidézzük a szimmetriatranszformációk fogalmát.

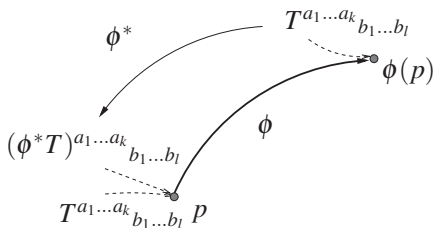
**9.0.4. Definíció.** *Legyen  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$   $(k, l)$ -típusú tenzormező az  $M$  differenciálható sokaságon, valamint legyen  $\phi : M \rightarrow M$  egy  $C^r$ -osztályú diffeomorfizmusa  $M$ -nek önmagára. Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\phi : M \rightarrow M$  leképezés a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzormezőre nézve szimmetriatranszformációt határoz meg, ha  $(\phi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ , azaz bármely  $p \in M$ -re a  $(\phi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}|_p = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}|_p$  egyenlőség teljesül (lásd a (9.1) ábrát).*

**9.0.5. Definíció.** *A metrikát invariánsan hagyó szimmetriatranszformációt izometriatranszformációnak nevezzük.*

## 9.1. A metrika globális létezése

Amint arra már többször utaltunk, többféle matematikai struktúra létezésének, így a metrika globális létezésének is az a feltétele, hogy az alapsokaság parakompakt legyen.

Először idézzük fel, hogy valamely összefüggő Hausdorff-féle  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaság pontosan akkor parakompakt, ha található hozzá egy megszámlálható lokálisan véges  $C^r$ -osztályú  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlasz.



9.1. ábra. A  $\phi : M \rightarrow M$  leképezés segítségével a  $\phi^* T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ , valamint a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzorok bármely  $p \in M$  pontban összehasonlíthatók.

Megmutatható – lásd [21] Appendixének harmadik fejezetét – hogy ez az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$  atlasz mindig megválasztható úgy is, hogy az  $\mathcal{O}_{(i)}$  alaphalmazok legyenek lokálisan kompaktak, azaz azok  $\overline{\mathcal{O}_{(i)}}$  lezártjai legyenek kompakt részhalmazai  $M$ -nek. [21]-ben annak bizonyítása is megtalálható, hogy bármely  $C^r$ -osztályú parakompakt differenciálható sokasághoz található  $C^r$ -osztályú egységfelbontás.

**9.1.1. Definíció.** Legyen  $M$  egy  $C^r$ -osztályú parakompakt differenciálható sokaság az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$  megszámlálható, lokálisan véges atlaszra nézve. Ekkor a  $C^r$ -osztályú  $\{f_{(i)} : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  valós függvények halmazát az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$  atlaszhoz tartozó egységfelbontásnak nevezzük, ha az alábbi három feltétel teljesül:

- (1) Az  $f_{(i)}$  függvények nulla és egy közötti értékeket vesznek fel, azaz bármely  $i \in \mathbb{N}$ -re

$$0 \leq f_{(i)} \leq 1. \quad (9.1.14)$$

- (2) Az  $f_{(i)}$  függvény tartójának lezártja mindig része az azonos „ $i$ ” indexű  $\mathcal{O}_{(i)} \subset M$  nyílt halmaznak, azaz  $\overline{\{p \in M \mid f_{(i)}(p) \neq 0\}} \subset \mathcal{O}_{(i)}$  bármely  $i$ -re.

(3) Az  $f_{(i)}$  függvények összege bármely  $p \in M$  pontban egy<sup>2</sup>, azaz tetszőleges  $p \in M$ -re

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{(i)}(p) = 1. \quad (9.1.15)$$

Az egységfelbontás létezését kihasználva most megmutatjuk, hogy parakompakt sokaságokon mindig létezik metrika.

**9.1.1. Lemma.** *Legyen  $M$   $C^r$ -osztályú parakompakt differenciálható sokaság. Ekkor  $M$ -en létezik (globális)  $C^{r-1}$ -osztályú Riemann-metrika.*

*Bizonyítás:* Az állítás helyességének belátásához tekintsük  $M$  egy megszámlálható, lokálisan véges  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlaszát, valamint tegyük fel, hogy  $\{f_{(i)}\}$  egy ehhez tartozó egységfelbontás. Tekintsük most külön-külön az  $\mathcal{O}_{(i)}$  alaphalmazokon azokat a  $(0, 2)$ -típusú szimmetrikus  $C^{r-1}$ -osztályú  $(\psi_{(i)}^* \langle, \rangle)_{ab}$  tenzormezőket, amelyeket az  $\mathbb{R}^n$ -nel koordinátázott  $n$ -dimenziós  $\mathbb{R}^n$  Euklideszi tér  $\psi_{(i)}[\mathcal{O}_{(i)}]$  részalmazain értelmezett természetes  $\langle, \rangle_{ab}$  Riemann-metrikának a  $C^{r-1}$ -osztályú  $\psi_{(i)}^*$  leképezések általi visszahúzása határozza meg. Mivel az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlasz lokálisan véges, az  $(\psi_{(i)}^* \langle, \rangle)_{ab}$  tenzormezők  $f_{(i)}$  függvényekkel súlyozott, minden pontban véges

$$g_{ab} = \sum_i f_{(i)} \cdot (\psi_{(i)}^* \langle, \rangle)_{ab} \quad (9.1.16)$$

összege jól definiált. Az így kapott  $g_{ab}$  egy  $(0, 2)$ -típusú szimmetrikus  $C^{r-1}$ -osztályú nemdegenerált tenzormezőt határoz meg az alapsokaságon, azaz  $g_{ab}$  valóban egy  $C^{r-1}$ -osztályú Riemann-metrika  $M$ -en.  $\square$

**9.1.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (9.1.16) egyenlet által definiált  $(0, 2)$ -típusú szimmetrikus tenzormező valóban nemdegenerált.*

---

<sup>2</sup>Mivel a  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlasz lokálisan véges bármely  $p \in M$  pontban a  $\sum_{i=1}^{\infty} f_{(i)}(p) = 1$  összegben mindig csak véges sok nem zérus elem szerepel.

**9.1.1. Megjegyzés.** Nyilvánvaló, hogy a (9.1.16) összefüggéssel meghatározott metrika függ az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$  atlasz, valamint az egységfelbontás megválasztásától. Így mindig többféle Riemann-metrika is megadható  $M$ -en.

Érdeemes azt is megvizsgálni, hogy valamely  $C^r$ -osztályú, parakompakt  $M$  differenciálható sokaságon milyen feltételek mellett adható meg egy  $C^{r-1}$ -osztályú Lorentz-szignatúrájú metrika.

Legyen  $\widehat{g}_{ab}$  egy  $C^{r-1}$ -osztályú Riemann-metrika  $M$ -en.<sup>3</sup> Tegyük fel továbbá, hogy  $M$ -en megadható egy sehol el nem tűnő legalább  $C^{r-1}$ -osztályú  $v^a$  vektormező. Belátható, hogy a  $v^a$  vektormező, a  $\widehat{g}_{ab}$  Riemann-metrika, valamint a

$$g_{ab} = \widehat{g}_{ab} - 2 \frac{\widehat{g}_{ae} v^e \widehat{g}_{bf} v^f}{\widehat{g}_{ij} v^i v^j} \quad (9.1.17)$$

összefüggés segítségével meghatározott  $(0, 2)$ -típusú szimmetrikus tenzormező nemdegenerált, azaz egy  $C^{r-1}$ -osztályú metrikát határoz meg  $M$ -en.<sup>4</sup>

**9.1.2. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az (9.1.17) egyenlet által meghatározott  $g_{ab}$  metrika Lorentz-féle, azaz szignatúrája valóban  $(-, +, \dots, +)$ , továbbá hogy a  $v^a$  vektormező időszerű a  $g_{ab}$  metrikára nézve.

Belátható, hogy bármely  $C^r$ -osztályú parakompakt (de nemkompakt) differenciálható sokaságon megadható egy sehol el nem tűnő  $C^{r-1}$ -osztályú vektormező. Kompakt differenciálható sokaságokon ez pontosan akkor tehető meg, ha a sokaság Euler-invariánsa eltűnik. Például egy kétdimenziós tórusz topológiájú sokaságon mindig megadható, míg egy kétdimenziós gömbi topológiával rendelkező felületen nem adható meg egy sehol el nem tűnő a felületet érintő

<sup>3</sup> Amint azt láttuk, ebből is mindig többféle létezhet.

<sup>4</sup> A (9.1.17) összefüggés által meghatározott metrika változatlan marad, ha a  $v^a$  vektormező helyett a  $-v^a$  vektormezőt használjuk. Így minden  $C^r$ -osztályú, parakompakt  $M$  differenciálható sokaságon a (9.1.17) összefüggés akkor is egy  $C^{r-1}$ -osztályú Lorentz-szignatúrájú metrikát határoz meg  $M$ -en, ha rajta csak egy  $\pm v^a$ -vel jelölt határozatlan előjelű sehol el nem tűnő  $C^{r-1}$ -osztályú vonalelemmező adható meg [25].

vektormező. Mielőtt azonban kedvünket szegné ez a korlátozás, érdemes megjegyezni, hogy minden kompakt alapsokaságú téridőben sérül a kauzalitás. Pontosabban fogalmazva megmutatható – lásd például [27] 4.33-as állítását – hogy egy kompakt alapsokaságú téridő tetszőleges pontján keresztül fut zárt időszerű görbe. Ennél fogva a kompakt alapsokaságú téridőkre – melyek az említett kauzalitás-sértések folytán megfigyeléseinkkel össze nem egyeztetethetők – úgy tekintünk mint fizikailag nem adekvátakra és így – ugyancsak filozófiai megfontolásokra hivatkozva – általában ki is zárjuk őket a vizsgálatainkból.

A fenti megállapítások értelmében bármely parakompakt (de nemkompakt) differenciálható sokaság felett létezik globális értelemben is jól definiált metrika. Mivel sem a  $\hat{g}_{ab}$  Riemann-féle metrika, sem pedig a  $v^a$  vektormező nem egyértelmű, a (9.1.17) reláció által meghatározott Lorentz-szignatúrájú metrika sem az.

A kovariáns deriválás műveletének globális értelmezhetőségét vizsgálva megmutattuk, hogy valamely  $M$  differenciálható sokaságon mindig értelmezhető globálisan jóldefiniált kovariáns deriváló operátor, ha azon globális metrikus struktúra adható meg. A fenti megállapításaink értelmében egy parakompakt sokaságon mindig létezik globálisan jól meghatározott metrika és így kovariáns deriváló operátor is.

## 10. fejezet

# Lie-derivált

Legyen  $M$  tetszőleges  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaság,  $v^a$  pedig egy  $M$ -en értelmezett differenciálható vektormező, valamint  $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow M$  a  $v^a$ -hoz tartozó lokális egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport. Ekkor minden rögzített  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  értékre, a (9) alfejezetben ismertetett konstrukciónak megfelelően, bármely  $p \in M$  pont választása esetén értelmezhetők a  $\phi_t^* : \mathcal{T}_l(\phi_t(p)) \rightarrow \mathcal{T}_l(p)$  leképezések, melyek felhasználásával összehasonlíthatók a  $\phi_t(p)$  pontból  $p$ -be visszahúzott  $(\phi_t^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l(p)$ , valamint a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l(p)$  tenzorok (lásd a (9.1) ábrát). Ezeket felhasználva a Lie-deriváltat az alábbiak szerint értelmezhetjük.

**10.0.2. Definíció.** Legyen  $v^a$  differenciálható vektormező  $M$ -en. Ekkor a  $v^a$  vektormező menti Lie-deriválton azt a  $C^m$ -osztályú ( $m \leq r$ )  $(k, l)$ -típusú tenzormezők teréből a  $C^{m-1}$ -osztályú  $(k, l)$ -típusú tenzormezők terébe vivő  $\mathcal{L}_v : \mathcal{T}_l^k(M) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$  leképezést értjük, amely a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l^k(M)$  tenzormezőhöz az

$$\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\phi_t^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}{t} \right] \quad (10.0.1)$$

relációval értelmezett tenzormezőt rendeli.

### 10.1. A Lie-derivált tulajdonságai:

- (1) Az  $\mathcal{L}_v : \mathcal{T}_l^k(M) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$  leképezés lineáris, hiszen a  $\phi_t^* : \mathcal{T}_l^k(\phi_t(p)) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(p)$  leképezések tetszőleges  $p \in M$  pont és  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  érték választása esetén lineárisak.
- (2)  $\mathcal{L}_v$  tiszteletben tartja a Leibnitz-szabályt, hiszen bármely  $(k, l)$ -típusú  $T$ , illetve  $(k', l')$ -típusú  $S$  tenzormező esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(T \otimes S) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\phi_t^*(T \otimes S) - T \otimes S}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\phi_t^*T) \otimes (\phi_t^*S) - T \otimes S}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{[(\phi_t^*T) \otimes (\phi_t^*S) - T \otimes (\phi_t^*S)] + [T \otimes (\phi_t^*S) - T \otimes S]}{t} \right] \\ &= (\mathcal{L}_v T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_v S), \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

ahol a második lépésben a  $\phi_t^*$  leképezés (9.0.2) feladatban megfogalmazott tulajdonságát használtuk fel.

- (3)  $\mathcal{L}_v$  kommutál a kontrakció képzéssel, hiszen a (9.0.1) feladatban megfogalmazott állítás értelmében a  $\phi_t^* : \mathcal{T}_l^k(\phi_t(p)) \rightarrow \mathcal{T}_l^k(p)$  leképezések tetszőleges  $p \in M$  pont és  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  érték választása esetén kommutálnak vele.
- (4) A (10.0.1) definíciót követve bármely  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre is értelmezhető a  $\mathcal{L}_v$  Lie-deriválás, mely a  $\phi^* f = f \circ \phi$  hozzárendelési szabály értelmében, a  $v^a$  vektormező menti iránymenti deriválás 2.1.1 definíciójával szinkronban az

$$\mathcal{L}_v f = v(f) = v^e \nabla_e f \quad (10.1.3)$$

formában adható meg.

A fenti definíció alapján az is könnyen belátható, hogy a  $v^a$  vektormezőhöz tartozó  $\phi_t : M \rightarrow M$  leképezések pontosan akkor lehetnek bármely  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

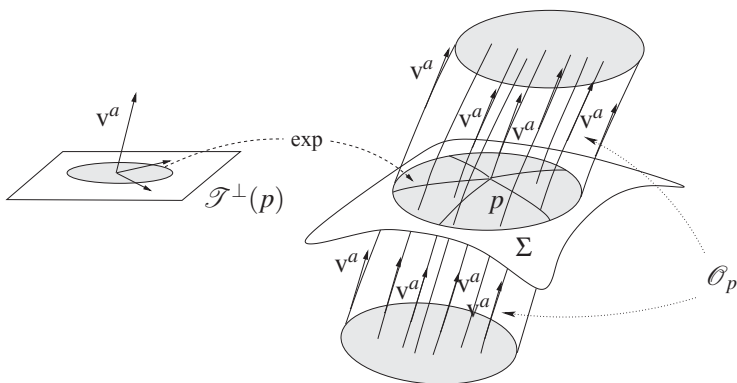


értékre egy  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}^k_l(M)$  tenzormezőre nézve szimmetriatranszformációk, ha az  $\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  Lie-derivált azonosan zérus  $M$ -en.

## 10.2. Illeszkedő koordináták

Ahhoz, hogy a  $v^a$  vektormező menti Lie-derivált hatását meghatározhassuk, célszerű a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordináta-rendszer fogalmát bevezetnünk.

Egy, a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordináta-rendszert úgy készítünk el (lásd a 10.1 ábrát), hogy valamely  $p \in M$  pont egy  $\mathcal{O}_p$  nyílt környezetében felveszünk egy tetszőleges  $\Sigma$  hiperfelület-darabot úgy, hogy a  $v^a$ -hoz tartozó integrálgörbék sehol sem érintsék  $\Sigma$ -t.<sup>1</sup> Legyenek  $(x^2, \dots, x^n)$  tetszőleges koor-



10.1. ábra. A  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordináta-rendszer elkészítésének illusztrációja.

dináták az  $(n - 1)$ -dimenziós  $\Sigma$  hiperfelületen. Ezen koordinátákat, mint függvényeket mindig kiterjeszthetjük  $v^a$  integrálgörbéi mentén  $\mathcal{O}_p$ -re úgy, hogy

<sup>1</sup>Ilyen  $\Sigma$  felületdarabot generálnak például a  $p \in M$  pontból a  $v^a$  vektorra merőleges érintővel indított önmagukkal párhuzamos görbék (lásd a 10.1 ábrát).

azok értékét fixen tartjuk az integrálgörbék mentén. Amennyiben ezek után  $x^1$  koordinátaként az integrálgörbék olyan szinkronizált  $t$ -paraméterezését használjuk, amelyre  $t|_\Sigma = \text{állandó}$ , akkor az így előállított  $x^1, \dots, x^n$  függvények rendszere éppen egy a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordinátarendszert határoz meg  $\mathcal{O}_p$ -n.

Ilyen koordinátarendszerekben a  $v^a$  vektormezőhöz tartozó integrálgörbék alkotják az  $x^1$ -koordinátavonalakat, aminek megfelelően a  $v^a = (\partial/\partial x^1)^a$ , vagy – ami ezzel ekvivalens –  $v^a$  komponenseire a  $v^\alpha = \delta^\alpha_1$  reláció teljesül.

Az imént bemutatott konstrukciónak megfelelően az  $(x^2, \dots, x^n)$  koordináták tetszőleges választása révén nagyon sokféle  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordinátarendszer létezik. Ennek ellenére könnyen belátható, hogy függetlenül a konkrét választástól, amennyiben valamely  $p \in M$  pont koordinátái valamely  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordinátarendszerben  $(x^1, \dots, x^n)$ , akkor a  $\phi_t(p)$  pont  $(y^1, \dots, y^n)$  koordinátáira az  $y^1 = x^1 + t, y^2 = x^2, \dots, y^n = x^n$  relációk teljesülnek. Mindezeket a (9.0.13) reláció levezetése során bemutatott érveléssel összevetve látható, hogy bármely a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákban

$$(\phi_t^* T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}(x^1, \dots, x^n) = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}(x^1 + t, \dots, x^n). \quad (10.2.4)$$

Ezen reláció egyenes következményeként, bármely a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordinátarendszerben egy  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}^k_l$  tenzormező Lie-deriváltjának koordinátakomponenseit a  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzormező koordinátakomponenseinek  $x^1$  koordináták szerinti parciális deriváltjaként adhatjuk meg, azaz az

$$\mathcal{L}_v T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}}{\partial x^1} \quad (10.2.5)$$

összefüggés teljesül.

Mindezekből speciálisan az is következik, hogy a  $v^a$  vektormező által generált  $\phi_t$  lokális egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport elemei pontosan akkor lesznek bármely  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  értékre egy  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}^k_l(M)$  tenzormezőre

nézve szimmetriatranszformációk, ha a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő tetszőleges  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátarendszerben a  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  komponensek függetlenek az  $x^1$  koordinátától.

### 10.3. A Lie-derivált koordinátamentes alakja

Mivel előfordul az is, hogy egyszerre több, egymástól független vektormezőre vonatkozó Lie-deriváltat is meg kell tudnunk határozni, előnyös, ha a Lie-deriválás hatását nemcsak az illeszkedő, de tetszőleges koordinátákban, illetve koordinátamentes alakban is meg tudjuk határozni.

Ehhez tekintsünk először egy tetszőleges  $w^a$  differenciálható vektormezőt  $M$ -en. Ekkor egyrészt – amint azt fentebb megmutattuk – minden a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő lokális koordinátarendszerben az

$$\mathcal{L}_v w^\alpha = \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^1} \quad (10.3.6)$$

összefüggés teljesül. Másrészt azt is tudjuk, hogy a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátarendszerben a  $v^a$  és  $w^a$  vektormezők kommutátorára, a  $v^\alpha = \delta^\alpha_1$  reláció folytán

$$[v, w]^\alpha = \sum_\beta \left( v^\beta \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta} - w^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^1} \quad (10.3.7)$$

teljesül. Mivel mind  $\mathcal{L}_v w^a$ , mind pedig  $[v, w]^a$  ugyanolyan,  $(1, 0)$ -típusú tenzormezők  $M$ -en, továbbá az  $\mathcal{L}_v w^a - [v, w]^a$  különbségvektor komponensei a  $v^a$  vektormezőhöz illeszkedő tetszőleges lokális koordinátarendszerben zérus értéket vesznek fel, maga a különbségvektor is csak a zérus vektor lehet, azaz

$$\mathcal{L}_v w^a = [v, w]^a = v^e \nabla_e w^a - w^e \nabla_e v^a \quad (10.3.8)$$

összefüggésnek kell teljesülnie, ahol  $\nabla_a$  most – úgy ahogyan a (7.1.8) reláció származtatása során – egy tetszőleges torziómentes kovariáns deriváló operátort jelöl.

A Lie-deriválás hatását különféle tenzormezőkön a korábban, például a kovariáns deriválás tulajdonságainak vizsgálata során alkalmazott módszerek segítségével adhatjuk meg. Így például valamely  $\omega_a$  duális vektormező Lie-deriváltját az alábbiak szerint származtathatjuk.

Legyenek  $\omega_a \in \mathcal{T}^*(M)$  és  $w^a \in \mathcal{T}(M)$  vektormezők tetszőlegesek. Tekintsük a  $\mathcal{L}_v(\omega_a w^a) = v^e \nabla_e(\omega_a w^a)$  egyenlet két oldalának külön-külön vett kifejtését úgy, hogy a Leibnitz-szabályt először az  $\mathcal{L}_v$  operátorra

$$\mathcal{L}_v(\omega_a w^a) = (\mathcal{L}_v \omega_a) w^a + \omega_a (\mathcal{L}_v w^a), \quad (10.3.9)$$

másodszor pedig a  $\nabla_a$  operátorra alkalmazzuk

$$v^e \nabla_e(\omega_a w^a) = (v^e \nabla_e \omega_a) w^a + \omega_a (v^e \nabla_e w^a). \quad (10.3.10)$$

Ekkor a két utóbbi, valamint a (10.3.8) egyenlet, továbbá a  $w^a$  vektormező tetszőlegessége folytán, végül egyszerű algebrai átalakítások révén az adódik, hogy

$$\mathcal{L}_v \omega_a = v^e \nabla_e \omega_a + \omega_e \nabla_a v^e. \quad (10.3.11)$$

Hasonló megfontolások alapján egy tetszőleges  $(k, l)$ -típusú  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}^k_l(M)$  tenzormező esetén megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &= v^e \nabla_e T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots \overset{i}{e} \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_e v^{a_i} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots \overset{j}{e} \dots b_l} \nabla_{b_j} v^e, \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

ahol  $\nabla_a$  most is egy tetszőleges torziómentes kovariáns deriváló operátort jelöl.

## 10.4. Killing-vektormezők

**10.4.1. Definíció.** Legyen  $M$  egy  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaság, valamint  $\phi_t : M \rightarrow M$  egy lokális egyparaméteres izometria-csoport  $M$ -en. Ekkor  $\phi_t$  generátorát Killing-vektormezőnek nevezzük.

Ezen definíció értelmében a metrikát invariánsan hagyó egyparaméteres izometriacsoport generátora, a  $\xi^a \in \mathcal{T}(M)$  vektormező, a (10.3.12) egyenletnek megfelelően, pontosan akkor Killing-vektormező, ha

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi^e \nabla_e g_{ab} + g_{eb} \nabla_a \xi^e + g_{ae} \nabla_b \xi^e = 2\nabla_{(a} \xi_{b)} = 0, \quad (10.4.13)$$

azaz ha a  $\xi^a$  vektormező eleget tesz a

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \quad (10.4.14)$$

Killing-egyenletnek, ahol most  $\nabla_a$  a metrikával kompatibilis kovariáns deriváló operátort jelöl.

**10.4.1. Megjegyzés.** A fenti definíciónak megfelelően, a geometrizált gravitációelméletekben a Killing-vektormezőket a téridőszimmetriák generátorainak is szoktuk nevezni. Emmy Noether eredményeinek megfelelően azt várjuk, hogy a téridőszimmetriákhoz is tartozniuk kell valamilyen „mozgásállandóknak”. Az alábbi lemma értelmében egy ilyen megmaradó mennyiség rendelhető minden geodetikus pályán mozgó részecskéhez, illetve megfigyelőhöz. Ennek segítségével értelmezzük később például a gravitációs vöröseltolódást, de segítségünkre lesz a geodetikus pályák meghatározása során is.

**10.4.1. Lemma.** Legyen  $\xi^a$  Killing-vektormező  $M$ -en. Legyen továbbá  $\lambda$  egy affinparaméterezett geodetikus görbe és jelölje  $T^a$  ennek érintővektorát. Ekkor a  $\xi^a T_a$  kontrakció állandó  $\lambda$  mentén.

*Bizonyítás:* A  $\xi^a T_a$  kontrakció pontosan akkor állandó a  $\lambda$  geodetikus görbe mentén, ha a  $T^b \nabla_b (\xi_a T^a)$  iránymenti derivált  $\lambda$  tetszőleges pontjában eltűnik.

Ez azonban a vizsgált esetben a

$$T^b \nabla_b (\xi_a T^a) = T^a T^b \nabla_b \xi_a + \xi_a (T^b \nabla_b T^a) \quad (10.4.15)$$

reláció folytán mindig teljesül, hiszen az első tag a  $T^a T^b \nabla_b \xi_a = T^{(a} T^{b)} \nabla_b \xi_a = T^a T^b \nabla_{(b} \xi_{a)}$  egyenlőségek, valamint a Killing-egyenlet miatt zérus értékű, míg a második tag azért tűnik el, mert  $T^a$  az affinparaméterezett  $\lambda$  geodetikus görbe érintővektora.  $\square$

## 11. fejezet

# Differenciálformák

**11.0.2. Definíció.** Legyen  $M$  tetszőleges  $n$ -dimenziós differenciálható sokaság. Ekkor a  $p$  pontban értelmezett teljesen antiszimmetrikus  $(0, r)$ -típusú tenzorokat „ $r$ -formáknak” nevezzük, ugyanakkor ezek összességét – mely az összeadás és skalárral való szorzás műveletére nézve  $\mathbb{R}$  felett lineáris teret alkot –  $\Lambda_r(p)$ -vel jelöljük.

Az imént megfogalmazott definíció értelmében valamely  $\omega_{a_1 \dots a_r} \in \mathcal{T}_r^0(p)$  pontosan akkor  $r$ -forma, azaz  $\omega_{a_1 \dots a_r} \in \Lambda_r(p)$ , ha

$$\omega_{a_1 \dots a_r} = \omega_{[a_1 \dots a_r]}. \quad (11.0.1)$$

Ezen felül, megállapodás szerint, a  $p$  pontbeli duális vektorokat 1-formáknak, míg a valós számokat 0-formáknak tekintjük.

Mivel formák mindig csak alsó, kovariáns indexekkel rendelkeznek, továbbá ezekben az indexekben mindig teljesen antiszimmetrikusak, a szakirodalomban sokszor az indexek kiírása nélkül egyszerűen a forma betűjelének vastagon szedett változatával szokás jelölni őket. Ezzel a jelölési eljárással időnként mi magunk is élni fogunk. Ennek a konvenciónak megfelelően, például az  $\omega_{a_1 \dots a_r} \in \Lambda_r(p)$   $r$ -formát  $\omega$ -val is jelölhetjük.

## 11.1. Külső szorzás és külső deriválás

Legyenek most  $\omega_{a_1 \dots a_r}$  és  $\mu_{a_1 \dots a_s}$  tetszőleges  $r$ - és  $s$ -formák. Ezek  $\omega \otimes \mu$  tenzori szorzata általában nem lesz  $(r+s)$ -forma, ellenben az így kapott  $(0, r+s)$ -típusú tenzort antiszimetrizálva jutunk el a külső szorzás műveletéhez.

**11.1.1. Definíció.**  $A \wedge : \Lambda_r(p) \times \Lambda_s(p) \rightarrow \Lambda_{r+s}(p)$  külső szorzás az  $\omega_{a_1 \dots a_r}$  és  $\mu_{a_1 \dots a_s}$ ,  $r$ - és  $s$ -formákhoz az

$$(\omega \wedge \mu)_{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} = \frac{(r+s)!}{r!s!} \omega_{[a_1 \dots a_r} \mu_{b_1 \dots b_s]} \quad (11.1.2)$$

összefüggés által meghatározott  $r+s$ -formát rendeli.

Az antiszimetrizálás definícióját felhasználva az is könnyen belátható, hogy az imént definiált  $\wedge$ -szorzás „antikommutatív”, azaz eleget tesz az

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{r \cdot s} \mu \wedge \omega \quad (11.1.3)$$

relációnak. Így a  $\wedge$ -szorzás a  $\Lambda(p) = \Lambda_0(p) \oplus \Lambda_1(p) \oplus \dots \oplus \Lambda_n(p)$  direktösszeg teret, a  $\Lambda_r(p) \wedge \Lambda_s(p) \subset \Lambda_{r+s}(p)$  összefüggés folytán, egy „progresszív”-algebrává teszi.

Mivel az  $r$ -formák speciális,  $(0, r)$ -típusú tenzorok, minden  $r$ -forma előállítható 1-formák  $r$ -szeres tenzori szorzataiból képzett teljesen antiszimmetrikus lineárkombinációk segítségével.

**11.1.1. Feladat.** Tekintsük a  $p \in M$  pontbeli érintőtér  $\mathcal{T}^*(p)$  duálisának egy tetszőleges  $\{e_a^{(\alpha)}\}$  bázisát. Mutassuk meg, hogy a külső szorzat felhasználásával megkonstruálható  $r$ -szeres  $e_{a_1}^{(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge e_{a_r}^{(\alpha_r)}$  alakú szorzatok  $\{e_{a_1}^{(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge e_{a_r}^{(\alpha_r)}\}$  összessége a  $\Lambda_r(p)$  tér bázisát határozza meg.

Mivel  $\{e_{a_1}^{(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge e_{a_r}^{(\alpha_r)}\}$  bázisa  $\Lambda_r(p)$ -nek, továbbá a báziselemeket meghatározó  $r$ -szeres  $\wedge$ -szorzatokban előforduló tényezőknek mindig különbözőeknek kell lenniük, könnyen belátható, hogy  $\dim(\Lambda_r(p)) = \binom{n}{r}$  feltéve, hogy



$0 \leq r \leq n$ , továbbá,  $\Lambda_r(p) = \{\mathbf{0}\}$ , azaz  $\dim(\Lambda_r(p)) = 0$ , ha  $r > n$ . Mindezek alapján az is nyilvánvaló, hogy amennyiben  $r + s > n$ , akkor egy  $r$ - és egy  $s$ -forma külső szorzatként kapott forma azonosan eltűnik.

Tekintsük most az  $M$ -en értelmezett  $r$ -formamezők  $\Lambda_r(M)$ -mel jelölt halmazát, amely az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve  $\mathbb{R}$  felett lineáris teret alkot.

**11.1.2. Definíció.** Legyen  $\nabla_a$  egy tetszőleges torziómentes kovariáns deriváló operátor  $M$ -en. Ekkor a  $C^k$ -osztályú  $r$ -formamezőket a  $C^{k-1}$ -osztályú  $r+1$ -formamezők terébe képező  $d : \Lambda_r(M) \rightarrow \Lambda_{r+1}(M)$  külső deriváláson azt a leképezést értjük, amely az  $\omega_{a_1 \dots a_r} \in \Lambda_r(M)$   $r$ -formamezőhöz a

$$(d\omega)_{ba_1 \dots a_r} = (r+1) \cdot \nabla_{[b} \omega_{a_1 \dots a_r]} \quad (11.1.4)$$

egyenlet által értelmezett  $(r+1)$ -formamezőt rendeli.

**11.1.1. Lemma.** A külső deriválás művelete független a (11.1.4) definícióban használt kovariáns deriváló operátor megválasztásától.

*Bizonyítás:* Az állítás igazolásaként elegendő a kovariáns deriváló operátorok hatásának eltérését kifejező (5.2.17) egyenletre hivatkoznunk, hiszen emiatt a

$$\tilde{\nabla}_{[b} \omega_{a_1 \dots a_r]} - \nabla_{[b} \omega_{a_1 \dots a_r]} = \sum_{j=1}^r C^d_{ba_j} \omega_{a_1 \dots \underset{j}{\overbrace{d}^{\cdot}} \dots a_r] = 0 \quad (11.1.5)$$

reláció teljesül, ahol egyedül a  $C^d_{ba} (1,2)$ -típusú tenzor alsó indexeiben vett szimmetrikus voltát használtuk ki, ami a  $\tilde{\nabla}_a$  és a  $\nabla_a$  operátorok torziómentességéből következik.  $\square$

Így a külső derivált meghatározása során az  $M$  differenciálható sokaság bármely  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképén – az általánosság megszorítása nélkül – használhatjuk az ott értelmezett  $\partial_a$  deriváló operátort is. Ennek felhasználásával könnyen

ellenőrizhető, hogy a külső deriválás műveletét kétszer alkalmazva mindig a zérus formához jutunk, azaz  $d^2 = d \circ d = 0$ , hiszen bármely  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképen

$$(d^2 \omega)_{cba_1 \dots a_r} = (r+2)(r+1) \cdot \partial_{[c} \partial_b \omega_{a_1 \dots a_r]} = 0, \quad (11.1.6)$$

mivel a  $\partial_a$  és  $\partial_b$  deriváló operátorok sorrendje tetszőleges típusú tenzormezők esetén felcserélhető.

Azokat a formamezőket, amelyek külső deriváltja eltűnik, *zárt*nak nevezzük. Fentebb láttuk, hogy azok a formák, amelyek valamely más formamezők külső deriváltjaként adhatók meg—ezeket a formákat *egzaktnak* is szokás nevezni—mindig zártak. Az alábbi, Poincaré-lemma néven ismert állítás értelmében a zárt formák általában csak lokálisan adhatók meg úgy, mint valamely más forma külső deriváltja [53].

**11.1.1. Tétel (Poincaré-lemma).** *Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  egy térkép  $M$ -en. Legyen továbbá  $\Omega \subset \mathcal{O}$  olyan nyílt részhalmaz, mely sima módon összehúzható,  $\Omega$  valamely  $p$  pontjára abban az értelemben, hogy található hozzá olyan  $C^\infty F : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$  leképezés, amelyre  $F(1, q) = q$ , valamint  $F(0, q) = p$  bármely  $q \in \Omega$  pont választása esetén. Tegyük fel továbbá, hogy  $\alpha$  zárt  $r$ -formamező  $\Omega$ -n, azaz  $d\alpha = 0$ . Ekkor  $\alpha$ -hoz mindig található olyan  $\beta$   $(r-1)$ -formamező  $\Omega$ -n – ezt  $\alpha$  potenciáljának is szokás nevezni – amelyre a  $d\beta = \alpha$  egyenlőség teljesül.*

## 11.2. Sokaságok irányíthatósága

Legyen  $M$  tetszőleges  $n$ -dimenziós differenciálható sokaság,  $(\mathcal{O}, \psi)$  pedig egy térkép  $M$ -en az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákkal. Ekkor bármely, az  $\mathcal{O}$  térképen értelmezett  $n$ -formamező szükségképpen arányos a  $(dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n}$  külső szorzattal, hiszen  $\mathcal{O}$  minden egyes  $p$  pontjában  $\dim(\Lambda_n(p)) = 1$ .

**11.2.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy amikor  $(\mathcal{O}', \psi')$  egy az  $(\mathcal{O}, \psi)$ -vel átfedő olyan térkép, amelyen  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordináták, akkor  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ -n a*

$$dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n = \det \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^v} \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (11.2.7)$$

*reláció teljesül, ahol  $(\partial x'^\mu / \partial x^v)$  az  $x'^\mu = x'^\mu(x^v)$  koordináta-transzformáció Jacobi-mátrixát jelöli!*

**11.2.1. Definíció.** *Az  $M$  differenciálható sokaságot irányíthatónak nevezzük, ha található hozzá olyan  $\{(\mathcal{O}_{(\alpha)}, \psi_{(\alpha)})\}$  atlasz, amelyre bármely két átfedő  $\mathcal{O}_{(\alpha)} \cap \mathcal{O}_{(\beta)} \neq \emptyset$  térkép esetén a koordinátatranszformáció  $(\partial x'^\mu_{(\alpha)} / \partial x^v_{(\beta)})$  Jacobi-mátrixának determinánsa pozitív.*

Mivel a Jacobi-mátrixok nem válhatnak előjelet, nyilvánvaló, hogy bármely két olyan térkép esetén, amelyek közös része összefüggő, a Jacobi-mátrix determinánsának pozitivitása egyszerűen biztosítható, hiszen ha az eredeti koordinátákra nézve nem lenne pozitív, akkor például a nagyobb  $(\alpha)$ -indexű koordinátafolton az 1-es és a 2-es koordináta-függvényeket felcserélve ez mindig elérhető. Nyilvánvaló, hogy ez az eljárás akkor is működik, ha azt gondolatban lokálisan megszámlálhatóan végtelen sok, összefüggő módon átfedő koordinátarendszerre kell alkalmaznunk. Mégsem igaz az, hogy bármely esetleg csak véges sok térképpel lefedhető differenciálható sokaság irányítható lenne, hiszen a közös részek összefüggősége például már a két térképpel lefedhető Möbius-szalag, vagy a szintén kompakt Klein-kancsó esetén sem biztosított. Így ezek a kompakt sokaságok nem irányíthatóak. Igaz azonban az alábbi két egyszerű állítás.

**11.2.1. Lemma.** *Bármely irányítható parakompakt differenciálható sokaságon megadható egy folytonos, sehol el nem tűnő  $n$ -formamező.*

*Bizonyítás:* Mivel  $M$  irányítható, létezik hozzá olyan  $\{(\mathcal{O}_{(\alpha)}, \psi_{(\alpha)})\}$  atlasz, amely irányítható, azaz az átfedő koordinátafoltjaihoz tartozó Jacobi-mátrixok

mindenütt pozitívak. Mivel  $M$  parakompakt, az  $\{(\mathcal{O}_{(\alpha)}, \Psi_{(\alpha)})\}$  atlaszhoz is található megszámlálható sok térképet tartalmazó  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$  lokálisan véges részatlasz. Jelölje  $\{f_{(i)}\}$  az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \Psi_{(i)})\}$  atlaszhoz tartozó egységfelbontást. Ekkor az

$$e_{a_1 \dots a_n} = \sum_i f_{(i)} \cdot (dx_{(i)}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx_{(i)}^n)_{a_n} \quad (11.2.8)$$

összefüggés segítségével definiált  $n$ -formamező  $M$ -en mindenütt jól definiált, hiszen (11.2.7) alapján  $e_{a_1 \dots a_n}$  bármely  $\mathcal{O}_{(j)}$  térkép felett az

$$e_{a_1 \dots a_n}|_{\mathcal{O}_{(j)}} = \sum_i \left[ f_{(i)} \cdot \det \left( \frac{\partial x_{(i)}^\mu}{\partial x_{(j)}^\nu} \right) \right] \cdot (dx_{(j)}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx_{(j)}^n)_{a_n} \quad (11.2.9)$$

véges összegként írható fel. Az is azonnal látható, hogy  $e_{a_1 \dots a_n}$  szükségképpen folytonos és sehol nem tűnhet el, hiszen az átfedő koordinátafoltokhoz tartozó Jacobi-mátrixok determinánsai pozitívak, továbbá az  $\{f_{(i)}\}$  függvények a  $0 \leq f_{(i)}(p) \leq 1$  és a  $\sum_i f_{(i)}(p) = 1$  relációknak tesznek eleget bármely  $p \in M$  pontban.  $\square$

**11.2.2. Lemma.** *Ha az  $M$  differenciálható sokaságon megadható egy folytonos, sehol el nem tűnő  $n$ -formamező, akkor  $M$  irányítható.*

*Bizonyítás:* Legyen  $\{(\mathcal{O}_{(\alpha)}, \Psi_{(\alpha)})\}$  tetszőleges térkép az  $M$  differenciálható sokaságon. Jelölje  $e_{a_1 \dots a_n}$  az  $M$ -en sehol el nem tűnő legalább folytonos  $n$ -formamezőt. A fentebb említett koordinátafüggvényeket felcserélő eljárást térképenként az  $\{(\mathcal{O}_{(\alpha)}, \Psi_{(\alpha)})\}$  atlasz elemeire alkalmazva elérhető, hogy az  $(\alpha)$ -index tetszőleges értékére  $\mathcal{O}_{(\alpha)}$ -n a

$$e_{a_1 \dots a_n} = f \cdot (dx_{(\alpha)}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx_{(\alpha)}^n)_{a_n} \quad (11.2.10)$$

egyenlőség teljesüljön, ahol  $f$  az  $\mathcal{O}_{(\alpha)}$ -n mindenütt pozitív függvény, hiszen sem  $e_{a_1 \dots a_n}$ , sem pedig  $(dx_{(\alpha)}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx_{(\alpha)}^n)_{a_n}$  nem tűnhet el  $\mathcal{O}_{(\alpha)}$  egyetlen pontjában sem. Ez azonban a (11.2.7) egyenletnek értelmében, azt jelenti, hogy az átfedő koordinátafoltokon a Jacobi-mátrixok determinánsai szükségképpen pozitívak, azaz  $M$  irányítható a 11.2.1 definíció értelmében.  $\square$

A szakirodalomban legtöbbször az előző lemma feltételeinek eleget tevő  $n$ -formamező létezését megkövetelve definiálják az  $M$  differenciálható sokaság irányíthatóságát, így a továbbiakban mi is ezt tesszük:

**11.2.2. Definíció.** Az  $M$  differenciálható sokaságot irányíthatónak nevezzük, ha megadható rajta egy folytonos, sehol el nem tűnő  $n$ -formamező.

Az imént bizonyított két lemma értelmében bármely parakompakt sokaság esetén az irányíthatóság (11.2.1) és (11.2.2) definícióiban alkalmazott meghatározásai ekvivalensek.

Nyilvánvaló, hogy amikor valamely sokaság irányítható, akkor rajta mindig két egymással nem ekvivalens irányítás adható meg.

**11.2.3. Definíció.** Az  $\mathbf{e}$  és  $\mathbf{e}'$   $n$ -formamezők által meghatározott irányításokat ekvivalensnek tekintjük, ha létezik olyan mindenütt pozitív folytonos  $f$  függvény, amelyre  $\mathbf{e}' = f \cdot \mathbf{e}$ .



## 12. fejezet

# Integrálás sokaságokon

Tegyük fel, hogy  $M$  irányítható differenciálható sokaság. Jelölje  $\mathbf{e}$  az  $M$  irányítását meghatározó  $n$ -formamezőt. Ekkor  $\mathbf{e}$  segítségével az  $M$ -en értelmezett legalább  $C^0$ , pontosabban fogalmazva Riemann-, vagy Lebesgue-féle értelemben mérhető  $n$ -formamezők integrálját az alábbiak szerint értelmezhetjük.

Definiáljuk először az  $n$ -formamezők integráljának fogalmát lokálisan. Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  egy térkép  $M$ -en és tegyük fel, hogy a hozzá tartozó  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták pozitívan irányítottak abban az értelemben, hogy létezik olyan pozitív folytonos  $f$  függvény, amelyre  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = f \cdot \mathbf{e}$  teljesül  $\mathcal{O}$ -n. Ekkor az  $\mathcal{O}$  térkép felett bármely, az  $M$  sokaságon értelmezett  $\omega \in \Lambda_n(M)$   $n$ -formamezőt az

$$\omega = \omega \cdot (dx^1) \wedge \dots \wedge (dx^n) \quad (12.0.1)$$

formában írhatunk fel.

**12.0.4. Definíció.** Legyen  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  kompakt részhalmaz és így  $\psi[\mathcal{U}]$  mérhető részhalmaza  $\mathbb{R}^n$ -nek. Ezek után az  $\omega$   $n$ -formamező  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  tartományra vett integrálját az

$$\int_{\mathcal{U}} \omega = \int_{\psi[\mathcal{U}]} \omega \cdot dx^1 \dots dx^n \quad (12.0.2)$$

relációval definiáljuk, ahol a jobb oldal az  $\omega$  függvény valós analízisből jól

ismert,  $\psi[\mathcal{U}] \subset \mathbb{R}^n$  halmazra vonatkozó Riemann- vagy Lebesgue-integrálját jelöli.

**12.0.3. Lemma.** Az  $\int_{\mathcal{U}} \omega$  érték független az alkalmazott koordináták megválasztásától.

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $(\mathcal{O}', \psi')$  egy az  $(\mathcal{O}, \psi)$ -vel átfedő olyan másik térkép, amelyen  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordináták, továbbá  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ . Akkor a (11.2.7) és (12.0.1) egyenletek alapján az is nyilvánvaló, hogy  $\omega = \det(\partial x'^\mu / \partial x^\nu) \cdot \omega'$ , és így az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett integrálok jól ismert integrál-transzformációs szabálya alapján

$$\int_{\psi[\mathcal{U}]} \omega \cdot dx^1 \dots dx^n = \int_{\psi'[\mathcal{U}]} \omega' \cdot dx'^1 \dots dx'^n. \quad (12.0.3)$$

□

**12.0.1. Megjegyzés.** Érdemes megjegyezni, hogy az  $M$  sokaság irányíthatósága alapvető szerepet játszik az integrál fenti értelmezése során. Amennyiben  $M$  nem lenne irányítható, akkor a (12.0.1) és (12.0.2) összefüggéseket felhasználva az  $\omega$  formamezők  $\mathcal{U}$  tartományra vett integráljának előjele határozatlan lenne, hiszen annak értéke az  $\mathbf{e}$ -re nézve pozitívan irányított  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép esetében valamely valós szám, míg az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképből az 1-es és a 2-es koordinátafüggvényeket felcserélő eljárással kapott,  $-\mathbf{e}$ -hez viszonyítva negatívan irányított – térképre nézve az integrál értéke a kérdéses valós szám mínuszszereze lenne.

Tekintsük most az integrál globális értelmezhetőségének kérdését. Nyilvánvaló, hogy az  $M$ -en lokális értelemben meghatározott integrálok értékét kellene valamilyen ügyes módszerrel összegeznünk úgy, hogy az átfedő tartományokon elkerülhessük a járulékok indokolatlan többszörös figyelembevételét. Megmutatjuk, hogy egy ilyen összegzési eljárás létezik feltéve, hogy az  $M$  irányítható differenciálható sokaság parakompakt.



Legyen  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  az  $M$  irányítható parakompakt differenciálható sokaság megszámlálható sok térképből álló lokálisan véges atlasza. Jelölje továbbá  $\{f_{(i)}\}$  az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlaszhoz tartozó egységfelbontást. Ekkor, amint azt a 11.2.1 Lemmában megmutattuk,  $M$  irányítható a sehol el nem tűnő és legalább folytonos

$$e_{a_1 \dots a_n} = \sum_i f_{(i)} \cdot (dx_{(i)}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx_{(i)}^n)_{a_n} \quad (12.0.4)$$

$n$ -formamezőre nézve.

Legyen most  $\omega$  legalább folytonos  $n$ -formamező  $M$ -en. Mivel  $M$  parakompakt, az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlasz mindig megválasztható úgy, hogy az  $\mathcal{O}_{(i)}$  halmazok  $\overline{\mathcal{O}}_{(i)}$  lezártjai legyenek  $M$  kompakt részalmazai [21], így a  $\psi_{(i)}[\mathcal{O}_{(i)}]$  halmazok  $\mathbb{R}^n$ -beli mérhetősége automatikusan biztosított. Az is könnyen látható, hogy  $\omega = \sum_i f_{(i)} \omega$ , továbbá az  $f_{(i)} \omega$  formamezők csak az  $\mathcal{O}_{(i)}$  halmazok felett nem tűnnek el, így az

$$\omega_{(i)} = \int_{\mathcal{O}_{(i)}} f_{(i)} \omega \quad (12.0.5)$$

integrálok külön-külön, a fentebb ismertetett eljárás értelmében jól definiáltak.

**12.0.5. Definíció.** Az  $\omega$  formamező  $M$ -re vonatkozó integrálját – kihasználva, hogy bármely  $p \in M$  pontban a  $\sum_i \omega_{(i)}$  összegben csak véges sok elem nem zérus – az

$$\int_M \omega = \sum_i \omega_{(i)} \quad (12.0.6)$$

összefüggés segítségével definiáljuk.

**12.0.1. Állítás.** Megmutatható [53], hogy

- (1) Az így definiált  $\int_M \omega$  integrál értéke független az  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlasz, valamint az  $\{f_{(i)}\}$  egységfelbontás megválasztásától.
- (2) Legyenek  $M$  és  $M'$  egymással diffeomorf differenciálható sokaságok, továbbá  $\phi : M \rightarrow M'$  az őket összekapcsoló diffeomorfizmus. Ekkor teljesül

az

$$\int_M \omega = \int_{M'} \phi^* \omega \quad (12.0.7)$$

egyenlőség.

## 12.1. Stokes-tétel

A fizikában az integrálszámítás egyik legtöbbször alkalmazott eredménye a Stokes-tétel, valamint a belőle származtatott Gauss-tétel. A fejezet hátralévő részében ezeknek az általános differenciálható sokaságok elméletében, illetve a görbült geometriák körében is érvényes alakját ismertetjük.

**12.1.1. Tétel (Stokes-tétel).** *Legyen  $M$  irányítható, parakompakt differenciálható sokaság, valamint  $\mathcal{N} \subset M$  kompakt részhalmaz. Jelölje  $\partial\mathcal{N}$  az  $\mathcal{N}$  részhalmaz  $M$ -re vonatkozó  $\partial\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}} \setminus \text{int}(\mathcal{N})$  határát. Tegyük fel, hogy  $\partial\mathcal{N}$  szakaszonként legalább  $C^1$ -osztályú. Végül tegyük fel, hogy  $\omega$  egy legalább  $C^1$ -osztályú  $(n-1)$ -formamező  $M$ -en. Ekkor teljesül az*

$$\int_{\mathcal{N}^\circ} d\omega = \int_{\partial\mathcal{N}} \iota^* \omega \quad (12.1.8)$$

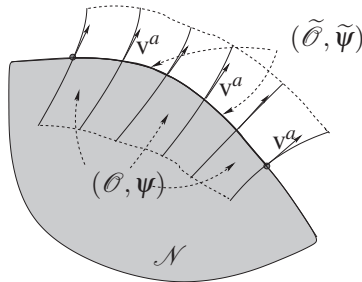
*integrálegyenlőség, ahol  $\iota^* \omega$  az  $\omega$  formamező  $\iota: \partial\mathcal{N} \rightarrow M$  beágyazó leképezésre vonatkozó visszahúzottját,  $\mathcal{N}^\circ$  pedig az  $\mathcal{N}$  részhalmaz belsejét jelöli.*

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet bal- és jobboldalán egy  $n$ - és egy  $(n-1)$ -formamező integrálja szerepel annak megfelelően, hogy  $\mathcal{N}^\circ$  dimenziója  $n$ , míg  $\partial\mathcal{N}$  dimenziója  $(n-1)$ . A fenti egyenlőség implicit módon azt is feltételezi, hogy a jobb oldalon álló integrálkifejezés értelmezett, azaz  $\partial\mathcal{N} \subset M$  irányítható.

**12.1.1. Lemma.** *A  $\partial\mathcal{N}$  halmaz irányítható.*

*Bizonyítás:* Legyen  $\mathcal{A} = \{(\tilde{\theta}_{(\alpha)}, \tilde{\psi}_{(\alpha)})\}$  egy olyan atlasz, amelyre nézve  $\partial\mathcal{N}$  egy  $C^r$ -osztályú differenciálható sokaság. Megmutatjuk, hogy  $\{(\tilde{\theta}_{(\alpha)}, \tilde{\psi}_{(\alpha)})\}$

pozitívan irányíthatóvá tehető, azaz elérhető, hogy az átfedő koordinátafolton a Jacobi-mátrixok determinánsa mindig pozitív legyen. Ehhez válasszuk ki  $\mathcal{A}$  egy tetszőleges  $(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\psi})$  térképét, melyen  $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n-1})$  lokális koordináták. Ekkor az  $(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\psi})$  térkép egy újabb koordináta hozzávételével  $M$  egy  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképévé tehető az alábbi módon.



12.1. ábra. Az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép előállítása a  $v^a$  vektormező segítségével.

Legyen  $v^a$  az  $\tilde{\mathcal{O}}$  halmaz egy  $M$ -beli környezetén értelmezett, az  $\mathcal{N}$  kompakt halmazból „kifelé” mutató, ezáltal  $\partial\mathcal{N}$ -t sehol sem érintő, elegendően sima vektormező, mely sehol sem tűnik el  $\tilde{\mathcal{O}}$ -on (lásd az 12.1 ábrát). Ekkor, mivel a  $v^a$  vektormező nem tűnik el  $\tilde{\mathcal{O}}$ -on, tekinthetjük  $\tilde{\mathcal{O}}$ -nak a  $v^a$  integrálgörbéi által kifeszített elegendően kicsiny  $M$ -beli  $\mathcal{O}$  környezetét. Ezen a környezeten választhatjuk  $n$ -edik koordinátafüggvényként – jelöljük ezt  $\tilde{x}^n$ -el –  $v^a$  integrálgörbéinek azon szinkronizált paraméterezését, mely azonosan eltűnik az  $\tilde{\mathcal{O}} \subset \partial\mathcal{N}$  halmaz pontjaiban. Az így kapott  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép az  $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$  lokális koordinátákkal vagy pozitívan irányított valamely az  $M$  irányítását meghatározó  $n$ -formamezőre nézve, vagy a szokásos 1-es és 2-es koordinátafüggvényeket felcserélő eljárás segítségével azzá tehető. Mivel ez az eljárás térképenként megismételhető, az eredeti  $\{(\tilde{\mathcal{O}}_{(\alpha)}, \tilde{\psi}_{(\alpha)})\}$  atlasz átfedő térképeirez tartozó Jacobi-mátrixok determinánsának pozitivitása mindenütt biztosítható.

