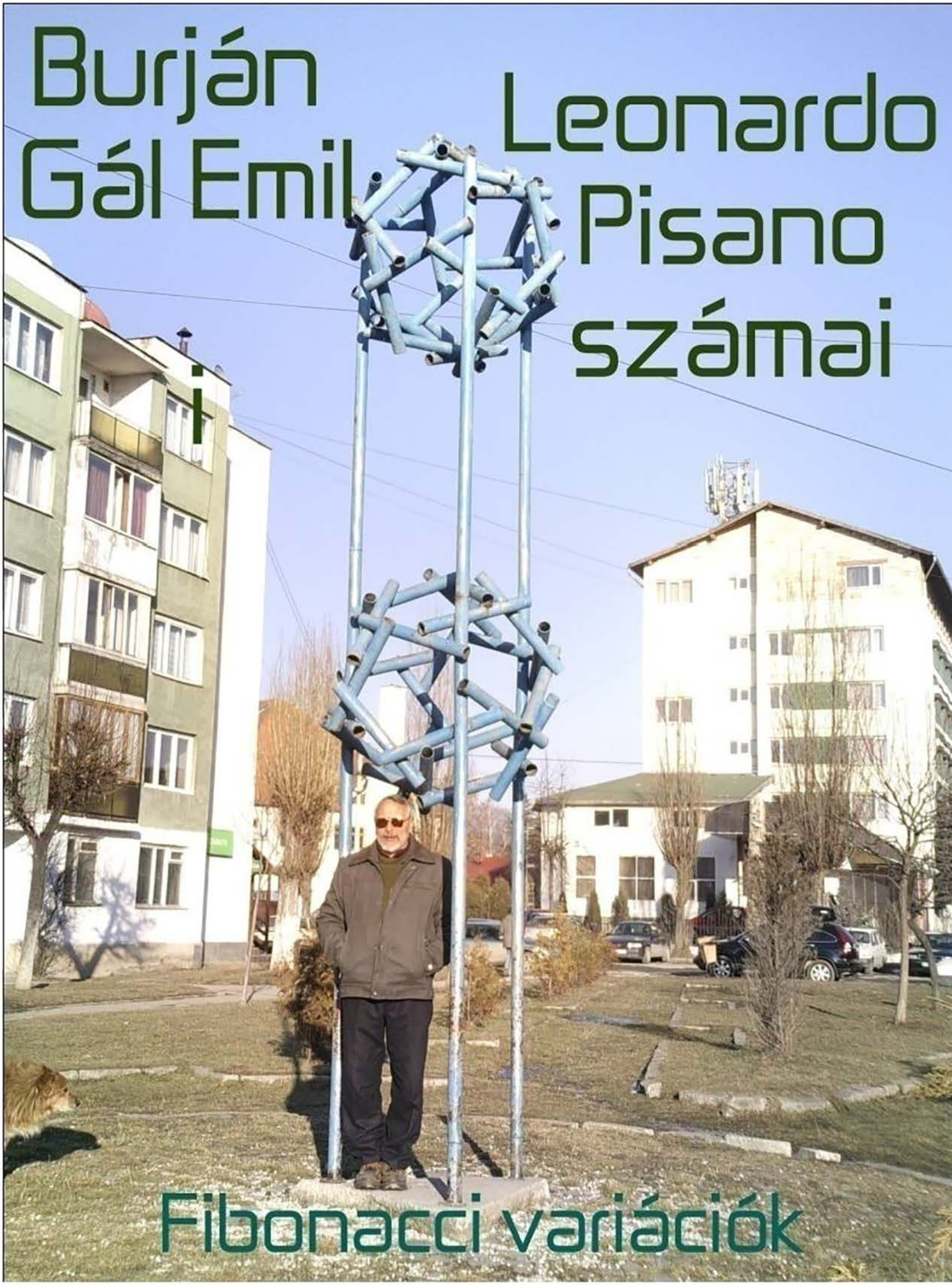
Burján Gál Emil

Leonardo Pisano számai

Fibonacci variációk



BURJÁN-GÁL EMIL

LEONARDO PISANO SZÁMAI

~ FIBONACCI VARIÁCIÓK ~

GYERGYÓSZENTMIKLÓS

2019

A borítót tervezte

Burján Gál Enikő

(Címlapon: a szerző kompozícióját ábrázoló fénykép; hátoldalon: Gál Éva Emese grafikája)

<honlapjaink>
{emil.burjangal.ro}
{evaemese.burjangal.ro}
{eniko.burjangal.ro}

ISBN

MEK-17568

Leonardo Pisano számai / Burján-Gál Emil
tanulmány(ok) ; magyar

Illusztrált.
eredeti kiadvány: Leonardo Pisano számai / Burján-Gál Emil
Gyergyószentmiklós: Mark House Kft., 2017
ISBN 978 606 8666 56 3

Számelmélet
Fibonacci-sorozat, rekurzív sorozat, számsorozat, számelmélet, aranymetszés

MEK-be került: 2017-11-27
URL: **http://mek.oszk.hu/17500/17568**

Kiadja a Mark House Kft.
ISBN: 978-606-8666-56-3

Második kiadás: 2019

Még-már a mesés múltban élt (a ferde torony megépülése előtt) egy Leonardo di Pisa, azaz Leonardo Pisano, Bonacci **fi**a, innen a másik neve, a **Fi**bonacci, aki 1202-ben sokadszorra felfedezte azt, amit aranymetszésnek nevezünk, azaz Fibonacci számsornak.Olvasható az interneten, hogy a Fibonacci-sorozat első két tagja a 0 és az 1. A következő tagok mindig az őket megelőző két tag összegével egyenlők. (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …)

A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjainak hányadosából képzett sorozat (1/1, 2/1, 3/2, 5/3, …) határértéke éppen az aranymetszés aránya.

Még néhány adat:

>>A Fibonacci sorozat egyre nagyobb sorszámú elemeinek hányadosa egy állandó számhoz, az aranymetszéshez tart. Már az ókori görögök is ismerték, és aranymetszésnek, „isteni aránynak” hívták.<< https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Baum.

.<<Hemachandra és mestere, Gopala azt is vizsgálta, hogy a rövid és hosszú szótagok miként töltenek ki egy adott időtartamot a szanszkrit költészetben. **Így fedezték fel a matematikai sorozatot, melynek első pontos említése 1150-ből való.** **http://indiahangja.reblog.hu/fibonacci-sorozat-a-szamtani-sorozatok-kiralya>>**

Én magam is verselgetés közben Magam is verselés közben vettem észre, hogy hány féle módon szakaszolható a (nemcsak felező) nyolcas, valamint a tíz szótagú sorok. Majd a 13 szótagú sorral is megismételtem. Utána következett az esztétika könyvemben közölt, alább idemásolt **számtömb.**

Ha egymás alá írjuk az összeadás-sorból képzett számsor első 15 elemét és egy mások oszlopba a köztük lévő arányszámot négy tizedesig kiszámolva, tehát ötszámjegyet figyelembe véve, rájövünk, hogy (a nulla nélkül) éppen a tizenharmadik sorban áll be az **1,6180**-as arány, ami a továbbiakban változatlan. Lehetne bárhol, de mintha a maga belső szerkezeti szépségére is figyelne. Még sok szerkezeti érdekesség fedezhető fel az aranymetszés sorozatban, közülük a *Nyelv és esztétikum* című könyvemben (lásd: *mek.oszk.hu/14100/14145/index.phtml*) az alábbi keresztrejtvény szerűséget közöltem:

8+5+*8*=**21**=*1*×5+*2*×8
13+8+*13*=**34**=*2*×5+*3*×8
21+13+*21*=**55**=*3*×5+*5*×8
34+21+*34*=**89**=*5*×5+*8*×8
55+34+*55*=**144**=*8*×5+*13*×8

Későbbi ismeretek felhasználásával a fenti számtömb így egészíthető ki:

