

Burján Gál Emil

Leonardo Pisano számai

i

Fibonacci variációk



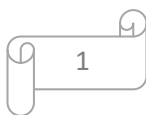
BURJÁN-GÁL EMIL

LEONARDO PISANO SZÁMAI

~ FIBONACCI VARIÁCIÓK ~

GYERGYÓSZENTMIKLÓS

2019



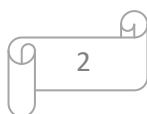
A borítót tervezte

Burján Gál Enikő

(Címlapon: a szerző kompozícióját
ábrázoló fénykép; hátoldalon: Gál Éva
Emese grafikája)

<honlapjaink>
{emil.burjanganal.ro}
{evaemese.burjanganal.ro}
{eniko.burjanganal.ro}

ISBN



MEK-17568

**Leonardo Pisano számai / Burján-Gál
Emil**

tanulmány(ok) ; magyar

Illusztrált.

eredeti kiadvány: Leonardo Pisano számai
/ Burján-Gál Emil

Gyergyószentmiklós: Mark House Kft.,
2017

ISBN 978 606 8666 56 3

Számelmélet

*Fibonacci-sorozat, rekurzív sorozat,
számsorozat, számelmélet, aranymetszés*

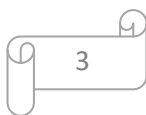
MEK-be került: 2017-11-27

URL: <http://mek.oszk.hu/17500/17568>

Jogi közlemény: Jogvédett.

Kiadja a Mark House Kft.

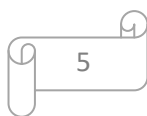
ISBN: 978-606-8666-56-3



© Burján-Gál Emil 2017
Gyergyószentmiklós (Gheorgheni)
Második kiadás: 2019
© Burján-Gál Emil
© **Lajos Árpád (Arad)**

Még-már a mesés múltban élt (a ferde torony megépülése előtt) egy Leonardo di Pisa, azaz Leonardo Pisano, Bonacci fia, innen a másik neve, a **Fibonacci**, aki 1202-ben sokadszorra felfedezte azt, amit aranymetszésnek nevezünk, azaz Fibonacci számsornak. Olvasható az interneten, hogy a Fibonacci-sorozat első két tagja a 0 és az 1. A következő tagok mindig az őket megelőző két tag összegével egyenlők. (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...)

A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjainak hányadosából képzett

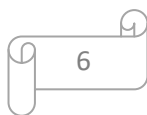


sorozat ($1/1, 2/1, 3/2, 5/3, \dots$)
határértéke éppen az aranymetszés
aránya.

Még néhány adat:

>>A Fibonacci sorozat egyre
nagyobb sorszámú elemeinek
hányadosa egy állandó számhoz, az
aranymetszéshez tart. Már az ókori
görögök is ismerték, és
aranymetszésnek, „isteni aránynak”
hívták.<<

[https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci](https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Baum)
-Baum.



.<<Hemachandra és mestere, Gopala azt is vizsgálta, hogy a rövid és hosszú szótagok miként töltenek ki egy adott időtartamot a szanszkrit költészetben. **Így fedezték fel a matematikai sorozatot, melynek első pontos említése 1150-ből való.** [<http://indiahangja.reblog.hu/fibonacci-sorozat-a-szamtani-sorozatok-kiralya>>](http://indiahangja.reblog.hu/fibonacci-sorozat-a-szamtani-sorozatok-kiralya)

Én magam is verselgetés közben
Magam is verselés közben vettem
észre, hogy hány féle módon
szakaszolható a (nemcsak felező)
nyolcas, valamint a tíz szótagú

sorok. Majd a 13 szótagú sorral is megismételtem. Utána következett az esztétika könyvemben közölt, alább idemásolt **számtömb**.

Ha egymás alá írjuk az összeadás-sorból képzett számsor első 15 elemét és egy mások oszlopba a köztük lévő arányszámot négy tizedesig kiszámolva, tehát ötszámjegyet figyelembe véve, rájövünk, hogy (a nulla nélkül) éppen a tizenharmadik sorban áll be az **1,6180**-as arány, ami a továbbiakban változatlan. Lehetne bárhol, de mintha a maga belső szerkezeti szépségére is figyelne. Még

sok szerkezeti érdekesség fedezhető
fel az aranymetszés sorozatban,
közülük a *Nyelv és esztétikum* című
könyvemben (lásd: *mek.oszk.
hu/14100/14145/index.phtml*) az
alábbi keresztretjvény szerűséget
közöltem:

$$\begin{aligned}8+5+8&=\mathbf{21}=1\times5+2\times8\\13+8+13&=\mathbf{34}=2\times5+3\times8\\21+13+21&=\mathbf{55}=3\times5+5\times8\\34+21+34&=\mathbf{89}=5\times5+8\times8\\55+34+55&=\mathbf{144}=8\times5+13\times8\end{aligned}$$

Későbbi ismeretek
felhasználásával a fenti számtömb így
egészíthető ki:



$$\begin{aligned}
 8+5+8 &= \mathbf{21} = 1 \times 5 + 2 \times 8 = 3 \times 5 + 2 \times 3 = 3 \times 8 \\
 1 \times 3 \ 13+8+13 &= \mathbf{34} = 2 \times 5 + 3 \times 8 = 3 \times 8 + 2 \times 5 = 5 \times 8 - 2 \times 3 \\
 21+13+21 &= \mathbf{55} = 3 \times 5 + 5 \times 8 = 3 \times 13 + 2 \times 8 = 8 \times 8 - 3 \times 3 \\
 4+21+34 &= \mathbf{89} = 5 \times 5 + 8 \times 8 = 3 \times 21 + 2 \times 13 = 13 \times 8 - 5 \times 3 \\
 55+34+55 &= \mathbf{144} = 8 \times 5 + 13 \times 8 = 3 \times 34 + 2 \times 21 = 21 \times 8 - 8 \times 3
 \end{aligned}$$

Találtam az interneten egy, kissé a
Fibonacci sorozat számtömbjeihez
hasonlót:

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{1 \times 8 + 1 = 9} \\
 &\mathbf{12 \times 8 + 2 = 98} \\
 &\mathbf{123 \times 8 + 3 = 987} \\
 &\mathbf{1234 \times 8 + 4 = 9876} \\
 &\mathbf{12345 \times 8 + 5 = 98765} \\
 &\mathbf{123456 \times 8 + 6 = 987654} \\
 &\mathbf{1234567 \times 8 + 7 = 9876543} \\
 &\mathbf{12345678 \times 8 + 8 = 98765432} \\
 &\mathbf{123456789 \times 8 + 9 = 987654321}
 \end{aligned}$$

HATVÁNYOK

Műtermem falán egy oldószerbe mártott széles ecsettel húzott vízszintes csík ilyen, eléggé szabályosnak tűnő lecsorgásokat eredményezett: három hosszú, két rövid, három hosszú, két rövid, három hosszú. Összesen **13** függőleges csík, ami így írható fel: **2^2+3^2** . Sorozattá pedig a következő képpen fejleszthetők:

$2^2+3^2=13...$	$8^2+13^2=233$
$3^2+5^2=34...$	$13^2+21^2=610$
$5^2+8^2=89 ...$	$21^2+34^2=1597$

Az átugrott számokat előállítani így lehet: $34-13=21$; $(3^2+5^2)-(2^2+3^2)=5^2-2^2$:

$5^2-2^2=21....$	$21^2-8^2=377$
$8^2-3^2=55....$	$34^2-13^2=987$
$13^2-5^2=144...$	$55^2-21^2=2574$

Létezik olyan számtömb-összefüggés, amelyben az eredeti számsor és az **átugrásos** egy-egy oszlopban egymás mellett van, köbre emeléskor kettős az átugrás:

(*) $3^2=8+1^2$
$5^2=21+2^2$
$8^2=55+3^2$
$13^2=144+5^2$
$12^2=377+8^2$
$34^2=987+13^2$

$2^3+3^3-1^3=34$
$3^3+5^3-2^3=144$
$5^3+8^3-3^3=610$
$8^3+13^3-5^3=2584$
$13^3+21^3-8^3=4181$
$21^3+34^3-13^3=6765$

$$\begin{aligned}
 13^2 - 2^2 &= 169 - 4 = 165 = 3 \times \mathbf{55} \\
 21^2 - 3^2 &= 441 - 9 = 432 = 3 \times \mathbf{144} \\
 34^2 - 5^2 &= 1156 - 25 = 1131 = 3 \times \mathbf{377} \\
 55^2 - 8^2 &= 3025 - 64 = 2961 = 3 \times \mathbf{987} \\
 89^2 - 13^2 &= 7821 - 169 = 7752 = 3 \times \mathbf{2584}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5^2 - 3^2 &= \mathbf{2 \times 8} \\
 8^2 - 5^2 &= \mathbf{3 \times 13} \\
 13^2 - 8^2 &= \mathbf{5 \times 21} \\
 21^2 - 13^2 &= \mathbf{8 \times 34} \\
 34^2 - 21^2 &= \mathbf{13 \times 55} \\
 55^2 - 34^2 &= \mathbf{21 \times 89}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1^2 + 5^2 &= 2 \times \mathbf{13} = 2 \times (2^2 + 3^2) \\
 2^2 + 8^2 &= 2 \times \mathbf{34} = 2 \times (3^2 + 5^2) \\
 3^2 + 13^2 &= 2 \times \mathbf{89} = 2 \times (5^2 + 8^2) \\
 5^2 + 21^2 &= 2 \times \mathbf{233} = 2 \times (8^2 + 13^2) \\
 8^2 + 34^2 &= 2 \times \mathbf{610} = 2 \times (13^2 + 21^2)
 \end{aligned}$$

A csillaggal (*) megjelölt számtömb
később még előfordul.