□

## 12.2. A térfogati forma

Amikor az  $M$  differenciálható sokaságon értelmezett differenciális struktúrán kívül még egy metrikus struktúra is adott – ahogy azt a 9.1 alfejezetben megmutattuk, parakompakt sokaságok esetén mindig értelmezhető metrika  $M$ -en – akkor például az integrálok értelmezésénél alkalmazhatjuk a metrika által egyértelműen meghatározott, ezért kitüntetett azon  $n$ -formamezőt is, melyet térfogatelemnek nevezünk és  $\varepsilon$ -nal jelölünk.

**12.2.1. Definíció.** Legyen  $M$  parakompakt differenciálható sokaság, valamint  $(\mathcal{O}, \psi)$  egy tetszőleges térkép az  $M$ -en megadható megszámlálható sok térképből álló lokálisan véges  $\{(\mathcal{O}_{(i)}, \psi_{(i)})\}$  atlaszból. Ekkor az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett értelmezett  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták segítségével a térfogatelemet az

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n}|_{\mathcal{O}} = \sqrt{|g|} \cdot (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n} \quad (12.2.9)$$

összefüggéssel értelmezzük, ahol  $g$  a metrika kovariáns alakjának az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákra vonatkozó komponensei által meghatározott  $g_{\mu\nu}$  mátrix determinánsát jelöli, azaz  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

**12.2.1. Lemma.** Az  $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  térfogati forma definíciója független a (12.2.9) relációban használt koordináták megválasztásától.

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $(\mathcal{O}', \psi')$  egy olyan másik az  $(\mathcal{O}, \psi)$ -vel átfedő és hozzá pozitív irányítottással illeszkedő térkép, amelyen  $(x'^1, \dots, x'^n)$  lokális koordináták. Ekkor a (12.2.9), valamint a (3.3.17) összefüggések alapján az  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \neq \emptyset$  halmazon az

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n}|_{\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'} = \sqrt{\left| \det \left( g_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \right) \right|} \cdot (dx'^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx'^n)_{a_n} \quad (12.2.10)$$

reláció teljesül, ami a Jacobi-mátrix determinánsának pozitivitása folytán az

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n}|_{\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'} = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} \cdot \det \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) \cdot (dx'^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx'^n)_{a_n}, \quad (12.2.11)$$

illetve az

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} |_{\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'} = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} \cdot (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n} \quad (12.2.12)$$

alakba írható át, ahol az utolsó lépésben a (11.2.1) feladat megoldásaként elő-  
álló

$$\det \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) \cdot (dx'^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx'^n)_{a_n} = (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n} \quad (12.2.13)$$

relációt használtuk fel.  $\square$

Legyen most  $(\mathcal{O}, \psi)$  tetszőleges térkép  $M$ -en, amelyen  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális ko-  
ordináták. Legyen továbbá  $\{e_a^{(a)}\}$  egy tetszőleges ortonormált duális bázis-  
mező  $M$ -en. Ekkor  $\mathcal{O}$  felett létezik egy  $A_\beta^a(x)$  nem-szinguláris  $n \times n$ -es mátrix  
úgy, hogy a  $\{(dx^\alpha)_a\}$  és  $\{e_a^{(a)}\}$  bázisokat a

$$e_a^{(a)} = A_\beta^a (dx^\beta)_a, \quad (12.2.14)$$

míg az ezekhez duális  $\{(\partial/\partial x^\alpha)^a\}$  és  $\{e_{(a)}^a\}$  bázisokat a

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right)^a = A_\beta^a e_{(a)}^a \quad (12.2.15)$$

relációk kapcsolják össze. Mindezekből azonnal következik, hogy

$$g_{\mu\nu} = g_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^b = g_{ab} [A_\mu^a e_{(a)}^a] [A_\nu^b e_{(b)}^b] = g_{ab} A_\mu^a A_\nu^b. \quad (12.2.16)$$

Így a

$$\det(g_{\mu\nu}) = (-1)^s \cdot \det(A_\mu^a)^2 \quad (12.2.17)$$

reláció is teljesül, ahol  $s$  a  $g_{ab}$  metrika szignatúrájában szereplő negatív elő-  
jelek számát jelöli. Következésképpen, amikor  $(\mathcal{O}, \psi)$  pozitívan irányított az  
 $e_{a_1}^{(1)} \wedge \dots \wedge e_{a_n}^{(n)}$   $n$ -formamezőre nézve, és így  $\det(A_\mu^a)$  pozitív, a fenti relációk,

valamint  $\mathcal{O}$  tetszőlegességének figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{|g|} = \det (A_\mu^a). \quad (12.2.18)$$

Ezen észrevételünknek megfelelően, a fenti eljárással kiválasztott tetszőleges  $\{e_a^{(a)}\}$  ortonormált bázis segítségével a térfogatelemet globálisan, azaz  $M$ -en mindenütt, az

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = e_{a_1}^{(1)} \wedge \dots \wedge e_{a_n}^{(n)} \quad (12.2.19)$$

alakban írhatjuk fel. Ezen utóbbi relációt, valamint a  $\wedge$ -szorzás és a szignatúra definícióját felhasználva az is látható, hogy

$$\begin{aligned} \varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} &= n! \cdot \left( g^{c_1 [a_1} e_{c_1}^{(1)} \right) \dots \left( g^{a_n] c_n} e_{c_n}^{(n)} \right) \left( n! \cdot e_{[b_1}^{(1)} \dots e_{b_n]}^{(n)} \right) \\ &= (-1)^s n! \cdot e_{(1)}^{[a_1} \dots e_{(n)}^{a_n] \left( e_{b_1}^{(1)} \dots e_{b_n]}^{(n)} \right) = (-1)^s n! \cdot \delta_{b_1}^{[a_1} \dots \delta_{b_n]}^{a_n], \end{aligned} \quad (12.2.20)$$

ahol az utolsó lépésben egyrészt a 4.3.2 feladatban, a szignatúra meghatározása kapcsán használt „sajátértékprobléma”  $g^{ab} e_b^{(a)} = \pm e_{(a)}^a$  alapegyenletét, valamint a duális bázisok elemeit összekötő  $e_{(a)}^a e_b^{(b)} = \delta_b^a \delta_a^b$  relációt használtuk fel.

**12.2.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a térfogati formára*

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_j b_{j+1} \dots b_n} = (-1)^s (n-j)! j! \cdot \delta_{b_{j+1}}^{[a_{j+1}} \dots \delta_{b_n]}^{a_n] \quad (12.2.21)$$

és így speciálisan az

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s \cdot n! \quad (12.2.22)$$

reláció is teljesül.

Gauss-tételének megfogalmazása előtt megmutatjuk, hogy a metrikával kompatibilis  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorra nézve nemcsak a metrika, hanem a térfogatelem is invariáns.

**12.2.2. Lemma.** *Legyen  $\nabla_a$  a metrikával kompatibilis kovariáns deriváló operátor. Ekkor*

$$\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (12.2.23)$$

*Bizonyítás:* Az állítás helyességének belátásához induljunk ki egy tetszőlegesen választott  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett az ott értelmezett  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordináták segítségével felírt

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \nabla_\beta \left[ \sqrt{|g|} \cdot (dx^1)_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{\alpha_n} \right] = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \nabla_\beta \left[ \sqrt{|g|} \right] \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sqrt{|g|} \cdot (dx^1)_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \nabla_\beta [(dx^j)_{\alpha_j}] \wedge \dots \wedge (dx^n)_{\alpha_n} \end{aligned} \quad (12.2.24)$$

egyenlőségből. A  $\nabla_\beta [(dx^j)_{\alpha_j}]$  kifejezést az  $(x^1, \dots, x^n)$  lokális koordinátákban kiértékelve azt kapjuk, hogy

$$\nabla_\beta [(dx^j)_{\alpha_j}] = \partial_\beta \partial_{\alpha_j} x^j - \sum_{\varepsilon=1}^n \Gamma_{\beta \alpha_j}^\varepsilon (dx^\varepsilon)_\varepsilon. \quad (12.2.25)$$

A jobb oldalon álló első kifejezés járuléka nulla, mivel az  $x^j$  koordinátafüggvények kétszeres parciális deriváltjai zérus értékűek. Ezek után a (12.2.25) jobb oldalán álló második kifejezést (12.2.24)-be helyettesítve, valamint a  $\wedge$ -szorzás tulajdonságai kihasználva azt kapjuk, hogy minden egyes ' $j$ ' értékre az  $\varepsilon$ -ra vett összegből pontosan csak annak az egy tagnak a járuléka nem lesz nulla, amelyre  $\varepsilon = \alpha_j$ . Így az  $(\mathcal{O}, \psi)$  térkép felett azt kapjuk, hogy

$$\nabla_\beta \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\beta [\sqrt{|g|}] - \sum_{\varepsilon=1}^n \Gamma_{\beta \varepsilon}^\varepsilon \right) \cdot \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (12.2.26)$$

Végül vegyük észre, hogy a jobb oldalon álló szorzat első tényezője azonosan nulla, hiszen

$$\sum_{\varepsilon=1}^n \Gamma_{\beta \varepsilon}^\varepsilon = \sum_{\varepsilon, \rho=1}^n \frac{1}{2} g^{\varepsilon \rho} \partial_\beta g_{\varepsilon \rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \partial_\beta g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\beta \sqrt{|g|}, \quad (12.2.27)$$

ahol az átalakítás első lépésében a metrika által meghatározott Christoffel-szimbólumok (5.4.43) definícióját, míg a második lépésében a mátrix kalku-

lus Jacobi-azonosságát az invertálható  $g_{\varepsilon\rho}$  metrikára alkalmazva kapott  $\partial_\beta g = g(g^{\varepsilon\rho} \partial_\beta g_{\varepsilon\rho})$  egyenlőséget használtuk fel.  $\square$

**12.2.1. Következmény.** Legyen  $v^a \in \mathcal{T}(M)$  tetszőleges differenciálható vektormező, továbbá  $(\mathcal{O}, \psi)$  tetszőleges térkép  $M$ -en. Ekkor

$$\nabla_a v^a|_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left[ \sqrt{|g|} v^\alpha \right]. \quad (12.2.28)$$

*Bizonyítás:*

$$\nabla_a v^a|_{\mathcal{O}} = \partial_\alpha v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\varepsilon} v^\varepsilon = \partial_\alpha v^\alpha + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\varepsilon \left[ \sqrt{|g|} \right] v^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left[ \sqrt{|g|} v^\alpha \right], \quad (12.2.29)$$

ahol a második lépésben (12.2.27)-et, valamint  $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$  kovariáns indexeiben vett szimmetriáját használtuk fel.  $\square$

## 12.3. Gauss-tétel

Legyen  $\mathcal{N}$  olyan kompakt részsokasága  $M$ -nek, melynek  $M$ -re vonatkozó  $\partial\mathcal{N}$  határa legalább szakaszonként  $C^1$ -osztályú. Legyen továbbá  $v^a$  legalább  $C^1$ -osztályú vektormező  $M$ -en, és tekintsük azt az  $\omega \in \Lambda_{n-1}(M)$   $(n-1)$ -forma-mezőt, amelyet az  $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$  térfogati forma és a  $v^a$  vektormező

$$\omega_{a_1 \dots a_{n-1}} = \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}} v^b \quad (12.3.30)$$

kontrakciója határoz meg. Ekkor azonnal adódik, hogy

$$(d\omega)_{ca_1 \dots a_{n-1}} = n \nabla_{[c} (\varepsilon_{b|a_1 \dots a_{n-1}}] v^b) = n \varepsilon_{b[a_1 \dots a_{n-1}} (\nabla_{c]} v^b) = (\nabla_b v^b) \varepsilon_{ca_1 \dots a_{n-1}}, \quad (12.3.31)$$

ahol  $\nabla_a$  a metrika által egyértelműen meghatározott kovariáns deriváló operátort jelöli, míg az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy az  $\varepsilon_{b[a_1 \dots a_{n-1}} (\nabla_{c]} v^b)$  kifejezés egy  $n$ -formamező, és így szükségképpen arányos a térfogatelemmel, továbbá az arányossági tényező a (12.2.22) reláció folytán  $(\nabla_b v^b)$ .



A Stokes-tétel felhasználásával mindezek alapján azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathcal{N}^\circ} (\nabla_b v^b) \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \int_{\partial \mathcal{N}} i^* (\varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}} v^b). \quad (12.3.32)$$

Ahogy azt korábban már megmutattuk,  $\partial \mathcal{N}$  irányítható sokaság. Amennyiben az is igaz, hogy  $\partial \mathcal{N}$  sehol sem fényszerű,<sup>1</sup> akkor az alábbi egyszerű konstrukció és a  $g_{ab}$  metrika segítségével meghatározhatjuk az  $\partial \mathcal{N}$ -en indukált  $\tilde{h}_{ab}$  metrikát, valamint az ahhoz tartozó  $\tilde{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$  térfogatelemet.

Az indukált metrika definíciójához szükségünk van a  $\partial \mathcal{N}$ -en az  $\mathcal{N}$  tartományból mindenütt kifelé mutató  $n_a$  egységnormális mezőre, melyet az alábbi egyszerű konstrukcióval készíthetünk el. Legyen  $\tilde{x}^n$  a 12.1.1 Lemma bizonyítása során kiválasztott  $n$ -edik koordináta, melyet a  $\partial \mathcal{N}$  határ  $\partial \mathcal{N}'$  részhalmazának egy  $\mathcal{O}$  nyílt környezetében értelmeztünk. Ez a függvény a zérus értéket veszi fel  $\partial \mathcal{N}'$ -en, ugyanakkor  $\partial_a \tilde{x}^n$  gradiense ott nem zérus, hiszen  $\tilde{x}^n$  az  $\mathcal{N}$  tartományból kifelé menve mindenütt növekszik. Az  $\tilde{x}^n$  függvény segítségével a keresett  $n_a$  formamező  $\partial \mathcal{N}'$ -en az

$$n_a = \frac{\partial_a \tilde{x}^n}{\sqrt{|g^{cd} \partial_c \tilde{x}^n \partial_d \tilde{x}^n|}} \quad (12.3.33)$$

egyenlettel adható meg, ahol a felület fényszerűségét kizáró korábbi feltételünk éppen a nevezőben előforduló  $g^{cd} \partial_c \tilde{x}^n \partial_d \tilde{x}^n$  belsőszorzat zérustól eltérő értékét hivatott biztosítani.

**12.3.1. Definíció.** *Tegyük fel, hogy a  $\partial \mathcal{N}$  hiperfelület sehol sem fényszerű. Ekkor a  $\partial \mathcal{N}$ -en indukált  $\tilde{h}_{ab}$  metrikán az  $M$ -en értelmezett*

$$h_{ab} = g_{ab} - (n^e n_e) n_a n_b \quad (12.3.34)$$

*szimmetrikus  $(0,2)$ -típusú tenzormező  $\iota : \partial \mathcal{N} \rightarrow M$  beágyazó leképezésre vonatkozó  $\tilde{h}_{ab} = \iota^* h_{ab}$  visszahúzottját értjük, ahol  $n_a$  a  $\partial \mathcal{N}$  hiperfelületen az  $\mathcal{N}$  tartományból mindenütt kifelé mutató egységnormálist jelöli.*

---

<sup>1</sup>Ez akkor fordulhat elő, ha  $g_{ab}$  Lorentz-szignatúrájú metrika. A (12.3.32) jobb oldalán szereplő integrál – ahogy ezt az alfejezet végén áttekintjük – még abban az esetben is értelmezhető, ha ez a technikai jellegű feltétel nem teljesül.

Mivel  $i^*(\epsilon_{ba_1\dots a_{n-1}}v^b)$  egy  $(n-1)$ -formamező az  $(n-1)$ -dimenziós  $\partial\mathcal{N}$  sokaságon, az szükségképpen arányos a  $\tilde{h}_{ab}$  metrika által egyértelműen meghatározott  $\tilde{\epsilon}_{a_1\dots a_{n-1}}$  térfogatelemmel.

**12.3.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a  $\partial\mathcal{N}$  hiperfelületen*

$$i^*(\epsilon_{ba_1\dots a_{n-1}}n^b) = \tilde{\epsilon}_{a_1\dots a_{n-1}}, \quad (12.3.35)$$

és így

$$i^*(\epsilon_{ba_1\dots a_{n-1}}v^b) = (n_bv^b)\tilde{\epsilon}_{a_1\dots a_{n-1}}, \quad (12.3.36)$$

ahol a  $i: \partial\mathcal{N} \rightarrow M$  leképezés a  $\partial\mathcal{N}$  határhalmaz  $M$ -be való természetes beágyazását jelöli.

Mindezeket felhasználva a Stoke-tételből az alábbi, a görbült geometriák esetére vonatkozó Gauss-tételt nyerjük.

**12.3.1. Tétel (Gauss-tétel).** *Legyen  $M$  irányítható, parakompakt differenciálható sokaság, valamint  $\mathcal{N} \subset M$  kompakt részhalmaz. Jelölje  $\partial\mathcal{N}$  az  $\mathcal{N}$  halmaz  $M$ -re vonatkozó  $\partial\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N}^\circ$  határát. Tegyük fel, hogy  $\partial\mathcal{N}$  sehol sem fényszerű és legalább szakaszonként  $C^1$ -osztályú. Legyen továbbá  $v^a$  legalább  $C^1$ -osztályú vektormező  $M$ -en. Ekkor*

$$\int_{\mathcal{N}^\circ} (\nabla_b v^b) \epsilon_{a_1\dots a_n} = \int_{\partial\mathcal{N}} (n_b v^b) \tilde{\epsilon}_{a_1\dots a_{n-1}}, \quad (12.3.37)$$

ahol  $n_a$  a  $\partial\mathcal{N}$  hiperfelületen az  $\mathcal{N}$  tartományból mindenütt kifelé mutató egységnormálist jelöli.

**12.3.1. Megjegyzés.** *Ahogy azt már jeleztük, a  $\partial\mathcal{N}$  hiperfelület kauzális jellegére kirótt feltételünk nem érinti a (12.3.37) összefüggés érvényességét. A fenti érvelésünknek megfelelően,  $\partial_a \tilde{x}^n$  lokálisan mindig a  $\partial\mathcal{N}$  hiperfelületre merőleges és onnan kifelé mutató egyformamezőt határoz meg, így  $\partial\mathcal{N}$  fényszerű részén az  $\tilde{\epsilon}_{a_1\dots a_{n-1}}$  térfogatelemet definiálhatjuk egyszerűen úgy, hogy megköveteljük ott a (12.3.35) és (12.3.36) relációk teljesülését az  $n_a = \partial_a \tilde{x}^n$  választás mellett. Ezek után nem meglepő, hogy a Gauss-tételben a  $\partial\mathcal{N}$  határ fényszerű*

*résznéek járulékat az így kapott térfogatelemmel számolva a (12.3.37) reláció érvényben marad [50].*



## **II. rész**

# **Az általános relativitáselmélet alapjai**



## 13. fejezet

# Az általános relativitáselmélet fizikai alapjai

Fizikai értelemben téridőn mindig valamely vizsgált fizikai rendszer történetének egészét, illetve az azzal kompatibilis összes lehetséges megfigyelő által regisztrált múlt-, jelen- és jövőbeni esemény összességét értjük. Ezzel szemben a matematikai fogalomalkotás meglehetősen technikai jellegű. Könyvünk első részében éppen a 1.1.2. definícióban alkalmazott fogalmak bemutatását tűztük ki célként, így mostanra a téridő alábbi matematikai meghatározásban szereplő fogalmaknak legalábbis ismerősen kellene csengeniük.

*Téridőn egy olyan  $(M, g_{ab})$  párt értünk, ahol  $M$  összefüggő, négydimenziós, Hausdorff, parakompakt, irányítható  $C^\infty$  differenciálható sokaság,  $g_{ab}$  pedig egy Lorentz-szignatúrájú metrika  $M$ -en. A téridőről feltesszük, hogy időirányítható, és egy időirányítást ki is választottunk rajta.*

### 13.1. Az alkalmazott hipotézisek

Az Einstein-elméletben – úgy, mint bármely más geometrizált gravitációelméletben – a téridő geometriája meghitt kapcsolatban van a téridőben található

anyag eloszlásával és mozgásállapotával. Ennek a kapcsolatnak a felderítése előtt feltétlenül szükséges, az alkalmazott modell keretein belül, maguknak az anyagmezőknek a megjelenítése is.

Az anyagmezők legegyszerűbb példájaként megemlíthetjük a valós, illetve komplex Klein-Gordon–mezőket, melyek egy, illetve két, az alapsokaságon értelmezett valós függvény segítségével írhatók le.

A skalármezőnél csak kis mértékben bonyolultabb az elektromágneses jelenségek leírása során használt  $F_{ab}$  Faraday-tenzor, vagy annak  $A_a$  vektorpotenciálja, melyek a téridőn adott két-, illetve egyformamezők. Fontos észben tartani, hogy a Poincaré-lemma állításának megfelelően az aszimmetrikus  $F_{ab}$  Faraday-tenzorhoz általában csak lokálisan létezik olyan  $A_a$  vektorpotenciál, amelyre az  $F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$  reláció teljesül.

Az is többször előfordul, hogy akár egyetlen anyagmező is csak több, és különböző típusú tenzormező együttesével ábrázolható. A legkézenfekvőbb, a későbbiekben általunk is többször vizsgált ilyen anyagmező a tökéletes folyadék, amelynek leírásához két skalár függvény—ezek a  $\rho$  energiasűrűség és a  $P$  nyomás—, valamint egy az áramlást kinematikailag megjelenítő  $u^a$  egységnyi normájú időszerű vektormezőből álló  $\{\rho, P, u^a\}$  hármas ismerete szükséges.

Mindezek alapján a továbbiakban – ismereteink korlátait tiszteletben tartva – azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élünk, hogy az anyagmezők véges számú, különböző típusú tenzormezővel ábrázolhatók a téridőben. Ahogy az imént említett példák is illusztrálják, ezen tenzormezők típusa anyagmezőről anyagmezőre változhat. Így az anyagmezőket a véges  $N \in \mathbb{N}$  elemű  $\{\psi_{(i)} \in \mathcal{T}^{k_i}_{l_i}(M) \mid 1 \leq i \leq N\}$  halmaz segítségével jelenítjük meg, ahol a  $\psi_{(i)}$  objektumok külön-külön  $(k_i, l_i)$ -típusú tenzormezőket jelölnek.

Kicsit túlzottnak tűnhet az a kincstári optimizmus, amelyre alapozottan megelégszünk az anyagmezőknek csupán tenzormezők segítségével történő megjelenítésével, hiszen köztudott, hogy a fizikán belül vannak olyan elméletek, ahol különböző félegész spinnel rendelkező részecskék leírása során „spinorok”-at



célszerű alkalmazni. Érdeemes megjegyezni, hogy ezeket a fizikai mezőket is mindig ábrázolhatjuk megfelelő számú tenzormező segítségével. Ennek alátámasztásául érdemes felidézni, hogy a minden kettős-spinor egy előjel erejéig egyértelmű módon megfeleltethető egy zászlóval ellátott fényszerű vektornak, azaz pontonként egy fényszerű négyesvektor és egy kétformamező párosával ábrázolhatók [28, 29]. Az is figyelemre méltó, hogy például a feles spinű elektronok leírásához használt Dirac-spinormezők is helyettesíthetők [47] egy ortonormált tetrádmező, valamint egy valós és egy komplex függvény megadásával. Sverdlov [47]-ben alkalmazott érvelését különösen érdekessé teszi, hogy a kinematikai ábrázoláson kívül a dinamikát meghatározó Lagrange-függvényt is származtatja. Azon érdeklődő olvasó, aki lényegesen szeretné bővíteni a spinormezőkkel kapcsolatos ismereteit, a témakör alapvető és részletekbe menő tárgyalását találhatja például a [28, 29] munkákban.

A fent megfogalmazottak értelmében, a matematikai modellalkotás szintjén, a téridőn valójában egy olyan összetett rendszert kellene értenünk, amely képes megjeleníteni mind a geometriára, mind pedig az anyagmezőkre vonatkozó feltevéseinket. Így egy téridőre gondolhatnánk úgy is, mint az anyagmezőkkel kibővített  $(M, g_{ab}, \{\psi_{(i)}\})$  rendezett hármasra, ahol az  $i$  névindex a véges  $\{1, \dots, N\}$  halmaz elemein fut végig, továbbá a  $\psi_{(i)}$  objektumok  $(k_i, l_i)$ -típusú tenzormezőket jelölnek.

Korábban, a differenciálható sokaságokat egymásba képező differenciálható leképezések tárgyalása során azt is láttuk, hogy amennyiben  $\phi : M \rightarrow M'$  egy diffeomorfizmus, akkor  $\phi$  segítségével nemcsak az  $M$  és  $M'$  sokaságokon értelmezett differenciális struktúrákat, de a rajtuk értelmezett tetszőleges típusú tenzormezőket is kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetjük egymásnak. Így, az  $(M, g_{ab}, \{\psi_{(i)}\})$  téridőmodellből kiindulva egy tetszőleges  $\phi : M \rightarrow M'$  segítségével mindig megkonstruálható egy másik  $(M', g'_{ab}, \{\psi'_{(i)}\})$  téridőmodell, ahol a  $g'_{ab}$  metrikát, valamint a  $\psi'_{(i)}$  mezőket a  $g'_{ab} = \phi^* g_{ab}$  és  $\psi'_{(i)} = \phi^* \psi_{(i)}$  relációkkal értelmezzük. Nyilvánvaló, hogy bármely az  $(M, g_{ab}, \{\psi_{(i)}\})$  téridőmodellben lejátszódó eseménysorból levonható fizikai következtetésnek

igaznak kell lennie az  $(M', g'_{ab}, \{\psi'_{(i)}\})$  téridőmodellben is, és fordítva. Így a fenti értelemben, a diffeomorfizmusok által egymásnak megfeleltetett téridőmodelleket egymással fizikai értelemben ekvivalenseknek kell tekintenünk. Ha még extrémebb fizikus gondolkodásmódot alkalmazunk, akkor úgy is fogalmazhatunk, hogy a diffeomorfizmusok éppen a geometrizált gravitációelméletek mérték (gauge) szabadsági fokait hordozzák, azaz a geometrizált gravitációelméletek, amilyen az Einstein-féle elmélet is, diffeomorfizmusinvariáns elméletek. Ezt fizikus berkekben úgy szokás megfogalmazni, hogy amennyiben a fizikai törvények kovariáns alakban kerültek megfogalmazásra, mindegy, hogy egy adott lokális tartományban milyen mozgást végző megfigyelőkhöz tartozó „vonatkoztatási rendszerben” írjuk le a lejátszódó folyamatokat. A diffeomorfizmusinvariancia által hordozott mértékszabadság hasonló ahhoz, amit a vektorpotenciálok segítségével megfogalmazott elektrodinamikában az  $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$  mértéktranszformáció esetében már megszoktunk, bár – amint azt többször lesz módunk megtapasztalni –, a diffeomorfizmusinvariancia annál azért sokkal összetettebb, sokrétűbb, hiszen a dinamikai folyamatoknak keretet adó matematikai entitásnak, a téridőnek a meghatározását érinti.

Mindezek fényében a téridő matematikai modelljén az  $(M, g_{ab}, \{\psi_{(i)}\})$  típusú rendezett hármasok halmazán a diffeomorfizmusok által indukált ekvivalenciarelációhoz tartozó ekvivalenciaosztályokat kellene értenünk. Ez a megközelítés azonban túlbonyolítaná még a legegyszerűbb fizikai állításaink megfogalmazását is, ezért a szakirodalomban használt konvenciókat követve [15], a továbbiakban téridőn mindig csak egy a kiválasztott ekvivalenciaosztályhoz tartozó, rögzített  $(M, g_{ab}, \{\psi_{(i)}\})$  reprezentánst értünk. Cserében azonban soha nem feledkezhetünk meg a diffeomorfizmusinvariancia következményeiről pontos fizikelembevételéről.

Az általános relativitáselmélet – a Mach-elvre, de még inkább az ekvivalencia törvényre alapozottan – azt tételezi fel, hogy nincs önmagában különálló gravitációs mező. A gravitációs effektusok teljes egészében a téridő geometri-

ájának görbültségével magyarázhatók. Az elmélet megalkotása során Einstein az alábbi két alapfeltevést használta.

**13.1.1. Hipotézis (Az általános kovariancia elve).** *Mind a téridő görbültségét, mind pedig az anyagi mozgásegyenleteket magukba foglaló alapegyenletekben a gravitációs hatások csak a téridő metrikáján, illetve az abból képzett tenzoriális, azaz kovariáns mennyiségeken keresztül jelenhetnek meg.*

**13.1.2. Hipotézis (A megfeleltetési elv).** *Szabad, azaz csak a gravitációs hatásoknak kitett mozgást végző megfigyelők lokálisan, a világvonaluk elegendően kicsiny környezetében, ugyanolyan fizikai jelenségeket, illetve törvényszerűségeket figyelhetnek meg, mint amelyeneket a gravitációs effektusoktól mentes Minkowski-téridőben elvégzett kísérleteikből származtathatnának.*

Az utóbbi elv praktikusán azt jelenti, hogy amennyiben a görbült téridőben érvényes téregyenletekben a  $g_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$ , valamint a  $\nabla_a \rightarrow \partial_a$  helyettesítést hajtjuk végre, akkor a mozgásegyenleteknek a speciális relativitáselméletben érvényes alakjához kell jutnunk. Érdeemes meggondolni, hogy ez az eljárás nem feltétlenül kölcsönösen egyértelmű, mégis ez az elv, amely majdnem mindig a segítségünkre van abban, hogy a fizikai törvények általános relativitáselméletben érvényesnek tekinthető alakját származtathassuk.

A fent megfogalmazott elveknek megfelelően a gravitációs kölcsönhatásnak tulajdonított effektusok leírását teljes egészében a téridő geometriájára hivatkozva kívánjuk megadni. A következő rész célja éppen az ehhez szükséges téregyenletek származtatása lesz.



## 14. fejezet

# A téregyenletek származtatása

Az Einstein-elméletben a gravitáció-anyag csatolt rendszerre vonatkozó téregyenleteket a Lagrange-formalizmusból ismert variációs elv segítségével származtatjuk. Először az anyagmezőkre vonatkozó, sok szempontból ismerősebb résszel foglalkozunk, majd a gravitációs hatásokat megjelenítő, a téridő geometriájának dinamikáját meghatározó téregyenleteket származtatjuk. Fontos annak hangsúlyozása, hogy az Einstein-elmélet eltér minden korábbi klasszikus fizikai elmélettől abban az értelemben, hogy itt a geometria és az anyag együttes evolúciójáról kell számot adnunk, nem pedig valamely anyagmezőnek – esetleg egyszerre több kölcsönhatásban is álló anyagmezőnek – egy egyszer és mindenkor adott fix geometriai háttéren lejátszódó történetéről.

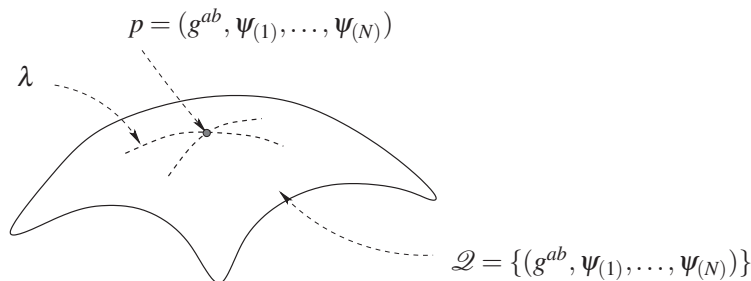
Mielőtt az említett variációs elv konkrét meghatározásához látnánk, célszerű felidézni néhány alapfogalmat. Ahogy azt az előző, bevezető részben már említettük, a téridőt a továbbiakban mindig egy  $(M, g_{ab}, \{\psi_{(1)}, \dots, \psi_{(N)}\})$  hármas-sal jelenítünk meg, ahol a  $\{\psi_{(1)}, \dots, \psi_{(N)}\}$  jelölés a  $\psi_{(i)}^{a_1 \dots a_{k_i}}{}_{b_1 \dots b_{l_i}} \in \mathcal{T}^{k_i}{}_{l_i}(M)$  tenzormezők együttesének rövidített megjelenítésére szolgál.

**14.0.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a téridő geometriáját meghatározó  $g^{ab}$  metrika<sup>1</sup> és az anyagmezőket megjelenítő  $\{\psi_{(i)}^{a_1 \dots a_{k_i}}_{b_1 \dots b_{l_i}}\}$  tenzormezőkből felépülő  $\mathcal{Q} = \{(g^{ab}, \psi_{(1)}, \dots, \psi_{(N)})\}$  konfigurációs tér egy pontja a fizikailag megvalósuló konfigurációt jeleníti meg, ha az

$$\mathcal{S} = \int_M \mathcal{L} \epsilon = \int_M [\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\psi] \epsilon \quad (14.0.1)$$

hatás ezen pontban felvett értéke extrémális, ahol az  $\mathcal{L}$  Lagrange-függvény az anyagmezőkre és a geometriára vonatkozó – eddig még meg nem határozott –  $\mathcal{L}_g$  és  $\mathcal{L}_\psi$  Lagrange-függvények összege úgy, hogy  $\mathcal{L}_g$  kizárólag csak a geometriától függ, míg az anyagmezők csak  $\mathcal{L}_\psi$ -ban jelenhetnek meg.

Az előző definícióban említett extremálitás pontosan akkor valósul meg, ha az alappont bármely egyparaméteres variációja esetén – ezeket a konfigurációs térben futó differenciálható görbék (lásd a 14.1 ábrát) jelenítik meg – a hatás adott paraméter szerinti deriváltja zérus az alappontban.



14.1. ábra. Az illusztrációnak szánt felület nemcsak a  $\mathcal{Q}$  konfigurációs teret, de a hatásnak, mint funkcionálnak egy megvalósuló fizikai állapot közelében való lehetséges viselkedését is jelzi.

<sup>1</sup>Mivel  $g_{ab}$  nemdegenerált, a kontravariáns  $g^{ab}$  metrika vele egyenértékű ábrázolása a téridő geometriájának. Éppen ezért ebben a fejezetben a variációkból származó kifejezések minél egyszerűbb levezetése érdekében általában a kontravariáns metrikát használjuk.

A fizikailag megvalósuló konfiguráció keresése során a konfigurációs térben a kiválasztott alappont bármely egyparaméteres variációi között találjuk azokat is, amelyekben egyszerre csak egyetlen mezőt variálunk, miközben az összes többi mezőt fixen tartjuk. Így az Euler–Lagrange-egyenletek származtatása során elegendő csak azt a mezőt variálni, amelyre vonatkozó téregyenletet szeretnénk meghatározni, míg az összes többi változót változatlanul tartjuk. Így, mielőtt a (14.0.1) hatás variációját vizsgálnánk érdemes definiálni, mit is értünk egy tetszőleges  $(k, l)$ -típusú tenzormező egyparaméteres variációján.

**14.0.2. Definíció.** Legyen  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  egy sima  $(C^\infty)$   $(k, l)$ -típusú tenzormező  $M$ -en,  $\mathcal{D}$  pedig az  $M$  differenciálható sokaság kompakt részhalmaza. Ekkor a  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzormező  $\mathcal{D}$ -re vonatkozó egyparaméteres variációján egy olyan, az  $M$ -en értelmezett  $(k, l)$ -típusú sima tenzormező  $k$  terében futó differenciálható  $\lambda^{\mathcal{D}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{T}^k_l(M)$  görbét értünk, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

- (1) A  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(\tau)$  mezőkkel ábrázolt  $\lambda^{\mathcal{D}}$  görbe  $\tau = 0$  paraméterértékéhez tartozó pontja éppen az eredetileg kiválasztott  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzormező  $M$ -en, azaz bármely  $p \in M$ -re

$$\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(0, p) = \varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(p). \quad (14.0.2)$$

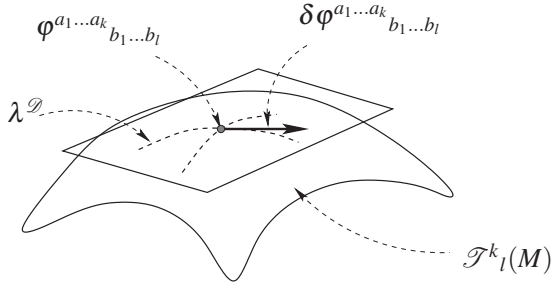
- (2) A  $\mathcal{D}$  kompakt tartományon kívül nem változtatjuk meg a  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzormezőt, azaz bármely  $q \in M \setminus \mathcal{D}$  és  $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  választás esetén

$$\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(\tau, q) = \varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(q). \quad (14.0.3)$$

A  $\lambda^{\mathcal{D}}$  görbe  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  alappontbeli

$$\delta \varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \left. \frac{\partial \varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (14.0.4)$$

érintővektorát – mely maga is egy  $(k, l)$ -típusú, kompakt tartójú, sima tenzormező  $M$ -en – a  $\varphi^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  tenzormező  $\lambda^{\mathcal{D}}$ -hez tartozó variációjának nevezzük.



14.2. ábra. Tenzormezők egyparaméteres variációinak illusztrációja.

A fenti definíció alapján nyilvánvaló, hogy a  $\delta\varphi^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}$  variáció kompakt tartójú és így  $\delta\varphi^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l}|_{\partial\mathcal{D}} = 0$ , hiszen a  $\mathcal{D}$  halmaz  $M$ -re vonatkozó  $M \setminus \mathcal{D}$  komplementerében sehol nem változtatjuk meg a mezőt.

### 14.1. Az anyagmezőkre vonatkozó téregyenletek

Tekintsük először az anyagmezőkhöz tartozó  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  Lagrange-függvényt. Ez egy olyan skalár függvény, amely differenciálható módon függ az anyagmezőket megjelenítő  $\psi_{(i)}^{a_1\dots a_{k_i}}_{b_1\dots b_{l_i}} \in \mathcal{T}^{k_i}_{l_i}(M)$  tenzormezőktől<sup>2</sup>, azok első kovariáns deriváltjaitól, valamint a metrika kontravariáns alakjától

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \left( g^{ab}, \psi_{(1)}^{\dots}, \dots, \nabla_e \psi_{(1)}^{\dots}, \dots, \psi_{(N)}^{\dots}, \nabla_e \psi_{(N)}^{\dots} \right). \quad (14.1.5)$$

A fenti általános megfontolásoknak megfelelően az  $i$ -edik  $\psi_{(i)}^{\dots}$  mezőre vonatkozó téregyenletek származtatása során a metrikát és a többi anyagi térváltozót fixen tartjuk. Így a (14.0.1) hatás, és így annak az anyagmezőkhöz tartozó

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \int_M \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \epsilon \quad (14.1.6)$$

<sup>2</sup>A rövidebb és így könnyebben áttekinthető formulák használata kedvéért a továbbiakban  $\psi_{(i)}^{a_1\dots a_{k_i}}_{b_1\dots b_{l_i}}$  tenzormezőket gyakran egyszerűen a  $\psi_{(i)}^{\dots}$  szimbólumokkal jelöljük.



része is pontosan akkor veszi fel szélsőértékét valamely alappontként kiválasztott konfigurációs térbeli pontban, azaz a  $\psi_{(i)} \dots$  tenzormezők külön-külön pontosan akkor tesznek eleget a rájuk vonatkozó téregyenleteknek, ha azok bármely egyparaméteres variációja esetén

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (14.1.7)$$

Az egyparaméteres variációk definíciója értelmében

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \tau} = \int_{\mathcal{Q}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \psi_{(i)} \dots} \delta \psi_{(i)} \dots + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \dots]} \delta [\nabla_e \psi_{(i)} \dots] \right\} \epsilon, \quad (14.1.8)$$

ahol az  $\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}} / \partial \psi_{(i)} \dots$  és  $\delta \psi_{(i)} \dots$  kifejezések  $(l_i, k_i)$ - és  $(k_i, l_i)$ -típusú tenzormezők  $M$ -en, így ezek kontrakciója valóban függvény  $M$ -en. Hasonlóan, a  $\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}} / \partial [\nabla_e \psi_{(i)} \dots]$  és  $\delta [\nabla_e \psi_{(i)} \dots]$  kifejezések  $(l_i + 1, k_i)$ -, illetve  $(k_i, l_i + 1)$ -típusú tenzormezők  $M$ -en.

Kihasználva, hogy a metrikát most nem változtatjuk, a (14.0.4) egyenlet által meghatározott variáció és a kovariáns deriválás hatásának sorrendje felcserélhető, és így teljesül a

$$\delta [\nabla_e \psi_{(i)} \dots] = \nabla_e [\delta \psi_{(i)} \dots] \quad (14.1.9)$$

reláció. Ezt, valamint a Leibnitz-szabályt felhasználva (14.1.8) jobb oldalának második tagja az

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \dots]} \nabla_e [\delta \psi_{(i)} \dots] &= \\ &= \nabla_e \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \dots]} \delta \psi_{(i)} \dots \right) - \nabla_e \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \dots]} \right) \delta \psi_{(i)} \dots \end{aligned} \quad (14.1.10)$$

alakban írható fel. Így (14.1.8) jobb oldalát az

$$\int_{\mathcal{D}} \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \psi_{(i)} \cdots} - \nabla_e \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \cdots]} \right] \right) \delta \psi_{(i)} \cdots \right\} \boldsymbol{\varepsilon} + \int_{\partial \mathcal{D}} n_e \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \cdots]} \delta \psi_{(i)} \cdots \right] \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (14.1.11)$$

alakban írhatjuk fel. Mivel a  $\delta \psi_{(i)}^{a_1 \dots a_{k_i}}{}_{b_1 \dots b_{l_i}}$  variáció kompakt tartójú és így eltűnik a  $\mathcal{D}$  halmaz határán, azaz  $\delta \psi_{(i)}^{a_1 \dots a_{k_i}}{}_{b_1 \dots b_{l_i}}|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ , a második tag járuléka zérus.

A fenti érvelésnek megfelelően, mivel a  $\delta \psi_{(i)}^{a_1 \dots a_{k_i}}{}_{b_1 \dots b_{l_i}}$  variáció tetszőleges, az  $i$ -edik  $\psi_{(i)}^{a_1 \dots a_{k_i}}{}_{b_1 \dots b_{l_i}}$  anyagmezőkre vonatkozó Euler–Lagrange-egyenletek a

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(i)} \cdots} := \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \psi_{(i)} \cdots} - \nabla_e \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial [\nabla_e \psi_{(i)} \cdots]} \right] = 0 \quad (14.1.12)$$

alakban írhatók fel.

## 14.2. A szimmetrikus energiainpulzus-tenzor

Amikor az (14.1.6) anyagi hatásban a  $\psi_{(i)} \cdots$  tenzormezőket rögzítjük és csak a  $g^{ab}$  metrikát változtatjuk, akkor jutunk a  $\psi_{(1)} \cdots, \dots, \psi_{(N)} \cdots$  anyagmezőkhöz tartozó  $T_{ab}$  szimmetrikus energiainpulzus-tenzorhoz.

**14.2.1. Definíció.** A  $\psi_{(1)} \cdots, \dots, \psi_{(N)} \cdots$  anyagmezőkhöz tartozó  $(0,2)$ -típusú szimmetrikus  $T_{ab}$  energiainpulzus-tenzort az anyagi hatás  $g^{ab}$  szerinti variációjának  $-\frac{1}{8\pi}$ -szorosaként definiáljuk, és így vagy a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\partial \tau} = \int_{\mathcal{D}} \left[ (-8\pi T_{ab}) \delta g^{ab} \right] \boldsymbol{\varepsilon} \quad (14.2.13)$$

relációval, vagy az *explicittebbnek tűnő*

$$T_{ab} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta g^{ab}} \quad (14.2.14)$$

kifejezéssel adjuk meg.

Érdeemes észben tartani, hogy a  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátor és az  $\boldsymbol{\varepsilon}$  térfogati forma is függ a metrikától, azaz  $T_{ab}$  meghatározása, a fenti egyszerűnek tűnő formális definíció ellenére különös gondosságot igényel. A térfogatelemhez tartozó járulék meghatározásában nyújt alapvető segítséget a következő egyszerű lemma.

#### 14.2.1. Lemma.

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} g_{ab} \delta g^{ab} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (14.2.15)$$

*Bizonyítás:* Legyen  $(\mathcal{O}, \psi)$  tetszőleges térkép  $M$ -en.  $\mathcal{O}$  felett az  $\boldsymbol{\varepsilon}$  térfogati forma az

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{-g} \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{-g} \mathbf{e} \quad (14.2.16)$$

alakban írható fel, ahol  $\mathbf{e} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ . Mivel a koordinátákat nem változtatjuk, a  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta(\sqrt{-g}) \mathbf{e}$  reláció teljesül. Felhasználva most a mátrix-kalkulus Jacobi-azonosságából az invertálható  $g_{\alpha\beta}$  metrikára vonatkozó

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\gamma \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{\partial_\gamma g}{g} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \quad (14.2.17)$$

összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (14.2.18)$$

ami  $\mathcal{O}$  felett igazolja a (14.2.15) relációt.  $\square$

A következő két feladatban érintett anyagmezők esetén a Lagrange-függvényben szereplő kovariáns deriváló operátor nem szükségképpen a metrikához tar-

tozó, azaz  $\nabla_a$  tetszőleges (és így akár rögzített) torziómentes kovariáns deriváló operátor is lehet. Így ezekben a speciális esetekben az energiaimpulzus-tenzor viszonylag egyszerűen meghatározható, hiszen ehhez csak a  $g^{ab}$  metrika és az  $\epsilon$  térfogatelem változását kell figyelembe venni.

**14.2.1. Feladat.** Tekintsünk elsőként egy  $\phi$  valós Klein–Gordon-mezőt, melynek Lagrange-függvényét – a megfeleltetési elv alapján – az

$$\mathcal{L}_{KG} = -8\pi [g^{ef} (\nabla_e \phi) (\nabla_f \phi) + m^2 \phi^2] \quad (14.2.19)$$

alakban adhatunk meg. Mutassuk meg, hogy az ebből származtatott Euler–Lagrange-egyenlet, illetve energiaimpulzus-tenzor a

$$\nabla^e \nabla_e \phi - m^2 \phi = 0, \quad (14.2.20)$$

illetve

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi) (\nabla_b \phi) - \frac{1}{2} g_{ab} [g^{ef} (\nabla_e \phi) (\nabla_f \phi) + m^2 \phi^2] \quad (14.2.21)$$

alakban írhatók fel.

**14.2.2. Feladat.** Tekintsünk most az elektrovákuum esetet, azaz tegyük fel, hogy az elektromágneses mező forrásmentes. A megfeleltetési elv alapján az elektrovákuumra vonatkozó Lagrange-függvényt a

$$\mathcal{L}_{EV} = -g^{ac} g^{bd} (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) (\nabla_c A_d - \nabla_d A_c) = -F_{ab} F^{ab} \quad (14.2.22)$$

alakban adhatjuk meg. Mutassuk meg, hogy az ebből származtatott Euler–Lagrange-egyenletet, illetve energiaimpulzus-tenzort a

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \quad (14.2.23)$$

illetve

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{ae} F_b^e - \frac{1}{4} g_{ab} F_{ef} F^{ef} \right] \quad (14.2.24)$$

alakban írhatjuk fel.

### 14.3. Az Einstein-egyenletek

A gravitációt megjelenítő metrikára vonatkozó téregyenletek származtatása előtt először is találnunk kell egy olyan alkalmas Lagrange-függvényt, amely éppen az ehhez szükséges hatást határozza meg.

A gravitációs hatással kapcsolatban természetes az az elvárás, hogy a kapott téregyenlet lassú mozgás és nem túl erős gravitációs effektusok estén, határesetben adja vissza a Newton-elmélet alapegyenletét. Utóbbi nem más, mint a  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$  alakban felírt Poisson-egyenlet, ami egy másodrendű parciális differenciál egyenlet a  $\phi$  gravitációs potenciálra, ahol  $G$  a Newton-féle gravitációs állandó,  $\rho$  pedig a forrás energiasűrűség eloszlását jeleníti meg. Éppen ezért, a lehetséges gravitációs hatás kiválasztása során az egyik alapkritériumunk az, hogy a belőle származtatható téregyenletek legfeljebb másodrendűek legyenek. Ez pontosan akkor következik be, ha a Lagrange-függvény az alapváltozóknak vagy csak az elsőrendű deriváltjait tartalmazza, vagy amikor előfordulnak másodrendű deriváltak is, az azokhoz tartozó variációk során előálló harmadrendű deriváltakat tartalmazó kifejezések egy teljes divergenciába foglalhatók. Ezt a kiválasztási elvet követve mutatta meg David Hilbert 1915-ben, hogy 4-dimenziós téridők esetén az egyetlen olyan geometriai térváltozók segítségével előállítható skalárfüggvény, amely egyrészt tartalmazza a metrika elsőrendű deriváltjait, másrészt a benne előforduló másodrendű deriváltakra teljesül az imént megfogalmazott feltétel, az nem más, mint az  $R = g^{ab}R_{ab} = R_a{}^a = R_{ab}{}^{ab}$  görbületi skalár. Ennek alapján a geometriára vonatkozó Hilbert-hatást az

$$\mathcal{S}_g = \frac{1}{\kappa} \int_M R \epsilon \quad (14.3.25)$$

segítségével írta fel, ahol  $\kappa$  egy egyelőre még meg nem határozott konstans, mely az anyagi részhez való dimenzionális illeszkedést biztosítja majd. Vegyük észre, hogy a  $\mathcal{L}_g = \frac{1}{\kappa} R$  Lagrange-függvény eleget tesz annak a korábban megfogalmazott elvárásunknak is, hogy nem függ az anyagi térváltozóktól.

Természetesen merül fel az a kérdés, hogy vajon a metrikából és a görbületi tenzorból kiindulva nem lehet-e más skalárfüggvényt konstruálni úgy, hogy az abból származtatott téregyenletek az  $\mathcal{L}_g = \frac{1}{\kappa}R$  választáshoz tartozó téregyenletek értelmes alternatívái lehessenek. Éppen ezért fontos annak hangsúlyozása, hogy a görbületi skalár az egyetlen olyan skaláris kifejezés, amely teljes divergenciába foglalhatóan tartalmazza a metrika második deriváltjaihoz tartozó variációkat. Amennyiben például az  $R_{ab}R^{ab}$  vagy az  $R_{abcd}R^{abcd}$  típusú kontrakciókkal próbálkoznánk, a másodrendű téregyenletek helyett automatikusan legalább harmadrendű téregyenleteket kapnánk, ami tekintve a többi fizikai elméletben általánosan elfogadott bonyolultsági szintet, meglehetősen bizarr gravitációelméletet eredményezne.

A gravitációs részre vonatkozó téregyenlet meghatározása során a 14.2.1 lemmában bizonyított  $\delta \epsilon = -\frac{1}{2}g_{ab}\delta g^{ab}\epsilon$  összefüggés mellett fel kell használnunk a következő lemma állítását is, amely igazolja, hogy a (14.3.25) választás mellett a metrika másodrendű deriváltjaihoz tartozó variációk valóban egy teljes divergenciába foglalhatók.

### 14.3.1. Lemma. Jelölje

$$C^c{}_{ab}(\tau) = \frac{1}{2}g^{ce}(\tau)\{\nabla_a g_{eb}(\tau) + \nabla_b g_{ae}(\tau) - \nabla_e g_{ab}(\tau)\} \quad (14.3.26)$$

$a$   $g_{ab}(\tau)$  és  $g_{ab} = g_{ab}(\tau=0)$  metrikához tartozó  $\nabla_a^{(\tau)}$  és  $\nabla_a = \nabla_a^{(\tau=0)}$  kovariáns deriváltakat összekötő (1,2)-típusú tenzormezőt  $M$ -en. Ekkor

$$g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla_d \left[ (\delta C^d{}_{ab})g^{ab} - (\delta C^e{}_{eb})g^{bd} \right] = \nabla_d v^d. \quad (14.3.27)$$

*Bizonyítás:* A (6.6.36) egyenlet származtatása során alkalmazott gondolatmenet azon egyszerű módosításával, amikor a  $\partial_a$  deriváltat az  $R_{abc}{}^d \neq 0$  görbülettel rendelkező  $\nabla_a$  kovariáns deriváltra cseréljük ki, azt kapjuk, hogy a  $\nabla_a^{(\tau)}$  és  $\nabla_a = \nabla_a^{(\tau=0)}$  kovariáns deriváltakhoz tartozó görbületi tenzorokat az

$$R_{abc}{}^d(\tau) = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a}C^d{}_{b]c}(\tau) + 2C^e{}_{c[a}(\tau)C^d{}_{b]e}(\tau) \quad (14.3.28)$$

egyenlet kapcsolja össze. Így a megfelelő Ricci-tenzorok az

$$R_{ab}(\tau) = R_{ab} - 2\nabla_{[a}C^d{}_{d]b}(\tau) + 2C^e{}_{c[a}(\tau)C^d{}_{d]e}(\tau), \quad (14.3.29)$$

míg a Ricci-tenzor

$$\delta R_{ab} = \left. \frac{\partial R_{ab}(\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (14.3.30)$$

variációjára a

$$\delta R_{ab} = -2\nabla_{[a}(\delta C^d{}_{d]b}) = \nabla_d(\delta C^d{}_{ab}) - \nabla_a(\delta C^e{}_{eb}) \quad (14.3.31)$$

reláció adódik, ahol az utolsó lépésben azt is kihasználtuk, hogy  $C^c{}_{ab}(\tau = 0) = 0$ . Végül a (14.3.31) egyenletet  $g^{ab}$ -vel kontrahálva kapjuk a (14.3.27) egyenletet, a

$$v^d = (\delta C^d{}_{ab})g^{ab} - (\delta C^e{}_{eb})g^{bd} \quad (14.3.32)$$

választás mellett.  $\square$

Ezek után a Hilbert-hatás metrika szerinti variációját a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \tau} &= \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{D}} \left[ \left\{ \delta R_{ab} g^{ab} + R_{ab} \delta g^{ab} \right\} \boldsymbol{\epsilon} + R \delta \boldsymbol{\epsilon} \right] = \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{D}} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial \mathcal{D}} n_e v^e \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (14.3.33)$$

alakban írhatjuk fel.