8+5+*8*=**21**=*1*×5+*2*×8 = 3x5+2x3 =3x8
1x3*13*+8+*13*=**34**=*2*×5+*3*×8 = 3x8+2x5=5x8-2x3
21+13+*21*=**55**=*3*×5+*5*×8 = 3x13+2x8=8x8-3x3
4+21+*34*=**89**=*5*×5+*8*×8 = 3x21+2x13=13x8-5x3
55+34+*55*=**144**=*8*×5+*13*×8=3x34+2x21=21x8-8x3

Találtam az interneten egy, kissé a Fibonacci sorozat számtömbjeihez hasonlót:

1x8+1=9
12x8+2=98
123x8+3=987
1234x8+4=9876
12345x8+5=98765
123456x8+6=987654
1234567x8+7=9876543
12345678x8+8=98765432
123456789x8+9=987654321

HATVÁNYOK

Műtermem falán egy oldószerbe mártott széles ecsettel húzott vízszintes csík ilyen, elégggé szabályosnak tűnő lecsorgásokat eredményezett: három hosszú, két rövid, három hosszú, két rövid, három hosszú. Összesen **13** függőleges csík, ami így írható fel: $\mathbf{2^2+3^2}$. Sorozattá pedig a következő képpen fejleszthetők:

$2^2+3^2=$**13...**	$8^2+13^2=$**233**
$3^2+5^2=$**34…**	$13^2+21^2=$**610**
$5^2+8^2=$**89 …**	$21^2+34^2=$**1597**

Az átugrott számokat előállítani így lehet: 34-13=21; $(3^2+5^2)-(2^2+3^2)=5^2-2^2$:

$5^2-2^2=$**21....**	$21^2-8^2=$**377**
$8^2-3^2=$**55….**	$34^2-13^2=$**987**
$13^2-5^2=$**144…**	$55^2-21^2=$**2574**

Létezik olyan számtömb-összefüggés, amelyben az eredeti számsor és az **átugrásos** egy-egy oszlopban egymás mellett van, köbre emeléskor kettős az átugrás:

(*) $3^2=\mathbf{8}+1^2$
$5^2=\mathbf{21}+2^2$
$8^2=\mathbf{55}+3^2$
$13^2=\mathbf{144}+5^2$
$12^2=\mathbf{377}+8^2$
$34^2=\mathbf{987}+13^2$

$2^3+3^3-1^3=\mathbf{34}$
$3^3+5^3-2^3=\mathbf{144}$
$5^3+8^3-3^3=\mathbf{610}$
$8^3+13^3-5^3=\mathbf{2584}$
$13^3+21^3-8^3=\mathbf{4181}$
$21^3+34^3-13^3=\mathbf{6765}$

$13^2-2^2=169-4=165=3x\mathbf{55}$
$21^2-3^2=441-9=432=3x\mathbf{144}$
$34^2-5^2=1156-25=1131=3x\mathbf{377}$
$55^2-8^2=3025-64=2961=3x\mathbf{987}$
$89^2-13^2=7821-169=7752=3x\mathbf{2584}$

$5^2-3^2=\mathbf{2x8}$
$8^2-5^2=\mathbf{3x13}$
$13^2-8^2=\mathbf{5x2}1$
$21^2-13^2=\mathbf{8x34}$
$34^2-21^2=\mathbf{13x55}$
$55^2-34^2=\mathbf{21x89}$

$1^2+5^2=2x\mathbf{13}=2x(2^2+3^2)$
$2^2+8^2=2x\mathbf{34}=2x(3^2+5^2)$
$3^2+13^2=2x\mathbf{89}=2x(5^2+8^2)$
$5^2+21^2=2x\mathbf{233}=2x(8^2+13^2)$
$8^2+34^2=2x\mathbf{610}=2x(13^2+21^2)$

A csillaggal **(*)** megjelölt számtömb

később még előfordul.

Kiemelhetjük a számsor minden negyedik elemét is, ekkor a közöttük jelentkező arányszám 6,853 lesz, ami azonos az $1{,}618^4$ hatvánnyal. Ebben az átugrásos számsorban: 1 ~ 8 ~ 55 ~ 377 ~ 2584 (közöttük helyezkedik el a *3*, a *21*, a *144* és a *987*) még a következő két szabályszerűség figyelhető meg:

1+8=9=**3x*3*;**
8+55=63=**3x*21***;
55+377=432=**3x*144***; ;
610+4187=4797=**3x1597**;

2+13=15=**3x*5***;
13+89=102=**3x34**;
89+610=699=**3x233**
987+6765=7752=**3x2584**;

$3+21=24=\mathbf{3x8}$;
$21+144=165=\mathbf{3x55;}$
$144+987=1131=\mathbf{3x377}$;
$377+2584=2961=\mathbf{3x}\boldsymbol{987}$;

A második szabályszerűség két, egymást kiegészítő változatban:

:

$1^2+8=\mathbf{9}=3^2$
$\mathbf{3^2}+55=\mathbf{64}=8^2$
$\mathbf{8^2}+377=\mathbf{441}=21^2$
$\mathbf{21^2}+2584=\mathbf{3025}=55^2$

$2^2+21=\mathbf{25}=5^2$
$5^2+144=\mathbf{169}=13^2$
$13^2+987=\mathbf{1156}=34^2$
$34^2+6365=\mathbf{7921}=89^2$

Vagy:

$1x3+1=4=2^2$
$3x8+1=\mathbf{25}=5^2$
$8x21+1=\mathbf{169}=13^2$
$21x55+1=\mathbf{1156}=34^2$

NÉGYSZÁMJEGY-SZABÁLYOK

Hogyha a számsor egymásra következő **négy** elemét vizsgáljuk, velük ilyen művelet végezhető:**1; 2; 3; *5*; 8; 13; 21; 34** sorozat **első négy** számából (***1, 2, 3, 5***) ha a legkisebbet összeszorozzuk a legnagyobbal és ezt hozzáadjuk a második szám négyzetéhez, az eredmény azonos lesz a harmadik szám négyzetével:

$1x5=5$; $5+2^2=3^2$;

vagyis $5+4=\mathbf{9}$; $3^2=\mathbf{9}$.

A következő négy kiválasztott számjegy a **8; 13; 21; 34**.

$$8x34=272+$$
$$\underline{13^2=169}=$$
$$21^2=441.$$

Algebrailag: $\mathbf{axd+b^2=c^2}$; illetve $\mathbf{c^2-b^2=axd}$;vagy:$\underline{\mathbf{c^2=b^2+axd}}$. A korábban kialakított rendhagyó számsorok legtöbbje eleget tesz ennek az **első négyszámjegy-szabály** nevű feltételnek, amely egy <u>másik</u> változatban, mint **második négyszámjegy-szabály** is megjelenik: $\underline{\mathbf{c^2=(a^2+d^2):2-b^2}}$. ~~(Ha ismerné a szövegszerkesztőm a gyökjelt, a $\underline{\mathbf{c^2}}$

egyszerűsíthető lenne **c**-re.)**~~(**Az első négyszámjegy-szabályt elemzi a **Függelék**.) Meglepő, hogy ez a két négyszámjegy-szabály érvényes a sorozat első 13 számjegyére is, ahol még nem jelentkezik az 1,6180339887498948482O-as arányszám, ettől független, általánosabb érvényű, végtelen tizedes tört helyett egész számokat alkalmaz. Sőt, akkor is érvényes, ha így indul a sorozat:

~ 1 ~ 1 ~ 2 ~ 3 ~

Furcsa módon alkalmazható a négyszámjegy szabály úgy is, ha, miután a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk számjegyeik szorzatát, majd azokból párosával sorozatot

indítunk: 13+1x3=16; 21+2x1=23;

34+3x4=46; 55+5x5=80; 89+8x9=161.

16+**23**=**39**; 23+39=**62**;
39+62=**101**.