Kiemelhetjük a számsor minden negyedik elemét is, ekkor a közöttük jelentkező arányszám 6,853 lesz, ami azonos az $1,618^4$ hatvánnyal. Ebben az átugrásos számsorban: 1 ~ 8 ~ 55 ~ 377 ~ 2584 (közöttük helyezkedik el a 3, a 21, a 144 és a 987) még a következő két szabályszerűség figyelhető meg:

$$\begin{aligned} 1+8=9 &= \mathbf{3 \times 3}; \\ 8+55=63 &= \mathbf{3 \times 21}; \\ 55+377=432 &= \mathbf{3 \times 144}; & ; \\ 610+4187=4797 &= \mathbf{3 \times 1597}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2+13=15 &= \mathbf{3 \times 5}; \\ 13+89=102 &= \mathbf{3 \times 34}; \\ 89+610=699 &= \mathbf{3 \times 233}; \\ 987+6765=7752 &= \mathbf{3 \times 2584}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3+21 &= 24 = \mathbf{3 \times 8}; \\
 21+144 &= 165 = \mathbf{3 \times 55}; \\
 144+987 &= 1131 = \mathbf{3 \times 377}; \\
 377+2584 &= 2961 = \mathbf{3 \times 987};
 \end{aligned}$$

A második szabályszerűség két,
egymást kiegészítő változatban:

$$\begin{aligned}
 1^2+8 &= \mathbf{9} = 3^2 \\
 3^2+55 &= \mathbf{64} = 8^2 \\
 8^2+377 &= \mathbf{441} = 21^2 \\
 21^2+2584 &= \mathbf{3025} = 55^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^2+21 &= \mathbf{25} = 5^2 \\
 5^2+144 &= \mathbf{169} = 13^2 \\
 13^2+987 &= \mathbf{1156} = 34^2 \\
 34^2+6365 &= \mathbf{7921} = 89^2
 \end{aligned}$$

Vagy:

$$\begin{aligned}
 1 \times 3 + 1 &= 4 = 2^2 \\
 3 \times 8 + 1 &= \mathbf{25} = 5^2 \\
 8 \times 21 + 1 &= \mathbf{169} = 13^2 \\
 21 \times 55 + 1 &= \mathbf{1156} = 34^2
 \end{aligned}$$

NÉGYSZÁMJEGY-SZABÁLYOK

Hogyha a számsor egymásra
következő **négy** elemét vizsgáljuk,
velük ilyen művelet végezhető: **1; 2; 3;**
5; 8; 13; 21; 34 sorozat **első négy**
számából (**1, 2, 3, 5**) ha a legkisebbet
összeszorozzuk a legnagyobbbal és ezt
hozzáadjuk a második szám
négyzetéhez, az eredmény azonos
lesz a harmadik szám négyzetével:

$$1 \times 5 = 5; 5 + 2^2 = 3^2;$$
$$\text{vagyis } 5 + 4 = 9; 3^2 = 9.$$

A következő négy kiválasztott
számjegy a **8; 13; 21; 34**.

$$\begin{array}{r} 8 \times 34 = 272 + \\ \underline{13^2 = 169} = \\ 21^2 = 441. \end{array}$$

Algebrailag: $axd + b^2 = c^2$; illetve
 $c^2 - b^2 = axd$; vagy: $c^2 = b^2 + axd$. A
korábban kialakított rendhagyó
számsorok legtöbbje eleget tesz
ennek az **első négyszámjegy-**
szabály nevű feltételnek, amely egy
másik változatban, mint **második**
négyszámjegy-szabály is megjelenik:
 $c^2 = (a^2 + d^2) : 2 - b^2$. ~~(Ha ismerné a
szövegszerkesztőm a gyökjelt, a c^2

egyszerűsíthető lenne c-re.)~~(Az első négyszámjegy-szabályt elemzi a **Függelék.**) Meglepő, hogy ez a két négyszámjegy-szabály érvényes a sorozat első 13 számjegyére is, ahol még nem jelentkezik az 1,61803398874989484820-as arányszám, ettől független, általánosabb érvényű, végtelen tizedes tört helyett egész számokat alkalmaz. Sőt, akkor is érvényes, ha így indul a sorozat:

~ 1 ~ 1 ~ 2 ~ 3 ~

Furcsa módon alkalmazható a négyszámjegy szabály úgy is, ha, miután a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk számjegyeik szorzatát,

majd azokból párosával sorozatot
indítunk: $13+1 \times 3=16$; $21+2 \times 1=23$;
 $34+3 \times 4=46$; $55+5 \times 5=80$; $89+8 \times 9=161$.

$$\mathbf{16+23=39; 23+39=62;}$$

$$\mathbf{39+62=101.}$$

Ellenőrizve:

$16 \times 62 = 992 +$ $\underline{23^2 = 529 =}$ $39^2 = 1521$	$23 \times 101 = 2323 +$ $\underline{39^2 = 1521 =}$ $62^2 = 3844$
---	--

$$\mathbf{23+46=69; 46+69=115;}$$

$$\mathbf{115+69=184.}$$

Ellenőrizve:

$23 \times 115 = 2645 +$ $\underline{46^2 = 2116 =}$ $69^2 = 4761$
$46 \times 184 = 8464 +$ $\underline{69^2 = 4761}$ $115^2 = 13225$

$$46+80=126; 80+126=206;$$

$$126+206=332.$$

Ellenőrizve:

$$46 \times 206 = 9476 +$$

$$\quad \underline{80^2 = 6400} =$$

$$126^2 = 15876$$

$$80 \times 332 = 26560 +$$

$$\quad \underline{126^2 = 15876} =$$

$$206^2 = 42436$$

Azzal a számsorral sem lépünk ki az eddigi képletek hatálya alól, ha a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk saját számjegyeiket: $13+1+3=17$;
 $21+2+1=24$; $34+3+4=41$; $55+5+5=65$;
 $89+8+9=106$. (A később rögzített háromszámjegy-szabály állandója ± 121 .) Több változata létezik a fenti módszernek, közülük a következő a számsor egyjegyű számainak a

(korábban már felbukkant) kilenccel
 való szorzata: $13-(1+3)=\mathbf{9}$; $21-(2+1)=\mathbf{18}$; $34-(3+4)=\mathbf{27}$; $55-(5+5)=\mathbf{45}$;
 $89-(8+9)=\mathbf{72}$. Rájuk illik a
 négy számjegy-szabály:

$$\begin{array}{r} 9 \times 45 = 405 + \\ \underline{18^2 = 324} = \\ 27^2 = 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \times 72 = 1296 + \\ \underline{27^2 = 729} = \\ 45^2 = 2025 \end{array}$$

Érdekes, hogy az öt szám közül az
 utolsó a 72, első a 9, közöttük pedig
 ott a 27. (Ugyanaz a két számjegy
 fordított sorrendben.) Hatványra
 emelve a 27 egyenlő lesz 729-cel.
 (Háromszámjegy-szabály szerűség.)

Lehet kísérletezni ezzel is:

$$13-1=\mathbf{12}; 21-2=\mathbf{19}; 34-3=\mathbf{31}; 55-5=\mathbf{50};$$

$$89-8=\mathbf{81}.$$

(Itt a háromszámjegy-szabály
állandója ± 11 .)

Visszatérve a második négyszámjegy-szabály nevű feltételhez: $c^2=(a^2+d^2):2-b^2$, ebben az az érdekes, hogy amikor összeadjuk a sorozat bármely **a** és **d** számát, mindig páros számot kapunk, ugyanígy lesz négyzetre emelésükkor is. Továbbá az így nyert páros számok elosztva kettővel a sorozat valamely, de minden második számát eredményezik, eme számtömb kiegészítő változata is kitalálható.

