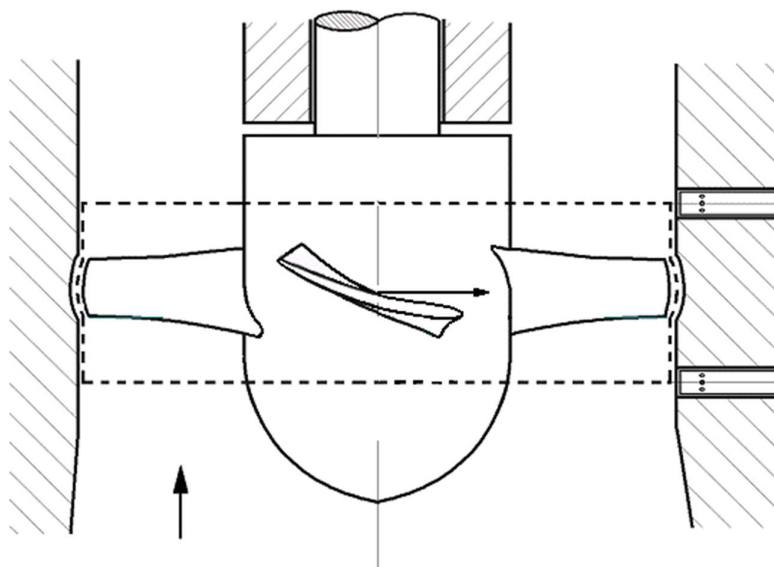


FÁY ÁRPÁD

BEVEZETÉS A NEWTONI KONTINUUMMECHANIKÁBA

áramlástani és vízgépes példákkal



Tartalom	Oldal
Tartalom, Lektorok, Előszó, Köszönet, Kulcsszavak, Jogvédelem, Jelölések	2
Newtoni kontinuummechanika	
1. Alapfogalmak	6
Test és tömeg. Newton törvényei és az erők. Euler törvényei. Általános tömegvonzás. Fizikai vonatkoztatási rendszer és a kontinuum koordinátarendszere. Naprendszer. Tehetetlenségi erők. Földi rendszer. Nehézségi erő. Pontossági igény. Inerciarendszer. Felületi erők, feszültségek.	
2. Általános axiómák	26
A newtoni kontinuum definíciója: (a) axiómák. Cauchy törvényei. Stacionárius, instacionárius, kvázistacionárius mozgás. Általános tömeg és erő eloszlásokra: (b) axiómák. Kinematikai részletek.	
3. Az axiómák rögzített térfogatokra	38
Rögzített térfogatokra: (c) axiómák. Stacionárius és kvázistacionárius esetekre: (d) axiómák. Impulzuserők.	
4. Általános differenciálegyenletek	45
Az egyenletek levezetése: (e) és (f) axiómák. Általános differenciálegyenletek: (g) axiómák.	
5. Szakadási felületek	47
Szakadási feltételek: (h) axiómák. Tételek szakadási felületekre. Elsőfajú szakadási felületek. Példák.	
6. Összefoglalás	57
Az axiómák rendszere. Szakadási réteg és felület. Alkalmazási határok.	
Kiegészítések	
7. Mozgó koordinátarendszer	59
Koordináta transzformáció. A sebesség és a gyorsulás képlete. A mozgó koordinátarendszerek tétele.	
8. Anyagi egyenletek	63
Sűrűségek. Lineárisan rugalmas szilárd test Hooke törvénye. Sűrűdásmentes folyadék. Lineárisan viszkózus folyadék Stokes törvénye. A turbulens áramlás Reynolds feszültségei.	
9. Speciális differenciálegyenletek	70
Hooke törvényén alapuló egyenletek. Összenyomhatatlan folyadék. Euler egyenlete sűrűdásmentes folyadékokra. Navier-Stokes egyenlet viszkózus folyadékokra. Reynolds átlagolt egyenlete turbulens áramlásra.	
10. Transzport elmélet	74
Transzport szakadás nélkül. Transzport szakadással.	
11. Energia	76
Az energia fogalma és fajtái. Energiamegmaradás. Ideálisan rugalmas szilárd test. A mechanikai energiatétel folyadékokra. A termodinamika első főtétele: (IVa) és (IVh) axióma. Lökéshullám levegőben.	
Áramlástan és vízgépek	
12. A sűrűdásmentes folyadék áramlástan	89
Fő tételek levezetése. Síkáramlás. Szárnyszelvények. Knapp ciklus. Síkbeli és térbeli peremelem feladatok.	
13. A valóságos folyadék áramlástan	106
Lamináris, turbulens. Hosszú cső. Körhenger. Kármán -féle örvények. Coanda effektus. Szárnyszelvények.	
14. Vízgépek erőhatás számításai	116
Szárnylapátos szivattyú járókerék alapegyenlete. Euler-Segner egyenlet. Szivattyú talpcsapágyára ható erő.	
15. Vízgépek sebességeloszlás számításai	120
Forgásszimmetrikus áramlás. Jelleggörbe számítás. A peremelem módszer módosítása.	
16. Vízütés számítás	125
Függelék: Vektor- és tenzorszámítás	
17. Alapműveletek	132
Vektorok és tenzorok értelmezése. Alapműveletek. Függvények. Differenciálhányadosok. Integrálás.	
18. Kontinuummechanikai bizonyítások vázlata	144
Az (a) axiómák matematikai feltételei. A (c) axiómák levezetése. A (g) axiómák levezetése.	
19. Vektor és tenzor algebra	147
20. Vektor és tenzor analízis	150
21. Integráltételek	153
22. Potenciálmélet	155
23. Segédváltozós integrálok differenciálása	156
Utószó, Axiómák, Táblázatok, Példák, Ábrák, Irodalom, Névmutató, Tárgymutató, Tartalom	
	157

Lektorok:

Dr. **Könözy László**, PhD, PhD, okl. gépészmérnök, a Cranfield-i Egyetem (Egyesült Királyság) oktatója és kutatója.

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék oktatói: Dr. **Paál György** az MTA doktora, tszv. egyetemi tanár, okl. matematikus, mérnök, Dr. **Hegedűs Ferenc**, PhD, docens, okl. gépészmérnök, Dr. **Hős Csaba**, PhD, docens, okleveles gépészmérnök, Dr. **Halász Gábor**, PhD, műsz. tud. kand., professzor emeritus, okl. gépészmérnök, okl. alkalmazott matematikus, **Klapcsik Kálmán**, doktorjelölt, gépészmérnök, MSc, **Erdődi István**, doktorjelölt, gépészmérnök, MSc, Dr. **Csizmadia Péter**, PhD, adjunktus, gépészmérnök, MSc, Dr. **Kristóf Gergely**, PhD, docens, okl. gépészmérnök, **Nagy Péter**, doktorjelölt, gépészmérnök, MSc, Dr. **Tóth Brigitta**, PhD, adjunktus, okl. építőmérnök, Dr. **Kullmann László**, PhD, műsz. tud. kand., c. egyetemi tanár, okl. gépészmérnök, okl. alkalmazott matematikus, **Varga Roxána**, doktorjelölt, alkalmazott matematikus, MSc.

Előszó

A *newtoni kontinuummechanika* a környezetünkben található szilárd testek, folyadékok és légtömegek mozgásának fizikai törvényeivel foglalkozik. Ezeken alapul szerszámaink, gépeink, járműveink működése, épületeink állékonysága, több vízügyi, meteorológiai, orvosi és más tevékenységünk. A tanulmányozására sok szakkönyv rendelkezésre áll, mégis hasznosnak tűnt egy *bevezető* jellegű könyv írása, melynek *fizikai megállapításai* középiskolai tanulmányok alapján is érthetők, *matematikai* szempontból viszont megfelel a magyar műszaki és természettudományi egyetemek szintjének.

A GANZ gépgyárban 41 évig *szivattyúk és vízturbinák* áramlástani és szilárdsági fejlesztésével foglalkoztam. Kollégáimmal együtt végzett munkánk nagy értékű gépek gyártásához kapcsolódott, nem hibázhattunk. Ez biztos elméleti ismereteket igényelt, aminek a *mechanika alapjait* érintő része itt bemutatásra kerül. Tevékenységünk alapján a gyár jó hatásfokú, a nemzetközi versenyben is sikeres vízgépeket gyártott. A könyv ezek *ipari gyakorlatán* alapul.

Egyszerűség kedvéért a könyv *csak mechanikai* hatásokat tárgyal. Villamos, mágneses, kémiai, nukleáris, relativitáselméleti, kvantummechanikai, statisztikus-mechanikai és nanotechnikai hatások a könyvből ki vannak zárva. A szilárd testek és a közel összenyomhatatlan folyadékok törvényeit *hőtani fogalmak nélkül* tárgyaljuk, ami előnyös az ezekkel foglalkozó szakembereknek. A teljesség kedvéért azonban néhány *hőtani és energetikai* fogalomra is kitérünk, de csak érintve, mert a könyv egyik célkitűzése, hogy minél rövidebb úton vezessen *áramlástani és vízgépes* példákhoz.

A newtoni kontinuummechanika 20. századi igényeket is kielégítő axiómarendszerét Noll [2] állította össze *folytonos függvényekre* alapozva. Az ipari gyakorlatban viszont sok *szakadási felülettel* is találkozunk, ezért ezeket részletesen tárgyaljuk. A könyvben szereplő összes alapegyenlet megtalálható Truesdell és Toupin monográfiájában [3] a tudománytörténeti háttérükkel együtt.

2018. december 31.

Dr. Fáy Árpád

matematika-fizika szakos okleveles középiskolai tanár (ELTE)¹,
erőgépész szakos gépészmérnök (BME), egyetemi doktor (BME),
a műszaki tudományok kandidátusa (MTA),
41 évig vízgép fejlesztő mérnök a GANZ gépgyárban,
15 évig félállásban a megújuló energiaforrások előadója (ME),
egyetemi docens, a gépészmérnöki kar aranyfokozatú kiegészítője (ME),
Lampel Hugó (vízügyi) díjjal kitüntetett gépészmérnök.

¹ ELTE = Eötvös Lóránd Tudományegyetem,
BME = Budapesti Műszaki Egyetem, újabban BMGE = Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
MTA = Magyar Tudományos Akadémia,
ME = Miskolci Egyetem,
GANZ = GANZ Mozdony Vagon és Gépgyár, GANZ - MÁVAG, GANZ Energetika.

Köszönet

Tisztelettel emlékezem *Kresznerics Gyula* karcagi gimnáziumi tanárra, aki matematikai érdeklődésemet felkeltette és tanulmányaimat támogatta, *Hajós Györgyre* az ELTE professzorára, akitől a vektor- és tenzorszámítást tanultam, *Turán Pálra* az ELTE professzorára, akinek a szemináriumai matematikai gondolkodásomat fejlesztette, *Pattantyús Á. Gézára*, *Gruber Józsefre*, *Varga Józsefre* és *Körmendi Istvánra* a BME professzoraira, akiktől műszaki szemléletet nyertem, *S.P. Hutton* Southampton-i professzorra, aki bevezetett az angol tudományos életbe, valamint *Kozák Imrére* az ME professzorára, aki a könyvet hasznos tanácsokkal segítette.

Köszönet illeti *Czibere Tibort* az ME professzorát, aki ipari fontosságú áramlástanai számításokat fejlesztett ki a GANZ gyárban és később a Miskolci Egyetemen is, amelyek döntően befolyásolták a könyv szemléletét. Köszönöm *Szenthe Jánosnak* az ELTE professzorának, hogy megismertetett a modern differenciálgeometria módszereivel és Noll munkásságával. Hálás vagyok *Könözy Lászlónak* a Cranfield-i egyetem professzorának, aki a könyv elkészítését a kezdetektől fogva végigkísérte, és a lektorálás során sok hasznos szakmai tanáccsal látott el, amelyeket a végleges változat megírásakor figyelembevettem. Köszönetemet fejezem ki *Szeidl Györgynek* az ME professzorának, valamint *Lajos Tamásnak*, *Paál Györgynek*, *Vad Jánosnak* és *Környey Tamásnak* a BMGE professzorainak a könyv iránti megtisztelő érdeklődésükért.

Hálás vagyok GANZ gyári kollégáimnak, *Trenka Ernő*, *Szalay Gyula*, *Czibere Tibor*, *Nyíri András*, *Hajdú Sándor*, *Csemniczky János*, *Zombor Csaba*, *Hargitai Bálint* és *Józsa István* gépészmérnököknek, akiknek alkotó légkörében kialakult a könyv szemlélete.

Ugyancsak hálás vagyok kollégáimnak a Miskolci Egyetemen, *Czibere Tibor*, *Nyíri András*, *Szabó Szilárd*, *Baranyi László*, *Kalmár László*, *Lakatos Károly*, *Tolvaj Béla*, *Schifter Ferenc*, *Karaffa Ferenc* és *Szamosi Zoltán* professzoroknak, akik az oktatás igényes szintjét megteremtették.

Külön köszönöm a *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Hidrodinamikai Rendszerek Tanszéke* oktatóinak, hogy a könyvet lektorálták és hasznos tanácsaikkal segítettek.

Tudom, hogy ezzel a hosszú felsorolással sem sikerült mindenkit megemlíteni, de befejezésül még megköszönöm feleségemnek, *Fáy Péter Emesének* a türelmét és gondoskodását, ami nélkül a könyv nem született volna meg.

Kulcsszavak

Mechanika, kontinuum. Newton, Euler, Cauchy, Noll, Truesdell és Toupin. Hooke, Navier-Stokes, Reynolds, Prandtl, Knapp, Kármán, Coanda, Segner, Csanady. Parciális differenciálegyenletek, szakadási felületek, szakadási rétegek. Rugalmas test, áramlástan, súrlódásmentes folyadék, viszkózus folyadék, határréteg, lamináris áramlás, turbulens áramlás, vízgépek, szivattyúk, vízturbinák, vízütés.

Jogvédelem

A szöveg részei csak a szerző előzetes hozzájárulásával használhatók fel más dokumentumokban. Copyright dr. Fáy Árpád, fayarpad33@gmail.com.

Jelölések

A *skalárokat* vékony dőlt betű (z, m, F), a *vektorokat* álló félkövér kisbetű ($\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{f}$), a *tenzorokat* álló félkövér nagybetű ($\mathbf{I}, \mathbf{F}, \mathbf{S}$) jelöli. Az egyenleteknek, ábráknak és a példáknak első számjegye a *fejezet sorszáma*. Az egyszer előforduló jelöléseket a szöveg magyarázza, itt a többször előfordulók vannak felsorolva.²

\mathbf{r}, \mathbf{x}	helyvektor
$r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 $	két pont távolsága, hengerkoordinátáknál a sugár
z	a Föld felszínéhez rögzített koordináta-rendszerben a függőleges koordináta
L, S, V	vonal, felület, térfogat (angol: <u>L</u> ine, <u>S</u> urface, <u>V</u> olume)
A	szelvényterület (<u>A</u> rea)
\mathbf{e}	egységvektor
\mathbf{n}	felületi <u>n</u> ormál egységvektor
α	szög, térfogat látószöge
\mathbf{I}	az azonosság tenzora (<u>I</u> dentivity)
t	idő (<u>t</u> ime)
\mathbf{v}	sebesség általában (<u>v</u> elocity)
v_n	a \mathbf{v} vektor felületi <u>n</u> ormálisra eső vetülete
\mathbf{c}	abszolút sebesség egy álló rendszerhez képest
\mathbf{w}	relatív sebesség egy mozgó rendszerhez képest, példákban hullámsebesség
\mathbf{u}	felület pontjának sebessége, forgó rendszerben kerületi sebesség
u_{nD}	szakadási felület (<u>D</u> iscontinuity surface) <u>n</u> ormális irányú sebessége
\mathbf{a}	gyorsulás (<u>a</u> cceleration)
m	tömeg (<u>m</u> ass)
\dot{m}	felületdarabon időegység alatt átlépő tömeg
ρ	sűrűség
\mathbf{g}	tömegegységre ható erő vektora (Földi rendszerben nehézségi gyorsulás)
\mathbf{f}	erő (<u>f</u> orce)
\mathbf{F}	feszültségtenzor
\mathbf{S}	folyadékokban <u>s</u> úrlódási tenzor
σ	húzófeszültség
τ	nyírófeszültség, idő segédváltozó
p	nyomás (<u>p</u> ressure)
h'	áramlási veszteség folyadékoszlop magasságban
E	energia (<u>e</u> nergy), Young modulusz
E_h, E_m, E_a, E_b	<u>h</u> elyzeti, <u>m</u> ozgási, <u>a</u> lakváltozási, <u>b</u> első energia
L_{kfe}	munka (<u>L</u> abour), $kfe =$ <u>k</u> ülső <u>f</u> elületi <u>e</u> rők
D	disszipáció (<u>D</u> issipation), csőátmérő
P	teljesítmény (<u>P</u> ower)
T	abszolút hőmérséklet (<u>T</u> emperature), időtartam
ω	szögsebesség
μ	dinamikai viszkozitás, Lamé-féle állandó
ν	kinematikai viszkozitás, Poisson tényező
λ	csőszúrlódási tényező, Lamé-féle állandó
φ	sebességpotenciál
ψ	tetszőleges fizikai mennyiség, skalár, vektor, vagy tenzor
ψ^+, ψ^-	a szakadási felület két oldalán ψ határértékei
$[\psi]$	$[\psi] = \psi^+ - \psi^-$, a ψ ugrása a szakadási felületen
$\left. \frac{d\psi}{dt} \right _{t=t_1}$	a differenciálhányados utáni vonal mögött jelezzük, hogy hol kell számítani (ψ deriváltját t szerint, a $t = t_1$ helyen)

²A magyar mechanikai szakirodalom hagyományos jelölései a latin szavak kezdőbetűinek felelnek meg, amelyek majdnem azonosak az angol elnevezések kezdőbetűivel, ezért itt az utóbbiakat is említjük, ha a megjegyzést könnyítik.

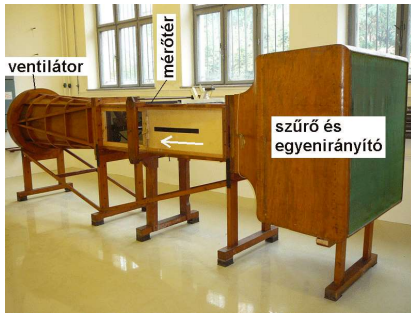
Newtoni kontinuummechanika

1. fejezet. Alapfogalmak

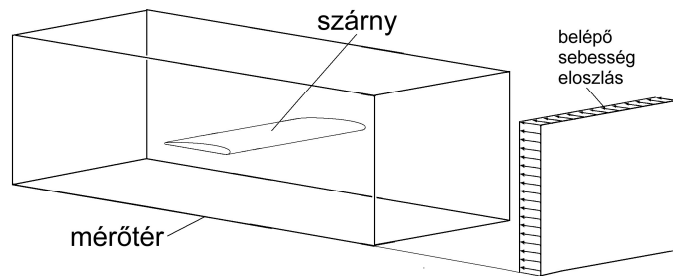
Test és tömeg

Amikor egy fizikai vagy műszaki problémát a mechanika elméletével kívánunk megoldani, először **elméleti mechanikai modellt** állítunk fel (1.1. példa). A fizikai térben levő valóságos testek (1.1. ábra) *helyett* elképzelt testek együttesére (1.2. ábra) fordítjuk figyelmünket. Az elméleti modellt *idealizálással* teremtjük meg (a valóságos testek geometriai hibáitól, és például a felületi érdességétől eltekintünk), és megfontolt módon elhanyagolásokat teszünk (például kicsiny erőhatásokat elhagyunk). Azon testek együttesét, amelyeknek mozgását és a rájuk ható erőket tüzetesen vizsgálni kívánjuk: **mechanikai rendszernek** nevezzük (1.1. példa).

1.1. példa. Szélcsatorna elméleti mechanikai modellje



1.1. ábra. Szélcsatorna fényképe, BMGE ³



1.2. ábra. A szélcsatorna elméleti mechanikai modellje

A szélcsatornában (1.1. ábra) egy szárny körül kialakuló áramlást vizsgálunk. A levegő a teremből szűrőn, egyenirányítón és a mérőtéren keresztül jut az áramlást fenntartó ventilátorba. A szélcsatorna egyik lehetséges *elméleti mechanikai modelljét* (1.2. ábra) úgy alkotjuk meg, hogy a vizsgálat szempontjából lényegtelen elemeket (egyenirányító, ventilátor) elhagyjuk. **Mechanikai rendszernek** a *mérőtér belsejét* választjuk (1.2. ábra). Határai a szélcsatorna falainak belső felülete, valamint az áramlás belépő és kilépő szelvénye. A belépő szelvényen a belépő sebességeloszlást egyenletesnek tekintjük (a szélcsatorna minőségi mutatója a minél egyenletesebb beömlés). A rendszerben két testet különböztetünk meg: a szárnyat és a körülötte áramló levegőt.⁴ A szárny felülete *szakadási felület*, amin képzeletben *merőlegesen* áthaladva az anyag sűrűsége ugrik.

Az elméleti modell megalkotásánál első feladatunk **testek** azonosítása. Konkrét feladat esetén általában úgy járunk el, hogy adott (például kezdeti) időpillanatban kijelöljük a *mechanikai rendszer határát*, és a belsejét matematikailag jól kezelhető felületekkel felosztjuk. A felületekkel határolt, anyagot tartalmazó térfogatok a *testek*. A különböző anyagi minőségű térfogatokat rendszerint különböző testeknek tekintjük. Minden mechanikai rendszer így testek együtteséből áll (szilárd, folyékony vagy légnemű testekből), amelyek a határáig kitöltik a rendszert.

A *geometriában* a testek az időtől függetlenek. A *mechanikai test* az idő múlásával a térben mozog (vagy áll), és a mozgása során az azonosságát (nevét) megtartja. A mechanikai test tehát *időfüggő*, de *rögzített időpillanatban* a mechanikai testet a geometria módszereivel kezeljük (felszín, térfogat számítása). A mechanikai test lehet *valóságos* (1.1 ábra), vagy *elméleti* (1.2. ábra). A *valóságos testek* atomos felépítésűek és a tulajdonságaikat kísérletekkel fürkesszük. Az *elméleti testek* mozgását a valóságos testekkel végzett kísérletekből leszűrt törvények (axiómák), valamint a feladat (geometriai és fizikai) adatai alapján *számítjuk*. Az elmélet alkalmazásai (a számítási eredmények gyakorlati hasznosításai) szintén *valóságos testek* (gépek, épületek, vízrendszerek, légtömegek).

³A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Áramlástan Tanszékének NPL jelű szélcsatornája.

⁴A mérőtérben tartózkodó légtömeget is "testnek" tekintjük, a *mechanikai test* (alábbi) értelmezése szerint.

A mechanikai modell kialakításánál arra törekszünk, hogy az elméleti testekkel végzett számítás minél jobban közelítse a valóságot. Fontos szempont azonban az is, hogy a modell jól számítható legyen. A modell akkor sikeres, ha a számítás és az ellenőrző mérés jól egyezik.

Newton a mechanikát megalapozó könyvét⁵ így kezdi:

"I. meghatározás: *Az anyag mértéke a mennyisége; ezt a mennyiséget az anyag sűrűsége és a térfogata együttesen határozza meg.*"

És így folytatja: "Ha a levegő kétszer sűrűbb és a térfogata is megduplázódik, akkor négyszeres mennyiségű. ... A továbbiakban ezt a mennyiséget testnek vagy *tömegnek* fogom nevezni. Ez a test súlya segítségével határozható meg. Ingával végzett nagyon pontos kísérletekkel megállapítható, hogy a tömeg a súllyal arányos mennyiség."

Tehát *egyenletes* sűrűségű test esetén Newton magyarázata alapján:

$$m = \rho V, \quad (1.1)$$

ahol m a test tömege (kg), V a test térfogata⁶ (m^3), és ρ a sűrűsége (kg/m^3).

Egyenlőtlen sűrűségeloszlású test esetén azonban Newton "együttesen határozza meg" kifejezését úgy értelmezzük, hogy *a tömeg a sűrűség térfogati integrálja*⁷:

$$m = \int_V \rho dV. \quad (1.2)$$

ahol $\rho(\mathbf{r})$ a *sűrűségeloszlás* függvény (\mathbf{r} a helyvektor V -ben).

Az (1.1) egyenlőséget az iskolai tankönyvekben általában a *sűrűség* definíciójára használják. Ez didaktikai szempontból indokolt, mert a testek tömegét a tanulók a mindennapi életből jobban ismerik. Newton viszont a sűrűséget tekintette ismert fogalomnak, és az (1.1) egyenlőséggel a *tömeget* definiálta, ami így az általa kifejtett elmélet kiinduló pontját jobban érthetővé tette, és óvatos fogalmazása lehetőséget adott az (1.2) szerinti kontinuummechanikai általánosításra is. (Ezt követték Noll [2], Truesdell [3], és sokan mások.)

Az (1.2) egyenlőség szemléletes jelentése: Ha a $\rho(\mathbf{r})$ függvény változik a hely függvényében (például a szélcsatornában a szárny körül) akkor a V térfogatot sok kicsiny dV térfogatú részre osztva, a dV térfogatokban a $\rho(\mathbf{r})$ függvény feltehetőleg már alig változik, a dV térfogatban a sűrűség szinte egyenletes. Ezért a kis térfogat akármelyik pontjánál érvényes ρ sűrűséggel a ρdV szorzat (az (1.1) képlet alapján) a dV térfogat tömegét jól közelíti. A ρdV szorzatok *összegében* pedig felismerhető az (1.2) térfogati integrál *közelítő összege*⁷. Ez a felosztás finomításával az integrálhoz tart, amit Newton után a test tömegének nevezünk. A fizika és a matematika így kapcsolódik össze.

Az (1.2) szerinti definíció megnyitja az utat a kontinuummechanika felé.

A **kontinuum** szó alapjelentése: *folytonosan eloszló anyag*. A *valóságos* testek anyagát a köznap életben általában ilyennek *érzékeli*ük (például a gyerekek gyurmáját, vagy a nyugvó vizet). A kontinuum anyaga a teret *hézagmentesen* tölti ki. Ez úgy is fogalmazható, hogy ha a kontinuumban *akármilyen kicsiny* dV térfogatot szemlélünk is ki, abban mindig találunk egy kicsi tömeget.

Elméleti testek (az elméleti mechanikai modellben elképzelt testek) esetén a kontinuumnak ez a sajátsága könnyen biztosítható, mert a $\rho(\mathbf{r})$ függvényt a modellt felállító szakember adja meg (például $\rho(\mathbf{r}) > 0$ *folytonos* függvénnel).

Valóságos testek (a valóságos térben atomokból felépülő testek) esetén a helyzet bonyolultabb. Képzeljük azt, hogy a megszokott távolságoktól egyre kisebb hosszléptékek felé haladunk. A testeket

⁵A címe "*Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*": a természetfilozófia matematikai elvei, 1687-ben adták ki először. Az idézetek kitűnő magyar nyelvű ismertetéséből [1] származnak.

⁶A jelölés az angol *mass* = tömeg, *Volume* = térfogat után.

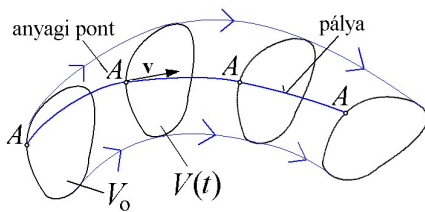
⁷A térfogati integrál matematikai értelmezése a (17.47) egyenletnél szerepel.

először kontinuumként *érzékeljük*. Egyre kisebb léptékek felé haladva azonban az $a = 10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nanométer}$ hosszúságnál elérjük az atomok átlagos távolságának nagyságrendjét. Itt a tér kitöltöttsége megváltozik, az atomi részek térbeli elhelyezkedése lényegesen különbözik az "egyenletesen elkent anyag" koncepciójától. A gyakorlati számításokat azonban *sokkal nagyobb testekre* végezzük, melyekre a kontinuum fogalmai *közelítésként* jól alkalmazhatók.⁸

A műszaki és kereskedelmi gyakorlatban a *valóságos testek* tömegét *súlyméréssel* állapítják meg^{9,10}. Az *elméleti testek* tömegét pedig (a mechanikai modell összeállításánál) az (1.2) egyenlettel és az anyag ismert sűrűségével számítjuk (lásd a 8. fejezetben).

Az elméleti modellben a *rendszer határáig terjedő térrészt* (1.1. példában a mérőtér belsejét) *egyetlen kontinuumnak* tekintjük. Az *elméleti testek* ennek a kontinuumnak részei (külön-külön maguk is tekinthetők kontinuumnak), és az összes elméleti test kitölti az egész kontinuumot. Az elméleti testek a határuknál érintkeznek (1.1. példában a szárny felületénél), ahol a $\rho(\mathbf{r})$ függvény ugorhat. Annak érdekében, hogy a matematikai feltételek kedvezők legyenek, a kontinuumban a $\rho(\mathbf{r})$ függvényt úgy vesszük fel, hogy a szakadási felületek között *folytonos*, és a szakadási felületeknél (a felület mindkét oldalánál) a határértékeihez tart¹¹.

A **kontinuum** másik *meghatározó* tulajdonsága az, hogy az anyag pontjai az idő múlásával, a nevükkel azonosítható módon, *pályákon* mozognak (1.3. ábrán *A*). Az ilyen pontokat **anyagi pontoknak** nevezzük. Bármely időpillanatban minden anyagi ponthoz tartozik egy **sebességvektor** \mathbf{v} (ami az anyagi pont \mathbf{r} pillanatnyi tartózkodási helyénél a pályát érinti). Rögzített t időpillanatban a *sebességeloszlást* a $V(t)$ -n értelmezett (1.3. ábra) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező jellemezi.



1.3. ábra. Anyagi pont és anyagi térfogat

Az anyagi pontnak *nincs* tömege. Az anyagi pontok térbeli *halmazainak* azonban van. Válasszunk a vizsgált mozgás kezdeti időpillanatában ($t = t_0$) a kontinuum belsejében egy tetszőleges V_0 térfogatot (1.3. ábra). Tekintsük V_0 összes pontját *anyagi pontnak*. Ezek a kontinuum sebességével mozogva a pályáikon haladnak, és egy későbbi ($t > t_0$) időpontban a $V(t)$ térfogatot foglalják el (1.3. ábra). Az anyagi pontjaikkal együtt mozgó térfogatozt **anyagi térfogatoknak** nevezzük. $V(t)$ azokat az anyagi pontokat tartalmazza (és csak azokat) amelyeket a kezdeti V_0 . A $V(t)$ térfogat $m(V(t))$ tömegét az (1.2) egyenlet szolgáltatja.

Az *anyagi térfogat* fogalmát itt *elméleti* testekre értelmeztük. Kiterjesztjük az értelmezést *valóságos* testekre is! Azt mondjuk, hogy egy *valóságos test* **anyagi térfogat**, ha *a mozgása során anyagot nem fogad be, és belőle anyag nem távozik*. Ilyen például egy eldobott kő. Anyagi térfogat egy lezárt borospalack is, de a nyitott palack nem az, amikor bort töltünk belőle. A szélcsatorna mérőtere (1.1. példa) sem az, mert a belépő szelvényén (1.2. ábra) légtömeg érkezik.

⁸A műszaki gyakorlatban a *minimális hosszmeret* jellemzően az $a = 10^{-6} \text{ m} = 1 \text{ mikron}$. (A gépészeti rajzokon a fontosabb hosszmeretek ennek egészszámu többszöröse.) Ebben a tanulmányban a *kontinuum* fogalmainak *valóságos* testekre történő alkalmazásánál *ezt* tekintjük *minimális hosszmeretnek*. Amikor a kontinuum elméletét valóságos testekre alkalmazzuk (egy gyakorlati feladat megoldása érdekében), akkor a kontinuum alapfogalmait (a helyi sűrűséget és a helyi sebességet) valamilyen (mérhető) paraméterekkel azonosítani kell. Az 1 mikronnál sokkal nagyobb befoglaló méretekkal rendelkező *valóságos testekre* ez általában nem ütközik nehézségbe. Tehát az *elméleti testeken* kívül (melyekre a kontinuum fogalmai természetszerűleg alkalmazhatók), a *nagyobb valóságos testeket is kontinuumként* kezeljük.

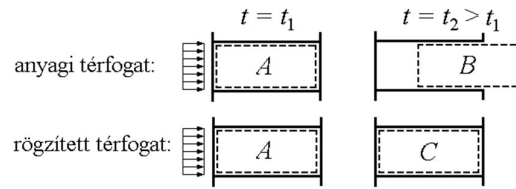
⁹Az (1.18) egyenlettel, vagy mérlegeléssel.

¹⁰Egy fizikai mennyiségnek többféle definíciója lehetséges. Az elvi definíció (mint a tömegre adott (1.2) egyenlet) a megértést segíti. A fizikai mennyiség mindegyik mérési módszere egy-egy gyakorlati definíció megfogalmazását teszi lehetővé. Több definíció esetén természetesen elvárjuk, hogy a mérési tartományuk közös részén közel ugyanazt a számértéket szolgáltatassák a mérési hibákon belül.

¹¹Igy a sűrűség ugrása (a két oldalon érvényes értékek különbsége) szintén a hely *folytonos* függvénye.

1.2. példa. Anyagi térfogat és rögzített térfogat

Egy cső belsejében az áramlás egyenletes (1.4. ábra). A felső ábrákon a t_1 időpontban szaggatott vonallal körülvett A térfogat anyagát a t_2 időpontban *anyagi térfogatként* elmozdulva látjuk, a B helyen ugyanazokat az anyagi pontokat tartalmazza, mint A -nál. Az alsó ábráson a szaggatott vonallal jelölt felületet a csőhöz rögzítjük. A *rögzített térfogat* a későbbi t_2 időpontban is a helyén marad, de C -nél más anyagi pontokat tartalmaz, mint A -nál!



1.4. ábra. Anyagi térfogat és rögzített térfogat

A sokféle *nem-anyagi* térfogat közül leggyakrabban a *rögzített* térfogatot használjuk.

Az *anyagi térfogatok* azért fontosak, mert természetes módon alkalmazhatók a szilárd testekre, és Newton is a törvényeit anyagi térfogatokra fogalmazta meg. A *rögzített térfogatok* viszont előnyösen használhatók folyadékok és gázok tárgyalásánál. Ebből a szempontból a könyv első fejezetei:

1. fejezet. *Valóságos anyagi* térfogatokra a fizikai törvények bemutatása.
2. fejezet. *Elméleti anyagi* térfogatokra az **(a)** axiómák megfogalmazása.
3. fejezet. *Elméleti rögzített* térfogatokra a **(c)** axiómák levezetése és tárgyalása.

Az *anyagi térfogatok* alapvető törvénye: *A mozgás során az anyagi térfogat tömege állandó.*¹² Ez a **tömegállandóság** vagy **tömegmegmaradás törvénye**. Az 1.3. ábra jelöléseivel:

$$m(V(t)) = m(V_0) . \quad (1.3)$$

Szilárd testek esetén ez természetes: az eldobott kő tömege röptében nem változik. Kísérletek igazolják folyadékok és gázok esetén is. Newton ismerte Galilei méréseit, maga is végzett kísérleteket, és gondolkísérleteket is¹³. Ezek alapján jutott arra a gondolatra, hogy minden "testhez", ami mindig ugyanazt az anyagot tartalmazza (tehát *anyagi térfogat*), tartozik egy tömeg, *bármilyen* is vele a mozgása során. Ezzel megalapozta a tömegállandóság törvényét.

A tömeg *alapvető sajátága*, hogy egy térfogatot felosztva: **az egész tömege a részek tömegeinek összege**. *Valóságos* testekre ez hétköznapi tapasztalat. *Elméleti* testekre pedig az (1.2) definíció alapján az integrálás alaptulajdonságaiból következik. Ezt úgy mondják, hogy a tömeg *additív* (összegződő) mennyiség.

Valóságos testek esetén a tömegállandóságnak atomfizikai magyarázata van. Az anyagi térfogat tömege (az additív sajátosság alapján) *a testet alkotó atomi részek össztömege*. Ha egy folyamatnál az atomi részek tömege nem változik, akkor a test tömege is változatlan. Mivel *mechanikai*, *hőtani* és *kémiai* folyamatoknál az atomi részek változatlanok (hőtani folyamatoknál csak a hőmozgás, kémiai folyamatoknál csak az elektronhéjak változnak), ezért ezeknél a folyamatoknál az anyagi térfogatok tömegállandósága *érvényesül*.¹⁴

Elméleti testek (kontinuumok) esetén a tömegállandóságnak logikai oka van. Azt akarjuk elérni, hogy az elméleti mechanikai modell jól közelítse a valóságos testek mozgástörvényeit. Ezért a kontinuumokban **megköveteljük** az anyagi térfogatok tömegállandóságát (2. fejezet, **(Ia)** axióma).

¹²Einstein speciális relativitáselméletében a test tömege függ a sebességétől, nem állandó. Ez a hatás azonban csak a fénysebesség közelében érvényesül, és az ilyen nagy sebességű testeket kizártuk a tárgyalásból!

¹³Ezekre mondhatta Truesdell [3]: "Experience has been the guide, thought has been the creator." A *tapasztalat* mutatta az utat, a *gondolat* volt a teremtmény.

¹⁴Atommag átalakulásoknál Einstein $E = mc^2$ képlete alapján a tömeg kicsit változik. Ezért a newtoni kontinuummechanikából a *nukleáris* folyamatokat kizártuk (bár kis korrekciókkal a tömegmegmaradás alkalmazható lenne rájuk is).

A valóságos anyagi térfogatok fő osztályai:

- a) *Szilárd testek* (kő, acél). A mozgás során az alakjuk csak kissé változik.
- b) *Közel összenyomhatatlan folyadékok* (víz, olaj). A mozgás (áramlás) során az alakjuk jelentősen változhat, de a térfogatuk alig.
- c) *Összenyomható közegek* (levegő, gázok, gőzök). A mozgás során az alakjuk és a térfogatuk is jelentősen változik. Mivel a mozgástörvényeik hasonlóak a folyadékokéhoz, ezeket esetenként "összenyomható folyadékoknak" nevezzük.

Az elméleti anyagi térfogatokra ezek alapján sokszor a következő idealizálásokat alkalmazzuk:

- a) *Merev testek*: A pontjaik egymástól mért távolsága a mozgás során nem változik.
- b) *Összenyomhatatlan testek*: A mozgás során a térfogatuk (vagy a sűrűségük) állandó.
- c) *Ideálisan összenyomható testek*: Pontosan követik a gáztörvényt (8. fejezet).

Newton törvényei és az erők

"II. meghatározás: *A mozgás mértéke a mozgásmennyiség; ezt az anyag sebessége és a mennyisége együttesen határozza meg.*"¹⁵

Ez az *impulzus* definíciója. Egyenletes sebességgel haladó testek esetén ez a sebesség és a tömeg szorzata. Egyenlőtlen sebességeloszlású testek esetén pedig úgy értelmezzük, hogy az **i impulzusvektor** a sebességvektornak a tömeg szerinti integrálja:

$$\mathbf{i} = \int_M \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{v} \rho dV. \quad (1.4)$$

M a test tömege, $dm = \rho dV$ a dV térfogat tömege, \mathbf{v} a sebesség vektora.¹⁶

1.3. példa. Autó impulzusa

$M = 1$ tonna tömegű személyautó $v = 50$ km/h sebességgel halad, mekkora az impulzusa? Merev testnek tekintjük, minden pontja ugyanazzal a sebességgel halad. SI nemzetközi egységekkel: $M = 1000$ kg, $v = |\mathbf{v}| = 13,889$ m/s. Az impulzus definíciója: $\mathbf{i} = \int_M \mathbf{v} dm$, a térben állandó \mathbf{v} sebességet kiemeljük az integrál elé, és az integrált (1.2) alapján helyettesítjük: $\mathbf{i} = \mathbf{v} \int_M dm = \mathbf{v} M$. Az impulzusvektor a \mathbf{v} sebesség irányába mutat és nagysága: $|\mathbf{i}| = vM = 13889$ kgm/s.

Newtonnál *test* és *tömeg* fogalma szorosan összetartozik (lásd az I. meghatározásnál). Ezért alábbi mondataiban a "test" szó "anyagi térfogatot" jelent.

"III. meghatározás: *Az anyag vele született belső ereje az ellenálló képesség, amellyel minden test rendelkezik. A magára hagyott test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását.*"

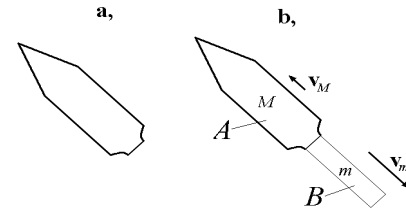
Ennek első mondatát ma úgy mondjuk, hogy *a tömeg tehetetlen*. Ha egy tömeget gyorsítani kívánunk, akkor ellenszegül (alább ezt "tehetetlenségi erőnek" nevezzük). A "magára hagyott test" azt jelenti, hogy más testtel nincs erőátadási kapcsolatban (lásd 1.4. példa).

¹⁵Az idézőjelbe tett mondatok [1]-ből származnak.

¹⁶Az (1.4) egyenlőség első integrálja *tartományfüggvény szerinti integrál*, lásd (17.57) egyenletet.

1.4. példa. Rakéta a világűrben

Egy rakéta a Naprendsztől távol (de az állócsillagokhoz nem közel) a világűrben repül. *Magára hagyott testnek* tekintjük. Az 1.5a, ábrán a sugárhajtást még nem indították el, az M_0 tömegű rakéta anyagi térfogatként (a III. meghatározással összhangban) egyenes vonalon, állandó sebességgel repül. A sugárhajtás elindítása után a b, ábrán már m tömegű égéstermék nagy sebességgel halad hátrafelé. Ekkor az A test már nem "magára hagyott test" mert kapcsolatban van a B testtel, ezért A -ra a III. meghatározás nem alkalmazható.



1.5. ábra. Rakéta a világűrben

Az $A+B$ test azonban továbbra is magára hagyott, melyre a III. meghatározás érvényes! A sebességeket olyan koordináta-rendszerre vonatkoztatjuk, ami a kezdeti időpillanatban együtt halad a rakétával, és később is ezzel a sebességgel mozog (az állócsillagokhoz rögzített koordináta-rendszerben). Ebben a rakéta kezdeti sebessége zérus. A tüzelőanyag égése a rakétában kémiai folyamat, ezért $A+B$ -re teljesül a tömegállandóság: $M + m = M_0$. Az m tömeg kiáramlása idején bármely időpillanatban az alábbi (1.5) egyenlet teljesül: $d\mathbf{i}/dt = \mathbf{f}$. Azonban egész idő alatt $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, mert $A+B$ más testtel nincs kapcsolatban. Mivel \mathbf{i} differenciálhányadosa zérus, az \mathbf{i} impulzusvektor állandó, és mert kezdetben zérus volt: $\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Tehát az időtartam végén is az impulzus (1.5) alapján: $M\mathbf{v}_M + m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, ahol \mathbf{v}_M az M tömeg sebessége az időtartam végén, és \mathbf{v}_m a sugár *átlagos* sebessége az időtartam végén. Az időtartam alatt az A test annyi impulzust nyert, amennyi a sugárral távozott. A példa a magára hagyott test fogalmát szemlélteti.

A Föld felszínén levő testek a Föld egészével mindenképpen kölcsönhatásban vannak (nehézségi erő). Ezért annak érdekében, hogy a "magára hagyott test" elképzelésére ne kelljen a világűrben kalandoznunk, *tó jegén csúsztatott tárggyal* szokták szemléltetni, melynél a nehézségi erő egyensúlyozva van, és a "magára hagyatottság" a vízszintes síkon érzékelhető: A jégen ellökött tárgy megtartja "egyenesvonalú egyenletes mozgását", bár a kicsiny súrlódás lassítja. Hasonlóan érzékelhető ez a *bi-liárdasztal* golyóinak mozgásánál is.

"IV. meghatározás: *A kívülről ható erő az a testre gyakorolt hatás, amely megváltoztatja a test nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását.*"

Ez az **erő** definíciója¹⁷. A "kívülről ható" jelző azt jelenti, hogy az erőhatás a test környezetéből származik, neki támaszkodó testtől, vagy egy (akár távolabbi) test tömegvonzásából.

Newton összefoglalta a törvényeit:

Newton I. axiómája (tehetetlenség törvénye): *"Minden test megmarad nyugalmi állapotában vagy egyenletes és egyenes vonalú mozgásában, hacsak külső erő nem kényszeríti ennek az állapotnak az elhagyására."*

Newton II. axiómája (mozgástörvény): *"A mozgás megváltozása¹⁸ arányos a külső, mozgató erővel¹⁹, és annak az egyenesnek az irányában megy végbe, amelyben ez az erő hat."*

Newton III. axiómája (akció-reakció törvénye): *"A hatással mindig egyenlő nagyságú és ellentétes visszahatás áll szemben; más szóval: két testnek egymásra gyakorolt kölcsönös hatása mindig egyenlő és ellentétes irányú."*

Newton bemutatta a mozgások összetevését és összetevőkre bontását is (lásd 17.1. ábrát). Ennek mai összegzése: **az erők vektorként kezelhetők**. Tehát beszélhetünk erők összegéről, komponensekre bontásáról, eredőjéről, skaláris és vektoriális szorzásáról, stb.

¹⁷A IV. meghatározás az erőnek csak a szerepét rögzíti. A számszerű összefüggést alább a II. axióma mondja ki.

¹⁸A mozgás "mértékét" a II. meghatározás már definiálta, így itt az impulzus megváltozásáról van szó. A törvény szerint az impulzus megváltozása arányos a külső mozgató erővel.

¹⁹Ha a testet kívülről több erőhatás éri, akkor "a külső, mozgató erő" ezek eredője.

Euler törvényei

Euler a differenciálhányados fogalmát használva a II. axiómát egyszerűbb alakra hozta:

Euler mozgásegyenlete:
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{f} = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j, \quad (1.5)$$

ahol \mathbf{i} az (1.4) egyenlettel definiált impulzusvektor, t az idő, \mathbf{f}_j a V térfogatú *anyag* *térfogatra* kívülről ható egyik erő ($j = 1, \dots, n$), n a rá kívülről ható erők száma, és \mathbf{f} a rá kívülről ható erők eredője.²⁰

1.5. példa. Egydimenziós mozgástörvény

A newtoni mozgásegyenlet iskolákban tanított (egydimenziós) alakját vezetjük le. Egyenletes sűrűségű m tömegű merev test halad egyenes vonalú pályán rögzített \mathbf{e} egységvektor irányában. Bármely rögzített időpillanatban a merev test minden pontja ugyanazzal a \mathbf{v} sebességgel halad, $\mathbf{v} = v \mathbf{e}$, de a sebesség nagysága változhat az időben: $v = v(t)$. Az (1.4) definíció alapján az impulzusa:

$$\mathbf{i} = \int_V \mathbf{v} \rho dV = \mathbf{v} \int_V \rho dV = v m \mathbf{e}, \quad (1.6)$$

ahol a térben konstans \mathbf{v} vektort kiemeltük a térbeli integrál elé, valamint $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$ -t és m -et (1.2) alapján helyettesítettük. De (1.5) alapján $\mathbf{f} = d\mathbf{i}/dt = \mathbf{e} d(vm)/dt$, mert \mathbf{e} rögzített. Tehát az \mathbf{f} erőnek F nagysága, *kihasználva, hogy m időben állandó*, és bevezetve az $a = dv/dt$ gyorsulást:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m a. \quad (1.7)$$

A megszokott egyenletet nyertük.

Az 1.5. példában az $F = \frac{d(mv)}{dt}$ egyenlőséget *anyag* *térfogatokra* vezettük le, ezért *csak akkor alkalmazható, ha $m = \text{állandó}$* . Mégis sokan arra gondolnak, hogy hátha érvényes változó tömegű térfogatokra is? Ez nem igaz (1.6. példa).

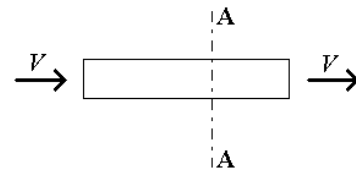
1.6. példa. Változó tömegű térfogatra (1.7)₁ nem érvényes

Egyenletes sűrűségű hasábalakú merev test egyenes vonalú pályán állandó V sebességgel halad (1.6. ábra). Tekintsük azt a térfogatot, ami már áthaladt az \mathbf{A} - \mathbf{A} síkon. Az így definiált térfogat m tömege egyenletesen nő. Erre próbáljuk alkalmazni Newton II. törvényét: $F = \frac{d(mV)}{dt}$ alakban. Az állandó V sebességet kiemeljük a differenciálás jele elé:

$$F = \frac{d(mV)}{dt} = V \frac{dm}{dt}. \quad (1.8)$$

A tömeg minden pontja egyenletes sebességgel halad, ezért az I. axióma szerint rá erő nem hathat, tehát: $F = 0$. Ugyanakkor (1.8) jobb oldala nem zérus! Tehát Newton II. axiómája - a vizsgált alakjában - az előbb definiált egyszerű változó tömegű térfogatra nem érvényes! A newtoni axiómákból azonban levezethető olyan (más alakú) egyenlet, ami változó tömegű térfogatokra is érvényes (ez a témája a 3. fejezetnek).

A példából megállapítható az is, hogy Newton II. axiómájának tanítása: $F = \frac{d(mv)}{dt}$ vagy $F = ma$ alakban *egyenértékű*, egyik sem hatékonyabb, mint a másik.



1.6. ábra. Egyenletes sebességű hasáb \mathbf{A} - \mathbf{A} síkon átlépett tömegére (1.7)₁ nem érvényes.

²⁰Az (1.5) egyenlőség úgy értendő, hogy az anyagi térfogat (1.4) egyenlőséggel meghatározott \mathbf{i} impulzusvektora a t idő múlásával változik, azaz: $\mathbf{i} = \mathbf{i}(t)$, és ennek a vektor-skálár függvénynek a *differenciálhányadosa* az erők eredője. Az (1.5) egyenlőséggel kapcsolatban meg kell még említeni, hogy az előbbiek szerint Newton II. axiómájából csak az következik, hogy \mathbf{f} arányos $d\mathbf{i}$ -vel. De *elhatározva, hogy minden fizikai mennyiséget a nemzetközi SI egységével mérünk* (az erőt Newtonban: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}$), a dimenziók használatának szabályai miatt (1.5) kifejezésébe az *egyenlőség* jelét tehetjük.

Euler az akció-reakció törvénye alapján levezette a nyomatéki egyensúly alapvető egyenletét is. A koordináta-rendszer *origójára* vonatkozó *impulzusnyomaték* ²¹:

$$\mathbf{i}_{nyomaték} = \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV, \quad (1.9)$$

ahol \mathbf{r} az origótól a dm tömeghez mutató helyvektor, \mathbf{v} és ρ a dm tömegnél a sebesség és a sűrűség.

Euler nyomatéki törvénye:
$$\frac{d\mathbf{i}_{nyomaték}}{dt} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j, \quad (1.10)$$

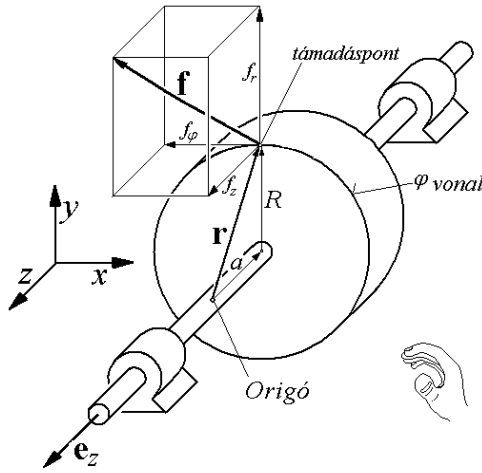
ahol \mathbf{r}_j az origótól az anyagi térfogatra kívülről ható \mathbf{f}_j erő támadási pontjához vezető helyvektor, n a ható erők száma. Az impulzusnyomaték deriváltja tehát egyenlő az erők nyomatékainak összegével.

A nyomatéki egyenlet tetszőleges origóra felírható. Ugyanis, ha (1.10) teljesül az \mathbf{r} helyvektorral, és egy másik origótól számított helyvektor $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, ahol \mathbf{a} konstans vektor, akkor az utóbbira az (1.10) egyenlet nullára redukált alakban:

$$\frac{d}{dt} \int_M (\mathbf{r} + \mathbf{a}) \times \mathbf{v} dm - \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_j + \mathbf{a}) \times \mathbf{f}_j = \frac{d}{dt} \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm - \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j + \mathbf{a} \times \left(\frac{d}{dt} \int_M \mathbf{v} dm - \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j \right) = \mathbf{0} + \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

a beszorzás, rendezés, és a kiemelések után az első két tag összege (1.10) miatt zérus, a nagy zárójel pedig (1.5) miatt zérus. A nyomatéki egyenlet tehát a másik origóra is teljesül.

1.7. példa. Tengely körül forgó tárcsára ható nyomaték



1.7. ábra. Tengely körül forgó tárcsa

A példa az (1.10) egyenletben szereplő $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ jelentését mutatja be. Csapágyazott tengelyre henger alakú tárcsát szereltek (1.7. ábra). A tárcsára csak egy \mathbf{f} erő hat ($n = 1$), a kerületén. Az origót a forgástengelyre helyezük. Az \mathbf{r} helyvektor az origótól az \mathbf{f} erő támadáspontjához vezet. Hengerkoordinátákat vezetünk be, ezek: r, φ, z . Az \mathbf{f} erő komponensei (f_r, f_φ, f_z) a támadásponton átmenő koordinátavonalak irányába mutatnak (1.7. ábra). Az f_r és f_z komponensek nem gyakorolnak nyomatékot a tengelyre, de az f_φ komponens nyomatéka az R karon:

$$M = R f_\varphi = \mathbf{e}_z (\mathbf{r} \times \mathbf{f}), \quad (1.12)$$

ahol M a forgástengelyre vonatkozó forgatónyomaték, R a támadáspont távolsága a forgástengelytől, és f_φ az \mathbf{f} erő φ irányú komponense. A z tengely \mathbf{e}_z egységvektorával szembe nézve, pozitív f_φ a matematikailag pozitív irányba forgat (az óra járásával ellentétesen). Ez megfelel a jobbkékszabálynak (jobbkezünk hüvelykujjával szembe nézve többi ujjunk a pozitív forgásirányba mutat, 1.7. ábra).

Ellenőrizzük, hogy ugyanezt az M nyomatékot kapjuk az $\mathbf{e}_z (\mathbf{r} \times \mathbf{f})$ vegyesszorzással. Bevezetve az (x, y, z) koordináta-rendszert, ebben: $\mathbf{r} = (0, R, -a)$, $\mathbf{f} = (-f_\varphi, f_r, f_z)$, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$, és a (1.7.9) egyenlet alapján $\mathbf{e}_z (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) = R f_\varphi$.

A pontra vonatkozó nyomaték és a tengelyre vonatkozó nyomaték szorosan összefügg. Ha \mathbf{f} egy erő és \mathbf{r} olyan helyvektor ami a forgástengelyen levő origótól az \mathbf{f} támadáspontjához vezet, akkor $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ egy vektor: az origóra vonatkozó nyomaték. Az $M = R f_\varphi$ pedig (1.7. ábra) a tengelyre vonatkozó forgatónyomaték, ami egy skalár szám. Az előbbieket szerint a pontra ható nyomatékból a tengelyre ható nyomaték a tengely irányába mutató egységvektorral (skalárszorzással) számítható: $M = \mathbf{e}_z (\mathbf{r} \times \mathbf{f})$.

²¹Vigyázat! Kétfajta nyomaték van: pontra vonatkozó (vektor) és tengelyre vonatkozó (skalár).

Erők osztályozása

Egy mechanikai rendszert vizsgálva az erők elnevezése: A *rendszerhez tartozó testek egymásra gyakorolt* erőhatásai a **rendszer belső erői** (például az 1.1. példa szélcsatornájában az áramló közeg által a szárnyra kifejtett erő). A rendszer testjeire azonban a rendszeren *kívül* elhelyezkedő testek is gyakorolnak erőhatásokat! Ezek a **rendszer külső erői**. A szélcsatorna esetén például a Föld külső test, ezért a Föld tömegvonzása külső erő. Megjelenhetnek külső erők a rendszer határfelületén ható feszültségekből (nyomásokból) is (például az 1.2. ábrán a mérőtér belépő szelvényén). A vizsgálatokat mozgó koordináta-rendszerben végezve a **tehetetlenségi erőket** (lásd alább), szintén a *külső erők* között kell figyelembe venni.

Az erőket *más szempontból* is szokták osztályozni. Beszélnek a testek térfogatával arányos **térfogati erőkről** (pl. súlyerő), felülettel arányos **felületi erőkről** (feszültség, nyomás), vonalhosszal arányos **vonalm menti erőkről** (felületi feszültség), és pontban ható **koncentrált erőkről** (statika). A teljes rendszert alább a 2.7. példában bemutatjuk. Kiterjedt *valóságos* testekre azonban csak *térfogati* és *felületi* erők hatnak, ezért a továbbiakban – a 2.7. példa kivételével – *csak ezeket* szerepeltetjük.

Általános tömegvonzás

Newton általános tömegvonzási törvénye, *pontszerű* m_1 és m_2 tömegű testre:

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{ahol} \quad f = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.13)$$

ahol F a két test tömegének egymásra gyakorolt vonzó erejének nagysága (N), r a távolságuk (m), és f az általános tömegvonzás tényezője (aminek értékét gondos mérésekkel a 20. század végére 4 értékes számjegyre meghatározták!). A *pontszerű* m_2 tömegre ható, a *pontszerű* m_1 tömeg vonzásából származó erő *iránya* a vonzott testtől a vonzó felé mutat.

Kiterjedt testek esetén, mindkét testet kis részecskékre bontva, és *pontszerűnek* tekintve, az (1.13) képlet alapján az általános tömegvonzásból származó erő:

$$\mathbf{F}_{2 \leftarrow 1} = \int \int_{M_2 M_1} \frac{f}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dm_1 dm_2, \quad (1.14)$$

ahol $\mathbf{F}_{2 \leftarrow 1}$ azon erő, amivel a 2-es indexű test az 1-es indexű testet vonzza, \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 a dm_1 illetve dm_2 tömegek tömegközéppontjának helyvektorai midőn az integrálás végigfut az M_1 , illetve az M_2 tömegen. Az integrálandó függvény második tényezője a dm_1 tömegtől a dm_2 tömeg felé mutató egységvektor, ez állítja be az erő irányát. (A képlet jól programozható.)

Gömb alakú testekre (1.14) analitikusan is számítható, és az érdekes eredmény az, hogy az egyik gömb által a másik gömbre ható vonzó erő az (1.13) képlettel is számítható úgy, mintha a tömegük a középpontjaikba lenne koncentrálna.

Az égitestek mozgása az *általános tömegvonzás* törvényével jól számítható. Földi tárgyak közötti általános tömegvonzás azonban rendszerint elhanyagolható (1.8. példa).

1.8. példa. Két vasgolyó általános tömegvonzása

Két $R = 0,1$ m sugarú vasgolyó érintkezve egymás mellé van téve egy gépteremben. A vasgolyók ($\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) tömege: $m_1 = m_2 = 32,67 \text{ kg}$, középpontjaik távolsága: $r = 0,2 \text{ m}$. Az (1.13) képlettel a vonzó erő: $F = 1,78 \cdot 10^{-6} \text{ N}$. Egy golyó súlya: $G = 32,0 \text{ N}$, a vonzóerő aránya a súlyhoz: $F/G = 5,56 \cdot 10^{-9}$. Az utóbbi szám nagyon kicsi, ezért: *Földi környezetben a testek közötti általános tömegvonzás a súlyerőhöz képest általában elhanyagolható.*

Fizikai vonatkoztatási rendszer és a kontinuum koordinátarendszere

A testek mozgását általában koordinátarendszer segítségével követjük. Rendszerint derékszögű Descartes koordinátarendszert képzelünk el (de szerepelhet hengerkoordinátarendszer, vagy általános görbevonalú koordinátarendszer is). A koordinátarendszerekben a 3-dimenziós euklideszi geometria szabályai érvényesülnek. Alább megkülönböztetjük (más névvel) a *valóságos* térben (1.1. ábra) felvett koordinátarendszert az *elképzelt* térben (1.2. ábra) felvett koordinátarendszertől [2].

Fizikai vonatkoztatási rendszert határoznak meg az olyan *valóságos* testek, amelyek egymástól mért távolságai az idő múlásával csak nagyon kicsit változnak. Például egy laboratórium falai, az állócsillagok, vagy egy körhinta falvai. Ezekhez a testekhez képzeletben egy koordinátarendszert rögzítve *fizikai vonatkoztatási rendszert* nyerünk [2]. A *valóságos* fizikai testek mozgását (a kísérleti mérések kiértékelését is) erre a koordinátarendszerre vonatkoztatjuk.

A **kontinuum koordinátarendszere** viszont az *elképzelt térben* a feladat kezelésére választott geometriai eszköz. A benne lévő *elméleti testek* az elképzelt kontinuum alkotó elemei.²²

Egy mechanikai feladat fizikai vonatkoztatási rendszere és a hozzá rendelt elméleti mechanikai modell koordinátarendszere ugyanarra a fizikai jelenségre vonatkoznak. A testeik egy az egyben megfelelnek egymásnak, a nevük is ugyanaz. Ezért sokszor nem érdemes a két rendszert megkülönböztetni. Például az erővektorokat (amelyeket az elméleti koordinátarendszerben számítottunk) nyugodtan oda képzelhetjük a valóságos tárgyra. Ezzel érzékletes fogalmat nyerhetünk a fizikai folyamat történéseiről, és ez elősegítheti a megértést. Azonban, ha a helyzet úgy jobban átlátható, akkor a fizikai vonatkoztatási rendszert és az elméleti tér koordinátarendszerét mindig megkülönböztetjük.

Naprendszer

Naprendszernek nevezzük a Nap, a bolygók, a holdjaik és az üstökösökből álló testek együttesét. Mivel a legközelebbi állócsillag a Naptól mintegy 4 fényévnnyi távolságban van, azt is mondhatnánk, hogy a Naprendszer az 1 fényév sugarú gömbön belüli tömegekből áll.

Az **állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszernek** nevezzük a Naphoz, az északi sarkcsillaghoz és egy másik állócsillaghoz (mint vonatkoztatási rendszerhez) rögzített koordinátarendszert. (Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert képzelünk el, az origó a Nap középpontja, az egyik tengely a sarkcsillag felé mutat, a másik csillag egy koordinátasíkra esik.)

A csillagászok a Naprendszer testeinek mozgását az állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszerben számítják. Az égitestek közötti nagy távolságok miatt az égitestek tömegét a középpontjaikba koncentrálnak. A rendszer belső erőit az általános tömegvonzás képletével számítják. Azonban ahhoz, hogy a feladat határozott legyen, meg kell adni a rendszer *külső erőit*. **Feltételezve, hogy a külső erők zérusok**, az égitestek így kiszámított pályái **igen jól követik** a bolygók mérésel meghatározott mozgását, a ma elért mérési pontosságon belül.²³

Kimondhatjuk tehát a newtoni mechanika alkalmazásának egyik *fő gyakorlati szabályát*: **A tapasztalat szerint, az állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszerben a Naprendszer testeire ható külső erők elhanyagolhatók** [2].

²²A *kontinuum* fogalmának "igazi" alkalmazási területe az *elméleti tér* (1.2. ábra). Ezért néhány szerző a kontinuum elnevezést csak elméleti testekre használja. Ebben a tanulmányban a *kontinuum* szót általában elméleti testekre alkalmazzuk, esetenként azonban, mindig egyértelműsítve, valóságos testekre is használjuk. A *fizikai vonatkoztatási rendszer* elnevezést azonban csak a *valóságos* térben felvett koordinátarendszerre alkalmazzuk.

²³Ez nem jelenti azt, hogy a Naprendszer egészére nem hat külső erő az állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszerben. Amikor a csillagászok az állócsillagok galaxszison belüli mozgását tanulmányozzák, feltételezhetnek ilyen erőt. Ez azonban csak olyan kicsi lehet, ami az eddigi tapasztalat szerint *elhanyagolható* a bolygók pályaszámításainál, és *méginkább* az a *Földi mechanikai rendszerekre* vonatkozó számításainkban (az alább ismertetett pontossági követelményekhez mérten).

Tehetetlenségi erők

A *tehetetlenségi erőket* a 7. fejezetben részletesen tárgyaljuk, itt csak felsoroljuk azokat a legfontosabb tehetetlenségi erőket, amelyek a Földnek a Nap körüli mozgásánál szerepet játszanak, és ezáltal a Földi rendszerekben figyelembe veendők. Egyúttal a tehetetlenségi erők használatának a szabályait is ismertetjük.

1.9. példa. Egyenes vonalon gyorsuló rendszer

Az 1.8. ábra szerinti autó egyenes vonalon halad "**a**" gyorsulással. A motor az első kereket hajtja, ami a talajon súrlódva (a talaj kiemelkedéseibe kapaszkodva) létrehozza a talaj által az autóra ható $f_{\text{súrlódóerő}}$ erőt (1.8. ábra). Newton II. törvénye alapján ez gyorsítja az autót:

$$f_{\text{súrlódóerő}} = m_{\text{autó}} a .$$

A gyorsulás idején az autóban ülő ember érzi, hogy a feje és a háta az üléshez nyomódik.

Az embert az ülésre nyomó erő az ember tömegére ható *tehetetlenségi erő*: $f_{\text{tehetetlenségi}}$ (1.8. ábra). Ugyanakkor az ülés is nyomja az embert $f_{\text{ülés}}$ erővel a haladás irányába, ez kényszeríti az embert arra, hogy az autóval együtt haladjon **a** gyorsulással:

$$f_{\text{ülés}} = m_{\text{ember}} a , \quad \text{és} \quad f_{\text{tehetetlenségi}} = - m_{\text{ember}} a , \quad (1.15)$$

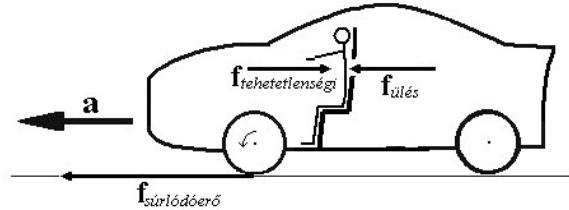
mert $f_{\text{ülés}}$ és $f_{\text{tehetetlenségi}}$ az akció-reakció törvénye értelmében egymás ellentettjei.

A jelenséget két koordináta-rendszerből szemlélhetjük:

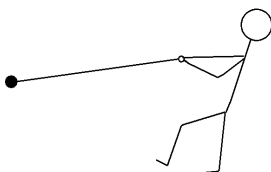
- (1) A *talajhoz rögzített* koordináta-rendszerben az autót $f_{\text{súrlódóerő}} = m_{\text{autó}} a$ gyorsítja, és az ember *mozgásegyenlete* $f_{\text{ülés}} = m_{\text{ember}} a$. A számításokat ezekkel az egyenletekkel végezve: *a tehetetlenségi erő nem jelenik meg* a számításban.
- (2) Az *autóhoz rögzített* koordináta-rendszerben az m_{ember} tömeg nyugalomban van, ezért Newton I. törvénye értelmében a rá ható erők eredője zérus kell legyen: $f_{\text{tehetetlenségi}} + f_{\text{ülés}} = 0$. (Az (1.15) kifejezéseket helyettesítve valóban zérust kapunk.) A mozgó rendszerben végezve a számításokat: *a tehetetlenségi erő szerepel* az aktív erők²⁴ között!

A jelenség egészét tekintve: az "akció" a gyorsítás, és a "reakció" a tömeg ellenszegülése. Ezt érzékeli az ember, és ezt képviseli az erőjáték számításában a tehetetlenségi erő.

A példa alapján a tehetetlenségi erők használatának *általános szabálya*: Az *álló* rendszerben a tehetetlenségi erő nem szerepel az aktív erők között. A *mozgó* rendszerben viszont ugyanolyan, mint a többi aktív (nehézségi, támaszkodási) erő.



1.8. ábra. Gyorsuló autóban ható erők



1.9. ábra. Követ forgató fiú

1.10. példa. Egyenletesen forgó rendszerben a centrifugális erő

A fonál végére kötött követ forgató fiú (1.9. ábra) hasonló módon valóságosnak érzi a kötelet és a kezét húzó **centrifugális erőt**, ami a forgásból származó tehetetlenségi erő. Ennek reakcióereje a *centripetális erő*, amivel a kötel húzza a követ (és a fiú húzza a kötelet). A *centrifugális erő* nagyságának ismert képlete:

$$F_{\text{centrifugális}} = m \frac{v^2}{R} , \quad (1.16)$$

ahol m az egyenletesen forgó test tömege, v a forgó test sebessége, és R a körpálya sugara. A centrifugális erő a körpálya síkjában a pályára merőlegesen *kifelé* mutat.

²⁴Azokat nevezzük "aktív" erőknek, amelyek gyorsulásokat hoznak létre, vagy más erők egyensúlyoznak.

1.11. példa. Egyenletesen forgó rendszerben a Coriolis erő

Egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben bármely *mozgó* testre hat a **Coriolis erő**²⁵:

$$\mathbf{f}_{\text{Coriolis}} = -m 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' , \quad (1.17)$$

ahol m a forgó rendszerben mozgó test tömege, $\mathbf{f}_{\text{Coriolis}}$ a rá ható Coriolis erő vektora, $\boldsymbol{\omega}$ a forgó rendszer szögsebesség vektora²⁶, \times a vektoriális szorzás jele, és \mathbf{w}' az m tömegnek a sebessége *a forgó rendszerben* (a képlet levezetését lásd a 7. fejezetben).

Ha az m tömeg *nyugszik* a forgó rendszerben, akkor $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$, és a rá ható Coriolis erő zérus!

1.12. példa. A Föld forgásából származó Coriolis erő

Érdekes kiszámítani, hogy a Föld forgásából származó Coriolis erő legnagyobb értéke (az egyenlítőn), a mozgó test mekkora sebességénél éri el a testre ható nehézségi erő 1 %-át? A Föld forgásának szögsebessége: $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,27 \cdot 10^{-5}$ radián/s. A megoldandó egyenlet: $0,01mg = m(2\omega)w'$, ebből $w' = 674 \text{ m/s} = 2426 \text{ km/h}$. Ez ritkán tapasztalható nagy sebesség, ezért a Föld forgásából származó Coriolis erő *általában* elhanyagolható!

Földi rendszer

Földi rendszernek nevezzük például azt, amikor egy *gépteremben* levő testeket vizsgálunk a gépterem falaihoz rögzített fizikai vonatkoztatási rendszerben. (Földi rendszert alkot egy város több kilométer méretű vízvezetékhalózata is, a Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben.) A Föld gravitációs erőtere azonban ilyen kis (több kilométeres) rendszerekben alig változik. Ezért a Földi rendszer jellemző, *meghatározó* tulajdonsága:

Földi rendszerben a nehézségi gyorsulás vektora: $\mathbf{g} = \text{állandó}$.

Ez a kikötés nagymértékben megkönnyíti a mechanikai számításokat. Ha elfogadjuk, akkor:

- A rendszerben van függőleges egyenes és vízszintes sík (\mathbf{g} -vel párhuzamos és rá merőleges).
- A nehézségi erő nagyon egyszerűen számítható (lásd alább).
- Az energiáknál nem kell kínlódnunk a gravitációs potenciállal, helyette a *helyzeti energia* fogalma mindent megold (lásd a 11. fejezetben).
- A testek súlypontja egybe esik a tömegközéppontjukkal.

A műszaki gyakorlatban a számítások nagy többségét *Földi rendszerekkel* végezzük.²⁷

A Földi rendszerekben figyelembe veendő erők:

Belső térfogati erők. A gépteremben levő testek az általános tömegvonzás törvényének megfelelően vonzzák egymást. Azonban ezen erők a Föld tömegvonzása mellett nagyon kicsik (1.8. példa): **Földi rendszerekben a tömegvonzásból származó belső térfogati erők elhanyagolhatók.**²⁸

Külső térfogati erők. A Naprendszer összes teste (a Föld is) kívül van a gépteremben. Ezért a rendszer külső térfogati erői között elvileg figyelembe kellene venni a Naprendszer összes testének tömegvonzását. **Földi rendszerekben azonban a Föld vonzása mellett a Naprendszer többi égitestének tömegvonzása elhanyagolható** (1.16. példa).²⁹

²⁵ Lásd a (7.19) egyenletben.

²⁶ Nagysága: a szögsebesség, állása: merőleges a forgás síkjára, az irányával szembe nézve a forgás az óramutató járásával ellentétesen a matematikailag pozitív irányba történik.

²⁷ Célszerű lenne a *Földi rendszer* fogalmát általánosan használni, ezért írjuk nagy kezdőbetűvel, mint a Naprendszert.

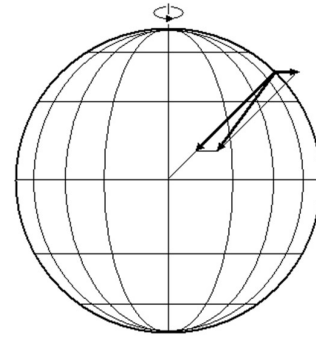
²⁸ Villamos, mágneses, és más belső térfogati erők lehetségesek, de ezeket a tárgyalásból egyszerűség kedvéért kizártuk.

²⁹ Az ár-ápály jelensége a Hold, és kisebb mértékben a Nap járásától függ. Ez arra figyelmeztet, hogy a Föld *egészére* kiterjedő mechanikai rendszerben a Hold és a Nap tömegvonzása nem hanyagolható el! Ebben \mathbf{g} is jelentősen változik! A sokkal kisebb *Földi rendszerekben* azonban \mathbf{g} állandó, a Hold és a Nap tömegvonzása elhanyagolható (1.16. példa).

Belső és külső felületi erők. A Földi rendszer egymásnak támaszkodó teste között nagy felületi erőhatások ébredhetnek. A Földi rendszer külső határoló felületén a légköri nyomásból mindig származik külső felületi erő.

Felmerül a kérdés, hogy a Földi rendszer testeire a *világűr*ből (a Naprendszeren kívüli testekből) hat-e erő? Erre a kérdésre a csillagászat már megadta a választ: *Az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a Naprendszer testeire ható külső erő elhanyagolható.* Mivel a Földi rendszer teste is a Naprendszerhez tartoznak, a világűrből rájuk ható külső erők *zérusok*, de ez csak az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben érvényes! A Földi rendszerek számításait azonban a *Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben* végezzük, ezért a Föld mozgásából származó **tehetetlenségi erőket** külső térfogati erőként figyelembe kell venni (lásd 1.10. ábrát, és a mozgó koordináta-rendszerek tételét a 7. fejezetben).

A Föld középpontja egy év alatt a Nap körül az ekliptikán körbe fut. Ebből a mozgásból származó tehetetlenségi erő elhanyagolhatóan kicsi. A Föld tengely körüli forgásából *Coriolis* és *centrifugális* erő is ébred. A Coriolis erő általában elhanyagolható (1.12. példa), a *centrifugális erő* azonban nem! Az 1.10 ábrán a Föld felszínének egy pontján tekintünk egy tömeget. Az ábrán be van rajzolva a Föld tömegvonzása (a hatásvonala áthalad a Föld középpontján) és a centrifugális erő vektora (ami az 1.10 példához hasonlóan a forgástengelyre merőlegesen kifelé húzza a felszínen levő testet). Ennek megfelelően **Földi rendszerekben a külső térfogati erő: a Föld tömegvonzásának és a Föld forgásából származó centrifugális erőnek a vektoriális összege.**



1.10. ábra. Földi rendszerben a nehézségi erő: a Föld tömegvonzása és a centrifugális erő vektoriális összege.

Nehézségi erő

Földi rendszerben **nehézségi erőnek** vagy **súlyerőnek** nevezik az *észlelhető* (mérhető) *külső térfogati erőt*.³⁰ Iránya függőőnnel vagy vízfelszínnel, nagysága például mérleggel határozható meg.

$$\mathbf{G} = m \mathbf{g} , \quad (1.18)$$

ahol **G** a **nehézségi erő** vektora (**a test súlya**), *m* a test tömege, és **g** a **nehézségi gyorsulás**.

Földi rendszerben g állandó. Kisebbs pontosságigényű számításban a nehézségi gyorsulás *nagysága*: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Nagyobb pontossági igény esetén azonban *g helyi és időbeli változásait* figyelembe kell venni (lásd az 1.13 és 1.14 példát, valamint az I. táblázatot).

1.13. példa. A nehézségi gyorsulás változása a Föld felszínén

A nagy teljesítményű vízturbinák és tározós szivattyúk helyszíni garanciális mérésénél *g helyi változását* figyelembe kell venni (ugyanis kis teljesítményhiány is nagy pénzösszeg kifizetését jelentheti!). A helyszíni átvételi mérések nemzetközi szabványa [33] előírja, hogy a vízdali teljesítmény számításában *g* változását a következő szabványos képlettel kell számítani, ahol φ a földrajzi szélesség (fok) és *z* a tengerszint fölötti magasság (m):

$$g = 9,7803[1 + 0,0053 \sin^2(\varphi)] - 3 \cdot 10^{-6} z . \quad (1.19)$$

A képlet alapján, tengerszinten, az egyenlítőn: $g = 9,780 \text{ m/s}^2$, de a $\varphi = 70^\circ$ -os szélességi körön: $g = 9,826 \text{ m/s}^2$. A *g* változása *nagyobb*, mint $\pm 0,1 \%$, ezért igényes számításban (1.15. példa) *figyelembe kell venni!*

³⁰A nehézségi erő meghatározható lenne az 1.10 ábra alapján a Föld tömegvonzásának és a centrifugális erőnek számításával is. Azonban a Föld nem gömbalakú, a "geoid" alakot is figyelembe kellene venni, továbbá a felszín magassági viszonyait is. Ezért egyszerűbb, ha a *nehézségi erő* fogalmát *mérhető* mennyiségekre alapozzuk. A mérések alapján megállapított empirikus (1.19) képlet a Föld tömegvonzása mellett a centrifugális erő hatását is tartalmazza.

1.14. példa. Földrengések

A g időbeli változása a *földrengések* idején *nagy*. Szabadon eső liftben a nehézségi gyorsulás értéke, a lifttel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben: $g' = 0$. (A nehézségi erőt ugyanis a tehetetlenségi erő ellensúlyozza, és szabadon eső liftben a tárgyakat alátámasztó erő zérus.) Földi rendszerekre a földrengések hatásait általában korábbi földrengések mérései alapján becsülik. A földrengések idején a Föld talajának nagy tömegei mozognak, és a számítások alapvető feltétele, hogy a Földi rendszer *együtt mozog* a földrengés által érintett földdarabbal. Ezért a Földi rendszerhez kötött vonatkoztatási rendszerben a \mathbf{g} vektor a földrengés idején függőleges és vízszintes irányban is változik. Magyarország szeizmikusan ugyan nyugodt terület, azonban ritkán nálunk is előfordulnak nagy rengések.³¹ A műszaki gyakorlatban nálunk is egyre inkább teret nyer a földrengésre való méretezés [43], nagy épületek, gátak, különleges gépek (pl. atomerőművi kazettaátrakók) esetén. A gépek és az épületek nagy többségének tervezésénél azonban a földrengések hatásait hazánkban nem veszik figyelembe (mert a ritkán előforduló hatásaik nem katasztrofálisak, és ellenük a *védekezés* nagyon költséges).

A pontossági igény hatása

Amikor felállítunk egy *elméleti mechanikai modellt*, világos fogalmat kell alkotnunk arról, hogy **az eredményt milyen pontossággal kívánjuk megkapni?** Ez ugyanis jelentősen befolyásolja a modellt.

1.15. példa. Vízgépek hatásfokmérése

A 21. század elején a nagy vízgépek³² garanciális átvételi méréseit³³ világszerte kismintákkal (a nagy gép geometriailag hasonló kicsinyített másával) végzik. A vizet szivattyúkkal egy mérőberendezésben keringtetik, és a víz a kisminta turbinán is áthalad. Különleges, drága műszerezéssel a hatásfokmérés bizonytalanságát a 20. század végére sikerült leszorítani $\pm 0,2 \%$ értékre. A méréseket nemzetközi szabvány szerint végzik [82], amiben minden olyan fizikai hatást figyelembe vesznek, amely $\pm 0,1 \%$ -nál erőteljesebben befolyásolná a mért hatásfokot!

Tanulság: *Vízgép hatásfokok számítását is megcélzó elméleti mechanikai modellekben csak olyan hatások hanyagolhatók el, amelyek a hatásfokban $\pm 0,1 \%$ -nál kisebb változást okoznak!*

1.16. példa. Befolyásolja-e a Hold állása a vízgép hatásfokát?

Vajon a Hold állása, ami ár-ápályt is kelt, befolyásolja-e a vízgép laboratóriumban mért hatásfokot? A hatásfok szivattyúknál egyenesen, vízturbináknál fordítva arányos a nehézségi gyorsulással. Azt kell tehát megbecsülni, hogy a Hold állása milyen hatást gyakorol a laboratóriumban mérhető g értékére. A Hold legkisebb távolsága a Földtől: 356400 km. A Föld átlagos sugara: 6372,8 km \sim 6400 km. A Hold tömege $m_{\text{Hold}} = 7,3477 \cdot 10^{22}$ kg. A vízgéplaborban egy m tömegű test távolsága a Holdtól tehát: $r = 350000$ km (1.11. ábra). Az erő az (1.13) képlettel: $F = f \frac{m_{\text{Hold}} m}{r^2} = 4 \cdot 10^{-11} \cdot m$. A test súlya: $G = 9,81 \cdot m$, így $F/G = 4 \cdot 10^{-12}$, nagyon kicsi érték. A Hold állása tehát *nem befolyásolja* a vízgépek laboratóriumi méréseit.

● Hold



1.11. ábra. A Hold állása nem hat a labor mérésére

1.17. példa. Vízgépek erőhatás számításai

Vízgépek tervezésénél szilárdsági számításokkal ellenőrzik, hogy a szilárd alkatrészek kibírják-e a terheléseket (erőket). Előre elhatározzák, hogy a számítások eredményéhez majd tervezési biztonságot fognak hozzátenni. Ha a tervezési biztonság, mondjuk, **+30 %**, akkor a számításokat elég, mondjuk **$\pm 10 \%$** pontossággal végezni. Ennek megfelelően, ilyen célú elméleti mechanikai modellekben elég ilyen pontosságra törekedni.

³¹A legnagyobb rengések: 9,0 maximális intenzitással (a magyar skála szerint, melyen a maximum 12,0), Szombathelyen (455-ben), Komáromnál (1763-ban), Móránál (1810-ben), és Piskolton (1829-ben) voltak [44]. Ilyen intenzitás esetén a földdarab *vízszintes* irányú rezgésének maximális gyorsulása: $2 - 4 \text{ m/s}^2$ [44].

³²Több száz MW teljesítményű gépekről van szó.

³³Ezzel ellenőrzik, hogy a gép teljesíti-e a garantált teljesítményt és hatásfokot. Óriási pénzek múlnak a mérésen.

I. Táblázat. Javaslat g értékére a pontossági igénytől³⁴ függően

Ha a számítás pontossági igénye $P =$	$\pm 0,1 \%$	$\pm 1 \%$	$\pm 10 \%$
akkor a nehézségi gyorsulás nagysága legyen $g =$	(1.19) képlet	$9,81 \text{ m/s}^2$	$\approx 10 \text{ m/s}^2$

Inerciarendszer

Inerciarendszernek nevezzük azokat a mechanikai rendszereket (testek együttesét adott vonatkoztatási rendszerben), amelyek mozgására a newtoni kontinuummechanika elmélete teljesül (azaz a valóságos viszonyok jó közelítését nyújtja).

Ezt a fogalmat a gyakorlatban ritkán használjuk. A számítás több okból is eltérhet a méréstől:

- Számítási hiba (sokirányú ellenőrzéssel kiküszöbölhető).
- Jó elmélet rosszul alkalmazva (szakemberekkel megbeszélve javítható).
- Az adatbázis vagy az elmélet hiányos (mérésekkel meg lehet próbálni a hiány pótlását, de ez nem mindig sikerül).
- A newtoni kontinuummechanika elmélete nem illik a fizikai jelenségre. Csak ebben az utóbbi esetben mondanánk, hogy *nem inerciarendszert kaptunk*.

A *Naprendszer* testeire - mint említettük - a newtoni mechanika jól teljesül a következő feltételekkel: (i) az állócsillagokhoz rögzített koordináta-rendszerben, (ii) a belső erőkre Newton általános tömegvonzási képletét alkalmazva, (iii) zérus külső erő feltételezésével. **Ezekkel a Naprendszer inerciarendszer.**

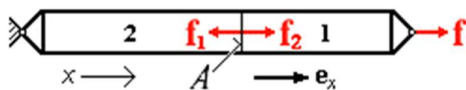
A *Földi rendszerekben* ható erőket az előbb már tárgyaltuk. **A Földi rendszer is inerciarendszer** a következő feltételekkel: (i) a Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben, (ii) a belső erőket a feladathoz illően megválasztva, (iii) a külső térfogati erő a nehézségi erő (ami az (1.18) és (1.19) egyenlettel tartalmazza a Föld forgásából származó centrifugális erőt is).

Esetenként a Föld felszínéhez képest gyorsulva *haladó*, és/vagy (egyenletesen vagy gyorsulva) *forgó* vonatkoztatási rendszerekkel is dolgozunk (7.2. példa). Ha ilyen rendszerekben a külső térfogati erők között a tehetetlenségi erőket is figyelembe vesszük (a 7. fejezetnek megfelelően), akkor **a Földi rendszerhez képest gyorsuló (haladó és/vagy forgó) vonatkoztatási rendszer is inercia rendszer.**

A gyakorlatban tehát mindig inerciarendszerekkel dolgozunk.

Felületi erők

Felületi erőről akkor beszélünk, ha az erő felületen adódik át. Ilyen a támaszkodási erő a testek határfelületén, de megjelenik a testek belsejében is (1.18. és 1.19. példák).

1.18. példa. Húzott rúd

1.12. ábra. Húzott rúd

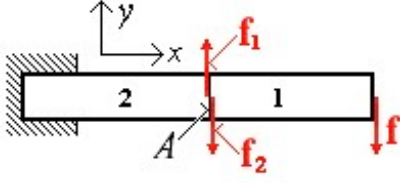
Szilárd anyagú rudat egyik végén \mathbf{f} erő húzza, míg a másik vége rögzítve van (1.12. ábra). Akárhonnan vesszük fel a rúdon az A keresztmetszetet, ezen *felületi erőhatásnak kell* ébrednie, mert a rúd 1 jelű részteste nyugalomban van, és ezért Newton II. törvénye értelmében a rá ható erők összege zérus. Tehát 2-es résztestet az A felületen $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$ felületi erővel *húzza* az 1-es résztestet. És az akció-reakció törvénye szerint az 1-es résztestet $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}$ erővel *húzza* a 2-es résztestet. Ennek felületegységre jutó értéke a *húzófeszültség*: $|\mathbf{f}_2|/A = \sigma_x$, ami az A felületet egyenletesen terheli (homogén, izotróp anyagban³⁵). Ezzel az 1-es résztest által a 2-es rész-

testre ható (\mathbf{e}_x egységvektor irányába mutató) felületi erő:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_x \int_A \sigma_x dA \quad (1.20)$$

³⁴ A pontossági igény fogalmát készakarva nem definiáljuk, csak utalunk 1.15 és 1.17 példákra.

³⁵ Lásd a 8. fejezetben.

1.19. példa. Hajlított rúd

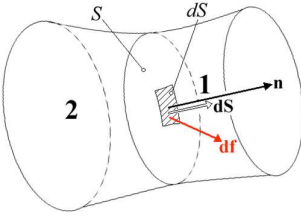
1.13. ábra. Hajlított rúd

Szilárd anyagú rudat egyik végén \mathbf{f} erő lefelé hajtja, míg a másik vége be van fogva (1.13. ábra). Akárhogyan vesszük fel a rúdon az A keresztmetszetet, ezen felületi erőhatásnak **kell** ébredni, mert a rúd **1** jelű részteste nyugalomban van, és ezért Newton II. törvénye szerint a rá ható erők összege zérus. Ezért a **2**-es résztestet az A felületen $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$ felületi erővel *tartja* az **1**-es résztestet.³⁶ Az akció-reakció törvénye értelmében pedig az **1**-es résztest $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}$ erővel tolja lefelé a **2**-es résztestet. Az előző példától eltérően \mathbf{f}_2 erő *párhuzamos* az A felülettel, *nyíróerőnek* nevezik.

A nyíróerő egységnyi területre jutó *nyírófeszültségét* jelölje τ_{yx} (ami az x tengelyre merőleges A felületen a **2**-es testet y irányban nyírja). τ_{yx} jelentősen változik az A keresztmetszeten, ezért a felületi erő nagyságát integrálással nyerjük:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_y \int_A \tau_{yx} dA . \quad (1.21)$$

Az előbbi (1.20) és (1.21) egyenletek az alábbi általános (1.23a) képlet speciális esetei.

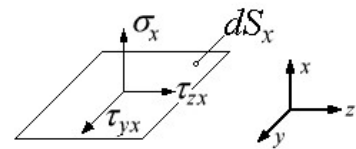


1.14. ábra. Elemi felületi erő

A felületi erők *általános* (3D-s) *képletét* a következő módon nyerjük. A test *belsejében* tekintsünk egy S felületet (1.14. ábra), amelyen az **1** jelű résztest erőt ad át a **2** jelű résztestnek. Az S felületet felosztjuk sok kis dS felületdarabra (1.14. ábra). A dS felületelemnél az S felületre *merőleges* egységvektort jelölje \mathbf{n} (1.14. ábra, $|\mathbf{n}| = 1$, \mathbf{n} -et mindig az erőt *átadó* résztest felé irányítjuk [8]). A dS felületelem *felületelemvektora* $d\mathbf{S}$ (ez merőleges dS -re, hossza a dS felületelem területe, $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$). A dS felületelemen átadott felületi erő $d\mathbf{f} = (df_x, df_y, df_z)$, (1.14. ábra), amit a $d\mathbf{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$ vektorból az \mathbf{F} *feszültségtenzorral* szorozva nyerünk:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} d\mathbf{S} , \text{ koordinátáisan: } d\mathbf{f} = \begin{pmatrix} df_x \\ df_y \\ df_z \end{pmatrix} , \quad d\mathbf{S} = \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} df_x \\ df_y \\ df_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix} . \quad (1.22)$$

A feszültségtenzor mátrixában σ -k a *normális feszültségek* (a felületre merőlegesek, húzás pozitív, nyomás negatív) és a τ -k a *nyíró* (vagy *csúsztató*) *feszültségek* (melyek a felülettel párhuzamosak). Ezeket láttuk már az 1.18. és 1.19. példákban, és ismerősek lehetnek a szilárd testek mechanikájából [94,95]. Az \mathbf{F} feszültségtenzor mátrixának első *oszlopában* az x tengelyre merőleges dS_x felületelemen ébredő feszültségek találhatók (1.15. ábra): σ_x az x irányú normális feszültség, τ_{yx} az y irányú nyírófeszültség, és τ_{zx} a z irányú nyírófeszültség. Az S felület összes dS felületelemén ható $d\mathbf{f}$ erőt összegezve, az egész S felületen ható felületi erőt nyerjük:

1.15. ábra. A dS_x felületelemen ható feszültségek

$$\mathbf{f}_{\text{felületi}} = \int_S d\mathbf{f} = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{S} , \quad (1.23a)$$

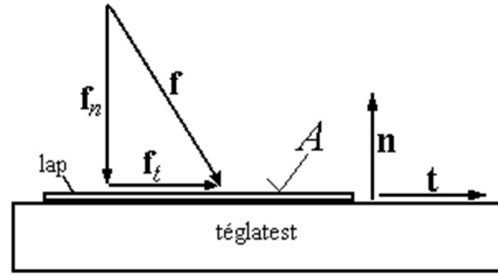
ahol \mathbf{F} az (1.22) egyenlet szerinti *feszültségtenzor*.

A felületi erők ilyen kezelése (feszültségekkel) **Cauchy** nevéhez fűződik (1823, [3]), amit azóta a műszaki élet sokszorosan igazolt.

³⁶Az \mathbf{f} és \mathbf{f}_1 erőpár forgatni is igyekszik az **1**-es résztestet. Azonban ezt a nyomatékot az A felületen ébredő húzófeszültségek nyomatéka ellensúlyozza (lásd a 3.4. példában).

1.20. példa. A feszültségek kezelése vektorokkal

Az 1.16. ábrán egy téglatesten nyugvó, vékony, merev, A területű lapra \mathbf{f} erő hat. Az erőt a lapra merőleges és a lappal párhuzamos komponensekre bontjuk, mert a két komponens szerepe különböző: a lap \mathbf{f}_n erővel nyomja a téglatestet, és az \mathbf{f}_t erő a lapot elcsúsztatni igyekszik (amit a lap és a téglatest közötti súrlódás akadályoz meg). A lap által a *téglatestre ható* feszültségek az A terület mentén változhatnak (a felületek érdességétől és hullámosságától függően). Ebben a példában azonban, egyszerűség kedvéért, az A területen eloszló feszültségek *átlagos* értékét számítjuk (mintha a lap *egyenletesen* terhelné a téglát).



1.16. ábra. A feszültségek értelmezése

\mathbf{n} : a síkra merőleges (normális irányú, az erőt átadó test felé irányuló) egységvektor, $|\mathbf{n}| = 1$,

\mathbf{t} : a síklapot érintő (tangenciális), a csúsztatás irányába mutató egységvektor, $|\mathbf{t}| = 1$.

\mathbf{f}_n/A a normális irányú erő területegységre jutó átlagos értéke: a *normális feszültség vektora*.

\mathbf{f}_t/A a felülettel párhuzamos erő területegységre jutó átlagos értéke: a *csúsztató feszültség vektora*.

σ : a *normális feszültség nagysága*: $|\sigma| = |\mathbf{f}_n/A|$, húzófeszültség pozitív, nyomófeszültség negatív.

τ : a *csúsztató feszültség nagysága*: $|\tau| = |\mathbf{f}_t/A|$, pozitív ha \mathbf{t} irányába mutat, negatív ha ellentétes.

Ezekkel a fogalmakkal a téglatestre ható teljes erő:

$$\mathbf{f} = (\sigma \mathbf{n} + \tau \mathbf{t}) A . \quad (1.23b)$$

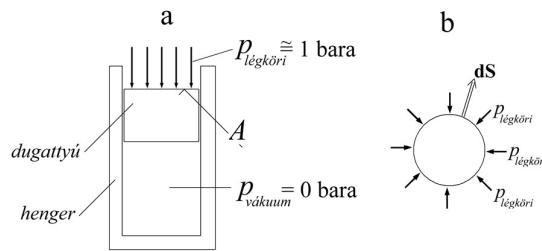
Az ábrán vázolt helyzetben, \mathbf{f}_n és \mathbf{n} ellentétes irányú, ezért σ negatív (helyesen, mert nyomófeszültség), a τ azonban pozitív, mert \mathbf{t} -t úgy vettük fel, hogy a csúsztatás irányába mutat. A felsorolt fogalmakkal ellenőrizhető, hogy (1.23b) képlet helyesen szolgáltatja az \mathbf{f} erőt.

A feszültségeket sokszor az (1.23b) egyenlethez hasonlóan *vektorokként* kezeljük. Például az 1.15. ábrán vázolt dS_x felületelemen ható $d\mathbf{f}_x$ elemi erő is így írható fel: $d\mathbf{f}_x = (\sigma_n \mathbf{e}_x + \tau_{yx} \mathbf{e}_y + \tau_{zx} \mathbf{e}_z) dS_x$, ahol \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y és \mathbf{e}_z , az x , y és z tengely irányába mutató egységvektorok.

1.21. példa. A légköri nyomás

Minden *Földi rendszer* a Föld felszínén helyezkedik el, így a levegőre nyitott felületein a Föld felszínén érvényes légköri nyomás hat.