Ellenőrizve:

$$16\times62=992+\underline{23^2=529}=39^2=1521$$

$$23\times101=2323+\underline{39^2=1521}=62^2=3844$$

23+**46**=**69**; 46+69=**115**;
115+69=**184.**

Ellenőrizve:

$$23\times115=2645+\underline{46^2=2116}=69^2=4761$$

$$46\times184=8464+\underline{69^2=4761}$$
$$115^2=13225$$

46+**80**=**126**; 80+126=**206**;
126+206=**332**.
Ellenőrizve:

46x206=9476+	80x332=26560+
$\underline{80^2=6400}$=	$\underline{126^2=15876}$=
126^2=15876	206^2=42436

Azzal a számsorral sem lépünk ki az eddigi képletek hatálya alól, ha a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk saját számjegyeiket: 13+1+3=**17**; 21+2+1=**24**; 34+3+4=**41**; 55+5+5=**65**; 89+8+9=**106**. (A később rögzített háromszámjegy-szabály állandója $\underline{+}$121.) Több változata létezik a fenti módszernek, közülük a következő a számsor egyjegyű számainak a (korábban már felbukkant) kilenccel való szorzata: 13-(1+3)=**9**; 21-(2+1)=**18**; 34-(3+4)=**27**; 55-(5+5)=**45**; 89-(8+9)=**72**. Rájuk illik a négyszámjegy-szabály:

$9x45=405+$	$18x72=1296+$
$\underline{18^2=324}=$	$\underline{27^2= 729}=$
$27^2=729$	$45^2=2025$

Érdekes, hogy az öt szám közül az utolsó a *72*, első a *9*, közöttük pedig ott a 27. (Ugyanaz a két számjegy fordított sorrendben.) Hatványra emelve a 27 egyenlő lesz *729*-cel. (Háromszámjegy-szabály szerűség.)

Lehet kísérletezni ezzel is:

13-1=**12**; 21-2=**19**; 34-3=**31**; 55-5=**50**; 89-8=**81**.

(Itt a háromszámjegy-szabály állandója $\underline{+}$ 11.)

Visszatérve a második négyszámjegy-szabály nevű feltételhez: $\underline{\mathbf{c^2=(a^2+d^2):2-b^2}}$, ebben az az érdekes, hogy amikor összeadjuk a sorozat bármely **a** és **d** számát, mindig páros számot kapunk, ugyanígy lesz négyzetre emelésükkor is. Továbbá az így nyert páros számok elosztva kettővel a sorozat valamely, de minden második számát eredményezik, eme számtömb kiegészítő változata is kitalálható.

Két, korábban bemutatott számtömb ismétlése:

$1^2+5^2=2\text{x}\mathbf{13}$	$8^2-1^2=3\text{x}\mathbf{21}$
$2^2+8^2=2\text{x}\mathbf{34}$	$13^2-2^2=3\text{x}\mathbf{55}$
$3^2+13^2=2\text{x}\mathbf{89}$	$21^2-3^2=3\text{x}\mathbf{144}$
$5^2+21^2=2\text{x}\mathbf{233}$	$34^2-5^2=3\text{x}\mathbf{377}$
$8^2+34^2=2\text{x}\mathbf{610}$	$55^2-8^2=3\text{x}\mathbf{987}$

Van még egy harmadik és egy negyedik négyszámjegy-szabály is, ilyen képlettel: **a+d=2c**; illetve: **d-a=2b**. Ebben a két esetben a négy számjegy-sorból a második, illetve a harmadik elem kimarad.

Ezekkel sajátos „középarányt” is ki lehet számítani. Ha kiemelünk a sorozatból négy egymás utáni számot (a, b, c, d), ugyanakkor ha (kettős átugrással) összeadjuk a legkisebbet a legnagyobbal (a+d), megkapjuk a harmadik (c) tag kétszeresét: **a+d=2c**. És megkapjuk a második tag (b) kétszeresét, ha a negyedik tagból kivonjuk az elsőt: **d-a=2b**. Ezt a két számtömböt egyesíteni tudjuk, ekkor öt tagból álló szakasz keletkezik a következő képlettel: **e-b=a+d=2c**.

a+d=2c

1+5=6=2x3
2+8=10=2x5
3+13=16=2x8
5+21=26=2x13
8+34=42=2x21

d-a=2b

5-1=2x2
8-2=2x3
13-3=2x5
21-5=2x8
34-8=2x13

e-b=a+d=2c

8-2=1+5=2x3
13+3=2+8=2x5
21-5=3+13=2x8
34-8=5+21=2x13
55-13=8+34=2x21

Elcsúszhat a „középarány" egyharmadra is, amennyiben nem négy, hanem öt egymást követő számot elemzünk. Ilyenkor **a+e=3c** lesz az eredmény:

1+8=3x3
2+13=3x5
3+21=3x8
5+34=3x13
8+55=3x21

Nem illik a mostaniak közé, de hasonlít rájuk a következő két összetartozó számtömb, az első a **négyszámjegy-szabály** ötödik változata, a másik **ötszámjegy-szabálynak** felel meg:

$c^2+a^2=bxd$	$c^2-a^2=e$
$3^2+1^2=$**2x5**	$3^2-1^2=$**8**
$5^2+1^2=$**2x13**	$5^2-2^2=$**21**
$8^2+2^2=$**2x34**	$8^2-3^2=$**55**
$13^2+3^2=$**2x89**	$13^2-5^2=$**144**
$21^2+5^2=$**2x233**	$21^2-8^2=$**377**
$34^2+8^2=$**2x610**	$34^2-13^2=$**987**

Van kivonásokon alapuló, ötös csoportokat is tartalmazó számtömb is, a következő ötszámjegy-képlettel:

2d-b=e=3c-a.

2x2-1=**3**
2x3-1=**5**=3x2-1
2x5-2=**8**=3x3-1
2x8-3=**13**=3x5-2
2x13-5=**21**=3x8-3
2x21-8=**34**=3x13-5

HÁROSZÁMJEGY-SZABÁLYOK;

±1; és

TÖBBSZÁMJEGY-SZABÁLYOK

Hármas számcsoporttal végzett műveletek ilyen érdekességgel szolgálnak: a két szélső szorzata plusz-mínusz eggyel tér el a középső négyzetétől.

$b^2 \pm 1 = a \times c$ 2; 3; 5.

(a=2; b=3; c=5)
2x5=**10**; 3^2=**9.**

Vagy:

3; 5; 8.

(a=3; b=5; c=8)

3x8=**24;** 5^2**=25.**

Ez a **háromszámjegy-szabály**, amelynek a későbbiekben ilyen változatai lesznek: $\mathbf{b^2 \pm n = axc}$.

Számtömbbé alakítva a **±1**

kombinációk:

2^2**-1**=1x3	2x3=**6**=1x5**+1**=3^2-2^2**+1**
3^2**+1**=2x5	3x5=**15**=2x8**-1**=5^2-3^2**-1**
5^2**-1**=3x8	5x8=**40**=3x13**+1**=8^2-5^2**+1**
8^2**+1**=5x13	8x13=**104**=5x21**-1**=13^2-8^2**-1**
13^2**-1**=8x21	13x21=**273**=8x34**+1**=21^2-3^2**+1**

Visszatérve a korább bemutatott (első) **négyszámjegy-szabályhoz**, amint kiegészítjük **ötté**, ismét jelentkezik az ismert **± 1**:

1, ***2***, ***3***, *5*, *8*;

1x5=5

$\underline{2^2=4}$

$3^2=9$ 9=1x8**+**1

2, ***3***, ***5***, *8*, *13*;

2x8=16

$\underline{3^2 \ = 9}$

$5^2 \ =25$ 25=2x13**-**1

3, ***5, 8***, *13*, *21*;

3x13=39

$\underline{5^2 \quad =25}$

$8^2 \quad =64$ 64=3x21**+**1

5, ***8***, ***13***, *21*, *34*;

5x21=105

$\underline{8^2 \quad = \ 64}$

$13^2 =169$ 169=5x34**-**1

Öt másik, pluszt-minuszt váltogató

számtömb:

2x13=3x8**+2**
3x21=5x13**-2**
5x34=8x21**+2**
8x55=13x34**-2**
13x89=21x55**+2**

3x8=2x13**-2**
5x13=3x21**+2**
8x21=5x34**-2**
13x34=8x55**+2**
21x55=13x89**-2**