Két, korábban bemutatott számtömb
ismétlése:

$1^2+5^2=2\times\mathbf{13}$	$8^2-1^2=3\times\mathbf{21}$
$2^2+8^2=2\times\mathbf{34}$	$13^2-2^2=3\times\mathbf{55}$
$3^2+13^2=2\times\mathbf{89}$	$21^2-3^2=3\times\mathbf{144}$
$5^2+21^2=2\times\mathbf{233}$	$34^2-5^2=3\times\mathbf{377}$
$8^2+34^2=2\times\mathbf{610}$	$55^2-8^2=3\times\mathbf{987}$

Van még egy harmadik és egy
negyedik négyszámjegy-szabály is,
ilyen képlettel: **$a+d=2c$** ; illetve: **$d-$
 $a=2b$** . Ebben a két esetben a négy
számjegy-sorból a második, illetve a
harmadik elem kimarad.

Ezekkel sajátos „középarányt” is ki
lehet számítani. Ha kiemelünk a
sorozatból négy egymás utáni számot

(a, b, c, d), ugyanakkor ha (kettős átugrással) összeadjuk a legkisebbet a legnagyobbval (a+d), megkapjuk a harmadik (c) tag kétszeresét: **$a+d=2c$** .

És megkapjuk a második tag (b) kétszeresét, ha a negyedik tagból kivonjuk az elsőt: **$d-a=2b$** . Ezt a két számtömböt egyesíteni tudjuk, ekkor öt tagból álló szakasz keletkezik a következő képlettel: **$e-b=a+d=2c$** .

$$a+d=2c$$

$$\begin{aligned}1+5 &= 6 = 2 \times 3 \\2+8 &= 10 = 2 \times 5 \\3+13 &= 16 = 2 \times 8 \\5+21 &= 26 = 2 \times 13 \\8+34 &= 42 = 2 \times 21\end{aligned}$$

$$d-a=2b$$

$$\begin{aligned}5-1 &= 4 = 2 \times 2 \\8-2 &= 6 = 2 \times 3 \\13-3 &= 10 = 2 \times 5 \\21-5 &= 16 = 2 \times 8 \\34-8 &= 26 = 2 \times 13\end{aligned}$$

$$\mathbf{e-b=a+d=2c}$$

$$8-2=1+5=2 \times 3$$

$$13+3=2+8=2 \times 5$$

$$21-5=3+13=2 \times 8$$

$$34-8=5+21=2 \times 13$$

$$55-13=8+34=2 \times 21$$

Elcsúszhat a „középarány”
egyharmadra is, amennyiben nem
négy, hanem öt egymást követő
számot elemzünk. Ilyenkor **$a+e=3c$**
lesz az eredmény:

$$1+8=3 \times 3$$

$$2+13=3 \times 5$$

$$3+21=3 \times 8$$

$$5+34=3 \times 13$$

$$8+55=3 \times 21$$

Nem illik a mostaniak közé, de hasonlít rájuk a következő két összetartozó számtömb, az első a **négyszámjegy-szabály** ötödik változata, a másik **ötszámjegy-szabálynak** felel meg:

$c^2 + a^2 = b \times d$	$c^2 - a^2 = e$
$3^2 + 1^2 = 2 \times 5$	$3^2 - 1^2 = 8$
$5^2 + 1^2 = 2 \times 13$	$5^2 - 2^2 = 21$
$8^2 + 2^2 = 2 \times 34$	$8^2 - 3^2 = 55$
$13^2 + 3^2 = 2 \times 89$	$13^2 - 5^2 = 144$
$21^2 + 5^2 = 2 \times 233$	$21^2 - 8^2 = 377$
$34^2 + 8^2 = 2 \times 610$	$34^2 - 13^2 = 987$

Van kivonásokon alapuló, ötös csoportokat is tartalmazó számtömb

is, a következő ötszámjegy-képlettel:

$$2d-b=e=3c-a.$$

$$2 \times 2 - 1 = 3$$

$$2 \times 3 - 1 = 5 = 3 \times 2 - 1$$

$$2 \times 5 - 2 = 8 = 3 \times 3 - 1$$

$$2 \times 8 - 3 = 13 = 3 \times 5 - 2$$

$$2 \times 13 - 5 = 21 = 3 \times 8 - 3$$

$$2 \times 21 - 8 = 34 = 3 \times 13 - 5$$

HÁROSZÁMJEGY-SZABÁLYOK;

± 1 ; és

TÖBBSZÁMJEGY-SZABÁLYOK

Hármas számcsoporthal végzett műveletek ilyen érdekességgel szolgálnak: a két szélső szorzata

plusz-mínusz eggyel tér el a középső
négyzetétől.

$$b^2 \pm 1 = a \times c \quad \underline{2}; \underline{3}; \underline{5}.$$

$$(a=2; b=3; c=5) \\ 2 \times 5 = \mathbf{10}; 3^2 = \mathbf{9}.$$

Vagy:

$$\underline{3}; \underline{5}; \underline{8}.$$

$$(a=3; b=5; c=8)$$

$$3 \times 8 = \mathbf{24}; 5^2 = \mathbf{25}.$$

Ez a **háromszámjegy-szabály**,
amelynek a későbbiekben ilyen
változatai lesznek: **$b^2 \pm n = a \times c$** .

Számtömbbé alakítva a **± 1**
kombinációk:

$2^2-1=1 \times 3$	$2 \times 3=6=1 \times 5+1=3^2-2^2+1$
$3^2+1=2 \times 5$	$3 \times 5=15=2 \times 8-1=5^2-3^2-1$
$5^2-1=3 \times 8$	$5 \times 8=40=3 \times 13+1=8^2-5^2+1$
$8^2+1=5 \times 13$	$8 \times 13=104=5 \times 21-1=13^2-8^2-1$
$13^2-1=8 \times 21$	$13 \times 21=273=8 \times 34+1=21^2-3^2+1$

Visszatérve a korább bemutatott (első)
négyszámjegy-szabályhoz, amint
kiegészítjük **ötté**, ismét jelentkezik az
ismert **± 1** :

$1, 2, 3, 5, 8;$	
$1 \times 5=5$	
$\frac{2^2=4}{3^2=9}$	$9=1 \times 8+1$

2, **3**, **5**, 8, 13;

$$2 \times 8 = 16$$

$$\frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$5^2 = 25$$

$$25 = 2 \times 13 - 1$$

3, **5**, **8**, 13, 21;

$$3 \times 13 = 39$$

$$\frac{5^2}{8^2} = \frac{25}{64}$$

$$8^2 = 64$$

$$64 = 3 \times 21 + 1$$

5, **8**, **13**, 21, 34;

$$5 \times 21 = 105$$

$$\frac{8^2}{13^2} = \frac{64}{169}$$

$$13^2 = 169$$

$$169 = 5 \times 34 - 1$$

Öt másik, pluszt-minuszt változató
számtömb:

$$\begin{aligned}2 \times 13 &= 3 \times 8 + 2 \\ 3 \times 21 &= 5 \times 13 - 2 \\ 5 \times 34 &= 8 \times 21 + 2 \\ 8 \times 55 &= 13 \times 34 - 2 \\ 13 \times 89 &= 21 \times 55 + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \times 8 &= 2 \times 13 - 2 \\ 5 \times 13 &= 3 \times 21 + 2 \\ 8 \times 21 &= 5 \times 34 - 2 \\ 13 \times 34 &= 8 \times 55 + 2 \\ 21 \times 55 &= 13 \times 89 - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 3 - 1 &= 1 \times 5 \\ 3 \times 5 + 1 &= 2 \times 8 \\ 5 \times 8 - 1 &= 3 \times 13 \\ 8 \times 13 + 1 &= 5 \times 21 \\ 13 \times 21 - 1 &= 8 \times 34\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \times 5 + 1 &= 2 \times 3 \\ 2 \times 8 - 1 &= 3 \times 5 \\ 3 \times 13 + 1 &= 5 \times 8 \\ 5 \times 21 - 1 &= 8 \times 13 \\ 8 \times 34 + 1 &= 13 \times 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \times 5 + 1 &= 2 \times 13 \\ 5 \times 8 + 2 &= 2 \times 21 \\ 8 \times 13 - 2 &= 3 \times 34 \\ 13 \times 21 + 2 &= 5 \times 55 \\ 21 \times 34 - 2 &= 8 \times 89\end{aligned}$$