Az 1.17.a ábrán egy hengerben mozgó dugattyú látható (olyan, mint a belsőégésű motoroknál). A felső felületén a légköri nyomás hat, alatta vákuumszivattyúval megvalósított közel abszolút vákuum található (a rajzon "bara" = bar abszolút). A dugattyú homlokfelülete A . Az abszolút vákuum miatt az alsó oldalról a dugattyúra ható erő zérus. A felső oldalról ható erő nagysága: $F = p_{\text{légköri}} A$. Ez megmérhető, és így a nyomás kiszámítható. Kis hengerünk tehát egy nyomásmérő eszköz.



1.17. A légköri nyomás szemléltetése

Ha a hengert elfordítjuk, mindig ugyanazt a $p_{\text{légköri}}$ nyomást mérjük. Tehát a légköri nyomás értéke független attól, hogy milyen irányban mérjük! Az 1.17.b ábrán egy gömb látható. A felületén a $d\mathbf{S}$ felületelem vektor *kifelé* van irányítva. A légköri nyomásból a gömb felületegységére ható erők (az ábrán nyilak jelzik) merőlegesek a henger felületére és a nagyságuk egyforma. Ebből következik, hogy a felület bármely pontján

a légköri nyomás feszültségtenzora: $\mathbf{F} = -p_{\text{légköri}} \mathbf{I}$, ahol \mathbf{I} az egységtenzor. (1.24)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ az azonosság tenzora}^{37} \text{ és a feszültségtenzor: } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -p_{\text{légköri}} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{\text{légköri}} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{\text{légköri}} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Az \mathbf{I} tenzort a gömb bármelyik $d\mathbf{S}$ felületelem vektorára alkalmazva magát a vektort kapjuk: $\mathbf{I} d\mathbf{S} = d\mathbf{S}$. Ezért: $\mathbf{F} d\mathbf{S} = -p_{\text{légköri}} \mathbf{I} d\mathbf{S} = -p_{\text{légköri}} d\mathbf{S}$. Az utóbbi egyenlőségből is látható, hogy a $d\mathbf{S}$ felületelemeken a gömb belsejére ható elemi erők: $d\mathbf{f} = -p_{\text{légköri}} d\mathbf{S}$, ami megfelel az 1.17.b ábrának is.

Mi olvasható ki a légköri nyomás feszültségtenzorának mátrixából? A feszültségtenzort úgy értelmeztük (az (1.22) egyenlőséggel), hogy húzó, nyomó és nyírófeszültségeket is tartalmaz. Az (1.25) mátrix fő átlójában levő negatív számok jelzik, hogy: *negatív húzófeszültségek = nyomófeszültségek = nyomások* hatnak. Az (1.22) egyenlőség mátrixával összehasonlítva: $\sigma_x = -p_{\text{légköri}}$, tehát az x tengely irányában is a légköri nyomás hat. A (1.25) mátrixában $\tau_{yx} = 0$ jelzi, hogy az x tengelyre merőleges felületen (1.15 ábra) az y irányú csúsztató feszültség zérus (és a mátrixból látható, hogy valamennyi csúsztató feszültség zérus). Álló folyadékokban ez törvényszerű.

Az átlagos légköri nyomás *tengerszinten*: $p_0 = 760 \text{ torr (Hg.mm)} = 1,01325 \text{ bara (bar abszolút)}$, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. A Föld felszín közelében fölfelé haladva a légköri nyomás 10 méterenként 1 torr (Hg mm) értékkel csökken, ezért 100 m tengerszint feletti magasságnál (pl. Budapesten a Dunaparton) az *átlagos* légköri nyomás: $p_{\text{légköri}} = 750 \text{ torr} \approx 1 \text{ bara}$. Nem túl igényes számításoknál a légköri nyomásra ezt az értéket szoktuk használni. Igényes számításoknál (például kisminta turbinák és szivattyúk átvételi mérésénél) a légköri nyomás időjárástól függő pillanatnyi értékét meg kell mérni! (A légköri nyomás ugyanis szerepel a vízgépek egyik fontos üzemi paraméterének, a kavitációs számnak a képletében, és ezért a pontosabb ismerete lényeges.)

1.22. példa. Súlyos rúdban a feszültségállapot

Az 1.18. ábra szerinti súlyos rúd a talajon nyugszik, teljes vákuum veszi körül (keszonszerű burával leborították, és a bura alól kiszívták a levegőt), tehát légköri nyomás nem hat a rúdra. A rudat elméletben két részre osztottuk. Az 1. rész támaszkodik a 2. részre az S felületen. A rúd tetején erőátadás nincs, az S felület z magasságánál azonban van. Az 1. rész súlya: $G = -S(a-z)\rho g$. Azért negatív, mert az 1.18. ábrán a z tengelyt fölfelé irányítottuk, és az átvett súly lefelé mutat. Ez nehezedik a 2. testre az S felületen keresztül.

A 2. testre ható feszültség $\sigma = G/S = -(a-z)\rho g$, a mínusz előjel a nyomófeszültséget jelzi. Az (1.22) szerinti mátrix egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ df_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a-z)\rho g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dS \end{pmatrix},$$

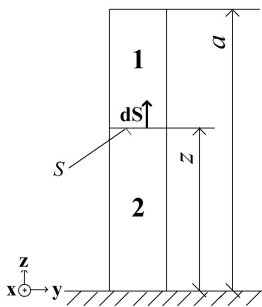
amiből a mátrixok sor-oszlop szorzásával (a (17.14) egyenlettel):

$$df_z = -(a-z)\rho g dS.$$

df_z negatív (helyesen) mert a z tengely fölfelé mutat (1.18. ábra), és az 1-es test által a 2-es testnek átvett erő lefelé hat. Mivel az S felület minden pontjánál ugyanez a feszültség, a z szinten átvett teljes erő nagysága:

$$f_z = -(a-z)\rho g S.$$

Tehát a normális (z irányú) feszültség (és erő) függ az $(a-z)$ mélységtől.



1.18. ábra. Súlyos rúd vákuumban

³⁷Lásd (19.10) egyenletet, \mathbf{I} -t nevezik *identenzornak*, vagy *egységtenzornak* is.

1.23. példa. Hidrosztatika, Archimedes törvénye

Az 1.19. ábrán nyugvó víz látható egy tartályban. A víz fölött a levegő nyomása légköri, p_0 . Bármely **nyugvó folyadékban**³⁸, a folyadéktér bármely pontjánál a feszültségtenzor ilyen alakú:

$$\mathbf{F} = -p \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

ahol \mathbf{I} az azonosság tenzora (lásd (19.10) egyenletet), és p a helyi nyomás. Nyugvó vízben a p nyomás lefelé nő (mint a súlyos rúdban, 1.22. példa) ezt ábrázolja a baloldali diagram is

$$p = p_0 + (a - z)\rho g, \quad (1.27)$$

ahol ρ a víz sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás, a a víztükör szintje, és z a pont szintje ahol a nyomást számítjuk (1.19. ábra). (A Föld felszín közelében, nyugvó vízben a nyomás lefelé nő, 10 méterenként közelítőleg 1 barral.)

Képzeld a víznek egy részét zárt felülettel körülvéve (1.19. ábra jobboldalt). Az S felület minden pontján a nyomó erő merőleges a felületre: $d\mathbf{f} = -p d\mathbf{S}$, az (1.27) egyenlet szerinti nyomással. A víztömegre két erő hat: A víztömeg súlya (lefelé), ami (1.18) egyenlet alapján: $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, és a nyomásból származó felületi erő (felfelé), ami:

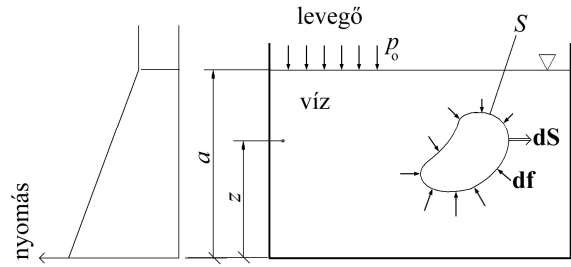
$$\mathbf{f}_{\text{felületi}} = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_S -p d\mathbf{S}, \quad (1.28)$$

A kiválasztott víztömeg nyugalomban van. Ezért Newton I. törvénye szerint a rá ható erők eredője zérus:

$$\mathbf{f}_{\text{felületi}} + \mathbf{G} = \mathbf{0}, \text{ azaz: } \mathbf{f}_{\text{felületi}} = -\mathbf{G}, \quad (1.29)$$

Ha az S felülettel határolt víz helyébe szilárd testet helyezünk, erre ugyanez a nyomáseloszlás hat, és ezért az $\mathbf{f}_{\text{felületi}}$ erő is ugyanaz (amit ekkor *felhajtóerőnek* neveznek). Az (1.29) egyenlet szerint a felhajtóerő nagysága ugyanakkora, mint a kiszorított víz súlya: $|\mathbf{f}_{\text{felületi}}| = |\mathbf{G}|$. Ezzel már meg is kaptuk Archimédész törvényét: *A folyadékba merült testre akkora felhajtóerő hat, amekkora az általa kiszorított víz súlya.*

A felületi erők esetén szerencsés helyzetben vagyunk – ellentétben a térfogati erőkkel – mert *nem függenek* a választott vonatkoztatási rendszertől! A felületi erők a Földi rendszerben ugyanazok, mint a Naprendszerben, de még a Földi rendszerhez képest gyorsuló vagy forgó rendszerben is (például a vízgép járókerékkel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben *a nyomás ugyanakkora*, mint a vízgép álló részéhez rögzített Földi rendszerben).

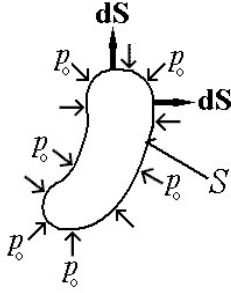


1.19. ábra. Nyomáseloszlás vízben, Archimedes törvénye

³⁸Viszkózus folyadékokban is, ha nyugalomban vannak.

1.24. példa. Geometriai tételek hidrosztatikai bizonyítása

Néhány geometriai tétel a hidrosztatika egyenleteivel egyszerűen bizonyítható. Ez egyrészt érdekes, másrészt a mechanikai számításoknál hasznos.



1.20. ábra. Első geometriai tétel

Első tétel: Legyen S egy tetszőleges, korlátos és zárt felület a 3-dimenziós euklideszi térben (1.20. ábra). A felületre merőleges dS felületelemvektorokkal képezett integrálra:

$$\int_S dS = 0 \quad (1.30)$$

Bizonyítás: Képzeljük el az S felületet állandó p_o nyomású nyugvó levegőben, olyan mechanikai rendszerben melyben $g = 0$. Az S által bezárt légtömegrre egyetlen erő, a nyomásból származó felületi erő hat. Newton I. törvénye értelmében ez zérus:

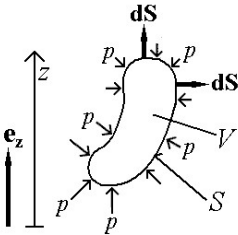
$$\int_S -p_o dS = 0 \quad (1.31)$$

Az integrálból $-p_o$ állandót kiemelve, kapjuk a tétel állítását (amit geometriailag nem is ilyen egyszerű bizonyítani).

Második tétel: Legyen P egy tetszőleges poliéder a 3-dimenziós euklideszi térben, melynek lapjai: S_1, S_2, \dots, S_n sokszögek. Jelölje a lapok területével egyenlő hosszúságú, kifelé mutató normálvektorokat: S_1, S_2, \dots, S_n . Ezekre:

$$\sum_{k=1}^n S_k = 0 \quad (1.32)$$

Bizonyítás: Ez (1.30) közvetlen következménye: $0 = \int_P dS = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} dS = \sum_{k=1}^n S_k \quad (1.33)$



1.21. ábra. Harmadik geometriai tétel

Harmadik tétel: Legyen S az első tételnek megfelelő felület, z egy koordináta egy tetszőleges koordinátatengely mentén, e_z a koordinátatengely irányába mutató egységvektor, és V az S által bezárt térfogat köbtartalma. Ezekre:

$$\int_S z dS = V e_z \quad (1.34)$$

Bizonyítás: Fordítsuk az S felületet és a koordinátatengelyt úgy, hogy a tengely függőlegesen fölfelé mutasson (1.21. ábra), ezt az általánosság megszorítása nélkül megtehetjük. Képzeljük az elfordított S felületet egy víztömegbe (1.19. ábra). Az (1.28) és (1.29) egyenlet szerint:

$$\int_S p dS = G \quad (1.35)$$

Ebbe a nyomást az (1.27) egyenletből helyettesítve, a $G = mg$ egyenlőségben m -et a víz sűrűségével kifejezve, végül a g vektort a függőleges egységvektorral felírva,

$$\int_S (p_o + (a - z) \rho g) dS = \int_V \rho g dV = \int_V \rho (-g e_z) dV \quad (1.36)$$

és rendezve: $\int_S (p_o + a \rho g) dS - \int_S z \rho g dS = -\rho g e_z \int_V dV \quad (1.37)$

A felületi integrálokból a konstansokat kiemelve, a térfogati integrált (1.34) alapján helyettesítve:

$$(p_o + a \rho g) \int_S dS - \rho g \int_S z dS = -\rho g e_z V \quad (1.38)$$

kihasználva (1.30)-at, $-\rho g$ -vel egyszerűsítve nyerjük (1.34) egyenletet, a tétel állítását.

2. fejezet. Az általános axiómák

Newton, Euler és Cauchy törvényei a *valóságos testek* mozgását nagyon jól követik. Ebben a fejezetben ezeket a törvényeket az *elméleti testekre* axiómaként elfogadjuk, és a továbbiakban ezekből építjük föl a newtoni kontinuummechanikát.

Alapmennyiségek

Egy mechanikai rendszer tanulmányozása során a tér egy részét vizsgáljuk egy időtartam alatt. Az *időtartamot* jelölje:

$$t_{\text{kezd}} \leq t \leq t_{\text{vég}} \quad (2.1)$$

A vizsgálandó térrész határfelületét ott húzzuk meg, ahol célszerűnek tartjuk (az 1.2. ábrán például a mérőtér felületénél), ebben van a vizsgált anyag, amit *kontinuumnak* tekintünk. A határa időben változhat, ezért $K(t)$ -vel jelöljük (K kontinuum). A (2.1) időintervallum minden t értékéhez tartozik egy $K(t)$, ami egy pont-tartomány a 3-dimenziós euklideszi térben (2.1. ábra). A kontinuum határán anyag érkezik és távozik (mint az 1.1. példa belépő és kilépő felületén). Az egyik célunk a *szakadási felületek* tárgyalása, ezért a kontinuumban felveszünk egy $S_D(t)$ szakadási felületet is (S az angol Surface = felület, és D az angol Discontinuity = szakadás után), ahol az alábbi függvényeknek szakadása lehet. A kontinuumot a szakadási felület két részre osztja $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$ (2.1. ábra).

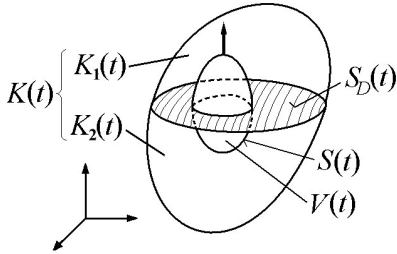
A *helyvektort* \mathbf{r} , az *időt* t jelöli. Ezeken kívül a következő *alapmennyiségeket* vezetjük be:

ρ sűrűség, \mathbf{v} sebesség, \mathbf{g} fajlagos tömegelő, \mathbf{F} feszültségtenzor.

A *jelölés* mutatja, hogy melyik skalár, vektor, vagy tenzor. Az *elnevezés* jelzi, hogy az alkalmazásoknál mely fizikai paraméterekkel fogjuk ezeket azonosítani. Az alapmennyiségek a *hely* és az *idő* függvényei:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Ezek a függvények a (2.1) szerinti minden t értékre a $K(t)$ kontinuumban értelmezve vannak, kivéve az $S_D(t)$ szakadási felület pontjait, ahol a határértékeik a felület mindkét oldalán léteznek (és így a felület pontjainál az ugrásuk is számítható). A tárgyalásban előforduló minden függvényről, tartományról, felületről, vonalról feltesszük, hogy **matematikailag jól kezelhető** ⁴⁰.



2.1. ábra. $K(t)$ a kontinuum tartománya, $S_D(t)$ szakadási felület a kontinuumban, $V(t)$ egy anyagi térfogat a kontinuumban, $S(t)$ a felülete

A 2.1. ábrán *csak egy* szakadási felületet tüntettünk fel. Az elmélet felépítése érthetőbb, ha erre az egyszerű ábrára gondolunk.⁴¹ A $K(t)$ kontinuum tehát minden időpillanatban felbontható a $K_1(t)$ és $K_2(t)$ tartományra, amelyek az $S_D(t)$ felülettel csatlakoznak egymáshoz.

A kontinuumban **anyagi pontok** mozognak $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességgel (ahogy ezt az 1.3. ábránál szemléltettük). A $K(t)$ -ben kijelölünk egy *tetszőleges* $V(t)$ **anyagi térfogatot** (ahogy ezt az 1.3. ábránál értelmeztük). Az anyagi térfogat a mozgása során mindig ugyanazokat az anyagi pontokat tartalmazza. (A szakadási felület $V(t)$ -t is két részre vághatja, 2.1. ábra) A $V(t)$ felületét $S(t)$ -vel jelöljük, ami *anyagi felület* (a pontjai anyagi pontok, együtt mozognak az anyaggal) és rajta a felületi *egységvektort* *kifelé* irányítjuk.⁴²

Ezekkel a fogalmakkal és alapfüggvényekkel megfogalmazható a newtoni kontinuum általános (minden anyagra érvényes) definíciója.

³⁹ Véges időtartamot vettünk fel. A kísérletek is végesek. De határátmenettel következtethetünk végtelenbeli viszonyokra.

⁴⁰ Részletesen tárgyaljuk ezt a 18. fejezetben.

⁴¹ Azonban az 5. fejezetben bemutatunk több szakadási felülettel rendelkező példát is.

⁴² Bármely zárt felületen a felületelem vektort mindig kifelé irányítjuk, mert Gauss tétele, (21.5) így érvényes.

A newtoni kontinuum definíciója: Azt mondjuk, hogy a (2.2) alapfüggvények newtoni kontinuum mozgását írják le, ha $K(t)$ -ben tetszőleges $V(t)$ anyagi térfogatra, bármely rögzített t_1 időpillanatban teljesül a következő három axióma:

$$(Ia) \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV \right|_{t=t_1} = 0 \quad , \quad (2.3)$$

$$(IIa) \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad , \quad (2.4)$$

$$(IIIa) \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad . \quad (2.5)$$

Az egyenlőségek bal oldalán az integrálokat a $V(t)$ időben változó anyagi térfogaton számítjuk, t egy változó, t_1 egy valós szám. A vonal utáni $t = t_1$ azt jelzi, hogy a differenciálhányadost a t_1 értéknél kell számítani.⁴³ A jobb oldalon $V(t_1)$ egy konkrét térfogat (amit $V(t)$ a $t = t_1$ időpontban elfoglal), $S(t_1)$ a felülete.

2.1. példa. Az általános axiómák baloldalának értelmezése

Tekintsünk egy $\psi(\mathbf{r}, t)$ skalár vagy vektor értékű függvényt. Az axiómákban $\psi(\mathbf{r}, t) = \rho$, vagy $\rho \mathbf{v}$, vagy $\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}$. A ψ függvény időben változó térfogaton vett integrálása egy egyváltozós függvényt eredményez, amit $\varphi(t)$ -vel jelölünk:

$$\int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV = \varphi(t) \quad . \quad (2.6)$$

Ezt differenciáljuk t szerint és a differenciálhányadost a $t = t_1$ helyen vesszük, tehát az axiómákban kijelölt művelet:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=t_1} \quad . \quad (2.7)$$

Az axiómák előtti mondat lényege az, hogy *akárhogyan* választunk is ki a kontinuumban egy anyagi térfogatot, arra bármely időpillanatban az axiómák teljesülnek.

Az axiómák alkalmazásainál sokszor elegendő egy kiválasztott anyagi térfogatra felírni egyik vagy másik axiómát, és a feladat célját tekintve máris megoldást nyerünk. Azonban nyilvánvaló, hogy az axiómák a mozgást a kontinuum legkisebb részletében is meghatározzák. Gondoljunk például arra, hogy a $K(t)$ kontinuumot számítógéppel sok kis térfogatra osztjuk. Mivel *akármilyen* anyagi térfogatra érvényesek az axiómák, ezekre a kis résztestekre is teljesülniük kell. Az axiómák tehát valóban megszabják a kontinuum legkisebb részének a viselkedését is.

Az (Ia) axiómában az integrál:

$$\int_{V(t)} \rho dV = m(t) \quad , \quad (2.8)$$

a $V(t)$ anyagi térfogatba foglalt tömeg. Az axióma szerint bármikor differenciálva zérust kapunk, azaz $m(t)$ állandó. Ezt az (1.3) egyenletnél már láttuk, **az (Ia) axióma a tömegmegmaradás törvénye**. Ez méltón képviseli Newtonnak az I. meghatározásához fűzött gondolatait (lásd az 1. fejezetben). A tömeg mindig pozitív szám: $m(t) > 0$, és ezért a sűrűség: $\rho(\mathbf{r}, t) > 0$, mindig.

A (IIa) axióma Euler mozgástörvénye. Ez Newton II. axiómájából származik, és az (1.5) egyenletnél már tárgyaltuk. Nevezik **Cauchy I. törvényének** is, mert kontinuumokra általános alakban

⁴³A szakirodalom más jelöléseket is használ. Ez a jelölési konvenció pontosan megmondja, hogy az integrálokat milyen tartományon kell integrálni, és a differenciálhányadosokat hol kell számítani.

(a feszültségekkel) ő írta föl először. A **(IIa)** axiómában a testre ható erők között csak *térfogati* és *felületi* erőket vettünk figyelembe (*valóságos testekre* alapesetben⁴⁴ csak ezek hatnak).

A **(IIIa)** axióma Euler nyomatéki egyenlete, az (1.10) egyenlet, aminek elődje Newton III. axiómája. Nevezik **Cauchy II. törvényének** is.⁴⁵

Az axiómák jele: **I, II, III** az eredetre, Newton ugyanilyen jelű axiómáira utal.⁴⁶

A **(IIa)** és **(IIIa)** axiómákban szereplő **g** vektort a (2.2) egyenletnél *fajlagos tömegezőnek* (egységnyi tömegre ható erőnek) neveztük.⁴⁷ *Földi rendszerben* azonban **g** állandó, és közkeletű elnevezése *nehézségi gyorsulás* (lásd az (1.18) egyenletnél). A továbbiakban is így nevezzük, függőlegesen lefelé mutat, nagysága ismert, és ezért a **g**-t tartalmazó integrálok egyszerűen számíthatók.

Az axiómákat *Newton, Euler és Cauchy* óta a newtoni kontinuummechanika alkalmazásai számtalanszor igazolták. Itt ezeket *további bizonyítás nélkül elfogadjuk* (ezért nevezhetők axiómáknak), és belőlük vezetjük le az elméletet (ami végül a szakadási felületek kezelésére is alkalmas lesz).

2.2. példa. Röpülő gumilabda

Az eldobott (megütött) gumilabda a levegőben röpül. Egyszerűség kedvéért a levegő ellenállásától eltekintünk, a labda állandó (légköri) nyomású levegőben mozog. Amíg röpül, a labda *merev testnek* tekinthető. Földet érve deformálódik, de elpattanva ismét merev testként kezelhető. A vizsgálatot *Földi rendszerben* végezzük (**g** állandó), és a labda tömegére csak a nehézségi erő hat. A $V(t)$ térfogat maga a röpülő labda, erre alkalmazzuk az axiómákat.

Az **(Ia)** axióma⁴⁸ nyilván teljesül, mert a mozgás során a labda m tömege nem változik.

A **(IIa)** axiómában a labda impulzusa:
$$\mathbf{i}_{\text{labda}}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV, \quad (2.9)$$

és a **(IIa)** axióma:
$$\left. \frac{d \mathbf{i}_{\text{labda}}}{dt} \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \mathbf{g} \int_{V(t_1)} \rho dV + \int_{S(t_1)} (-p_o \mathbf{I}) d\mathbf{S} = \mathbf{g} m + (-p_o) \int_{S(t_1)} d\mathbf{S} = \mathbf{g} m, \quad (2.10)$$

ahol ρ a gumi sűrűsége (ρ állandó), $\mathbf{F} = -p_o \mathbf{I}$ a feszültségtenzor a p_o nyomású levegőben, a labdára ható nehézségi erő $\mathbf{g}m$. A felületi integrál (1.30) miatt zérus. Az egyenlet szerint az impulzus deriváltja egyenlő a nehézségi erővel. A merev testek mozgása két részből tevődik össze: *eltolás* és *forgás*. Az eltolásnál a labda pontjai forgás nélkül tolnak, azaz a labda középpontjának pályájával egybevágó pályán haladnak. A forgásnál változatlan középpont körül a pontok körpályán mozognak. Legyen \mathbf{r}_o a középpont helyvektora, \mathbf{r} a labda tetszőleges anyagi pontjának helyvektora, $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{r}_o$ a középponttól a ponthoz vezető vektor. $\mathbf{r}_o = \mathbf{r}_o(t)$ a középpont pályájának egyenlete, és a labda tetszőleges anyagi pontjának pályája: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_o(t) + \mathbf{r}^*(t)$, az eltolást $\mathbf{r}_o(t)$ képviseli, a forgást $\mathbf{r}^*(t)$. Képezve az egyenlet idő szerinti deriváltját, a sebességekre: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_o(t) + \mathbf{v}^*(t)$ egyenlőséget kapjuk. Rögzített középpont körül forgó merev test sebességterének egyenlete: $\mathbf{v}^*(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*$, ahol $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ a pillanatnyi szögsebesség vektora.⁴⁹ Az eldobás pillanata után a labda középpontjának kezdeti sebessége \mathbf{v}_1 és a labda pillanatnyi szögsebessége $\boldsymbol{\omega}_1$. Először nézzük az eltolást, ekkor minden pont ugyanazzal a sebességgel halad, a (2.9) egyenletben $\mathbf{v}_o(t)$ -t kiemelve az integrál jele elé: $\mathbf{i}_{\text{labda}}(t) = \mathbf{v}_o(t)m$. Ezt helyettesítve (2.10)-be, és m -el egyszerűsítve: $d\mathbf{v}_o/dt = \mathbf{g}$. Ezt integrálva $\mathbf{v}_o(t) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{g} t$. A középpont tehát olyan síkban mozog, ami \mathbf{v}_1 -el és \mathbf{g} -vel is párhuzamos, és $\mathbf{v}_o(t)$ -t integrálva t szerint, azt a jólismert tényt kapjuk, hogy a pálya parabolaív. Ezzel az eltolást jellemeztük. Hátra van még a forgás:

A **(IIIa)** axiómában a labda impulzusnyomatéka:
$$\mathbf{m}_{\text{impnyom}}(t) = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV, \quad (2.11)$$

⁴⁴A villamos, mágneses, molekuláris és egyéb (nem mechanikai eredetű) erőhatásokat kizártuk a tárgyalásból. Azonban az elmélet kiterjesztésének lehetőségét az alapesettől eltérő esetekre a 2.7. példában bemutatjuk.

⁴⁵Noll [2] az **(Ia)** axiómát úgy mondja ki, hogy Newtonhoz hasonlóan minden testhez (anyagi térfogathoz) hozzárendel egy tömeget. A **(IIa)** és **(IIIa)** axióma nála a dinamikai folyamat D1 és D2 axiómája.

⁴⁶A newtoni kontinuum bemutatott *általános* definíciója matematikai definíciókat utánoz (csoport, differenciálható sokaság értelmezése stb.) logikailag hibátlanul. Ennél azonban többről van szó: ezek az axiómák *egyeznek a fizikai tapasztalatokkal!*

⁴⁷Az általános esetben, például villamos vagy mágneses erőterben a fajlagos tömegezőt potenciálból származtatják.

⁴⁸Az **(a)** axiómák a (2.3), (2.4), (2.5) egyenletek.

⁴⁹Ezt könnyen beláthatjuk: $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}^*| \sin \gamma = \omega r' \sin \gamma$ ahol $r' = |\mathbf{r}^*| \sin \gamma$ a forgástengelytől mért sugár. $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*$ iránya merőleges $\boldsymbol{\omega}$ -ra és \mathbf{r}^* -ra is, és $\boldsymbol{\omega}$ -val szembe nézve a forgás matematikailag pozitív irányba történik (órával ellentétesen).

és a (IIIa) axióma:

$$\left. \frac{d \mathbf{m}_{imp\ nyom}}{dt} \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} dS . \quad (2.12)$$

Itt a jobb oldal első integrálja azért zérus, mert a labda gömbalakú térfogatán a súlyerők nyomatéka a labda szimmetriája miatt zérus. A második integrál pedig, az állandó nyomású levegőben szintén a szimmetria miatt zérus. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{m}_{imp\ nyom} = \text{állandó}$. Tehát az eldobás pillanatában megvalósuló impulzusnyomaték a röptés során végig megmarad. Az impulzusnyomaték iránya, és a nagysága is állandó. Kicsit munkás számítással: $\mathbf{m}_{imp\ nyom} = \mathbf{\Theta} \boldsymbol{\omega}$, ahol $\mathbf{\Theta}$ a tehetetlenségi nyomatékok tenzora, és ebből következik, hogy a merev testnek tekintett labda forgásának szögsebesség-vektora a röptés idején állandó: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1$.

Speciális mozgások⁵⁰

Stacionárius (időtálló) egy mozgás, ha ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} időben állandók, azaz:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Instacionárius egy mozgás, ha ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} (közülük legalább az egyik) időben változik:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \quad (2.14)$$

Kvázistacionárius egy mozgás, ha ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} időben ugyan nem állandók, de az átlagértékeik körül ingadoznak.⁵¹

2.3. példa. Stacionárius áramlás konfúzorban

A 2.2. ábrán konfúzorban (szűkülő csőidomban) folyadék *stacionárius áramlását* látjuk. Egyszerűség kedvéért *egyenletes* v_1, ρ_1 belépő és v_2, ρ_2 kilépő sebesség- és sűrűségeloszlást tételeztünk fel. Az (Ia) axiómát a **B** és **C** szelvények közötti térfogatra alkalmazzuk (ez a $V(t_1)$ tartomány). Ez anyagi térfogat, a felületének pontjai Δt idő múlva a **B'** illetve **C'** szelvényénél vannak.

Az $m(t) = \int_{V(t)} \rho dV$ tömeg értékének változására Δt idő alatt:

$$m(t_1 + \Delta t) = m(t_1) + \rho_2 A_2 v_2 \Delta t - \rho_1 A_1 v_1 \Delta t ,$$

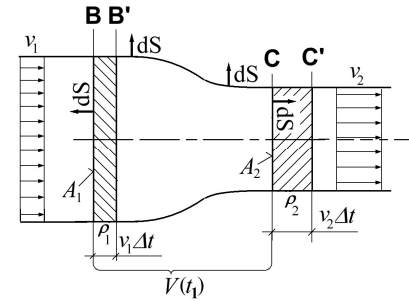
ugyanis **B'** és **C** között a **tömeg változatlan**, mert az áramlás *stacionárius*. Ezért az $m(t_1)$ tömeghez hozzá kell adni a **C** és **C'** közötti tömeget (térfogat és sűrűség szorzata) és le kell vonni a **B** és **B'** közöttit. Ezért:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV \Big|_{t=t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t_1 + \Delta t) - m(t_1)}{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1 .$$

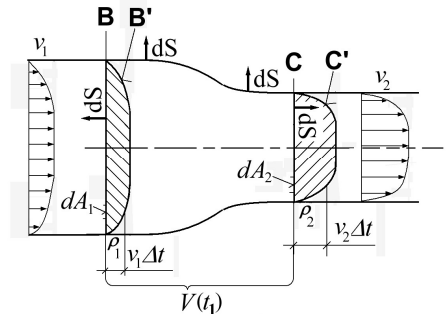
Egyszerű eredményt kaptunk. A gondolatmenet megismételhető más sebességeloszlással is. A 2.3. ábrán változó v_1 és változó v_2 sebességeloszlást tételeztünk fel. Az (Ia) axióma $V(t_1)$ integrálási tartománya most is a **B** és **C** szelvények közötti térfogat. A felületének pontjai Δt idő múlva a **B'** illetve **C'** görbékénél vannak. Célunk ismét az $m(t)$ tömeg megváltozásának számítása Δt idő alatt. A **B'** és **C** görbék közötti tömeg most is változatlan, és a tömeg többlet és hiány integrálással:

$$m(t_1 + \Delta t) = m(t_1) + \int_{A_2} (\rho_2 v_2 \Delta t) dA_2 - \int_{A_1} (\rho_1 v_1 \Delta t) dA_1 \quad \text{és}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV \Big|_{t=t_1} = \int_{A_2} (\rho_2 v_2) dA_2 - \int_{A_1} (\rho_1 v_1) dA_1 . \quad (2.15)$$



2.2. ábra. Stacionárius áramlás konfúzorban, *egyenletes* sebességeloszlással



2.3. ábra. Stacionárius áramlás konfúzorban, *nem egyenletes* sebességeloszlással

⁵⁰Ezek az elnevezések az áramlástanban terjedtek el, de szilárd vagy plasztikus testekre is alkalmazhatók.

⁵¹Ilyen a *turbulens áramlás* is (lásd a 8. 9. 13. és 15. fejezetben).

Az utóbbi egyenlet általánosabb alakban is írható. Bevezetjük a v_n jelölést a sebesség normális irányú komponensére (2.4. ábra). Csőfalon: $v_n = 0$. Ha v_n és a $d\mathbf{S}$ felületelem vektor *egyirányú*, akkor v_n pozitív, ha ellentétes, akkor v_n negatív. A 2.3. ábrán végig követve v_n és $d\mathbf{S}$ irányát, megállapíthatjuk (2.15) egyenlet általános alakját:

Stacionárius mozgás esetén:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \rho v_n dS, \quad (2.16)$$

ahol dS a felületelem területe. Stacionárius esetben tehát **(Ia)** axióma bal oldala így számítható.

Az előbbi levezetésben ρ akármilyen függvény lehet. Ezért a **(IIa)** és **(IIIa)** axióma bal oldala hasonló módon átalakítható. A levezetésben ρ helyett $\rho \mathbf{v}$, és $\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}$ vektorokat szerepeltetve a következő egyenleteket kapjuk:

Stacionárius mozgás esetén:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} v_n dS. \quad (2.17)$$

Stacionárius mozgás esetén:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} v_n dS. \quad (2.18)$$

A 2.3. példa gondolatmenete kis módosítással instacionárius áramlásokra is alkalmazható. A változás csupán annyi, hogy a (2.15) egyenletben a **B** és **C** szelvények közötti tömeg időegység alatti változását is hozzá kell adni az egyenletben szereplő tagokhoz. Így az **(a)** axiómák bal oldalai:

Instac. mozgás esetén:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \rho v_n dS + \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \rho dV \right|_{t=t_1}. \quad (2.19)$$

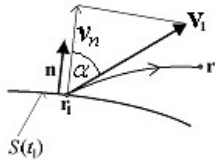
Instac. mozgás esetén:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} v_n dS + \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1}. \quad (2.20)$$

Instac. mozgás esetén:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} v_n dS + \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1}. \quad (2.21)$$

Az **(a)** axiómák bal oldalainak ilyen átalakítása azzal az *előnnyel* jár, hogy *időben változó* tartományon történő integrálás **helyett időben változatlan** tartományokon integrálhatunk. Ezt a következő fejezetben fogjuk kihasználni.

Néhány kiegészítés a felületek mozgásához:

2.4. példa. Anyagi felület mozgása



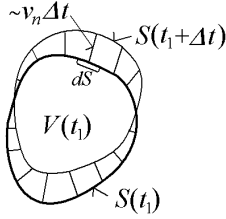
2.4. ábra. Anyagi felület mozgása

A 2.4. ábrán egy vonal jelképezi az $S(t_1)$ **anyagi felületet**. A pontjai anyagi pontok, tehát a kontinuum $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességével mozognak. A felület egy tetszőleges pontja \mathbf{r}_1 , az ábrán jelzett pályán \mathbf{v}_1 sebességgel indul. Jelölje $V(\tau)$ azt a pontthalmazt, amelynek pontjain az $S(t_1)$ pontjaiból kiinduló pályák a $t_1 \leq t \leq t_1 + \tau$ időtartam alatt áthaladnak. Ezt úgy mondjuk, hogy az $S(t_1)$ felülettel τ idő alatt **áthatolt térfogat**. (A 2.2. és 2.3. ábrán a Δt idő alatt áthatolt térfogatot vonalkázás jelöli.) Ha csak a térfogat változására vagyunk kíváncsiak, akkor (2.16) egyenletben $\rho = \rho_1 = \rho_2$ helyettesítéssel az áthatolt térfogat differenciálhányadosa:

$$\left. \frac{dV(\tau)}{d(\tau)} \right|_{\tau=0} = \int_{S(t_1)} v_n dS = \int_{S(t_1)} \mathbf{v} d\mathbf{S}, \quad (2.22)$$

ahol \mathbf{n} a felületi normál egységvektor (2.4. ábra), $v_n = \mathbf{v}_1 \mathbf{n} = |\mathbf{v}_1| \cos(\alpha)$ az $S(t_1)$ felület normális irányú sebessége (pozitív ha $0 < \alpha < 90^\circ$, negatív ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Mivel $|\mathbf{n}| = 1$, $|d\mathbf{S}| = dS$, a $\mathbf{v} d\mathbf{S}$ skalárszorzatra:

$\mathbf{v} d\mathbf{S} = |\mathbf{v}| |d\mathbf{S}| \cos(\alpha) = v_n dS$. Az egyenletekben tehát $v_n dS$ helyett $\mathbf{v} d\mathbf{S}$ skalárszorzat is írható!

2.5. példa. Anyagi térfogat köbtartalmának időegység alatti változása

2.5. ábra. Az anyagi térfogat Δt idő alatti változása. Az $S(t_1)$ által Δt idő alatt áthatolt térfogat vonalaként látható.

A 2.5. ábrán a $V(t_1)$ **anyagi térfogat** $S(t_1)$ felülete egy vonallal van ábrázolva. Az $S(t_1)$ anyagi felület v_n normális irányú sebességgel (2.4. ábra) mozog. A $V(t_1)$ térfogat köbtartalmának változása Δt idő alatt a 2.5. ábra alapján:

$$V(t_1 + \Delta t) - V(t_1) = \int_{S(t_1)} v_n \Delta t dS, \quad (2.23)$$

ugyanis az $S(t_1)$ -re merőleges egyeneseken a $V(t_1 + \Delta t)$ térfogatig húzott szakaszok hossza közelítőleg $v_n \Delta t$ (2.5. ábra), és így a térfogat változását a $(v_n \Delta t dS)$ hasábok összegzése adja. Az integrálból Δt -t kiemelve, és osztva:

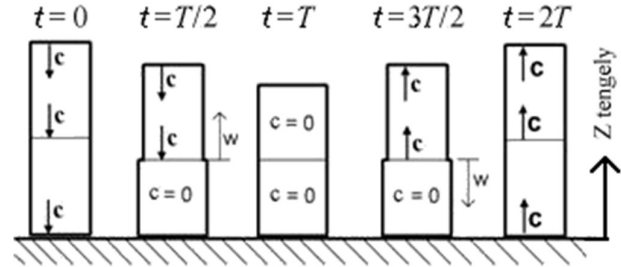
$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} v_n dS = \int_{S(t_1)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}. \quad (2.24)$$

Az anyagi térfogat **köbtartalmának** időegység alatti változása tehát így számítható. (Ugyanezt kapjuk (2.22) képlettel is, mert az $S(t_1)$ által Δt idő alatt áthatolt térfogat éppen (2.23) egyenlet bal oldala.)

A következő példában *szakadási felület* kezelését is bemutatjuk.

2.6. példa. Merev lapra eső rugalmas hasáb

Rugalmas hasáb merev lapra esik (2.6. ábra). A $t = 0$ időpillanatban c sebességgel ér a lapra. Benyomódni nem tud, a homlokfelülete hirtelen a zérus sebességet veszi fel. Tételezzük fel, hogy a $t = 0$ pillanatban egy lökeshullám indul a rugalmas testben felfelé, w hullám-sebességgel. Ennek a feltevésnek csupán annyi az alapja, hogy példákön csiszolódott mechanikai érzékünk ezt sugallja. Megpróbáljuk a jelenséget ezzel a feltétellel leírni. **Ha sikerül az axiómákat teljesíteni, akkor a jelenség a valóságban is úgy fog lezajlani, ahogy számíthatjuk.**⁵²



2.6. ábra. Merev lapra eső rugalmas hasáb mozgása

A lökeshullám egyenletes w sebességgel T idő alatt végighalad a hasábon (alább kiszámítjuk T -t).

A $t = T/2$ időpontban a hasáb felénél tart (2.6. ábra). A lökeshullám pillanatnyi síkja alatt a hasáb pontjainak a sebessége $c = 0$, fölötté a hasáb minden pontja még c sebességgel halad a lap felé. Mivel a hasáb impulzusa csökkent, a hasábra erőnek kellett hatni. Nyilván a merev lap nyomja. A lökeshullám alatti részen a hasáb összenyomódott (és Hooke törvénye szerint kiszélesedett, ezt látjuk az ábrán). A lökeshullám síkja fölött a hasáb feszültségmentes (szélessége az eredeti).

A $t = T$ időpontban a lökeshullám elérte a hasáb tetejét. Az egész hasáb összenyomódott, a sebesség mindenütt zérus. A hasáb tetejének alsó oldalán nyomófeszültséget találunk, a levegő felől azonban ez nincs ellensúlyozva. Ezért a hasáb felső rétege a levegő felé ugrik. Ettől kezdve a hasáb fölfelé kirúgódik, azaz most lefelé indul el egy lökeshullám.

A $t = 3T/2$ időpontban a lefelé tartó lökeshullám eléri a hasáb közepét. A felső rész c sebességgel halad fölfelé, feszültségmentes állapotban. A lökeshullám síkja alatti rész még össze van nyomódva, a sebessége zérus.

A $t = 2T$ időpontban a hasáb fölfelé halad c sebességgel, feszültségmentesen elhagyja a merev lapot.

A **(IIa)** axiómát alkalmazzuk. Legyen t_1 bármelyik időpont a $0 \leq t_1 \leq T$ időtartamban, és $V(t)$ az egész hasáb.

A **(IIa)** axióma:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}. \quad (2.25)$$

⁵²Kivételt képeznek azok a ritka esetek, amelyeknél a mechanika alapegyenleteinek az általunk ismert kezdeti és peremfeltételek mellett több megoldása is van (például a lamináris/turbulens átcapás esetén, lásd a 13. fejezetben). A kiemelt mondat valójában minden mechanikai számítás elvárása.

Vektoregyenletekhez fűződő feladatok megoldásánál két főbb módszert szoktak követni:

a) *Koordinátamentes*. A vektorokat a rajzon a várt irányuknak megfelelően bejelöljük, és az egyenletben szereplő műveleteket a vektoralgebra szabályai szerint végezzük. A módszer gyors, de téveszthető.

b) *Koordinátás*. A térben felvesszünk egy koordinátarendszert, és a műveleteket a koordinátákkal végezzük. Az eljárás lassabb, de biztonságosabb.

A koordinátás tárgyalást követjük. Mivel az összes szerepet játszó vektor függőleges állású, bevezetjük a függőlegesen fölfelé irányuló Z tengelyt (2.6. ábra), \mathbf{e}_z egységvektorral. (Az X tengely a vízszintes síkban akármilyen irányú lehet, az Y tengely rá merőleges, ezekkel nem lesz dolgunk.) A Z irányú koordinátákat úgy is megkapjuk, hogy (2.25) egyenletet skalárisan szorozzuk balról \mathbf{e}_z -vel, és a differenciálás, valamint az integrálás jele alá beszorunk:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \rho(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{g}) dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{F} dS . \quad (2.26)$$

Mivel a szereplő vektorok függőlegesek, $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} = v$ a hasáb pontjainak a sebessége (fölfelé pozitív, lefelé negatív), továbbá: $-\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{g} = g$ a nehézségi gyorsulás nagysága, a felületi integrál pedig a merev test által a hasábra gyakorolt erő (fölfelé pozitív). Jelölje I a hasáb impulzusát a t_1 időpillanatban:

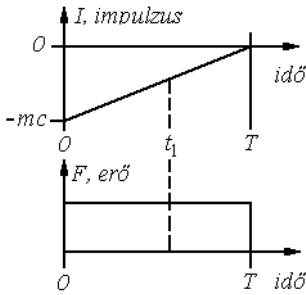
$$I = \left. \int_{V(t)} \rho v dV \right|_{t=t_1} , \quad (2.27)$$

ez a nagysága a (2.25) bal oldalán a differenciálás jele utáni vektornak. Az I értéke kezdetben ($t = 0$, amikor a hasáb a lapra érkezik), valamint az időtartam végén ($t = T$, teljesen összenyomódott állapotban) a következő:

$$I_{\text{kezd}} = \left. \int_{V(t)} \rho v dV \right|_{t=0} = (-c) \int_{V(t)} \rho dV = -mc , \quad I_{\text{vég}} = \left. \int_{V(t)} \rho v dV \right|_{t=T} = 0 , \quad (2.28)$$

ugyanis kezdetben $v = -c$ a hasáb minden pontjánál (2.6. ábra), és a teljesen összenyomódott állapotban $v = 0$.

(Ellenőrzés: A kezdeti impulzusvektor a sebességgel arányos, lefelé mutat, \mathbf{e}_z vektor fölfelé, I_{kezd} negatív, helyesen.)



2.7. ábra. A hasáb jelleggörbéi

A hasáb időbeli jelleggörbéit a 2.7. ábra mutatja. Az I impulzus az idő függvényében a $[0, T]$ intervallumban lineárisan változik (mert 2.6. ábrán a változás egyenletes). A linearitás miatt *bármely* t_1 -nél (a $0 < t_1 < T$ intervallumban) az I differenciáhányadosa egyenlő az időtartam alatti különbségi hányadossal:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_1} = \frac{mc}{T} . \quad (2.29)$$

A (2.26) egyenlet szerint azonban:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_1} = G + F_G + F , \quad (2.30)$$

ahol G a hasáb súlya, és a merev lap által a hasábra gyakorolt erőt $F_G + F$ összegre bontottuk. F_G az az erő, amivel a merev lap a hasáb súlyát tartja:

$$G + F_G = 0 , \quad (2.31)$$

F_G független a hasáb impulzusváltozásaitól, akkor is ennyi, ha a hasábot sebesség nélkül rátesszük a lapra. F az a *többlet erő, ami a hasáb impulzusának a lefékezésére fordítódik*. F az idő függvényében állandó (2.7. ábra), mert a hasáb alján az összenyomódás az egész idő alatt ugyanolyan. (2.31)-et (2.30)-ba téve, és összehasonlítva (2.29)-el:

$$F = mc/T. \quad (2.32)$$

Gyakorlott vektoranalitikus ezt az egyenletet egyből felírja, mondván: *Az időegység alatti impulzusváltozás egyenlő a ható erővel*. (Ez más feladatoknál is alkalmazható.) Az egyenlethez vezető út követése mégsem volt felesleges, mert bemutatta a **(IIa)** axióma, a nehézségi erő, a linearitás, és a (2.29) egyenlet szerepét.

Először kiszámítjuk a *hullámsebességet*.

Az előbbi, (2.32) egyenlet:

$$F = mc/T .$$

A lökéshullám T idő alatt végigfut a hasábon:

$$L = wT .$$

A hasáb teteje T idő alatt ΔL utat fut be:

$$\Delta L = cT .$$

A nyomófeszültségre **Hooke** törvénye: $\sigma_{nyomó} = E \varepsilon$, azaz:

$$F/A = E \Delta L/L .$$

Utóbbiba az előbbieket helyettesítve: $\frac{mc}{TA} = E \frac{cT}{wT}$, majd $m = \rho AL$, és $\frac{L}{T} = w$ helyettesítéssel:

$$w^2 = \frac{E}{\rho}, \quad w = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.33)$$

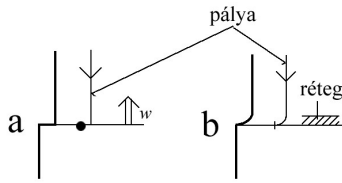
Ez az egyenlőség sok tankönyvben megtalálható, mint a hullámsebesség egyik képlete. Itt azonban *véges* feszültségugrásra vezettük le, a mechanika *legelemibb* képleteivel! A többi paraméter:

$$T = L/w, \quad \sigma = E\varepsilon = \rho w^2 \frac{\Delta L}{L} = \rho w^2 \frac{c}{w} = \rho w c, \quad F = \sigma A . \quad (2.34)$$

Számszerű értékek acélra:

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \quad E = 2.10^{10} \text{ N/m}^2, \quad w = 5063 \text{ m/s}, \text{ és } c = 20 \text{ m/s} \text{ esetén } \sigma = 790.10^6 \text{ N/m}^2.$$

Értékelés: Az **(Ia)** axióma eleve teljesül, mert a hasáb tömege végig állandó. A **(IIIa)** axióma is minden időpillanatban teljesül, mert semmiféle forgás nincs a rendszerben. Mivel az axiómák teljesülnek, *elvárható*, hogy a számítás *jó közelítése* a valóságnak.



2.8. ábra. Szakadási réteg bevezetése

A példának van egy szépséghibája. Amikor a lefelé haladó anyagi pont találkozik a lökéshullám frontjával (2.8a ábra), akkor a pont hirtelen kifelé ugrik, és a továbbiakban a pálya egy pont. A pálya ilyen hirtelen változása *valóságos* testekben nem jöhet létre. (Acélban tönkre tenné a kristályszerkezetet.) A pálya ugrása a mozgás 1D-s kezelésének *erőltetése* miatt jött be, ami a merev lapra érkezés pillanatában kialakuló 3D-s mozgás *túlzott* leegyszerűsítése.⁵³ Realisztikusabb feltételezni egy vékony "szakadási réteget" (2.8b ábra), amelyben ez a változás 3D-s mozgással létrejön. A szakadási réteg bevezetésével az előbbi gondolatmenet alig változik: A lökéshullám síkja helyett ekkor *a szakadási réteg halad* az anyagban (a mozgás fő paraméterei ugyanazok), és ekkor *minden anyagi pont pályája folytonos vonal*.

Ez a példa bemutatta egy *ütésszerű* igénybevétel kontinuummechanikai kezelését. Ez figyelemfelhívás arra, hogy az *ütések és lökések* más bonyolultabb esetekben is kezelhetők szakadási felületekkel vagy szakadási rétegekkel (lásd az 5. fejezetben).

⁵³Az R sugáron levő pont ugrásának x nagyságát az acél 8. fejezetben adott anyagállandóival számítva: $x/R = 1,35.10^{-12}$. Az x tehát olyan kicsi, hogy a gyakorlatban nem érdemes vele foglalkozni!

Az **(Ia)**, **(IIa)**, **(IIIa)** axiómákban csak térfogati tömegeloszlás, valamint térfogati és felületi erő eloszlás szerepel. A kontinuummechanika elméletében azonban esetenként másfajta idealizálásokat is használunk, ezeket foglaljuk itt össze.

2.7. példa. Általános tömeg és erő eloszlások

Sok feladatnál feltételezhetjük, hogy $V(t_1)$ koncentrált tömegeket, vagy vonalmenti, esetleg felületi tömegeloszlást is tartalmaz. Ugyanígy az erőkre és a nyomatékokra is $k = 0, 1, 2$ és 3 dimenziós eloszlások is felvehetők. Ezekkel az idealizálásokkal a három általános axióma, $V(t)$ anyagi térfogatra felírva:

$$(Ib) \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^3 \int_{V(t)} dm_k \Big|_{t=t_1} = 0 \quad . \quad (2.35)$$

$$(IIb) \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^3 \int_{V(t)} \mathbf{v} dm_k \Big|_{t=t_1} = \sum_{k=0}^3 \int_{V(t_1)} \mathbf{f}_k dV_k \quad . \quad (2.36)$$

$$(IIIb) \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^3 \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm_k \Big|_{t=t_1} = \sum_{k=0}^3 \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_k dV_k + \sum_{k=0}^3 \int_{V(t_1)} \mathbf{M}_k dV_k \quad . \quad (2.37)$$

Az **(Ia)**, **(IIa)**, **(IIIa)** axiómákban már eddig is szerepeltek:

$$dm_3 = \rho dV \quad \mathbf{f}_3 = \rho \mathbf{g} \quad dV_3 = dV \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{F} \mathbf{n} \quad dV_2 = dS \quad .$$

Egyes alkalmazásoknál előfordulhatnak még:

- dm_0 : koncentrált tömeg izolált pontban (statika), ⁵⁴
- dm_1 : vonal ívhosszal arányos elemi tömeg (kötél),
- dm_2 : felülettel arányos elemi tömeg (szappanbuborék),
- \mathbf{f}_0 : koncentrált erő izolált pontban (statika), $dV_0 = 1$, ⁵⁵
- \mathbf{f}_1 : vonalmenti erőssűrűség (kapillaritás), $dV_1 = dl$,
- \mathbf{M}_0 : koncentrált nyomaték izolált pontban (statika), ⁵⁶
- \mathbf{M}_1 : vonal ívhosszal arányos elemi nyomaték (rudak),
- \mathbf{M}_2 : felülettel arányos elemi nyomaték (héjfelületek),
- \mathbf{M}_3 : térfogattal arányos elemi nyomaték (mágnesek).

Ha egy mechanikai elméletben az utóbbi négy nyomaték közül legalább egy szerepel, akkor *poláros* tárgyalásról beszélnek. A *továbbiakban* ilyen nyomatékokat *nem tárgyalunk*, tehát **nem-poláros elméletet** fejtenk ki.

Az **(a) axiómákban** szereplő eloszlásokat az emeli ki a többi közül, hogy természetes módon kapcsolódnak gyakorlati feladatokhoz (lásd az áramlástani és vízgépes példákat), valamint a newtoni kontinuum alapmennyiségeihez (tömeg, sűrűség és erőhatások fogalmához) ⁵⁷. Esetenként azonban a számítások egyszerűsítése vagy a ritkábban előforduló erőhatások (pl. mágnesek) figyelembevétele érdekében a többi idealizálást is használjuk, és pontokba koncentrált elemeket, valamint vonalmenti, felületi és térfogati eloszlásokat a **(b) axiómák**kal illesztünk az elméletbe.

De bevezető jellegű tárgyalásunkban továbbra is csak az **(a) axiómák** következményeivel foglalkozunk.

⁵⁴Ekkor $\int_{V(t)} dm_0$ a $V(t)$ -ben levő koncentrált tömegek összességét jelenti.

⁵⁵Az előbbihez hasonlóan \mathbf{f}_0 -nak a dV_0 szerinti integrálja a $V(t)$ -re ható koncentrált erők vektorösszegét jelenti.

⁵⁶Hasonlóan \mathbf{M}_0 -nak dV_0 szerinti integrálja a $V(t)$ -re ható koncentrált nyomatékok vektorösszegét jelenti.

⁵⁷Noll [2] és Truesdell [3] is az **(a) axiómákra** építi a tárgyalását.

Kinematika

Az **(a)** axiómák a mozgás *dinamikai* (erőtani) alaptörvényei. A teljesség kedvéért érdemes kicsit a *kinematikával* is foglalkozni, ami a mozgás *geometriai* leírása. Mivel a testek mozgását az anyagi pontok pályái határozzák meg, a kinematika tulajdonképpen a *pályák jellemzése*.

2.8. példa. Anyagi pont pályája

Az *anyagi pont* a $K(t)$ kontinuumba (2.1. ábra) beléphet, és belőle távozhat (mint a szélcsatornában is). A kontinuumon belül az anyagi pont pályáját egy $\mathbf{r}(t)$ függvény írja le, \mathbf{r} a helyvektor $K(t)$ -ben, és t az idő. Az anyagi pont sebessége a kontinuum $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ alapfüggvénye. A t_1 időpillanatban az anyagi pont az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ pontban tartózkodik. Egy későbbi $t > t_1$ időpontban a sebesség integrálásával (az időt jelentő τ segédváltozóval) a pont helyvektora:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \int_{t_1}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.38)$$

Ez az **anyagi pont pályájának** az egyenlete. Ismert $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességeloszlás esetén a pálya ezzel a képlettel, *időben léptető eljárással* könnyen számítható.⁵⁸ Alapvető matematikai tétel alapján a *pálya folytonos vonal*.⁵⁹

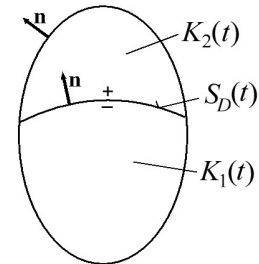
Szakadási felületnél a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ függvény magyarázatra szorul. A kontinuumot az $S_D(t)$ szakadási felület kettévágja $K_1(t)$ és $K_2(t)$ részre (2.9. ábra). A szakadási felület egy pontjánál a felület két oldalán a sebesség határértékét jelölje \mathbf{v}^- és \mathbf{v}^+ . Úgy tekintjük, hogy ezek a határértékek a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ függvény *értékkészletéhez tartoznak*! Tehát az $S_D(t_2)$ felület \mathbf{r}_2 pontjánál két anyagi pont is tartózkodhat, az egyik az egyik oldalon, a másik a másikon, és a sebességük: $\mathbf{v}^-(\mathbf{r}_2, t_2)$, $\mathbf{v}^+(\mathbf{r}_2, t_2)$. Egy t_2 időpontban az $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ pontnál tartózkodó *anyagi pont sebessége*:

- Ha \mathbf{r}_2 a $K_1(t_2)$ vagy $K_2(t_2)$ *belsejében* van, akkor:

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=t_2} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (2.39)$$

- Ha \mathbf{r}_2 az $S_D(t_2)$ -n van, és az anyagi pont éppen *áthalad* a szakadási felületen (például lökeshullámon⁶⁰), akkor a sebessége ugrik az $S_D(t_2)$ két oldalán érvényes $\mathbf{v}^-(\mathbf{r}_2, t_2)$, $\mathbf{v}^+(\mathbf{r}_2, t_2)$ sebességek között.
- Ha \mathbf{r}_2 az $S_D(t_2)$ -n van, és *huzamos ideig* tartózkodik az $S_D(t_2)$ egyik vagy másik oldalán (például szilárd test és folyadék határán), akkor ott a sebessége folyamatosan vagy

$$\mathbf{v}^-(\mathbf{r}_2, t_2) \text{ vagy } \mathbf{v}^+(\mathbf{r}_2, t_2).$$



2.9. ábra. A $K_1(t)$ és $K_2(t)$ tartomány

A sebességvektor ilyen értelmezése biztosítja, hogy amíg az anyagi pont a $K(t)$ kontinuumban tartózkodik, minden időpillanatban van sebességvektora, akár a $K_1(t)$ vagy $K_2(t)$ belsejében, akár a szakadási felületen található.⁶¹

⁵⁸A τ időpontban az $\mathbf{r}(\tau)$ helyen lévő pontot kicsiny $\Delta\tau$ idő alatt $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(\tau), \tau) \Delta\tau$ elmozdulással léptetve nyerjük az $\mathbf{r}(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{r}(\tau) + \Delta\mathbf{r}$ pontot. Ezt az időlépést ismételve nyerjük a pálya pontjait. A pontosság Runge-Kutta módszerekkel fokozható.

⁵⁹Ismert matematikai tétel, hogy korlátos függvény integrálja, az integrál felső határának függvényében *folytonos*. A (2.38) egyenlet alapján tehát a kérdés az, hogy a sebesség függvény korlátos-e? A (2.2) függvényekre kikötöttük, hogy "józanul" viselkednek, tehát korlátosak, és a határértékeik is azok. Ezért a (2.38) pálya mindig folytonos vonal.

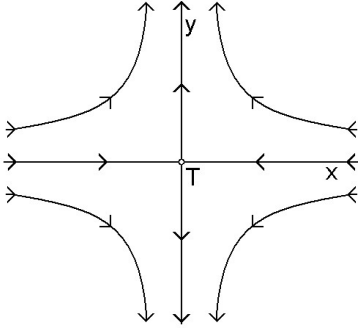
⁶⁰A 2.6 példában az anyagi pont a lökeshullámon áthaladva icipicit ugrik. Ezt vagy elhanyagoljuk, vagy szakadási réteggként kezeljük, és ekkor az anyagi pont pályája (a lökeshullám szakadási rétegén áthaladva) folytonos vonal.

⁶¹A (2.38) egyenlet és következményei egyaránt vonatkoznak szilárd testekre, folyadékokra és légnemű testekre.

Ahol a sebességvektor hossza nem zérus, ott a pálya iránya határozott, és a (2.38) egyenlet egyértelműen megszabja a pályát.

Külön figyelmet érdemelnek az áramlási tartomány *zérus pontjai* (ahol $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), mert ott a pálya iránya határozatlan. Egy gyakran előforduló síkáramlás zérus pontját a 2.9. példa mutatja be.

Síkáramlásnak nevezik az olyan áramlásokat, melyeknél minden sebességvektor egy adott síkkal párhuzamos, és a sebességek a síkra merőleges irányban változatlanok. Ha a sík a z tengelyre merőleges, akkor a síkáramlás egyenletei: $v_x = v_x(x, y)$, $v_y = v_y(x, y)$, $v_z \equiv 0$, ami 2D-s feladatot jelent.



2.10. ábra. Síkáramlás torlópontnál

2.9. példa. Síkáramlás torlópontnál

A 2.10. ábra egy ismert összenyomhatatlan, súrlódásmentes síkáramlás vázlatát, ami a komplex számsíkon jól kezelhető⁶². A két szembefordult áramlás között a T torlópontban $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ha az ábrát az Y tengely mentén elvágjuk, akkor egy síklap felé tartó súrlódásmentes áramlás esetét modellezi. Az ábra negyedét tekintve a sarok melletti súrlódásmentes áramlás vázlatát látjuk. A sebességmező egyenletei⁶³:

$$v_x = -x, \quad v_y = y.$$

A (2.39) egyenlőség alapján a pályák differenciálegyenlet rendszere:

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = y.$$

Két szétválasztható differenciálegyenletet nyertünk. Az elsőre: $\frac{dx}{x} = -dt$, ezt integrálva:

$\ln x = -t + C$. Ez teljesül a t_0 időpontban az (x_0, y_0) pontban levő anyagi pontra is, tehát: $\ln x_0 = -t_0 + C$. Az utóbbi egyenletet az előbbiből kivonva: $\ln(x/x_0) = -(t - t_0)$, ami exponenciális alakban: $x = x_0 e^{-(t-t_0)}$.

Ehhez hasonlóan a másik differenciálegyenletből: $y = y_0 e^{(t-t_0)}$. Ez a két egyenlet írja le az anyagi pontok pályáit. Ezek szerint:

$x_0 = 0$ és $y_0 = 0$ esetén a T torlópontnál levő anyagi pont az origónál marad, *a pályája egyetlen pont*.

$x_0 \neq 0$ de $y_0 = 0$ esetén az X tengelyen levő anyagi pontok az idő múlásával egyre közelebb kerülnek T-hez, de soha el nem érik!

$y_0 \neq 0$ esetén az anyagi pont exponenciális ütemben távolodik az X tengelytől, végül elhagyja a K(t) tartományt.

A két mozgásegyenletet összeszorozva: $xy = x_0 y_0$, *a pályák hiperbolák*.

A 2.10. ábrát *átgondolás nélkül* szemlélve valaki azt mondhatja: két anyagi pont eltűnik, és két anyagi pont keletkezik. A pályák egyenlete azonban azt bizonyítja, hogy az X tengelyen levő anyagi pontok sohasem érik el a torlópontot, és a torlópontból anyagi pont nem tud kiszabadulni. Tehát *anyagi pontok keletkezése és eltűnése a 2.10. ábra szerinti áramlásban sem lehetséges*.⁶⁴

Az X tengelyen mozgó anyagi pontok bemutatott viselkedése *elméleti* lehetőség. A valóságos áramlásokban mindig van egy kis *instacionárius* jelleg, és ha az X tengelyen haladó anyagi pont kicsit elhagyja a tengelyt, akkor *el is távozik*. (Ugyanez a helyzet a szárnyprofilok orrán kialakuló torlópontoknál is.)

⁶²A konjugált komplex sebesség: $\bar{v} = -z$, de itt csak a valós egyenleteket mutatjuk be.

⁶³A síkáramlások egyenletei levezethetők az (a) axiómákból (lásd a 12. fejezetben).

⁶⁴Van az áramlástanak egy olyan ága – a szingularitások elmélete – amely idealizált forrásokat és idealizált nyelőket is feltételez a kontinuum *belsejében* (amelyek anyagi pontokat tudnak kibocsátani és elnyelni). A szingularitások elméletében a források és nyelők csak *kivételes* helyeken (izolált pontoknál, vonalaknál, felületeken) fordulnak elő. Ebben a tanulmányban ezeket egyszerűség kedvéért kizártuk. Valóságos áramlásokban ilyenek nincsenek, anyagi pontok csak a kontinuum határán érkezhettek és azon távozhatnak.

2.10. példa. Térfogat-részecske mozgása

Az anyagi pont körül elhelyezkedő kicsiny dV anyagi térfogatot **térfogat-részecskének** vagy egyszerűen **részecskének** nevezik. A *részecske tömege*: ρdV (ahogy az integrálokban is használjuk). A térfogat-részecske mozgását a kiválasztott anyagi pont környezetében levő anyagi pontok mozgása szabja meg. A $K_1(t)$ vagy $K_2(t)$ tartomány minden **belső pontjánál** (2.9. ábra) a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ függvény differenciálható. Ezért ezeknél a pontoknál a térfogat-részecskék mozgása jól jellemezhető. Amíg az anyagi pont (a részecskével együtt) a pályáján halad, körülötte a részecske *elfordul, deformálódik, kiterjed, vagy komprimálódik*.

Tekintsünk egy *kicsiny* gömbalakú térfogat-részecskét a t_1 időpillanatban az \mathbf{r}_1 helyen levő anyagi pont körül, és nézzük ennek egy kicsiny Δt idő alatti változásait.

A gömb középpontjának eltolódása: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t_1) \Delta t$.

A sebesség deriválttenzora⁶⁵:
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$
 Ezt szimmetrizálva⁶⁶:
$$\mathbf{S} = \frac{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\right)^*}{2}. \quad (2.40)$$

A gömb kicsiny ellipszoiddá deformálódik, melynek főtengelyei az $(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{S})$ sajátirányai, és a főtengelyek irányában létrejövő nyújtások mértékei ennek a sajátértékei (lásd a mátrixszámítás szakkönyveiben).

A sebességtér divergenciájának és rotációjának is szemléletes jelentése van.

A divergencia:
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = i \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_{\text{ellipszoid}} - V_{\text{gömb}}}{V_{\text{gömb}} \Delta t},$$
 az időegység alatti relatív térfogatváltozás.

A rotáció:
$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}, \quad \text{a kicsiny gömb pillanatnyi szögsebességének kétszerese.}$$

2.11. példa. Pályamenti differenciálhányados

Az anyagi pont az $\mathbf{r}(t)$ pályáján mozog. Legyen $\psi(\mathbf{r}, t)$ egy tetszőleges fizikai paraméter, ami a hely és az idő függvénye. (Például sűrűség, hőmérséklet, vagy sebességvektor.) Az anyagi pont a t_1 időpontban az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ pontnál tartózkodik. Feltesszük, hogy az \mathbf{r}_1 pont a $K_1(t)$ vagy $K_2(t)$ tartomány (2.10. ábra) *belső* pontja. (Ez azért lényeges, mert itt ψ parciális deriváltjai \mathbf{r} és t szerint is léteznek.)

Az anyagi ponttal együtt mozogva a ψ *pályamenti változását* a $\psi(\mathbf{r}(t), t)$ függvény írja le. Valóban, az idő múlásával, t_1 -ről a $(t_1 + \Delta t)$ időpontra térve, a $\psi(\mathbf{r}(t_1 + \Delta t), t_1 + \Delta t)$ az anyagi pont új helyén az új időpontban érvényes ψ értéket szolgáltatja. A ψ változásának szokásos elnevezései:

Konvektív változás ⁶⁷ (a térben):	$\psi(\mathbf{r}(t_1 + \Delta t), t_1) - \psi(\mathbf{r}(t_1), t_1)$
Helyi vagy lokális változás (az időben):	$\psi(\mathbf{r}(t_1), t_1 + \Delta t) - \psi(\mathbf{r}(t_1), t_1)$
Pályamenti vagy totális változás (térben és időben):	$\psi(\mathbf{r}(t_1 + \Delta t), t_1 + \Delta t) - \psi(\mathbf{r}(t_1), t_1)$

Ezeket Δt -vel osztva, határátmenettel differenciálhányadosokat nyerünk.

$\psi(\mathbf{r}(t), t)$ *pályamenti differenciálhányadosa* a láncszabály szerint:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{r}(t), t) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.41)$$

⁶⁵Lásd a (17.27) – (17.31) egyenleteket és a 17.6. példát.

⁶⁶Az \mathbf{S} tenzor a sebesség *szimmetrizált deriválttenzora*. A csillag * a mátrix transzponáltját (főátlóra történt tükröképét) jelenti (lásd (19.13), (19.15) egyenletet). Az \mathbf{S} mátrixot tehát úgy kapjuk, hogy a mátrixban a főátló marad, és a többi helyre a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő értékek számtani közepét tesszük. Az \mathbf{S} tenzor szimmetrikus.

⁶⁷Ha ψ hőmérséklet, akkor konvekciós hőszállítás folyik (innen az elnevezés).

ahol $d\psi/dt$ a *pályamenti* vagy *totális* derivált. A jobb oldali szorzat a *konvektív* derivált, az utolsó tag pedig a *helyi* vagy *lokális* derivált. A kifejezést tovább alakíthatjuk, mert $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ az áramlási sebesség. Ha ψ skalár mennyiség, akkor $\partial\psi/\partial\mathbf{r} = \text{grad } \psi$ a *gradiens* vektor, és ha Ψ vektor, akkor $\partial\Psi/\partial\mathbf{r}$ a *deriválttenzor*. Ezekkel a *pályamenti differenciálhányados*:

$$\text{Skalár } \Psi\text{-re:} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \text{grad } \psi \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad , \quad (2.42)$$

$$\text{Vektor } \Psi\text{-re:} \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad . \quad (2.43)$$

A (2.42) képletet gyakran a sűrűség függvényre alkalmazzuk, ekkor: $\psi = \rho(\mathbf{r}, t)$, és a képlet:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad . \quad (2.44)$$

A (2.43) képletet pedig gyakran az áramlási sebességre alkalmazzuk, ekkor: $\Psi = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, és az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \quad . \quad (2.45)$$

3. fejezet. Az axiómák rögzített térfogatokra

Az általános **(Ia)**, **(IIa)**, **(IIIa)** axiómák bal oldalát már *átalakítottuk* a (2.19) – (2.21) egyenletek szerint.⁶⁸ Ezekben $v_n dS$ helyett $\mathbf{v} d\mathbf{S}$ -t írva (a 2.4. példa alapján), és az axiómákba behelyettesítve ezeket kapjuk:

$$\text{(Ic)} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \rho dV \Big|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

$$\text{(IIc)} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{v} dV \Big|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (3.2)$$

$$\text{(IIIc)} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \Big|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (3.3)$$

Mindkét oldalon az integrálásokat *időben változatlan* tartományokon végezzük. Ezért az **(Ic)**, **(IIc)**, **(IIIc)** egyenletek a **kontinuummechanika axiómái rögzített térfogatokra felírva**.⁶⁹ Az $S(t_1)$ zárt felületet az áramlástanban **ellenőrző felületnek** nevezik. Ez a vonatkoztatási rendszerhez van rögzítve, és az idő múlásával helyben marad. (A példákban szaggatott vonallal jelöljük, és rajta a felület-elem vektort *kifelé* irányítjuk.)

Stacionárius mozgás esetén (ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} időben állandó) az **(Ic)**, **(IIc)** és **(IIIc)** axiómák baloldali első tagja *zérus*.⁷⁰ A 8. fejezetben látni fogjuk, hogy ez **kvázistacionárius mozgásokra**⁷¹ is igaz.

Azokban a fontos esetekben, *amikor a baloldali első tag zérus*, a másik baloldali tagot a jobboldalra rendezzük, és így kapjuk a **(c)** axiómák stacionárius és kvázistacionárius esetekre érvényes következő sorozatát:

⁶⁸Fontossága miatt az átalakítás "matematikai ízű" bizonyítását a 18. fejezetben is vázoljuk.

⁶⁹A *rögzített térfogat* fogalmát lásd az 1.2. példában.

⁷⁰Mert konstans függvényt integrálunk időben változatlan tartományon, és a konstans deriváltja zérus.

⁷¹A kvázistacionárius mozgás definícióját lásd (2.14) egyenletnél.

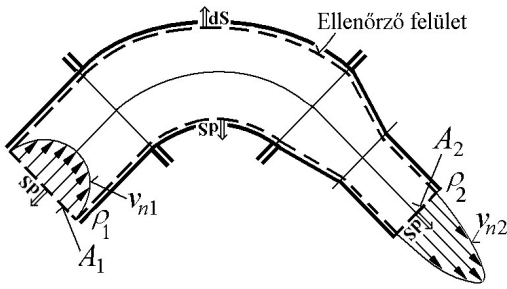
(Id) Stacionárius és kvázistacionárius: $0 = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} \quad . \quad (3.4)$

(IIId) Stacionárius és kvázistacionárius: $0 = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad . \quad (3.5)$

(IIIId) Stacionárius és kvázistacionárius: $0 = - \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad . \quad (3.6)$

Az (Id) egyenlőség az áramlástan legtöbbször alkalmazott egyenlete. Csővezetékek stacionárius vagy kvázistacionárius (turbulens) üzeme esetén ezzel számítjuk a tömegáramot (3.1. példa).

3.1. példa. Tömegáram csővezetékben



3.1. ábra. Tömegáram számítása csővezetékben

Egy csővezetékben (3.1. ábra) víz vagy levegő áramlik. Az üzemállapot stacionárius. Az (Id) axiómát alkalmazzuk a szaggatott vonallal jelölt *ellenőrző felületre*. A $\mathbf{v} d\mathbf{S} = v_n dS$ helyettesítéssel is élünk (2.4. példa). A csőfalán nincs átáramlás ($v_n = 0$), ezért (Id) integrálását csak az A_1 és A_2 szelvényekre⁷² kell végrehajtani. Az A_1 szelvényénél a normális irányú v_n sebesség és a $d\mathbf{S}$ vektor *ellentétes* irányú, $v_n = -v_{n1}$ (és így vesszük figyelembe alább a (3.7) egyenletben), az A_2 szelvényénél viszont *egyirányúak* $v_n = v_{n2}$. A (3.7) integráljaiban az időegység alatt érkező és távozó térfogat van szorozva a sűrűséggel. A jobboldali első integrál az A_1 -en *időegység alatt érkező* tömeg, ezt \dot{m}_1 jelöli, és **tömegáramnak** nevezzük (kg/s).

Mellette van a távozó tömegáram \dot{m}_2 .

$$0 = - \int_{S(t_1)} \rho v_n dS = - \left(- \int_{A_1} \rho_1 v_{n1} dA_1 \right) - \int_{A_2} \rho_2 v_{n2} dA_2 = \int_{A_1} \rho_1 v_{n1} dA_1 - \int_{A_2} \rho_2 v_{n2} dA_2 = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad . \quad (3.7)$$

Az egyenlet elejét és végét összevetve, látható, hogy a **tömegáram** az A_2 szelvényénél ugyanakkora, mint az A_1 szelvényénél (és a csővezeték bármely közbülső szelvényénél is, ha közben nincs vízelvezetés, hozzávezetés, vagy csurgás).

Ha a csőben víz áramlik: $\rho_1 = \rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$, és például $A_1 = 0,2 \text{ m}^2$, továbbá a csővezeték tápláló szivattyú **térfogatárama** (időegység alatt érkező folyadéktérfogat): $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, akkor a csővezetékben $\dot{m} = \rho Q = 1000 \text{ kg/s}$ **tömegáram** folyik, és a normális irányú (szelvényre merőleges) **átlagsebesség** A_1 -nél:

$$v_{n1\text{átlag}} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} v_{n1} dA_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1 A_1} = 5 \text{ m/s} \quad . \quad (3.8)$$

Vízgépek folyadékszállítását **térfogatárammal** (m^3/s) szokták megadni, de használják a **tömegáramot** (kg/s) is [83]. *Gázok és gőzök* szállítása esetén azonban ρ az áramlás mentén változhat, és ezért a csővezeték szelvényeiben *csak a tömegáram* állandó!

⁷² A szelvények síkidomok.

Impulzuserők

A **(IId)** egyenlőségben a jobboldalra átvitt felületi integrált úgy értelmezzük, hogy **elképzelt erőket** képvisel. Az $S(t_1)$ ellenőrző felület bármely S' részén számított

$$\mathbf{f}_{\text{impulzus}} = - \int_{S'} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \, d\mathbf{S}) \quad . \quad (3.9)$$

integrált **impulzuserőnek** nevezzük, és úgy képzeljük, hogy az az ellenőrző felületbe zárt folyadéktömegre hat az S' felületen. Az impulzuserők bevezetésével **(IId)** egy **erőegyensúlyt** jelent, ami a statika megszokott módszereivel kezelhető. Hasonlóképpen, **(IIId)** egyenlet az aktív nyomatékok és az impulzuserők nyomatékainak egyensúlyát fejezi ki.

A továbbiakat előkészítjük. Folyadékok esetén a feszültségtenzort sokszor ilyen alakban írják:

$$\mathbf{F} = -p \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\text{súrlódás}} \quad , \quad (3.10)$$

p a nyomás, \mathbf{I} az azonosság tenzora (1.21. példa), az $\mathbf{S}_{\text{súrlódás}}$ pedig magába sűríti a folyadék belső súrlódásából származó tagokat (például a Navier-Stokes egyenlet alapján). Ezek sok esetben kicsik, és ekkor **(IId)** axiómát a következő alakjában használjuk:

$$\textbf{(IId) kis súrlódású folyadékokra:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \, d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} \, dV + \int_{S(t_1)} (-p \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\text{súrlódás}}) d\mathbf{S} \quad . \quad (3.11)$$

A víz és a levegő viszkozitása kicsi⁷³, ezekre a súrlódás gyakran el is hanyagolható:

$$\textbf{(IId) súrlódásmentes folyadékokra:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} -p \, d\mathbf{S} \quad . \quad (3.12)$$

Az egyenletekben a nyomásból származó tag számítását megkönnyíti, hogy abszolút nyomás helyett a légkörhöz (sőt *tetszőleges nyomásszinthez*) képesti nyomásokkal is számolható (3.2. példa).

3.2. példa. A nyomásintegrál számítása túlnyomással

A Föld felszínén egy csővezetékben víz vagy levegő áramlik. A csövet kívülről levegő veszi körül, melynek nyomása a légköri *barometrikus nyomás*⁷⁴ p_{bar} . Ha a csőfal belső oldalának egy pontjánál az áramló közeg *abszolút nyomása* (a vákuumhoz képest) p_{absz} , akkor az adott pontnál a csőfalat a $(p_{\text{absz}} - p_{\text{bar}})$ nyomáskülönbség terheli, amit *túlnyomásnak* neveznek és itt $p_{\text{túl}}$ jelöli. (A cső belsejében érvényes nyomás ennyivel lépi túl a külsejében érvényes nyomást.) Ezekre a nyomásokra:

$$p_{\text{absz}} = p_{\text{bar}} + p_{\text{túl}} \quad . \quad (3.13)$$

Levegőben, kis környezetben a barometrikus nyomást legtöbbször állandónak tekintjük: $p_{\text{bar}} = \text{konstans}$. A konstans p_{bar} felületi integrálja zérus, ugyanis Gauss törvényét, a (21.7)₁ egyenletet alkalmazva:

$$\int_{S(t_1)} p_{\text{bar}} \, d\mathbf{S} = \int_{V(t_1)} \text{grad } p_{\text{bar}} \, dV = \mathbf{0} \quad , \quad (3.14)$$

mert a konstans gradiense zérus. Ezért (3.12)-ben a nyomásból származó tag (3.13) és (3.14) alapján:

$$\int_S -p_{\text{absz}} \, d\mathbf{S} = \int_S -p_{\text{túl}} \, d\mathbf{S} \quad . \quad (3.15)$$

tehát **(IId)**-ben a nyomásból származó tag a légkörhöz képesti túlnyomással is (vagy akármilyen konstans szint-hez képesti nyomással) számítható.

⁷³ A kinematikai viszkozitás **vízre**: $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (20° C hőmérsékleten), **levegőre**: $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (1 bar és 20° C).

⁷⁴ A nemzetközi normál atmoszféra tengerszinten, átlagosan $p_{\text{bar}} = 101325 \text{ Pa}$. A Föld felszínéhez közel a hely magasságának növelésével a légköri nyomás átlagos csökkenése 100 méterenként kb. 1200 Pa, tehát 110 m magasan (Budapest, Dunapart) az átlagos légköri nyomás: $p_{\text{bar}} \approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$. Ezért kevésbé igényes számításoknál a barometrikus nyomásra az 1 bar értéket szoktuk használni. Igényes számítások esetén (például vízgépek garanciális méréseinél) a légköri nyomás pillanatnyi értékét barométerrel megméri, és az így nyert p_{bar} értéket a berendezés környezetében levő levegőben (néhány 10 méteres magasságon belül) konstansnak tekintik.

3.3. példa. Ívcsőre ható erő

A könyökök és ívcsövek (3.2. ábra) feladata a csővezetékben kialakuló áramlás más irányba vezetése. Egy csőidomot akkor nevezünk *ívcsőnek*, ha a középvonal görbületi sugara (3.2. ábra) a csőátmérőhöz viszonyítva: $R/D \geq 2$, és *könyöknek*, ha $R/D < 2$.⁷⁵

Körkeresztmetszetű csővezeték 90 fokos ívcsővében víz stacionárius áramlását vizsgáljuk (3.3. ábra). Célunk a csőre ható erő és a csőfalban ébredő feszültség meghatározása. Két megoldást ismertetünk:

- A,** Két ellenőrző felülettel (a **(IId)** axiómát külön alkalmazzuk a folyadékra, és külön a csőfalra).
B, Egy ellenőrző felülettel (amelyben a cső felülete szakadási felület).

A, Két ellenőrző felület

A vízdali *belső* ellenőrző felületre az **(Id)** axiómát alkalmazzuk (3.3. ábra). A belépő és a kilépő sebességeloszlás egyenletes.⁷⁶ A víz sűrűsége $\rho =$ állandó. A $d\mathbf{S}$ felületelem vektor *kifelé* mutat a térfogatból. A belépő A_1 felületen $(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) < 0$, ezért **(Id)** jobb oldalán a *belépő* tömeg-áram⁷⁷:

$$\dot{m}_1 = - \int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \rho v_1 A_1 \quad ,$$

pozitív. A *távozó* tömegáram viszont *negatív*:

$$\dot{m}_2 = -\rho v_2 A_2 \quad .$$

A paláston nem lép át tömeg, ott az integrál zérus.

(Id) szerint viszont: $\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$ (3.1. példa), ami $A_2 = A_1$ miatt csak úgy lehet, ha $v_2 = v_1$. Tehát a belépő és a kilépő sebesség nagysága egyforma.

Most a belső ellenőrző felületre alkalmazzuk a **(IId)** egyenlőséget. Feltesszük, hogy az áramlás súrlódásmentes. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a feszültségtenzor: $\mathbf{F} = -p \mathbf{I}$ alakú (1.21. példa), másrészt azt, hogy nincs veszteség a könyökön (lásd a Bernoulli egyenletet a 13. részben), tehát $p_2 = p_1$. Tegyük fel, hogy a könyök vízszintes síkban fekszik, és a nehézségi erő függőleges komponensét alátámasztások egyensúlyozzák. Ezért csak a vízszintes síkba eső erők érdekesek. Legyenek \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 egységvektorok (3.3. ábra). Ezekkel a (3.12) egyenlet tagjai:

$$\text{az impulzuserők: } \mathbf{f}_{imp1} = - \int_{A_1} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \rho v_1^2 A_1 \mathbf{e}_1 \quad , \quad \mathbf{f}_{imp2} = - \int_{A_2} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \rho v_2^2 A_2 \mathbf{e}_2 \quad , \quad (3.16)$$

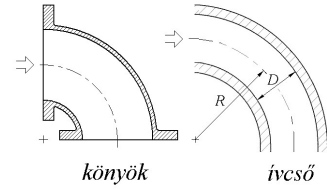
$$\text{a nyomóerők: } \mathbf{f}_{p1} = \int_{A_1} (-p \mathbf{I}) d\mathbf{S} = p_1 A_1 \mathbf{e}_1 \quad , \quad \mathbf{f}_{p2} = \int_{A_2} (-p \mathbf{I}) d\mathbf{S} = p_2 A_2 \mathbf{e}_2 \quad , \quad (3.17)$$

$$\text{és a paláston a cső által a folyadékra gyakorolt erő: } \mathbf{f}_{palást} = \int_{A_{palást}} (-p \mathbf{I}) d\mathbf{S} \quad . \quad (3.18)$$

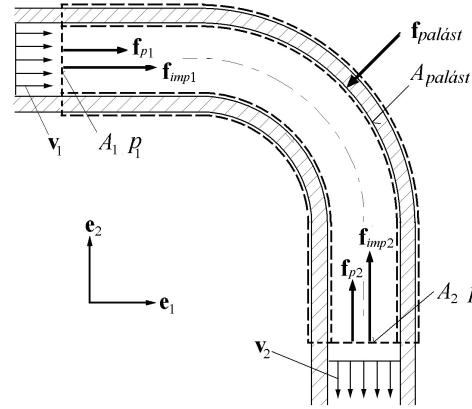
$$\text{Ezekkel (IId) egyenlet a vízszintes síkban: } \mathbf{f}_{imp1} + \mathbf{f}_{imp2} + \mathbf{f}_{p1} + \mathbf{f}_{p2} + \mathbf{f}_{palást} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.19)$$

Az 3.3. ábra az erővektorokat az irányuknak megfelelően mutatja. Figyeljük meg az erők irányát. Az impulzuserők *mindig* az ellenőrző felület belseje felé mutatnak. Folyadékok esetén, ha abszolút nyomásokkal dolgozunk, akkor a nyomásból származó erők is az ellenőrző felület belseje felé irányulnak.⁷⁸ Most a **(IId)** axiómát a külső ellenőrző felületre alkalmazzuk. A folyadéknyomás a paláston át a csőfalra $\mathbf{f}_{cső}$ erővel hat, ami az **akció-reakció törvénye** alapján:

$$\mathbf{f}_{cső} = -\mathbf{f}_{palást} = \mathbf{f}_{imp1} + \mathbf{f}_{imp2} + \mathbf{f}_{p1} + \mathbf{f}_{p2} \quad . \quad (3.20)$$



3.2 ábra. Könyök és ívcső



3.3. ábra. Ívcsőre ható erő számítása két ellenőrző felülettel

⁷⁵A könyökök kisebb helyen elférnek, mint az ívcövek, de az áramlási veszteségük lényegesen nagyobb.

⁷⁶Erőhatás számításoknál a pontossági követelmény nem szigorú (1.17. példa), a feltételek lazábban kezelhetők.

⁷⁷A betű fölötti pont időegység alatt átlépő tömeget jelent.

⁷⁸De ha légkörhöz képesti túlnyomásokkal dolgozunk (3.2. példa), akkor a *szívott* felületrészek *kifelé* mutatnak!

A (3.20) egyenlet jobb oldalán minden tag ismert, tehát a csőre ható erőt kiszámítottuk. Az $\mathbf{f}_{cső}$ erőt \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 irányú (3.3. ábra) komponensekre bontva meghatározhatók a csőfalban ébredő feszültségek is.

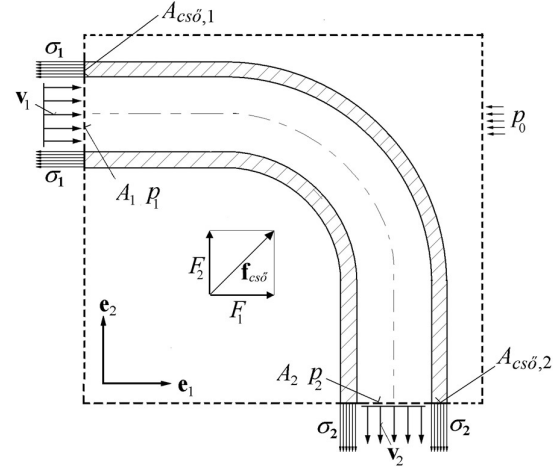
Említésre méltó, hogy a paláston bonyolult nyomáeloszlás alakul ki. Ennek ismerete az erő meghatározásához nem szükséges, mert az erőt **(IIId)** axióma egyből megadta!⁷⁹

B, Egy ellenőrző felület

Most ugyanezt a feladatot úgy oldjuk meg, hogy a **(IIId)** egyenlőséget a 3.4. ábrán szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületre alkalmazzuk. Ebben az acél cső külső és belső felülete *szakadási felület*. Az acél-levegő és az acél-víz szakadásánál ugrik a sűrűség.⁸⁰

Az impulzuserők ugyanazok, mint az előbb.

A nyomásokból származó erőket légkörhöz képesti *túlnyomásokkal* számoljuk (3.2. példa). Az ellenőrző felület levegőben levő részein a túlnyomás zérus. Tehát a felületi erők integrálját csak a belépés és a kilépés szelvényein ($A_1, A_2, A_{cső,1}, A_{cső,2}$) kell számítani. Így a **(IIId)** egyenlet:



3.4. ábra. Ívcsőre ható erő számítása **egy** ellenőrző felülettel

$$\rho v_1^2 A_1 \mathbf{e}_1 + \rho v_2^2 A_2 \mathbf{e}_2 + p_{1,túl} A_1 \mathbf{e}_1 + p_{2,túl} A_2 \mathbf{e}_2 - \sigma_{1,túl} A_{cső,1} \mathbf{e}_1 - \sigma_{2,túl} A_{cső,2} \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Ebben az egyenletben csak a két húzófeszültség az ismeretlen. Komponensekre bontva két egyenletet kapunk, melyekből az ismeretlen húzófeszültségek meghatározhatók.

Adatok: Csőátmérő: $d = 500$ mm, a hegesztett cső falvastagsága: $\delta = 6$ mm (3.4. ábra), helyi túlnyomás a csőben $p_{1,túl} = p_{2,túl} = 1$ bar, a csőben áramló vízmennyiség $Q = 1$ m³/s. Ezekkel az adatokkal: $A_1 = A_2 = d^2 \pi / 4 = 0,196$ m², $A_{cső,1} = A_{cső,2} = (d + \delta/2) \pi \delta = 0,94 \cdot 10^{-6}$ m², $v_1 = v_2 = Q/A_1 = 5,1$ m/s, $\rho = 1000$ kg/m³. Az \mathbf{e}_1 irányú erők:

$$\rho v_1^2 A_1 = 5098 \text{ N}, \quad p_{1,túl} A_1 = 19600 \text{ N}, \quad F_1 = (\rho v_1^2 A_1 + p_{1,túl} A_1) = 24,7 \text{ kN},$$

és ebből a húzófeszültség: $\sigma_{1,túl} = \frac{F_1}{A_{cső,1}} = 26,28 \text{ MPa}$ ⁸¹.

Az \mathbf{e}_2 irányú F_2 erő ugyanekkora, így a csőre ható erő nagysága (3.4. ábra): $|\mathbf{f}_{cső}| = \sqrt{2} F_1 = 34,9 \text{ kN}$. Elég nagy erőt kaptunk. Az impulzuserők és a nyomásból származó erők olyan irányúak, amelyek az ívcsövet eltávolítani igyekeznek a csővezetékéből. A csőfalban ébredő húzófeszültség az, ami visszatartja! A kapott húzófeszültség elég nagy⁸², de a hegesztett csőveknél használt szénacélok biztonsággal kibírják. (Ha a csővezetékben az ívcsőhöz egyenes csővek csatlakoznak, akkor a csőfal továbbítja az erőket a csővezeték lehorgonyzásaihoz. Egyes nagy gyakorlatú csővezeték tervezők a *nagyméretű* csőveket mindig *lehorgonyozzák* az ívcső vagy könyök közvetlen közelében (például betontömbökhöz) annak érdekében, hogy a csatlakozó csővek ne legyenek terhelve.)

A példából látható, hogy **B** esetén (egy ellenőrző felülettel) *egyszerűbben* nyerjük a megoldást, mint **A** esetén (két ellenőrző felülettel).

⁷⁹ A **(c)** axiómák érvényesek sűrűlódásos, leválásos, és turbulens áramlásokra is (lásd a 14. fejezetben), tehát lényegében a valóságos áramlásokra. Az itt leírt számítás tehát ekkor is alkalmazható, de a folyadéksűrűlódás hatását empirikus alapon (lásd a 13. fejezetben) általában figyelembe szokták venni, és így a p_2 nyomás valamivel kisebb, mint a p_1 nyomás.

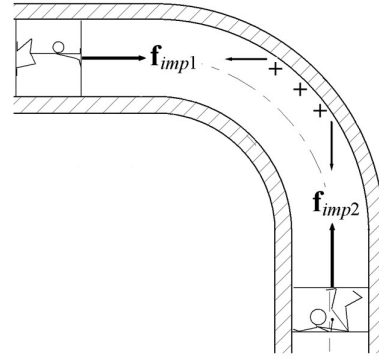
⁸⁰ A szakadási felület léte nem akadályozza a newtoni kontinuummechanika definíciójánál kikötöttük, hogy az axiómák *tetszőleges* anyagi térfogatra érvényesek, olyanokra is, amelyekben szakadási felületek is vannak.

⁸¹ 1 kN = 1000 N, 1 N = 1 Newton = 1 kg · 1 m/s², 1 Pa = 1 Pascal = 1 N/m², 1 bar = 10⁵ Pa, 1 MPa = 10⁶ Pa.

⁸² A húzófeszültséget a légkörhöz képest számítottuk (a jelölésben *túl* a túlnyomásra utal). A húzófeszültség tényleges értéke úgy kapható, hogy az abszolút zérus nyomásra korrigálunk (3.2. példa alapján): $\sigma_{1,absz} = \sigma_{1,túl} - p_{bar}$. Azonban a húzófeszültségekhez képest p_{bar} általában elhanyagolható (a példában is), és a korrekciót nem végezzük el.

Az impulzuserőkkel kapcsolatban még a következőt említjük. Az impulzuserő *elképzel* erő. Ezeket annak érdekében vezettük be, hogy erőegyensúlyt kapjunk, mert így sok feladat egyszerűen megoldható. Egy impulzuserővel *szemben* mindig megjelenik egy valódi erő, ami egy felületen hat. A 3.5. ábrán figyeljük meg a csőben haladó folyadéktömegre ható erőket. A csőfal +++ jelekkel ellátott részén a nyomás nagyobb, mint az átlagos, és ezért a csőfal az ebből a nyomásból származó erővel *befelé* nyomja a *folyadéktömeget* az impulzuserőkkel szemben. *Ezzel a valóságos erővel* tartanak egyensúlyt a *képzelt* impulzuserők.

Sokszor célszerű érzékletes fogalmakat társítani a fizikai mennyiségekhez. Például az *impulzuserőket* a 3.5. ábra szerint képzelhetjük el. Az ívcső előtti folyadéktömeg (az első kis ember) maga előtt tolja a könyökben lévő folyadéktömeget (hogy irányváltásra kényszerítse a könyökben). A könyök utáni folyadéktömeg (a második kis ember) igyekszik visszatartani az őt toló folyadéktömeget. Mindkét impulzuserő a könyökben levő folyadéktömeg *felé* irányul. A **(II d)** axióma alkalmazásánál a tévedések elkerülhetők, ha megjegyezzük, hogy a benne szereplő összes erő *az ellenőrző felületbe zárt tömegre* hat.⁸³



3.5. ábra. Az impulzuserők szemléltetése

Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy *különböző anyagú* térfogatok is lehetnek az ellenőrző felület belsejében. Ezt a vízgépek erőhatás számításainál (14.3. példa) ki is használjuk!