Mivel a  $\delta C^d{}_{ab}$  variáció és így a  $\nabla_d(\delta C^d{}_{ab})$  deriváltak is zérus értékűek a  $\mathcal{D} \subset M$  tartomány komplementerében, azonosan eltűnnek a  $\mathcal{D} \subset M$  tartomány határán is, ezért (14.3.33) utolsó tagjának járuléka nulla. Így, amikor a teljes  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  Lagrange-függvény metrika szerinti variációját tekintjük, akkor az

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi \kappa T_{ab} \quad (14.3.34)$$

Einstein-egyenletekhez jutunk.

A  $\kappa$  állandó értékét dimenzionális meggondolások, valamint a Newtoni-határesetre vonatkozó elvárásaink alapján  $G/c^4$  értékűnek szokás választani. A továbbiakban mi majdnem mindig a geometrizált egységeket fogjuk használni, ami azt jelenti, hogy mind  $G$ , mind pedig  $c$  értéke 1, azaz  $\kappa$  is egységnyi, továbbá minden fizikai mennyiség, amit különféle mértékegységek kombinációival adhatunk meg a geometrizált egységrendszerben, egyszerűen a hossz különféle hatványaival lesz kifejezhető [50]. A  $8\pi$  értékét természetesen nem választhatjuk egységnyinek, ami azzal az előnnyel is jár, hogy jelzi, hová kell visszailleszteniünk a  $\kappa = G/c^4$  kifejezést, ha vissza szeretnénk térni például az SI egységrendszerhez.

Érdeemes megjegyezni, hogy amikor a  $\Lambda \in \mathbb{R}$  kozmológia állandót is tartalmazó módosított

$$\mathcal{S}_{g_\Lambda} = \int_M (R - 2\Lambda) \mathbf{e} \quad (14.3.35)$$

gravitációs hatásból indulunk ki, akkor

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (14.3.36)$$

kozmológia állandóval bővített Einstein-egyenletekhez jutunk.

**14.3.1. Megjegyzés.** A (14.3.33) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja külön figyelmet érdemel. Ez a tag csak akkor lesz nulla, ha nemcsak a metrikának, de annak első parciális deriváltjának variációja is eltűnik a  $\mathcal{D} \subset M$  tartomány határán. Ezt a kényelmetlenséget például azzal a technikai jellegű feltétellel lehet kiküszöbölni, hogy a (14.3.25) hatás helyett a

$$\mathcal{S}'_g = \mathcal{S}_g - 2 \int_{\partial \mathcal{D}} K \tilde{\mathbf{e}} \quad (14.3.37)$$

hatást variáljuk, ahol  $K$  a  $\partial \mathcal{D}$  határ

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_n h_{ab} \quad (14.3.38)$$

külső görbületének  $K = K_{ab} h^{ab} = \nabla^a n_a$  kontrakcióját jelöli [50].



*Ennél sokkal elegánsabb a Palatini által javasolt módszer. Palatini a Hilbert-hatásban szereplő metrikát és torziómentes kovariáns deriváltat – őket egymástól függetlennek tekintve – külön-külön variálta és azt találta, hogy a metrika szerinti variáció ekkor is az Einstein-tenzort adja, míg a kovariáns derivált szerinti variációból automatikusan a kovariáns derivált metrikával való (5.4.35) kompatibilitási feltétele adódik.*

## 14.4. A diffeomorfizmusinvariancia következményei

Tekintsünk most egy olyan  $\phi : M \rightarrow M$  diffeomorfizmust, amely egy tetszőlegesen kiválasztott, de rögzített  $\mathcal{D} \subset M$  kompakt tartományon kívül minden ponthoz önmagát rendeli. Ekkor az integrálok meghatározására vonatkozó (12.0.7) tulajdonság alapján egyrészt az

$$\int_M \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{M=M'} \phi^* (\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (14.4.39)$$

egyenlőséget, míg  $\phi$  megválasztása alapján az ebből következő

$$\int_{\mathcal{D}} [\phi^* (\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varepsilon}] = 0 \quad (14.4.40)$$

relációt kapjuk. Legyen  $\phi_t : M \rightarrow M$  egyparaméteres diffeomorfizmuscsoport, melyet egy olyan  $\xi^a$  vektormező generál, amely eltűnik a  $\mathcal{D}$  tartomány komplementerében. Ekkor a (14.4.40) egyenlet  $\phi^* \rightarrow \phi_t^*$  helyettesítéssel vett alakját, valamint a Lie-deriválás (10.0.1) definícióját felhasználva a

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}_{\xi} [\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varepsilon}] = 0 \quad (14.4.41)$$

relációhoz jutunk. Az utóbbi egyenlet a Leibnitz-szabály, valamint a (14.1.11) egyenletek bal oldala által definiált  $\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(i)} \dots}$  Euler-Lagrange-kifejezések és az

energiaimpulzus-tenzor definíciója alapján

$$\int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(1)} \dots} \xi_{\xi} \psi_{(1)} \dots + \dots + \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(N)} \dots} \xi_{\xi} \psi_{(N)} \dots + [-8\pi T_{ab}] \xi_{\xi} g^{ab} \right\} \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (14.4.42)$$

alakban írható fel.

Ezt az egyenletet kétféleképpen is interpretálhatjuk. Az egyik lehetőség az, hogy feltesszük, hogy teljesülnek a  $\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(i)} \dots} = 0$  anyagi Euler-Lagrange-egyenletek. Ekkor az  $\xi_{\xi} g^{ab} = -2\nabla^{(a} \xi^{b)}$  reláció,  $T_{ab}$  szimmetriája, valamint a Leibnitz-szabály ismételt használata révén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} T_{ab} \xi_{\xi} g^{ab} \boldsymbol{\varepsilon} &= -2 \int_{\mathcal{D}} T_{ab} \nabla^a \xi^b \boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= -2 \left[ \int_{\partial \mathcal{D}} n_a \left( T^a_b \xi^b \right) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \int_{\mathcal{D}} (\nabla^a T_{ab}) \xi^b \boldsymbol{\varepsilon} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14.4.43)$$

Kihasználva most azt, hogy a  $\xi^a$  vektormező eltűnik a  $\mathcal{D}$  tartomány komplementerében és így az zérus a  $\partial \mathcal{D}$  határon is, azt kapjuk, hogy a jobb oldal első tagjának járuléka zérus. Végül figyelembe véve azt, hogy a  $\xi^a$  vektormező a  $\mathcal{D}$  tartomány belsejében tetszőleges, azt kapjuk, hogy

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (14.4.44)$$

Így, amikor az anyagmezőkre vonatkozó Euler-Lagrange-egyenletek teljesülnek, a diffeomorfizmusinvariancia egyik következményeként azt kapjuk, hogy az energiaimpulzus-tenzor szükségképpen divergenciamentes.

Megfordítva, amikor az energiaimpulzus-tenzor divergenciamentessége garantált, akkor a (14.4.42) egyenlet alapján az anyagmezőkre vonatkozó  $\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{A}}}{\delta \psi_{(i)} \dots}$  Euler-Lagrange-kifejezések, valamint a  $\xi^a$  vektormezőhöz tartozó  $\xi_{\xi} \psi_{(i)} \dots$  Lie-deriváltak (14.4.42) integrandusában szereplő kombinációira vonatkozó megszorítást tudunk származtatni.

Érdemes megjegyezni, hogy amikor a fent alkalmazott gondolatmenetet az  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{L}_g$  helyettesítéssel megismételjük, akkor a diffeomorfizmusinvarianciára hivatkozva a

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (14.4.45)$$

egyenlethez jutunk, ami nem más, mint a kétszer kontrahált Bianchi-azonosság. Így ebben az esetben a diffeomorfizmusinvariancia a már eddig is ismert geometriai tulajdonságokon felül semmi újat nem ad.

## 14.5. Általános megjegyzések

A későbbi fejezetekben a gravitáció és anyag különféle csatolt speciális rendszereivel foglalkozunk. Mielőtt erre rátérnénk, álljon itt néhány általános megjegyzés.

- Tekintsünk a téridő alapsokaságán egy tetszőleges  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképet, amelyen  $x^1, \dots, x^n$  lokális koordináták. Ekkor a (6.6.36) reláció kontrakciójával nyert

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\epsilon \Gamma^\epsilon_{\alpha\epsilon} - \partial_\alpha \Gamma^\epsilon_{\epsilon\beta} + \Gamma^f_{\alpha\beta} \Gamma^\epsilon_{\epsilon\phi} - \Gamma^\phi_{\epsilon\beta} \Gamma^\epsilon_{\alpha\phi}, \quad (14.5.46)$$

valamint a

$$\Gamma^\gamma_{ab} = \frac{1}{2} g^{\gamma\epsilon} \{ \partial_\alpha g_{\epsilon\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\epsilon} - \partial_\epsilon g_{\alpha\beta} \} \quad (14.5.47)$$

összefüggéseknek megfelelően Ricci-tenzor  $R_{\alpha\beta}$  komponenseit, mint a  $g_{\alpha\beta}$  metrika koordináták szerinti legfeljebb másodrendű deriváltjaitól függő erősen nemlineáris kifejezést írhatjuk fel.

A nemlinearitás mértékét, ahogy arra már az előszóban rámutattunk, jól érzékelteti az az észrevétel, hogy (14.5.46) két utolsó tagja már egy négydimenziós téridőben is – a metrikus tenzor komponenseiből, valamint azok parciális deriváltjaiból felépülő – két nyolcadrendű polinom hányadosaként írható fel.

Mindezeknek megfelelően a (14.3.34) Einstein-egyenletek, még a  $T_{ab} \equiv 0$  egyenletnek megfelelő, tisztán vákuum probléma esetében is a metrikus tenzor tíz független komponensére vonatkozó, erősen nemlineáris, csatolt másodrendű parciális differenciálegyenletrendszer képeznek. Ahogy azt a 14.6. alfejezetben megmutatjuk, a metrika Lorentz-szignatúrájának köszönhetően, a diffeomorfizmusinvarianciát kihasználva, alkalmas mértékrögzítés révén ezek az egyenletek olyan csatolt, nemlineáris hullámegyenletekként írhatók fel, amelyekre értelmes kezdőértékprobléma fogalmazható meg.

- Amikor  $T_{ab} \neq 0$  az Einstein-egyenleteket az anyagmezőkre vonatkozó Euler–Lagrange-egyenletekkel együtt, szimultán kell megoldani. Így például az Einstein–Klein–Gordon-rendszer esetén a csatolt téregyenleteket az

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi \left[ (\nabla_a \phi) (\nabla_b \phi) - \frac{1}{2} g_{ab} [g^{ef} (\nabla_e \phi) (\nabla_f \phi) + m^2 \phi^2] \right] \quad (14.5.48)$$

$$g^{ef} \nabla_e \nabla_f \phi - m^2 \phi = 0, \quad (14.5.49)$$

alakban írhatjuk fel. Mivel mind a  $g_{ab}$  metrika, mind pedig a  $\phi$  skalármező mindkét egyenletben szerepel, ezek valóban csak egyszerre határozhatók meg.

- Einstein már az elmélet megalkotása során értelmezte a próbatest fogalmát. Próbatesten olyan pontszerűnek tekinthető objektumot értünk, amelynek a környezet által okozott gravitációs hatásokhoz viszonyított gravitációs önkölcsönhatása elhanyagolható. Az Einstein által megfogalmazott geodetikus hipotézis értelmében a csak gravitációs hatásoknak kitett próbatestek geodetikus pályán mozognak. Érdeemes megemlíteni, hogy azóta nemcsak próbatestekre, de minden olyan korlátozottan kiterjedt test esetében is, amelyhez a tömegközéppont fogalma értelmes módon bevezethető, az Einstein-egyenletek  $\nabla^a T_{ab} = 0$  integrálhatósági

feltételéből kiindulva sikerült bizonyítani [5, 3], hogy a test tömegközéppontjának  $u^a$  egységnyi normájú négyessebesség vektora elegendően nagy pontossággal eleget tesz az  $u^e \nabla_e u^a = 0$  geodetikus egyenletnek. Így a geodetikus hipotézis magából a gravitáció-anyag csatolt egyenleteinek egyik következményéből származtatható. Ez az eredmény lényegesen erősíti az Einstein-elmélet önkonzisztenciájába vetett hitünket is.

- Milyen mértékben határozódik meg a téridő  $R_{abc}{}^d$  görbületi tenzora? A Ricci-tenzor és a görbületi skalár bevezetése során, a 6.3 alfejezetben az  $R_{abcd}$  görbületi tenzort a  $g_{ab}$  metrika, az  $R_{ab}$  Ricci-tenzor, az  $R$  görbületi skalár, valamint a  $W_{abcd}$  Weyl-tenzor felhasználásával a

$$R_{abcd} = W_{abcd} + \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b} \quad (14.5.50)$$

alakban írtuk fel. Emellett, az Einstein-egyenletek alapján a Ricci-tenzort, illetve a görbületi skalárt az

$$R_{ab} = 8\pi [T_{ab} - \frac{1}{n-2} g_{ab} T], \text{ illetve } R = -\frac{16\pi}{n-2} T \quad (14.5.51)$$

alakban adhatjuk meg az energiaimpulzus-tenzor, illetve annak  $T = T_e{}^e = T_{ef} g^{ef}$  kontrakciója segítségével. Így naivan azt is gondolhatnánk, hogy a Weyl-tenzor a görbület azon része, amit nem határoz meg a  $T_{ab}$  anyageloszlás. Azonban ez nincs így. Gondoljunk ugyanis arra, hogy az  $R_{abcd}$  Riemann-tenzor eleget tesz a  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$ , vagy a vele egyenértékű

$$\nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e = 0 \quad (14.5.52)$$

Bianchi-azonosságnak, illetve abból – az ‘ $a$ ’ és ‘ $e$ ’ indexekben vett kontrakció révén – kapott egyszer kontrahált

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd} = 0 \quad (14.5.53)$$

alakjának.

**14.5.1. Feladat.** A (14.5.50) és (14.5.53) egyenletek felhasználásával mutassuk meg, hogy a  $W_{abcd}$  Weyl-tenzorra a

$$\nabla^d W_{abcd} = \frac{2(n-3)}{(n-2)} \nabla_{[b} R_{a]c} + \frac{(n-3)}{(n-1)(n-2)} g_{c[b} \nabla_{a]} R := 4\pi J_{abc} \quad (14.5.54)$$

egyenlet teljesül, ahol  $J_{abc}$  az első két indexében antiszimmetrikus,  $(0, 3)$ -típusú anyagáram-tenzort jelöli.

Mivel a (14.5.51) relációk értelmében a  $J_{abc}$  anyagáram-tenzor egyértelműen meghatározható a  $T_{ab}$  anyageloszlás ismeretében, a görbület Weyl-része is legalább olyan mértékben a  $T_{ab}$  anyageloszlás által meghatározott, mint maga a Ricci-rész. A (14.5.54) egyenlet használata különösen adekvát lenne a gravitációs sugárzások tanulmányozása során, hiszen ott az ennek kapcsán vizsgált aszimptotikusan sík téridőkben a Weyl-tenzor konforminvarianciája alapvetően leegyszerűsíti a konformis kompaktifikációs technika alkalmazása során a nemfizikai téridő geometriájára vonatkozó téregyenletek egy részének származtatását [9, 10].

Mielőtt tovább mennénk, érdemes rácsodálkozni arra, hogy a (14.5.54) egyenlet szellemiségében nagyon emlékeztet a forrással rendelkező elektromágneses térre vonatkozó

$$\nabla^a F_{ab} = 4\pi J_b \quad (14.5.55)$$

Maxwell-egyenletre, ahol  $F_{ab}$  az elektromágneses tértenzort,  $J_a$  pedig a téridőben található töltésáramokat jeleníti meg.

## 14.6. Az Einstein-egyenletek, mint hullámegyenletek

Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy az Einstein-egyenletek egy csatolt, erősen nemlineáris hullámegyenlet-rendszerré írhatók át. Amint ez hamarosan nyilvánvaló lesz, ebben ismét az elmélet diffeomorfizmusinvarianciája játssza a főszerepet. Azt is fontos megemlíteni, hogy az ismertetett gondo-

latmenet Choquet-Bruhat [2] alapvető felismerésére, valamint annak Helmut Friedrich [11] által nyújtott általánosítására épül. Konkrétabban a lentebb ismertetett gondolatmenet ezeknek az alapvető eredményeknek a különféle fizikailag reális anyagmezők bevonásával nyert általánosítását mutatja be [34]. Az érdeklődő olvasó az összes ismert anyagmezőt felölelő tárgyalást találhat [35]-ben.

A téridőt ebben a részben is egy  $(M, g_{ab})$  párral jelenítjük meg, ahol  $M$  sima, parakompakt, összefüggő, irányítható és differenciálható sokaság, míg  $g_{ab}$  sima Lorentz-metrika  $M$ -en. Mivel a  $g_{ab}$  metrika segítségével bármely tenzoriális kifejezés kovariáns indexe le húzható, a téridőn értelmezett anyagmezőkről – az általánosság megszorítása nélkül – feltehetjük, hogy azokat  $(0, l_i)$  típusú  $\psi_{(i)a\dots b}$  tenzormezők ábrázolják. Ezekről a mezőkről feltesszük, hogy azok a

$$\nabla^a \nabla_a \psi_{(i)} = \mathcal{F}_{(i)} \left( \psi_{(i)}, \nabla_c \psi_{(i)}, g_{ef} \right) \quad (14.6.56)$$

alakú általános nemlineáris hullámeqyenleteknek tesznek eleget, ahol a  $\psi_{(i)}$  objektumok a  $(0, l_i)$  típusú  $\psi_{(i)a\dots b}$  tenzormezők rövidített jelölésére szolgálnak, továbbá az  $\mathcal{F}_{(i)}(0, l_i)$  típusú tenzoriális mennyiségek a jelzett változóik sima kifejezései. Érdemes megemlíteni, hogy (14.6.56) típusú egyenletnek tesz eleget például a Klein-Gordon skalármező, az elektrodinamikai tereket megjele-  
nítő vektorpotenciál, de a részecskefizikai modellalkotásban alapvető szerepet játszó Yang-Mills-Higgs mezők mindegyike is [34].

A metrikára vonatkozó téregyenlet kapcsán azzal a feltételezéssel élünk, hogy azt az

$$R_{ab} = \mathcal{R}_{ab} \left( \psi_{(i)}, \nabla_c \psi_{(i)}, g_{ef} \right) \quad (14.6.57)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $R_{ab}$  a metrikával kompatibilis  $\nabla_a$  kovariáns deriváló operátorhoz tartozó Ricci-tenzort,  $\mathcal{R}_{ab}$  pedig a jelzett változóinak egy olyan sima  $(0, 2)$  típusú tenzoriális kifejezése, amelyre teljesül a

$$\nabla^a \mathcal{R}_{ab} = 0 \quad (14.6.58)$$

reláció. Speciálisan, például négydimenzióban a kozmológia konstanssal kibővített Einstein-egyenletek esetén

$$\mathcal{R}_{ab}(\Psi_{(i)}, \nabla_c \Psi_{(i)}, g_{ef}) = 8\pi (T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T) - \Lambda g_{ab}. \quad (14.6.59)$$

Mivel csak a tenzoregyenletekből nyert parciális differenciálegyenletek megoldhatóságáról tudunk beszélni, fontos annak meghatározása, hogy milyen alakot öltenek a (14.6.56) és (14.6.58) egyenletek valamely tetszőlegesen választott  $x^\alpha$  lokális koordinátákban. Ehhez először is idézzük fel, hogy az  $R_{ab}$  Ricci-tenzort az

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta} + g_{\delta(\alpha}\nabla_{\beta)}\Gamma^\delta + H'_{\alpha\beta}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}) \quad (14.6.60)$$

alakban írhatjuk, míg a  $\nabla^a\nabla_a\Psi_{(i)}$  kifejezés  $x^\alpha$  lokális koordinátákhoz tartozó alakjának egyik tagjában megjelenő  $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Gamma^\gamma_{\nu\alpha}$  operátorra

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Gamma^\gamma_{\nu\alpha} = R_\alpha{}^\gamma + \nabla_\alpha\Gamma^\gamma + H_\alpha{}^{*\gamma}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}) \quad (14.6.61)$$

teljesül, ahol

$$\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \quad (14.6.62)$$

és  $H'_{\alpha\beta}$  és  $H_\alpha{}^{*\gamma}$  a jelzett változóik sima kifejezései.

Így például az  $x^\alpha$  lokális koordinátákban (14.6.56) a

$$\begin{aligned} \nabla^\mu\nabla_\mu\Psi_{(i)} = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Psi_{(i)} - \sum_{k=1}^{l_i} \left(\Psi_{(i)}\right)_\delta^{[\alpha_k]} \left(R_{\alpha_k}{}^\delta + \partial_{\alpha_k}\Gamma^\delta\right) + \\ + \mathcal{H}'_{(i)}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}, \Psi_{(j)}, \partial_\gamma\Psi_{(j)}) \end{aligned} \quad (14.6.63)$$

alakba írható, ahol  $\left(\Psi_{(i)}\right)_\delta^{[\alpha_k]}$  a  $\Psi_{(i)\alpha_1\dots\alpha_{k-1}}\delta\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l_i}$  komponenst jelöli, továbbá a  $\mathcal{H}'_{(i)}$  kifejezések most is sima függvényei a jelzett változóknak.

A fentiek figyelembevételével egyszerű algebrai átalakítások révén megmutatható, hogy a vizsgált gravitáció-anyagmezők csatolt rendszerére érvényes



(14.6.56) és (14.6.58) téregyenletek átírhatók a

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi_{(i)} = \sum_{k=1}^{l_i} \left( \psi_{(i)} \right)_{,\delta}^{[\alpha_k]} \nabla_{\alpha_k} \Gamma^\delta + \mathcal{H}_{(i)}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}, \psi_{(j)}, \partial_\gamma \psi_{(j)}) \quad (14.6.64)$$

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 2g_{\delta(\alpha} \nabla_{\beta)} \Gamma^\delta + H_{\alpha\beta}(g_{\varepsilon\rho}, \partial_\gamma g_{\varepsilon\rho}, \psi_{(j)}, \partial_\gamma \psi_{(j)}) \quad (14.6.65)$$

alakba, ahol a  $\nabla_\alpha \Gamma^\delta$  kifejezéseket formálisan a vektornak tekintett  $\Gamma^\delta$  mennyiségek kovariáns deriváltjaként határozzuk meg.

Ha ismernénk a  $\Gamma^\delta$  mennyiségeket, akkor a (14.6.64) és (14.6.65) téregyenletek a  $\psi_{(i)}$  és  $g_{\alpha\beta}$  mennyiségekre egy olyan csatolt hiperbolikus egyenletrendszert alkotnának, amelyekre vonatkozó kezdőértékprobléma jól meghatározott, azaz alkalmasan választott kezdőértékekhez a kérdéses egyenletek egyértelmű, kauzális és a kezdőadatoktól folytonosan függő megoldást rendelnek.

Mivel a  $\Gamma^\delta$  mennyiségek előre nem ismertek, az úgynevezett redukált fejlődési egyenleteket használjuk. Ezeket úgy nyerjük, hogy a  $\Gamma^\delta$  mennyiségeket  $n$  darab  $f^\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvénnyel helyettesítjük és a (14.6.64) és (14.6.65) téregyenletekben a  $\nabla_\alpha \Gamma^\delta$  kifejezéseket a  $\nabla_\alpha f^\delta$  kifejezésekkel helyettesítjük. A  $f^\delta$  függvényektől egyedül azt várjuk el, hogy amikor adottak az eredeti kezdőértékproblémához tartozó  $[g_{\alpha\beta}, \partial_t g_{\alpha\beta}]$  kezdőadatok, akkor a kezdőfelületen az ebből meghatározott  $\Gamma^\delta$  és  $\partial_t \Gamma^\delta$  függvényekre a  $f^\delta = \Gamma^\delta$  és  $\partial_t f^\delta = \partial_t \Gamma^\delta$  relációk teljesüljenek.

Mivel az  $x^\alpha$  lokális koordinátákban a

$$\nabla^\mu \nabla_\mu x^\delta = -\Gamma^\delta \quad (14.6.66)$$

egyenlet teljesül, azt is mondhatjuk, hogy az  $f^\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvények rögzítése valójában olyan  $x^\alpha$  lokális koordináták választásával ekvivalens, amelyekre fennáll a

$$\nabla^\mu \nabla_\mu x^\delta = -f^\delta \quad (14.6.67)$$

egyenlőség. Ha az utóbbi egyenleteket, mint kezdőértékproblémát oldjuk meg olyan kezdőértékekkel, amelyekre a  $dx^\alpha$  koordinátadifferenciálok lineárisan

függetlennek, akkor valóban egy lokális koordinátarendszerhez jutunk. Az is igaz, hogy ezekben a koordinátákban a Christoffel-szimbólumokból meghatározott  $\Gamma^\delta$  mennyiségekre a

$$\Gamma^\delta = f^\delta \quad (14.6.68)$$

egyenlőség teljesül, azaz megfelelően választott koordinátákban a  $\Gamma^\delta$  kifejezések megegyeznek az eredetileg tetszőlegesen választott  $f^\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  téridőfüggvényekkel. Utóbbiakat Friedrich nyomán [11] a mértékválasztáshoz tartozó forrásfüggvényeknek nevezzük. Abban a speciális esetben, amikor minden  $\delta$  index értékre  $f^\delta = 0$  a Choquet-Bruhat által bevezetett [2] harmonikus koordinátákhoz jutunk.

Tekintsük most megint a (14.6.64) és (14.6.65) egyenletekből nyert redukált fejlődési egyenleteket és tegyük fel, hogy találtunk ezekhez megoldást. Az egyik legtermészetesebb kérdés az, hogy a kapott megoldása eleget tesz-e az eredeti gravitáció-anyag rendszerre vonatkozó (14.6.56) és (14.6.58) egyenleteknek is.

A válaszunk megadása előtt idézzük fel, hogy annak megfelelően, ahogyan az (14.6.56) és (14.6.58) egyenletekből a redukált egyenleteket előállítottuk, a  $\mathcal{D}^\delta = \Gamma^\delta - f^\delta$  különbségre a

$$R_{\alpha\beta} - \mathcal{R}_{\alpha\beta} = g_{\delta(\alpha} \nabla_{\beta)} \mathcal{D}^\delta \quad (14.6.69)$$

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \psi_{(i)} - \mathcal{F}_{(i)} = \sum_{k=1}^{l_i} \left( \psi_{(i)} \right)_\delta^{[\alpha_k]} \nabla_{\alpha_k} \mathcal{D}^\delta \quad (14.6.70)$$

összefüggések teljesülnek. Így a redukált egyenletek megoldása pontosan akkor megoldása az eredeti téregyenleteknek, ha  $\mathcal{D}^\delta$  azonosan eltűnik.

Annak belátása érdekében, hogy ez valóban teljesül, használjuk a kétszer kontrahált  $\nabla^a [R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R] = 0$  Bianchi-azonosságot, valamint a  $\nabla^a \mathcal{R}_{ab} = 0$  egyenlőséget. Ezek segítségével a  $\mathcal{D}^\delta = \Gamma^\delta - f^\delta$  különbségre a

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \mathcal{D}^\delta + R^\delta_\nu \mathcal{D}^\nu = 0 \quad (14.6.71)$$

egyenlet származtatható. Mivel a (14.6.71) hullámgyenlet homogén és lineáris a  $\mathcal{D}^\delta$  változóban (14.6.71)-nek az azonosan zérus kezdőadatokhoz csak azonosan zérus megoldása tartozhat. Mindezek figyelembevételével az látható, hogy amikor adottak az eredeti problémához tartozó  $[g_{\alpha\beta}, \partial_t g_{\alpha\beta}]$  geometriai kezdőadatok, akkor az ebből meghatározott  $[\Gamma^\delta, \partial_t \Gamma^\delta]$  kezdőadat-választáshoz illeszkedő  $f^\delta$  függvényeket használva mindig az azonosan zérus megoldást kapjuk a  $\mathcal{D}^\delta = \Gamma^\delta - f^\delta$  különbségre, ami közvetve igazolja, hogy a redukált fejlődési egyenletek megoldásai mindig megoldásai az eredeti téregyenletnek is.



## 15. fejezet

# A linearizált Einstein-elmélet

Az Einstein-féle gravitációelméletben nincs gravitációs mező, azaz a gravitációs jelenségek teljes egészében a téridő geometriájának helytől és időtől való függése, pontosabban fogalmazva téridőfüggése révén válnak magyarázhatóvá. Ennek az elméletnek most egy olyan határesetét fogjuk tekinteni, amelyben a gravitáció „gyenge”. Ez az általános relativitáselméletben pontosan azt jelenti, hogy a téridő geometriája csak kis mértékben tér el a sík Minkowski-téridő geometriájától. Megmutatjuk, hogy ez a határeset mind a Newton-elmélet alapjainak reprodukálását, mind pedig a gyenge gravitációs hullámok leírását lehetővé teszi.<sup>1</sup>

### 15.1. A linearizált elmélet

**15.1.1. Feltétel.** *A téridő  $g_{ab}$  metrikája csak „kicsit”, a*

$$^{(1)}g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \tag{15.1.1}$$

*egyenletnek megfelelően, csak a  $h_{ab}$  eltéréstenzorral tér el a Minkowski-téridő  $\eta_{ab}$  metrikájától. Az eltérés „kicsinységre” vonatkozó feltételünk azzal egyen-*

---

<sup>1</sup>A továbbiakban speciális négydimenziós téridőket vizsgálunk.

értékű, hogy a téridőben létezik olyan Minkowski-féle globális koordináta-rendszer, hogy az  $\eta_{ab}$  és a  $h_{ab}$  eltéréstenzor erre vonatkozó  $\eta_{\alpha\beta}$  és  $h_{\alpha\beta}$  komponenseire az  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , valamint a

$$|h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma \partial_\delta h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (15.1.2)$$

relációk teljesülnek.

A linearizált egyenleteket úgy nyerjük, hogy az Einstein-egyenletbe a metrika helyére a (15.1.1) kombinációt helyettesítjük, majd a kapott egyenletekből a  $h_{ab}$ -ban magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk, azaz csak a lineáris tagokat tartjuk meg. Legyen  $\partial_a$  az  $\eta_{ab}$  metrikához tartozó „kovariáns deriváló operátor”. Annak érdekében, hogy a  $h_{ab}$  eltérésnek ne legyenek rejtett előfordulásai, a soron következő formulákban minden index lehúzást és felemelést az  $\eta_{ab}$  és  $\eta^{ab}$  metrikák segítségével végzünk el. Érdemes észben tartani mint egyedüli kivételt, hogy a  ${}^{(1)}g^{ab}$  metrikát nem az  $\eta^{ae}\eta^{bf}{}^{(1)}g_{ef}$  kontrakcióként definiáljuk, hanem az alábbi feladat megoldásaként kapott közelítést alkalmazzuk.

**15.1.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a (15.1.1) relációval meghatározott metrika inverzének linearizált alakját – amelyre a  ${}^{(1)}g_{ab}{}^{(1)}g^{bc} \approx \delta_a^c$  egyenlet linearizált értelemben teljesül – a

$${}^{(1)}g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} = \eta^{ab} - \eta^{ae}\eta^{bf}h_{ef} \quad (15.1.3)$$

relációval adhatjuk meg.

## 15.2. A linearizált Einstein-egyenletek

Az előző részben kiválasztott Minkowski-féle globális koordináta-rendszer fellett a  $h_{ab}$  eltérést felhasználva a linearizált Christoffel-szimbólumokat a

$${}^{(1)}\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}\eta^{ce}(\partial_a h_{be} + \partial_b h_{ae} - \partial_e h_{ab}), \quad (15.2.4)$$

a Riemann-tenzort a

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R_{abcd} &= \eta_{de} \left( \partial_b {}^{(1)}\Gamma^e_{ac} - \partial_a {}^{(1)}\Gamma^e_{bc} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_b \partial_c h_{ad} + \partial_d \partial_a h_{bc} - \partial_b \partial_d h_{ac} - \partial_a \partial_c h_{bd}) , \end{aligned} \quad (15.2.5)$$

a Ricci-tenzort a

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R_{ab} &= {}^{(1)}R_{aeb}{}^e \\ &= \frac{1}{2} (\partial_e \partial_b h^e{}_a + \partial_e \partial_a h^e{}_b - \square h_{ab} - \partial_a \partial_b h) , \end{aligned} \quad (15.2.6)$$

valamint az Einstein-tenzort a

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G_{ab} &= {}^{(1)}R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} {}^{(1)}R = \frac{1}{2} (\partial_e \partial_b h^e{}_a + \partial_e \partial_a h^e{}_b \\ &\quad - \square h_{ab} - \partial_a \partial_b h - \eta_{ab} \partial_e \partial^f h^e{}_f + \eta_{ab} \square h) \end{aligned} \quad (15.2.7)$$

kifejezésekkel adhatjuk meg, ahol a  $h$  és  $\square$  szimbólumok a  $h_{ab}$  eltérés  $h = h_e{}^e = h_{ab} \eta^{ab}$  kontrakcióját és az  $\eta^{ab}$  metrika  $\square = \eta^{ab} \partial_a \partial_b$  hullámoperátort jelöli. A  $\square$  hullámoperátor bármely Minkowski-féle koordináta-rendszerben  $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  alakban adható meg.

**15.2.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az utolsó egyenletet felhasználva, valamint a  $h_{ab}$  eltérés helyett a*

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} h \quad (15.2.8)$$

„trace”-megfordított<sup>2</sup> kifejezést használva a linearizált Einstein-egyenletek a

$${}^{(1)}G_{ab} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{ab} + \partial^e \partial_{(b} \bar{h}_{a)e} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^e \partial^f \bar{h}_{ef} = 8\pi {}^{(1)}T_{ab} \quad (15.2.9)$$

alakban írhatók fel.

---

<sup>2</sup>Az elnevezés onnan adódik, hogy ekkor a  $\bar{h}_{ab}$  és  $h_{ab}$  kifejezések „trace”-ire a  $\bar{h} = -h$  összefüggés teljesül.

### 15.3. A Maxwell-elmélet

A Minkowski-téridőben – melyet az  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  párral jeleníthetünk meg – az elektromágneses mezőt az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor segítségével adjuk meg, mely a

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b \quad (15.3.10)$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (15.3.11)$$

egyenleteknek tesz eleget, ahol  $J_a$  az elektromos töltésekhez tartozó négyes áramvektort jelöli.

Mivel az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor valójában egy 2-forma amelyre (15.3.11) teljesül, a Poincaré-lemma biztosítja, hogy létezik olyan  $A_a$  vektorpotenciál, amelyre

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a. \quad (15.3.12)$$

Ekkor az (15.3.10) egyenletet a

$$\partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = \partial^a \partial_a A_b - \partial_b (\partial^a A_a) = -4\pi J_b \quad (15.3.13)$$

alakban írhatjuk fel, ahol a második lépésben a parciális deriváltak sorrendjének felcserélhetőségét használtuk ki, továbbá

$$\partial^a \partial_a = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = -\partial_t^2 + \nabla^2, \quad (15.3.14)$$

ahol  $\nabla^2$  a jól ismert Laplace-Beltrami operátort jelöli.

Ismert, hogy a vektorpotenciál nem egyértelmű, hiszen tetszőleges (elegendően reguláris)  $\chi$ -függvény választása esetén a

$$A'_a = A_a + \partial_a \chi \quad (15.3.15)$$

kifejezéssel adott vektorpotenciál is ugyanazt a Faraday-tenzort adja, azaz  $F'_{ab} = F_{ab}$ .

Ezt a szabadságot kihasználva tudunk olyan vektorpotenciált, más néven mér-



téket választani, amelyre (15.3.13) helyett a nála sokkal barátságosabbnak tűnő

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b \quad (15.3.16)$$

egyenlet teljesül. Ennek belátásához tegyük fel, hogy az  $A_a$  vektorpotenciál tetszőleges és válasszuk meg most a  $\chi$ -függvényt úgy, hogy az tegyen eleget a

$$\partial^a \partial_a \chi = -\partial^a A_a \quad (15.3.17)$$

egyenletnek. Vezessük be ezek után (15.3.15) felhasználásával azt az  $A'_a$  vektorpotenciált, melyet  $A_a$ , valamint a  $\chi$ -függvény határoz meg. Mivel

$$\partial^a A'_a = \partial^a A_a + \partial^a \partial_a \chi = 0 \quad (15.3.18)$$

az így nyert vektorpotenciál esetén a Maxwell-egyenletet (a vesszők elhagyása után) valóban az (15.3.16) alakban írhatjuk fel.

Érdemes még megemlíteni, hogy az így nyert új  $A'_a$  vektorpotenciál sem egyértelmű, hiszen tetszőleges olyan újabb  $\chi$ -függvény választása esetén, amelyre

$$\partial^a \partial_a \chi = 0 \quad (15.3.19)$$

teljesül, megőrzi a Lorentz-mértékűséget, azaz egy ilyen mértéktranszformáció végrehajtása után is érvényben marad a  $\partial^a A_a = 0$  reláció az újonnan nyert vektorpotenciálra.

## 15.4. A diffeomorfizmusinvariancia speciális esete

Vegyük észre, hogy amennyiben azt tudnánk garantálni, hogy a

$$\partial^e \bar{h}_{ae} \quad (15.4.20)$$

kifejezés nullává váljon, akkor – mivel a  $\partial_a$  kovariáns operátorok tetszőleges típusú tenzormezők esetén kommutálnak – a (15.2.9) egyenletet a

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi^{(1)} T_{ab} \quad (15.4.21)$$

alakban írhatnánk fel.

Természetesen semmi ok arra, hogy az  $\partial^e \bar{h}_{ae}$  kifejezés értéke általában mindenütt nulla legyen, ugyanakkor – ahogy azt lentebb meg is mutatjuk – az általános relativitáselmélet diffeomorfizmusinvarianciáját kihasználva mindig találhatunk olyan, az eredeti  $h_{ab}$  eltéréstenzorral mértékekvivalens  $h'_{ab}$  ábrázolást, amelyre a  $\partial^e \bar{h}'_{ae}$  kifejezés már eltűnik.

Emlékezzünk arra, hogy az  $(M, g_{ab})$  és az  $(M', g'_{ab})$  téridők mértékekvivalensek, ha található hozzájuk olyan  $\phi : M \rightarrow M'$  az  $M$  sokaságot az  $M'$  sokaságra képező diffeomorfizmus, amely a  $g_{ab}$  metrikát a  $g'_{ab}$  metrikára képezi, azaz  $g'_{ab} = \phi^* g_{ab}$ .

Korábbi feltevéseink értelmében a linearizált elméletben léteznek Minkowski-féle globális koordinátarendszerek. Az ezek közötti átmenetet biztosító legegyszerűbb  $\phi : M \rightarrow M$  diffeomorfizmusokat a

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha \quad (15.4.22)$$

típusú koordináta-transzformációval adhatjuk meg, ahol  $\xi^\alpha$  olyan „infinitezimális” vektormező az  $\mathbb{R}^4$ -gyel diffeomorf alapsokaságon, amelynek komponenseire bármely Minkowski-féle koordinátarendszerben a  $\partial_a \xi_b$  tenzor komponensei kicsik, azaz  $\partial_a \xi_b \ll 1$ . Érdemes megjegyezni, hogy a Lorentz-transzformációk nem jöhetnek számításba, mert azoknál bizonyos komponensek mindig túl nagyokká válnak.

Egy általános koordinátatranszformáció során a  $g_{ab}$  metrika  $g_{\alpha\beta}$  komponensei a

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (15.4.23)$$

relációnak megfelelő szabály szerint transzformálódnak. A speciális (15.4.22) koordinátatranszformáció esetében a Jacobi-mátrixot a

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu \quad (15.4.24)$$

alakban írhatjuk fel. Így a (15.4.23) és (15.4.24) egyenleteknek megfelelően,

a  $h_{ab}$  eltéréstenzorban és a  $\partial_a \xi_b$  kifejezésekben magasabb rendű járulékok elhanyagolásával azt kapjuk, hogy a

$$g'_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = \eta_{ab} + h_{ab} + \mathcal{L}_\xi \eta_{ab} \quad (15.4.25)$$

relációval meghatározott metrika linearizált értelemben mértékekivalegens az eredeti  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  metrikával. Tehát azt mondjuk, hogy a sík Minkowski-téridő  $h_{ab}$  és  $h'_{ab}$  lineáris perturbációi biztosan mértékekivalegens, ha az alapsokaságon található olyan  $\xi^a$  „infinitezimális” vektormező, hogy a

$$h'_{ab} = h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = h_{ab} + \mathcal{L}_\xi \eta_{ab} \quad (15.4.26)$$

reláció teljesüljön. Így a  $\xi^\alpha$  vektormező alkalmas megválasztása – konkrétan, a  $\partial_\alpha \xi_\beta$  deriváltak infinitezimalitása – biztosítja azt, hogy az eredeti „Minkowski-típusú  $x^\alpha$  koordinátákból” a (15.4.22) koordinátatranszformáció segítségével kapott új  $x'^\alpha = x'^\alpha(x^\gamma)$  koordináták ugyancsak Minkowski-típusúak.

Az eredeti célunkhoz visszatérve induljunk ki most egy teljesen általános  $h_{ab}$  lineáris perturbációiból és határozzuk meg a

$$\square \xi_a = -\partial^e h_{ae} \quad (15.4.27)$$

lineáris hullámegyenletnek eleget tevő  $\xi^a$  vektormezőt.

**15.4.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (15.4.27) egyenlet megoldása által meghatározott (15.4.22) koordinátatranszformáció és a  $h_{ab} \rightarrow h'_{ab} = h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$  mértéktranszformáció eredményeként előálló  $\bar{h}'_{ab}$  kifejezés eleget tesz a*

$$\partial^e \bar{h}'_{ae} = 0 \quad (15.4.28)$$

*alakban felírt Lorentz-feltételnek.*<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>A feltétel elektrodinamikai megfelelőjét elsőként a dán származású Ludwig Lorenz alkalmazta, ugyanakkor mindenki azt gondolta, hogy az is a sokkal ismertebb Hendrik Lorentztől származik. Ez a történeti hiba öröklődően megmaradt, így ma már többnyire Lorentz-mértékfeltételről beszélünk.

Mindezekből az következik, hogy a vesszőzött eltéréstenzorra – a vesszők elhagyása után – a linearizált Einstein-egyenlet valóban a

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi {}^{(1)}T_{ab} \quad (15.4.29)$$

alakban írható fel. A vákuumesetben, azaz amikor  ${}^{(1)}T_{ab}$  azonosan zérus értékű a (15.4.29) linearizált Einstein-egyenlet pontosan a zérus nyugalmi tömegű 2-es spinű részecskék a sík Minkowski-téridőben felírt fejlődési egyenleteivel esik egybe. Így az Einstein-elmélet a lineáris határesetben valóban a zérus nyugalmi tömegű 2-es spinű „gravitonok” elméletévé redukálódik.

Fontos megemlíteni, hogy a (15.4.27) és (15.4.20) egyenletek alapján további olyan (15.4.22) alakú speciális mértéktranszformáció végrehajtására van módunk – amelyek megtartják a (15.4.29) egyenlet alakját –, feltéve, hogy a koordinátatranszformáció  $\xi^a$  generátora eleget tesz a

$$\square \xi_a = 0 \quad (15.4.30)$$

homogén lineáris hullámeqyenletnek.

## 15.5. A Newtoni határeset

Bár az Einstein-elmélet a gravitáció napjainkban elfogadott legpontosabb elmélete, nem szabad figyelmen kívül hagyni azt, hogy a Newton-féle gravitációelmélet nagyon jól használható olyan gravitációs jelenségek leírása során, amelyekben nem lépnek fel túlságosan erős gravitációs hatások és a gravitációs tér forrásainak mozgása lassú. Mindezen fizikai feltételeknek az imént ismertetett linearizált Einstein-elméletben az alábbiakban kifejtett matematikai hipotézisek felelnek meg.

## 15.6. A forrás leírása

Tekintsünk először is egy csillagszerű objektumot, mely a gravitáció forrásául szolgál. Mivel a linearizált elmélet keretein belül gondolkodunk, léteznie kell olyan  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordináta-rendszernek, hogy az  $\eta_{ab}$  metrika és a  $h_{ab}$  eltéréstenzor erre vonatkozó  $\eta_{\alpha\beta}$  és  $h_{\alpha\beta}$  komponenseire az  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , valamint a  $|h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma h_{\alpha\beta}|, |\partial_\gamma \partial_\delta h_{\alpha\beta}| \ll 1$  relációk teljesülnek.

Az, hogy a forrás lassan mozog, egyrészt azt jelenti, hogy a hozzá tartozó  ${}^{(1)}T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzorban megjelenő impulzusáramok, illetve belső feszültségek (nyomások) sokkal kisebbek, mint az energiaáram-sűrűség, azaz  ${}^{(1)}T_{ab}$ -re a

$${}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{t\bar{\alpha}}, \text{ valamint } {}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (15.6.1)$$

relációk teljesülnek, ahol most és a továbbiakban a felülvonásos görög indexek mindenütt az 1, 2, 3 értékeket veszik fel.<sup>4</sup> Ennek alapján csillagszerű objektumot valamely lassan változó elrendezésű rendszerét megjelenítő  ${}^{(1)}T_{ab}$

---

<sup>4</sup>Az energiaimpulzus-áramokat megjelenítő négyesvektort, melyet  $j^a$ -val jelölünk a  $j^a = -T^a{}_b t^b$  relációval értelmezhetjük. Így az  ${}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{t\bar{\alpha}}$ , valamint  ${}^{(1)}T_{tt} \gg {}^{(1)}T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  egyenlőtlenségek a  $|j^t| \gg |j^{\bar{\alpha}}|$ , valamint  ${}^{(1)}T^t{}_t \ll {}^{(1)}T^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}}$  alakban is felírhatók.

energiaimpulzus-tenzort közelíthetjük a

$${}^{(1)}T_{ab} \approx \rho t_a t_b \quad (15.6.2)$$

kifejezéssel, ahol  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  az adott vonatkoztatási rendszerben a csillag anyagával együttmozgó megfigyelők érintővektorát,  $\rho$  pedig az általuk mért energiasűrűséget jelöli.

A források lassú mozgásának egy másik következményeként feltehetjük, hogy a kialakuló gravitációs tér időbeli változása lassú. Ez a linearizált elméletben azt jelenti, hogy a  $h_{ab}$  eltéréstenzor időfüggésétől eltekinthetünk, és így a  $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$  kifejezés időderiváltja is elhanyagolható.

Mindezen feltételek teljesülése mellett a (15.4.29) egyenletből a

$$\Delta \bar{h}_t = -16\pi\rho \quad (15.6.3)$$

következik, továbbá, amikor az  $\alpha$  és  $\beta$  indexek legalább egyike nem időszerű a

$$\Delta \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (15.6.4)$$

egyenleteket kapjuk, ahol  $\Delta$  a Laplace-operátort jelöli, azaz az alkalmazott Minkowski-szerű koordinátáinkban a  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  alakban írható fel. A parciális differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy az utóbbi egyenletnek az  $r \rightarrow \infty$  peremfeltételnek megfelelő  $\bar{h}_{\alpha\beta} \rightarrow 0$  határesethez tartozó  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  megoldásai mind az időtől, mind pedig a térkoordinátáktól független állandó értéket vesznek fel.

**15.6.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  =állandó kifejezések segítségével definiált

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\bar{h}^\mu_{\bar{\nu}}x^{\bar{\nu}} \quad (15.6.5)$$

koordináta-, vagy mértéktranszformáció  $\xi^\mu = \frac{1}{2}\bar{h}^\mu_{\bar{\nu}}x^{\bar{\nu}}$  generátora infinitezimális. Lássuk be, hogy a (15.6.5) koordinátatranszformáció alkalmazása révén a  $\bar{h}_{\mu\nu}$  komponensekkel mértékekiváls ábrázolásban a  $\bar{h}'_{\mu\nu}$  eltéréstenzor nem tisztán időszerű komponensei zérus értéket vesznek fel.

Éppen ezért – legalábbis a jelen kontextusban – a  $tt$ -komponenstől eltekintve a  $h_{\alpha\beta}$  perturbáció összes többi komponenséről feltehetjük, hogy azok azonosan zérus értéket vesznek fel.

Ezek után vezessük még be a

$$\bar{h}_{tt} = -4\phi \quad (15.6.6)$$

jelölést, ami segít annak felismerésében, hogy az általunk vizsgált határesetben a  $\bar{h}_{ab} = -4\phi t_a t_b$  tenzor egyetlen nem zérus komponensére vonatkozó (15.6.3) egyenlet éppen a Newton-elmélet alapegyenleteként is felfogható

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \quad (15.6.7)$$

Poisson-egyenletnek felel meg.

**15.6.2. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a  $\bar{h}_{ab} = -4\phi t_a t_b$  tenzorhoz tartozó  $h_{ab}$  eltéréstenzor diagonális és a*

$$h_{ab} = \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{h} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi \quad (15.6.8)$$

*alakban írható fel, és így a  $h_{tt} = -2\phi$  egyenlőség is teljesül.*

## 15.7. A próbatestek leírása

Ahogy azt korábban említettük, az általános relativitáselméletben a Mach-elvet megjelenítő tulajdonság folytán a próbatestek geodetikus pályán mozognak. Egy ilyen pályán mozgó test egyenletét valamely  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordináta-rendszerben a

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (15.7.9)$$

alakban írhatjuk fel, ahol az  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  függvény a próbatest geodetikus világ-vonalát ábrázolja,  $\tau$  pedig a világvonall mentén mért sajátidő paraméter, mely egyben affinparaméter is az  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  geodetikus mentén.

A próbatest  $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$  négyessebességvektorát, az SI mértékegységek, valamint a speciális relativitáselméletben bevezetett

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (15.7.10)$$

boost-faktor segítségével az ismerősebb  $u^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$  alakban is felírhatjuk.

Ennek megfelelően a lassú mozgás határeset a  $\gamma \approx 1$  relációnak felel meg, ami a geometrizált egységekre visszatérve, a  $c = 1$  feltétel miatt azt adja, hogy  $u^t \approx 1$ , azaz a  $\tau$  sajátidő paraméterre és az  $t$  koordinátaidőre a  $\tau \approx t$  reláció teljesül. Így a továbbiakban elegendő  $u^\alpha$  sebességvektor térszerű komponenseivel foglalkoznunk.

**15.7.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az (15.6.8) egyenlet által meghatározott  $h_{ab}$  eltéréstensorhoz – erre a  $h_{t\bar{\alpha}} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$  relációk teljesülnek – tartozó (15.2.4) egyenletnek megfelelően számolt linearizált Christoffel-szimbólumra*

$${}^{(1)}\Gamma_{tt}^{\bar{\alpha}} \approx \frac{\partial \phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \quad (15.7.11)$$

*reláció teljesül, ahol a felülvonásos indexek mindenütt az 1, 2, 3 értékeket veheti fel.*

Mindezek alapján, valamint a (15.7.9) és (15.7.11) egyenletek következtében a próbatest egyenletét a

$$\frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{dt^2} \approx -{}^{(1)}\Gamma_{tt}^{\bar{\alpha}} \approx -\frac{\partial \phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}}, \quad (15.7.12)$$

vagy az ennél sokkal ismerősebb

$$m\mathbf{a} \approx -m\mathbf{grad}(\phi) = \mathbf{F}_{grav} \quad (15.7.13)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $\mathbf{a}$ -val a próbatestnek a  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordinátarendszerhez viszonyított  $a^{\bar{\alpha}} = \frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}(t)}{dt^2}$  gyorsulását jelöltük.



Mivel a (15.6.7) és (15.7.13) egyenletek éppen a Newton-féle gravitációelmélet alapegyenletei, azt mondhatjuk, hogy az általános relativitáselmélet lassú mozgás és gyenge gravitációs hatások határesetében a Newton-elméletté redukálódik, így annak természetes általánosításaként is tekinthetünk rá.

Van azonban egy nagyon lényeges koncepcionális eltérés a két elmélet között. Míg a Newton-elmélet a naprendszerbeli bolygók mozgását úgy írja le, mint ezeknek a próbatesteknek a Nap által keltett gravitációs térben, egy abszolút térben végzett gyorsuló mozgását, addig az általános relativitáselmélet megközelítésének megfelelően a bolygók szabad próbatestként, geodetikus pályán mozognak a Nap tömege és energiája révén görbült téridőben. Mivel a téridő geometriája elegendően görbült, a bolygómozgásokhoz tartozó geodetikus pályák térszerű értelemben korlátosak.



## 16. fejezet

# Gyenge gravitációs hullámok

Ahhoz hasonlóan, ahogyan a Coulomb-féle elektrosztatika után természetes módon jelentek meg az elektromágneses hullámok az elektrodinamikában, a Newton-féle gravitációelmélet általánosításának számító Einstein-féle gravitációelméletben is újfajta, gravitációs hullámjelenségek léptek fel. A gravitációs hullám, mint a téridő geometriájában keletkezett zavar fénysebességgel történő tovaterjedése képzelhető el. Ebben az alfejezetben – az előző részben bevezetett linearizált közelítés felhasználásával – a gyenge gravitációs hullámok néhány alapvető tulajdonságának ismertetését, illetve a megtalálásukra kialakított kísérleti berendezések közül az interferometrikus detektorok elvi működésének rövid bemutatását tűzzük ki célként.