Léteznek még ± 3 -as és ± 5 -ös, de ± 8 -as és ± 13 -as sorozatok is:

$$\begin{aligned}2 \times 8 - 3 &= 1 \times 13 \\ 3 \times 13 + 3 &= 2 \times 21 \\ 5 \times 21 - 3 &= 3 \times 34 \\ 8 \times 34 + 3 &= 5 \times 55 \\ 13 \times 55 - 3 &= 8 \times 89\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 13 - 5 &= 1 \times 21 \\ 3 \times 21 + 5 &= 2 \times 34 \\ 5 \times 34 - 5 &= 3 \times 55 \\ 8 \times 55 + 5 &= 5 \times 89 \\ 13 \times 89 - 5 &= 8 \times 144\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 21 - 8 &= 1 \times 34 \\ 3 \times 34 + 8 &= 2 \times 55 \\ 5 \times 55 - 8 &= 3 \times 89 \\ 8 \times 89 + 8 &= 5 \times 144 \\ 13 \times 144 - 8 &= 8 \times 233\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 21 + 13 &= 1 \times 55 \\ 3 \times 34 - 13 &= 1 \times 89 \\ 5 \times 55 + 13 &= 2 \times 144 \\ 8 \times 89 - 13 &= 3 \times 233 \\ 13 \times 144 + 13 &= 5 \times 377\end{aligned}$$

Plusz-mínusz előjel-játék esetén
csupán a négyzetre emelés
műveletével két korábbi (és két másik,
hasonló logikával játszadozó)

számtömb összefésüléséből (és összefésülendéséből) az következik, hogy az eredeti Fibonacci-számsor lesz a végeredmény, a kisebb számok ilyen kombinációjából előállnak a nagyobb számok:

$$2^2+1^2=5$$

$$3^2-1^2=8$$

$$3^2+2^2=13$$

$$5^2-2^2=21$$

$$5^2+3^2=34$$

$$8^2-3^2=55$$

$$8^2+5^2=89$$

$$13^2-5^2=144$$

$$13^2+8^2=233$$

$$21^2-8^2=377$$

$$2 \times 3^2 + 1 \times 3 = 21$$

$$2 \times 5^2 + 1 \times 5 = 55$$

$$2 \times 8^2 + 2 \times 8 = 144$$

$$2 \times 13^2 + 3 \times 13 = 377$$

$$2 \times 21^2 + 5 \times 21 = 987$$

$$2 \times 3^2 - 1 \times 5 = 13$$

$$2 \times 5^2 - 2 \times 8 = 34$$

$$2 \times 8^2 - 3 \times 13 = 89$$

$$2 \times 13^2 - 5 \times 21 = 233$$

$$2 \times 21^2 - 8 \times 34 = 610$$

Hét elemre is alkalmazható ez az előjel-játék: $3 \times 21 = \mathbf{63}$; $8^2 = \mathbf{64}$; $5 \times 13 = \mathbf{65}$; $2 \times 34 = \mathbf{68}$; ebben az esetben a szorzatok közötti különbségekként megkapjuk a minuszegyet, mínusz kettőt, mínusz hármát, mínusz ötöt, megjelenik a Fibonacci-számsor belső önmozgása, amely mintha egy szonáta dinamikáját kottázná:

$$8^2 - 1 = \underline{63} = 3 \times 21 = 5 \times 13 - 2 = 2 \times 34 - 5$$

Abban az esetben, ha a számsor minden második elemét használjuk, azokból négyes csoportokat alkotva, ilyen szabályszerűség jelentkezik:

1~3~8~21:	$1 \times 21 + 3 = 3 \times 8$	$21 - 1 = (8 - 3) \times 4$
2~5~13~34:	$2 \times 34 - 3 = 5 \times 13$	$34 - 2 = (13 - 5) \times 4$
3~8~21~55:	$3 \times 55 + 3 = 8 \times 21$	$55 - 3 = (21 - 8) \times 4$
5~13~34~89:	$5 \times 89 - 3 = 13 \times 34$	$89 - 5 = (34 - 13) \times 4$
5~13~34~89:	$5 \times 89 - 3 = 13 \times 34$	$89 - 5 = (34 - 13) \times 4$
5~13~34~89:	$5 \times 89 - 3 = 13 \times 34$	$89 - 5 = (34 - 13) \times 4$
8~21~55~144:	$8 \times 144 + 3 = 21 \times 55$	$144 - 8 = (55 - 21) \times 4$

Sorozatba illeszkedő szám-
csoportoknál is váltakozhat két szám
közötti összeadás és kivonás, mihelyt
azok egy másik szinten is megis-
métlődnek, amint az az **5-1** és az **5+1**,

valamint a **8-2** és a **8+2**, és az utánuk
követezőknél megfigyelhető:

$$\begin{aligned}
 2 \times 2 &= \mathbf{4} = 3 + 1 = \underline{5-1} \\
 2 \times 3 &= \mathbf{6} = \underline{5+1} = \underline{\mathbf{8-2}} \\
 2 \times 5 &= \mathbf{10} = \underline{\mathbf{8+2}} = 13-3 \\
 2 \times 8 &= \mathbf{16} = 13+3 = \underline{21-5} \\
 2 \times 13 &= \mathbf{26} = \underline{21+5} = \mathbf{34-8} \\
 2 \times 21 &= \mathbf{42} = \mathbf{34+8} = \underline{\underline{55-13}} \\
 2 \times 34 &= \mathbf{68} = \underline{\underline{55+13}} = 89-21
 \end{aligned}$$

Néhány agyafúrt furcsaság. Ha az 1~,
2~, 3~, 5~, 8-ból az első három
számot egybeírva hozzáadjuk a
tovább lépéssel keletkező másik három
számhoz, megkapjuk a harmadik
három elemből álló számcsoporthot.

$$\begin{array}{r}
 123+ \\
 \underline{235=} \\
 358
 \end{array}$$

(Meg lehet próbálni a $12+23+35+58$ -
cal, de ugyanezt „tudja” a
 $1321+2134=3455$ vagy a
 $2134+3455=5589$ is. Érvényes rájuk
az első négyszámjegy-szabály.)

Kombinációk a sorozat első és
második öt számjegy-csoportjával
(érvényes rájuk is a négyszámjegy-
szabály):

~ 12 ~ 23 ~ 35 ~ 58 ~
~ 21 ~ 32 ~ 53 ~ 85 ~
~ 22 ~ 33 ~ 55 ~ 88 ~
~ $21-2=199$ ~ $34-3=31$ ~ $55-5=50$ ~
89-8=81 ~
~ $13+3=16$ ~ $21+1=22$ ~ $34+4=38$ ~
55+5=60 ~ $89+9=98$
~ 133 ~ 211 ~ 344 ~ 555 ~ 899 ~

Különben maga a **23**-as szám sorozata is meglepő sajátosságokat mutat. Ha leírjuk az eredeti Fibonacci-sor első 10 számát, látjuk, hogy abból öt egyjegyű és öt kétjegyű szám.

Továbbá azt is, hogy az egyjegyű számok megismétlődnek a kétjegyűek első számjegyeként: **13 ~ 21 ~ 34 ~ 55 ~ 89**. (Maga a 23 a 2 és a 3 egymáshoz kapcsolása.)

Ha az első öt egyjegyű számot: **1 ~ 2 ~ 3 ~ 5 ~ 8**, sorra hozzáadjuk (négyes ugrással) a második öthöz: **13 ~ 21 ~ 34 ~ 55 ~ 89**, megkapjuk az~ **1+13=14 ~ 2+21=23 ~ 3+34=37 ~ 55+5=60 ~ 89+8=97 ~** sorozatot.

ZÖKKENŐVEL INDULÓ SOROZATOK

De kivonással a **23**-tól és 14-től visszafelé felbukkan a **~ 9 ~ 5 ~ 4 ~ 1 ~** is, ami éppen a **~ 89 ~ 55 ~ 34 ~** és a **21** második számjegye. (Az 1-et és a 4-et megelőzi a „misztikus” **13**-ból a *három*, vele így indíthatunk: $3+1=4$; $4+1=5$; $5+4=9$. Ebben az esetben az első számjegy nagyobb a másodiknál, rendhagyó volta nem más, mint zökkenővel induló sorozat.

Jellemző erre a tíz számból álló sorozatra (amely tovább folytatva szabályos számsort képez), hogy a négyszámjegy-szabály két első

változatát kielégíti, illetve a
háromszámjegy-szabály $axc=b^2\pm 1$
képletet nem, csak annak $axc=b^2\pm 11$
változatát. (Ez utóbbi ± 11 szintén
kimaradt a korábbi levezetésekből.)