2x3**-1**=1x5
3x5**+1**=2x8
5x8**-1**=3x13
8x13**+1**=5x21
13x21**-1**=8x34

1x5**+1**=2x3
2x8**-1**=3x5
3x13**+1**=5x8
5x21**-1**=8x13
8x34**+1**=13x21

3x5**+1**=2x13
5x8**+2**=2x21
8x13**-2**=3x34
13x21**+2**=5x55
21x34**-2**=8x89

Léteznek még **±3**-as és **±5**-ös, de **±8**-as és **±13**-as sorozatok is:

2x8**-3**=1x13
3x13**+3**=2x21
5x21**-3**=3x34
8x34**+3**=5x55
13x55**-3**=8x89

2x13**-5**=1x21
3x21**+5**=2x34
5x34**-5**=3x55
8x55**+5**=5x89
13x89**-5**=8x144

2x21**-8**=1x34
3x34**+8**=2x55
5x55**-8**=3x89
x89**+8**=5x114
13x144**-8**=8x233

2x21**+13**=1x55
3x34**-13**=1x89
5x55**+13**=2x144
8x89**-13**=3x233
13x144**+13**=5x377

Plusz-mínusz előjel-játék esetén csupán a négyzetre emelés műveletével két korábbi (és két másik, hasonló logikával játszadozó) számtömb összefésüléséből (és összefésülendéséből) az következik, hogy az eredeti Fibonacci-számsor lesz a végeredmény, a kisebb számok ilyen kombinációjából előállnak a nagyobb számok:

$2^2+1^2=\mathbf{5}$
$3^2-1^2=\mathbf{8}$
$3^2+2^2=\mathbf{13}$
$5^2-2^2=\mathbf{21}$
$5^2+3^2=\mathbf{34}$

$8^2-3^2=\mathbf{55}$
$8^2+5^2=\mathbf{89}$
$13^2-5^2=\mathbf{144}$
$13^2+8^2=\mathbf{233}$
$21^2-8^2=\mathbf{377}$

$2x3^2+1x3=\mathbf{21}$
$2x5^2+1x5=\mathbf{55}$
$2x8^2+2x8=\mathbf{144}$
$2x13^2+3x13=\mathbf{377}$
$2x21^2+5x21=\mathbf{987}$

$2x3^2-1x5=\mathbf{13}$
$2x5^2-2x8=\mathbf{34}$
$2x8^2-3x13=\mathbf{89}$
$2x13^2-5x21=\mathbf{233}$
$2x21^2-8x34=\mathbf{610}$

Hét elemre is alkalmazható ez az előjel-játék: *3x21=**63**; 8^2=**64**; 5x13=**65**; 2x34=**68**;* ebben az esetben a szorzatok közötti különbségekként megkapjuk a minusz*egyet*, mínusz *kettőt*, mínusz *hármat*, mínusz *ötöt*; megjelenik a Fibonacci-számsor belső önmozgása, amely mintha egy szonáta dinamikáját kottázná:

$$\boxed{\boldsymbol{8^2-1}=\underline{63}=3x21=5x13-\mathbf{2}=2x34\mathbf{-5}}$$

Abban az esetben, ha a számsor minden második elemét használjuk, azokból négyes csoportokat alkotva, ilyen szabályszerűség jelentkezik:

1~3~8~21:	1x21**+3**=3x8	21-1=(8-3)**x4**
2~5~13~34:	2x34**-3**=5x13	34-2=(13-5)**x4**
3~8~21~55:	3x55**+3**=8x21	55-3=(21-8)**x4**
5~13~34~89:	5x89**-3**=13x34	89-5=(34-13)**x4**
5~13~34~89:	5x89**-3**=13x34	89-5=(34-13)**x4**
5~13~34~89:	5x89**-3**=13x34	89-5=(34-13)**x4**
8~21~55~144:	8x144**+3**=21x55	144-8=(55-21)**x4**

Sorozatba illeszkedő szám-csoportoknál is váltakozhat két szám közötti összeadás és kivonás, mihelyt azok egy másik szinten is megis-métlődnek, amint az az **5-1** és az **5+1**, valamint a **8-2** és a **8+2**,és az utánuk következőknél megfigyelhető:

2x2=**4**=3+1=5-1
2x3=**6**=5+1=**8-2**
2x5=**10**=**8+2**=*13-3*
2x8=**16**=*13+3*=21-5
2x13=**26**=21+5=**34-8**
2x21=**42**=**34+8**=*55-13*
2x34=**68**=*55+13*=89-21

Néhány agyafúrt furcsaság. Ha az 1~, 2~, 3~, 5~, 8-ból az első három számot egybeírva hozzáadjuk a továbblépéssel keletkező másik három számhoz, megkapjuk a harmadik három elemből álló számcsoportot.

123+
235=
358

(Meg lehet próbálni a 12+23+35+58-cal, de ugyanezt „tudja” a 1321+2134=3455 vagy a 2134+3455=5589 is. Érvényes rájuk az első négyszámjegy-szabály.)

Kombinációk a sorozat első és második öt számjegy-csoportjával (érvényes rájuk is a négyszámjegy-szabály):

~ 12 ~ 23 ~ 35 ~ 58 ~
~ 21 ~ 32 ~ 53 ~ 85 ~
~ 22 ~ 33 ~ 55 ~ 88 ~
~ 21-2=199 ~ 34-3=31 ~ 55-5=50 ~ 89-8=81 ~
~ 13+3=16 ~ 21+1=22 ~ 34+4=38 ~ 55+5=60 ~ 89+9=98
~ 133 ~ 211 ~ 344 ~ 555 ~ 899 ~

Különben maga a **23**-as szám sorozata is meglepő sajátosságokat mutat. Ha leírjuk az eredeti Fibonacci-sor első 10 számát, látjuk, hogy abból öt egyjegyű és öt kétjegyű szám. Továbbá azt is, hogy az egyjegyű számok megismétlődnek a kétjegyűek első számjegyeként: **1***3* ~ **2***1* ~ **3***4* ~ **5***5* ~ **8***9*. (Maga a 23 a 2 és a 3 egymáshoz kapcsolása.)

Ha az első öt egyjegyű számot: 1 ~ 2 ~ 3 ~ 5 ~ 8, sorra hozzáadjuk (négyes ugrással) a második öthöz: 13 ~ 21 ~ 34 ~ 55 ~ 89, megkapjuk az~ 1+13=**14** ~ 2+21=**23** ~ 3+34=**37** ~ 55+5=**60** ~ 89+8=**97** ~ sorozatot.

ZÖKKENŐVEL INDULÓ SOROZATOK

De kivonással a **23**-tól és 14-től visszafelé felbukkan a ~ **9** ~ **5** ~ **4**~ **1** ~ is, ami éppen a ~ 8**9** ~ 5**5** ~ 3**4** ~ és a 2**1** második számjegye. (Az 1-et és a 4-et megelőzi a „misztikus” 1**3**-ból a *három*, vele így indíthatunk: 3+1=4; 4+1=5; 5+4=9. Ebben az esetben az első számjegy nagyobb a másodiknál, rendhagyó volta nem más, mint zökkenővel induló sorozat.

Jellemző erre a tíz számból álló sorozatra (amely tovább folytatva szabályos számsort képez), hogy a négyszámjegy-szabály két első változatát kielégíti, illetve a háromszámjegy-szabály **$a x c = b^2 \pm 1$** képletet nem, csak annak **$a x c = b^2 \pm 11$** változatát. (Ez utóbbi **± 11** szintén kimaradt a korábbi levezetésekből.)