3.4. példa. Elemi szilárdságtan

A *szilárdságtan* a newtoni kontinuummechanika szilárd testekkel foglalkozó része. Fő feladata a terhelés (erők) hatása alá helyezett *álló* szilárd testben kialakuló *feszültségeloszlás* számítása, és annak a megállapítása, hogy a test kibírja-e a terhelést (pl. épület), eltörik-e (pl. gépalkatrész)? Ennek megfelelően, a **(c)** axiómákban $\mathbf{v} \equiv 0$ helyettesítésével az alapegyenletek:

$$\text{Álló testre (IIc):} \quad \mathbf{0} = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad , \quad \text{és (IIIc):} \quad \mathbf{0} = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad . \quad (3.22)$$

A *feszültségeloszlás* számítására általában "végeselemes" számítógép programokat használnak. A vizsgált térfogatot sok kis térfogatelemre osztva, az alapegyenletekből levezetett lineáris egyenletrendszer szolgáltatja a megoldást.⁸⁴

A műszaki feladatokat azonban a számítógép korszak előtt is megoldották, és sok tapasztalat gyűlt össze. Az egyik ilyen megoldás – amit itt "elemi szilárdságtan módszerének" nevezünk – a következő: A σ és τ feszültséget, mint a hely függvényét ugyan nem ismerjük, de jó műszaki érzéssel a függvények alakját fel tudjuk venni, és hagyva bennük néhány ismeretlen paramétert, a (3.22) egyenleteket felírva az egész testre (és esetleg részeire is) az így nyert néhány egyenlettel kiszámítjuk az ismeretlen paramétereket, és végül ezekből meghatározzuk a számunkra érdekes jellemzőket, például a *legnagyobb feszültség* becslést értékét.

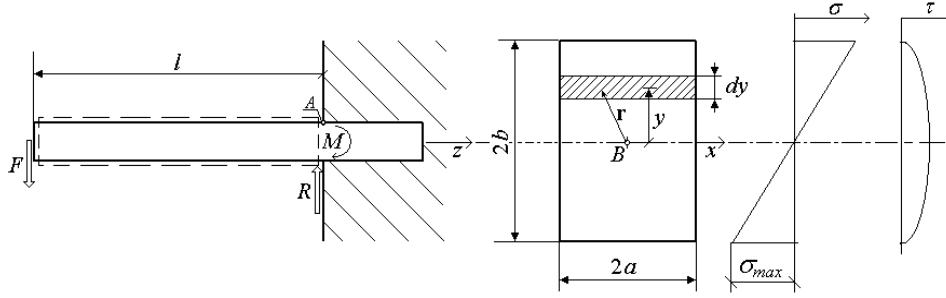
Példaként a 3.6. ábrán vázolt, bebetonozott acélrúdban számítjuk a feszültségeloszlást.

A téglalap keresztmetszetű rúd oldalai: $2a$ és $2b$. A rudat a szabad végén *ismert* nagyságú F erő terheli. Műszaki érzékünk azt sugallja, hogy a legnagyobb feszültség az A pontnál fog ébredni. Ezért a (3.22) egyenleteket a szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületre írjuk fel. Az F erőhöz képest a rúd súlya elhanyagolható, ezért (3.22)-ben a \mathbf{g} -t tartalmazó tagok elhagyhatók. Tehát a teljesítendő egyenletek:

$$\text{Súlytalan, álló testre a (c) axiómák:} \quad \mathbf{0} = \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad , \quad \mathbf{0} = \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad . \quad (3.23)$$

⁸³Egyes szakkönyvek az itt bevezetett impulzuserő (-1)-szeresét nevezik impulzuserőnek (és **(II d)** átrendezés *előtti* alakját használják). Ez csak formai eltérés, de ebből a szempontból a szakkönyveket ellenőrizni kell!

⁸⁴A végeselemes programok jól alkalmazhatók *ideálisan rugalmas testek* alakváltozásának számítására.



3.6. ábra. Rúdban ébredő feszültségeloszlás

A rúd oldallapjain az állandó nyomású levegőből származó erők kiegyenlítik egymást, ezért (3.23)₁ egyenletben *csak* a rúd szabad végén ható erő, és a falnál ébredő reakcióerő szerepel: $R = F$ (3.6. ábra). Ezek *erőpárt* alkotnak, ami forgatni igyekszik a rudat, de ezt ellensúlyozza a rögzített szelvénynél ébredő $M = Fl$ nyomaték. Az erő hatására a rugalmas rúd kicsit lefelé hajlik, a felső szál húzott, az alsó nyomott, a középső közel semleges. Ezzel összhangban **alapvető feltételezésünk** az, hogy a σ feszültség lineáris függvénye a helynek: $\sigma = \sigma_{\max} y/b$ (3.6. ábra). A szelvény vonalkázott részén a σ feszültségből ébredő $\sigma(2a dy)$ erő y karon fejti ki a nyomatékát a középvonalra, és a szelvényen ébredő teljes nyomaték:

$$Fl = M = \int_{-b}^b \sigma(2a dy) y = \int_{-b}^b \sigma_{\max} \frac{y}{b} 2a y dy = \frac{\sigma_{\max} 2a}{b} \int_{-b}^b y^2 dy = \frac{\sigma_{\max} 2a}{b} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b}^b = \frac{\sigma_{\max} 2a}{b} \left[\frac{b^3}{3} - \left(-\frac{b^3}{3} \right) \right] = \frac{\sigma_{\max} 4ab^2}{3}$$

amiből kapjuk a *végeredményt*: $\sigma_{\max} = \frac{3Fl}{4ab^2}$ (összhangban a szilárdságtan ismert képleteivel). Ha ez kisebb,

mint az anyagra *megengedett maximális feszültség*, akkor a rúd nem fog eltörni. (Az eredmény közelítő, célserű biztonsági tartalékot figyelembe venni a maximális feszültség értékében, 1.17. példa.)

Az eljárásban egy lépés magyarázatra szorul. *Tengelyre* számítottuk a nyomatékot, pedig (3.23)₂-ben *pontra* számított nyomaték szerepel. Azonban az (1.10) egyenletnél megismertük, hogy a nyomaték tetszőleges pontra felírható. A koordináta-rendszer középpontja – amire a nyomatékot felírjuk – legyen a 3.6. ábra szerinti B pont. A szelvény tetszőleges pontjának helyvektora $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, $\mathbf{F}d\mathbf{S} = (0, 0, \sigma dS)$, és az x tengely irányába mutató egységvektor $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$. A (17.9) és (17.7) egyenletekkel ellenőrizhető, hogy: $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}d\mathbf{S}) \cdot \mathbf{e}_x = \sigma y dS$, ahogy számítottuk.

Elemi szilárdságtani számításokat gyakran alkalmazunk vízgépek alkatrészeinek tervezésénél (járókerék lapátok, vezetőkerék lapátok, csigaház, szívócső, tengely, csapágyak, és egyéb alkatrészek).

A (3.23) egyenletekhez még megjegyzést fűzünk. Ezeket a *statikában*, *álló* gépek, épületek és szerkezetek számításaiban használjuk. A feladat általában úgy jelentkezik, hogy ismerjük a szerkezetre ható aktív erők egy részét és a szerkezet rögzítésének módjait (a *kényszereket*). Felírjuk a (3.23) egyenleteket, két eset lehetséges:

(A) *Statikailag határozott* feladat esetén a (3.23) egyenletekből a reakcióerők *meghatározhatók*. A reakcióerő csak abban különbözik a többi aktív erőtől, hogy kezdetben még nem ismerjük. A (3.23) egyenletek az aktív erők és a reakcióerők egyensúlyát és a nyomatékaik egyensúlyát fejezik ki. Ekkor tehát ismerjük a vizsgált térrész *határán* ható összes erőt (a feszültségek integráljait). Ha a térrész *belsejében* is meg kívánjuk határozni a feszültségeket, akkor az anyagi egyenletek (8. fejezet) alapján meg kell állapítani, hogy az adott anyagnál az \mathbf{F} feszültségtenzor hogyan függ a terheletlen állapothoz képesti elmozdulás alakváltozási tenzorától (például Hooke törvénye szerint), és meg kell oldani a kijelölt peremértékfeladatot.

(B) *Statikailag határozatlan* feladatok esetén a (3.23) egyenletek *nem elegendők* a reakcióerők számításához, mert azok a szerkezet deformációjától (a terheletlen állapothoz képesti elmozdulásaitól) is függenek. Ekkor az említett peremértékfeladatot úgy kell megoldani, hogy a kényszerek be legyenek tartva, és ez szolgáltatja a reakcióerőket és a feszültségeloszlásokat is.

4. fejezet. Általános differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben az általános (minden anyagra érvényes) differenciálegyenleteket vezetjük le. Annak érdekében, hogy a vizsgált tartomány minden pontjánál a függvények differenciálhányadosai rendelkezésre álljanak, olyan tartományt vizsgálunk, amelyben *nincs szakadási felület*.

Az általános differenciálegyenletek levezetése

A kontinuum a t_1 időpillanatban a 3-dimenziós euklideszi tér olyan $K(t_1)$ tartományát foglalja el (2.1. ábra), melyben a ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} függvények "kétszer folytonosan differenciálhatók" ⁸⁵. A $K(t_1)$ -en belül tekintsünk egy tetszőleges $V(t_1)$ térfogatot. Alkalmazzuk erre az (Ic), (IIc), (IIIc) axiómákat. Mivel a $V(t_1)$ -ben nincs szakadási felület, az egyenletek első integráljaira alkalmazzuk a (18.5) szerinti bedifferenciálást. Az $S(t_1)$ -en számított integrálokat pedig Gauss (21.5) egyenlete szerint térfogati integrálokká alakítjuk. Így az egyenletekben *csak térfogati integrálok* szerepelnek. Minden tagot az egyenletek bal oldalára rendezve, közös integrállá alakítva, a következőket nyerjük:

$$(Ie) \quad \int_{V(t_1)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad , \quad (4.1)$$

$$(IIe) \quad \int_{V(t_1)} \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) - \rho \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dV = \mathbf{0} \quad ,^{86} \quad (4.2)$$

$$(IIIe) \quad \int_{V(t_1)} \left(\frac{\partial \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} - \operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \right) dV = \mathbf{0} \quad . \quad (4.3)$$

Ezek az integrálok a $K(t_1)$ -en belül tetszőleges $V(t_1)$ térfogatra zérust adnak. Ez csak úgy lehetséges, ha az integrálandó függvények szintén zérus értékűek a $K(t_1)$ minden pontjában.⁸⁷ Ezzel három differenciálegyenlethez jutottunk:

$$(If) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (\text{a folytonosság egyik egyenlete}) \quad (4.4)$$

$$(IIIf) \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) - \rho \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad , \quad (4.5)$$

$$(IIIIf) \quad \frac{\partial \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} - \operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad . \quad (4.6)$$

Ezek egyszerűbb alakokra hozhatók (a levezetés részleteit lásd a (18.9) – (18.15) egyenleteknél), és az átalakítások után a következőket kapjuk:

⁸⁵ A második differenciálhányadosok is folytonosak $K(t_1)$ -ben, és folytonosan kiterjeszthetők $K(t_1)$ határára is.

⁸⁶ Itt \circ a diádikus szorzást jelenti, $\operatorname{div} \mathbf{F}$ pedig a tenzordivergencia (lásd (19.8) és (20.5) egyenleteket).

⁸⁷ Az eddigi bizonyítások *direkt* logikai lépéseket alkalmaztak. Ennél a pontnál *indirekt bizonyítási lépést* használunk. Ennek alapja a *lehetetlenre való következtetés* (latinul: deductio ad absurdum). Az indirekt feltevés a következő: Tegyük fel, hogy **van** K_1 -ben olyan pont, ahol valamelyik integrálandó függvény nem zérus, mondjuk pozitív. Akkor a függvény folytonossága miatt a függvény a pont körül egy kis térfogaton is pozitív. Ebben választva egy elég kis $V(t_1)$ -et (az axiómák akármilyen kicsiny anyagi térfogatra érvényesek!), az azon számított integrál is pozitív. Pedig előbb megállapítottuk, hogy K_1 -ben *tetszőleges* $V(t_1)$ -re az integrál zérus. Ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevés nem lehet igaz, azaz *nincs* olyan pont K_1 -ben ahol valamelyik integrálandó függvény pozitív lenne. Hasonló gondolatmenettel az integrálandó függvény negatív sem lehet, tehát *csak zérus* lehet!

$$(I_g) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (\text{a folytonosság másik egyenlete}), \quad (4.7)$$

$$(II_g) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{F} \quad , \quad (\text{Cauchy I. törvénye})^{88} \quad , \quad (4.8)$$

$$(III_g) \quad \mathbf{w}(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad ^{89} \quad (\mathbf{F} \text{ szimmetrikus, Cauchy II. törvénye}) \quad . \quad (4.9)$$

A (g) axiómák a newtoni kontinuummechanika általános differenciálegyenletei.

(III_g) szerint az \mathbf{F} tenzor vektorinvariánsa zérus, ami azt jelenti, hogy \mathbf{F} szimmetrikus. Az axiómarendszerünkéből származó elmélet tehát csak olyan anyagokra alkalmazható, amelyeknek az anyagi egyenletei ezt biztosítják.⁹⁰

4.1. példa. Mágnesekben a feszültségtenzor nem szimmetrikus

Ebben a könyvben a newtoni kontinuummechanika tárgyalásából a mágneseket kizártuk. Azonban (III_g) axióma jobb megértése érdekében érdemes egy kis kitérőt tenni a mágnesekre. Legyen \mathbf{M}_3 a mágnesben ébredő, *térfogattal arányos* elemi nyomatók (lásd (III_b) axiómát a 2.7. példában). Ha ez jelen van a mechanikai rendszerben, akkor \mathbf{M}_3 a (III_a) axiómában is megjelenik, és onnan lépésenként levezetve végül Cauchy II. törvényére ezt eredményezi: $\mathbf{w}(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_3$. Ha tehát $\mathbf{M}_3 \neq \mathbf{0}$, akkor \mathbf{F} nem szimmetrikus! Ennek számos következménye van, például az, hogy mágnesekben a Hooke-féle rugalmassági törvény sem lehet érvényes a megszokott szimmetrikus tenzorral.

4.2. példa. Mágneses folyadékok

Mágneses folyadékok a természetben nem fordulnak elő. Mesterségesen azonban előállíthatók. Mágnesezett anyag kis részecskéit (vaspor) folyadékba (olajba, vízbe) szórva, a folyadék emulziós hártját von a részecskék köré. Az ilyen anyag folyadékként viselkedik, és a részecskék nagyobb tömegeit tartalmazó térfogatra a kontinuum hipotézis alkalmazható. A mágneses folyadék a newtoni kontinuummechanikába *poláros* esetenként illeszthető be (lásd 2.7. példában), és ezekre a súrlódásmentes $\mathbf{F} = -p \mathbf{I}$ anyagi egyenlet sem érvényes.

Az egyszerűbb anyagok feszültségtenzorai azonban valamennyien szimmetrikusak:

- A lineárisan rugalmas szilárd testek Hooke féle törvénye: (8.10) egyenlet.
- A súrlódásmentes folyadékok Euler féle egyenlete: (8.15).
- A lineárisan viszkózus folyadékok Stokes féle súrlódási törvénye: (8.16).
- A turbulens áramlások Reynolds féle feszültségtenzora: (8.25).

Ezért, ha ilyen anyagokkal dolgozunk⁹¹, akkor (III_g) axióma eleve teljesül, azaz *nem mond újat*. Ilyen anyagok esetén tehát a szilárdságtani és az áramlástani feladatok megoldásánál *csak* az (I_g) és (II_g) axiómákra támaszkodhatunk.

Ezek után a kontinuummechanika *speciális* (egyes egyszerűbb anyagokra érvényes) differenciálegyenleteihez úgy jutunk, hogy az (I_g) axiómába a sűrűség anyagi egyenletét (8. fejezet), és a (II_g) axiómába a feszültségtenzor anyagi egyenletét (8. fejezet) helyettesítjük, és így szakadási felület *nélküli* tartományokban az elmélet nevezetes speciális differenciálegyenleteit nyerjük (9. fejezet).

⁸⁸[3]-ban lásd az 545-547. oldalon.

⁸⁹ $\mathbf{w}(\mathbf{F})$ az \mathbf{F} vektorinvariánsa. \mathbf{F} akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\mathbf{w}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

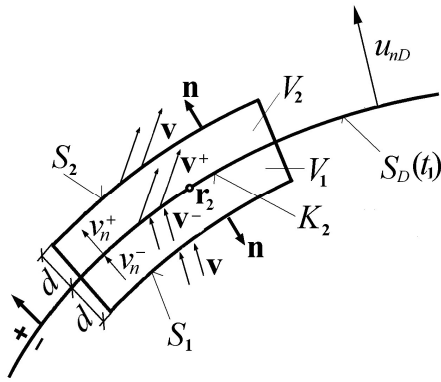
⁹⁰Trousdell [3] ezt úgy fogalmazza, hogy csak olyan anyagi egyenlet használható, ami "kompatibilis" az axiómákkal.

⁹¹Azaz *nem-poláros* anyagokkal (2.7. példa).

5. fejezet. Szakadási felületek

A szakadási feltételek levezetése

Ebben a fejezetben a szakadási felületeken megvalósuló mechanikai körülményeket vizsgáljuk. Az $S_D(t)$ szakadási felületet már a 2.1. ábra kapcsán bevezettük. A newtoni kontinuum általános definíciója megköveteli, hogy az **(a)** axiómák (a (2.3) – (2.5) egyenletek) *tetszőleges* anyagi térfogatokra teljesüljenek, olyanokra is, amelyekben szakadási felületek is vannak. Alább konstruálni fogunk egy kis anyagi térfogatot, ami az $S_D(t)$ felület egy részét a belsejében tartalmazza. Eerre felírjuk az **(a)** axiómákból levezetett **(c)** axiómákat (a (3.1) – (3.3) egyenleteket), majd határátmenettel a kis térfogatot a szakadási felületre zsugorítjuk. Így megkapjuk azokat az egyenleteket, amelyeket az alapfüggvények (sűrűség, sebesség és feszültségtenzor) szakadási felületnél érvényes határértékeinek ki kell elégíteni ahhoz, hogy a szakadási felület newtoni kontinuum része lehessen. Ezeket az egyenleteket nevezzük *szakadási feltételeknek*.



5.1. ábra. A szakadási felület egy darabját belsejében tartalmazó anyagi térfogat

Az 5.1. ábrán a t_1 időpontban érvényes $S_D(t_1)$ szakadási felület alakját egyetlen vonal ábrázolja (egyszerűség kedvéért), ami egy felületet képvisel. Tekintsük az $S_D(t_1)$ felület egy \mathbf{r}_2 pontját (5.1. ábra). Az $S_D(t_1)$ felületen tekintsük a pontnak egy kicsiny K_2 környezetét (ami egy kis felületdarab a felületen). Az 5.1. ábrán látható módon a K_2 pontjait a felületi normálison mindkét irányban d távolságra elmozdítva egy kicsiny $V(t_1) = V_1 + V_2$ térfogatot kapunk. A $V(t_1)$ térfogat a K_2 környezetet a belsejében tartalmazza. A $V(t_1)$ térfogatot *anyagi térfogatként* tekintjük.⁹² Ezért az $S_1 + S_2$ felületének pontjai a kontinuum \mathbf{v} sebességével mozognak, és a felület normális irányú sebessége: $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. A $V(t_1)$ belsejében a szakadási felület u_{nD} sebességgel halad. (A szakadási felületen a felületre mérőleges egységvektort a negatív oldal felől a pozitív oldal felé irányítjuk, 5.1. ábra).

Alapfeltevéseink értelmében $V(t_1)$ -re az axiómák teljesülnek. Írjuk fel először **(IIc)** axiómát. Az egyenlet két oldalát felcseréljük, és a jobb oldali térfogati integrálra (18.8) egyenletet alkalmazzuk, a $\psi = \rho \mathbf{v}$ függvényre:

$$\int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_1+S_2} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_{V_1+V_2-S_D(t_1)} \left. \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{t=t_1} dV + \int_{K_2} (\rho^- \mathbf{v}^- - \rho^+ \mathbf{v}^+) u_{nD} dS + \int_{S_1+S_2} (\rho \mathbf{v}) v_n dS . \quad (5.1)$$

Hajtsuk végre a $d \rightarrow 0$ határátmenetet. A térfogati integrálok zérushoz tartanak.⁹³ Az S_1 és S_2 felület a kiinduló K_2 -höz tart, azonban a felületi normális irányítása S_1 -en ellentétes, míg S_2 -ön azonos K_2 -ével. Ezt előjelváltással figyelembe véve, a határátmenettel a következőt kapjuk:

$$\int_{K_2} (\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-) \mathbf{n} dS = \int_{K_2} (\rho^- \mathbf{v}^- - \rho^+ \mathbf{v}^+) u_{nD} dS + \int_{K_2} \rho^+ \mathbf{v}^+ v_n^+ dS - \int_{K_2} \rho^- \mathbf{v}^- v_n^- dS . \quad (5.2)$$

Ezen egyenlőség az $S_D(t_1)$ szakadási felületen az \mathbf{r}_2 pontnak bizonyos határok között *tetszőleges* K_2 környezetére igaz. Ez csak úgy lehetséges, ha az integrálandó függvények is egyenlőek:

$$\text{(IIh)} \quad (\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-) \mathbf{n} = (\rho^- \mathbf{v}^- - \rho^+ \mathbf{v}^+) u_{nD} + \rho^+ \mathbf{v}^+ v_n^+ - \rho^- \mathbf{v}^- v_n^- . \quad (5.3)$$

⁹² Az anyagi térfogat definícióját lásd az 1.3. ábránál.

⁹³ $V_1 \rightarrow 0$, $V_2 \rightarrow 0$, és ezért bármely rajtuk értelmezett korlátos függvény integrálja zérushoz tart.

Ezzel megkaptuk az egyik szakadási feltételt. A kapcsos zárójel konvenciót, $[\mathbf{y}] = \mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-$ használva az egyenlet így is írható:

$$(IIh) \quad [\mathbf{F} \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} u_{nD} - \rho \mathbf{v} v_n] = 0 \quad . \quad (5.4)$$

Hasonló módon $V(t_1)$ -re az (Ic) axiómát felírva (a $\rho \mathbf{v}$ helyett ρ -val):

$$(Ih) \quad 0 = (\rho^- - \rho^+) u_{nD} + \rho^+ v_n^+ - \rho^- v_n^- \quad \text{vagy} \quad [\rho(u_{nD} - v_n)] = 0 \quad , \quad (5.5)$$

és a (IIIc)-ből $\rho \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ -vel ugyanígy:

$$(IIIh) \quad \mathbf{r} \times (\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-) \mathbf{n} = \mathbf{r} \times (\rho^- \mathbf{v}^- - \rho^+ \mathbf{v}^+) u_{nD} + \mathbf{r} \times \rho^+ \mathbf{v}^+ v_n^+ - \mathbf{r} \times \rho^- \mathbf{v}^- v_n^- \quad . \quad (5.6)$$

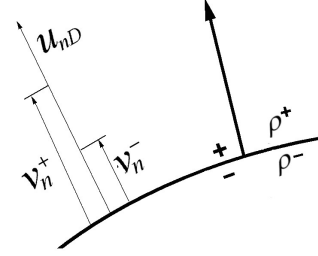
A (IIIh)-ban ugyanazok a tagok szerepelnek, mint (IIh)-ban csak vektoriálisan szorozva \mathbf{r} -el, így (IIIh) következik (IIh)-ból, azaz nem mond újat. Ezért el is hagyjuk!

Az (Ih) és (IIh) egyenletek a newtoni kontinuummechanika szakadási feltételei.⁹⁴

Az (Ih) egyenlet jelentését az 5.2. ábra segítségével szemléltetjük. Az (5.5) egyenletet rendezve:

$$(Ih) \quad \rho^+ (u_{nD} - v_n^+) = \rho^- (u_{nD} - v_n^-) = \dot{m} \quad , \quad (5.7)$$

ahol \dot{m} a felületegységen átlépő tömegáram (magyarázatát lásd alább). (5.7)-ből következik, hogy ha $u_{nD} > v_n^+$ akkor $u_{nD} > v_n^-$ is teljesül. Az 5.2. ábrán már ennek megfelelően vettük fel a sebességkomponenseket. Ebben az esetben a szakadási felület nagyobb sebességgel halad a ρ^- sűrűségű közeg felől a ρ^+ sűrűségű közeg felé, mint az áramlási sebességek. Ez azt jelenti, hogy a ρ^+ sűrűségű anyag átjutva a szakadási felületen ρ^- sűrűségű lesz.



5.2. ábra. Normális irányú sebességkomponensek

A szakadási felület felületegységén időegység alatt átlépő ρ^+ sűrűségű anyag tömegét \dot{m} jelöli. Ez nyilván egyenlő a másik oldalon megjelenő ρ^- sűrűségű anyag tömegével. Ezt fejezi ki az (5.7) egyenlet. (Ilyen viszonyok uralkodnak például egy gőzölgő folyadék felületén, vagy egy gázban haladó nyomás lökéshullám frontján.)

Az (5.7) szerinti \dot{m} -al (IIh) is egyszerűbben írható⁹⁵

$$(IIh) \quad [\mathbf{F} \mathbf{n}] + \dot{m} [\mathbf{v}] = 0 \quad , \quad \text{vagy} \quad \mathbf{F}^+ \mathbf{n} - \mathbf{F}^- \mathbf{n} = \dot{m} (\mathbf{v}^- - \mathbf{v}^+) \quad . \quad (5.8)$$

A vektorokat a szakadási felületre merőleges és párhuzamos komponenseikre bontva (1.20. példa):

$$\mathbf{F}^+ \mathbf{n} = \sigma^+ \mathbf{n} + \tau^+ \mathbf{t}_1 \quad , \quad \mathbf{F}^- \mathbf{n} = \sigma^- \mathbf{n} + \tau^- \mathbf{t}_2 \quad , \quad \mathbf{v}^+ = v_n^+ \mathbf{n} + v_t^+ \mathbf{t}_3 \quad , \quad \mathbf{v}^- = v_n^- \mathbf{n} + v_t^- \mathbf{t}_4 \quad , \quad (5.9)$$

ahol \mathbf{n} a szakadási felületre merőleges normál egységvektor, $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4$ a szakadási felületet érintő egységvektorok. A szakadási felület területegységén σ a normális feszültség és τ a csúsztató feszültség. Az (5.8)₂ egyenletet skalárisan szorozva \mathbf{n} -el, az (5.9) egyenletek alapján: $\mathbf{n} \mathbf{F}^+ \mathbf{n} = \sigma^+$, $\mathbf{n} \mathbf{F}^- \mathbf{n} = \sigma^-$ és $\mathbf{n} \mathbf{t}_i = 0$ ($i = 1, \dots, 4$), a σ feszültségre (azaz folyadékoknál $p = -\sigma$ nyomásra) ezt kapjuk:

$$[\sigma] = -\dot{m} [v_n] \quad , \quad [p] = \dot{m} [v_n] \quad , \quad (5.10)$$

ami (IIIh) axióma legfontosabb következménye.

⁹⁴Ezek az egyenletek csak **nem-poláros** kontinuumokra (lásd a 2.7. példában) érvényesek, azaz melyekben az \mathbf{F} feszültségtenzor **szimmetrikus** (lásd (4.9) egyenletet). BÉDA, Kozák és Verhás [9] az (Ih) és (IIh) egyenleteket *dinamikai kompatibilitási feltételeknek* nevezi (lásd (9-26) és (9-30) egyenletüket). Truesdell és Toupin [3] az (Ih)-t *Stokes-Christoffel feltételnek*, és (IIh)-t *Cauchy első törvénye szakadási feltételének* nevezi (lásd (189.14), (185.6) és (205.3) egyenletüket).

⁹⁵[3]-ban (205.3) és (185.6) egyenlet.

Elsőfajú, vagy **erős** szakadási felületről beszélünk, ha ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} közül legalább az egyik ugrik.⁹⁶

Másodfajú, vagy **gyenge** szakadási felületről van szó, ha valamelyiknek csak a deriváltja ugrik.⁹⁷

Tételek elsőfajú szakadási felületekre

(1). Egyszerű szakadási felületről⁹⁸ akkor beszélünk, ha **nem lép át tömeg** a szakadási felületen, azaz: $\dot{m} = 0$. (Például egy áramlást határoló szilárd falon.) Ekkor (5.7) alapján a normális irányú sebességek egyenlőek, és (5.8) alapján $\mathbf{F}^+ \mathbf{n} = \mathbf{F}^- \mathbf{n}$, ezért a normális irányú és a csúsztató feszültségek is egyenlők:

$$\dot{m} = 0 \quad u_{nD} = v_n^+ = v_n^- = v_n \quad \sigma^+ = \sigma^- \quad \tau^+ = \tau^- \quad p^+ = p^- . \quad (5.11a)$$

De v_t és/vagy ρ ugrik (különben nincs elsőfajú szakadás).

Első tétel a szakadási felületekre: *Egyszerű szakadási felületen* ($\dot{m} = 0$) mind v_n , mind a felületen ható σ feszültség (nyomás)⁹⁹, mind a τ feszültség *folytonosan megy át* az egyik oldalról a másikra.

(2). Örvényfelületről akkor beszélünk, ha $[v_n] = 0$ (a név hidrodinamikai analógiából származik). Mivel $v_n^+ = v_n^- = v_n$, (5.7)-ből: $(\rho^+ - \rho^-)(u_{nD} - v_n) = 0$, tehát vagy $\rho^+ = \rho^-$, vagy $u_{nD} = v_n$. Az utóbbi esetben (5.7) miatt $\dot{m} = 0$, tehát az első tétel van érvényben. Ha viszont $\dot{m} \neq 0$, akkor $\rho^+ = \rho^-$ tehát gyakorlatilag ugyanarról az anyagról van szó. Ekkor $[v_n] = 0$ és (5.10) miatt $\sigma^+ = \sigma^-$ azaz a σ feszültség folytonosan megy át az egyik oldalról a másikra, és az (5.8) egyenletbe (5.9) kifejezéseit helyettesítve a normális irányú vektorok egymást kioltják és ez marad:

$$\tau^+ \mathbf{t}_1 - \tau^- \mathbf{t}_2 = - \dot{m} (v_t^+ \mathbf{t}_3 - v_t^- \mathbf{t}_4) . \quad (5.11b)$$

Örvényfelületeken tehát a csúsztató feszültség és/vagy a tangenciális sebesség is ugorhat, de alkalmas \mathbf{t}_i vektorokkal ennek az egyenletnek teljesülni kell!

Külön figyelmet érdemel a *súrlódásmentes* folyadék, amiben csúsztató feszültségek nem jöhetnek létre: $\tau^+ = \tau^- = 0$. Ekkor (5.11b) és $\dot{m} \neq 0$ miatt: $v_t^+ \mathbf{t}_3 - v_t^- \mathbf{t}_4 = 0$, azaz: $v_t^+ \mathbf{t}_3 = v_t^- \mathbf{t}_4$. Mivel \mathbf{t}_3 és \mathbf{t}_4 egységvektorok, ez csak úgy teljesülhet, ha vagy $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_4$ és $v_t^+ = v_t^-$ (ekkor nincs elsőfajú szakadás) vagy $\mathbf{t}_3 = -\mathbf{t}_4$ és $v_t^+ = -v_t^-$. Súrlódásmentes folyadékokban csak ilyen tangenciális sebességekkel valószínűleg meg szakadási felület. Ez egy *elméleti* lehetőség, és úgy tűnik, hogy *valóságos* testekben közelítőleg sem jön létre. Ezért azt mondhatjuk, hogy a *kis viszkozitású vízben és levegőben* ilyen típusú szakadási felület *gyakorlatilag* nem lehetséges. Szilárd testekben azonban előfordul (5.5. példa).

Második tétel a szakadási felületekre: *Örvényfelületen* ($v_n^+ = v_n^-$) vagy nem lép át anyag ($\dot{m} = 0$), ekkor az első tétel van érvényben, vagy átlép ($\dot{m} \neq 0$), de ez csak ugyanolyan sűrűségű anyagban lehetséges, és ekkor a σ húzófeszültség (nyomás) folytonosan megy át, míg a τ csúsztató feszültség és a v_t sebesség ugorhat.

(3). Lökéshullámról akkor beszélünk, ha $[v_n] \neq 0$. Ekkor $v_n^+ \neq v_n^-$, ezért (5.7)-ben legalább az egyik zárójel nem zérus, és mivel ρ mindig pozitív: $\dot{m} \neq 0$. Így (5.10) alapján $\sigma^+ \neq \sigma^-$, de τ és v_t is ugorhat.

Harmadik tétel a szakadási felületekre: A *lökéshullámon* ($v_n^+ \neq v_n^-$) mindig lép át anyag, és rajta mindig ébred σ feszültség (nyomás) ugrás.

⁹⁶Ezeknek az alapfüggvényeknek a szakadási felület két oldalán véges határértéke van. Az "ugrás" azt jelenti, hogy a felület pontjainál a két határérték nem egyezik.

⁹⁷Ezeket itt nem tárgyaljuk (megtalálhatók [3]-ban).

⁹⁸Az *egyszerű* elnevezés nem szerepel a szakmai irodalomban, azonban a használata itt könnyíti az osztályozást.

⁹⁹Szilárd testekre a feszültség, folyadékokra a nyomás vonatkozik.

Egyes szerzők **hullámnak** nevezik azokat a szakadási felületeket, amelyeken anyag lép át ($\dot{m} \neq 0$). A **lökéshullámok** (ahogy a nevük is jelzi) mindig **hullámok**, de **örvényfelület** is lehet **hullám** a második tétel szerint.

A hullámokkal kapcsolatban beszélnek még a térben *álló* vagy *haladó* hullámokról, de ezek a jelzők nem a hullámok természetével függenek össze, hanem a vonatkoztatási rendszerhez fűződő viszonyukkal. Ha egy vonatkoztatási rendszerben egy hullám áll, és a jelenséget az előzőhöz képest állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerből nézzük, akkor az álló hullám haladóvá válik.

Az előbbieken a szakadási felületeket pontoknál megvalósuló sebességkülönbségekkel és feszültségekkel jellemeztük. Ezek *függetlenek* a vonatkoztatási rendszertől. Így a szakadási felületek természete (és elnevezése) is független a vonatkoztatási rendszertől.

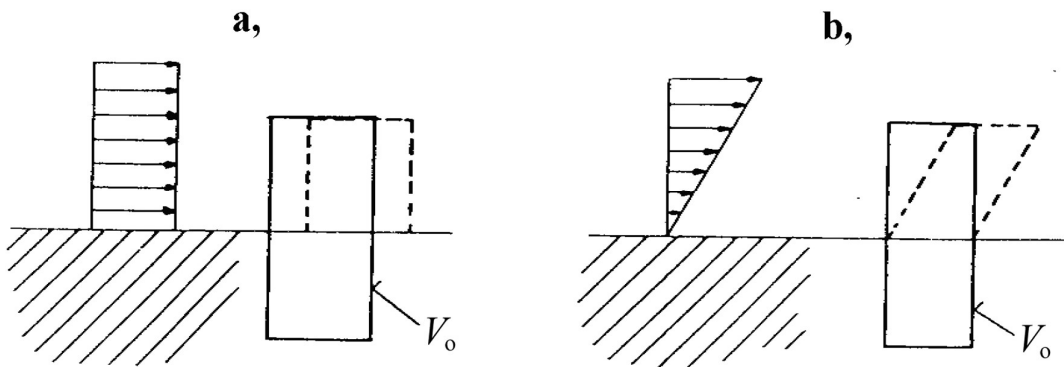
Az elsőfajú szakadási felületek osztályozása

II. táblázat. Szakadási felületek

	$\dot{m} = 0$ anyag nem lép át egyszerű szakadás	$\dot{m} \neq 0$ anyag átlép hullám
$v_n^+ = v_n^- = v_n$ örvényfelület	$u_{nD} = v_n$ $v_n, \sigma, (p), \tau$ folytonos v_t és/vagy ρ ugrik, szilárd test – szilárd test határán szilárd test – folyadék határán folyadék – folyadék határán ¹⁰⁰	A két oldalon ρ ugyanaz $v_n, \sigma, (p)$ folytonos v_t ugorhat, szilárd testben τ is ugorhat de kis viszkozitású folyadékokban vagy gázban valószínűtlen ¹⁰¹
$v_n^+ \neq v_n^-$ lökéshullám	NINCS	ρ ugorhat, de az anyag ugyanaz $v_n, \sigma, (p)$ ugrik v_t és τ is ugorhat szilárd, folyadék, vagy gáznemű közegben

Példák szakadási felületekre

5.1. példa. Áramlás falnál (folyadék–szilárd egyszerű szakadás)



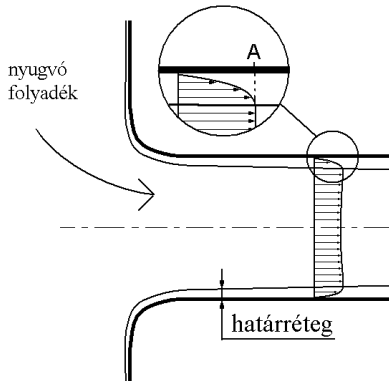
5.3. ábra. (a) Súrlódásmentes és (b) viszkozus folyadék áramlása álló szilárd fal mentén

¹⁰⁰A gőzöket és gázokat is (összenyomható) folyadéknak tekintve.

¹⁰¹Vízben és levegőben is.

Az 5.3a. ábra *súrlódásmentes folyadék* fal menti áramlásának jellegzetes esete. A fal belsejéből a folyadék felé haladva a szakadási felületnél a sebesség zérusról egy adott értékre ugrik. A szakadási felületen nem lép át anyag: $\dot{m} = 0$, tehát "egyszerű szakadásról" van szó. A szakadási felületek első tétele¹⁰² szerint a σ feszültség (illetve a nyomás), valamint a csúsztató feszültség a folyadék oldalról változatlanul átadódik a falnak. Az ábra szerint a V_0 térfogat felső része az idő múlásával eltörik (szaggatott vonal).

Az 5.3b. ábrán *viszkózus áramlás* fal menti viszonyait látjuk. A szakadás *másodfajú*. A szakadási felületen nem lép át tömeg. A szakadási felületek első tétele szerint a nyomás és a csúsztató feszültség is a folyadék oldalról átadódik a falnak. A V_0 térfogat felső része az idő múlásával megtörik, ez jellemző a másodfajú szakadásokra.



5.4. ábra. Határréteg szilárd fal mentén

Az 5.4 ábrán viszkózus folyadék (víz vagy levegő) áramlását vázoltuk. A folyadék nyugvó folyadéktérből indul, és lekerített szélű átmenettel, kör keresztmetszetű csőbe áramlik. A cső közepén elég egyenletes sebességeloszlás tapasztalható. A fal mentén egy határréteg alakul ki, melyben az áramlási sebesség jelentősen csökken. A folyadék tapad a falhoz¹⁰³, jelen esetben a fal áll, ezért ott a folyadék sebessége zérus kell legyen (lásd 5.4. ábra körrel kiemelt részletét). A folyadék viszkozitásának hatása a határrétegben jelentős, a határrétegben kívül azonban elhanyagolható (Prandtl tétele).

Az áramlás számítására felállítandó mechanikai modellben ezért eljárhatunk például úgy, hogy a folyadéktér határrétegén kívüli részében súrlódásmentes folyadékot tételezünk fel (Euler egyenlet), ezzel elvégezzük a számítást, és ezt kiegészítjük a határrétegben kialakuló viszkózus áramlás (Navier-Stokes egyenlet) számításával. A falnál ekkor az 5.3b ábrához hasonló másodfajú szakadás alakul ki.

Ha a vékony határrétegben kialakuló áramlás érdektelen, akkor eljárhatunk úgy, hogy a határrétegben kívüli áramlás sebességeloszlását meghosszabbítjuk a falig (A pont, 5.4. ábra részlet) és csak a súrlódásmentes áramlást számítjuk. Ekkor a falnál 5.3a ábra típusú elsőfajú szakadást találunk.

Eljárhatunk természetesen úgy is, hogy az egész áramlási térben viszkózus áramlást tételezünk fel. Azonban ahhoz, hogy a realitáshoz közelálló eredményt nyerjünk, a falnál nagyon sűrű pontrácsot kell alkalmazni. Ezért a számítási idő nagyon hosszú lesz. Azt is figyelembe kell venni, hogy a Navier-Stokes egyenlet csak viszonylag kis sebességeknél nyújt kielégítő pontosságot. A nagyobb sebességeknél kialakuló turbulens áramlás számítása (lásd a 8., 9. és 13. fejezetben), a turbulencia modellek különbözősége miatt bizonytalanságot rejt magában.

A határrétegnek az áramlástanban kiterjedt elmélete van. A 2.6. példánál egy szakadási felületet *szakadási rétegnek* tekintettünk. (Mind a 2.6 példánál, mind az 5.1 példánál a *szakadási réteg feltételezésével* nyertünk a valósághoz közelebb álló fizikai körülményeket!)

5.2. példa. Acél megfolyása (rugalmas–képlékeny egyszerű szakadás)

Ha egy acél alkatrészben az igénybevétel helyileg túllépi a folyáshatárt¹⁰⁴, ott az anyag képlékeny lesz, és a képlékeny anyagi egyenletek különböznek a rugalmas anyagi egyenletektől. Ezért az alkatrészben belül a rugalmas és a képlékeny rész határát szakadási felületnek tekinthetjük. (Az alkatrészben a helyi igénybevétel még nem érte el a szakítószilárdságot, ezért az alkatrész törése nem következett be.) Az alkatrész egész térfogatában az anyagi részecskék állnak. Ezért a szakadási felületen nem lép át anyag. Tehát a szakadási felületek első tétele⁹⁸ szerint a feszültségek folytonosan mennek át a két rész között, azaz elsőfajú szakadás a feszültségekben nincs. A sebességben sincs, mert mindenütt zérus. A nehézségi gyorsulás értékében szintén nincs ugrás.

¹⁰²Lásd az (5.11a) egyenletnél.

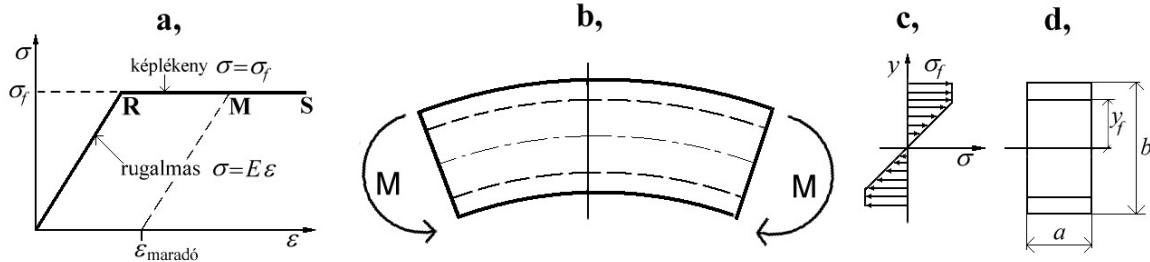
¹⁰³A folyadékok nagy többsége tapad a falhoz. A ritka kivételek egyike a szálás anyagot szállító víz.

¹⁰⁴Az acélok szakítótesztjének felvételénél (lásd a 8.1. ábránál), a *folyáshatár* az a húzófeszültség (N/m²), melynél az anyag plasztikus lesz. Ez *kiseb*, mint az anyag *szakítószilárdsága* (melynél a törés bekövetkezik).

A sűrűség értékében elvileg lehetséges ugrás, (a képlékeny és a rugalmas rész sűrűsége elvileg különbözhet) de a valóságban ez bizonyára nagyon kicsi, mert a képlékenységtan [34] nem foglalkozik vele.

Az előbbi megállapítás általánosítható: A kiterjedt testek *statikájában* (nyugalmi állapotban), bármilyen szakadási felületről van szó (például egymásra fektetett két különböző anyag határán) *a feszültségek folytonosan mennek át.*

Acélszerkezetek tervezésénél az anyag minél jobb kihasználására törekednek. Ezért esetenként megengednek képlékeny igénybevételt is. A gyakorlati fontossága miatt ezt a példát tovább folytatjuk *Kalishky* [34] nyomán.



5.5. ábra. Hajlított rúd rugalmas-képlékeny alakváltozása és feszültségei

Az 5.5.a ábra az *ideálisan rugalmas-képlékeny* test húzódiagramja (valóságos szakító diagramok egyszerűsített képe) ε a relatív megnyúlás¹⁰⁵. Úgy képzeljük, hogy egy próbatest húzópróbáján vették fel (8.1. ábra). A próbatestet nyújtva először a rugalmas alakváltozás **R** határát érjük el. Tovább nyújtva a testet, a képlékeny tartományban a húzófeszültség végig a σ_f *folyáshatár*. Mondjuk az **M** pontnál megállunk. Ha innen leterheljük a próbatestet, a feszültség a szaggatott görbe mentén változik, és végül a zérus feszültséget elérve maradó alakváltozást tapasztalunk. (Ha az **R** ponttól terheljük le a próbatestet akkor nem észlelünk maradó alakváltozást.) Ha az **M** pontnál tovább nyújtjuk a próbatestet, akkor az **S** pontot elérve a próbatest szétszakad. (A szerkezeti acélok görbéin a szétszakadás előtt a húzófeszültség általában még megemelkedik, de ettől itt eltekintünk, ez a számításunk biztonsága felé hat.)

A 5.5.b, ábra egy téglalap keresztmetszetű rúd oldalnézete. A két végét M nyomaték terheli. A c., ábra a benne ébredő húzófeszültségeket, a d., ábra pedig a rúd szelvényét mutatja. A c., ábrán a rúd középvonalától indulva a húzófeszültség a rugalmas alakváltozás lineáris képletének megfelelően egy egyenes mentén egyre nő. Amikor eléri a σ_f *folyáshatárt*, már nem tud tovább emelkedni, az y_f koordináta fölött $\sigma = \sigma_f$. A rúd közepe rugalmas, a széle képlékeny állapotban van. Állapítsuk meg, hogy a rúd mekkora nyomatékkal terhelhető?

A nyomaték képletéből indulva, elemi átalakításokkal a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_A y \sigma dA = \int_{-y_f}^{+y_f} y \frac{\sigma_f y}{y_f} a dy + 2\sigma_f \int_{y_f}^{b/2} y a dy = \frac{\sigma_f a}{y_f} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-y_f}^{+y_f} + 2\sigma_f a \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_f}^{b/2} = \\
 &= \frac{\sigma_f a}{y_f} \frac{y_f^3}{3} 2 + \sigma_f a \left(\frac{b^2}{4} - y_f^2 \right) = \sigma_f \left(\frac{a b^2}{4} - \frac{a}{3} y_f^2 \right). \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

A rugalmasság határát akkor érjük el, ha a teljes keresztmetszetben még rugalmas állapot van: $y_f = b/2$. Ezért:

$$M_{\text{rugalmas}} = \frac{2}{3} \sigma_f \frac{a b^2}{4}.$$

A törő nyomatékokat akkor kapjuk, amikor a teljes keresztmetszet már képlékeny állapotban van: $y_f = 0$. Ekkor:

$$M_{\text{törő}} = \sigma_f \frac{a b^2}{4}.$$

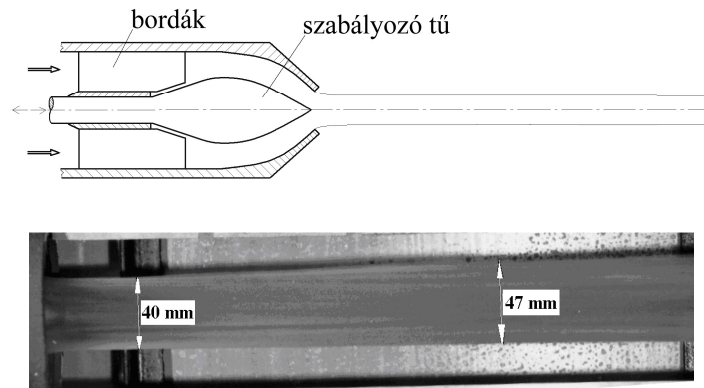
A rúd ennél nagyobb nyomatékokat már nem tud felvenni. Ha nagyobb nyomatékkal próbáljuk terhelni, akkor elméletileg korlátlan megnyúlást, gyakorlatilag törést szenved.

¹⁰⁵Lásd (8.4) egyenletnél.

A képletek szerint a rugalmas állapot nyomatékai határa *kétharmada* a törő állapoténak. Ezt ismerve a tervező mérlegelheti, hogy érdemes-e megengedni a rúdban a képlékeny állapotot? Ezzel maximum 1/3-dal, azaz a rugalmas állapottal elért nyomatéknál maximum 50 %-al nagyobb nyomaték érhető el!

A 20. század közepén az acélszerkezeteket még úgy tervezték, hogy a szerkezetben ébredő legnagyobb feszültség a rugalmas határt se lépje túl. Aztán megjelentek a számítógéppel végrehajtható *végeselemes* programok, amik óriási lehetőségeknek nyitottak utat. A műszaki fejlődés azt diktálta, hogy az anyag minél jobban ki legyen használva, és ezért megengedtek megfolyt anyagrészeket is (5.3. ábra M pont). A plasztikus anyagi egyenletek azonban még nem eléggé ismertek. Ezért a példa szerinti dilemma manapság is élő.

5.3. példa. Pelton sugár (víz-levegő egyszerű szakadás)



5.6. ábra. Felső ábra: Pelton turbina sugárcső nagy sebességű vízszugárral, alatta egy Pelton kisminta sugárcsővéből távozó vízszugár fényképe (Zombor Csaba felvétele, GANZ Gépgyár)

A Pelton turbina sugárcsővéből (5.6. ábra, felső rész) nagy sebességű vízszugár lép ki (ez hajtja a turbina járókereket). A levegőbe kilépő sugár felületén anyag nem lép át, ezért egyszerű szakadási felületről van szó, az első tétel alapján a légköri nyomás hat a *víz oldalon is*.

Az ilyen "*Helmholtz-féle*" *szabad sugarak* sebességeloszlás számítása egyszerű. A Pelton sugárcsőre végzett ilyen számítással megállapítható a szabályozó tű adott állásánál átáramló vízmennyiség. A Pelton sugarak áramlási vesztesége kicsiny, ezért a súrlódásmentes áramlás feltételezése indokolt. A megoldást iterációval kapjuk. Felvesszünk egy kiinduló sugár alakot. Megoldjuk a súrlódásmentes áramlás forgásszimmetrikus egyenleteit (lásd 15.1. példában) úgy, mintha a felvett alak fal volna. Megnézzük, hogy a sugár szélén a légköri nyomás uralkodik-e? Ha nem, akkor addig módosítjuk a sugár alakját, amíg a sugár szélének minden pontjánál a légköri nyomást megkapjuk. Ésszerű módosítás esetén az iteráció gyors. (Ha a gravitáció hatását is figyelembe vesszük, akkor a sugár lehajlik, de a nagy sebesség miatt ezt a hatást el szokták hanyagolni).

A számított és a mért sugarat összehasonlítva (5.6. ábra), megfigyelhetünk egy eltérést. A szájtól a sugár mentén haladva a *számított* sugár átmérője aszimptotikusan csökken egy minimális értékre. A *valóságos* sugár fényképén azonban az átmérő először csökken, majd egy minimális érték elérése után *növekszik*. Úgy tűnik, mintha a számítás nem lenne helyes. Valójában azonban másról van szó. Az eltérés oka a valóságos sugár turbulenciája. A sugár szélén áramló kis víztömegek a turbulencia miatt kicsiny, a középvonalra merőleges sebességre is szert tesznek, és az állandó nyomású levegőben a sebességüket megtartják, sőt cseppek formájában a sugárból ki is válhatnak. A fényképen a kifelé törekvő víztömegek és a cseppek útját látjuk, amint távolodnak a középvonaltól.

A fizikai elméletekben paradoxonnak nevezik az elmélet és a valóság szembeszökő eltérését¹⁰⁶. A Pelton sugár itt bemutatott paradoxona a sugárban meglévő turbulencia létére hívja fel a figyelmet.

¹⁰⁶Az áramlástan leghíresebb paradoxona a D'Alambert-féle: A körüláramlott testek ellenállása a súrlódásmentes áramlás elmélete szerint *zérus*. A mérések szerint viszont az ellenállás *jelentős nagyságú*. Ez a paradoxon jelzi, hogy a folyadéknak bár kicsiny súrlódását (és a testen a határreteg leválását) nem lehet büntetlenül elhanyagolni. Szellemes eljárás az áramlástan olyan felépítése [11], amikor minduntalan paradoxonokra bukkanunk, és ezek hívják fel a figyelmet a korábban elhanyagolt fizikai hatásokra.

5.4. példa. Rugalmas csőre eső rugalmas hasáb (lökéshullám szilárd testben)

A 2.6. példában egy rugalmas hasáb merev lapra esett. Ennek folytatásaként itt azt az esetet vizsgáljuk, amikor egy rugalmas hasáb (5.7. ábrán **AB**) egy merev lapon nyugvó rugalmas csőre (**BCD**) esik. A testek anyaga acél, $A_1/A_2 = 4$, BD távolság kétszerese AB-nek, a hasáb c_0 sebességgel érkezik az álló csőre. Az ütközésnél nyilván háromdimenziós feszültségeloszlás alakul ki, ami szakadási réteggel lenne kezelhető. Itt azonban 1-dimenziós közelítést alkalmazunk, a hasábban, és a csőben is 1D-s feszültség lökéshullámokat tételezzük fel. Ennek megfelelően alapfeltevésünk az, hogy a **B** pontnál minden időpillanatban teljesül az erőegyensúly:

$$F_{nyomó} = \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 . \quad (5.13)$$

A lökéshullámra az **(Ih)** axióma (az (5.7) egyenlet) szerint:

$$\text{(Ih)} \quad \rho^+ (u_{nD} - v_n^+) = \rho^- (u_{nD} - v_n^-) = \dot{m} . \quad (5.14)$$

Azonban acélban a sűrűség változása nagyon kicsi $\rho^+ = \rho^- = \rho$, és a 2.6. példából tudjuk, hogy acélban az $u_{nD} = w$ hullámsebesség sokkal nagyobb, mint a c_0 sebesség. Ezért élünk az

$$\dot{m} \cong \rho w , \quad (5.15)$$

közelítéssel. Másik alapegyenletünk a **(IIh)** axióma (az (5.8) egyenlet) szerint:

$$\text{(IIh)} \quad \mathbf{F}^+ \mathbf{n} - \mathbf{F}^- \mathbf{n} = \dot{m}(\mathbf{v}^- - \mathbf{v}^+) . \quad (5.16)$$

Ennek alapján, a lökéshullámon keresztül a nyomófeszültség változása:

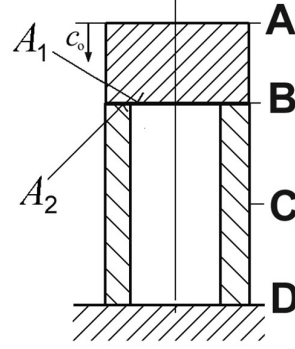
$$\Delta \sigma_{nyomó} = \dot{m} \Delta c = \rho w \Delta c . \quad (5.17)$$

Az (5.15) és (5.17) egyenletek a rugalmas közegekben terjedő lökéshullámok alapegyenletei.

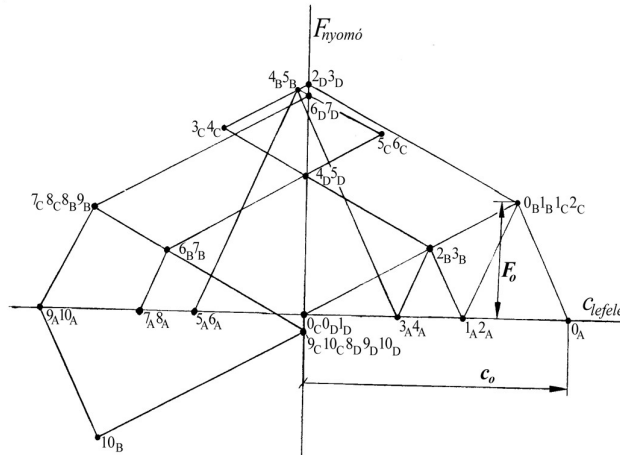
A kezdeti időpillanatban a hasáb alsó és a cső felső felülete közös c' sebességre tesz szert, és a hasábban fölfelé és a csőben lefelé indít lökéshullámot. Mindkettőre (5.17) képlet teljesül, tehát:

$$\sigma_1 - 0 = \rho w (c_0 - c') , \quad \sigma_2 - 0 = \rho w (c' - 0) . \quad (5.18)$$

Ezekből az egyenletekből a szigmákat (5.13)-ba helyettesítve, az acélra érvényes $w = 5063$ m/s értékkel (2.6. példa) a közös c' sebesség meghatározható. Ennek ismeretében σ_1 (5.18)-al, és a **B**-nél ébredő kezdeti F_0 erőhatás (5.13)-al számítható.



5.7. ábra. Rugalmas csőre eső rugalmas hasáb



5.8. ábra. Bergeron [10] diagramja csőre eső hasáb esetére

A kezdeti pillanatot követően a lökéshullámok oda-vissza szaladgálnak a hasábban és a csőben is. Viszszaverődnek a merev lapról, az érintkezési felületről, és a felső szabad végről is. Az 5.8. ábrán a mozgás Bergeron diagramját [10] mutatjuk be. Időegységnek választottuk azt az időtartamot, amíg a lökéshullám **B**-ből **A**-hoz ér. A $C_{lefelé} - F_{nyomó}$ diagrammon az állapotokat időhely jelzésű pontok mutatják. Például a 0 időpontban az A

pontnál a sebesség c_0 , az erő zérus. Az ennek megfelelő helyen találjuk a 0_A pontot. Az 0_B pont az előbb számított (c', F_0) pontba kerül. Ez a pont két olyan egyenes metszéspontjánál van, melyekre (5.13) és (5.18) alapján:

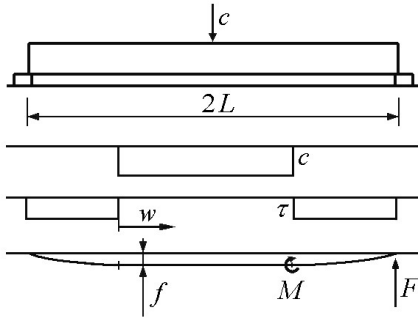
$$F = -A_1 \rho w (c - c_0) \quad , \quad F = A_2 \rho w c \quad . \quad (5.19)$$

Ehhez hasonlóan, a többi pontot is olyan egyenesek metszéspontjánál nyerjük, amelyeknek iránytangense $\pm A \rho w$ (mindig a megfelelő előjelet és területet használva). Például a **C** pont $(i+1)_C$ állapota mindig az i_B pontból $-A_2 \rho w$ iránytangenssel és az i_D pontból $+A_2 \rho w$ iránytangenssel húzott egyenesek metszéspontjánál van. A **B** pont $(i+1)_B$ állapota pedig az i_A pontból $-A_1 \rho w$ iránytangenssel és az i_C pontból $+A_2 \rho w$ iránytangenssel húzott egyenesek metszéspontjánál van. Így egyenesek húzásával egyszerű szerkesztési módszert nyerünk a rendszerben uralkodó viszonyok meghatározására. Az algoritmus egyszerűen programozható (úgy az eredmény pontosabb, és a tévedés esélye kisebb).

A diagramból látható, hogy a mozgás során fellépő legnagyobb erő az F_0 kétszerese. Ez a **D** pontnál jelentkezik a második és a harmadik időpont között. Majdnem ekkora erő érvényesül **B**-nél is a negyedik és ötödik időpont között. A szabad végénél, az **A** pontnál az erő mindig zérus. A merev lapnál, a **D** pontnál a sebesség mindig zérus. Az **A** pont már az 5. pillanatban fölfelé mozog, de a **B** pontban a nyomóerő csak a 10. pillanatban szűnik meg. Ekkor a hasáb fölfelé ugrik, de kisebb mozgási energiát visz magával, mint az érkező energiája, mert még a csőben is marad mozgás.

Sok gyakorlati esetben érvényesül a példához hasonló mechanizmus, például **vízütés** számítás esetén (16.3. példa). *Bergeronnak* [10] még a számítógépes korszak előtt kidolgozott szerkesztési módszere azonban *ma is figyelmet érdemel*, mert jól áttekinthető, véges ugrásokra is érvényes, és könnyen programozható.

5.5. példa. Rúd esése alátámasztásokra (örvényfelület hullám acélban)



5.9. ábra. Rúd esése alátámasztásokra

Az 5.9. ábrán vázolt rugalmas rúd c sebességgel esik a végeinél elhelyezett alátámasztásokra. A végek sebessége hirtelen zérussá válik. A 2.6. példához hasonlóan feltételezzük, hogy ekkor egy w sebességű hullám indul el a végektől a közép felé. Ez T idő alatt ér középre. Az ábra közepén a $t = T/2$ időpontbeli sebesség és τ feszültség diagramja látható. Az alsó ábra a rúd középvonalának pillanatnyi alakját mutatja. Ez a középrészen még vízszintes egyenes, és a szakadás helyétől a végekig közelítőleg parabola. A végeknél ható F erő biztosítja a τ feszültséget, de egyúttal hajlítja is a most már sebesség nélküli szakaszt. Ezt M nyomaték ellensúlyozza, ami a keresztmetszetben ébredő σ feszültségekből származik (amik nem befolyásolják a τ feszültségeket).

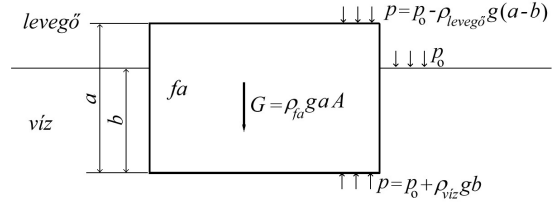
A rúd pontjai vízszintes irányban nem mozdulnak el: $v_n^+ = v_n^- = 0$, *örvényfelületről* van szó. A szakadási felületen a tangenciális sebesség és a τ feszültség ugrik. (5.15) alapján: $\dot{m} \cong \rho w$, és (5.11b) alapján: $\tau = \rho w c$. A $t = T$ időpontig a hullám $L = w T$ utat tesz meg, ahol L a rúd hosszának a fele. Ezalatt a rúd közepe $f = cT$ lehajlást ér el. A szilárdságtanból ismert a járulékok lehajlási képlete: $f = \frac{F L^3}{3 I E}$. Ezzel és

$$F = A \tau \quad \text{alapján:} \quad w^2 = \frac{3 I}{A L^2} \frac{E}{\rho} . \quad \text{Összehasonlítva a (2.33) egyenlettel látható, hogy más a hullámsebesség!}$$

Ez a példa – a lényeges egyszerűsítések ellenére – illusztráció az örvényfelületekre. A gyakorlatban is előfordul ilyen igénybevétel. Például, amikor a súlyterhelésű csappantyú (16.2. ábra) bevág, a súlyt tartó karon ilyesféle nyírófeszültség-hullám fut végig.

5.6. példa. Úszó fadarab (több egyszerű szakadás)

Téglatest alakú fadarab úszik a vízben (5.10. ábra). Az a kérdés, hogy mennyire merül be? A fadarab széleinél több szakadási felület található. A példa célja annak a bemutatása, hogy az axiómák következményei (a szakadási feltételek) több szakadási felület esetén is alkalmazhatók. Az *egyszerű szakadások* tétele szerint: a fa-levegő, fa-víz és víz-levegő szakadásoknál a nyomás (nyomófeszültség) folytonosan megy át az egyik oldalról a másikra. A fadarab áll, a **(IIc)** axiómát a (3.22)₁ egyenlet formájában alkalmazzuk a fadarab $V(t_1)$ térfogatára. Az oldalfalakon ható erők kiegyenlítik egymást, csak a függőleges erők érdekesek.



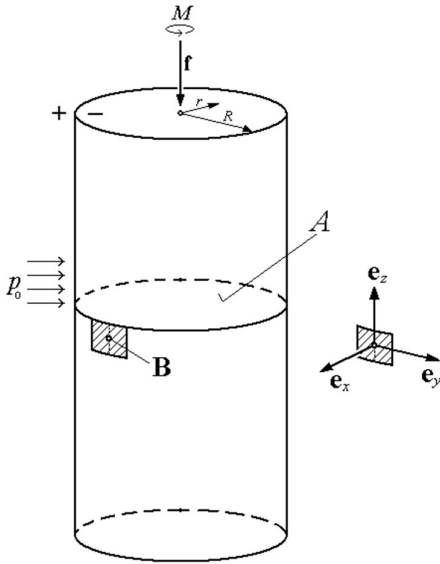
5.10. ábra. Úszó fadarab

Jelölje p_0 a vízfelszínen ható abszolút nyomást. A vízben a nyomás lefelé nő, a fadarab aljánál a nyomás: $p_{alsó} = p_0 + \rho_{vz} g b$. A fadarab térfogata: Aa ahol A az alap területe, és a a fadarab magassága. A fa súlya: $G_{fa} = \rho_{fa} A a g$. Levegőben a nyomás fölfelé csökken, a fadarab felső szintjén: $p_{felső} = p_0 - \rho_{levegő} g (a - b)$. A **(IIc)** erőegyensúly abból áll, hogy a nyomásból az alsó lapon ébredő fölfelé ható erő egyensúlyt tart a fa súlyával és a felső lapon ható erővel: $A p_{alsó} = G + A p_{felső}$. Egyszerűsítés után:

$p_0 + \rho_{vz} g b = \rho_{fa} A a g + p_0 - \rho_{levegő} g (a - b)$, a p_0 kiesik, és b -re megoldva, a fadarab bemerülése:

$$b = a \frac{\rho_{fa} - \rho_{levegő}}{\rho_{vz} - \rho_{levegő}} = a \frac{800 - 1,25}{1000 - 1,25} = 0,79975 a \quad (5.20)$$

A példa tanulsága az, hogy a *szakadási feltételek* (az (5.7) és (5.8) egyenletek) helyi (lokális) paraméterekre vonatkoznak, és ezért a feladatban szereplő szakadási felületek alakjától és számától függetlenül *bármelyik* szakadási felületre alkalmazhatók.

5.7. példa. Oszlop (szilárd test levegőben, egyszerű szakadás)

5.11. ábra. Hengeres álló oszlop

Földi rendszerekben a testeket levegő veszi körül. Ez a példa a felületükön kialakuló szakadási feltételeket részletezi.

Az 5.11. ábrán henger alakú szilárd test viszonyait vizsgáljuk. Az oszlopot fölülről f erő és M nyomaték, oldalról pedig p_0 légköri nyomás terheli. A henger felülete szakadási felület, ami csak akkor felel meg a newtoni kontinuummechanika követelményeinek, ha rajta az **(IIh)** és **(IIIh)** axiómák (az (5.7) és (5.8) egyenletek) teljesülnek.

A henger felületének negatív oldala a henger felé, a pozitív oldala a levegő felé esik (5.11. ábra). Célunk a felület két oldalán kialakuló \mathbf{F}^+ és \mathbf{F}^- feszültségtenzorok számítása. A felület tetszőleges \mathbf{B} pontjához egy koordináta-rendszert illesztünk $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ egységvektorokkal (5.11. ábra). A koordináta-rendszerben ezek koordinátái:

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

A szakadási felületen nem lép át anyag: $\dot{m} = 0$, *egyszerű szakadásról* van szó. A henger áll, minden sebesség zérus, ezért az (5.7) egyenlet eleve teljesül. A henger felületének normál egységvektora a \mathbf{B} pontban éppen az \mathbf{e}_x vektor: $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$. Az (5.8) egyenlet követelménye: $\mathbf{F}^+ \mathbf{n} = \mathbf{F}^- \mathbf{n}$, ezt kell biztosítani.

A levegőben $\mathbf{F}^+ = -p_o \mathbf{I}$ (lásd 1.21. példában) azaz koordinátáiban:

$$\mathbf{F}^+ = \begin{pmatrix} -p_o & 0 & 0 \\ 0 & -p_o & 0 \\ 0 & 0 & -p_o \end{pmatrix}, \text{ és } \mathbf{F}^+ \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -p_o & 0 & 0 \\ 0 & -p_o & 0 \\ 0 & 0 & -p_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_o \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Az egyenletből látható, hogy az \mathbf{F}^+ tenzor első oszlopa éppen az $\mathbf{F}^+ \mathbf{n}$ vektor. Az $\mathbf{F}^- \mathbf{n} = \mathbf{F}^+ \mathbf{n}$ egyenlőség biztosítása érdekében az \mathbf{F}^- tenzor első oszlopának is ezzel meg kell egyeznie. Tehát a tenzor mátrixa csak ilyen alakú lehet (az (1.22) egyenlet jelölései szerint):

$$\mathbf{F}^- = \begin{pmatrix} -p_o & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Mivel azonban a henger anyaga nem mágneses, azaz *nem-poláros* (lásd 2.7. példában), a benne ébredő feszültségtenzor *szimmetrikus* kell legyen. Ezért $\tau_{xy} = 0$, és $\tau_{xz} = 0$ szintén, és így a felső sor is ismert:

$$\mathbf{F}^- = \begin{pmatrix} -p_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

A mátrix többi négy eleme a szakadási feltételek biztosítása szempontjából *tetszőleges* lehet, ezeket a testre ható többi erők határozzák meg. Esetünkben a négy feszültség értékét kissé egyszerűsítve számítjuk. A σ_z feszültség a hengerre fölülről ható \mathbf{f} erőt (5.11. ábra) ellensúlyozza. Feltételezve, hogy a henger súlya elhanyagolható \mathbf{f} értékéhez képest, és a feszültségeloszlás az A felületen (5.11. ábra) egyenletes: $\sigma_z = -|\mathbf{f}|/A$, negatív (helyesen) mert nyomófeszültség. A hengerben a feszültségeloszlásokat körszimmetrikusnak tekintjük, ezért a körvonalat érintő \mathbf{e}_y vektor irányába mutató normális feszültség zérus: $\sigma_y = 0$. Az \mathbf{e}_z egységvektorra merőleges felületelemen ébredő, kerületi irányba mutató τ_{yz} feszültség pedig az M nyomatékot (5.11. ábra) ellensúlyozza. Feltételezve, hogy τ_{yz} az r sugárral (5.11. ábra) lineárisan változik (3.4. példa): $\tau_{yz}(r) = \tau_{yz}(R) r/R$, a nyomaték:

$$M = \int_0^R r \cdot \tau_{yz}(r) \cdot (2r\pi dr) = \int_0^R \tau_{yz}(R) \frac{r}{R} (2r^2\pi) dr = \frac{2\pi \tau_{yz}(R) R^4}{4R}. \quad (5.24)$$

amiből a kerületen a \mathbf{B} pontnál érvényes $\tau_{yz}(R) = \frac{2M}{\pi R^3}$, és ismét a szimmetria miatt $\tau_{zy} = \tau_{yz}(R)$. Ezekkel az adatokkal az \mathbf{F}^+ és \mathbf{F}^- feszültségtenzorok ismertek a szakadási felület mindkét oldalán.

A levezetés általánosítható. Más alakú szilárd testek levegővel érintkező felületén is csak olyan alakú feszültségtenzorok ébredhetnek, amelyek megfelelnek az (5.23) egyenletnek.

6. fejezet. Összefoglalás

Az axiómák rendszere

A newtoni kontinuummechanika általános (minden anyagra érvényes) **(a)** jelű axiómáit Newton, Euler és Cauchy alapján *anyagi térfogatokra* írtuk föl:

(Ia) Tömeg-változás = zérus, (2.3) egyenlet.

(IIa) Impulzus-változás = erő, (2.4) egyenlet.

(IIIa) Impulzusnyomaték-változás = erők nyomatéka, (2.5) egyenlet.

A tárgyalás fő vonalában ezekből vezettük le a rögzített térfogatokra érvényes **(c)** jelű axiómákat, majd a **(g)** jelű differenciálegyenleteket, és végül a **(h)** jelű szakadási feltételeket.¹⁰⁷ Az **(a)** axiómák matematikai hasonlósága egységes kezelést tett lehetővé, ami a tárgyalást egyszerűsítette. A levezetések egyszerű logikai lépésekből álltak, amelyek mindegyike *megfordítható*. Így, ha **(g)** és **(h)** axiómákat együtt elfogadjuk, akkor ezekből visszafelé bizonyíthatók a **(c)** és **(a)** jelű egyenlőségek. Tehát a kontinuummechanika megalapozásának több *egyenértékű lehetőségéhez* jutottunk. Az alábbi egyenlőségek **bármelyik** együttesét axiómáknak elfogadva a többi is teljesül:

- (Ia), (IIa), (IIIa)** az axiómák anyagi térfogatra felírva (2. fejezet),
(Ic), (IIc), (IIIc) az axiómák álló ellenőrző felületre felírva (3. fejezet),
(Ig), (IIg), (IIIg), (Ih), (IIh) differenciálegyenletek (4. fejezet) és szakadási feltételek (5. fejezet).

Egy elméleti mechanikai modell összeállításánál az axiómák természetesen vegyesen is alkalmazhatók. Például választhatjuk **(Ia)**, **(IIg)** és **(IIIc)**-t. Azonban ahhoz, hogy teljes axiómarendszert nyerjünk, az **(I)**, **(II)** és **(III)** csoport mindegyikéből legalább egyet választani kell. És ha szakadási felület is van a kontinuumban, akkor **(Ig)** csak **(Ih)**-val, és **(IIg)** csak **(IIh)**-val együtt alkot teljes információt.¹⁰⁸

Szakadási felület és réteg

Az axiómáknak eleget tevő szakadási felületek fajtái: *egyszerű szakadás*, *örvényfelület* és *lökéshullám*. A szakadási feltételek csak helyi (lokális) paramétereket tartalmaznak, ezért több szakadási felület esetén mindegyikre egyformán alkalmazhatók (5.6. példa). A következő példákat tárgyaltuk:

- *Folyadék-szilárd test* határon **egyszerű** szakadás (5.1. példa, 5.6. példa).
- *Rugalmas-képlékeny* határon **egyszerű** szakadás (5.2. példa).
- *Vízszögár-levegő* határon **egyszerű** szakadás (5.3. példa).
- *Szilárd test-levegő* határon **egyszerű** szakadás (5.7. példa).
- *Rugalmas szilárd testben* húzófeszültség **lökéshullám** (2.6. és 5.4. példa).
- *Rugalmas szilárd testben* nyírófeszültség **örvényfelület** (5.5. példa).
- *Gázokban* haladó nyomás **lökéshullám** (11.9. példa).
- *Rugalmas folyadék rugalmas csőben* (vízütés), **összetett** szakadás (16.3. példa).

A 2.6. példa bemutatta a *szakadási felület* helyettesítését *szakadási réteggel*. Ez a lehetőség természetesen mindig megfontolható. Ha a vizsgált mechanikai rendszer összeállításánál az összes szakadási felületet szakadási réteggel helyettesítjük, akkor szakadási felület nélküli modellt nyerünk. Ennek előnye, hogy érvényes rá Noll elmélete [2], és sok gyakorlati esetben a valóság jobb közelítését nyújtja, mint a szakadásos (2.6., 5.1. és 16.3. példa). Esetenként azonban a szakadási réteg alkalmazása erőszakolt (például a sűrűségugrás elkenése folyadék-szilárd határon, 5.1. és 5.7. példa). Vannak olyan esetek is, amikor a szakadási felület egyszerűbb számítást tesz lehetővé, mint a réteg (5.4. és 16.3. példa). A szakadási felület vagy a szakadási réteg alkalmazása tehát a feladat természetétől függően *megválasztható*.

Alkalmazási határok

A newtoni kontinuummechanika alkalmazásának határai jól ismertek.

A kontinuum koncepció nem használható túl kicsi testekre (mondjuk 1 mikron fő méret alatt) és ritka gázokra (nagyon kis nyomásoknál a sebesség és a nyomás értelmezése nehézségekbe ütközik, mondjuk 10^{-6} Pa abszolút nyomás alatt). A newtoni mechanika nem alkalmazható túl nagy sebességű testekre (relativisztikus hatások jelenhetnek meg, mondjuk a fénysebesség 1 %-a fölött). Nukleáris folyamatok esetén pedig a tömegállandóság csak korrekciókkal alkalmazható.

¹⁰⁷ A **(b)** axiómák az **(a)** axiómáknak csak kiterjesztései, a **(d)** axiómák a **(c)** axiómák szűkítései, az **(e)** és **(f)** axiómák pedig a **(g)** axiómák levezetésének főbb állomásai. Az axiómák listája a könyv végén a XI. Táblázat.

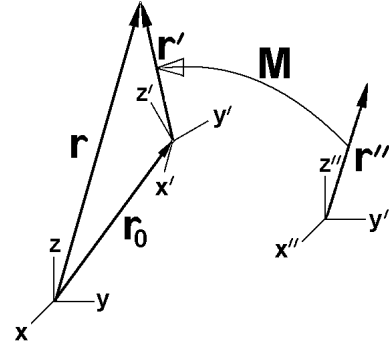
¹⁰⁸ **(Ih)**-t nevezik **(Ig)** *szakadási feltételének* is, és **(IIh)**-t **(IIg)** *szakadási feltételének*.

Kiegészítések

7. fejezet. Mozgó koordinátarendszer

Ha egy vonatkoztatási rendszerről áttérünk egy hozzá képest mozgó másik vonatkoztatási rendszerre, – például egy Földi rendszerben működő szivattyú (álló) rendszeréről a szivattyú járókereivel együtt forgó (mozgó) rendszerre – akkor a pontok koordinátáit át kell számítani az egyik koordináta-rendszerről a másik koordináta-rendszerre. Az általános esetet tárgyaljuk, a mozgó rendszer az állóhoz képest *gyorsulva halad és gyorsulva foroghat* is.

A 7.1. ábrán az *álló* Descartes-féle koordináta-rendszert (x,y,z) képviseli, a *mozgó* rendszert (x',y',z') . A mozgó rendszer megfigyelője egy részecske pályáját regisztrálja az (x',y',z') tengelyekhez képest. Annak érdekében, hogy a pálya alakját lássuk, forgassuk az (x',y',z') koordináta-rendszert olyan helyzetbe, hogy a tengelyei párhuzamosak legyenek az álló tengelyekkel. Így nyerjük az (x'',y'',z'') rendszert. A mozgó megfigyelő által észlelt pálya ebben jelenik meg. Az alábbi egyenleteknél könnyebbéség, ha a forgatás tenzorának az *inverzét* jelöljük \mathbf{M} -el (7.1. ábra). A mozgó rendszer origójának helyvektora az álló rendszerben \mathbf{r}_0 . A megfigyelt anyagi pont helyvektora az álló rendszerben \mathbf{r} , a mozgó rendszerben \mathbf{r}' , illetve az elforgatottban \mathbf{r}'' .



7.1. ábra. Az álló, a mozgó és az elforgatott koordináta-rendszer

Az ábra alapján:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' , \quad (7.1)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{M} \mathbf{r}'' , \quad (7.2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{M} \mathbf{r}'' . \quad (7.3)$$

Az utóbbi egyenlet a *koordináta-transzformáció egyenlete*. Mind a négy paraméter függ az időtől. (A newtoni kontinuum elméletében az idő egyformán múlik a rendszerekben: $t'' = t' = t$.) A (7.3) egyenlet koordinátáisan [31]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(x''x') & \cos(y''x') & \cos(z''x') \\ \cos(x''y') & \cos(y''y') & \cos(z''y') \\ \cos(x''z') & \cos(y''z') & \cos(z''z') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} , \quad (7.4)$$

ahol $(y''x')$ egy szög, a 7.1. ábrán jelölt y'' tengely és x' tengely szöge (a $''$ -ös rendszer origóját a $'$ -ös rendszer origójához tolva). Az \mathbf{M} tenzor általános tulajdonsága az, hogy hossztartó és szögtartó¹⁰⁹, és az inverze a csatoltja¹¹⁰ [59], esetenként *mértéktartó* vagy *ortogonális* tenzornak nevezik.

7.1. példa. A mozgó rendszer sebesség és gyorsulás képlete

Az idő szerinti differenciálást ponttal jelöljük.

$$\text{A (7.1) egyenletből:} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' , \quad (7.5)$$

$$\text{és a (7.2) egyenletből (szorzat deriváltja):} \quad \dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{M}} \mathbf{r}'' + \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' . \quad (7.6)$$

Az $\dot{\mathbf{M}}$ értékét egy speciális esetből számítjuk. Az origó is, és a részecske is álljon: $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{0}$, de \mathbf{M} ugyanúgy változzon, mint korábban. $\mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' = \mathbf{0}$ is teljesül (mert $\dot{\mathbf{r}}'' = \mathbf{0}$). Az (x',y',z') rendszer most merev-

¹⁰⁹ Tetszőleges \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorra $(\mathbf{M}\mathbf{v})^2 = \mathbf{v}^2$, és $(\mathbf{M}\mathbf{u})(\mathbf{M}\mathbf{v}) = \mathbf{u}\mathbf{v}$.

¹¹⁰ Az inverz \mathbf{M}^{-1} . Az \mathbf{M}^* csatolt mátrixot az \mathbf{M} mátrix elemeinek a főtenzilyre való tükrözésével kapjuk. $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^*$.

test-szerű forgást végez. Erre ismert a kerületi sebesség képlete: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, ahol $\boldsymbol{\omega}$ a pillanatnyi szögsebesség. Ezt összevetve (7.5) és (7.6)-al, ebben a speciális esetben: $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, és (7.6) alapján $\dot{\mathbf{M}} \mathbf{r}'' = \dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Az általános esetben \mathbf{M} ugyanúgy forog, mint a speciális esetben,

$$\text{ezért:} \quad \dot{\mathbf{M}} \mathbf{r}'' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad , \quad (7.7)$$

$$\text{ebbe (7.2)-öt helyettesítve:} \quad \dot{\mathbf{M}} \mathbf{r}'' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \mathbf{r}'' \quad , \quad (7.8)$$

$$\text{ami tetszőleges } \mathbf{r}'' \text{-re érvényes, tehát:} \quad \dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \quad . \quad (7.9)$$

$$(7.6) \text{ és (7.7) alapján:} \quad \dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' \quad , \quad (7.10)$$

$$\text{ezt (7.5)-be helyettesítve:} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' \quad . \quad (7.11)$$

Ez a sebességek transzformációs képlete.

$$\text{Ezt differenciálva:} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{r}}'' + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}'' \quad , \quad (7.12)$$

$$(7.8) \text{ és (7.10) alapján:} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'') + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}'' \quad . \quad (7.13)$$

$$\text{Összevonva:} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}'' \quad . \quad (7.14)$$

Ez a gyorsulások transzformációs képlete.

$$\text{Új jelöléseket bevezetve:} \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{r}}_0, \quad \mathbf{w}' = \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'', \quad \mathbf{a}' = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}'' \quad . \quad (7.15)$$

$$\text{Ezekkel:} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' + \mathbf{a}' \quad . \quad (7.16)$$

A jobb oldal első két tagja a *rendszer gyorsulásait* tartalmazza. Ezeket követi a centripetális gyorsulás, majd a Coriolis gyorsulás (-1)-szerese, és végül az utolsó tag a gyorsulás a mozgó (vesszős) rendszerben.¹¹¹

A mozgó koordinátarendszerek tétele: Ha a newtoni kontinuummechanika axiómái érvényesek egy álló rendszerben, akkor a hozzá képest gyorsuló és forgó mozgó mozgást végző koordinátarendszerben is érvényesek, a külső térfogati erő *módosult* értelmezésével.

Bizonyítás. Az álló rendszerben érvényes Cauchy egyenlete (a (4.8) egyenlet \sim **(IIg)** axióma) a gyorsulással felírva:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} + \text{div} \mathbf{F} \quad . \quad (7.17)$$

Ebbe (7.16)-ot helyettesítve és átrendezve:

$$\rho \mathbf{a}' = \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{a}_0 - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2 \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' - \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \text{div} \mathbf{F} \quad . \quad (7.18)$$

Ebből látható, hogy ha *úgy értelmezzük* a mozgó rendszerbeli \mathbf{g}' értékét, hogy:

$$\rho \mathbf{g}' = \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{a}_0 - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2 \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' - \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad , \quad (7.19)$$

akkor Cauchy egyenlete a mozgó rendszerben is érvényben marad:

$$\rho \mathbf{a}' = \rho \mathbf{g}' + \text{div} \mathbf{F} \quad . \quad (7.20)$$

A (7.19) egyenlet mutatja, hogy a térfogati erőssűrűséget hogyan kell módosítani ahhoz, hogy **(IIg)** axióma a mozgó rendszerben is teljesüljön. (7.19) jobb oldalán a $\rho \mathbf{g}$ után a *tehetetlenségi erők* sűrűségei szerepelnek: A $\rho \mathbf{g}$ utáni első két tag a mozgó rendszer gyorsulásából származik, a harmadik a Coriolis erő sűrűsége: $\mathbf{f}_{\text{Coriolis}} = -2 \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}'$, a negyedik pedig a centrifugális erő sűrűsége: $\mathbf{f}_{\text{centrifugális}} = -\rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$.

A leggyakrabban előforduló esetben az origó rögzített ($\mathbf{a}_0 = 0$), és a rendszer egyenletesen forog ($\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$), ekkor csak a Coriolis és a centrifugális tag marad az egyenletekben.

¹¹¹ Ezek a képletek [3]-ban (143.3) és (143.6).

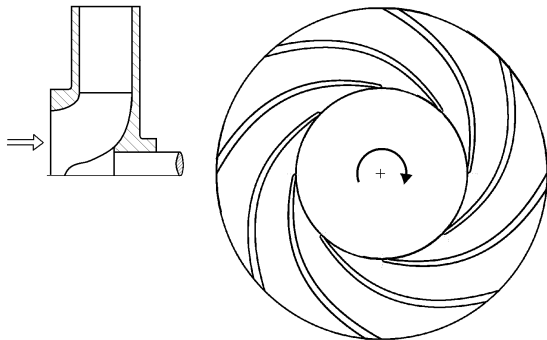
A (7.20) egyenletből látható, hogy a feszültségtenzort nem kell módosítani. A feszültségek és a felületeken ható erők a mozgó rendszerben ugyanazok, mint az álló rendszerben. Az idő és az anyag sűrűsége is ugyanaz. A mozgó rendszer alapmennyiségei: t , \mathbf{r}' , ρ , \mathbf{w}' , \mathbf{g}' , \mathbf{F} .

A sebességek transzformációját is figyelembe véve könnyen látható, hogy Cauchy egyenletén, azaz a **(IIg)**-n kívül az **(Ig)**, **(IIIg)**, **(Ih)**, **(IIh)** axiómák is teljesülnek a mozgó rendszerben. Ha tehát az álló rendszer inercia rendszer, akkor a mozgó rendszerben a kontinuummechanika egyik axióma-rendszere teljesül, és ezért *a kontinuummechanika egész elmélete alkalmazható a mozgó rendszerben*. Tehát a mozgó rendszer is inercia rendszer, *a térfogati erőssűrűség módosult értékével*.

A mozgó rendszerben a tehetetlenségi erők ugyanolyan tényleges erők, mint a rendszeren kívüli testekből származó tömegvonzás (pl. Földi rendszerben a súlyerő)¹¹². A mozgó rendszerben $\rho\mathbf{g}'$ szerepel az axiómákban, és ezt örökli az axiómákból levezetett elmélet minden tétele is. Így sem az axiómákkal, sem az axiómákból levezetett tételekkel nem választható szét, hogy $\rho\mathbf{g}'$ mely része származik $\rho\mathbf{g}$ -ből, és melyik a tehetetlenségi erőkből. A mozgó rendszerben olyan kísérletet sem lehet végezni, amelyet a kontinuummechanika törvényei jól leírnak, és amellyel a tehetetlenségi erőket szét lehetne választani a rendszeren kívüli testek tényleges tömegvonzásától. Néha ezt úgy fogalmazzák, hogy a tehetetlenségi erők *megkülönböztethetetlenül* olyanok, mint a tömegvonzásból származó erők [2].¹¹³

Ennek a megállapításnak *látszólag* ellentmond a *Foucault féle ingakísérlet*, amit úgy tartanak számon, mint *a Föld forgásának a bizonyítékát*. Azonban vizsgáljuk meg a kísérlet gondolatmenetét. Képzeljük azt, hogy a kísérletet az északi sarkon hajtjuk végre, és észleljük az inga síkjának elfordulását a Földhöz rögzített koordinátarendszerben. Megállapítjuk, hogy ennek két oka lehet: Vagy a Föld forgásából származó tehetetlenségi erők, vagy valamely más erő, például villamos vagy mágneses eredetű. Gondosan vizsgálódunk és megállapítjuk, hogy *más erőt nem észlelünk*. Ez a megállapítás *újabb információt* csatol a vizsgálathoz – ami nem következik az axiómákból – ez teszi lehetővé, hogy az inga viselkedését tehetetlenségi erővel (a Coriolis erővel) magyarázzuk. A Foucault féle kísérlet csak ezzel a kiegészítéssel bizonyítja a Föld forgását.

7.2. példa. Szivattyú forgó járókerékének erőjátéka



7.2. ábra. Radiális szivattyú járókerék rajza

Az ábra szerinti szivattyú járókerék erőjátékát kívánjuk számítani. Az ábrán baloldalt a lapátokat a metszet síkjába beforratva látjuk. A jobboldali ábra a lapátokat a járókerék előlapjának levétele után mutatja. A beáramló víz és a tengely forgásának irányát a nyilak jelzik.

A járókerékben kialakuló áramlást *a járókerékkel együtt forgó koordinátarendszerben* vizsgáljuk. Ennek előnye, hogy ebben az áramlás *stacionárius*, míg az álló rendszerben nem az. Feltesszük, hogy a járókerék fordulatszáma egyenletes. A rendszer nem gyorsul, tehát a tehetetlenségi erők közül csak a centrifugális és a Coriolis erőt kell figyelembe venni.

Az áramlás a járókerékben periodikus, elég egy csatornát vizsgálni. A 7.3 ábrán szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületre alkalmazzuk (3.12) ~ **(II d)** axiómát. Az előbb bizonyított tétel alapján ugyanis a forgó rendszerben a kontinuummechanika összes egyenlete érvényben van, csak az álló rendszerbeli külső erőkhöz hozzá kell számítani a tehetetlenségi erőket.

¹¹²Lásd az 1. fejezetben, (1.15) egyenletnél.

¹¹³Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert esetenként vezető tervezők is idegenkednek a tehetetlenségi erők használatától.

Az $\boldsymbol{\omega}$ vektor merőleges a hátlap síkjára. A helyvektor rajz síkjára eső vetületét * jelöli (7.3. ábra):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}^* + \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \parallel \boldsymbol{\omega}. \quad (7.21)$$

Ezt a centrifugális erő sűrűségének egyenletébe helyettesítjük, majd $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$, (19.2), és $\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}^* = 0$ miatt a centrifugális erő sűrűsége:

$$\mathbf{f}_{\text{centrifugális}} = -\rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \rho \omega^2 \mathbf{r}^*. \quad (7.22)$$

Ezzel a centrifugális erő:

$$\mathbf{F}_{\text{centrifugális}} = \int_V \rho \omega^2 \mathbf{r}^* dV. \quad (7.23)$$

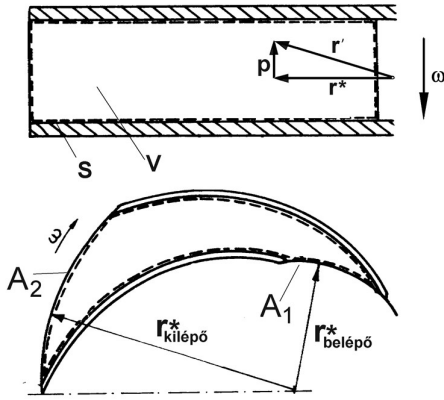
A Coriolis erőre pedig [21]:

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = - \int_V 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} \rho dV = - \int_S 2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho \mathbf{w} dS, \quad (7.24)$$

ugyanis Gauss (21.5) tételével felületi integrállá alakítható. Itt \mathbf{w} a lapátokhoz képesti relatív sebesség, és a felületi integrál integranduszára pedig (20.21) alkalmazásával:

$$[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{w}] \nabla = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{w} + [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \circ \nabla] \mathbf{w} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}, \quad (7.25)$$

ugyanis $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ (vízre $\rho = \text{áll.}$), és $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \circ \nabla = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}$, tehát a felületi integrálban szereplő függvényt kapjuk.

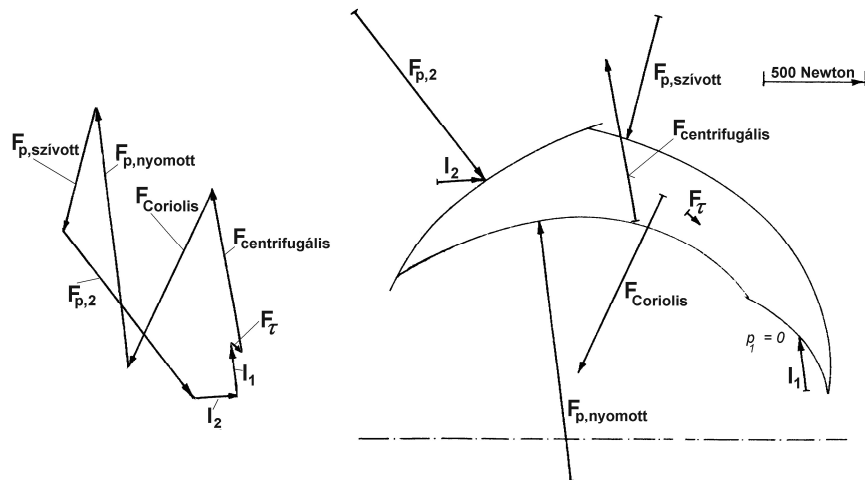


7.3. ábra. Az egyik járókerék-csatorna

Nagyon érdekes, hogy a Coriolis erő kifejezhető a (7.24) felületi integrállal. Ez azt jelenti, hogy *nem függ* a térfogaton belüli áramlástól, csupán a peremen felvett értékektől. Mivel a lapátokon átáramlás nincs, az erőt már a belépő és a kilépő felületen érvényes sebességeloszlás meghatározza. Tehát (7.24) alapján:

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = \mathbf{T}_{90} \left[2 \omega \rho \left(\int_{A_2} \mathbf{r}^* \mathbf{w} dA - \int_{A_1} \mathbf{r}^* \mathbf{w} dA \right) \right] \quad (7.26)$$

ahol \mathbf{T}_{90} jelöli a 90°-os forgatást a pozitív irányba. Ez az egyenlet a gyakorlatban nagyon jól használható. Például a 7.3. ábra lapátszarnájában áramló folyadéktömegre az előbbiek szerint a (3.12) ~ (II d) axiómát alkalmazva, a 7.4 ábra szerinti erőjátékot nyerjük.



7.4. ábra. A lapátszarnában áramló folyadéktömegre ható erők a szivattyú egyik üzemállapotában

A 7.4. ábrán a nyomást úgy normáltuk, hogy a belépésnél $p_1 = 0$ (tehát például $|\mathbf{F}_{p,2}| = (p_2 - p_1)A_2$). Az \mathbf{I}_1 és \mathbf{I}_2 a belépő és kilépő impulzuserők, viszonylag kicsik. Az \mathbf{F}_p erők a nyomásokból származnak: $\mathbf{F}_{p,nyomott}$ azon erő, amivel a lapát nyomott oldalán uralkodó nyomás nyomja a lapátszarnában levő folyadéktömeget (7.4. ábra), az $\mathbf{F}_{p,szívott}$ erő pedig az, amivel a lapát szívott oldalán ébredő nyomás hat a folyadéktömegre. A

centrifugális és a Coriolis erőt a (7.23) és (7.26) képletekkel számoltuk. \mathbf{F}_τ erő a lapátcsatorna falain ébredő kicsiny viszkózus és turbulens csúsztató feszültségek együttes becslő értéke.

A 7.4. ábra jobb oldalán az erőket a hatásvonalukra rajzolva látjuk, a baloldali ábra a **(IIId)** axióma záródó vektorsokszögét mutatja. Az ilyen ábráknak több gyakorlati tanulsága van. Használható például a lapátok szilárdsági méretezésénél, vagy a Reynolds szám hatások értékelésénél [21]. Azt is sokszor kérdezik, hogy a járókerék-csatornában a víz miért áramlik a nyomáskülönbség ellenében. Erre a 7.4. ábra kifelé mutató erői világos magyarázatot adnak.