Továbbá, hogyha nem az 1-gyel
és 4-gyel, hanem a nagyobb 3-mal és
a nála kisebb 1-gyel indítjuk a
sorozatot: $3 \sim 1 \sim 4 \sim 5 \sim 9 \sim 14$,
vagyis „zökkenővel”, akkor az előbb
említett három szabályszerűség
mindenikét teljesíti a számsor.
Ellenőrizve a négyszámjegy-szabályt:

$$\begin{aligned} 3 \times 5 &= 15; 15 + 1^2 + 16; 4^2 = 16. \\ 1 \times 9 &= 9; 4^2 = 16; 9 + 16 = 25; 5^2 = 25. \\ 4 \times 14 &= 56; 5^2 = 25; 56 + 25 = 81; 9^2 = 81 \end{aligned}$$

Zökkenővel induló sorozatot
eredményez a leválasztásos módszer
a három jegyű számoknál is, a **144 ~**
233 ~ 377 ~ 610 esetében kapjuk a **4**
~ 3 ~ 7 ~ 10 (~17 ~ 27 ~ 44 stb.)
számokat. Alkalmazhatók a
négyszámjegy-szabályok:

$$axd+b^2=c^2$$

$$4 \times 10 = 40 +$$

$$\frac{3 \times 3 = 9}{7 \times 7 = 49}$$

$$c^2 = (a^2 + d^2) : 2 - b^2 \rightarrow \rightarrow 7 \times 7 = 49 = (16 + 100) : 2 -$$

Ezekre is érvényes a háromszámjegy-
szabály, amely így módosul:

$$\mathbf{b^2 \pm 19 = axc.}$$

Ugyanezt a sorozatot kapjuk a kétjegyű számok számjegyeinek összeadásából is: $1+3=4$; $2+1=3$;
 $3+4=7$; $5+5=10$; $8+9=17$.

Zökkenővel induló további sorozatok:

$\sim 9 \sim 1 \sim 10 \sim 11 \sim 21 \sim 32$;
$\sim 9 \sim 2 \sim 11 \sim 13 \sim 24 \sim 37$;
$\sim 9 \sim 3 \sim 12 \sim 15 \sim 27 \sim 42$;
$\sim 9 \sim 4 \sim 13 \sim 17 \sim 30 \sim 47$;
$\sim 9 \sim 5 \sim 14 \sim 19 \sim 33 \sim 52$;
$\sim 9 \sim 6 \sim 15 \sim 21 \sim 36 \sim 57$;
$\sim 9 \sim 7 \sim 16 \sim 23 \sim 39 \sim 62$;
$\sim 9 \sim 8 \sim 17 \sim 25 \sim 42 \sim 67$;

Ugyanígy keletkeznek sorozatok a
 $\sim 8 \sim 1 \sim 9 \sim 10 \sim 19$; illetve a:
 $\sim 7 \sim 1 \sim 8 \sim 9 \sim 17 \sim$; stb. esetében.

Meg lehet vizsgálni a „zökkenővel” kezdődő sorozatok képletváltozását, azaz, miben különböznek a mégis azonos eredménnyel szolgáló szabályok. Az eredeti összefüggés, a $a \sim b \sim c \sim d$ sorozat szabálya: **$axd + b^2 = c^2$** . A „zökkenővel” induló sorozat: **$b \sim a \sim c \sim d_1$** . Ennek a négyszámjegy-szabálya: **$bx d_1 + a^2 = c^2$** . Ebben az esetben a **c^2** állandó, de: **$b - a = d - d_1$** . „Zökkenős” sorozatok alkothatók az eredeti számsor bármely, három egymást követő számaival, de az így előállított sorozatok is alkalmasak erre.

„Zökkenővel” induló sorozatok
képezhetők még az eredeti számsor
hármass csoportosításával is,
amelyekben helyet cserél a két első
szám:

$$\begin{array}{l}
 2 \sim 1 \sim 3 \sim 4^* \sim 7 \sim 11 \sim; \\
 3 \sim 2 \sim 5 \sim 7^* \sim 12 \sim 19; \\
 5 \sim 3 \sim 8 \sim 11^* \sim 19 \sim 30; \\
 8 \sim 5 \sim 13 \sim 18^* \sim 31 \sim 49; \\
 13 \sim 8 \sim 21 \sim 29^* \sim 50 \sim 79; \\
 21 \sim 13 \sim 34 \sim 47^* \sim 81 \sim 128;
 \end{array}$$

Itt is érvényes a négyszámjegy-
szabály:

$$\begin{array}{cccc}
 2 \times 4 = 8 + & 3 \times 7 = 21 + & 5 \times 11 = 55 + & 8 \times 18 = 144 + \\
 \frac{1^2 = 1}{3^2 = 9} & \frac{3^2 = 9}{5^2 = 25} & \frac{5^2 = 25}{8^2 = 64} & \frac{8^2 = 64}{13^2 = 169} \\
 & 13 \times 29 = 377 + & 21 \times 47 = 987 + & \\
 & \frac{13^2 = 169}{21^2 = 441} & \frac{21^2 = 441}{34^2 = 1156} &
 \end{array}$$

Azért figyelemre méltók a fenti vizsgálatok, mert kiderül, hogy az eredeti számsor (8-cal induló) minden második elemét osztani lehet az eredeti (2-vel induló) számaival:

$$\begin{aligned}8/2 &= 4; \\ 21/3 &= 7; \\ 55/5 &= 11; \\ 144/8 &= 18; \\ 377/13 &= 29; \\ 987/21 &= 47; \\ 377:13 &= 29^*; \\ 987:21 &= 47^*.\end{aligned}$$

Ugyanakkor külön sorozatokat is rejtenek a hármas csoportosítás függőleges oszlopait nézve, mint:

$$4^* \sim 7^* \sim 11^* \sim 18^* \sim 29^* \sim 47^*;$$

$$5 \sim 7 \sim 12 \sim 19 \sim 31 \sim 50 \sim 81;$$

$$8 \sim 11 \sim 19 \sim 30 \sim 49 \sim 79;$$

SZABÁLYOS SZABÁLYTALANSÁGOK

Önmagukra még így reflektálnak a kétjegyű számok: amint kivonjuk a második számjegyeket az elsőkből, kapjuk a $\sim -2 \sim -1 \sim 1 \sim 0 \sim 1 \sim$ sorozatot, amelynek folytatása $\sim 1 \sim 2 \sim 3 \sim 5 \sim$ stb. A hároszámjegy-szabály állandója a ± 1 .

De az utolsó kétjegyű (89) és az első háromjegyű (144) szám utolsó számjegyeivel is indítható sorozat: $9 \sim 4 \sim 13 \sim 17 \sim 30 \sim 47$; érvényesek a négyszámjegy-szabályok, azonban a

háromszámjegy-szabály állandója

± 101 lesz.

$$(axd + b^2 = c^2)$$

$$\begin{array}{r} 9 \times 17 = 153 + \\ \underline{4^2 = 16} = \\ 13^2 = 169 \end{array}$$

$$(axc \pm 101 = b^2)$$

$$\begin{array}{r} 9 \times 13 = 117 - \\ \underline{101} = \\ 4^2 = 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \times 17 = 68 + \\ \underline{101} = \\ 13^2 = 169 \end{array}$$

Ha összeadjuk a **89**-et követő első három háromjegyű szám számjegyeit, az eredmény: $\sim 1+4+4=9 \sim 2+3+3=8 \sim 3+3+7=17 \sim$. (Folytatásként: $\sim 25 \sim 42 \sim 67 \sim$ stb.) Alkalmazhatók a

négyszámjegy-szabályok. Viszont a
háromszámjegy-szabály állandója
éppen: **±89** lesz. Amire még az teszi
fel az aranykoronát, hogy a $17^2=2\mathbf{89}$.
(Hozzá társul a sorozatból a
 $67^2=44\mathbf{89}$.) Ellenőrizve:

$$(axd+b^2=c^2)$$

$$\begin{array}{r} 9 \times 25 = 225 + \\ \underline{8^2 = 64} = \\ 17^2 = 289 \end{array}$$

$$(axc \pm 89 = b^2)$$

$$\begin{array}{r} 9 \times 17 = 153 - \\ \underline{89} = \\ 8^2 = 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \times 25 = 200 + \\ \underline{89} = \\ 17^2 = 289 \end{array}$$

Furcsa módon alkalmazható a
négyszámjegy szabály úgy is, ha

előbb a kétjegyű számokhoz
 hozzáadjuk számjegyeik szorzatát,
 majd azokból párosával sorozatot
 indítunk: $13+1\times3=16$; $21+2\times1=23$;
 $34+3\times4=46$; $55+5\times5=80$; $89+8\times9=161$.