Továbbá, hogyha nem az 1-gyel és 4-gyel, hanem a nagyobb 3-mal és a nála kisebb 1-gyel indítjuk a sorozatot: **3 ~ 1 ~ 4 ~ 5 ~ 9 ~ 14**, vagyis „zökkenővel”, akkor az előbb említett három szabályszerűség mindenikét teljesíti a számsor. Ellenőrizve a négyszámjegy-szabályt:

$3x5=15$; $15+1^2+16$; $4^2=16$.
$1x9=9$; $4^2=16$; $9+16=25$; $5^2=25$.
$4x14=56$; $5^2=25$; $56+25=81$; $9^2=81$

Zökkenővel induló sorozatot eredményez a leválasztásos módszer a három jegyű számoknál is, a 14**4** ~ 23**3** ~ 37**7** ~ 6**10** esetében kapjuk a **4 ~ 3 ~ 7 ~ 10** (~17 ~ 27 ~ 44 stb.) számokat. Alkalmazhatók a négyszámjegy-szabályok:

$$axd+b^2= c^2$$

$$\begin{array}{r} 4x10=40+ \\ \underline{3x3=\ 9} \\ 7x7=49 \end{array}$$

$c^2=(a^2+d^2):2-b^2\rightarrow$ $\rightarrow$7x7=49=(16+100):2-

Ezekre is érvényes a háromszámjegy-szabály, amely így módosul:

$$\mathbf{b^2\underline{+}19=axc.}$$

Ugyanezt a sorozatot kapjuk a kétjegyű számok számjegyeinek összeadásából is: 1+3=**4**; 2+1=**3**; 3+4=**7**; 5+5=**10**; 8+9=**17**.

Zökkenővel induló további sorozatok:

~ 9 ~ 1 ~ 10 ~ 11 ~ 21 ~ 32;
~ 9 ~ 2 ~ 11 ~ 13 ~ 24 ~ 37;
~ 9 ~ 3 ~ 12 ~ 15 ~ 27 ~ 42;
~ 9 ~ 4 ~ 13 ~ 17 ~ 30 ~ 47;
~ 9 ~ 5 ~ 14 ~ 19 ~ 33 ~ 52;
~ 9 ~ 6 ~ 15 ~ 21 ~ 36 ~ 57;
~ 9 ~ 7 ~ 16 ~ 23 ~ 39 ~ 62;
~ 9 ~ 8 ~ 17 ~ 25 ~ 42 ~ 67;

Ugyanígy keletkeznek sorozatok a
~ 8 ~ 1 ~ 9 ~ 10 ~ 19; illetve a:
~ 7 ~ 1 ~ 8 ~ 9 ~ 17 ~ ; stb. esetében.

Meg lehet vizsgálni a „zökkenővel” kezdődő sorozatok képletváltozását, azaz, miben különböznek a mégis azonos eredménnyel szolgáló szabályok. Az eredeti összefüggés, a ~ b ~ c ~ d sorozat szabálya: $\mathbf{axd+b^2=c^2}$. A „zökkenővel” induló sorozat: $\mathbf{b \sim a \sim c \sim d_1}$. Ennek a négyszámjegy-szabálya: $\mathbf{bxd_1+a^2=c^2}$. Ebben az esetben a $\mathbf{c^2}$ állandó, de: $\mathbf{b-a=d-d_1}$. „Zökkenős” sorozatok alkothatók az eredeti számsor bármely, három egymást követő számaival, de az így előállított sorozatok is alkalmasak erre.

„Zökkenővel” induló sorozatok képezhetők még az eredeti számsor hármas csoportosításával is, amelyekben helyet cserél a két első szám:

2 ~ **1** ~ **3** ~ _**4**_*~ _7 ~ 11 ~_;
3 ~ **2** ~ **5** ~ _**7**_*~ _12 ~_ 19;
5 ~ **3** ~ **8** ~ _**11**_* ~ _19 ~ 30_;
8 ~ **5** ~ **13** ~ _**18**_* ~ _31 ~ 49_;
13 ~ **8** ~ **21** ~ _**29**_* ~ _50 ~ 79_;
21 ~**13** ~ **34** ~ _**47**_* ~ _81 ~ 128_;

Itt is érvényes a négyszámjegy-szabály:

$$\begin{array}{c} 2x4=8+\\ \underline{1^2=1}\\ 3^2=9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3x7=21+\\ \underline{3^2=\ 9}\\ 5^2=25 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5x11=55+\\ \underline{5^2=25}\\ 8^2=64 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 8x18=144+\\ \underline{8^2=64}\\ 13^2=169 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 13x29=377+\\ \underline{13^2=169}\\ 21^2=441 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 21x47=987+\\ \underline{21^2=441}\\ 34^2=1156 \end{array}$$

Azért figyelemre méltók a fenti vizsgálatok, mert kiderül, hogy az eredeti számsor (**8**-cal induló) minden második elemét osztani lehet az eredeti (*2*-vel induló) számaival:

8/*2=4***;**
21/*3=7***;**
55/*5=11***;**
144/*8=18***;**
377/*13=29***;**
987/*21=47*;
377:*13*=29*;
987:*21*=47*.

Ugyanakkor külön sorozatokat is rejtenek a hármas csoportosítás függőleges oszlopait nézve, mint:

4* ~ 7* ~ 11* ~ 18* ~ 29* ~ 47*;

5 ~ 7 ~ 12 ~ 19 ~ 31 ~ 50 ~ 81;

8 ~ 11 ~ 19 ~ 30 ~ 49 ~ 79;

SZABÁLYOS SZABÁLYTALANSÁGOK

Önmagukra még így reflektálnak a kétjegyű számok: amint kivonjuk a második számjegyeket az elsőkből, kapjuk a **~ -2 ~ -1 ~ 1 ~ 0 ~ 1 ~** sorozatot, amelynek folytatása **~ 1 ~ 2 ~ 3 ~ 5 ~** stb. A hároszámjegy-szabály állandója a $\pm$1.

De az utolsó kétjegyű (8**9**) és az első háromjegyű (14**4**) szám utolsó számjegyeivel is indítható sorozat: **9** ~ **4** ~ 13 ~ 17 ~ 30 ~ 47;érvényesek a négyszámjegy-szabályok, azonban a háromszámjegy-szabály állandója

±101 lesz.

($a \times d + b^2 = c^2$)

9x17=153+
$\underline{4^2 = 16}$=
13^2=169

($a \times c \pm 101 = b^2$)

9x13=117-	4x17=68+
$\underline{101}$=	$\underline{101}$=
4^2=16	13^2=169

Ha összeadjuk a ***89***-et követő első három háromjegyű szám számjegyeit, az eredmény: ~ 1+4+4=**9** ~ 2+3+3=**8** ~ 3+3+7=**17** ~. (Folytatásként: ~ *25* ~ *42* ~ *67* ~ stb.) Alkalmazhatók a négyszámjegy-szabályok. Viszont a háromszámjegy-szabály állandója éppen: **$\underline{+}$*89*** lesz. Amire még az teszi fel az aranykoronát, hogy a 17^2=2***89***. (Hozzá társul a sorozatból a 67^2=44***89***.) Ellenőrizve:

$(a \times d + b^2 = c^2)$

$$\begin{array}{r} 9\times25=225+ \\ \underline{8^2=\ 64}= \\ 17^2=289 \end{array}$$

$(a \times c \underline{+} 89 = b^2)$

$$\begin{array}{r} 9\times17=153- \\ \underline{89}= \\ 8^2=64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\times25=200+ \\ \underline{89}= \\ 17^2=289 \end{array}$$

Furcsa módon alkalmazható a négyszámjegy szabály úgy is, ha előbb a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk számjegyeik szorzatát, majd azokból párosával sorozatot indítunk: 13+1x3=16; 21+2x1=23; 34+3x4=46; 55+5x5=80; 89+8x9=161.

16+**23**=**39**; 23+39=**62**;
39+62=**101**.

Ellenőrizve:

$16 \times 62 = 992 +$ $\underline{23^2 = 529} =$ $39^2 = 1521$	$23 \times 101 = 2323 +$ $\underline{39^2 = 1521} =$ $62^2 = 3844$

23+**46**=**69**; 46+69=**115**; 115+69=**184.**

Ellenőrizve:

$23 \times 115 = 2645 +$ $\underline{46^2 = 2116} =$ $69^2 = 4761$	$46 \times 184 = 8464 +$ $\underline{69^2 = 4761} =$ $115^2 = 13225$

46+**80**=**126**;80+126=**206**;
126+206=**332**.