A példa egyúttal azt is szemlélteti, hogy a newtoni kontinuummechanika alkalmazható *forgó* Földi rendszerekben is.

8. fejezet. Anyagi egyenletek.

Konkrét számítási feladatot csak akkor tudunk sikeresen végrehajtani, ha az axiómákat kiegészítjük az *anyagi egyenletekkel*, amelyek megadják ρ és \mathbf{F} függését a mozgás más paramétereitől az anyag tulajdonságainak megfelelően.

Sűrűségek

A legegyszerűbb anyagi egyenlet: $\rho = \text{konstans}$. (8.1)

III. táblázat. **Néhány anyag sűrűsége** (egyszerűbb számításhoz)

Anyag	víz	jég	olaj, fa	levegő	acél	alumínium	bronz, réz	gumi	beton
Sűrűség, kg/m ³	1000	917	800	1,25	7800	2700	8800	1200	2200

IV. táblázat. **Víz sűrűsége, kg/m³** (igényes számításhoz, kivonat [33]-ból)

Hőmérséklet, C°	Abszolút nyomás, bar			
	1	10	30	70
0	999,8	1000,3	1001,3	1003,3
4	1000,0	1000,4	1001,4	1003,4
10	999,7	1000,1	1001,1	1003,0
20	998,2	998,6	999,5	1001,3
40	992,2	992,6	993,5	995,2

Ideálisan összenyomható gázok sűrűsége az állapotegyenletből számítható:

$$\frac{\rho}{p} T = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{T_0}{p_0}, \quad (8.2)$$

ahol ρ az anyag sűrűsége a T abszolút hőmérsékleten és p abszolút nyomáson. 0-s értékek ugyanezek egy másik állapotban. Levegő: $T_0 = 273 \text{ K}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$, $\rho_0 = 1,29 \text{ kg/m}^3$, $\rho_0 T_0 / p_0 = 352 \text{ kg/m}^3 \text{ K/bar}$.

Gázok sűrűsége igényes számításhoz a Van der Waals állapotegyenletből nyerhető.

Gőzök sűrűsége a gőztáblázatokból vehető.

Kontinuummechanikai számításokban gyakran feltételezik, hogy a test "homogén és izotróp" anyagú¹¹⁴. Ezzel az anyagi paraméterek térbeli viselkedését jellemzik.

¹¹⁴A test *homogén*, ha minden pontjánál egyformán viselkedik (az anyagi egyenletei ugyanazok). A test *izotróp*, ha bármilyen irányban ugyanúgy viselkedik (nincsenek kitüntetett irányai). Nem izotróp a fa, mert szálirányban könnyebben hasad. Nem homogén a betétedzésű acél, mert a felszíni réteg keményebb, mint a belseje. (Azonban sokszor az ilyen testeket is homogén, izotróp kontinuumként kezeljük, annak tudatában, hogy ez csak közelítés.)

Lineárisan rugalmas Hooke-féle testek

Szilárd testek feszültségviszonyainak számításánál abból indulunk ki, hogy a terheletlen test *feszültségmentes*. Ennek természetesen gyártástechnológiai előfeltételei vannak. Gondoljunk például egy acél gépalkatrészre. A gyártása során (öntés vagy hegesztés) feszültségek maradnak benne, amiket hőkezeléssel (vagy vibrálással) szüntetnek meg. A gépbe szerelendő alkatrész így feszültségmentes.

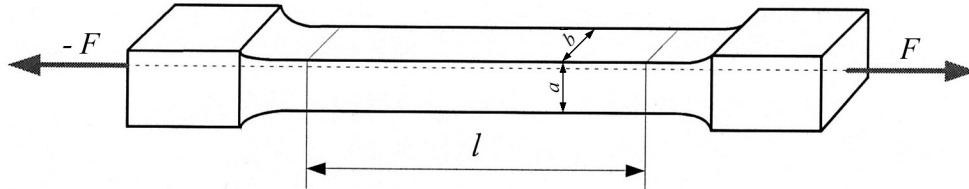
A szilárd testek anyagi egyenleteit Szentmártoni [59], Kozák és Szeidl [94,95] tárgyalja.

A terheletlen (erőhatás nélküli) test \mathbf{r} helyvektorú pontja a terhelés *után* a deformált, újra nyugalomba jutott test \mathbf{r}' pontjába kerül. Az *elmozdulása*: $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Ennek deriválttenzorát az: $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}$

tenzort *alakváltozási tenzornak* nevezik, és ezt szimmetrizálva, az $\mathbf{A}_t = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ tenzort *tükrös alakváltozási tenzornak*¹¹⁵. Az \mathbf{A}_t tenzor a test *lokális* (helyi) torzulásait jellemezi. A szilárd test **kis alakváltozásairól** akkor beszélünk, ha az \mathbf{A}_t tenzor mátrixának elemei kicsik¹¹⁶, az anyag ekkor *lokálisan* csak kicsit torzul. Az általános esetben \mathbf{A}_t és \mathbf{F} mátrixa:

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

ahol ε_x az x tengely irányú relatív hosszváltozás (lásd alább), γ_{xy} az x és y tengelyek (deformáció előtti 90°-os szöge) szögváltozásának fele, σ_x az x tengelyre merőleges síkon ható húzófeszültség, τ_{yx} az x tengelyre merőleges síkon ébredő, az y tengely irányába mutató csúsztatófeszültség. Az \mathbf{A}_t és \mathbf{F} közötti egyenlet paraméterei *szakítógéppel* mérhetők.



8.1. ábra. Szilárd test szakítógéppel készített próbadarab vázlata [94]

Az ábrán bemutatott próbadarabot a két végénél kialakított vastag részénél fogják be a szakítógéppbe. A teszt során meghatározzák, hogy ismert nagyságú F húzóerő hatására mekkora a próbadarab l hosszúságú részének Δl megnyúlása. A legtöbb szilárd anyag esetén egy határérték (a rugalmassági határ) alatt a mért értékekre a

$$\sigma_{\text{húzó}} = \frac{F}{ab}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{változókkal teljesül} \quad \underline{\text{Hooke törvénye:}} \quad \sigma_{\text{húzó}} = E \varepsilon, \quad (8.4)$$

azaz: a **húzófeszültség** arányos az ε **relatív hosszváltozással**. Az arányossági szorzó E egy anyag-állandó, amit *Young modulusznak* neveznek. A hosszváltozással egyidejűleg a rúd összehúzódik. Az a és b hosszak (8.1. ábra) összehúzódásai Δa és Δb teljesítik (homogén, izotróp test esetén¹¹⁴):

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \nu \frac{\Delta l}{l} \quad (8.5)$$

ahol ν a *Poisson tényező*. Minden anyagra: $\nu \leq 0,5$.

¹¹⁵ Az \mathbf{A}^* mátrixot úgy kapjuk, hogy az \mathbf{A} mátrixot a főátlóra tükrözzük. Az \mathbf{A}_t tenzor szimmetrikus.

¹¹⁶ Az \mathbf{A}_t elemei dimenziótlanak (hossz/hossz), gyakorlati számításokban 0,01-nél kisebbek.

V. táblázat. **Rugalmassági anyagállandók**¹¹⁷ (egyszerűbb számításhoz)

	acél	öntöttvas	aluminium	bronz, s.réz	üveg	beton	gránit	gyémánt	gumi
E , GPa	200	115	68	110	66	27	45	1100	0,01
ν , arány	0,27	0,25	0,34	0,37	0,24	0,17	0,13	0,07	0,46

A mérések szerint, a Hooke-féle rugalmas testek \mathbf{A}_t és \mathbf{F} tenzorai teljesítik a következő egyenletet:

Hooke-féle anyag-törvény [59]:
$$\mathbf{A}_t = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{F} - \frac{\nu}{E} s \mathbf{I}, \quad (8.6)$$

ahol \mathbf{I} az azonosság tenzora, és $s = i(\mathbf{F}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ az \mathbf{F} első skalárja. (8.7)

Bevezetve $e = i(\mathbf{A}_t) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ az \mathbf{A}_t első skalárját, (8.8)

a (8.6) egyenlet két oldalának első skalárját számítva, és az egyenletet rendezve kapjuk:

$$e = \frac{1-2\nu}{E} s \quad \text{vagy} \quad s = \frac{E e}{1-2\nu}. \quad (8.9)$$

Ezekkel (8.6) egyenletet \mathbf{F} -re megoldjuk:

Hooke-féle anyag-törvény másik alakja [59]:
$$\mathbf{F} = 2\mu \mathbf{A}_t + \lambda e \mathbf{I}, \quad (8.10)$$

ahol $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$, és $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. (8.11)

a *Lamé-féle állandók*. A (8.10) összefüggés a *feszültségtenzor keresett anyagi egyenlete*.

Kiszemelve egy V térfogatú kis kockát a terheletlen rugalmas testben, a terhelés utáni térfogatának ΔV megváltozása a V -hez képest (az oldalfalak eltolódását számítva):

$$\frac{\Delta V}{V} = e. \quad (8.12)$$

Mivel a kis kocka tömege a terhelés során nem változik, a terheletlen ρ_0 sűrűségű Hooke-féle test sűrűsége a terhelés után:

Hooke-féle test sűrűsége:
$$\rho = \rho_0 \frac{1}{1+e}. \quad (8.13)$$

Mivel azonban az ε relatív alakváltozások kicsik (gyakorlati számításban: $e < 0,01$) a Hooke-féle testeknek ezt a sűrűségváltozását nem szokták figyelembe venni.

8.1. példa. Tenzorok a szakító próbatest pontjainál

Állítsuk elő a 8.1. ábra szerinti próbatestben ébredő \mathbf{A}_t és \mathbf{F} tenzorok mátrixait a (8.4) és (8.5) egyenletek alapján, és ellenőrizzük, hogy teljesítik-e (8.6) egyenlőséget. A z tengely a húzás irányával párhuzamos.

$$\begin{pmatrix} -\nu \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{húz} \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} (0+0+\sigma_{húz}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

A jobb oldali mátrix egyenlőség elemeit egyszerű számítással meghatározva, a bal oldali mátrixnak mind a 9 elemét megkapjuk. Megjegyzés: A próbatest l hosszúságú részén a feszültségeloszlás egyenletes. A (8.6) egyenlőség a próbatest középső részén *minden pontnál* érvényes. A próbatest oldallapjainál a levegő oldalon minden feszültség zérus (a légköri nyomás olyan kicsi a mért feszültségekhez képest, hogy zérusnak vesszük), tehát teljesülnek az 5.7. példa követelményei.

¹¹⁷Az ólom, a gumi, és a műanyagok húzódiagramjai általában nem lineárisak. A gyémánt kristály nem izotróp. Az ezekre adott értékek csak tájékoztatóak.

Súrlódásmentes folyadékok

$$\text{Súrlódásmentes folyadékokra}^{118}: \quad \mathbf{F} = -p \mathbf{I}, \quad (8.15)$$

ahol p a nyomás (1.23. példa), és \mathbf{I} az azonosság tenzora. Az áramlási tér valamely pontjánál a p nyomás értéke függ az áramlási tér peremfeltételeitől (például álló vízben a vízfelszínnél érvényes nyomástól), és az áramlás alapegyenleteitől (például a veszteséges Bernoulli egyenlettől).

Lineárisan viszkózus folyadékok

Viszkózus folyadékokra a *Stokes-féle* súrlódási törvény¹¹⁹:

$$\mathbf{F} = -p \mathbf{I} + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (8.16)$$

ahol \mathbf{D} a *deformációsebességek szimmetrizált tenzora*. Ezt a következőképpen kapjuk. A deformációsebességek tenzora: a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebesség [komponensekben $\mathbf{v} = v_x(\mathbf{r}, t), v_y(\mathbf{r}, t), v_z(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$] szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}^{120}, \text{ és ezt szimmetrizálva}^{121}: \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right)^* \right), \quad (8.17)$$

továbbá (8.16) egyenletben λ és μ a *viszkozitás konstansai*. Összenyomhatatlan (állandó sűrűségű) folyadékokra: $\lambda = 0$ (sokszor ezt használjuk valóságos folyadékokra is). A μ elnevezése *dinamikai viszkozitás*. Helyette inkább a ρ sűrűséggel osztott $\nu = \mu/\rho$ konstanst, a *kinematikai viszkozitást* használjuk. (Az elnevezés abból ered, hogy μ dimenziója, Ns/m^2 , tartalmazza az erő egységét, míg ν dimenziója, m^2/s , csak kinematikai egységeket tartalmaz.) Könnyű megjegyezni néhány *tájékoztató* értéket:

$$\begin{aligned} \text{vízre } \nu &= 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \\ \text{levegőre } \nu &= 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

Mivel a viszkozitás egyik gyakorlati egysége a *centisztók*, és $1 \text{ cst} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, az alábbi táblázatokban a számértékek valójában centisztókban vannak adva.

VI. táblázat. **Víz kinematikai viszkozitása 1 bar abszolút nyomáson** [53]

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	40	60	100
$\nu \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$	1,78	1,30	1,00	0,66	0,48	0,30

VII. táblázat. **Olajok kinematikai viszkozitása 1 bar abszolút nyomáson** [53]

$\nu \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$	250	150	100	50	20	10	5
könnyű olaj, $^\circ\text{C}$	5	12	19,5	32	55	65	120
nehéz olaj, $^\circ\text{C}$	43	52	58	73	100	120	

VIII. táblázat. **Különféle folyadékok kinematikai viszkozitása (1 bar, 15 $^\circ\text{C}$)** [53]

	higany	éter	alkohol	benzol
$\nu \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$	0,12	0,27	1,67	7,9

IX. táblázat. **Levegő kinematikai viszkozitása, $\nu \cdot 10^6$** [53]

$t, ^\circ\text{C}$	-20	0	20	40	60	80	100
1,033 bar nyomáson	11,6	13,3	15,1	16,9	18,9	20,9	23,1
2 bar nyomáson	5,85	6,74	7,72	8,80	9,95	11,2	12,7

¹¹⁸ A súrlódásmentes áramlásokat lásd a 12. fejezetben.

¹¹⁹ Nevezik Navier-Poisson törvénynek is.

¹²⁰ Érdemes megjegyezni: az első sorban v_x deriváltjai szerepelnek.

¹²¹ A mátrix főátlója marad, és rajta kívül a főátlóra tükrösen elhelyezkedő elemek számtani közepeit tartalmazza.

A turbulens áramlás Reynolds feszültségei

A turbulens áramlás nem anyagi egyenlet, mégis itt tárgyaljuk, mert hasonló a kezelése.

Turbulens áramlás esetén a folyadék belsejében kisebb-nagyobb folyadéktömegek az áramlás fő irányától eltérő sebességre tesznek szert (lásd a Pelton sugár példáját, 5.3. példa). Így a turbulens áramlási tér *rögzített* helyeinél a ρ , \mathbf{v} , \mathbf{F} alapmenntiségek egy-egy középérték körül ingadoznak¹²².

A tér rögzített \mathbf{r} pontjánál az idő függvényében ingadozó $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebesség időbeli átlagértékét a következőképpen értelmezzük a τ időt jelentő segédváltozóval, az átlagértéket felülvonással jelezve:

$$\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad , \quad (8.18)$$

Az integrálási tartomány hossza $2T$, így $\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}$ a $2T$ *időtartam alatti átlagsebesség* az \mathbf{r} pontnál. Ezt nevezzük *turbulens sebességnek*, vagy egyszerűen *sebességnek*. Fontos az átlagolás $2T$ időtartamának helyes megválasztása. Ha a turbulens áramlás stacionárius (tehát a fő paraméterei hosszú időn át közel állandóak) akkor T értéke nagyon nagy lehet, és a definíció $T \rightarrow \infty$ -re is érthető. Azonban, ha a turbulens áramlás instacionárius (például egy szivattyú indulása idején a nyomócsőben kialakuló áramlás), akkor T értékét a turbulens ingadozások periódusidejénél sokkal *hosszabbra*, az instacionárius folyamat jellemző idejénél pedig sokkal *rövidebbre* kellene választani. Ez sokszor csak kompromisszumok árán lehetséges. Ilyen esetben *elvben* eljárhatnánk úgy is, hogy a folyamatot *többször megismételve* a kis T -vel számított értékek statisztikai átlagát képezzük. Ekkor a turbulens sebesség egy valószínűségi változó: a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ időben változó sebesség *várható értéke*.

A turbulens áramlás egy áramlástechnikai rendszerben (például egy szivattyútelep csővezetékében, vagy egy technológia folyamat tartályaiban) jön létre. Először az egyszerűbb esetet, a rendszer *stacionárius* üzemét tárgyaljuk. Ekkor a rendszer fő (átlagolt) áramlástan paraméterei az idő függvényében állandóak. Adott \mathbf{r} helyen az ingadozó áramlási sebesség: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ természetesen ekkor is függ az időtől, és a *pillanatnyi* áramlásra ($t = t_1$), a **(IIc)** axiómák teljesülnek. A **(IIc)** axióma a (3.2) egyenlet az áramlási tér *tetszőleges* rögzített $V(t_1)$ térfogatára:

$$\textbf{(IIc) axióma:} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{v} dV \Big|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} \quad . \quad (8.19)$$

Földi rendszerben ($\mathbf{g} = \text{konstans}$) *víz* áramlását ($\rho = \text{konstans}$) vizsgáljuk, melyre a Navier-Stokes egyenlet is érvényesül (\mathbf{F} a (8.16) egyenlettel számítható, $\rho = \text{konstans}$ miatt $\lambda = 0$). Mivel az üzem stacionárius, az átlagolási időtartamot ($2T$) *nagyon hosszúra* ($T \rightarrow \infty$ értékre) választjuk.

A (8.19) egyenlet *minden tagját átlagoljuk*. A baloldali *első tag* átlagértéke *zérus*. Ugyanis a differenciálható integrál is egy átlagérték körül ingadozik, és ismert a következő tétel: Ha egy U fizikai mennyiség a t idő függvényében *korlátos* ($|U| < K$ adott szám, akármilyen nagy t -re!), akkor a **deriváltjának** időbeli átlagértéke *zérus*. Az átlagérték definíciója szerint ugyanis:

$$\frac{dU}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{dU}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (U(T) - U(0)) = 0 \quad . \quad (8.20)$$

Az integrálást el tudtuk végezni, s utóbb, mivel $F(U)$ korlátok között ingadozik és $T \rightarrow \infty$, a tört határértéke *zérus*. A (8.19) egyenletből tehát az első tag kiesik. Az egyenlet többi tagját rögzített tartományokon számítjuk, ezért az átlagérték képzés és az integrálás sorrendje minden tagban felcserélhető. A baloldalon maradt tagot a másik oldalra rendezve ezt kapjuk:

$$0 = - \int_{S(t_1)} \rho \overline{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS})} + \int_{V(t_1)} \rho \overline{\mathbf{g}} dV + \int_{S(t_1)} \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{dS} \quad . \quad (8.21)$$

¹²² A \mathbf{g} azért hiányzik az alapmenntiségek közül, mert Földi rendszerben állandó.

A két konstans szorzata: $\overline{\rho \mathbf{g}} = \rho \mathbf{g}$, és a feszültségtenzor időbeli átlaga $\overline{\mathbf{F}}$ a (8.16) egyenlőség átlagolásával számítható. A sebességeket tartalmazó integrál átlagképzésénél azonban gond van. A $\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{S})$ szorzatot a \mathbf{v} vektor (v_x, v_y, v_z) sebességkomponenseivel (19.8) és (19.37) alapján felírva:

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{S}) = (\mathbf{v} \circ \mathbf{v})d\mathbf{S} = \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}, \quad (8.22)$$

ahol \circ a diádikus szorzás jele. A tenzorban a sebességkomponensek *szorzatai* jelentek meg, és egy szorzat átlagértéke általában *nem egyenlő* az átlagértékek szorzatával. Nézzük például a v_x és v_y komponensek szorzatát. Az átlagot felülvonással, az ingadozást vesszővel jelölve:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad \text{és} \quad v_x v_y = (\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_y + v'_y) = \bar{v}_x \bar{v}_y + \bar{v}_x v'_y + v'_x \bar{v}_y + v'_x v'_y,$$

és mivel az átlag definíciója miatt: $\overline{v'_x} = 0, \overline{v'_y} = 0$, a $v_x v_y$ szorzat átlagértéke:

$$\overline{v_x v_y} = \bar{v}_x \bar{v}_y + \overline{v'_x v'_y}. \quad (8.23)$$

Ezt alkalmazzuk (8.22) tenzorának elemeire (a $\bar{\mathbf{v}}$ komponenseit tartalmazó tenzort visszaalakítva):

$$\overline{\rho \mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{S})} = \rho \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}}d\mathbf{S}) - \mathbf{T}_{turb} d\mathbf{S}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{T}_{turb} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho v'_x v'_x} & -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v'_x v'_z} \\ -\overline{\rho v'_y v'_x} & -\overline{\rho v'_y v'_y} & -\overline{\rho v'_y v'_z} \\ -\overline{\rho v'_z v'_x} & -\overline{\rho v'_z v'_y} & -\overline{\rho v'_z v'_z} \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

ahol \mathbf{T}_{turb} a **turbulens feszültségek Reynolds-féle tenzora**. Ezt a viszkózus feszültségek átlagértékeit tartalmazó $\bar{\mathbf{F}}$ tenzorral ((8.16) egyenlet) összevonva:

$$\mathbf{F}_{turb} = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{T}_{turb}, \quad (8.25)$$

kapjuk a turbulens áramlás (együttes) feszültségtenzorát. Ezt helyettesítve (8.21) egyenletbe:

$$\textbf{(Ic), turbulens, stac. és } \rho = \text{konst.:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \rho \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{S} + \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F}_{turb} d\mathbf{S}. \quad (8.26)$$

Azt nyertük tehát, hogy a **(Ic)** axióma a *turbulens átlagsebességre* is érvényes, *módosult* feszültségtenzorral.

Hasonló módon az **(Ic)** (a (3.1) egyenlet) és a **(IIIc)** (a 3.3 egyenlet) átlagértékét is számítjuk. A baloldali első tagjaik átlagértéke szintén zérus, és így az axiómákból a következő egyenletek maradnak:

$$\textbf{(Ic) axiómából:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \overline{\rho \mathbf{v} d\mathbf{S}}. \quad (8.27)$$

$$\textbf{(IIIc) axiómából:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \overline{(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{S}))} + \int_{V(t_1)} \overline{\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV} + \int_{S(t_1)} \overline{\mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S}}. \quad (8.28)$$

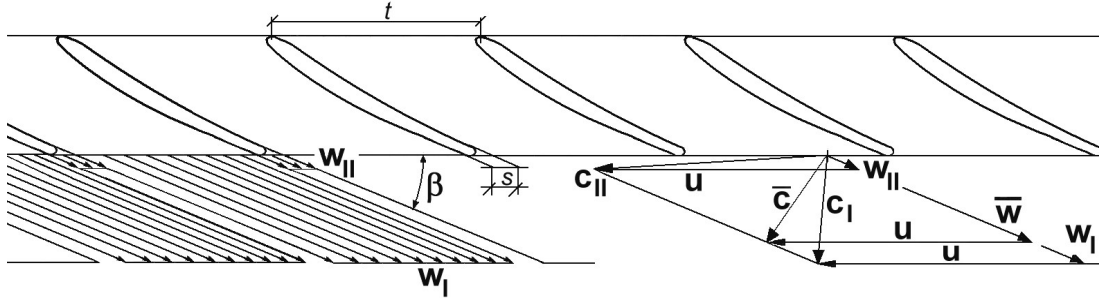
A (8.27) egyenletben \mathbf{v} az egyetlen időben változó paraméter, ezért az átlagolást végrehajtva (8.29)-et nyerjük. Amikor a (8.28) egyenletet átlagoljuk, akkor a (8.26) egyenlet tagjait nyerjük vektoriálisan szorozva \mathbf{r} -el, ezért (8.30)-ban is a (8.24) szerinti Reynolds feszültségek jelennek meg:

$$\textbf{(Ic), turbulens, stac. és } \rho = \text{konst.:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \rho \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{S}. \quad (8.29)$$

$$\textbf{(IIIc), turbulens, stac. és } \rho = \text{konst.:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}}d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{turb} d\mathbf{S}. \quad (8.30)$$

Végeredményben azt kaptuk, hogy az **(Ic)**, **(IIc)** és **(IIIc)** axiómák érvényesek a turbulens (átlagolt) sebességekre, a feszültségtenzornak a Reynolds feszültségeket is figyelembe vevő (8.25) szerinti *módosult értékével*. Mivel az axiómák egyik rendszere teljesül, a newtoni kontinuummechanika összes egyenlete (például Cauchy mozgásegyenlete is) érvényes a turbulens áramlásra!

8.2. példa. A Reynolds feszültség becslése vízturbina járókerék után



8.2. ábra. A Reynolds feszültség becslése a vízturbina síkba terített szárnyrácsa után, csak a lapátok nyomát véve figyelembe

A 8.2. ábra egy szárnylapátos vízturbina járókerék lapátrácsának adott sugárhoz tartozó hengermeteszett és a rajta áthaladó áramlást vázolja. A vízturbínák legjobb hatásfokú üzemiállapotaiban az áramlás közel hengermeteszettekén történik, így a hengermeteszettet síkba terítve, a síkrácsban az áramlás változatlan sebességekkel érvényes. $\mathbf{c} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, ahol \mathbf{c} az abszolút sebesség a síkbeli álló rendszerben, \mathbf{u} a hengermeteszett kerületi sebessége (a lapátrács is ezzel a sebességgel halad az ábrán), \mathbf{w} a relatív sebesség a lapátrácsához képest. A relatív áramlás stacionárius, ezért ennek a sebességeloszlását képzeljük el (és ezt ábrázoljuk). A turbulencia fő forrása a járókeréklapátok nyoma, ahol a relatív sebesség kicsi a fő áramláshoz képest. A Reynolds feszültség főleg a nyomból származik, ezért a fő áramlás sebességváltozásaitól eltekintünk, a nyomon kívüli áramlást egyenletesnek vesszük (8.2. ábra). A lapát nyomában, közvetlenül a lapát után az átlagos relatív sebesség zérus. Kicsit távolabb azonban már észlelünk sebességet. A példában: $w_{II} = 0,1 w_I$ és $s/t = 5\%$ adatokat vettük fel. Az abszolút áramlás instacionárius, de periodikus. A Reynolds feszültséget az álló rendszer egy pontjánál számítjuk. A lapátrács az adott pont fölött egyenletes sebességgel halad. A pontnál az idő s/t részében az abszolút sebesség: \mathbf{c}_{II} , míg az idő $(1 - s/t)$ részében: \mathbf{c}_I sebesség uralkodik. Az időbeli átlag tehát: $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_{II}s/t + \mathbf{c}_I(1 - s/t)$ (Az ábrára tekintve meglepő, hogy az adott pontnál milyen nagy a sebesség szögváltozása, de a vízturbínában is ez a helyzet!) Az átlaghoz képest a sebesség változások: $\mathbf{c}'_I = \mathbf{c}_I - \bar{\mathbf{c}}$, $\mathbf{c}'_{II} = \mathbf{c}_{II} - \bar{\mathbf{c}}$. Az ábrából a komponensekre: $c'_{Iu} < 0$, $c'_{Im} > 0$, $c'_{Iv} > 0$, $c'_{IIm} < 0$, tehát az egész időtartam alatt $c'_u c'_m < 0$. További adatok: $w_I = 20$ m/s, $\beta = 20^\circ$, $u = 20$ m/s. Ezekkel az időbeli

átlagérték:
$$\overline{c'_u c'_m} = c'_{Iu} c'_{Im} (1 - s/t) + c'_{Ivu} c'_{IIm} s/t = -4,947 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

és a Reynolds feszültség:
$$\tau_{um} = -\rho \overline{c'_u c'_m} \cong 5000 \text{ N/m}^2.$$

Ez a számítás azon ritka esetek közé tartozik, amikor a Reynolds feszültséget ki tudtuk számítani. Ez jelzi, hogy szárnylapátos vízturbina (és szárnylapátos szivattyú) járókerekek *után* az abszolút áramlásban milyen nagyságú turbulens nyírófeszültségre számíthatunk. A járókerekek tervezésénél ez fontos adat.

Az előbbieken a turbulens áramlások *alap esetét*: a *stacionárius és állandó sűrűségű* turbulens áramlást tárgyaltuk. Ha az áramlás *nem stacionárius*, akkor (8.20) nem érvényes (bár közelítésként elfogadható). *Változó sűrűségű* közeg esetén pedig az összes ρ -t tartalmazó tag átlagolásában megjelenik a sűrűség ingadozása (ami viszont a legtöbb esetben elhanyagolható). Ilyen esetekben \mathbf{g} és \mathbf{F}_{turb} módosításával a helyzet *elvben* valamennyire menthető, de a *gyakorlatban* közelítésként ezekre is az *alap eset* előbb bemutatott egyenleteit alkalmazzák.

Mivel a turbulens áramlásokra a (c) axiómák jó közelítéssel teljesülnek, a turbulens áramlások ugyanúgy kezelhetők, mint az előzőekben tárgyalt sűrűdésmentes és a viszkózus áramlások. A szóhasználatban sem teszünk különbséget, a *turbulens (átlagolt) sebességet* egyszerűen *sebességnek* nevezzük, és az egyenletekben az átlagolást jelölő *felülvonást* **elhagyjuk**.

Az lenne az ideális, ha a turbulens áramlás feszültségtenzorát (a (8.25) egyenlőség tenzorát) az áramlás többi paraméteréből számítani tudnánk (ahogy lineáris viszkozitású folyadékokra ezt meg lehet tenni). Erre azonban általánosan elfogadott eljárás nem alakult ki. Közelítésként több módszert is alkalmaznak, ezekről Kalmár, Baranyi, Könözy [91], Kristóf [92], Lohász és Réger [99] is írt összefoglalást.

A turbulencia tárgyalását a 9. és a 13. fejezetben folytatjuk.

9. fejezet. Speciális differenciálegyenletek

A newtoni kontinuumok speciális (különbéle anyagokra érvényes) differenciálegyenletei az anyagi egyenleteken alapulnak.

Hooke törvényén alapuló differenciálegyenletek

A szilárdságtan alapproblémája az, hogy a terhelés után nyugalomba jutott szilárd testben milyen feszültségeloszlás alakul ki. A nyugalmat: $\mathbf{v} \equiv 0$ egyenlőség jellemzi, ezt a (IIg) \sim (4.8) egyenletbe helyettesítve:

$$\text{Nyugalomban levő szilárd testre:} \quad 0 = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{F} . \quad (9.1)$$

A rugalmas szilárd test *kis alakváltozására* elfogadva Hooke törvényét, \mathbf{F} helyébe a (8.10) egyenletet kell helyettesíteni. Az *elmozdulásvektor* (lásd (8.3) egyenlet előtt) a helyvektor függvénye $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, és bevezetve a k és \mathbf{w} új változókat:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = k , \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{w} , \quad (9.2)$$

az [59]-ben részletezett átalakítások után ezekre az egyenletekre jutunk:

$$\nabla^2 k = -\frac{\operatorname{div}(\rho \mathbf{g})}{2\mu + \lambda} , \quad \nabla^2 \mathbf{w} = -\frac{\operatorname{rot}(\rho \mathbf{g})}{\mu} , \quad (9.3)$$

ahol λ és μ a *Lamé féle állandók* (lásd (8.10) egyenletnél). *Állandó sűrűségű* közegre, *Földi rendszerben*: $\rho \mathbf{g} =$ állandó, tehát (9.3)-ban a számlálók zérusok:

$$\nabla^2 k = 0 , \quad \nabla^2 \mathbf{w} = 0 . \quad (9.4)$$

Egyszerű *Laplace egyenleteket* nyerünk (lásd (22.1) egyenletnél és 12.6 példában). A megoldásaik *harmonikus függvények* (lásd (12.29) egyenletnél), melyek előnyös tulajdonságait az $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ függvény is örökli. Mivel λ és μ kiesett számításból, k és \mathbf{w} (és az elmozdulásmező) *független* a rugalmas test anyagától, csak a peremfeltételektől függ, amelyek egyértelműen meghatározzák a test belsejében.

A szilárdságtani feladatokat általában *végeselem módszerrel* oldják meg [50], de alkalmazható *peremelem módszer* is [109, 117]. Az $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulásmező peremelemes megoldására például a (15.8) egyenlet is alkalmas.

Összenyomhatatlan folyadék

Vízre és más közel összenyomhatatlan folyadékokra a $\rho =$ konstans feltevés alkalmazható. Ekkor (4.7) egyenletben a differenciálhányados zérus, és a szorzat csak úgy lehet zérus, ha teljesül az:

$$\text{Összenyomhatatlan folyadékok folytonossági egyenlete:} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (9.5)$$

Euler egyenlete sűrűdásmentes folyadékokra

Cauchy I. törvényébe (a **(IIg)** ~ (4.8) egyenletbe) a *sűrűdásmentes* folyadékok $\mathbf{F} = -p \mathbf{I}$ alap-egyenletét helyettesítve a

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div}(-p \mathbf{I}) = -\operatorname{grad} p,^{123} \quad (9.6)$$

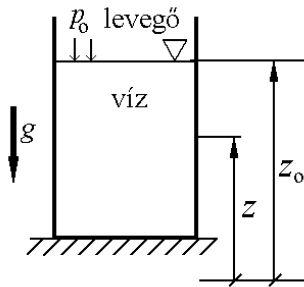
átalakítással ezt kapjuk:

Euler egyenlete sűrűdásmentes áramlásra: $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \operatorname{grad} p$. (9.7)

Sok áramlástani számítás alapul a (9.5) és (9.7) egyenleteken. Ezek egy skalár és egy vektor egyenletet adnak az ismeretlen p skalárra és \mathbf{v} vektorra. Az egyenletek megfelelő kezdeti és peremfeltételek esetén megoldhatók. A kereskedelmi forgalomban is kapható, jól használható "**Euler szolve-
rek**" a (9.5) és (9.7) egyenletek megoldásán alapulnak.

Az Euler egyenlet egyszerűsítése érdekében nézzük a következő két példát.

9.1. példa. Hidrosztatika az Euler egyenlet alapján



9.1. ábra. Álló víz a tartályban

A hidrosztatika a folyadékok nyugalmi állapotával foglalkozik. Minden nyugalomban levő folyadék *sűrűdásmentesnek* tekinthető, ezért érvényes rá Euler egyenlete (9.7), ami $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ miatt ilyen alakot ölt:

$$\mathbf{0} = \rho \mathbf{g} - \operatorname{grad} p,$$

azaz: $\operatorname{grad} p = \rho \mathbf{g}$. Ennek integrálja: $p = C + \rho \mathbf{g} \mathbf{r}$. Olyan koordináta-rendszert választunk, amelyben \mathbf{g} vektor függőlegesen lefelé mutat, és a z tengely függőlegesen fölfelé van irányítva. Tehát: $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Igy:

$$p = C + \rho \mathbf{g} \mathbf{r} = C - \rho g z.$$

A z_0 magasságában a p_0 légnyomás ismert (9.1. ábra): $p_0 = C - \rho g z_0$, amiből:

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \quad (9.8)$$

Például, ha $p_0 = 1,01325$ bar, akkor $(z_0 - z) = 10$ m mélyen ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ és $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ -el) az (abszolút) nyomás:

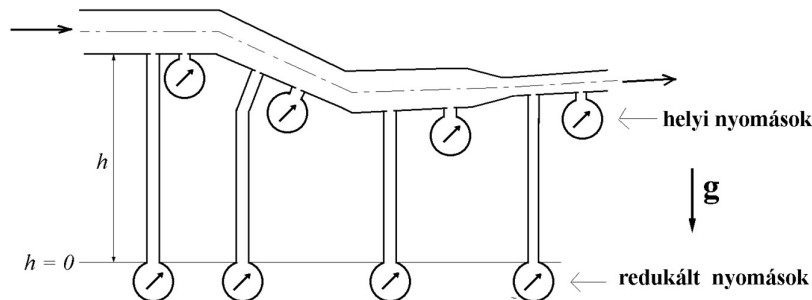
$$p = 1,01325 + 0,98100 = 1,99425 \text{ bar} \sim 2 \text{ bar}.$$

9.2. példa. Redukált nyomás használata

Földi környezetben \mathbf{g} vektor állandó. Ezt a körülményt kihasználva, állandó sűrűségű közeg esetén \mathbf{g} -t kiejthetjük az Euler egyenletből. Bevezetjük a **redukált nyomást**:

$$p_{red} = p + \rho g h, \quad (9.9)$$

ahol h egy vízszintes síktól mért magasság (9.2. ábra). Az eljárás abból áll, hogy a helyi nyomásokat egy vízszintes síkra (a $h = 0$ síkra) *redukáljuk*. A manométervezetékekben a közeg áll, és rajtuk a nyomáskülönbség a (9.8) egyenlettel: $\rho g h$.



9.2. ábra. Redukált nyomások egy csővezeték mentén

¹²³Az átalakítás bizonyítása: Tetszőleges \mathbf{a} állandó vektorral skalárisan szorozva az egyenlet bal oldalát, (20.12) alkalmazásával: $\mathbf{a}(\rho \mathbf{I})\nabla = (\mathbf{a} p)\nabla = p \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} p = \mathbf{a} \operatorname{grad} p$. Mivel az egyenlőség eleje és vége egyenlő, és \mathbf{a} tetszőleges, az \mathbf{a} szorzói is egyenlőek.

Mivel (9.9) alapján: $\text{grad } p_{red} = \text{grad } p - \rho \mathbf{g}$, ezzel Euler egyenlete a következő alakot ölti:

Euler egyenlete a redukált nyomással:
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p_{red} . \quad (9.10)$$

A redukált nyomást sok gyakorlati esetben használjuk. Víz áramlása esetén általában akkor, ha *csak egy szabad felszín* van a rendszerben. A szabad felszíneken ugyanis a nyomás általában rögzített (légkörre nyitott felszínen atmoszférikus, kavitációs üregben a gőznyomás). Több szabad felszín esetén azonban a *helyi nyomások* használata általában egyszerűbb.

Álló vízben a redukált nyomás állandó, minden pontnál ugyanakkora.

Az áramlástanban a redukált nyomás használata általános, sokszor külön nem is említjük, mert természetes, hogy ezzel dolgozunk (ekkor a jelölésben sem különböztetjük meg).

Navier-Stokes differenciálegyenlet

Az *összenyomhatatlan, lineárisan viszkózus* folyadék alapegyenletét a **(IIg)** axiómából ~ (4.8) egyenletből nyerjük. A feszültségtenzor (8.16) szerinti egyenletét helyettesítve (melyben $\rho = \text{állandó}$ miatt $\lambda = 0$), átalakítások után:

Navier-Stokes egyenlet, $\rho = \text{állandó}$:
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} .^{124} \quad (9.11)$$

ahol μ a dinamikai viszkozitás, és

$$\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z) = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) ,$$

azaz a *Laplace operátora* alkalmazva \mathbf{v} -re (lásd (20.26) egyenletet).

Manapság a **Navier-Stokes egyenlet** az áramlástan leggyakrabban használt differenciálegyenlete. Rendelkezik az Euler egyenlet előnyös sajátásaival, de figyelembe veszi a folyadéksúrlódást is. Ennek ára a komplikáltabb program, és a hosszabb futásidő. A megoldása nagyon jó közelítést jelent *kis sebességű lamináris* (réteges) áramlások esetén. A nagyobb sebességű *turbulens* áramlások esetén azonban turbulencia modellekkel egészítik ki, amelyek a valóságot csak durván közelítik (és ezért a turbulens áramlások számításának pontossága nem mindig kielégítő).

A nyomás redukciója (9.2. példa) a Navier-Stokes egyenletre is végrehajtható. A (9.11) egyenletet ρ -val osztva, és az Euler egyenlethez hasonlóan bevezetve a redukált nyomást:

Navier-Stokes egyenlet, $\rho = \text{állandó}$, redukált nyomás:
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{-\text{grad } p_{red}}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} . \quad (9.12)$$

ahol $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ a kinematikai viszkozitás. *Vízre* $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, nagyon kicsi érték, ezért az ezzel szorzott

tag az áramlási tér nagy részén elhanyagolható, és csak ott lényeges, ahol $\nabla^2 \mathbf{v}$ nagy értékű. Ez az áramlásoknak csak olyan tartományaiban jelentős, ahol nagy nyírófeszültségek ébrednek (például szilárd testek felületén kialakuló határrétegekben, vagy a testekről leváló határrétegekben, vagy különböző sebességű áramlások találkozásánál).

¹²⁴Az összenyomható közegek alapegyenlete ($\rho \neq \text{állandó}$, levegő nagyobb nyomáskülönbségek esetén) szintén (8.16)-ból származtatható, ekkor $\lambda > 0$.

A Reynolds-féle átlagolt differenciálegyenlet

A 8. fejezetben a turbulens áramlások *alapesetére* bemutattuk, hogy a newtoni kontinuummechanika axiómái teljesülnek. Ezért szakadási felület nélküli tartományban Cauchy egyenlete, a **(IIg)** axióma ~ (4.8) egyenlet is érvényes a turbulens áramlásra:

Reynolds-féle átlagolt egyenlet turbulens áramlásra:
$$\rho \frac{d \mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \text{div} \mathbf{F}_{\text{turb}} , \quad (9.13)$$

amelyben \mathbf{v} a turbulens (átlagolt) sebesség, és \mathbf{F}_{turb} a turbulens feszültségtenzor, ami a (8.25) egyenlet szerint tartalmazza a sebességek ingadozásából származó tagot is. Az egyenlet a koordinátákban (20.44) alapján

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho g_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho g_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho g_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.14)$$

A turbulens áramlások számítására kifejlesztett nagy áramlástan szoftverek a (9.5) és (9.13) egyenleteket oldják meg [91],[92],[97],[98],[99]. Az alkalmazónak azonban meg kell adni, hogy a turbulenciát milyen módszerrel kívánja figyelembe venni. A (9.13) egyenletet a (9.11) szerinti tagokkal felírva sokszor **RANS** rövidítéssel illetik (Reynolds Averaged Navier-Stokes = Reynolds átlagolt Navier-Stokes).

Nem tartozik az **RANS** módszerek közé, mégis itt emlitem a **DNS** (Direct Numerical Simulation = direkt numerikus szimuláció) módszert, ami az időfüggő Navier-Stokes egyenletet oldja meg (ebben nincs átlagolás). Ez korrekt, de nagy memóriát, és nagyon egyszerű nedvesített határfelületek esetén is nagyon hosszú futásidőt igényel. A megoldással nyert időfüggő sebességet adott helyeknél átlagolva a **DNS** eredményei a **RANS** módszerek ellenőrzésére használhatók [135].

A turbulencia modellezésére használt eljárások között ígéretesek a **LES** (Large Eddy Simulation = nagy örvények szimulációja) módszerek, amelyek úgy gondolják, hogy a turbulencia révén a folyadékban keletkező kisméretű (nagyobb frekvenciájú) örvényeket a folyadék belső súrlódása gyorsan elemesztí, és ezért csak a nagyobb örvényeket kell figyelembe venni.¹²⁵

Gyakran alkalmazzák a **k - ε** nevű egyik első **RANS** modellt. Ez a \mathbf{v}' sebesség-ingadozásvektor négyzetével számolt turbulens kinetikus energia áramlás irányában történő változását közelíti olyan konstansokkal, amelyeket próbálgatással kell megkeresni.

Menter [133] kifejlesztett egy anizotróp, hibrid **k - ω SST** (Shear-Stress Transport = nyíró-feszültség transzport) modellt, ami több áramlási konfigurációban jó eredményt szolgáltat.

Czibere [17,18,134] a turbulens áramlások *Kármán*-féle hasonlósági hipotéziséből kiindulva egy 3-dimenziós **STM** (Stochastic Turbulence Model = sztohasztikus turbulencia modell) módszert dolgozott ki, a sebesség ingadozását véletlenszám generátorral gerjesztve. Ez még sok lehetőséget rejt magába.

Könözy [136] a Reynolds-féle feszültség tenzorra egy új hipotézist javasolt, amely *Boussinesq* alakvátozási elméletét összekapcsolta *Czibere* hasonlósági elméletével. Erre alapozva egy anizotróp zárás **RANS** modellt dolgozott ki a *Menter*-féle **SST** modell és a *Czibere*-féle **STM** modell ötvöztetésével, mindkettő előnyeit megtartva.

Hasznos eredményt a **RANS** módszerek csak tesztelés és kritikai elemzés után szolgáltatnak.

¹²⁵Az eljárást Erdődi István lektor így jellemezte: **LES**-ben a nagy örvények fel vannak bontva, a kicsik pedig modellezve vannak.

Nagyméretű vízgépek tervezésénél a **RANS** módszerek megkerülhetők. Megoldjuk a sűrűdásmentes (Euler) egyenletet az áramlást határoló adott felületek, és a határréteg leválási feltételek (Kutta-Zsukovszkij, 13.5. példa, különösen 13.15. ábra) figyelembevételével. Ezt követően a Reynolds feszültség becslésével (8.2. példa) a tervezési munkapont korrigálható, és a veszteségek becslésével a várható jelleggörbék egy szakasza elég jól számítható (15.2. példa).

Azonban a szivattyú és vízturbina ipar nagyon változatos áramlástani feladatai között esetenként a **RANS** módszerek fontos szerephez jutnak. Például nagy vízgépek kisminta mérésénél gyakran előfordul (költségkímélés, vagy más okból), hogy a kisminta nedvesített felületei geometriailag nem tökéletesen hasonlóak a megvalósítandó nagy gép felületeihez. Ekkor az eltérések áramlástani hatását számítógépes elemzéssel vizsgálják, sűrűdásmentes Euler egyenlet vagy **RANS** modell segítségével.

A speciális differenciálegyenletek összefoglalása

A kontinuummechanikai feladat szilárd testek esetén általában *feszültségmező* meghatározását, folyadékok esetén pedig *sebességeloszlás* számítását igényli. Ha szakadási felületet feltételezünk, és a helye ismert, akkor a szakadási felülettel a kontinuum olyan tartományokra bontható, amelyekben nincs szakadási felület. Ezekben az anyagi egyenletek alapján felírt differenciálegyenletek (Hooke, Euler, Navier-Stokes, Reynolds átlagolt) kedvező esetben megoldhatók, és a megoldáshoz a szakadási feltételek szolgáltatják a peremfeltételeket. Ha a szakadási felület helye kezdetben nem ismert, akkor meg lehet próbálni iterációval megkeresni (5.3. példa.)

10. fejezet. Transzport elmélet

A folyadékáramlások felhasználhatók különböző fizikai paraméterek szállítására. Például a fűtési csővezetékben a meleg víz hőmennyiséget szállít. A sokféle paraméter transzportjának (szállításának) egyenletei hasonlóak, erre fejlesztették ki a *transzport elméletet*.

Legyen ψ egy skalár vagy vektor, különben tetszőleges fizikai mennyiség, ami egy $V(t)$ anyagi térfogaton értelmezve van. Vizsgáljuk először a szakadás nélküli egyszerűbb esetet.

Transzport szakadás nélkül

A $V(t)$ anyagi térfogatban nincs szakadási felület, és rajta ψ is folytonos. A (18.4) és (18.5) egyenlet alapján, bármely rögzített $t = t_1$ időpillanatban:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V_1} \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=t_1} dV + \int_{S_1} \psi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) . \quad (10.1)$$

Ez a **transzport egyenlet**. A $V(t)$ -ben levő anyagi részecskék "szállítják" a ψ mennyiséget, és az útjuk mentén a ψ -t szállító mozgó anyagi térfogat ψ tartalma az egyenlet szerint változik.

Sokszor tömegegységre vonatkoztatott fizikai mennyiségekkel dolgozunk. (Például a mozgási energia tömegegységre vonatkoztatott értéke $\mathbf{v}^2/2$.) Ilyen esetben $\rho\psi$ -t integráljuk $V(t)$ -n. Alkalmazzuk az előbbi egyenletet ψ helyett $\rho\psi$ mennyiségre:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V_1} \left. \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} \right|_{t=t_1} dV + \int_{S_1} \rho\psi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) . \quad (10.2)$$

Vezessük be az $\mathbf{i}_\psi(\mathbf{r}, t)$ és $s_\psi(\mathbf{r}, t)$ új változókat úgy, hogy:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V_1} \rho s_\psi dV - \int_{S_1} \mathbf{i}_\psi \mathbf{dS} . \quad (10.3)$$

Ezt nevezik **általános megmaradási törvénynek** vagy **általános mérleg egyenletnek**.

s_ψ a ψ térfogati **forrás-bősége**, az időegység alatt a tömegegységben *keletkező* ψ .

s_ψ skalár ha ψ skalár, s_ψ vektor, ha ψ vektor.

\mathbf{i}_ψ a ψ **fluxusa** vagy **áramsűrűsége**: időegység alatt a $V(t)$ felületének egységnyi területű darabján *érkező*, az anyagi térfogat ψ tartalmának *növeléséhez* hozzájáruló fizikai mennyiség. \mathbf{i}_ψ vektor, ha ψ skalár, \mathbf{i}_ψ tenzor, ha ψ vektor. (Az integrál előjele azért negatív, mert \mathbf{dS} *kifelé* mutat.)

10.1. példa. A kontinuummechanika axiómái mint transzport egyenletek

Az **(Ia)**, **(IIa)**, **(IIIa)** axiómák megfelelnek a (10.3) egyenletnek a következő paraméterekkel:

$$\textbf{(Ia)} \quad \psi = 1, \quad s_\psi = 0, \quad \mathbf{i}_\psi = 0 .$$

$$\textbf{(IIa)} \quad \psi = \mathbf{v}, \quad s_\psi = \mathbf{g}, \quad \mathbf{i}_\psi = -\mathbf{F} .$$

$$\textbf{(IIIa)} \quad \psi = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad s_\psi = \mathbf{r} \times \mathbf{g}, \quad \mathbf{i}_\psi = -\mathbf{r} \times \mathbf{F} .$$

(Ia) esetén (10.3) bal oldalán $V(t)$ tömegét látjuk. Az egyenlet a tömeg megmaradását fejezi ki. **(Ia)** forrásmentes áramlásokra vonatkozik, ezért s_ψ zérus. Mivel $V(t)$ anyagi térfogat, a felületén nem lép át tömeg, a fluxus zérus.

A **(IIa)** axióma bal oldalán az impulzus deriváltja szerepel. Ez az egyenlet az impulzus megmaradását fejezi ki. Olyan rendszerben, melyben a külső erők zérusok: az impulzus állandó (például a Naprendszer impulzusa állandó). A megszokott alkalmazásoknál a külső erők **(IIa)** jobb oldalán nem zérusok, ekkor az impulzus forrásbősége: \mathbf{g} , és a fluxusa: $-\mathbf{F}$.

A **(IIIa)** axióma az impulzusnyomaték megmaradását fejezi ki. Forrásbősége és fluxusa a közölt érték.

A (10.2) és (10.3) egyenletet összehasonlítva látható, hogy bármely ψ -hez tudunk találni olyan \mathbf{i}_ψ és s_ψ párt, ami (10.3)-at teljesíti. Ez azt jelenti, hogy *tetszőleges fizikai mennyiségre felírható általános megmaradási törvény*.

Adott ψ esetén az általános mérleg egyenletet többféle módon is kielégíthetjük. Mert, ha egyszer már teljesült, és kevesebb keletkezik a térfogatban, akkor a felületen többet bejuttatva a megmaradás újra teljesíthető. Ez a *felületi és térfogati források egyenértékűségének* tétele.

Ha ψ , \mathbf{i}_ψ és s_ψ közül *bármelyik kettőt* ismerjük, akkor (10.3) egyenlet az ismeretlen harmadik meghatározására szolgálhat. Ezt például a következő módon kereshetjük. A ψ -re (10.2) eleve teljesül, (10.3)-at pedig megköveteljük. Mivel a bal oldalak egyformák, a jobb oldalaknak is meg kell egyeznie. A felületi integrálokat Gauss tételével térfogati integrálokká alakítjuk, és az integranduszokat egyenlővé tesszük:

$$\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\psi\mathbf{v}) = \rho s_\psi - \operatorname{div} \mathbf{i}_\psi . \quad (10.4)$$

Ez az *általános megmaradási törvény* (egyik) *differenciális alakja*. Ezzel az ismeretlen harmadik meghatározható.

A teljesség kedvéért a *szakadósos* transzport egyenleteit is felsoroljuk.

Transzport szakadással

A $V(t)$ anyagi térfogatban van egy $S_D(t)$ szakadási felület, amelyen ρ , \mathbf{v} , \mathbf{g} , \mathbf{F} és $\psi(\mathbf{r}, t)$ is ugorhatnak. Ekkor a **szakadásos transzport egyenlet** a (18.8) egyenlet:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=t_1} dV + \int_{S_1} \psi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) - \int_{S_D} [\psi] u_{nD} dS . \quad (10.5)$$

Ezt ψ helyett a $\rho\psi$ változóra alkalmazva:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V_1} \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} \rho dV + \int_{S_1} \rho\psi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) - \int_{S_D} [\rho\psi] u_{nD} dS , \quad (10.6)$$

a szakadásos **általános mérleg egyenlet**:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V_1} \rho s_\psi dV - \int_{S_1} \mathbf{i}_\psi \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_D} f_{\psi D} dS , \quad (10.7)$$

ahol $f_{\psi D}$ a szakadási felületen a forrásbőség. (Ha a szakadási felületen *nem keletkezik* ψ , akkor $f_{\psi D} = 0$.) A két egyenletet egyenlővé téve, az S_D -re zsugorított térfogattal (ahogy az 5. részben alkalmaztuk) csak a felületi integrálok számítanak, $\mathbf{i}_\psi \cdot \mathbf{n} = i_{\psi n}$ jelöléssel:

$$[\rho\psi(v_n - u_{nD}) + i_{\psi n}] - f_{\psi D} = 0 . \quad (10.8)$$

Az egyenletnek kicsit egyszerűbb alakjára jutunk (5.7)-et helyettesítve:

$$i_{\psi n}^+ - i_{\psi n}^- = \dot{m}(\psi^+ - \psi^-) + f_{\psi D} \quad \text{azaz} \quad [i_{\psi n}] = \dot{m}[\psi] + f_{\psi D} . \quad (10.9)$$

Ez az általános megmaradási törvény szakadási feltétele.

A transzportfolyamatokat a vegyiparban és az élelmiszeriparban gyakran alkalmazzák [108].

11. fejezet. Energia

Az energia fogalma és fajtái

Az *energia* fogalmát a fizika több területén is használják. Ezeket céljainknak megfelelően így csoportosítjuk:

- Mechanika: a hőmérséklet fogalmának használata nélkül.
- Termodinamika: mechanikai és hőhatásokkal.
- Általános (klasszikus) fizika: mechanikai, termodinamikai, villamos, mágneses, kémiai, és egyéb hatásokkal.

A *newtoni kontinuummechanika* a hőmérséklet nélküli mechanikához tartozik, de kis mértékben átnyúlik a termodinamika területére is. Ugyanis *Földi rendszerekben* a szilárd testek és a közel összenyomhatatlan folyadékok mozgását (és a vízgépek üzemét) le lehet úgy is írni, hogy a hőmérséklet nem szerepel benne.¹²⁶ De az összenyomható folyadékok (gázok és gőzök) tárgyalása hőmérséklet nélkül nem lehetséges, ezért alább néhány termodinamikai fogalomra is kitérnünk.

A *mechanikai munka* fogalmát – erő megszorozva az irányába tett elmozdulással – korábbi tanulmányokból ismertnek tekintjük.

¹²⁶Ez előnyös az ezekkel foglalkozó szakembereknek.

Az *energia* fogalmát a mechanikában szokták bevezetni, majd általánosítják a többi területre.

A *mechanikában* az energia *hagyományos* definíciója: **az energia munkavégző képesség**. Ha testek egy rendszere mechanikai munkát képes végezni, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer *energiával rendelkezik*. A rendszer a munkát még nem végezte el, de benne van a munkavégzés képessége. Ha elindítjuk a munkavégzést, és a rendszernek nincs energia utánpótlása, akkor a rendszer energiája fokozatosan csökken, amíg végül elfogy. Egy utánpótlás nélküli rendszerből csak a kezdeti energiájának megfelelő munkát lehet kinyerni. Ha a rendszernek van energia utánpótlása (például rendszeresen szénét visznek a hőerőműbe), akkor alkalmas lehet folyamatos energiaszolgáltatásra.

A továbbiakban csak **Földi rendszerekkel** foglalkozunk, amelyekben g állandó. Ezekben a *mechanikai energiák* két csoportját különböztetjük meg: **A)** tárolható energiák és **B)** külső felületi erőkből származó energiák.

A) Tárolható mechanikai energiák:

- *Mozgási energia* (E_m).
- *Helyzeti energia* (E_h).
- *Alakváltozási energia* (E_a) (rugók).

Egy m tömegű v sebességű test *mozgási energiája*:
$$E_m = \frac{mv^2}{2} \quad (11.1)$$

Egy H magasságban levő m tömegű test *helyzeti energiája*:
$$E_h = m g H \quad (11.2)$$

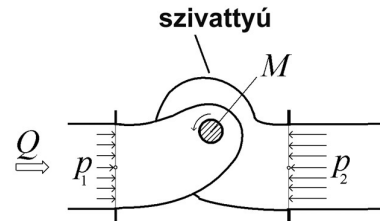
Egy lineáris karakterisztikájú rugót összenyomva, ha a végső ható erő nagysága F , és a végső összenyomódás Δx , akkor a rugóban tárolt *alakváltozási energia*:
$$E_a = \frac{F \Delta x}{2} \quad (11.3)$$

A *tárolható energiák* valamilyen módon a test *belsejével* vannak kapcsolatban. A lendkerék sebességeloszlása mozgási energiát tárol; a rugó feszültségeloszlása alakváltozási energiát. A helyzeti energia a testben tárolt tömeggel van lényegi kapcsolatban; a szivattyús energiatároló erőművek a víz helyzeti energiáját tárolják. A *tárolható energiákat* Környey [96] találóan "helyben ülő" energiáknak nevezi.

B) Külső felületi erőkből származó mechanikai energiák:

- *Áttolási energia* ($E_{\text{áttolási}}$).¹²⁸
- *Tengelyen átadott energia* (E_{tengely}).

Ezek jól szemléltethetők egy szivattyú üzemével. A 11.1. ábrán vízszivattyút¹²⁹ látunk egy csőbe beépítve. A szivattyút tengely hajtja, amelynek szelvénye vonalkázva látható (a motort a rajzról eltávolítottuk). A szivattyú *feladata* az, hogy adott nagyságú Q vízmennyiséget (m^3/s), adott $(p_2 - p_1)$ nyomáskülönbség (Pa) ellenében a szívócsőből *áttoljon* a nyomócsőbe. Mivel $p_2 > p_1$, ez csak energia befektetés révén történhet. Az energia a tengelyen érkezik, ami a vonalkázott szelvényen ható csúsztató feszültségek révén M nyomatékkal forgatja a szivattyú forgórészét.



11.1. ábra. Szivattyún ható külső felületi erők

Egy t időtartam alatt, ω szögsebességgel, a *tengelyen átadott energia*:
$$E_{\text{tengely}} = M \omega t \quad (11.4)$$

És a víztömeg áttolására hasznosított *áttolási energia*:
$$E_{\text{áttolási}} = (p_2 - p_1) Q t \quad (11.5)$$

¹²⁷Az általános képletek (11.10) és (11.11).

¹²⁸Az elnevezés a német szakirodalom "Verschiebeenergie" szavának szolgai fordítása.

¹²⁹Kettősbeömlésű szivattyú "in-line" elrendezéssel (az egyforma szívócsőnk és nyomócsőnk egy egyenesbe esik).

¹³⁰A (11.5) egyenletben felismerhető a dugattyú munkája, a (11.20) egyenlet. A képlet összhangban van az általános (11.30) és (11.32) egyenletekkel is, mert a két oldalon a cső átmérő, sebesség és magasság ugyanaz.

A *külső felületi erőkből származó* energiák csak akkor végeznek munkát, ha van elmozdulás: nyomás irányában eltolás, tengelyenél forgás. Ezeket Környey [96] "úton levő" energiáknak hívja.¹³¹

Energiák a termodinamikában és az általános fizikában

A *termodinamikában* hőenergiáról is beszélnek (amit például fűtésre használnak), és az egyik fontos energia a:

- *Belső energia* ($E_{belső}$),

amit a testek a belsejükben tárolnak, jellemzően a molekulák hőmozgása révén. A gázok tárgyalásánál szükségünk lesz az egyik képletére:

$$\text{az ideális gázok belső energiája:} \quad E_{belső} = m C_v T, \quad (11.6)$$

ahol m a gáz tömege, C_v az állandó térfogattal mért fajhő¹³², és T az abszolút hőmérséklet.

A *termodinamikában* az *alakváltozási energia* és a *kémiai energia* a belső energia része.

Az *általános (klasszikus) fizika* keretében beszélnek villamos, mágneses, kémiai, nukleáris és más energiákról is. Közös tulajdonságaik:

- (i) munka dimenziójúak (egységük: 1Joule = 1Nm = 1Ws)¹³³,
- (ii) egymásba alakíthatók,
- (iii) mechanikai munka előállítására is alkalmasak, és
- (iv) általában egyszerű képletekkel számíthatók.

Ennek megfelelően az *általános elméletben* az energia definíciója módosul: **az energia a rendszer sajátossága** [96], a felsorolt tulajdonságokkal. Az előbb tárgyalt *mechanikai energiák* megfelelnek ennek a definíciónak is.¹³⁴

Energiamegmaradás

$$\text{A tárolható mechanikai összenergia:} \quad E_{össz} = E_h + E_m + E_a, \quad (11.7)$$

ahol E_h a helyzeti, E_m a mozgási és E_a az alakváltozási energia.

Néhány idealizált mechanikai rendszerben a tárolható mechanikai összenergia az idő múlásával nem változik, ezek a *konzervatív* rendszerek. A nem-konzervatív rendszerekben a súrlódás hatására létrejön az összenergiának egy csökkenése, aminek a neve:

- *Disszipáció* (D).¹³⁵

Zárt mechanikai rendszerről akkor beszélünk, ha a rendszer *határoló felületén*:

- (i) nem lép át tömeg, és
- (ii) rajta a külső felületi erők nem végeznek munkát,

és termodinamikai zárt rendszernél még azt is megköveteljük, hogy:

- (iii) a határoló felületén hőátadás sincs.

¹³¹Ez összhangban van az *energetikai szemlélettel* is, ami az emberi társadalom anyag- és energiaellátását *folyamatoknak* tekinti. A folyamatokat a tömegmegmaradás és az energiamegmaradás törvénye uralja, és *folyamatábrákkal* szemléltethetők. A szivattyú folyamatábráján a tengelyen átadott energia a motor felől a szivattyú felé "úton van".

¹³²A levegő állandó térfogattal mért fajhője: $C_v = 718,6 \text{ J/(kgK)}$.

¹³³Használatos a *kilowattóra*: $1\text{kWh} = 1000 \cdot 3600 \text{ J}$, és készleteknél a *tonna olaj egyenérték*: $1 \text{ toe} \sim 42 \text{ GJ} \sim 11630 \text{ kWh}$.

¹³⁴Földi rendszerekben, ahol g állandó, a külső térfogati erőből származó energiát *helyzeti energiának* nevezzük. Nagyobb rendszerekben, ahol a gravitációs tér erő jelentősen *változik* (pl. egész Föld és a Hold kölcsönhatása), a *gravitációs tér potenciális energiája* elnevezés használható.

¹³⁵Mechanikai szempontból *vesztés*. Általános energetikai értelemben nem az, mert növeli a belső energiát (melegít).

A *zárt mechanikai rendszer* (11.7) egyenlet szerinti tárolható összenergiáját egy korábbi (1) és egy későbbi (2) időpillanatban vizsgálva, a *rendszer energiamegmaradás törvénye*:

$$\text{Energiamegmaradás, zárt rendszer: } E_{\text{össz},1} = E_{\text{össz},2} + D, \quad (11.8)$$

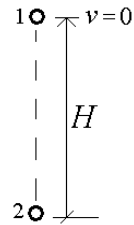
amelyben a súrlódás révén létrejövő disszipáció D mindig pozitív.

11.1. példa. Vákuumban szabadon eső test

A 11.2. ábrán vázolt test H magasságból szabadon esik. A kísérletet vákuumban képzeljük el, ahol nincs légellenállás. Galilei óta tudjuk, hogy az ilyen testek gyorsulása: $a = g$ az esés idején. Az elengedett test t idő alatt ér le, a sebessége: $v = gt$, és a megtett út: $H = gt^2/2$. Egyetlen test is tekinthető mechanikai rendszernek. A vákuumban eső test *zárt rendszer*, mert rá az előbbi két kritérium teljesül. A (11.8) egyenlőség paraméterei az 1 és a 2 állapotban:

$$E_{\text{össz},1} = mgH + 0 = mggt^2/2, \quad E_{\text{össz},2} = 0 + mv^2/2 = m(gt)^2/2, \quad \text{tehát:} \\ E_{\text{össz},1} = E_{\text{össz},2}. \text{ Az energiamegmaradás teljesül. A disszipáció: } D = 0.$$

A vákuumban eső test *konzervatív zárt rendszer*.



11.2. ábra. Szabadon eső test

Nyílt mechanikai rendszerről akkor beszélünk, ha a zárt rendszer előbbi két feltétele közül valamelyik nem teljesül. A nyílt rendszer külső határoló felületén a beáramló tömeg tárolható energiát hozhat (E_{bevitt}), a kiáramló tömeg tárolható energiát elvihet (E_{kivitt}), és a felületi erők is végezhetnek munkát, jelölje ezt L_{kfe} (kfe: külső felületi erő). Ezért *nyílt rendszerre a mechanikai energiamegmaradás törvénye*:

$$\text{Energiamegmaradás, nyílt rendszer: } L_{\text{kfe}} + E_{\text{bevitt}} - E_{\text{kivitt}} = (E_{\text{össz},2} - E_{\text{össz},1}) + D, \quad (11.9)$$

azaz: a külső felületi erők munkája plusz a bevitt és kivitt tárolható energiák különbsége növeli a tárolható összenergiát és fedezi a disszipációt. Ez az egyenlet zárt rendszerre is érvényes (zérus bal oldallal), ezért a (11.9) egyenlet a **mechanikai energiamegmaradás általános törvénye**.

A (11.9) képletben a tárolható összenergiának csak a *változása* szerepel, ezért a komponenseinek is csak a *változása* az érdekes. Bármelyik tárolható energiafajta egy konstans hozzáadva az energetikai szerepe nem változik. Ezt úgy mondják, hogy a tárolható energiák "csak egy konstans erejéig" vannak meghatározva. A számítások könnyítése érdekében elfogadott *megállapodások*:

- A helyzeti energiát egy tetszőlegesen megválasztott de rögzített zérus szinttől számítjuk.
- Nyugvó test mozgási energiája zérus.
- Súrlódásmentes esetben a disszipáció zérus.
- Feszültségmentes szilárd test alakváltozási energiája zérus.
- Összenyomhatatlan folyadék alakváltozási energiája zérus.
- A belső energia zérus szintjét az alkalmazástól függően tetszőlegesen rögzíthetjük.
- Ha egy felületen külső felületi erők hatnak, és a felület anyagi pontjai *állnak* (tehát az erő irányában *nincs* elmozdulás), akkor ott az áttolási és a tengelyen továbbított energia *zérus*.

Ideálisan rugalmas szilárd test

A (11.3) szerinti alakváltozási energiát a rugó feszültségeloszlása tárolja. A dV térfogatban tárolt *alakváltozási energia*, kis alakváltozások¹¹⁶ esetén [50, 59] az \mathbf{F} feszültségtenzor és az \mathbf{A}_t alakváltozási tenzor komponenseiből is számítható (a (8.3) egyenlet szerinti jelölésekkel):

$$\rho \varepsilon_a = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yx} \gamma_{yx} + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy} + \sigma_z \varepsilon_z) , \quad (11.10)$$

ahol ε_a a *tömeg egység alakváltozási energiája*, és az egész testre: $E_a = \int_{V_1} \varepsilon_a \rho dV$. (11.11)

Ideálisan rugalmas test esetén ez az energia független attól, hogy milyen módon nyomtuk össze a rúgót, és kirugózásnál ezt az energiát veszteség (disszipáció) nélkül visszanyerjük.

11.2. példa. Ideálisan rugalmas testben az energia megmaradása

A 2.6. példa rugalmas hasábjának a mozgását vizsgáljuk az energia-megmaradás szempontjából. A teljesen összenyomott állapotban ($t = T$), a példánál levezetett képletekkel:

$$F = \sigma A = \rho c w A , \quad \Delta L = c T , \quad T = \frac{L}{w} , \quad E_a = \frac{F \Delta L}{2} = \frac{\rho w c A c T}{2} = \rho A L \frac{c^2}{2} = m \frac{c^2}{2} . \quad (11.12)$$

A mozgási energia a lapra érkezéskor ($t = 0$) ugyanakkora volt. Az összenyomódás időszakában ($0 \leq t \leq T$) a mozgási energia fokozatosan alakul át alakváltozási energiává, és az alakváltozási energia növekedése mindig ugyanakkora, mint a mozgási energia csökkenése. Az egész idő alatt:

$$E_a + E_m = \text{állandó} . \quad (11.13)$$

Az összenyomódott részen: $\sigma_z = \rho c w$, $\varepsilon_z = \Delta L / L$, és így ellenőrizhető, hogy (11.10) és (11.11) képletek is ugyanerre az eredményre vezetnek.

Az alakváltozási energia sajátságainak összefoglalása

- *Szilárd testek* esetén E_a képlete a (11.11) egyenlőség.
- *Összenyomhatatlan folyadékok* esetén $E_a = 0$, mert $E_a = p \Delta V$ kifejezésben $\Delta V = 0$.
- *Közel összenyomhatatlan folyadékok* (víz, olaj), esetén E_a általában elhanyagolható.
- *Összenyomható folyadékok* (gázok és gőzök) térfogatának változása csak az E_b *belső energia* változásával követhető (ezért ilyen testekre E_a helyett E_b helyettesítendő).

Folyadékok

Valódi folyadékok esetén $E_a = 0$, és a *tárolható mechanikai összenergia* (11.7) alapján:

$$E_{\text{össz}} = \int_{V_1} \left(\frac{v^2}{2} + g z \right) \rho dV , \quad (11.14)$$

ahol V_1 a folyadékot adott időpillanatban magába záró térfogat (akár anyagi, akár rögzített), és z a függőleges koordináta (fölfelé irányított z tengellyel).

Csővezetékben (példaként lásd 11.6. ábrát) a 3D-s áramlást 1D-s áramlással helyettesítjük. Ez egyszerűsíti a számítást, mégis elfogadható közelítést nyújt. A csővezeték egy szakaszában, két referencia pont között (11.6. példa) a *tárolható összenergia* képlete:

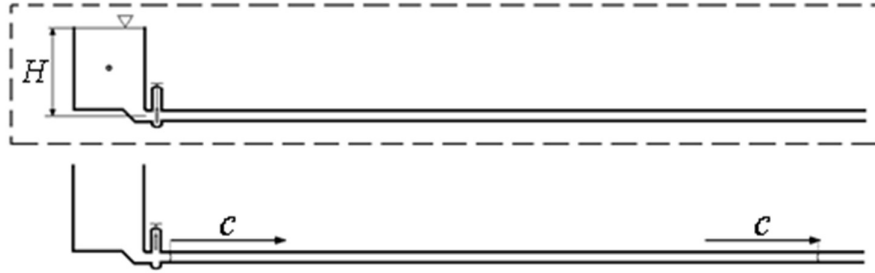
$$E_{\text{össz}} = \int_{V_1} \left(\frac{v^2}{2} + g z \right) \rho dV = \left(\frac{v_1^2}{2} + g z_1 \right) m , \quad (11.15)$$

ahol V_1 a csőszakasz belsejét magába foglaló *rögzített* térfogat, v_1 a csőben érvényes átlagsebesség (a cső középvonalánál képzeljük el), z_1 a cső középvonalának átlagos magassági koordinátája (a helyzeti energia zérus szintje fölött), és m a csőszakaszban tartózkodó tömeg.

A következő két példában egy *zárt* és egy *nyílt* rendszert hasonlítunk össze. Alapvető feltételek: a csővezetékben áramló víz *állandó sűrűségű, összenyomhatatlan, és súrlódásmentes*.

11.3. példa. Leürülő tartály (zárt rendszer)

A 11.3. ábrán vázolt tartály vízzel van tele, a csőben levegő van. Kinyitjuk a tolózárát, a víz a csőbe áramlik. Az alsó ábrán már a teljes víztömeg a csőben halad. A víz összenyomhatatlan, ezért az egész tömeg ugyanazzal a sebességgel mozog. Kérdés, mekkora a sebessége?



11.3. ábra. Tartályban levő víz egy csőbe ürül, súrlódásmentes áramlással

Az egész rendszert egy szaggatott ellenőrző felülettel vesszük körül. Az ellenőrző felületen nem lép át tömeg. A határoló felület nem mozog, rajta a légköri nyomás nem végez munkát, ez tehát **zárt rendszer**. A rendszer kezdeti és végső állapotára alkalmazzuk az energia megmaradás törvényét. A helyzeti energiát a cső középvonalától mérjük. A folyadék összenyomhatatlan: $E_a = 0$, és súrlódásmentes: $D = 0$.

Az energia megmaradás (11.8) egyenlete: $E_{h1} + E_{m1} = E_{h2} + E_{m2}$.

Az m tömegű víz a kezdeti (1) időpillanatban nyugalomban van, és a mozgási energiája: $E_{m1} = 0$. A helyzeti energiája a tömegközéppontjának a szintjével: $E_{h1} = mg \frac{H}{2}$.

A végső (2) időpillanatban a csőben levő víz helyzeti energiája: $E_{h2} = 0$, de van mozgási energiája: $E_{m2} = m \frac{c^2}{2}$,

így ezekből az egyenletekből: $c^2 = gH$. (11.16)

A példában a *külső térfogati erő* (a nehézségi erő) munkája hozta létre a mozgási energiát. Ezt az erre a célra bevezetett *helyzeti energia* változásával vettük figyelembe.

11.4. példa. Tartály utántöltéssel (nyílt rendszer)

Az előző példa szerinti tartályból a víz a hosszú csőbe áramlik, de most folyamatos utántöltés biztosítja, hogy a tartályban a vízszint változatlan maradjon (11.4. ábra). A rendszert most is körbe vesszük egy ellenőrző felülettel, amin a nyomás légköri. A töltő csövön beáramló víz áthalad az ellenőrző felületen, és a hosszú csőből kilépő víz is, ez tehát **nyílt rendszer**. A rendszerben az áramlás stacionárius.¹³⁶ A csőben a sebességet a Bernoulli-egyenlettel állapítjuk meg (lásd a 12. fejezetben), amit az 1. és a 2. pont között írunk fel. Az 1 pontnál: $p_1 = p_0$ légköri, és $c_1 = 0$. A hosszú cső végén is légköri nyomást találunk, és mivel az áramlás súrlódásmentes, a 2-es pontnál is: $p_2 = p_0$. A referencia szint a cső középvonala: $z_1 = H$, $z_2 = 0$.



11.4. ábra. Az előző példa szerinti tartály, utántöltéssel

¹³⁶Kis szabályozó biztosítja az állandó vízszintet a tartályban (csökkenés esetén több vizet enged be, növekedés esetén kevesebbet).

A Bernoulli-egyenlet:

$$p_1 + \rho \frac{c_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2} + \rho g z_2 \quad (11.17)$$

esetünkben:

$$p_0 + 0 + \rho g H = p_0 + \rho \frac{c_2^2}{2} + 0$$

amiből:

$$c_2^2 = 2gH \quad . \quad (11.18)$$

Nagyobb sebességet kaptunk, mint az előbb: a két rendszer *lényegesen* különbözik. (Az eredményt megkaphattuk volna a mechanikai energiamegmaradás (11.9) egyenlete alapján is, de ezt előbb erre alkalmas alakra kell hozni.)

A mechanikai energiatétel

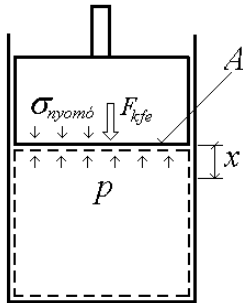
A mechanikai energiatétel levezethető a newtoni kontinuummechanika axiómáiból [16],[73]. Mégis, szinte különálló egyenletként kezeljük, mert sok áramlástani feladatnál elegáns, gyors eredményre vezet.

A mechanikai energiatétel általános alakja a (11.9) egyenlet. Ebből itt először levezetjük a *csővezeték*ekben áramló, *állandó sűrűségű* folyadékokra érvényes alakját. Annak érdekében, hogy konkrét elképzelésünk legyen, gondoljunk a 11.4. ábra szerinti nyílt rendszerre. Számítsuk ki a rendszerbe bevitt és kivitt energiát. Az 1 pontot vigyük a beömlő cső azon szelvényéhez, ahol belép az ellenőrző felületbe, a 2 pontot pedig a kiömlő szelvényhez. A beömlő szelvényenél a t_1 kezdeti és a t_2 végső időpont között belépő folyadéktömeg legyen m_{be} , ami az időegység alatt belépő Q (m^3/s) vízmennyiségből számítható: $m_{be} = \rho Q(t_2 - t_1)$. Ennek térfogata: $V_{be} = m_{be}/\rho$. A kilépő folyadéktömeg m_{ki} , a térfogata $V_{ki} = m_{ki}/\rho$. (A stacionárius áramlás és a tömegmegmaradás miatt: $m_{ki} = m_{be}$, de ezt itt nem használjuk ki.) A folyadéktömegek által bevitt és kivitt tárolható mechanikai összenergia (11.15) alapján:

$$E_{bevitt} = \left(\frac{c_1^2}{2} + g z_1 \right) m_{be} \quad , \quad E_{kivitt} = \left(\frac{c_2^2}{2} + g z_2 \right) m_{ki} \quad . \quad (11.19)$$

A külső felületi erők L_{kfe} munkáját először példával szemléltetjük.

11.5. példa. Dugattyú munkája (külső felületi erő munkája)



11.5. ábra. Dugattyú

Hengerben mozgó dugattyúval a műszaki élet sok területén találkozunk (emelő, szerszámok, belsőégésű motorok stb.). A 11.5. ábrán a szaggatott vonallal rajzolt ellenőrző felületen belül víz, olaj vagy levegő van. Először a dugattyú A területű részén a folyadéktömegre ható F_{kfe} külső felületi erő nagyságát keressük. A hengerben p nyomás uralkodik. Az acél-víz szakadási felületen tömeg nem lép át, ezért a szakadási felületek első tétele értelmében rajta a nyomás folytonos: $\sigma_{nyomó} = p$ (és mivel a folyadékban nem ébred τ feszültség, az acélban sem ébredhet). Ezért: $F_{kfe} = A\sigma_{nyomó} = Ap$. Ha az erő hatására a dugattyú elmozdulása x , akkor:

a külső felületi erő munkája: $L_{kfe} = F_{kfe}x = pAx = pV$, (11.20)

mert $Ax = V$ a dugattyú A felületével áthatolt térfogat.

A mechanikai energiatétel levezetésének folytatása: A beömlő cső A_1 területén a p_1 nyomásból származó külső felületi erő munkája az előbbi példa alapján $p_1 V_{be}$ (beömlésnél pozitív). A kiömlő csőnél hasonlóan $p_2 V_{ki}$ (kiömlésnél negatív). Tehát a 11.4. ábra rendszerében helyet foglaló folyadéktömegre ható külső erők munkája:

$$L_{kfe} = p_1 V_{be} - p_2 V_{ki} = \frac{p_1}{\rho} m_{be} - \frac{p_2}{\rho} m_{ki} \quad . \quad (11.21)$$

A (11.9) alapegyenletbe (11.21), (11.19) és (11.15) egyenlőségek helyettesítésével ezt nyerjük:

A mechanikai energiátétel összenyomhatatlan folyadék instacionárius áramlására:

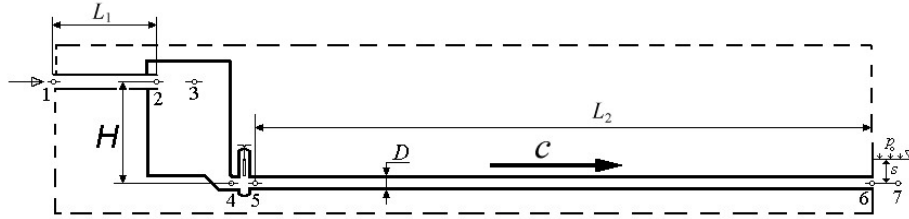
$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g z_1 \right) m_{be} - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \right) m_{ki} = \left[\left(\frac{c^2}{2} + g z \right) m \right]_{t_1}^{t_2} + D \quad (11.22)$$

A *szögletes zárójel* a rendszerben levő egész víztömeg tárolható összenergiájának a *változását* képviseli amíg az idő t_1 -ről t_2 -ig telik. m az egész víztömeg, c egy sebesség (az m tömeget részekre osztva, a helyi sebességek négyzetének tömeggel súlyozott átlagértékéből vont négyzetgyök, azaz $mc^2/2$ a teljes mozgási energiát helyesen képviseli), és z a tömegközéppontjának a magassága (ami így a teljes helyzeti energiát fejezi ki). *Stacionárius* áramlás esetén a szögletes zárójel értéke zérus (a tárolható összenergia a t_2 időpillanatban ugyanakkora, mint a t_1 időpillanatban), ezért:

A mechanikai energiátétel összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g z_1 \right) m_{be} - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \right) m_{ki} = D \quad (11.23)$$

Az egyenletben egyelőre ismeretlen disszipáció D értékét kísérletek alapján ismert (vagy jól becsülhető) tényezőkkel szokták számítani (11.6. példa).

11.6. példa. Csővezeték disszipációja

11.6. ábra. Csővezeték áramlási veszteségének számítása.

Vízvezetékek, szivattyútelepek, vízerőművek veszteség számításában az áramlási veszteséget először *vízoszlop méterben* szoktuk számítani (mert ez közvetlen kapcsolatban van a szintekkel). A 11.6. ábrán vázolt berendezés veszteségeit keressük. A csövek belső átmérője: $D = 0,5$ m, az átáramló vízmennyiség (térfogat-áram): $Q = 1$ m³/s, az egyenes csövek hossza: $L_1 = 5$ m, $L_2 = 50$ m. A magassági koordináta zérus szintje az alsó cső középvonala, a bejelölt pontok szintje: $z_1 = z_2 = z_3 = H$, $z_4 = z_5 = z_6 = 0$, $H = 3$ m. Az 1. pontban a p_1 nyomás egyelőre ismeretlen. A 6. és 7. pontban a nyomás ismert $p_6 = p_7 = p_o + \rho g s$, ahol p_o az ismert légköri nyomás. A p_1 értékét majd úgy határozzuk meg, hogy a $p_1 - p_7$ nyomáskülönbség elegendő legyen az adott Q vízmennyiség átkényszerítéséhez. A csövek szelvényterülete: $A = D^2\pi/4 = 0,1963$ m², a csövekben a sebesség: $c = Q/A = 5,09$ m/s (átlagsebesség a szelvényekben), a sebességmagasság: $c^2/2g = 1,32$ m ($g = 9,81$ m/s²). A Reynolds-szám: $Re = cD/\nu = 2,5 \cdot 10^6$, ahol ν a víz kinematikai viszkozitása (ν függ a víz hőmérsékletétől, de a számítás közelítő voltára tekintettel a $t = 20^\circ$ C-nál érvényes $\nu = 10^{-6}$ m²/s értéket használjuk). Ilyen nagy Reynolds számnál a csövekben az áramlás turbulens (lásd 13.2. példát), és az áramlási veszteség a hidraulikai táblázatok [53], [32], [81] képletei szerint, a bejelölt pontok között:

$$h'_{12} = \lambda \frac{L_1}{D} \frac{c^2}{2g}, \quad h'_{23} = \zeta_{ki} \frac{c^2}{2g}, \quad h'_{34} = \zeta_{be} \frac{c^2}{2g}, \quad h'_{45} = \zeta_{tolózár} \frac{c^2}{2g}, \quad h'_{56} = \lambda \frac{L_2}{D} \frac{c^2}{2g}, \quad h'_{67} = \zeta_{ki} \frac{c^2}{2g}, \quad (11.24)$$

ahol λ az egyenes csövek *csőszúrlódási tényezője*, és ζ -k a csővezeteki elemek *veszteségtényezői*. A csőszúrlódási tényező meghatározható Moody diagramja (13.4. ábra), vagy a Colebrook-White képlet (a (13.7) egyenlet) alapján (amelyek az adott Reynolds számnál hidraulikailag sima felületű csőre a $\lambda = 0,013$ értéket adják). Az adott átmérőjű csövek felületi érdessége azonban a gyártás technológiájától függ, az évek múlásával is változik, és az értékét sokszor nem is ismerjük. Ezért ebben a számításban Pattantyús [53] általános használatra javasolt: $\lambda = 0,02$ értéket használjuk. Ezzel: $\lambda L_1/D = 0,2$ és $\lambda L_2/D = 2$. Az áramlási út 2-3 szakaszán a sebesség a csőbeli értékéről zérusra csökken. Ez azt jelenti, hogy a csőben meglévő $m_{be}c^2/2$ mozgási energia elvész. Ezt az áramlás turbulenciája a tartályban (gomolygás, örvények) felemészti (a termikus szemlélet szerint hőmennyiséggé alakul). A teljes mozgási energia elvesztése a $\zeta_{ki} = 1$ értéknek felel meg. A tartályban olyan kicsi a sebesség, hogy

veszteségmentesnek tekintjük. A 3-4 szakaszon a hosszú csőbe való beömlés (és fordulás) veszteségét vesszük figyelembe: $\zeta_{be} = 0,1$ értékkel. A nyitott tolózár ugyan akadálymentes átáramlást biztosít, de a kapcsolódó terekben a víz örvénylik, és ez is elemészt egy kis mozgási energiát: $\zeta_{tolózár} = 0,05$. A hosszú csőből kilépő mozgási energia is elvész, tehát itt is kilépési veszteség keletkezik: $\zeta_{ki} = 1$.

$$\text{Az összveszteség: } h'_{17} = h'_{12} + h'_{23} + h'_{34} + h'_{45} + h'_{56} = (0,2 + 1 + 0,1 + 0,05 + 2 + 1) c^2/2g = 5,74 \text{ m.} \quad (11.25)$$

Tehát a berendezés áramlási vesztesége vízoszlop méterben: $h'_{17} = 5,74 \text{ m}$. A nyomásveszteség: $p' = \rho g h'_{17} = 5,74 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,574 \text{ bar}$, és az energiában, például $(t_2 - t_1) = 2 \text{ s}$ idő alatt beáramló $m_{be} = \rho Q(t_2 - t_1)$ tömeg áramlási vesztesége (disszipációja): $D = (p'/\rho)m_{be} = p'Q(t_2 - t_1) = 11,48 \cdot 10^4 \text{ J} = \underline{114,8 \text{ kJ}}$. Ezzel megbecsültük a (11.22) egyenletben szereplő D értékét.

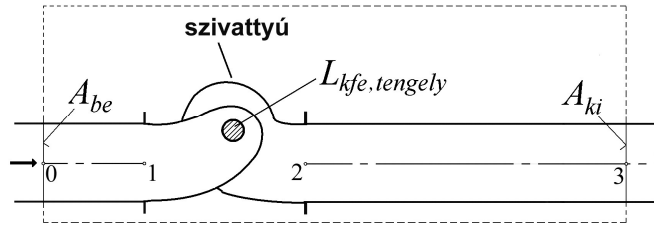
Most p_1 értékét számítjuk. A $p_7 = p_0 + \rho g s$ értéke ismert. Felírjuk a veszteséges Bernoulli-egyenletet (lásd a 12. fejezetben), az 1-7 útra:

$$p_1 + \rho g H + c_1^2/2g = p_7 + 0 + 0 + \rho g h'_{17} \quad , \quad (11.26)$$

amiből $p_1 - p_7 = 1,42 \cdot 10^4 \text{ Pa} \approx 1,42 \text{ m}$ vízoszlop. Ha az 1-es pontnál ennél nagyobb nyomás uralkodik, akkor több víz fog átfolyani a rendszeren, mint az adott Q , és ha a nyomás kisebb, akkor kevesebb. (Mivel h'_{17} értékét becslésekkel határoztuk meg, ha garanciát kell vállalni a Q átbocsátására, akkor célszerű biztonsági tartalékot rászámítani p_1 -re.)

A mechanikai energiaegyenlet szivattyút is tartalmazó csővezetékre

A 11.7. ábrán vízszintes tengelyű szivattyú látható egy csővezetékbe beépítve. A szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületbe foglalt rendszer energiaviszonyait vizsgáljuk. A szivattyút villamos motor hajtja, aminek a tengelye a sraffozott szelvénynél halad át az ellenőrző felületnek az ábra síkjával párhuzamos oldalán.



11.7. ábra. Szivattyú energia bevitel

Az ellenőrző felületen az A_{be} szelvényen van energia bevitel, és az A_{ki} szelvényen van kivitel. A külső felületi erők munkája *egyrészt* az A_{be} és A_{ki} felületeken a nyomásból származik, *másrészt* a tengely szelvényén a nyírófeszültségből. A *tengelyen érkező külső felületi erő munkája* az $M_{tengely}$ nyomatékkal kifejezve:

$$L_{kfe,tengely} = M_{tengely} \omega(t_2 - t_1) \quad , \quad (11.27)$$

ahol ω a tengely szögsebessége, és $(t_2 - t_1)$ az időpontok között eltelt időtartam. Így a (11.9) alap-egyenlet, kis átrendezéssel:

$$L_{kfe,tengely} = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g z_2 \right) m_{ki} - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g z_1 \right) m_{be} + \left[\left(\frac{c^2}{2} + g z \right) m \right]_{t_1}^{t_2} + D \quad . \quad (11.28)$$

Ez a mechanikai energiaegyenlet szivattyús csővezeték instacionárius üzemére.

A szögletes zárójelnek csak a szivattyú indulásakor, leállásakor, vagy üzemállapotváltáskor van szerepe. A szivattyú sokkal érdekesebb hosszú egyenletes üzemé idején az értéke zérus. Az egyenletes üzem esetén az energiatartalmak helyett szívesebben számolunk a gép *teljesítményével*, ami az időegység alatti energiaváltozás.

$$\text{A tengelyteljesítmény:} \quad P_{tengely} = L_{kfe,tengely}/(t_2 - t_1) = M_{tengely} \cdot \omega, \quad m_{be} = m_{ki} = \rho Q(t_2 - t_1) \quad ,$$

$$\text{A disszipáció:} \quad D = \rho g h'_{03} Q(t_2 - t_1), \quad \text{ahol} \quad h'_{03} = h'_{01} + h'_{12} + h'_{23} \quad ,$$

azaz tartalmazza a 0-1 és 2-3 csőszakaszok hidraulikai veszteségét és a h'_{12} tagot, ami vízoszlop méterben kifejezve a szivattyú összes veszteségét (hidraulikai, volumetrikus, mechanikai) képviseli. A (11.28) egyenletet osztva $(t_2 - t_1)$ -el nyerjük a teljesítményeket:

A szivattyús csővezeték stacionárius üzemének energetikai alapegyenlete:

$$P_{tengely} = M_{tengely} \omega = \left[\left(\frac{p_3}{\rho g} + \frac{c_3^2}{2g} + z_3 \right) - \left(\frac{p_0}{\rho g} + \frac{c_0^2}{2g} + z_0 \right) + h'_{03} \right] \rho g Q . \quad (11.29)$$

Ezt az egyenletet sokféle módon használjuk. A szivattyú *teljesítménymérésénél* a 0 és 3 jelű pontokat a szivattyútól kicsit távolabb választjuk (11.7. ábra), és így a p_3 és p_0 nyomások mérésére kedvező, szabványos lehetőséget nyújtunk. Ha egy *egész szivattyútelep* energiaviszonyait értékeljük, akkor a 0 és 3 pontokat a szivattyútelep belépéséhez és kilépéséhez helyezzük, ekkor h'_{01} és h'_{23} a szivattyúk előtti és utáni vízút *összes* hidraulikai veszteségét képviselik. Ha *egy szivattyú* teljesítőképességét vizsgáljuk a szivattyúra adott garanciák teljesülésének megállapítása céljából¹³⁷, akkor az 1 és a 2 jelű pontoknál kiszámítjuk a p , c , z paramétereket a h'_{01} és h'_{23} szabvány szerint becsült értékével, és így meghatározzuk a

manometrikus szállítomagasságot:
$$H_{man} = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} + z_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} + z_1 \right) , \quad (11.30)$$

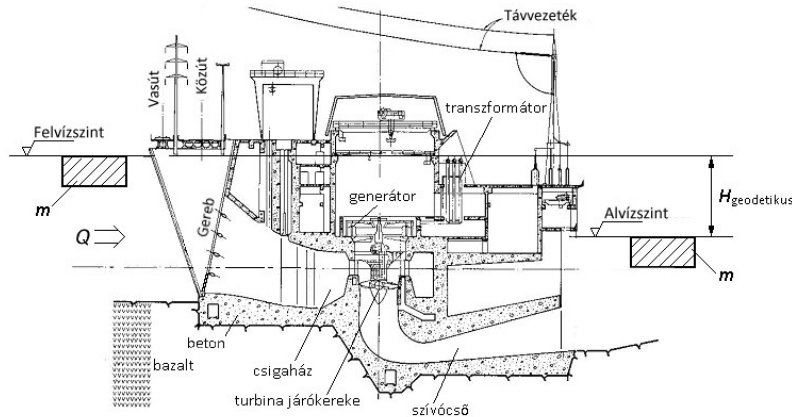
amivel a szivattyú energetikai paraméterei számíthatók:

A szivattyúba *bevezetett* teljesítmény:
$$P_{tengely} = M_{tengely} \omega = (H_{man} + h'_{12}) \rho g Q . \quad (11.31)$$

A szivattyú *hasznos* teljesítménye:
$$P_{hasznos} = H_{man} \rho g Q . \quad (11.32)$$

A szivattyú *összes vesztesége*:
$$P_{veszteség} = h'_{12} \rho g Q , \quad (11.33)$$

és a szivattyú *hatásfoka*:
$$\eta_{szivattyú} = P_{hasznos} / P_{tengely} . \quad (11.34)$$

11.7. példa. Vízörőmű hatásfoka

11.8. ábra. Kis esésű vízörőmű fő metszete Kaplan rendszerű vízturbinával

Egy vízörőmű egyik gépegységének (vízturbina-generátor gépcsoportjának) fő metszete a 11.8 ábra¹³⁸. A víz a felvív csatornából az uszadékot feltartóztató gereben keresztül a csigaházba áramlik, ahonnan jelentős forgással érkezik a járókerékre, ami a generátort hajtja. A járókerékből a víz a szívócsőbe, és onnan az alvív csatornába jut. Az egyenletesen üzemelő gépegység hatásfokát kívánjuk meghatározni. Ehhez a következő üzemi paramétereket kell ismerni:¹³⁹

- a *geodetikus esés* $H_{geodetikus}$ [m], ami a felvív és az alvív szintkülönbsége (11.8. ábra),
- a turbinán átfolyó *vízmenyiség* Q [m³/s], és
- a generátorhoz csatlakozó transzformátor kapcsain szolgáltatott *villamos teljesítmény* $P_{villamos}$ [kW].

¹³⁷ A szivattyú adott üzemállapotában: a Q vízmennyiség (térfogatáram) és az n fordulatszám adott.

¹³⁸ A Tiszaöki Vízörőműben 3 ilyen gépegység működik.

¹³⁹ Vízörőművek tervezésénél ezeket számítják, *kulcsrakész* erőművek átadásánál ezeket mérik.