### 16.1. Az inhomogén egyenlet

Ahogyan azt korábban már megmutattuk, a  $\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$  Lorentz-féle mértékfeltételnek elegendő  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés segítségével a linearizált Einstein-egyenletet a

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi {}^{(1)}T_{ab} \quad (16.1.1)$$

alakban írhatjuk fel.

Ennek segítségével határozhatjuk meg például a jobb oldalon álló  $^{(1)}T_{ab}$  energia-impulzus-tenzormező által megjelenített anyag, mint forrás által keltett gravitációs hullámokat. A most következő rövid részben  $\bar{h}_{ab}$  tisztán térszerű részeinek vezetőrendű viselkedését tárgyaljuk.

Először is érdemes felidézni, hogy a (16.1.1) egyenlet általános megoldása mindig az inhomogén egyenlet valamely partikuláris megoldásának, valamint a homogén egyenlet általános megoldásainak segítségével írható fel. Ebben a részben most csak az inhomogén egyenlet megoldásaival foglalkozunk, melyet a  $^{(1)}T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor ismeretében, valamint a szokásos retardált Green-függvény segítségével a

$$\bar{h}_{ab}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T_{ab}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (16.1.2)$$

integrál segítségével adhatunk meg, ahol  $\vec{x}$  a  $(t, x, y, z)$  Minkowski-féle globális koordináta-rendszer térszerű részéhez tartozó  $(x, y, z)$  komponensekkel rendelkező helyvektort jelöli.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Egy

$$\square \psi(t, \vec{x}) = \varepsilon(t, \vec{x}) \quad (16.1.3)$$

típusú egyenlet megoldása mindig megadható a  $G(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$  Green-függvény segítségével, mely (16.1.3) pontszerű forráshoz tartozó megoldása, azaz a

$$\square G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = \delta(t - t', \vec{x} - \vec{x}') \quad (16.1.4)$$

egyenletnek tesz eleget. (16.1.3)  $\psi(t, \vec{x})$  megoldását a

$$\psi(t, \vec{x}) = \int G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') \varepsilon(t', \vec{x}') dt' d^3x' \quad (16.1.5)$$

alakban írhatjuk fel. Ezek után kihasználva, hogy a  $\square$  hullámoperátor Green-függvénye a

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = -\frac{\delta(t' - [t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c])}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (16.1.6)$$

adható meg [19], ahol  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  a „retardált időt” jelöli, (16.1.3) megoldását a

$$\psi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (16.1.7)$$

implicit alakban írhatjuk fel.

A kifejezések rövidítése érdekében a  $^{(1)}T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor linearizálásra utaló „ $^{(1)}$ ”-es indexét a továbbiakban elhagyjuk. Érdemes

$$\bar{h}_{ab}(p) = 4 \int_{J^-(p)} \frac{T_{ab}(p')}{|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')|} d^3S(p') \quad (16.1.8)$$

alakban is felírni a (16.1.2) integrált, mert sokkal szemléletesebb. Itt  $J^-(p) \approx \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$  a  $p$  pont által megjelenített esemény múlt fénykúpját,

$$|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')| = \sqrt{\sum_{\bar{\alpha}=1}^3 (x^{\bar{\alpha}}(p) - x^{\bar{\alpha}}(p'))^2} \quad (16.1.9)$$

a  $p$  és  $(p')$  események térszerű távolságát, továbbá  $d^3S(p')$  a  $J^-(p)$  fényszerű hiperfelületen értelmezett térfogati formát jelöli, ami, például gömbi koordinátákban a  $d^3S(p') = r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'$  alakban írhatunk fel.

A továbbiakban feltesszük:

- (1) egyrészt azt, hogy a forrást messziről figyeljük meg, azaz a forrás  $L$  karakterisztikus átmérője elhanyagolható a forrás megfigyelőtől mért  $r$  távolságától,
- (2) másrészt azt, hogy a forrás mozgása lassú, azaz azt az esetet tekintjük, amikor az előforduló sebességek sokkal kisebbek, mint a vákuumbeli fénysebesség.

Az (1) feltétel azt biztosítja, hogy a nevezőben lévő  $|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')|$  kifejezést helyettesíthessük az  $r$  távolsággal és az ekkor használt közelítés relatív hibája nem nagyobb, mint  $L/r$ . Hasonlóan, a (2) feltétel azt biztosítja, hogy a  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  retardált időt is helyettesíthessük az egyszerűbb  $t - r/c$  kifejezéssel. Az utóbbi esetben alkalmazott közelítés relatív hibája az  $|\vec{x}(p) - \vec{x}(p')| \approx r + n_{\bar{\alpha}} x^{\bar{\alpha}} + \mathcal{O}(1/r)$  összefüggés értelmében, ahol  $n^{\bar{\alpha}} = x^{\bar{\alpha}}/r$ , az  $L/\tau$  nagyságrendjébe esik, ahol  $\tau$  a forrás karakterisztikus időskáláját jelzi, azaz a (2) feltétel értelmében a forrás belsejében lejátszódó folyamatok elhanyagolhatónak tekintett sebességével arányos.

Mindezen előkészítések után  $\bar{h}_{ab}$ -t a

$$\bar{h}_{ab}(t, \vec{x}) = \frac{4}{r} \int T_{ab}(t - r, \vec{x}') d^3x' \quad (16.1.10)$$

kifejezéssel adhatjuk meg.

Ezek után a  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzormező  $\partial_a T^{ab} = 0$  divergenciamentességét kihasználva <sup>2</sup> a  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés tisztán térszerű részeinek vezetőrendű viselkedése az alábbiak szerint határozható meg. A

$$\partial_t T^{tt} + \partial_{\bar{e}} T^{\bar{e}t} = 0 \quad (16.1.11)$$

$$\partial_t T^{t\bar{\varphi}} + \partial_{\bar{e}} T^{\bar{e}\bar{\varphi}} = 0 \quad (16.1.12)$$

egyenletek alapján – a (16.1.11) egyenletet  $t$ , míg a (16.1.12) egyenletet az  $x^{\bar{\varphi}}$  koordináta szerint deriválva – azt kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 T^{tt} = \partial_{\bar{e}} \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{e}\bar{\varphi}}. \quad (16.1.13)$$

Az utolsó egyenlet mindkét oldalát az  $x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}}$  kifejezéssel megszorozva a

$$\partial_t^2 \left[ T^{tt} x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \right] = \left[ \partial_{\bar{e}} \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{e}\bar{\varphi}} \right] x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \quad (16.1.14)$$

egyenlethez jutunk. A Leibnitz-szabály, valamint a  $\partial_{\bar{e}} x^{\bar{\alpha}} = \delta_{\bar{e}}^{\bar{\alpha}}$  reláció többszöri alkalmazásával a jobb oldalon álló kifejezést a

$$\begin{aligned} \left[ \partial_{\bar{e}} \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{e}\bar{\varphi}} \right] x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} &= \partial_{\bar{e}} \left[ \left( \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{e}\bar{\varphi}} \right) x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \right] - \left( \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\alpha}\bar{\varphi}} \right) x^{\bar{\beta}} - \left( \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{\beta}\bar{\varphi}} \right) x^{\bar{\alpha}} \\ &= \partial_{\bar{e}} \left[ \left( \partial_{\bar{\varphi}} T^{\bar{e}\bar{\varphi}} \right) x^{\bar{\alpha}} x^{\bar{\beta}} \right] - \left\{ \partial_{\bar{\varphi}} (T^{\bar{\alpha}\bar{\varphi}} x^{\bar{\beta}}) - T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right\} \\ &\quad - \left\{ \partial_{\bar{\varphi}} (T^{\bar{\beta}\bar{\varphi}} x^{\bar{\alpha}}) - T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right\} \end{aligned} \quad (16.1.15)$$

alakban írhatjuk fel.

---

<sup>2</sup>Ismert, hogy az energiaimpulzus-tenzor divergenciamentessége mindig biztosított, ha az anyagmezőkre vonatkozó mozgásegyenletek teljesülnek.

Ezek után a (16.1.10), (16.1.13), (16.1.14) és (16.1.15) egyenletek alapján és kihasználva azt, hogy a tisztán térszerű részekre a  $T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  egyenlőség teljesül kapjuk a

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(p) &= \frac{4}{r} \int T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(p') d^3x' = \frac{2}{r} \int \left\{ \partial_t^2 \left[ T'' x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\bar{e}'} \left[ T^{\bar{\alpha}'\bar{e}'} x'^{\bar{\beta}} + T^{\bar{e}'\bar{\beta}'} x'^{\bar{\alpha}} \right] - \partial_{\bar{e}'} \left[ \left( \partial_{\bar{\phi}'} T^{\bar{e}'\bar{\phi}'} \right) x'^{\bar{\alpha}'} x'^{\bar{\beta}'} \right] \right\} d^3x' \\ &= \frac{2}{r} \int \partial_t^2 \left[ T'' x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right] d^3x' = \frac{2}{r} \partial_t^2 \left[ \int T'' x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} d^3x' \right] \\ &= \frac{2}{r} \partial_t^2 \int \left[ \rho x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right] d^3x' \quad (16.1.16)\end{aligned}$$

relációt, ahol a  $d^3x'$  térfogatelem előtt szögletes zárójelekben álló kifejezések mindegyikét a  $t' = t - \frac{r}{c}$  retardált időben kell kiértékelnünk. A második sorban megjelenő teljes divergenciákat az integrálás Gauss-tétele alapján azzal az észrevétellel hagytuk el, hogy a forrás lokalizált, azaz tartójának és a  $p$  pont múlt fénykúpjának metszete mindig kompakt. A harmadik sor második lépésében az integrálási tartomány időfüggetlenségét kihasználva az idő szerinti deriválásokat felcserélhetjük az integrálás műveletével. Végül az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy  $T'' = -T'_t$ , a forrás  $\rho$  energiasűrűségével egyezik meg, amelyet a  $t=\text{állandó}$  hiperfelületeken a  $(\partial/\partial t)^a$  egységvektorral mozgó megfigyelők mérnek.

Mindezek alapján a  $\bar{h}_{ab}$  tisztán térszerű  $\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  részének vezetőrendű viselkedése azt kapjuk, hogy

$$\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(p) = \frac{2}{r} \partial_t^2 \int \left[ \rho x'^{\bar{\alpha}} x'^{\bar{\beta}} \right]_{t'=t-\frac{r}{c}} d^3x', \quad (16.1.17)$$

azaz  $\bar{h}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  megadásához a forrás tömegeloszlásának második momentumát idő szerint kétszer kell deriválni.

## 16.2. A forrásmentes eset

Ebben a részben azokkal a szabad gravitációs hullámokkal foglalkozunk, amelyek csak anyagmentes, azaz a  $T_{ab} \equiv 0$  egyenletnek eleget tevő téridőkben léteznek.

Amint azt korábban is hangsúlyoztuk, a  $\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$  Lorentz-féle mértékfeltételnek eleget tevő  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés a (16.1.1) linearizált Einstein-egyenlet alakjának megtartása mellett további (15.4.22) alakú koordinátatranszformációnak vetetű alá, feltéve, hogy az infinitezimális  $\xi^a$  vektormező eleget tesz a

$$\square \xi_a = 0 \quad (16.2.18)$$

egyenletnek. Ezen mértéktranszformáció felhasználásával lényegében véve további négy feltételt róhatunk ki a  $\bar{h}_{ab}$  kifejezésre, vagy a vele ekvivalens  $h_{ab}$  eltéréstenzor komponenseire.

### 16.2.1. A sugárzási mérték

A tiszta sugárzásokat leíró speciális esetben, azaz amikor nincs anyag a téridőben, a metrika  $h_{ab}$  perturbációjára mind a  $h = h_{ef} \eta^{ef}$  kifejezés, mind pedig a  $h_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) komponensek azonosan nullává tehetők. Ennek belátásához elegendő meggondolni, hogy amikor  $T_{ab} \equiv 0$  a  $\bar{h}_{ab}$  kifejezés a

$$\square \bar{h}_{ab} = 0 \quad (16.2.19)$$

egyenletnek tesz eleget. Ismert, hogy az ehhez az egyenlethez tartozó kezdőértékprobléma *jól kezelhető*, azaz a kezdőértékproblémának létezik megoldása és az egyértelmű, továbbá a megoldás folytonosan és kauzálisan függ a kezdőadatoktól. Mivel (16.2.19) értelmében a  $\bar{h}_{ab}$  komponensek fejlődése szétcsatolódik, azt is tudjuk, hogy azokhoz a komponensekhez csak az azonosan zérus megoldás tartozhat, amelyekhez triviális, azaz zérus kezdőadatot tudunk választani. Így ahhoz, hogy a  $\bar{h}$  és  $\bar{h}_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) mennyiségek mindenütt



azonosan zérus értéket vegyenek fel, csak azt kell biztosítani a kezdőfelületen, hogy a  $\bar{h}$  és  $\bar{h}_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) mennyiségeire vonatkozó kezdőadatok eltűnjenek. A  $\bar{h} = 0$  esetben a  $\bar{h} = -h$  reláció folytán az is igaz, hogy  $\bar{h}_{ab} = h_{ab}$ . Emiatt elegendő a  $h$  és  $h_{t\bar{\alpha}}$  ( $\bar{\alpha} = 1, 2, 3$ ) kifejezésekre vonatkozó kezdőadatok eltűnését biztosítanunk. Utóbbiak a  $h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\xi_{\beta} + \partial_{\beta}\xi_{\alpha}$  transzformációs szabály folytán a

$$0 = h' = h - 2\partial_t\xi_t + 2\partial_{\bar{\mu}}\xi_{\bar{\mu}} \quad (16.2.20)$$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t h' &= \partial_t h - 2\partial_t\partial_t\xi_t + 2\partial_{\bar{\mu}}(\partial_t\xi_{\bar{\mu}}) = \\ &= \partial_t h - 2\partial_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\xi_t + 2\partial_{\bar{\mu}}(\partial_t\xi_{\bar{\mu}}) \end{aligned} \quad (16.2.21)$$

$$0 = h'_{t\bar{\alpha}} = h_{t\bar{\alpha}} + \partial_t\xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}}\xi_t \quad (16.2.22)$$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t h'_{t\bar{\alpha}} &= \partial_t h_{t\bar{\alpha}} + \partial_t\partial_t\xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}}\partial_t\xi_t = \\ &= \partial_t h_{t\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}}\partial_t\xi_t \end{aligned} \quad (16.2.23)$$

formában adhatók meg, ahol a felülvonásos  $\bar{\alpha}$  és  $\bar{\mu}$  indexek a korábban bevezetett jelöléseink értelmében az 1, 2, 3 értékeket veszik fel, valamint a térszerű indexek kettőzött előfordulása továbbra is mindenütt összegzésre utal.

Amint az könnyen ellenőrizhető, a (16.2.22)-os egyenletből  $\partial_t\xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezve, majd az így nyert kifejezést a (16.2.21) egyenletbe helyettesítve a

$$\Delta\xi_t = \frac{1}{4}\partial_t h - \frac{1}{2}\partial_{\bar{\mu}}h_{t\bar{\mu}} \quad (16.2.24)$$

egyenletet nyerjük. Hasonlóan a (16.2.20)-as egyenletből  $\partial_t\xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezve, majd az így nyert kifejezést a (16.2.23) egyenletbe helyettesítve a

$$\Delta\xi_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}}(\partial_{\bar{\mu}}\xi_{\bar{\mu}}) = \frac{1}{2}\partial_{\bar{\alpha}}h - \partial_t h_{t\bar{\alpha}} \quad (16.2.25)$$

egyenlethez jutunk. Mind (16.2.24), mind pedig (16.2.25) elliptikus egyenlet, melyek a  $\partial_t h$ ,  $\partial_{\bar{\mu}}h_{t\bar{\mu}}$ ,  $\partial_{\bar{\alpha}}h$  és  $\partial_t h_{t\bar{\alpha}}$  források ismeretében külön-külön megoldhatók a  $\xi_t$ , illetve  $\xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezésekre. Utóbbiakból (16.2.24), valamint (16.2.25) alapján a  $\partial_t\xi_t$ , illetve  $\partial_t\xi_{\bar{\alpha}}$  kifejezések is meghatározhatók.

Ezen eljárás végigvitelével a (16.2.24) - (16.2.25) egyenletrendszer egyértel-

műen megoldható a kezdőfelületen a

$$(\xi_t, \xi_x, \xi_y, \xi_z; \partial_t \xi_t, \partial_t \xi_x, \partial_t \xi_y, \partial_t \xi_z) \quad (16.2.26)$$

változókra, hiszen ott a forrástagokban szereplő

$$h, \partial_t h, h_{t\bar{\alpha}}, \partial_t h_{t\bar{\alpha}} \quad (16.2.27)$$

kifejezések ismertek.

Utolsó lépésként alkalmazzuk ezeket a kifejezéseket a (16.2.18) egyenlet megoldása során úgy, mint a keresett mértéktranszformáció  $\xi^a$  generátorára vonatkozó kezdőadatokat. Az így kapott kezdőfeltételeket használva meghatározzuk a (16.2.18) egyenlet megoldását, majd annak segítségével végrehajtjuk a (15.4.22) transzformációt. A vesszők elhagyása után az eredményül kapott  $h_{ab}$  eltéréstenzor nemcsak a Lorentz-feltételnek, de a

$$h = 0, \quad (16.2.28)$$

valamint a

$$h_{t\bar{\alpha}} = 0 \quad (\bar{\alpha} = 1, 2, 3) \quad (16.2.29)$$

feltételeknek is eleget tesz.

Az már csak egy kellemes ráadás, hogy ekkor a  $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$  reláció ismételt használata folytán a  $\partial^\alpha h_{\alpha\beta}$  Lorentz-feltétel a  $\beta = t$  esetben a

$$\partial_t h_{tt} = 0 \quad (16.2.30)$$

alakot ölti. Így a most vizsgált tiszta sugárzás esetében, azaz amikor  $T_{ab} \equiv 0$  és csak akkor, a  $h_{tt}$  komponensre vonatkozó linearizált Einstein-egyenletből

$$\Delta^2 h_{tt} = 0 \quad (16.2.31)$$

következik. Ennek az egyenletnek az egyetlen, mindenütt reguláris megoldása egy időtől és helytől egyaránt független állandó. Ennek értéke egy további, minden korábbi feltételünket tiszteletben tartó (15.6.5) típusú mértéktranszformáció segítségével zérussá tehető.

### 16.3. A geometriai szabadsági fokok

Az elektrodinamikához hasonlóan a (16.1.1) linearizált Einstein-egyenletből kapott homogén egyenlet megoldásai is mint síkhullám-megoldások szuperpozíciói adhatók meg. A vizsgált rendszerünk valódi szabadsági fokainak felderítéséhez érdemes a homogén hullámegyenlet elemi síkhullám megoldásait tekintenünk. Ennek megfelelően — a sugárzási mértéket, továbbá az azzal kompatibilis  $\bar{h}_{ab} = h_{ab}$  egyenlőséget — használva tekintsük a

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \cdot \exp[i \cdot k_\gamma x^\gamma] \quad (16.3.32)$$

síkhullám megoldást, ahol  $H_{\alpha\beta}$  valamint  $k_\alpha$  helytől és időtől független kifejezések, azaz  $\partial_\gamma H_{\alpha\beta} = 0$  valamint  $\partial_\gamma k_\alpha = 0$  teljesül. <sup>3</sup> Ezt a (16.1.1)-ből kapott homogén egyenletbe helyettesítve

$$k_\alpha k_\beta \eta^{\alpha\beta} = 0 \quad (16.3.33)$$

következik, ami azt jelenti, hogy az elemi hullámunk  $\phi = i k_\gamma x^\gamma$  fázisában szereplő  $k^\alpha$  hullámszám-vektor fényszerű az  $\eta_{\alpha\beta}$  metrikára nézve. Mindezekon túlmenően – a vizsgált speciális esetben – a sugárzási és Lorentz-féle mértékfeltételeket

$$h = 0 \iff H_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0, \quad (16.3.34)$$

$$h_{t\alpha} = 0 \iff H_{t\alpha} = 0 \quad (\alpha = t, x, y, z), \quad (16.3.35)$$

$$\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0 \iff k^\alpha H_{\alpha\beta} = 0 \quad (\beta = t, x, y, z) \quad (16.3.36)$$

alakban írhatjuk fel.

---

<sup>3</sup>A (16.3.32) egyenlet által meghatározott eltéréstenzor komplex és így csak a komplex konjugált kifejezés hozzáadásával nyert valós rész tekinthető fizikainak. Fontos azonban megjegyezni, hogy az alkalmazott egyenletek linearitása folytán a (16.3.32) alakban megjelenő  $H_{\alpha\beta}$  kifejezésre kapott összefüggések mindegyike külön-külön teljesül  $H_{\alpha\beta}$  valós és képzetes részére is, így a formulák egyszerűbb alakját elsődlegesnek tartva ebben a részben mindenütt a komplex  $H_{\alpha\beta}$ -vel dolgozunk.

Ebből a kilenc algebrai feltételből csak nyolc független, hiszen a középső egyenletekből az utolsó egyenlet  $\beta = t$  választásnak megfelelő speciális esete automatikusan adódik. Így a szimmetrikus  $H_{ab}$  tenzornak – melynek általános esetben tíz független komponense van – a fenti nyolc algebrai megszorítás következtében csak két algebrailag független komponense lehet.

Az egyszerűség kedvéért, és az általánosság megszorítása nélkül <sup>4</sup>, tekinthetünk olyan síkhullámot is, amely a  $z$ -koordinátatengely irányába mozog. Ekkor

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \exp[-i\omega(t-z)], \quad (16.3.37)$$

ahol a  $k^\alpha$  fényzerű hullámszám-vektor komponensei  $k^\alpha = (\omega, 0, 0, \omega)$ , továbbá  $\omega$  a hullám fázisváltozási gyorsaságát jelöli, amelyre a jól ismert  $\omega \equiv k^t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  egyenlőség teljesül. A (16.3.35) egyenletből, valamint a Lorentz-feltételből azonnal adódik, hogy

$$\partial^\alpha h_{\alpha\bar{\beta}} = \partial^t h_{t\bar{\beta}} + \partial^{\bar{\alpha}} h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = -\partial_t h_{t\bar{\beta}} + \partial_{\bar{\alpha}} h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \partial_z h_{z\bar{\beta}} = 0. \quad (16.3.38)$$

Ez a reláció a  $h_{ab}$  eltéréstenzor regularitására vonatkozó korábban már többször alkalmazott érvelésünknek megfelelően azt jelenti, hogy a  $H_{z\bar{\beta}}$  komponensek tetszőleges,  $\bar{\beta} = x, y, z$ -re szintén zérus értékűek. Emiatt csak a  $H_{xx}$ ,  $H_{xy}$ ,  $H_{yx}$  és a  $H_{yy}$  komponensek vehetnek fel nullától eltérő értéket.

Ezek után  $h_{ab}$  szimmetriája és trace-mentessége folytán a két algebrailag független komponens például a  $H_+ = H_{xx} = -H_{yy}$  és a  $H_\times = H_{xy} = H_{yx}$  kifejezésekkel adhatjuk meg. Ezek segítségével magát a  $H_{ab}$  tenzort a

$$H_{ab} = H_+ [(e_x)_a (e_x)_b - (e_y)_a (e_y)_b] + H_\times [(e_x)_a (e_y)_b + (e_y)_a (e_x)_b], \quad (16.3.39)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $(e_x)_a$  és  $(e_y)_b$  az  $x$  és  $y$  koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorokat jelölik. A jobb oldalon található két tag együtthatóját a tekintett gravitációs síkhullám két független – „plusszos” és „keresztes” – polarizációs állapotának amplitúdóinak nevezzük.

<sup>4</sup>A vonatkoztatási rendszerünket alkalmas, az Euklideszi-térben szokásos forgatások segítségével a kívánt irányba tudjuk állítani.

Érdemes megemlíteni, hogy az imént kapott két független kifejezés  $H_+$  és  $H_\times$  is a (16.2.19) homogén hullámeqyenletnek tesz eleget.

## 16.4. Sugárzási mérték az általános esetben

Korábban láttuk, hogy a Maxwell-féle elektrodinamika és a linearizált Einstein-elmélet több esetben nagyon hasonló viselkedést mutat. Ez nem is meglepő, hiszen az alapvető téregyenletek is nagyon hasonlítanak egymásra, azzal a nem-triviális eltéréssel, hogy míg a Maxwell-elméletben a vektorpotenciál, addig a linearizált Einstein-elméletben a metrika perturbációja az alaptérváltozó.

### 16.4.1. Az analóg elektrodinamikai probléma

Amint azt a 15.3 alfejezetben láttuk, a Maxwell-elmélet mértékfüggetlen alaptérváltozója az  $F_{ab}$  Faraday-tenzor, melyet egy alkalmasan választott  $A_a$  vektorpotenciál segítségével az  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$  írhatunk fel. Azt is láttuk, hogy az  $A_a$ , valamint az  $A'_a = A_a + \partial_a \chi$  kifejezésekkel megadott vektorpotenciálok ugyanazt a Faraday-tenzort határozzák meg, ahol  $\chi$  egy tetszőleges (elegendően reguláris) függvény.

Láttuk, hogy még a Lorentz-feltétel sem választja ki egyértelműen a vektorpotenciált, hiszen a  $\chi$ -függvényt mindig megválaszthatjuk úgy, hogy az eleget tegyen a (15.3.16) egyenletnek és az így nyert  $A'_a = A_a + \partial_a \chi$  vektorpotenciál pontosan akkor tesz eleget a Lorentz-feltételnek, ha  $A_a$  is eleget tesz neki.

Azt is láttuk, hogy amikor az  $A_a$  vektorpotenciál eleget tesz a  $\partial^a A_a = 0$  egyenlettel meghatározott Lorentz-feltételnek, a Maxwell-egyenletet a

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b \quad (16.4.40)$$

alakban írhatjuk [19, 50].

Az talán kevésbé ismert, hogy tetszőleges vektorpotenciálból kiindulva mindig

elkészíthetjük a Coulomb-mértéknek (szokás ezt transzverzális, vagy sugárzási mértéknek is nevezni) megfelelő, bizonyos szempontból kitüntetett részeket.

Tekintsük a Minkowski-tér-idő valamely inerciális megfigyelőrendszerre vonatkozó  $(t, \mathbf{x})$  idő-tér felbontását. Az ehhez tartozó felbontásra alapozottan bármely  $A_a$  vektorpotenciált felírhatunk  $^5 A_\alpha = (-\phi, A_{\bar{\alpha}})$  alakban. Az ebben a felbontásban megjelenő  $A_{\bar{\alpha}}$  térszerű rész is tovább bontható „transzverzális” és „longitudinális” részekre a  $A_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}}^T + \partial_{\bar{\alpha}}\varphi$  összefüggésnek megfelelően, ahol az  $A_{\bar{\alpha}}^T$  transzverzális rész a  $\partial^{\bar{\alpha}}A_{\bar{\alpha}}^T = 0$  feltételnek tesz eleget. Belátható, hogy ez a felbontás valóban egyértelmű, ha a  $\varphi$  potenciál eleget tesz a  $\nabla^2\varphi = \partial^{\bar{\alpha}}A_{\bar{\alpha}}$  egyenletnek és  $\varphi \rightarrow 0$  a  $r \rightarrow \infty$  határesetben.

Az imént bevezetett „transzverzális” és „longitudinális” részekre alapozottan belátható, hogy a

$$\Phi = \phi + \partial_t\varphi, \text{ valamint } A_{\bar{\alpha}}^T \quad (16.4.41)$$

kifejezések függetlenek attól, hogy milyen mértéknek megfelelő vektorpotenciálból indultunk ki [19]. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a Maxwell-egyletek pontosan akkor teljesülnek, ha ezek az invariáns kifejezések a

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho \quad (16.4.42)$$

$$\square A_{\bar{\alpha}}^T = -4\pi \left[ J_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{4\pi} \partial_{\bar{\alpha}}(\partial_t\Phi) \right] \quad (16.4.43)$$

egyenleteknek tesznek eleget, ahol  $J_{\bar{\alpha}}$  a (lokálisan meghatározott) négyes elektromos áramvektor térszerű részét jelöli, azaz a  $J_\alpha = (-\rho, J_{\bar{\alpha}})$  összefüggés teljesül.

Vegyük észre, hogy a (16.4.43) jobb oldalán álló áramvektor nem csak az említett térszerű részt tartalmazza. A kérdéses kifejezés, melyet transzverzális áramvektornak nevezünk a

$$J_{\bar{\alpha}}^T = J_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{4\pi} \partial_{\bar{\alpha}}(\partial_t\Phi), \quad (16.4.44)$$

---

<sup>5</sup>A  $\phi$  skalárpotenciál előtt álló negatív előjel történeti okoknál fogva sokkal hamarább megjelent az elektrosztatikában, mint maga az  $A_\alpha$  vektorpotenciál az elektrodinamikában.

alakban adott.

Az utóbbi összefüggést kicsit figyelmesebben vizsgálva az is látható, hogy az áramvektor  $J_{\alpha}^T$  transzverzális része még abban az esetben sem lokalizált, ha a valódi áramokat megjelenítő áramvektor az [19]. Ez egy egyszerű következménye annak, hogy  $\Phi$  egy Poisson-típusú egyenletnek tesz eleget. Ne feledjük azonban, hogy bár (16.4.42) nem időfejlődési egyenlet,  $\Phi$  mégis időfüggő, ha  $\rho$  az.

### 16.4.2. A linearizált gravitáció esete

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy nemcsak a vákuumesetben, de valódi fizikai források feltételezése esetén is be lehet vezetni sugárzási mértéket. Rámutatunk azonban arra, hogy – az elektrodinamikai eset analógiájaként – ezt megfelelő körütekintéssel kell megtennünk, hiszen az utóbbi esetben az így nyert egyenletekben fellépő virtuális (ugyanakkor matematikai értelemben adekvát) forrástagok még véges kiterjedésű testek által keltett hullámok esetében sem lokalizáltak.

A sugárzási, vagy TT-mérték meghatározása érdekében induljunk ki a  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzor egy Minkowski-féle koordinátarendszerre vonatkozó „időszerű és térszerű”

$$h_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|c} h_{tt} & h_{t\bar{\alpha}} \\ \hline h_{\bar{\alpha}t} & h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \end{array} \right) \quad (16.4.45)$$

felbontásából. Vezessük be az így kapott részekre a

$$h_{tt} = 2\phi \quad (16.4.46)$$

$$h_{t\bar{\alpha}} = \beta_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}}\gamma \quad (16.4.47)$$

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} + \frac{1}{3}H\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \partial_{(\bar{\alpha}}\epsilon_{\bar{\beta})} + \left( \partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}} - \frac{1}{3}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\nabla^2 \right) \lambda, \quad (16.4.48)$$

jelöléseket, ahol  $H \equiv \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ , melyet a  $H = h + 2\phi$  reláció kapcsol a  $h = h^{\alpha}_{\alpha}$  trace-hez.

A  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzor (16.4.45) - (16.4.48) felbontásában szereplő kifejezések attól válnak egyértelműen meghatározottá, hogy rájuk egyrészt a

$$\partial^{\bar{\alpha}}\beta_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}}\varepsilon_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}}h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} = 0, \quad \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} = 0, \quad (16.4.49)$$

kényszeregyenleteket, másrészt az  $r \rightarrow \infty$  határesetben a

$$\gamma \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{\bar{\alpha}} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \nabla^2\lambda \rightarrow 0 \quad (16.4.50)$$

határfeltételeket rójuk ki. (16.4.49) egyenletei közül az utolsó kettő azt fejezi ki, hogy a  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$  divergencia és spúrmentes, angolul „transverse-traceless”. Mivel a szakirodalomban ezen szavak kezdőbetűivel szokás jelölni a „transverse-traceless” kifejezéseket, mi is ezt használjuk a továbbiakban.

Korábban már láttuk, hogy a  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzor komponensei nem mértékinvariánsak, így a  $\phi, \gamma, \lambda, H, \beta_{\bar{\alpha}}, \varepsilon_{\bar{\alpha}}$  kifejezések sem lehetnek azok.

**16.4.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a  $\phi, \gamma, \lambda, H, \beta_{\bar{\alpha}}, \varepsilon_{\bar{\alpha}}$  kifejezésekből képzett*

$$\Phi \equiv -\phi + \partial_t\gamma - \frac{1}{2}\partial_t^2\lambda \quad (16.4.51)$$

$$\Theta \equiv \frac{1}{3}(H - \nabla^2\lambda) \quad (16.4.52)$$

$$\Xi_{\bar{\alpha}} \equiv \beta_{\bar{\alpha}} - \frac{1}{2}\partial_t\varepsilon_{\bar{\alpha}}, \quad (16.4.53)$$

kombinációk, valamint a  $3 \times 3$ -as  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$  mátrix mértékinvariáns kifejezések, azaz ezek a kifejezések függetlenek attól, hogy a  $h_{\alpha\beta}$ , vagy a vele mértékekiválens  $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\xi_{\beta} + \partial_{\beta}\xi_{\alpha}$  eltéréstenzorból kiindulva határozzuk meg őket.

### 16.4.3. Az energiaimpulzus-tenzor felbontása

Mielőtt az imént bevezetett mennyiségekre vonatkozó téregyenleteket felíránk, tekintsük az energiaimpulzus-tenzornak a  $h_{\alpha\beta}$  eltéréstenzorra alkalma-



zott felbontáshoz hasonló eljárással nyert

$$T_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|c} T_{tt} & T_{t\bar{\alpha}} \\ \hline T_{\bar{\alpha}t} & T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \end{array} \right), \quad (16.4.54)$$

felbontását, ahol a  $\rho$ ,  $S_{\bar{\alpha}}$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ ,  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségeket a

$$T_{tt} = \rho \quad (16.4.55)$$

$$T_{t\bar{\alpha}} = S_{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\alpha}} S \quad (16.4.56)$$

$$T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = P\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \partial_{(\bar{\alpha}}\sigma_{\bar{\beta})} + \left( \partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}} - \frac{1}{3}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\nabla^2 \right) \sigma \quad (16.4.57)$$

összefüggések segítségével definiáljuk, és ezek egyértelmű meghatározottsága érdekében megköveteljük, hogy a

$$\partial^{\bar{\alpha}} S_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}} \sigma_{\bar{\alpha}} = 0, \quad \partial^{\bar{\alpha}} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \quad (16.4.58)$$

kényszeregyenletek és az  $r \rightarrow \infty$  határesetben a

$$S \rightarrow 0, \quad \sigma_{\bar{\alpha}} \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad \nabla^2 \sigma \rightarrow 0 \quad (16.4.59)$$

lecsengési feltételek teljesüljenek. Vegyük észre, hogy (16.4.58) utolsó két relációja értelmében a  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  hármastenzor valójában egy TT-tenzor.

#### 16.4.4. $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ nem lokális

Az általános esetben az Einstein- és az anyagi térváltozókra vonatkozó mozgásegyenleteket szimultán kell megoldanunk. A jelen esetben egyedül a geometriára vonatkozó Einstein-egyenletekkel fogunk foglalkozni, azaz a forrásokat alkotó anyag történetét meghatározó mozgásegyenleteket most nem vesszük figyelembe. Ennek megfelelően a jelen fejezet hátralévő részében feltesszük, hogy a forrásokat leíró anyagmezőkhöz tartozó  $T_{\alpha\beta}$  energiaimpulzus-tenzor ismert.

A  $T_{\alpha\beta}$  energiaimpulzus-tenzor (18.5.52), valamint (16.4.55) - (16.4.57) által

meghatározott felbontását felhasználva a  $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$  megmaradási törvényt a

$$\nabla^2 S = \dot{\rho} \quad (16.4.60)$$

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2}P + \frac{3}{2}\dot{S} \quad (16.4.61)$$

$$\nabla^2 \sigma_{\bar{\alpha}} = 2\dot{S}_{\bar{\alpha}}, \quad (16.4.62)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $\rho = T_{tt}$ ,  $S_{\bar{\alpha}} = T_{t\bar{\alpha}} - \partial_{\bar{\alpha}} S$  és  $P = \delta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ . Így amikor  $T_{\alpha\beta}$  adott, ezek az egyenletek és a rájuk vonatkozó határfeltételek az  $S$ ,  $\sigma$  és  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségeket teljesen meghatározzák.

Mindezek, valamint (16.4.57) figyelembevételével  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  is egyértelműen meghatározott, és a

$$\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - P\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \partial_{(\bar{\alpha}}\sigma_{\bar{\beta})} - \left(\partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}} - \frac{1}{3}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\nabla^2\right)\sigma \quad (16.4.63)$$

alakban írható fel.

Mivel a (16.4.61) és (16.4.62) egyenleteknek megfelelően a  $\sigma$  és  $\sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségek nem lokálisak,  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  sem lehet az. Ez teljesen analóg azzal az esettel, hogy a Coulomb-mértékben lévő vektorpotenciál térszerű részére vonatkozó (16.4.43) Maxwell-egyenletben sem csak a lokalizált töltésáramok, hanem a Coulomb-potenciál deriváltjait is tartalmazó úgynevezett transverse-töltésáram jelenik meg.

### 16.4.5. A linearizált Einstein-egyenletek sugárzási mértékben

Egyszerű algebrai átalakítások révén az is megmutatható, hogy a  $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$  Einstein-egyenletek a jelen esetben a

$$\nabla^2 \Theta = -8\pi\rho \quad (16.4.64)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi(\rho + 3P - 3\partial_t S) \quad (16.4.65)$$

$$\nabla^2 \Xi_{\bar{\alpha}} = -16\pi S_{\bar{\alpha}} \quad (16.4.66)$$

$$\square h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} = -16\pi\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \quad (16.4.67)$$

alakban írhatók fel úgy, hogy az ezekben előforduló  $\Theta$ ,  $\Phi$  és  $\Xi_{\bar{\alpha}}$  mennyiségekre

$$8\pi S = -\partial_t \Theta \quad (16.4.68)$$

$$8\pi \sigma = -\Phi - \frac{1}{2}\Theta \quad (16.4.69)$$

$$8\pi \sigma_{\bar{\alpha}} = -\partial_t \Xi_{\bar{\alpha}} \quad (16.4.70)$$

relációk is teljesülnek.

Ezek az egyenletek nyilvánvalóan mutatják, hogy valóban csak a metrika TT-része tesz eleget hullámegyenletnek, nevezetesen (16.4.67)-nek, míg minden más mértékinvariáns mennyiségre Poisson-típusú egyenlet vonatkozik. Utóbbiak az egyenletek értelmében nem időfejlődnek, annak ellenére, hogy mindannyian időfüggőek.

Mindezekre alapozottan a szokásos érvelés a következőképpen hangzik: *A források olyan irtatlanul nagy távolságokban vannak tőlünk, hogy nyugodtan feltehetjük, az általuk keltett gravitációs hullámok ugyanúgy írhatóak le, mint a tisztán vákuum, azaz forrásmentes esetben.*

A fenti analízisből az következik, hogy ez a következtetés hibás, hiszen a (16.4.63) összefüggéssel meghatározott  $\sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  forrástag nemlokális még akkor sem, amikor a  $T_{\alpha\beta}$  energiaimpulzus-tenzor tartója kompakt.

## 16.5. A mérhető mennyiségek

A legígéretesebb gravitációs hullámdetektorok lényegében Michelson-féle lézerezinterferométerek. Mára ilyen típusú detektoroknak egy egész világhálózata épült ki [24, 49, 12, 20, 18]. Az interferometrikus detektorok működési elve nagyon egyszerű. Az egymásra merőleges három, illetve négy kilométer hosszúságú karokban, a metszéspontban található féligáteresztő tükrőtől azonos fázisban indított, majd a végtükrökről visszaverődő és újraegyesülő lézerfény interferenciaképében beálló változásokat figyelik. Ezek engednek

következtetni a karok hosszában bekövetkező változásokra. Leegyszerűsítve a karokban utazó lézerfény relatív fázisváltozásából kívánjuk kiolvasni, hogy valóban áthaladt-e gravitációs hullám a detektorunkon.

Ez a magyarázat első ránézésre valóban egyszerűnek tűnik, de hamar elvesztheti a legjáratosabb elme is a magabiztosságát, ha nem vigyáz arra, hogy a Newton-elméletből átvett, megszokásokon alapuló érvelések meg ne tréfálják. Vegyük például a jól ismert tényt, miszerint a táguló univerzumban az ott utazó fény hullámhossza is megnő. Mi történik, ha az érkező gravitációs hullám hatására az interferométer karjaiban utazó fény hullámhossza ugyanolyan mértékben nő vagy csökken, ahogyan a karok hossza változik? Ha ez így lenne, egyáltalán nem kellene semmiféle fáziseltolódásnak fellépnie, azaz esélyünk sem lehetne a detektálásra. Egy másik bizonytalanság forrása lehet az, ha például nem jól használjuk ki azt a tényt, hogy az Einstein-elmélet nemcsak a téridő geometriájának változását, de a benne mozgó anyag és fizikai mezők történetét, valamint a geometriát meghatározó anyageloszlásban beálló változásokat is leírja. Így például mind a gravitációs hullámkeltés folyamatát, mind a keltett gravitációs hullámnak a detektorunkig történő utazását, mind pedig a próbarészecskék szerepét játszó tükrök mozgását. Igaz-e, hogy a járulékos változások mind meghatározhatók, és azok, amelyeket elhanyagolunk, valóban elhanyagolhatók? Ha igen, miért?

## 16.6. Mértékválasztás

A fenti kérdések megválaszolása során ismét fontos szerepet játszik a megfelelő mérték alkalmazása. Miután egy alkalmas mértéket kiválasztottunk, először a detektor tükreinek, mint próbarészecskéknek a mozgását tekintjük, majd a detektor karjaiban mozgó fotonok rövid leírását adjuk az alkalmazott lineáris közelítésben.

Általában egy világvonalra, vagy történetre úgy gondolhatunk, mint az adott részecske, vagy próbatest mozgása során érintett téridőpontok koordinátái-

nak valamely  $\tau$  paramétertől való függését meghatározó  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  relációra. Olyan tömeges próbarészecskék, mint például a tükrök esetén a legalkalmasabb paraméter a tükrök világvonala mentén a tükrökkel együtt mozgó óra által mért sajátidő.

Így a tükrök, melyek a felfüggesztésükre merőleges síkban szabadon elmozoghatnak – a korábban tárgyalt geodetikus hipotézissel összhangban –, olyan  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  világvonalakkkal jeleníthetők meg, amelyek  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)$  érintővektorainak térszerű komponenseire az

$$u^\varepsilon \nabla_\varepsilon u^{\bar{\alpha}} = \frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{d\tau^2} + \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\varepsilon\varphi} u^\varepsilon u^\varphi = 0 \quad (16.6.71)$$

geodetikus egyenlet teljesül.

Láttuk, hogy tetszőleges  $\xi^\alpha$  infinitezimális vektormező által indukált

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha \quad (16.6.72)$$

koordinátatranszformáció hatására (lineáris közelítésben) a  $h_{ab}$  eltéréstenzor a

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha \quad (16.6.73)$$

szabály szerint változik.

A (15.2.4) egyenletbe történő egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezen változásra nézve a Christoffel-szimbólumok nem invariánsak, és így a (16.6.71) egyenlettel meghatározott próbarészecskék pályái sem azok. Kicsit pontosabban fogalmazva, a  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  metrikához tartozó globális Minkowski-féle  $x^\alpha$  koordinátákban felírt Christoffel-szimbólumok és az  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  pálya függvényalakja különbözik a  $g'_{ab} = \eta_{ab} + h'_{ab}$  metrikához  $x'^\alpha$  koordinátákban felírt Christoffel-szimbólumoktól és az  $x'^\alpha = x'^\alpha(\tau)$  pálya függvényalakjától.

Ez azt jelenti – és ez az általános relativitáselmélet keretein belül nem is kelene, hogy nagyon meglepő legyen –, hogy arra a kérdésre nem adható mérték-

és koordináta-választástól független válasz, hogy valamely részecske koordináta-világvonala milyen  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  függvénykapcsolattal adható meg. Éppen ezért érdemes körültekintőnek lenni, amikor a fent megfogalmazott kérdéseinkre válaszokat keresünk.

Mind ezidáig a linearizált elmélet keretein belül is már többször alkalmaztuk az általános relativitáselmélet diffeomorfizmusinvarianciájából adódó mértékszabadságot. Felmerülhet a kérdés, vajon nem egyszerű gauge-effektus-e a vizsgált hullámjelenség és mint ilyen esetleg nem is mérhető. Ebből a szempontból alapvető fontossággal bír annak a kérdésnek a tisztázása, hogy van-e egyáltalán, és ha van, mely mennyiségek mértékinvariánsak a linearizált elméletben?

**16.6.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az (16.6.72) és (16.6.73) transzformációk alkalmazása során a linearizált Riemann-tenzor*

$${}^{(1)}R_{abcd} = \frac{1}{2} (\partial_b \partial_c h_{ad} + \partial_d \partial_a h_{bc} - \partial_b \partial_d h_{ac} - \partial_a \partial_c h_{bd}) \quad (16.6.74)$$

*invariáns marad, azaz a  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  metrikához tartozó linearizált Riemann-tenzornak az  $x^\alpha$  koordinátákhoz tartozó  $\{(\partial/\partial x^\alpha)\}$  koordináta bázisvektorokra vonatkozó komponensei megegyeznek a transzformált  $g'_{ab} = \eta_{ab} + h'_{ab}$  metrikához tartozó  $x'^\alpha$  koordináták által meghatározott  $\{(\partial/\partial x'^\alpha)\}$  koordináta bázisvektorokra vonatkozó komponenseivel.*

Fontos kiemelni, hogy a soron következő számítások tetszőleges mértékben és az ehhez illeszkedő megfelelő koordinátaválasztás mellett elvégezhetők. A számításaink egyszerűbb elvégezhetősége érdekében ennek az alfejezetnek a hátralévő részében mindenütt az anyagmentes esetben szokásos „sugárzási mértékválasztáshoz” illeszkedő lokális koordinátákat használunk. Hangsúlyozni szeretnénk azonban, hogy bármilyen koordinátákat is használunk, csak a mértékinvariáns, azaz a koordináták megválasztásától független kifejezések bírnak valódi fizikai jelentéssel. Mivel a görbületi tenzor komponensei függetlenek az alkalmazott mértéktől, érdemes lenne a detektorok által mért fizikai

menyiséget is ezek segítségével kifejeznünk.

Ahogy az a (16.2.28) - (16.2.31) egyenletekből következik, a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordináták alkalmazása esetén a  $h_{t\alpha}$  ( $\alpha = t, x, y, z$ ) kifejezések zérus értékűek. Ennek megfelelően a (15.2.4) összefüggés által meghatározott Christoffel-szimbólumokra a

$$\Gamma^{\bar{\alpha}}_{tt} = 0 \quad (\bar{\alpha} = 1, 2, 3) \quad (16.6.75)$$

egyenlet adódik. Továbbá, mivel most  $g_{tt} = -1$  és  $g_{t\alpha} = 0$  – és így az is igaz, hogy a  $t$  koordinátaidő éppen a tükrök világvonala mentén mért  $\tau$  sajátidővel esik egybe – a (16.6.75) és (16.6.71) összefüggések alapján azt kapjuk, hogy  $\frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{d\tau^2} = 0$ . Feltéve, hogy a tükrök kezdetben nyugalomba vannak, azaz  $\frac{dx^{\bar{\alpha}}}{d\tau} = 0$ , a detektor tükreinek térszerű koordinátái nem változnak meg akkor sem, ha gravitációs hullám halad át a detektoron.

Fontos hangsúlyozni, hogy ez nem azt jelenti, hogy tükrök nem mozognak. Az imént megfogalmazott következtetés nem a tükrök távolságának állandóságát jelenti, egyedül a tükrök térszerű koordinátáinak időbeni változatlanságát fogalmazza meg a kiválasztott Minkowski-féle koordinátarendszerre vonatkozóan.

Az imént megfogalmazott érveléshez hasonlóan a (16.6.74) egyenletből az is következik, hogy a kiválasztott, a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordinátarendszerben a Riemann-tenzor árapály komponenseit a

$$R_{\bar{\alpha}t\bar{\beta}t} = -\frac{1}{2}\partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (16.6.76)$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Annak megértésében, hogy a  $\frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{d\tau^2} = 0$  és a (16.6.76) egyenletek nem mondanak ellent egymásnak, segíthet az alábbi feladatban megfogalmazott állítás ellenőrzése.

**16.6.2. Feladat.** *Ismert, hogy a  $T^a$  érintővektorral és  $X^a$  eltérésvektorral jel-*

lemzett egyparaméteres geodetikus kongruenciák

$$a^a = T^e \nabla_e (T^f \nabla_f X^a) \quad (16.6.77)$$

relatív gyorsulására

$$T^e \nabla_e (T^f \nabla_f X^a) = -R_{efd}{}^a T^e X^f T^d \quad (16.6.78)$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy bármely, a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordinátarendszerekben <sup>6</sup> a térszerű  $X_{(\beta)}^a = (\partial/\partial x^{\bar{\beta}})^a$  koordinátabázisvektorok, mint eltérésvektorok második  $u^a$  menti kovariáns deriváltjára, a (16.6.76) egyenlettel összhangban, az

$$u^e \nabla_e (u^{\varphi} \nabla_{\varphi} X^{\bar{\beta}}) = \frac{1}{2} \partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} X^{\bar{\alpha}} \quad (16.6.79)$$

egyenlet teljesül, ahol kihasználtuk azt, hogy a felülvonásos térszerű koordinátakomponensek indexe előjelváltoztatás nélkül szabadon lehúzzható, vagy felemelhető.

## 16.7. A megfigyelésről

Tekintsünk most egy realisztikus, bár lényegesen leegyszerűsített interferencia elvén működő detektor elrendezését. A LIGO és Virgo detektorok esetében a legnagyobb érzékenység a 200Hz körüli frekvenciatartományba esik. A számítások egyszerűsítése érdekében tekintsük ennek a frekvenciának a felét. Első hallásra meglepő, de az ennek megfelelő frekvenciájú gravitációs hullám  $\lambda$  hullámhossza körülbelül 3000<sub>[km]</sub>. A detektor bármely pontjában egy ilyen hullám két azonos fázisú állapotának megjelenése között – az imént megfogalmazott frekvenciafeltételünk értelmében –  $t_{gh} \sim 10_{[s]}^{-2}$  idő telik el.

Ez azt jelenti, hogy a fényjeleknek egy, a karok mentén oda-vissza történő utazása során a  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  komponensek értéke, az általánosság megszorítása nélkül,

---

<sup>6</sup>Egy ilyen koordinátarendszerben a  $t$  koordinátavonalak geodetikusok és azok  $u^a$  érintővektorára az  $u^{\alpha} = (\partial/\partial t)^{\alpha} = \delta^{\alpha}_t$  reláció teljesül.



jó közelítéssel állandónak tekinthető<sup>7</sup>, hiszen az elektromágneses hullámok  $t_{eh} \sim \frac{2 \cdot 50 \cdot 3 \text{ [km]}}{300,000 \text{ [km/s]}} = 10^{-3} \text{ [s]}$  idő alatt 50-szer teszik meg az oda-vissza utat a detektorok mentén.

Ahogy azt már fentebb említettük, az alkalmazott koordinátáinkra vonatkozó feltételeket összegezve azt mondhatjuk, hogy a kiválasztott koordináta-rendszerben  $g_{tt} = -1$  és  $g_{t\bar{\alpha}} = 0$ , így a koordinátaidő  $t$  éppen a tükrök világvonala mentén mért sajátidővel esik egybe. A térszerű koordináták azonban még a  $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  térszerű komponensek viszonylagos állandósága ellenére sem esnek egybe valamely inerciális megfigyelőkhöz tartozó szokásos koordinátákkal.

Válasszuk most a koordináta-rendszerünk térszerű koordinátáit úgy, hogy azok origója a féligáteresztő tükörnél legyen, míg az interferométer karjainak végén található tükrök külön-külön helyezkedjenek el az  $x$ -, illetve  $y$ -tengelyek mentén.

A detektor karjaiban utazó fotonok történetére – geometriai-optika közelítésben – mint fényszerű geodetikusra gondolhatunk, amely mentén alkalmas affin paraméterként szolgál az  $A_a = A_a^\circ \cdot \exp[i \cdot \phi]$  vektorpotenciál által meghatározott elektromágneses hullám  $\phi = \phi(x^\mu)$  fázisa.<sup>8, 9, 10</sup>

Például az  $x$ -tengely mentén mozgó fotonokat megjelenítő elektromágneses tér

<sup>7</sup>Fontos megemlíteni, hogy a LISA detektor geometriai elrendezése és méretei lényegesen mások, így a LISA esetében az alábbi argumentum alkalmazása nem adekvát.

<sup>8</sup>Az elektromágneses hullámok geometriai-optika közelítésben alkalmazható leírása, ebben olyan fogalmak, mint a fázis, fázisfelületek valamint fényszerű geodetikuskok adekvát használatának magyarázata megtalálható a 17.1.3 alfejezetben.

<sup>9</sup>Az imént felírt vektorpotenciál komplex és ahogy azt korábban is említettük csak a komplex konjugált kifejezés hozzáadásával nyert valós rész tekinthető fizikainak. A formulák egyszerűbb alakját elsődlegesnek tartva ebben a részben mindenütt a komplex  $A_a$ -vel dolgozunk annak tudatában, hogy az ily módon nyert kifejezések mindegyike külön-külön teljesül  $A_a^\circ$  valós és képzetes részére is. Tesszük ezt annál is inkább mert a jelen alfejezet hátralévő részében úgyis csak a  $\phi$  valós fázis viselkedése lesz érdekes.