Ellenőrizve:

46x206= 9476+ $\underline{80^2= 6400}$= 126^2=15876	80x332=26560+ $\underline{126^2=15876}$= 206^2=42436

Azzal a számsorral sem lépünk ki az eddigi képletek hatálya alól, ha a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk saját számjegyeiket: 13+1+3=**17**; 21+2+1=**24**; 34+3+4=**41**; 55+5+5=**65**; 89+8+9=**106**. (A háromszámjegy-szabály állandója ±121.) Több változata létezik a fenti módszernek, közülük a következő a számsor egyjegyű számainak a kilenccel való szorzata: 13-(1+3)=**9**; 21-(2+1)=**18**; 34-(3+4)=**27**; 55-(5+5)=**45**;

89-(8+9)=**72**. Rájuk is illik a

négyszámjegy-szabály:

$9x45=405+$ $\underline{18^2=324}=$ $27^2=729$	$18x72=1296+$ $\underline{27^2= 729}=$ $45^2=2025$

Érdekes, hogy az öt szám közül az utolsó a *72*, első a *9*, közöttük pedig ott a 27. (Ugyanaz a két számjegy fordított sorrendben.) Hatványra emelve a 27 egyenlő lesz *729*-cel. (Háromszámjegy-szabály szerűség.) Háроszámjegy-szabálynál a **$\underline{+}81=9^2$**.

Ellenőrzése:

9x27=243 **~~**18^2=324 **~~** 324-243=**81**;
18x45=810 **~~** 27^2=729 **~~** 810-729=**81**;
27x72=1944 **~~** 45^2=2025**~~**2025-1944=**81**.

9x72=648; 27^2=729; 729-648=**81**.

Ez egy **átugrásos ötszámjegy-szabály**, ami a háromszámjegy-szabály párja, mert együtt: **$axe=c^2\pm1=bxd$**. Egyszerűsítve, a **c^2** nélkül: **$axe\pm1=bxd\pm1$; $axe-1=bxd+1$; $axe+1=bxd-1$.**

Azonos a plusz-mínusz a hároszámjegy-szabály és az átugrásos ötszámjegy-szabály szerint olyan sorozatnál is, amit a 89 után következő három háromjegyű szám első számjegyének elhagyásával nyerünk:

1**44** ~ 2**33** ~ 3**77**: >>> **44** ~ **33** ~ **77** ~ 110 ~ 187 ~ 297.

$44x77=3388-$ $\underline{33^2=1089}$ 2299	$44x187=8228-$ $\underline{77^2=59293}$ 2299	$110^2=12100-$ $\underline{33x297=9801}$ 2299

Szorzással-kivonással induló és hatványokig érkező két számtömb:

1x2=*2* …………

>>*6-2*=**4**=2^2……………………….

2x3=*6* ……….. >> **9-4**=5=1x5

>>*15-6*=**9**=3^2………………….

3x5=*15* ………. >> **25-9**=16=2x8

>>*40-15*=**25**=5^2…………….

5x8=*40* ………. >>**64-25**=39=3x13

>>*104-40*=**64**=8^2……….

8x13=*104* …… >>**104-64**=105=5x21

>>*273-104*=**169**=13^2…

13x21=*273* … >>**441-169**=272=8x34

>>*714-273*=**441**=21^2….

21x34=*714* …

$2x3-1x2=2^2$	**(*)** $3^2-2^2=1x5$
$3x5-2x3=3^2$	$5^2-3^2=2x8$
$5x8-3x5=5^2$	$8^2-5^2=3x13$
$8x13-5x8=8^2$	$13^2-8^2=5x21$

8:2-1=**3** 8:2+1=**5**	(8:2=4)
($2x2^2$=**8**)	4-1=**3** 4+1=**5**
34:2-2^2=**13** 34:2+2^2=**21**	(**34**:2=17)
(2x17=**34**)	17-4=**13** 17+4=**21**
144:2-17=**55** 144:2+17=**89**	(**144**:2=72)
(2x72=**144**)	72-17=**55** 72+17=**89**
610:2-72=**233** 610:2+72=**377**	(**610**:2=305)
(2x305=**610**)	305-72=**233** 305+72=**377**
2584:2-305=**987** 2584:2+305=**1597**	(**2584**:2=1292)
	1292-305=**987** 1292+305=**1597**
($2^3+3^2=17$) *($2^3x3^2=72$)*	Stb.

Rációt kerülget a fenti két számoszlop.

Szintén zsonglőr szerű akrobatikával lep meg a következő számtömb, lüktetése annyira lenyűgöző, hogy muszáj hoszabban felírni, továbbá hozzátenni még három rokonát, amelyet egy szabadabb variációjú követ:

2x2-1=**3** 2x2+1=**5** 2x3-1=**5** 2x3+2=**8** 2x5-2=**8** 2x5+3=**13** 2x8-3=**13** 2x8+5=**21** 2x13-5=**21** 2x13+8=**34**	2x21-8=**34** 2x21+13=**55** 2x34-13=**55** 2x34+21=**89** 2x55-21=**89** 2x55+34=**144** 2x89-34=**144** 2x89+55=**233** 2x144-55=**233** 2x144+89=**377**

$8x3-3=21$ $8x3+2x5=34$ $8x5-2x3=34$ $8x5+3x5=55$ $8x8-3x3=55$ $8x8+5x5=89$ $8x13-3x5=89$ $8x13+5x8=144$ $8x21-3x8=144$ $8x21+3x13=233$

$5x3-2=13$ $5x3+2x3=21$ $5x5-2x2=21$ $5x5+3x3=34$ $5x8-2x3=34$ $5x8+3x5=55$ $5x13-2x5=55$ $5x13+3x8=89$ $5x21-2x8=89$ $5x21+3x13=144$

$3x2-1=5$ $3x2+2x1=8$ $3x3-1=8$ $3x3+2x2=13$ $3x5-2=13$ $3x5+2x3=21$ $3x8-3=21$ $3x8+2x5=34$ $3x13-5=34$ $3x13+2x8=55$

$2x2-1x1=3$ $2x3-1x1=5$ $2x5-1x2=8$ $3x5-1x3=13$ $3x8-1x3=21$ $5x8-2x3=34$ $8x8-3x3=55$ $8x13-3x5=89$ $8x21-3x8=144$ $13x21-5x8=233$ $13x34-5x13=377$ $21x34-8x13=610$ $21x55-8x21=987$

A 2-vel való szorzás ötszámjegy-szabályt eredményez: 2xb+a+c=e

2x2+1+3=**8**
2x3+2+5=**13**
2x5+3+8=**21**
2x8+5+13=**34**
2x13+8+21=**55**
2x21+13+34=**89**

KÉT PRÍMSZÁMUNK*:* a **7** és a **11** is bevonható az aranymetszés sorozat alakításába:

7x5-1=**34**
7x*8*-*1*= **55**
7x13-*2*= **89**
7x21-*3*= **144**
7x34-*5*= **233**
7x55-*8*= **377**
7x89-*13*=**610**

2X11-*1*= **21**

21X11+*2*= **233**

3X11+*1*= **34**

34X11+*3*= **377**

5X11+*0*= **55**

55X11+*5*= **610**

8X11+*1*= **89**

89X11+*8*= **987**

13X11+*1*=**144**

144X11+*13*=**1597**

Ismétlés: Ilyen érdekes, önszerveződő számtömbök arra szolgálhatnak, hogy zeneművek belső tagoltságát többféle szakaszolással lehessen elemezni, például, ha **55** egységből áll, ahány változatban előfordult a fentiekben az **55**, annyi részegység szerint lehet vizsgálni.

Jöjjön pár példa:

.

8x5+5x3=**55**;
8x5+3x5=**55**;
5x8+3x5=**55**;
5x8+5x3=**55;**
2x21+13=**55**;
2x34-13=**55**;
2^2X13+3=**55**;
3x13+2x8=**55**

Így is tagolható az **55**, ezekből a változatokból az a szerencsésebb, amelyik (esetleg több) számtömbből származik.