$$\mathbf{16+23=39; 23+39=62;}$$

$$\mathbf{39+62=101.}$$

Ellenőrizve:

$$\begin{array}{r} 16 \times 62 = 992 + \\ \underline{23^2 = 529} = \\ 39^2 = 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \times 101 = 2323 + \\ \underline{39^2 = 1521} = \\ 62^2 = 3844 \end{array}$$

$$\mathbf{23+46=69; 46+69=115; 115+69=184.}$$

Ellenőrizve:

$$\begin{array}{r} 23 \times 115 = 2645 + \\ \underline{46^2 = 2116} = \\ 69^2 = 4761 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \times 184 = 8464 + \\ \underline{69^2 = 4761} = \\ 115^2 = 13225 \end{array}$$

$$\mathbf{46+80=126; 80+126=206;}$$

$$\mathbf{126+206=332.}$$

Ellenőrizve:

$$\begin{array}{r} 46 \times 206 = 9476 + \\ \underline{80^2 = 6400} = \\ 126^2 = 15876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \times 332 = 26560 + \\ \underline{126^2 = 15876} = \\ 206^2 = 42436 \end{array}$$

Azzal a számsorral sem lépünk ki az eddigi képletek hatálya alól, ha a kétjegyű számokhoz hozzáadjuk saját

számjegyeiket: $13+1+3=17$;

$21+2+1=24$; $34+3+4=41$; $55+5+5=65$;

$89+8+9=106$. (A háromszámjegy-

szabály állandója ± 121 .) Több

változata létezik a fenti módszernek,

közülük a következő a számsor

egyjegyű számainak a kilenccel való

szorzata: $13-(1+3)=9$; $21-(2+1)=18$;

$34-(3+4)=27$; $55-(5+5)=45$;

$89-(8+9)=72$. Rájuk is illik a
négy számjegy-szabály:

$$\begin{array}{l} 9 \times 45 = 405 + \\ \underline{18^2 = 324 =} \\ 27^2 = 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 18 \times 72 = 1296 + \\ \underline{27^2 = 729 =} \\ 45^2 = 2025 \end{array}$$

Érdekes, hogy az öt szám közül az utolsó a 72, első a 9, közöttük pedig ott a 27. (Ugyanaz a két számjegy fordított sorrendben.) Hatványra emelve a 27 egyenlő lesz 729-cel. (Háromszámjegy-szabály szerűség.) Hároszámjegy-szabálynál a $\pm 81 = 9^2$.

Ellenőrzése:

$$\begin{array}{l} 9 \times 27 = 243 \sim 18^2 = 324 \sim 324 - 243 = \mathbf{81}; \\ 18 \times 45 = 810 \sim 27^2 = 729 \sim 810 - 729 = \mathbf{81}; \\ 27 \times 72 = 1944 \sim 45^2 = 2025 \sim 2025 - 1944 = \mathbf{81}. \end{array}$$

$$9 \times 72 = 648; 27^2 = 729; 729 - 648 = 81.$$

Ez egy **átugrásos ötszámjegy-szabály**, ami a háromszámjegy-szabály párja, mert együtt:

$axe = c^2 \pm 1 = bxd$. Egyszerűsítve, a **c^2** nélkül: **$axe \pm 1 = bxd \pm 1$** ; **$axe - 1 = bxd + 1$** ;
 $axe + 1 = bxd - 1$.

Azonos a plusz-mínusz a háromszámjegy-szabály és az átugrásos ötszámjegy-szabály szerint olyan sorozatnál is, amit a 89 után következő három háromjegyű szám első számjegyének elhagyásával nyerünk:

$$144 \sim 233 \sim 377: \gg \gg \quad \underline{44} \sim \underline{33} \\ \sim \underline{77} \sim \underline{110} \sim \underline{187} \sim \underline{297}.$$

$$\begin{array}{r} 44 \times 77 = 3388 - \\ \underline{33^2 = 1089} \\ 2299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \times 187 = 8228 - \\ \underline{77^2 = 5929} \\ 2299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110^2 = 12100 - \\ \underline{33 \times 297 = 9801} \\ 2299 \end{array}$$

Szorzással-kivonással induló és
hatványokig érkező két számtömb:

$1 \times 2 = 2$	$\gg 6 - 2 = 4 = 2^2$
$2 \times 3 = 6$	$\gg 9 -$
$4 = 1 \times 5$	
$\gg 15 - 6 = 9 = 3^2$	
$3 \times 5 = 15$	$\gg 25 -$
$9 = 16 = 2 \times 8$	
$\gg 40 - 15 = 25 = 5^2$	
$5 \times 8 = 40$	$\gg 64 -$
$25 = 39 = 3 \times 13$	
$\gg 104 - 40 = 64 = 8^2$	
$8 \times 13 = 104$	$\gg 104 -$
$64 = 105 = 5 \times 21$	
$\gg 273 - 104 = 169 = 13^2$...	
$13 \times 21 = 273$...	$\gg 441 -$
$169 = 272 = 8 \times 34$	
$\gg 714 - 273 = 441 = 21^2$	
$21 \times 34 = 714$...	

$$2 \times 3 - 1 \times 2 = 2^2$$

$$3 \times 5 - 2 \times 3 = 3^2$$

$$5 \times 8 - 3 \times 5 = 5^2$$

$$8 \times 13 - 5 \times 8 = 8^2$$

$$(*) \quad 3^2 - 2^2 = 1 \times 5$$

$$5^2 - 3^2 = 2 \times 8$$

$$8^2 - 5^2 = 3 \times 13$$

$$13^2 - 8^2 = 5 \times 21$$

$$8:2-1=3$$

$$8:2+1=5$$

$$(2 \times 2^2=8)$$

$$34:2-2^2=13$$

$$34:2+2^2=21$$

$$(2 \times 17=34)$$

$$144:2-17=55$$

$$144:2+17=89$$

$$(2 \times 72=144)$$

$$610:2-72=233$$

$$610:2+72=377$$

$$(2 \times 305=610)$$

$$2584:2-305=987$$

$$2584:2+305=1597$$

$$(2^3+3^2=17)$$

$$(2^3 \times 3^2=72)$$

$$(8:2=4)$$

$$4-1=3$$

$$4+1=5$$

$$(34:2=17)$$

$$17-4=13$$

$$17+4=21$$

$$(144:2=72)$$

$$72-17=55$$

$$72+17=89$$

$$(610:2=305)$$

$$305-72=233$$

$$305+72=377$$

$$(2584:2=1292)$$

$$1292-305=987$$

$$1292+305=1597$$

Stb.

Rációt kerülget a fenti két számoszlop.

Szintén zsonglőr szerű akrobatikával
lep meg a következő számtömb,
lűktetése annyira lenyűgöző, hogy
muszáj hosszabban felírni, továbbá
hozzátenni még három rokonát,
amelyet egy szabadabb variációjú
követ:

$$2 \times 2 - 1 = \mathbf{3}$$

$$2 \times 2 + 1 = \mathbf{5}$$

$$2 \times 3 - 1 = \mathbf{5}$$

$$2 \times 3 + 2 = \mathbf{8}$$

$$2 \times 5 - 2 = \mathbf{8}$$

$$2 \times 5 + 3 = \mathbf{13}$$

$$2 \times 8 - 3 = \mathbf{13}$$

$$2 \times 8 + 5 = \mathbf{21}$$

$$2 \times 13 - 5 = \mathbf{21}$$

$$2 \times 13 + 8 = \mathbf{34}$$

$$2 \times 21 - 8 = \mathbf{34}$$

$$2 \times 21 + 13 = \mathbf{55}$$

$$2 \times 34 - 13 = \mathbf{55}$$

$$2 \times 34 + 21 = \mathbf{89}$$

$$2 \times 55 - 21 = \mathbf{89}$$

$$2 \times 55 + 34 = \mathbf{144}$$

$$2 \times 89 - 34 = \mathbf{144}$$

$$2 \times 89 + 55 = \mathbf{233}$$

$$2 \times 144 - 55 = \mathbf{233}$$

$$2 \times 144 + 89 = \mathbf{377}$$

$$8 \times 3 - 3 = 21$$
$$8 \times 3 + 2 \times 5 = 34$$

$$8 \times 5 - 2 \times 3 = 34$$
$$8 \times 5 + 3 \times 5 = 55$$

$$8 \times 8 - 3 \times 3 = 55$$
$$8 \times 8 + 5 \times 5 = 89$$

$$8 \times 13 - 3 \times 5 = 89$$
$$8 \times 13 + 5 \times 8 = 144$$

$$8 \times 21 - 3 \times 8 = 144$$
$$8 \times 21 + 3 \times 13 = 233$$

$$5 \times 3 - 2 = 13$$
$$5 \times 3 + 2 \times 3 = 21$$

$$5 \times 5 - 2 \times 2 = 21$$
$$5 \times 5 + 3 \times 3 = 34$$

$$5 \times 8 - 2 \times 3 = 34$$
$$5 \times 8 + 3 \times 5 = 55$$

$$5 \times 13 - 2 \times 5 = 55$$
$$5 \times 13 + 3 \times 8 = 89$$

$$5 \times 21 - 2 \times 8 = 89$$
$$5 \times 21 + 3 \times 13 = 144$$

$$3 \times 2 - 1 = 5$$
$$3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$$