<sup>10</sup>Fontos azt is felidézni, hogy egy  $\omega$  (kör)frekvenciájú  $k^a$  hullámszám-vektorú elektromágneses síkhullám fázisát a  $\phi = k_\alpha x^\alpha$  alakban írhatjuk fel. Például abban a speciális esetben amikor a hullám az  $x$ -tengely mentén mozog, azaz a hullámszám-vektorra a  $k^\alpha = (\omega, 0, 0, 0)$  reláció teljesül, akkor a hullám  $\phi$  fázisa a  $\phi = k_\alpha x^\alpha = \omega(t - x)$  alakban írható fel.

$A_a$  vektorpotenciáljára ható hullámoperátor <sup>11</sup> a

$$\square A_\alpha = (-\partial_t^2 + (1 - h_{xx})\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) A_\alpha = (-\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) A_\alpha \quad (16.7.81)$$

alakban írható fel, ahol az utolsó lépésben bevezetett  $x'$  koordinátát a

$$\frac{dx'}{dx} = \sqrt{1 - h_{xx}} \sim 1 - \frac{1}{2} h_{xx} \quad (16.7.82)$$

reláció határozza meg.

Így a  $(t, x', y, z)$  koordinátákban a fotonok evolúciójára vonatkozó hullámegyenlet pontosan olyan, mintha azok a Minkowski-téridőben utaznának. Ezért a fotonok elektrodinamikai megjelenítésére szolgáló  $A_a$  vektorpotenciál fázisváltozásának meghatározása során nyugodtan alkalmazhatjuk a speciális relativitáselméletben megszokott formulákat. Mindezeknek megfelelően az  $x$ -tengely mentén mozgó  $\omega$  körfrekvenciájú  $k^\alpha = (\omega, \omega, 0, 0)$  hullámszám-vektorú elektromágneses hullám  $\phi^{(x)} = k_\alpha x'^\alpha$  fázisának megváltozását – az  $x$ -tengelyen fekvő kar mentén egy oda-vissza út során – a

$$\delta\phi^{(x)} = k_\alpha x'^\alpha = \omega (t_{o.v.} - 2x'_m) = \omega (t_{o.v.} - 2[1 - \frac{1}{2}h_{xx}]x_m) \quad (16.7.83)$$

formulával adhatjuk meg, ahol – a korábban tett megállapításainknak megfelelően – azt is kihasználtuk, hogy az alkalmazott koordinátarendszerben a  $t$  ko-

---

<sup>11</sup> Az általános esetben a  $\square$  hullámoperátorban a

$$\begin{aligned} \nabla_\varphi A_\alpha &= \partial_\varphi A_\alpha - \Gamma^\gamma_{\varphi\alpha} A_\gamma \\ \nabla_\varepsilon \nabla_\varphi A_\alpha &= \partial_\varepsilon (\nabla_\varphi A_\alpha) - \Gamma^\gamma_{\varepsilon\varphi} \nabla_\gamma A_\alpha - \Gamma^\gamma_{\varepsilon\alpha} \nabla_\varphi A_\gamma \\ \square A_\alpha &= g^{\varepsilon\varphi} \nabla_\varepsilon \nabla_\varphi A_\alpha \end{aligned}$$

összefüggéseknek megfelelően szerepelnek a Christoffel-féle szimbólumok és azok deriváltjai is. Ezeket – a jelenlegi argumentumunkban – a  $h_{\alpha\beta}$  kifejezések viszonylagos állandóságára hivatkozva (16.7.81)-ben elhanyagoltuk. Érdemes azt is felidézni, hogy a (15.1.3) összefüggés értelmében

$$^{(1)}g^{xx} = \eta^{xx} - h^{xx} = 1 - h_{xx}. \quad (16.7.80)$$

ordinátaidő éppen a tükrök mentén mért sajátidővel egyezik meg. Ezek alapján a két karban mozgó fényjelek fáziseltérése <sup>12</sup> az utazási távolságkülönbségek  $\omega$ -szorosával egyezik meg, azaz

$$\delta\phi = \delta\phi^{(y)} - \delta\phi^{(x)} = \omega x_m (2 - h_{xx}) - \omega y_m (2 - h_{yy}) , \quad (16.7.84)$$

ahol  $x_m$  és  $y_m$  a karok végén található tükrök a sugárzási mértéket lokálisan megvalósító koordinátarendszerben állandó térszerű koordinátáit jelöli. A kiinduló feltevéseinkkel összhangban, a zárójelekben álló mennyiségek közül az első mindkét esetben sokkal nagyobb, mint a második. Azonban az első konstans tagoktól időderiválással megszabadulhatunk. Annak érdekében, hogy mértékfüggetlen mennyiségeket kaphassunk célszerűbb a (16.7.84) reláció kétszeres időderiváltját, azaz a

$$\frac{d^2\delta\phi}{dt^2} = -\omega (x_m \partial_t^2 h_{xx} - y_m \partial_t^2 h_{yy}) \quad (16.7.85)$$

egyenletet tekintenünk. Mivel az  $x_m$  és  $y_m$  értékek – legalábbis nulladrendben biztosan – helyettesíthetők a karok közös  $L$  hosszúságával, továbbá az általunk használt koordinátarendszerben a (16.6.76) reláció alapján a  $\partial_t^2 h_{xx}$  és  $\partial_t^2 h_{yy}$  kifejezéseket, valamint a görbületi tenzor  $R_{xt,xt}$  és  $R_{yt,yt}$  árapály komponenseinek egyenlőségét kihasználva (16.7.85)-ből kapjuk a

$$\frac{d^2\delta\phi}{dt^2} = -2\omega L (R_{xt,xt} - R_{yt,yt}) \quad (16.7.86)$$

relációt. Így a fáziseltérés időszerinti második deriváltját, mely a detektorok által mérhető mennyiség, a mértékinvariáns görbületi tenzor árapály komponensei segítségével tudtuk kifejezni.

Érdemes kiemelni, hogy amint az a fenti levezetésből is jól látszik, hogy bár a detektor tükreinek térszerű koordinátái időben változatlanok, a köztük lévő tá-

---

<sup>12</sup>A féligáteresztő tükrőtől egyszerre, ugyanazzal a fázissal induló fényjelek fázisa az utazásuk során változik, de csak a féligáteresztő tükrőnél történő újraegyesülésükkor válik mérhetővé.

volság megváltozik, amikor gravitációs hullám halad át a detektorunkon. Az, hogy a köztük lévő távolság megváltozását a tükrök mozgásaként, vagy az őket elválasztó tér tágulásaként, illetve összehúzódásaként interpretáljuk, ízlés kérdése. Ami nem szabad választás kérdése, az a mértékinvariáns mennyiségekre kapott összefüggések, például a fáziseltérés második időderiváltjára, mint megfigyelhető mennyiségre kapott (16.7.86) összefüggés szükségyszerű komolyan vétele a gravitációs hullámok megfigyelése során.

## 16.8. A detektor válasza források figyelembevételével

A (16.6.78) egyenletből az is következik, hogy a detektorainkhoz érkező gravitációs hullámok a detektor végtükreinek a féligáteresztő tükrétől mért  $L^{\tilde{\alpha}}(t)$  valódi távolságában az

$$\frac{d^2 L^{\tilde{\alpha}}(t)}{dt^2} = -R^{\tilde{\alpha}}_{i\tilde{\beta}t} L^{\tilde{\beta}}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (16.8.87)$$

egyenletnek megfelelő változást idéznek elő, ahol az  $R^{\tilde{\alpha}}_{i\tilde{\beta}t}$  kifejezések a mértékinvariáns görbület árapály részét jelölik.

Azt is láttuk, hogy az  $L^{\tilde{\alpha}}(t) = L^{\tilde{\alpha}}_0 + \delta L^{\tilde{\alpha}}(t)$  helyettesítés, valamint a  $|\delta \mathbf{L}| \ll |\mathbf{L}_0|$  feltétel biztosítása mellett, a (16.6.76) összefüggést, valamint a szokásos  $\frac{d(\delta L^{\tilde{\alpha}})}{dt}|_{t_0} = \delta L^{\tilde{\alpha}}|_{t_0} = 0$  kezdőfeltételeket használva azt kapjuk, hogy a karok hosszváltozására

$$\delta L^{\tilde{\alpha}}(t) = \frac{1}{2} h^{\text{TT}}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} L^{\tilde{\beta}}_0 \quad (16.8.88)$$

teljesül.

Amikor a gravitációs hullámokat valódi források keltik, a mértékinvariáns gör-

bület különféle részeire az

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}t} = -\frac{1}{2}\partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} + \partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}}\Phi + \partial_t\partial_{(\bar{\alpha}}\Xi_{\bar{\beta})} - \frac{1}{2}(\partial_t^2\Theta)\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (16.8.89)$$

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}t} = \partial_t\partial_{[\bar{\alpha}}h_{\bar{\beta}]\bar{\gamma}}^{\text{TT}} + \partial_{[\bar{\alpha}}\Xi_{\bar{\beta}]\bar{\gamma}} + (\partial_t\partial_{[\bar{\alpha}}\Theta)\delta_{\bar{\beta}]\bar{\gamma}} \quad (16.8.90)$$

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} = \partial_{\bar{\beta}}\partial_{[\bar{\gamma}}h_{\bar{\delta}]\bar{\alpha}}^{\text{TT}} - \partial_{\bar{\alpha}}\partial_{[\bar{\gamma}}h_{\bar{\delta}]\bar{\beta}}^{\text{TT}} - (\partial_{\bar{\alpha}}\partial_{[\bar{\gamma}}\Theta)\delta_{\bar{\delta}]\bar{\beta}} + (\partial_{\bar{\beta}}\partial_{[\bar{\gamma}}\Theta)\delta_{\bar{\delta}]\bar{\alpha}} \quad (16.8.91)$$

relációk teljesülnek.

Mivel a  $\Phi, \Theta, \Xi_{\bar{\beta}}, h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$  potenciálok eredendően  $\frac{1}{r}$  rendben csengnek le az  $r \rightarrow \infty$  határesetben,  $\partial_{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}}\Phi$  például már  $\frac{1}{r^3}$ , míg  $\partial_t\partial_{(\bar{\alpha}}\Xi_{\bar{\beta})}$  egy kicsit lassabban,  $\frac{1}{r^2}$  rendben cseng le. Ezzel szemben a  $\partial_t^2 h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$ , valamint a  $\partial_t^2\Theta$  kifejezések továbbra is  $\frac{1}{r}$  rendben csengenek le a vizsgált  $r \rightarrow \infty$  határesetben. Ezért (16.8.87) és (16.8.89) alapján a detektorkarok hosszváltozásra (16.8.88) helyett a

$$\delta L_{\bar{\alpha}}(t) \approx \frac{1}{2} \left[ h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}} + \Theta \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right] L_0^{\bar{\beta}} \quad (16.8.92)$$

összefüggés teljesül.

Newtoni közelítésben a második tag járuléka elhanyagolható, illetve kompenzálható. Azonban a fizikailag reális dinamikai esetekben  $\Theta$  járulékát, valamint a sugárzási visszahatást is figyelembe kell vennünk. Utóbbi azt jelenti, hogy  $T_{\alpha\beta}$ -t mindenütt a  $T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{\text{GW}}$  kifejezéssel kell helyettesítenünk, ahol  $t_{\alpha\beta}^{\text{GW}} = -\frac{1}{8\pi} {}^{(2)}G_{\alpha\beta}$ , ahol  ${}^{(2)}G_{\alpha\beta}$  az Einstein-tenzor pontosan másodrendű tagjait tartalmazza. Ekkor az érvelésünk korábbi részében alkalmazott megmaradási törvényt is a  $\partial^\alpha(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{\text{GW}}) = 0$  összefüggéssel kell helyettesítenünk.

Fontos annak hangsúlyozása is, hogy a  $\rho, S_{\bar{\alpha}}, S, P, \sigma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \sigma_{\bar{\alpha}}$  mennyiségek értelemszerű újradefiniálása mellett minden korábbi egyenletünk érvényben marad, továbbá a (16.8.92) egyenlet második tagja, függetlenül a gravitációs hullámot keltő asztrofizikai folyamattól,  $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\text{TT}}$ -val összemérhető, időben változó és a

$$\nabla^2\Theta = -8\pi(T_{00} + t_{00}^{\text{GW}}) < 0 \quad (16.8.93)$$

egyenlet értelmében mindenütt pozitív járulékot ad.

Ennek megfelelően a (16.8.92) egyenlet jobb oldalán álló második tag egy esetleg csak kicsiny mértékű, de mindenkor izotróp expanziót eredményez, melyet a karok relatív hosszváltozására érzékeny LIGO-Virgo típusú detektorok nem képesek érzékelni.

A pontos mennyiségi változások kiszámítása nélkül is felmerül az a kérdés, hogy honnan származhat az univerzum expanzióját előidéző térfogatnövekedéshez szükséges energia. Előfordulhat, hogy a források által gravitációs hullámok alakjában kibocsátott energia egy része esetleg nem a sugárzási szabadsági fokok közvetítésével jut el hozzánk? Számos hasonló kérdést tehetnénk még fel, azonban ezek megválaszolása csak a nemlineáris visszahatást is figyelembe vevő, azaz a teljes Einstein-egyenletek használatán alapuló analitikus és numerikus vizsgálatok segítségével történhet majd meg.

## 17. fejezet

# Izotróp kozmológiai modellek

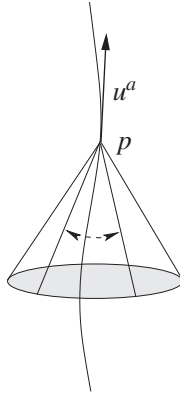
Ebben a részben a standard kozmológiai modellnek tekintett homogén izotróp kozmológiák legfontosabb tulajdonságait ismertetjük.

### 17.1. Geometriai alapok

**17.1.1. Definíció.** Az  $(M, g_{ab})$  téridő izotróp valamely  $p \in M$  pontban, ha a téridőn ható izometriatranszformációknak van olyan részcsoportja, amelyek a  $p \in M$  pontbeli  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér múltirányú fényszerű vektorait – és így (lokálisan) a velük, mint érintővel  $p$ -ből indított múltirányú fényszerű geodetikusokat is – egymásközt permutálják.

**17.1.1. Hipotézis. Fizikai verzió:** A Kopernikuszi-elv azt feltételezi, hogy léteznek olyan kitüntetett megfigyelők, akik – elegendően nagy léptékű skálán – az univerzumot izotrópnak találják.

Érdemes kiemelni, hogy a Kopernikuszi-elv messze túlmutat mindazon, amit az emberiség eddigi korlátozott csillagászati megfigyeléseire alapozottan biztosan tudhatunk. Ebben az értelemben az imént megfogalmazott hipotézis metafizikai tartalommal bír, hiszen ezt alkalmazva nemcsak térben, de időben is



17.1. ábra. Az  $u^a$  egységnyi normájú időszerű vektormezővel mint érintővel mozgó megfigyelő bármely múltirányú fényszerű geodetikus mentén visszatekintve – elegendően nagy léptékű skálán – nagyjából ugyanazt az anyageloszlást tapasztalja.

egy eléggé erős extrapolációt hajtunk végre. Lényegében azt feltételezzük, hogy az univerzumban létezik kitüntetett mozgást végző megfigyelőknek egy olyan háromparaméteres családja, amelyhez tartozó megfigyelők a teljes történet során mindenkor izotrópnak látják az univerzumot.

**17.1.2. Hipotézis. Matematikai verzió:** *A kozmológiai téridőben létezik egy  $u^a$  kitüntetett, egységnyi normájú  $u^a u_a = -1$ , időszerű vektormező, mely mindenütt érinti az univerzumot izotrópnak érzékelő megfigyelők világvonalait.*

Tegyük fel, hogy az  $(M, g_{ab})$  páros az univerzum-modellünként szolgáló kozmológiai téridőt határoz meg. Emlékezzünk arra, hogy valamely  $\phi : M \rightarrow M$  diffeomorfizmust izometriatranszformációnak neveztünk, ha  $\phi$  a metrikát is önmagára képezte, azaz a  $\phi[M] = M$  reláció mellett a  $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$  egyenlőség is teljesül. Értelemszerűen adódik, hogy a leképezések kompozíciójára, mint szorzási műveletre nézve az izometriatranszformációk csoportot alkotnak, melyet az alábbiakban  $I$ -vel jelölünk.



**17.1.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(M, g_{ab})$  téridő a  $p \in M$  pontban izotróp valamely  $u^a \in \mathcal{T}(p)$  időszerű négyesvektorral mozgó megfigyelőre nézve, ha a téridőn ható izometriatranszformációknak van olyan  $I_{p,u^a} \subset I$  részcsoportja, amelyre

- (1) bármely  $\varphi \in I_{p,u^a}$  esetén  $\varphi(p) = p$  és  $\varphi^* u^a = u^a$ , továbbá
- (2) bármely  $v^a, w^a \in \mathcal{T}_\perp(p)$ ,  $u^a$ -ra merőleges, egységnyi normájú térszerű vektorokhoz található olyan  $\varphi_{v,w} \in I_{p,u^a}$  tranzitivitási transzformáció, amelyre

$$\varphi_{v,w}^*(v^a) = w^a. \quad (17.1.1)$$

Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy az  $u^a$ -ra merőleges térszerű vektorok mind egyenértékűek, azaz közöttük nem létezik kitüntetett. Ugyanezt matematikus berkekben úgy szokás szépen megfogalmazni, hogy  $I_{p,u^a}^*$  tranzitíven hat  $\mathcal{T}_\perp(p)$ -en.

Ha az  $(M, g_{ab})$  téridő a  $p \in M$  pontban izotróp, akkor az  $I_{p,u^a}$  részcsoport elemei a  $p \in M$  pontbeli  $\mathcal{T}(p)$  érintőtér  $\ell^a = -u^a + v^a$  alakban felírható múltírányú fényszerű vektorait – és így a velük, mint érintővel  $p$ -ből indított múltírányú fényszerű geodetikusokat is – egymásközt permutálják.

**17.1.3. Definíció.** Az  $(M, g_{ab})$  páros által meghatározott téridőt izotrópnak nevezzük az  $u^a \in \mathcal{T}(M)$  sima négyesvektormezővel jellemzett megfigyelőrendszerre vonatkozóan, ha  $(M, g_{ab})$  bármely  $p \in M$  pontban izotróp az ottani  $u^a \in \mathcal{T}(p)$  négyesvektorral mozgó megfigyelőre nézve.

**17.1.1. Megjegyzés.** Mivel a kozmológiai téridőnk minden egyes pontján egy és csakis egy az univerzumot izotrópnak érzékelő megfigyelő világvonala haladhat keresztül, ezen megfigyelők világvonalai nem metszhetik egymást, azaz a négydimenziós téridő főlátható egydimenziós vonalak egy háromparaméteres serege által.

### 17.1.1. Geometriai tulajdonságok

Tekintsünk most egy tetszőleges izotróp téridőt. Mivel bármely  $\varphi \in I_{p,u^a}$  transzformáció esetén  $\varphi^* g_{ab} = g_{ab}$  és  $\varphi^* u^a = u^a$  teljesül, bármely  $p \in M$  pontban az  $u^a$  vektor, a  $g_{ab}$  metrika és tetszőleges  $I_{p,u^a}$ -invariáns tenzor felhasználásával készített tenzoriális kifejezés is  $I_{p,u^a}$ -invariáns, hiszen a 9.0.2 feladatban megfogalmazott állításnak megfelelően tetszőleges  $(k, l)$ -típusú  $T$ , illetve  $(k', l')$ -típusú  $S$  tenzorok esetén fennáll a  $\varphi^*(T \otimes S) = \varphi^*T \otimes \varphi^*S$  egyenlőség.

Ennek megfelelően bármely  $p \in M$  pontban  $I_{p,u^a}$ -invariánsak például a

- $\pi_a^b = \delta_a^b + u_a u^b$ ,
- $\dot{u}^a = u^e \nabla_e u^a$ ,
- $u_{[a} \nabla_b u_{c]}$ , vagy az  $\omega^a = \varepsilon^{abcd} u_b \nabla_c u_d$ ,
- $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$

kifejezések.

**17.1.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy  $\pi_a^b = \delta_a^b + u_a u^b$  bármely  $p \in M$  pontban projektorként hat a  $\mathcal{T}(p)$  érintőtéren, azaz*

- $\pi_a^e \pi_e^b = \pi_a^b$
- $\pi_a^e u_e = \pi_e^b u^e = 0$ , és
- $\pi_e^b X^e = X^b$ ,  $\pi_a^e Y_e = Y_a$  bármely  $X^a \in \mathcal{T}_\perp(p)$  és  $Y_a \in \mathcal{T}_\perp^*(p)$  választás esetén.

A  $\pi_a^b$  projekció segítségével bármely  $V^a \in \mathcal{T}(p)$  vektor felbontható a

$$V^a = \delta_e^a V^e = (\pi_e^a - u_e u^a) V^e = V_\perp^a - (u_e V^e) u^a = V_\perp^a + V_\parallel^a \quad (17.1.2)$$

relációnak megfelelően, ahol az utolsó előtti kifejezés második tagja, azaz  $-(u_e V^e)u^a$ , a  $V^a$  vektornak éppen az  $u^a$  vektormezővel párhuzamos  $V_{\parallel}^a$  részét adja.

**17.1.1. Lemma.** *Tegyük fel, hogy az  $(M, g_{ab})$  téridő izotróp az  $u^a$  vektormezőre nézve. Ekkor bármely  $p \in M$  pontban*

$$\dot{u}^a = u^e \nabla_e u^a = 0. \quad (17.1.3)$$

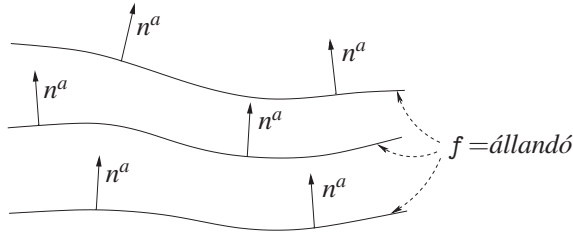
*Bizonyítás:* Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\dot{u}^a u_a = \frac{1}{2} u^e \nabla_e (u^a u_a) = 0, \quad (17.1.4)$$

amiből az következik, hogy  $\dot{u}^a$  merőleges az  $u^a$  vektorra bármely  $p \in M$  pontban. Ha  $\dot{u}^a$  nem lenne a zérus vektor valamely  $p \in M$  pontban, akkor  $\dot{u}^a$  ki-tüntetett vektor lehetne az  $u^a$ -ra merőleges  $\mathcal{T}_{\perp}(p)$  altérben, azaz az  $(M, g_{ab})$  téridő nem lenne izotróp a  $p \in M$  pontban.  $\square$

**17.1.2. Megjegyzés.** *A (17.1.3) egyenlet értelmében – amely bármely  $p \in M$  pontban teljesül – az  $u^a$  vektormező integrálgörbéi geodetikus görbék, melyek mentén a sajátidő egyben affinparaméter is.*

Tekintsünk most egy tetszőleges monoton sima  $f \in \mathcal{F}(M)$  függvényt.  $f$  monotonitásán azt értjük, hogy gradiense sehol nem tűnik el, azaz  $\nabla_a f \neq 0$ . A definíció alapján nyilvánvaló, hogy  $\nabla_a f$  merőleges a  $f$ -állandó szintfelületekre, hiszen  $f$  nem változik a szintfelületek mentén (lásd a 17.2 ábrát). Ekkor bármely a szintfelületeket érintő  $X^a$  vektormezőre teljesül a  $X^a \nabla_a f = 0$  feltétel. Az is nyilvánvaló, hogy bármely  $f$ -állandó szintfelületekre merőleges  $n_a$  formamező arányos az  $\nabla_a f$  formamezővel, azaz  $n_a = g \nabla_a f$  valamely  $g \in \mathcal{F}(M)$  függvényre, hiszen ekkor bármely a szintfelületeket érintő  $X^a$  vektormezőre az  $X^a n_a = g X^a \nabla_a f = 0$  reláció is teljesül.



17.2. ábra. Az  $f=\text{állandó}$  szintfelületekre merőleges  $n_a$  formamező arányos az  $\nabla_a f$  gradienssel.

**17.1.2. Feladat.** Mutassuk meg, hogy bármely  $n_a = g\nabla_a f$  alakban adott formamező esetén

$$n_{[b}\nabla_c n_{d]} = 0. \quad (17.1.5)$$

Érdemes felidézni, hogy a 7.2 alfejezetben megfogalmazott Frobenius-tétel értelmében az  $u^a$  vektormezőre merőleges alterekhez pontosan akkor találhatók integrálsokaságok, ha bármely  $X^a, Y^a \in \mathcal{T}_\perp(M)$  vektormezőre azok  $[X, Y]^a$  kommutátora is a  $\mathcal{T}_\perp(M)$ -hez tartozik. Mivel

$$[X, Y]^a u_a = (X^e \nabla_e Y^a - Y^f \nabla_f X^a) u_a = 2X^e Y^f \nabla_{[e} u_{f]}, \quad (17.1.6)$$

az  $[X, Y]^a$  kommutátor pontosan akkor merőleges az  $u^a$  vektorra, ha létezik olyan  $Z_a \in \mathcal{T}^*(M)$  formamező, amelyre  $\nabla_{[e} u_{f]} = Z_{[e} u_{f]}$  alakban írható fel.

**17.1.3. Feladat.** Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik olyan  $Z_a \in \mathcal{T}^*(M)$  formamező  $M$ -en, amelyre a  $\nabla_{[e} u_{f]} = Z_{[e} u_{f]}$  egyenlőség teljesül, ha az  $u_{[b} \nabla_c u_{d]}$  három-forma azonosan eltűnik.

**17.1.2. Lemma.** Tegyük fel, hogy az  $(M, g_{ab})$  téridő izotróp az  $u^a$  vektormezőre nézve. Ekkor bármely  $p \in M$  pontban

$$\omega^a = \varepsilon^{abcd} u_b \nabla_c u_d = 0. \quad (17.1.7)$$

*Bizonyítás:* Mivel  $\varepsilon^{abcd}$  bármely indexpárjában antiszimmetrikus

$$\omega^a u_a = 0, \quad (17.1.8)$$

és így tetszőleges  $p \in M$  pontban  $\omega^a$  merőleges az  $u^a$  vektorra. Ha  $\omega^a$  nem lenne zérus valamely  $p \in M$  pontban, akkor  $\omega^a$  az  $u^a$ -ra merőleges  $\mathcal{T}_\perp(p)$  altér kitüntetett vektora lenne.  $\square$

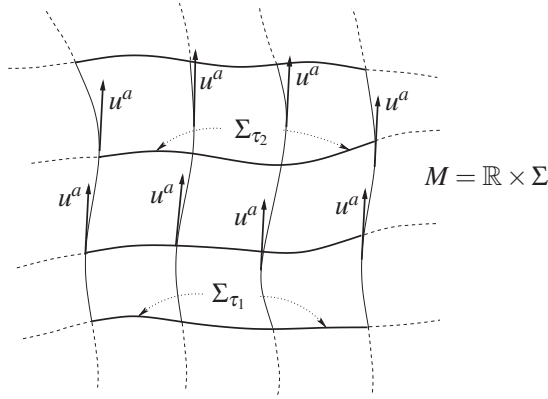
Mivel  $\varepsilon^{abcd}$  reguláris,  $\omega^a$  csak akkor lehet az azonosan zérus vektor, ha az  $u_{[b} \nabla_c u_{d]}$  három-forma is az. Így a Frobenius-tétel értelmében az  $u^a$  vektormezőre merőleges alterek integrálhatók, azaz léteznie kell olyan monoton elegen-dően sima  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  függvényeknek, amelyre az  $u_a = g \nabla_a f$  reláció teljesül.

Speciálisan, ha a szintfelületeket az  $u^a$  vektormező egy tetszőlegesen kiválasztott integrálgörbéje mentén mért  $\tau$  affinparaméterrel címkézzük fel, akkor az  $f = \tau$  választásnak megfelelő  $f$  függvény, az  $u^a$  vektormező  $u^a u_a = -1$  normalizáltságára vonatkozó feltételünk miatt, mindenütt egyenlő lesz az  $u^a$  vektormező integrálgörbéi mentén mért, ily módon szinkronizált  $\tau$  affinparaméterrel, melynek értelmében  $u_a = \nabla_a \tau$ . Érdemes felidézni, hogy a korábbi észrevételeink alapján az  $u^a = (\partial/\partial \tau)^a$  reláció is teljesül.

Mindezeknek megfelelően az izotróp kozmológiai modellünk  $M$  alapsokasága szükségképpen az  $\mathbb{R} \times \Sigma$  szorzat-topológiával rendelkezik, bár a  $\Sigma$  hiperfelületek topológiája egyelőre határozatlan.

**17.1.1. Állítás.** Legyen az  $(M, g_{ab})$  téridő izotróp az  $u^a$  vektormezőre nézve, továbbá legyen  $S_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$  olyan szimmetrikus tenzormező, amely bármely  $p \in M$  pontban  $I_{p, u^a}$ -invariáns. Ekkor

$$S_{ab} = (S_{ef} u^e u^f) u_a u_b + \frac{1}{3} (S_{ef} h^{ef}) h_{ab}. \quad (17.1.9)$$



17.3. ábra. Az izotróp kozmológiai modell  $M$  alapsokasága az  $\mathbb{R} \times \Sigma$  szorzat-topológiával rendelkezik.

*Bizonyítás:* Legyen  $p \in M$  tetszőleges és induljunk ki az ott értelmezett

$$\begin{aligned}
 S_{ab} &= S_{ef} \delta_a^e \delta_b^f = S_{ef} (\pi_a^e - u_a u^e) (\pi_b^f - u_b u^f) = \\
 &= \underbrace{S_{ef} \pi_a^e \pi_b^f}_{S_{ab}^{\perp\perp}} - \underbrace{(S_{ef} \pi_a^e u^f u_b + S_{ef} u^e \pi_b^f u_a)}_{S_{ab}^{\perp\parallel}} + \underbrace{(S_{ef} u^e u^f) u_a u_b}_{S_{ab}^{\parallel\parallel}}
 \end{aligned} \tag{17.1.10}$$

felbontásból.

Mivel az  $S_{ef} \pi_a^e u^f$  és  $S_{ef} u^e \pi_b^f$  vektorok olyan  $I_{p, u^a}$ -invariáns kontrakciók, amelyek egyetlen szabad indexe a  $\pi_a^b$  projektoron keresztül tölthető fel, ezek bármely  $p \in M$  pontban merőlegesek az  $u^a \in \mathcal{T}(p)$ -re. Éppen ezért, ha az  $S_{ef} \pi_a^e u^f$  és  $S_{ef} u^e \pi_b^f$  duális vektorok valamelyike nem lenne zérus, akkor a  $p \in M$  pontban létezne az  $u^a$ -ra merőleges  $\mathcal{T}_\perp(p)$  altérben (az  $S_{ab}$ -tól függő) kitüntetett vektor. Mivel az  $(M, g_{ab})$  téridő izotróp az  $u^a$  vektormezőre nézve, továbbá az  $S_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$  szimmetrikus tenzormező bármely  $p \in M$  pontban  $I_{p, u^a}$ -invariáns, ezentúl – az általánosság megszorítása nélkül – feltesszük, hogy az  $S_{ef} \pi_a^e u^f$  és  $S_{ef} u^e \pi_b^f$  kifejezések zérus kovariáns vektorok.

Hasonlóan a szimmetrikus  $S_{ef} \pi_a^e \pi_b^f$  tenzormező is  $I_{p,u^a}$ -invariáns. Az is könnyen belátható, hogy az  $u^a$ -ra merőleges vektorok terén értelmezett metrika, a  $g_{ab}$  metrika tisztán *merőleges-merőleges*  $g_{ef} \pi_a^e \pi_b^f$  része

$$h_{ab} = g_{ef} \pi_a^e \pi_b^f = g_{ef} (\delta_a^e + u_a u^e) (\delta_b^f + u_b u^f) = g_{ab} + u_a u_b \quad (17.1.11)$$

alakban írható fel. Ha az  $S_{ef} \pi_a^e \pi_b^f \in \mathcal{T}^0_2(p)$  szimmetrikus tenzor ezen metrikára vonatkozó sajátvektorai nem lennének háromszorososan elfajultak (ezek nem szükségképpen zérus vektorok), akkor létezhetne kitüntetett vektor az  $u^a$ -ra merőleges  $\mathcal{T}_\perp(p)$  altérben. Éppen ezért az  $I_{p,u^a}$ -invariáns  $S_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(p)$  szimmetrikus tenzor tisztán *merőleges-merőleges*  $S_{ef} \pi_a^e \pi_b^f$  része a

$$S_{ef} \pi_a^e \pi_b^f = \frac{1}{3} (S_{ef} h^{ef}) h_{ab} \quad (17.1.12)$$

alakban írható fel, ami (17.1.10) és az  $S_{ef} \pi_a^e u^f$  és  $S_{ef} u^e \pi_b^f$  kovariáns vektorok zérus voltával együtt pontonként igazolja a (17.1.9) felbontás helytállóságát.  $\square$

**17.1.3. Megjegyzés.** Az imént bizonyított állítás második felében bemutatott érvelés nagyon sok esetekben alkalmazható. Legyen most például  $\Sigma$  az  $u^a$  vektormezőre merőleges háromdimenziós integrálsokaságok egyike. Tekintsük először a  $g_{ab}$  által rajta indukált  $h_{ab}$  metrikát. A (17.1.12) egyenlet alapján automatikusan kapjuk a

$$h_{ef} \pi_a^e \pi_b^f = \frac{1}{3} (h_{ef} h^{ef}) h_{ab} = h_{ab} \quad (17.1.13)$$

relációt.

**17.1.4. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a (17.1.11) és a (17.1.13) egyenlet egy másik következménye az, hogy az izotróp kozmológiai modellünk metrikáját a

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab} = -(d\tau)_a (d\tau)_b + h_{ab} \quad (17.1.14)$$

alakban írhatjuk fel.

Tekintsük most a  $\Sigma$ -án értelmezett  $h_{ab}$  – pontonként  $I_{p,u^a}$ -invariáns – metrika által meghatározott  $D_a$  kovariáns deriváló operátorhoz tartozó  ${}^{(3)}R_{ab}$  Riccitenzort, mely konstrukciója alapján szimmetrikus és pontonként  $I_{p,u^a}$ -invariáns. Így (17.1.12)-nek megfelelően  ${}^{(3)}R_{ab}$  eleget tesz az

$${}^{(3)}R_{ab} = \frac{1}{3} {}^{(3)}R h_{ab} \quad (17.1.15)$$

relációnak. Ezek után a kétszer kontrahált Bianchi azonosságot az  ${}^{(3)}R_{ab}$  Riccitenzorral alkalmazva a

$$D^a \left( {}^{(3)}R_{ab} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R h_{ab} \right) = -\frac{1}{6} D^a {}^{(3)}R h_{ab} = -\frac{1}{6} D_b {}^{(3)}R = 0 \quad (17.1.16)$$

relációhoz jutunk, amiből az következik, hogy az  $u^a$  vektormezőre merőleges háromdimenziós integrálsokaságok görbülete állandó.

**17.1.5. Megjegyzés.** A fenti érveléssel analóg módon az is belátható, hogy a pontonként  $I_{p,u^a}$ -invariáns tenzoriális kifejezésekből készíthető tetszőleges  $m: M \rightarrow \mathbb{R}$  skalár, azaz megfigyelhető mennyiség  $D_a m$  gradiense is szükségképpen zérus, és így annak a  $\Sigma_\tau$  hiperfelületek bármelyikén helytől független állandó értéke kell legyen.

Ez azt jelenti, hogy az univerzummodellünk izotrópiájára vonatkozó feltételünk egyben az  $u^a$  vektormezőre merőleges háromdimenziós integrálsokaságok, mint  $\tau$ -állandó hiperfelületek homogenitását is biztosítja.

Fenti megállapításaink értelmében az  $u^a$  vektormezőre merőleges  $\Sigma_\tau$  hiperfelületek állandó görbületű Riemann-metrikát hordozó sokaságok és mint ilyenek, teljes mértékben ismertek. Ezek  ${}^{(3)}R$  előjelétől függően gömbi, sík, vagy hiperboloidális hiperfelületek lehetnek. Ezen háromdimenziós Riemann-terek ívelemét  $(r, \theta, \phi)$  „gömbi koordinátákban” a

$${}^{(3)}ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (17.1.17)$$

alakban írhatjuk fel, ahol az  ${}^{(3)}R$  görbület értékét a vizsgált eset speciális voltát



hangsúlyozva  $k$ -val jelöljük, melynek értéke  $1, 0, -1$  annak megfelelően, hogy a  $\Sigma$  hiperfelület gömbi, sík, illetve hiperboloidális.

Vegyük észre, hogy a  $k = 0$  esetben a (17.1.17) által meghatározott kifejezés a háromdimenziós sík Euklideszi-tér gömbi koordinátákban felírt ívelemével esik egybe.

**17.1.4. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (17.1.17) ívelemmel adott metrikájú hiperfelületek az  $(r(\psi), \theta, \phi) \mapsto (x^1, x^2, x^3, x^4)$  beágyazó leképezés segítségével, ahol*

$$x^1 = r(\psi) \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \quad (17.1.18)$$

$$x^2 = r(\psi) \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \quad (17.1.19)$$

$$x^3 = r(\psi) \cdot \cos \theta \quad (17.1.20)$$

$$x^4 = r(\psi), \quad (17.1.21)$$

továbbá

$$r(\psi) = \begin{cases} \sin \psi, & \text{ha } k = 1; \\ \sinh \psi, & \text{ha } k = -1. \end{cases} \quad (17.1.22)$$

a  $k = \pm 1$  esetben megfeleltethetők a négydimenziós Euklideszi-tér

$$k [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] + (x^4)^2 = 1 \quad (17.1.23)$$

egyenlettel meghatározott,  $k = +1$  görbületű egység-gömbjének, illetve  $k = -1$  egység-hiperboloidjának.

Mivel a  $\tilde{h}_{ab} = \Omega^2 h_{ab}$  metrikához tartozó skalárgörbületet – ahol  $\Omega \in \mathcal{F}(M)$  egy tetszőleges, sehol el nem tűnő függvény  $M$ -en – a

$${}^{(3)}\tilde{R} = \Omega^{-2} \left\{ {}^{(3)}R - 4D^a D_a \ln \Omega - 3(D^a \ln \Omega)(D_a \ln \Omega) \right\} \quad (17.1.24)$$

alakban írhatjuk fel, a normalizált  $k = 1, 0, -1$  görbületű hiperfelületeken értelmezett metrikákból egy konstans konformis transzformáció alkalmazásával kaphatjuk meg a tetszőleges állandó görbületű hiperfelület metrikáját. Így

mindhárom esetben a  $\tau = \bar{\tau}$  hiperfelületeken indukált metrikát a

$${}^{(3)}ds_{\bar{\tau}}^2 = R^2(\bar{\tau}) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (17.1.25)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $R(\bar{\tau}) > 0$  valós szám.

Legyenek most  $(r, \theta, \phi)$  „gömbi koordináták” valamely  $\tau = \text{állandó}$  hiperfelületen. Ezeket a koordinátákat az  $u^a$  vektormező integrálgörbéi mentén fixen tartva elterjeszthetjük őket a kozmológiai téridőnk egészére. Az így kapott globálisan értelmezett  $(r, \theta, \phi)$  koordinátákhoz az  $u^a$  vektormező integrálgörbéi mentén bevezetett szinkronizált  $\tau$  affinparamétert hozzávéve olyan  $(\tau, r, \theta, \phi)$  koordináta-rendszerhez jutunk, melyben (17.1.14) alapján a téridő metrikához tartozó ívelemet a

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (17.1.26)$$

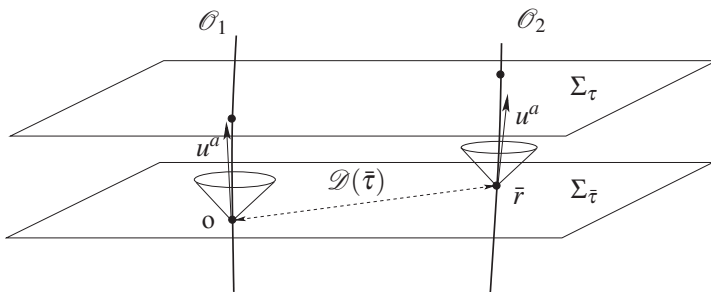
alakban írhatjuk fel.

A kozmológiai téridőnk metrikájának (17.1.26) alakban felírt ívelemében  $R(\tau)$  az egyetlen szabad függvény. Ennek meghatározásához a gravitáció és anyag csatolt rendszerének fejlődésére vonatkozó egyenleteket fogjuk használni. A (17.1.26) egyenletből is kiolvasható, hogy  $g_{\tau\tau} = -1$  és  $g_{\tau\bar{\alpha}} = 0$ , ami azon korábbi észrevételeinket fejezi ki, hogy az  $u^a$  vektormező integrálgörbéi a  $\Sigma_{\tau}$  hiperfelületekre mindenütt merőlegesek, továbbá a  $\tau$  koordinátaidő éppen a geodetikuskongruencia elemei mentén mért sajátidővel esik egybe.

### 17.1.2. A Hubble-törvény geometriai megfogalmazása

Még mielőtt bármiféle dinamikára vonatkozó speciális megszorítást alkalmaznánk, a Hubble-törvény összes izotróp kozmológiai modellre érvényes geometriai alakját származtatjuk. Ehhez két tetszőleges, az  $u^a$  vektor integrálgörbéi mentén mozgó megfigyelő egymáshoz viszonyított, a  $\Sigma_{\tau}$  hiperfelületeken mért sebességének vizsgálata révén jutunk.

A (17.1.26) egyenlet felírása során nem beszéltünk arról, hol helyezkedik el az origó. Mivel a  $\Sigma_\tau$  hiperfelületek állandó görbületűek és homogének is, bármelyik pontjukat választhatjuk origóként. Így például a  $\tau = \bar{\tau}$  hiperfelületen a 17.4 ábrának megfelelően az egyik ( $\mathcal{O}_1$ -gyel jelölt) megfigyelő – amelyről



17.4. ábra. A  $v = \frac{d\mathcal{D}(\bar{\tau})}{d\tau}$  relatív sebesség értéke lényegesen nagyobb lehet mint a vákuumbeli fénysebesség. A megfigyelők  $v$  értékétől függetlenül mindenütt az adott pontbeli lokális fénykúpokon belül mozognak.

az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy annak világvonala az  $r = 0$  koordinátavonallal esik egybe – egy fényjelet indít, amelyet a másik ( $\mathcal{O}_2$ -vel jelölt) megfigyelő észlel. Arra törekszünk, hogy meghatározzuk e két eseményen áthaladó világvonalak és a kibocsátás pillanatához tartozó homogenitási felület metszéspontjait összekötő térszerű radiális geodetikus görbe ívhosszát. Így – a kérdéses radiális geodetikus mentén, ahol  $\theta$  és  $\phi$  állandó – (17.1.26)-nek megfelelően az origóban elhelyezkedő ponttól az  $\bar{r}$ -koordináta-távolságban lévő pont geometriai távolságát a

$$\mathcal{D}(\bar{\tau}) = \int_0^{\bar{r}} \sqrt{g_{rr}} d\hat{r} = \int_0^{\bar{r}} R(\bar{\tau}) \frac{d\hat{r}}{\sqrt{1 - k\hat{r}^2}} = R(\bar{\tau}) \cdot \varphi(\bar{r}) \quad (17.1.27)$$

alakban adhatjuk meg, ahol

$$\varphi(\bar{r}) = \begin{cases} \arcsin(\bar{r}), & k = 1; \\ \bar{r}, & k = 0; \\ \text{arsh}(\bar{r}), & k = -1. \end{cases} \quad (17.1.28)$$

Ebből az egymást követő  $\tau = \text{állandó}$  hiperfelületeken az  $u^a$  integrálgörbéi mentén mérhető relatív sebességre a

$$v = \frac{d\mathcal{D}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\mathcal{D}(\tau)}{dR} \cdot \frac{dR}{d\tau} = \frac{\dot{R}}{R} \cdot \mathcal{D}(\tau) = H(\tau) \cdot \mathcal{D}(\tau), \quad (17.1.29)$$

összefüggést kapjuk, ahol az utolsó előtti lépésben a (17.1.27) egyenletből származtatható

$$\frac{d\mathcal{D}(\tau)}{dR} = \varphi(r) = \frac{\mathcal{D}(\tau)}{R} \quad (17.1.30)$$

relációt használtuk fel.

Így – a Hubble-törvénynek megfelelően – a homogenitási felületek fix térszerű koordinátával rendelkező pontjainak relatív sebessége arányos az ott mérhető távolságukkal. Hubble a róla elnevezett törvényt 1929-ben egy  $6 \cdot 10^6$  fényév sugarú gömbön belül megfigyelt galaxisok vöröseltolódását tisztán Doppler-hatásként magyarázva állította fel.

**17.1.6. Megjegyzés.** *Fontos hangsúlyozni, hogy mint minden megfigyelést, a Hubble-törvény kísérleti ellenőrzését is csak a pillanatnyi múltfénykúpunk mentén érkező fényjelek segítségével végezhetjük el, így a fentebb ismertetett gondolatmenet erősen leegyszerűsített. Ezen túlmenően a Hubble állandónak nevezett  $H(\tau) = \dot{R}/R$  hányados csak a  $\tau = \text{állandó}$  homogenitási felületeken állandó, míg értéke a szintfelületek között az  $R(\tau)$  skálafaktor  $\tau$ -függésének megfelelően változik. Azt sem szabad elfelejtenünk, hogy az (17.1.29) egyenletben szereplő  $v$  „relatív sebesség”, így amikor  $D(\tau)$  értéke nagyon nagy, akkor  $v$  értéke lényegesen nagyobb lehet mint a vákuumbeli fénysebesség.  $v$  értékétől függetlenül az  $u^a$  vektormező integrálgörbéi mentén mozgó megfigyelők mindenütt az adott pontbeli lokális fénykúpokon belül mozognak.*

### 17.1.3. A geometriai-optikai közelítés

A kozmológiai vöröseltolódás meghatározása előtt tekintsük át röviden az elektromágneses hullámok leírását a hullámhossz  $\lambda \rightarrow 0$  határesetében.

Az ennek megfelelő geometriai-optikai közelítés alkalmazása során abból a feltevésből indulunk ki, hogy a forrásmentes elektromágneses teret leíró

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \quad (17.1.31)$$

$$\nabla^a F_{ab} = 0 \quad (17.1.32)$$

Maxwell-egyenletek megoldásait az

$$F_{ab} = f_{ab} \cdot \exp(iS), \quad (17.1.33)$$

lassan változó amplitúdójú  $\nabla_e f_{ab} \approx 0$ , valamint határozott  $S : M \rightarrow \mathbb{R}$  fázissal rendelkező alakban keressük, ahol  $S$  legalább  $C^2$  osztályú valós függvény.

**17.1.5. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az alábbi érvelés akkor is érvényben marad, ha azt a fizikailag adekvátabb*

$$F_{ab} = f_{ab} \cdot \exp(iS) + \bar{f}_{ab} \cdot \exp(-iS), \quad (17.1.34)$$

*valós kifejezésre alkalmazzuk.*

A geometriai-optikai közelítés vizsgálata során azonnal szembeötlik, hogy az  $S = \text{állandó}$  hiperfelületek az azonos fázisban lévő pontokat tartalmazzák. Ezek után (17.1.33)-at a (17.1.31)-(17.1.32) egyenletekbe helyettesítve a

$$(\nabla_a S)f_{bc} + (\nabla_c S)f_{ab} + (\nabla_b S)f_{ca} = 0 \quad (17.1.35)$$

$$(\nabla^a S)f_{ab} = 0 \quad (17.1.36)$$

egyenletekhez jutunk. (17.1.35)-öt  $(\nabla^a S)$ -sel kontrahálva, valamint (17.1.36)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$(\nabla_a S)(\nabla^a S) = 0, \quad (17.1.37)$$

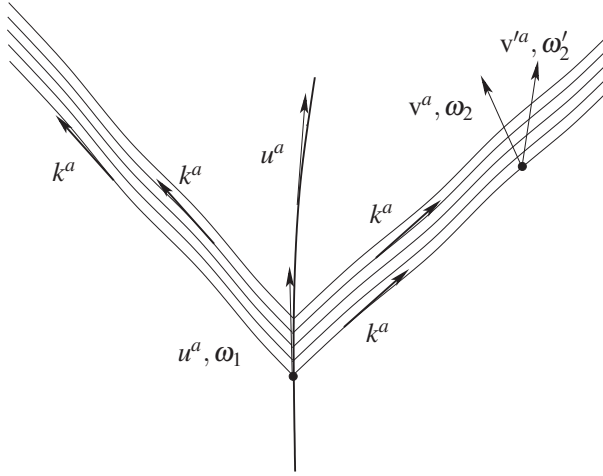
azaz az azonos fázisban lévő pontokat összekötő hiperfelületek normálisa fény-szerű. Ennél azonban több is igaz. A  $k^a = \nabla^a S$  jelölést bevezetve (17.1.37)-öt a

$$k_a k^a = 0, \quad (17.1.38)$$

alakban írhatjuk, aminek a metrika szerinti  $\nabla_a$  kovariáns deriváltjából a

$$\nabla_b(k_a k^a) = 2k^a \nabla_b \nabla_a S = 2k^a \nabla_a k_b = 0 \quad (17.1.39)$$

egyenletet kapjuk.



17.5. ábra. Az állandó fázisban lévő pontokat megjelenítő hiperfelületekre merőleges  $k^a = \nabla^a S$  normálvektorok egyben érintői is az ezekben a felületekben futó, azok sima részeit lokálisan kifeszítő fényszerű geodetikus görbéknek. Valamely  $v^a$  egységnyi normájú négyes-sebességvektorral mozgó megfigyelőre vonatkozó  $\omega_v$  körfrekvencia nem más, mint a fázisnak az  $v^a$  irányba eső változási gyorsasága. Ahogy azt az ábra is jól illusztrálja,  $\omega_v$  függ  $v^a$  és az  $S = \text{állandó}$  hiperfelületek egymáshoz viszonyított elhelyezkedésétől.

Az utolsó egyenlőségnek megfelelően az  $S = \text{állandó}$  hiperfelületekre merőleges  $k^a = \nabla^a S$  normálvektorok egyben érintői is az ezekben a felületekben futó, azok sima részeit lokálisan kifeszítő fényszerű geodetikus görbéknek. Ezt a tényt szoktuk úgy interpretálni, hogy a geometriai-optikai közelítésben (azaz amikor  $\nabla_e f_{ab} \approx 0$  és létezik a hullám fázisát megjelenítő  $S : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvény) a fényjeleket közvetítő fotonok fényszerű geodetikus pályákat követve jutnak el az egyik téridőpontból valamely másikba.

**17.1.4. Definíció.** *A (17.1.33) elektromágneses hullám valamely  $v^a$  egységnyi normájú négyessebességvektorral mozgó megfigyelőre vonatkozó  $\omega_v$  körfrekvenciáján a hullám  $S$  fázisának az  $v^a$  irányba eső*

$$\omega_v = -v^e \nabla_e S = -v^e k_e \quad (17.1.40)$$

*változási gyorsaságát értjük.*

#### 17.1.4. A kozmológiai vöröseltolódás

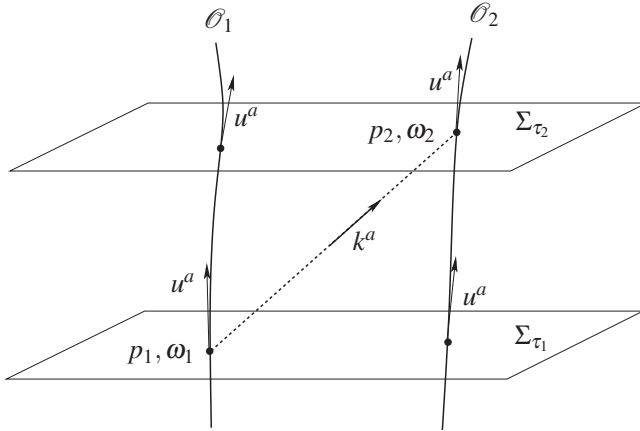
Mindezek alapján az izotróp kozmológiai modellünkben megvizsgálhatjuk, hogy valamely  $\tau = \tau_1$  szintfelületen elhelyezkedő  $p_1$  eseményből az ottani izotróp megfigyelő által  $\omega_1$  körfrekvenciával indított fényjelet egy későbbi  $\tau = \tau_2$  szintfelületen elhelyezkedő  $p_2$  eseményben mekkora  $\omega_2$  körfrekvenciájúnak érzékeli az éppen ott áthaladó izotróp megfigyelő.

A kérdés megválaszolása előtt ismét érdemes a térszerű koordinátáink origóját az egyik, jelen esetben a  $p_1$  eseményben felvenni, majd meghatározni a  $p_1$  eseményből a  $p_2$  eseménybe futó radiális fényszerű geodetikus darabot, amelyről a téridő szimmetriákra alapozottan – az általánosság megszorítása nélkül – feltehető, hogy a  $\theta = \pi/2$  és  $\phi = 0$  koordinátaaltérben fut, és amelynek fényszerű érintője – a (17.1.26)-nak megfelelően – arányos a  $\hat{k}^\alpha = \left(1, \frac{\sqrt{1-kr^2}}{R}, 0, 0\right)$  vektorral.