A felvív oldalon kiszemelünk egy m tömegű víztérfogatot (11.8. ábrán baloldalt). Az erőművön áthaladva ez az alvívbe kerül. Az energiájának változását legegyszerűbben úgy képzelhetjük el, hogy az alvívben ugyanolyan térfogatot foglal el (11.8. ábrán jobboldalt). Ekkor a helyzeti energiájának csökkenése:

$$E_{\text{helyzeti}} = mgH_{\text{geodetikus}} . \quad (11.35)$$

Az m tömeg a felvív oldalon v_1 , az alvív oldalon v_2 sebességgel mozog, és a mozgási energiájának változása:

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} . \quad (11.36)$$

A turbinán áthaladó m tömeg teljes energia változása:

$$E_{\text{teljes}} = E_{\text{helyzeti}} + E_{\text{mozgási}} = mgH_{\text{geodetikus}} + \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} . \quad (11.37)$$

Az egyenletesen üzemelő gépen az m tömeg olyan t idő alatt halad át, melyre:

$$m = \rho Q t , \quad (11.38)$$

ahol Q az időegység alatt átáramló vízmennyiség (térfogatáram), és ρ a víz sűrűsége (kg/m^3). Az energiamennyiséget a t idővel osztva a gépbe *belépő* (vízoldali) teljesítményt kapjuk:

$$P_{\text{belépő}} = \frac{E_{\text{teljes}}}{t} = \rho g Q \left(H_{\text{geodetikus}} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) \cong \rho g Q H_{\text{geodetikus}} . \quad (11.39)$$

A sebességekkel számított tagok különbsége a legtöbb erőmű esetén a geodetikus eséshez mérten nagyon kicsi, ezért elhanyagolják¹⁴⁰. Ha Q -t m^3/s -ban és H -t m -ben helyettesítjük, akkor a teljesítményt Watt-ban kapjuk.¹⁴¹ A vízerőmű egyik gépegységének hatásfoka¹⁴²:

$$\eta_{\text{gépegység}} = \frac{P_{\text{villamos}}}{P_{\text{belépő}}} . \quad (11.40)$$

A termodinamika első főtétele

A *termodinamikán* belül az első főtétel axióma. Alapvetően azt mondja ki, hogy a *hőmennyiség* és a *mechanikai munka* egyenértékű. A *mechanikán* belül akkor alkalmazzuk, ha a vizsgált rendszernek vannak termodinamikai vonatkozásai, például a 11.8. példában.

11.8. példa. Szivattyú üzeme zárt tolózárral

Ha egy nagyteljesítményű szivattyút zárt nyomóoldali tolózárral járattunk, akkor a vízszállítása $Q = 0$, és a víz belső súrlódásából származó disszipáció a gépben forgatott vizet melegíti. Hosszú ideig így üzemelve a hőmérséklet elérheti a víz forráspontját is, aminek több kellemetlen következménye lehet. Ezért az üzemeltetőnek ismerni kell egy időtartamot, aminél hosszabb ideig *nem szabad* a szivattyút zárt tolózárral üzemeltetni! Ilyen üzem idején a motor felvett teljesítménye (ami a táblaműszerekkel mérhető) fedezi a villamos motor (számítható) veszteségeit és a szivattyúba betáplált teljesítményt, ami a vizet (és az acél alkatrészeket) melegíti. A víz fajhőjével, $C_v = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kgK})$ számítható az időegység alatti hőmérséklet emelkedés (elhanyagolva a hővezetéssel és hőszugárással távozó hőmennyiséget), és ebből meghatározható a szivattyú ilyen üzemének megengedhető időtartama.

Megjegyzés: Szárnylapátos szivattyúkat szilárdsági okból sem szabad zárt tolózárral üzemeltetni, mert a modern, vékony, jó hatásfokú járókeréklapátok eltörhetnek. Ezért a szivattyút gyártó cégek megengedett üzemállapot-tartományát mindig be kell tartani.

¹⁴⁰A vízturbinák átvételi méréseinél azonban ez az elhanyagolás nem engedhető meg [84], [85].

¹⁴¹Kevésbé igényes számításban $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ és $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ értéket használjuk.

¹⁴²Az így számított hatásfok a gépegységhez tartozó összes veszteséget figyelembe veszi (gereb, belépés a csigaháznál, vízturbina, kilépés a szívócsőnél, generátor, transzformátor). Ha a vízerőműben a gépegységek egyformák, akkor az egész vízerőmű hatásfoka ugyanannyi, mint egy gép hatásfoka.

¹⁴³Kaplan turbinák *legjobb hatásfokú* üzemállapotában: $\eta_{\text{gépegység}} \sim 89\% - 95\%$, a kis méretű gépekre a kisebb, a nagy gépekre a nagyobb értékek érvényesek (a 2010-es években).

Tekintsünk egy (akár álló, akár mozgó) *térfogatot*, ami szilárd testeket és folyadékot is tartalmazhat. Az ebben foglalt tömegre a termodinamika *első főtételének* egyik megszokott alakja:

$$\text{Első főtétel:} \quad [E_h + E_m + E_b]_{t_1}^{t_2} = Q_{\text{külső}} + L_{\text{kfe}} \quad (11.41)$$

ahol E_h a helyzeti energia, E_m a mozgási energia és E_b a **belső energia**. A szögletes zárójelben a térfogatban tárolható termodinamikai összenergia szerepel, ami növelhető a térfogatba kívülről bevezetett $Q_{\text{külső}}$ hőmennyiséggel és a külső felületi erők L_{kfe} munkájával (átolási munka és tengelyen továbbított munka). Az egyenletet kicsiny $t_2 - t_1 = dt$ időre alkalmazva és dt -vel osztva, teljesítmény dimenzióban a következőt nyerjük:

$$\frac{d}{dt}(E_h + E_m + E_b) = \frac{dQ_{\text{külső}}}{dt} + \frac{dL_{\text{kfe}}}{dt} \quad (11.42)$$

$$A \ Q_{\text{külső}} \text{ hőmennyiségre (a transzport elmélet szellemében):} \quad \frac{dQ_{\text{külső}}}{dt} = \int_{V_1} \rho q \, dV - \int_{S_1} \mathbf{h}_q \, d\mathbf{S} \quad (11.43)$$

ahol q a tömegegységbe időegység alatt kívülről bevezetett hőmennyiség (például egy mikrohullámú sütőben), és \mathbf{h}_q a V_1 térfogat S_1 felületén beáramló hőteljesítmény (például hővezetéssel). A mínusz előjel azért szerepel, mert a térfogatba *belépő* hőmennyiséget tekintjük pozitívnak, és $d\mathbf{S}$ *kifelé* van irányítva. A külső felületi erők teljesítménye (az erő és a sebesség szorzatával):

$$\frac{dL_{\text{kfe}}}{dt} = \int_{S_1} \mathbf{v} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad (11.44)$$

Így (11.42) egyenlet a következő alakot ölti:

$$\text{(IVa)} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \varepsilon_b \right) \rho \, dV \Big|_{t=t_1} = \int_{V_1} \rho q \, dV - \int_{S_1} \mathbf{h}_q \, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{v} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad (11.45)$$

ahol ε_b a *tömegegység* *belső energia* tartalma.

Ez a termodinamika első főtételének egyik kontinuummechanikai alakja¹⁴⁴. A szakadási feltétele:

$$\text{(IVh)} \quad \left[\dot{m} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \varepsilon_b \right) + \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{n} - \mathbf{h}_q \mathbf{n} \right] = 0 \quad (11.46)$$

a [] szögletes zárójelnek a szakadási feltételeknél bevezetett értelmezésével.

Visszatérve a mechanika területére, feltesszük, hogy *nincs külső hőbevezetés*:

$$\mathbf{h}_q = \mathbf{0}, \quad q = 0 \quad (11.47)$$

Ekkor (IVa) egyszerűbb:

$$\text{(IVa) hőbevezetés nélkül:} \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \varepsilon_b \right) \rho \, dV \Big|_{t=t_1} = \int_{S_1} \mathbf{v} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad (11.48)$$

azaz: a külső felületi erők teljesítménye növeli az összenergiát. A szakadási feltétele:

$$\text{(IVh) hőbevezetés nélkül:} \quad [\mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{n}] + \dot{m} \left[\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \varepsilon_b \right) \right] = 0 \quad (11.49)$$

Ideálisan rugalmas testekben disszipáció nincs: $D = 0$ (acél anyagú testekben a disszipáció kicsi, ezért így közelíthető). Ha külső hő bevezetés sincs, a *belső energia* csak az alakváltozási energiát

¹⁴⁴A [3]-ban (241.1) egyenlet, amit axiómának tekintünk. Formailag hasonlít az (Ia), (IIa) és (IIIa) axiómákhoz, ezért a (IVa) névvel illetük. A szakadási feltétele [3]-ban a (241.7) egyenlet.

tartalmazza (ekkor (11.48) és (11.49)-ben ε_b helyett ε_a írható.) *Összenyomhatatlan folyadékban*, ha nincs hőbevezetés, akkor $\varepsilon_b = 0$. Azonban *összenyomható folyadékban* (levegőben) a kialakuló lökeshullámok esetén a (11.49) egyenlet új független információt hordoz, amit a lökeshullámok számításánál figyelembe is vesznek [16], lásd 11.9. példában.

11.9. példa. Levegőben haladó lökeshullám

Csőben áramló levegőben egy lökeshullám alakult ki. A lökeshullám frontját 11.9. ábrán szaggatott vonal jelzi. Merőleges lökeshullámról van szó, mert a lökeshullám frontja merőleges a \mathbf{v}^+ és \mathbf{v}^- sebességre. A helyzeti energia változása zérus, mert a légtömeg vízszintes vonalon mozog. A tömegegység *mozgási energiája*: $\varepsilon_m = v^2/2$. A tömegegység *belső energiája*, ideális gázokra: $\varepsilon_b = C_v T$, ahol a levegő állandó térfogat melletti fajhője: $C_v = 0,7186 \text{ kJ/(kgK)}$.

Mivel $\mathbf{F}\mathbf{n} = -p\mathbf{n}$, a szakadási feltételek:

$$(Ih) \sim (5.7): \quad \dot{m} = \rho^+ (u_{nD} - v_n^+) = \rho^- (u_{nD} - v_n^-),$$

$$(IIh) \sim (5.10): \quad (p^- - p^+) = \dot{m}(v_n^- - v_n^+),$$

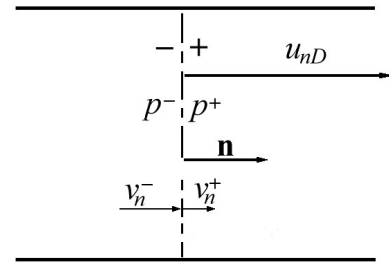
$$(IVh) \sim (11.49): \quad (p^- v_n^- - p^+ v_n^+) = \dot{m}(\varepsilon_m^- + \varepsilon_b^- - \varepsilon_m^+ - \varepsilon_b^+).$$

$$\text{Állapotegyenlet} \sim (8.2): \quad \rho^+ = \frac{\rho_0 T_0}{p_0} \frac{p^+}{T^+}, \quad \rho^- = \frac{\rho_0 T_0}{p_0} \frac{p^-}{T^-},$$

ahol 0 index a normálállapotra vonatkozik.

$$\text{Belső energia} \sim (11.6): \quad \varepsilon_b^+ = C_v T^+, \quad \varepsilon_b^- = C_v T^-.$$

$$\text{Külső energia} \sim (11.1): \quad \varepsilon_m^+ = \frac{(v_n^+)^2}{2}, \quad \varepsilon_m^- = \frac{(v_n^-)^2}{2}.$$



11.9. ábra. Gázban haladó lökeshullám

10 független egyenletünk van (az első kettőnek számít), és 14 változónk:

$$\dot{m}, u_{nD}, \rho^+, \rho^-, v_n^+, v_n^-, p^+, p^-, \varepsilon_b^+, \varepsilon_b^-, \varepsilon_m^+, \varepsilon_m^-, T^+, T^-$$

A csőben kezdetben a levegő áll: $p^+, \rho^+, T^+, v_n^+, \varepsilon_m^+, \varepsilon_b^+$ adott (de ezekre a fenti egyenletek közül három teljesül).

A cső elején hirtelen *megnöveljük* a nyomást p^- értékre. A maradék 7 változóra a maradék 7 egyenletet megoldjuk (például iterációval vagy MATHCAD-el). A számított paraméterek (lásd a táblázatot) egyeznek [16] egyenleteivel. Más kezdeti feltételekkel természetesen mást kapunk. Az egyenletekből látható, hogy a + oldalról a - oldalra átkerült \dot{m} tömeg impulzusváltozását a (IIh) szerinti nyomáskülönbség hozza létre, és az összenergia növekedését a (IVh) szerinti nyomáskülönbség teljesítménye fedezi.

Egy példa eredményei:

$p^+ = 1 \text{ bar}$	$p^- = 10 \text{ bar}$
$v_n^+ = 0$	$v_n^- = 715 \text{ m/s}$
$\rho^+ = 1,3 \text{ kg/m}^3$	$\rho^- = 5,0 \text{ kg/m}^3$
$T^+ = 273 \text{ K}$	$T^- = 709 \text{ K}$
$\varepsilon_m^+ = 0$	$\varepsilon_m^- = 256271 \text{ m}^2/\text{s}^2$
$\varepsilon_b^+ = 196178 \text{ m}^2/\text{s}^2$	$\varepsilon_b^- = 509398 \text{ m}^2/\text{s}^2$
$u_{nD} = 967 \text{ m/s}$	$\dot{m} = 1257 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$

Energia összefoglalás

A hőmérséklet nélküli mechanikában a **mechanikai energiatétel** a kontinuummechanika axiómáinak következménye, ezért bár esetenként sikeresen használható, nem jelent új független információt. Azonban, ha a rendszert hőtani körülmények is befolyásolják (11.8. példa), vagy gőzök és gázok állapotváltozására is számítani kell (11.9. példa) akkor a **termodinamika első főtételét**, azaz a (IVa) axiómát $\sim (15.45)$ egyenletet, és a szakadási feltételét, a (IVh) axiómát $\sim (15.46)$ egyenletet csatolni kell az axiómarendszerhez.

A kereskedelembe kapható áramlástani szoftverek között vannak olyanok, amelyek a kontinuummechanika három axiómájához negyedikként hozzáteszik a termodinamika első főtételét.

Áramlástan és vízgépek

12. fejezet. A súrlódásmentes folyadék áramlástan

Bár a viszkózus és a turbulens áramlások sajátosságait a 20. század végére egyre jobban megismertük, a *súrlódásmentes* folyadék mozgástörvényei ma is az áramlástan alapvető részét képezik. Ezek előnye, hogy egyszerűek, és segítik a jelenségek megértését. Adott feladatnál ezért sokszor a súrlódásmentes áramlás számítását alapesetnek tekintjük, és a súrlódás vagy a turbulencia hatását korrekciókkal vesszük figyelembe.

Prandtl elméleti és kísérleti vizsgálatok alapján megállapította, hogy sok áramlásban a folyadéksúrlódás szerepe a határoló felületeken kialakuló vékony *határrétegre* korlátozódik, és a határrétegen kívüli áramlás gyakorlatilag *súrlódásmentes* (5.1. példa). Olyan áramlásokra érvényes ez, amelyeknél a határréteg a határoló felület mellett marad. Ha a határréteg *leválik* a határoló felületről, és bejut az áramlási tér belsejébe, akkor *Prandtl* tétele már nem érvényes.

A súrlódásmentes áramlásokat egy másik tapasztalat is előtérbe helyezi. A 21. század elejére a nagy vízturbinák csúcshatásfoka elérte a 96 %-ot, a nagy szivattyúk pedig a 94 %-ot. A nagyméretű vízgépekben tehát a veszteség a tengelyteljesítménynek csak $4 \div 6$ %-a, és ennek is csak mintegy fele írható a viszkózitás rovására, a másik fele más veszteségforrásoknak (csapágyak, tömítések, résvesztesség, ütközési és kilépési veszteség stb.) tulajdonítható. Ez azt jelenti, hogy a vízgép *jó hatásfokú üzemállapotai* közelében a gépben kialakuló áramlás súrlódásmentes folyadék feltételezésével is elég jól számítható (15.2. példa). Ezen üzemállapotoktól távolabb azonban (ahol a gép jelleggörbéjét szintén ismerni kell!) a gépben nagy veszteséggel járó határréteg leválások és keresztáramlások találhatók. Ilyen áramlásokra a súrlódásmentes közelítés hibája nagy, és a különféle RANS modellekkel végzett számítások sem nyújtanak megbízható eredményt. Ezért ilyen üzemállapotoknál *kisminta mérésekre* vagyunk utalva. Tehát megállapítható, hogy a *súrlódásmentes* áramlásoknak a vízgépek elméletében is fontos szerepük van, de megvannak a korlátjaik is.

A súrlódásmentes áramlások fő tételei

a) A *súrlódásmentes* vagy *tökéletes* folyadék anyagi egyenlete: $\mathbf{F} = -p\mathbf{I}$. (12.1)

b) A *folytonosság* vagy *tömegmegmaradás*, (I_g) ~ (4.7) egyenletből: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, (12.2)

ami *állandó sűrűségű közegre*: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. (12.3)

c) A *súrlódásmentes impulzus tétel*, (II_c) ~ (3.2) egyenletbe (12.1)-et helyettesítve:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{v} dV \Big|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} -p \mathbf{dS} . \quad (12.4)$$

d) A *súrlódásmentes impulzusnyomatéki tétel*, (III_c) ~ (3.3) egyenletbe (12.1)-et helyettesítve:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \Big|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} -p \mathbf{r} \times \mathbf{dS} . \quad (12.5)$$

A (II_c) axiómát (és az ebből származó (12.4) egyenletet) a gyakorlatban gyakran használják erőhatások számítására (14. fejezet).

A (III_c) axiómát pedig az emeli ki a többi közül, hogy ebből vezethető le az áramlástechnikai gépek *alapegyenlete* (a súrlódást is figyelembe vevő (14.7) egyenlet, és a súrlódásmentes (14.12) egyenlet).

e) Euler féle mozgásegyenlet. A (IIg) axióma \sim (4.8) egyenletből levezetett (9.7) egyenlet:

$$\text{Euler egyenlete súrlódásmentes folyadéokra: } \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \text{grad } p \quad (12.6)$$

Ha $\rho =$ állandó, és $\mathbf{g} =$ állandó, akkor bevezethető a z_0 szintre *redukált nyomás* (9.2. példa):

$$p_{\text{redukált}} = p + \rho g(z - z_0) \quad (12.7)$$

$$\text{aminek a gradiense: } -\text{grad } p_{\text{redukált}} = \rho \mathbf{g} - \text{grad } p \quad (12.8)$$

$$\text{és ezzel az Euler egyenlet egyszerűbb alakja: } \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p_{\text{redukált}} \quad (12.9)$$

Levezetésekben sokszor használjuk az Euler egyenlet bal oldalának lehetséges átalakításait, ezek (2.45), (19.19), (19.14), (20.10) alapján:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} \quad (12.10)$$

$$\text{f) Szakadási feltétel. Ha a szakadási felületen anyag nem lép át, akkor: } v_n \text{ és } p \text{ is folytonos.} \quad (12.11)$$

g) Bernoulli egyenlet. Az Euler egyenlet vonalintegrálja 1. és 2. jelű pont közötti útvonalon. Az útvonal nem haladhat át szakadási felületen! (12.6) osztva ρ -val, a bal oldala (12.10)-el, integrálva:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \mathbf{dr} + \left[\frac{v^2}{2} \right]_1^2 + \int_1^2 (\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \mathbf{dr} - \int_1^2 \mathbf{g} \mathbf{dr} + \int_1^2 \frac{\text{grad } p}{\rho} = 0 \quad (12.12)$$

Ha \mathbf{v} rotációmentes (lásd 22. részben), tehát van olyan $\varphi(\mathbf{r}, t)$ függvény, melyre $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, akkor:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \mathbf{dr} = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi \mathbf{dr} = \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \text{grad } \varphi \mathbf{dr} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \quad (12.13)$$

$$\text{Ha az áramlás stacionárius (2. fejezet), akkor: } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (12.14)$$

$$\text{Áramvonalon } (\mathbf{dr} \parallel \mathbf{v}) \text{ vagy örvényvonalon } (\mathbf{dr} \parallel \text{rot } \mathbf{v}): \quad (\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \mathbf{dr} = 0 \quad (12.15)$$

Ez akkor is teljesül, ha \mathbf{v} rotációmentes ($\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$).

$$\text{Ha } \mathbf{g} = \text{állandó, akkor a } z \text{ magassággal: } \int_1^2 \mathbf{g} \mathbf{dr} = (z_1 - z_2) \mathbf{g} \quad (12.16)$$

$$\text{Ha } \rho = \text{állandó, akkor: } \int_1^2 \frac{\text{grad } p}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \quad (12.17)$$

Az előbbi feltételek teljesülése esetén a gyakorlatban a következő változatait használjuk:

$$\text{Súrlódásmentes, stacionárius Bernoulli egyenlet: } p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \quad (12.18)$$

Ha az áramlás nem súrlódásmentes, akkor, az 1. és 2. pont közötti *nyomásvesztéssel* kiegészítve:

$$\text{Veszteséges Bernoulli egyenlet: } p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'_{12} \quad (12.19)$$

Állandó sűrűségű, rotáció- és súrlódásmentes de *időfüggő* áramlásra az:

$$\text{Instacionárius Bernoulli egyenlet: } \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \quad (12.20)$$

h) Thomson (Lord Kelvin) tétele.¹⁴⁵ Legyen $G(t)$ folyékony (a folyadékkal együtt úszó) egyszerű (önmagát nem metsző) zárt (önmagába visszatérő) vonal. A vonal *cirkulációja*:

$$\Gamma = \int_{G(t)} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} \quad . \quad (12.21)$$

A *cirkuláció* alapvető jelentőségű az áramlástanban. A cirkuláció idő szerinti deriváltját a (23.1) egyenlet, és az Euler egyenlet (12.6), valamint (20.10) alapján számítva:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{G(t)} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{G(t)} \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}(\mathbf{v} \circ \nabla) \right] d\mathbf{r} = \int_{G(t)} \left(\mathbf{g} - \frac{\text{grad } p}{\rho} + \text{grad } \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) d\mathbf{r} \quad . \quad (12.22)$$

Földi rendszerben \mathbf{g} = állandó, ezért:
$$\int_{G(t)} \mathbf{g} \, d\mathbf{r} = 0 \quad . \quad (12.23)$$

Fontos folyadékokra: ρ = állandó (víz), vagy ha ρ csak a nyomástól függ (levegő adiabatikus állapot-változása):

$$\int_{G(t)} \frac{\text{grad } p}{\rho(p)} d\mathbf{r} = \int_{G(t)} \text{grad} [\ln(\rho)] d\mathbf{r} = 0 \quad , \quad (12.24)$$

mert zárt görbén bármely gradiens integrálja zérus. Ez okból (12.22) harmadik integrálja is zérus.

Thomson tétele, súrlódásmentes folyadékokra:
$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad , \quad \text{azaz } \Gamma = \text{állandó.} \quad (12.25)$$

Tehát súrlódásmentes áramlásban a folyadékkal együtt úszó egyszerű zárt görbék cirkulációja az idő múlásával nem változik!

Nyilvánvaló, hogy *nyugvó folyadéktérben* vagy *egyenletes sebességeloszlású* áramlásban bármely zárt görbén a *cirkuláció zérus*. Ezért, ha olyan áramlásokat vizsgálunk, amelyek ilyen térből indulnak, akkor a nyugvó vagy egyenletes áramlású térben elképzelt *összehúzható*¹⁴⁶ zárt görbék az áramlás elúsztatja, és mivel indulásnál a görbék cirkulációja zérus volt, ezért Thomson tétele szerint később is az. Megállapítható tehát, hogy a **nyugvó vagy egyenletes áramlású folyadéktérből induló súrlódásmentes áramlások cirkulációmentesek**. A cirkuláció azonban szoros kapcsolatban van a rotáció vektorral is. A zárt összehúzható görbék felületeket fektetve, Stokes tétele (a (21.1) egyenlet) szerint a görbék cirkulációja (ami zérus) egyenlő a rotáció vektor felületi integráljával. Bármely felületen, bármely zárt görbe által határolt részen a rotáció integrálja csak úgy lehet zérus, ha a rotáció vektor maga is zérus:

Nyugvó vagy egyenletes áramlású térből induló súrlódásmentes áramlásban:
$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (12.26)$$

A 2.10. példából ismerjük a rotáció vektor szemléletes jelentését: Kis gömbalakú folyadékrészek *szögsebesség* vektora. Ezért az eredmény úgy is fogalmazható: Súrlódásmentes áramlásban, *ha a kis folyadékrészek a kezdeti időpillanatban nem forognak, akkor később sem fognak forogni*. Ez valóban természetes, mert a kis gömbalakú folyadékrészeket csak a felületükön ébredő csúsztató feszültségek tudnák megforgatni, de súrlódásmentes áramlásban ilyen feszültségek nincsenek.

Gyakorlati példa: A szivattyúk szívócsöve sokszor közel zérus sebességű térbe nyúlik. Az innen induló áramlás *a határrétegen kívül* (Prandtl tétele alapján) *súrlódásmentes*, tehát érvényes rá Thomson tétele: A szívócsőben az áramlás cirkuláció- és rotációmentes, és a szivattyú járókerekeire is ilyen áramlás érkezik. A járókerekek tervezésénél ez fontos kiinduló feltétel.

¹⁴⁵ Thomson gróf az angliai Kelvin megye ura volt, ezért a Thomson tételét néha Kelvin tételnek nevezik.

¹⁴⁶ Egy zárt görbe *összehúzható*, ha folytonos változtatással (a téren belül) egy pontra összehúzható. Egy szárnyszelvény körüli zárt görbe nem összehúzható, mert egyre kisebbre húzva ráfeszül a szárnyszelvényre.

Összenyomhatatlan, rotációmentes áramlás

Sok sűrűdásmentes áramlásra teljesülnek a (12.3) és (12.26) egyenletek¹⁴⁷:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (12.27)$$

Ezek megoldása matematikailag egyszerűbb, mint az általános egyenleteké. A fő különbség abban van, hogy az ismeretlen sebességet *elsőfokon* tartalmazza, míg az általános eset egyenletei (pl. az impulzus tétel vagy a Bernoulli egyenlet) *másodfokon*. A (12.27) egyenletek tehát *lineárisak*, míg az általános egyenletek *nem lineárisak* (ennek minden nehézségét hordozva).

A továbbiakban ezen lineáris alapegyenletek következményeit tárgyaljuk. A $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ miatt van skálarpotenciál (22. fejezet), azaz olyan $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x, y, z, t)$ skálar függvény (stacionárius esetben t nélkül), hogy:

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{v} \quad \text{azaz:} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z. \quad (12.28)$$

A $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ egyenletbe $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ -t helyettesítve, $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$ és a (20.25) egyenlet alapján:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (12.29)$$

Azokat a függvényeket, melyekre a *Laplace egyenlet* ($\nabla^2 \varphi = 0$) teljesül, **harmonikus függvényeknek** nevezik. Fontos matematikai sajátságaik:

- A linearitásból következik, hogy ha φ_1 és φ_2 megoldása a (12.29) differenciálegyenletnek, akkor $\varphi_1 + \varphi_2$ is megoldás. Ebből következik, hogy a harmonikus függvények alkalmas *függvény-sorokkal* is kezelhetők, azaz ha egy függvénysor $f_i(x, y, z, t)$ alapfüggvényei megoldásai (12.29)-nek, akkor az összegfüggvény $\sum f_i$ is az.
- Ha $\varphi(x, y, z, t)$ harmonikus a tér V (zárt, véges és egyszeresen összefüggő) tartományában, és \mathbf{x}_0 a tér tetszőleges pontja, akkor (21.11) egyenletbe $\nabla^2 \varphi = 0$ -t helyettesítve:

$$\alpha \varphi(\mathbf{x}_0) = \int_S \varphi \frac{d}{d\mathbf{r}} \frac{1}{r} d\mathbf{S} - \int_S \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\mathbf{r}} d\mathbf{S}. \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|. \quad (12.30)$$

Ezzel az egyenlőséggel a φ függvény értékei a V tetszőleges (belső vagy határán lévő) \mathbf{x}_0 pontjainál számíthatók a φ -nek és $\frac{d\varphi}{d\mathbf{r}} = \operatorname{grad} \varphi$ -nek a V tartomány S peremén felvett értékeiből.

Elég különleges, hogy egy függvényt a peremen felvett értékei a tartomány belsejében egyértelműen meghatároznak. Azonban a harmonikus függvények ilyenek. A (12.30) egyenlet 3D-s peremérték feladat megoldására is használható (12.6. példa).

- Ha $\varphi(x, y, z, t)$ harmonikus, akkor $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z$ is harmonikusak. Ezt beláthatjuk, (20.47) és (20.30) szerint: $\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z)$, $\nabla^2 \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ahol (12.27) miatt mindkét tag zérus. A tétel ismételt alkalmazásaival a v_x, v_y, v_z komponensek deriváltjai (φ másodrendű vegyes deriváltjai is), és további deriváltjaik is *mind harmonikusak*.

A (12.27) alapegyenleteknek eleget tevő sebességeloszlások tehát harmonikus potenciálból származtathatók, és ez a számításaikhoz kedvező lehetőségeket biztosít.

¹⁴⁷A vizet összenyomhatatlan és sűrűdásmentes közegnek tekintve az örvénymentesség is megvalósul a Thomson tétel-nél ismertetett feltételek (az örvénymentes térből induló áramlás feltételének) teljesülése esetén.

Síkbeli feladatok

Síkáramlásról vagy *kétdimenziós* (2D-s) feladatról akkor beszélünk, ha a 3D-s áramlásban van olyan sík, amellyel az összes áramlási sebesség párhuzamos, és a síkra merőleges irányban az áramlás paraméterei változatlanok. Például az 1.2. ábra szerinti szélcsatornában a szárnyszelvény körüli áramlás paraméterei az oldallapokra merőleges irányban nem változnak (az oldallapokon kialakult vékony határrétegektől eltekintve). Tehát olyan koordinátarendszerben, melynek z tengelye merőleges a síkra, **a stacionárius síkáramlás függvényei:**

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z \equiv 0, \quad \rho = \rho(x, y), \quad p = p(x, y). \quad (12.31)$$

Állandó sűrűségű közeg (víz) esetén a 3D-s $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ egyenlet a 2D-s esetben:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (12.32)$$

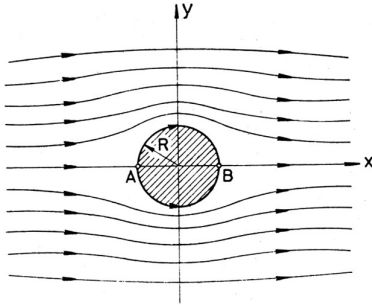
A sokszor teljesülő $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ egyenlőség (a $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ vektor z komponensét számítva):

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (12.33)$$

Az utóbbi két egyenlet a nevezetes *Cauchy-Riemann differenciálegyenletrendszer*.¹⁴⁸ A megoldásai a *komplex függvénytan* alapját képezik. Az ennek eleget tevő v_x, v_y függvények a komplex számsíkon (x a valós tengely, y a képzetes tengely), olyan függvényt állítanak elő, amire a komplex függvénytan egész arzenálja alkalmazható. (A továbbiakban a komplex függvényekkel nem foglalkozunk, de néhány belőlük származó v_x, v_y sebességeloszlást bemutatunk.)

12.1. példa. Súrlódásmentes áramlás körhenger körül

A szélcsatornában sokszor vizsgált *körüláramlott* test a körhenger. (Szempontunkból azért is érdekes, mert a szárnyszelvények hátoldalán hasonló áramlási viszonyok alakulnak ki.) A henger körüli *síkáramlás* legismertebb *elméleti* áramképe a 12.1. ábra.



A következő alapfeltevések vezetnek ehhez:

- *Stacionárius síkáramlás:* $v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z = 0$.
- A függvények *kétszer folytonosan differenciálhatók*.
- A közeg *összenyomhatatlan*: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.
- A *végtelemben* az áramlás *egyenletes*¹⁴⁹ és *vízszintes*.
- A *súrlódásmentes* áramlás *egyenletes* áramlású térből indul, ezért a (12.26) egyenlet alapján az áramlás *rotációmentes*: $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$.
- Az áramlás *szimmetrikus* (a vízszintes tengelyre)¹⁵⁰.

12.1. ábra. Körhenger körüli elméleti áramkép

Egyszerű komplex függvény alapján [30]:

$$v_x = v_\infty \left[1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right], \quad v_y = v_\infty \frac{R^2 2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (12.34)$$

ahol v_∞ a végtelenbeli sebesség (vízszintes). Ezek az egyenletek kis sűrűdású közegben a henger *homlokoldalán* a valóságos áramlást nagyon jól közelítik. (A henger *után* azonban a valóságos áramlásokban merőben más viszonyokat találunk – lásd 13.7. és 13.8. ábrát.) A (12.34) egyenletekben v_x, v_y harmonikus függvények, az áramlás potenciális, tehát van olyan $\varphi(x, y)$ függvény, hogy: $\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{v}$. Az áramvonalak pedig a $\psi(x, y) = \text{konstans}$ egyenletekkel számíthatók:

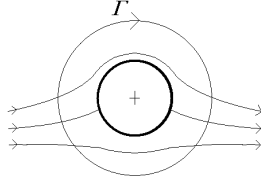
¹⁴⁸Ez a Cauchy-Riemann egyenletrendszer egyik megfogalmazása. A v_x és v_y függvények "harmonikus társak", mint az alábbi $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$ is azok.

¹⁴⁹Bármilyen irányban haladunk a végtelen felé a sebesség ugyanahhoz a végtelenbeli sebesség értékhez tart.

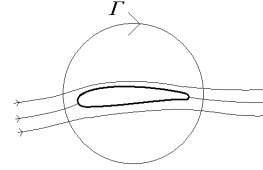
¹⁵⁰Ebből következik, hogy a henger körüli cirkuláció (alább Γ) zérus.

$$\varphi = v_{\infty} x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \quad \psi = v_{\infty} y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (12.35)$$

A körhenger körül más áramkép is kialakulhat. Ha megengedjük, hogy a folyadék a henger körül forogjon, akkor a 12.2. ábrán vázolt áramlás alakul ki. A hengert körbefogó körön a sebesség vonalintegrálja,



12.2. ábra. Kör cirkulációs áramlásban



12.3. Szárnyszelvény cirkulációs áramlásban

azaz a *cirkuláció*: $\Gamma \neq 0$. Akármilyen nagy körön számítjuk, mindig ugyanazt a Γ értéket kapjuk. A végtelenben a sebesség továbbra is vízszintes, de a körön az áramlás torlópontjait (a hengeren végződő áramvonalak csatlakozási pontjait) a cirkuláció eltolta (12.2. ábra). Egyszerű komplex függvény alapján a sebességmező:

$$v_x = v_{\infty} \left[1 - \frac{R^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = v_{\infty} \frac{R^2 2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (12.36)$$

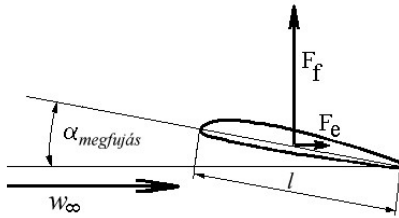
A példa jelzi, hogy komplex függvények segítségével fontos sebességmezők *képletetekkel* számíthatók.

Csőszerű alakzatok elméleti áramképeinél megszoktuk, hogy az áramlást határoló falak alakja egyértelműen meghatározza a belsejükben kialakuló sebességmezőt. A *körüláramlott testeknél* más a helyzet. A 12.2. ábrán a henger körüli Γ változtatásával egy sor áramképet kapunk: az áramlások egy-paraméteres sokaságát. Ugyanígy van ez a műszaki szempontból sokkal érdekesebb szárnyszelvények körüli áramlásoknál is. A 12.3. ábra egy szárnyszelvény körül olyan cirkulációjú elméleti áramképet vázol, melynél a rajta végződő áramvonal a szelvény végpontjánál van. Ez a híres *Kutta-Zsukovszkij* feltétel, ami szerint: *A szárnyprofilok körüli valóságos áramlást olyan elméleti (súrlódásmentes) áramkép közelíti legjobban, melynél a hátsó torlópont a profil végpontjához esik.* Ezzel a feltétellel a valóságos áramlásokban létrejövő "sima leáramlás" feltétele vehető figyelembe (13.12. ábra).

12.2. példa. Szárnyszelvények felhajtóerejének becslése

A repülőgépek és a szárnyalapátos vízgépek elméletének fontos része a szárnyprofilok áramlástana. A szárnyszelvény körüli áramlás fő dimenziótlan paraméterei (12.4. ábra):

$$Re = \frac{w_{\infty} \ell}{\nu}, \quad c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} w_{\infty}^2 \ell b}, \quad c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} w_{\infty}^2 \ell b}, \quad (12.37)$$



12.4. ábra. A szárnyprofilok fő paraméterei

ahol Re a *Reynolds szám*, w_{∞} a *végtelenbeli sebesség* nagysága (iránya vízszintes), ℓ a *szárnyszelvény hossza*, ν a kinematikai viszkozitás. c_f a *felhajtóerő tényező*, F_f a *felhajtóerő* nagysága (az iránya merőleges w_{∞} -re), ρ az áramló közeg sűrűsége, b a szárny hossza az áramlás síkjára merőlegesen, c_e az *ellenállás tényező*, F_e az *ellenállás erő* nagysága (párhuzamos w_{∞} -el), $\alpha_{megfujas}$ a *megfújási szög*, azaz w_{∞} és a profilhúr szöge.

A c_f és c_e tényező dimenzió nélküli. A gyakorlatban használt szárnyszelvényekre, valóságos áramlásokban tapasztalható értékek nagyságrendje:

$$c_f \sim 0,7 \text{ és } c_e \sim 0,01.$$

Fontos kérdés, hogy adott alakú szárnyprofil c_f tényezője mekkora? Erre *Birnbaum* alapján, *súrlódásmentes* áramlást feltételezve egyszerű *becslés* adható [119]. A profilba köröket rajzolva (12.5. ábra) meghatározható a profil vázvonala és az ábra szerinti szögek. Ezekkel:

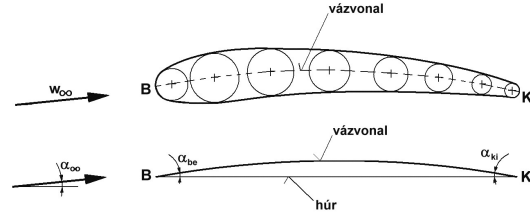
$$\text{a legjobb megfújás szöge: } \alpha_{\infty}^* = \frac{\alpha_{be} - \alpha_{ki}}{8} , \quad (12.38)$$

$$\text{a legjobb megfújásnál } c_f: \quad c_f^* = \frac{\alpha_{be} + \alpha_{ki}}{2} \pi , \quad (12.39)$$

$$\text{más megfújásnál } c_f: \quad c_f = c_f^* + 2\pi(\alpha_{\infty} - \alpha_{\infty}^*) . \quad (12.40)$$

A szögek radiánban helyettesítendők ($\pi = 3.1415$).

A (12.40) képlet szerint a szárnyszelvények *elméleti* $c_f(\alpha_{\infty})$ jelleggörbéje lineáris. Ez egyezik a szárnyszelvények *valóságos* jelleggörbéinek jelentős szakaszaival (13.18. ábra).



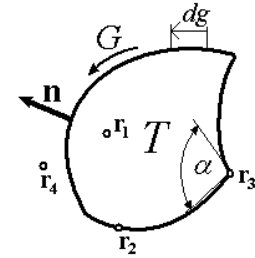
12.5. ábra. Szögek felhajtóerő tényező becsléséhez

Síkbeli peremérték feladatok

Az $u(x,y)$ függvény legyen értelmezve a T egyszeresen összefüggő, véges, zárt tartományban (12.6. ábra), és a tartomány belsejében legyen kétszer folytonosan differenciálható. u és differenciálhányadosai legyenek folytonosan kiterjeszthetők a tartomány G határára. A 2D-s feladatok esetében is, azokat a függvényeket, melyekre:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad (12.41)$$

harmonikus függvényeknek nevezik. A zérus $\nabla^2 u$ -t a (21.12) egyenletbe helyettesítve a területi integrál zérus, és így a:



12.6. ábra. Síkbeli tartomány

$$\text{2D-s harmonikus függvényekre Green tétele: } \alpha u(\mathbf{r}_{fix}) = \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dg . \quad (12.42)$$

ahol α a tartomány látószöge (12.6 ábra és lásd (21.12) egyenletnél), a magfüggvény: $v(x,y) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$,

$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{fix}|$, és $\mathbf{r} = (x,y)$ az integrál futópontja. Az \mathbf{r}_{fix} pont lehet például a 12.6. ábra \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 , vagy \mathbf{r}_4 pontja. Az egyenletben $\frac{\partial u}{\partial n}$ az u függvény *normális irányú deriváltja* (tetszőleges kerületi pontból a

normális egyenesen kifelé haladva méri u megváltozását). Erre $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ grad } u$ skalárszorzat is érvé-

nyes, és $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ grad } u = u_n$ jelölést is használjuk. Ha ismerjük u és u_n értékeit a G görbén, akkor

(12.42) egyenlőséggel u -t ki tudjuk számítani a T tartomány *tetszőleges* belső \mathbf{r}_{fix} pontjánál! A matematika tanítása szerint azonban a függvény kevesebb adattal is megadható [83]: a G görbén elég u és u_n *egyikét* ismerni! A harmonikus függvényeket egyértelműen meghatározó adatok:

- **Elsőfajú** vagy Dirichlet peremfeltétel: u ismert G -n.
- **Másodfajú** vagy Neumann peremfeltétel: u_n ismert G -n, és u ismert *egy* \mathbf{r}_{fix} pontban
- **Harmadfajú** vagy Robin peremfeltétel: ismert h_1 és h_2 függvényekkel $h_1 u + h_2 u_n$ adott G -n (hőtani feladatokban szerepel) [146].

Áramlási feladatokban gyakran az **áramlási harmadfajú peremfeltétel** fordul elő: G -nek G_1 részén adott u , és $G_2 = G - G_1$ részén u_n . (Az előbbi h_1 és h_2 függvényekkel ezt úgy kapjuk, hogy

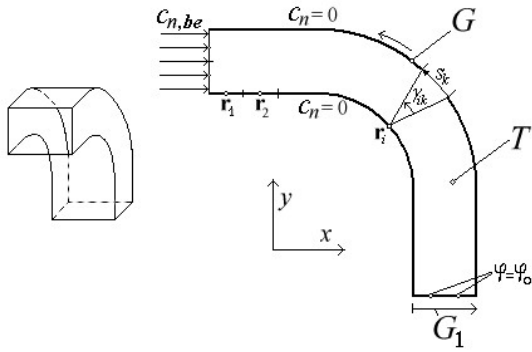
G_1 -en $h_1 = 1$ és $h_2 = 0$, és $G - G_1$ -en fordítva.) Ez a feltétel tartalmazza az elsőfajú és a másodfajú peremfeltételt is (előbbinél G_1 az egész görbe, utóbbinál G_1 egy pontra zsugorodik).

A **síkbeli peremérték feladatok** célja először minden esetben u és u_n számítása G -n, majd u számítása a T -ben. A **peremelem módszer** első részének lényege, hogy a G görbén sok \mathbf{r}_{fix} pontot választunk. Felírjuk a (12.42) egyenletet mindegyik \mathbf{r}_{fix} pontra téglányösszeg formájában. A dg peremelemnél u és u_n egyike ismert, a másik ismeretlen. Az egyenletek az ismeretlenekre lineáris egyenletrendszert szolgáltatnak (részletek 12.3. példában), ami könyvtári rutinnal megoldható. Ezt követően a peremen ismert értékeiből u -t a T belsejében (12.42) egyszerű integrálással szolgáltatja.

Ezzel a módszerrel a *harmonikus* függvény *tetszőleges* egyszerű zárt G görbén (és a görbe belsejében is) számítható. A módszer kis változtatással *nem harmonikus* függvényekre is alkalmazható. Ha $\nabla^2 u$ nem zérus, de *ismert* az egész T tartományban (például egy iterációs eljárás előző lépéséből), akkor a területi integrálját kiszámítva a (21.12) egyenlet szolgáltatja az alapegyenletet.

A (12.41) egyenletnek ismertek olyan megoldásai is, melyek a differenciálegyenletet *differenciálegyenlet* formájában kezelik, sűrű ponthálót helyezve T -re, és T minden belső pontjánál megjelenik egy egyenlet és egy ismeretlen. Az ilyen megoldások sokszor nagy memóriájú számítógépet igényelnek – szemben a peremelem módszerekkel, amelyek az ismeretleneket csak a G görbe pontjainál számítják, és ezért sokkal kisebb pontszámmal futtathatók.

12.3. példa. Áramlás íves csatornában



12.7. ábra. Súrlódásmentes áramlás íves csatornában

A 12.7. ábra bal oldalán téglalap keresztmetzetű íves csatorna vázlata látható. Benne kis viszkozitású közeg (víz vagy levegő) áramlik. Állandó sűrűségű¹⁵¹, súrlódásmentes közelítést alkalmazunk. Az oldalfalak biztosítják, hogy a síkáramlás feltételei teljesülnek (a csatorna középrészén).

A síkáramlás tartománya T , amelyet G határol. A belépő szelvényen az áramlás egyenletes. Az állandó sűrűség miatt \mathbf{c} áramlási sebességre: $\text{div } \mathbf{c} = 0$ a T -ben, és az egyenletes beáramlás miatt: $\text{rot } \mathbf{c} = 0$ is teljesül. A (12.27) egyenletek alapján a síkáramlás potenciális: $\mathbf{c} = \text{grad } \varphi$, és a φ sebességpotenciál *harmonikus*:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (12.43)$$

A belépő Q_{be} térfogatáram *adott*, ezért a belépő szelvényen a sebesség normális irányú komponense ismert: $c_{n,be} = Q_{be}/A_{be}$ ahol A_{be} a belépő szelvény területe. A hosszú egyenes csatornaszakasz után a kilépő A_{ki} szelvényen a sebesség a csatorna falával párhuzamos. Ezt úgy tudjuk figyelembe venni, hogy a G_1 kilépő szakaszon (12.7. ábra) a sebességpotenciál állandó: $\varphi = \varphi_0$ ¹⁵² (mert az áramlási sebesség merőleges a potenciál szintvonalaira). A csatorna falán nincs átáramlás, a falnál a sebesség normális irányú komponense mindenütt: $c_n = 0$.

Fogalmazzuk meg a *matematikai feladatot*. Keresünk egy olyan $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y)$ függvényt, ami teljesíti a (12.43) differenciálegyenletet a T -ben, a perem G_1 részén $\varphi = \varphi_0$ adott, és a perem $G - G_1$ részén $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = c_n$ *adott*. Ez harmadfajú peremérték feladat.

A megoldást egy *peremelem módszerrel* állítjuk elő. A (12.42) egyenlet alapján:

$$\alpha \varphi(\mathbf{r}_{fix}) = \int_G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} v - \varphi \frac{\partial v}{\partial n} \right) dg, \quad \text{ahol} \quad v(\mathbf{r}) = v(x, y) = \ln \left(\frac{1}{r} \right), \quad r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{fix}|, \quad (12.44)$$

¹⁵¹Levegő áramlására is alkalmazható az állandó sűrűség feltétele, ha az abszolút nyomás változása az áramlás mentén mérsékelt (kisebb mint, mondjuk 30 %).

¹⁵²Tetszőleges szám megadható, például zérus.

ahol \mathbf{r} az integrálás futópontja. Az alább leírt tesztek alapján pontosabb megoldást kapunk, ha az egyenletet kicsit átalakítjuk. A legegyszerűbb harmonikus függvény a konstans függvény: $\varphi(\mathbf{r}) = C$, a (12.44) egyenlet erre is érvényes. Alkalmazzuk (12.44)-et a $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_{fix})$ függvényre. Mivel erre: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, kapjuk:

$$\alpha \varphi(\mathbf{r}_{fix}) = \int_G \left(-\varphi(\mathbf{r}_{fix}) \frac{\partial v}{\partial n} \right) dg . \quad (12.45)$$

amit kivonva (12.44)-ből:

$$0 = \int_G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} v + (\varphi(\mathbf{r}_{fix}) - \varphi) \frac{\partial v}{\partial n} \right) dg . \quad (12.46)$$

A (12.42) helyett *ezt* az egyenletet *digitalizáljuk* (azaz előállítjuk a közelítő képleteit). A G görbét n számú egyenes szakaszból álló törött vonallal helyettesítjük. Az egyenes szakaszokat s_k jelöli ($k = 1, \dots, n$), az integrálást a $\sum_{k=1}^n s_k$ vonalon végezzük. A szakaszok középpontjai $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n$ (12.7. ábra). Ezeknél a pontoknál a sebességpotenciál: $\varphi_i = \varphi(\mathbf{r}_i)$ ($i = 1, \dots, n$), és az áramlási sebesség normális irányú komponense: c_i . G_1 -en a φ_i értékek adottak, $G - G_1$ -en a c_i értékek. Felírjuk a (12.46) egyenletet az összes \mathbf{r}_i pontra: $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$), így n egyenletet kapunk. A szakaszokon belül φ és c_n elég mérsékeltén változik, ezért a digitalizálást úgy végezzük, hogy az integrálokból kiemeljük a szakasz középpontjához tartozó értékeiket:

$$\int_G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} v + (\varphi_i - \varphi) \frac{\partial v}{\partial n} \right) dg \approx \sum_{k=1}^n \left[c_k \int_{s_k} v ds + (\varphi_i - \varphi_k) \int_{s_k} \frac{\partial v}{\partial n} ds \right] = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.47)$$

$$\text{A (12.47) egyenletben a } \textit{magfüggvény}: \quad v = \ln\left(\frac{1}{r}\right) = \ln 1 - \ln r = -\ln r \quad (12.48)$$

jelentősen változik az s_k szakaszokon, és $k = i$ esetén végtelenné válik. Szerencsére számítható az *improprius* integrálja:

$$k = i \text{ esetén: } \int_{s_i} v ds = \int_{s_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = 2 \int_0^{s_i/2} (-\ln x) dx = 2[x(1 - \ln x)]_0^{s_i/2} = s_i \left(1 - \ln \frac{s_i}{2}\right) . \quad (12.49)$$

$$k \neq i \text{ esetén, ha } s_k \text{ közel van } \mathbf{r}_i\text{-hez, } p \text{ egyenközü } \mathbf{r}_j \text{ ponttal}^{154}: \int_{s_k} v ds = \int_{s_k} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \frac{s_k}{p} \sum_{j=1}^p \ln\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}\right) \quad (12.50)$$

$$k \neq i \text{ esetén, ha } s_k \text{ távol van } \mathbf{r}_i\text{-től, akkor egyszerűen: } \int_{s_k} v ds = \int_{s_k} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = s_k \ln\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|}\right) . \quad (12.51)$$

$k = i$ esetén $\int_{s_i} \frac{\partial v}{\partial n} ds$ szorozója zérus a (12.47) egyenletben, tehát ez a tag kiesik az integrálásból.

$k \neq i$ esetén a (12.45) egyenlet alapján: $\int_{s_k} \frac{\partial v}{\partial n} ds = \gamma_{ik}$, ami az s_k szakasz látószöge az \mathbf{r}_i pontból (12.7. ábra).

Ezekkel a közelítésekkel, és a (12.47) egyenlet rendezésével ilyen egyenleteket nyerünk:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_k + \sum_{k=1}^n b_{ik} c_k = 0, \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (12.52)$$

Ez az egyenlőség n egyenletet jelent az n ismeretlenre. Az ismeretleneket tartalmazó tagokat a bal oldalra gyűjtve, az ismerteket a jobb oldalra rendezve, a kapott lineáris egyenletrendszer könyvtári rutinnal megoldható. Mivel így a peremen ismerjük az összes φ_i és c_i értéket, végül a T tartomány tetszőleges *belső* \mathbf{r}_{fix}

¹⁵³ Itt dg a görbén számított integrál íveleme, ds a görbét helyettesítő törött vonal íveleme.

¹⁵⁴ A szakaszon az átlagértéket számítjuk. A p értéke az alább leírt tesztek alapján állítható be. *Például* az s_i melletti s_k szakaszokon lehet: $p = 5$, ezek mellett: $p = 2$, és távolabb $p = 1$, lásd (12.51).

pontjában a potenciál értékét a (12.44) egyenlettel egyszerű integrálással számíthatjuk. A harmadfajú peremérték feladat tehát meg van oldva.

Amikor hosszú számítógép programot szándékozunk írni, célszerű előre végig gondolni, hogy hogyan fogjuk *ellenőrizni*. Esetünkben ez könnyű. A megadott \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, n$) pontsört ismert áramlásokba helyezve (egyenletes áramlásba, pontforrásból induló áramlásba, potenciálos örvénybe), ezek ismert képleteivel számítható az \mathbf{r}_i pontoknál a φ_i és a c_i pontos értéke. Az eljárásban ismertnek tekintett változók pontos értékeit beadjuk a programba, és az ismeretlenek általa számított értékeit összehasonlítjuk az ismert pontos értékekkel. Az eljárás pontossága például a számított mínusz ismert értékek eltéréseinek négyzetösszegével minősíthető.

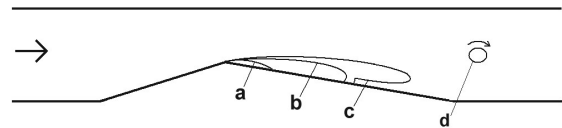
12.4. példa. Knapp-féle ciklus

Téglaalap keresztmetszetű szűkülő-bővülő csatornában (12.8. ábra) víz áramlik¹⁵⁵. A kísérlet célja a víz-áramlásban megjelenő gőzképződés tanulmányozása. Ha a beáramló víz nyomását eléggé lecsökkentjük, akkor a sarokpont után a nyomás a telített vízgőz nyomása alá csökken, és ott a víz felforr. A keletkező buborékokat az áramlás elsodorja. Nagyobb nyomású térbe érve a buborékok összeroppannak. A buborékképződésnek ezt a formáját kavitációnak¹⁵⁶ nevezik. A jelenség ipari szempontból fontos, többen filmezték a buborékhalmoz mozgását [27]. A szorosan egymás mellett levő buborékok szappanhab-szerű megjelenését a számítógépes modellezésben *egyetlen üregként* szokták kezelni, melyben a nyomás a telített vízgőz (a víz hőmérsékletétől függő ismert) nyomása. A kavitáció elméleti vizsgálatánál ez a megszokott feltételek egyike.

Knapp [37] a kavitációs üreg mozgásának következő fázisait különböztette meg:

1. Az üreg kialakulása és növekedése (az ábrán **a** és **b**).
2. Töltés a visszacsapó sugár révén (**c**).
3. A visszacsapó sugár eléri a sarokpontot: összeomlás.

Ezt követően a ciklus újra kezdődik: egy új kavitációs üreg jelenik meg a sarokpontnál (**a**). Az összeomlaskor a kavitációs üreg maradéka leválik, és később forogva elúszik (**d**).



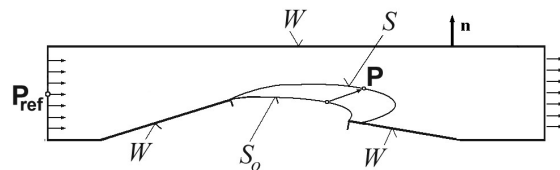
12.8. ábra. Szűkülő-bővülő csatornában a kavitációs üreg instacionárius mozgása

Ezt követően a ciklus újra kezdődik: egy új kavitációs üreg jelenik meg a sarokpontnál (**a**). Az összeomlaskor a kavitációs üreg maradéka leválik, és később forogva elúszik (**d**).

Az összeomlás pillanatában végigkövetve a leváló üreg kontúrját, mindig egyirányú sebességet találunk. Tehát a leváló üreg *kezdeti cirkulációja* (a kontúrja mentén a sebesség vonalintegrálja) jelentős nagyságú! Ezt a cirkulációt az elúszás folyamán is megtartja, mert a lényegében sűrűdásmentes vízben nincs olyan hatás (csúsztató feszültség) ami a forgását csökkentené. Tehát a falhoz tapadt főüregből az idő múlásával *egyirányban forgó* kavitációs örvények *sorozata* válik le.

Az áramlástanban a Knapp-féle ciklus alapvető jelentőségű. Görbült felületeken ugyanilyen lüktető kavitáció tapasztalható (például vízgép szárnylapátok belépő éle közelében). Másrészt a szűkülő-bővülő csatornában nagy nyomás esetén kialakuló *kavitációmentes* áramlásokban is *hasonló* viszonyokat találunk. Ekkor is kialakul a visszacsapó sugár, csak az áramlás "holt terében" levő víztömeg a sugár haladását kissé fékezi. Szélcsatornáknál is ez a helyzet, sarkoknál leváló örvények esetében. A Knapp-féle ciklus tehát magyarázatot ad arra, hogy a szinte sűrűdásmentes vízben (és a kis viszkozitású levegőben) *hogyan keletkeznek* jelentős cirkulációjú *egyirányban forgó* örvények!

A példát felhasználjuk arra is, hogy a peremelem módszert bemutassuk *időben változó áramlásra*. A szűkülő-bővülő csatornát síkáramlással modellezzük (12.9. ábra). Egyszerűség kedvéért csak a főüreg mozgását számítjuk, a (**d**) üreget elhagyjuk. Egyenletes beáramlást tételezünk fel. A főüreg S kontúrja mozog, a csatorna fala, valamint a belépés és a kilépés vonala W áll.



12.9. ábra. Elméleti séma a Knapp-féle ciklushoz

¹⁵⁵A téglalap keresztmetszet teszi lehetővé, hogy síkáramlással modellezzük.

¹⁵⁶A *kavitáció* egyik definíciója "áramlásban buborékok keletkezése és összeomlása" illik a vizsgálandó jelenségre. A buboréktömeg megjelenése megváltoztatja az áramlást, és a fal mellett összeomló kicsiny buborékok ronsolhatják a fal anyagát. Ezért a kavitáció a műszaki kutatások egyik fontos témája.

Bármely adott időpillanatban az $S + W$ zárt vonal határolja az áramlási tartományt. Az egyenletes áramlású térből induló sűrűdésmentes és összenyomhatatlan folyadék mozgását számítjuk. Az áramlás potenciális, $\varphi = \varphi(x, y, t)$.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0. \quad (12.53)$$

Az S kontúron a nyomás a telített vízgőz nyomása (állandó): $p = p_{gőz}$. (12.54)

A valóságos áramlásban (a kavitációs csatornában) közel állandó nyomású légpárna stabilizálja a csatorna előtti nyomást és Bernoulli alapján a sebességet. Ezt úgy vesszük figyelembe, hogy a \mathbf{P}_{ref} referencia pontnál (12.9. ábra) a nyomás és a sebesség időben állandó konstans, és a potenciált is ennél a pontnál normáljuk:

$$p = p_{ref}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{ref}, \quad \varphi_{ref} = 0. \quad (12.55)$$

A kilépő szakaszon is egyenletes áramlást tételezünk fel v_{ki} sebességgel, de ez az időben változhat, mert a mozgó S által időegység alatt kiszorított folyadéktérfogat is a kilépő szakaszon távozik. Adott időpillanatban azonban a W kontúron a sebesség normális irányú komponense mindenütt ismert. Az S vonalon viszont φ adott (az alábbiak szerint), tehát harmadfajú peremérték feladattal állunk szemben, amit időben léptető eljárással oldunk meg.

Kezdeti adatok. A számítást a kialakult (\mathbf{b}) üreg S_0 feltételezett alakjával (12.9. ábra) indítjuk. Felveszszük a kontúr alakját a t_0 időpillanatban, és a kontúr minden pontjánál ésszerű feltételezéssel élünk a v_n sebesség értékére (segítséget jelentenek a kavitáció fényképei). Megoldjuk a $W + S_0$ kontúrra az így nyert másodfajú peremérték feladatot, azaz kiszámítjuk \mathbf{v} és φ értékét a kontúron.

Időlépés. Az időlépés előtt \mathbf{v} és φ ismert az $S + W$ kontúron. Kicsiny (általunk felvett) Δt idő alatt az S kontúr pontjait a következő elmozdulással léptetjük:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t, \quad (12.56)$$

és az új kontúr pontjainál az új potenciált számítjuk: $\Delta \varphi = \frac{d\varphi}{dt} \Delta t$. (12.57)

Az utóbbi lépéshez meg kell határozni $\frac{d\varphi}{dt}$ értékét. Ehhez felírjuk az instacionárius Bernoulli egyenletet, (a (12.20) egyenletet), a \mathbf{P}_{ref} pont és az S kontúr tetszőleges \mathbf{P} pontja között:

$$\frac{\partial \varphi_{ref}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{ref}^2 + \frac{p_{ref}}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p_{gőz}}{\rho}. \quad (12.58)$$

Bevezetjük a kavitációs számot:

$$K = \frac{p_{ref} - p_{gőz}}{\frac{\rho}{2} \mathbf{v}_{ref}^2}, \quad (12.59)$$

ennek minden paramétere, és a K szám is, időben állandó (a kísérleteket is állandó kavitációs számmal végzik).

A (12.58) egyenlet alapján S tetszőleges pontjánál: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}_{ref}^2}{2} (1 + K) - \frac{\mathbf{v}^2}{2}$, (12.60)

de (2.42) egyenlet, $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, és (12.60) alapján: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{v}_{ref}^2}{2} (1 + K) + \frac{\mathbf{v}^2}{2}$. (12.61)

Ezzel az egyenlettel meghatároztuk a φ léptetéséhez szükséges deriváltat. Ez a lépés a kulcsa az időfüggő peremelem eljárásnak! (Ez teszi lehetővé, hogy a számítást nem kell kiterjeszteni az egész T tartományra, csak a peremére.) A Δt időlépés során csak az S kontúrt léptetjük (a (12.56), (12.57) és (12.61) egyenletekkel), és így megkapjuk φ értékeit az új kontúron. Ez elegendő az új időponthoz tartozó peremérték feladat további számításához.

A peremérték feladat megoldása. Az időlépés után az S görbén φ ismert, a W kontúron pedig $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ismert. A

feladatot lényegében a 12.3. példában ismertetett módszerrel oldjuk meg. Azonban mivel a v_{ki} kilépő sebesség is ismeretlen, szükségünk van egy további független egyenletre. Ez az áramlás folytonossági egyenlete:

$$\int_{W+S} v_n dS = 0, \quad (12.62)$$

ami azt fejezi ki, hogy az a térfogat, amivel az S felület időegység alatt eltolja a $W + S$ belsejében levő folyadékot, a kilépő felületen távozik is. Ezt az egyenletet is digitalizálva, annyi egyenletünk van, ahány ismertelen.

Az egyenletrendszer megoldva az S kontúron ismert φ és $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. A következő időlépés kivitelezéséhez azonban szükségünk van a teljes \mathbf{v} sebességre. Síkbeli feladatról lévén szó, ezt a 12.10. ábra paramétereivel számítjuk.

Az S törött vonal sarok pontjainál ismerjük a sebességpotenciál $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ értékeit. A v_n sebességek helyett az oldalakon belépő térfogatáramokkal számolunk:

$$q = \int_a \frac{\partial v}{\partial n} ds \cong v_n a. \quad \text{A } \varphi \text{ függvény harmonikus, ezért}$$

az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ háromszögön φ folytonos, és:

$$q_3 = q_1 + q_2, \text{ valamint } (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_1 - \varphi_3) = 0, \quad (12.63)$$

miatt a cirkuláció zérus. A középső pont sebességének közelítő képlete:

$$\mathbf{v}_2 = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\mathbf{a}_1}{a_1^2} + q_1 \frac{\mathbf{b}_1}{b_1^2} + (\varphi_3 - \varphi_2) \frac{\mathbf{a}_2}{a_2^2} + q_2 \frac{\mathbf{b}_2}{b_2^2} - \left[(\varphi_3 - \varphi_1) \frac{\mathbf{a}_3}{a_3^2} + q_3 \frac{\mathbf{b}_3}{b_3^2} \right], \quad (12.64)$$

ahol \mathbf{b} az \mathbf{a} vektorokra merőleges, vele egyenlő hosszúságú vektorok (lásd \mathbf{b}_1 a 12.10. ábrán). Ez a képlet¹⁵⁷ egyenletes áramlásra ($\mathbf{v} = \text{állandó}$) pontos. Mérsékeltén változó áramlásra (a 12.3. példánál leírt tesztek szerint) jó közelítés.

Az eljárás tehát a következő: Megoldjuk a peremértékfeladatot az $S + W$ kontúrra. Ezzel φ és \mathbf{v} ismertté válik az S vonalon. Léptetjük S pontjait és a φ potenciált, majd az új $S + W$ kontúrra újra megoldjuk a peremértékfeladatot.

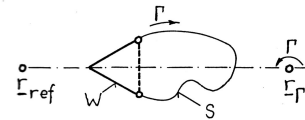
Az eljárás úgy tesztelhető, hogy a futás eredményét összehasonlítjuk a dupla és a fél Δt időlépéssel nyert eredményekkel. Sok időlépés után az S pontjai a számítási hiba akkumulálódása miatt összezavarodhatnak, ekkor célszerű a 12.5. példában leírt finomításokat elvégezni. (Egy visszacsapó sugár kifejlődését a 12.14. ábra szemlélteti.)

12.5. példa. Sugarak kialakulása kavitációs üregben

A síkáramlásokban kialakuló örvényeket *sugarak* (!) hozzák létre: A visszacsapó sugarak *egyirányban* forgó örvényeket (12.4. példa), az alternáló sugarak pedig *kétirányban* forgó örvényeket keltenek (13.3. példa). Ezért érdekes kérdés, hogy *a sugarak hogyan keletkeznek?*

Ebben a példában egy sugár kialakulását tanulmányozzuk 2D-s időben léptető peremelem módszerrel¹⁵⁸. Egy kavitációs csatornában ékmodell mögött megjelenő kavitációs üreg mozgását kívánjuk számítani. Az áramlás síkjában a 12.11. ábrán W az ékmodell rögzített vonala, S a kavitációs üreget határoló, időben mozgó vonal. A $W + S$ zárt görbe *külsejében* az áramlás sűrűlédásmentes, és az áramlási tartomány a végtelenig terjed, ahol állandó v_∞ sebességű áramlás található.

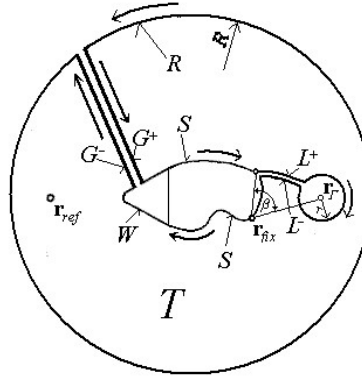
A $W + S$ kontúr körüli *cirkuláció*, Γ adott konstans, amit az \mathbf{r}_r pontnál felvett pontszerű, Γ erősségű cirkuláció ellensúlyoz (12.11. ábra). Az utóbbival a kavitációs üregről korábban levált örvények együttes cirkulációját gondoljuk figyelembe venni. Az ék előtt felvett \mathbf{r}_{ref} referencia pontnál a nyomás és a sebesség időben állandó (ezzel a kavitációs csatornában a mérőszakasz előtti légpárnás tartály kiegyenlítő hatását modellezzük).



12.11. ábra. Sugár kialakulásához séma

¹⁵⁷Analog a három pontjával adott $y(x)$ másodfokú függvény középső pontjánál érvényes deriválttal.

¹⁵⁸A számítógép programot szerző 1968 – 1971 években írta a korai évekre jellemző numerikus megoldásokkal. Ezek itt a peremelem módszer egyszerűségét és kritikus pontjait illusztrálják. A Fortran nyelven írt programot szerző 1970-ben memória korlát miatt csak maximum 56 kontúrpontra tudta futtatni. Cikkét 1972-ben beküldte a Journal of Fluid Mechanics folyóiratnak [121], de 5 bíráló közül 2 ellenezte, ezért nem közölték. Így először egy IAHR konferencián szerepelt 1976-ban [22], majd egy budapesti konferencián 1987-ben [23]. Könözy László megőrizte a programot, amit szerző 2010-ben a személyi számítógépén max. 250 ponttal futtatott. Az egyik eredmény a 12.14. ábra, itt kerül közlésre először.

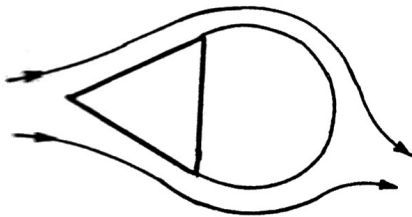
12.12. ábra. A sugár számítási sémája Green képletét alkalmazza a T tartományra

A (12.53) egyenlet szerint az áramlás potenciális: $\nabla^2 \varphi = 0$ a $W + S$ külsejében (kivéve \mathbf{r}_r pontnál). A kavitációs üreget körbe vesszük egy nagy R sugarú körrel, és az \mathbf{r}_r pontot kizárjuk egy kis r sugarú körrel (12.12. ábra). Az így nyert T tartományban a φ sebességpotenciál kétszer folytonosan differenciálható. A potenciál ciklikus, amit azzal teszünk egyértékűvé, hogy az L görén ugratjuk φ értékét: $\varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$. Green tételének 2D-s alakját alkalmazzuk a T tartományra a (21.12) egyenlet szerint $\nabla^2 \varphi = 0$ helyettesítéssel, és $R \rightarrow \infty$ és $r \rightarrow 0$ határátmenetekkel [22, 121] ezt az alapegyenletet kapjuk:

$$\alpha \varphi(\mathbf{r}_{fix}) = \int_{W+S} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \ln \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{fix}|} \right) - \varphi(\mathbf{r}_{fix}) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{fix}|} \right) \right] ds + 2\pi \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{r}_{fix} + 2\pi C - \beta \Gamma, \quad (12.65)$$

ahol \mathbf{r}_{fix} a T tartomány tetszőleges rögzített pontja, $\alpha = \pi$ amikor \mathbf{r}_{fix} a $W + S$ kontúron van, és $\alpha = 2\pi$ amikor $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_{ref}$. Az integrálás futópontja \mathbf{r} . $\mathbf{v}_\infty \approx \mathbf{v}_{ref}$ a végtelenbeli sebesség (adott konstans), C a sebességpotenciál konstansa (amit úgy határozzunk meg, hogy $\varphi(\mathbf{r}_{ref}) = 0$ legyen)¹⁵⁹, β az L görbe látószöge az \mathbf{r}_{fix} pontból (12.12. ábra), és Γ a potenciál ugrása az L görbén (szintén adott konstans).

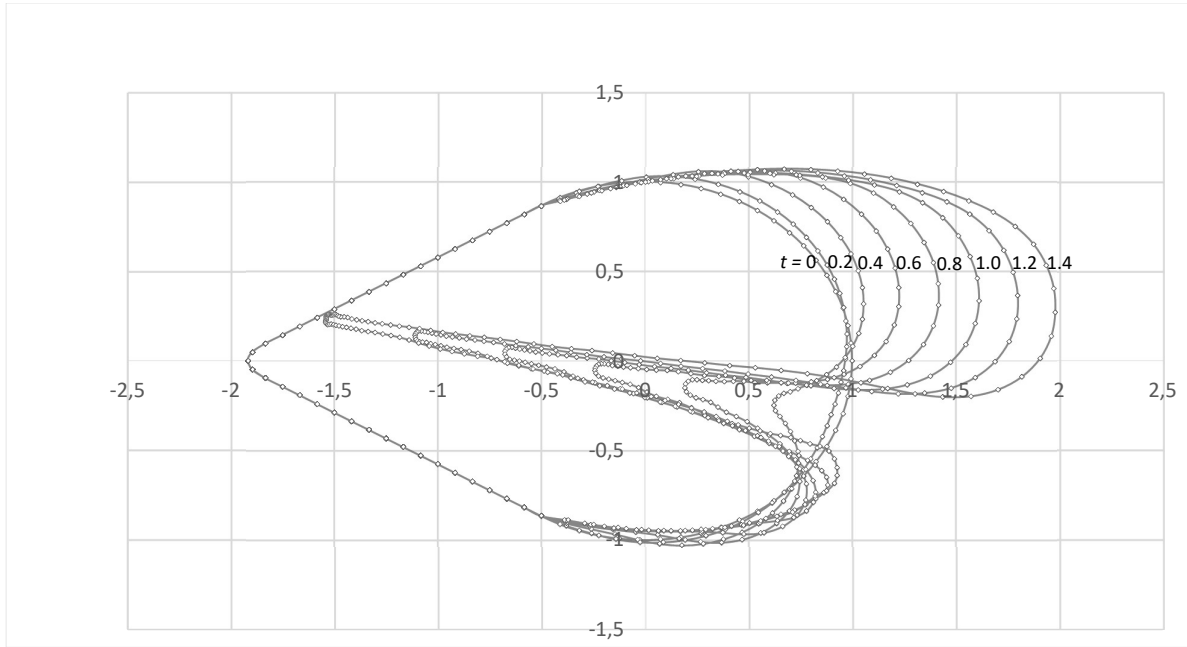
Az időlépés előtt ismert az S kontúrvonal, és rajta φ és \mathbf{v} . Így az időlépés a (12.56), (12.57), és (12.61) egyenletekkel kivitelezhető. Az időlépés után ismerjük az új S kontúr, és rajta az új φ értékeket, de nem ismerjük az új $\partial \varphi / \partial n = v_n$ sebességeket. Az utóbbiakat a (12.65) integrálegyenlet megoldásával nyerjük. A $W + S$ kontúron sok \mathbf{r}_{fix} pontot választunk. A W vonalon levő pontoknál $v_n = 0$ és a φ értékek az ismeretlenek. Az S vonal pontjainál a φ értékek ismertek, de a $\partial \varphi / \partial n = v_n$ értékek ismeretlenek. Harmadfajú peremértékfeladatot kaptunk φ -re. A (12.65) integráljait téglányösszeg formájában felírva (a 12.3. példához hasonló módon digitalizálva) az ismeretlenekre elsőfokú egyenleteket kapunk. Az egyenletekben ismeretlen a C érték is, ezért felírjuk a (12.65) egyenletet az $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_{ref}$ pontra is azzal, hogy $\varphi(\mathbf{r}_{ref}) = 0$. Így annyi lineáris egyenletünk van, ahány ismeretlen. Az lineáris egyenletrendszert könyvtári rutinnal megoldva, a kapott φ és v_n értékekből az S pontjainál számítjuk \mathbf{v} -t a (12.64) egyenlettel. Az újabb időlépést ezzel végezzük.



12.13. ábra. Az üreg kezdeti kontúrja.

A kavitációs üreg *kezdeti kontúrjának* az ék oldalait érintő körivet választottuk (12.13. ábra). A kezdeti kontúr mentén végig $v_n = 0$. Hasonló konfiguráció a valóságos áramlásokban nem fordul elő. Azonban az üreg falának mozgását olyan kezdeti feltételek mellett kívántuk vizsgálni, melyeknél sem a kezdeti kontúr, sem a kezdeti sebességeloszlás nem jelez sugár kezdeményt. Az üregben a nyomás a telített gőznyomás, állandó. A kezdeti nyomáseloszlás nagyon eltér a stacionáriustól! A kezdeti kontúr a nyomás szintvonal, rajta a kezdeti nyomásgradiens az üreg felé mutat, és a kontúr mentén majdnem állandó nagyságú.

¹⁵⁹A (12. 56) egyenlet \mathbf{v}_∞ -t és C -t tartalmazó tagját az $R \rightarrow \infty$ határátmenet eredményezte [121].



12.14. ábra. Ék után, kezdetben körív alakú üregben kialakuló sugár egyik számítási eredménye.

Adatok: 60°-os ék, lekerekített orr, pontok távolsága: $a_{max} = 0,2$, $v_{\infty} = v_{ref} = 1$, $\Gamma = 3$, $x_{\Gamma} = 5$, $x_{ref} = -10$, kavitációs szám: $K = 1$, időlépés: $\Delta t = 0,02$, kezdő pontszám: 80, végső pontszám: 139.

A program a peremértékfeladatot a (12.65) egyenlet alapján a 12.3. és 12.4. példákban leírt közelítésekkel oldja meg. Az időlépésnél azonban másodfokú közelítéseket alkalmaz (a (12.56) és (12.57) egyenletek helyett):

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t + \frac{\mathbf{a}}{2} (\Delta t)^2, \quad (12.66)$$

$$\Delta \varphi = \frac{d\varphi}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} (\Delta t)^2. \quad (12.67)$$

A kezdeti időpillanatban az \mathbf{a} gyorsulás hasonló peremértékfeladatnak tesz eleget, mint \mathbf{v} . Ennek megoldásával indul a program. A későbbi időpillanatokban a gyorsulásokat a sebességek változásából számítja. Minden időlépés után a pontokat átrendezi úgy, hogy az eloszlásuk egyenletesebb legyen (a közelítő képletek így pontosabbak). Ha a pontok között nagyobb hézag vagy erőteljes törés jelentkezik, akkor a program új pontot iktat be (ez rendszeresen így van az ék sarokpontjainál és a sugár orránál).

A programmal elemezhetők a sugarak keletkezésének körülményei. A 12.14. ábra folyadéksugarát egy elképzelt szimmetriavonal mentén kettévágva a *Knapp-féle visszacsapó sugarat* (12.4. példa) modellezi. Az ábra egésze pedig a *Kármán-féle örvénysorok* (13.3. példa) alternáló sugarainak egyfajta elméleti megközelítése. Az elemzés felfedi, hogy a kavitációs üregekben a sugarak keletkezésére erős tendencia mutatkozik. A sugarak vékonyak (és a sebességük jóval nagyobb, mint a stacionárius áramlásokban jelentkező Rjabouchinsky sugarak [12] sebessége). (Mivel a sugár orrának görbületi sugara kicsi, megvizsgálásra került a felületi feszültség hatása is, a 2.7. példában vázolt módon. A víz felületi feszültségével, a dimenzió nélküli Eötvös szám $Eö = 10^5$ értékénél a felületi feszültség hatása bőven elhanyagolható.)

A példa bemutatta egy instacionárius áramlás kezelését peremelem módszeren alapuló időben léptetett programmal, ami az áramlástani számítások DNA (Direct Numerical Application: *direkt numerikus alkalmazások*) témakörébe tartozik.

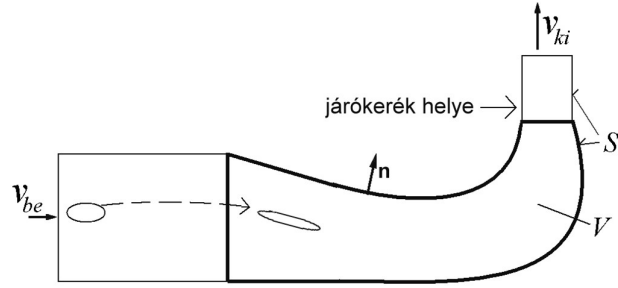
A peremelem módszereknél előforduló differenciálegyenleteket (a Laplace és Poisson egyenleteket) részletesen tárgyalja Szeidl György [109].

Térbeli feladatok

12.6. példa. Súrlódásmentes áramlás görbe szívócsőben

A 12.15 ábrán egy szivattyú görbe szívócsőve látható¹⁶⁰. A belépő szelvény téglalap, a kilépő kör alakú¹⁶¹. A függőleges tengelyű járókerék a jelzett helyen kapja a szívócsőből a vizet. A szívócső alakja ismert, a benne kialakuló sebességeloszlást számítjuk.

Az áramlási teret a belépésnél és a kilépésnél kiegészítjük a vékony vonalakkal rajzolt egyenes csőszakaszokkal annak érdekében, hogy a belépésnél és a kilépésnél *egyenletes áramlást* tételezhessünk fel. A víz áramlását összenyomhatatlannak tekintjük, tehát:



12.15. ábra. Szivattyú görbe szívócsőve

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (12.68)$$

Tapasztalatból tudjuk, hogy az ilyen szívócsövek vesztesége kicsiny. Ezért **súrlódásmentes** áramlást számítunk. A *belépésnél* az áramlás egyenletes, ezért egy ott található kis zárt görbén (12.15. ábra) a sebesség vonalintegrálja (a cirkuláció) zérus. A kis görbe beúszik a szívócsőbe, és mivel az áramlás súrlódásmentes, Thomson tétele, (12.25) egyenlet alapján a szívócsőben is zérus a cirkulációja. Az egész áramlási térben, bármely kicsiny zárt görbén a cirkuláció zérus, tehát az áramlás rotációmentes:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} . \quad (12.69)$$

Ezért a 22. fejezet szerint létezik sebességpotenciál: amit (12.68)-ba helyettesítve teljesíti a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi , \quad (12.70)$$

Laplace egyenletet:

$$\nabla^2 \Phi = 0 . \quad (12.71)$$

Az átáramló vízmennyiség Q adott, ezért a belépő és a kilépő felületen (12.15. ábra) a sebesség ismert

$$v_{be} = Q / A_{be} \quad v_{ki} = Q / A_{ki} , \quad (12.72)$$

és szilárd fal mellett a súrlódásmentes folyadék peremfeltétele: $v_n = 0$. (12.73)

Végeredményben tehát Φ -re teljesül a (12.71) Laplace egyenlet, és a peremen $v_n = \partial \Phi / \partial n$ mindenütt ismert. Ez másodfajú *peremértékfeladat* Φ -re, ami megoldható nagy áramlástani szoftverekkel, de peremelem módszerrel is. A (20.11) és (21.11) egyenlet alapján:

$$\alpha \Phi(\mathbf{x}_0) = \int_S \Phi(\mathbf{x}) \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) d\mathbf{S} - \int_S \frac{1}{r} v_n dS \quad (12.74)$$

ahol $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, \mathbf{x} az integrálás *futópontja*, \mathbf{x}_0 tetszőleges *rögzített pont* V belsejében (ekkor: $\alpha = 4\pi$), vagy a határán (ekkor, ahol van érintő: $\alpha = \pi$). Az első integrálban a magfüggvényt \mathbf{m} -el jelöljük:

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} (\operatorname{grad} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}}{r^3} . \quad (12.75)$$

A 3D-s *peremelem módszer* alapgondolata az, hogy az S felületen választunk n darab \mathbf{x}_0 pontot (elég egyenletesen elosztva), mindegyik \mathbf{x}_0 pontra felírjuk (12.74) egyenletet digitalizálva, az integrálokat téglányösszeg formájában kezelve (az integrálandó függvényeknek az \mathbf{x}_0 helyeken felvett értékeit helyettesítve). Így egy lineáris egyenletrendszert nyerünk, amiben csak a peremen felvett $\Phi(\mathbf{x}_0)$ értékek az ismeretlenek, és az egyenletrendszert megoldjuk.

¹⁶⁰ A magyarországi legnagyobb szivattyúk, a Paksi Atomerőmű hűtővíz szivattyúi is ilyen szívócsövekkel üzemelnek.

¹⁶¹ Öntött szívócső esetén a téglalap szelvény folyamatosan alakul át körre. A hegesztett szívócsövek követik az öntött alakját, de a hegesztéseknél enyhe törésvonalak találhatók.

A megoldásnál két numerikus nehézség merül fel. Van ugyan n egyenletünk és n ismeretlenünk, de a potenciál csak egy konstans erejéig van meghatározva, ezért a (12.74) integrálegyenlet pontos megoldása határozatlan. Az n egyenlet – ha számítási hiba nélkül fel tudnánk írni – *összefüggő* lineáris egyenletrendszert alkotna. Ezen például úgy lehet segíteni, hogy egy \mathbf{x}_o pontban megadjuk $\Phi(\mathbf{x}_o)$ értékét, és a többi $n - 1$ ismeretlenre az n egyenletet megoldjuk például a legkisebb négyzetes hiba módszerével.

A másik numerikus nehézség az, hogy amikor az \mathbf{x}_o pontra felírjuk az integrált, akkor az \mathbf{x}_o helynél a (12.75) magfüggvény nem korlátos. Ezt a következő manipulációval kerüljük ki. A (12.74) egyenlet érvényes tetszőleges olyan függvényre, amelyre a Laplace delta zérus. Alkalmazzuk a $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}_o)$ konstans függvényre (a gradiense zérus, tehát a v_n értékei zérusok). Ezért:

$$\alpha \Phi(\mathbf{x}_o) = \int_S \Phi(\mathbf{x}_o) \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) dS \quad (12.76)$$

Ezt kivonva (12.74)-ből:

$$\int_S (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_o)) \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) dS = \int_S \frac{1}{r} v_n dS \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| \quad (12.77)$$

Ha *ennek* írjuk fel a téglányösszegét, akkor a baloldali integrálban az integrálandó függvény az \mathbf{x}_o helynél zérus, tehát a téglányösszezből kimarad. Ez az egyenlet abból a szempontból is előnyös, hogy α kiesett. (Ezért sarokpontoknál is alkalmazható, ahol különben elég körülményes α számítása.) Elvi előnye továbbá az, hogy (12.77) bal oldalán *improprius* integrált találunk \mathbf{x}_o -nál, aminek a numerikus kezelése egyszerűbb, mint (12.74)-ben.

Miután a sebességpotenciált meghatároztuk S -en, a V térfogat tetszőleges *belső* pontjában Φ a (12.74) egyenlettel számítható, és a potenciálból a sebesség differenciálással nyerhető. Mivel azonban a differenciálás numerikus szempontból kellemetlen, a sebességet úgy is számíthatjuk, hogy (12.74) egyenlet gradiensét képezzük (az \mathbf{x}_o változó szerinti gradiens képzést $d/d\mathbf{x}_o$ -al jelölve):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_o) = \frac{d}{d\mathbf{x}_o} \Phi(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\mathbf{x}_o} \left(\int_S \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) \mathbf{n} dS - \int_S \frac{1}{r} v_n dS \right) \quad (12.78)$$

Rögzített tartományon a differenciálás és az integrálás sorrendje felcserélhető. Figyelembe véve, hogy

$$\frac{dr}{d\mathbf{x}_o} = \frac{d}{d\mathbf{x}_o} |\mathbf{x}_o - \mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}_o - \mathbf{x}}{r} \quad , \quad \frac{d}{d\mathbf{x}_o} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\mathbf{x}_o} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_o}{r^3} \quad , \quad (12.79)$$

és (12.75) és (20.11) alapján:

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\mathbf{x}_o} = \frac{1}{r^3} \mathbf{I} + (\mathbf{x}_o - \mathbf{x}) \circ \frac{d}{d\mathbf{x}_o} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \mathbf{I} + (\mathbf{x}_o - \mathbf{x}) \circ \frac{-3}{r^4} \frac{\mathbf{x}_o - \mathbf{x}}{r} \quad , \quad (12.80)$$

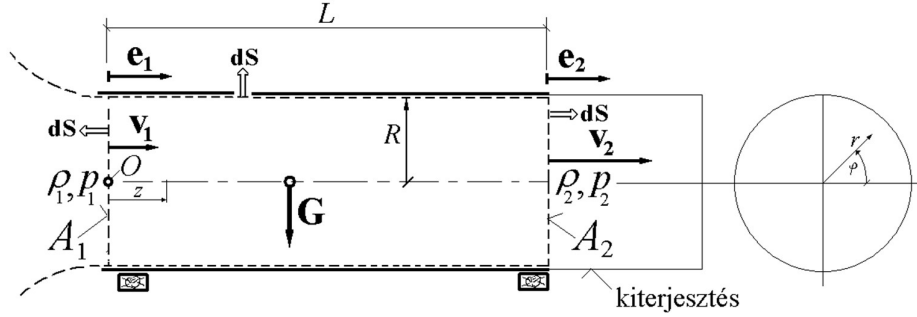
Tehát

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{\alpha} \int_S \left\{ \frac{\Phi(\mathbf{x})}{r^3} \mathbf{n} + (\mathbf{x}_o - \mathbf{x}) \left[\frac{v_n}{r^3} - \frac{3\Phi(\mathbf{x})}{r^5} (\mathbf{x}_o - \mathbf{x}) \mathbf{n} \right] \right\} dS \quad (12.81)$$

Ezzel a képlettel a sebességek az S peremen ismert $\Phi(\mathbf{x})$ és v_n értékekből egyszerű integrálással számíthatók! A numerikus integrálást az \mathbf{x}_o pont környezetében körültekintően kell végezni, mert ott az integrálandó függvény nem korlátos.

A példa szerinti eljárás *más csőszerű idomok* sűrűlódás- és leválásmentes áramlásának számítására is alkalmas.

A példa azt is bemutatja, hogy a kis memória igény miatt nagyon vonzó peremelem módszert komoly numerikus problémák terhelik. Olyan esetekben azonban, amikor nagy memóriájú számítógép nem áll rendelkezésre, a peremelem módszer megoldási lehetőséget kínál.

12.7. példa. Súrlódásmentes stacionárius áramlás egyenes csőben

12.16. ábra. Egyenes cső súrlódásmentes stacionárius áramlással

A 12.16. ábrán körkeresztmetszetű egyenes cső vázlata látható, amelyben *állandó sűrűségű, súrlódásmentes* folyadék (közelítőleg víz) áramlik. Először azt vizsgáljuk, hogy a sebességeloszlás számításához *hogyan* kell megadni az áramlás fő paramétereit ahhoz, hogy *a csőben stacionárius áramlás jöjjön létre*. A feladat kényelmesen kezelhető *hengerkoordinátákkal* (r, φ, z) . A koordinátarendszer origója az A_1 szelvény középpontja O . A sebességvektor komponensei (v_r, v_φ, v_z) a koordinátavonalakat érintő $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ egységvektorokkal a sebességet $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z$ alakban állítják elő. Általános esetben a komponensek a hengerkoordináták függvényei: $v_r = v_r(r, \varphi, z)$, $v_\varphi = v_\varphi(r, \varphi, z)$, $v_z = v_z(r, \varphi, z)$. Mivel a cső falán nincs átáramlás, ott: $v_r(R, \varphi, z) = 0$. Ha a belépő A_1 szelvény *előtt* a csővezetékben idomdarab (szűkítő, könyök, elzárószerelv) van, akkor a sebességkomponensek a csőben mind a három r, φ, z koordinátától *függnek*.

Speciális esetek:

Az áramlás *hengersizmetrikus*, ha a sebességek φ -tól nem függenek: $v_r = v_r(r, z)$, $v_\varphi = v_\varphi(r, z)$, $v_z = v_z(r, z)$.

Az áramlás *forgásmentes* (vagy *perdületmentes*), ha a kerületi sebességkomponens zérus: $v_\varphi(r, \varphi, z) \equiv 0$.

Az áramlás *kifejlett*, ha a sebességek z -tól függetlenek: $v_r = v_r(r, \varphi)$, $v_\varphi = v_\varphi(r, \varphi)$, $v_z = v_z(r, \varphi)$.¹⁶²

A stacionárius áramlásokra érvényes **(d)** axiómákat (a (3.4) – (3.6) egyenleteket) alkalmazzuk a szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületre:

$$\text{(Id) Stac. vagy kvázistac.:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} \quad (12.82)$$

$$\text{(IId) Stac. vagy kvázistac.:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \, d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} \, dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} \, d\mathbf{S} \quad (12.83)$$

$$\text{(IIId) Stac. vagy kvázistac.:} \quad 0 = - \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \, d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} \, dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} \, d\mathbf{S} \quad (12.84)$$

Ha az áramlás a csőben *stacionárius*, akkor ezeket teljesíti. A felület: $S(t_1) = A_1 + S_{\text{henger}} + A_2$. Az S_{henger} felületen: $\mathbf{v} \, d\mathbf{S} = 0$, A_1 -en: $\mathbf{v} \, d\mathbf{S} = -v_z(r, \varphi, 0) dA_1$, A_2 -ön: $\mathbf{v} \, d\mathbf{S} = v_z(r, \varphi, L) dA_2$. A Q_1 belépő és a Q_2 kilépő vízmennyiségre a (12.82) egyenlet, **(Id)** alapján:

$$Q_1 = \int_{A_1} v_z dA_1, \quad Q_2 = \int_{A_2} v_z dA_2, \quad A_2 = A_1, \quad Q_2 = Q_1 \quad (12.85)$$

Ha egy csőszerű alakzatban *stacionárius* áramlás sebességeloszlását kívánjuk számítani, és úgy adjuk meg a sebesség peremfeltételét (\mathbf{v} komponenseit az $S(t_1)$ felületen), hogy $Q_2 \neq Q_1$, akkor az alkalmazni kívánt szoftvertől *lehetetlen feladatot* kívánunk: vagy nem ad, vagy hibás eredményt ad.

Hasonló a helyzet **(IId)** axiómával is. A cső tengely irányú \mathbf{e}_z egységvektorral szorozva:

$$\mathbf{e}_z \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} \, dV = \mathbf{e}_z \mathbf{G} = 0, \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_z \int_{S_{\text{henger}}} \mathbf{F} \, d\mathbf{S} = \mathbf{e}_z \int_{S_{\text{henger}}} (-p) \, d\mathbf{S} = 0, \quad (12.86)$$

tehát **(IId)** alapján:

¹⁶²A *kifejlett* jelzőt főleg turbulens áramlásokra használják.

$$\mathbf{e}_z \cdot \int_{A_1+A_2} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_{A_1} p_1(r, \varphi, 0) dA_1 - \int_{A_1} p_2(r, \varphi, L) dA_1 = \int_{A_1} \rho v_z (v_z dA_1) - \int_{A_2} \rho v_z (v_z dA_2) \quad (12.87)$$

Az egyenlet érthető: a nyomáskülönbségből származó erő az *impulzuserők* különbségével tart egyensúlyt. Ha az áramlás A_1 -nél már *kifejlett*, akkor az egyenlet jobb oldala zérus, és az átlagnyomás az A_1 -nél ugyanakkora, mint A_2 -nél (súrlódásmentes esetben!). A *nem kifejlett súrlódásmentes áramlás* csak akkor lehet stacionárius, ha az átlagnyomások teljesítik (12.87)-et.

$$\text{A (IIIId) axióma szerint pedig, } \mathbf{e}_z \text{-vel szorozva: } \mathbf{e}_z \cdot \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV = 0 \quad (12.88)$$

mert a pontra számított nyomatékok csőtengelyirányú egységvektorral szorozva a tengelyre számított nyomatékokat nyerjük (1.7. példa), és függőleges síkkal $V(t_1)$ -et kettévágva a két súlyerő nyomatéka kiegyenlíti egymást. A feszültségtenzorra:

$$\mathbf{e}_z [\mathbf{r} \times (-p d\mathbf{S})] = \mathbf{e}_z [\mathbf{r} \times (-p \mathbf{e}_z dA)] = 0 \quad (12.89)$$

mert a vegyeszorzatban két vektor egyirányú. A koordinátákban végigszámolva (1.7. példa): $\mathbf{e}_z (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = r v_\varphi$ és így:

$$\int_{A_1} \rho r v_\varphi dA_1 = \int_{A_2} \rho r v_\varphi dA_2 \quad (12.90)$$

Ezt a forgásból származó integrált *perdületnek* nevezik. A kilépésnél ugyanakkora, mint a belépésnél. Ezért *forgásmentes* belépés esetén a kilépő áramlás is forgásmentes. De ha a folyadék a csőbe forogva érkezik, akkor távozni is forogva fog (súrlódásmentes esetben). Ennek magyarázata a tömeg *tehetetlenségében* rejlik, a belépő folyadéktömeg magával hozza az impulzusnyomatékát, és tovább haladva ezt meg is tartja.

Visszatérünk a sebességeloszlás számításához. Ahhoz, hogy a csőben az áramlás stacionárius legyen, a belépő A_1 szelvényen tetszőlegesen megadhatjuk \mathbf{v} és p értékeit. A kilépő A_2 szelvényen azonban ezek már nem tetszőlegesek, mert a kilépő vízmennyiség, átlagos nyomás és perdület eleget kell tegyen az előbbi egyenleteknek. Ilyen peremfeltételekkel (és alkalmas szoftverrel) a sebességeloszlás számítható (akár a 12.6. példa mintájára is).