$$3 \times 3 - 1 = 8$$
$$3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$$

$$3 \times 5 - 2 = 13$$
$$3 \times 5 + 2 \times 3 = 21$$

$$3 \times 8 - 3 = 21$$
$$3 \times 8 + 2 \times 5 = 34$$

$$3 \times 13 - 5 = 34$$
$$3 \times 13 + 2 \times 8 = 55$$

$$2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

$$2 \times 3 - 1 \times 1 = 5$$

$$2 \times 5 - 1 \times 2 = 8$$

$$3 \times 5 - 1 \times 3 = 13$$

$$3 \times 8 - 1 \times 3 = 21$$

$$5 \times 8 - 2 \times 3 = 34$$

$$8 \times 8 - 3 \times 3 = 55$$

$$8 \times 13 - 3 \times 5 = 89$$

$$8 \times 21 - 3 \times 8 = 144$$

$$13 \times 21 - 5 \times 8 = 233$$

$$13 \times 34 - 5 \times 13 = 377$$

$$21 \times 34 - 8 \times 13 = 610$$

$$21 \times 55 - 8 \times 21 = 987$$

**A 2-vel való szorzás ötszámjegy-
szabályt eredményez: $2 \times b + a + c = e$**

$$\begin{aligned} 2 \times 2 + 1 + 3 &= \mathbf{8} \\ 2 \times 3 + 2 + 5 &= \mathbf{13} \\ 2 \times 5 + 3 + 8 &= \mathbf{21} \\ 2 \times 8 + 5 + 13 &= \mathbf{34} \\ 2 \times 13 + 8 + 21 &= \mathbf{55} \\ 2 \times 21 + 13 + 34 &= \mathbf{89} \end{aligned}$$

KÉT PRÍMSZÁMUNK: a **7** és a **11** is
bevonható az aranymetszés sorozat
alakításába:

$$\begin{aligned} 7 \times 5 - 1 &= \mathbf{34} \\ 7 \times 8 - 1 &= \mathbf{55} \\ 7 \times 13 - 2 &= \mathbf{89} \\ 7 \times 21 - 3 &= \mathbf{144} \\ 7 \times 34 - 5 &= \mathbf{233} \\ 7 \times 55 - 8 &= \mathbf{377} \\ 7 \times 89 - 13 &= \mathbf{610} \end{aligned}$$

$$2 \times 11 - 1 = 21$$

$$21 \times 11 + 2 = 233$$

$$3 \times 11 + 1 = 34$$

$$34 \times 11 + 3 = 377$$

$$5 \times 11 + 0 = 55$$

$$55 \times 11 + 5 = 610$$

$$8 \times 11 + 1 = 89$$

$$89 \times 11 + 8 = 987$$

$$13 \times 11 + 1 = 144$$

$$144 \times 11 + 13 = 1597$$

Ismétlés: Ilyen érdekes,
önszerveződő számtömbök arra
szolgálhatnak, hogy zeneművek belső
tagoltságát többféle szakaszolással
lehessen elemezni, például, ha **55**
egységből áll, ahány változatban
előfordult a fentiekben az **55**, annyi
részegység szerint lehet vizsgálni.

Jöjjön pár példa:

$$\begin{aligned}8 \times 5 + 5 \times 3 &= \mathbf{55}; \\8 \times 5 + 3 \times 5 &= \mathbf{55}; \\5 \times 8 + 3 \times 5 &= \mathbf{55}; \\5 \times 8 + 5 \times 3 &= \mathbf{55}; \\2 \times 21 + 13 &= \mathbf{55}; \\2 \times 34 - 13 &= \mathbf{55}; \\2^2 \times 13 + 3 &= \mathbf{55}; \\3 \times 13 + 2 \times 8 &= \mathbf{55}\end{aligned}$$

Így is tagolható az **55**, ezekből a változatokból az a szerencsésebb, amelyik (esetleg több) számtömbből származik.

**

*

Valamikor egy tudományos adást
követve megjegyeztem egy
párbeszédet, miszerint egy
matematikus összeállította a
prímszámok grafikonját, amit
ebédszünetben megmutatott egy
fizikusnak, aki felismerte benne az
elektronpályák szabályszerűségeit.
Amennyiben a prímszámok sorozata
az atomi szintű világhoz tartozik, a
Fibonacci számsor egy
nagyságrenddel nagyobb
mozgásformákhoz tartozik, sőt a
psziché folyamataiban is felbukkan,
annak valamilyen leképezése.

A négyszámjegy-szabály kerete ráillik a szabályos mértani testek elemeinek összegezésére. Például a szabályos mértani testek jellemzői is sorba állíthatók a kiterjedés növekvő sorrendje szerint: kezdve a kiterjedés nélküli Csúcsoktól, az egydimenziós Éleken, majd a kétdimenziós Lapokon át a háromdimenziós Testig, ami a következő „egyenlettel” írható le: C-É+L-T=1 (ami kocka esetében: **8-12+6-1=1**). Itt az egydimenziós él és a háromdimenziós test előtt áll a negatív előjel, a másik két alkotó elem (pozitív szám és) pozitív előjelű, együtt szintén (egymásba ékelődő) két ellentétes

ellentétpárként viselkednek. Az a szabályszerűség, ami a szabályos mértani testek elemeinek három dimenziós rendezettségében kimutatható, egy harmadik megnyilvánulásban, a lélek dimenzióiban lezajló történéseknél sincs másként.

C. G. Jung az **Analitikus pszichológiájában** leírja, hogy „*A tudattalan a természet, és a természet soha nem hazudik*”. (208) Továbbá a négyes tagoltságról (amely szerinte **3+1**) a következő a véleménye: „*A kvaternitás olyan archetípus, amely úgyszólván univerzális jelenség.*”

*Logikus előfeltétele mindennemű
teljességigénynek. Ha ilyen ítéletet
akarunk alkotni, annak négyes
aspektusúnak kell lennie. Ha például a
horizont egészét akarjuk
meghatározni, akkor a négy égtájat
nevezzük meg. Mindig négy elem van,
négy elsődleges minőség, négy szín,
négy kaszt Indiában, négy utat ismer a
buddhizmus a szellemi fejlődés
lehetőségeit illetően. Ezért a
pszichikus orientálódásnak is négy
pszichológiai aspektusa van, ezeken
túl semmi alapvetőt nem lehet többé
kifejteni. Szükségünk van az
orientálódáshoz egy olyan funkciónak,*

*amely azt konstatálja, hogy valami van
(érzékelés), egy másodikra, amely
megállapítja, hogy mi az
(gondolkodás), egy harmadik
funkcióra, amely közli, hogy vajon
megfelel-e ez nekünk vagy sem,
elfogadjuk-e vagy sem (érzés) és egy
negyedik funkcióra, amely tájékoztat
róla, hogy a dolog honnan jött és
merre tart (intuíció). Ezen túlmenően
semmi többet nem lehet mondani. (...)
Egy kvaternitásnak vagy kvaterniónak
gyakran 3+1 a szerkezete,
amennyiben az egyik érték kivételes
helyet tölt be és eltérő jellegű. (...) Ha
a negyedik érték a másik háromhoz*

társul, létrejön az >>Egység<<, amely a teljességet jelképezi. Az analitikus pszichológiában nem ritka az >>alacsonyabb rendű<< funkció (vagyis az a funkció, amelyik nem áll az embernek tudatos rendelkezésére), amely ezt a >>negyedik<<-et testesíti meg. A szóban forgó funkció integrálása a tudatba az individuációs folyamat egyik fő feladata.” (1987; 444)

A kvaternitás teljességigényének megfelelő negyedik elem a négyszámjegy-szabályból a c^2 .

Valószínű, hogy a Fibonacci számsor
valamilyen titkos térépítő
programjának következménye lehet,
hogy tíz ujjunk van, illetve, mivel a
kezünktől tanultuk a tízes
számrendszert, emez ezért tud
ennyire idomulni a számsor
szeszélyeihez. Körré csukódó
adekvátságok.