**17.1.6. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a*

$$k^\alpha = \left(\frac{1}{R}, \frac{\sqrt{1-kr^2}}{R^2}, 0, 0\right) \quad (17.1.41)$$

*koordinátákkal rendelkező  $k^a$  fényszerű vektormező a  $\theta = \pi/2$  és  $\phi = 0$  koordinátaaltérben futó sugárirányú fényszerű geodetikus görbe jövőirányú érintővektora, azaz eleget tesz a  $k^e \nabla_e k_a = 0$  geodetikus egyenletnek.*



17.6. ábra. A  $\Sigma_{\tau_1}$  szintfelületen elhelyezkedő  $p_1$  eseményből, az ottani izotróp megfigyelő által  $\omega_1$  körfrekvenciával indított fényjelet egy későbbi  $\Sigma_{\tau_2}$  szintfelületen elhelyezkedő  $p_2$  eseményen éppen áthaladó izotróp megfigyelő  $\omega_2$  körfrekvenciájának érzékeli.

Mindezeknek megfelelően

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(-u^e k_e)_2}{(-u^e k_e)_1} = \frac{\frac{1}{R(\tau_2)}}{\frac{1}{R(\tau_1)}} = \frac{R(\tau_1)}{R(\tau_2)}, \quad (17.1.42)$$

és így a  $z$  vöröseltolódási faktorra

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{R(\tau_2)}{R(\tau_1)} - 1 \quad (17.1.43)$$

adódik.

Mielőtt tovább haladnánk érdemes az egyik kedves középiskolás diák, Ványi András által megfogalmazott kérdés kapcsán a kozmológiai vöröseltolódás mi-mbenlétén egy kicsit jobban elmerengeni. Ványi András kérdése:

„Egy távoli galaxisból egy társam képes rövid, egy-egy fotonból álló fényimpulzust küldeni felém, melynek frekvenciája jól meghatározható (legyen kék



fény). Tegyük fel, hogy a jel elér hozzám, nem szóródik, nem nyelődik el. Mire elér hozzám vöröseltolódik, én már vörös fényt detektálok. Kiszámolva a két pontban a foton energiáját a  $h\nu$  képlettel különböző értéket kapunk. Hova tűnt az energia?”

*Rövid válasz:* Nem tűnt el semmiféle energia. *Kicsit hosszabb válasz:* Függetlenül az alkalmazott modelltől az első és legfontosabb kérdés, amit mindig érdemes tisztázni, ki által mért frekvenciáról beszélünk. A homogén és izotróp kozmológiai téridőmodellekben levezetett vöröseltolódási formula a homogenitást érzékelő megfigyelőkre vonatkozik. Ezek egymáshoz képest gyorsulva, tágulás közben egymástól távolodva mozognak. Lényegében ebből és abból, hogy a kibocsátás és a detektálás időpontjai eltérnek adódik az, hogy eltérő frekvenciákat mérnek a különböző megfigyelők. Ha végtelen módon tágul az univerzum, valóban az történik, amit Ványi András felvázol, azaz egyre nagyobb hullámhosszúságúvá válik minden foton. Érdekes megjegyezni, hogy a zárt kozmológiai modellek esetén mindig van egy összeomlási fázis, amikor például a visszafordulás idején kibocsátott fotonok már kék-eltolódáson mennek át. Ekkor ugyanis egymás felé gyorsulnak a megfigyelők.

A vöröseltolódás mechanizmusával kapcsolatban az alábbi egyszerűsített érvelés is érdekes betekintést nyújthat:

- Tekintsünk egy részecskét, amely  $v$  sebességgel indul az egyik homogenitást érzékelő megfigyelőtől.
- Amíg a részecske  $dr$  koordinátatávolságot tesz meg, egy olyan másik homogenitást érzékelő megfigyelőhöz jut, amelynek a kibocsátóhoz képest mért  $U$  relatív sebességére a

$$U = H dr = H v dt = \left[ \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right] v dt = \frac{dR}{R} v \quad (17.1.44)$$

egyenlőség teljesül.

- A speciális relativitáselméletből ismert sebességösszeadási képlet alap-

ján a részecske utóbbi megfigyelő által érzékelt sebességére a

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v - U}{1 - vU} \approx v - (1 - v^2)U + \mathcal{O}(U^2) = \\ &= v - (1 - v^2)v \frac{dR}{R} + \mathcal{O}(U^2) \end{aligned} \quad (17.1.45)$$

összefüggés adódik.

- Ebből a közelítő

$$\frac{dv}{dR} = -\frac{(1 - v^2)v}{R}, \quad (17.1.46)$$

differenciálegyenletet kapjuk, aminek a megoldása

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\text{konstans}}{R}. \quad (17.1.47)$$

- Az  $1/\sqrt{1 - v^2}$  faktort  $\gamma$ -val jelölve az iménti megoldást

$$\frac{\gamma_2 v_2}{\gamma_1 v_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (17.1.48)$$

alakban is felírhatjuk.

- Amikor a kiindulásnál használt részecskét fotonnak tekintjük, akkor a legutóbbi egyenletben a  $\gamma v \rightarrow h v$  és  $v \rightarrow 1$  helyettesítéseket, valamint a  $z$  vöröseltolódási faktor definícióját használva éppen a (17.1.43) kozmológiai vöröseltolódási formulához jutunk.

## 17.2. Tökéletes folyadékok

Érdemes felidézni, hogy a pontonként  $I_{p,u^a}$ -invariáns  $g_{ab}$  metrikából származtatott  $G_{ab}$  Einstein-tenzor, vagy a vele arányos  $T_{ab}$  energiaimpulzus-tenzor is szükségképpen pontonként  $I_{p,u^a}$ -invariánsak. Így a 17.1.1. állításnak megfelelően a legáltalánosabb olyan energiaimpulzus-tenzor, mely az izotróp kozmo-

lógiai modellünkkel összeegyeztethető, a

$$T_{ab} = (T_{ef}u^e u^f) u_a u_b + \frac{1}{3} (T_{ef}h^{ef}) h_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (17.2.49)$$

alakban írható fel.

Bár ebben a fejezetben az izotróp kozmológiai téridőket vizsgáljuk, a jelen alfejezetben a tökéletes folyadékokra vonatkozó általános eredmények rövid áttekintését adjuk.

Az általános esetben, azaz amikor  $u^a$  nem az izotrópiát tapasztaló megfigyelők világvonalaik érintővektora, a (17.2.49) egyenlet jobb oldalán álló kifejezést szokás a tökéletes folyadék energiaimpulzus-tenzorának tekinteni. Ebben  $u^a$  a folyadékot felépítő részecskék egységnyi normájú négyessebességvektorát,  $\rho$  és  $P$  pedig a folyadékkal együtt mozgó megfigyelő által mért  $\rho = T_{ab}u^a u^b$  energiasűrűséget és a  $P = T_{ab}X^a X^b$  kontrakció által meghatározott nyomást jelöli, ahol  $X^a$  az  $u^a$ -ra merőleges tetszőleges egységvektor.

Először is érdemes megemlíteni, hogy a tökéletes folyadékok energiaimpulzus-tenzorának  $\nabla^a T_{ab} = 0$  divergenciamentessége a folyadék mozgását meghatározó egyenletekkel ekvivalens.

**17.2.1. Lemma.** *A (17.2.49) egyenlettel meghatározott tökéletes folyadék energiaimpulzus-tenzorának divergenciamentessége, azaz a*

$$\nabla^a T_{ab} = 0, \quad (17.2.50)$$

*feltétel ekvivalens az*

$$u^a \nabla_a \rho + (P + \rho) \cdot \nabla^a u_a = 0 \quad (17.2.51)$$

$$(P + \rho) \cdot u^a \nabla_a u_b + \nabla^a P \cdot (g_{ab} + u_a u_b) = 0 \quad (17.2.52)$$

*egyenletekkel, melyek nem-relativisztikus (lassú mozgás és kicsiny nyomás) határesetben a belőlük származtatott*

$$\partial_t \rho + \partial_{\vec{\alpha}}(\rho v^{\vec{\alpha}}) = 0 \quad (17.2.53)$$

mérlegegységetté, valamint a folyadékok áramlására vonatkozó

$$\rho [\partial_t v^{\bar{\alpha}} + v^{\bar{\epsilon}} \partial_{\bar{\epsilon}} v^{\bar{\alpha}}] = -h^{\bar{\alpha}\bar{\epsilon}} \partial_{\bar{\epsilon}} P \quad (17.2.54)$$

Euler-egyenletté egyszerűsödnek.

*Bizonyítás:* Tekintsük először a (17.2.49) egyenlettel meghatározott tökéletes folyadék energiainpulzus-tenzorára vonatkozó  $\nabla^a T_{ab} = 0$  egyenletet, azaz a

$$\begin{aligned} \nabla^a T_{ab} = (u_a \nabla^a \rho) u_b + (\rho + P) \cdot (\nabla^a u_a) u_b + (\rho + P) \cdot (u^a \nabla_a u_b) + \\ + \nabla^a P \cdot (g_{ab} + u_a u_b) \end{aligned} \quad (17.2.55)$$

relációt. Vizsgáljuk most külön-külön ennek párhuzamos és merőleges részeit.

A 17.1.1 Lemma, valamint az általános esetben is – a folyadékot felépítő részecskék egységnyi normájú  $u^a$  négyessebességvektorára merőleges térben – definiált  $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$  metrika merőlegessége folytán könnyen látható, hogy a (17.2.55) egyenlet két utolsó tagja az időszerű  $u^a$  vektormezőre merőleges, míg a két első tag az  $u^a$ -val párhuzamos járulékokat jelenít meg. Ezek figyelembevételével a (17.2.51) és a (17.2.52) egyenletek azonnal adódnak.

Relativisztikus mozgások esetén, ahogy azt a 15.7 alfejezetben már felidéz-tük, az  $u^\alpha$  négyessebességvektort a speciális relativitáselméletben bevezetett  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  faktor segítségével, a  $u^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$  alakban írhatjuk fel. Ennek megfelelően a lassú mozgás határesetben az  $u^\alpha$  négyessebességvektor az egyszerű  $u^\alpha \approx (1, v^{\bar{\alpha}})$  alakot ölti, amelyet a  $P \ll \rho$  feltétellel együtt az (17.2.51) és a (17.2.52) egyenletekbe helyettesítve kapjuk az (17.2.53) és a (17.2.54) egyenletekkel ekvivalens

$$\partial_t \rho + v^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \rho + (\rho + P) \partial_{\bar{\alpha}} v^{\bar{\alpha}} = 0 \quad (17.2.56)$$

$$(\rho + P) [\partial_t v^{\bar{\alpha}} + v^{\bar{\epsilon}} \partial_{\bar{\epsilon}} v^{\bar{\alpha}}] = -h^{\bar{\alpha}\bar{\epsilon}} \partial_{\bar{\epsilon}} P \quad (17.2.57)$$

egyenleteket. □

### 17.3. Izotróp kozmológiai modellek dinamikája

Ahogy azt az előző részekben már megállapítottuk, a  $G_{ab}$  Einstein-tenzor is pontonként  $I_{p,u^a}$ -invariáns és így a 17.1.1 Állítás értelmében  $G_{ab}$  is a

$$G_{ab} = (G_{ef}u^e u^f)u_a u_b + \frac{1}{3}(G_{ef}h^{ef})h_{ab} \quad (17.3.58)$$

alakban írható fel. Ennek megfelelően csak kettő nem  $0 = 0$  alakú Einstein-egyenletünk lehet, melyek a izotrópiával összeegyeztethető tökéletes folyadék energiaimpulzus-tenzorát használva a

$$(G_{ef} + \Lambda g_{ef})u^e u^f = 8\pi T_{ef}u^e u^f \quad \Longleftrightarrow \quad 3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda = 8\pi \rho \quad (17.3.59)$$

$$\frac{1}{3}(G_{ef} + \Lambda g_{ef})h^{ef} = \frac{8\pi}{3}(T_{ef}h^{ef}) \quad \Longleftrightarrow \quad -2\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} + \Lambda = 8\pi P \quad (17.3.60)$$

alakot öltik.<sup>1</sup> A (17.3.59) és a (17.3.60) egyenlet háromszorosának összegéből a

$$3\frac{\dot{R}}{R} = -4\pi(\rho + 3P) + \Lambda \quad (17.3.61)$$

relációt kapjuk.

A (17.3.59) és a (17.3.61) egyenlet, egy  $P = P(\rho)$  típusú állapotegyenlettel együtt a dinamikára vonatkozó teljes rendszert adja.

**17.3.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a (17.3.59) és a (17.3.61) egyenletekből következik a

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (17.3.62)$$

reláció. Lássuk be, hogy a vizsgált izotróp kozmológiai téridők esetén ez az egyenlet éppen a (17.2.49) egyenlettel meghatározott tökéletes folyadék energia-impulzus-tenzorára vonatkozó  $\nabla^a T_{ab} = 0$  egyenlet párhuzamos része.

---

<sup>1</sup>Napjaink kozmológiájában nagy előszeretettel alkalmazzák a  $\Lambda$  kozmológia állandót. Éppen ezért ebben az alfejezetben használt formulák olyanok, mintha azok a (14.3.36) Einstein-egyenletből lennének származtatva és így explicit módon tartalmazzák  $\Lambda$ -át is.

### 17.3.1. Friedmann-kozmológiák

Ahogy azt már az előszóban is említettük, Alexander Friedmann már 1922-ben, Hubble eredményeinek 1929-es közzététele előtt hét évvel származtatta kozmológiai modelljét. Érdeemes megjegyezni, hogy akkoriban még a kozmológiai konstans nélküli Einstein-egyenletek megoldásait keresték és Friedmann a fizikailag ma is reálisnak tekintett  $\rho > 0$  és  $P \geq 0$  egyenlőtlenségeknek eleget tevő anyagot feltételezve származtatta a később róla elnevezett kozmológiai modellt.

Mindezeknek megfelelően, konkrétan a (17.3.61) egyenlet  $\Lambda = 0$  esetben érvényes alakjából következő  $\ddot{R} < 0$  tulajdonság folytán azonnal adódik, hogy az izotróp kozmológiai modellünk nem lehet stacionárius állapotban, azaz  $\dot{R}$  nem lehet azonosan zérus. Továbbá az  $\ddot{R} < 0$  reláció értelmében egy Friedmann-univerzum vagy éppen tágul ( $\dot{R} > 0$ ), vagy pedig éppen összehúzódik ( $\dot{R} < 0$ ) és ezt a két fázist legfeljebb csak egy pillanatnyi átmenet választhatja el egymástól.

Így a Friedmann-kozmológiák esetében, abból, hogy az univerzum most éppen tágul ( $\dot{R}_0 \geq 0$ ) az következik, hogy valamikor korábban még gyorsabban tágult.<sup>2</sup>

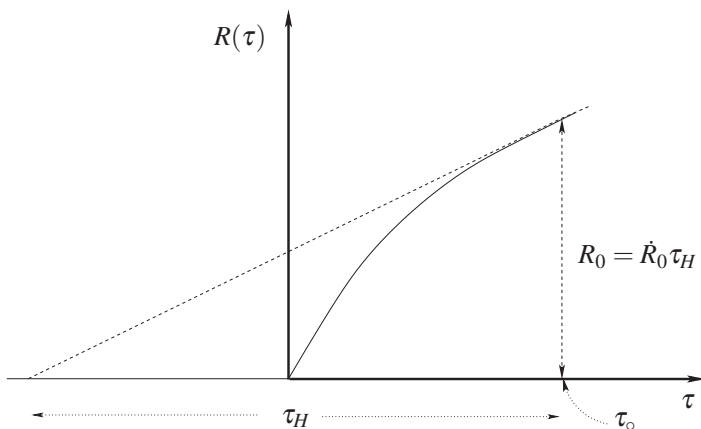
Azt feltételezve, hogy az univerzum mindig a jelenlegi sebességgel tágult, azaz az  $\ddot{R} \equiv 0$  és az  $\dot{R}(\tau) = \dot{R}(\tau_0)$  relációk teljesülnek, azt kapnánk, hogy a

$$\tau_H = \frac{\dot{R}_0 \tau_H}{\dot{R}_0} = \frac{R_0}{\dot{R}_0} = H_0^{-1} \quad (17.3.63)$$

$\tau_H$  Hubble-idővel korábban kellett lennie egy olyan állapotnak, amikor az  $R(\tau)$  skálafaktor értéke zérus volt (lásd a 17.7. ábrát). A fentebb említett fizikailag reális, azaz a  $\rho > 0$  és  $P \geq 0$  relációknak eleget tevő anyag feltételezésére

---

<sup>2</sup>  $\tau_0$ -al jelöljük az univerzum aktuális állapotához tartozó sajátidőt,  $\dot{R}_0$ -al pedig a skálafaktor első  $\tau$  szerinti deriváltjának a  $\tau_0$  időponthoz tartozó értékét, azaz  $\dot{R}_0 = \dot{R}(\tau_0)$ . [Lásd a 17.7. ábrát is.]



17.7. ábra. Az univerzum  $\tau_0 < \tau_H$  idővel korábban egy olyan szinguláris kezdeti állapotban volt, melyet ősrobbanásnak, angolul „Big Bang”-nek (nagy bumm) nevezünk.

alapozott kozmológiai modellekben valamikor  $\tau_0 < \tau_H$  időben kellett lennie egy olyan kritikus állapotnak, amikor  $R(\tau_0)$  zérus értékű volt.

Így az izotróp kozmológiai modellből arra következtethetünk, hogy valószínűleg kevesebb mint  $\tau_H = H_0^{-1}$  idővel ezelőtt – ezt a kevesebb időt jelöltük  $\tau_0$ -al – a megfigyeléseinknek megfelelő anyagból felépülő univerzum egy szinguláris kezdeti állapotból indult, melyet ősrobbanásnak, angolul „Big Bang”-nek (nagy bumm) nevezünk.

Mekkora a  $\tau_H = H_0^{-1}$  idő értéke? Feltéve, hogy a  $H_0$  Hubble-állandó értéke körülbelül  $50_{[Km/s/Mpc]}$ , azt kapjuk, hogy  $\tau_H$  értéke kisebb, mint az az idő, ami ahhoz szükséges hogy egy  $50_{[Km/s]}$  sebességgel mozgó test megtegyen egy megaparsec  $Mpc \sim 3 \cdot 10^{19}_{[Km]}$  távolságot, amiből  $\tau_H \sim 3 \cdot 10^{19}_{[Km]} / 50_{[Km/s]} = 6 \cdot 10^{17}_{[s]}$  adódik. Így az egy évnek megfelelő  $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60_{[s]} \sim 3 \cdot 10^7_{[s]}$  közelítő érték alapján  $\tau_H \sim 2 \cdot 10^{10}$  évnek felel meg.

Egy további fontos összefüggést származtathatunk a (17.3.62) egyenlet felhasználásával.  $\dot{P}$ -ot a (17.3.62) egyenlethez adva, majd az így kapott egyenle-

tet  $R^3$ -el megszorozva nyerjük a

$$(\dot{\rho} + \dot{P})R^3 + 3(\rho + P)R^2\dot{R} = \dot{P}R^3 \quad (17.3.64)$$

egyenletet. Mivel a baloldalon álló összeg éppen a  $\frac{d}{d\tau}[(\rho + P)R^3]$  teljes derivált, (17.3.64)-et  $1/\dot{R} = \frac{d\tau}{dR}$ -el megszorozva kapjuk a

$$\frac{d}{dR}[(\rho + P)R^3] = \frac{d}{dR}PR^3 = \frac{d}{dR}[PR^3] - 3PR^2, \quad (17.3.65)$$

összefüggést, egyszerűsítések után pedig a még sokkal beszédesebb

$$\frac{d}{dR}[\rho R^3] = -3PR^2, \quad (17.3.66)$$

relációt.

A (17.3.66) egyenlet következményeinek feltérképezése során továbbra is feltesszük, hogy  $P \geq 0$ , azaz a nyomás nemnegatív, tehát a (17.3.66) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés nempozitív és így annak integrált változata alapján  $\tau_1 < \tau_2$  esetén a

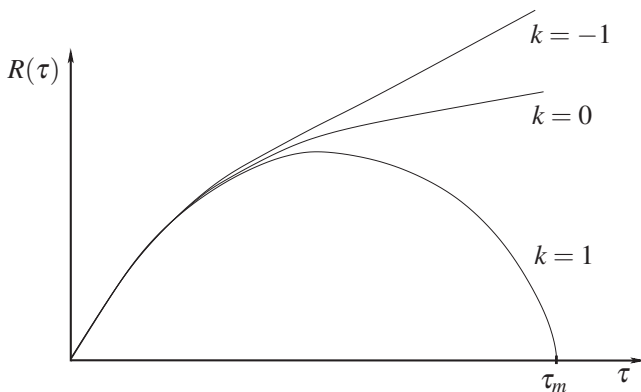
$$(\rho R^3)_{\tau_2} < (\rho R^3)_{\tau_1} \quad (17.3.67)$$

egyenlőtlenség teljesül. (17.3.67)-ra alapozva az alábbi kvalitatív következtetések vonhatók le (lásd a 17.8. ábrát):

- (1) Amikor az ősrobbanás állapotához közelítünk, azaz  $R \rightarrow 0$ , a  $\rho$  energiasűrűség legalább  $1/R^3$  szerint válik végtelenné.
- (2) Minden olyan esetben, amikor az  $R \rightarrow \infty$  határeset megvalósulhat a  $\rho R^2$  szorzat nullához tart. Egy ilyen esetben (17.3.59) figyelembe vételével az látszik, hogy  $\dot{R}^2 + k \rightarrow 0$ , amiből az  $R(\tau)$  skálafaktor viselkedésére

- a  $k = -1$  esetben  $R(\tau) \sim \tau$ , míg
- a  $k = 0$  esetben ennél egy lassabb ütemű végtelenné válás következik.





17.8. ábra. A Friedman-univerzum  $R(\tau)$  skálafaktorának kvalitatív viselkedése az állandó görbületű terekre vonatkozó három lehetséges állapot figyelembevételével.

- (3) A  $k = 1$  esetben, amikor  $\rho R^2$  értéke éppen  $3/(8\pi)$ , akkor (17.3.59) alapján  $\dot{R} = 0$ , ami  $\ddot{R} < 0$  figyelembevételével azt adja, hogy léteznie kell egy olyan  $\tau_m$  értéknek, amelyre az  $R(\tau)$  skálafaktor ismét zérus értéket vesz fel, azaz  $R(\tau_m) = 0$ .

### 17.3.2. A skálafaktor evolúciója

A 17.1 táblázatban foglaltuk össze a Friedman-univerzum skálafaktorának evolúciójára vonatkozó konkrét  $R(\tau)$  függvénykapcsolatokat az anyag- és sugárzásdominált határesetekben. A  $K$  és  $K'$  integrációs konstansokat mint együtthatókat a  $H_0$  Hubble-állandó és  $q_0$  lassulási paraméter segítségével a  $K = \frac{q_0}{H_0 |2q_0^2 - 1|^{3/2}}$  és  $K' = \frac{q_0}{H_0^2 (q_0 - 1)^2}$  formulákon keresztül fejezhetjük ki, ahol

$$H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0} = \left. \frac{d(\ln R(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} \quad (17.3.68)$$

és

$$q_{\circ} = -\frac{\ddot{R}_{\circ} R_{\circ}}{\dot{R}_{\circ}^2} = -\frac{\ddot{R}_{\circ}}{R_{\circ}} \frac{1}{H_{\circ}^2} = -\frac{\frac{d(\ln \dot{R}(\tau))}{d\tau}}{\frac{d(\ln R(\tau))}{d\tau}} \bigg|_{\tau=\tau_{\circ}}. \quad (17.3.69)$$

A $\Sigma_{\tau}$ felületek geometriája	Anyagdominált éra: $P = 0$	Sugárzásdominált éra: $P = \frac{1}{3}\rho$
$k = 1$	$R = K[1 - \cos \eta]$ $\tau = K[\eta - \sin \eta]$	$R = \sqrt{K'} \left[ 1 - (1 - \tau/\sqrt{K'})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$
$k = 0$	$R = \left( \frac{9K}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{2}{3}}$	$R = (2H_{\circ})^{\frac{1}{2}} R_{\circ} \tau^{\frac{1}{2}}$
$k = -1$	$R = K[\cosh \eta - 1]$ $\tau = K[\sinh \eta - \eta]$	$R = \sqrt{K'} \left[ (1 + \tau/\sqrt{K'})^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$

17.1. táblázat. A skálafaktor evolúciója az anyag- és sugárzásdominált Friedman-univerzumban.

### 17.3.3. Einstein sztatikus univerzuma

Ahogy az korábban már megmutattuk az izotróp univerzum nem lehet sztatikus a  $\Lambda = 0$  esetben, a  $\rho \geq 0$ ,  $P \geq 0$ , valamint  $\rho + 3P > 0$  feltételeknek eleget tevő forrás választása esetén.

Ebből azonnal következik, hogy az Einstein-féle sztatikus univerzummodell csak a  $\Lambda \neq 0$  esetben valósulhat meg. Konkrétan a sztatikusságot kifejező  $\dot{R} \equiv 0$  feltétel a (17.3.60), valamint  $P = 0$  egyenletek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$k = \Lambda R_{\circ}^2. \quad (17.3.70)$$

Hasonlóan, ha a  $\Sigma_\tau$  hiperfelületek a  $k = 1$  választásnak megfelelő gömbi topológiával rendelkeznek, akkor a (17.3.59) egyenlet és az  $\dot{R} \equiv 0$  feltétel adja a

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi} > 0 \quad (17.3.71)$$

relációt.

Mindezek alapján a  $\dot{R} \equiv 0$ ,  $k = 1$ ,  $P = 0$  választásnak megfelelő  $\mathbb{R} \times S^3$  topológiájú alapsokasággal rendelkező Einstein-féle sztatikus univerzum metrikáját a

$$ds^2 = -d\tau^2 + R_\circ^2 \left[ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (17.3.72)$$

alakban írhatjuk fel.

Amint az a fenti érvelésből jól látható, az Einstein-féle sztatikus univerzum csak a  $\Lambda \neq 0$  esetben valósulhat meg. Ahogy ezt az előszóban már említettük, Einstein az univerzum látszólagos időbeni állandóságából kiindulva kereste az imént kivonatosan ismertetett sztatikus univerzummodellt. Lényegében ennek eléréséhez vezette be a kozmológiai állandót, melyet később egyik legnagyobb tudományos tévedésének tekintett. Ez az értékelés érthető is, hiszen éppen a kozmológiai állandó bevezetése miatt mulasztotta el azt az elméleti jóslatot, mely a dinamikus univerzummodellek általánosságára utalhatott volna.

## 17.4. Az univerzum kritikus paraméterei

Az univerzum kritikus paramétereinek feltérképezése előtt emlékezzünk arra, hogy a (17.3.68) Hubble-állandó és (17.3.69) lassulási paraméter segítségével a (17.3.59) és a (17.3.61) téregyenleteinket felírhatjuk a

$$H_\circ^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{R_\circ^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (17.4.73)$$

$$q_\circ = \frac{4\pi(\rho + P)}{3H_\circ^2} - \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H_\circ^2} \quad (17.4.74)$$

alakban is. A jelenleg megfigyelhető anyag nyomására vonatkozóan jogosnak tűnő  $P \approx 0$  közelítésünket alkalmazva ezekből azonnal kapjuk, hogy

$$\frac{k}{R_o^2 H_o^2} = \frac{8\pi\rho}{3H_o^2} - 1 + \frac{\Lambda}{3H_o^2} = \left(2q_o - \frac{2}{3} \frac{\Lambda}{H_o^2}\right) - 1 + \frac{\Lambda}{3H_o^2} = (2q_o - 1) - \frac{\Lambda}{3H_o^2}. \quad (17.4.75)$$

Először ismét tegyük azt fel, hogy a kozmológiai állandó értéke zérus. Ekkor a (17.4.75) egyenlet két szélén álló kifejezések alapján a zárt univerzumnak megfelelő  $k > 0$  eset pontosan akkor valósulhat meg, ha  $2q_o > 1$ , ami azzal ekvivalens, hogy

$$\rho > \rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi}. \quad (17.4.76)$$

A  $\rho_c$  kritikus sűrűség értéke nem is olyan hihetetlenül nagy, mert például az SI mértérendszerben azt kapjuk, hogy

$$\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G} \approx 4,9 \cdot 10^{-30} \left( \frac{H_o}{50_{[km/(s \cdot Mpc)]}} \right)^2_{[g/cm^3]}. \quad (17.4.77)$$

Így abban az esetben, ha  $H \sim 50_{[km/(s \cdot Mpc)]}$ , a  $\rho_c$  kritikus sűrűség értéke  $\sim 5 \cdot 10^{-30}_{[g/cm^3]}$ . Mivel a proton tömege  $\sim 1.67 \cdot 10^{-24}_{[g]}$  ez azt jelenti, hogy a kritikus sűrűség már köbméterenként három hidrogén atommal is biztosítható.

Kézenfekvő annak a kérdésének a megválaszolása, hogy elvileg milyen korlátok közé szorítható a kozmológia állandó értéke. A kérdés megválaszolása előtt idézzük fel, hogy (17.4.75) alapján

$$\frac{\rho_o}{\rho_c} + \frac{\Lambda}{3H_o^2} = (2q_o - 1) - \frac{\Lambda}{3H_o^2}, \quad (17.4.78)$$

teljesül, amiből azt kapjuk, hogy

$$|\Lambda| = 3H_o^2 \left| q_o - \frac{1}{2} \frac{\rho_o}{\rho_c} \right|. \quad (17.4.79)$$

---

<sup>3</sup>Kozmológiai modelljeinkben a galaxisok összességét lényegében egy laza porként jelenítjük meg.

A  $q_0$  lassulási paraméter, valamint a  $\frac{\rho_0}{\rho_c}$  hányados lehetséges értékeire azt a meglehetősen durva és nagy szabadságot biztosító becslést használva, hogy

$$-5 < q_0 < 5, \text{ valamint } 0 < \frac{\rho_0}{\rho_c} < 4 \quad (17.4.80)$$

(ekkor a (17.4.79) jobb oldalán található  $\left|q_0 - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_c}\right|$  kifejezése kisebb mint 7) a (17.4.79) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy

$$|\Lambda| \leq 21 \frac{H_0^2}{c^2} \sim 10^{-54} [1/cm^2], \quad (17.4.81)$$

ahol az utolsó lépésben azzal a feltevéssel éltünk, hogy a  $H_0$  Hubble-állandó értéke nem nagyobb, mint  $100 [km/(s \cdot Mpc)]$ .

## 17.5. Kozmológiai távolságok

A különféle kozmológia modellekben alkalmazható távolság-meghatározási módszerek megbízhatósága alapvető szerepet játszik a csillagászati megfigyelések és a modelljósátságok összevetése során.

### 17.5.1. Távolság-meghatározás a látószög alapján

Ha a kiterjedt test két legtávolabb eső pontjának távolsága  $d_f$  és ezeket a pontokat  $\delta$  szög alatt látjuk, akkor – a 17.9. ábrán látható illusztrációnak megfelelően – az Euklideszi-térben ez alapján számolt  $d_{lsz}$  „látószög-távolságot” a

$$d_{lsz} = \frac{\frac{1}{2} d_f}{\tan(\frac{1}{2} \delta)} \approx \frac{d_f}{\delta} \quad (17.5.82)$$

összefüggés segítségével értelmezhetjük. Mivel az izotróp univerzumot leíró (17.1.26) metrikában a  $d_f$  geometriai távolságra a  $d_f \approx R(\tau_1) r_1 \delta$  reláció tel-



összefüggés segítségével értelmezhetjük. A fentebb már alkalmazott relációink értelmében a forrás  $v$  sebességét a

$$v = (d[d_{mozg.}]/d\tau)|_{\tau_1} = (d[R(\tau_1)r_1\delta_{mozg.}]/d\tau)|_{\tau_1} \quad (17.5.85)$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Mindezekhez hozzávéve a fotonpályák mentén érvényes

$$d\tau|_{\tau_1}R(\tau_o) = d\tau|_{\tau_o}R(\tau_1) \quad (17.5.86)$$

relációt a mozgó testek távolságára a

$$d_{mozg.} = R(\tau_o)r_1 \quad (17.5.87)$$

összefüggést kapjuk.

### 17.5.3. Távolság-meghatározás a luminozítás alapján

Tegyük fel, hogy mind a forrás, mind pedig a megfigyelő az univerzum izotrópiajával kompatibilis mozgást végez. Tegyük fel továbbá, hogy a forrás luminozitása  $L$  és a megfigyelési eszközünk által érzékelt felületegységre eső luminozítás  $\ell$ . Ha az univerzumot nem az Einstein-elmélet segítségével szeretnénk modellezni, akkor az Euklideszi-térben érvényes  $L = 4\pi d_L^2 \ell$  összefüggést kellene alkalmaznunk, amiből

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi\ell}} \quad (17.5.88)$$

adódik. Ezen relációnak az izotróp univerzumot leíró (17.1.26) metrikájú téridőre vonatkozó adekvát módosítását az alábbi megfontolások alapján kapjuk.

Az  $L$  luminozítású forrás  $d\tau|_{\tau_1}$  idő alatt  $Ld\tau|_{\tau_1}$  energiát bocsát ki. Míg ez az energia eljut a megfigyelőhöz  $R(\tau_1)/R(\tau_o)$  mértékű gravitációs vöröseltolódást szenved annak megfelelően, hogy a táguló univerzumban a fotonok frekvenciája ilyen mértékben változik meg. Emellett figyelembe kell vennünk azt is,

hogy a megfigyelés helyén a 17.9. ábrán jelölt módon  $R(\tau_o)r_1$  sugarú gömbön a felületegységre és időegységre eső energiát, azaz az  $\ell$  luminozitást a

$$\ell = \frac{\frac{R(\tau_1)}{R(\tau_o)} [L d\tau|_{\tau_1}]}{4\pi (R(\tau_o)r_1)^2 d\tau|_{\tau_o}} \quad (17.5.89)$$

egyenlettel határozhatjuk meg, amiből (17.5.86), valamint (17.5.88) alapján a  $d_L$  luminozitási távolságra a

$$d_L = \frac{R(\tau_o)^2 r_1}{R(\tau_1)} \quad (17.5.90)$$

összefüggést kapjuk.

Figyelemreméltó, hogy a bemutatott háromféle távolságra a (17.1.43) képlet alapján kapott  $R(\tau_2)/R(\tau_1) = 1 + z$  relációt felhasználva a

$$d_L = d_{mozg.} (1 + z) = d_{lsz} (1 + z)^2 \quad (17.5.91)$$

összefüggés származtatható.

#### 17.5.4. A luminozitási távolság vöröseltolódás-függése

Ahogy az a (17.1.42) és (17.1.43) összefüggésekből következik, a vöröseltolódás meghatározása feltételezi a skálafaktor ismeretét. Így az alábbi két lehetőség közül választhatunk.

- 1) Nem konkretizáljuk a kozmológiamodellünket, elfogadva, hogy ekkor csak kicsiny vöröseltolódás értékekre érvényes relációt tudunk származtatni.
- 2) Választunk egy konkrét modellt és abban a vöröseltolódás tetszőlegesen nagy értékére érvényes összefüggést származtatunk.



**1) A kicsiny vöröseltolódás esete:**

Tekintsük először az első, modellfüggetlen esetet, azaz tegyük fel, hogy nem a távoli múltban elhelyezkedő források vöröseltolódását vizsgáljuk. Ekkor a skálafaktor  $R(\tau)$  közelíthető a sorfejtéséből kapott

$$\begin{aligned} R(\tau) &= R(\tau_0) + (\tau - \tau_0)\dot{R}(\tau_0) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2\ddot{R}(\tau_0) + \dots \\ &= R(\tau_0) \left[ 1 - (\tau_0 - \tau)H_0 - \frac{1}{2}(\tau_0 - \tau)^2 q_0 H_0^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (17.5.92)$$

kifejezéssel.

Ezek után egyrészt a  $z$  vöröseltolódást a  $\tau_0 - \tau$  változóban sorbafejtve a

$$\begin{aligned} z = \frac{R(\tau_0)}{R(\tau)} - 1 &= \frac{1}{\left[ 1 - (\tau_0 - \tau)H_0 - \frac{1}{2}(\tau_0 - \tau)^2 H_0^2 q_0 + \dots \right]} - 1 \\ &\approx -(\tau_0 - \tau)H_0 + \frac{1}{2}(\tau_0 - \tau)^2 H_0^2 (2 + q_0) + \dots \end{aligned} \quad (17.5.93)$$

relációt kapjuk, másrészt ezt a  $\tau_0 - \tau$ -ban másodrendű kifejezést  $z$ -re megoldva, majd a  $\tau_0 - \tau$ -ra kapott kifejezést  $z$ -ben sorbafejtve a

$$\tau_0 - \tau = \frac{z}{H_0} - \frac{(1 + \frac{1}{2}q_0)z^2}{H_0} + \dots \quad (17.5.94)$$

összefüggéshez jutunk. A közeli eseménypárookra az őket összekötő fényszerű geodetikus görbe mentén teljesül az

$$\int_{\tau_1}^{\tau_0} \frac{d\tau}{R(\tau)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{1 - kr^2} = \varphi(r_1) \approx r_1 \quad (17.5.95)$$

egyenlőség. Mindezek figyelembevételével azt kapjuk, hogy a

$$r_1 \approx \frac{1}{R(\tau_0)H_0} \left[ z - (1 + q_0)z^2 + \dots \right] \quad (17.5.96)$$

egyenlőség teljesül, és így végül (17.5.90) és (17.5.91) felhasználásával a

$$d_L = \frac{R(\tau_0)^2 r_1}{R(\tau_1)} = R(\tau_0) r_1 (1 + z) = \frac{1}{H_0} \left[ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right] \quad (17.5.97)$$

összefüggéshez jutunk.

**A bolometrikus luminozítás:**

Érdemes megjegyezni, hogy (17.5.97) alapján az általunk mért látszólagos luminozításra a

$$\ell = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L H_0^2}{4\pi z^2} [1 + (q_0 - 1)z + \dots] \quad (17.5.98)$$

összefüggés adódik. Ezt a látszólagos luminozítást megfeleltethetjük a csillagászok által használt és az  $m = m_{bol}$  „*bolometrikus magnitúdó*” segítségével kifejezett

$$\ell_{bol} = 10^{\frac{2m}{5}} \cdot 2.52 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{erg}{cm^2 s} \right] \quad (17.5.99)$$

empirikus „*bolometrikus luminozításnak*”. Figyelembe véve továbbá, hogy az  $M = M_{bol}$  „*abszolút bolometrikus magnitúdó*”-t — mely a forrás bolometrikus magnitúdójával akkor egyezne meg, ha az 10 parsec ( $pc$ ) távolságban helyezkedne el a megfigyelőtől — a

$$L = 10^{\frac{2M}{5}} \cdot 3.02 \cdot 10^{35} \left[ \frac{erg}{s} \right] \quad (17.5.100)$$

relációval adhatjuk meg, a luminozítási távolságra a

$$d_L = 10^{1 + \frac{m-M}{5}} [pc] \quad (17.5.101)$$

reláció adódik. Ekkor (17.5.97) és (17.5.101) alapján a csillagászati megfigyelésekben alkalmazott bolometrikus magnitúdók és a vöröseltolódás kapcsolata (SI mértékegységekben) az

$$m - M = 25 - 5 \log_{10} H_0 \left[ \frac{km}{sMpc} \right] + 5 \log_{10} (cz) \left[ \frac{km}{s} \right] + 1.086 (1 - q_0) z \quad (17.5.102)$$

összefüggést kapjuk.

**2) A modellfüggő eset:**

Ha ismerjük az  $R(\tau)$  skálafaktor konkrét alakját, a fentebb leírt fenomenologikus leírást kiterjeszthetjük a vöröseltolódás tetszőlegesen nagy értékeire. Például a  $\Lambda = 0$  esetben a pordominált Friedman-modellekben (17.3.59)-ből

kapott

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G\rho}{3} R^2, \quad (17.5.103)$$

valamint a (17.3.61) integrálása révén nyert

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \quad (17.5.104)$$

összefüggés alapján a  $H_0$  Hubble-állandó (17.3.68) és a  $q_0$  lassulási paraméterek (17.3.69) képletének felhasználásával az

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{R_0}{R}\right] \quad (17.5.105)$$

reláció igazolható.

Vegyük észre azt is, hogy (17.1.43) alapján egyrészt

$$R(\tau) = \frac{R_0}{1+z} \quad (17.5.106)$$

teljesül, másrészt az  $R(\tau)$  skálafaktor konkrét alakjának ismeretében a  $\varphi(r_1)$  függvény is meghatározható, hiszen

$$\begin{aligned} \varphi(r_1) &= \int_0^{r_1} \frac{d\hat{r}}{\sqrt{1-k\hat{r}^2}} = \int_{\tau_1}^{\tau_0} \frac{d\hat{\tau}}{R(\hat{\tau})} = \int_{R(\tau)}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} = \\ &= \frac{1}{H_0 R_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{1}{x} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-\frac{1}{2}} dx, \end{aligned} \quad (17.5.107)$$

ahol az utolsó lépésben az  $x = \frac{R}{R_0}$  változótranszformációt alkalmaztuk.

A jobb oldalon álló integrál egzaktul kiszámítható, így a vizsgált  $\Lambda = 0$  és  $P = 0$  esetben, a (17.4.75) egyenlet két szélén álló kifejezések egyenlősége folytán a

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2 \quad (17.5.108)$$

reláció is teljesül. Mindezek alapján egy hosszadalmas, de nem bonyolult számolással igazolható, hogy (17.5.108) felhasználásával a  $k$  paraméter három lehetséges értékének megfelelően választott  $q_0$  értékeket alkalmazva mindhárom esetre teljesül az

$$r_1 = \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{2q_0 z + 1} - 1)}{H_0 R_0 q_0^2 (1 + z)} \quad (17.5.109)$$

reláció.

Végül a vizsgált  $\Lambda = 0$  és  $P = 0$  esetben (17.5.91) felhasználásával a

$$d_L = R_0 r_1 (1 + z) = \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{2q_0 z + 1} - 1)}{H_0 q_0^2} \quad (17.5.110)$$

összefüggést kapjuk.

## 17.6. A horizontprobléma

Ahogy azt a fejezet bevezető részében már említettük a Kopernikuszi-elvet alaposan túlértékelve nemcsak térben, de időben is egy eléggé erős extrapolációt hajtunk végre, amikor – az emberiség eddigi korlátozott csillagászati megfigyeléseire alapozottan – univerzumunkat egy a kezdetektől homogén és izotróp téridővel modellezzük.

Az egyik legtermészetesebb kérdés az, hogy ha valóban homogén és izotróp az univerzumunk, hogyan alakult ki ez a homogenitás és izotrópia. Erre a kérdésre az alábbi kézenfekvő válaszok adhatók:

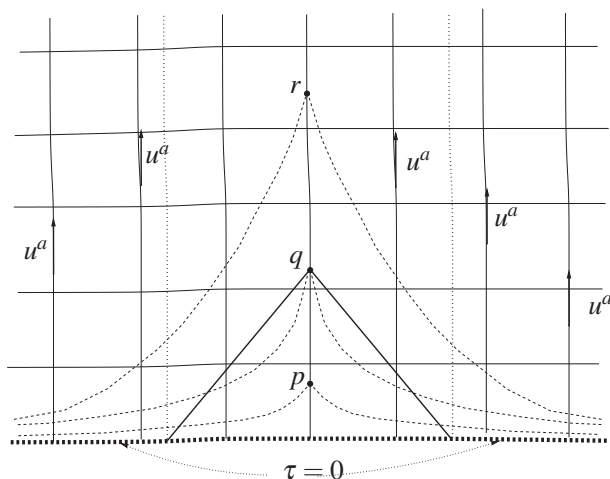
- A kezdetek óta homogén és izotróp volt.
- Kezdetben lehettek ugyan inhomogenitások, de ezeket valamilyen disszipatív folyamatok kisimították.

A minden szempontból kielégítő válasz erre a kérdésfelvetésre még várat magára, de a második, fizikailag sokkal adekvátabbnak tűnő lehetőség azonnal elvezet minket a horizontproblémához.

Az izotróp kozmológiai modellről eddig említettek alapján a disszipatív folyamatok létjogosultsága akár elfogadható is lehetne, hiszen a kezdeti szingularitáshoz közelítve a skálafaktor  $\lim_{\tau \rightarrow 0} R(\tau) = 0$  viselkedése folytán bármely két izotrópiát tapasztaló megfigyelő világvonalának a homogenitási felületekkel vett metszéspontjai

$$\mathcal{D}(\tau) = \int_0^r R(\tau) \frac{d\hat{r}}{\sqrt{1 - k\hat{r}^2}} = R(\tau) \int_0^r \frac{d\hat{r}}{\sqrt{1 - k\hat{r}^2}} \quad (17.6.111)$$

távolsága zérushoz tart. Így naivan – mivel a kezdeti szingularitáshoz közelítve, tehát a  $\tau \rightarrow 0$  határesetben az  $R(\tau)$  skálafaktor és vele a  $\mathcal{D}(\tau)$  távolság is zérushoz tart – a 17.10. ábra illusztrációjának megfelelően azt is gondolhat-



17.10. ábra. A disszipatív folyamatok létjogosultságát erősítené, ha a skálafaktor  $\lim_{\tau \rightarrow 0} R(\tau) = 0$  viselkedése folytán valóban a szaggatott vonalakkal lenne ábrázolható az egymást követő  $p, q, r$  események kauzális múltja. Ezzel szemben a  $q$  esemény kauzális múltját a vastagon jelölt vonalak határolják, míg a  $q$  eseményhez tartozó részecskehorizontot a függőlegesen futó pontozott vonalak jelölik.

nánk, hogy a kezdeti szingularitás elegendően kicsiny környezetében bármely két izotróp megfigyelő kommunikálhat egymással, véges vákuumbeli fényse-

bességnél nem nagyobb jelterjedési sebesség feltételezése esetén is. Ennek megfelelően azt gondolhatnánk, hogy alkalmas disszipatív folyamatok kismíthatják a kezdetben esetleg meglévő inhomogenitásokat.

A pontos válasz előtt érdemes bevezetni a részecskehorizont fogalmát. Természetes annak a kérdésnek a felvetése, hogy vajon mekkora részét láthatja a homogén és izotróp univerzumnak az izotrópiával összeegyeztethető mozgást végző megfigyelő. Másként fogalmazva: Melyek azok az izotróp megfigyelők, amelyek világvonala mentén biztosan található olyan esemény ahonnan elvileg jelet lehetne küldeni valamely előre kiválasztott és csak ezáltal kitüntetett izotróp megfigyelő világvonalán található  $q$  eseményt megelőző időszakban? Azt a szintén izotróp megfigyelők világvonalai által kirajzolt időszerű hiperfelületet, mely elválasztja azokat a megfigyelőket, amelyek képesek ilyen jelet küldeni azoktól, amelyek erre képtelenek, az adott megfigyelő  $q$  eseményre vonatkozó részecskehorizontjának nevezzük (lásd a 17.10. ábrát).

A fenti érvelés alapján azt is gondolhatnánk, hogy ez egy teljesen haszontalan fogalom, hiszen a kezdeti szingularitáshoz elegendően közeli időszakaszban bármely izotróp megfigyelő küldhet jelet bármely másiknak. Ezzel szemben Rindler – aki 1956-ban a részecskehorizont fogalmát bevezette – megmutatta [41], hogy ez koránt sincs így. Rindler eredeti gondolatmenetének a  $k = 0$  sík geometria esetére vonatkozó legegyszerűbb változata az alábbiak szerint fogalmazható meg.

Tekintsünk egy olyan homogén és izotróp univerzummodellt, amelynek metrikáját a

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (17.6.112)$$

ívelemmel adhatjuk meg. Vezessük be  $\tau$  helyett azt a  $t$  koordinátaidőt, melyet a

$$t = t_0 + \int_0^\tau \frac{d\hat{\tau}}{R(\hat{\tau})} \quad (17.6.113)$$

reláció határooz meg. Az új  $(t, x, y, z)$  koordinátákban az univerzummodell ív-

elemét a

$$ds^2 = R^2(\tau) [-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (17.6.114)$$

alakban írhatjuk fel, ami azt jelenti, hogy ez a téridő konformisan sík, azaz a kérdéses koordinátákban a fénykúpszerkezet pontosan olyan, mint a Minkowski-téridőben.

Ha még az is teljesülne, hogy a  $\tau = 0$  kezdeti szingularitásnak a  $t_0 = -\infty$  határeset felelne meg – ilyen lenne például egy  $R(\tau) \sim \tau$  skálafaktor viselkedés esetén – akkor az univerzummodellünk valóban a teljes Minkowski-téridővel lenne konformisan ekvivalens. Egy ilyen homogén és izotróp univerzummodellben nem létezne részecskehorizont, hiszen ekkor – a jelen esetben nemfizikai Minkowski-téridőben – bármely az  $x, y, z = \text{állandó}$  vonallal ábrázolt izotróp megfigyelő világvonalán tetszőlegesen kiválasztott  $p$  esemény kauzális múltjának határát valahol elegendően nagy negatív  $t$  értéknél mindig metszi bármely másik izotróp megfigyelő világvonala.

Ha azonban a  $\tau = 0$  kezdeti szingularitásnak valamely  $t = t_0 (\in \mathbb{R})$  érték felel meg, akkor létezik a 17.10. ábra illusztrációjának megfelelő részecskehorizont. Ez fordul elő például a skálafaktor  $R(\tau) \sim \tau^{2/3}$  viselkedése esetén, ami – lásd a 17.1 táblázatot – a  $k = 0$  esetben éppen a por (mint anyag) választásnak felel meg. Mivel  $\tau$  hatványkitevője nem lesz nagyobb akkor sem, ha por helyett a fizikailag adekvátabb  $\rho > 0, P \geq 0$  feltételeknek eleget tevő folyadékot tekintünk – legalább is a  $k = 0$  esetben – mindig létezik részecskehorizont.





## 18. fejezet

# Gömbszimmetrikus téridők

Az Einstein-egyenletek mindmáig legfontosabb egzakt megoldását, néhány hónappal az alapegyenletek közzététele után, Karl Schwarzschild 1916-ban adta meg [45]. A Schwarzschild-téridő segítségével mód nyílik a feketelyuk-fizika olyan alapvető fogalmainak, mint a *csapdázott felületek*, vagy az *ese-ményhorizont* egyszerű és szemléletes bevezetésére.

### 18.1. A Schwarzschild-téridő

A Schwarzschild-téridő a vákuumra vonatkozó Einstein-egyenletek gömbszimmetrikus sztatikus megoldása, melynek ívelemét a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (18.1.1)$$

formában írhatjuk fel. A téridő alapsokasága  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ , a  $t$  és  $r$  koordináták a  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq r < \infty$ , míg a  $\theta$  és  $\phi$  koordináták a szokásos gömbi tartományokat futják be. Mivel a metrika nem függ a  $t$  koordinátától,  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  Killing-vektormező  $M$  felett, azaz  $t^a$  eleget tesz a  $\nabla_{(a}t_{b)} = 0$  egyenletnek. Az is belátható, hogy  $t^a$  időszerű a  $2M < r < \infty$  egyenlőtlenség által kijelölt tarto-

mány felett, azaz a Schwarzschild-téridő stacionárius ebben a tartományban. Mivel az is igaz, hogy  $t^a$  hiperfelület-merőleges, azaz a  $t_{[a}\nabla_b t_{c]}$  kifejezés azonosan nulla  $M$  felett, a téridő sztatikus a  $2M < r < \infty$  tartomány felett.

A metrika (18.1.1) alakjából az is azonnal látszik, hogy tetszőleges  $M$  értékre az  $r \rightarrow \infty$  határesetben éppen a sík Minkowski-téridő geometriájához tart, így a Schwarzschild-téridő aszimptotikusan sík. Annak üteme, ahogyan a sík Minkowski-téridő geometriájához tart a Schwarzschild-téridő metrikája, egyedül az  $M$  paraméter értékétől függ, amiről megmutatható, hogy a gömbszimmetria centrumába képzelt forrás tömegével azonosítható [15, 50].

A Schwarzschild-téridő gömbszimmetrikus is, vagyis a téridő metrikája invariáns az  $SO(3)$  forgáscsoport hatásával szemben (lásd a 18.2. alfejezetet). Ez azt jelenti, hogy létezik három olyan  $\{K_{(a)}^a \mid a = 1, 2, 3\}$  térszerű Killing-vektormező  $M$  felett, amelyek kommutátorára a

$$[K_{(a)}, K_{(b)}]^a = \varepsilon_{(a)(b)(c)} K_{(c)}^a \quad (18.1.2)$$

egyenlőség teljesül, ahol a kétszer előforduló  $(c)$  névindexekre is az Einstein-féle összegzési szabályt alkalmazzuk, továbbá  $\varepsilon_{(a)(b)(c)}$  a teljesen aszimmetrikus alternáló tenzort jelöli. A Schwarzschild-téridő gömbszimmetriájához kapcsolódó  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátarendszerben a  $\{K_{(a)}^a\}$  térszerű Killing-vektormezők komponenseit a

$$K_{(1)}^\alpha = (0, 0, \sin \phi, \operatorname{ctg} \theta \cos \phi) \quad (18.1.3)$$

$$K_{(2)}^\alpha = (0, 0, -\cos \phi, \operatorname{ctg} \theta \sin \phi) \quad (18.1.4)$$

$$K_{(3)}^\alpha = (0, 0, 0, -1) \quad (18.1.5)$$

relációkkal adhatjuk meg.

**Kérdés:** Milyen más gömbszimmetrikus, de nemsztatikus vákuum-téridők létezhetnek? Milyen a külső vákuumtéridő például egy gömbszimmetrikusan pulzáló csillag környezetében?