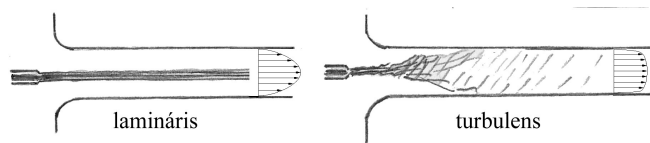
Az elmondottakhoz egy megjegyzést fűzünk. Az előbbiekből látható, hogy a csőben kialakuló áramlást döntően az A_1 szelvényen uralkodó viszonyok határozzák meg, az A_2 szelvényen ismert áramlási paraméterek hatása kisebb. Ezt a megállapítást kis súrlódású folyadékkal (vízzel) nyert tapasztalatok is alátámasztják. A belépő sebességeloszlás *előre hatása* (az áramlás irányába) *jelentős*, a kilépő sebességeloszlás *visszahatása* általában sokkal kisebb [139]. Például, ha az A_2 szelvény mögött, a közvetlen közelében egy tolózárat félig lezárunk (a tolózár nyelve a cső tengelyére merőlegesen benyúlik) akkor a cső egyik oldalán a tolózár nyelve visszatorlasztja az áramlást, ami az A_2 szelvényénél is befolyásolja a sebesség értékeket. Ez a hatás azonban a csőnek csak 1~2 csőátmérőnyi hosszán érzékelhető. Azonban, ha a *belépő* A_1 szelvényénél egyenlőtlen sebességeloszlás érkezik, ennek hatása a szelvény után akár 100 csőátmérőnyi hosszon is érezhető.

13. fejezet. A valóságos folyadék áramlástana

Valóságos folyadékokban a súrlódásmentes folyadékoktól eltérően *belső súrlódás* is ébred, amit a feszültségtenzor *csúsztató feszültségei* valósítanak meg. Megjelenik a *turbulencia* is (az alábbi körülmények között), valamint a *határréteg leválás* (ami szintén alapvetően befolyásolja az áramlást). Ezeket tárgyaljuk ebben a fejezetben.

13.1. példa. Lamináris és turbulens áramlás

Reynolds víz áramlását vizsgálta üvegcsövekben (13.1. ábra). A csőszájánál festett folyadékot engedett be, ami *kis* sebességnél hosszú egyenes csíkban haladt tovább, *nagy* sebességeknél azonban gyorsan elkeveredett. Ezzel a valóságos folyadékmozgások két lényegesen különböző mozgásformáját mutatta be: a *lamináris* és a *turbulens* áramlást.



13.1. ábra. Reynolds kísérlete

Körkeresztmetszetű egyenes csőben a *lamináris* áramlást úgy szokták elképzelni, hogy koncentrikus körgyűrű alapú hengereken a folyadékrétegek egymás mellett haladnak, és a különböző sebességű folyadékrétegek között *nincs* lényeges anyagcsere. A *turbulens* áramlásokban azonban az egyik rétegből a másikba kis folyadéktömegek lépnek át (és ezek széthordják a festett folyadékot).¹⁶³ A jelenség a következő dimenzió nélküli számmal jellemezhető:

Az áramlás Reynolds száma:
$$Re = \frac{Lc}{\nu} \quad (13.1)$$

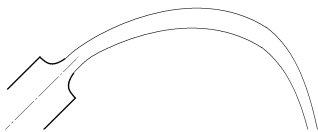
ahol L az áramlási teret jellemző hossz méret (m), c az áramlás jellemző sebessége (m/s), és ν az áramló közeg kinematikai viszkozitása (m²/s). *Csőáramlás* esetén: $L = D$ a cső belső átmérője, és c a csőben áramló víztömeg átlagsebessége: $c = Q/A$, ahol Q a térfogatáram (m³/s), és A a cső belső keresztmetszetének területe (m²). *Szárnyszelvény* körüli áramlásban: L a szárnyszelvény hossza (m), és c a távolférfi sebesség (m/s).

Csővekben (és más alakú falak közötti áramlásokban is) *kis Reynolds szám* esetén a viszkozitás hatása jelentős. A Reynolds szám növelésével azonban a viszkozitás fontossága csökken. Csővekben az áramlási sebességet (és ezzel a Re számot) növelve, az áramlás *laminárisból turbulensbe* hirtelen átsap, *általában* a következő Reynolds szám közelében:

Csővekben lamináris-turbulens átsapás:
$$Re_{\text{átsapás}} = \frac{Dc}{\nu} = 2320 \quad (13.2)$$

A jelenség jól követhető a csőszűrlődási diagram (13.4. ábra) alapján. Az $1000 < Re < 6000$ tartományban mindkét áramlási forma lehetséges, és az átsapás *bármelyik* Reynolds számnál bekövetkezhet.

A *lamináris áramlások* törvényszerűségei elég jól ismertek. Egyenes csővekben a *kifejlett* lamináris áramlás sebességprofilja forgásszimmetrikus paraboloid (lásd 13.1. ábrán a cső végénél). Adott falak között a *lamináris* áramlás a Navier-Stokes egyenlettel jól számítható (ha a határréteg az áramlási térben nem válik le).



13.2. ábra. Szőkőkút vízsugara

Levegőben haladó vízsugarakra rátekintve könnyen felismerhető, hogy lamináris vagy turbulens sugarat látunk-e? A 13.2. ábra egy szőkőkút fűvókájából kilépő sugarat vázol. A sugár felülete sima, a környezet tárgyai úgy tükröződnek benne, mint egy görbe tükörben. A sugár *lamináris*, pedig a Reynolds száma nagyon nagy (Például $D = 0,04$ m, $c = 5$ m/s, $\nu = 10^{-6}$ m²/s, $Re = 200\,000$). Az ilyen sugarak keltésének titka az, hogy (i) az áramlás közel nyugvó térből indul, és (ii) a fűvókaszáj felülete nagyon sima. Ha a fűvókaszáj az idő múltával érdeseedik, vagy beakad egy szilárd test, akkor a sugár *átsap* rücskös felületű *turbulens* sugárrá.

A Pelton turbina sugara (5.6. ábra) *turbulens*. A sugárból kilépő (pár mm nagyságú) cseppek jelzik, hogy a sugár belsejében milyen nagyságú kis víztömegek mozognak az átlagostól eltérő irányban. A Pelton fűvóka felülete ugyan sima, de a fűvóka belsejében található bordákról örvények válnak le, és ezek turbulenciát keltenek. Az áramlás bármiféle *megzavarása* (fal érdessége, határréteg leválás, örvények megjelenése) *turbulenciát* kelthet.

A műszaki életben szinte kivétel nélkül *turbulens áramlásokkal* találkozunk (mert az átsapás legvalószínűbb Reynolds száma a (13.2) egyenlet szerint nagyon kicsi). Körkeresztmetszetű egyenes csővekben a *kifejlett turbulens* áramlás (Reynolds számtól függő) sebességprofilja (13.1. ábra) közelebb áll a *súrlódásmentes* áramlás egyenletes sebességprofiljához, mint a lamináriséhoz. (Ezért a súrlódásmentes közelítés sokszor jobb eredményt ad, mint a viszkozus közelítés.) A turbulens áramlások *differenciálegyenlete* a Reynolds-féle átlagolt differenciálegyenlet, a (9.13) egyenlet. Ennek alkalmazását azonban megnehezíti, hogy a *feszültségtenzor függését* az áramlás paramétereitől nem ismerjük eléggé. A műszaki feladatok azonban kikényszerítik a megoldásokat (ezért kísérletekre vagyunk utalva).

A *turbulens áramlások* lényegét több neves szerző magyarázta. Amíg a *mechanizmusok elmélete* (ami véges sok merev test mozgását írja le) *véges szabadsági fokú* mechanikai rendszerekkel foglalkozik, addig a kontinuum *végtelen sok* szabadsági fokkal rendelkezik.¹⁶⁴ Ez azt jelenti, hogy adott határoló falak között a pillanatnyi (időfüggő) áramlás nagyon nagy változatosságot mutathat. Ugyanakkor a turbulens áramlás (a pillanatnyi sebesség és nyomás időbeli átlagértéke), szerencsés esetben

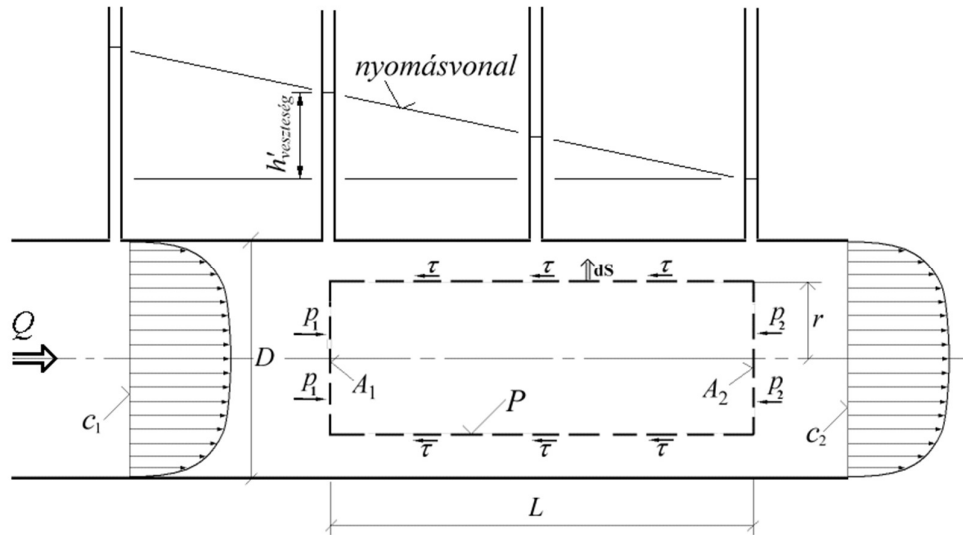
¹⁶³A lamináris áramlást *rétegesnek*, a turbulens *gomolygónak* is nevezik.

¹⁶⁴Egy áramlási tér belsejében felvesszünk mondjuk 100 000 pontot. Mindegyik pontnál a *kezdeti* sebességet (3 komponenssel) tetszőlegesen megadhatjuk. Így reális áramlási konfigurációt nyerünk, a rendszer szabadsági foka: 300 000. Választhatunk azonban több pontot is, ezért mondjuk azt, hogy az áramlás szabadsági foka *végtelen*.

(ha a beáramlás kedvező és nincs határréteg leválás), *adott falak között* a tapasztalatok szerint (kísérleteknél, működő rendszerekben) *egyetlen* áramlási konfigurációt enged meg. Ennek oka az, hogy akármilyen kicsiny is a viszkozitás, az áramlás kis egyenlőtlenségeit (és az áramlásba jutott kis örvényeket) a viszkozitás felemészti, és a kicsit rendszertelenül mozgó pillanatnyi áramlást a határoló felületek és az *átlagos* nyomáseloszlás az *axiómáknak* megfelelő irányba terelik. Tehát a Reynolds-féle differenciálegyenlet a turbulens áramlások lehetséges konfigurációit a gyakorlatban ugyanúgy szabályozza, mint Navier-Stokes a laminárisokét, vagy az Euler egyenlet a sűrűdásmentes folyadékokét.

Valóságos folyadékokban a csúsztató feszültségeket, *lineáris* sűrűdési törvényű folyadékok esetén *viszkozitásokkal*, a (8.16) egyenlettel számítjuk.¹⁶⁵ A leggyakrabban előforduló ilyen folyadékok (víz és levegő) viszkozitása kicsiny (8. fejezet), ezért *rövid* egyenes csövekben kialakuló áramlásaikra a határréteggel kiegészített *sűrűdásmentes* modell (5.1. példa) jól alkalmazható. Azonban *hosszú* egyenes csövekben kialakuló áramlásokban a viszkozitás hatása már nem hanyagolható el.

13.2. példa. Sűrűdásos áramlás hosszú egyenes csőben



13.3. ábra. Hosszú egyenes csőben kifejezett sűrűdásos áramlás

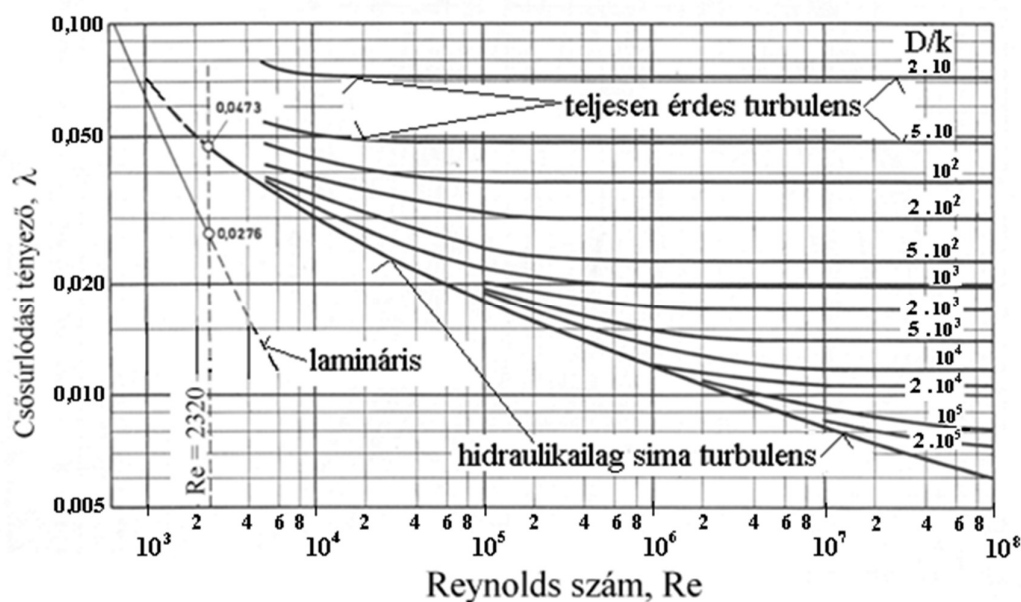
A 13.3. ábra körkeresztmetszetű vízszintes csőben, hosszú egyenes csőszakasz után *kifejezett* (lamináris vagy turbulens) áramlást vázol. Az ábra felső részén a csőhöz *elképzelt* üvegcsövek csatlakoznak, amelyekben az álló víz szintje a csőben uralkodó helyi nyomás értékét jelzi (nyomásvonalakat vízvezetékek számításánál gyakran használunk). Az áramlást akkor mondjuk *kifejezettnek*, ha a *sebességmező* csőirányban változatlan. A *nyomás* azonban változik, az áramlás irányába haladva *egyenletesen csökken*. Az L hosszon létrejövő áramlási veszteség $h'_{\text{veszteség}}$ értékét is jeleztük az ábrán.

Egyenes cső áramlási vesztesége:
$$h'_{\text{veszteség}} = \lambda \frac{L}{D} \frac{c^2}{2g} \quad , \quad (13.3)$$

ahol $h'_{\text{veszteség}}$ (m) az áramlási veszteség az *áramló közeg oszlopmagasságában* kifejezve (13.3. ábra), λ a cső-sűrűdési tényező (13.4. ábra), L a cső hossza, D a cső belső átmérője, $c = Q/A$ az átlagsebesség a csőben, Q a térfogatáram (m^3/s), A a cső belső szelvényének területe (m^2), és g a nehézségi gyorsulás. Az áramlási veszteség értéke *nyomás dimenzióban* (N/m^2):

$$(p_1 - p_2) = \rho g h'_{\text{veszteség}} \quad .$$

¹⁶⁵ Bonyolultabb sűrűdési törvényű anyagokkal a *reológia* foglalkozik.



13.4. ábra. A λ csőszűrlődési tényező diagramja (Moody-féle diagram) [124]

A csőszűrlődási tényező diagramját a 20. században évtizedekig gyűjtött mérési adatok alapján állították össze. Az ábrán $\lambda = \lambda(Re, D/k)$, ahol Re a (13.1) egyenlet szerinti Reynolds szám, D a cső belső átmérője, és k a csőfal belső (nedvesített) felületének átlagos (csúcstól csúcsig) mért érdessége (D/k a relatív érdesség reciprokja). Ha mérésből (vagy rajzról) ismerjük az érdesség szabványos Ra mérőszámát (a középvonaltól mért eltérés négyzetes átlagértékét), akkor a csúcstól-csúcsig mért érdesség közelítő értékére realisztikus becslés: $k \sim 6 Ra$, [123]. Az érdesség mérőszámára néhány tájékoztató adat [124]:

- Új fém cső: $k = 0 - 0,0015$ mm,
- Hegesztett acél cső: $k = 0,05 - 0,2$ mm,
- Öntöttvas cső bitumen bevonattal: $k = 0,12 - 3$ mm,
- Beton cső: $k = 0,15 - 0,8$ mm.

A csőszűrlődési diagramban mindkét független változó több nagyságrendet változik (a skálák logaritmi-
kusak). A *lamináris áramlás* viszonylag kis Reynolds számoknál jelentkezik, és a laminárisból turbulensbe való
átcsapás (lásd (13.2) egyenletnél) a csőszűrlődési tényező jelentős megnövekedésével jár. Adott Reynolds szám-
nál az érdesség (k) növelésével a csőszűrlődési tényező (λ) a függőlegesen egyenes mentén változik.

*Adott cső esetén (D/k adott) a csőben áramló folyadék sebességét (és egyúttal a Reynolds számot) fokozatosan növelve a következők történnek: A diagrammon a *lamináris áramlás* tartományából az *átcsapás* után a *hidraulikailag sima turbulens áramlás* görbéjére jutunk. Ha a cső belső felülete nagyon sima, akkor a felület (egy határnál kisebb) érdessége *nem befolyásolja* a csőszűrlődási tényezőt. Ilyen érdességű felületekre mondják (nem csak csövek esetén) hogy *hidraulikailag simák*. (Ilyen áramlásokban a határoló fal kicsiny érdessége nem befolyásolja az áramlást.) A csőben tovább növelve a sebességet az érdesség hatása megjelenik, a λ tényező értéke a konstans D/k görbe mentén változik. Először csökken, majd vízszintessé válik. A vízszintes szakaszra érve azt mondjuk, hogy a *teljesen érdes turbulens áramlás* tartományába jutottunk. Ekkor a Reynolds szám további növelésének nincs hatása λ alakulására. A diagram *egyik* tanulsága tehát az, hogy a hidraulikailag sima görbe alatti tartományban az érdességnak, és a D/k görbék vízszintes szakaszait tartalmazó tartományban pedig a Reynolds számnak *nincs hatása* az áramlásra.*

Visszatérve a 13.3. ábrán vázolt áramlásra, a szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületre alkalmazzuk **(II_d)** axiómát $\sim (3.5)$ egyenletet:

Stacionárius, lamináris vagy turbulens:
$$\mathbf{0} = - \int_{S(t_1)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) + \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} \, dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} \, \mathbf{dS} \quad . \quad (13.4)$$

Itt $S(t_1)$ a 13.3. ábrán jelölt hengeres ellenőrző felület, $S(t_1) = A_1 + P + A_2$, ahol A_1 a belépő felület, P a palást, A_2 a kilépő felület. A belépő felületen a sebességeloszlás ugyanolyan, mint a kilépőn (mert *kifejlett*

áramlásról van szó) és a P paláston nincs folyadék átlépés (mert, ha volna, akkor az A_2 felületen más áramlás volna, mint A_1 -en). Ilyen sebességviszonyok esetén (13.4) egyenletben az impulzuserőket kifejező integrálok egymást kiegyenlítik. A vízszintes irányú erőhatások számítása az érdekes, a függőleges nehézségi erő érdektelen. Az A_1 és A_2 felületen a nyomásokból származó vízszintes irányú erő egyensúlyt tart a paláston ébredő τ csúsztató feszültséggel számítható erővel:

$$(p_1 - p_2) r^2 \pi = \tau 2r\pi L \quad (13.5)$$

A nyomáskülönbség mindig ugyanakkora (akár abszolút nyomással, akár légkörre vonatkoztatott túlnyomással, akár redukált nyomással számítjuk). *Lamináris* áramlás esetén τ a viszkózus csúsztató feszültség, *turbulens* áramlás esetén pedig a viszkózus és turbulens feszültség összege a (8.25) egyenlet szerint. A (13.5) egyenletből, $(p_1 - p_2) = \rho g h'_{vesztés}$ helyettesítésével, (13.3) alapján:

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2)r}{2L} = \frac{r \rho g h'_{vesztés}}{2L} = \frac{r \lambda}{2D} \frac{\rho c^2}{2} \quad (13.6)$$

A *kifejlett* (lamináris vagy turbulens) csőáramlásban tehát a *csúsztató feszültség arányos* az r sugárral. Mivel a gyakorlatban λ értékét elég jól ismerjük (13.4. ábra), ezzel a képlettel az egész áramlási térben meg tudjuk határozni τ értékét. (Ezt a képletet *közelítésként* más geometriájú, nem kifejlett áramlásokra is használjuk.)

Különbö a λ csőáramlási tényező meghatározható (a 13.4. ábra helyett) a következő képlettel is:

Colebrook–White formula:

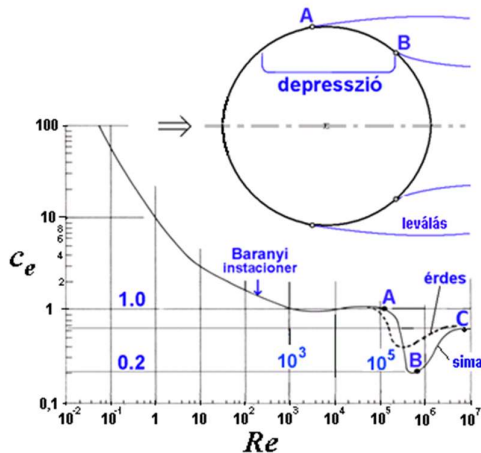
$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \log \left(\frac{k_s / D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \right]^2} \quad (13.7)$$

ahol "log" tizes alapú logaritmust jelöl, k_s a *homokérdesség*, amelyre: $k_s \sim 1,7 Ra \sim 0,267 k$ [125, 123], ahol Ra a szabványos érdesség (a felület középvezonától számított eltérés négyzetes átlagértéke) és k a csúcstól csúcsig mért átlagos érdesség. A (13.7) egyenlet ugyan implicit, de könnyen programozható. A jobboldalon először a Pattantyús-féle $\lambda = 0,02$ értéket helyettesítve a képlettel számítjuk λ első közelítését, majd a jobboldalon ezt helyettesítve a másodikat, és így tovább. Az eljárás gyorsan konvergál.

13.3. példa. Körhenger körüli valóságos áramlás

Körhenger körül kialakuló *valóságos* áramlásokat vizsgálunk (13.5. ábra). A henger szélcsona mérőterében van, a megfújás iránya vízszintes és merőleges a henger alkotóira. A dimenzió nélküli változók:

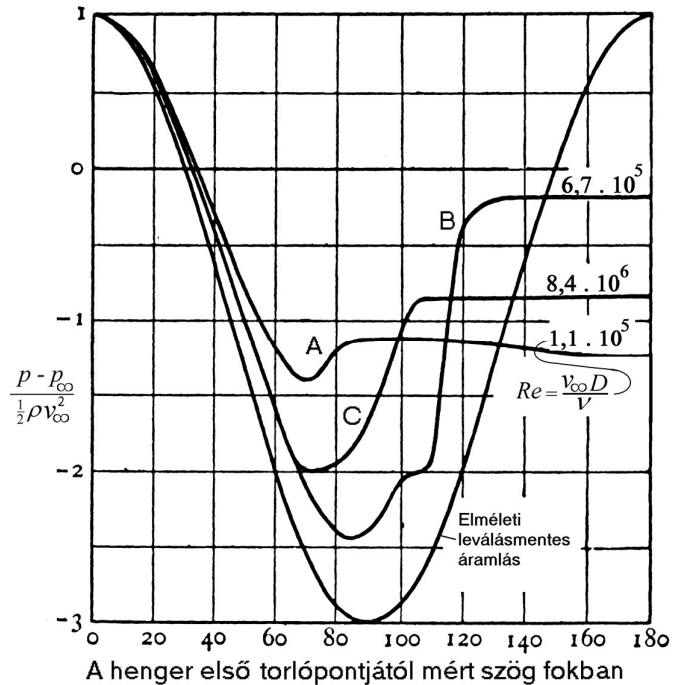
a **Reynolds szám:** $Re = \frac{D v_\infty}{\nu}$, és az **ellenállástényező:** $c_e = \frac{F_e}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 A_v}$, (13.8)



13.5. ábra. A henger $c_e - Re$ diagramja

lái pontja a hengeren egy 4° szélességű szögtartományban ingadozott. Az **A** pontnál ($Re = 10^5$) az ellenállás meglepő módon csökkenni kezd (a 0,2 értékre!). A henger körül *mérték* a nyomás időbeli átlagát (13.6. ábra),

ez betekintést ad arról, hogy mi történik. A henger homlokfelületén, a $0 - 60^\circ$ tartományban) az *elméleti sűrűlódásmentes* görbe jól követi a *valóságos* áramlások görbéit. A 13.5. ábrán megjelölt **A**, **B**, **C** pontokhoz tartozó nyomáseloszlások görbéin (13.6. ábra) a henger *hátoldalán* szinte állandó nyomást látunk (ezért a leválások "holt terét" esetenként állandó nyomású zónával modellezzük). A nyomásgörbéken azt a pontot tekintettük a határreteg *leválási pontjának*, ahol ráfordul a hátoldali állandó nyomásra. Az **A** pontnál (és előtte Re hosszú tartományában) a leválás már a homlokfelületen elkezdődik (13.5. ábra felső része). A **B** pontnál két okból kisebb az ellenállástényező: egyrészt a hátoldalon nagyobb az ellennyomás (13.6. ábra), másrészt a leválási pont jelentősen hátra csúszik (13.5. ábra). A **B** görbén a leválási pontig (kb. 130°) a határreteg szinte "visszafekszik" a hengerre, mert a henger oldalán egy *depressziós* (kisnyomású) *zóna* (13.5. ábra) alakult ki, ami visszahúzza a folyadékot a hengerre (tapasztaljuk ezt a hatást a Coanda effektusnál is, 13.4. példa). A **C** ponthoz tartozó nyomásgörbe az előbbi két görbe közé esik (13.6. ábra), és a hozzá tartozó c_e érték is köztes.

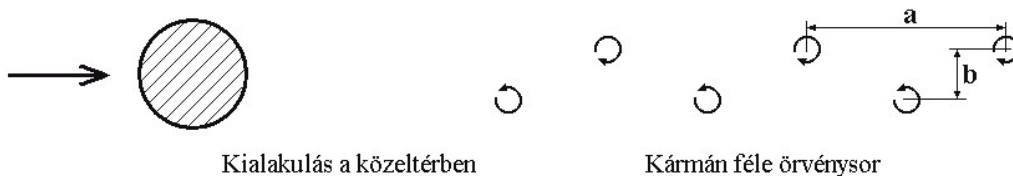


13.6. ábra. Átlagos nyomás a henger felületén

Az **A**→**B** letörés (13.5. ábra) Re számát *kritikus Reynolds számnak* nevezik (szélszárnak minősítésénél használják). Ha a henger felülete érdes, akkor Re növelésekor a letörés hamarabb következik be (13.5. ábra). Ez jelzi, hogy a letörés a határreteg állapotától (is) függ. A határreteg lehet lamináris vagy turbulens.

A Reynolds számot alulról növelve a kritikus érték felé, a *szakirodalom szerint* a határreteg *átcsapási pontja* (ahol a határreteg *laminárisból turbulenssé* válik) a hengerről levált határretegben egyre közelebb kerül a hengerhez, és amikor a henger és a levált határreteg közötti szűk részből az oda kerülő (erőteljesebben vibráló) turbulens határreteg kiszállítja az ott lévő (stagnáló) folyadékot, akkor a határreteg *visszafekszik* a hengerre, és bekövetkezik a c_e tényező jelentős csökkenése (13.5. ábra).

A $Re > 65$ tartományban a henger mögött *Kármán-féle örvénysort* találunk (13.7. ábra). Sűrűlódásmentes síkáramlásokban a pontszerű örvények vonzzák és taszítják egymást, ezért felmerült a kérdés, hogy a sorba rendeződött jobbra-balra forgó örvények miért nem ugranak szét? Kármán bizonyította, hogy $b/a = 0,281$ arány esetén (13.7. ábra) az elméleti örvénysor stabilis. Valóságos áramlásban az örvények a henger után a közel térben rendeződnek, és felveszik ezt az arányt. Az örvények cirkulációja jelentős. $Re > 1000$ esetén az örvénysor a henger után messzire nyúlik, amíg a viszkozitás felemészti.



13.7. ábra. Kármán-féle örvénysor

Arra a kérdésre is választ keresünk, hogy a *közeltérben* (13.7. ábra), hogyan alakulnak ki az örvények? A BME Vízgép laboratóriumában Varga és Sebestyén nagysebességű filmfelvételeket készített a kavitációs csatornában *ékmodell* mögött keletkező örvényekről [65]. (Az örvényképződés mechanizmusa *körhenger* modell mögött ugyanilyen.) A kavitációs örvénysor azért alkalmas a vizsgálatokra, mert a mozgó folyadéktömegek világosan elkülönülnek a gőzzel telt üregektől. A filmfelvételek alapján a kavitációs örvény keletkezése kicsit egyszerűsítve a következő módon történik: A 13.8a ábrán az ék utáni kavitációs főüregben egy kis sugár kezdemény látható. A sugár áthalad az üregen és eléri a főüreg másik oldalát (13.8b ábra). Ez az a pillanat, amikor egy kavitációs üreg leválik a főüregből. A leváló üreg kontúrját óramutatóval ellentétes irányban követve a vonalat érintő sebességkomponens mindenütt pozitív. Tehát a leváló üreget nagy cirkulációjú folyadéktömeg veszi körül. Tovább fejlődve a sugár benyomja a korábbi főüreg másik oldalát (ez szépen látszik a filmfelvételeken). Kis idő múlva egy sugár kezdemény indul az új főüregnek erről az oldaláról (13.8d ábra), és tovább fejlődve a 13.8e ábrát kapjuk, ami a 13.8a ábra tükörképe. Most tehát erről oldalról indul el egy sugár a főüreg másik oldala felé. Végül tehát azt látjuk, hogy az örvényeket a főüregben kialakuló *sugarak keltik*. A sugarak *alternálva* (felváltva) jelennek meg a főüreg két oldalánál, ami egyúttal magyarázatot ad arra is, hogy a lényegében sűrűdásmentes folyadékban **hogyan keletkeznek** kétirányban forgó, jelentős cirkulációjú örvények (amelyek rendeződve a Kármán-féle örvénysort alkotják).

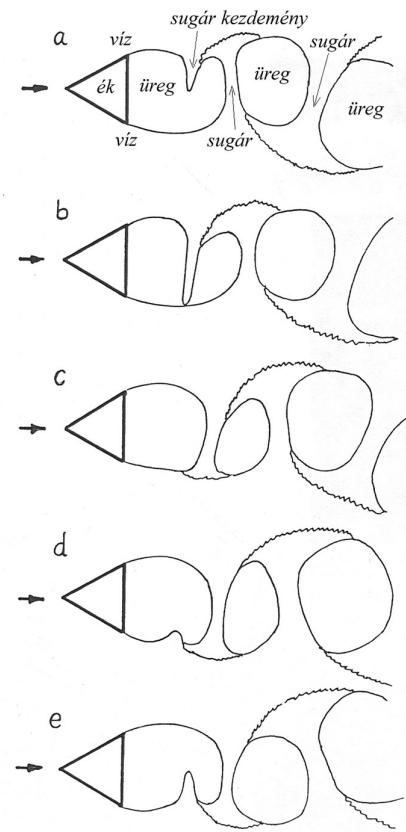
Kísérleti bizonyítéka van annak is, hogy *kavitációmentes* áramlásokban (szélcatornáknál) az örvényképződés mechanizmusa hasonló a 13.8. ábrához, csak az üregeket kitöltő folyadéktömeg a sugarak áthaladását fékezi.

Érdeemes az ék+főüreg cirkulációjának időbeli változását is követni. A 13.8. ábrán az egész folyamat a vízszintes tengelyre szimmetrikus. Ezért közel sűrűdásmentes áramlást feltételezve az ék+főüreg cirkulációja a 13.9. ábra szerinti. A leváló örvények mindig elviszik a forgásirányuknak megfelelő cirkulációt, és az ék+főüreg cirkulációja a zérus körül ingadozik.

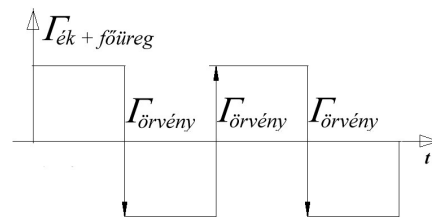
A hengerről leváló *örvénypárok* frekvenciáját jelölje n . A dimenzió nélküli frekvencia a

Strouhal szám:
$$St = \frac{nD}{v_\infty} \quad (13.9)$$

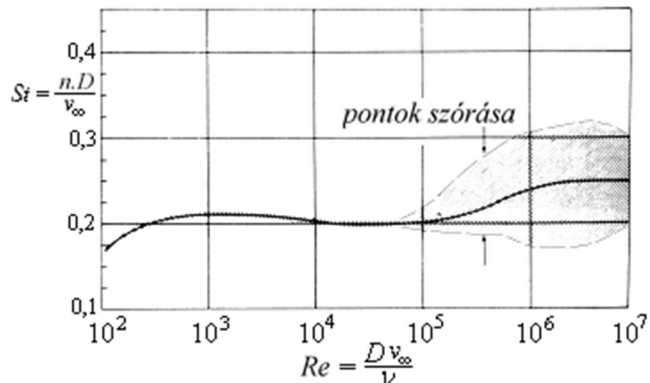
Az örvénypárok keletkezési idejét mérték, ebből számolták a 13.10. ábra frekvenciáit. A $10^2 < Re < 10^5$ tartományban egyetlen görbét kaptak: az örvényleválás *periodikus*. A $10^5 < Re$ tartományban azonban az örvényleválási idő szabálytalanul ugrándozott (50 %-os eltérésekkel is). Ilyen Re számoknál tehát az örvényleválás *nem periodikus* (de kváziperiodikus).



13.8. ábra. Kavitációs örvény keletkezése



13.9. ábra. Az ék + főüreg cirkulációjának változása



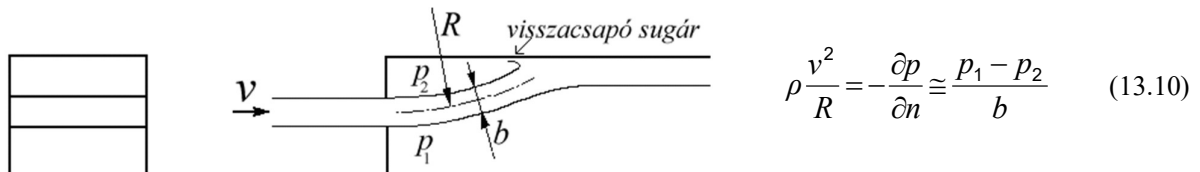
13.10. ábra. A hengerről leváló kavitációs örvénypárok dimenzió nélküli frekvenciája

Az ókori görögök aeoli hárfájának húrjait a szél gerjesztette. A szép hangot bizonyára periodikus örvényleválás keltette. A szabálytalan leválás inkább "fehér zajt" kelt. A turbulens áramlásokat az utóbbi évtizedekben jelentősen fejlesztett "káosz" elmélet is tárgyalja¹⁶⁶, és ebben a periodikus áramlásoknak kitüntetett szerepe van.

Végül néhány mondat a Kármán-féle örvénysorok energetikai viszonyairól. Ha a henger álló vízben vontatjuk v_∞ nagyságú sebességgel, akkor a hengerhez rögzített vonatkoztatási rendszerben ugyanilyen örvénysor alakul ki. A vontatáshoz F_e vonóerő szükséges, a befektetett teljesítmény: $P = F_e v_\infty$. Adott Re esetén a 13.10. ábrából meghatározható n , a másodpercenként leváló örvénypárok száma. Feltételezve, hogy a P teljesítmény teljes egészében az örvénypárok mozgási energiájának létrehozására fordítódik: $P = 2nE_1$, ahol E_1 az egy örvényhez tartozó mozgási energia. Az idő múlásával ezt a teljesítményt emészti el a viszkozitás. F_e -t (13.8)₂-ből helyettesítve, $b \sim D$ közelítéssel azt a becslést kapjuk, hogy az örvények az álló folyadékban a v_∞ sebességű hengert kb. $0,7v_\infty$ sebességgel követik.

13.4. példa. Coanda effektus

Coanda léglökéses repülőgépnél tapasztalta, hogy a sugár a gép testéhez tapad. A róla elnevezett jelenség megértése az áramlástan alapvető ismerete. Itt egy 2D-s esetet mutatunk be. A 13.11. ábra bal oldalán levő téglalap alakú részből a légsugár egy közeli fal mellett áramlik egy nagy térbe (jobb oldali ábra). Ha a fal nem lenne ott, akkor a sugár egyenes vonalban haladna tovább. A fal azonban ott van, és azt tapasztaljuk, hogy a sugár a falhoz tapad. Ez a *Coanda effektus*.



13.11. ábra. Coanda effektus, a téglalap szelvényű légsugár a falhoz tapad

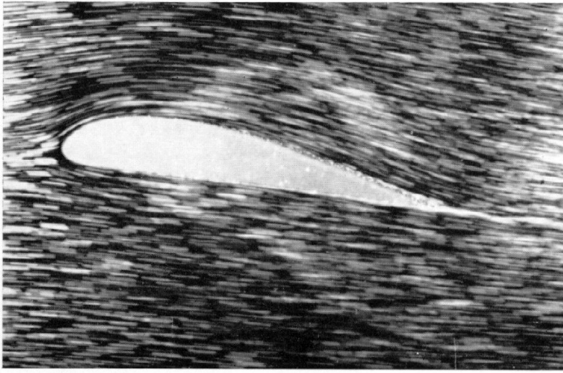
A jelenség magyarázata a következő. Az oldalfalak biztosítják, hogy síkáramlásról van szó. Az áramlás indításakor a sebességet fokozatosan növelik. A részből kiáramló turbulens sugár kicsit szétterül, és a széle eléri a falat (esetleg csak messze). A fal és a sugár között zárt tér keletkezik. Ebből a sugár turbulenciája kihordja az ott lévő légtömeg egy részét, és ezért a nyomása p_2 csökken a sugár másik oldalán levő p_1 nyomáshoz képest (13.11. ábra). Ez a nyomáskülönbség húzza a falhoz a sugarat! A vékony sugár középvonalán haladó részecskének a $p_1 - p_2$ nyomáskülönbség szolgáltatja a centripetális gyorsulást az R sugarú simulóköri történő mozgáshoz, ezt fejezi ki a (13.10) egyenlet, amiben az R -en kívül minden paraméter konstans, és ezért R is konstans, tehát a sugár alakja *körív*. A falhoz a körív ferdén közelít, ezért a tövében egy kis visszacsapó sugár keletkezik. Végül gondoljuk meg, hogy a sugár elfordulása milyen p_2 értéknél áll meg? Nyilván akkor, amikor a turbulens sugár által időegység alatt magával ragadott, elvitt légtömeg \dot{m}_1 , és a visszacsapó sugár által időegység alatt bevitt légtömeg \dot{m}_2 , egyforma lesz: $\dot{m}_2 = \dot{m}_1$. Számítással a Coanda effektust nyilván csak olyan szoftver tudná követni, amelyik ezeket a légtömegeket számítani tudja (a 2010-es években ez irreálisnak látszik). A *Coanda jelenség* lényege: **a depressziós zóna magához húzza az áramló közeget**. Ez a hatás megjelenik *víz-sugarak* esetén is, levegőbe vagy vízbe történő áramlásnál. Körkeresztmetszetű 3D-s sugaraknál is tapasztaljuk a Coanda effektust, de más fizikai hatások hozzájárulnak a sugarat falhoz húzó nyomáskülönbséghez.

13.5. példa. Valóságos áramlás szárnyszelvény körül

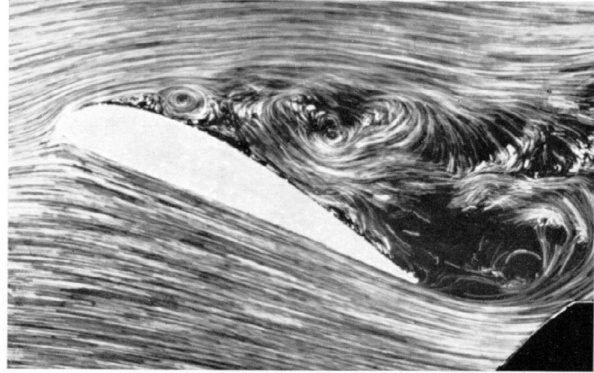
Szabad felszínű víz áramlásába Prandtl szárnyszelvényeket helyeztünk, és a felszínre szórt konfettik útját fényképeztük (13.12. és 13.13. ábrák). A fényképeken látható vonalak az expozíciós idő alatt megtett utak (az irányuk jelzi a helyi sebesség irányát, és a hosszúságuk arányos a helyi sebességgel).

Kedvező megfújás esetén a szárny körüli áramlás a 13.12. ábra szerinti. Ha a profil végénél ilyen áramlás alakul ki, ezt "sima leáramlásnak" nevezik. Túl nagy *megfújási szög* esetén (13.13. ábra) a határréteg a profil

¹⁶⁶Magyar tanulmányok: [140], [141], [142], [143].



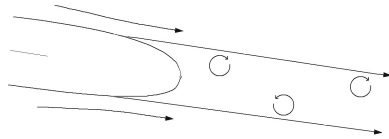
13.12. ábra. Szárnyról sima leáramlás (Prandtl)



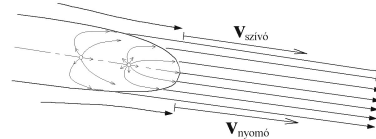
13.13. ábra. Szárnyon leválás (nagy megfújási szögnél)

orra közelében "leválik". A Knapp-féle ciklusnak megfelelően (12.4. példa) örvények keletkeznek, és a szárny-profil háta mögött nagy kiterjedésű, erősen turbulens leválási tartományt látunk.

A *sima leáramlás* valójában azt jelenti, hogy a profil végénél a határréteg a profil mindkét oldalán leválik (13.14. ábra), és a profil mögött Kármán-féle örvénysort találunk. *Sűrűlédásmentes* számítási modell esetén ezt sokszor úgy modellezzük, hogy a profil belsejében forrásokat képzelünk el (13.15. ábra), melyekből annyi folyadék-tömeg áramlik ki, ami kitölti a szívó és nyomó oldali áramvonalak közötti rést. A profil végénél a nyomó és a szívó oldali áramvonal egymáshoz közel van, ott a nyomásuk majdnem egyforma. A sűrűlédásmentes számítási modellben érvényes a Bernoulli egyenlet, ezért a sebességeik is megegyeznek: $v_{szívó} = v_{nyomó}$ (13.15. ábra). A számítási modellben a profilból ilyen sebességű áramlást engedünk ki, a profilvégnél így lokálisan egyenletes áramlást nyerünk (ami számítástechnikailag kedvező).

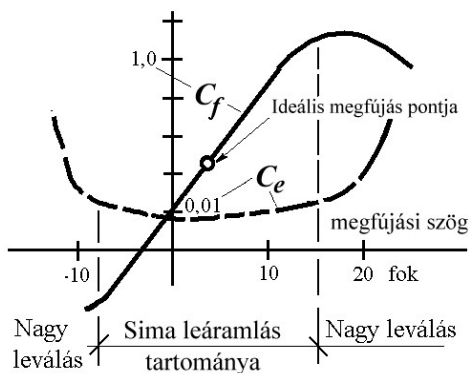


13.14. ábra. A profil mögötti Kármán-féle örvénysor



13.15. ábra. A profilvég áramlásának modellezése

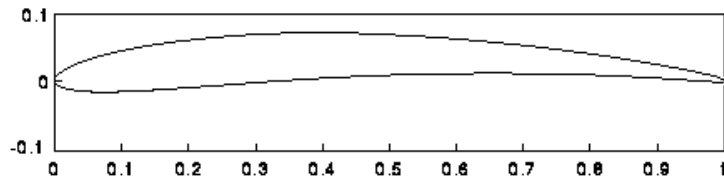
Szárnyprofilok körül a *valóságos* áramlások főbb dimenzió nélküli paramétereit: c_f , c_e , $\alpha_{megfújás}$ (értelmezésüket lásd a (12.37) egyenletnél). Egy szárny mérésének tipikus diagramja a 13.16. ábra.

13.16. ábra. Szárnyprofil c_f és c_e diagramja adott Reynolds számnál

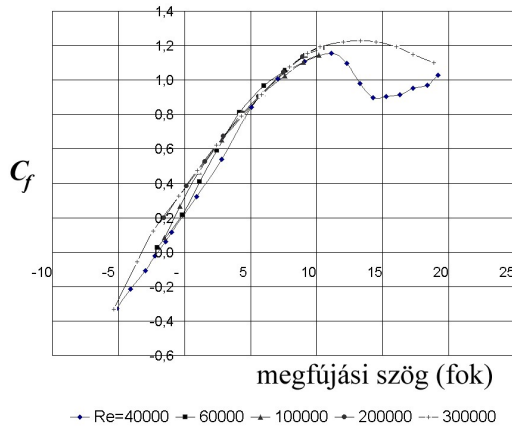
A c_f felhajtóerő tényező görbéjének közel *lineáris* szakaszán a profil végénél *sima leáramlás* (13.12. ábra) található. Ez a szakasz azért fontos, mert ennek pontjai jól számíthatók sűrűlédásmentes áramlás feltételezésével (12.2. példa). Túl nagy megfújási szögnél (az ábrán $\alpha_{megfújás} > 15^\circ$) a profil szívott oldalán nagy leválás keletkezik (13.13. ábra). Itt az áramlási veszteség is növekszik, amit a c_e ellenálláserő tényező görbéje is jelez. Túl kis szögnél ($\alpha_{megfújás} < -8^\circ$) a profil másik oldalán jelentkezik a nagy leválás. A jól számítható (sima leáramlású) tartomány *határai* nehezen számíthatók (méréssel határozzuk meg).

Érdekes megfigyelni, hogy a diagrammon c_f és c_e skálája különböző, c_f nagyságrendje $\sim 1,0$, c_e nagyságrendje $\sim 0,01$. Egy szárnyprofil annál "jobb", minél nagyobb a c_f értéke és minél kisebb c_e érhető el vele. Az *ideális megfújás pontja* (amikor a profilhoz közeledő áramlás sebességeloszlása a szárny két oldalának elején közel egyforma) a c_e minimuma közelében található. Amikor adott alkalmazáshoz (repülőgép, vízgép lapátok) katalógusból szárnyprofilot választunk, az ideális pont helye fontos adat.

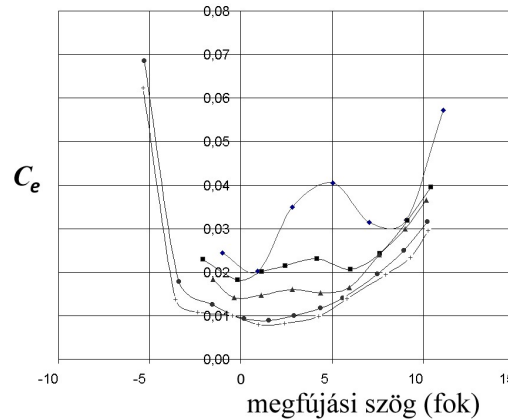
Példaként az **A18** jelű szárnyprofil (13.17. ábra) jelleggörbéit mutatjuk be. A 13.18. és 13.19. ábrát az Illioniszi egyetem különböző Reynolds számoknál mért jelleggörbéiből számítottuk (www.amber.aae.uiuc.edu/~mselig/pd/pub/lsat/vol1).



13.17. ábra. **A18** profil, tervezte R. Cooney, University of Illionis



13.18. ábra. Az **A18** profil felhajtóerő tényezői



13.19. ábra. Az **A18** profil ellenállás tényezői

Az **A18** profil vékony, enyhén ívelt és a hátoldala hasonlít egy henger felületéhez (13.17. ábra). A sima leáramlás tartományát a $-3^\circ < \alpha_{\text{megfújás}} < +10^\circ$ határoknál állapítjuk meg (mindkét diagrammot figyelembe véve). Ebben a szögtartományban a c_f tényező csak kissé függ a Reynolds számtól, alatta és fölötté azonban a c_f -ben eltolódások jelentkeznek. A c_e tényező határozottan csökken Re növelésével, bár vannak egyedi hatásokra utaló jelek is. Arra következtetünk, hogy $\alpha_{\text{megfújás}} < +10^\circ$ esetén a határréteg még nem vált le a profil hátoldaláról.

Repülőgépeknél a gép súlyát a szárnyon ébredő felhajtóerő ellensúlyozza. Annak érdekében, hogy a felhajtóerő repülés közben mindig (léglökések esetén is) biztonságosan meglegyen, a tervező a gép üzemi pontját a c_f görbén a maximumtól távolabb (például az ideális megfújás pontja közelében) választhatja meg, az évtizedek során összegyűlt repülési tapasztalatok alapján.

A *szárnyprofilok körüli áramlás* jól számítható sűrűlódásmentes modellekkel, de csak a sima leáramlású tartományban, amit a $\mathbf{v}_{\text{szívó}} = \mathbf{v}_{\text{nyomó}}$ egyenlőséggel (13.15. ábra) lehet figyelembe venni (de helyette használható a Kutta-Zsukovszkij feltétel is, lásd a (12.36) egyenlet után.) A 12.2. példa közelítő egyenletei is a sima leáramlás feltételén alapulnak.

Szárnyprofilok körüli áramlások *sűrűlódásmentes* számításaiban a profil kontúrján az áramlási sebesség érinti a kontúrt (5.1. példa). Azonban, ha a *viszkózus* Navier-Stokes egyenletet alkalmazzuk a szárnyprofil körüli áramlás számítására, akkor az álló profilon a sebesség zérus (5.1. példa). Azonban a sima leáramlás feltételét ebben az esetben is valamilyen módon figyelembe kell venni. Ekkor a $\mathbf{v}_{\text{szívó}} = \mathbf{v}_{\text{nyomó}}$ egyenlőséget a profilvég közelében a *határrétegen kívüli* sebességre lehet alkalmazni. (A nagy leválás kezdete, és a sima leáramlás tartományának határpontjai ma még biztonsággal nem számíthatók.)

A valóságos áramlások törvényszerűségeit úgy foglalhatjuk össze, hogy a sűrűlódásmentes áramlások jól követik a valóságot mindaddig, amíg határréteg leválást nem tapasztalunk. A leválás megjelenését több tényező befolyásolja: a határoló fal érdessége, a határréteg állapota (lamináris vagy turbulens), a főáramlás turbulenciája, a fal és a levált határréteg közötti tér (alakja és mérete). Esetenként a határréteg visszafekszik a testre (kedvező hatásokat okozva), ami attól függ, hogy a geometria (a falak alakja) lehetővé teszi-e *depressziós zónák* létrejöttét. Ezeket ma még nem tudjuk pontosan számítani, ezért kísérletekre vagyunk utalva.¹⁶⁷

¹⁶⁷ Helytelen az a gyakorlat, hogy laboratóriumokat szüntetnek meg, arra számítva, hogy mindent tudunk számítani.

14. fejezet. Vízgépek erőhatás számításai

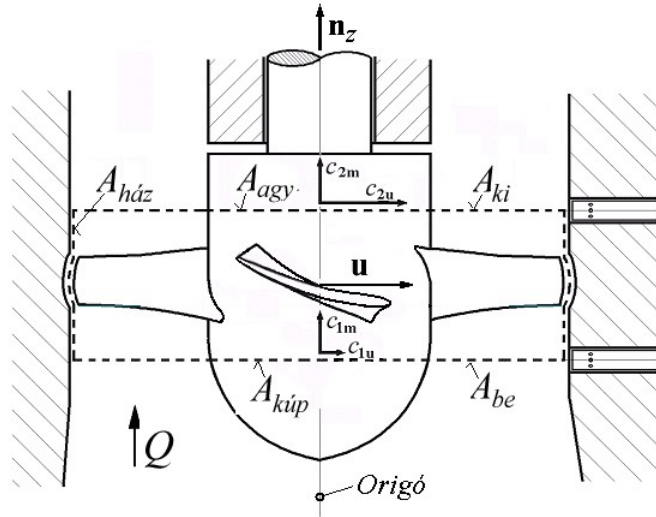
Szűkebb értelemben *vízgépeknek* nevezik a vizet továbbító *szivattyúkat* és a *víz turbinákat*.¹⁶⁸ A szivattyúk túlnyomó többsége *örvényszivattyú*. Ezeknek fő szerkezeti eleme a lapátokkal ellátott *forgó járókerék* [89] (7.2. példa).¹⁶⁹ Más közegekkel működnek, de szerkezetileg hasonló felépítésűek a ventilátorok, fűvók, turbokompresszorok, gáz- és gőzturbinák. Az örvényszivattyúk és a vízturbinák ezekkel együtt az **áramlástechnikai gépek** nagy családját alkotják (angolul *turbomachines*). Közös szerkezeti jellemzőjük a lapátokkal ellátott forgórész. Magyar nevük abból ered, hogy a működési elvük (és a tervezésük) egy *áramlástechnikai* törvényen, nevezetesen a **(IIIId)** axiómán alapul.

14.1. példa. Szárnylapátos szivattyú járókerék alapegyenlete

Az áramlástechnikai gépek *alapegyenletét* Csanady [4] nyomán *szárnylapátos szivattyúra*¹⁷⁰ mutatjuk be.

A szivattyú (14.1. ábra) *stacionárius* üzemét vizsgáljuk. A gép n fordulatszáma és Q vízmennyisége időben közel állandó. A lapátok előtt és után ki van jelölve a beáramlás A_{be} és a kiáramlás A_{ki} körgyűrű alakú szelvénye. Ezeken ismerjük az áramlási sebességeket például mérésből (az ábra jobb oldalán láthatók a betolható sebességmérő műszerek). A szaggatott vonallal kijelölt térfogatban a víz és az acél *egyetlen kontinuumot* alkot, a lapátok felületén a *szakadási feltételek* érvényesülnek (5.1. példa). Egyszerűség kedvéért a járókerék tömör acél, például Hooke-féle rugalmas test.¹⁷¹ A víz áramlása *súrlódásos* és *turbulens*. Ezek a feltételek a *valóságos* áramlási viszonyokat jól közelítik. A felállítandó elméleti modellt nagyjából $\pm 1\%$ pontossággal kívánjuk használni (lásd 1. fejezet I. táblázat).

¹⁷²



14.1. ábra. Szárnylapátos szivattyú járókerék vázlata

Hengerkoordinátákat választunk (r, φ, z) , az Origó a tengely középvonalán van, és a z tengely \mathbf{n}_z egységvektorát felfelé irányítjuk (14.1. ábra). A szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületre alkalmazzuk a **(IIIId)** axiómát $\sim (3.6)$ egyenletet:

$$\mathbf{0} = - \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{c} (d\mathbf{S}) + \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad (14.1)$$

ahol \mathbf{r} a helyvektor, ρ a víz sűrűsége, \mathbf{c} az áramlási sebesség (*abszolút* sebesség, a szivattyú állórészéhez képest), \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás (függőleges), \mathbf{F} a feszültségtenzor (a viszkózus és turbulens feszültségtenzor összege, (8.25) egyenlet). Annak érdekében, hogy tengelyre vonatkozó nyomatékokat kapjunk (mint az 1.7. példában) az egyenletet skalárisan szorozzuk \mathbf{n}_z egységvektorral, és az első tagot átvisszük a másik oldalra:

¹⁶⁸Tágabb értelemben a *vízgépészethez* sok más berendezés tartozik.

¹⁶⁹A szivattyúk másik nagy csoportja a térfogatkiszorításos (dugattyús) szivattyúk. (Nagy nyomásokra alkalmazzák).

¹⁷⁰Magyarországon 354 nagy *belvízátemelő szivattyútelep* működik a Vízügyigazgatóságok kezelésében. Hóolvadás vagy nagyobb esők után a földekről a csatornákkal összegyűjtött vizet ezek a szivattyútelepek emelik a folyómedrekbe. A feladat nagyságát jellemezi, hogy az Európai Unióban a *belvízmentesített terület nagysága* Franciaország után hazánkban a legnagyobb. A feladatot manapság nagyméretű *szárnylapátos szivattyúk* látják el [88].

¹⁷¹A valóságban a járókerék üreges, de ez a járókerék és az áramlás kölcsönhatása szempontjából érdektelen. A rugalmasság feltétele lehetővé teszi például a lapátrezgések hatásának vizsgálatát is, ami ma még újdonság.

¹⁷²A ma használatos számítási szoftverek a szivattyúk munkapontjának és hatásfokának számítására $\pm 5\%$ pontosságot igyekeznek garantálni. A $\pm 1\%$ elérése előrelépést jelentene.

$$\mathbf{n}_z \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{c} (d\mathbf{S}) = \mathbf{n}_z \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \mathbf{n}_z \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} . \quad (14.2)$$

A térfogati integrál zérus, $\mathbf{n}_z(\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = 0$, mert \mathbf{n}_z és \mathbf{g} párhuzamos.

$$\text{Az ábra alapján:} \quad S(t_1) = A_{kúp} + A_{be} + A_{ház} + A_{ki} + A_{agy} . \quad (14.3)$$

Az $A_{kúp}$, $A_{ház}$, A_{agy} felületeken: $\mathbf{c} d\mathbf{S} = 0$, A_{be} felületen: $\mathbf{c} d\mathbf{S} = -c_{1m} dA$, és A_{ki} felületen $\mathbf{c} d\mathbf{S} = c_{2m} dA$.

$$M_{impulzus} = \mathbf{n}_z \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{c} (d\mathbf{S}) = \int_{A_{ki}} r \rho c_{2u} c_{2m} dA - \int_{A_{be}} r \rho c_{1u} c_{1m} dA , \quad (14.4)$$

ahol r az első hengerkoordináta (a dA elemi terület távolsága a tengely középvonalától), a sebességek a 14.1. ábra szerinti, c_{1u} és c_{2u} pozitív, ha \mathbf{u} irányába mutat, c_{1m} és c_{2m} pozitív (a legjobb hatásfokú pont közelében mindegyik körgyűrűben). $c_{2m} dA$ és $c_{1m} dA$ a dA felületelemeken fölfelé áramló vízmennyiségek, $M_{impulzus}$ az impulzuserők tengelynyomatékának (-1)-szerese¹⁷³, amit az 1.7. példa nyomán számítunk az impulzuserők \mathbf{u} irányú komponenseinek (-1)-szereseivel: $\rho c_{2u} (c_{2m} dA)$, $\rho c_{1u} (c_{1m} dA)$ és az r erőkar szorzataival.

A szaggatott ellenőrző felületen ébredő feszültségek nyomatékát az 1.7. példa mintájára számítjuk:

$$\mathbf{n}_z \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_{S(t_1)} r \tau_\varphi dA , \quad (14.5)$$

ahol τ_φ a dA felületelemen ébredő, a φ koordinátavonal irányába mutató csúsztató feszültség, τ_φ pozitív, ha a járókereket a gép forgásirányába igyekszik fordítani. Az A_{agy} felületen (14.1. ábra) a tömör acélban ébredő τ feszültségek a tengely nyomatékát közvetítik az ellenőrző felülettel határolt tömeg felé (lásd alább (14.6)₁ egyenletet). A vízben a viszkózus csúsztató feszültségeket mindenütt elhanyagoljuk, kivéve a járókerék ház és a járólapátok közötti résben. Az ott ébredő súrlódás visszatartani igyekszik a járókereket (ezért szerepel (14.6)₂-ben a mínusz előjel).¹⁷⁴ Az $A_{kúp}$ felületen egy kicsiny nyírófeszültség ébred, ami a vízterelőkúpot forgatja a forgás nélkül érkező folyadékban, ezt azonban elhanyagoljuk. A turbulens nyíró feszültség az A_{be} szelvényen szintén elhanyagolható, **de az A_{ki} szelvényen** a 8.2. példa alapján figyelembe kell venni! Tehát a nagyobb nyomatékok:

$$\int_{A_{agy}} r \tau_\varphi dA = M_{tengely} , \quad \int_{A_{ház}} r \tau_\varphi dA = -M_{ház} , \quad \int_{A_{ki}} r \tau_\varphi dA = M_{turb} . \quad (14.6)$$

A szárnylapátos szivattyú járókerék alapegyenlete:

$$M_{impulzus} = \int_{A_{ki}} r \rho c_{2u} c_{2m} dA - \int_{A_{be}} r \rho c_{1u} c_{1m} dA = M_{tengely} - M_{ház} + M_{turb} . \quad (14.7)$$

Az egyenlet szerint az impulzusnyomaték és a tengelynyomaték lényegében egyenlő. A másik két nyomaték csak korrekciós tag.¹⁷⁵

A (14.7) alapegyenlet összefüggést teremt a szivattyú egyik *külső* üzemi paramétere (a tengelynyomaték) és a gépben kialakuló áramlás egyik fontos *belső* paramétere (az impulzusnyomaték) között. Járókerekek tervezésénél ezzel állapítható meg a sebességek peremfeltétele a 14.1. ábra szaggatott ellenőrző felületén. A járókerékáramlások ellenőrző méréseinél ennek a teljesülése igazolja a tervezéshez felvett értékek helyességét. Az alapegyenlet jelentőségét az elvárt ± 1 %-os pontosság emeli ki!

¹⁷³ Az így definiált $M_{impulzus}$ a szivattyú normál üzemállapotaiban pozitív, és a mérésekből könnyű kiértékelni. Szemléletes jelentése: a járókerék ennyivel növeli meg az átáramló folyadéktömeg impulzusnyomatékát.

¹⁷⁴ Hibás szerelés következtében az is előfordulhat, hogy a lapát vége hozzáér a házhoz, és fémes súrlódás próbálja visszatartani a járókereket. Helyes szerelés esetén is előfordulhat, hogy egy résbe kerülő kavics visszatartó hatást fejt ki.

¹⁷⁵ Átlagos szárnylapátos szivattyú legjobb hatásfokú üzempontjára becslés: $M_{ház} < 0,01 M_{tengely}$, és $M_{turb} \approx 0,02 M_{tengely}$. Ez a becslés a 2000-es években használatos $r = 0,0005 D$ résméretű gépekre vonatkozik ($D = 1000$ mm átmérőjű járókerék részére $r = 0,5$ mm nagyságú hézagmérő dugható be).

14.2. példa. Az Euler-Segner egyenlet

A (14.7) alapegyenletből elhagyjuk a korrekciós tagokat:

$$M_{tengely} = \int_{A_{ki}} r \rho c_{2u} c_{2m} dA - \int_{A_{be}} r \rho c_{1u} c_{1m} dA = M_{impulzus} . \quad (14.8)$$

Az ω szögsebességgel szorozva, az A_{be} felületen $r\omega = u_1$ a helyi kerületi sebesség, az A_{ki} felületen $r\omega = u_2$, ezekkel:

$$M_{tengely} \omega = \int_{A_{ki}} u_2 \rho c_{2u} c_{2m} dA - \int_{A_{be}} u_1 \rho c_{1u} c_{1m} dA . \quad (14.9)$$

Az *elméleti szállítomagasságot* az energiamegmaradás alapján definiáljuk: $M_{tengely} \omega = \rho Q g H_{elméleti}$. A szivattyú ezt a szállítomagasságot *produkálná*, ha nem lenne veszteség. Előbbi egyenletből erre:

$$H_{elméleti} = \frac{\int_{A_{ki}} u_2 c_{2u} c_{2m} dA - \int_{A_{be}} u_1 c_{1u} c_{1m} dA}{gQ} . \quad (14.10)$$

Tekintettel arra, hogy:

$$Q = \int_{A_{be}} c_{1m} dA = \int_{A_{ki}} c_{2m} dA , \quad (14.11)$$

látható, hogy $H_{elméleti}$ két *súlyozott integrálközép* különbsége, ahol a súlyok a c_m meridiánsebességek.

Ha az A_{be} és A_{ki} felületet felbontjuk $2r\pi(dr)$ területű elemi körgyűrűkre, amelyekben az áramlást *kör-szimmetrikusnak* tekintjük (tehát $c_{1m} = c_{2m}$ állandó a körgyűrűn belül), akkor (14.10)-ben az integrálokból a körgyűrűkben konstans u_2 , c_{2u} , u_1 , c_{1u} sebességeket kiemelve, és Q -val egyszerűsítve kapjuk:

Euler-Segner egyenlet¹⁷⁶ (sugártól függően)
$$H_{elméleti}(r) = \frac{u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}}{g} . \quad (14.12)$$

További egyszerűsítésekkel az egyenletnek többféle alakja nyerhető. Ha figyelembe vesszük a járókerék hatásfokát, akkor $H_{járókerék}(r) = \eta_{járókerék} H_{elméleti}(r)$ egyenlőség a járókerék *tényleges szállítomagasságát* szolgáltatja a sugár függvényében.¹⁷⁷ Az egyenlet az *egész járókerékre* is vonatkoztatható valamilyen átlagos sebességekkel (például az A_{be} és A_{ki} szelvények területfelező körén érvényes értékekkel). Ha az áramlás *forgás nélkül* érkezik a járókerékre (a tervező így szikszik ezt biztosítani), akkor $c_{1u} = 0$ minden sugáron és:

Euler-Segner egyenlet (forgás nélküli belépésre)
$$H_{elméleti}(r) = \frac{u_2 c_{2u}}{g} . \quad (14.13)$$

A szárnylapátos szivattyúk tervezői és üzemeltetői ezt az egyenletet is széles körben használják. Az alapegyenlethez hasonlóan ez is a szivattyú egyik külső jellemzőjét (a szállítomagasságát) hozza kapcsolatba egy belső paraméterrel (c_{2u}), azonban az elhanyagolások miatt nem olyan pontos, mint a (14.7) alapegyenlet.

¹⁷⁶ Ezt az egyenletet a külföldi szakirodalom *Euler turbina egyenletnek* nevezi. Itt hozzá tettük *Segner* nevét a történeti hűség kedvéért. Segner János András (1704 – 1777) Pozsonyban született, középiskoláit Debrecenben, az egyetemet Jénában végezte. Ezt követően meghívták az akkor alakuló göttingai egyetem matematika professzorának. A matematika gyakorlati bemutatására Newton elvei alapján tervezett egy vízturbinát, ami Göttinga közelében működött is. (A világon ez volt az *első* gép, amit áramlástechnikai törvény alapján terveztek.) Publikációját és számításait megküldte Eulernek, aki nagy rendszerező lévén egyszerű képletbe foglalta (turbinára a képlet hasonló (14.12)-höz). Tisztelettel erre emlékezve, Segner nevét az egyenlethez kapcsoltuk.

¹⁷⁷ Az $\eta_{járókerék}$ meghatározása nehézkes. Bizonytalan szabály: $\eta_{járókerék} = (1 + \eta_{szivattyú})/2$.

14.3. példa. Szivattyú talpcsapágyára ható erő

A 14.2. ábrán vázolt szárnylapátos szivattyú talpcsapágyára ható erőt számítjuk adott n , Q , H üzemi pontban. A szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felület körülöleli a járókereket, majd a tengely mellett halad a talpcsapágyig. Itt erőátadás történik, végül a felület körülfogja a gumidugós tengelykapcsoló felet. Légkörhöz képesti túlnyomásokkal számolunk, ezért a levegőben levő felületeken a felületi erő zérus.

A függőleges erőkomponenst számítjuk (IIId) ~ (3.5) egyenlettel:

$$F_{\text{talpcsap}} = G_{\text{forgórész}} + G_{\text{víz}} + p_2 A_2 + I_2 - p_1 A_1 - I_1 \quad (14.14)$$

$G_{\text{forgórész}}$ a szivattyú forgórészének a súlya,

$G_{\text{víz}}$ az 1 és 2 szelvények közé zárt víz súlya,

$p_2 A_2$ a 2 szelvényen a nyomásból lefelé ható erő,

$p_1 A_1$ az 1 szelvényen a nyomásból fölfelé ható erő,

I_2 a 2 szelvényen lefelé ható impulzuserő,

I_1 az 1 szelvényen fölfelé ható impulzuserő.

Az alsó nyakcsapágyban és a tömítésnél függőleges erőátadás nincs, mert, ha az egyik irányban (a forgással) legyőztük a sűrűlódást, akkor a másik irányban sem jelentkezik.¹⁷⁸ A gumidugós tengelykapcsolónál is a függőleges erő elhanyagolható.

$$c_1 = Q/A_1, \quad c_{2m} = Q/A_2, \quad c_3 = Q/A_3,$$

$$I_1 = c_1 \rho Q, \quad I_2 = c_{2m} \rho Q. \quad (14.15)$$

A manometrikus szállítomagasság a nyomócsonkra vonatkozik, ezért a járókerék szállítomagassága kicsit nagyobb:

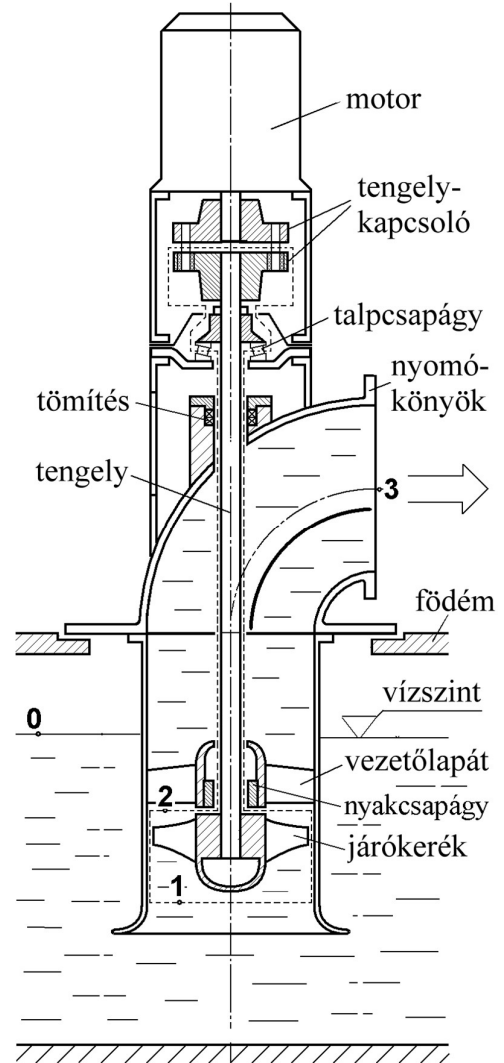
$$H_{\text{járákerék}} = H_{\text{manometrikus}} + \zeta \frac{c_3^2}{2g}, \quad (14.16)$$

ahol ζ a vezetőlapátózás, a felszálló cső és a nyomókönyök veszteségtényezője (becslés: $\zeta \approx 0,7$). A járókerék elméleti szállítomagassága: $H_{\text{elméleti}} = H_{\text{járákerék}} / \eta_{\text{járákerék}}$ (becslés: $\eta_{\text{járákerék}} \approx 0,96$ a legjobb hatásfokú pontnál). Végül az Euler-Segner egyenletből: $c_{2u} = (g H_{\text{elméleti}}) / u_2$, mert $c_{1u} = 0$. Ezzel a sebességek mindenütt ismertek.

A p_1 nyomást a 0 és 1 pontra felírt Bernoulli egyenletből, a p_2 nyomást pedig a

$$H_{\text{járákerék}} = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_{2u}^2 + c_{2m}^2}{2g} + z_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} + z_1 \right)$$

egyenletből nyerjük. Így mindent ismerünk ahhoz, hogy a talpcsapágyra ható erőt a (14.14) egyenlettel kiszámítsuk.



14.2. ábra. A szivattyú talpcsapágyára ható erő számításához

¹⁷⁸ Régebben gyártottak olyan egyenáramú generátorokat, melyeknél a forgórész nem volt axiális irányban megtámasztva. Üzem közben a forgórészt az állórész kicsiny mágneses ereje húzta a helyére. A súlyos forgórészt üzem közben egy ceruzavéggel el lehetett tolni, mert a csúszócsonkban a forgás a sűrűlódást a kerületi irányba legyőzte, és így axiális irányban sem jelentkezett. Ugyanezt álló gépnél a Coulomb sűrűlódás miatt nem lehetett megtenni.

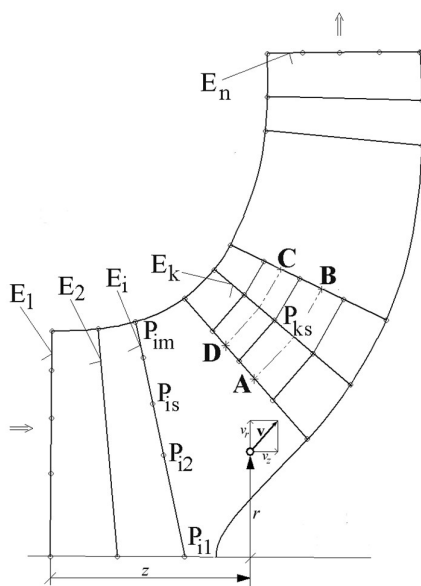
15. fejezet. Vízgépek sebességeloszlás számításai

Sebességeloszlások számítására a kereskedelmi forgalomban kapható *szoftverek* is alkalmasak, de saját magunk is készíthetünk céljainknak megfelelő *kis célprogramokat*. Gyakorlati szempontból *mindkét megoldás egyformán értékes*, ha az eredmény jó.

A kereskedelemben kapható *nagy szoftverek* általában vagy **végeselemes** programok (amelyek az ismertett axiómákból származó variációs elveken alapulnak), vagy a **véges térfogatok** módszerét alkalmazzák (melynél az egyes térfogatelemekre lényegében az axiómákat¹⁷⁹ vagy ezek következményeit írják fel). Mindkét módszernél sűrű pontháló tölti ki az áramlási teret, ami nagy memória kapacitást igényel. Ezek a szoftverek sok matematikai kínódástól megóvnak, de költségesek, és csak akkor eredményesek, ha áramlástani szempontból helyesen alkalmazzák őket.¹⁸⁰

Kis célprogramok készítésénél általában a **peremelem módszert** részesítjük előnyben. Ekkor a pontháló csak a peremre terjed ki, és a differenciálgeometria integrálképleteit alkalmazzuk a megoldás előállítására. A peremelem módszerek hosszú programokat, de sokkal kisebb memóriakapacitást igényelnek, mint az előbb említett nagy szoftverek, ezért személyi számítógépen is kényelmesen futtathatók. A következő példákban ilyen célprogramokat is bemutatunk.

15.1. példa. Forgásszimmetrikus áramlás számítása



15.1. ábra. Forgásszimmetrikus áramlás számítása az ABCDA útvonallal

Határgörbéivel adott forgásszimmetrikus térben *súrlódásmentes, forgásszimmetrikus* áramlást számítunk (15.1. ábra). (Az ábra egy félaxiális szivattyú járókerékének meridiánmetszete. A *lapátmentes* térben kialakuló áramvonalakat kívánjuk számítani.) A \mathbf{v} áramlási sebesség az ábra síkjába esik, a koordinátái: $v_z(z, r)$, $v_r(z, r)$. Az E_1 szakaszon egyenletes beáramlást, E_n -en szakaszon egyenletes kiáramlást veszünk fel.

A feladat számítására a szakmai irodalom több módszert is ajánl. Itt olyan megoldást mutatunk be, ami az *összenyomhatatlan és cirkulációmentes* áramlások alaptulajdonságait használja ki, és *közvetlenül* a keresett áramvonalakat szolgáltatja. Ez egyúttal szemlélteti, hogy a saját készítésű célprogram milyen egyszerűen nyújthat használható eredményt.

Felvesszük az ábra szerinti $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_n$ egyenes szakaszokat a végpontjaikkal, amelyek a belső és a külső határgörbén vannak. Magukat a határgörbét is e szakaszok végpontjaival adjuk meg, így viszonylag kevés bemenő adatot kell előkészíteni.

Az áramlási feladatot *iterációval* oldjuk meg. Kezdetéhez mindegyik egyenes szakaszon felvesszünk m számú pontot (P_{is} pontok, $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, m$). Ezek tetszés szerint felvehetők, de célszerű, ha a közöttük levő szakaszokhoz egyforma csonkakúp területek tartoznak.¹⁸¹

Rögzített s esetén, midőn i végigfut az $i = 1, \dots, n$ indextartományon, a P_{is} pontok egy kezdeti áramvonal pontjait reprezentálják. A rögzített s -hez tartozó pontokat kis egyenes szakaszokkal összekötve, a törött vonal egy kezdeti áramvonalat képvisel. Két egymás melletti törött vonal határol egy áramlási csatornát, ami így sok kis négyszögből áll. A belépő E_1 egyenesen ismerjük a belépő sebességet. Ezzel kiszámítjuk mindegyik

¹⁷⁹Számítástechnikai okokból előnyös az integrál alakú axiómák használata. Szakadásos esetben lényeges, hogy (Ih), (IIh) és (IVh) is szerepeljen az egyenletek között!

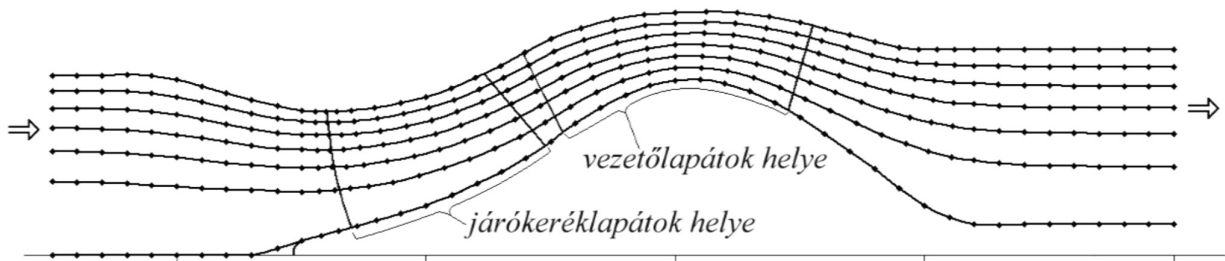
¹⁸⁰Fisher és szerzőtársai (VOITH cég) írták [26]: "Egy jól belőtt alacsonyabb szintű (számítástechnikai) eszköz egy hidraulikai betekintéssel rendelkező tapasztalt tervező mérnök kezében (a szerzők "kalibrált" mérnöknek nevezik, ami a mérőműszerek kalibrációjának légkörét idézi) manapság bizonyítottan jobb eredményre vezet, mint amit egy látszólag magasabb szintű eszközzel egy egész team produkál, ha a mérés és a számítás korrelációját nem ismerik, és az áramlás mikéntjébe nincs betekintésük." Ez a megállapítás ma is érvényes.

¹⁸¹A P_{is} és $P_{i(s+1)}$ pontok közötti távolság forgatásával előálló csonkakúpról van szó.

csatornában az átáramló folyadékmennyiséget. (Ha az E_1 egyenesen a pontok közötti szakaszokhoz egyforma körgyűrű területek tartoznak, akkor mindegyik csatornában ugyanaz a folyadékmennyiség áramlik!) A P_{is} pontok ismeretében az áramlási tér minden pontjánál kiszámítjuk a sebesség egy közelítő értékét úgy, hogy a kis négyszögek *középvonalán* (pont-vonallal húzva) a közelítő sebességvektor érinti a középvonalat, és a nagysága a folyadékmennyiség osztva a keresztmetszettel.

Olyan sebességmezőt kívánunk előállítani, amelyre az *összenyomhatatlanság* és az *örvénymentesség* is teljesül. A sebességeket az előbbiek szerint számítva, az összenyomhatatlanság eleve teljesül. Így már csak az örvénymentességet kell biztosítani. Tekintsük az áramlási tartomány egyik belső pontját, P_{ks} -t (15.1. ábra). Ehhez négy kis négyszög kapcsolódik. Számítsuk ki a *cirkulációt* P_{ks} körül az ABCDA zárt törött vonalon az előbbiek szerinti sebességekkel. A kis egyenes szakaszokon a sebesség vonalintegrálját közelítjük a két végpontnál érvényes sebesség átlagának és a szakaszt képviselő vektornak a skalár szorzatával. Ha a cirkuláció zérus, akkor a P_{ks} pontot helyben hagyjuk. Ha nem zérus, akkor P_{ks} -t az E_k egyenesen kicsit elmozdítva (a többi pontot változtatlanul hagyva), újra kiszámítjuk a változott ABCDA-n, a változott sebességekkel a cirkulációt. Az így kapott két cirkuláció értékéből lineáris interpolációval meghatározzuk az E_k egyenesen azt a helyet, ahol a cirkuláció zérus lenne. A P_{ks} pont *új helyét* itt állapítjuk meg. A számítást az áramlási tartomány *összes belső* pontjára így elvégezve (a külső pontok változatlanul maradnak), az új belső pontok új áramlási csatornákat határoznak meg, melyekre az egész számítás megismételhető. Az iterációt addig folytatjuk, amíg a P_{ks} pontok meg nem állapodnak. Ekkor a tartomány belső pontjainál számított kis cirkulációk négyzetösszege is nagyon kicsi. Az eljárás elve tehát az, hogy "kicsiben" biztosítjuk a cirkuláció zérus voltát, és így - mivel nagy zárt görbék cirkulációja mindig összehető a belsejükben húzott kis zárt görbék cirkulációinak összegéből - bármely nagy görbén is zérus a cirkuláció.

Az így elvégzett iteráció több esetben nem konvergált. Ekkor *relaxációs iterációt*¹⁸² alkalmaztunk ($R = 0,5$ relaxációs konstanssal). Az iteráció esetenként akkor sem konvergál, ha a kis négyszögek nagyon laposak, ekkor új pontelosztással kell indítani a számítást. Az eredményül kapott P_{ks} pontok meghatározzák a forgásszimmetrikus, összenyomhatatlan és örvénymentes áramlás keresett áramvonalai és a felvett E_i egyenesek metszéspontjait. A 15.2. ábra egy eredményfájl.

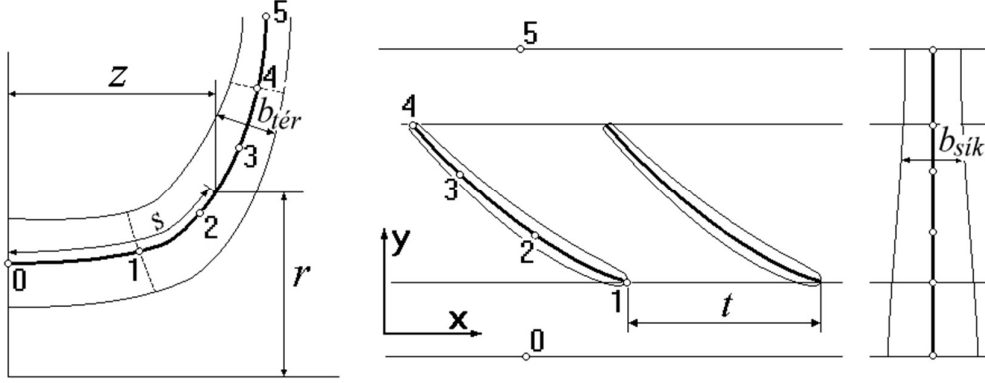


15.2. ábra. Félaxiális szivattyú meridiánáramlása (forgásszimmetrikus áramvonalak a lapátnélküli térben).

¹⁸²A V változó iterációját nem az eljárás által javasolt $V_{javasolt}$ értékkel folytatjuk, hanem $V_{új} = V_{régi} + R(V_{javasolt} - V_{régi})$ értékkel. Az R relaxációs konstans megválasztva, $0 < R < 1$ esetén *kisebbit* lépünk, mint a javasolt lépés!

15.2. példa. Szivattyúk jelleggörbéjének számítása

Az előbbi példában bemutatott meridiánáramlás lapátcsatornái kényelmes kiinduló adatrendszert biztosítanak a szivattyú jelleggörbéinek számításához. A lapátok belépő és kilépő élét berajzoljuk a meridiánáramlásba. A lapátok a két él között elterelik az áramlást. A kialakuló áramlás számítására közelítő módszert alkalmazunk. Ennek első lépése az, hogy a lapátcsatorna középfelületét leképezzük egy síkra.



15.3. ábra. A lapátcsatorna leképezése síkra

A 15.3. ábra bal oldalán egy lapátcsatorna látható, amit (r, φ, z) hengerkoordinátákkal kezelünk (r és z látható az ábrán, és φ egy szög, a z tengely körül). A lapát középfelületén kijelölünk négy pontot (1, 2, 3, 4), és ezeket leképezzük a síkra a következő egyenletekkel [131, 127, 128]:

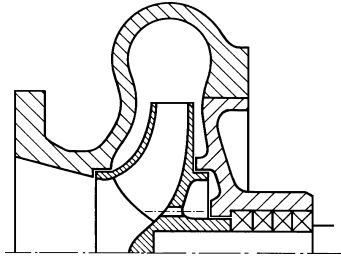
$$x = C\varphi, \quad y = C \int_0^s \frac{ds}{r}, \quad w_{sík} = \frac{r}{C} w_{tér}, \quad C = \frac{t N_{lapát}}{2\pi}, \quad a_{sík} = \frac{C}{r} a_{tér}, \quad b_{sík} = b_{tér}. \quad (15.1)$$

ahol S az (r, z) ponthoz vezető ívhossz (15.3. ábra), (a pontjaival adott vonalon egyszerűen számítható), x és y a síkbeli koordináták, w a lapátokhoz képesti *relatív sebesség* nagysága (a leképezés egymásnak megfelelő pontjaiban), C a leképezés konstansa, $N_{lapát}$ a járókerék lapátjainak száma, t a lapátok osztása a síkon (15.3. ábra), a a lapát vastagsága a középfelületen illetve a síkon, b a lapátcsatorna szélessége (a térben és a síknál egyforma). A középfelület ilyen leképezése szögártó, a lapátok körüli cirkulációt¹⁸³ és a csatornában haladó vízmennyiségeket megtartja. A 15.3. ábra változó szélességű *síkbeli* lapátrácsában a súrlódásmentes áramlás egyenleteit a hidrodinamikai szingularitások módszerével¹⁸⁴ számítottuk, majd a sebességeket visszaképeztük a térbe.

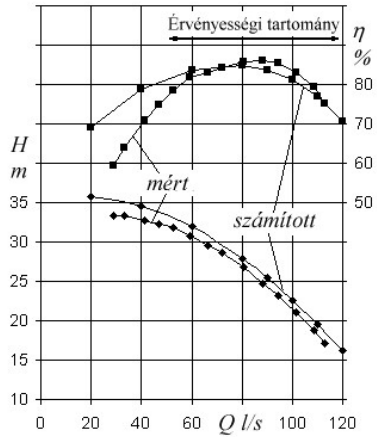
A számítási modell célja a szivattyú adott n fordulatszámahoz tartozó $H - Q$ és $\eta - Q$ jelleggörbéinek (15.5. ábra) *becslése*. A 3D-s turbulens áramlások számításai bizonytalanok. Ezért az áramlási veszteségeket jólismert 1D-s képletekkel becsültük. Olyan határrétegre, amelyik egy belépő éltől vastagszik, a *sík* lap határrétegére ismert c_e tényezőt alkalmaztuk az áramlást határoló nedvesített falakon ébredő τ csúszató feszültség meghatározására. Olyan felületen, amelyikre *kialakult* határréteg érkezik, a *cső* súrlódási diagram λ veszteségtényezőjét használtuk, a (13.6) egyenlet alapján. A járókerék lapátokra ferdén közelítő áramlás ütközési veszteségét a Borda-Carnot képlettel becsültük. A közelítésként alkalmazott képletek valamennyien 1D-s áramlásokra vonatkoznak (ezért nem érdemes a sebességek számítására 3D-s eljárást alkalmazni). Az előbb ismertetett 2D-s számítással a falakon nyert sebességekkel és az 1D-s veszteségtényezőkkel számítottuk a határréteg veszteségeket. Ehhez a λ és c_e tényezőkön kívül *más* tapasztalati tényezőt *nem* használtunk (ez a Csemniczky Jánostól származó elv teszi lehetővé, hogy a számítás különleges alakú szivattyúkra is alkalmazható). A részletek megtalálhatók a közleményekben [127, 128, 129, 131]. Egy számítási eredményt a X. táblázat és a 15.5. ábra szemléltet.

¹⁸³A térben a lapátok körül a középfelületen a $w_{tér}$ sebességgel számított cirkuláció *megegyezik* a síkban a lapátok körül a $w_{sík}$ sebességgel számított cirkulációval.

¹⁸⁴Grúber József és Czibere Tibor már a számítógép korszak előtt kidolgozták a szingularitások módszerét, amit a "magyar áramlástan iskolája" számos jeles képviselője továbbfejlesztett, lásd a Magyar Tudományos Akadémia könyvtárában.



15.4. ábra. C szivattyú metszetrajza



15.5. ábra. C szivattyú jelleggörbéi

X. Táblázat. C szivattyú veszteségei, $n = 1480$ ford/perc

Q , l/s	40	60	80	100	120
Lapátok súrlódása %	1,1	1,3	1,8	2,8	4,3
Súrlódás külső gyűrűn %	0,8	1,1	1,6	2,4	3,7
Súrlódás az agyon %	1,0	1,3	1,8	2,8	4,1
Keveredési veszteség %	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
Rés súrlódási vesztesége %	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Járókerék ütközési vesz. %	2,6	1,1	0,1	0,2	1,7
Lapátvég veszteség %	0,6	1,6	3,2	5,9	10,3
Csigaház határréteg vesz. %	0,2	0,2	0,3	0,4	0,6
Csigaház ütközési vesz. %	8,3	4,6	1,9	0,6	1,5
Összes hidraulikai vesz. %	14,9	11,4	11,0	15,1	26,4
Rés volumetrikus vesz. %	2,3	1,5	1,0	0,7	0,5
Tárcsasúrlódás %	4,0	3,0	2,6	2,5	2,5
Mechanikai veszteség %	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1
Összes veszteség %	22,4	17,1	15,8	19,4	30,5
H , m	34,6	31,9	27,9	22,6	16,2
P , kW	17,2	22,4	25,8	27,3	27,0
η , %	78,9	83,6	84,8	81,3	70,6

A lapátcsatornát a külső gyűrű belső oldala is határolja, ezen ébred a "Súrlódás külső gyűrűn", valamint a másik oldalon "Súrlódás az agyon", és a járókerék külső felületein a "Tárcsasúrlódás". Zárt járókerék esetén a résnek *súrlódási* veszteséget nem tulajdonítunk, de van *volumetrikus* (részvíz) vesztesége. A *mechanikai* veszteség a tömítéstől és a csapágytól származik. A mért és számított görbék az *érvényességi tartományban* (15.5. ábra) elég jól egyeznek. Az eltérést (kis Q értékeknél) egy nagy leválási zóna okozta.¹⁸⁵

15.3. példa. A peremelem módszer

A *peremelem módszerek* közös alapgondolata az, hogy az ismeretlen függvényt először a vizsgált tartomány *peremén* határozzuk meg (hosszú különleges számítással), majd a peremértékek ismeretében a tartomány belsejében a keresett függvényt (egyszerű integrálással). A módszerek előnye, hogy a számítás első fázisában az ismeretleneket csak a tartomány peremén keressük. Ezért kevés lineáris egyenletet kell megoldani. Az eljárás néhány fogását már vázoltuk *skalár* függvényekre (12.3., 12.4., 12.5., 12.6. példa). Itt egy *vektor* értékű függvényre mutatunk be egy 3D-s *elvi* számításmenetet.

Tekintsünk egy V tartományt, melynek határa (amit peremének nevezünk) S . A tartományban lehet egy S_D szakadási felület is (például a lapátok és a víz elválasztó felülete). Egy $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ függvényt keresünk a V tartományban (például az áramlási sebességet).

Tetszőleges függvény előállítható

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Psi_S + \text{rot } \mathbf{w}_S, \quad (15.2)$$

alakban, ahol Ψ_S és \mathbf{w}_S a **Stokes potenciálok** (22. fejezet) melyekre (22.3) és (22.4) alapján:

$$\alpha \Psi_S(\mathbf{x}_o) = \int_V \frac{\text{div } \mathbf{v}}{r} dV + \int_{S_D} \frac{[\mathbf{v}]}{r} dS - \int_S \frac{\mathbf{v}}{r} dS, \quad (15.3)$$

$$\alpha \mathbf{w}_S(\mathbf{x}_o) = \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{v}}{r} dV - \int_{S_D} \frac{[\mathbf{v}] \times \mathbf{dS}}{r} + \int_S \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{dS}}{r}. \quad (15.4)$$

¹⁸⁵Szivattyúk mért és számított jelleggörbéinek *eltérése*, a jó hatásfokú *érvényességi tartományban* (15.5. ábra), a H és η értékeiben *általában* $\pm 5\%$ határokon belül van. Ennek oka bizonyára az, hogy az *összveszteség* számítása sok kis tételből tevődik össze, és valamelyiknek akár 50 %-os hibája a végeredményt alig befolyásolja.

ahol \mathbf{x}_o tetszőleges rögzített pontja V -nek, α a V térfogat látószöge \mathbf{x}_o -ból (lásd a 21.11 egyenletnél), és $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|$ az integrálás \mathbf{x} futópontjának és a rögzített \mathbf{x}_o pontnak a távolsága.

A (15.2) - (15.4) egyenleteket is választhatnánk a megoldás alapjául. Azonban (15.2) egyenlet szerint \mathbf{v} -t *differentiálással* nyerjük Ψ_S és \mathbf{w}_S értékéből, ami numerikusan kedvezőtlen. Ezért célszerűbb Ψ_S gradienst és \mathbf{w}_S rotációját előállítani (a 12.3. példához hasonlóan). Ehhez (15.3) és (15.4) egyenleteket \mathbf{x}_o szerint kell differenciálni (amit $d/d\mathbf{x}_o$ -al jelölünk). Ennél felhasználjuk a következőt:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}_o} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\mathbf{x}_o} r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{x}_o - \mathbf{x}}{r} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_o}{r^3} = \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad , \quad \text{ahol} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad . \quad (15.5)$$

A (15.3) integráljainak a gradienst képezzük \mathbf{x}_o szerint. A gradiens képzés műveletét felcseréljük az integrálással. Az integrálban y/r típusú tagok szerepelnek, ahol y az \mathbf{x}_o -tól *független*. Így (20.9) szerint:

$$\left(\frac{1}{r} y \right) \nabla = y \frac{d}{d\mathbf{x}_o} \frac{1}{r} = \frac{y(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)}{r^3} = y \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad . \quad (15.6)$$

A (15.4) integráljainak rotációját képezve, ebben y/r típusú tagok szerepelnek, (20.13) alapján:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{r} y \right) = \left(\frac{d}{d\mathbf{x}_o} \frac{1}{r} \right) \times y = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times y}{r^3} = \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times y \quad , \quad (15.7)$$

ahol \times a vektoriális szorzást jelenti. A (15.2) egyenlet szerinti differenciálásokat elvégezve:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) = & - \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV - \int_{S_D} \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) ([\mathbf{v}] d\mathbf{S}) + \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) (\mathbf{v} d\mathbf{S}) + \\ & + \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dV - \int_{S_D} \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times ([\mathbf{v}] \times d\mathbf{S}) + \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times (\mathbf{v} \times d\mathbf{S}) \quad . \quad (15.8) \end{aligned}$$

Ez a **peremelem** számítások egyik **alapegyenlete**. Tetszőleges $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ függvényre **azonosságként** teljesül (ugyanúgy, mint például Gauss integráltétele). Ha nincs szakadási felület V -ben, akkor az S_D -n számítandó integrálok elhagyandók.

A legtöbb fizikai folyamatnál a divergencia és a rotáció kitüntetett szerepet játszik. Ha ezek értéke ismert, akkor a térfogati integrálokat ismert függvényekre kell számítani, ami megtehető mondjuk egy véges elemes felosztással. Ha a divergencia és a rotáció nem ismert, akkor felépíthetünk egy olyan iterációt, melynél a térfogati integrálokba az *előző iterációs lépésben* kiszámított divergenciát és rotációt helyettesítjük. Így a térfogati integrálást minden iterációs lépésben ismert függvényekkel végezzük, és amikor az iteráció végén a keresett függvény már alig változik, akkor a divergencia és a rotáció is a keresett függvény divergenciájánál és rotációjánál állapodik meg.

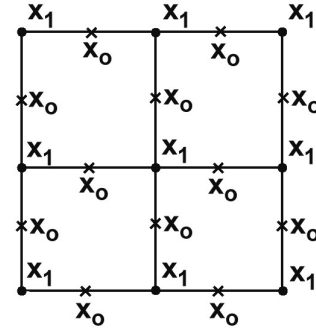
A megoldandó feladat tehát a következő:

- (i) egy $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ függvényt keresünk egy V térfogatban,
- (ii) $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ divergenciája és rotációja ismert V -ben,
- (iii) $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ néhány komponense ismert V határának egyes részein.

Ekkor a (15.8) egyenletre alapozott *peremelem módszer* egyik megoldásának *elvi menete* az alábbi.