****

**

*

Valamikor egy tudományos adást követve megjegyeztem egy párbeszédet, miszerint egy matematikus összeállította a prímszámok grafikonját, amit ebédszünetben megmutatott egy fizikusnak, aki felismerte benne az elektronpályák szabályszerűségeit. Amennyiben a prímszámok sorozata az atomi szintű világhoz tartozik, a Fibonacci számsor egy nagyságrenddel nagyobb mozgásformákhoz tartozik, sőt a psziché folyamataiban is felbukkan, annak valamilyen leképezése.

A négyszámjegy-szabály kerete ráillik a szabályos mértani testek elemeinek összegezésére. Például a szabályos mértani testek jellemzői is sorba állíthatók a kiterjedés növekvő sorrendje szerint: kezdve a kiterjedés nélküli **C**súcsoktól, az egydimenziós **É**leken, majd a kétdimenziós **L**apokon át a háromdimenziós **T**estig, ami a következő „egyenlettel" írható le: **C**-**É**+**L**-**T**=**1** (ami kocka esetében: **8-12+6-1=1**). Itt az egydimenziós él és a háromdimenziós test előtt áll a negatív előjel, a másik két alkotó elem (pozitív szám és) pozitív előjelű, együtt szintén (egymásba ékelődő) két ellentétes ellentétpárként viselkednek. Az a szabályszerűség, ami a szabályos mértani testek elemeinek három dimenziós rendezettségében kimutatható, egy harmadik megnyilvánulásban, a lélek dimenzióiban lezajló történéseknél sincs másként.

C. G. Jung az **Analitikus pszichológiá**jában leírja, hogy „*A tudattalan a természet, és a természet soha nem hazudik*”. (208) Továbbá a négyes tagoltságról (amely szerinte **3+1**) a következő a véleménye: „*A kvaternitás olyan archetípus, amely úgyszólván univerzális jelenség.*

Logikus előfeltétele mindennemű teljességigénynek. Ha ilyen ítéletet akarunk alkotni, annak négyes aspektusúnak kell lennie. Ha például a horizont egészét akarjuk meghatározni, akkor a négy égtájat nevezzük meg. Mindig négy elem van, négy elsődleges minőség, négy szín, négy kaszt Indiában, négy utat ismer a buddhizmus a szellemi fejlődés lehetőségeit illetően. Ezért a pszichikus orientálódásnak is négy pszichológiai aspektusa van, ezeken túl semmi alapvetőt nem lehet többé kifejteni. Szükségünk van az orientálódáshoz egy olyan funkciónak, *amely azt konstatálja, hogy valami van (érzékelés), egy másodikra, amely megállapítja, hogy mi az (gondolkodás), egy harmadik funkcióra, amely közli, hogy vajon megfelel-e ez nekünk vagy sem, elfogadjuk-e vagy sem (érzés) és egy negyedik funkcióra, amely tájékoztat róla, hogy a dolog honnan jött és merre tart (intuíció). Ezen túlmenően semmi többet nem lehet mondani. (…) Egy kvaternitásnak vagy kvaterniónak gyakran 3+1 a szerkezete, amennyiben az egyik érték kivételes helyet tölt be és eltérő jellegű. (…) Ha a negyedik érték a másik háromhoz* *társul, létrejön az >>Egység<<, amely a teljességet jelképezi. Az analitikus pszichológiában nem ritka az >>alacsonyabb rendű<< funkció (vagyis az a funkció, amelyik nem áll az embernek tudatos rendelkezésére), amely ezt a >>negyedik<<-et testesíti meg. A szóban forgó funkció integrálása a tudatba az individuációs folyamat egyik fő feladata."* (1987; 444)

A kvaternitás teljességigényének megfelelő negyedik elem *a* négyszámjegy-szabályból a $\mathbf{c}^2$.

Valószínű, hogy a Fibonacci számsor valamilyen titkos térépítő programjának következménye lehet, hogy tíz ujjunk van, illetve, mivel a kezünktől tanultuk a tízes számrendszert, emez ezért tud ennyire idomulni a számsor szeszélyeihez. Körré csukódó adekvátságok.

*** Gyergyószentmiklós, 2017 szeptembere; 2019 májusa ***

Burján-Gál Emil *

FÜGGELÉK

Lajos Árpád aradi számítástechnikus szíves munkájának köszönhető a már megismert „***első négyszámjegy-szabálynak***”, az $\mathbf{axd+b^2=c^2}$ képlenek a matematikai levezetése, bizonyítása, átirata (Facebookon közölve):

A bizonyítási eljárás egyik nagyon kézenfekvő módszere ebben a kérdéskörben a matematikai indukció. Ennek a módszertani algoritmusnak a lényege az, hogy ismerünk egy képletet, amit igaznak sejtünk és tudjuk, hogy bizonyos, véges megfigyelés alapján az i-dik elemre igaz a minta. Ezt ismerve, átlátva nekünk mindössze azt kell kétséget kizáróan kimutatnunk, hogy abból, hogy az i-dik elemre ráhúzható a minta kétséget kizáróan következik, hogy az i+1 - dik elem-re is ráhúzható a minta. Ebben is szívesen segítek. Ha ezeket a képleteket kimutatjuk, akkor a dolgozat már tudományosan publikálható lesz és érdemes megkérni valakit, hogy nézze meg, hogy a talált minták és képletek közül melyek innovációk és melyek voltak már felfedezve öntől függetlenül egy másik kutató által. Ezek után érdemes publikálni egy tudományos lapban az eredményeket. Miután a képleteket előkészítettük egy korábbi kutatótársamat megkérhetem, hogy nézzen utána a képletek egyediségének.A számtömbök jelenlegi formájukban megfigyelések és nem tudom, hogy így lehet-e publikálni. Úgy vélem, hogy először kell a képleteket felírni és kidolgozni, utána ellenőrizni kell, hogy mi innováció és ez után válik tudományos eredménnyé. Ezért arra kérném, hogy válasszon egy példát, egy számtömböt, amit kielemezhetünk közösen, hogy vigyük végig azon a folyamaton, amelyben megfigyelésből tudományos ténnyé válik. „Kezdjük az egyszerűbb négyszámjegy-szabály képlettel”. A szavakban leírt gondolati minta (azaz az első „***négyszámjegy-szabály***”) így néz ki:

F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = F(i + 2) * F(i + 2)

az i-dik szám a sorozatban szorozva a hárommal utána következővel, majd ezt összeadva az utána következő négyzetével megkapjuk a kettővel utána levő négyzetét.

legyen i = 1

F(i) = 1 F(i + 1) = 2 F(i + 2) = 3 F(i + 3) = 5

F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = 1 * 5 + 2 * 2 = 9

F(i + 2) * F(i + 2) = 3 * 3 = 9

Most, hogy a mintát ismerjük, meg kell határozzuk, hogy milyen i-re várjuk el, hogy a minta működjön

Kipróbálom i = 2-re is

F(i) = 2 F(i + 1) = 3 F(i + 2) = 5 F(i + 3) = 8

F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = 2 * 8 + 3 * 3 = 25

F(i + 2) * F(i + 2) = 25

Eddig bíztató a minta. Létezik néhány szolíd megfigyelés, amire működik a sejtésünk szerinti minta, azt akarjuk megvizsgálni, hogy ha F(i)-re igaz, akkor ebből következik-e, hogy F(i + 1) - re is igaz, mert ha ezt igazolni tudjuk, akkor a minta immár tudományos, általánosan érvényes tény a matematikai indukció elve alapján. A dolgozatban szerepel, hogy a Fibonacci sorozatról van szó abban a kontextusban, ha megemlíti, hogy F-el rövidíti a sorozat valahanyadik elemét és azt, hogy a hanyadik elem függvényparaméterként adjuk át, akkor úgy gondolom, hogy érthető.

Tudjuk, hogy F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = F(i + 2) * F(i + 2)
azt szeretnénk bizonyítani, hogy ebből az következik, hogy

F(i + 1) * F(i +4) + F(i + 2) * F(i + 2) =
F(i + 3) * F(i + 3)

Induljunk ki az egyenlet bal oldalából és jussunk arra, hogy megegyezik a jobb oldallal (bizonyíték) vagy különbözik tőle (cáfolat).