## 18.2. Gömbszimmetrikus téridők

Egy téridőt gömbszimmetrikusnak nevezünk, ha annak

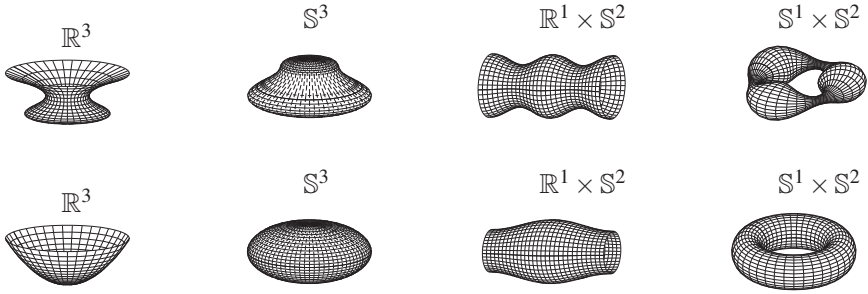
$$I = \{\Phi | \Phi : M \rightarrow M \text{ diffeomorfizmus} \ \& \ \Phi^* g_{ab} = g_{ab}\} \quad (18.2.6)$$

izometriacsoportha tartalmaz egy a háromdimenziós forgáscsoporttal izomorf  $\tilde{I}$  részcsoporthot.

Ha mindig létezne egy  $V$  világvonal úgy, hogy a téridő gömbszimmetrikus  $V$  pontjai körül, természetes lenne a gömbszimmetriát az alábbi egyszerű módon értelmezni. Tekintsük a  $V$  világvonal tetszőleges  $p$  pontját, valamint a világvonalat érintő  $v^a$  vektorra merőlegesen indított,  $d$  ívhosszúságú térszerű geodetikusok végpontjai által kijelölt – és a továbbiakban  $\mathcal{P}_d^p$ -vel jelölt – halmazt. Ekkor, ha a téridőn ható izometriatranszformációk tartalmaznak egy olyan  $SO(3)$ -mal izomorf részcsoporthot, amely a  $V$  világvonal pontjait is invariánsan hagyja, akkor tetszőleges  $p \in V$  és  $d$  választás mellett az  $\mathcal{P}_d^p$  két-dimenziós felületek pontjai geometriailag ekvivalensek, azaz ezeket a felületeket a részcsoporth önmagukra képezi. Ezek az  $\mathcal{P}_d^p$  két-dimenziós felületek az  $\tilde{I}$  részcsoporth pályái és invarianciájuk folytán szükségképpen pozitív állandó görbületű sokaságok.

Van azonban egy kis baj ezzel a meghatározással. Nem minden esetben van olyan  $V$  világvonal, amely kijelöli a gömbszimmetria centrumát. Nincs ilyen például a Schwarzschild-téridőben, de az olyan gömbszimmetrikus globálisan hiperbolikus téridőkben sem, amelyekben a Cauchy-felület topológiája  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^2$  vagy  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  [4] (lásd a 18.1. ábrát is). Ennek ellenére igaz az alábbi állítás.

**18.2.1. Állítás.** *Bármely gömbszimmetrikus téridő alapsokasága lokálisan mindig előáll egy két-dimenziós  $\mathcal{P}$  pálya és egy arra geometriai értelemben merőleges  $\mathcal{M}$  két-dimenziós sokaság  $\mathcal{P} \times \mathcal{M}$  alakban felírt direkt szorzataként. Az  $SO(3)$  forgáscsoport szokásos  $(\theta, \phi)$  paraméterezését, valamint az  $\mathcal{M}$  soka-*



18.1. ábra. Különbféle topológiájú háromdimenziós felületek illusztrációja látható egy dimenzió elhagyásával. A forgáscsoport hatásával szemben invariáns kétdimenziós felületeket a baloldali két ábrán (ezek a topológiailag  $\mathbb{R}^3$  és  $\mathbb{S}^3$  esetek) vízszintes, míg a jobb oldalon látható két ábrán (ezek a topológiailag  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$  és  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  esetek) függőleges körök jelenítik meg.

ságon bevezetett tetszőleges  $(x^1, x^2)$  lokális koordinátákat használva a négydimenziós gömbszimmetrikus téridőmetrika ívelemét a

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B + h^2(x^1, x^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.2.7)$$

alakban írhatjuk fel, ahol az  $A, B$  indexek az  $1, 2$  értékeket vehetik fel, továbbá  $g_{AB}$  egy Lorentz-szignatúrájú kétdimenziós metrika a forgáscsoport pályáinak terén.

**Bizonyítás:** Jelölje  $\mathcal{P}(q)$  az  $\tilde{I} \subset I$ ,  $SO(3)$ -mal izomorf részcsoport  $q \in M$  ponton átmenő pályáját.

Mivel  $SO(3)$  háromparaméteres, ugyanakkor  $\tilde{I}$  pályái kétdimenziósak, tetszőleges  $q \in M$  pont választása esetén létezik olyan  $\tilde{I}_q \subset \tilde{I}$  részcsoport, amelynek elemei a  $q$  pontot fixen hagyják.<sup>1</sup>

A  $q$  pontból a  $\mathcal{P}(q)$  pályára merőleges érintővektorokkal indított geodetikuskok kifeszítenek egy olyan kétdimenziós  $\mathcal{M}(q)$  sokaságot, amely szintén invariáns

<sup>1</sup> Amikor létezik a gömbszimmetria centrumát megjelenítő  $V$  világvonal, akkor  $\tilde{I}_q$  éppen a  $p \in V$  pont körüli olyan forgatásokból áll, amelyek a  $p$  és  $q$  pontokat összekötő geodetikust pontonként invariánsan hagyják.

$\tilde{I}_q$  hatásával szemben. Míg a  $\mathcal{P}(q)$  pálya  $q$  pont körüli pontjai permutálódnak  $\tilde{I}_q$  hatására, a kétdimenziós  $\mathcal{M}(q)$  sokaság pontjai pontonként fixen maradnak, hiszen  $\tilde{I}_q$  invariánsan hagyja a  $\mathcal{P}(q)$  pályára merőleges irányokat.

Tetszőleges másik  $r \in \mathcal{M}(q)$  pontban az  $\tilde{I}_q$  részcsoport egymásközt permutálja az  $\mathcal{M}(q)$ -ra merőleges irányokat, ugyanakkor a korábbi észrevételeinknek megfelelően az  $\mathcal{M}(q)$  felületet invariánsan hagyja.

Éppen ezért  $\tilde{I}_q$  az  $r \in \mathcal{M}(q)$  pontra illeszkedő  $\mathcal{P}(r)$  pályán fejti ki hatását, amiből az is következik, hogy a  $\mathcal{P}(r)$  pálya is merőleges  $\mathcal{M}(q)$ -ra.

Az imént használt konstrukcióra alapozva a merőleges felületek segítségével definiálhatunk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a különböző  $SO(3)$ -invariáns pályák között. Ez úgy történik, hogy az  $x \in \mathcal{P}(q)$  ponthoz azt az  $y = f_{q,r}(x) \in \mathcal{P}(r)$  pontot rendeljük hozzá, amelyet az  $\mathcal{M}(x)$  merőleges felület metsz ki a  $\mathcal{P}(r)$  pályából.

Mivel ez az  $f_{q,r} : \mathcal{P}(q) \rightarrow \mathcal{P}(r)$  hozzárendelés invariáns az  $\tilde{I}_x$  részcsoport hatásával szemben, az  $x \in \mathcal{P}(q)$  pontbeli, a  $\mathcal{P}(q)$  pályát érintő egyenlő normájú vektorok – ezeket permutálja a  $\tilde{I}_x$  részcsoport –  $f_{q,r}^*$  által meghatározott  $f_{q,r}(q)$  pontbeli megfelelői is egyenlő normájúak az  $y \in \mathcal{P}(r)$  pont érintőterében. Emiatt a négydimenziós metrika által a kétdimenziós  $\mathcal{P}(q)$  és  $\mathcal{P}(r)$  pályákon indukált metrikák az  $x \in \mathcal{P}(q)$  és  $y \in \mathcal{P}(r)$  pontokban konformisan ekvivalensek

$$g_{ab}|_{x, \mathcal{P}(q)} \sim g_{ab}|_{y, \mathcal{P}(r)} . \quad (18.2.8)$$

Figyelembe véve, hogy a  $\mathcal{P}(q)$  és  $\mathcal{P}(r)$  pályákon meghatározott metrika szükségképpen invariáns az  $SO(3)$ -mal izomorf  $\tilde{I}$  részcsoport hatásával szemben, az iménti relációban implicit módon alkalmazott arányossági tényező nem függhet a pontok pályákon elfoglalt helyétől, csak maguktól a pályáktól. Így a két pályán indukált metrika egymással konformisan egyenértékű, azaz

$$g_{ab}|_{\mathcal{P}(q)} = \Omega^2(q, r) g_{ab}|_{\mathcal{P}(r)} \quad (18.2.9)$$

valamely alkalmas, sehol sem zérus  $\Omega(q, r)$  függvény esetén.

Vezessük be az  $SO(3)$  forgáscsoport szokásos  $(\theta, \phi)$  paraméterezését valamely tetszőlegesen választott  $\mathcal{P}(q)$  pályán. A  $(\theta, \phi)$  koordináták a  $f_{q,r}$  típusú leképezések segítségével az összes többi, a  $\mathcal{P}(q)$ -t tartalmazó összefüggő tartományban fekvő pályára átvihetők és így a pályákon indukált metrikát a

$$d\sigma^2|_{\mathcal{P}} = \Omega^2(\mathcal{P}) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (18.2.10)$$

alakban írhatjuk fel. Érdemes megjegyezni, hogy a zárójelben található ív-lem éppen a  $\mathcal{K} = 1$  állandó Gauss-gömbületű tér metrikáját határozza meg, míg a mellette álló  $\Omega^2(\mathcal{P})$  faktor a pozitív görbület pályáról-pályára történő változását hivatott biztosítani.

Ezek után bevezetve tetszőleges  $(x^1, x^2)$  koordinátákat például az  $\mathcal{M}(q)$  merőleges felületen a  $q$  pont környezetében, majd az  $x^1, x^2$  függvényeket az  $\mathcal{M}(q)$  felületre merőleges  $\mathcal{P}$  pályák mentén fixen tartva a  $q$  pont négydimenziós környezetére elterjesztve olyan  $(x^1, x^2, \theta, \phi)$  lokális koordinátákhoz juthatunk, amelyekben a pályák az  $x^1, x^2 = \text{állandó}$  szintfelületekkel esnek egybe, míg a négydimenziós téridőmetrika íveleme a

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B + \Omega^2(x^1, x^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (18.2.11)$$

alakban írható fel [36], ahol az  $A, B$  indexek az  $1, 2$  értékeket vehetik fel, továbbá  $g_{AB}$  egy Lorentz-szignatúrájú kétdimenziós metrika a forgáscsoport pályáinak terén, melyet például az  $\mathcal{M}(q)$  merőleges felület pontjaival jeleníthetünk meg.  $\square$

**18.2.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy tetszőleges kétdimenziós metrika konformisan sík alakra hozható, azaz az  $(x^1, x^2)$  koordináták helyett mindig bevezethetünk olyan  $(t, r)$  koordinátákat, amelyekben –attól függően, hogy a metrika Riemann- vagy Lorentz-féle – a  $g_{AB} = \omega^2 \cdot \delta_{AB}$  vagy pedig a  $g_{AB} = \omega^2 \cdot \eta_{AB}$  reláció teljesül, ahol  $\omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  egy sehol el nem tűnő függvény.*

*<Segítség: 1) Legyen  $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amely a  $\nabla_A \nabla^A t = 0$  egyenlet*

megoldása. 2) Mutassuk meg, hogy az  $\varepsilon_{AB}\nabla^A t$  egyforma zárt, azaz  $\nabla_{[C}\varepsilon_{A]B}\nabla^A t = 0$ . 3) Ekkor a Poincaré-lemma folytán léteznie kell olyan  $r : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek, amelyre  $\nabla_B r = \varepsilon_{AB}\nabla^A t$ . 4) Mutassuk meg, hogy ekkor  $g^{tr} = \nabla^A t \nabla_A r = 0$ , továbbá  $g^{tt} = (-1)^s g^{rr}$ , ahol  $s$  a  $g_{AB}$  metrika szignatúráját jelöli. >

Az imént megfogalmazott feladat megoldásaként előálló  $(t, r)$  koordináták létezését felhasználva a legáltalánosabb négydimenziós gömbszimmetrikus téridőmetrika ívelemét a

$$ds^2 = \omega^2 \cdot (-dt^2 + dr^2) + \Omega^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.2.12)$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $\omega$  és  $\Omega$  csak a  $(t, r)$  koordinátáktól függenek.

Amikor az  $SO(3)$ -mal izomorf  $\tilde{I}$  részcsoport pályáihoz tartozó  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$  felszínnek gradiense nem zérus, akkor választhatjuk a felszínhez kapcsolódó  $\tilde{r}$  sugárt is radiális koordinátaként. Ekkor az  $\tilde{r}$  sugarú pálya  $\mathcal{A}(\mathcal{P})$  felszínére az  $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = 4\pi\tilde{r}^2$  reláció teljesül. Természetesen az így nyert  $(t, \tilde{r})$  koordinátákban a  $g_{AB}$  metrika már nem lesz konformisan sík, és általában még diagonális jellegét is elveszti. Ebben az esetben azonban mindig bevezethető olyan  $\tilde{t} = \tilde{t}(t, r)$  koordináta  $t$  helyett, amelyre a  $(\tilde{t}, \tilde{r})$  koordinátákban a  $g_{AB}$  diagonális, azaz a felszínnel kompatibilis  $\tilde{r}$  radiális koordináta használata mellett a legáltalánosabb négydimenziós gömbszimmetrikus téridőmetrika ívelemét a

$$ds^2 = -f \cdot d\tilde{t}^2 + h \cdot d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.2.13)$$

alakban is felírhatjuk, ahol  $f$  és  $h$  csak a  $(\tilde{t}, \tilde{r})$  koordinátáktól függ. Érdemes kiemelni, hogy továbbra is két általános, a merőleges téren élő függvény határozza meg a legáltalánosabb négydimenziós gömbszimmetrikus téridő metrikáját.

### 18.2.1. A Birkhoff-tétel

Ha a metrika legutóbb felírt alakját behelyettesítjük a vákuum Einstein-egyenletekbe, akkor – amint azt Birkhoff 1923-ban bizonyította [1] – az  $f$  és  $h$  függ-

vények csak az  $\tilde{r}$  koordinátáktól függenek. Továbbá, mivel a (18.2.13) metrika diagonális, minden gömbszimmetrikus vákuumtéridő egyben sztatikus is, az  $f$  és  $h$  függvényeket

$$f = 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} \quad h = \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{-1} \quad (18.2.14)$$

alakban írhatjuk fel.

**18.2.1. Tétel (Birkhoff-tétel).** *A vákuum Einstein-egyenletek bármely gömbszimmetrikus, legalább kétszer folytonosan deriválható, azaz  $C^2$  osztályú megoldása lokálisan izometrikus a Schwarzschild-téridő valamely résztartományával.*

Birkhoff-tétele értelmében teljesen mindegy, hogy a forrás milyen, a gömbszimmetriával összeegyeztethető mozgást végez, azaz pulzál-e vagy sem. Ekkor a külső vákuum-megoldás a Schwarzschild-téridő valamely résztartományával esik egybe, tehát sztatikus is.

### 18.3. Próbatestek mozgása a Schwarzschild-téridőben

Korábbi észrevételeinknek megfelelően a tömeges próbatestek, illetve – geometriai-optikai közelítésben – a fény történetét bármely téridőben időszerű, illetve fényszerű geodetikus görbékkel jelenítjük meg. Emlékezzünk arra, hogy egy geodetikus  $\tau$  affinparaméterezéshez tartozó  $T^a$  érintővektora eleget tesz a  $T^e \nabla_e T^a = 0$  egyenletnek, melyet tetszőleges  $x^\alpha$  lokális koordinátákban, a (8.0.10) relációnak megfelelően, a

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (18.3.15)$$

alakban írhatunk fel.



Speciálisan a Schwarzschild-téridőben, ahol  $x^\alpha$  koordinátákként alkalmazhatjuk a  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátákat, a  $T^a$  érintővektor komponenseire  $T^\alpha = dx^\alpha/d\tau \mapsto (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  teljesül. Ebben az alfejezetben a „ $\cdot$ ” a  $\tau$ -affin paraméter szerinti  $d/d\tau$  deriválást jelöli.

A Newtoni-mechanikából ismert, hogy minden centrális erőterben történő mozgás síkmozgás, azaz a centrumon átfektetett síkban történik. Lényegesen leegyszerűsíti az analízist az a tény, hogy ez a tulajdonság érvényben marad az általános relativisztikus mozgásokra is. Ennek belátása érdekében először tegyük fel, hogy valamely  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  pályához tartozó  $x^\alpha|_{\tau=0}$  és  $dx^\alpha/d\tau|_{\tau=0}$  kezdőadatokra a  $\theta|_{\tau=0} = \pi/2$  és  $\dot{\theta}|_{\tau=0} = 0$  relációk teljesülnek. Egy ilyen geodetikus görbére a  $\theta \equiv \pi/2$  relációnak is teljesülnie kell, hiszen mind a Schwarzschild-téridő metrikája, mind pedig a geodetikus görbe kezdőadatai rendelkeznek  $\theta \mapsto \pi - \theta$  transzformációval szembeni invarianciával, így a  $\theta \equiv \pi/2$  relációtól történő bármely eltérés összeegyeztethetetlen lenne ezzel az invarianciával. Ha ehhez hozzávesszük, hogy egy gömbszimmetrikus téridőben tetszőleges  $x^\alpha|_{\tau=0}$  és  $dx^\alpha/d\tau|_{\tau=0}$  kezdőadatok megfelelő forgatásokkal az imént alkalmazott alakúvá transzformálhatók, a Schwarzschild-téridőben minden kauzális geodetikus görbe vetületének a háromdimenziós  $(r, \theta, \phi)$  koordinátatér képzeletbeli origóján átfektetett síkban kell elhelyezkednie. Ezért az általánosság elvesztése nélkül elegendő az egyenlítői síkban mozgó geodetikusok vizsgálatára szorítkoznunk.

Mielőtt továbbmennénk idézzük fel azt is, hogy a párhuzamosan elterjesztett vektorok belsőszorzata nem változik a párhuzamos eltolás során. Így speciálisan az  $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$  geodetikusokat érintő  $T^a$  érintővektor is eleget tesz a  $T^e \nabla_e (T^a T_a) = 2T_a (T^e \nabla_e T^a) = 0$  egyenletnek, így az időszerű, illetve fény-szerű geodetikus görbéink mentén a

$$\kappa = g_{ab} T^a T^b = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (18.3.16)$$

egyenlet teljesül, ahol  $\kappa = 1$ , illetve  $\kappa = 0$  annak megfelelően, hogy a vizsgált

geodetikus görbe időszerű, illetve fényyszerű, továbbá kihasználtuk a  $\theta \equiv \pi/2$  feltételünket is.

Mindezekon felül, mivel  $T^a$  egy geodetikus érintővektora, továbbá  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  és  $\phi^a = (\partial/\partial \phi)^a$  Killing-vektormezők, a 10.4.1. Lemma alapján a  $g_{ab}t^aT^b$  és  $g_{ab}\phi^aT^b$  belsőszorzatok is állandó értékkel bírnak a  $T^a$  vektormező integrálgörbéiként előálló geodetikusok mentén. Ennek megfelelően az

$$e = -g_{ab}t^aT^b = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} \quad (18.3.17)$$

és

$$\ell = g_{ab}\phi^aT^b = r^2\dot{\phi} \quad (18.3.18)$$

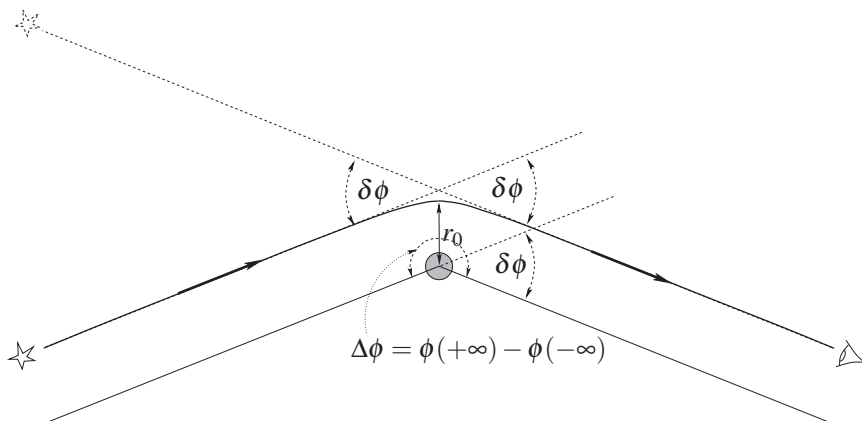
menyiségek nem változnak az említett geodetikus görbék mentén.

### 18.3.1. Fényelhajlás

Az általános relativitáselmélet első kísérleti ellenőrzéseként 1919-ben egy teljes napfogyatkozás alkalmával a fényelhajlás mértékének megfigyelésen alapuló meghatározását tűzte ki célul Eddington és Dyson. Párhuzamosan az afrikai Principe szigeten és Brazíliában, Sobralban végeztek megfigyeléseket, melyek ugyan meglehetősen pontatlanok voltak, mégis megerősítették a relativitáselmélet azon jóslatát, hogy a téridő geometriája nem sík, de még csak nem is konformisan sík.

Az eddigi legpontosabb méréseket 2005. októberében végezték el. Kontinensenél is nagyobb méretű VLBA (Very Long Baseline Array) rádióantenna-rendszerrel négy távoli kvazár pozícióját mérték, amikor az érkező rádióhullámok a Nap közelében haladtak el. A rádióhullámok elhajlása miatt a kvazárok helyzete kissé különbözött attól a pozíciótól, amit akkor mértek, mikor a Nap az adott égbolterülettől messze tartózkodott és így közvetve nagyon nagy pontossággal igazolták az általános relativitáselmélet fényelhajlásra vonatkozó jóslatának helyességét [7].

A fényelhajlás a 18.2. ábra illusztrációjának megfelelően akkor lép fel, amikor egy távoli fényforrás által kibocsátott fényjel egy lokalizált gravitációs forrás közelében elhaladva a hozzá geometriai-optikai közelítésben tartozó geodetikust követve, egy a forrástól szintén távol elhelyezkedő megfigyelőhöz látszólag  $\delta\phi$  szöggel eltérülve jut el. Tekintsük most egy olyan, a centrumból



18.2. ábra. Egy távoli fényforrás által kibocsátott fényjel egy lokalizált gravitációs forrás közelében elhaladva a hozzá geometriai-optikai közelítésben tartozó geodetikust követve, egy a forrástól szintén távol elhelyezkedő megfigyelő látszólag  $\delta\phi$  szöggel eltérülve jut el.

indított szakasz másik végpontjának mozgását, amely a forrástól induló fény-szerű geodetikus valamely  $t = \text{állandó}$  hiperfelületre vett vetületén fut végig. Ez a szakasz a  $\Delta\phi = \phi(+\infty) - \phi(-\infty)$  szögtartományt söpri ki. Az ábrán feltüntetett szögek segítségével az is leolvasható, hogy a  $\delta\phi$  szögtérítés, valamint a  $\Delta\phi$  szögtartomány között a  $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$  reláció teljesül.

A  $\Delta\phi$  szög meghatározása előtt érdemes megvizsgálnunk a  $d\phi/dr$  differenciálhányadost, melyet az összetett függvények deriválási szabályát, valamint a

(18.3.16) és (18.3.18) egyenleteket felhasználva a

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dr}{d\tau}} = \frac{\frac{\ell}{r^2}}{\sqrt{e^2 - \frac{\ell^2}{r^3}(r - 2M)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^2}{\ell^2} r^4 - r(r - 2M)}} \quad (18.3.19)$$

alakban írhatunk fel. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2 \int_{-\infty}^{r_0} \frac{d\phi}{dr} dr = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 - \frac{2M}{r_0}(1 - u^3)}} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0} \left( \frac{1 - u^3}{1 - u^2} \right)}}, \end{aligned} \quad (18.3.20)$$

ahol a második egyenlőség felírásához az  $r$  változó helyett az  $u = r_0/r$  változót vezettük be, továbbá felhasználtuk az  $r = r_0$  helyen érvényes

$$e^2 = \frac{\ell^2}{r_0^2} \left( 1 - \frac{2M}{r_0} \right) \quad (18.3.21)$$

relációt is, mely kapcsolatot teremt az  $e$  és  $\ell$  állandók értéke között.

A Napunkra vonatkozó  $M_\odot \approx 1477_{[m]}$  és  $R_\odot \approx 7 \cdot 10^8_{[m]}$  közelítő adatokat felhasználva azt kapjuk, hogy  $M/r_0 = M_\odot/R_\odot \sim 2 \cdot 10^{-6}$  és így az integrandus második tényezőjére alkalmazható a

$$(1 + d)^n \approx 1 + n \cdot d \quad (18.3.22)$$

közelítés, amelynek feltétele az, hogy a  $|d| \ll 1$  és  $|nd| \ll 1$  relációk teljesüljenek.

Így

$$\begin{aligned}\Delta\phi &\approx 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left[ 1 + \frac{M}{r_0} \left( \frac{1-u^3}{1-u^2} \right) \right] du \\ &= 2 \left[ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du + \frac{M}{r_0} \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{1-u^2}^3} - \frac{u^3}{\sqrt{1-u^2}^3} \right) du \right] = \pi + \frac{4M}{r_0},\end{aligned}\quad (18.3.23)$$

amiből a  $\delta\phi$  szögeltérésre a

$$\delta\phi \approx \frac{4M}{r_0} \quad (18.3.24)$$

közelítő értéket kapjuk.

### 18.3.2. Gravitációs vöröseltolódás

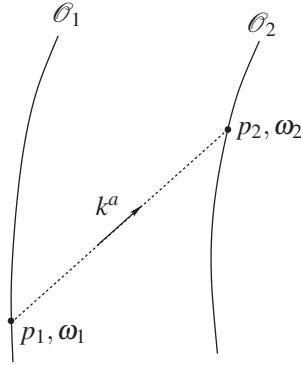
Ahogy azt korábban is láttuk, geometriai-optikai közelítésben (lásd a 17.1.3. alfejezetet) egy elektromágneses hullám valamely  $u^a$  egységnyi normájú négyes-sebességvektorral mozgó megfigyelőre vonatkozó  $\omega_u$  frekvenciájának, a hullám fázisnak az  $u^a$  irányba eső változási gyorsaságát neveztük:

$$\omega_u = -u^e \nabla_e S = -u^e k_e. \quad (18.3.25)$$

Érdekes annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy a Schwarzschild-téridőben egy sztatikus megfigyelő  $\mathcal{O}_1$  világvonalának valamely  $p_1$  eseményéből  $\omega_1$  frekvenciával indított fényjelet egy másik  $\mathcal{O}_2$  sztatikus megfigyelő az ő világvonalán, a 18.3. ábrának megfelelően elhelyezkedő  $p_2$  eseményben mekkora  $\omega_2$  frekvenciájúnak érzékel.

Fentebbi észrevételeinknek, valamint a sztatikus megfigyelők világvonalai mentén érvényes  $u^a = (-t^e t_e)^{-\frac{1}{2}} t^a$  reláció figyelembevételével az

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(-u^e k_e)_2}{(-u^e k_e)_1} = \frac{\left[ (-t^e t_e)^{-\frac{1}{2}} (t^e k_e) \right]_2}{\left[ (-t^e t_e)^{-\frac{1}{2}} (t^e k_e) \right]_1} = \frac{\left( 1 - \frac{2M}{r_2} \right)^{-\frac{1}{2}}}{\left( 1 - \frac{2M}{r_1} \right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (18.3.26)$$



18.3. ábra. A gravitációs vöröseltolódás megfigyelésének illusztrációja. Az  $\mathcal{O}_1$  világvonalon mentén található  $p_1$  eseményt az  $\mathcal{O}_2$  világvonalon mentén elhelyezkedő  $p_2$  eseménnyel a  $k^a$  érintővektorú jövőirányú radiális geodetikus görbe köti össze.

egyenlőséghez jutunk, ahol az utolsó előtti lépésben azt használtuk ki, hogy a kérdéses fényjel egy  $k^a$  érintővektorú jövőirányú radiális geodetikus görbe mentén mozog, és a 10.4.1 Lemma értelmében valamely  $t^a$  Killing-vektor és egy affinparaméterezett fényszerű geodetikus görbe  $k^a$  érintővektorának belső szorzata állandó a geodetikus mentén, és így  $(t^a k_a)_1 = (t^a k_a)_2$ , továbbá az utolsó lépésben a Schwarzschild-téridőben érvényes

$$-t^e t_e = -g_{ef} t^e t^f = 1 - \frac{2M}{r} \quad (18.3.27)$$

relációt használtuk fel.

Így amikor a feltételeinknek megfelelően  $r_2 > r_1$ , azt kapjuk, hogy  $\omega_1 > \omega_2$ , azaz a távolabb elhelyezkedő megfigyelő által érzékelt frekvencia kisebb mint a gravitációs forráshoz közelebbi helyen a kibocsátási frekvencia. Érdemes kiemelni, hogy az  $\omega_1/\omega_2$  arány az  $r_1 \rightarrow 2M$  határesetben  $\infty$ -hez tart, azaz tetőzőlegesen nagy értéket vehet fel.

## 18.4. A SCHWARZSCHILD-TÉRIDŐ ANALITIKUS KITERJESZTÉSE 301

A fent ismertetett megfontolásoknak megfelelően a gravitációs vöröseltolódásra a

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{-\frac{1}{2}}} - 1 \quad (18.3.28)$$

összefüggés adódik, melyet az elmélet megalkotása óta többször, különféle módszerekkel ellenőriztek. Ezek mindig az általános relativitáselmélet jóslataival megegyező eredményre vezettek, de a vöröseltolódás első, minden kétséget kizáró, meggyőző pontosságú ellenőrzésének, mégis az 1959-ben Pound és Rebka által végzett mérést tekintik. Ők a Harvard Egyetem Jefferson tornyának tetején és alján elhelyezett gamma-források relatív vöröseltolódását mérték a különösen pontos Mössbauer-effektus felhasználásával [32, 33].

### 18.4. A Schwarzschild-téridő analitikus kiterjesztése

Ahogy azt korábban már említettük, a  $(t, r, \theta, \phi)$  lokális koordinátákra vonatkozó (18.1.1) ívelem alakjából következik, hogy a Schwarzschild-metrika szinguláris az  $r = 0$ , valamint az  $r = 2M$  helyen.

Megmutatható, hogy a görbületi tenzorból képzett  $R_{abcd}R^{abcd}$  Kretschmann skalár  $M/r^6$  rendben divergál az  $r = 0$  szingularitáshoz közelítve, míg az  $r \rightarrow 2M$  határatmenetben nincs olyan skalárinvariáns, azaz  $(0,0)$ -típusú tenzoriális kifejezés, amely bármilyen értelemben irregulárisan viselkedne. Fontos hangsúlyozni, hogy tenzoriális, azaz  $(0,0)$ -típusúaktól eltérő kifejezéseket nem használhatunk ilyen jellegű vizsgálatokban, mivel minden ponthoz található olyan koordinátakörnyezet – ennek határán fekszik maga a kérdéses pont – és olyan koordináták ebben a koordinátakörnyezetben, amelyre vonatkozóan az adott tenzor komponensei végtelenné válnak a kiválasztott pontban.

Az  $r = 0$  helyen lévő szingularitás valódi görbületi szingularitás, míg az  $r = 2M$  helyhez kapcsolódó szingularitásról kiderült, hogy az csak *koordinátaszingularitás*, azaz megfelelő új koordináták bevezetésével kiküszöbölhető [22, 46].

A koordinátaszingularitások kiküszöbölése feltételezi olyan új koordináták létezését, amelyek az eredeti koordinátafoltnál nagyobb tartományon regulárisan viselkednek, azaz a metrikus tenzorok eredeti koordinátákra vonatkozó komponenseinek formálisan szinguláris viselkedése nem jelenik meg az új koordináták használata során.

**18.4.1. Definíció.** A  $g_{ab}$  metrika  $(\mathcal{O}, \psi)$  térképhez tartozó  $g_{\alpha\beta}$  komponensekben megjelenő szinguláris viselkedést koordinátaszingularitásnak nevezzük, ha létezik olyan  $(\mathcal{O}^*, \psi^*)$  térkép, amelyre

- (1)  $\mathcal{O}$  lezártja része  $\mathcal{O}^*$ -nak, azaz  $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}^*$ , továbbá
- (2) a  $g_{ab}$  metrika nem szinguláris az  $\mathcal{O}^*$  felett értelmezett új koordinátákban.

Jelöljük a Schwarzschild-téridő  $r > 2M$  egyenlőtlenség által meghatározott téridőtartományát  $M_I$ -gyel. Az új koordináták meghatározásához használhatjuk az ebben a tartományban kifelé, illetve befelé futó radiális fényszerű geodetikusokat. Az ezeket érintő  $T^a$  vektormező eleget tesz a  $T^e \nabla_e (T^a T_a) = 2T_a (T^e \nabla_e T^a) = 0$  egyenletnek, és így a fényszerű geodetikus görbéink mentén

$$0 = g_{ab} T^a T^b = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (18.4.29)$$

teljesül.

**18.4.1. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a  $T^e \nabla_e (T^a T_a) = 2T_a (T^e \nabla_e T^a) = 0$  egyenletből még nem következik, hogy a vizsgált kifelé, illetve befelé futó radiális fényszerű geodetikusok affinparaméterezettek lennének, azaz általában csak a  $T^e \nabla_e T^a = \phi T^a$  reláció teljesül, valamely alkalmasan választott  $\phi$  függvényre.

(18.4.29) alapján a radiális fényszerű geodetikusok egyenlete

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}, \quad (18.4.30)$$



#### 18.4. A SCHWARZSCHILD-TÉRIDŐ ANALITIKUS KITERJESZTÉSE 303

amely a

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (18.4.31)$$

relációval bevezetett Wheeler-féle  $r_*$  teknőckoordinátát felhasználva a

$$\left(\frac{dt}{dr_*}\right)^2 = 1 \quad (18.4.32)$$

alakban írható fel. Így a kifelé, illetve befelé futó radiális fényszerű geodetikusok a

$$t = \pm r_* + \text{konstans} \quad (18.4.33)$$

egyenlettel adhatók meg, ahol (18.4.31) alapján

$$r_* = \int \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (18.4.34)$$

Vezessük be a  $(t, r)$  koordináták helyett az  $(u, v)$  fényszerű koordinátákat, amelyeket az

$$u = t - r_* \quad (18.4.35)$$

$$v = t + r_* \quad (18.4.36)$$

relációkkal értelmezzük. Ezekben a koordinátákban a Schwarzschild-metrikának az  $SO(3)$  csoport tranzitivitási felületeire merőleges része a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv \quad (18.4.37)$$

alakban írható fel, ahol (18.4.34) alapján  $r$ , mint az  $(u, v)$  fényszerű koordináták függvénye az

$$r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1\right) = r_* = \frac{v - u}{2} \quad (18.4.38)$$

implicit kifejezés segítségével adható meg.

**18.4.2. Feladat.** *A (18.4.38) egyenletet felhasználva mutassuk meg, hogy*

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = -e^{\frac{v-u}{4H}} e^{-\frac{r}{2H}} \quad (18.4.39)$$

*teljesül.*

Ezek után a (18.4.37) ívelem

$$ds^2 = -\frac{2Me^{-\frac{r}{2H}}}{r} e^{\frac{v-u}{4H}} du dv \quad (18.4.40)$$

alakban is felírható.

Még nem vagyunk készen, hiszen (18.4.34) alapján az  $M_I$  téridőtartomány határán lévő  $r = 2M$  koordinátájú pontok éppen az  $u = \infty$  vagy  $v = -\infty$  értékeknek felelnek meg, azaz ezek az új koordináták sem értelmezhetők az eredeti  $M_I$  téridőtartománynál nagyobb sokaságon.

**18.4.3. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a kifelé, illetve befelé futó radiális fény-szerű geodetikuskok mentén az  $u$  és  $v$  koordináták nem affín paraméterek, ugyanakkor az*

$$U = -e^{-\frac{u}{4H}} \quad (18.4.41)$$

*és a*

$$V = e^{\frac{v}{4H}} \quad (18.4.42)$$

*függvények által meghatározott kifejezések már azok.*

Ennek megfelelően célszerű az ily módon definiált  $U$  és  $V$  függvények által meghatározott  $(U, V)$  fényszerű koordinátákat használni az eredeti  $(t, r)$  koordináták helyett, melyekben a (18.4.40) ívelem a

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2H}}}{r} dU dV \quad (18.4.43)$$

alakot ölti. Az új koordinátákban az  $u = \infty$  és  $v = -\infty$  értékeknek megfelelő  $U = 0$  és  $V = 0$  hiperfelületek jelenítik meg az  $r = 2M$  határt.

## 18.4. A SCHWARZSCHILD-TÉRIDŐ ANALITIKUS KITERJESZTÉSE 305

Látható, hogy a metrika teljesen reguláris nemcsak az  $M_I$  téridőtartománynak megfelelő  $U < 0$  és  $V > 0$  koordinátatartományban, de az  $U$  és  $V$  fényszerű koordináták olyan értékeire, melyek összeegyeztethetők az  $r > 0$  feltétellel.

Bevezetve végül az  $(U, V)$  fényszerű koordináták helyett azokat a  $(T, X)$  koordinátákat, melyeket a

$$T = \frac{U + V}{2} \quad (18.4.44)$$

$$X = \frac{V - U}{2} \quad (18.4.45)$$

relációkkal értelmezünk, a teljes négydimenziós Schwarzschild-metrikát a

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (18.4.46)$$

formában írhatjuk fel, ahol a  $(t, r)$  koordináták, valamint a  $(T, X)$  Kruskal-Szekeres-típusú koordináták között az

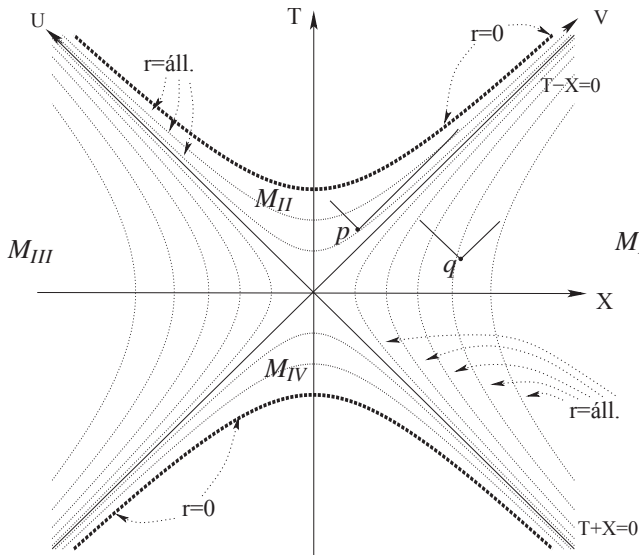
$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} = X^2 - T^2 \quad (18.4.47)$$

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{T}{X} \quad (18.4.48)$$

implicit relációk létesítenek kapcsolatot.

A (18.4.46) metrika természetesen már nem szinguláris az  $r = 2M$  helyen. A (18.4.48) relációt felhasználva könnyen látható, hogy a kétdimenziós  $T - X$  szekcióban a lehető legnagyobb koordinátatartomány, ahol a (18.4.46) ívelem értelmezett, az  $r = 0$  értéknek megfelelő  $T^2 - X^2 = 1$  hiperbolaágak között elhelyezkedő, az  $M_I$ -nél lényegesen kiterjedtebb tartomány. Ezeket a 18.4. ábrán a vastagon jelzett szaggatott vonalak jelenítik meg.

A (18.4.47) relációt felhasználva az is azonnal látszik, hogy az  $r = \text{állandó}$  hiperfelületek hiperboloidok, melyek a 18.4. ábrán hiperbolákkal vannak ábrázolva.



18.4. ábra. Az ábra a Schwarzschild-téridőnek a Kruskal-Szekeres-féle koordináták segítségével megadható maximális analitikus kiterjesztésének megjelenítésére szolgál. A konformisan sík  $T - X$  szekció pontjai egy-egy kétdimenziós  $r$  sugarú gömböt helyettesítenek. A pontozott vonalak az azonos  $r$  értékkel rendelkező „pontokat” kötik össze. Míg  $r$  értéke a  $p$  pontból mind a befelé, mind pedig a kifelé futó, jövőirányú, fényszerű geodetikusok mentén csökken, addig – a Minkowski-téridőben megszokott módon – a  $q$  pontból befelé induló, jövőirányú, fényszerű geodetikusok mentén csökken, míg a kifelé futók mentén növekszik.

Hasonlóan (18.4.48) alapján  $t = 4M \cdot \operatorname{arctanh} \left( \frac{T}{X} \right)$  azaz a  $t = \text{állandó}$  hiperfelületek a  $\frac{T}{X} = \text{állandó}$  hiperfelületeknek felelnek meg. Speciálisan a  $\frac{T}{X} = \pm 1$  hiperfelületek a  $t = \pm \infty$  hiperfelületeknek felelnek meg és így a  $(T, X, \theta, \phi)$  koordináták valóban kiküszöbölik a  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátákban az  $r = 2M$  helyen fellépő koordinátaszingularitást.

A 18.4. ábrán az is jól látható, hogy a kiindulási  $M_I$  téridőtartomány pontosan a jobb oldali „negyednek” felel meg, amelyet két, az origón áthaladó és az  $X$  tengellyel  $\pm 45$  fokos szöget bezáró egyenes határol. Vegyük észre, hogy a

## 18.4. A SCHWARZSCHILD-TÉRIDŐ ANALITIKUS KITERJESZTÉSE<sup>307</sup>

(18.4.48) ívelem a  $T - X$  szekcióban konformisan sík, tehát az ehhez a szekcióhoz tartozó radiális fényszerű geodetikusokat éppen a vízszintes  $X$  tengellyel  $\pm 45$  fokos szöget bezáró egyenesek ábrázolják. Ebből egyrészt az látszik, hogy a négy különálló negyedek elválasztó,  $T = \pm X$  egyenletek által meghatározott felületek fényszerű hiperfelületek, másrészt az, hogy  $M_{II}$ -es tartományban felvett ki-, illetve befutó radiális fényszerű geodetikusok mindegyike szükségképpen az  $r = 0$  helyen lévő szingularitáson végződik. Így – a relativitáselmélet alapfeltevéseivel összhangban – nem létezik olyan kauzális görbe, amely egy itteni pontból indulva átjuthatna az  $M_I$  tartományba.

Vegyük észre azt is, hogy az ábra a Schwarzschild-téridő olyan ábrázolását adja, ahol a  $T - X$  sík minden egyes pontja egy olyan kétdimenziós – a (18.4.48) összefüggésnek megfelelő –  $r$  sugarú gömböt helyettesít, melynek felszíne  $\mathcal{A} = 4\pi r^2$ . Az ábráról az is könnyen leolvasható, hogy az  $r$  koordináta értéke, azaz a megfelelő gömbök felszíne csökken az  $M_{II}$  tartomány bármely pontjából jövőirányban indított, radiális, fényszerű geodetikus mentén attól függetlenül, hogy azok „kifelé” vagy „befelé” irányítottak. Penrose nyomán [27] az olyan kompakt irányítható kétdimenziós határ nélküli felületeket, amelyeket még a róluk jövőirányba kifelé induló, fényszerű geodetikusok mentén<sup>2</sup> elmozgatva is mindig egyre kisebb felszínű felületekhez jutunk, *csapdázott felületeknek* nevezzük. Azokat a kompakt határ nélküli kétdimenziós felületeket, amelyek esetében a felszín éppen csak nem csökken a jövőirányba kifelé induló, fényszerű geodetikusok mentén, *marginálisan csapdázott felületeknek* nevezzük.

A Schwarzschild-téridő esetén a marginálisan csapdázott felületek pontosan azok, amelyek kijelölik az  $M_{II}$  tartomány határát, azaz azon jövőhalmaz határát, amelynek belsejében lévő pontok mindegyike valamely jövő értelemben csapdázott felülethez tartozik. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $M_{II}$ -ben a csapdázott felületek az  $r < 2M$  és  $T > 0$  összefüggések által meghatározott tarto-

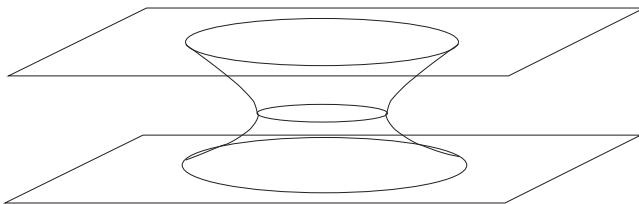
---

<sup>2</sup>A kérdéses fényszerű vektormező által meghatározott, egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport felhasználásával.

mányban helyezkednek el, míg az  $r = 2M$  és  $T > 0$  relációkkal adott fényszerű hiperfelületek pontjai reprezentálják a marginálisan csapdázott felületeket.

Érdemes megjegyezni, hogy bármely sztatikus, azaz az  $r, \theta, \phi = \text{állandó}$ ,  $r \geq 2M$  pályán mozgó megfigyelő által belátható téridőtartomány éppen az  $M_I \cup M_{IV}$  résztéridővel esik egybe. Mindezek alapján az  $M_{II}$  által megjelenített részt a Schwarzschild-téridő *feketelyuk-tartományának* tekintjük. A négy különálló negyedre elválasztó, a  $T = \pm X$  egyenletek által meghatározott hiperfelületekre – melyek egy kettéhasadó Killing-horizontot képeznek – mint a Schwarzschild-téridő *eseményhorizontjára*, míg ennek a  $T, X > 0$  relációk által kijelölt negyedére mint a Schwarzschild-téridő *jövő eseményhorizontjára* szoktunk hivatkozni.

Érdemes még megemlíteni, hogy a  $\frac{T}{X} = \text{állandó}$  hiperfelületek a 18.5. ábrán jelzett  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$  szorzatstruktúrával rendelkeznek. A szakirodalomban ezekre a hiperfelületekre mint férgelyukkakra hivatkoznak. Mivel ezek a hiperfelületek térszerűek, nincs olyan megfigyelő, aki ezen a férgelyukon keresztül átjuthatna az 18.4. ábrán jelzett  $M_I$  aszimptotikusan sík tartományból az  $M_{III}$  aszimptotikusan sík tartományba vagy fordítva.



18.5. ábra. A Schwarzschild-téridő maximális analitikus kiterjesztésében a  $\frac{T}{X} = \text{állandó}$  hiperfelületek topológiájának illusztrációja.

## 18.5. Gömbszimmetrikus csillagok egyensúlya

Csillagmodelljeink megalkotása során azzal a feltételezéssel élünk, hogy a csillagot felépítő anyag jó közelítéssel a disszipatív folyadékokra jellemző tulajdonságokkal rendelkezik. Ezek egyensúlyi állapotának vizsgálata alapvető szerepet játszik a gömbszimmetrikus csillagok egyensúlyának vizsgálata során.

Az egyensúlyi állapotok feltérképezése előtt fontos megemlíteni, hogy Gerch és Limdbom [13] 1991-ben a disszipatív folyadékok elméletének lehetséges relativisztikus általánosításait vizsgálták. Eredményük nem konklúzív abban az értelemben, hogy kiderült, az ilyen jellegű elméletekből sok, bizonyos szempontból túl sok létezhet. Azt azonban bebizonyították, hogy az összes lehetséges általánosításhoz tartozó egyensúlyi állapotban a disszipatív folyadékok mindig olyan tökéletes folyadékként viselkednek, amelynek  $u^a$  négyessebességvektora arányos az egyensúlyi állapotot meghatározó  $t^a$  időszerű Killing-vektorral, azaz

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b), \quad (18.5.49)$$

ahol az  $u^a$  négyessebességvektor  $u^a = t^a / \sqrt{-t^e t_e}$  alakban írható fel.

A 17.2. alfejezetben ismertetett módon a tökéletes folyadékokra vonatkozó négy egyenlet megoldhatóságának feltétele, hogy valamilyen állapotegyenletet válasszunk, azaz egy fizikailag reális  $P = P(\rho)$  függvénykapcsolat adjunk meg.

### 18.5.1. Sztatikus gömbszimmetrikus csillagmodellek

A sztatikus, gömbszimmetrikus tökéletes folyadék téridő metrikájának ívelemét a

$$ds^2 = -f \cdot dt^2 + h \cdot dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.5.50)$$

általános alakban keressük, ahol  $f$  és  $h$  most csak a felszínnel összehangolt  $r$  radiális koordinátától függ.

**18.5.1. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (18.5.50) alakban megadható metrika esetén a  $t^a = (\partial/\partial t)^a$  vektormező eleget tesz a  $\nabla_{(a}t_{b)} = 0$  Killing-egyenletnek, továbbá hogy  $t^a$  hiperfelületmerőleges, azaz a  $t_{[a}\nabla_{b}t_{c]}$  kifejezés azonosan zérus értéket vesz fel.*

A feladat megoldása értelmében a (18.5.50) metrikájú téridő sztatikus.

Geroch és Limbdlom [13] eredménye alapján az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a folyadék egységnyi normájú  $u^a$  négyessebességvektorának komponenseire a  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátarendszerben az

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{f}}, \quad \text{valamint} \quad u^r = u^\theta = u^\phi = 0 \quad (18.5.51)$$

összefüggések teljesülnek.

**18.5.2. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a (18.5.50) metrika és a (5.4.43) definíció alapján számolható nem zérus értékű Christoffel-féle szimbólumok az alábbiak:*

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{rr} &= \frac{h'}{2h}, & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r}{h}, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{r \sin^2 \theta}{h} \\ \Gamma^r_{tt} &= \frac{f'}{2h}, & \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \text{ctg} \theta, & \Gamma^t_{tr} &= \frac{f'}{2f}, \end{aligned}$$

ahol  $f'$  a  $f$  függvény  $r$  koordináta szerinti deriváltját jelöli.

**18.5.3. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy a Ricci-tenzor (14.5.46) egyenlet alap-*



ján meghatározott komponensei közül a nem azonosan zérus értékűekre a

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{f''}{2h} - \frac{f'}{4h} \left( \frac{h'}{h} + \frac{f'}{f} \right) - \frac{f'}{r h}, & R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{r}{2h} \left( -\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f} \right) - \frac{1}{h} \\ R_{rr} &= -\frac{f''}{2f} + \frac{f'}{4f} \left( \frac{h'}{h} + \frac{f'}{f} \right) + \frac{h'}{r h}, & R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

relációk teljesülnek.

Mindezekhez hozzávéve, hogy a téridő sztatikussága és gömbszimmetriája folytán az energiaimpulzus-tenzor az alkalmazott  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátarendszerben a

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (18.5.52)$$

alakot ölti azt kapjuk, hogy az Einstein-egyenletek között csak négy nem  $0 = 0$  alakú található. Ezek közül a „tt”, „rr” és „ $\theta\theta$ ” komponenseket a

$$(r h)^{-1} h' + r^{-2} (1 - h^{-1}) = 8\pi\rho \quad (18.5.53)$$

$$(r f h)^{-1} f' - r^{-2} (1 - h^{-1}) = 8\pi P \quad (18.5.54)$$

$$\frac{1}{2} (f h)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} \left[ (f h)^{-\frac{1}{2}} f' \right] + \frac{1}{2} (r f h)^{-1} f' - (r h^2)^{-1} h' = 8\pi P \quad (18.5.55)$$

alakban írhatjuk fel, míg a „ $\phi\phi$ ” komponensről belátható, hogy az az utolsó egyenlet  $\sin^2 \theta$ -szereseként áll elő.

A (18.5.53) egyenletben egyedül csak a  $h$  függvény szerepel, ráadásul a bal oldal tovább egyszerűsíthető, miáltal az

$$r^{-2} \frac{d}{dr} [r(1 - h^{-1})] = 8\pi\rho \quad (18.5.56)$$

alakhoz jutunk, amiből rendezés és  $r$  szerinti integrálás után azt kapjuk, hogy

$$h(r) = \left[ 1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (18.5.57)$$

ahol

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\hat{r}) \hat{r}^2 d\hat{r} + C. \quad (18.5.58)$$

Megmutatható, hogy annak biztosítása érdekében, hogy a  $t = \text{állandó}$  felületek simák lehessenek az  $r = 0$  helyen is, azaz ott ne lépjen fel úgynevezett *kúpszingularitás* – ez azzal egyenértékű, hogy az origón átfektetett tetszőleges egyenes mentén a  $h$  függvény origóbeli deriváltja értelmezhető legyen – a jobb oldalon álló  $C$  állandót nullának kell választanunk.

Érdemes kiemelni, hogy a téridő sztatikusságát garantáló szükséges feltételek egyikének megfelelően a  $h$  függvényre  $h > 0$  kell teljesüljön, ami (18.5.57) értelmében mindig teljesül, ha az  $m(r)$  függvény eleget tesz a

$$r > 2m(r) \quad (18.5.59)$$

egyenlőtlenségnek.

Egy további plauzibilis feltétel, hogy a  $P = P(\rho)$  állapotegyenlet legyen olyan, hogy mind a  $P$  nyomás, mind a  $\rho$  energiasűrűség váljon zérussá valamely  $r = R$  értéknél. Ezt az  $R$  értéket a csillag sugarának nevezzük.

Feltéve továbbá, hogy a külső téridőtartományban vákuum van, Birkhoff-tétele következtében ott olyan  $M$  tömegparaméterű Schwarzschild-téridő illeszthető hozzá, ahol  $M$ -re teljesülnie kell az

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \quad (18.5.60)$$

relációnak.