A felületen két ponthálót választunk: \mathbf{x}_0 és \mathbf{x}_1 pontokat (például 15.6. ábra szerint), melyek elég sűrűn behálózzák az S felületet. (Egyszerűbb esetben \mathbf{x}_0 és \mathbf{x}_1 pontok egybeesnek.) A \mathbf{v} ismeretlen komponenseit az \mathbf{x}_1 pontoknál keressük. A (15.8) alapegyenletet viszont az \mathbf{x}_0 pontokra írjuk fel téglányösszeg formájában (vagy a peremelem módszer valamelyik másik formulájával [5]) úgy, hogy az integrálok közelítő összegeiben a $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ -nek az \mathbf{x}_1 pontbeli komponensei szerepeljenek. A (15.8) bal oldalán is $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ értékét interpolációval az \mathbf{x}_1 -beli komponensekkel fejezzük ki. Ha \mathbf{x}_0 az S_D szakadási felület pontja (ahol van érintősík), akkor (15.8) bal oldalán $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ -t a következő helyettesíti:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \approx \frac{\mathbf{v}^+(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}^-(\mathbf{x}_0)}{2}. \quad (15.9)$$



15.6 ábra. Ponteloszlás a peremelem módszerhez

Bármelyik \mathbf{x}_0 pontra felírt vektor egyenlet három lineáris egyenletet jelent az ismeretlen komponensekre. Elegendő számú \mathbf{x}_0 pontot felvéve több egyenletünk van, mint ahány ismeretlen. A túlhatározott lineáris egyenletrendszer megoldjuk, például a legkisebb négyzetes hiba módszerével. Így a peremen megismerjük $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ értékeit. Ezt követően a V térfogat belsejében $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ értékeit a (15.8) egyenlettel nyerjük, egyszerű integrálással.

16. fejezet. Vízűtés számítás

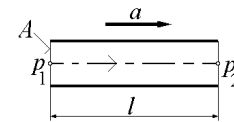
Folyadékokat is tartalmazó *hidraulikai rendszerek* (pl. szivattyútelep és csővezeték) legfontosabb üzemállapotai azok, amikor a rendszer *stacionárius* módon, hosszú ideig egyenletesen üzemel (ekkor jelentkezik az üzemköltség döntő része is). Azonban a rendszernek hibátlanul kell működni az indulás, üzemállapotváltás, és leállás folyamata során is, ezért ezeket a *transziens* (átmeneti) üzemállapotokat is számításokkal kell követni. Ilyen célt szolgál a *vízűtés számítás*.

Megkülönböztetünk *lassú* és *gyors* transziens folyamatokat. A *lassú* folyamatoknál a rendszer elemei közelítőleg úgy működnek, mintha stacionárius üzemállapotban lennének. A számításokat is az elemek ismert *stacionárius* jelleggörbéivel végezzük. A *gyors* folyamatoknál azonban egészen más a helyzet. Analizálni kell az egyes elemek (elsősorban a csövek) transziens viselkedését, és a számítást erre kell alapozni.

Hidraulikai rendszerek esetén egy másik körülmény is szerepet játszik. A rendszer összes elemének 3D-s számítása általában nem kivitelezhető (a hosszú csövek óriási memóriát igényelnének). Ezért a csövekben az áramlást 1D-s közelítéssel végezzük, annak tudatában, hogy ezzel komoly elhanyagolást teszünk. Ilyen esetekben nagy jelentősége van annak, hogy: (a) a számítási módszert mások is sikeresen alkalmazták, (b) megfelelő biztonsági tartalékot kell használni.

16.1. példa. Egyenes cső lassú transziens folyamatban

A 16.1. ábra csőszakaszában víz áramlik. A cső két végénél a nyomás különbözik: $p_1 > p_2$. A cső olyan rendszer része, melyben ez a nyomáskülönbség *lassan* jött létre, és a $(p_1 - p_2)$ nyomáskülönbség nagy (nem tulajdonítható csőfalon ébredő súrlódás hatásának). Ilyen körülmények között a nyomáskülönbség a csőben levő folyadéktömeget gyorsítja.



16.1. ábra. Gyorsító nyomáskülönbség

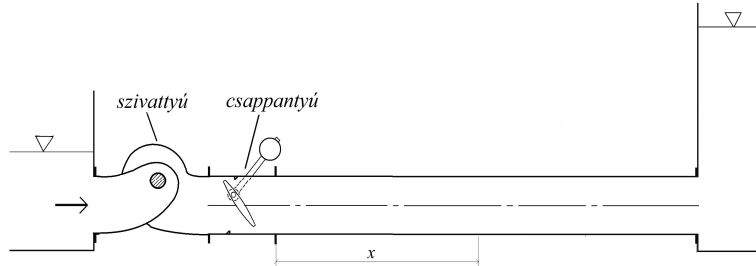
A folyadék tömege: $m = \rho A l$, ahol A a csőkeresztmetszet területe, l a cső hossza (16.1. ábra). Newton II. törvénye alapján: $(p_1 - p_2)A = ma$, ahol a folyadéktömeg gyorsulása, $(p_1 - p_2) = \rho g H_{\text{gyorsító}}$, ahol $H_{\text{gyorsító}}$ a nyomáskülönbségnek megfelelő *gyorsító folyadékoszlop magasság*. Az egyenletekből:

$$a = H_{\text{gyorsító}} g / l. \quad (16.1)$$

Lassú tranziens folyamat esetén a csőben levő víztömeg mozgása ezzel a gyorsulással számítható. Az eljárást nevezik "merev oszlop közelítésnek" is, mert a levezetés során a csőben levő víztömeget úgy kezeltük, mintha állandó sűrűségű szilárd test lenne.

Szám példa: $l = 10$ m hosszú cső végei között $H_{\text{gyorsító}} = 1$ m hat. A folyadéktömeg gyorsulása: $a = 0,1$ g .

Egyszerű szivattyútelep leállása



16.2. ábra. Egyszerű szivattyútelep vázlata

A 16.2. ábrán a szivattyú a vizet alacsonyabb vízszintű medencéből magasabb vízszintű medencébe nyomja. A szivattyú után egy súlyterhelésű csappantyú látható, ami a tengelye körül el tud fordulni. Amikor a szivattyú áll, a zárt csappantyú megakadályozza a víz visszaáramlását. A szivattyú *indításakor* a nyomás a szivattyú és a csappantyú között megemelkedik. Mivel a csappantyú tányér alsó része nagyobb területű, mint a felső, amikor a szivattyú nyomása elég nagy, a tányér alsó részén ébredő nyitó irányú erő nyomatéka a tengelyre nagyobb, mint a tányér felső részén ható erő és a zárósúly együttes záró irányú nyomatéka. Ekkor a csappantyú kinyit, és megindul a víz áramlása. A szivattyú *leállításakor* a csappantyú előtti nyomás lecsökken, és a nyitott tányér a zárósúly hatására visszafordul az ülésére. (A csappantyú *automatikus* elzárószerv.) A leállás időtartama alatt a felvív és az alvív szintkülönbségének hatására a nyomócsőben a víz áramlása *megfordul*. Sok szivattyútelepen ez még a csappantyú bezáródása előtt megtörténik. A csappantyútányér az ülésére érve *ütésszerűen* megáll. Ez ütésszerűen megállítja a nyomócsőben visszafelé áramló víztömeget is. A nagy mozgó víztömeg gyors megállítása nagy erőt igényel, ekkor jelentkezik a *vízütés*. Két esetet vizsgálunk:

A). Rugalmas folyadék merev csőben.

Közelítőleg ilyen például a betoncsőben áramló víz. A csappantyú zárásakor a nyomócső hosszú vízoszlopában elindul egy lökeshullám a nyomócső vége felé (ugyanúgy, mint a 2.6. példában). A csappantyú és a lökeshullám frontja közötti vízoszlop összenyomódik. Ezt a víz *rugalmassági modulusával*, az $E_{\text{víz}}$ anyagállandóval tudjuk számítani, amit a következő képlet értelmez:

$$\Delta p = E_{\text{víz}} \frac{\Delta V}{V} = E_{\text{víz}} \frac{\Delta \rho}{\rho} , \quad (16.2)$$

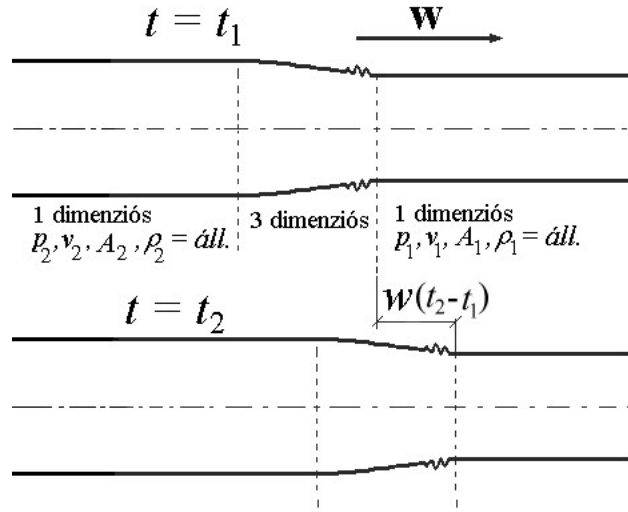
ahol ΔV a V térfogat összenyomódása a Δp nyomásnövekedés hatására, és $\Delta \rho$ a víz sűrűségnövekedése. Mivel $E_{\text{víz}} = 2.10^9$ N/m², és $\rho = 1000$ kg/m³, a lökeshullám sebessége a (2.33) képlettel:

$$w = \sqrt{\frac{E_{\text{víz}}}{\rho}} = 1414 \text{ m/s} . \quad (16.3)$$

A csőben ilyen sebességgel halad a nyomás lökeshullám. A jelenség hasonlatos a 2.6. példában leírtakhoz. (Az egyenletek egy része is azonos.)

B). Rugalmas folyadék rugalmas csőben

Ha a víz acél csőben áramlik, akkor a vízütés során a víz összenyomódása mellett az acél cső kitágulását is figyelembe kell venni. A 16.3. ábrán a csőben *kezdetben* állandó sebességű és állandó nyomású áramlás uralkodott p_1, v_1, ρ_1, A_1 paraméterekkel. A cső baloldali végén a nyomás gyorsan megemelkedett p_1 -ről a p_2 értékre, és a nyomás ezen az értéken stabilizálódott. A nyomásemelkedés hatása terjed a cső belseje felé. A $t = t_1$ időpillanatban az ábra *jobb oldalán* még az eredeti áramlás paraméterei tapasztalhatók. Ettől balra egy 3 dimenziós áramlási mező található, a nyomásemelkedés hatására a rugalmas csőfal kifelé tolódik. (A csőfal keresztirányú lengéseit Pattantyús tárgyalta [53], a lengések szaporák és gyorsan csillapodnak.) Az ábra



16.3. ábra. Rugalmas csőben haladó vízütés hullám

bal oldalán már a p_2 nyomásnak megfelelő állandósult viszonyokat találjuk 1D-s áramlással. A $t = t_1$ időpillanathoz tartozó felső ábrán az egész csőszakaszon teljesülnek a szakadási kontinuum axiómái (integrál alakban és differenciális formában is). *Feltételezzük*, hogy az egész áramlási mező a csőben jobbra halad w sebességgel (az értékét alább számítjuk).

A 16.3. ábra alsó részén az áramlási mezőt egy későbbi $t = t_2$ időpillanatban mutatjuk. Bármely pont (p, v) paramétereit egy eltolás a $w(t_2 - t_1)$ hosszúsággal jobbra vitte. Mivel a t_1 pillanatban teljesültek az alapegyenletek, ezért a t_2 pillanatban is teljesülnek, mert az eltolás az integrálokat és a differenciálhányadosokat változtatlanul hagyja. Ezt elmondhatjuk a t_1 és t_2 közötti bármely pillanatra is. Tehát elvileg megtaláltuk az alapegyenletek (köztük a differenciálegyenletek) megoldását. Azt jelenti ez, hogy a valóságban is ez fog történni? A megoldás egyértelműségének a kérdésével állunk szemben. Sajnos a newtoni kontinuum alapegyenleteire teljes általánosságban a megoldás egyértelműsége nincs bizonyítva. (Ismerünk néhány olyan áramlást, ahol két megoldás van, névlegesen azonos viszonyok között, ezek azonban kivételek.) Esetünkben a vízütés mérések is haladó hullámokat jeleznek. A vízütésre tehát egyedül a 16.3. ábra szerinti megoldás az érvényes. Ezzel megfogalmazhatjuk a vízütés definícióját: *A vízütés egy 3-dimenziós áramlási zóna, amely meghatározott sebességgel halad a rugalmas csőben, és egy $(p_2 - p_1)$ nyomáskülönbséget továbbít a cső mentén.*

Emlékeztetünk arra, hogy minden szakadási réteg helyettesíthető szakadási felülettel (2.6. példa és 6. fejezet). Esetünkben a 3-dimenziós zónát összehúzza egy felületté, a *vízütés* közelíthető egy $(p_2 - p_1)$ nagyságú *lökéshullámmal*.¹⁸⁶

¹⁸⁶Ez a lépés természetesen elhanyagolásokkal jár. Ezért esetenként a vízütést szakadási réteg formájában kezeljük. Például a vízütés áthaladása a csővezeték könyökein csak a szakadási réteg elképzelésével érthető meg.

A vízütés hullámsebessége

A 16.4. ábrán szaggatott vonallal jelölt ellenőrző felületbe zárt tömegre felírjuk az (Ic) ~ (3.1) egyenletet:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV + \int_{S_0} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) = 0 \quad . \quad (16.4)$$

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy mindkét integrált pontosan ki tudjuk számítani. Az első tag az ellenőrző felületbe foglalt tömeg változása a $t' - t = \Delta t$ időtartam alatt. Ugyanazt a víztömeget vizsgáljuk két különböző időpontban. (F_2' és F_1' felületek közötti tömeg ugyanakkora, mint F_2 és F_1 felületek közötti tömeg.) Így a V_0 térfogatba foglalt tömeg Δt időtartam alatti megváltozása csak az F_2 felületen belépő (sraffozott térfogat) és az F_1 felületen kilépő (szintén sraffozott térfogat) tömegének a különbségéből adódik. A belépő és a kilépő szakaszokon az áramlás stacionárius és egyenletes, ezért (16.4) egyenlet így írható:

$$\frac{1}{\Delta t} (\rho_2 w \Delta t A_2 - \rho_1 w \Delta t A_1) + (\rho_1 A_1 v_1 - \rho_2 A_2 v_2) = 0 \quad , \quad (16.5)$$

$$\text{amiből:} \quad w(\rho_2 A_2 - \rho_1 A_1) = (\rho_2 A_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1) \quad . \quad (16.6)$$

Alkalmazzuk (IIc) ~ (3.2) egyenletet áramlás irányába mutató \mathbf{e} egységvektorral (16.4. ábra):

$$\mathbf{e} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho v dV + \mathbf{e} \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS}) = \mathbf{e} \int_{V_0} \rho \mathbf{g} dV + \mathbf{e} \int_{S_0} \mathbf{F} dS \quad . \quad (16.7)$$

Az előbbihez hasonló gondolatmenettel:

$$\frac{1}{\Delta t} (\rho_2 w \Delta t A_2 v_2 - \rho_1 w \Delta t A_1 v_1) + (\rho_1 A_1 v_1^2 - \rho_2 A_2 v_2^2) = 0 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad , \quad (16.8)$$

$$\text{amiből} \quad w(\rho_2 A_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1) + (\rho_1 A_1 v_1^2 - \rho_2 A_2 v_2^2) = p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad . \quad (16.9)$$

Ebbe w szorzóját (16.6) jobb oldala alapján helyettesítve:

$$w^2 (\rho_2 A_2 - \rho_1 A_1) + (\rho_1 A_1 v_1^2 - \rho_2 A_2 v_2^2) = p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad . \quad (16.10)$$

Figyelembe véve, hogy v_1 és v_2 sokkal kisebb, mint w , a v_1 és a v_2 négyzete méginkább elhanyagolható w négyzete mellett. Így $p_2 - p_1 = \Delta p$, $v_2 - v_1 = \Delta v$, $A_2 - A_1 = \Delta A$, $\rho_2 - \rho_1 = \Delta \rho$ jelölésekkel:

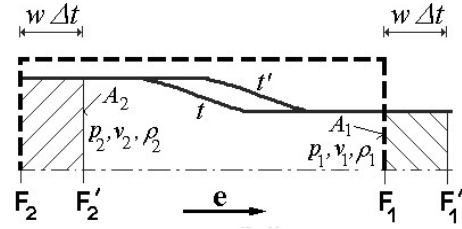
$$w^2 = \frac{p_2 A_2 - p_1 A_1}{\rho_2 A_2 - \rho_1 A_1} = \frac{A_2 \Delta p + p_1 \Delta A}{A_2 \Delta \rho + \rho_1 \Delta A} \cong \frac{1}{\rho_1 \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta p} + \frac{\Delta A}{\Delta p A_2} \right)} = \frac{1}{\rho_{\text{víz}} \left(\frac{1}{E_{\text{víz}}} + \frac{D}{s_{\text{fal}} E_{\text{acél}}} \right)} \quad . \quad (16.11)$$

Itt a középső tört számlálójában a második tagot elhanyagoltuk az első mellett, és (16.2) egyenletet, valamint a csőre Hooke törvényét és a csövekre alkalmazható "kazánformulát" helyettesítettük. A képletben s_{fal} az acélcső falvastagsága, D a cső átmérője. A vízütést jellemző 3-dimenziós áramlási zóna tehát *ilyen* hullámsebességgel halad a csőben. Rugalmas csövekben a hullámsebesség mindig kisebb, mint a (16.3) egyenletben megadott érték, mert a víz összenyomódása mellett a cső is kitágul.

Számpélda: 6 bar névleges nyomású, vizet szállító acélcsövekben (szabványos s_{fal} értékkel) a hullámsebesség: $w \approx 1000$ m/s.

Megjegyzés: Ha a csőben a víz légbuborékokat tartalmaz, vagy ha légszakok rejtőznek a csővezetékben (pl. csőcsatlakozásoknál, elzárószerveknél, magaspontoknál) akkor a levegő összenyomódása miatt a csővezeték "rugalmasabban" viselkedik, és a hullámsebesség lecsökken.

A legnagyobb vízütés a legkevesbbé rugalmas cső esetén keletkezik, ezért a vízütés számítását a legnagyobb várható hullámsebességgel célszerű végezni.



16.4. ábra. A vízütés hullámsebességének számításához

Az előbbi gondolatmenet bemutatta az **(Ic)** és **(IIc)** axiómák alkalmazását a csővezetékre. Az egyenletek azonban még további fontos ismeretet rejtenek magukba. A (16.9) egyenletben w nagy értéke miatt a második tagot, valamint ρ és A kicsiny változásait elhanyagolva nyerjük:

Allievi képlete:
$$p_2 - p_1 = w \rho (v_2 - v_1) \quad (16.12)$$

Ez a vízütés számítás *alapképlete*. Egyik tanulsága az, hogy viszonylag kis sebességváltozás is jelentős nyomásváltozást okozhat (16.2. példa).

16.2. példa. Allievi-féle nyomáslökés

A 16.2. ábra szivattyútelepének acél csőve 6 bar névleges nyomású ($w = 1000$ m/s). A telep leállása során, a csappantyú záródása előtt a víz már *visszafelé* folyik $v_1 = -1$ m/s sebességgel. A csappantyú záródásakor keletkező vízütést *lökéshullámként* kezeljük, ami a csőben a csővég felé halad. A csappantyú felé eső oldalán a víz áll: $v_2 = 0$. Az Allievi-féle nyomáslökés:

$$(p_2 - p_1) = w \rho (v_2 - v_1) = 1000 \text{ m/s} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 1 \text{ m/s} = 10^6 \text{ kg m/s}^2/\text{m}^2 = 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ bar}.$$

Tehát ebben a csőben 1 m/s sebességváltozás 10 bar nagyságú nyomáslökést okoz! Ez a csövet szétrepesztheti! (Annak érdekében, hogy ez ne következzen be, a csappantyú zárósúlyát úgy kell beszabályozni, hogy a záródása lehetőleg akkor következzen be amikor a víz megfordul.) A csappantyú záródásakor tehát elindul a csőben egy ilyen nagyságú lökéshullám a cső szabad vége felé. Elérve a cső végét visszafordul (más (p, v) paraméterekkel) és visszafut a bezárt csappantyúhoz, ahol ismét visszafordul, és ez így folytatódik. A nyomócsőben tehát oda-vissza futó lökéshullámok jelennek meg.

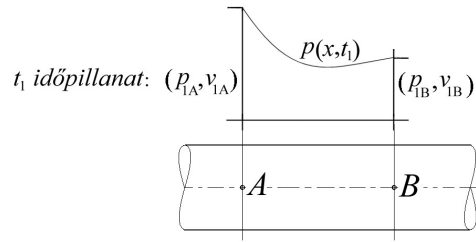
Allievi egyenletének alkalmazásai

A (16.12) egyenlet a t_1 időpillanathoz tartozó (p_1, v_1) és (p_2, v_2) paramétereket tartalmazza. A továbbiak könnyítése érdekében ezeket új indexszekkel látjuk el. Az A pont a kiválasztott csőszakasz kezdőpontja, B a végpontja (16.5. ábra).

(p_{1A}, v_{1A}) : p és v az A pontban a t_1 időpillanatban,

(p_{1B}, v_{1B}) : p és v a B pontban a t_1 időpillanatban.

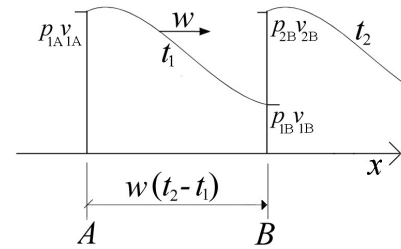
Ezekkel (16.12) egyenlet:



16.5. ábra. Allievi adott időpillanatban

Allievi képlete adott időpillanatban (első alkalmazás)
$$(p_{1B} - p_{1A}) = w \rho (v_{1B} - v_{1A}) \quad (16.13)$$

A továbbiakban a 16.6 ábrán az x koordináta irányában haladó nyomáshullám viszonyait vizsgáljuk az A és B pontoknál (melyek egymástól távol is lehetnek). A t_1 időpontban érvényes (p_{1A}, v_{1A}) , (p_{1B}, v_{1B}) értékekre (16.13) érvényes. A 16.3. ábrához fűzött gondolatmenet alapján azonban tudjuk, hogy a nyomáshullám a csőben egyszerűen *eltolódik*. (Ez a fizikában más hullámok esetén is igaz.) Tehát, az A pontnál érvényes (p_{1A}, v_{1A}) értékek a $w(t_2 - t_1)$ utat megtéve a B ponthoz érkeznek: B -nél a t_2 időpontban $p_{2B} = p_{1A}$, $v_{2B} = v_{1A}$ értékek uralkodnak.

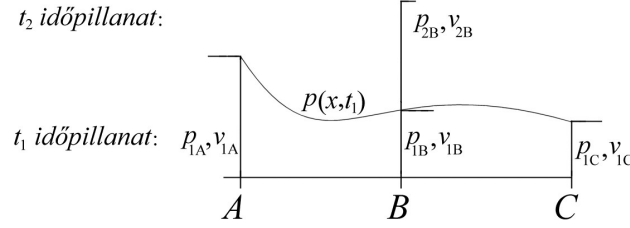


16.6. ábra. Nyomáshullám csőben

Allievi képlete különböző időpontokban (második alkalmazás):
$$(p_{2B} - p_{1B}) = w \rho (v_{2B} - v_{1B}) \quad (16.14)$$

Azt nyertük tehát, hogy **ha** a cső egy pontjánál, a B pontnál a t_1 időpillanatban p_{1B}, v_{1B} található, és a pontnál w sebességű hullámok haladnak a pozitív (x) irányba, **akkor tetszőleges** későbbi t_2 időpontban a B pontnál *csak* olyan (p_{2B}, v_{2B}) lehet érvényben, amely (16.14) egyenletet teljesíti. Ezzel p_{2B} és v_{2B} még nincs meghatározva (mert a szembejövő nyomáshullámok is befolyásolják) de legalább van egy egyenletünk, amit ezeknek teljesíteni kell. (Ha Allievi egyenlete nem lenne így érvényes, akkor vagy a hullám eltolódás (16.6. ábra), vagy az AB csőszakaszon **(IIc)** axióma nem teljesülne!)

Allievi egyenletei három pontnál (*harmadik alkalmazás*) (16.7. ábra).



16.7. ábra. Allievi egyenlete három pontnál

A cső A , B , C pontjainál a t_1 időpillanatban (p_{1A}, v_{1A}) , (p_{1B}, v_{1B}) , (p_{1C}, v_{1C}) paraméterek igazak, és a B pontnál a t_2 időpillanatban (p_{2B}, v_{2B}) uralkodik. Ezekre **Allievi** előbbi képleteivel, a hullámok mindkét irányba történő haladását figyelembe véve:

Pozitív irányba haladás: Negatív irányba haladás ($-w$ sebességgel):

$$\text{Első alkalmazás:} \quad (p_{1B} - p_{1A}) = w \rho (v_{1B} - v_{1A}) \quad , \quad (p_{1B} - p_{1C}) = -w \rho (v_{1B} - v_{1C}) \quad , \quad (16.15)$$

$$\text{Második alkalmazás:} \quad (p_{2B} - p_{1B}) = w \rho (v_{2B} - v_{1B}) \quad , \quad (p_{2B} - p_{1C}) = -w \rho (v_{2B} - v_{1C}) \quad , \quad (16.16)$$

és az egyenleteket összeadva nyerjük a *harmadik alkalmazást*:

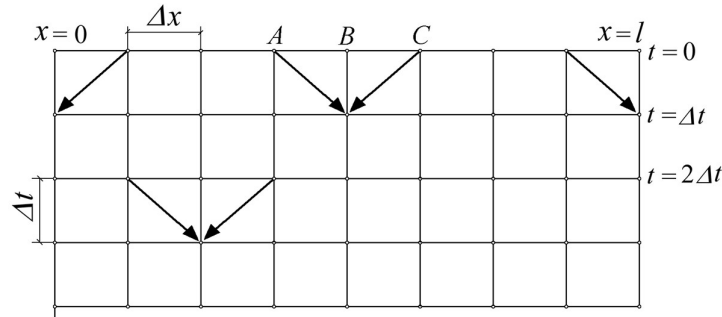
$$\text{Allievi három pontra:} \quad (p_{2B} - p_{1A}) = w \rho (v_{2B} - v_{1A}) \quad . \quad (p_{2B} - p_{1C}) = -w \rho (v_{2B} - v_{1C}) \quad . \quad (16.17)$$

Az utóbbi egyenletek a vízütés számítás alapegyenletei.

16.3. példa. Vízütés számítás

Bonyolult csővezeték rendszerekben (például egy város vízvezeték hálózatában) a tranziens üzemállapotok során nyomáshullámok futnak a csőszakaszokban. A *vízütés számítás* célja ezek számítása.

Egy egyenes cső mentén x a csőirányú koordináta, $x = 0$ a kezdeténél, $x = l$ a végénél. A tranziens folyamat a $t = 0$ időpillanatban kezdődik (például a rendszerben kikapcsolnak egy szivattyút). A csőben futó hullámokat a $p(x, t)$, $v(x, t)$ függvények írják le, amiket *időben léptető eljárással* számítunk, a 16.8. ábra pontrácsának pontjainál. Az x tengelyen a pontok távolsága Δx , az időtengelyen Δt , úgy megválasztva, hogy $\Delta x = w \Delta t$. A $t = 0$ időpillanatban ismerjük az összes $p(x, 0)$ és $v(x, 0)$ értéket (ezek a kezdeti stacionárius üzemállapot ismert paraméterei). A következő $t = \Delta t$ időpillanathoz tartozó $p(x, \Delta t)$ és $v(x, \Delta t)$ értékek számítását Allievi egyenletének harmadik alkalmazásával végezzük. A nyomáshullámok a B ponthoz (16.8. ábra) Δt idő alatt két irányból közelítenek, A -ból w sebességgel, és C -ből $-w$ sebességgel.



16.8. ábra. A vízütés számítás lépései

Allievi *harmadik* alkalmazása alapján a 16.7. ábra B pontjánál két egyenletet írhatunk fel:

$$\text{A } C\text{-ből indított nyíl mentén:} \quad p_{2B} - p_{1C} = -\rho w (v_{2B} - v_{1C}) \quad . \quad (16.18)$$

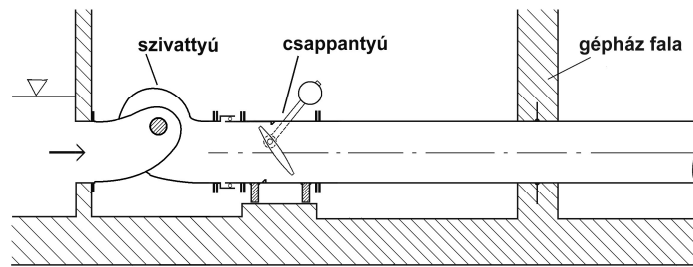
$$\text{Az } A\text{-ból indított nyíl mentén:} \quad p_{2B} - p_{1A} = \rho w (v_{2B} - v_{1A}) \quad . \quad (16.19)$$

ahol p_{1A} és v_{1A} az A pontnál ismert értékek, p_{1C} és v_{1C} a C pontnál ismert értékek, p_{2B} és v_{2B} pedig a B pontnál a *következő* időpillanatban érvényes, még ismeretlen értékek. A két egyenletből a két ismeretlen meghatározható. Így a $t_2 = \Delta t$ egyenes szakasz összes *belső* pontjában p és v számítható. A két szélső pontnál csak egy ilyen egyenletünk van, de ismert a határfeltétel (például 16.2. ábra szerinti cső zárt csappantyújánál $v(0,t) = 0$, a nyitott csővégnél pedig $p(l,t) =$ a vízszintnek megfelelő konstans). Így időben léptetve, egyenesről egyenesre számítjuk p és v értékét. További részletek a bőséges szakmai irodalomban [24, 28, 32, 62, 64] találhatók.

A gépház falára ható dinamikus erőhatás

A csappantyú záródásakor a vízütés meglöki a csappantyú tányért és az egész csappantyút a szivattyú felé taszítja (16.9. ábra). Az igénybevételt a csővezeték elemei közvetítik a gépház falához. Mivel az épületek modern tervezésénél figyelembe kell venni az épületre ható *dinamikus erőhatások időbeli lefutását* is, ezt is ki kell számítani.

A 16.9. ábrán a nyomócső egyik szokásos megfogása látható. A szivattyú után egy teleszkópszerű szerelési közdarab megakadályozza, hogy a nyomócső bármilyen erőhatást adjon a szivattyúra. A csappantyú alá van támasztva, de a csőtengely irányában el tud csúszni. A nyomócsövet a gépház falában a csőhöz hegesztett befalazó karima rögzíti.



16.9. ábra. A gépház falára ható erő számításához

A csappantyú zárásakor keletkező vízütés lökésszerű igénybevételét tehát a nyomócső közvetíti a gépház falához (16.9. ábra). A *csőfalban* haladó *feszültség lökéshullámok* 1D-s közelítése (a 2.6., 5.4. és 16.3. példákhoz hasonlóan) ugyanúgy számítható, mint a vízütés [24, 25], csak a hullámsebesség acélban, a (2.33) képlettel számolva: $w \approx 5000$ m/s.

Az így végzett számítások (és a vízütések hatásainak gyakorlati megfigyelései) igazolják, hogy a vízütés nagy nyomásokat és nagy erőket kelthet, melyek a csővezeték részeit és az épületeket veszélyeztethetik. Ezért a vízütés számítás az ezzel foglalkozó szakemberek fontos eszköze, amit az eljárás közelítő voltára tekintettel biztonsági tartalékkal kell alkalmazni.

Függelék: Vektor- és tenzorszámítás

17. fejezet. Alapműveletek

A vektor- és tenzorszámítás alapmennyiségei: *skalárok, vektorok és tenzorok*.

- A skalár *valós szám*, amelyre a valós számok algebrája és függvénytana érvényes.
- A vektor *nyíl*, amelyre (az erőkre is érvényes) speciális műveletek értelmezhetők.
- A tenzor lineáris *vektor-vektor függvény*, amely *mátrixként* is kezelhető.

A skalárokat dőlt betű (c, F), a vektorokat álló félkövér kis betű (\mathbf{a}, \mathbf{v}), a tenzorokat álló félkövér nagybetű (\mathbf{A}, \mathbf{S}) jelöli. (Kézírással a vektorok egy, a tenzorok két aláhúzással jelölhetők [31]).

A fizikai alkalmazásokban a skalárok olyan mennyiségek, amelyeknek csak nagysága van (tömeg, sűrűség, energia), a vektoroknak a nagyságuk mellett irányuk is van (sebesség, erő), a tenzorok pedig a 3-dimenziós térben három független irányhoz tartozóan egy-egy vektorral adhatók meg (feszültség, alakváltozás).¹⁸⁷

A vektor- és tenzorszámítás alapozó fejezetei:

- *Algebra*: az összeadás és szorzás műveletének általánosítása vektorokra és tenzorokra.
- *Analízis*: a differenciálás és integrálás műveletének általánosítása különféle függvényekre.

Algebrai alapszabályok

A valós számok algebrájában az *összeadás* és a *szorzás* műveletére a következő szabályok érvényesek, A, B és C tetszőleges valós számok:

$$\text{Asszociatív (társítható): } (A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C, \text{ és } (AB)C = A(BC) = ABC. \quad ^{188} \quad (17.1)$$

$$\text{Kommutatív (felcserélhető): } A+B = B+A, \text{ és } AB = BA. \quad (17.2)$$

$$\text{Disztributív (szétoosztható): } (A+B)C = AC + BC. \quad (17.3)$$

A vektorok és tenzorok műveleteire ezeket általánosítjuk (ha lehetséges).

Vektorok értelmezése

A vektorok a geometria eszközei. Az euklideszi térben az *irányított szakaszokat* (nyilakat) nevezik vektoroknak [31]. Bármely vektor (nyíl) önmagával párhuzamosan *eltolható*, ekkor az azonosságát (jelét) megtartja.

A fizikában beszélnek "szabad" és "kötött" vektorokról is. Itt a *szabad* (eltolható) vektor az *alapfogalom* (ugyanúgy, mint a geometriában) és a *kötött* vektorokat *függvények* segítségével kezeljük. A kötött vektort ugyanis a *fizikai jelentése* köti a tér valamely pontjához. Például legyen \mathbf{v} vektor egy forgó test valamelyik pontjának sebességvektora. Ez ahhoz a ponthoz kötődik, amelyiknek a sebessége. Vagy legyen \mathbf{f} egy kiterjedt testre ható erő vektora. Ez kötve van a támadási pontjához. Ezek a kötöttségek $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ és $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ függvényekkel kezelhetők, ahol \mathbf{r} a tér helyvektora. (A szabad vektorok előnye megmutatkozik például az erők eredőjének szerkesztésénél is, amikor az \mathbf{f} vektort a rajz bármely pontjába eltolhatjuk.)

Képzeliük el, hogy egy gépterem belsejében levő testeket vizsgálunk. A testek mozgását a gépterem falaihoz viszonyítjuk – ez a *fizikai vonatkoztatási rendszer* (lásd az 1. fejezetben). A térbe bevezetünk egy derékszögű Descartes (DD) koordinátarendszert, amit gondolatban a vonatkoztatási rendszerhez rögzítünk. A térben képzeljük el *nyilakat* (vektorokat). Ezeknek fizikai jelentése is lehet, de

¹⁸⁷ A vektor- és tenzorszámítás általános elméletében az itt használt tenzorokat *másodrendű* tenzoroknak nevezik. Ezzel a terminológiával a skalárok nulladrendű tenzorok, a vektorok elsőrendű tenzorok, és beszélnek harmad- és magasabbrendű tenzorokról is. A mechanika bevezető jellegű tárgyalásában azonban az utóbbiakra nincs szükségünk, így több szerzővel összhangban itt csak *skalárokról* és *vektorokról* beszélünk, és a másodrendű tenzorokat egyszerűen *tenzoroknak* nevezzük.

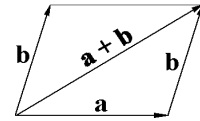
¹⁸⁸ Tetszőlegesen átzárójelezhetők. Ezért az sem okoz tévedést, ha a zárójeleket elhagyjuk.

ennél a gondolatmenetnél ez lényegtelen. Tekintsünk egy vektort, amit \mathbf{a} -val jelölünk. Az \mathbf{a} vektort önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy a *kezdőpontja* a koordinátarendszer origójába kerül. Ekkor a vektor *végpontja* három koordinátával adható meg: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Ha a meglévő derékszögű Descartes rendszerről egy másik derékszögű Descartes rendszerre térünk át (a tengelyek különbözőnek), akkor a vektor koordinátái megváltoznak (lásd (7.4) egyenletet), de a vektor maga nem, mert *a nyíl helyzete a fizikai vonatkoztatási rendszer testeire képest* ugyanaz maradt. A vektor tehát független a koordinátarendszertől, *invariáns* a koordináta transzformációkkal szemben.

A vektorok elmélete (algebra és analízis) megalapozható a koordinátaendszertől függetlenül is, ezt nevezik *direkt* vagy *invariáns* vagy *szimbolikus* vagy *koordinátamentes* tárgyalásnak [31,59]. De felépíthető a koordinátákból alkotott számhármassokra is, ezt nevezik *indexes* vagy *koordinátás* tárgyalásnak [95]. Ebben a könyvben a fogalmakat *koordinátamentes* tárgyalással értelmezzük, és az alapegyenleteket is ebben írjuk fel, mert így egyszerűek [3,59]. A konkrét számítások végzésénél azonban legtöbbször át kell térni koordinátákra, ezért a *koordinátás* tárgyalás alaplépéseit is bemutatjuk.

Vektorok összegét a paralelogramma vagy háromszög szabály értelmezi (17.1. ábra)¹⁸⁹. A vektor összeadás asszociatív és kommutatív. Az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor koordinátái:

$$(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) . \quad (17.4)$$



17.1. ábra. Vektor összeg

Vektor abszolút értéke: Az $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ vektor nyílának hosszát a vektor abszolút értékének nevezzük, jele $|\mathbf{a}|$. A koordinátákban:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (17.5)$$

Skalár és vektor szorzata: λ skalár szám, \mathbf{a} vektor. A $\lambda \mathbf{a}$ szorzat olyan *vektor* melynek *hossza*: $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, *iránya* megegyezik \mathbf{a} irányával ha $\lambda > 0$, és ellentétes, ha $\lambda < 0$.¹⁹⁰ Ez a szorzás asszociatív, kommutatív, és disztributív a skalár összeadásra és a vektor összeadásra is. Ezen értelmezés magába foglalja az: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = 2\mathbf{a}$ szabályt is. A szorzatvektor koordinátái:

$$(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) . \quad (17.6)$$

Két vektor skaláris szorzata: Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok *skaláris szorzatát* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ jelöli¹⁹¹, az értéke egy *szám* (skalár): $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma$, ahol γ az egy pontba tolt \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által bezárt szög. A skalárszorzás kommutatív, valamint a vektor összeadásra disztributív. A koordinátákban:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z , \quad (17.7)$$

Két vektor vektoriális szorzata: Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *vektoriális szorzata* olyan *vektor* amely merőleges \mathbf{a} -ra és \mathbf{b} -re, hossza: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \gamma$,¹⁹² olyan irányítással, hogy \mathbf{a} , \mathbf{b} és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszert¹⁹³ alkot. Ez a szorzás nem asszociatív (lásd (19.2) egyenletet), és nem kommutatív, mert:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = - \mathbf{a} \times \mathbf{b} , \quad (17.8)$$

de a vektor összeadásra disztributív. A koordinátái:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) , \quad (17.9)$$

ami könnyen megjegyezhető a (19.36) egyenlet szerint.

Az elemi vektor műveletek alapozó ismertetése megtalálható *Hajós* könyvében [31].

¹⁸⁹Úgy tűnik, hogy *először* Newton könyvében [1] jelent meg ilyen ábra.

¹⁹⁰Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$, a *nullvektor* [31].

¹⁹¹Vektorok skalárszorzását egyes szerzők pont nélkül írják [31,59,30,16,63,149], mások ponttal jelölik [95,3,8,39,49,138]. Mindkét jelölést elfogadjuk, de ebben a könyvben a képletek rövidítése érdekében általában pont nélkül használjuk. A pont *alsó helyzetben* (.) skalár számok szorzását jelölheti (de elhagyható), *felső helyzetben* (·) vektorok skalár szorzatát jelölheti (de elhagyható). Lásd még 19.2. példában.

¹⁹² $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nagysága egyenlő az \mathbf{a} és \mathbf{b} által kifeszített paralelogramma (17.1. ábra) területével.

¹⁹³Ha az \mathbf{a} vektort a \mathbf{b} vektorba 180 foknál kisebb szöggel forgatjuk, és *jobb kezünk* behajlított ujjait a forgás irányába állítjuk, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a hüvelykujjunk irányába mutat.

Tenzorok értelmezése

A 3-dimenziós euklideszi tér minden \mathbf{x} vektorára értelmezett $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor-vektor függvényt *homogén lineárisnak* mondják, ha tetszőleges \mathbf{x}_1 és \mathbf{x}_2 vektorokra, és tetszőleges c_1 és c_2 valós számokra teljesül, hogy:

$$\mathbf{y}(c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2) = c_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_1) + c_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_2) . \quad (17.10 \text{ a})$$

A homogén lineáris vektor-vektor függvényeket *tenzoroknak* hívjuk, jelölésük álló vastag nagybetű:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} , \quad (17.10 \text{ b})$$

amit úgy mondunk, hogy az \mathbf{A} tenzort *alkalmazva* az \mathbf{x} vektorra az \mathbf{y} vektort nyerjük. Az \mathbf{A} tenzor az \mathbf{x} vektorok terét *leképezi* az \mathbf{y} vektorok terére,¹⁹⁴ a tenzor a tér speciális (homogén lineáris) $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ torzítása.

A 3-dimenziós térbe derékszögű Descartes koordinátarendszert bevezetve, a (17.10 b) egyenlet koordinátás átírása:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \text{ ahol } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ a tenzor mátrixa.} \quad (17.11)$$

A *mátrix* sorokba és oszlopokba rendezett számokból áll (a_{ik} az i -edik sor k -adik eleme). A (17.11) egyenlet az \mathbf{A} mátrix és az \mathbf{x} oszlopvektor szorzását igényli. Ehhez a mátrixok kiterjedt elméletéből a mátrix szorzás "sor-oszlop" szabályát idézzük: Az első mátrix soraiban levő elemeket rendre a második mátrix oszlopában levő elemekkel szorozzuk és ezeket összeadjuk. Ennek megfelelően az $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ szorzás a koordinátákban a következő három (skalár) egyenletet jelenti:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 , \quad (17.12)$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 , \quad (17.13)$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 . \quad (17.14)$$

A tenzor és a mátrixa közötti kapcsolat ugyanolyan, mint a vektor és a koordinátái közötti kapcsolat. Az \mathbf{A} tenzor a tér egy *leképezését* jelenti (függetlenül attól, hogy a térben egyáltalán van-e koordinátarendszer). Ha egy meglévő derékszögű Descartes-féle koordinátarendszerről egy másikra térünk át, akkor az \mathbf{A} tenzor mátrixának a_{ik} elemei megváltoznak, de az \mathbf{A} tenzor maga (a *leképezés*) nem. Az \mathbf{A} tenzor mátrixa tehát a különböző koordinátarendszerekben más és más, ezek azonban ugyanazt a tér-torzítást képviselik.

Alapműveletek tenzorokkal

Első pillanatra meglepő, hogy a tér torzításaira algebrai műveleteket vezetünk be. Ennek jobb megértése céljából a 17.1. példában két tenzor szorzatát szemléltetjük.

17.1. példa. Tenzorok szorzata

Az előbbieken 3-dimenziós tenzorok fogalmát vezettük be. Ugyanígy értelmezhetők 2-dimenziós (síkbeli) tenzorok. Legyenek \mathbf{A} és \mathbf{B} síkbeli tenzorok, amelyek a következő torzításokat jelentik (17.2. ábra):

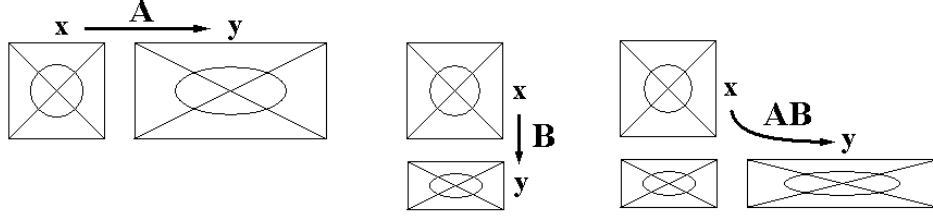
- \mathbf{A} : a vízszintes tengely irányában kétszeres nyújtás (a 17.2. ábrán az \mathbf{y} vektorok tere eltoltt origóval van ábrázolva).
- \mathbf{B} : a függőleges tengely irányában felére zsugorítás.

A két tenzor (tér-torzítás) \mathbf{AB} szorzatát a következő egyenlet *definiálja*:

¹⁹⁴Ez a *leképezés* geometriailag *affinitás*, a következő tulajdonságokkal: Pontnak pont, egyenesnek egyenes, síknak sík a képe. Aránytartó, azaz egyenesen fekvő pontok távolság-aránya nem változik. A *leképezés* másodfokú görbéket vagy felületeket másodfokú görbékbe vagy felületekbe visz. Például az \mathbf{x} vektorok terében levő egységnyi sugarú gömb képe – nem elfajuló esetben – az \mathbf{y} vektorok terében egy ellipszoid.

$$(\mathbf{AB}) \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) , \quad (17.15)$$

ahol \mathbf{x} a tér tetszőleges vektora. Az egyenlet azáltal definiálja \mathbf{AB} szorzatot, hogy a tér bármelyik \mathbf{x} vektorára megadja az \mathbf{AB} tenzorral nyerhető \mathbf{y} vektort. Az egyenlet jobb oldala szerint először a \mathbf{B} tenzort kell alkalmazni az \mathbf{x} vektorra, és az így nyert vektorra kell alkalmazni az \mathbf{A} tenzort. Tehát a 17.2. ábrán az \mathbf{AB} tenzort úgy kapjuk, hogy először lefelé felére zsugorítottuk, majd vízszintesen kétszeresre nyújtunk.



17.2. ábra. 2-dimenziós tenzorok szorzatának szemléltetése

Miért így értelmezzük a szorzat-tenzort? Amikor egy régi fogalomnak (a szorzásnak) új értelmet kívánunk adni, akkor ezt úgy célszerű megtenni, hogy a régi műveleti szabályok a lehetőség szerint érvényben maradjanak. Valós számok szorzására ismert az asszociativitás (átzárójelezés) szabálya, a (17.1) egyenlet. Ebből a szempontból a (17.15) egyenlet semmi más, mint az átzárójelezés szabályának érvényben tartása.

A tenzorok szorzásának ilyen értelmezése mit jelent a koordinátákban?
Vízszintes és függőleges tengelyű koordináta-rendszerben a (17.11) egyenlettel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Bx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0,5x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{és így:} \quad \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0,5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0,5x_2 \end{pmatrix}.$$

Ugyanezt kapjuk, ha a két tenzor szorzatát a mátrixok "sor-oszlop" szorzásával számítjuk. Általános esetben:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

esetünkben: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{AB})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0,5x_2 \end{pmatrix},$ ugyanaz mint előbb.

A tenzorok szorzata tehát a másodrendű mátrixok sor-oszlop szorzásával könnyen számítható.

Háromdimenziós tenzorok esetén a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat mátrix i -edik sora k -edik oszlopában levő elem:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}, \quad (i = 1,2,3, k = 1,2,3), \quad (17.16)$$

amelyben az \mathbf{A} -ból az i -edik sor, és a \mathbf{B} -ből a k -edik oszlop elemei szerepelnek (ezért nevezik sor-oszlop szorzásnak).

A tenzorok összegét a szorzáshoz hasonló módon egyenlettel értelmezzük:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx}, \quad (17.17)$$

ami a disztributivitás érvényben tartása. Ez a koordinátákban:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \quad (17.18)$$

Érdemes megjegyezni, hogy összeadást csak egyforma mennyiségekre értelmeztünk: skalár + skalár, vektor + vektor, tenzor + tenzor, és fizikai mennyiségek esetén az alapegységekből (m, kg, s) képezett dimenziójuknak is egyezni kell. Szorzásokat azonban akármilyen mennyiségekre értelmezhetünk.

A tenzorszámítás kitűnő bevezetését nyújtják [59],[95],[49].

Függvények és differenciálhányadosaik

A *függvény* fogalmát tanulmányaink során egyváltozós valós függvényekre ismertük meg derékszögű Descartes (DD) koordináta-rendszerben (17.3. ábra). Legyen x és y valós szám (azaz skalárok). Az $y = f(x)$ függvény a T_x értelmezési tartománya minden x eleméhez rendel egy y értéket, ami a T_y értékkészlet eleme.¹⁹⁵

$f(x)$ *lineáris*, ha a képe egyenes.

$f(x)$ *folytonos*, ha a képe folytonos vonal.¹⁹⁶

Határérték. Legyen x egy valós változó és x_1 egy valós szám (*konstans*).¹⁹⁷ Azt mondjuk, hogy x tart az x_1 -hez, jelölésben $x \rightarrow x_1$, ha a változási tartományán belül egyre közelebb kerül x_1 -hez. Elképzelve a számegyenesen: az x koordinátájú pont halad az x_1 koordinátájú pont felé, és a távolságuk akármilyen kicsiny hibahatárnál is kisebb lesz.

$f(x)$ *folytonossága* értelmezhető a *határértékkel* is: $f(x)$ függvény folytonos az x_1 pontban, ha $x \rightarrow x_1$ esetén az $f(x) \rightarrow f(x_1)$. Más szavakkal: a függvény határértéke egyenlő a helyettesítési értékével.

$f(x)$ *különbségi hányadosa* az $x_2 > x_1$ helyeknél (17.3. ábra) a szelő iránytangense: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$f(x)$ *differenciálhányadosa* vagy *deriváltja*: $\frac{df}{dx}$ vagy másként jelölve: $f'(x)$, az x_3 -nál (17.3. ábra) az érintő iránytangense. Ha $x_1 \rightarrow x_3$ és $x_2 \rightarrow x_3$ akkor a különbségi hányados tart a deriválthoz.

Ha $f(x) = C$ (konstans), akkor $f'(x) = 0$. Konstans deriváltja zérus.

Ha $f(x) = C g(x)$, akkor $f'(x) = C g'(x)$. Deriválásnál a konstans kiemelhető vagy beszorozható.

Ha $f(x) = g(x) + h(x)$ akkor $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. Összeg tagonként differenciálható.

Ha $f(x) = C x^n$, akkor $f'(x) = C n x^{n-1}$. Hatványfüggvény így deriválható.

Ha $f(x) = \sin(x)$, akkor $f'(x) = \cos(x)$, és ha $f(x) = \cos(x)$, akkor $f'(x) = -\sin(x)$.

$f(x,y,z)$ *parciális deriváltja* x szerint $\frac{\partial f}{\partial x}$: az f -et x szerint deriváljuk úgy, hogy y és z konstans.

$f(x,y,z)$ *differenciálja*: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$. (17.19)

A *differenciál* egy lineáris függvény, amelyben df függő változó, dx, dy, dz koordináta irányú megváltozások a független változók, és adott x,y,z esetén a parciális deriváltak konstansok. Az x,y,z változók kis dx, dy, dz megváltozásai esetén a df differenciál az $f(x,y,z)$ függvény megváltozását jól közelíti (17.2. példa).

17.2. példa. A differenciál használata

A függvény legyen: $s(t,v,a) = vt + at^2/2$, amit $t = 1, v = 1, a = 1$ értékeknél vizsgálunk. Ekkor: $s(1,1,1) = 1,5$.

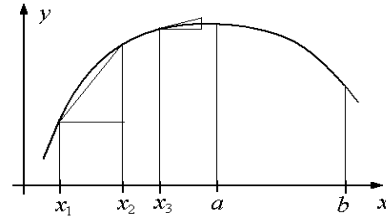
A parciális deriváltak: $\frac{\partial s}{\partial t} = v + at = 2, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = t = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial a} = \frac{t^2}{2} = 0,5$.

A kis változás legyen: $dt = 0,1, dv = 0,1, da = 0,1$.

A *differenciál*: $ds = 2 dt + 1 dv + 0,5 da$, ami az adott kis változásnál: $ds = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35$.

A függvény valódi változása: $s(1,1,1,1,1) - s(1,1,1) = 0,3755$.

A differenciállal nyert lineáris becslés százalékos hibája: $0,0255/1,5 = 1,7\%$ csupán.



17.3. ábra. Egyváltozós függvény

¹⁹⁵Ez a definíció változtatás nélkül érvényes skalárokból, vektorokból, vagy tenzorokból alkotott x,y párokra is.

¹⁹⁶Matematikailag pontosabb: $y = f(x)$ *folytonos* az x_0 helyen, ha akármilyen kicsiny $\varepsilon > 0$ számot adunk is meg (mint pontossági kívánalmat), mindig van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, minden olyan x -re, amelyre $|x - x_0| < \delta$.

¹⁹⁷Számítógép programok írásánál érzékelhető a skalár változók és a skalár konstansok különbözősége.

$f(x)$ integrálja az $[a,b]$ intervallumban az $f(x)$ görbe és az x tengely közötti terület (17.3. ábra).

Az integrált általában a *közelítő összegével* számítjuk. Legyen $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ egy pontsorozat az $[a,b]$ -ben. Ezzel a *közelítő összeg*: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, ahol ξ_i tetszőleges hely az $[x_{i-1}, x_i]$ -ben. A közelítő összeg kis téglalapok területeinek összege. A felosztás finomításával¹⁹⁸ a közelítő összeg az integrál értékéhez tart. Az integrál jelölése: $\int_a^b f(x) dx$

Konstans integrálja: $\int_a^b C dx = C(b-a)$.

Összeg integrálja: $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Derivált integrálja: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Konstans kiemelése (vagy beszorzás): $\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$.

Vektor-skalár függvény: Legyen $\mathbf{r} = (x, y, z)$ egy vektor, és t egy skalár. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvény a koordinátákban: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Ez mechanikailag úgy értelmezhető, mint egy anyagi pont pályájának az egyenletei. Az anyagi pont *sebessége* (különböző jelölésekkel):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (v_x, v_y, v_z) \quad , \quad (17.20)$$

$$\text{ami a } t = t_1 \text{ időpillanatban: } \mathbf{v}(t_1) = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=t_1} \text{, azaz: } v_x(t_1) = \dot{x}(t_1) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} \text{, stb.} \quad (17.21)$$

A $\mathbf{v}(t_1)$ vektor érinti a pályát az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1) = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ pontnál.

17.3. példa. Spirális görbe érintője

Az R sugarú H menetemelkedésű spirális vonalon halad egy anyagi pont, t az idő. A pálya egyenletei: $x = R \cos(t)$, $y = R \sin(t)$, $z = Ht/2\pi$. A pont sebessége differenciálással: $v_x(t) = -R \sin(t)$, $v_y(t) = R \cos(t)$, $v_z(t) = H/2\pi$. A $t_1 = \pi/2$ időpontban a sebesség: $v_x(t_1) = -R$, $v_y(t_1) = 0$, $v_z(t_1) = H/2\pi$, azaz: $\mathbf{v}(t_1) = (-R, 0, H/2\pi)$.

Skalár-vektor függvény: Legyen $\psi = f(\mathbf{r})$ egy *skalár-vektor* függvény, $\psi = f(x,y,z)$. Ez fizikailag úgy tekinthető, mint egy *eloszlás* (például sűrűsége, vagy hőmérséklete) az $\mathbf{r} = (x,y,z)$ helyvektor függvényében. Ennek a *gradiense* egy vektor:

$$\text{grad } \psi = \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad , \quad (17.22)$$

$$\text{ami az } \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ pontnál: } \text{grad } \psi = \left. \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} = \left(\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}, \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}, \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \right) \quad . \quad (17.23)$$

A gradiens vektor koordinátái éppen a függvény differenciáljának együtthatói, ezért a (17.19) egyenlet így is írható:

$$d\psi = \text{grad } \psi \, d\mathbf{r} \quad \text{vagy} \quad d\psi = \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad ^{199}, \quad \text{ahol } d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) \quad . \quad (17.24)$$

¹⁹⁸Az $f(x)$ függvényt *integrálhatónak* nevezik, ha a pontsor *tetszőleges finomításával*: több ponttal, $\max [x_i - x_{i-1}] \rightarrow 0$ esetén a közelítő összeg mindig ugyanahhoz a számhoz tart. Az $[a,b]$ -ben *folytonos* függvények mindig integrálhatók (a szabály általánosítása: véges zárt tartományon *folytonos* függvények mindig integrálhatók).

¹⁹⁹Emlékeztetünk arra, hogy vektorral való osztás *nincs* értelmezve, a jelölés formális!

Ha a térben megkeressük azokat a pontokat, amelyekre a függvény ugyanazt az értéket veszi fel, azaz $\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}_1)$ vagy $f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1)$, akkor az ennek eleget tevő \mathbf{r} helyvektorú pontokat a $\psi(\mathbf{r}_1)$ értékhez tartozó *szintfelületnek* nevezzük. Egyszerűen belátható, hogy $\text{grad } \psi$ vektor *merőleges* a szintfelületre. Ugyanis, ha $d\mathbf{r}$ a szintfelület egyik pontjától a szintfelület másik pontjához mutat, akkor: $d\psi = 0$, és (17.24) szerint: $\text{grad } \psi \cdot d\mathbf{r} = 0$, ami a skalárszorzat definíciója alapján (lásd (17.7) egyenlet-nél) azt jelenti, hogy: $\cos \gamma = 0$, azaz: $\gamma = \pi/2$.

17.4. példa. Skalár-vektor függvény gradiense

Legyen $\psi = x^2 + yz$. A gradiens vektor: $\text{grad } \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = (2x, z, y)$.

Az $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1$ pontnál: $\psi = 2$, és a gradiens vektor: $\left. \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} = (2, 1, 1)$.

Láncszabály. Ez a többváltozós valós függvények egyik alapvető differenciálási szabálya. Legyenek $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, és $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ valós függvények. Az utóbbiakat az előbbibe helyettesítve: $\psi = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. Ha azt nézzük, hogy ψ hogyan változik t függvényében, akkor ezt a függvényt differenciáljuk t szerint. Erre ismert a *láncszabály*:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \quad (17.25)$$

17.5. példa. Láncszabály

Legyen: $\psi = f(x, y, z) = x^2 + yz$, $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = t^2$, $\psi = f(x(t), y(t), z(t)) = \cos^2(t) + \sin(t) t^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y, \quad \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, z, y), \quad \frac{dx}{dt} = -\sin(t), \quad \frac{dy}{dt} = \cos(t), \quad \frac{dz}{dt} = 2t,$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (-\sin(t), \cos(t), 2t).$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \text{grad } f \cdot \mathbf{v} = 2\cos(t)[- \sin(t)] + t^2 \cos(t) + \sin(t) 2t.$$

A ψ előbb számított $(\cos^2(t) + \sin(t) t^2)$ kifejezését *függvényként* differenciálva az eredmény ugyanez.

Vektor-vektor függvény: Legyen $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ egy vektor-vektor függvény, például az áramlási sebesség a helyvektor függvényében. Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ vektorokkal $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény a következő 3 egyenletet jelenti:

$$v_x = v_x(x, y, z), \quad v_y = v_y(x, y, z), \quad v_z = v_z(x, y, z). \quad (17.26)$$

Bármely függvény differenciálhányadosa olyan lineáris függvény, ami "kicsiben" jól közelíti az adott függvényt. Képezve (17.26) *differenciáljait*, a jól közelítő lineáris alakok:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz, \quad (17.27)$$

$$dv_y = \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz, \quad (17.28)$$

$$dv_z = \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz, \quad (17.29)$$

ami mátrixokkal:

$$\begin{pmatrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (17.30)$$

és a

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dr}} \quad \text{jelöléssel}^{200} \quad \mathbf{dv} = \mathbf{D} \mathbf{dr}, \quad (17.31)$$

ahol

$$\mathbf{dv} = (dv_x, dv_y, dv_z), \quad \text{és} \quad \mathbf{dr} = (dx, dy, dz).$$

A \mathbf{D} tenzort (amit itt a mátrixával adtunk meg) a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény *deriválttenzorának* nevezik. Ez természetesen többet jelent, mint egy mátrix: A koordinátarendszertől független (lásd (17.15) egyenletnél), és *kis* \mathbf{dr} megváltozás esetén (a (17.31) egyenlet) jó közelítéssel adja a \mathbf{dv} változást.

17.6. példa. Deriválttenzor

Legyen $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ a következő egyenletekkel adva: $v_x = x^2yz$, $v_y = x + z^2$, $v_z = y^2 + z^2$.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \text{ deriválttenzora: } \mathbf{D} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dr}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ 1 & 0 & 2z \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix},$$

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ divergenciája (a deriválttenzor első skalárinvariánsa, a főátlóbeli elemek összege, (20.42) egyenlet):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2xyz + 2z,$$

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ rotációja (a deriválttenzor vektorinvariánsa, (20.43) egyenlőség):

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = (2y - 2z, x^2y, 1 - x^2z).$$

²⁰⁰A vektorral való osztás nincs értelmezve, $\mathbf{D} = \mathbf{dv}/\mathbf{dr}$ deriválttenzor jelölésnek csak $\mathbf{dv} = \mathbf{D} \mathbf{dr}$ formában van értelme!

Mozgó felület sebessége

A kontinuummechanikai számítások egyik összetett feladata a mozgó felületek sebességének számítása.²⁰¹ Abból indulunk ki, hogy ismert a mozgó felület egyenlete:

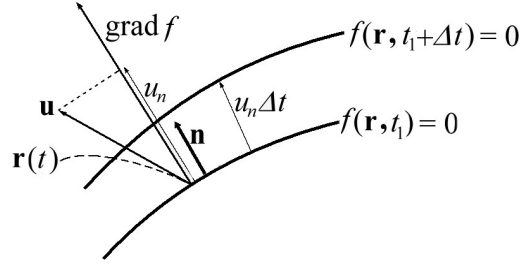
$$f(x,y,z,t) = 0,^{202} \quad \text{azaz} \quad f(\mathbf{r},t) = 0. \quad (17.32)$$

A mozgó felület *sebességét* értelmezzük. Legyen $\mathbf{r}(t)$ egy olyan görbe (a 17.4 ábrán szaggatott vonal), hogy az $\mathbf{r}(t)$ pont mindig a t időponthoz tartozó pillanatnyi felületen van, azaz:

$$f(x(t), y(t), z(t), t) = 0, \quad (17.33)$$

és t_1 időpontban a sebessége (17.4. ábra):

$$\mathbf{u} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=t_1} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (17.34)$$



17.4 ábra. Mozgó felület sebessége

Differenciáljuk (17.33) mindkét oldalát t szerint a (17.25) láncszabállyal:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} = 0. \quad (17.35)$$

De $\frac{dt}{dt} = 1$, $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, így (17.35) egyenletünk: $\text{grad } f \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (17.36)$

A gradiens vektorról tudjuk, hogy merőleges a felületre. Igaz továbbá, hogy bármely vektor osztva a hosszával az irányába mutató egységvektort adja tehát a felületi normál egységvektor:

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}. \quad \text{Ezzel (17.36) így írható:} \quad |\text{grad } f| \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (17.37)$$

amiből a sebesség normális irányú komponense (17.4. ábra): $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad } f|}. \quad (17.38)$

Itt az egyenlet jobb oldala csak a felület egyenletétől függ, az $\mathbf{r}(t)$ görbétől független. Ez azt jelenti, hogy *bármelyik* $\mathbf{r}(t)$ görbére számítjuk is, a sebességének \mathbf{n} irányú komponense mindig ugyanaz! Ezért ezt az u_n sebességet nevezzük a *felület normális irányú sebességének*, vagy egyszerűen a felület *sebességének* ²⁰³. Ha az $\mathbf{r}(t)$ görbét speciálisan úgy vesszük fel, hogy a pont a felületi normálison halad, akkor a sebessége u_n . A (17.38) egyenlettel nem csak értelmeztük a felület sebességét, hanem a számítására módszert is adtunk.

17.7. példa. Mozgó gömbfelület sebessége I.

Az $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - (Vt)^2 = 0$ olyan gömb egyenlete, melynek sugara $R = Vt$, és így a felülete $V = \text{konstans}$ sebességgel mozog. Ellenőrizzük (17.38) képletet:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -2V^2t, \quad u_n = \frac{2V^2t}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{2V^2t}{2R} = V.$$

Tehát a képlet az ismert sebességet helyesen szolgáltatja.

²⁰¹A továbbiakban Truesdell és Toupin [3] 498. oldalát követjük.

²⁰²A 17.5. példához képest itt t is szerepel a független változók között, tehát időben változó felületről van szó.

²⁰³A mozgó felület sebességének az értelmezése azért körülményes, mert a felületnek sokszor nincsenek azonosítható pontjai. Az itt adott definíció biztosítja, hogy akárhogyan azonosítjuk is a felület pontjait ($\mathbf{r}(t)$ görbékkel), a felület sebessége bármelyik azonosítás esetén ugyanaz. A mozgó felületnek csak *normális irányú* sebességet tulajdonítunk.

A felületek *másik* megadási módszere az, hogy parametrizáljuk p és q paraméterekkel. Ekkor az időfüggő felület pontjait a következő függvény szolgáltatja:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, q, t) \text{ azaz: } x = x(p, q, t), y = y(p, q, t), z = z(p, q, t) \quad .^{204} \quad (17.39)$$

A paramétervonalak érintő vektorai:
$$\mathbf{r}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} = \left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p} \right), \quad \mathbf{r}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \quad . \quad (17.40)$$

Az \mathbf{r}_p és \mathbf{r}_q vektorok érintik a felületet ezért $\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q$ vektor merőleges a felületre. Így a felületi normál egységvektor:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q}{|\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q|} \quad .^{205} \quad (17.41)$$

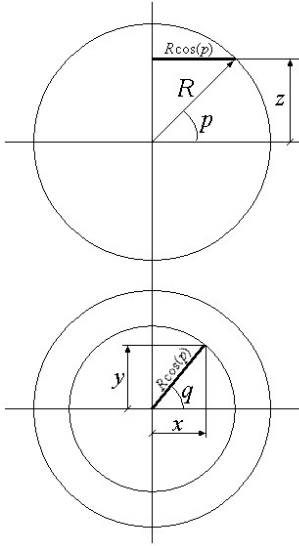
Mivel minden felület kezelhető (17.32) alakú függvényként is: $f(\mathbf{r}(p, q, t), t) = 0$, és ezt a láncszabállyal deriválva t szerint:

$$\text{grad } f \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \Big|_{p,q \text{ konstans}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (17.42)$$

a felület (17.38) szerinti sebessége:
$$u_n = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad } f|} = \frac{\text{grad } f \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \Big|_{p,q}}{|\text{grad } f|} = \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \Big|_{p,q \text{ konstans}} \quad . \quad (17.43)$$

Ebben \mathbf{n} -et (17.41) szerint számíthatjuk, tehát a felület sebességének meghatározásához paraméteres megadás esetén sem kell az f függvényt előállítani, mert a (17.41) és (17.43) képletekkel a felület sebessége számítható.

17.8. példa. Mozgó gömbfelület sebessége II.



17.5. ábra. Gömb felületének parametrizálása

A 17.7. példában szereplő gömb felületét a Föld szélességi és hosszúsági köreinek mintájára parametrizáljuk (17.5. ábra):

p : a szélességi körökhöz tartozó szög (fölső ábra),

q : a hosszúsági körökhöz tartozó szög (alsó ábra).

A gömb egyik $\mathbf{r} = (x, y, z)$ pontjának koordinátái (az ábra alapján):

$$x = R \cos(p) \cos(q), \quad y = R \cos(p) \sin(q), \quad z = R \sin(p).$$

A gömb sugara V sebességgel nő: $R = Vt$. Ezért az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, q, t)$ függvény:

$$x(p, q, t) = Vt \cos(p) \cos(q), \quad y(p, q, t) = Vt \cos(p) \sin(q), \quad z(p, q, t) = Vt \sin(p).$$

$$\mathbf{r}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} = (-Vt \sin(p) \cos(q), -Vt \sin(p) \sin(q), Vt \cos(p)) \quad ,$$

$$\mathbf{r}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = (-Vt \cos(p) \sin(q), Vt \cos(p) \cos(q), 0) \quad .$$

$\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q$ vektor, (19.36) szerint, átalakítások után: $|\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q| = R^2 \cos(p)$.

Számítva \mathbf{n} és $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ értékét, átalakítások után: $u_n = V$, ahogy vártuk.

Az eredmény egyszerűbben is nyerhető, mert a deriválásnál látható, hogy

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\mathbf{r}}{t}, \text{ és gömbre: } |\mathbf{r}| = R, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}, \text{ tehát: } u_n = \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\mathbf{r}}{R} \frac{\mathbf{r}}{t} = \frac{R^2}{Rt} = V$$

A mozgó felület által *időegység alatt áthatolt térfogat* (azon pontok halmazának térfogata, amelyeken a felület időegység alatt áthalad) legyen V . Erre:

$$\frac{dV}{dt} \Big|_S = \int_S u_n dS \quad . \quad (17.44)$$

²⁰⁴Lásd 17.8. példát.

²⁰⁵Ha az így számított vektor egy *zárt* felületen *befelé* mutat, akkor a (-1) -szeresét vesszük!

Integrálás

Térfogati integrál: Legyen $\psi(\mathbf{r})$ egy *skalár*, vagy *vektor*, vagy *tenzor* értékű függvény, ami értelmezve van a 3-dimenziós euklideszi tér V térfogatában. A V térfogatot felosztjuk n számú kis résztérfogatra. (A felosztásnál ügyelni kell arra, hogy a kis résztérfogatok ésszerű alakúak legyenek, például ne legyenek túl laposok.) A kis ΔV_i ($i = 1, \dots, n$) térfogatok mindegyikében egy \mathbf{r}_i helyvektorral kijelölünk egy pontot, és tekintjük a $\psi(\mathbf{r}_i)$ függvényértéket, majd képezzük a $\psi(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$ szorzatokat, és összegezzük:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \psi(\mathbf{r}_i) \Delta V_i . \quad (17.46)$$

Az S_n összeget a $\psi(\mathbf{r})$ függvény V térfogaton számított integrálja *közelítő összegének* nevezzük. (A számítógépes eljárások is ilyenekkel számítják az integrálokat.) Ha a felosztást finomítjuk ($n \rightarrow \infty$, $\max \Delta V_i \rightarrow 0$) és a közelítő összegek (akármilyen ésszerű felosztást alkalmazunk is) ugyanahhoz a számhoz tartanak, akkor a *függvény integrálható*, és az így kapott érték a $\psi(\mathbf{r})$ függvény V térfogaton számított *integrálja*, amit így jelölünk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_V \psi(\mathbf{r}) dV . \quad (17.47)$$

A jelölésben az integrál elnyújtott S betűje emlékeztet a közelítő összeg summájára, és dV a kis ΔV_i térfogatokra ²⁰⁶.

Megjegyzések:

(1) A kontinuumok itteni tárgyalásánál csak egyszerű térfogatokkal találkozunk. Ezekre feltehetjük, hogy V korlátos (nem nyúlik a végtelenbe) és zárt (a határfelületének pontjai is hozzá számítanak). A korlátos és zárt tartományokat *kompakt* tartományoknak nevezzük. Ismert matematikai tétel, hogy **a kompakt tartományokon folytonos függvények integrálhatók**. Tehát nagyon egyszerű feltételekkel biztosítható, hogy $\psi(\mathbf{r})$ integrálható legyen V -n. Legyen: V kompakt és $\psi(\mathbf{r})$ folytonos. ²⁰⁷

(2) Speciális esetben, ha $\psi(\mathbf{r}) \equiv 1$, akkor az integrálja V térfogatát szolgáltatja:

$$\int_V dV = V . \quad (17.48)$$

(3) Ha $V = V_1 + V_2$ két csatlakozó, közös belső pont nélküli tartomány: $\int_{V_1+V_2} \psi dV = \int_{V_1} \psi dV + \int_{V_2} \psi dV$.

Felületi integrál: Legyen $\psi(\mathbf{r})$ egy skalár, vektor, vagy tenzor értékű függvény, ami értelmezve van az S felületen. Az

$$\int_S \psi(\mathbf{r}) dS , \quad (17.49)$$

felületi integrál számításához két kérdést kell megoldani. Egyrészt értelmezni kell $\psi(\mathbf{r}) dS$ szorzatot az algebrai szabályok (19. fejezet) alapján. Másrészt elő kell állítani az integrál közelítő összegét. Ehhez az S felületet felosztjuk kis ΔS_i ($i = 1, \dots, n$) felületdarabokra. Ezek mindegyikében egy tetszőlegesen megválasztott \mathbf{r}_i helyvektorral kijelölünk egy pontot, és képezzük az

$$S_n = \sum_{i=1}^n \psi(\mathbf{r}_i) \Delta S_i \quad (17.50)$$

közelítő összeget, ahol ΔS_i a kis felületdarab területe. Egyszerű S felület (gömb, henger, stb.) esetén ΔS_i könnyen számítható. Az általános esetben, például a felület paraméteres $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, q)$ alakját használva:

²⁰⁶Az integrálás itt leírt eljárása értelemszerűen alkalmazható más tartományokon (számegyenesen, görbén, síkbeli tartományon, felületen) értelmezett függvényekre is.

²⁰⁷A függvény koordinátás előállításában minden koordináta legyen folytonos függvénye a helynek.

$$\Delta S_i \approx |\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q| \Delta p \Delta q, \quad (17.51)$$

ahol Δp , Δq a paraméterek kis növekménye, és a felületet érintő $\mathbf{r}_p \Delta p$ és $\mathbf{r}_q \Delta q$ vektorok (lásd 17.8. példa) olyan parallelogrammát feszítenek ki (192. lábjegyzet), melynek területe jól közelíti ΔS_i -t. A felosztást finomítjuk ($n \rightarrow \infty$, $\Delta S_i \rightarrow 0$, ügyelve arra, hogy a (17.50) szerinti kis parallelogrammák simuljanak a felülethez). Ha akárhogyan alkalmazva ilyen felosztásokat a közelítő összeg mindig ugyanahhoz tart, akkor a függvényt *integrálhatónak* nevezzük, és $\psi(\mathbf{r})$ integrálja a (17.49) szerinti.

(4) A gyakorlati feladatok többségében az S felület egyszerű alakú, és 2-dimenziós tartományként érvényes rá a matematikai tétel: *kompakt tartományokon folytonos függvények integrálhatók*. Ezzel a felületi integrálok létezése biztosítható. A konkrét számítások azonban nehézségekbe ütközhetnek. Egy zárt S felület (például kocka) véges sok sima felületdarabból áll, amelyek élek mentén csatlakoznak egymáshoz, és az élek csomópontokba futhatnak. Célszerű úgy eljárni, hogy az elemeket (felületdarabokat, éleket) leíró függvények (például paraméteres alakban) valamennyien **kétszer folytonosan differenciálhatók** legyenek. (Ez azt jelenti, hogy ezek a függvények, valamint az összes első és második parciális differenciálhányadosaik léteznek és kiterjeszthetők az értelmezési tartományuk határára úgy, hogy a kiterjesztett függvény is folytonos, és az éleknél a csatlakozó elemek szögei is számíthatók.)

(5) Esetenként használunk
$$\int_S \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{S}, \quad (17.52)$$

alakú integrálokat is, ahol $d\mathbf{S}$ olyan vektor, amelynek nagysága a dS felületelem területe, $d\mathbf{S}$ merőleges a felületelemre, és irányított felület esetén (például szakadási felületnél) a negatív oldal felől a pozitív oldal felé mutat. Mivel $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, ahol \mathbf{n} a felületi normál egységvektor: $\psi(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \psi(\mathbf{r}) \mathbf{n} dS$, így az integrál vissza van vezetve egy (17.49) alakú integrálra.

(6) $\int_S dS = S$ a felület területe, és zárt felület esetén $\int_S d\mathbf{S} = \mathbf{0}$ (lásd 1.24. példa). (17.53)

Vonalintegrál: Legyen $\psi(\mathbf{r})$ egy skalár, vektor, vagy tenzor értékű függvény, ami értelmezve van az L vonalon. Az

$$\int_L \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (17.54)$$

vonalmenti integrál számításához két kérdést kell megoldani. Egyrészt értelmezni kell $\psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ szorzatot az algebrai szabályok (19. fejezet) alapján. Másrészt elő kell állítani az integrál közelítő összegét. Ehhez az L vonalat felosztjuk kis $\Delta \mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$) vonaldarabokra. Ezek mindegyikében választunk egy \mathbf{r}_i helyvektort, és képezzük az

$$S_n = \sum_{i=1}^n \psi(\mathbf{r}_i) \Delta \mathbf{r}_i, \quad (17.55)$$

közelítő összeget. A felosztás finomításával ($\Delta \mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{0}$) az S_n közelítő összeg a (17.54) integrálhoz tart.

(7) Ha G egy önmagába záródó görbe (mint egy körvonal), akkor nyilván: $\int_G d\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Tartományfüggvény szerinti integrál: A 3-dimenziós euklideszi tér K részében legyen $m(V)$ egy tartományfüggvény, ami a K -nak minden olyan V résztérfogathoz rendel egy m skalár számot, amelynek a térfogata számítható. A tartományfüggvény szerinti integrálás csak abban különbözik a térfogati integráltól, hogy a közelítő összegében ΔV_i helyett $m(\Delta V_i) = \Delta m_i$ (a ΔV_i térfogathoz rendelt függvényérték) szerepel:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \psi(\mathbf{r}_i) \Delta m_i, \quad (17.56)$$

és ennek a határértéke:

$$\int_{m(V)} \psi dm. \quad (17.57)$$

18. rész. Kontinuummechanikai bizonyítások vázlata

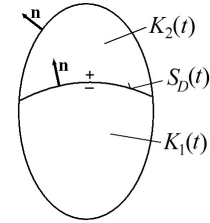
Az (a) axiómák matematikai feltételei

Az (Ia), (IIa), (IIIa) axiómák $\sim (2.3) - (2.5)$ egyenletek és következményeik *alkalmazhatók* minden olyan esetben, amikor a bennük szereplő matematikai mennyiségek (integrálok, differenciálhányadosok) valamilyen módon számíthatók. Az igényes alkalmazó azonban igyekszik már az elmélet mechanikai modelljének összeállításánál biztosítani a matematikai mennyiségek számíthatóságát. Erre a célra gyakran alkalmazott matematikai *elegendő feltétel* a következő:

Minden függvény értelmezési tartománya legyen kompakt,²⁰⁸ és minden függvény legyen kétszer folytonosan differenciálható.²⁰⁹

A newtoni kontinuummechanika tárgyalásánál ez a következőket jelenti: Időfüggő függvények esetén a "kétszer folytonosan differenciálható" mind \mathbf{r} , mind t szerint értendő. Vonatkozik ez a követelmény a függvények értelmezési tartományainak határait (felületeit, vonalait) leíró függvényekre is. Vektor és tenzor értékű függvények esetén pedig az összes komponensükre.

Az axiómák megfogalmazását olyan $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$ tartományokra alapoztuk, amelyeket az $S_D(t)$ szakadási felület szétválaszt (18.1. ábra). A szakadási felület negatív oldalát a $K_1(t)$ tartományhoz, a pozitív oldalt a $K_2(t)$ -hez számítottuk. A $K_1(t)$ és $K_2(t)$ tartományok így külön-külön kompaktok, és a belsejükben értelmezett függvények és differenciálhányadosaik folytonos kiterjesztése az $S_D(t)$ megfelelő oldalára is értendő. Ez egyúttal biztosítja, hogy $S_D(t)$ szakadási felület mentén a függvények ugrása is folytonos.



18.1. ábra. Az axiómákban szereplő tartományok

Ezekkel a feltételekkel az (a) axiómákban megjelenő *összes integrál* számítható. Az (a) axiómák *bal oldalán* szereplő integrálok *differenciálhatósága* pedig abból következik, hogy (18.8) *jobb oldalán* az összes integrál számítható.

Összefoglalva: $K_1(t)$ és $K_2(t)$ kompakt (egyszeresen összefüggő, korlátos és zárt) tartomány, $S_D(t)$ irányítható (van két oldala), sima felületdarab. A (2.2) függvények *kétszer* folytonosan differenciálhatók $K_1(t)$ és $K_2(t)$ belsejében. A függvények és differenciálhányadosaik határértékei folytonosan kiterjeszthetők $K_1(t)$ és $K_2(t)$ határára, beleértve az $S_D(t)$ két oldalán megjelenő határértékeiket is.

Az (a) axiómákból a (c) axiómák levezetése

Az (Ia), (IIa), (IIIa) axiómák $\sim (2.3) - (2.5)$ egyenletek bal oldalán az integrált *időben változó* tartományon kell számítani. Sok gyakorlati alkalmazásnál ez nehézséget okoz. Ezért az axiómák bal oldalát célszerű átalakítani úgy, hogy *időben változatlan* tartományok szerepeljenek benne.²¹⁰

Legyen $\psi(\mathbf{r}, t)$ skalár vagy vektor értékű függvény. (Az axiómákban: $\psi(\mathbf{r}, t) = \rho, \rho \mathbf{v}, \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}$.) Az átalakítandó integrál:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1}. \quad (18.1)$$

Az átalakítás egyik nehézsége az, hogy a t független változó *két helyen* szerepel a kifejezésben: V -nél is, és ψ -nél is. Az átalakítás érdekében emlékeztetbe idézünk egy differenciálási szabályt: Legyen

²⁰⁸ Lásd az integrálok (1) megjegyzésénél.

²⁰⁹ Lásd az integráloknál az (1) és a (3) megjegyzést.

²¹⁰ Matematikai szempontból ez az átalakítás a kontinuummechanika *leglényegesebb* lépése.

$\chi(x,y)$ egy tetszőleges kétváltozós függvény, és keressük a $\frac{d\chi(t,t)}{dt}$ értékét. A láncszabály (17.25)

alapján: $\frac{d\chi(t,t)}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial\chi}{\partial y} \cdot 1$. A szabály tehát az, hogy ha egy kifejezésben két helyen szerepel a független változó, akkor úgy is differenciálhatjuk, hogy az egyik helyen futtatva differenciálunk, míg a másik helyen konstans értéken tartjuk, majd a másik helyen futtatva differenciálunk, míg az egyik helyen konstans értéken tartjuk, és a kettőt összeadjuk. Ezt alkalmazzuk az előbbi integrálra. Egyszer az egyik t helyébe tesszük a konstans t_1 -et, majd a másik t helyébe, és összeadjuk:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} + \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t_1) dV \right|_{t=t_1} . \quad (18.2)$$

A második integrál átalakítása most már egyszerű, mert *időben változatlan függvényt* integrálunk (mint a 2.3. példa stacionárius áramlása esetén):

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t_1) dV \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t_1) v_n dS . \quad (18.3)$$

ahol $S(t_1)$ a $V(t_1)$ -nek a felülete, és v_n az $S(t)$ felületnek a $t = t_1$ időpillanatban érvényes sebessége. A kicsit hosszadalmas matematikai bizonyítás azon alapul, hogy elképzeljük az integrál téglányösszegét, azaz $V(t_1)$ -et kis ΔV térfogatokra bontjuk, és ΔV -t a ψ -nek egy ΔV -be tartozó értékével szorozzuk. Ezt követően azt nézzük, hogy az időben változó $V(t)$ térfogatban a $\Delta V \cdot \psi$ szorzatok hogyan változnak. A $V(t_1)$ térfogat belső részében (a határától távolabb) levő ΔV térfogatok és az időben változatlan ψ szorzata az idő múlásával nem változik. Ezért az integrál időbeli *változása* csak a $V(t)$ *határának* időbeli változásától függ, ami az $S(t_1)$ pontjainál időegység alatt $v_n dS$ integrálásával számított áthatolt térfogattal változik (lásd (17.44) egyenletet, a felület \mathbf{v} sebességgel mozog: $u_n = v_n$). Ezzel (18.3)-at igazoltuk, és betéve (18.2)-be:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t_1) v_n dS . \quad (18.4)$$

Ez az egyenlőség az **(a)** axiómák átalakításaiban *alapvető*. Érdemes megjegyezni, hogy (18.4) akkor is érvényes, ha szakadási felület is van $V(t_1)$ -ben (lásd alább).

A (18.4) jobb oldali első integrálja tovább alakítható, és az átalakítás során világos lesz a szakadási felület szerepe is. Az átalakítás egyszerű akkor, ha *nincs szakadási felület* $V(t_1)$ -ben. Ekkor *a rögzített tartományon számított integrálban* a differenciálás és integrálás sorrendje felcserélhető, és egyszerűen bedifferenciálunk:

Nincs szakadási felület $V(t_1)$ -ben:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \left. \frac{\partial\psi}{\partial t} \right|_{t=t_1} dV . \quad (18.5)$$

Ha *van szakadási felület* $V(t_1)$ -ben, amit $S_D(t_1)$ jelöl (18.1. ábra), akkor a szakadási felületnél $\partial\psi/\partial t$ differenciálhányados nem számítható (tehát $V(t_1)$ -ből ki kell hagyni, lásd alább az integrálási tartományt). Továbbá, figyelembe kell venni, hogy $V(t)$ -ben a szakadási felület is mozoghat. A szakadási felület által áthatolt térfogaton Ψ ugorhat az egyik oldalon felvett Ψ^+ értékről a másik oldalon felvett Ψ^- értékre. Ezért:

Van szakadási felület $V(t_1)$ -ben:
$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)-S_D(t_1)} \left. \frac{\partial\psi}{\partial t} \right|_{t=t_1} dV - \int_{S_D(t_1)} [\psi] u_{nD} dS , \quad (18.6)$$

ahol
$$[\psi] = \psi^+ - \psi^- , \quad (18.7)$$

a ψ ugrása a szakadási felületen, és u_{nD} a szakadási felület normális irányú sebessége (17.4. ábra).

Helyettesítsük (18.6)-ot (18.4)-be:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)-S_D(t_1)} \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=t_1} dV - \int_{S_D(t_1)} [\psi] u_{nD} dS + \int_{S(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t_1) v_n dS . \quad (18.8)$$

Ez az egyenlőség tartalmazza az összes előző egyenletet, azzal a megállapodással, hogy ha nincs szakadási felület $V(t_1)$ -ben, akkor a jobboldali középső integrált el kell hagyni.

Az (f) axiómákból a (g) axiómák levezetése

A 4. fejezetben levezettük az (f) axiómákat. Ezek:

$$(If) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (\text{a folytonosság egyik egyenlete}) \quad (18.9)$$

$$(IIIf) \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) - \rho \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{0} . \quad (18.10)$$

$$(IIIIf) \quad \frac{\partial \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} - \operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0} . \quad (18.11)$$

Ezeket egyszerűbb alakra hozzuk. (If)-ben a szorzat divergenciáját számítjuk (20.12)-vel, majd felismerjük ρ totális deriváltját (2.44) egyenlet szerint:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho \right) + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} , \quad (18.12)$$

így kapjuk az alábbi (Ig)-t.

A (IIIf)-ben az első két tagot \mathbf{s} -el jelöljük, és alább erre a következő átalakításokat alkalmazzuk. Először a $\rho \mathbf{v}$ szorzatot t szerint parciálisan differenciáljuk, valamint a $(\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}$ diádikus szorzatot differenciáljuk (20.21) alapján:

$$\mathbf{s} = \frac{\partial(\rho \cdot \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho \mathbf{v}) \circ \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} + ((\rho \mathbf{v}) \circ \nabla) \mathbf{v} , \quad (18.13)$$

ebben a $(\rho \mathbf{v}) \circ \nabla$ deriválttenzort számítjuk (20.11)-el:

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\rho (\mathbf{v} \circ \nabla) + \mathbf{v} \circ \nabla \rho) \mathbf{v} , \quad (18.14)$$

itt a diádikus szorzat definíciója (19.8) alapján: $(\mathbf{v} \circ \nabla \rho) \mathbf{v} = \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla \rho)$, ezt helyettesítve, majd a tagokat csoportosítva, ρ és \mathbf{v} -t kiemelve:

$$\mathbf{s} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{v} \right) + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \rho \right) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (18.15)$$

Ebben ρ szorzójában felismerjük \mathbf{v} pályamenti deriváltját a (2.43) egyenlet szerint, és \mathbf{v} szorzója zérus (20.12) és (18.9) alapján. Így nyerjük az alábbi (IIg)-t.

A (IIIIf) esetén hasonlóan járunk el, csak közben még (IIg)-t is helyettesítjük. Végeredményként a következő egyenleteket (axiómákat) kapjuk:

$$(Ig) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{a folytonosság másik egyenlete}) , \quad (4.7)$$

$$(IIg) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{F} . \quad (\text{Cauchy I. törvénye, [3], 545-547.o.}) , \quad (4.8)$$

$$(IIIg) \quad \mathbf{w}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}^{211} . \quad (\text{F szimmetrikus, Cauchy II. törvénye}) . \quad (4.9)$$

²¹¹ $\mathbf{w}(\mathbf{F})$ az \mathbf{F} vektorinvariánsa. \mathbf{F} akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\mathbf{w}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

19. Vektor és tenzor algebra

Az összeadás és szorzás műveletét a 17. fejezet már értelmezte. Alább a szerzőnek a direkt tenzorszámítás körébe tartozó képlet gyűjteményét közöljük. A *definíciók* (def.) a jelölést is rögzítik. A többi egyenlőség *bizonyítás* (lásd 123. lábjegyzet) alapján került a listába. A bizonyítások tekintetében a bőszéges irodalomra utalunk [19,31,49,59,63,66,147,149,150].

Többszörös vektorszorzatok:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{abc} \quad \text{az } \mathbf{abc} \text{ vegyes szorzat definíciója, az eredmény skalár} \quad (19.1)$$

az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorokkal kifeszített paralelepipedon köbtartalma

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c} \quad \text{kifejtési tétel (az eredmény vektor), } \mathbf{ac} \text{ és } \mathbf{ab} \text{ skalárszorzat} \quad (19.2)$$

Tenzoralgebra, \mathbf{A}, \mathbf{B} tetszőleges tenzorok, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}$ tetszőleges vektorok:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{Au} + \mathbf{Bu} \quad \text{tenzor összeadás definíciója, (17.17) egyenlet} \quad (19.3)$$

$$(\lambda \mathbf{A})\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{Au}) \quad \text{tenzor számmal szorzása, def. (19.39) egyenlet} \quad (19.4)$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{Bu}) \quad \text{két tenzor szorzata, def., (17.15) egyenlet, 17.1. példa} \quad (19.5)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{a} \times (\mathbf{Au}) \quad \text{vektor és tenzor vektoriális szorzata, def.} \quad (19.6)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{A} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{uA}) \times \mathbf{a} \quad \text{tenzor és vektor vektoriális szorzata, def.}^{212} \quad (19.7)$$

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{bu}) \quad \text{vektorok diádikus szorzata def., (19.37) egyenlet (tenzor)} \quad (19.8)$$

$$\mathbf{O}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{a nulltenzor definíciója, } \mathbf{0} \text{ a nullvektor} \quad (19.9)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{az idemtenzor (azonosság tenzora) def.} \quad (19.10)$$

Valamennyi szorzás (19.4) - (19.8) asszociatív, valamint a skalár, vektor és tenzor összeadásra disztributív, például: $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{A} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{A}$, és $\mathbf{a} \times (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{A}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{A}_2$.

Invariánsok, transzponáltak, \mathbf{A} tetszőleges tenzor, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tetszőleges vektorok:

$$i(\mathbf{A})\mathbf{abc} = (\mathbf{Aa})\mathbf{bc} + \mathbf{a}(\mathbf{Ab})\mathbf{c} + \mathbf{ab}(\mathbf{Ac}) \quad i(\mathbf{A}) \text{ skalárinvariáns def., (19.40) egyenlet} \quad (19.11)$$

$$\mathbf{a}w(\mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{aAb} - \mathbf{bAa} \quad w(\mathbf{A}) \text{ vektorinvariáns def., (19.41) egyenlet}^{213} \quad (19.12)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{Ab}) = \mathbf{b}(\mathbf{A}^*\mathbf{a}) \quad \mathbf{A}^* \text{ a transzponált tenzor def.}^{214} \quad (19.13)$$

$$\mathbf{aA} = \mathbf{A}^*\mathbf{a} \quad \text{tenzor balról szorozva vektorral def.} \quad (19.14)$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S} \quad \text{szimmetrikus tenzor definíciója} \quad (19.15)$$

$$\mathbf{T}^* = -\mathbf{T} \quad \text{antiszimmetrikus tenzor definíciója} \quad (19.16)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{s}_2 + \lambda_3 \mathbf{s}_3 \circ \mathbf{s}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \times \mathbf{I}, \text{ minden tenzorra a felbontási tétel} \quad (19.17)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a sajátértékek, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ a sajátvektorok, \mathbf{w} az \mathbf{A} vektorinvariánsa.²¹⁵

$$2\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^* \quad \mathbf{S} \text{ az } \mathbf{A} \text{ szimmetrikus része} \quad (19.18)$$

$$2\mathbf{T} = \mathbf{w} \times \mathbf{I} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^* \quad \mathbf{T} \text{ az } \mathbf{A} \text{ antiszimmetrikus része} \quad (19.19)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{a} \quad (19.20)$$

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})^* = \mathbf{b} \circ \mathbf{a} \quad \text{ebből látható, hogy } (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \neq \mathbf{b} \circ \mathbf{a} \quad (19.21)$$

$$i(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{ab} \quad \text{vektorok diádikus szorzatának skalárinvariánsa} \quad (19.22)$$

$$w(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \text{vektorok diádikus szorzatának vektorinvariánsa} \quad (19.23)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{A})^* = -\mathbf{A}^* \times \mathbf{a} \quad (19.24)$$

$$i(\mathbf{a} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{a}w(\mathbf{A}) \quad (19.25)$$

$$w(\mathbf{a} \times \mathbf{A}) = i(\mathbf{A})\mathbf{a} - \mathbf{Aa} \quad \dots \dots \dots (19.26)$$

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^* \quad \text{két tenzor szorzatának transzponáltja} \quad (19.27)$$

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A} \quad \text{transzponált transzponáltja az eredeti} \quad (19.28)$$

$$w(\mathbf{A}^*) = -w(\mathbf{A}) \quad \text{transzponált vektorinvariánsa} \quad (19.29)$$

$$w(\mathbf{A}^*\mathbf{B}) = -w(\mathbf{B}^*\mathbf{A}) \quad (19.30)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{a})^* = -\mathbf{a} \times \mathbf{A}^* \quad (19.31)$$

$$\mathbf{A} \bullet \bullet \mathbf{B} = i(\mathbf{A}^* \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{ik} \quad \text{tenzorok (kétszeres) skalárszorzata def.}^{216} \quad (19.32)$$

²¹²Ahol \mathbf{uA} a (19.14) definíció szerint értendő.

²¹³Mivel tetszőleges \mathbf{a} és \mathbf{b} -re igaz, a koordináta-rendszer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektoraira is, így következik (19.41).

²¹⁴Az \mathbf{A} tenzor \mathbf{A}^* transzponáltjának mátrixát a mátrix elemeinek főátlóra való tükrözésével kapjuk. (Más jelölése \mathbf{A}^t .)

²¹⁵Egyik mechanikai alkalmazásuk a (2.40) egyenlet után látható.

²¹⁶Erre egyes szerzők $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ jelölést használják [147].