*** Gyergyószentmiklós, 2017
szeptembere; 2019 májusa ***

Burján-Gál Emil *

FÜGGELÉK

Lajos Árpád aradi

számítástechnikus szíves munkájának

köszönhető a már megismert „**első**

négyszámjegy-szabálynak”, az

$axd+b^2=c^2$ képlenek a matematikai

levezetése, bizonyítása, átírata

(Facebookon közölve):

A bizonyítási eljárás egyik nagyon

kézenfekvő módszere ebben a

kérdéskörben a matematikai indukció.

Ennek a módszertani algoritmusnak a

lényege az, hogy ismerünk egy

képletet, amit igaznak sejtünk és

tudjuk, hogy bizonyos, véges

megfigyelés alapján az i -dik elemre

igaz a minta. Ezt ismerve, átlátva nekünk mindössze azt kell kétséget kizáróan kimutatnunk, hogy abból, hogy az i -dik elemre ráhúzható a minta kétséget kizáróan következik, hogy az $i+1$ - dik elem-re is ráhúzható a minta. Ebben is szívesen segíték. Ha ezeket a képleteket kimutatjuk, akkor a dolgozat már tudományosan publikálható lesz és érdemes megkérni valakit, hogy nézze meg, hogy a talált minták és képletek közül melyek innovációk és melyek voltak már felfedezve öntől függetlenül egy másik kutató által. Ezek után érdemes publikálni egy tudományos lapban az

eredményeket. Miután a képleteket előkészítettük egy korábbi kutatótársamat megkérhetem, hogy nézzon utána a képletek egyediségének. A számtömbök jelenlegi formájukban megfigyelések és nem tudom, hogy így lehet-e publikálni. Úgy vélem, hogy először kell a képleteket felírni és kidolgozni, utána ellenőrizni kell, hogy mi innováció és ez után válik tudományos eredménnyé. Ezért arra kérném, hogy válasszon egy példát, egy számtömböt, amit kielemezhetünk közösen, hogy vigyük végig azon a folyamaton, amelyben megfigyelésből

tudományos tényné válik. „Kezdjük az egyszerűbb négyszámjegy-szabály képlettel”. A szavakban leírt gondolati minta (azaz az első „**négyszámjegy-szabály**”) így néz ki:

$$F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = F(i + 2) * F(i + 2)$$

az i-dik szám a sorozatban szorozva a hárommal utána következővel, majd ezt összeadva az utána következő négyzetével megkapjuk a kettővel utána levő négyzetét.

legyen $i = 1$

$$F(i) = 1 \quad F(i + 1) = 2 \quad F(i + 2) = 3 \quad F(i + 3) = 5$$

$$F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = 1 * 5 + 2 * 2 = 9$$

$$F(i + 2) * F(i + 2) = 3 * 3 = 9$$

Most, hogy a mintát ismerjük, meg kell határozzuk, hogy milyen i -re várjuk el, hogy a minta működjön

Kipróbálom $i = 2$ -re is

$$F(i) = 2 \quad F(i + 1) = 3 \quad F(i + 2) = 5 \quad F(i + 3) = 8$$

$$F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = 2 * 8 + 3 * 3 = 25$$

$$F(i + 2) * F(i + 2) = 25$$

Eddig biztató a minta. Létezik néhány szolid megfigyelés, amire működik a sejtésünk szerinti minta, azt akarjuk megvizsgálni, hogy ha $F(i)$ -re igaz,

akkor ebből következik-e, hogy $F(i + 1)$ - re is igaz, mert ha ezt igazolni tudjuk, akkor a minta immár tudományos, általánosan érvényes tény a matematikai indukció elve alapján. A dolgozatban szerepel, hogy a Fibonacci sorozatról van szó abban a kontextusban, ha megemlíti, hogy F -el rövidíti a sorozat valahányadik elemét és azt, hogy a n - yadik elem függvényparaméterként adjuk át, akkor úgy gondolom, hogy érthető.

Tudjuk, hogy $F(i) * F(i + 3) + F(i + 1) * F(i + 1) = F(i + 2) * F(i + 2)$
azt szeretnénk bizonyítani, hogy ebből az következik, hogy

$$F(i + 1) * F(i + 4) + F(i + 2) * F(i + 2) = F(i + 3) * F(i + 3)$$

Induljunk ki az egyenlet bal oldalából és jussunk arra, hogy megegyezik a jobb oldallal (bizonyíték) vagy különbözik tőle (cáfolat).

$$\begin{aligned} F(i + 1) * F(i + 4) + F(i + 2) * F(i + 2) &= \\ &= F(i + 1) * F(i + 4) + F(i) * (F(i + 3) + F(i + 1)) + F(i + 1) * F(i + 1) = \\ &= F(i + 1) * [F(i + 4) + F(i + 1)] + F(i) * F(i + 3) = \\ &= F(i + 1) * [F(i + 2) + F(i + 3) + F(i + 1)] + F(i) * F(i + 3) \\ &= F(i + 1) * [F(i + 3) + F(i + 3)] + F(i) * F(i + 3) \\ &= 2 * F(i + 1) * F(i + 3) + F(i) * F(i + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= F(i + 3) * [2 * F(i + 1) + F(i)] \\
 &= F(i + 3) * [F(i + 1) + F(i + 1) + F(i)] \\
 &= F(i + 3) * [F(i + 1) * F(i + 2)] \\
 &= F(i + 3) * F(i + 3)
 \end{aligned}$$

Ez az, amit bizonyítani akartunk.

"Ugyanezzel a módszertannal valószínűleg az összes minta, vagy nagy többségük ellenőrizhető és bizonyítható vagy cáfolható." (2017.

Augusztus 13.)

("Jól néz ki, majd még kell szerkeszteni rajta, de az nem sürgős.")

A levezetéssel kapcsolatban röviden elmagyarázom a lépéseket.

Először felírtam a kiindulópontot, oda behelyettesítettem az $F(i + 2) * F(i + 2)$ értékének ismert mintáját, ami a korábbi megfigyelések alapján tényszerű.

Kiemeltem $F(i + 1)$ -etfelhasználtam, hogy $F(i + 2) + F(i + 1) = F(i + 3)$

Összevontam $F(i + 3) + F(i + 3) = 2F(i + 3)$ alapjánkiemeltem $F(i + 3)$ -mat a nagy zárójelben $2F(i + 1) + F(i) = F(i + 3)$, hiszen $F(i + 1) + F(i) = F(i + 2)$ és ezért $2F(i + 1) + F(i) = F(i + 2) + F(i + 1) = F(i + 3)$

Ezzel megkaptam, hogy a jobb oldali zárójel is $F(i + 3)$, azt szorozva a baloldali zárójellel, $F(i + 3)$ - mal

megkaptam az egyenlet jobb oldalát, tehát a sejtés beigazolódott, általános érvényű tudományos tény.

A többi esetben is hasonlóan kell eljárjunk, $F(i)$ függvényében felírjuk a mintát, majd a megfigyelésekből kiindulva igazoljuk azt, hogy egy i -dik elemre tetszőleges i esetén ha teljesül, akkor a következőre is teljesül, ezzel egy végtelen következtetési láncsal a bizonyítás a teljes feladatteret bejárja.

Az sem baj, ha egy mintáról kiderül, hogy nem helyes, akkor viszont rá lehet mutatni, hogy az összefüggés

csak látszólagos, az is fontos

tudományos eredmény.

A lényeg az, hogy minden felvetést
górcső alá kell vennünk és bármi is
legyen a kiértékelés eredménye, azzal
hasznos munkát végeztünk.

$$\begin{aligned} & F(i) \cdot F(i+3) + F^2(i+1) = F^2(i+2) \stackrel{?}{=} \\ \Rightarrow & F(i+1) \cdot F(i+4) + F^2(i+2) = F^2(i+3) \\ & F(i+1) \cdot F(i+4) + F^2(i+2) = \\ & = F(i+1) \cdot F(i+4) + F(i) \cdot F(i+3) + F^2(i+1) = \\ & = F(i+1) \cdot [F(i+4) + F(i+1)] + F(i) \cdot F(i+3) = \\ & = F(i+1) \cdot [F(i+2) + F(i+3) + F(i+1)] + F(i) \cdot F(i+3) = \\ & = F(i+1) \cdot [F(i+2) + F(i+3)] + F(i) \cdot F(i+3) = \\ & = 2 \cdot F(i+1) \cdot F(i+3) + F(i) \cdot F(i+3) = \\ & = F(i+3) \cdot [2 \cdot F(i+1) + F(i)] = \\ & = F(i+3) \cdot [F(i+1) + F(i+1) + F(i)] = \\ & = F(i+3) \cdot [F(i+1) + F(i+2)] = \\ & = F(i+3) \cdot F(i+3) = \\ & = F^2(i+3) \end{aligned}$$

**Megjelent a Mark House Kft. Támogatásával 2017-
ben;**

Második kiadás: 2019



9 789730 299045