F(i + 1) * F(i + 4) + F(i + 2) * F(i + 2) =
= F(i + 1) * F(i + 4) + F(i) (F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) =
= F(i + 1) * [F(i + 4) + F(i + 1)] + F(i) * F(i + 3) =
= F(i + 1) * [F(i + 2) + F(i + 3) + F(i + 1)] + F(i) * F(i + 3)
= F(i + 1) * [F(i + 3) + F(i + 3)] + F(i) * F(i + 3)
= 2 * F(i + 1) * F(i + 3) + F(i) * F(i + 3)

$$= F(i + 3) * [2 * F(i + 1) + F(i)]$$

$$= F(i + 3) * [F(i + 1) + F(i + 1) + F(i)]$$

$$= F(i + 3) * [F(i + 1) * F(i + 2)]$$

$$= F(i + 3) * F(i + 3)$$

Ez az, amit bizonyítani akartunk.

". Ugyanezzel a módszertannal valószínűleg az összes minta, vagy nagy többségük ellenőrizhető és bizonyítható vagy cáfolható.” (*2017. Augusztus 13*.)

(“Jól néz ki, majd még kell szerkeszteni rajta, de az nem sürgős.”)

A levezetéssel kapcsolatban röviden elmagyarázom a lépéseket.

Először felírtam a kiindulópontot, oda behelyettesítettem az $F(i + 2) * F(i + 2)$ értékének ismert mintáját, ami a korábbi megfigyelések alapján tényszerű.

Kiemeltem $F(i + 1)$-etfelhasználtam, hogy $F(i + 2) + F(i + 1) = F(i + 3)$

Összevontam $F(i + 3) + F(i + 3) = 2F(i + 3)$ alapjánkiemeltem $F(i + 3)$-mat a nagy zárójelben $2F(i + 1) + F(i) = F(i + 3)$, hiszen $F(i + 1) + F(i) = F(i + 2)$ és ezért $2F(i + 1) + F(i) = F(i + 2) + F(i + 1) = F(i + 3)$

Ezzel megkaptam, hogy a jobb oldali zárójel is $F(i + 3)$, azt szorozva a baloldali zárójellel, $F(i + 3)$ - mal

megkaptam az egyenlet jobb oldalát, tehát a sejtés beigazolódott, általános érvényű tudományos tény.
A többi esetben is hasonlóan kell eljárjunk, F(i) függvényében felírjuk a mintát, majd a megfigyelésekből kiindulva igazoljuk azt, hogy egy i-dik elemre tetszőleges i esetén ha teljesül, akkor a következőre is teljesül, ezzel egy végtelen következtetési lánccal a bizonyítás a teljes feladatteret bejárja.
Az sem baj, ha egy mintáról kiderül, hogy nem helyes, akkor viszont rá lehet mutatni, hogy az összefüggés

csak látszólagos, az is fontos tudományos eredmény.

A lényeg az, hogy minden felvetést górcső alá kell vennünk és bármi is legyen a kiértékelés eredménye, azzal hasznos munkát végeztünk.

$$F(i)\cdot F(i+3) + F^2(i+1) = F^2(i+2) \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} F(i+1)\cdot F(i+4) + F^2(i+2) = F^2(i+3)$$

$$F(i+1)\cdot F(i+4) + F^2(i+2) =$$

$$= F(i+1)\cdot F(i+4) + F(i)\cdot F(i+3) + F^2(i+1) =$$

$$= F(i+1)\cdot[F(i+4) + F(i+1)] + F(i)\cdot F(i+3) =$$

$$= F(i+1)\cdot[F(i+2) + F(i+3) + F(i+1)] + F(i)\cdot F(i+3) =$$

$$= F(i+1)\cdot[F(i+3) + F(i+3)] + F(i)\cdot F(i+3) =$$

$$= 2\cdot F(i+1)\cdot F(i+3) + F(i)\cdot F(i+3) =$$

$$= F(i+3)\cdot[2\cdot F(i+1) + F(i)] =$$

$$= F(i+3)\cdot[F(i+1) + F(i+1) + F(i)] =$$

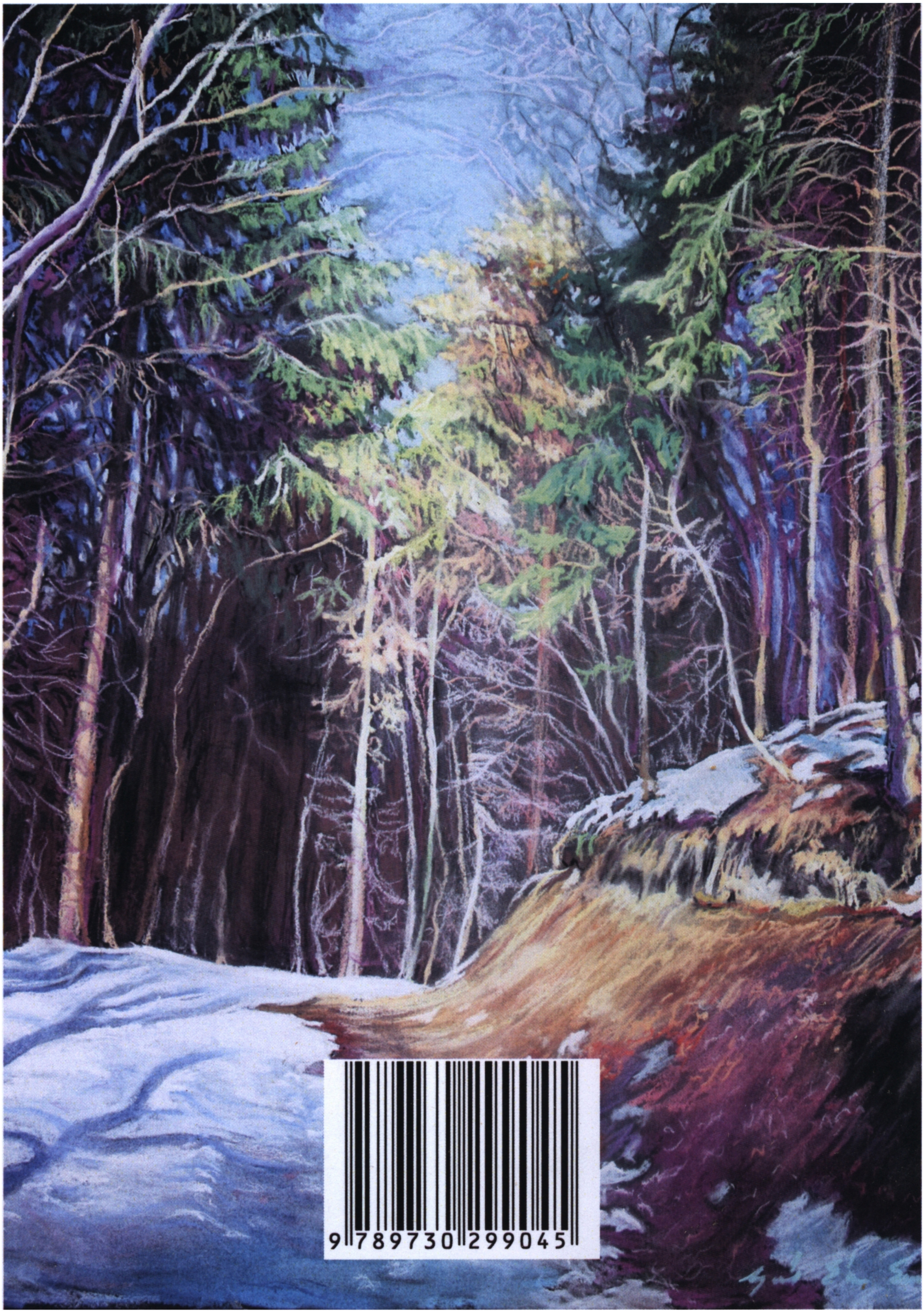
$$= F(i+3)\cdot[F(i+1) + F(i+2)] =$$

$$= F(i+3)\cdot F(i+3) =$$

$$= F^2(i+3)$$

Megjelent a Mark House Kft. Támogatásával 2017-ben;

Második kiadás: 2019



9 789730 299045