19.1. példa. Az algebrai műveletek koordinátáiban

Amikor egy háromdimenziós euklideszi térbe derékszögű Descartes koordinátarendszert vezetünk be, akkor minden \mathbf{v} vektorhoz három koordinátát csatolunk. Ezek kétféle elrendezése

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ sorvektor,} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ oszlopvektor,}$$

kényelmesen kapcsolható a mátrixszorzás (sor-oszlop) szabályához (lásd alább \mathbf{ab} és $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$). Azonban akár sorvektorként, akár oszlopvektorként kezeljük, ugyanazt a \mathbf{v} vektort képviselik!

$$\begin{array}{ll} \text{Direkt} & \text{Koordinátás} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} & (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \end{array} \quad (19.33)$$

$$\lambda \mathbf{a} \quad (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad (19.34)$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad \text{vektorok skalár szorzata} \end{array} \quad (19.35)$$

(19.2. példa)

$$\mathbf{axb} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{j}(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (19.36)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a koordinátarendszer bázisvektorai, vektorok **vektoriális szorzata**

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{vektorok diádikus szorzata} \quad (19.37)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \quad (19.38)$$

$$\lambda \mathbf{A} \quad \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \quad (19.39)$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{i}(\mathbf{A}) & a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (\text{magyarul } \mathbf{nyom}, \text{ angolul } \mathbf{trace}, \text{ németül } \mathbf{spur}) \end{array} \quad (19.40)$$

skalárinvariáns

$$\begin{array}{ll} \mathbf{w}(\mathbf{A}) & \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \leftarrow \text{az } \mathbf{S} \text{ séma szerint: } (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12}) \end{array} \quad (19.41)$$

vektorinvariáns

$$\mathbf{Ab} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3 \\ a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{sor oszlop szorzás}) \quad (19.42)$$

$$\mathbf{aB} \quad (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + a_3 b_{31} \\ a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + a_3 b_{32} \\ a_1 b_{13} + a_2 b_{23} + a_3 b_{33} \end{pmatrix} \leftarrow \text{sorvektor!} \quad (19.43)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{B} \quad \begin{pmatrix} a_2 b_{31} - a_3 b_{21} & a_2 b_{32} - a_3 b_{22} & a_2 b_{33} - a_3 b_{23} \\ a_3 b_{11} - a_1 b_{31} & a_3 b_{12} - a_1 b_{32} & a_3 b_{13} - a_1 b_{33} \\ a_1 b_{21} - a_2 b_{11} & a_1 b_{22} - a_2 b_{12} & a_1 b_{23} - a_2 b_{13} \end{pmatrix} \quad (19.44)$$

19.2. példa. Másféle algebrai szabályok

A tenzoralgebra jelölésrendszere sajnos nem egységes. Például vektorok diádikus szorzatát (amit előbb $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ -vel jelöltünk) egyesek $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ -nek írják. Más jelöléseket használó olvasók számára két gyakran használt jelölési konvenciót említünk.

Pont-szorzás

Két vektor skalárszorzatát (az itt használt \mathbf{ab} helyett) gyakran $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ -vel jelölik (lásd 191. lábjegyzet):

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad . \quad (19.45)$$

A *pont-szorzás* (angolul: dot product) szabálya: a két egyforma hosszúságú sorozat elemeit páronként összeszorozzuk és összegezzük. A pont-szorzás használható n -dimenziós vektorokra, mátrixok szorzására [147,150] és különféle elemekből álló rendezett halmazokra is (lásd (20.51) egyenletet).

A skalárszorzás felismerése ebben a könyvben egyszerű: Két egymás mellé írt vektor a skalárszorzatot jelenti (ahogy ezt valós számok szorzásánál is használjuk). Azonban, ha a pont használata valamilyen okból értelmesebb, akkor kiteszük a pontot is.

Index konvenció

Tekintsünk egy valóseggyütthatós lineáris egyenletrendszer:

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k = b_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19.46)$$

Ricci és Einstein alapján ez röviden így írható:

$$a_{ik} x_k = b_i \quad . \quad (19.47)$$

ahol az index *ismétlődése* azt jelenti, hogy az indexet végig kell futtatni a tartományán, és az így nyert mennyiségeket összegezzük. A (19.47) egyenlet tehát a (19.46) rövid jelölése.

A (19.45) egyenlőségre is alkalmazható az index konvenció:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_ib_i \quad . \quad (19.48)$$

Tenzorok első skalárja is a (19.40) egyenlőség alapján röviden így írható:

$$i(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii} \quad . \quad (19.49)$$

Olyan elméletekben, melyek sok indexekkel ellátott algebrai paramétert használnak (plazmák fizikája, relativitáselmélet) az index konvenció nagy segítség. Azonban vannak olyan fizikai egyenletek, melyekben szerepelnek azonos indexű mennyiségek, de ezek szerepe más, és az előbbi összegzésnek nincs értelme. Ezért az index konvenció használata előtt mindig meg kell említeni, hogy alkalmazandó.

A koordinátás tenzorszámítás részletei megismerhetők a szakirodalomból [95,147,149,150].

20. Vektor és tenzor analízis

Alábbi egyenletekben Δ : (görög delta) különbséget jelöl (mint valós függvények differenciálásánál), ∇ : (nabla) a differenciálás operátora (20.2. példa), u skalár, \mathbf{u} vektor, \mathbf{A} tenzor.

$$\Delta u = \frac{du}{d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{e} \Delta \mathbf{x}, \text{ ahol } \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{o} \text{ ha } \Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{o}. \quad \frac{du}{d\mathbf{x}} = \nabla u = u \nabla = \text{grad } u, \text{ **gradiens**, def.} \quad (20.1)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{E} \Delta \mathbf{x}, \text{ ahol } \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{o} \text{ ha } \Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{o}. \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{u} \circ \nabla, \text{ **deriválttenzor** def. 17.6. példa} \quad (20.2)$$

$$\mathbf{i} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \right) = \text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \nabla = \frac{d}{d\mathbf{x}} u = u \frac{d}{d\mathbf{x}} \quad \text{**divergencia** def. és jelölései, 17.6. példa} \quad (20.3)$$

$$\mathbf{w} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \right) = \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \nabla = \frac{d}{d\mathbf{x}} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \frac{d}{d\mathbf{x}} \quad \text{**rotáció** def. és jelölései, 17.6. példa} \quad (20.4)$$

Legyen \mathbf{a} tetszőleges, térben állandó vektor, ezzel:

$$\mathbf{a} (\mathbf{A} \nabla) = (\mathbf{a} \mathbf{A}) \nabla, \quad (\nabla \text{ jobbról}) \quad \mathbf{A} \nabla = \text{div } \mathbf{A}, \text{ **tenzor divergencia** def. és jelölés} \quad (20.5)$$

$$\nabla \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \nabla \quad (\nabla \text{ balról}) \quad \text{a transzponált tenzor divergenciája, def.} \quad (20.6)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \mathbf{a} = \nabla \times (\mathbf{A} \mathbf{a}), \quad \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{**tenzor rotáció** def. és jelölése (tenzor)} \quad (20.7)$$

$$\mathbf{a} (\mathbf{A} \times \nabla) = (\mathbf{a} \mathbf{A}) \times \nabla \quad \mathbf{A} \times \nabla = -(\nabla \times \mathbf{A})^* \quad \text{kereszt jobbról, definíció és azonosság} \quad (20.8)$$

$$(uv) \nabla = (u \nabla) v + u (\nabla v) \quad (20.9) \quad (\mathbf{u} \mathbf{v}) \nabla = \mathbf{u} (\mathbf{v} \circ \nabla) + \mathbf{v} (\mathbf{u} \circ \nabla) \quad (20.10)$$

$$(u \mathbf{v}) \circ \nabla = u (\mathbf{v} \circ \nabla) + \mathbf{v} \circ (\nabla u) \quad (20.11) \quad (u \mathbf{v}) \nabla = u (\nabla \mathbf{v}) + \mathbf{v} (\nabla u) \quad (20.12)$$

$$\nabla \times (u \mathbf{v}) = u (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla u \times \mathbf{v} \quad (20.13) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \nabla = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \circ \nabla) - \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \circ \nabla) \quad (20.14)$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \nabla = (\nabla \times \mathbf{u}) \mathbf{v} - \mathbf{u} (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (20.15) \quad \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{u} \quad (20.16)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{A}) \mathbf{u} + \mathbf{i} [\mathbf{A} (\mathbf{u} \circ \nabla)] \quad (20.17) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \mathbf{u}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \mathbf{u} + \mathbf{w} [\mathbf{A} (\mathbf{u} \circ \nabla)] \quad (20.18)$$

$$(\mathbf{u} \mathbf{A}) \nabla = \mathbf{u} (\mathbf{A} \nabla) + \mathbf{i} [(\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{A}] \quad (20.19) \quad \nabla \times (\mathbf{u} \mathbf{A}) = \mathbf{u} (\mathbf{A} \times \nabla) - \mathbf{w} [(\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{A}] \quad (20.20)$$

$$(\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) \nabla = \mathbf{u} (\nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{v} \quad (20.21) \quad \nabla \times (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \circ \mathbf{v} - \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \circ \nabla) \quad (20.22)$$

$$\nabla (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \mathbf{A} - \mathbf{u} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (20.23) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{A}) \nabla = \mathbf{u} \times (\mathbf{A} \nabla) - \mathbf{w} [(\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{A}^*] \quad (20.24)$$

$$\nabla^2 u = \text{div grad } u, \quad (20.25) \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \right) \nabla, \text{ Laplace op. vektorra} \quad (20.26)$$

$$\text{Laplace operátor, (20.46)} \quad (20.27) \quad \text{div rot } \mathbf{u} = 0 \quad (20.28)$$

$$\text{rot grad } u = \mathbf{o} \quad (20.29) \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} \quad (20.30)$$

$$\nabla^2 (u \mathbf{v}) = u \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla^2 u \quad (20.31) \quad \text{rot } \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 \text{ rot } \mathbf{v} \quad (20.32)$$

$$\nabla^2 (u \mathbf{v}) = u \nabla^2 \mathbf{v} + 2 \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} \text{grad } u + \mathbf{v} \nabla^2 u \quad (20.33) \quad \nabla \times \left[\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \right)^* \right] = \mathbf{O} \quad (20.34)$$

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} \quad (20.35) \quad \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}} \circ \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} \quad (20.36)$$

$$\frac{d u(\mathbf{v}(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{d\mathbf{x}} \quad (20.37) \quad \frac{d u(\mathbf{v}(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{d\mathbf{x}} \quad (20.38)$$

$$\frac{d^2 u}{d\mathbf{x}^2} = (\text{grad } u) \circ \nabla \quad (20.39)$$


Megjegyzés: Vektorral való osztás nincs értelmezve. Ha egy tört nevezőjében vektor szerepel ($d\mathbf{x}$), ez csak a jelölés részeként, a (20.1) – (20.4) egyenlőség szerint értendő!

20.1. példa. A vektoranalízis alapfogalmai koordinátáson

<i>Direkt</i>	<i>Koordinátás</i>
$\text{grad } u = \nabla u = u \nabla = \frac{du}{dx}, \text{ gradiens, (20.1) képlet}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (20.40)$

$u \circ \nabla = \frac{du}{dx}, \text{ deriválttenzor, (20.2) képlet, 17.6. példa}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (20.41)$
--	---

$\text{div } \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} = \mathbf{u} \nabla = i(\mathbf{u} \circ \nabla), \quad (20.3) \text{ képlet}$ a <u>divergencia</u> a deriválttenzor skalárinvariánsa	$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (20.42)$
--	---

$\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \nabla = \mathbf{w}(\mathbf{u} \circ \nabla)$ a <u>rotáció</u> a deriválttenzor vektorinvariánsa, (20.4) képlet	 ← a deriválttenzorban "S visszafelé" séma szerint:
	$\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (20.43)$

$\text{div } \mathbf{A} = \mathbf{A} \nabla = \nabla \mathbf{A}^*$ <u>tenzordivergencia</u> , (20.5) képlet	$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + \frac{\partial a_{13}}{\partial z}, \frac{\partial a_{21}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + \frac{\partial a_{23}}{\partial z}, \frac{\partial a_{31}}{\partial x} + \frac{\partial a_{32}}{\partial y} + \frac{\partial a_{33}}{\partial z} \right) \quad (20.44)$
---	---

$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \text{ tenzorrotáció,}$ (20.7) képlet	$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_{31}}{\partial y} - \frac{\partial a_{21}}{\partial z} & \frac{\partial a_{32}}{\partial y} - \frac{\partial a_{22}}{\partial z} & \frac{\partial a_{33}}{\partial y} - \frac{\partial a_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial z} - \frac{\partial a_{31}}{\partial x} & \frac{\partial a_{12}}{\partial z} - \frac{\partial a_{32}}{\partial x} & \frac{\partial a_{13}}{\partial z} - \frac{\partial a_{33}}{\partial x} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - \frac{\partial a_{11}}{\partial y} & \frac{\partial a_{22}}{\partial x} - \frac{\partial a_{12}}{\partial y} & \frac{\partial a_{23}}{\partial x} - \frac{\partial a_{13}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (20.45)$
--	---

$\nabla^2 u = \text{div grad } u, \text{ Laplace operátora,}$ (20.25) képlet	$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (20.46)$
---	--

$\nabla^2 \mathbf{u} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) \nabla, \text{ Laplace operátora vektorra}$	$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u_x, \nabla^2 u_y, \nabla^2 u_z) \quad (20.47)$
--	--

20.2. példa. A nabla-vektor használata

A ∇ (nabla) Hamilton operátora²¹⁷, a koordinátás vektoranalízis fogalma, *formálisan* vektor:

$$\nabla - \text{vektor} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (20.50)$$

ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok. Ennek a kifejezésnek sem vektoralgebrai sem függvénytani értelme nincs. Azonban, ha egy függvényt utána írunk, és úgy értelmezzük, hogy a differenciálások a függvényre vonatkoznak, akkor elvégezhető műveleteket kapunk. Például skalárisan szorozva egy $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ függvénnyel:

$$(\nabla - \text{vektor}) \cdot \mathbf{v} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \quad (20.51)$$

Mivel $\mathbf{ij} = 0, \mathbf{ik} = 0, \mathbf{jk} = 0, \mathbf{ii} = 1, \mathbf{jj} = 1, \mathbf{kk} = 1$ a jólismert **divergenciát** kaptuk (amit a 17.6. példában és a (20.3), (20.42) egyenletekben $\nabla \mathbf{v}$ -vel jelöltünk). A formális eredmény annyiban hasonlít két vektor skalár

²¹⁷Operátornak nevezik valamely művelet (itt a differenciálás) végrehajtását előíró jelölést.

szorzatára, hogy skálár számot kaptunk. Azonban az így elvégzett skaláris szorzás nem követi a vektoralgebra összes szabályát, mert a fordított szorzat: $\mathbf{v} \cdot \nabla$ -vektor egy operátort jelent, aminek csak akkor van értelme, ha utána függvény található. Tehát a ∇ -vektor és egy igazi vektor skalárszorzata nem kommutatív [150] !

A nabla-vektort skálár $\varphi(\mathbf{x})$ és vektor $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ függvényekre alkalmazva:

$$(\nabla - \text{vektor}) \varphi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad (20.52)$$

$$(\nabla - \text{vektor}) \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \text{a (19.36) egyenlőséget követve} \quad (20.53)$$

$$(\nabla - \text{vektor}) \circ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \right)^* = (\mathbf{u} \circ \nabla)^* \quad (20.54)$$

$\varphi(\mathbf{x})$ **gradiensét** (a (20.40) egyenletet), illetve $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ **rotációját** (a (20.43) egyenletet) és $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ **deriválttenzorának** transzponáltját (lásd (20.41) mátrixát) kaptuk. Az egyenletek végén a nablás *rövid jelölést* is feltüntettük.

A nabla-vektor alkalmazásának sikere abban rejlik, hogy a koordinátáit a mátrix műveletekben (mátrixok szorzásánál, invariánsok számításánál) ugyanúgy kell elhelyezni, mint a közönséges vektorok koordinátáit. A használatának azonban vannak különleges szabályai is, amiket be kell tartani [150,95,147].

A *direkt* vektoranalízis keretében a nabla csak *jelölés*. Megtartjuk a koordinátás számítással nyert rövid jelöléseket, és további jelöléseket vezetünk be. Egyrészt $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ tenzor-vektor függvényre is kiterjesztjük a nablázást, másrészt a skalárszorzás kommutativitását is biztosítjuk a $\mathbf{v} \cdot \nabla = \nabla \cdot \mathbf{v}$ egyenlőséggel [95,149]. (A koordináták szintjén ez azt jelenti, hogy az eddig értelmetlen $u_y \frac{\partial}{\partial x}$ szimbólum az $u_y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$ értelmet nyeri.)

Továbbá a koordinátáson már értelmezett ∇u , $\nabla \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$, $\nabla \circ \mathbf{u}$, $\nabla \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ mennyiségekkel a fordított sorrendű szorzásokat így értelmezzük:

$$u \nabla = \nabla u, \quad \mathbf{u} \nabla = \nabla \mathbf{u} \text{ (skalárszorzás)}, \quad \mathbf{u} \times \nabla = - \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \circ \nabla = (\nabla \circ \mathbf{u})^*, \quad \mathbf{A} \nabla = \nabla \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{A} \times \nabla = - (\nabla \times \mathbf{A}^*)^* \quad (20.55)$$

Ez lehetővé teszi, hogy a direkt vektorszámítás sok egyenletében a ∇ vektort ugyanúgy kezeljük, mint a valódi vektorokat (azaz a 19. fejezet egyes algebrai egyenletei érvényesek rá is). A *koordinátás* ∇ -vektor és a *direkt* ∇ vektor nem teljesen ugyanaz, de a velük nyert egyenleteket úgyszólván mindig ellenőrizni kell.

Összefoglalásként, a direkt vektoranalízis fő fogalmainak nablás jelölései és egyenletei:

Skálár $u(\mathbf{x})$ függvény	gradiens (vektor):	$\text{grad } u = \nabla u = u \nabla$	(20.1), (20.40) egyenlet.
Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ függvény	divergencia (skalár):	$\text{div } \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} = \mathbf{u} \nabla$	(20.3), (20.42) egyenlet,
	rotáció (vektor):	$\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$	(20.4), (20.43) egyenlet,
	deriválttenzor (tenzor):	$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{u} \circ \nabla$	(20.2), (20.41) egyenlet.
Tenzor $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ függvény	tenzordivergencia (vektor):	$\text{div } \mathbf{A} = \mathbf{A} \nabla = \nabla \mathbf{A}^*$	(20.5), (20.44) egyenlet,
	tenzorrotáció (tenzor):	$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$	(20.7), (20.45) egyenlet.

Ezek a fogalmak, a (20.9) – (20.39) egyenletekkel együtt, a könyvben követett gondolatmenetekkel elegendőek voltak a newtoni kontinuummechanika bevezető megalapozásához, valamint áramlástan és vízgépés gyakorlati kérdések tárgyalásához.

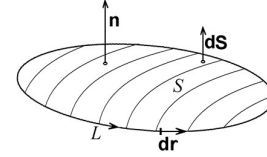
Az ellenőrzött egyenletek megtalálhatók a direkt tenzorszámítás tankönyveiben [59,147,149,150], és a koordinátás számításra Kozák Imre és Szeidl György tanulmányaiban [94,95,109,117].

21. Integráltételek

STOKES tétele (folytonosan differenciálható \mathbf{y} -ra):

$$\int_S \text{rot } \mathbf{y} \, d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{y} \, d\mathbf{r} \quad (21.1)$$

Az \mathbf{n} normális irányából nézve L -en a haladási irány pozitív (előre haladva S balra fekszik), 21.1. ábra.



21.1. ábra. Stokes tételéhez

$$\text{Ebből bizonyíthatók: } \int_S \text{grad } u \times d\mathbf{S} = - \int_L u \, d\mathbf{r} \quad , \quad \int_S (\mathbf{A} \times \nabla) d\mathbf{S} = - \int_L \mathbf{A} \, d\mathbf{r} \quad (21.2)$$

$$\text{Speciális esetek: Ha } \nabla^2 u = 0, \text{ akkor: } \int_S \frac{d^2 u}{d\mathbf{x}^2} d\mathbf{S} = \int_S [(\nabla u) \circ \nabla] d\mathbf{S} = - \int_L \nabla u \times d\mathbf{r} \quad (21.3)$$

$$\text{Ha } \text{div } \mathbf{y} = 0, \text{ akkor } \int_S (\nabla \circ \mathbf{y}) d\mathbf{S} = - \int_L \mathbf{y} \times d\mathbf{r} \quad (21.4)$$

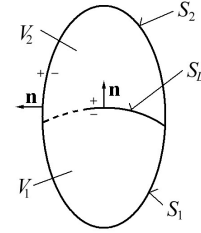
GAUSS tétele (szakadásos \mathbf{y} esetén!)

\mathbf{y} folytonosan differenciálható V_1, V_2 belsejében (21.2. ábra),

\mathbf{y} határértékei darabonként folytonosak $S_1 + S_2 = S$ -en,

S_D két oldalán a határértékei \mathbf{y}^+ és \mathbf{y}^- darabonként folytonosak,

$$\text{akkor: } \int_{V_1+V_2} \text{div } \mathbf{y} \, dV + \int_{S_D} [\mathbf{y}] d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{y} \, d\mathbf{S} \quad , \quad (21.5)$$



ahol az $[\mathbf{y}] = \mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-$ vektort *felületi divergenciának* nevezik.

21.2. ábra. Gauss tételéhez

$$\text{GAUSS tételkör } \text{folyt. függvényekre: } \int_V \text{rot } \mathbf{y} \, dV = - \int_S \mathbf{y} \times d\mathbf{S} \quad , \quad \int_V (\mathbf{y} \circ \nabla) dV = \int_S \mathbf{y} \circ d\mathbf{S} \quad , \quad (21.6)$$

$$\int_V \text{grad } u \, dV = \int_S u \, d\mathbf{S} \quad , \quad \int_V (\mathbf{A} \nabla) dV = \int_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} \quad , \quad \int_V \Delta \mathbf{y} \, dV = \int_S (\mathbf{y} \circ \nabla) d\mathbf{S} \quad . \quad (21.7)$$

GREEN tételei (3D-s folytonosan differenciálható u és v -re):

$$\int_V \left(u \nabla^2 v + \frac{du}{d\mathbf{x}} \frac{dv}{d\mathbf{x}} \right) dV = \int_S u \frac{dv}{d\mathbf{x}} d\mathbf{S} \quad . \quad (21.8)$$

$$\int_V \left(u \nabla^2 v - v \nabla^2 u \right) dV = \int_S \left(u \frac{dv}{d\mathbf{x}} - v \frac{du}{d\mathbf{x}} \right) d\mathbf{S} \quad . \quad (21.9)$$

Mindkét képletben u helyett \mathbf{u} , és v helyett \mathbf{v} írható, de csak egyszerre! $d\mathbf{S}$ a V -ből kifelé mutat!

$\frac{dv}{d\mathbf{x}} d\mathbf{S}$ helyett $\frac{\partial v}{\partial n}$ normális irányú derivált is írható (u -ra is).

Speciálisan, ha $v = \frac{1}{r}$, ahol $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ és \mathbf{x}_0 rögzített pont, erre: $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, és:

$$\alpha u(\mathbf{x}_0) = \int_V \frac{du}{d\mathbf{x}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \frac{1}{r} dV - \int_S u \frac{d}{d\mathbf{x}} \frac{1}{r} d\mathbf{S} \quad , \quad (21.10)$$

$$\alpha u(\mathbf{x}_0) = \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 u \, dV - \int_S \frac{1}{r} \frac{du}{d\mathbf{x}} d\mathbf{S} + \int_S u \frac{d}{d\mathbf{x}} \frac{1}{r} d\mathbf{S} \quad . \quad (21.11)$$

Itt α a V térfogat látószöge az \mathbf{x}_0 pontból:

Ha \mathbf{x}_0 a V belső pontja, akkor $\alpha = 4\pi$.

Ha \mathbf{x}_0 a V határán van, olyan pontban, ahol van érintősík, akkor $\alpha = 2\pi$.

Ha \mathbf{x}_0 a V határán van, ahol nincs érintősík, akkor α a tényleges látószög, szteradiánban.

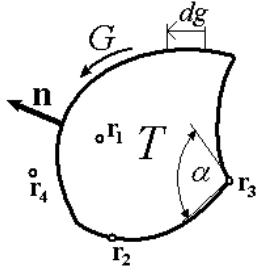
Ha \mathbf{x}_0 kívül van a V térfogaton, akkor $\alpha = 0$.

Síkbeli Green tétel

Legyen $u = u(x, y)$ kétváltozós valós függvény, amely a T egyszeresen összefüggő nyílt tartományban (21.3. ábra) kétszer folytonosan differenciálható, és a tartomány G határára folytonosan kiterjeszthető. Erre érvényes

Síkbeli (2D-s) Green tétel:
$$\alpha u(\mathbf{r}_{fix}) = \int_T (\nabla^2 u) v dT + \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dg, \quad (21.12)$$

ahol \mathbf{r}_{fix} a sík *tetszőleges* rögzített pontja (a 21.3. ábrán példaként \mathbf{r}_1 , vagy \mathbf{r}_2 , vagy \mathbf{r}_3 , vagy \mathbf{r}_4), és dg az ívelem a G görbén. A képletben $v(x, y)$ a ponttól számított $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{fix}|$ távolsággal és a természetes logaritmussal képezett: $v(x, y) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ függvény, ami teljesíti a $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ egyenletet.



21.3. ábra. 2D-s Green tételhez

A G görbe körüljárási iránya az óramutatóval ellentétes, a normál egységvektor kifelé mutat (a (21.12) képletben u és v normális irányú deriváltjai is ebbe az irányba értendők).

α a T tartomány látószöge az \mathbf{r}_{fix} pontból radiánban, pontosabban:

Ha $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_1$, a T belső pontja (21.3. ábra), akkor $\alpha = 2\pi$.

Ha $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_2$, a T határán, olyan pontban, ahol van érintő, $\alpha = \pi$.

Ha $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_3$, a T határán sarokpontban van, akkor α a tényleges látószög radiánban (21.3. ábra).

Ha $\mathbf{r}_{fix} = \mathbf{r}_4$, kívül van a T tartományon, akkor $\alpha = 0$.

A 2D-s (21.12) egyenlet szerepe hasonló a 3D-s (21.11) egyenlethez, azonban a *magfüggvény* a 3D-s egyenletben: $v(x, y, z) = \frac{1}{r}$, míg a 2D-s esetben: $v(x, y) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$.

22. Potenciálmélet

$\text{rot } \mathbf{y} = 0$, az \mathbf{y} vektortér **rotációmentes**.

Stokes tétele alapján bármely összehúzható zárt L görbén a körintegrál: $\int_L \mathbf{y} \, d\mathbf{r} = 0$.

Létezik **skalárpotenciál**: $\Phi(\mathbf{x}) = \int_a^{\mathbf{x}} \mathbf{y} \, d\mathbf{r}$ alakban, melyre: $\mathbf{y} = \text{grad} \Phi$. (22.1)

Egyszeresen összefüggő tartományban Φ *egyértékű*.

Kétszeresen összefüggő tartományban Φ *ciklikus*.

Ha $\text{div } \mathbf{y} = 0$ is teljesül, akkor $\nabla^2 \Phi = 0$: **Laplace** mezőt kapunk.

Ha $\text{div } \mathbf{y} = 4\pi \rho(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ forrás sűrűség, $\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho(\mathbf{x})$: **Poisson** mezőt kapunk.

Ismert $\rho(\mathbf{x})$ esetén Φ meghatározható (21.11)-el.

$\text{div } \mathbf{y} = 0$, az \mathbf{y} vektortér **forrásmentes**.

Ekkor értelmezhetők \mathbf{y} áramvonalai (vagy erővonalai), amelyek valamilyen fluxust képviselnek és nem tűnnek el: Vagy önmagukba záródnak, vagy szakadási felületen vagy határfelületen végződnek, vagy a végtelenbe távoznak.

Létezik **vektorpotenciál**: $\mathbf{y} = \text{rot } \mathbf{v}_p$. (22.2)

A \mathbf{v}_p vektorpotenciál nem egyértelmű, de azzá tehető, ha kikötjük például, hogy $\text{div } \mathbf{v}_p = 0$ legyen.

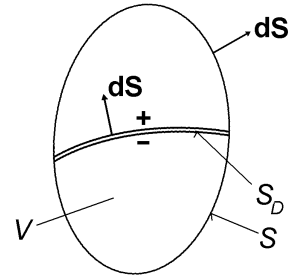
Stokes potenciálok (szakadásos \mathbf{y} esetén!)

Tetszőleges $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektormező előállítható

$$\mathbf{y} = -\text{grad } \Psi_s + \text{rot } \mathbf{w}_s \quad \text{alakban}$$

([19], 828. oldal), (figyeljünk $\text{grad } \Psi_s$ előjelére!)

Véges V térfogatban, melynek határoló felülete S , és melyben S_D -én az \mathbf{y} -nak szakadása van: $[\mathbf{y}] = \mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-$, a Ψ_s és \mathbf{w}_s **Stokes féle potenciálok** a következők:



22.1. ábra. Stokes potenciálokhoz

$$\alpha \Psi_s(\mathbf{x}_o) = \int_V \frac{\text{div } \mathbf{y}}{r} dV + \int_{S_D} \frac{[\mathbf{y}]}{r} d\mathbf{S} - \int_S \frac{\mathbf{y}}{r} d\mathbf{S} \quad (22.3)$$

$$\alpha \mathbf{w}_s(\mathbf{x}_o) = \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{y}}{r} dV - \int_{S_D} \frac{[\mathbf{y}] \times d\mathbf{S}}{r} + \int_S \frac{\mathbf{y} \times d\mathbf{S}}{r} \quad (22.4)$$

ahol \mathbf{x}_o a tér tetszőleges rögzített pontja, α a V térfogat látószöge az \mathbf{x}_o pontból, lásd (21.11), és $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|$ az integráció \mathbf{x} futópontja és az \mathbf{x}_o pont távolsága.

A (22.3) és (22.4) képleteken alapulnak egyes *peremelem módszerek* (12.6 és 15.3 példa).

23. Segédváltozós integrálok differenciálása

Segédváltozós integrálokról akkor beszélünk, ha az integrálandó függvény a helyvektoron kívül függ egy további változótól. A kontinuummechanikában a segédváltozó szinte kizárólag az idő, ezért t -vel jelöljük.

Vonalmenti integrál, $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ vektor értékű folytonos függvény, $L(t)$ anyagi vonal, tehát a pontjai az 1.3. ábra szerint a kontinuum sebességével mozognak, azaz $\mathbf{u} = \mathbf{v}$:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{L(t)} \mathbf{f} d\mathbf{r} \right|_{t=t_1} = \int_{L(t_1)} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{f} (\mathbf{v} \circ \nabla) \right) \Big|_{t=t_1} d\mathbf{r} . \quad (23.1)$$

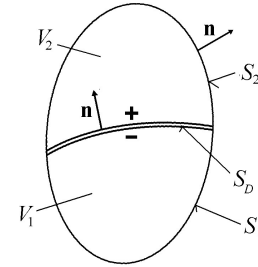
Felületi integrál, $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ vektor értékű folytonos függvény, $S(t)$ anyagi felület, tehát $\mathbf{u} = \mathbf{v}$:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S} \right|_{t=t_1} = \int_{S(t_1)} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{f} \right) \Big|_{t=t_1} d\mathbf{S} . \quad (23.2)$$

Térfogati integrál, $\psi(\mathbf{r}, t)$ skalár vagy vektor értékű szakadásos függvény.

További feltételek és jelölések:

$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ belsejében $S_D(t)$ egy szakadási felület,
 $S_D(t)$ normális irányú sebessége $u_{nD}(\mathbf{r}, t)$,
 $V(t)$ felülete $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, sebessége $u_n(\mathbf{r}, t)$,
 $\psi(\mathbf{r}, t)$ a $V(t) - S_D(t)$ belsejében folytonosan differenciálható,
 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ folytonosan kiterjeszthető $V_1(t)$ és $V_2(t)$ határára.



23.1. ábra. Térfogati segédváltozós integrál differenciálásához

Ekkor bármely t_1 -re érvényes a (18.4) egyenlet:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} = \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t) dV \right|_{t=t_1} + \int_{S(t_1)} \psi(\mathbf{r}, t_1) u_n dS . \quad (23.3)$$

ahol a jobboldali első integrál (18.8) egyenlet szerint értendő.

A (23.3) egyenlet az alapja a newtoni kontinuum egyik legfontosabb átalakításának: Az *anyagi* térfogataira felírt **(a)** axiómákat ezzel alakítjuk *rögzített* térfogatokra érvényes **(c)** axiómákká.

Utószó

Kedves Olvasó!

Gyári mérnökként sokszor szembesültem az *időproblémával*. Előfordult, hogy gyorsabb volt a feladatot megoldani saját kis célprogrammal, mint megkeresni a szakmai irodalomban, vagy megtanulni egy univerzális nagy szoftvert. Nem csökkentve az utóbbiak fontosságát, ajánlom, hogy saját célprogramokkal is erősítse számítógépes arzenálját.

Már az 1964-es Alkalmazott Mechanikai Kongresszuson találkoztam a *nagy kutatóintézetek* publikációival. Úgy tűnt, hogy a mi kis kutatási osztályunk sohasem versenyezhet velük. Azonban az elmúlt 50 év során több példát is láttam arra, hogy egy ember (vagy egy kis csoport) nagy intézetekkel is összemérhető eredményeket ért el. Ilyen kiugró teljesítmények voltak a GANZ gépgyárban:

- (i) A fogaskerék számító program létrehozása.
- (ii) A mozdonyok és vasúti kocsik alvázának végeselemes számítása saját célprogramukkal.
- (iii) A nyomatékvaltók áramlástanai tervezése (még a számítógépes korszak előtt!).
- (iv) A vízgépek számítási és mérési módszereinek kifejlesztése.

A szerényebb számítógépes lehetőségek ellenére ugyanolyan (esetenként jobb) gyártmányok születtek, mint a nagy kutatóintézetekben. Úgy tűnik, hogy az eredmények szempontjából fontosabb a fizikai alapok biztos ismerete, mint a pénzügyi (számítógépes) háttér. Ezért írtam ezt a könyvet.

Egyéni teljesítmények eléréséhez biztatásként Kármán Tódor egyik mondását idézem: "Senkit se bátorítalak el az, hogy más már foglalkozott a témájával, mert nem a téma, hanem az ötlet hozza meg a sikert."

Előfordul, hogy egy nagy munka, előre nem látható okok miatt nem hoz eredményt. Tapasztalatom azonban az, hogy minden becsületes munka *meghozza gyümölcsét*. Lehet, hogy nem ott, nem úgy és nem akkor, ahogy képzeltük, hanem máshol, másként és máskor. Ezért a munkát mindig érdemes befejezni. Azaz amikor lényegileg készen van, ne sajnáljuk azt a néhány százalékot befektetni (tisztázás, adminisztrálás) ami valóban befejezetté teszi.

2018. szeptember 1.

dr. Fáy Árpád

XI. táblázat. Axiómák

Jele	Az I. II. és III. axiómák	Egyenletek száma	Oldal
(a)	anyagi térfogatokra felírva	(2.3) - (2.5)	27
(b)	az (a) axiómák kiterjesztése más eloszlásokra	(2.35) - (2.37)	34
(c)	rögzített térfogatokra felírva	(3.1) - (3.3)	38
(d)	a (c) axiómák szűkítése stacionárius mozgásra	(3.4) - (3.6)	39
(e), (f)	a (c) axiómákból a (g) axiómák levezetése	(4.1) - (4.6)	45
(g)	differenciálegyenletek formájában	(4.7) – (4.9)	46
(h)	szakadási felületeken	(5.3) – (5.10)	48
(IVa) (IVh)	A hőtán első főtétele és a szakadási feltétele	(11.45) , (11.46)	87

Táblázatok**Oldal**

I.	Táblázat	Javaslat g értékére	20
II.	Táblázat	Szakadási felületek	50
III.	Táblázat	Néhány anyag sűrűsége	63
IV.	Táblázat	Víz sűrűsége	63
V.	Táblázat	Rugalmassági anyagállandók	65
VI.	Táblázat	Víz kinematikai viszkozitása	66
VII.	Táblázat	Olajok kinematikai viszkozitása	66
VIII.	Táblázat	Különféle folyadékok kinematikai viszkozitása	66
IX.	Táblázat	Levegő kinematikai viszkozitása	66
X.	Táblázat	A C jelű szivattyú számítása	123
XI.	Táblázat	Axiómák	158

Példák	Oldal
1.1. példa. Szélsatorna elméleti mechanikai modellje	6
1.2. példa. Anyagi térfogat és rögzített térfogat	9
1.3. példa. Autó impulzusa	10
1.4. példa. Rakéta a világűrben	11
1.5. példa. Egydimenziós mozgástörvény	12
1.6. példa. Változó tömegű térfogatra $(1.7)_1$ nem érvényes	12
1.7. példa. Tengely körül forgó tárcsára ható nyomaték	13
1.8. példa. Két vasgolyó általános tömegvonzása	14
1.9. példa. Egyenes vonalon gyorsuló rendszer	16
1.10. példa. Egyenletesen forgó rendszerben a centrifugális erő	16
1.11. példa. Egyenletesen forgó rendszerben a Coriolis erő	17
1.12. példa. A Föld forgásából származó Coriolis erő	17
1.13. példa. A nehézségi gyorsulás változása a Föld felszínén	18
1.14. példa. Földrengések	19
1.15. példa. Vízgépek hatásfokmérése	19
1.16. példa. Befolyásolja-e a Hold állása a vízgép hatásfokát?	19
1.17. példa. Vízgépek erőhatás számításai	19
1.18. példa. Húzott rúd	20
1.19. példa. Hajlított rúd	21
1.20. példa. A feszültségek kezelése vektorokkal	22
1.21. példa. Légköri nyomás	22
1.22. példa. Súlyos rúdban a feszültségállapot	23
1.23. példa. Hidrosztatika, Archimedes törvénye	24
1.24. példa. Geometriai tételek hidrosztatikai bizonyítása	25
2.1. példa. Az általános axiómák baloldalának értelmezése	27
2.2. példa. Röpülő gumilabda	28
2.3. példa. Stacionárius áramlás konfúzorban	29
2.4. példa. Anyagi felület mozgása	30
2.5. példa. Anyagi térfogat köbtartalmának időegység alatti változása	31
2.6. példa. Merev lapra eső rugalmas hasáb	31
2.7. példa. Általános tömeg és erő eloszlások	34
2.8. példa. Anyagi pont pályája	35
2.9. példa. Síkáramlás torlópontnál	36
2.10. példa. Térfogat-részecske mozgása	37
2.11. példa. Pályamenti differenciálhányados	37
3.1. példa. Tömegáram csővezetékben	39
3.2. példa. A nyomásintegrál számítása túlnyomással	40
3.3. példa. Ívcsőre ható erő	41
3.4. példa. Elemi szilárdságtan	43
4.1. példa. Mágnesekben a feszültségtenzor nem szimmetrikus	46
4.2. példa. Mágneses folyadékok	46
5.1. példa. Áramlás falnál (folyadék–szilárd egyszerű szakadás)	50
5.2. példa. Acél megfolyása (rugalmas–képlékeny egyszerű szakadás)	51
5.3. példa. Pelton sugár (víz-levegő egyszerű szakadás)	53
5.4. példa. Rugalmas csőre eső rugalmas hasáb (lökéshullám szilárd testben)	54
5.5. példa. Rúd esése alátámasztásokra (örvényfelület hullám acélban)	55
5.6. példa. Úszó fadarab (több egyszerű szakadás)	56
5.7. példa. Oszlop (szilárd test levegőben, egyszerű szakadás)	57
7.1. példa. A mozgó rendszer sebesség és gyorsulás képlete	59

7.2. példa.	Szivattyú forgó járókerekeinek erőjátéka	61
8.1. példa.	Tenzorok a szakító próbatest pontjainál	65
8.2. példa.	A Reynolds feszültség becslése vízturbina járókerék után	69
9.1. példa.	Hidrosztatika az Euler egyenlet alapján	71
9.2. példa.	Redukált nyomás használata	71
10.1. példa.	A kontinuummechanika axiómái, mint transzport egyenletek	75
11.1. példa.	Vákuumban szabadon eső test	79
11.2. példa.	Ideálisan rugalmas testben az energia megmaradása	80
11.3. példa.	Leürülő tartály (zárt rendszer)	81
11.4. példa.	Tartály utántöltéssel (nyílt rendszer)	81
11.5. példa.	Dugattyú munkája (külső felületi erő munkája)	82
11.6. példa.	Csővezeték disszipációja	83
11.7. példa.	Vízerőmű hatásfoka	85
11.8. példa.	Szivattyú üzeme zárt tolózárrel	86
11.9. példa.	Levegőben haladó lökéshullám	88
12.1. példa.	Súrlódásmentes áramlás körhenger körül	93
12.2. példa.	Szárnyszelvények felhajtóerejének becslése	94
12.3. példa.	Áramlás íves csatornában	96
12.4. példa.	A Knapp-féle ciklus	98
12.5. példa.	Sugarak kialakulása kavitációs üregben	100
12.6. példa.	Súrlódásmentes áramlás görbe szívócsőben	103
12.7. példa.	Súrlódásmentes stacionárius áramlás egyenes csőben	105
13.1. példa.	Lamináris és turbulens áramlás	106
13.2. példa.	Súrlódásos áramlás hosszú egyenes csőben	108
13.3. példa.	Körhenger körüli valóságos áramlás	110
13.4. példa.	Coanda effektus	113
13.5. példa.	Valóságos áramlás szárnyszelvény körül	113
14.1. példa.	Szárnylapátos szivattyú járókerék alapegyenlete	116
14.2. példa.	Az Euler-Segner egyenlet	118
14.3. példa.	Szivattyú talpcsapágyára ható erő	119
15.1. példa.	Forgásszimmetrikus áramlás számítása	120
15.2. példa.	Szivattyúk jelleggörbéjének számítása	122
15.3. példa.	A peremelem módszer	123
16.1. példa.	Egyenes cső lassú tranziens folyamatban	125
16.2. példa.	Allievi-féle nyomáslökés	129
16.3. példa.	Vízütés számítás	130
17.1. példa.	Tenzorok szorzata	134
17.2. példa.	A differenciál használata	136
17.3. példa.	Spirális görbe érintője	137
17.4. példa.	Skalár-vektor függvény gradiense	138
17.5. példa.	Láncszabály	138
17.6. példa.	Deriválttenzor	139
17.7. példa.	Mozgó gömbfelület sebessége I	140
17.8. példa.	Mozgó gömbfelület sebessége II	141
19.1. példa.	Algebrai műveletek koordinátáson	148
19.2. példa.	Másféle algebrai szabályok	149
20.1. példa.	Az analízis fogalmai koordinátáson	151
20.2. példa.	A nabla-vektor használata	151

Összesen 97 példa.

Ábrák	Oldal
1.1. ábra. Szélcsonna fényképe, BME NPL	6
1.2. ábra. A szélcsonna elméleti mechanikai modellje	6
1.3. ábra. Anyagi pont és anyagi térfogat	8
1.4. ábra. Anyagi térfogat és rögzített térfogat	9
1.5. ábra. Rakéta a világűrben	11
1.6. ábra. Egyenletes sebességgel haladó hasáb A-A síkon belépett tömegére (1.7) ₁ nem érvényes	12
1.7. ábra. Tengely körül forgó tárcsa	13
1.8. ábra. Gyorsuló autóban ható erők	16
1.9. ábra. Követ forgató fiú	16
1.10. ábra. Földi rendszerben a nehézségi erő: a Föld tömegvonzása és a centrifugális erő vektoriális összege	18
1.11. ábra. A Hold állása nem hat a labor mérésére	19
1.12. ábra. Húzott rúd	20
1.13. ábra. Hajlított rúd	21
1.14. ábra. Elemi felületi erő	21
1.15. ábra. A dS_x felületelemen ható feszültségek	21
1.16. ábra. A feszültségek értelmezése	22
1.17. ábra. A légköri nyomás szemléltetése	22
1.18. ábra. Súlyos rúd	23
1.19. ábra. Nyomáseloszlás vízben és Archimedes törvénye	24
1.20. ábra. Első geometriai tétel	25
1.21. ábra. Harmadik geometriai tétel	25
2.1. ábra. $K(t)$ a kontinuum tartománya, $S_D(t)$ szakadási felület a kontinuumban, $V(t)$ egy anyagi térfogat, $S(t)$ a felülete	26
2.2. ábra. Stacionárius áramlás konfúzorban, <i>egyenletes</i> sebességeloszlással	29
2.3. ábra. Stacionárius áramlás konfúzorban, <i>nem egyenletes</i> sebességeloszlással	29
2.4. ábra. Anyagi felület mozgása	30
2.5. ábra. Az anyagi térfogat Δt idő alatti változása. Az $S(t_1)$ által Δt idő alatt áthatolt térfogat vonalkázva látható	31
2.6. ábra. Merev lapra eső rugalmas hasáb mozgása	31
2.7. ábra. A hasáb jelleggörbéi	32
2.8. ábra. Szakadási réteg bevezetése	33
2.9. ábra. A $K_1(t)$ és $K_2(t)$ tartomány	35
2.10. ábra. Síkáramlás torlópontnál	36
3.1. ábra. Tömegáram számítása csővezetékben	39
3.2. ábra. Könyök és ívcső	41
3.3. ábra. Ívcsőre ható erő számítása két ellenőrző felülettel	41
3.4. ábra. Ívcsőre ható erő számítása egy ellenőrző felülettel	42
3.5. ábra. Az impulzuserők szemléltetése	43
3.6. ábra. Rúdban ébredő feszültségeloszlás	44
5.1. ábra. A szakadási felület egy darabját belsejében tartalmazó anyagi térfogat	47
5.2. ábra. Normális irányú sebességkomponensek	48
5.3. ábra. (a) Sűrűdásmentes és (b) viszkózus folyadék áramlása szilárd fal mentén	50
5.4. ábra. Határréteg a szilárd fal mentén	51
5.5. ábra. Hajlított rúd rugalmas-képlékeny alakváltozása és feszültségei	52
5.6. ábra. Pelton sugárcső nagy sebességű vízsugárral, alatta egy Pelton kisminta sugárcsővéből távozó vízsugár fényképe	53
5.7. ábra. Rugalmas csőre eső rugalmas hasáb	54
5.8. ábra. <i>Bergeron</i> diagramja csőre eső hasáb esetére	54

5.9. ábra. Rúd esése alátámasztásokra	55
5.10. ábra. Úszó fadarab	56
5.11. ábra. Hengeres álló oszlop	56
7.1. ábra. Az álló, a mozgó és az elforgatott koordinátarendszer	59
7.2. ábra. Radiális szivattyú járókerék rajza	61
7.3. ábra. Az egyik járókerék-csatorna	62
7.4. ábra. A lapátesatornában áramló folyadéktömegre ható erők a szivattyú egyik üzemállapotában	62
8.1. ábra. Szilárd test szakítógép tesztjére előkészített próbadarab vázlata [94]	64
8.2. ábra. Reynolds feszültség becslése a vízturbina síkba terített szárnyrácsa után, csak a lapátok nyomát véve figyelembe	69
9.1. ábra. Álló víz a tartályban	71
9.2. ábra. Redukált nyomások egy csővezeték mentén	72
11.1. ábra. Szivattyún ható külső felületi erők	77
11.2. ábra. Szabadon eső test	79
11.3. ábra. Tartályban levő víz egy csőbe ürül, súrlódásmentes áramlással	81
11.4. ábra. Az előző példa szerinti tartály, utántöltéssel	81
11.5. ábra. Dugattyú	82
11.6. ábra. Csővezeték disszipációja	83
11.7. ábra. Szivattyú energia bevitele	84
11.8. ábra. Kis esésű vízerőmű fő metszete Kaplan rendszerű turbinával	85
11.9. ábra. Gázban haladó lökéshullám	88
12.1. ábra. Körhenger körüli elméleti áramkép	93
12.2. ábra. Kör cirkulációs áramlásban	94
12.3. ábra. Szárnyszelvény cirkulációs áramlásban	94
12.4. ábra. A szárnyprofilok fő paraméterei	94
12.5. ábra. Szögek felhajtóerő tényező becsléséhez	95
12.6. ábra. Síkbeli tartomány	95
12.7. ábra. Súrlódásmentes áramlás íves csatornában	96
12.8. ábra. Szűkülő–bővülő csatornában a kavitációs üreg instacionárius mozgása	98
12.9. ábra. Elméleti séma a Knapp-féle ciklushoz	98
12.10. ábra. Sebesség számítása	100
12.11. ábra. Sugár kialakulásához séma	100
12.12. ábra. A sugár számítási sémája Green képletét alkalmazza a T tartományra	101
12.13. ábra. Az üreg kezdeti kontúrja	101
12.14. ábra. Az ék utáni, kezdetben körív alakú üregben kialakuló sugár egyik számítási eredménye	102
12.15. ábra. Szivattyú görbe szívócsöve	103
12.16. ábra. Egyenes cső súrlódásmentes stacionárius áramlással	105
13.1. ábra. Reynolds kísérlete	106
13.2. ábra. Szökőkút víz sugara	107
13.3. ábra. Hosszú egyenes csőben kifejtett súrlódásos áramlás	108
13.4. ábra. A λ cső-súrlódási tényező diagramja (Moody-féle diagram) [124]	109
13.5. ábra. A henger $c_e - Re$ diagramja	110
13.6. ábra. Átlagos nyomás a henger felületén	111
13.7. ábra. Kármán-féle örvénysor	111
13.8. ábra. Kavitációs örvény keletkezése	112
13.9. ábra. Az ék+főüreg cirkulációjának változása	112
13.10. ábra. A hengerről leváló örvénypárok dimenzió nélküli frekvenciája	112
13.11. ábra. Coanda effektus, a téglalap keresztmetszetű légsugár a falhoz tapad	113

13.12. ábra. Szárnyról sima leáramlás (Prandtl)	114
13.13. ábra. Szárnyon nagy leválás (nagy megfújási szögnél)	114
13.14. ábra. A profil mögött Kármán-féle örvénysor	114
13.15. ábra. A profilvég áramlásának modellezése	114
13.16. ábra. Szárnyprofil c_f és c_e diagramja adott Reynolds számnál	114
13.17. ábra. A18 profil, tervezte R. Cooney, University of Illionis	115
13.18. ábra. Az A18 profil felhajtóerő tényezői	115
13.19. ábra. Az A18 profil ellenálláserő tényezői	115
14.1. ábra. Szárnylapátos szivattyú járókerék vázlata	116
14.2. ábra. Szivattyú talpcsapágyára ható erő	119
15.1. ábra. Forgásszimmetrikus áramlás számítása az ABCDA útvonallal	120
15.2. ábra. Félaxiális szivattyú meridiánáramlása (forgásszimmetrikus áramvonalak a lapátnélküli térben)	121
15.3. ábra. A lapátcsatorna leképezése síkra	122
15.4. ábra. C jelű szivattyú metszetrajza	123
15.5. ábra. C jelű szivattyú jelleggörbéi	123
15.6. ábra. Ponteloszlás a peremelem módszerhez	125
16.1. ábra. Gyorsító nyomáskülönbség	125
16.2. ábra. Egyszerű szivattyútelep vázlata	126
16.3. ábra. Rugalmas csőben haladó vízütés hullám	127
16.4. ábra. A vízütés hullámsebességének számításához	128
16.5. ábra. A vízütés számítás lépései	130
16.6. ábra. A gépház falára ható erő számításához	131
17.1. ábra. Vektor összeg	133
17.2. ábra. 2-dimenziós tenzorok szorzatának szemléltetése	135
17.3. ábra. Egyváltozós függvény	136
17.4. ábra. Mozgó felület sebessége	140
17.5. ábra. Gömb felületének parametrizálása	141
18.1. ábra. Az axiómákban szereplő tartományok	144
21.1. ábra. Stokes tételéhez	153
21.2. ábra. Gauss tételéhez	153
21.3. ábra. 2D-s Green tételhez	154
22.1. ábra. Stokes potenciálokhoz	155
23.1. ábra. Térfogati segédváltozós integrál differenciálásához	156

Összesen 125 ábra.

Irodalom

- [1] Isaac Newton válogatott írásai, Budapest, 2003, TYPOTEX
- [2] Noll, Walter: The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics. Symposium on Axiomatic Method, Berkeley, 1958, Publ. North Holland
- [3] Truesdell, C., Toupin, R.: The Classical Field Theories, Encyclopedia of Physics, III/1, 1960, Springer
- [4] Csanady, G.T.: Theory of Turbomachines, 1964, McGraw-Hill
- [5] Banerjee, P.K.: The Boundary Element Methods in Engineering, 1994, McGraw-Hill
- [6] Barglazan, M.: Turbine hidraulice si transmisii hidro dinamice, 2001, Ed. Politehnica Timisoara
- [7] Barrow, J.D.: Impossibility, 1998, Oxford University Press
- [8] Batchelor, G.K.: An introduction to Fluid Dynamics, 1970, University Press Cambridge
- [9] Béda Gyula, Kozák Imre, Verhás József: Kontinuummechanika. 1985, Műszaki könyvkiadó
- [10] Bergeron, L.: Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity, 1961, WILEY
- [11] Birkhoff G.: Hidrodynamics. A study in logic, facts, and similitude, 1950, Academic Press
- [12] Birkhoff, G. Zarantonello, E.H.: Jets, Wakes and Cavities, 1957, Academic Press
- [13] Brennen, C.: Hydrodynamics of Pumps, 1994, Concepts ETI and Oxford University Press
- [14] Chorin, A.J., Marsden, J.E.: A mathematical introduction to fluid mechanics. Third ed. Texts in Applied Mathematics, 1993, Springer
- [15] Csemniczky János: On the relation between the loss coefficients and cavitation parameters of valves, CWPRS Diamond Jubilee Symposium, Pune, 1976
- [16] Czibere Tibor: Áramlástan. 1993, Nemzeti tankönyvkiadó
- [17] Czibere Tibor: Three dimensional stochastic model of turbulence, Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 2., No. 1., (2001) pp. 7 - 20
- [18] Czibere Tibor: Folyékony kontinuumok turbulens mozgása, Előadások jegyzete, 2005
- [19] Ericksen, J.L.: Tensor Fields, Encyclopedia of Physics III/1, 1960, Springer
- [20] Fáy Árpád: Az impulzusnyomaték és tengelynyomaték különbségének magyarázata axiális áramlástechnikai gépeknél, 1969. október, Ganz-Mávag Közlemények 42. szám
- [21] Fáy Árpád: Theory for the Reynolds number effect on the head and power of hydraulic machines. Proc. 5th Conference on Fluid machinery, Budapest, 1975
- [22] Fáy Árpád: Computation of jet formations in wake cavities, IAHR Symp. Grenoble, 1976
- [23] Fáy Árpád: Explanation of how the Karman vortices are generated, Proc. 8th Conference on Fluid Machinery, Budapest, 1987
- [24] Fáy Árpád: A szivattyú nyomócső befalazásánál a csappantyú zárásakor keletkező erő, Ganz Gépgyár vízgép kutatás 590. sz. kutatási jelentés, 1988
- [25] Fáy Árpád: Dynamic analysis of the force acting on the pumphouse wall, IAHR Symposium, Belgrád, 1990
- [26] Fisher R.K., Liess C., Ecer, A.: Flow calculations for turbine runner design evaluation – the methods, the laboratory correlation and the designer, IAHR Symposium, Belgrad, 1990
- [27] Furness, R. (ME/72/8, ME72/18), and Guerrero, J.L. (ME/72/40), Reports of the University of Southampton, 1972
- [28] Füzy Olivér és Kullmann László: Rapid method for calculating the liquid flow in a pipe network, Proc. 6th Conference on Fluid Machinery, Budapest, 1979
- [29] Graff, Karl F.: Wave motions in elastic solids, 1975, Oxford Univ. Press, "Dover books"
- [30] Gruber József, Blahó Miklós: Folyadékok mechanikája, 3. kiadás, 1956, Tankönyvkiadó
- [31] Hajós György: Bevezetés a geometriába. 1984, Tankönyvkiadó
- [32] Halász Gábor, Kristóf Gergely, Kullmann László: Áramlás csőhálózatokban, 2002, Műegyetemi Kiadó, Budapest
- [33] International Standard, IEC 41, Field acceptance tests to determine the hydraulic performance of hydraulic turbines, storage pumps and pump-turbines, 1991

- [34] Kaliszky Sándor: Képlékenységtan, 1989, Akadémiai Kiadó, angol nyelvű kiadás
- [35] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956
- [36] Kaufmann, K.: Grenzschichtbeeinflussung bei Diffuzoren von Strömungsmaschinen, VOITH Forschung und Konstruktion, Heft 2, 1957
- [37] Knapp R.T., Daily, J.W., Hammitt, F.G.: Cavitation, 1970, McGraw-Hill
- [38] Kozák Imre: Kontinuum mechanika, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1995
- [39] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, 2004, Műegyetemi Kiadó, MEK 00584
- [40] Lamb, H.: Hydrodynamics, 1957, Cambridge University Press
- [41] Leschziner, M.: Modelling separation from curved surfaces with anisotropy-resolving turbulence closures and related supplementary observations on LES, Conference on Modelling Fluid Flow, Budapest, 2003
- [42] Muttányánszky Ádám: Statika. 1957, Tankönyvkiadó
- [43] Mistéthy Endre: Méretezéselmélet, 2001, Akadémiai Kiadó
- [44] Meskó Attila: Bevezetés a geofizikába, 1989, Tankönyvkiadó
- [45] Nyíri András: Erő- és Munkagépek, I. kötet 1995, II. kötet 1996, Miskolci Egyetemi Kiadó
- [46] Noll, W.: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media. Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 2. 1958/1959
- [47] Noll, W., Ericksen, J.L. and Truesdell, C.: The nonlinear field theories of mechanics, Encyclopedia of Physics III/3, 1963, Springer
- [48] (Noll) The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected papers by W. Noll, 1974, Springer
- [49] Pach Zs. Pálné, Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis, 1962, Műszaki Kiadó
- [50] Páczelt István, Scharle Péter: A végeelem módszer a kontinuum mechanikában, 1987, Műszaki Kiadó
- [51] Páczelt István: Végeelem módszer a mérnöki gyakorlatban, 1999, Miskolci Egyetemi Kiadó
- [52] Pattantyús Á. Géza: Gépész és villamosmérnökök kézikönyve, 1961, Műszaki Kiadó
- [53] Pattantyús Á. Géza: Gyakorlati áramlástan, 1950, Tankönyvkiadó, MEK 04956
- [54] Popa, O.: The transfer of kinetic energy in the motion of simple fluids, Proc. 5th Conference on Fluid Machinery, Budapest, 1975
- [55] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, 1986, Gondolat Kiadó
- [56] Stepanoff, A.J.: Centrifugal and axial flow pumps, 1957, John WILEY and Sons
- [57] Strscheletsky, M.: Ein Beitrag zur Theorie des hydrodinamischen Gleichgewichtes von Strömungen. VOITH Forschung und Konstruktion, Heft 2, 1957
- [58] Szabó Árpád: Euklidész és az eleai filozófia, Existencia, Vol. XIV. Fasc. 1-2. 2004.
- [59] Szentmártony Tibor: Vektor- és tenzorszámítás, 1948, Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai, Matematika 4. füzet
- [60] Szenthe János: A mechanika újabb matematikai eszközei, a differenciálható sokaságok elmélete, 1976, Budapesti Műszaki Egyetem Továbbképző Intézete
- [61] Szenthe János: Bevezetés a sima sokaságok elméletébe, 2002, ELTE Eötvös Kiadó
- [62] Szeredi István: Szivattyútelepek gépeinek és nyomásalatti rendszereinek átmeneti üzemiállapotai, 1989, VIZITERV, Budapest
- [63] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, 1979, Műszaki Könyvkiadó
- [64] Tolvaj Béla: Csőhálózatok számítása, MicroCAD 94, and International Computer Science Conference, Miskolc, 1994
- [65] Varga József és Sebestyén Gyula, Cavitation behind blunt models, ASME Cavitation Forum and Film Library, 1970
- [66] Verhás József: Termodinamika és reológia, 1985, Műszaki Könyvkiadó

- [67] BME víztisztítás: http://www.epito.bme.hu/vcst/oktatas/feltoltesek/BMEEOVK-SP1/viztisztitas_jegyzet.pdf
- [68] Brennen, C.E.: Cavitation and Bubble Dynamics, Oxford Univ. Press.pdf, 1995, ISBN 0-19-509409-3
- [69] Czibere Tibor, Nyíri András: Áramlástechnikai Gépek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
- [70] EN ISO 9906:2012, Rotodynamic pumps - Hydraulic performance acceptance tests - Grade 1, 2 and 3, előző kiadás ISO 9906:1999, Grade 1 and 2, még előbbi ISO 5198:1987, Precision Class, még előbbi ISO 2548:1973, Class C
- [71] Energiacentrum, 2009: <https://www.energiacentrum.com/energetika/energiahordozok-primer-szekunder-energiahordozok/>
- [72] Érdi Bálint: Égi mechanika, 1996, MEK 04800
- [73] Fáy Árpád: A klasszikus mechanika alapjai mérnököknek és tanároknak, Oktatási segédlet. Miskolci Egyetem, 2005
- [74] Fáy Árpád és Józsa István: GANZ vízgépgyártásának tanulságos története, Szivattyúk, kompresszorok, vákuumszivattyúk, XIX. évfolyam – 2012, p. 41–56
- [75] Fáy Árpád: A matematikai gondolkodás haszna az iparban, 5-ik Báthory-Brassai Konferencia, Budapest, 2014. május 11.
- [76] Fáy Árpád: A szivattyúkban kifejlődő kavitáció fizikai sajátosságai, Szivattyúk, kompresszorok, vákuumszivattyúk, XIV. évfolyam – 2007
- [77] Fáy Árpád: A legnagyobb vízerőmű gépészeti jellemzői, Szivattyúk, kompresszorok, vákuumszivattyúk, BB-press kiadványok XX. évfolyam - 2013
- [78] Fűzy Olivér: Áramlástechnikai Gépek és Rendszerek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991, ISBN 963-18-2988-X, 715 oldal, előző kiadás 1978, ISBN 963 17 3250 9
- [79] Gayer József (szerk): *Online vízügyi szótár*, GWP Magyarország Alapítvány, 2015, <http://www.gwpszotar.hu>
- [80] Holzenberger, K., Jung, K.: KSB Centrifugal Pump Lexicon, KSB Frankenthal, 1990, 556 oldal, előző kiadás 1980, 351 oldal
- [81] Idelchik, I.E., Ginevski, A.S.: Handbook of Hydraulic Resistance, 4th ed. 2007, ISBN-13 9781567002515, korábbi kiadás 1966, pdf-ben is
- [82] IEC 60193:1999, International Standard, Hydraulic turbines, storage pumps and pump turbines – model acceptance tests
- [83] Kurics Tamás: Differenciálegyenletek, ELTE Matematikai Intézet, 2011 (www hozzáférhető).
- [84] IEC 60041:1991, Field acceptance tests to determine the hydraulic performance of hydraulic turbines, storage pumps and pump turbines
- [85] IEC 62006:2010, Acceptance tests of small hydroelectric installations
- [86] IEC 60609-1:2004, Hydraulic turbines, storage pumps and pump turbines – cavitation pitting evaluation – Part 1: Evaluation in reaction turbines, storage pumps, and pump turbines
- [87] ISO 5199:1994, MSZ ISO 5199:1994, Másodosztályú örvényszivattyúk műszaki meghatározása, Magyar Szabványügyi Hivatal
- [88] Józsa István: A hazai szivattyúgyártás története a XX. században, Invest marketing, 2010, ISBN 978-963-87401-3-7
- [89] Józsa István: Örvényszivattyúk a gyakorlatban, Invest Marketing, 2013, ISBN 978-963-87401-2-0
- [90] Juhász, csővezetékek: <http://eng.unideb.hu/userdir/juhasz/segedlet/Csovezetek.pdf>
- [91] Kalmár László, Baranyi László, Könözy László: Hő és áramlástechnikai folyamatok numerikus modellezése, www.aht.uni-miskolc.hu/.../RAN_LES_DNS.pdf
- [92] Kristóf Gergely: Turbulencia és modellezése, www.ara.bme.hu/.../turbulencia.pdf
- [93] Kolonits Ferenc: Energetikai csővezeték szilárdsági mértetése, Műszaki Könyvkiadó, 1982
- [94] Kozák Imre, Szeidl György: Fejezetek a szilárdságtanból, 2012, MEK SzTFullMikTex
- [95] Kozák Imre, Szeidl György: Tenzorszámítás indexes jelölésmódban, 2013, MEK 11757
- [96] Környey Tamás: Termodinamika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2005. Azonosító szám: 45076.

- [97] Kullmann László: Előadásvázlat az Áramlástechnikai gépek tárgyhoz, 2012 <https://www.google.hu/#q=kullmann+l%C3%A1szl%C3%B3+%C3%A1raml%C3%A1stechnikai+g%C3%A9pek>
- [98] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, Műegyetemi kiadó, Budapest, 2000
- [99] Lohász Máté, Réger Tamás: Turbulencia modellezése, www.ara.bme.hu/.../turb_mod_jegyz.pdf
- [100] Mosonyi Emil: Low-head Power Plants, Akadémiai kiadó, Budapest, 1987, ISBN 9630542714
- [101] Nyomástartó berendezések műszaki-biztonsági szabályzata 63/2004 GKM rendelet, 23/2006 Kormányrendelet végrehajtásához
- [102] Ötvös Pál: A Tisza-öki Vízerőmű, 1956 - 2011
- [103] Pattantyús Á. Géza: Gyakorlati Áramlástan, Tankönyvkiadó, 1959, mek.oszk.hu/04900/04956/04956.pdf
- [104] Pattantyús Á. Géza: A gépek üzemtana, Tankönyvkiadó, Budapest, 1956
- [105] Pöry: New Naga Hammadi Barrage and Hydropower Plant Egypt, 2009 <http://www.pory.com/sites/default/files/30.pdf>
- [106] Roberson, J.A., Clayton, T.C.: Engineering Fluid Mechanics, Houghton Mifflin co. Boston, 1985, ISBN: 0-395-35712-8
- [107] Splenik Sándor: Hiperbolikus egyenletek, 2010, MEK 11379
- [108] Szentgyörgyi Sándor, Molnár Károly, Parti Mihály: Transzportfolyamatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
- [109] Szeidl György: A peremelem módszer integrálegyenletei, 1999, MEK 01185
- [110] Szeredi István, Csom Gyula, Alföldi László, Mészáros Csaba: A vízenergia-hasznosítás szerepe, helyzete, hatásai. Magyar Tudomány 8, 959-978. <https://www.magtud.iif.hu/2014/07/06.htm>
- [111] Támop garancia, http://tamop.ofe.hu/inet/osszefogas/hu/modul/hasznos/jotall_szav.html
- [112] Török János, Orosz László, Unger Tamás: Elméleti fizika 1, 2014, MEK 14363
- [113] Varga József (szerk): Hidraulikus és pneumatikus gépek, Kézikönyv, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [114] Varga József: Finanszírozás és tőkeképződés, Stádium Ny. 1942
- [115] Vankó Péter: Kísérleti fizika 1, MEK 14198
- [116] Pere Balázs: Kontinuummechanika, <http://www.sze.hu/~perebal/oktatas/oravazlatok/Kontinuum-mechanika.pdf>, 2012
- [117] Szeidl György, Baksa Attila: Kontinuummechanika, <http://www.mech.uni-miskolc.hu/~szeidl/notes/KM-gyak-1-11.pdf>, 2004
- [118] Fisher R.K., Liess C., Ecer A.: Flow calculation for runner design evaluation – the methods, the laboratory correlation and the designer, IAHR Symposium, Belgrade, 1990.
- [119] Fáy Árpád: Szárnyszelvények hidraulikai tervezésének alapjai és alkalmazásuk szélturbináknál, ME kézirat, 2000 január
- [120] Hutton, S.P.: Cavitation in Machines or the Saga of the Singing Kettle, Inaugural lecture, University of Southampton, 1972
- [121] Fáy Árpád levelei a Journal of Fluid Mechanics folyóiratnak 1972 március 13 és november 12
- [122] Fáy Árpád: Kavitáció, kézirat a doktorandusz képzéshez, ME. Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszéke, 1995 november
- [123] Fáy Árpád: Admissible roughness values of model hydraulic turbines, Conference Hydroturbo 76, Czechoslovakia, 1976.
- [124] KSB Centrifugal Pump Lexicon, Frankenthal, 1980
- [125] Nixon R.A., Cairney W.D.: Scale effects in centrifugal cooling water pumps for thermal power stations, NEL Reports 505, 1972
- [126] Baranyi, L., Shirakashi, M.: Numerical solution for laminar unsteady flow about fixed and oscillating cylinders, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 6 : 263 - 277, 1999.
- [127] Fay, A.A.²¹⁸: Computation of Pump Characteristics, Conference of Modelling Fluid Flow (CMFF'03) Budapest, September 3 – 6, 2003

- [128] Fay, A.A.²¹⁸: Simple Performance Model for Pumps, 1993, ASME, Pumping Machinery, The Fluids Engineering Conference, Washington, D.C. June 20-24, 1993. ASME FED-Vol. 154, p. 119.
- [129] Fay, A.A.²¹⁸: Computation of Developed Cavitation in Pumps, Fourth Conference on Hydraulic Machinery and Hydrodynamics, Timisoara, 26-30 September, 1994.
- [130] Rohács József, Gausz Zsanna, Gausz Tamás: Aerodinamika, BME Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar, TÁMOP, 2012.
- [131] Csemniczky, J., Method to Determine the Real Characteristics of Axial and Mixed-flow Pumps, GANZ Technical Reports No. 69, 1975.
- [132] Karátson, Horváth, Izsák: Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal, ELTE Matematikai Intézet, 2013 (www hozzáférhető).
- [133] Menter, F.R.: Improved Two-Equation $k - \omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows, NASA Technical Memorandum 103975, 1992.
- [134] Czibere, T.: Calculating Turbulent Flows on a Stochastic Model, J. Comp. And App. Mech. 2006, 7(2).
- [135] Gong, J., Tanner, F.X.: Comparison of RANS and LES Models in the Laminar Limit for a Flow Over a Backward Facing Step Using Open FOAM, 19th Int. Mult. Engine Modelling Meeting, SAE Congress, April 19, 2009, Detroit, Michigan.
- [136] Könözsy, László: A New Hypothesis on the Anisotropic Reynolds Stress Tensor for Turbulent Flows, Volume I: Theoretical Background and Development of an Anisotropic Hybrid k - ω Shear-Stress Transport/Stochastic Turbulence Model, Fluid Mechanics and Its Applications Series, Vol. 120, Springer International Publishing, Springer Nature Switzerland AG, 1st Ed., 2019, Hardcover ISBN: 978-3-030-13542-3.
- [137] Pattantyús, Á. Géza (szerkesztő): Gépész és villamosmérnökök kézikönyve, 2. kötet, Műszaki könyvkiadó, 1961.
- [138] Perić, M.: State of the art and challenges related to application of CFD in fluids engineering, CMFF'18, Conf. Modelling Fluid Flow, September 4 - 7, 2018, Budapest.
- [139] Fay, A.A.²¹⁸: The Principle of Neglecting Upstream Reactions, 6th Int. Conf. on Hydraulic Machinery and Hydrodynamics, Timisoara, October 21-22, 2004.
- [140] Sztépán Gábor: Micro Chaos in Digital Control, J. Nonlinear Science 6 (5) pp. 415 – 448, Sept, 1996.
- [141] Szépfalussy Péter, Tél Tamás (szerk.): A káosz (Véletlenszerű jelenségek nemlineáris rendszerekben). Akadémiai Kiadó, Bp., 1982. [ISBN 963-05-3208-5](#) .
- [142] Tél Tamás - Gruiz Márton: *Kaotikus dinamika*, [ISBN 963-19-3280-X](#) .
- [143] Vicsek Tamás, Zafeiris Anna: Collective motion, Physics Reports 517 (3) pp. 71 – 140 (2012)
- [144] Gausz Tamás: Légcsavarok, www 2018.
- [145] Cain, J.W., Reynolds, A.M.: Ordinary and Partial Differential Equations, www 2018.
- [146] Fáy Árpád: Hőszugárzás, Miskolci Egyetem, oktatási segédlet kézirat, 1996/2004.
- [147] Callen, J.D.: Fundamentals of Plasma Physics (Appendix D), E-Book Directory, Univ. Wisconsin, 2006
- [148] Lohász Máté: Turbulencia és modellezése, www kézirat, 2011
- [149] Pattantyús Gépész és villamosmérnökök kézikönyve 1. kötet, 1959
- [150] Spiegel, M.R.: Vector analysis and introduction to tensor analysis, Schaum's outline series, McGraw Hill, 1959, ISBN 07-060228-X
- [151] Brennen, C.E.: Fundamentals of Multiphase Flow, Cambridge Univ. Press 2005, ISBN 0521 848040

²¹⁸ Fáy Árpád angolul megjelent újabb cikkei Fay, A.A. néven szerepelnek.

Névmutató (név és oldalak)

Allievi, L. 129,130
 Baranyi László 70,110
 Bernoulli, Daniel 41,66,81,82,84,90,92,99,114,119
 Béda Gyula 48
 Cauchy, A.L. 21,26-28,46,48,57,60,61,69,71,73,93,146
 Coanda, H. 111,113
 Colebrook-White 110
 Coriolis, G.G. 17,18,60-63
 Csanady, G.T. 116
 Csemniczky János 122
 Czibere Tibor 73,122
 D’Alambert 53
 Descartes, R. 15,59,133,134,136,148,169
 Einstein, A. 9,149
 Euklidesz 15,25,26,45,132,134,142,143
 Euler, Leonhard 12,13,26-28,46,51,57,71,72,74,90,91,108,118,119
 Erdődi István 73
 Foucault, M. 61
 GANZ 3,4,53,157
 Gauss, C.F. 26,40,45,62,75,124,153
 Green, G. 101,153,154
 Gruber József 122
 Hajós György 133
 Hooke, R. 31,33,46,64,65,70,74,116,128
 Kármán Tódor 73,102,111-114,157
 Kalmár László 70
 Kaplan Viktor 85,86
 Knapp, R.T. 98,102,114
 Kozák Imre 48,64,152
 Könözszy László 70,73,100
 Környey Tamás 77,78
 Kristóf Gergely 70
 Kutta-Zsukovszkij 74,94,115
 Laplace, P.S. 70,72,92,102-104,150,151,155
 Lohász Máté 70
 Menter, F.R. 73
 Navier-Stokes 40,51,67,72-74,107,108,110,115
 Newton, Isaak 7,9-12,14-16,20,21,24-28,34,43,46-48,56-60,63,69,70,73,76,82,125,127,144,152,156
 Noll, Walter 7,28,34,58
 Pattantyús Á. Géza 83,110,127
 Pelton, L.A. 53,67,107
 Prandtl, Ludwig 51,89,91,113,114
 Reynolds, O. 46,67-69,73,74,83,94,106-111,114,115
 Régert Tamás 70
 Runge-Kutta 35
 Segner János András 118
 Stokes, G.G. 46,48,66,67,91,123,153,155 (lásd Navier-Stokes-nál is)
 Szeidl György 64,102,152
 Thomson, W. (Kelvin) 91,92,103
 Truesdell, C. és Toupin, R. 7,9,34,46,48,140
 Verhás József 48
 Zombor Csaba 53

Tárgymutató (tárgy és oldalak)**anyagi**

pont 8,9,26,28,30,33,35-37,59,79,137,161
 felület 26,27,30,31
 térfogat 8-13,26-31,34,37,42,45,47,57,58,74,75,156,158,159,161
 egyenlet 44,46,53,63-65,67,70,74,89

axióma 6,28,31,34

Newton I, II, III, 12,16,20,21,41
 Euler I, II, 12,13
 Cauchy I, II, 27,28
 (Ia),(IIa),(IIIa) 9,27-31,34,47,57,58,75
 (Ib),(IIb),(IIIb) 34,58
 (Ic),(IIc),(IIIc) 38,43,45,47,56,58,67-69,89,120
 (Id),(IId),(IIId) 39,41,42,58,61,63,105,106,109,116
 (Ig),(IIg) 46,58,60,61,70,89
 (Ih),(IIh) 48,54,56,58,61,88,120
 (IVa),(IVh) 87,88

áramlás

csővezetékben 39-41,74,128
 forgásmentes 105,106
 forgásszimmetrikus 53,105,120,121
 forgó rendszerben 61-62
 instacionárius 29,30,36,67,69,83,84,90,98,99,102,110
 járókerékben 61,62
 kifejlett 105-110
 körhenger körül 93,94,110-113
 kvázistacionárius 29,38,39
 lamináris 4,106-110
 összenyomhatatlan 10,36,66,70,72,76,79-81,83,87,92,93,99,103,120,121
 rotációmentes 90-93,103,120,155
 síkbeli 36,93-102,113
 stacionárius 29,30,67,69,81-83,106
 súrlódásmentes 53,66,71,81,89-106,114,115
 szakadási felületnél 48-51
 szárnyszelvény körül 93-95,107,113-115
 szélesatornában 6,7,35
 szivattyúban 19,22,23,39,59,61,62,67,69,74,77,84-86,89,91,103,116-126
 -tan 34,38,39,53,72,82,89,102,106,113,152,157
 turbulens 46,51,67,68-70,73,74,83,106-110,116-134
 veszteség 5,41,53,83,84,114,122
 viszkózus 46,50,51,68,70,72,89,107,110,115-117
 vízturbinában 53,69,74,85,107

állósillagokhoz rögzített koordinátarendszer 11,15,18**alakváltozás 5,43,44,52,64,65,70,78-80,87,132****alpműveletek 132,134,135****algebra 32,132,134,142,143,147-149,151,152****analízis 132,133,150-152****asszociatív 132,133,147****autó 10,16****atom 6-9,19****cirkuláció 91,94,98,100,103,111,112,120-122****Coanda effektus 111,113**

Colebrook-White formula 83,110
 csőszűrlődés 5,83,108-110,122
 derivált 5,13,28,37,38,49,59,64,66,67,75,91,92,95,99,100,136,141,137,139,146,150,151,153,154
 deriválttenzor 37,38,64,139,146,150,152
 diádikus (szorzás) 68,146,147-149
 differenciálás 12,32,45,59,104,124,132,137,138,144,145,150,151,156
 differenciálegyenlet 36,45,46,58,70,72-74,92,93,96,102,107,108,127
 digitalizálás 97
 disztributív 132,133,147
 divergencia (tenzordivergencia) 37,124,150-152
 dugattyú 22,82
 egységvektor 5,12-14,20-22,25,26,30,32,41,44,47-49,56,57,105,106,116,128,140,141,143,151,154
 elméleti 6-10,15,19,26,36,49,52,58,93-95,98,102,111,116,118,119
 elmozdulás 44,64,70,76,78,79,82,99
 eloszlás
 feszültség- 43,44,54,57,65,70,77,80
 sebesség- 6,8,10,29,35,41,51,53,62,69,74,77,91-93,101,103,105,106,109,114,120
 sűrűség- 7,29
 energetikai szemlélet 78
 energia
 alakváltozási 77,78,80
 átviteli 77
 belső 5,78-80,87,88
 disszipáció 5,78-80,83,84,86,87
 helyzeti 17,77,81,87,88
 kémiai 9,11,76
 hőmennyiség 74,83,86,87
 külső 88
 mechanikai 79,82-84,88
 megmaradás 80,81
 mozgási 74,77,80,83,84,87
 össz- 78,80,82,83,87,88
 tárolható 77-80,82,83,87
 tengelyen 77-79,84,85,87,89
 -tétel 82,83,88
 épület 6,43,44,131
 erő
 aktív 16,40,44
 belső 10,14,15,17,18,20,40
 centrifugális 16,18,21,60-63
 centripetális 16,60,113
 Coriolis 17,18,60-63
 ellenállás- 28,79,94,110,111,114,115
 eloszlás 34
 eredő 11,12,16,24,132
 felhajtó- 24,94,95,114,115
 felületi 5,14,18,20,21,24,25,28,34,42,77-79,82,84,87,119
 hatásvonala 18,63
 impulzus- 40-43,62,106,110,117,119
 kölcsönös (akció-reakció) 11,13,16,20,21,41,44
 külső 11,14,15,18,20,61,75,82
 nehézségi (súly) 5,11,16-20,24,28,32,41,81,110
 reakció- 16,44

erő

-sűrűség 60,62
 számítása 41,42,131
 támadási pontja 13,132
 támaszkodási 16,20
 térfogati 14,17,18,20,24,28,34,60,61,81
 tehetetlenségi 10,14,16,18-20,29,60,61
 tömegelő 26,28
 tömegvonzás 11,14,15,17,18,20,61
 vonalmenti 14,34

felület

ellenőrző 38-43,58,61,81,82,84,105,109,116,117,119
 érdekesség 6,22,83,107,109,110,115
 forgásszimmetrikus 107,120,121
 mozgó felület sebessége 140,141
 szakadási 5,6,8,26,28,31,33,35,41,42,45-58,73,74,76,82,87,88,90,116,123-125,127,143-146,155

feszültség

eloszlás 43,44,54,57,65,70,77,80
 nyíró, csúsztató 5,21-23,48-51,55,58,63,64,69,72,73,77,84,91,98,106,108,110,117,122
 húzó, nyomó 5,20-23,31-33,42,49,51,52,54,56-58,64,65,82
 Reynolds-féle 63,67,68,69,73,74
 -tenzor 5,21-23,26,28,40,41,44,46,47,56,57,61,65,68-70,72,80,106,107,116

fizikai vonatkoztatási rendszer 15,17,133

folyáshatár 51,52

Földi rendszer 5,16,17-22,24,28,56,59,61,63,67,70,76,77,78,91

forgatónyomaték 13

földrengés 19

függvény

differenciálás (lásd derivált és differenciálás)
 folytonos 7,8,45,49-52,56,74,82,90,93,95,100,101,136,142-144,146,153,154
 harmonikus 70,92,93,95-97,100
 határérték 5,8,26,35,47,49,64,67,136,143,144,153
 integrálása 132,137,142-146,155,156
 láncszabály 37,138,145,160
 magfüggvény 95,97,103,104,154
 parciális derivált 37,66,136
 szakadása (lásd felületnél)
 skalár-skalár 136,137
 skalár-vektor 137,138
 vektor-skalár 12,137
 vektor-vektor 134,138,139

Gauss integráltétele 40,45,62,75,124,153

gáz és gőz 9,10,39,48,50,58,63,76,78,80,88,98,112,116

gradiens 38,40,90,91,101,104,124,137,138,140,150-152

gravitáció 17,53,78

gyorsulás 5,12,16,17-20,24,28,32,51,59,60,79,102,108,113,116,125,126

határréteg 51,72,74,89,91,106-108,110,111,113-115,122,123

hengerkoordináták 13,116,122

hidrosztatika 24,25,71

hőtan 9,88,95,158

hullámsebesség 5,33,54,55,128,131

inerciarendszer 20

index konvenció 149

idő

pillanat 6,8,11,12,26,27,31-33,35,37,45,54,79,80,81,83,91,99,102,127,129-131,137,145

tartam 5,11,26,30,31,32,54,67,69,77,84,86,126,128

lépés 35,99-102

impulzus 10-12,28,31,32,57,75,88,89,92,

impulzusnyomaték 13,28,29,57,75,89,106,117

iteráció 53,74,88,120,121,124

integrál

felületi 25,28,32,40,62,75,76,91,142,143,156

közelítő összeg 7,125,137,142,143

tartományfüggvény szerinti 143

térfogati 7,25,45,47,60,75,117,124,142,143,156

vonalmonti 143,156

tételek 153

ívcső 41-43

járókerék 24,44,61-63,69,85,86,103,116-119,122,123

kapillaritás 34

kavitáció 23,72,92,99,100,101,102,112

kompakt (tartomány) 142-144

kommutatív 132,133

kontinuum (newtoni)

koordinátarendszere 15,59

-mechanika 1-3,6,20,26-28,33,34,38,43,46,48,56-59,60,61,63,69,73-76,144,152

mozgása 27,30,35,70,87,88,107,127,140,156

tartomány 7-9,15,26,27,45,47,58,74,116,142

koordinátarendszer 5,11,13-16,18,20,32,44,56,59,61,71,105,132-136,139,148

körhenger 93,94,110,112

Kutta-Zsukovszkij feltétel (lásd névmutató)

Laplace operátor 72,150,151

láncszabály (lásd függvény)

leképezés 122,134

logika 9,28,45,58

lökéshullám 31,33,35,48,49,50,54,58,88,126,127,129,131

mágneses 46,57,61,76,78

mátrix 21,23,37,57,59,64,65,66,132,134,135,139,147,148,149,152

mechanikai rendszer (elméleti modell) 6,14,15,17,20,25,26,46,58,78,79,107

meridiánáramlás 121,122

mozgásegyenlet (mozgástörvény) 12,36,69,90, 9-12,27,89

mozgó koordinátarendszerek tétele 60

munka 5,74,76-78,86,87,116,157

nabla vektor 150-152

Naprendszer 11,15,17,18,20,24,75

nehézségi erő (lásd erő)

newtoni kontinuummechanika (lásd kontinuum)

nyomás (általában) 5,14,21,22,24,25,40,43,48,49,56,58,63,66,77,78,82,83-85,90,100,106-108,110

abszolút 24,40,41,63,66,82,114,131

barometrikus (légköri) 18,22-24,28,40,44,53,56,65,81

hullám 48,49,58,88,125-130

redukált 71,72,90

relatív 62,111,113,114,126

telített vízgőz nyomása 98,101

túlnyomás 40,42,119

nyílt rendszer (lásd mechanikai rendszer)

paradoxon 53
 pálya 15,16,28,33,35-38,59,137,146
 peremelem (módszer) 70,96,98-100,102-104,120,123-125,155
 peremérték feladat 44,92,95,96,98,99-103,123
 poláros tárgyalás 34,46,48,57
 pontosság 15,18-20,35,41,51,72,116,117,136
 pont-szorzás 149
 potenciál 5,17,28,78,92,93,96-101,103,104,123,155
 RANS 73,74,89
 relaxáció 121
 részecske 37,59
 rotáció (tenzorrotáció) 37,90-93,103,124,139,150-152,155
 rugalmas (lásd test, folyadék)
 sebesség 5,10-12,16,26,28,30-32,35,38,60,66,67,70,73,77,82,83,87,92,107,120,123,132,145
 deriváltja 37,38,66,90,138,139,150,151
 eloszlás, mező 6,8,10,29,35,36,38,41,51,53,62,69,72,74,77,91-94,101,103,105-107,109,114,120
 pillanatnyi 8,16,67-69,73,107,110,112-114,
 átlagos (turbulens) 39,67-70,72,73,80,105-108,113,116-118,138
 abszolút 5,26,28-32,48,54,59,69,77,79,81,82,86,88,97-99,100-104,156
 relatív 5,17,28,59,62,69,122
 hullám- 31,33,54,55,88,126-128
 felület- 5,30,31,35,47,88,140,141
 szög- 28,37,60,77,84,91
 potenciális 92,96,97,155
 szakadásnál 35,47-50
 fal mellett (határréteg) 50,51,69,114,115
 zérus 24,31-33,36,43,51,55,56,58,83,91,115
 segédváltozós integrál 156
 síkáramlás 36,93,96,98,100,111,113
 skalár értelmezése 132
 skaláris szorzás 133,148
 skalárinvariáns 147,148,151
 Stokes potenciálok 123,155
 súrlódásmentes 36,40,41,46,49,50,51,53,66,70,71,74,79,81,89-108,111,112,114,115,120,122
 súrlódás 11,22,40,46,72,78,79,117,119
 csősúrlódás 83,107-109,122
 kis súrlódás 40,42,70,73,90,93,98,106,108,116,125
 szivattyúban 123
 sűrűség 5-8,13,26-29,37-39,46,61,63,69,93,94,110,126,132,137,155
 állandó 10,12,66,69-71,81,82,89,90,93,96
 szakadásnál 47-49,52,54,58
 víz 24,25,41,42,63,86,116,126
 szakadási feltételek 47,56-58,74,87,88,116
 szakadási felület 5,6,8,26,28,31,33,35,41,42,45-50,58,73,74,76,82,90,123-127,143-146,156
 egyszerű (nem lép át tömeg) 42,49-51,53,56,58
 örvényfelület 49,50,55,58
 lökéshullám 31-33,49,50,58,88
 szakadási réteg 31,33,51,54,58,72,74,89,91,93,107,108,111,115,122,123
 szárny (-szelvény, -profil, -lapát) 6-8,14,36,69,86,91,94,95,98,107,113-119
 szélesatorna 6,8,14,110
 szilárd (test) 6,9,10,19,20,21-24,29,35,43,46,49-52,54,56-58,64,70,72,74,76,79,80,86,87,103,107,126
 szilárdságtan 21,43,44,46,51,55,70
 szingularitások módszere 36,122

szivattyú 18,19,22,23,39,59,61,62,67,69,74,77,78,84-86,89,91,103,116-123,126,130,131
szivattyútelep 67,83,116,125,126,129
teljesítmény 5,18,84-89,113
test 6,7,9-18,20,21,26-28,35,52,53,60,63,77,87,93,94,110,132,133
 valóságos 6-9,15,17,26,28,33,49
 elméleti 6-9,15,26,49
 égi 15,17,18,20
 szilárd 6,9,10,19,20-24,29,35,43,46,49-52,54,56-58,60,63,64,70,72,74,76,77, 79,107,113,115
 merev 10,12,22,28,31-33,43,54,55,59,107,126
 rugalmas 31,43,44,46,51-55,58,64,65,70,80,87,116,126-128
 folyadék 5,9,10,23,24,29,39-43,46-53,58,62,66,67,70-74,76,79-84,87-91,94,99-112,117,121-127
 összenyomhatatlan 7,10,36,66,70,72,76,79-81,83,87,92,93,99,120,121
 összenyomható 7,10,50,63,76,80,88
 légnemű (gáz, gőz) 6,9,10,35,39,48,50,56,58,63,76,78,80,88,116
termodinamika (lásd hőtan)
térfogat (térfogati) 5-8,14,25,43,51,62,65,75,78,82,87,88,99,100,120,124,141
 -áram 39,83,86,96,107,108
 anyag 8-10,12,26-31,34,46,47,51,57,74,75,86,87
 rögzített 9,12,38,39,41,43,45,47,56,57,62,67,80,87,116,126,128,145
 erők 14,17,18,20,24,34,60,61,81
 integrál 25,47,75,104,124,125,142,143,155,156
tömeg 5-9,14-20,24-30,33,34,37,39,40,43,48,51,53,57,58,61,62,65,67,77-84,86-89,106,107,112-114,117,125,126,128,132
 -áram 39,41,48,86
 sűrűség 26,28,74,75,80,87,88
 megmaradás 9,27,29,58,61,75,89,98
 vonzás 14,15,17,18-20
turbulens (lásd áramlás)
transzport 73,74-76,87
tranzien 125,126,130
tenzor 5,21-24,26,29,37,38,40,44,46,56,57,59,64-66,68,70,72,75,132,134,139,142,143,146
 deformáció sebesség- 37,66,72
 értelmezése 132,134,135,139,146
 feszültség- 5,21-24,26,28,40,41,44,46,47,56,57,61,65,68-70,73,80,106,107,116
 kis alakváltozás- 64,65,80
 műveletek 132-143,147-149,150-152
 Reynolds féle- 68,69
ütés, lökés 31,33,35,48-50,54,55,58,88,113,115,126-131
vektor 5,11-13,17-23,25,27,30,32,38,39,41,44,46,48,49,56,57,68,74,75,91, 105,106,116,121,123, 124,125,128,132-135,137-141
 hely- 5,7,13,14,26,28,35,44,59,62,64,70,116,137
 sebesség-, gyorsulás- 5,8,10,12,17,19,26,28,29,30,35,36,62,68,71,73,91,93,100,105,121
 erő-, nyomaték-, impulzus- 5,10-13,15,17,18,20,22,32,41,48,49,62,116
vesztesség 5,41,53,66,74,78,80,83-86,89,90,103,108,110,114,118,119,122,123,
végelem és véges térfogatok módszere 70,120
viszkózitás 5,40,49-51,66,70,72,83,89,94,96,98,107,108,110,111,113
vízügy 116
vízgép 19,23,24,34,39,40,43,44,74,76,89,94,98,112,114,116,120,152,157
víturbina 69,74,85,86
vízerőmű 83,85,86
vízütés 55,58,125-131
vonatköztávolsági rendszer 15,17-20,24,50,59,113,132,133
zárt rendszer (lásd mechanikai rendszer)

Tartalom	Oldal
Tartalom, Lektorok, Előszó, Köszönet, Kulcsszavak, Jogvédelem, Jelölések	2
Newtoni kontinuummechanika	
1. Alapfogalmak	6
Test és tömeg. Newton törvényei és az erők. Euler törvényei. Általános tömegvonzás. Fizikai vonatkoztatási rendszer és a kontinuum koordinátarendszere. Naprendszer. Tehetetlenségi erők. Földi rendszer. Nehézségi erő. Pontossági igény. Inerciarendszer. Felületi erők, feszültségek.	
2. Általános axiómák	26
A newtoni kontinuum definíciója: (a) axiómák. Cauchy törvényei. Stacionárius, instacionárius, kvázistacionárius mozgás. Általános tömeg és erő eloszlásokra: (b) axiómák. Kinematikai részletek.	
3. Az axiómák rögzített térfogatokra	38
Rögzített térfogatokra: (c) axiómák. Stacionárius és kvázistacionárius esetekre: (d) axiómák. Impulzuserők.	
4. Általános differenciálegyenletek	45
Az egyenletek levezetése: (e) és (f) axiómák. Általános differenciálegyenletek: (g) axiómák.	
5. Szakadási felületek	47
Szakadási feltételek: (h) axiómák. Tételek szakadási felületekre. Elsőfajú szakadási felületek. Példák.	
6. Összefoglalás	57
Az axiómák rendszere. Szakadási réteg és felület. Alkalmazási határok.	
Kiegészítések	
7. Mozgó koordinátarendszer	59
Koordináta transzformáció. A sebesség és a gyorsulás képlete. A mozgó koordinátarendszerek tétele.	
8. Anyagi egyenletek	63
Sűrűségek. Lineárisan rugalmas szilárd test Hooke törvénye. Sűrűdásmentes folyadék. Lineárisan viszkózus folyadék Stokes törvénye. A turbulens áramlás Reynolds feszültségei.	
9. Speciális differenciálegyenletek	70
Hooke törvényén alapuló egyenletek. Összenyomhatatlan folyadék. Euler egyenlete sűrűdásmentes folyadékokra. Navier-Stokes egyenlet viszkózus folyadékokra. Reynolds átlagolt egyenlete turbulens áramlásra.	
10. Transzport elmélet	74
Transzport szakadás nélkül. Transzport szakadással.	
11. Energia	76
Az energia fogalma és fajtái. Energiamegmaradás. Ideálisan rugalmas szilárd test. A mechanikai energiatétel folyadékokra. A termodinamika első főtétele: (IVa) és (IVh) axióma. Lökéshullám levegőben.	
Áramlástan és vízgépek	
12. A sűrűdásmentes folyadék áramlástan	89
Fő tételek levezetése. Síkáramlás. Szárnyszelvények. Knapp ciklus. Síkbeli és térbeli peremelem feladatok.	
13. A valóságos folyadék áramlástan	106
Lamináris, turbulens. Hosszú cső. Körhenger. Kármán -féle örvények. Coanda effektus. Szárnyszelvények.	
14. Vízgépek erőhatás számításai	116
Szárnylapátos szivattyú járókerék alapegyenlete. Euler-Segner egyenlet. Szivattyú talpcsapágyára ható erő.	
15. Vízgépek sebességeloszlás számításai	120
Forgásszimmetrikus áramlás. Jelleggörbe számítás. A peremelem módszer módosítása.	
16. Vízütés számítás	125
Függelék: Vektor- és tenzorszámítás	
17. Alapműveletek	132
Vektorok és tenzorok értelmezése. Alapműveletek. Függvények. Differenciálhányadosok. Integrálás.	
18. Kontinuummechanikai bizonyítások vázlata	144
Az (a) axiómák matematikai feltételei. A (c) axiómák levezetése. A (g) axiómák levezetése.	
19. Vektor és tenzor algebra	147
20. Vektor és tenzor analízis	150
21. Integráltételek	153
22. Potenciálmélet	155
23. Segédváltozós integrálok differenciálása	156
Utószó, Axiómák, Táblázatok, Példák, Ábrák, Irodalom, Névmutató, Tárgymutató, Tartalom	
	157