Érdemes megjegyezni, hogy az utóbbi tömeget meghatározó integrál betű szerint úgy néz ki, mint a Newton-elmélet megfelelő integrálkifejezése. Az ana-

lógia azonban félrevezető, mert a  $t = \text{állandó}$  felületeken a térfogatelem

$$\varepsilon_{abc} = \sqrt{{}^{(3)}g} (dr)_a \wedge (d\theta)_b \wedge (d\phi)_c, \quad (18.5.61)$$

ahol most  ${}^{(3)}g = hr^4 \sin^2 \theta$ , így a valódi anyagsűrűséghez kapcsolható relativisztikus tömeg

$$M_v = 4\pi \int_{\mathcal{B}(R)} \rho(r) \sqrt{{}^{(3)}g} dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \left[ 1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (18.5.62)$$

alakban írható fel, ahol  $\mathcal{B}(R)$  az  $R$  sugarú  $\mathbb{R}^3$ -beli tömör gömböt jelöli. Az  $M_v - M$  különbséget, mely (18.5.59)-nek megfelelően mindig pozitív, gravitációs kötési energiának nevezzük.

Visszatérve az alapegyenleteinkhez, (18.5.54)-ből az

$$\frac{f'}{f} = rh [8\pi P + r^{-2}(1 - h^{-1})], \quad (18.5.63)$$

vagy a  $h$  függvényre vonatkozó ismereteink felhasználásával az ezzel ekvivalens

$$(\ln f)' = \frac{r \left( 8\pi P + \frac{2m(r)}{r^3} \right)}{1 - \frac{2m(r)}{r}} = 2 \frac{4\pi P r^3 + m(r)}{r[r - 2m(r)]} \quad (18.5.64)$$

egyenletet kapjuk. Ebből azonnal látszik, hogy amikor a  $h(r)$  függvény, vagy a vele ekvivalens  $m(r)$  függvény, valamint a nyomás  $P = P(r)$  radiális függése ismert, akkor (18.5.64) alapján az  $f(r)$  függvény egyértelműen meghatározott.

A harmadik Einstein-egyenletből, (18.5.55)-ből a (18.5.57) és (18.5.64) egyenletek felhasználásával egy  $P(r)$ -re vonatkozó elsőrendű közönséges differenciálegyenletet kaphatunk, mely néhány algebrai átalakítás révén az

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{4\pi P r^3 + m(r)}{r[r - 2m(r)]} \quad (18.5.65)$$

alakot ölti. Erre az egyenletre – amely a gömbszimmetrikus tökéletes folyadék-konfigurációk hidrosztatikus egyensúlyának szükséges és elégséges feltételét fogalmazza meg – mint a Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenletre szokás hivatkozni.

**18.5.4. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy (18.5.65) nem más, mint a  $\nabla^a T_{ab} = 0$  megmaradási egyenlet  $r$ -komponense, ahol  $T_{ab}$  a (18.5.50) és (18.5.51) egyenletekkel meghatározott tökéletes folyadék energiaimpulzus-tenzorát jelöli.*

A fentiekben származtatott eredményeinket összefoglalva mondhatjuk, hogy bármely sztatikus, gömbszimmetrikus tökéletes folyadék téridőben a metrikát

$$ds^2 = -f \cdot dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \cdot dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (18.5.66)$$

alakban írhatjuk fel, ahol

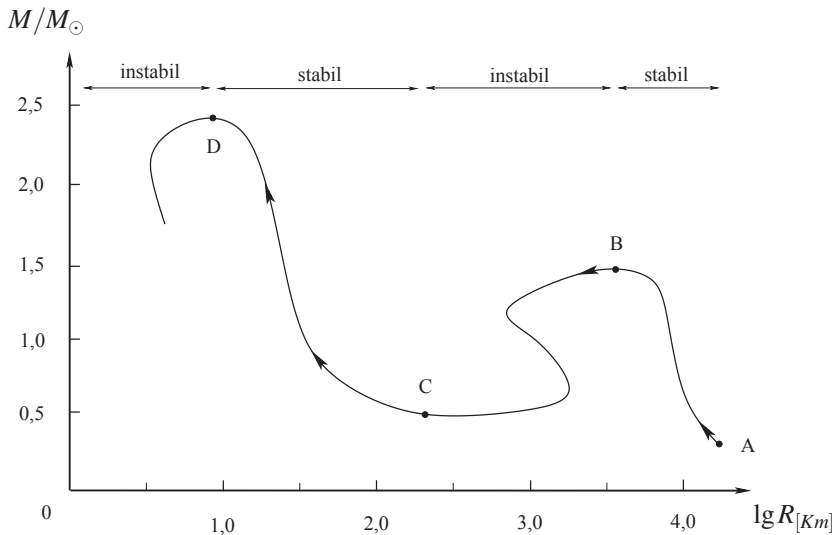
$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\hat{r}) \hat{r}^2 d\hat{r}. \quad (18.5.67)$$

Az  $f(r)$  függvényt a (18.5.64) egyenlet integrálásával határozzuk meg, miután megoldottuk a hidrosztatikus egyensúly feltételeként kapott (18.5.65) Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenletet egy alkalmasan kiválasztott  $P = P(\rho)$  állapotegyenlet ismeretében.

Gyakorlatban ez úgy történik, hogy a  $P = P(\rho)$  állapotegyenlet segítségével a (18.5.65) Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenletet a  $\rho(r)$  függvényre vonatkozó elsőrendű közönséges differenciálegyenletté alakítjuk, melynek tetszőleges  $\rho|_{r=0}$  kezdőadattal vett megoldását felhasználva a fentebb leírt eljárást követve bármely fizikai, illetve geometriai változó viselkedése, azaz a  $P(r)$ ,  $m(r)$ ,  $h(r)$  és  $f(r)$  függvények meghatározhatók.

A most vázolt eljárás segítségével valamely alkalmasan választott  $\rho|_{r=0}$  és  $P = P(\rho)$  állapotegyenlet rögzítése után az egyensúlyi konfigurációk meghatározhatók. Ezek lineáris stabilitásának vizsgálata is elvégezhető, bár erre ennek

a könyvnek a keretében nem térhetünk ki. A mellékelt 18.6. ábra a  $10^5 \text{ [g/cm}^3\text{]} - 10^7 \text{ [g/cm}^3\text{]}$  központi  $\rho|_{r=0}$  energiasűrűségértékeket feltételezve elvégzett számolások eredményének kvalitatív illusztrálására szolgál. Természetesen az



18.6. ábra. Az ábra a Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenlet olyan megoldásai esetén nyert, összetartozó  $R$  sugár- és  $M$  tömegértékek által meghatározott konfigurációk illusztrálására szolgál, amelyek egy  $P = C\rho^\gamma$  alakú politropikus állapotegyenletnek és  $\rho|_{r=0} \in 10^5 \text{ [g/cm}^3\text{]} - 10^7 \text{ [g/cm}^3\text{]}$  központi energiasűrűségértékeknek felelnek meg.  $\rho|_{r=0}$  értéke folyamatosan növekszik a görbe mentén az  $A$  pontban felvett  $10^5 \text{ [g/cm}^3\text{]}$  értéktől a  $D$  pontban felvett  $10^7 \text{ [g/cm}^3\text{]}$  értékig. Az  $A - B$  és a  $C - D$  görbéveken stabilak, míg a  $B - C$  illetve a  $D$  pont mögötti görbéveken instabilak az összetartozó  $R - M$  értékekhez tartozó csillagmodellek. Az  $A - B$  görbév egy részén az adott modellhez tartozó fehértörpe, míg a  $C - D$  görbév egy részén neutroncsillag konfigurációk találhatók.

összetartozó értékpárok erősen függenek az alkalmazott állapotegyenlettől. Az ábra  $D$  pontjának környezetében feltüntetett kritikus viselkedés azonban kvalitatív szempontból függetlennek tűnik az alkalmazott állapotegyenlet konkrét alakjától. A fordulópontban az  $M/M_\odot$  érték a  $2 - 5$  tartományba esik, ahol  $M_\odot$  a Nap tömegét jelöli. Ez arra enged következtetni, hogy a  $2M_\odot -$

$5M_{\odot}$  tömegnél nagyobb tömegű neutroncsillagok – az állapotegyenlet konkrét megválasztásától függetlenül – szükségképpen instabillá válnak és egy a 18.6. alfejezetben illusztrált gravitációs összeomlási folyamat során feketelyuk végállapotba jutnak el.

### 18.5.2. Állandó sűrűségű csillag

A legismertebb belső megoldást Karl Schwarzschild 1916-ban a vákuum-megoldással majdnem egy időben származtatta. Ennek során azzal a feltételezéssel élt, hogy az anyagsűrűség állandó  $r \leq R$  sugárértékekre, míg nulla azon kívül, azaz

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & , r \leq R \\ 0 & , r > R. \end{cases} \quad (18.5.68)$$

Ekkor

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_0 \hat{r}^2 d\hat{r} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \quad (18.5.69)$$

továbbá az ekkor érvényes

$$\frac{dP}{dr} = -4\pi r^2 (P + \rho_0) \frac{\rho_0 + 3P}{3 - 8\pi r^2 \rho_0} \quad (18.5.70)$$

Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenletet megoldását

$$P(r) = \rho_0 \frac{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - 3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (18.5.71)$$

alakban írhatjuk. Ebből azonnal látható, hogy a középpontban ébredő nyomás

$$P|_{r=0} = \rho_0 \frac{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{1 - 3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (18.5.72)$$

mely végtelenhez tart, ha a csillag  $R$  sugara felülről tart az  $R_{krit.} = 9M/4$  értékhez. Ez azt jelenti, hogy a sztatikusságra vonatkozó elvárásunk feladása nélkül nem préselhetünk be  $M$  tömeget az  $R_{krit.}$  sugárnál kisebb sugarú tartományba, azaz a sztatikus csillagmodelljeinkre mindenkor teljesülnie kell a  $M < \frac{4R}{9} < \frac{R}{2}$  egyenlőtlenségnek.

Érdemes megemlíteni, hogy a Newtoni elméletben a  $P \ll \rho$  egyenlőtlenség fennállása esetén (18.5.70) helyett a

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho_0 m(r)}{r^2} \quad (18.5.73)$$

egyenlet adódik, melynek megoldása

$$P(r) = \frac{2}{3} \rho_0^2 (R^2 - r^2) \quad (18.5.74)$$

alakban írható fel.

Így az  $M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0$  összefüggés alapján a középpontban ébredő nyomásra

$$P|_{r=0} = \frac{2}{3} \rho_0^2 R^2 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{4}{3}}, \quad (18.5.75)$$

teljesül, azaz tetszőleges  $\rho_0$  érték választása esetén  $P|_{r=0}$  véges érték.

A leglényegesebb különbség a fentebb tárgyalt nemlineáris és az annak megfelelő newtoni határeset között az, hogy az

$$M < \frac{4R}{9}, \quad (18.5.76)$$

egyenlőtlenség nemcsak az állandó sűrűségű anyageloszlásoknál, hanem minden olyan fizikailag reálisnak tűnő esetben teljesül, amikor a  $\rho(r)$  anyagsűrűségeloszlás az origóból kifelé menve monoton csökkenő függvénye a radiális koordinátának. Ez éppen azért fontos, mert a (18.5.76) egyenlőtlenség lényegében független a lehetséges állapotegyenlettől és így akkor is érvényes, amikor hiányoznak azok a megbízható ismeretek, amire alapozva meg tudnánk mondani, hogy extrém nagy sűrűségek esetén milyen az adekvát állapotegyenlet.

Befejezésül érdemes azt is megemlíteni, hogy egy egyensúlyi állapotban lévő gömbszimmetrikus csillag felületéről induló foton által elszenvedett maximális vöröseltolódás, míg a foton eljut a praktikusán végtelen távolságban lévő megfigyelőhöz,

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{1}{(1 - \frac{2M}{R})^{-\frac{1}{2}}} - 1 < \frac{1}{(1 - \frac{8}{9})^{-\frac{1}{2}}} - 1 = 2. \quad (18.5.77)$$

Természetesen  $z$  értéke lehet nagyobb, ha a foton nem a csillag felületéről indul. Ebben a vonatkozásban érdemes megemlíteni, hogy a megfigyelt kvazárookra a vöröseltolódás értéke a  $z \sim 0,131 - 7$  tartományba esik. Emellett meglepően kicsiny az a  $0 < z \leq 0,01$  vöröseltolódási tartomány, amelynek vizsgálatára alapozottan Hubble felállította a nevével fémjelzett kozmológiai törvényt.

## 18.6. Gömbszimmetrikus gravitációs összeomlás

Ahogy arra már a 18.5.1. alfejezetben utaltunk, azok a csillagok, melyeknek tömege meghaladja a Nap  $M_\odot$  tömegének 2-5-szörösét, nem érhetik el a stabil neutroncsillag végállapotot. Az ilyen csillagok saját súlyuk alatt össze-roppannak, amit szaknyelven úgy szokás kifejezni, hogy azok egy gravitációs összeomlási folyamaton mennek keresztül. Ilyenkor a fizikailag reális esetben a szupernóva robbanásokhoz hasonlatos módon a csillagot alkotó anyag külső része ledobódik, míg a centrum közelében egy feketelyuk alakul ki. Egy ilyen gravitációs összeomlási folyamat lehető legegyszerűbb változatát mutatjuk be a következő alfejezetekben.

### 18.6.1. Porszerű anyag összeomlása

A gömbszimmetrikus téridők lehetséges geometriájának vizsgálata során megállapítottuk, hogy a gömbszimmetriával összeegyeztethető metrika egyik leg-



általánosabb alakját valamely  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátarendszerben a

$$ds^2 = -f \cdot dt^2 + h \cdot dr^2 + k \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.6.78)$$

ívelemmel adhatjuk meg, ahol  $f = f(t, r)$ ,  $h = h(t, r)$  és  $k = k(t, r)$  sima függvényei a  $t$  és  $r$  koordinátáknak. Mivel három szabad függvény szerepel a (18.6.78) metrikában, az alkalmazott  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátákról az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy az anyag részecskéivel együtt mozognak. Ez azt jelenti, hogy például a porszerű anyag esetén érvényes

$$T_{ab} = \rho u_a u_b \quad (18.6.79)$$

energiaimpulzus-tenzorban szereplő  $u^a$  négyessebességvektor olyan, hogy az arányos a  $(\partial/\partial t)^a$  koordináta-bázisvektorral, azaz  $u^r = u^\theta = u^\phi = 0$ .

Vegyük azt is észre, hogy az elmélet diffeomorfizmusinvarianciájából adódó  $\nabla^a T_{ab} = 0$  megmaradási egyenletből most

$$u^a \nabla_a u_b = 0 \quad (18.6.80)$$

következik, ami azt jelenti, hogy a porrészecskék geodetikus pályákat követnek. Vezessük most be a por által elfoglalt téridőtartományban a porrészecskék pályái mentén a sajátidő-paramétert új időkoordinátaként. Jelöljük ezt  $\tau$ -val és szinkronizáljuk úgy, hogy valamely térszerű hiperfelületen zérus értéket vegyen fel. Az így nyert  $(\tau, r, \theta, \phi)$  koordinátarendszerben  $f(\tau, r) \equiv 1$ , valamint a  $g_{ab} u^a u^b = -1$  és  $u^r = u^\theta = u^\phi = 0$  relációk folytán  $u^\tau \equiv 1$  is teljesül, továbbá a téridő metrikáját

$$ds^2 = -d\tau^2 + H(\tau, r) \cdot dr^2 + K(\tau, r) \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.6.81)$$

alakban írhatjuk fel. A Ricci-tenzor (14.5.46) egyenlet alapján meghatározott

komponensei közül a nem azonosan zérus értékűekre az

$$R_{\tau\tau} = -\frac{H^{**}}{2H} - \frac{K^{**}}{K} + \frac{(H^*)^2}{4H^2} + \frac{(K^*)^2}{2K^2}, \quad (18.6.82)$$

$$R_{\tau r} = -\frac{K^{*'}}{K} + \frac{K^* K'}{2K^2} + \frac{H^* K'}{2HK}, \quad (18.6.83)$$

$$R_{rr} = -\frac{K''}{K} + \frac{(K')^2}{2K^2} + \frac{H' K'}{2HK} + \frac{H^{**}}{2} - \frac{(H^*)^2}{4H} + \frac{H^* K^*}{2K}, \quad (18.6.84)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{K''}{2H} + \frac{H' K'}{4H^2} + \frac{K^{**}}{2} - \frac{H^* K^*}{4H}, \quad (18.6.85)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (18.6.86)$$

relációk teljesülnek, ahol  $*$  és  $'$  a szóbanforgó függvény  $\tau$  és  $r$  koordináta szerinti deriváltját jelöli.

Ezek után (14.5.51)-et, valamint a porszerű anyag (18.6.79) energiaimpulzus-tenzorát alkalmazva az Einstein-egyenleteket az

$$R_{ab} = 8\pi \rho \left( u_a u_b + \frac{1}{2} g_{ab} \right) \quad (18.6.87)$$

alakban írhatjuk fel, ahol kihasználtuk, hogy  $T_e^e = g^{ef} T_{ef} = -\rho$ . Így a (18.6.87) jobb oldalán álló forrástagok komponenseire az

$$R_{\tau\tau} = 4\pi \rho, \quad (18.6.88)$$

$$R_{\tau r} = 0, \quad (18.6.89)$$

$$R_{rr} = 4\pi \rho H, \quad (18.6.90)$$

$$R_{\theta\theta} = 4\pi \rho K \quad (18.6.91)$$

relációk teljesülnek, melyek a (18.6.82)-(18.6.85) egyenletekkel együtt meghatározzák a porgömb gravitációs összeomlására vonatkozó Einstein-egyenleteket.

Keressük most ezen egyenletek olyan megoldásait, amelyek egy helytől független  $\rho$  energiasűrűség feltételezése mellett származtathatók, azaz  $\rho = \rho(\tau, r)$ .

Ez lehetővé teszi, hogy a kérdéses  $H(\tau, r)$  és  $K(\tau, r)$  függvényeket a

$$H(\tau, r) = R^2(\tau) \cdot h(r), \quad \text{valamint} \quad K(\tau, r) = S^2(\tau) \cdot k(r) \quad (18.6.92)$$

alakú szeparált alakban keressük.

Ekkor a (18.6.83) és (18.6.89) egyenletekből azonnal adódik, hogy

$$\frac{S^*}{S} = \frac{R^*}{R}, \quad \text{azaz} \quad S(\tau) = \alpha \cdot R(\tau) \quad (18.6.93)$$

valamely nem zérus  $\alpha$  valós számra. A  $h(r)$  függvény újradefiniálása révén – az általánosság elvesztése nélkül – használhatjuk az

$$S(\tau) = R(\tau) \quad (18.6.94)$$

relációt.

Ezek után a  $k(r)$  függvény felhasználásával bevezethetjük az

$$\tilde{r} = \sqrt{k(r)} \quad (18.6.95)$$

radiális koordinátát. A fent végrehajtott átalakításoknak köszönhetően a

$$H(\tau, \tilde{r}) = R^2(\tau) \cdot h(\tilde{r}), \quad \text{valamint} \quad K(\tau, \tilde{r}) = R^2(\tau) \cdot \tilde{r}^2 \quad (18.6.96)$$

egyenletek teljesülnek.

Mindezeket túlmenően a (18.6.84) és (18.6.90), illetve a (18.6.85) és (18.6.91) egyenletpárok és (18.6.94) alapján nyert

$$\frac{h'(\tilde{r})}{\tilde{r} h^2(\tilde{r})} + R^{**}(\tau) R(\tau) + 2(R^*(\tau))^2 = 4\pi \rho(\tau) R^2(\tau) \quad (18.6.97)$$

$$\left[ \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2 h(\tilde{r})} + \frac{h'(\tilde{r})}{2\tilde{r} h^2(\tilde{r})} \right] + R^{**}(\tau) R(\tau) + 2(R^*(\tau))^2 = 4\pi \rho(\tau) R^2(\tau) \quad (18.6.98)$$

egyenletek folytán

$$\frac{h'(\tilde{r})}{\tilde{r} h^2(\tilde{r})} = \left[ \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2 h(\tilde{r})} + \frac{h'(\tilde{r})}{2\tilde{r} h^2(\tilde{r})} \right] = 2\ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad (18.6.99)$$

következik. A  $\frac{h'(\tilde{r})}{\tilde{r} h^2(\tilde{r})} = 2\ell$  egyenlet megoldása  $h(\tilde{r}) = \frac{1}{C-\ell\tilde{r}^2}$ , amit a

$$\left[ \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2 h(\tilde{r})} + \frac{h'(\tilde{r})}{2\tilde{r} h^2(\tilde{r})} \right] = 2\ell \quad (18.6.100)$$

egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy  $C = 1$ . Így a (18.6.81) alakban felírt metrika most a

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau) \left\{ \frac{d\tilde{r}^2}{1-\ell\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\} \quad (18.6.101)$$

alakot ölti.

Rövid vizsgálódás után látszik, hogy ez a metrika teljesen olyan, mint az izotróp kozmológiai téridők (17.1.26) metrikája, azzal az apró különbséggel, hogy  $\ell$  értéke nem feltétlenül  $+1, 0$  vagy  $-1$ . Így az sem meglepő, hogy az ott kapott relációkhoz hasonló összefüggésekhez vezetnek a további téregyenleteink is.

Hátra van még az  $R(\tau)$  és  $\rho(\tau)$  időfüggések meghatározása. A  $\nabla^a T_{ab} = 0$  megmaradási egyenletből kapott (17.2.51) egyenletet felhasználva

$$\rho^* + \rho \frac{3R^*}{R} = 0, \quad (18.6.102)$$

és így

$$\rho(\tau) R^3(\tau) = \text{konstans} \quad (18.6.103)$$

adódik. Az  $R(\tau)$  és  $\rho(\tau)$  függvények  $\tau = 0$  kezdőértékeit  $R(0)$ -val és  $\rho(0)$ -val jelölve és feltéve, hogy  $R(0) = 1$ , a

$$\rho(\tau) = \rho(0) R^{-3}(\tau) \quad (18.6.104)$$

összefüggéshez jutunk.

Az (18.6.84) és (18.6.90), illetve (18.6.82) és (18.6.88) egyenletpárok aktuális alakjaira most

$$2\ell + R^{**}(\tau)R(\tau) + 2(R^*(\tau))^2 = 4\pi\rho(0)R^{-1}(\tau) \quad (18.6.105)$$

$$-R^{**}(\tau)R(\tau) = \frac{4\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(\tau) \quad (18.6.106)$$

teljesül, amiből

$$(R^*(\tau))^2 = -\ell + \frac{8\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(\tau) \quad (18.6.107)$$

következik.

Tegyük fel, hogy a  $\tau = 0$  kezdőpillanatban  $R^*(0) = 0$ . Ez azt jelenti, hogy a porgömb részecskéi nyugalomból indulnak, annak megfelelően, hogy a porgömb centrumától mért valódi távolság  $\hat{r}(\tilde{r}) = \int_0^{\tilde{r}} R(\tau)[1 - \ell r'^2]^{-1/2} dr'$ , és emiatt a valóságos  $v_{\hat{r}} = d\hat{r}/d\tau$  radiális sebesség arányos  $R^*(\tau)$ -val. Továbbá, a (18.6.107) egyenlet és a korábban tett  $R(0) = 1$  feltevésünk miatt az

$$\ell = \frac{8\pi}{3}\rho(0), \quad (18.6.108)$$

valamint az

$$(R^*(\tau))^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(0)[R^{-1}(\tau) - 1] \quad (18.6.109)$$

relációkhoz jutunk. A (18.6.109) egyenlet parametrikus megoldását a

$$R(\psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \quad (18.6.110)$$

$$\tau(\psi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8\pi\rho(0)}}(\psi + \sin \psi) \quad (18.6.111)$$

alakban írhatjuk fel.

Ezekből az összefüggésekből azonnal látható, hogy  $R(\pi) = 0$ , azaz a nyugalomból induló  $\rho(0)$  kezdeti sűrűségű porgömb véges

$$\tau(\pi) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{8\pi\rho(0)}} \quad (18.6.112)$$

sajátidő alatt végtelen nagy energiasűrűségű állapotba jut. Az is jól látszik,

hogy minél nagyobb a  $\rho(0)$  érték, az együttmozgó megfigyelő sajátidejében mérve annál rövidebb idő alatt zajlik le a kérdéses gravitációs összeomlási folyamat.

A fenti észrevételek során a sajátidőt a porgömb részecskéinek világvonala mentén mértük. Érdemes azt is megvizsgálni, hogy milyennek látja a gravitációs összeomlási folyamatot egy távoli sztatikus megfigyelő.

A kérdés megválaszolásához tegyük fel, hogy a porgömbön kívül nincs anyag, azaz ott vákuum található. Ekkor a Birkhoff-tétel alapján tudjuk, hogy a külső gömbszimmetrikus téridőtartományban a metrika csak a Schwarzschild-metrika lehet, amelyet a szokásos  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátákban a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.6.113)$$

alakban írhatunk fel.

Azért, hogy a vákuum és a porral kitöltött téridőtartományok geometriáját legalább folytonosan illeszteni tudjuk, meg kell adnunk a  $(\tau, \tilde{r}, \theta, \phi)$  és  $(t, r, \theta, \phi)$  koordináták közötti függvénykapcsolatot. A szögkoordináták természetes megfeleltetésén túl ez egy hosszadalmas számolás eredményeként kapott

$$r = \tilde{r} R(\tau) \quad (18.6.114)$$

$$t = \sqrt{\frac{1 - \ell \tilde{a}^2}{\ell}} \int_{Q(\tau, \tilde{r})}^1 \sqrt{\frac{\hat{r}}{1 - \hat{r}}} \left(1 - \frac{\ell \tilde{a}^2}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r} \quad (18.6.115)$$

választással tehető meg, ahol

$$Q(\tau, \tilde{r}) = 1 - \left(\frac{1 - \ell \tilde{r}^2}{1 - \ell \tilde{a}^2}\right) [1 - R(\tau)], \quad (18.6.116)$$

az  $\tilde{a}$  paraméter pedig a porrészecskékkel együttmozgó rendszerben a porgömb  $\tilde{r} = \tilde{a}$  koordinátasugarát jelöli.

Ezeket a relációkat felhasználva az összeomló porgömböt leíró téridő metriká-

ját a Schwarzschild-szerű  $(t, r, \theta, \phi)$  koordinátákban a

$$ds^2 = -f(t, r) dt^2 + h(t, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.6.117)$$

alakban írhatjuk fel, ahol most

$$f(t, r) = \frac{R(\tau)}{Q(\tau, \tilde{r})} \sqrt{\frac{1 - \ell \tilde{r}^2}{1 - \ell \tilde{a}^2}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\ell \tilde{a}^2}{Q(\tau, \tilde{r})}\right)^2}{1 - \frac{\ell \tilde{r}^2}{R(\tau)}} \bigg|_{\tau=\tau(t, r), \tilde{r}=\tilde{r}(t, r)}, \quad (18.6.118)$$

$$h(t, r) = \left(1 - \frac{\ell \tilde{r}^2}{R(\tau)}\right)^{-1} \bigg|_{\tau=\tau(t, r), \tilde{r}=\tilde{r}(t, r)}. \quad (18.6.119)$$

A porgömb felületén, azaz az  $\tilde{r} = \tilde{a}$  vagy  $r_{\tilde{a}}(\tau) = \tilde{a}R(\tau)$  helyen, egyrészt (18.6.116) alapján

$$Q(\tau, \tilde{a}) = R(\tau) \quad (18.6.120)$$

és így (18.6.118) és (18.6.119) alapján

$$f(t, r) = 1 - \frac{\ell \tilde{a}^2}{R(\tau)} \bigg|_{\tau=\tau(t, r)} = 1 - \frac{\ell \tilde{a}^3}{r}, \quad \text{valamint} \quad h(t, r) = \frac{1}{f(t, r)}. \quad (18.6.121)$$

A két tartományon külön-külön értelmezett metrika folytonos illesztése érdekében az  $r_{\tilde{a}}(\tau) = \tilde{a}R(\tau)$  helyen  $\ell \tilde{a}^3$  értékét  $2M$ -nek kell választanunk, ami biztosítható azáltal, ha a  $\tau = 0$  felületen az

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho(0) \tilde{a}^3 (1)^3 = \frac{4\pi}{3} \rho(0) r_{\tilde{a}}(0)^3 \quad (18.6.122)$$

reláció teljesül.

Most, miután ismerjük mindkét tartományban a téridő metrikáját, megválaszolhatjuk azt a korábbi kérdésünket, hogy milyennek látja egy távoli megfigyelő a gravitációs összeomlási folyamatot. Ehhez először vizsgáljuk meg, mi történik egy a csillag felületéről indított fényjellel. Tegyük fel, hogy a fényjel kibocsátása még azelőtt megtörténik, hogy a csillag  $r_{\tilde{a}}(\tau)$  sugara elérné a  $2M$

értéket. Határozzuk meg, hogyan érzékeli az ilymódon elindított fényjelet egy olyan sztatikus megfigyelő, amelyhez a fényjel egy radiálisan kifelé indított fényszerű geodetikus mentén jut el. Ehhez használjuk fel azt, hogy a kérdéses radiális fényszerű geodetikus görbe mentén a  $\theta$  és  $\phi$  koordináták értéke állandó, továbbá azt, hogy a vákuum téridőtartományban a geodetikus mentén a

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (18.6.123)$$

egyenlet teljesül.

Mindezeknek megfelelően a  $\bar{t}, \bar{r} = r_{\bar{a}}(\tau) = \tilde{a}R(\tau)$  koordinátájú eseményből induló fényjel az  $r'$  radiális koordinátával jellemzett sztatikus megfigyelőhöz abban a  $t'$  időpillanatban érkezik meg, amelyet a

$$t' = \bar{t} + \int_{\tilde{a}R(\tau)}^{r'} \left(1 - \frac{2M}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r} \quad (18.6.124)$$

összefüggéssel határozhatunk meg. Érdemes megjegyezni, hogy egy végtelen távolinak tekintett megfigyelő esetében a  $t$  koordinátaidő éppen a megfigyelő sajátidejével esik egybe.

Tekintsünk most egy olyan eseménysort, amit az összeomló csillag felületéről, ott egyenlő időközönként indított fényfelvillanások generálnak az  $r'$  radiális koordinátával jellemzett sztatikus megfigyelő számára. Ekkor (18.6.125) alapján az egymást követően érkező fényjelek között – a sztatikus megfigyelő sajátidejében mérve –

$$\Delta t' = \Delta \bar{t} + \int_{\tilde{a}R(\tau_2)}^{\tilde{a}R(\tau_1)} \left(1 - \frac{2M}{\hat{r}}\right)^{-1} d\hat{r} \quad (18.6.125)$$

idő telik el. Mivel az integrandus végtelenhez tart, az  $r_{\bar{a}}(\tau) = \tilde{a}R(\tau) \rightarrow 2M$  határesetben az egyenlő időközökben kibocsátott fényjelek megérkezése között eltelt idő is végtelenhez tart.

Mindezeknek megfelelően a porgömb története szignifikánsan eltérő módon



játszódik le a porgömbbel együttmozgó, valamint a végtelen távoli sztatikus megfigyelő szempontjából nézve. A gravitációsan összeomló csillagot jelképező porhalmaz felszínén utazó megfigyelő azt tapasztalja, hogy az ő sajátidejében mérve a csillag véges idő alatt teljes terjedelmében eltűnik az  $\tilde{r} = 0$  helyen található szingularitásban. Ezzel szemben a végtelen távolinak tekintett megfigyelő (valójában ez bármelyik a sztatikus Killing-vektormező integrálgörbéi mentén mozgó megfigyelőre ugyanúgy igaz) az ő sajátidejében mérve már magát azt a folyamatot is, hogy a porgömb sugara az  $r = 2M$  értékre húzódik össze, végtelen hosszúnak érzékeli. Ezért a végtelen távolinak tekintett megfigyelők számára soha nem tűnik el teljes mértékben az összeomló porgömb. A kétféle megfigyelő tapasztalata közötti szignifikáns eltérés egy extrém megjelenése a speciális relativitáselméletből jól ismert idődilatációnak.

Ugyan a végtelen távolinak tekintett megfigyelők a sajátidejükben mérve korlátlan ideig kapnak fényjeleket az összeomló porgömb felületén utazó megfigyelőtől, az általuk detektált fény vöröseltolódása mégis elárulja, hogy valami nagyon különös dolog történik. Konkrétan az  $r_{\tilde{a}}(\tau) = \tilde{a}R(\tau) \rightarrow 2M$  határestben a vöröseltolódási faktor értéke végtelenhez tart, hiszen abban az esetben, ha a fényjelet kibocsátó megfigyelő sztatikus mozgást végezne, a vonatkozó

$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \quad (18.6.126)$$

vöröseltolódási faktor akkor is végtelenhez tartana az  $r_{\tilde{a}}(\tau) \rightarrow 2M$  határestben. Mivel a csillag sugara folyamatosan csökken – távolodik a végtelenbeli megfigyelőtől – a Doppler-effektus folytán a  $z = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{d\tilde{t}}{dt} - 1$  összefüggés alapján számolható vöröseltolódási faktor valódi értéke

$$z = \left(1 - \frac{2M}{\tilde{a}R(\tau)}\right)^{-1} \left[ \sqrt{1 - \ell \tilde{a}^2} + \tilde{a} \sqrt{\ell} \sqrt{\frac{1 - R(\tau)}{R(\tau)}} \right] - 1, \quad (18.6.127)$$

ami még határozottabban tart végtelenhez az  $r_{\tilde{a}}(\tau) = \tilde{a}R(\tau) \rightarrow 2M$  határestben, azaz amikor a csillagszerű objektum valódi feketelyuk állapotba jut.

Az előző alfejezetben megmutattuk, hogy bármely sztatikus csillagszerű objektum felületéről induló fényjel maximális vöröseltolódási faktora kettő. A fenti megfontolásokból azonban jól látszik, hogy amikor egy gravitációs összeomlási folyamaton átmenő csillagot, esetleg egy már kialakult feketelyukba hulló anyagot figyelünk meg, akkor a vöröseltolódási faktor értéke tetszőlegesen nagy lehet.

# Irodalomjegyzék

- [1] G.D. Birkhoff: *Relativity and Modern Physics* Cambridge, MA: Harvard University Press. LCCN 23008297 (1923)
- [2] Y. Fourès-Bruhat: *Theoreme d'Existence pour Certains Systemes d'Equations aux Derivees Partielles non Lineaires*, Acta Mathematica **88** 141-225 (1952)
- [3] Y. Choquet-Bruhat, H. Friedrich: *Motion of isolated bodies*, Class. Quant. Grav. **23**, 5941-5950 (2006)
- [4] P. Csiszmadia and I. Rácz: *Gravitational collapse and topology change in spherically symmetric dynamical systems*; Class. Quantum Grav. **27** (2010) 015001; arXiv:0911.2373
- [5] J. Ehlers and R. Geroch: *Equation of Motion of Small Bodies in Relativity*, Annals. Phys. **309**, 232-236 (2004)
- [6] M. Ferraris, M. Francaviglia, C. Reina: *Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini's method" discovered by Einstein in 1925*, Gen. Rel. and Grav. **14**, 243-254 (1982)
- [7] E. Fomalont, S. Kopeikin, G. Lanyi, J. Benson: *Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA*, Astrophys. J. **699**, 1395-1402 (2009)
- [8] A. Friedman: *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik A **10**, 377-386 (1922)
- [9] H. Friedrich: *On the hyperbolicity of Einstein's equations and other gauge field equations*, Commun. Math. Phys. **100**, 525-543 (1985)
- [10] H. Friedrich, A. D. Rendall: *The Cauchy Problem for the Einstein Equations*, Lect. Notes Phys. **540** 127-224 (2000)
- [11] H. Friedrich: *Hyperbolic reductions for Einstein's equations*, Class. Quant. Grav. **13**, 1451-1469 (1996)

- [12] <http://www.geo600.org/>
- [13] R. Geroch, L. Lindblom, *Causal Theories of Dissipative Relativistic Fluids*, Ann. Phys. (NY) **207**, 394-416 (1991)
- [14] B. Hamvas: *Anthologia humana*, MEDIO Kiadó (1996)
- [15] S.W. Hawking and G.R.F. Ellis: *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, (1973)
- [16] D. Hilbert: *Die Grundlagen der Physik*, Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr. Math.-Phys. Kl. 395-407 (1915)
- [17] E. Hubble: *The Exploration of Space*, Harper's Magazine **158**, 732 (1929)
- [18] <http://www.gw-indigo.org/tiki-index.php>
- [19] J.D. Jackson: *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc. 3rd ed. (1999)
- [20] <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>
- [21] S. Kobayashi és K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*. Interscience (Wiley), New York (1963)
- [22] M.D. Kruskal: *Maximal Extension Of Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960)
- [23] G. Lemaître: *Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **91**, 483-490 (1931)
- [24] <http://www.ligo.caltech.edu/>
- [25] L. Markus: *Line Element Fields and Lorentz Structures on Differentiable Manifolds*, Ann. Math. **62**, 411-417 (1955)
- [26] A. Palatini: Rend. Circ. Math. Palermo **43**, 203 (1919)
- [27] R. Penrose: *Techniques of differential topology in relativity*, SIAM, No. 7., Philadelphia (1972)
- [28] R. Penrose and W. Rindler: *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press (1987)
- [29] R. Penrose and W. Rindler: *Spinors and Space-Time: Volume 2, Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge University Press (1988)
- [30] A.A. Penzias, R. W. Wilson: *A Measurement Of Excess Antenna Temperature At 4080 Mc/s*, Astrophysical Journal Letters **142**, 419-421 (1965)

- [31] A.A. Penzias, R. W. Wilson: *A Measurement of the Flux Density of CAS A At 4080 Mc/s*, Astrophysical Journal Letters **142**, 1149-1154 (1965)
- [32] R.V. Pound, Jr.G.A. Rebka: *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*, Phys. Rev. Letters **3**, 439-441 (1959)
- [33] R.V. Pound, Jr.G.A. Rebka: *Apparent weight of photons*, Phys. Rev. Letters **4**, 337-341 (1959)
- [34] I. Rácz: *On the existence of Killing vector fields*, Class. Quant. Grav. **16**, 1695-1703 (1999)
- [35] I. Rácz: *Symmetries of spacetime and their relation to initial value problems*, Class. Quant. Grav. **18**, 5103-5113 (2001)
- [36] I. Rácz: *On the use of the Kodama vector field in spherically symmetric dynamical problems*, Class. Quant. Grav. **23**, 115-123 (2006); arXiv:gr-qc/0511052
- [37] I. Rácz: *Is the Bianchi identity always hyperbolic?*, Class. Quant. Grav. **31**, 155004 (2014); arXiv:gr-qc/1406.1016
- [38] I. Rácz: *Cauchy problem as a two-surface based geometrodynamics*', submitted to Class. Quant. Grav. (2014)
- [39] I. Rácz: *Dynamical determination of the gravitational degrees of freedom*, submitted to Class. Quant. Grav. (2014)
- [40] M. Reed és B. Simon: *Methods of modern mathematical physics, 1. volume: Functional Analysis*, Academic Press, INC. (1981)
- [41] W. Rindler: *Visual horizons in world models*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **116**, 662-677 (1956)
- [42] H.P. Robertson: *Kinematics and world structure*, Astrophysical Journal **82**, 284-301 (1935)
- [43] H.P. Robertson: *Kinematics and world structure II.*, Astrophysical Journal **83**, 187-201 (1936)
- [44] H.P. Robertson: *Kinematics and world structure III.*, Astrophysical Journal **83**, 257-271 (1936)
- [45] K. Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **1**, 189-196 (1916)
- [46] G. Szekeres: *On the singularities of a Riemannian manifold*, Puhl. Mat. Dehrecen **7**, 285 (1960)
- [47] R. Sverdlov: *Spinor fields in causal set theory*, arXiv:0808.2956 (2008)

- [48] R.C. Tolman: *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, Phys. Rev. **55**, 364-373 (1939)
- [49] <http://www.ego-gw.it/public/virgo/virgo.aspx>
- [50] R.M. Wald: *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [51] A.G. Walker: *On Milne's theory of world-structure*, Proceedings of the London Mathematical Society 2 **42**, 90-127 (1937)
- [52] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc. (1972)
- [53] C. von Westenholtz: *Differential forms in mathematical physics*, North-Holland, Amsterdam, (1981)
- [54] E.P. Wigner: *Relativistic Invariance and Quantum Phenomena*, Rev. Mod. Phys. **29**, 255-268 (1957)

# Tárgymutató

absztrakt index, 56  
affinösszefüggés, xii, 80  
affinparaméter, 115, 213  
anyagmezők, 174, 182  
autoparalel (önmagukkak  
    párhuzamos) görbék, 115

Banach-tér, 46  
Bianchi-azonosság, 90  
Birkhoff-tétel, 294, 324

Christoffel-szimbólumok, 80  
Coulomb-mérték, 228  
csapdázott felület, 307  
csillagszerű objektumok, x

derivált leképezés, 132  
diffeomorfizmus  
     $C^r$ -osztályú, 39  
diffeomorfizmus-csoport, 103  
    egyparaméteres  $C^r$ -osztályú, 103  
    infinitezimális generátor, 104  
    lokális, 104  
diffeomorfizmuscsoport, 191  
diffeomorfizmusinvariancia, 196  
diffeomorfizmusinvariancia, 96, 191,  
    193, 236  
differenciálformák, 149  
    egzakt forma, 152  
    külső deriválás, 151  
    külső szorzás, 150  
    zárt forma, 152  
differenciálgeometria, 27

differenciálható sokaság  
     $C^k$ -osztályú görbe, 39  
     $C^r$ -osztályú, 36  
     $C^r$ -osztályú diffeomorfizmus, 39  
     $C^k$ -osztályú leképezések, 39  
    irányítható, 153  
    lokális koordináták, 36  
    térkép, atlasz, 36  
duális bázis, 46

Eötvös mérései, ix  
együttmozgó koordináták, 319  
egységfelbontás  
    definíció, 137  
Einstein-egyenlet  
    linearizált, 210  
Einstein-egyenletek, 187, 189, 232  
    mint csatolt hullámeqyenletek,  
        196  
    harmonikus koordináták, 200  
    kozmológia állandó, 190  
    linearizált, 204  
    mértékválasztáshoz tartozó  
        forrásfüggvény, 200  
    Palatini-féle variáció, 191  
    redukált fejlődési egyenletek,  
        199  
Einstein-elmélet  
    linearizált, 203  
    nemlineáris elmélet, xiii  
Einstein-féle összegzési szabály, 56  
Einstein-tenzor, 96

- ekvivalencia elv, xii
- elektrodinamika, 227
- elektromágneses hullám fázisa, 239
- elektromos töltés, 206
- elektrovákuum, 186
- eltéréstenzor, 204
- energiaáram-sűrűség, 211
- energiaimpulzus-tenzor, 184, 211
- Euler–Lagrange-egyenletek, 181, 184
- Euler-egyenlet, 266
  
- fényelhajlás, 296
- Faraday-tenzor, 174
- fehértörpe, 315
- feketelyuk, x, 327
- folytonos leképezés, 29
- forgáscsoport, 288, 292
- Friedman-univerzum, 271
- Friedmann-kozmológiák, 268
- Friedmann-kozmológiai, xi
- Frobenius-tétel, 110
  
- gömbszimmetrikus csillag, 309
  - egyensúlyi állapot, 309
- gömbszimmetrikus metrika, 293
- gömbszimmetrikus téridők, 287, 289
  - Birkhoff-tétel, 293
- görbületi skalár, 93, 195
- görbületi tenzor, 87
  - árapály komponensei, 241
  - árapály része, 124
  - definíciója, 87
  - tulajdonságai, 90
- görbe
  - érintője, 79
  - fényszerű, 118
  - geodetikus, 123
  - időszerű, 118
  - térszerű, 118
- görbe ívhossza, 116, 119
  - az ívhossz első variációja, 121
  - az ívhossz második variációja, 125
  - az ívhossz variációja, 120
- Galilei kísérletei, ix
- geodetikus görbe, 116, 294
- geodetikus hipotézis, 195
- geometriai szabadsági fokok, 225
- geometriai-optika közelítés, 239
- geometriai-optikai közelítés, 258
- geometrizált gravitációelmélet, vii, 96
- gravitációs összeomlás, x, xv, 318, 324
  - porszerű anyag, 318
- gravitációs hullám, 217, 242
  - gyenge, 217
  - keresztes polarizáció, 226
  - plusszos polarizáció, 226
- gravitációs kötési energia, 313
- gravitációs síkhullám, 226
- gravitációs szabadsági fokok, xii
- gravitációs vöröseltolódás, 299
- gravitonok, 210
- Green-függvény, 218
  
- Hilbert-hatás, 187
- hiperfelületmerőleges, 310
- homeomorfizmus, 29
- Hubble-állandó, 269
- Hubble-idő, 268
- Hubble-törvény, 256
- hullámkeltési folyamat, 234
- hullámszám-vektor, 226
  
- időirányítható, 117, 118
- illeszkedő koordináták, 143
- impulzusáram, 211
- integrálás sokaságokon, 157
  - definíció, 159
  - egységnormális mező, 167
  - Gauss-tétel, 166
  - Stokes-tétel, 160
  - tulajdonságai, 159
- integrálhatósági feltétel, 96
- integrálsokaság, 111
- inverz-metrika, 62
- irányítható
  - sokaságok, 152
- izometriatranszformáció, 289
- izomorfizmus, 46
- izotróp expanzió, 244
  
- Jacobi-azonosság, 107
- Jacobi-egyenlet, 124
- Jacobi-mátrix, 161
- Jacobi-mező, 126



- kölcsönhatás, viii
- kétszeres duális, 46
- kúpsingularitás, 312
- kauzalitás, 117
  - fényszerű, 117
  - időszerű, 117
  - térszerű, 117
- kezdőértékprobléma, 199, 222
  - jól meghatározott, 199
- kezdőadatok, 199
- Killing-egyenlet, 147
- Killing-vektormező, 147
  - definíció, 147
- Klein–Gordon-mező, 186
- Klein–Gordon-mező, 174
- komplex fényszerű bázisok, 98
- konjugált pontpár, 126
- konnexió, 80
- konnexió formák, 99
- kontrahált Bianchi-azonosságok, 95
- koordináta-bázisvektorok
  - kommutátorai, 108
- koordinátságsingularitás, 302
- kovariáns deriválás
  - definíció, 70
  - metrikával kompatibilis, 92
  - torziómentes, 71
- kovariáns deriváló operátorok
  - hatásának eltérése
    - függvényeken, 73
  - hatásának eltérése
    - formamezőkön, 75
  - hatásának eltérése
    - tenzormezőkön, 76
- kovariáns derivált, 67
  - kommutátorai, 89
  - metrikával kompatibilis, 83
- kovariancia elv, 177
- kozmológia, 245
  - anyagdominált, 272
  - Einstein sztatikus univerzuma, 272
  - horizontprobléma, 282
  - Hubble-állandó, 271
  - kezdeti szingularitás, 285
  - Kopernikuszi-elv, 245, 282
  - kozmológia állandó értéke, 274
  - kozmológiai vöröseltolódás, 261
  - kritikus sűrűség, 274
  - lassulási paraméter, 271, 275
  - részecskehorizont, 284
  - skálafaktor evolúciója, 271
  - sugárzásdominált, 272
- kozmológia távolságok, 275
  - látószög alapján, 275
  - luminozítás alapján, 277
  - vöröseltolódás-függése, 278
  - mozgás alapján, 276
- kozmológiai modell, x
- Kruskal–Szekeres–koordináták, 305
- Lagrange-függvény, 182
- Lagrange-formalizmus, 179
- Laplace–Beltrami operátor, 206
- lassú mozgás, 212
- leképezés
  - $C^r$ -osztályú, 36
- Lie-derivált, 141
  - definíció, 141
  - koordinátamentes alak, 145
  - tulajdonságai, 142
- lineáris perturbáció, 209
- lokális koordináták, 36
- lokális koordinátabázis, 45
- lokálisan Lipschitz-függvény, 80
- Lorentz-feltétel, 209
- mérhető mennyiségek, 233
- mérték (gauge) szabadsági fokok, 176
- mértékekiválens ábrázolás, 208
- mértékinvariáns, 242
- mértékinvariáns mennyiségek, 236
- mértékválasztás, 200, 234
- marginálisan csapdázott felület, 307
- Maxwell-elmélet, 206
- megfeleltetési elv, 177
- megszámálható lokálisan véges
  - atlasz, 136
- metrika, 61
  - Christoffel-féle szimbólumok, 84
  - gömbszimmetrikus, 293
  - globális létezése, 136
  - konformisan sík, 292
  - Lorentz-metrika, 63
  - metrika által meghatározott
    - izomorfizmusok, 64

- Riemann-metrika, 63
- szignatúra, 63
  - Lorentz-féle, 139
  - Riemann-féle, 139
- négyessebességvektor, 214, 309
- nagy bumm (ősrobbanás), 269
- nemdegenerált, 62
- nemlineáris hullámegyenlet, 196
- nemlokális, 233
- neutronsillag, 315
- Newtoni határeset, 211
- párhuzamos eltolás, 69
- parakompakt, 136
- parakompakt topologikus tér, 32
- Poincaré-lemma, 152
- Poisson-egyenlet, 187, 213
- próbarészecske, 235
- próbatest, 194, 213
- radiális fényszerű geodetikus, 302, 307
- relatív hosszváltozás, 244
- relatív fázisváltozás, 234
- relatív gyorsulás, 124, 238
- Ricci-féle forgási együtthatók, 99
- Ricci-tenzor, 92, 195, 310
- Riemann-metrika
  - állandó görbületű, 254
- Riemann-tenzor, 92
  - árapály komponensei, 237
  - algebrailag független elemek, 93
- sajátidő, 214
- Schwarzschild-metrika, 324
- Schwarzschild-téridő, 287, 308
  - eseményhorizont, 308
  - férgelyuk, 308
  - feketelyuk-tartomány, 308
  - maximális analitikus kiterjesztés, 301
  - próbatestek és fotonok mozgása, 294
- skalárgörbület, 92
- sokaságok
  - irányíthatóság, 152
- sugárzási mérték, 222, 227, 237
- szignatúra, 63
- szimmetriatranszformáció, 136
- tökéletes folyadék, 174
  - állapotegyenlet, 309
- tökéletes folyadékok, 264
- tömegeloszlás második momentuma, 221
- táguló univerzum, xi
- téregyenletek, 179, 183
- térfogati forma, 162
  - definíció, 162
  - tulajdonságai, 164
- téridő, 173
  - fizikai meghatározás, 26
  - matematikai meghatározás, 27
- téridő geometriája, ix
- téridőmodell, 176
- térkép, atlasz, 36
- tenzormező, 55
  - $C^k$ -osztályú, 55
  - antiszimmetrikus, 57
  - egyparaméteres variáció, 181
  - szimmetrikus, 57
- tenzorok
  - előretelése, 131
  - komponensei, 52
  - kontrakciója, 50
  - szorzata, 50
  - transzformációja, 52
  - visszahúzása, 131
- Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-egyenlet, 314
- topologikus tér, 28
  - folytonos leképezés, 29
  - hányadostér-topológia, 29
  - Hausdorff-tér, 30
  - homeomorfizmus, 29
  - indukált topológia, 29, 30
  - kompakt részalmaz, 31
  - nyílt lefedés, 31
  - parakompakt topologikus tér, 32
  - szétválaszthatósági axiómák, 30
  - szorzat topológia, 29
- trace-megfordított, 205
- transverse-traceless-mérték, 229
- TT-tenzor, 231

vöröseltolódási faktor, 328  
variációs elv, 179  
vektormező integrálgörbéi, 104  
vektormezők kommutátora, 106  
vektorpotenciál, 227  
vektorterek  
    érintőtér, 43

    duális tér, 45  
    iránymenti derivált, 41  
Virgo detektor, 238  
vonalelem, 62

Weyl-tenzor, 93, 195, 196







## **Rácz István**

A Wigner Fizikai Kutatóközpont  
tudományos tanácsadója, az MTA  
doktora, címzetes egyetemi tanár

Az általános relativitáselmélet a gravitációs kölcsönhatás – kísérletek által a többi fizikai elmülethez viszonyítva is nagyon nagy pontossággal igazolt – klasszikus geometrizált elmélete. Klasszikus abban az értelemben, hogy a kvantumfizika eszköztárára semmilyen formában nem épít. A klasszikus jelző ugyanakkor furesán is hat, hiszen ez az elmélet alapjaiban rázta meg a korábbi térről és időről kialakított elképzeléseinket. A teret és az időt már a speciális relativitáselmélet egymásba ötvözte, és egy merőben új fogalommal, a téridővel helyettesítette. Az általános relativitáselmélet ennél lényegesen tovább megy, hiszen nem csupán az anyag történetének egy egyszer és mindenkorra rögzített geometriai háttéren realizálódó leírására vállalkozik, hanem egy impozáns, a modern fizika elvárásaival is összeegyeztethető modelljét kínálja az anyag és geometria kölcsönös meghatározottságának.

Jelen könyv megírásával elsősorban azon olvasóknak szeretnék segítséget nyújtani, akik a fizikával kapcsolatos ismereteiket az Einstein-féle gravitációelmélet vagy ahogy szintén szokás utalni rá az általános relativitáselmélet elvi, matematikai és technikai eszköztárának megismerésével kívánják bővíteni. A könyv lényegében az Eötvös Loránd Tudományegyetem elméleti fizikai doktori iskoláján tartott előadásaimra épül. Ugyanakkor fontos azt is kiemelni, hogy a könyv megírása során folyamatosan törekedtem az új fogalmak szisztematikus kiépítésére, melynek köszönhetően (reményeim szerint) minden az analízisben elemi jártassággal rendelkező olvasó jó eséllyel kezdhet hozzá az általános relativitáselmélet matematikai alapjaival történő ismerkedéshez.

ISBN 978-963-9782-39-6

A könyv kiadásra történő előkészítése a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében történt. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.